



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE  
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO  
POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN MECATRÓNICA

# **Sistema Háptico de Conducción por Cable del Tren de Dirección de un Automóvil**

Tesis que presenta:

**Miguel Darío Domínguez Castaño**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis:

**Dr. Alejandro Rodríguez Ángeles**

**Dr. Hebertt Sira Ramírez**

México D.F. 28 de enero de 2015

# Dedicatoria

*A mis padres y hermanos*



# Agradecimientos

- ♣ Al Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica del CINVESTAV, por brindarme la oportunidad de compartir conocimientos y experiencias.
- ♣ Al Dr. Alejandro Rodríguez Ángeles y al Dr. Hebertt Sira Ramirez por todo su apoyo y recomendaciones para la realización de este trabajo.
- ♣ Al auxiliar en investigación Jesús Bañuelos Gonzáles.
- ♣ Al pueblo de México, que a través de CONACyT me brindó el soporte económico para realizar este trabajo.



# Resumen

Este trabajo describe un sistema háptico de conducción por cable en un sistema de dirección de un automóvil. Se utiliza Rechazo Activo de Perturbaciones (RAP) basado en observadores del tipo Proporcional Integral Generalizado de alta ganancia (GPI por sus siglas en inglés). El observador GPI permite la reconstrucción de los errores de posición y velocidad, y de la entrada de perturbación y un número de sus derivadas en el tiempo, en dicha entrada de perturbación son agrupadas las dinámicas no modeladas, parámetros inciertos y las no linealidades desconocidas. El esquema es el de un sistema maestro-esclavo, en el cual el esclavo (la rueda) sigue una referencia angular de orientación, definida por el volante del maestro, mientras que la estimación de los esfuerzos de control del esclavo, debidos al torque y no-linealidades no modeladas, son añadidos a las perturbaciones del maestro quien así percibe los efectos de realimentación háptica. Este trabajo considera el torque de autoalineación y sus efectos en la rueda, este torque ocurre cuando la orientación del vehículo difiere del eje longitudinal del chasis del carro. Para obtener las diferentes variables y coeficientes presentes en el torque de autoalineación se hizo uso de una Unidad de Medida Inercial (IMU por sus siglas en inglés). La IMU se utilizó para medir el ángulo de inclinación y el ángulo de deslizamiento, necesarios para obtener el torque de autoalineación. Se presentan resultados experimentales llevados a cabo sobre una plataforma experimental incluyendo un soporte de rodillos que posibilita el direccionamiento y tracción de la rueda.

---

# Abstract

This work describes a vehicle steering by wire haptic system based on disturbance rejection control techniques, the disturbance input are the no modeled dynamics, uncertain parameters and no modeled nonlinear signals. Such disturbance is estimated by a high gain Generalized Proportional Integral (GPI) observer. The GPI observer allows the reconstruction of the position and velocity errors and the disturbance input and a number of its time derivatives. To provide the haptic interface with the driver, the estimated disturbance effects at the steering rack are fed back to the steering wheel. A bilateral master-slave system is considered, being a conventional steering wheel, the master and the steering rack as the slave. In this work, the self-aligning torque is considered into the dynamics of the system. This phenomenon occurs while a vehicle is curving, tire forces acting on the steering systems tend to resist steering motion away from the straight-ahead position. To obtain the different variables and coefficients present in the self-aligning torque an Inertial Measurement Unit (IMU) was used. The IMU provides measurements of the camber angle and the slip angle, necessities to get the self-aligning torque. Experimental results are presented on an experimental platform that consists on a half of the steering rack of a beetle VW vehicle and a steering wheel. For this work a traction system has been implemented on the tire of the experimental platform for more realistic experiments.





# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| Dedicatoria  | I         |
| Agradecimientos  | III       |
| Resumen  | V         |
| Abstract   | VII       |
| Índice de figuras  | X         |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1. Sistemas por cable  | 3         |
| 1.1.1. Freno por cable   | 4         |
| 1.1.2. Sistema de dirección por cable                                  | 4         |
| 1.2. Interfaz háptica  | 7         |
| 1.3. Torque de autoalineación  | 7         |
| 1.4. Antecedentes y estado del arte                                    | 7         |
| 1.5. Planteamiento del problema  | 9         |
| 1.6. Objetivos   | 9         |
| 1.7. Organización del Documento  | 10        |
| <b>2. Preliminares</b>   | <b>11</b> |
| 2.1. Modelo de bicicleta   | 11        |
| 2.2. Momento de Auto-alineación  | 15        |
| 2.2.1. Ángulo de deslizamiento, fuerza lateral y rigidez en las curvas | 16        |
| 2.2.2. Ángulo de inclinación   | 18        |
| 2.2.3. Fuerza lateral total  | 19        |
| 2.2.4. Rastro Neumático  | 19        |
| 2.3. Orientación de un cuerpo rígido                                   | 20        |
| 2.4. Modelo Ultra local  | 20        |
| 2.5. Observador de Alta Ganancia GPI                                   | 22        |
| 2.6. Control por Rechazo Activo de Perturbaciones                      | 25        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3. Plataforma experimental</b>   | <b>27</b> |
| 3.1. Modelos dinámicos . . . . .  | 29        |
| 3.1.1. Subsistema maestro . . . . .   | 29        |
| 3.1.2. Subsistema esclavo . . . . .   | 31        |
| 3.2. Controlador y Observador de Alta Ganancia GPI . . . . .                | 32        |
| 3.2.1. Volante de dirección . . . . .                                       | 32        |
| 3.2.2. Rack de dirección . . . . .  | 35        |
| 3.3. Adquisición de datos: Unidad de Medición Inercial . . . . .            | 38        |
| 3.4. Tratamiento de señal de la Unidad de Medición Inercial . . . . .       | 40        |
| 3.5. Comunicación . . . . .   | 42        |
| <b>4. Resultados Experimentales</b>   | <b>45</b> |
| 4.1. Resultados experimentales sin perturbaciones tipo impulsivas . . . . . | 47        |
| 4.1.1. Experimento sin tracción . . . . .                                   | 47        |
| 4.1.2. Experimento con tracción . . . . .                                   | 49        |
| 4.2. Resultados experimentales con perturbaciones tipo impulsivas . . . . . | 52        |
| 4.2.1. Experimento sin tracción . . . . .                                   | 52        |
| 4.2.2. Experimento con tracción . . . . .                                   | 55        |
| 4.3. Torque de autoalineación . . . . .                                     | 58        |
| <b>5. Conclusiones y perspectivas</b>                                       | <b>65</b> |
| 5.1. Conclusiones . . . . .   | 65        |
| 5.2. Perspectivas . . . . .   | 66        |
| <b>A. Código en Matlab</b>  | <b>67</b> |
| <b>B. Modelo de vehículo completo linealizado</b>                           | <b>75</b> |
| <b>C. Circuitos de amplificación</b>  | <b>79</b> |
| <b>D. Artículos publicados</b>  | <b>81</b> |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Frenos por cable [1] . . . . .   | 4  |
| 1.2. Sistema de dirección convencional [2] . . . . .  | 5  |
| 1.3. Sistema de dirección por cable [3] . . . . .   | 6  |
| 2.1. Esquema del modelo de bicicleta . . . . .  | 11 |
| 2.2. a) Esquema de un vehículo simple. b) Plano de la rueda . . . . .   | 12 |
| 2.3. Ángulo <i>caster</i> y su proyección . . . . .   | 14 |
| 2.4. Terminología de ejes, SAE [4] . . . . .  | 16 |
| 2.5. Ángulo de deslizamiento y fuerza lateral . . . . .   | 17 |
| 2.6. Ángulo de inclinación e inclinación de <i>kingpin</i> . . . . .  | 18 |
| 2.7. Diagrama de fuerzas, distancias y ángulos presentes en la huella de contacto del neumático . . . . .               | 19 |
| 3.1. Subsistema volante de dirección . . . . .  | 28 |
| 3.2. a) Mecanismo para proveer tracción b) Rack de dirección: un cuarto de suspensión . . . . .                         | 29 |
| 3.3. esquema subsistema volante de dirección . . . . .  | 29 |
| 3.4. esquema subsistema rack de dirección . . . . .   | 31 |
| 3.5. X-bus Master y Unidad de Medición Inercial. . . . .  | 38 |
| 3.6. Palabra de configuración: estándar y extendida. . . . .  | 39 |
| 3.7. Estructura de la palabra para el modo de configuración . . . . .   | 39 |
| 3.8. Cuantificación del ángulo de guiñada y balanceo . . . . .  | 41 |
| 3.9. Cuantificación del ángulo de cabeceo . . . . .   | 42 |
| 3.10. Diagrama de comunicación . . . . .  | 43 |
| 3.11. Bloques en Simulink <sup>®</sup> : Lectura, transformación y puerto paralelo . . . . .                            | 43 |
| 4.1. Diagrama de plataforma experimental . . . . .  | 46 |
| 4.2. Posición actual vs deseada sin tracción en la rueda . . . . .  | 47 |
| 4.3. Trayectoria observada contra trayectoria real sin tracción en la rueda . . . . .                                   | 47 |
| 4.4. Error de seguimiento de trayectoria $e_s$ sin tracción en la rueda . . . . .                                       | 48 |
| 4.5. Perturbación estimada $\hat{\sigma}_s(t)$ retroalimentada al subsistema maestro sin tracción en la rueda . . . . . | 48 |
| 4.6. Voltaje de control sin tracción en la rueda . . . . .  | 49 |

|   |    |
|---|----|
| 4.7. Posición actual vs deseada con tracción en la rueda . . . . .  | 49 |
| 4.8. Trayectoria observada contra trayectoria real con tracción en la rueda . . . . .   | 50 |
| 4.9. Error de seguimiento de trayectoria $e_s$ con tracción en la rueda . . . . .   | 50 |
| 4.10. Perturbación estimada $\hat{\sigma}_s(t)$ retroalimentada al subsistema maestro con tracción en la rueda . . . . .                                    | 51 |
| 4.11. Voltaje de control con tracción en la rueda . . . . .   | 51 |
| 4.12. Posición actual vs deseada sin tracción sin tracción, con perturbaciones tipo impulsivas . . . . .  | 52 |
| 4.13. Trayectoria observada contra trayectoria real sin tracción con perturbaciones tipo impulsivas . . . . .   | 53 |
| 4.14. Error de seguimiento de trayectoria $e_s$ sin tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas. . . . .  | 53 |
| 4.15. Perturbación estimada $\hat{\sigma}_s(t)$ retroalimentada al subsistema maestro sin tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas . . . . . | 54 |
| 4.16. Voltaje de control $V_s(t)$ del subsistema Esclavo sin tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas . . . . .                              | 54 |
| 4.17. Trayectoria real vs deseada con tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas . . . . .   | 55 |
| 4.18. Trayectoria observada contra trayectoria real con tracción con perturbaciones tipo impulsivas . . . . .   | 56 |
| 4.19. Error de seguimiento de trayectoria $e_s$ . . . . .   | 56 |
| 4.20. Perturbación estimada $\hat{\sigma}(t)$ retroalimentada al subsistema maestro con tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas . . . . .   | 57 |
| 4.21. Voltaje de control $V_s(t)$ del subsistema Esclavo con tracción en la rueda con perturbaciones impulsivas . . . . .                                   | 57 |
| 4.22. Ubicación de la unidad de medición inercial y del X-Bus Master . . . . .  | 58 |
| 4.23. Neumatico de la plataforma experimental . . . . .   | 59 |
| 4.24. Diagrama de bloques de sistema háptico bidireccional con reflexión de fuerza-posición. . . . .  | 60 |
| 4.25. Ángulo de inclinación $\gamma$ . . . . .  | 61 |
| 4.26. Ángulo de deslizamiento $\alpha$ . . . . .  | 62 |
| 4.27. Fuerza lateral $F_y$ . . . . .  | 62 |
| 4.28. Torque de autoalineación $T_{sat}$ . . . . .  | 63 |
| 4.29. Comparación de posiciones del subsistema esclavo . . . . .  | 63 |
| C.1. Circuito electrónico de amplificación . . . . .  | 79 |

# Índice de tablas

|   |    |
|---|----|
| 3.1. Descripción de los campos de la palabra . . . . .                        | 39 |
| 3.2. Modos de salida . . . . .  | 40 |
| 3.3. Mensajes relacionados con la IMU . . . . .                               | 40 |
| 4.1. Ganancias para el subsistema maestro: controlador y observador . . . . . | 46 |
| 4.2. Ganancias para el subsistema esclavo: controlador y observador . . . . . | 46 |
| 4.3. Características del neumático . . . . .                                  | 59 |
| 4.4. Parámetros de la llanta . . . . .  | 61 |
| C.1. Componentes del circuito electrónico de amplificación . . . . .          | 79 |



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Sistemas por cable

Los sistemas automotores cada vez se están desarrollando más con la integración de sensores electrónicos, actuadores y sistemas de comunicación modernos enfocados a la suspensión, aceleración, transmisión y frenado del vehículo. Esto con el fin de dar comodidad y seguridad tanto al conductor como al pasajero, viéndose reflejado desde sistemas muy simples como los motores de las ventanas o de los seguros, hasta sistemas más complicados tales como los sistemas por cable, X por Cable (X debido a que existen diferentes sistemas por cable) [5], en el cual los sistemas mecánicos o hidráulicos del automóvil son reemplazados por sistemas de control electrónicos, actuadores electromecánicos e interfaces humanas, con el fin de reproducir las sensaciones de diversos fenómenos que se presentan a la hora de manejar el vehículo, tal como la retroalimentación de fuerza que ejercen los pedales. El término *by wire*, empezó a hacerse popular en la industria automotriz y aeronáutica (a finales de 1970 en la industria aeronáutica y en 1988 en la industria automotriz) [6]. Así como esta nueva variante tiene sus ventajas, también presenta sus desventajas, ya que estos sistemas deben de estar diseñados con un alto nivel de tolerancia a fallas [7], ya que los sistemas tradicionales basados en enlaces mecánicos pueden retroalimentar al conductor una sensación de advertencia acerca del estado del vehículo, mientras que los sistemas electrónicos pueden fallar sin retroalimentar alguna advertencia. En este contexto, el fallo de los sistemas de aceleración o frenado del vehículo puede causar perjuicios en los pasajeros o el conductor.

Algunos de los sistemas por cable más relevantes son los siguientes: dirección por cable, freno por cable y acelerador por cable [3], de los cuales en los dos primeros el concepto de seguridad es el factor más importante.



### 1.1.1. Freno por cable

Este sistema separa el pedal y los actuadores del freno, usando una señal eléctrica. Esta tecnología transmite al conductor la intensidad del freno por cable a diferencia de los sistemas mecánicos o hidráulicos convencionales. Una ventaja que ofrece este sistema es en pro del medio ambiente debido a que no es necesario el líquido de frenos [3].

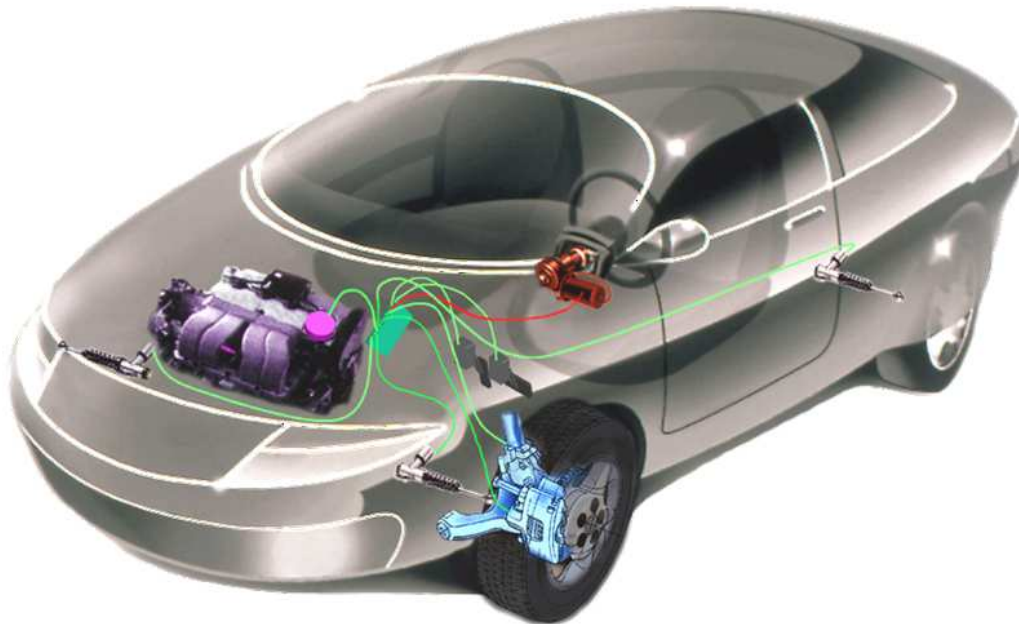


Figura 1.1: Frenos por cable [1]

### 1.1.2. Sistema de dirección por cable

Debido al desarrollo de la tecnología, el diseño básico de los sistemas de dirección en automóviles ha cambiado sustancialmente desde la invención del volante de dirección. La dinámica del automóvil, la seguridad y la comodidad han tomado mayor importancia en el diseño de vehículos. Ver más en [3], [5],[8].

La señal de dirección transmitida por el conductor se envía a través de una columna de dirección (incluidas uniones universales y cajas de engranes) hacia las llantas delanteras. Un objetivo de los sistemas de dirección asistida (hidráulica) es la reducción de la carga impuesta al conductor al maniobrar el vehículo complementando el esfuerzo requerido por el conductor. Posteriormente, se introdujeron los sistemas de dirección asistida eléctricamente dando asistencia electro-hidráulica, o asistencia eléctrica, a la columna de dirección. Los sistemas de dirección asistida se clasifican en tres grupos:

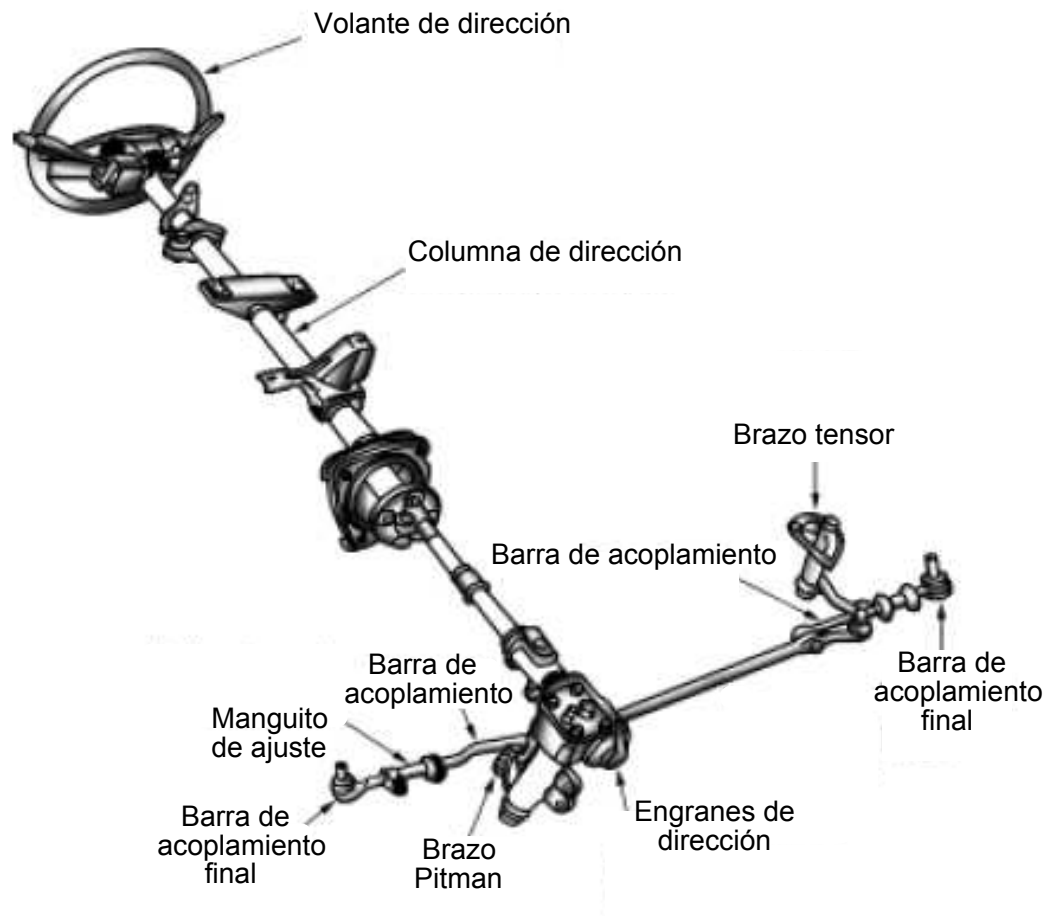


Figura 1.2: Sistema de dirección convencional [2]

sistemas de dirección mecánica, sistemas hidráulicos y electrohidráulicos, y sistemas de dirección asistidos electricamente. En el último grupo existe una tecnología llamada Dirección por Cable (DPC), y se caracteriza por carecer de algunos componentes mecánicos tales como: eje de dirección, columna, mecanismo de reducción, entre otras. Figura 1.2.

Los sistemas de dirección por cable (SDC) poseen grandes ventajas en términos pasivos y activos:

1. De manera activa, se logra gracias a la disponibilidad en forma electrónica que permite su acondicionamiento de acuerdo con las maniobras de conducción, las condiciones del medio ambiente y el estado del vehículo.

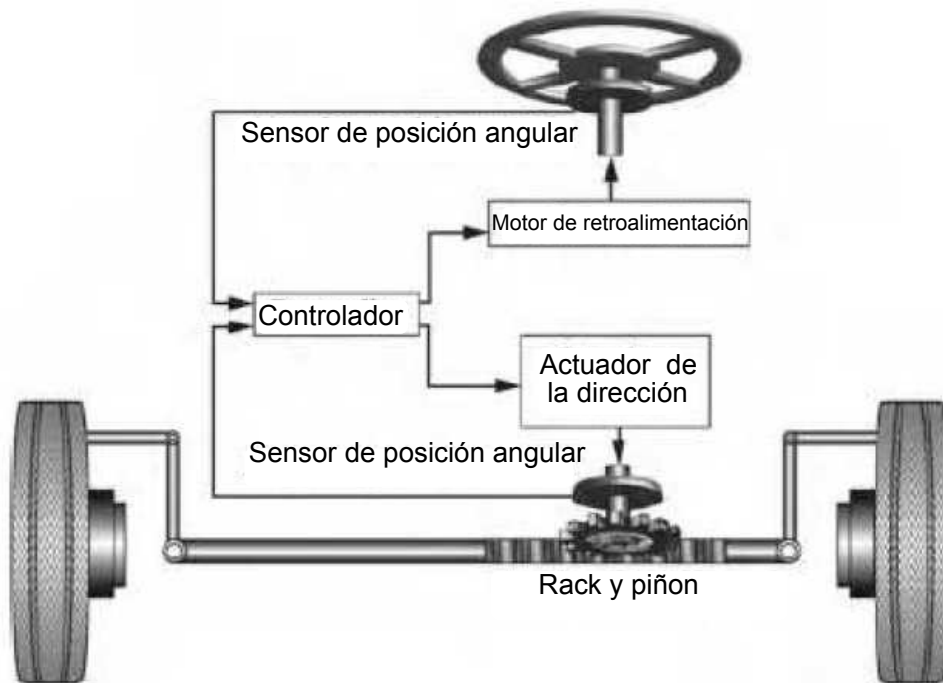


Figura 1.3: Sistema de dirección por cable [3]

2. De forma pasiva se incrementa la seguridad del conductor y se logra al quitar la columna de dirección, el cual es un elemento potencialmente inseguro en caso de un accidente.
3. Se incrementa el espacio de la cabina del conductor.
4. La ausencia del eje de dirección, columna y de mecanismo de reducción permiten mejor uso del espacio en la cabina del motor.
5. El mecanismo de dirección puede ser diseñado e instalado como una unidad modular.

Los sistemas de dirección por cable son comúnmente llamados *Steering By Wire* o también *Drive By Wire* [6]. Los componentes principales en este tipo de sistema se pueden apreciar en la Figura 1.3 donde se puede observar que necesita dos actuadores, uno para el volante de dirección y el otro para el sistema de rack de dirección, también son necesarios sensores para adquirir las señales necesarias de ambas partes que conforman la plataforma experimental para el funcionamiento del sistema y por último un controlador. El actuador en el rack de dirección es necesario para transmitir la señal de dirección que envía el conductor a las llantas y el actuador que se encuentra en el volante es necesario ya que se requiere que el conductor sienta

los efectos de sus acciones reflejándose en torques, fuerzas y condiciones de manejo generadas en el sistema de orientación de la rueda en movimiento. Teniendo esto en cuenta el sistema de dirección por cable debe comportarse como un dispositivo háptico.

## 1.2. Interfaz háptica

Para este trabajo el sistema de dirección por cable fue realizado como un dispositivo háptico ya que se debe tener en cuenta el nivel de tolerancia a fallos y con este tipo de tecnología se puede abordar este punto. ver mas [9].

El término háptico proviene de la palabra griega Hapteshai, que significa tocar [10]. La háptica es un área que investiga y estudia como puede combinarse la modalidad sensorial del tacto con un mundo virtual que puede representar un entorno remoto. Las interfaces hápticas son dispositivos bidireccionales que proporcionan sensaciones de fuerza y/o tacto al operador a través de la misma interfaz con la que envía las consignas de control al sistema remoto [11]. El uso de estos dispositivos aumenta la sensación de inmersión en un sistema remoto virtual o real, mejorando la calidad de la operación.

## 1.3. Torque de autoalineación

Los fenómenos físicos (textura del camino, frenado, desbalance, entre otros) que ocurren al momento de maniobrar un vehículo son de importancia para el conductor, ya que al percibir algunos de estos puede darse cuenta del estado del vehículo, uno de estos fenómenos es el torque de auto-alineación. Ver mas [12].

El torque o momento de autoalineación es un fenómeno que se presenta mientras el vehículo está girando. Es el momento de restauración que intenta regresar las llantas del vehículo a la posición de línea recta. Hay muchos factores que influyen para hacer regresar las llantas a su posición longitudinal, por mencionar algunas: geometría de la suspensión, distribución de peso, velocidad de marcha, la dinámica de la rueda, entre otros.

## 1.4. Antecedentes y estado del arte

Debido a la continua evolución tecnológica de la industria automotriz se investigó sobre diferentes técnicas que son usadas por diferentes autores en la literatura con el fin de

aportar resultados en el tema de Sistemas de Dirección Asistidos Eléctricamente y en particular los Sistemas de Dirección por Cable (SDC). En la literatura se encuentran descritos varios SDC. Algunos basados en mediciones de corriente [13], otros en control adaptable [14], o control por retroalimentación de fuerza [15]. En estos modelos, términos como perturbaciones e incertidumbres aparecen afectando la dinámica y el comportamiento del sistema de dirección por cable.

Fenómenos tales como fricción, amortiguamiento, inercia, fuerzas de alineación, etc. deben ser considerados en el modelo dinámico. Es muy importante la influencia de estos términos para garantizar un desempeño adecuado del mecanismo SDC y para proveer una retroalimentación más realista del camino y las condiciones de manejo hacia el conductor. Los fenómenos presentes en el sistema de dirección por cable son estocásticos, es decir, son difíciles de saber con certeza debido a las condiciones cambiantes en el camino y en el manejo del vehículo, algunas condiciones que afectan esto son: desgaste del neumático, presión en las llantas, lluvia, etc. Debido a esto, en este trabajo se propone, para la estimación de los efectos de tales perturbaciones desconocidas, el uso de observadores de alta ganancia extendidos [15], [16] y un control por rechazo activo de perturbaciones (ADRC por sus siglas en inglés) para cancelar las señales de perturbación desconocidas presentes en el sistema [17], [18], [19].

Para el cálculo del momento de autoalineación son requeridos diferentes parámetros: ángulo de deslizamiento, rastro neumático, rastro mecánico, coeficiente de rigidez, fuerzas laterales, ángulo de inclinación, entre otros. Los cuales no son fáciles de obtener, por lo tanto diferentes autores proponen diferentes métodos para calcularlos. Uno de los autores más resaltados en la literatura, Pacejka [20], obtiene características del neumático basándose en mediciones en la curva pura y en condiciones de frenado puras. En la literatura los más comunes son el uso de observadores derivados del Filtro de Kalman Extendido [21] para la estimación del ángulo de deslizamiento, las fuerzas laterales en la llanta y las fricciones del camino, basados en diferentes modelos dinámicos de la llanta. Otros autores hacen uso de sensores especializados como el Sistema de posicionamiento Global (GPS por sus siglas en inglés) y Sistema de Navegación Inercial (INS por sus siglas en inglés) [22], para estimar el ángulo de deslizamiento del vehículo, el balance del vehículo y la rigidez del neumático en una curva. Diversos autores también presentan como elegir las variables de diseño de la geometría de la suspensión, para una predicción del momento de restauración en las llantas [23].

La industria automotriz actualmente tiene en el mercado vehículos con la tecnología de dirección por cable. La línea Infiniti de la alianza Renault-Nissan, incluyó al mercado en el 2013 el vehículo de referencia Q50 [24], [25].

## 1.5. Planteamiento del problema

En este trabajo la teoría de control Proporcional Integral Generalizado (Generalized Proportional Integral, GPI) más el control por rechazo activo de perturbaciones, se plantea como una alternativa en el problema de control de los Sistemas de Dirección por Cable (SDC), esta técnica permite reconstruir los estados del sistema como son la posición y velocidad de los subsistemas de rack de dirección o del volante de dirección, además de las señales de perturbación no modeladas presentes en la planta tales como: fricción de Coulomb, fricción viscosa, amortiguamiento viscoso, presión en las llantas, entre otras.

En este trabajo se cuenta con una plataforma experimental la cual consta de un cuarto de suspensión de Volkswagen Escarabajo (suspensión tipo barras de torsión independientes) y de un volante de vehículo convencional [26], [27].

La plataforma experimental la integran dos subsistemas: el volante de dirección (subsistema maestro) y el rack de dirección (subsistema esclavo). La dinámica de ambos subsistemas son similares pero son de naturaleza diferente, lo cual permite obtener sus modelos dinámicos de manera similar. Luego se implementa una ley de control clásica: Proporcional Derivativo, con la cancelación de la entrada de perturbación estimada por el observador de alta ganancia GPI. Para interconectar los dos subsistemas se usa un esquema de teleoperación bilateral Posición-Fuerza. Se implementa una Unidad de Medición Inercial (IMU por sus siglas en inglés) para obtener datos requeridos para el cálculo del momento de restauración de la llanta para completar la dinámica del sistema. Se implementa una plataforma hecha con rodillos y un mecanismo con un motor y catarinas, que posibilita la tracción de la llanta para hacer más realistas los experimentos.

## 1.6. Objetivos

El objetivo principal de la tesis es el uso de la técnica de control proporcional-derivativo con la ayuda de observadores lineales de alta ganancia del tipo Proporcional Integral Generalizado para obtener un desempeño adecuado del sistema háptico bidireccional del tren de dirección de un automóvil real.

Los objetivos particulares de desarrollo son:

- Diseño y reconstrucción de bandeja que posibilita el movimiento de la llanta.
- Diseño y construcción de circuitos electrónicos de la planta.

- Reparación de acoplamientos mecánicos presentes en el subsistema de rack de dirección, así como la reparación de las cajas de reducción.
- Integrar el hardware necesario para establecer la comunicación entre la IMU y la tarjeta de adquisición de datos y tener así una plataforma de desarrollo.
- Programar un algoritmo para obtener y trabajar con los datos en crudo de la unidad inercial.
- Realizar los experimentos correspondientes para la comparación de las variables estimadas.
- Realizar los experimentos que muestren una correcta estimación de la perturbación.
- Caracterización de los diferentes coeficientes que se encuentran presentes en el momento de autoalineación de la rueda, para obtener una dinámica más completa a partir de este último.
- Corroborar la aproximación de las variables estimadas por el observador de Alta Ganancia GPI mediante el uso de sensores especializados.

### 1.7. Organización del Documento

El presente trabajo está dividido en cinco capítulos que describen de forma breve y concisa cada etapa desarrollada. En el Capítulo 1 se presenta un breve panorama acerca de los sistemas de dirección por cable, se realiza una reseña de los avances con respecto a este tema, mencionando que tipos de métodos usaron o mencionando la instrumentación implementada. En el Capítulo 2 se presentan las bases matemáticas para la elaboración de este trabajando partiendo de un modelo de vehículo completo y llegando al esquema de control por rechazo activo de perturbaciones basado en observadores de alta ganancia GPI. En el Capítulo 3 se realiza una descripción de la plataforma experimental, se describe el modelo dinámico de cada subsistema que posee el sistema de dirección por cable, también se presenta el desarrollo del control y observador para cada uno. Se describe la plataforma de comunicación a nivel de hardware y software, implementada para obtener las señales de la unidad de medición inercial. En el Capítulo 4 se presentan los resultados experimentales para el sistema háptico de conducción por cable del tren de dirección de un automóvil real con tracción en la rueda, perturbando el sistema de manera impulsiva. Además, se presentan los resultados experimentales con respecto al torque de auto-alineación, con la obtención de los parámetros necesarios implementando una unidad de medición inercial. En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y las perspectivas de este trabajo de investigación.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Modelo de bicicleta

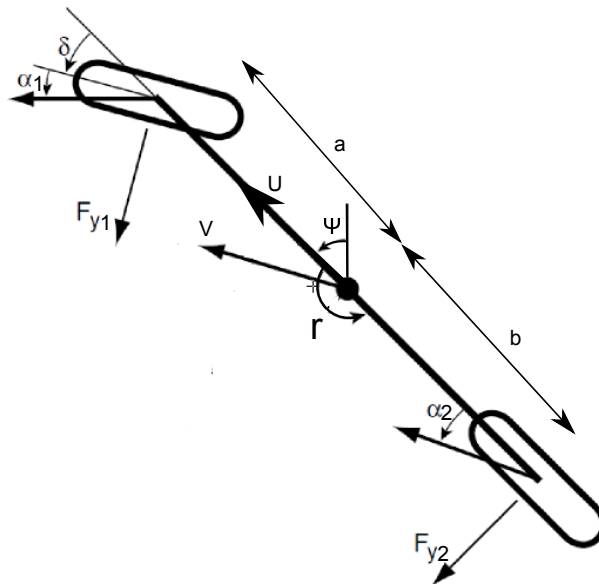


Figura 2.1: Esquema del modelo de bicicleta

Un modelo de bicicleta de un vehículo es una mejora sobre el modelo de un cuarto de carro, ya que este incluye la dinámica de dirección y de curvas. El modelo de bicicleta trabaja muy bien cuando el radio de giro es más largo que el largo de base de la rueda. El ángulo de deslizamiento ( $\alpha$ ) se considera pequeño al igual que el ángulo de dirección de las llantas delanteras ( $\delta$ ), esto permite hacer las siguientes consideraciones geométricas:  $\cos(\alpha) \simeq 1$ ,  $\sin(\alpha) \simeq \alpha$  y de manera similar para el ángulo de dirección. Además, se asume que la fuerza impulsora requerida para tener



una velocidad constante permanece pequeña, esto con respecto a la fuerza lateral en la llanta. También es considerada la velocidad del vehículo como constante. Para obtener el modelo de bicicleta es necesario obtener el modelo de un vehículo simple. La Figura 2.2 muestra el esquema de un vehículo simple. Sus variables de movimiento son la velocidad longitudinal  $U$ , velocidad lateral  $V$ , velocidad angular de guiñada  $r$  y el ángulo de balanceo  $\varphi$ . Un eje de movimientos es presentado  $(X, Y, Z)$ , el eje  $X$  apunta hacia delante y se encuentra tanto en el plano en el suelo como en el plano normal al suelo que pasa por el eje de balanceo. El eje  $Y$  apunta hacia la derecha y el eje  $Z$  apunta hacia abajo.

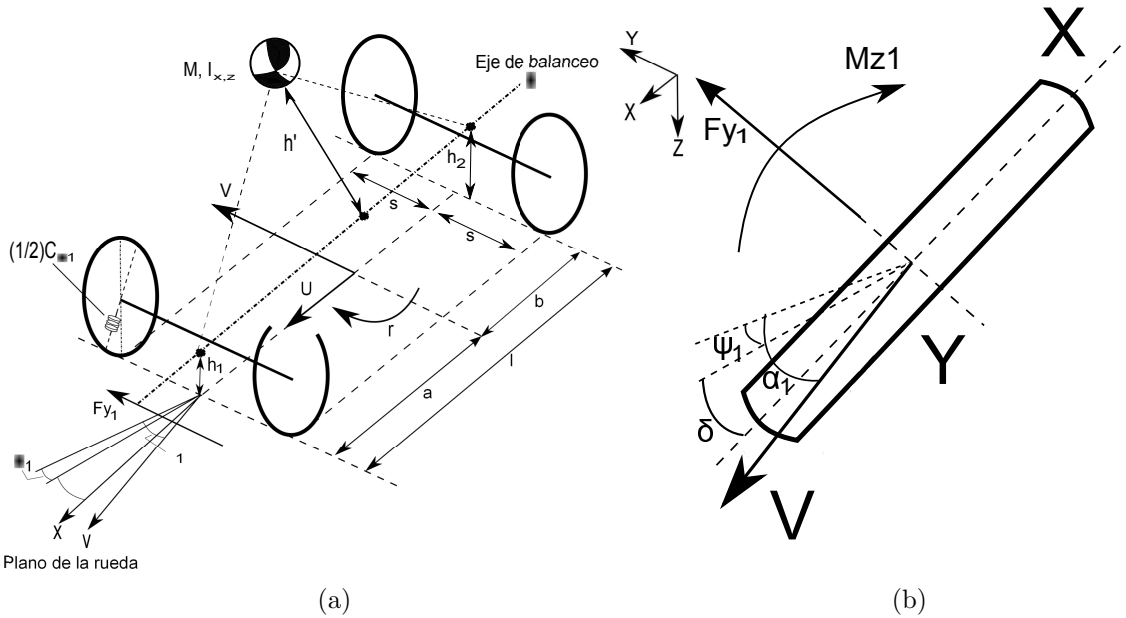


Figura 2.2: a) Esquema de un vehículo simple. b) Plano de la rueda

Cuando el vehículo se encuentra en una curva el vehículo se balancea alrededor del eje de balanceo, la altura del eje de balanceo esta definida por las distancias  $h_{1,2}$ , donde los subíndices  $i = 1, 2$  representan las llantas delanteras y traseras, las cuales se encuentran en la parte posterior y anterior del eje de balanceo. El eje del balanceo se evalúa considerando el movimiento del cuerpo con respecto a los cuatro centros de contacto de las ruedas en el suelo bajo la acción de un fuerza lateral externa que actúa sobre el centro de gravedad. El resorte de torsión que se ilustra en la rueda derecha de la parte posterior, representan la rigidez de la parte delantera y trasera que representaremos como  $c_{\varphi 1}$ . Esta rigidez resulta de los resortes de amortiguamiento y las barras anti-volqueo presentes en el vehículo. También son considerados amortiguadores en las ruedas, están representados por los momentos lineales resultantes alrededor del eje de balanceo, este amortiguamiento es representado por  $k_{\varphi 1,2}$ . La distancia del centro de masa hacia el eje de las llantas delanteras es  $a$  y la distancia al eje de las llantas traseras como  $b$ ; su altura se deduce luego de definir la altura  $h'$  al eje de

balanceo. La masa del vehículo se representa por  $m$  y los momentos de inercia con respecto al centro de la masa Y los ejes horizontales y verticales por  $I_x, I_z, I_{x,z}$ . Por último las fuerzas laterales y longitudinales se representan de la siguiente forma,  $F_{yi}, F_{xi}$  y el momento de restauración de la llanta se representa como  $M_{zi}$ . En la Figura 2.2 en la parte b, se observa una ampliación del plano de una rueda en el cual se pueden apreciar los ángulos mas representativos;  $\alpha_1$  es el ángulo de deslizamiento,  $\psi_1$  es el ángulo de guiñada y  $\delta$  es el ángulo de la dirección. Debido al deslizamiento se producen fuerzas y pares de momento, en la figura se observan las fuerzas laterales y los pares de momento que actúan en el llanta,  $F_{yi}$  para las fuerzas laterales y  $M_{zi}$  para el momento de autoalineación; también se considera que resultan fuerzas longitudinales debido al deslizamiento. Ver mas en [8].

Considere la energía cinética (T) y potencial (U) de un vehículo del vehículo simple [8] (Ver Apéndice B)

$$T = \frac{1}{2}m \left[ (u - h'\varphi r)^2 \right] + \frac{1}{2}I_x\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_y(\varphi r)^2 + \frac{1}{2}I_z \left( r^2 - \varphi^2 r^2 + 2\left(\frac{h_2 - h_1}{l}\right)r\dot{\varphi} \right) - I_{xz}r\dot{\varphi} \quad (2.1)$$

$$U = \frac{1}{2}(c_{\varphi 1} + c_{\varphi 2})\varphi^2 - \frac{1}{2}mgh'\varphi^2 \quad (2.2)$$

donde la energía potencial U es construida en los resortes de la suspensión y a través de la altura del centro de gravedad y también se asume para ángulos pequeños de  $\varphi$  y  $\delta$  (balanceo y dirección). Ahora se usan las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento con respecto a las coordenadas generalizadas  $u, v, r, \varphi$  (lateral, longitudinal, ángulo de guiñada y de balanceo respectivamente), que corresponden a los ejes de movimiento del vehículo simple (Ver Apéndice B).

$$m(\dot{u} - rv - h'\varphi\dot{r} - 2h'r\dot{\varphi}) = F_{x1} - F_{y1}\delta + F_{x2} \quad (2.3)$$

$$m(\dot{v} + ru + h'\ddot{\varphi} - h'r^2\dot{\varphi}) = F_{x1}\delta + F_{y1} + F_{y2} \quad (2.4)$$

$$I_z\dot{r} + (I_z\theta_r - I_{xz})\ddot{\varphi} - mh'(\dot{u} - rv)\varphi = aF_{x1}\delta + aF_{x1} + M_{z1} - bF_{y2} + M_{z2} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (I_x + mh'^2)\ddot{\varphi} + mh'(\dot{v} + ru) + (I_z\theta_r - I_{xz})\dot{r} - (mh'^2 + I_y - I_z)r^2\dot{\varphi} + \\ (k_{\varphi 1} + k_{\varphi 2})\dot{\varphi} + (c_{\varphi 1} + c_{\varphi 2} - mgh')\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

La ecuación de movimiento (2.3) puede ser usada para calcular la fuerza de propulsión necesaria para mantener la velocidad de avance constante y con esto reducir el modelo a 3 ecuaciones de movimiento con las variables de movimiento  $v$ ,  $r$  y  $\varphi$  permaneciendo  $u$  constante [8].

Los ángulos de deslizamiento, las velocidades laterales de los ejes de las ruedas y los ángulos de dirección de las ruedas son medidos con respecto al eje de longitudinal  $x$ . Las velocidades longitudinales de los ejes de las ruedas son consideradas iguales a la velocidad longitudinal del vehículo  $u$ . Esto es permitido cuando  $S|r| \ll u$  [8], donde  $S$  corresponde a una mitad del ancho del vehículo. Entonces la expresión para pequeños ángulos de deslizamiento es la siguiente:

$$\alpha_1 = \delta + \psi_1 - \frac{v + ar - e\dot{\delta}}{u} \quad (2.7)$$

$$\alpha_2 = \psi_2 - \frac{v - br}{y}$$

Donde  $e$  es el largo del *Caster* de la suspensión, esta distancia es la proyección de un ángulo que se deriva de acuerdo a la geometría de la suspensión, este ángulo es llamado *caster* y resulta del desplazamiento vertical del eje de la llanta o también llamado *king-pin* con respecto a su vertical, en la Figura 2.3 se puede observar un esquema donde se muestra en ángulo *caster* y su proyección.

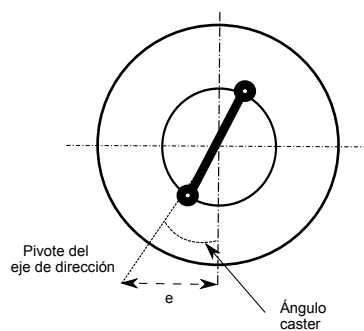


Figura 2.3: Ángulo *caster* y su proyección

Ahora para el análisis del modelo de bicicleta, figura 2.1, de las ecuaciones (2.4) y (2.5), el ángulo de balance ( $\varphi$ ) es igualado a cero y se asume que la velocidad de avance  $u$  ( $\approx V$ ) permanece constante y se desprecia la influencia de las componentes laterales de las fuerzas longitudinales  $F_{xi}$ . Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas  $v$  y  $r$  son:

$$m(\dot{v} + ur) = F_{y1} + F_{y2} \quad (2.8)$$

$$I\dot{r} = aF_{y1} - bF_{y2} \quad (2.9)$$

donde  $v$  es la velocidad lateral del centro de gravedad y  $r$  la velocidad angular de guiñada,  $m$  es la masa del vehículo e  $I$  ( $\approx I_z$ ) es el momento de inercia alrededor del eje vertical que pasa a través del centro de gravedad. Las fuerzas laterales resultan ser funciones de los ángulos de deslizamiento ( $F_{yi}(\alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ ) y los ángulos de deslizamiento se expresan de la siguiente manera:

$$\alpha_1 = \delta - \frac{1}{u}(v + ar) \quad (2.10)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{u}(v + br) \quad (2.11)$$

Cuando solo hay pequeñas desviaciones con respecto al movimiento en línea recta son considerados suficientemente pequeños los ángulos de deslizamiento para permitir linealizar las características de la curva. Para la fuerza lateral la relación con el ángulo de deslizamiento se reduce a la siguiente expresión lineal:

$$F_{yi} = C_{\alpha i} \alpha_i \quad (2.12)$$

donde  $C_{\alpha i}$  es la rigidez en la curva la cual es la pendiente inicial entre la fuerza lateral como función del ángulo de deslizamiento.

## 2.2. Momento de Auto-alineación

El momento o torque de auto-alineación es el resultante de la fuerza lateral ( $F_y$ ) y la distancia o brazo de momento llamada rastro neumático ( $t_m$ ). Este momento intenta regresar la posición de las llantas a un estado donde el ángulo de deslizamiento es igual a cero ( $\alpha = 0$ ), es decir, la presencia del torque de auto-alineación expone el hecho de que el neumático trata de seguir la dirección de marcha. Para obtener

una expresión del momento de restauración de la llanta es importante conocer que parámetros influyen sobre este fenómeno.

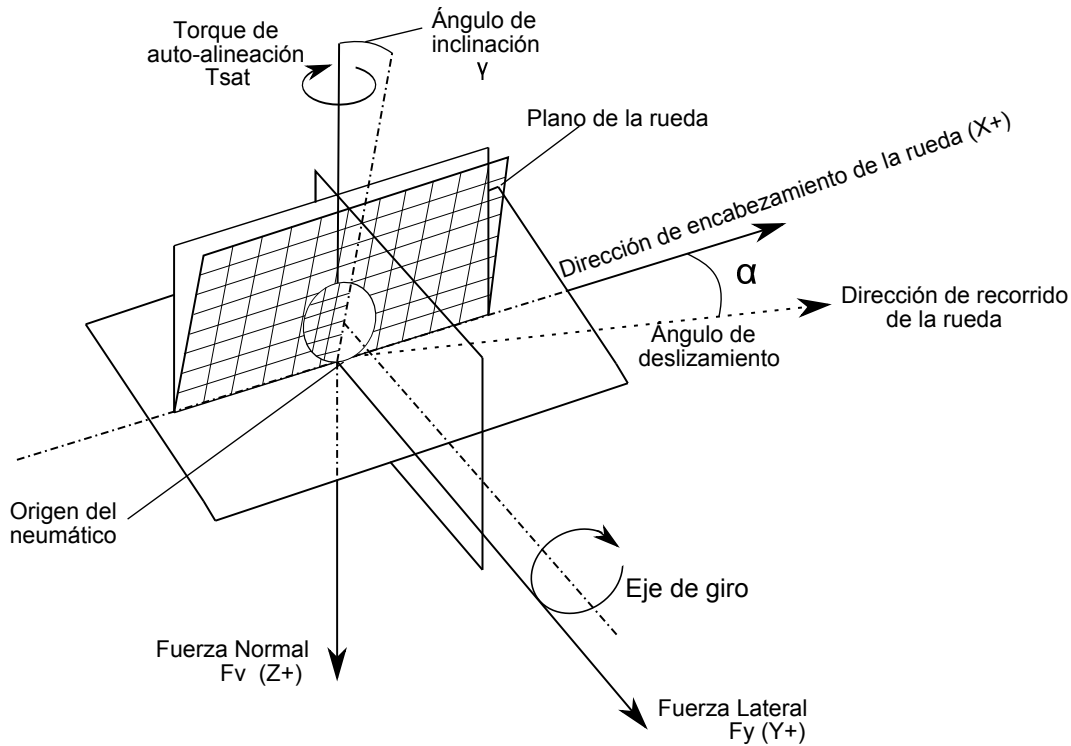


Figura 2.4: Terminología de ejes, SAE [4]

En la Figura 2.4 se pueden observar algunos de los parámetros que influyen en los neumáticos de un vehículo. Se hará una breve descripción de algunos de ellos.

### 2.2.1. Ángulo de deslizamiento, fuerza lateral y rigidez en las curvas

Si la dirección de viaje difiere de la trayectoria de la llanta, esta prolongación angular entre el vector de la trayectoria de la rueda con respecto al vector de la dirección de viaje es llamada ángulo de deslizamiento ( $\alpha$ ). El ángulo de deslizamiento produce una componente de fuerza lateral ( $F_y$ ), la cual tratará de realinear la llanta a su trayectoria, el coeficiente de fricción  $\mu$  se define como una relación sin unidades entre la fuerza de fricción y la fuerza normal en la superficie de contacto [28]. Existe un límite para el valor de la fuerza lateral debido al ángulo de deslizamiento el cual debe cumplirse para que no haya deslizamiento:

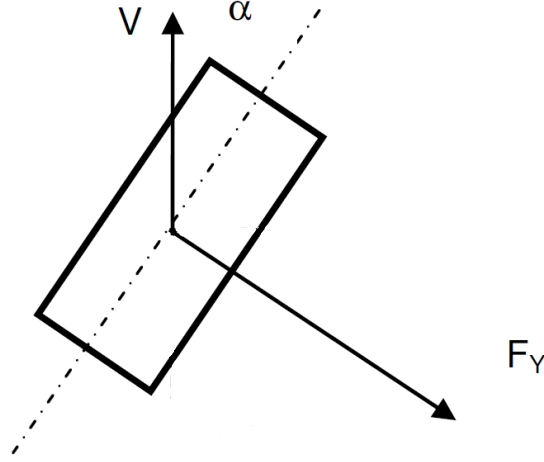


Figura 2.5: Ángulo de deslizamiento y fuerza lateral

$$c d \leq \frac{\mu F_v}{l} \quad (2.13)$$

donde  $c$  es la rigidez de base (modelo elástico de base [29]),  $d$  es el desplazamiento central del neumático,  $l$  es el largo de la marca del neumático sobre la superficie de contacto y  $F_v$  la fuerza normal. La máxima fuerza lateral sin deslizamiento es la siguiente:

$$F_y = \frac{cl^2\alpha}{2} \quad (2.14)$$

donde se puede apreciar que la fuerza lateral es proporcional al ángulo de deslizamiento hasta la mitad del límite de fricción total. El valor máximo de fuerza lateral se obtiene cuando la llanta alcanza un ángulo de  $90^\circ$  que es cuando la llanta está totalmente perpendicular a la dirección de trayectoria. Para valores elevados del ángulo de deslizamiento, la parte posterior de la huella del neumático se desliza lateralmente a lo largo de la superficie de contacto, lo que este fenómeno causa es la pérdida de fuerza lateral y la pérdida de estabilidad en el momento de restauración de la rueda. Cuando no existe deslizamiento completo, la fuerza lateral no depende del coeficiente de fricción (con respecto a la superficie de contacto,  $\mu$ ), aunque este provee su límite superior, depende de la rigidez de la base [29]. Una manera de describir la fuerza lateral en términos de otros coeficientes es de la siguiente forma:

$$F_y = F_{y\alpha} = C_\alpha \alpha = C_s F_v \alpha \quad (2.15)$$

donde  $C_\alpha$  es la rigidez de deslizamiento lateral y  $C_s [\frac{1}{deg}]$  es el coeficiente de rigidez en las curvas, generalmente los valores típicos para neumáticos de estructura de construcción sesgada tiene un valor de  $\frac{0,12}{deg}$  y en neumáticos de estructura de construcción radial tiene  $\frac{0,16}{deg}$ .  $F_v$  corresponde a la fuerza vertical en la llanta, que se obtiene directamente con la fuerza normal.

### 2.2.2. Ángulo de inclinación

La inclinación de la llanta con respecto a la superficie perpendicular en la cual se apoya es llamada el ángulo de inclinación.

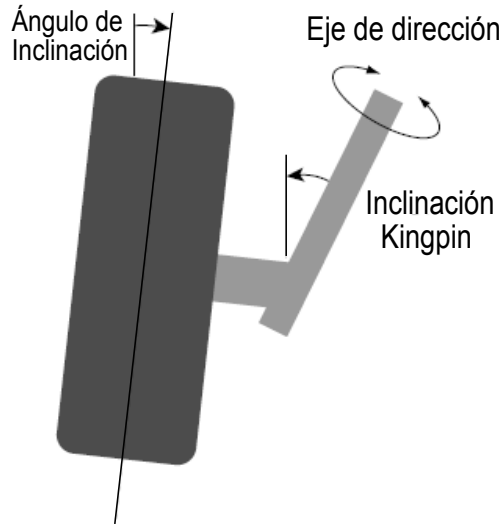


Figura 2.6: Ángulo de inclinación e inclinación de *kingpin*

Un ángulo de inclinación positivo se define como una prolongación angular hacia el exterior, es decir, de tal manera que la parte superior de la llanta se inclina hacia afuera desde la línea central del vehículo. Un ángulo de inclinación diferente de cero produce una fuerza debido a esta inclinación, que actúa lateralmente hacia la parte baja del eje produciendo una componente más de fuerza lateral. Generalmente una fuerza lateral producida por la inclinación de la llanta es una función principalmente de la rigidez del neumático, la fuerza vertical y el ángulo de inclinación. Algunas fuerzas secundarias están presentes tales como fricción, curvatura de la trayectoria pero no son consideradas ya que son de naturaleza muy pequeñas. La expresión que define la componente de fuerza lateral debida al ángulo de inclinación es la siguiente:

$$F_{y\gamma} = F_\gamma = C_\gamma \gamma = C_c F_v \gamma \quad (2.16)$$

La componente de fuerza lateral de la ecuación (2.16) es expresada en términos del ángulo de inclinación ( $\gamma$ ), la rigidez de inclinación ( $C_\gamma$ ) y  $C_c$  es conocido como el coeficiente de rigidez de inclinación. Para neumáticos de estructura de construcción radial el valor del el coeficiente de rigidez de inclinación es de  $\frac{0,008}{deg}$  y para neumáticos de estructura de construcción sesgada o normal  $C_c = \frac{0,018}{deg}$ .

### 2.2.3. Fuerza lateral total

Para obtener la fuerza lateral que reúna las componentes producidas por el ángulo de deslizamiento en la ecuación (4.27) y la componente producida por el ángulo de inclinación de la ecuación (2.16), se realiza el cálculo usando superposición, esta fuerza total es para ángulos pequeños:

$$F_y = F_{y\alpha} + F_{y\gamma} \quad (2.17)$$

$$F_y = C_\alpha \alpha + C_\gamma \gamma = C_s F_v \alpha + C_c F_v \gamma$$

Simplificando, se obtiene la expresión final para la fuerza lateral:

$$F_y = F_v (C_s \alpha + C_c \gamma) \quad (2.18)$$

### 2.2.4. Rastro Neumático

El rastro o huella neumática es el brazo de momento a través del cual la fuerza lateral actúa.

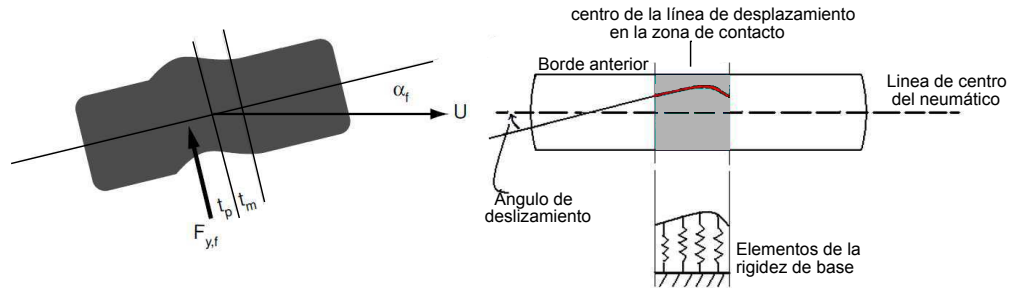


Figura 2.7: Diagrama de fuerzas, distancias y ángulos presentes en la huella de contacto del neumático

El modelo de rigidez en la base (modelo elástico de base) [29], [30], cita que la fuerza lateral actúa detrás de la línea de centro del neumático, esto es el resultado de la



distribución de la zona de contacto casi triangular, que se puede observar en la figura 2.7, la huella neumática se puede obtener con la siguiente expresión:

$$t_m = \frac{l}{6} \quad (2.19)$$

ya obtenidos estos resultados es posible obtener el momento de auto-alineación, que es el resultante entre la fuerza lateral total de la ecuación (2.18) y el brazo de momento de la ecuación (2.19):

$$T_{sat} = M_z = F_y t_m = \frac{F_v (C_s \alpha + C_c \gamma) l}{6} \quad (2.20)$$

### 2.3. Orientación de un cuerpo rígido

Para obtener las variables que actúan en el torque de autoalineación fue necesario el uso de un sensor especializado, para este trabajo se usó una Unidad de Medición Inercial (IMU). Está compuesta por 3 sensores: acelerómetro, magnetómetro y un giróscopo. La IMU posee un marco inercial para describir su orientación con respecto a un marco de orientación de referencia. Es importante entender algunas de las principales representaciones de la orientación de un cuerpo rígido, esto con el propósito de configurar y programar la IMU a la necesidad de este trabajo. Existen varias representaciones que describen la orientación pero comúnmente las más utilizadas son las siguientes: los ángulos de Euler, la matriz de Cosenos Directores y los cuaterniones (ver mas [31]). Para este trabajo solo fue necesario el uso de cuaterniones y ángulos de Euler.

### 2.4. Modelo Ultra local

El sistema háptico de conducción por cable del tren de dirección de un automóvil real será controlado por medio de un control proporcional derivativo con ayuda de observadores de alta ganancia del tipo proporcional integral generalizado. A continuación se describen algunos resultados preliminares con respecto a esta parte del trabajo. [19],

Considere el siguiente sistema no lineal, perturbado y suave, de una entrada y una salida,

$$y^{(n)} = \phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}(t)) + \gamma(t, y)u + \varphi(t) \quad (2.21)$$

Se supone que la función no lineal de ganancia  $\gamma(t, y)$  es  $L_\infty$  y suficientemente alejada de cero, es decir, existe una constante positiva,  $\mu$ , tal que

$$\text{Inf}|\gamma(t, y)| \geq \mu > 0 \quad (2.22)$$

para todas las soluciones acotadas y suaves,  $y(t)$ , de la ecuación (2.21), obtenidas mediante una entrada suave y acotada de la señal de control  $u$ . Esta suposición, es natural para evadir las singularidades de la ganancia de entrada y la falta de controlabilidad temporal del sistema. El sistema no perturbado ( $\varphi(t) \equiv 0$ ) es diferencialmente plano, o simplemente, plano, dado que todas las variables del sistema, incluyendo  $u$ , se pueden expresar en términos de funciones diferenciales de la salida  $y$ , es decir, funciones de  $y$  y un número finito de sus derivadas temporales. Se supone que la perturbación exógena  $\varphi(t)$ , es uniformemente, absolutamente, acotada, es decir, es una función escalar  $L_\infty$ . En forma similar, se supone que para todas las soluciones acotadas,  $y(t)$ , ecuación (2.21), obtenidas por medio de entradas de control,  $u$ , suficientemente suaves y acotadas uniformemente, la perturbación aditiva endógena,  $\phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}(t))$ , vista como una señal variante en el tiempo, es uniformemente absolutamente, acotada. La planitud del sistema en particular permite diseñar trayectorias de referencia de las salidas planas,  $y^*(t)$ , que garantizan, al menos nominalmente, esta suposición. Aunque se pueden extender los resultados para funciones cuyas ganancias,  $\gamma$ , sean dependientes de derivadas de  $y(t)$  con respecto al tiempo, se considera la ganancia,  $\gamma$ , perfectamente conocida y función explícita del tiempo y de la salida plana  $y$ . Esta suposición hace que en general, existen condiciones iniciales que pudiesen violar la hipótesis (2.22). Cuando  $\gamma(t, y)$  es constante los resultados son ciertamente globales.

*Formulación del problema:* dada una trayectoria de referencia,  $y^*(t)$ , para la salida plana,  $y(t)$ , tal que la hipótesis (2.22) es válida, proponer una ley de control lineal para el sistema de la ecuación (2.21), de tal forma que se tenga una convergencia, suficientemente cercana, de la salida plana,  $y(t)$ , hacia la señal de referencia  $y^*(t)$ , a pesar de los efectos de la entrada desconocida de perturbación endógena  $\phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}(t))$  y de la entrada de perturbación exógena,  $\varphi(t)$ . La convergencia aproximada a que se alude implica que el error de seguimiento,  $e(t) = y(t) - y^*(t)$ , y sus primeras,  $p$ , derivadas con respecto al tiempo, convergen asintóticamente, en forma predominantemente exponencial, a una vecindad, tan pequeña como se requiera, del origen en el espacio de fase del error de seguimiento. La solución del problema se puede llevar a cabo en un contexto totalmente lineal, si se considera el modelo no lineal de la ecuación (2.21) como el siguiente sistema

$$y^{(n)} = \gamma(t, y)u + \xi(t) \quad (2.23)$$

donde  $\gamma(t, y)$  es perfectamente conocida y  $\xi(t) = \phi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}(t)) + \varphi(t)$  es una

función del tiempo uniformemente, absolutamente acotada.

Considere el siguiente resultado preliminar:

*Proposición 1.* [19] La función de perturbaciones desconocidas,  $\xi(t)$ , en la dinámica simplificada del sistema de la ecuación (2.23), es algebraicamente observable, en el sentido de Diop y Fliess [32],  $\xi(t)$ , como función del tiempo y un número finito de sus derivadas temporales, se suponen uniformemente, absolutamente acotadas, Gliklikh [33]. La prueba de este hecho es inmediata después de escribir el sistema de la ecuación (2.23) como:

$$\xi(t) = y^{(n)} - \gamma(t, y)u \quad (2.24)$$

es decir  $\xi(t)$  puede expresarse en términos de la entrada de control  $u$ , de la salida  $y$ , y de un número finito de sus derivadas. Esto significa, en particular que si  $\xi(t)$  se puede expresar mediante un modelo polinomial aproximado, formalmente válido tan solo localmente, pero sobre el cual se puede imponer una autoactualización automática, pudiéndose lograr entonces una estimación, uniformemente aproximada, de  $\xi(t)$  por medio de un observador lineal. El modelo polinomial de la perturbación,  $\xi(t)$ , está descrito por una ecuación diferencial lineal homogénea cuyo orden excede, al menos en una unidad, al grado del polinomio que por hipótesis aproxima dicha perturbación. Se incorpora posteriormente este modelo lineal a la descripción del sistema de la ecuación (2.23) como un modelo interno de la perturbación y se diseña entonces un observador que adopta este modelo polinomial como parte de la dinámica del observador. Finalmente, la forma de hacer el modelo polinomial de la perturbación variante en el tiempo sea de actualización automática y, por ende, uniformemente válido, aunque constituya un modelo aproximado, es inducir a la dinámica aumentada del error de estimación de la salida inyectada a exhibir un comportamiento predominantemente lineal con un espectro ubicado suficientemente lejos del eje imaginario del plano complejo. Esto hace que el error de estimación de la perturbación variante en el tiempo se encuentre confinado a una vecindad suficientemente pequeña alrededor del origen del espacio de fase del error de estimación.

## 2.5. Observador de Alta Ganancia GPI

Para el sistema de la expresión (2.23), tal que:  $y = y_1$ ,  $\dot{y} = \dot{y}_1$ ,  $\ddot{y} = \dot{y}_2$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)} = \dot{y}_{n-1}$ ,  $y^{(n)} = \dot{y}_n$ . Su representación en el espacio de estados es:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\dot{y}_n = \xi(t) + \gamma(t, y)u \quad (2.25)$$

Suponemos que el la entrada de perturbación,  $\xi(t)$ , puede modelarse localmente como un polinomio en el tiempo o polinomio de Taylor, de grado  $p - 1$  más un término residual  $r(t)$ ,

$$\xi(t) = \varphi_1 + r(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{p-1} t^{p-1} + r(t) \quad (2.26)$$

La  $p$ -ésima derivada de la perturbación con respecto del tiempo es

$$\frac{d^p}{dt^p} \xi(t) = r^{(p)}(t) \quad (2.27)$$

El modelo polinomial en el tiempo,  $\varphi_1$ , es invariante con respecto a las traslaciones finitas en el tiempo y satisface trivialmente la ecuación diferencial homogénea,  $\varphi_1^{(p)} = 0$ . Se dice que  $\varphi_1$  pertenece a una familia de polinomios de Taylor de grado  $p - 1$  de elementos reales arbitrarios. Se considera a  $\varphi_1$  como el modelo interno de la perturbación aditiva desconocida [34]. El sistema de la ecuación (2.25) con el modelo polinomial en el tiempo de la perturbación  $\xi(t)$  se convierte de acuerdo con las expresiones (2.26) y (2.27) en:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \varphi + \psi(t, y)u \\ \dot{\varphi}_1 &= \varphi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\varphi}_{p-1} &= \varphi_p \\ \dot{\varphi}_p &= r^{(p)}(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

El modelo de la perturbación adquiere la característica de ser de autoactualización automática cuando se incorpora como parte de un observador lineal asintótico cuyo error de estimación es forzado a converger, uniformemente, a una pequeña vecindad de cero. En consecuencia, podemos suponer, de manera confiable, que la función residual,  $r(t)$  y sus derivadas con respecto del tiempo  $r^{(p)}(t)$ , se tornan uniformemente absolutamente acotadas y son, también, de actualización automática. Se propone un observador del tipo GPI de orden  $p + n$  del sistema,

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{y}}_{1j} &= \hat{y}_{2j} + \lambda_{(p+n-1)j}(y_{1j} - \hat{y}_{1j}) \\
 \dot{\hat{y}}_{2j} &= \hat{y}_{3j} + \lambda_{(p+n-2)j}(y_{1j} - \hat{y}_{1j}) \\
 &\vdots = \\
 \dot{\hat{y}}_{nj} &= \psi_j u_j + \hat{\varphi}_{1j} + \lambda_p(y_{1j} - \hat{y}_{1j}) \\
 \dot{\hat{\varphi}}_{1j} &= \hat{\varphi}_{2j} + \lambda_{(p-1)j}(y_{1j} - \hat{y}_{1j}) \\
 &\vdots = \\
 \dot{\hat{\varphi}}_{(p-1)j} &= \hat{\varphi}_p + \lambda_{(1)j}(y_{1j} - \hat{y}_{1j}) \\
 \dot{\hat{\varphi}}_{pj} &= \lambda_{0j}(y_{1j} - \hat{y}_{1j})
 \end{aligned}$$

la dinámica del error de observación se define como  $\tilde{e}_{y1} = y_1 - \hat{y}_1$ , la dinámica del error de observación perturbada es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{e}}_{y1} &= \tilde{e}_{y2} - \lambda_{(p+n-1)j}\tilde{e}_{y1} \\
 \dot{\tilde{e}}_{y2} &= \tilde{e}_{y3} - \lambda_{(p+n-2)j}\tilde{e}_{y1} \\
 &\vdots = \\
 \dot{\tilde{e}}_{yn} &= \tilde{\varphi}_1 - \lambda_{(p)j}\tilde{e}_{y1} \\
 \dot{\tilde{\varphi}}_1 &= \tilde{\varphi}_2 - \lambda_{(p-1)j}\tilde{e}_{y1} \\
 &\vdots = \\
 \dot{\tilde{\varphi}}_{p-1} &= \tilde{\varphi}_p - \lambda_{(1)j}\tilde{e}_{y1} \\
 \dot{\tilde{\varphi}}_p &= r^{(p)}(t) - \lambda_{(0)j}\tilde{e}_{y1}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Las dinámicas inyectadas de los errores de estimación,  $\tilde{e}_{yn}$  y  $\tilde{\varphi}_p$ , satisfacen dinámicas predominantemente lineales, excitadas por perturbaciones acotadas, de la forma:

$$\tilde{e}_{y1}^{(p+n)} + \lambda_{(p+n-1)j}\tilde{e}_{y1}^{(p+n-1)} + \dots + \lambda_{0j}\tilde{e}_{y1} = r^{(p)}(t) \tag{2.30}$$

La selección de los coeficientes  $\lambda_{i,j}, i = 0, \dots, p+n-1$  ( $j = m, s$ , maestro y esclavo para este trabajo) en un esquema de observación de alta ganancia (raíces del polinomio característico correspondiente suficientemente alejados a la izquierda del eje imaginario del plano complejo) garantiza la evolución de estos errores a permanecer acotados, uniformemente, por una bola (vecindad de convergencia) definida alrededor del origen del espacio de fase del error de observación. Esta vecindad puede hacerse tan pequeña

como se requiera. A raíces dominantes con parte real más negativa, se corresponden vecindades de convergencia del error cada vez más pequeñas. El polinomio característico asociado en la variable compleja  $s$ :

$$P_{obs}(s) = s^{(p+n)} + \lambda_{(p+n-1)j}s^{(p+n-1)} + \dots + \lambda_{2j}s^2 + \lambda_{1j}s + \lambda_0 \quad (2.31)$$

## 2.6. Control por Rechazo Activo de Perturbaciones

Con el desarrollo matemático obtenido hasta el momento, se cuenta con una reconstrucción en línea de los estados de fase del sistema, así como de las perturbaciones mediante el observador GPI. Se busca, ahora, una ley de control que permita al sistema seguir una trayectoria deseada. Una opción viable, es un controlador que cancele las señales de perturbación desconocidas. Esto se consigue con una ley de control con una retroalimentación lineal de los estados que además prevea la cancelación de la perturbación. Para el sistema de la ecuación (2.25) se propone la siguiente ley de control

$$u_j(t) = \psi^{-1}(t, y)[- \hat{\varphi} + V] \quad (2.32)$$

donde,

$$V = [\dot{y}_n^*] - \sum_{i=1}^{n-1} k_i (\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}^*) - k_0 (y_1 - y_1^*) \quad (2.33)$$

La función  $\psi(t, y)$  se supone totalmente conocida,  $\hat{y}_i$  son los estados estimados por el observador GPI propuesto en la expresión (2.29) y  $y_1^*$  es la trayectoria deseada,  $y_{i+1}^*$  corresponde a las derivadas de la trayectoria deseada. Sustituyendo la ley de control de la ecuación (2.33) en el sistema de la expresión (2.25).

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= [\dot{y}_n^*] - \sum_{i=1}^{n-1} k_i (\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}^*) - k_0 (y_1 - y_1^*) + \xi(t) - \hat{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

De la convergencia del observador se cumple que  $\hat{\varphi}_1 \rightarrow \xi(t)$ , esta convergencia es aproximada y la diferencia  $r(t) = \xi(t) - \hat{\varphi}_1$ , es el residuo de la expansión en serie de Taylor de  $\xi(t)$ . Existe también un residuo de los estados de fase estimados por el observador ( $\hat{y}_i \rightarrow y_i$ ), por lo cual el sistema (2.34) se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= [\dot{y}_n^*] - \sum_{i=1}^{n-1} k_i (\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}^*) - k_0 (y_1 - y_1^*) + r(t) + \sum_{i=1}^{n-1} k_i (y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se puede definir un error de seguimiento de trayectoria como  $e_{y1} = y_1 - y_1^*$ , tal que la dinámica del error de seguimiento se expresa de la siguiente forma:

$$e_{y1}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i e_{y1}^{(i)} + k_0 e_{y1} = r(t) + \sum_{i=1}^{n-1} k_i (y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}) \quad (2.36)$$

donde la  $i$ -ésima derivada del error de seguimiento de trayectoria está definida como  $e_{y1}^{(i)} = \hat{y}_{i+1} - y_{i+1}^*$  para  $i > 0$  y la  $n$ -ésima derivada como  $e_{y1}^{(n)} = \dot{y}_n - \dot{y}_n^*$ . Debido al esquema de observación de alta ganancia el término  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i (y_{i+1} - \hat{y}_{i+1})$  converge rápidamente de manera asintótica, exponencial a una vecindad de convergencia, y el residuo de la perturbación es  $r(t) \approx 0$  debido a la aproximación de  $\hat{\varphi}_1$  dada por el observador GPI. El comportamiento del sistema de la expresión (2.35) en lazo cerrado se puede modificar a voluntad con la elección de los coeficientes  $k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1, k_0$  con el objetivo de hacer evolucionar el error de seguimiento de trayectoria a una vecindad de convergencia suficientemente pequeña. El polinomio característico en la variable compleja  $s$  de la dinámica del error de seguimiento de trayectoria es:

$$p_c(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n-1} k_i s^i + k_0 \quad (2.37)$$

Se debe asegurar que las raíces de este polinomio se encuentren suficientemente alejadas del eje imaginario en el lado izquierdo del plano complejo, con esto se logra que el polinomio característico sea Hurwitz, garantizando la evolución de los errores de seguimiento y sus derivadas en el tiempo converjan asintóticamente, exponencialmente a una vecindad del origen del espacio del error de seguimiento de trayectoria.

# Capítulo 3

## Plataforma experimental

En este capítulo se presenta como está conformado el sistema háptico bidireccional por reflexión de posición y fuerza, para el sistema por cable del tren de dirección de un automóvil real. También se presentará el modelo dinámico de los subsistemas que conforman el sistema háptico: subsistema maestro y subsistema esclavo. Partiendo de la obtención del modelo dinámico de cada subsistema se presenta un esquema de control de tipo proporcional derivativo (PD) basado en el observador de alta ganancia GPI con la respectiva cancelación de la perturbación estimada en línea por el observador.

Para mas información acerca de la construcción y el desarrollo de la plataforma experimental [26] y [27].

El subsistema maestro de la plataforma experimental está compuesto por un volante de dirección convencional, una caja de reducción construida a partir de engranes, y un motor de corriente directa (CD). Los componentes electrónicos y mecánicos usados en el subsistema maestro son los siguientes: el ángulo de posición del volante de dirección es medido con un encoder incremental de la marca OMRON, modelo E6B2-CWZ1X, 2000PPR, 0.5M. El motor de corriente continua es de la empresa NISCA MOTOR, modelo NC5475B, este se encuentra conectado mecánicamente a la caja de reducción, la cual tiene una relación de reducción de  $N_m = 16$  (los subíndices  $m$  y  $s$  se refieren a los subsistemas maestro y esclavo, respectivamente).



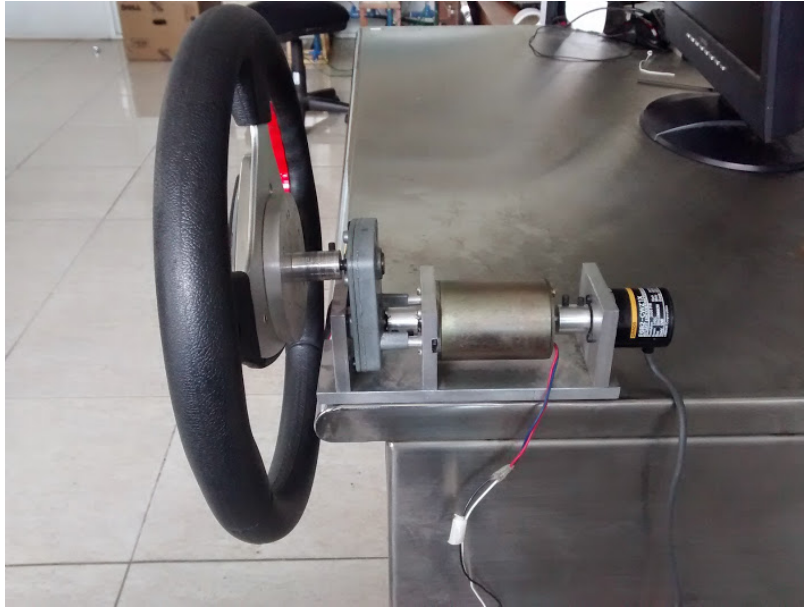


Figura 3.1: Subsistema volante de dirección

El subsistema esclavo de la plataforma experimental consta de un cuarto de suspensión de Volkswagen escarabajo, incluidos un rin de acero de 15 pulgadas, neumático, suspensión del tipo brazo oscilante y rack de montaje. Adicionalmente se proporcionó un mecanismo de tracción basado en dos catarinas de 6 y 7 pulgadas y cadena a través de un motor de scooter de corriente directa de 500 W de la marca Monster Scooter Parts, este motor tiene instalado un regulador de velocidad que funciona a 36 V de la misma marca del motor, para que la rueda gire a diferentes velocidades y hacer más realistas los experimentos.

El subsistema de rack de dirección se puede dividir en tres partes importantes: motor eléctrico de corriente directa, caja de reducción construida con engranes, suspensión incluida la llanta. Los componentes electrónicos y mecánicos usados en el subsistema esclavo son los siguientes: el ángulo de posición del rack de dirección es medido con un encoder incremental de la marca OMRON, modelo E6B2-CWZ1X, 2000PPR, 0.5M. El motor de corriente directa es de la empresa NISCA MOTOR, modelo NC5475B, este se encuentra conectado mecánicamente a la caja de reducción, la cual tiene una relación de reducción de  $N_s = 48$ .

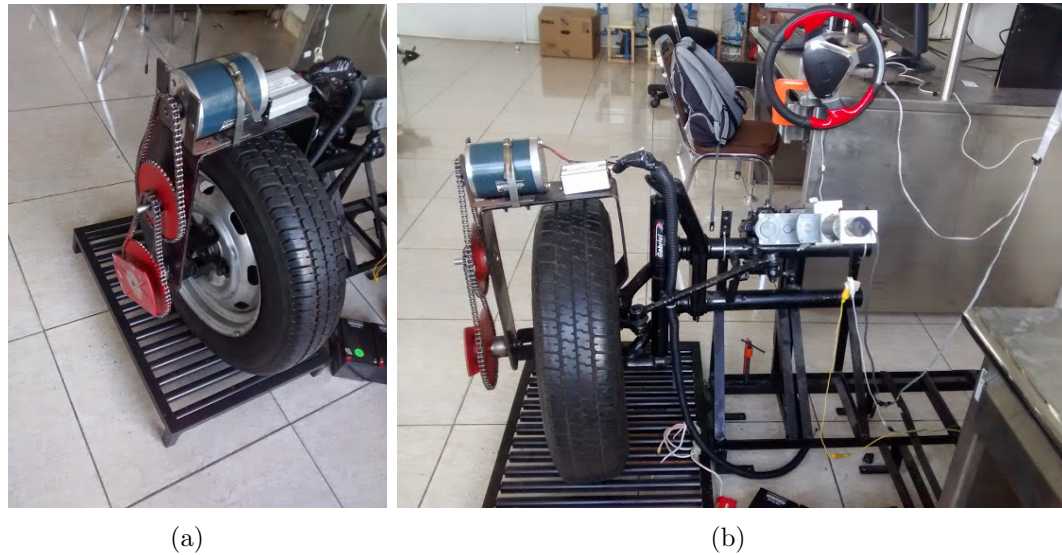


Figura 3.2: a) Mecanismo para proveer tracción b) Rack de dirección: un cuarto de suspensión

### 3.1. Modelos dinámicos

#### 3.1.1. Subsistema maestro

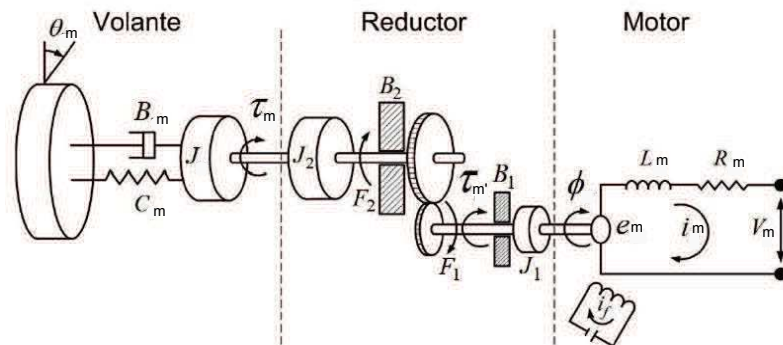


Figura 3.3: esquema subsistema volante de dirección

Primero se presenta el modelo dinámico correspondiente al subsistema de volante de dirección, este modelo está afectado por tres fenómenos físicos que están presentes en tres partes fundamentales: el volante, la caja de reducción y el motor DC como se aprecia en la Figura 3.3. Con respecto a la parte eléctrica, los parámetros más relevantes son,  $V_m$  voltaje de entrada,  $L_m$  corriente de armadura,  $R_m$  resistencia de armadura,  $I_v$  corriente de armadura,  $i_f$  corriente a través del devanado del motor,  $e_m$

fuerza contra-electromotriz,  $k_2$  constante de ganancia de fuerza contra-electromotriz. Ahora los parámetros relevantes con respecto a la parte mecánica son,  $\phi_m$  ángulo de salida del motor,  $J_1$  momento de inercia en la entrada de la caja de reducción,  $B_1$  coeficiente de amortiguamiento en la entrada de la reducción,  $F_1$  coeficiente de fricción de Coulomb a la entrada de la reducción,  $F_2$  coeficiente de fricción de Coulomb a la salida de la reducción,  $B_2$  coeficiente de amortiguamiento en la salida de la reducción,  $J_2$  momento de inercia en la salida de la caja de reducción,  $k_1$  constante de torque del motor,  $\tau'_m$  torque del motor,  $F_{Tm}$  coeficiente de fricción de Coulomb en la caja de reducción,  $\tau_v$  torque en la salida de la caja de reducción,  $J_m$  momento de inercia del volante,  $C_m$  coeficiente de fricción de Coulomb en el volante,  $B_v$  coeficiente de amortiguamiento del volante,  $N_m = \frac{N_{m1}}{N_{m2}}$  proporción de reducción de la caja,  $N_{m1}$  número de dientes en la entrada de la caja,  $N_{m2}$  número de dientes en la salida de la caja,  $\theta_m$  posición angular del volante,  $B_{tm}$  coeficiente de amortiguamiento en la caja de reducción.

Para la parte eléctrica del sistema maestro, la relación dinámica entre el torque de salida  $t_m$  y la entrada de voltaje  $V_m$  está dada por la siguiente expresión:

$$\tau_m = \frac{N_m k_1}{R_m} V_m(t) - \frac{N_m^2 k_1 k_2}{R_m} \dot{\theta}_m \quad (3.1)$$

Ahora, teniendo en cuenta la caja de reducción, la relación dinámica entre  $T_m$  y la posición angular  $\theta_m$  está representada por la siguiente expresión:

$$\tau_m = J_{Tm} \ddot{\theta}_m + B_{Tm} \dot{\theta}_m + F_{Tm} \text{sign}(\dot{\theta}_m) \quad (3.2)$$

Donde,

$$J_{Tm} = \left( \frac{N_{m2}}{N_{m1}} \right)^2 J_1 + J_2 \quad (3.3)$$

$$B_{Tm} = \left( \frac{N_{m2}}{N_{m1}} \right)^2 B_1 + B_2$$

$F_{Tm}$  la fricción de Coulomb es un fenómeno no lineal, que requiere de experimentos para encontrar una aproximación. Finalmente, tomando las ecuaciones (3.1) y (3.2) y

los fenómenos dinámicos en el volante de dirección, se obtiene el modelo dinámico:

$$(J_m + J_{Tm})\ddot{\theta}_m + (B_m + B_{Tm})\dot{\theta}_m + (F_{Tm} + C_m)\text{sign}(\dot{\theta}_m) = \frac{N_m K_1}{R_m} V_m(t) - \frac{N_m^2 k_1 k_2}{R_m} \dot{\theta}_m \quad (3.4)$$

### 3.1.2. Subsistema esclavo

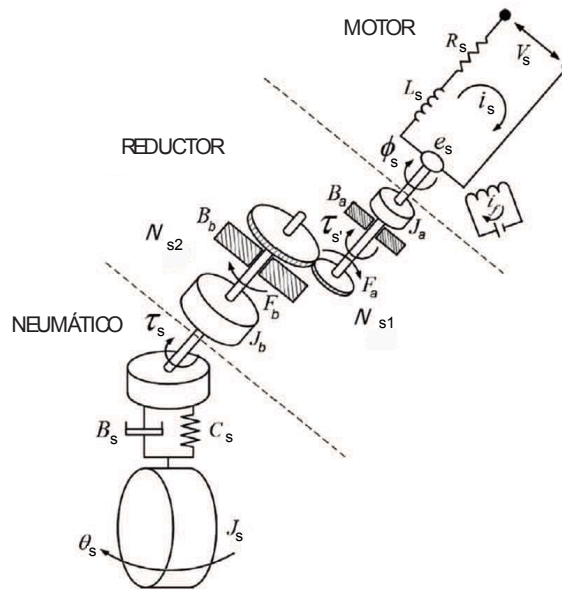


Figura 3.4: esquema subsistema rack de dirección

Ahora para el subsistema del rack de dirección, sus componentes principales son: la rueda, caja de reducción y motor DC como se aprecia en la Figura 3.4. Debido a las similitudes entre ambos sistemas, el modelo dinámico se obtiene de la misma forma que para el subsistema maestro. Sin embargo, debido a la interacción de rodadura de la llanta están presentes efectos dinámicos tales como fricción y fuerzas de alineación que deben ser consideradas. Las fuerzas de alineación serán representadas mediante  $M_z$ . Ahora considere los parámetros relevantes de la parte eléctrica,  $V_s$  voltaje de entrada,  $I_s$  corriente de armadura,  $R_s$  resistencia de armadura,  $I_s$  corriente de armadura,  $i_f$  corriente a través del devanado del motor,  $e_s$  fuerza contra-electromotriz,  $k_2$  constante de ganancia de fuerza contra-electromotriz. Ahora los parámetros relevantes con respecto a la parte mecánica son,  $\phi_s$  ángulo de salida del motor,  $J_a$  momento

de inercia en la entrada de la caja de reducción,  $B_a$  coeficiente de amortiguamiento en la entrada de la reducción,  $F_a$  coeficiente de fricción de Coulomb a la entrada de la reducción,  $F_2$  coeficiente de fricción de Coulomb a la salida de la reducción,  $B_2$  coeficiente de amortiguamiento en la salida de la reducción,  $J_2$  momento de inercia en la salida de la caja de reducción,  $k_1$  constante de torque del motor,  $\tau'_s$  torque del motor,  $F_{T_s}$  coeficiente de fricción de Coulomb en la caja de reducción,  $\tau_s$  torque en la salida de la caja de reducción,  $J_s$  momento de inercia del volante,  $C_s$  coeficiente de fricción de Coulomb en el volante,  $B_s$  coeficiente de amortiguamiento del volante,  $N_s = \frac{N_{s1}}{N_{s2}}$  proporción de reducción de la caja,  $N_{s1}$  número de dientes en la entrada de la caja,  $N_{s2}$  número de dientes en la salida de la caja,  $\theta_s$  posición angular del volante,  $B_{t_s}$  coeficiente de amortiguamiento en la caja de reducción. El modelo se presenta en la siguiente expresión:

$$(J_s + J_{T_s})\ddot{\theta}_s + (B_s + B_{T_s})\dot{\theta}_s + (F_{T_s} + C_s)\text{sign}(\dot{\theta}_s) + M_z = \frac{N_s K_1}{R_s} V_s(t) - \frac{N_s^2 k_1 k_2}{R_s} \dot{\theta}_s \quad (3.5)$$

Donde,

$$J_{T_s} = \left(\frac{N_{s2}}{N_{s1}}\right)^2 J_a + J_b \quad (3.6)$$

$$B_{T_s} = \left(\frac{N_{s2}}{N_{s1}}\right)^2 B_a + B_b$$

$F_{T_s}$  es la fricción de Coulomb es un fenómeno no lineal y para obtener una aproximación es necesario realizar un experimento especial.

## 3.2. Controlador y Observador de Alta Ganancia GPI

### 3.2.1. Volante de dirección

Basado en el modelo dinámico obtenido para el subsistema de volante, ecuación (3.4), los términos no lineales incluyendo perturbaciones y dinámicas no modeladas, son substituidos por un término de perturbación variante en el tiempo  $\varphi(t)$ . El espacio de

estados se define  $x_1 = \theta_m$  y  $x_2 = \dot{\theta}_m$ , el modelo (3.4) está representado por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{N_m k_1}{J_{me} R_m} V_m(t) + \varphi(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta los modelos dinámicos de ambos subsistemas del prototipo se presenta la ley de control del sistema. Para el volante de dirección, buscando una relación posición-voltaje, se tiene la siguiente expresión:

$$\ddot{\theta}_m = \frac{N_m k_1}{J_m R_m} V_m(t) + \varphi(t) \quad (3.8)$$

donde el término variante en el tiempo  $\varphi(t)$  agrupa los términos no lineales, incluyendo las perturbaciones y dinámicas no modeladas,

$$\varphi(t) = -\frac{1}{J_{me}} \left[ (B_{Tm} + B_m) \dot{\theta}_m + (F_{Tm} + C_m) \text{sign}(\dot{\theta}_m) + \frac{N_m^2 k_1 k_2}{R_m} \dot{\theta}_m \right] \quad (3.9)$$

el término  $J_{me} = J_{Tm} + J_m$ . Se asume que  $\varphi(t)$  es una función uniformemente, absolutamente, acotada y variante en el tiempo. Si otros efectos dinámicos o perturbaciones tienen que ser considerados, estos son incluidos en el término  $\varphi(t)$ . Este último es estimado por el observador de alta ganancia GPI.

Basado en el espacio de estados, ecuación (3.7), se propone un observador de alta ganancia GPI para el sistema lineal perturbado. El número de integradores requeridos en el observador de alta ganancia GPI depende del orden y la complejidad de las no-linealidades representadas en  $\varphi(t)$ , este puede modelarse localmente como un polinomio en el tiempo, o polinomio de Taylor, pero en este caso una buena aproximación implicaría una cadena infinita de integradores. El número de integradores fue ajustado heurísticamente con base al valor del error de estimación  $\tilde{e}_m = x_1 - \hat{x}_1$ .

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \lambda_{7m}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{N_m k_1}{J_{me} R_m} V_m(t) + \hat{\varphi}_1 + \lambda_{6m}(x_1 - \hat{x}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\varphi}}_1 &= \hat{\varphi}_2 + \lambda_{5m}(x_1 - \hat{x}_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\varphi}}_6 &= \lambda_{0m}(x_1 - \hat{x}_1)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Noté que el término  $\hat{\varphi}_1$  corresponde al término de perturbación estimada  $\varphi(t)$ . También nótese que el observador de alta ganancia GPI solo requiere la medición del ángulo de posición del volante  $x_1 = \theta_m$ .

El error de estimación  $\tilde{e}_m = x_1 - \hat{x}_1$  del observador de alta ganancia GPI, satisface la siguiente dinámica:

$$\tilde{e}_m^{(8)} + \lambda_{7m}\tilde{e}_m^{(7)} + \dots + \lambda_{2m}\tilde{e}_m + \lambda_{1m}\dot{\tilde{e}}_m + \lambda_{0m}\tilde{e}_m = \varphi^{(6)} \tag{3.11}$$

La expresión (3.11), corresponde a un sistema dinámico lineal no homogéneo, con una entrada dada por una derivada de sexto orden. Para asegurar la convergencia de la dinámica del error a una vecindad pequeña alrededor del origen de coordenadas de fase de error de estimación, las ganancias  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 7$  son seleccionadas, tal que, las raíces del polinomio característico estén suficientemente alejadas hacia la izquierda del eje imaginario, en el plano complejo, esto implica ganancias de alto valor. Una elección simple de estas ganancias es asociando el polinomio característico a un polinomio de grado suficientemente alto de Taylor con el conocimiento adecuado de sus raíces. Dado que el orden del observador es un número par, entonces se selecciona un polinomio de segundo orden con coeficientes  $\xi_{obs,m}$  y  $\omega_{n(obs,m)}$  relacionados con el amortiguamiento y la frecuencia natural, respectivamente:

$$s^{(8)} + \lambda_{7m}s^{(7)} + \dots + \lambda_{2m}s^2 + \lambda_{1m}s + \lambda_{0m} = (s^2 + 2\xi_{obs,m}\omega_{n(obs,m)}s + \omega_{n(obs,m)}^2)^4 \tag{3.12}$$

Dado el observador de la ecuación (3.10), se propone un control PD con rechazo activo de perturbaciones:

$$V_m(t) = -\frac{J_{me}R_m}{k_1N_m} \left[ \hat{\varphi}_1 + \omega_{n(c,m)}^2(\theta_m - \theta_m^*) + 2\xi_{c,m}\omega_{n(c,m)}(\dot{\hat{x}}_2 - \dot{\theta}_m^*) - \ddot{\theta}_m^* + K_h\hat{\sigma}_1 \right] \tag{3.13}$$

donde  $\dot{\theta}_m^*$  y  $\ddot{\theta}_m^*$  son la velocidad y aceleración deseadas, en este caso la impuestas por el usuario a través del volante, las cuales son obtenidas de la posición angular impuesta por  $\theta_m^*$ . El término  $\hat{\sigma}_1$  corresponde a la señal de perturbación estimada en el subsistema de rack de dirección la cual es sopesada por la ganancia  $K_h$  y es retroalimentada al volante para cerrar el lazo háptico, recreando la reflexión de fuerza.

Definiendo el error de seguimiento en el subsistema de volante como  $e_m = \theta_m - \theta_m^*$ , entonces el lazo cerrado está formado por la ecuación (3.7), la ecuación (3.13) y el observador de alta ganancia GPI, ecuación (3.10). Se calcula reemplazando el término del control, ecuación (3.13), en la ecuación (3.7) (variables de estado) y teniendo en cuenta los errores de estimación obtenidos en el observador GPI, ecuación (3.10), por tanto se sigue el siguiente procedimiento:

$$\dot{x}_2 = - \left[ \hat{\varphi}_1 + \omega_{n(c,m)}^2 e_m + 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \left( \overbrace{(\dot{x}_2 - \dot{x}_2^*)}^{\dot{e}_m} - \overbrace{(\dot{x}_2 - \hat{x}_2)}^{\dot{\tilde{e}}_m} \right) - \ddot{\theta}_m^* + K_h \hat{\sigma}_1 \right]$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_m - \ddot{\theta}_m^* &= (\varphi(t) - \hat{\varphi}_1) - \omega_{n(c,m)}^2 e_m - 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \dot{e}_m + 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \dot{\tilde{e}}_m - K_h \hat{\sigma}_1 \\ \ddot{e}_m &= (\varphi(t) - \hat{\varphi}_1) - \omega_{n(c,m)}^2 e_m - 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \dot{e}_m + 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \dot{\tilde{e}}_m - K_h \hat{\sigma}_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para obtener finalmente la expresión lineal no homogénea (lazo cerrado):

$$\ddot{e}_m + 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \dot{e}_m + \omega_{n(c,m)}^2 e_m = (\varphi - \hat{\varphi}_1) + 2\xi_{c,m} \omega_{n(c,m)} \dot{\tilde{e}}_m - K_h \hat{\sigma}_1 \quad (3.15)$$

donde el lazo cerrado es excitado por tres términos de los cuales,  $(\varphi - \hat{\varphi}_1)$  y  $\dot{\tilde{e}}_m$  corresponden a la estimación de los errores del observador de alta ganancia GPI.

### 3.2.2. Rack de dirección

Ahora, debido a la similitud de los modelos de ambos subsistemas se tiene que el espacio de estados para el subsistema esclavo considerando  $y_1 = \theta_s$  y  $y_2 = \dot{\theta}_s$ , es el siguiente:



$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{N_s k_1}{J_{se} R_s} V_s(t) + \sigma(t)\end{aligned}\quad (3.16)$$

donde el término variante en el tiempo  $\sigma(t)$  agrupa los fenómenos desconocidos, incluyendo las perturbaciones y dinámicas no modeladas,

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= -\frac{1}{J_{se}} [(B_{Ts} + B_s)\dot{\theta}_s + (F_{Ts} + C_s)\text{sign}(\dot{\theta}_s) + \\ &\quad \frac{N_s^2 k_1 k_2}{R_s} \dot{\theta}_s + M_z]\end{aligned}\quad (3.17)$$

el término  $J_{se} = J_{Ts} + J_s$ . Se asume que  $\sigma(t)$  es una función uniformemente, absolutamente, acotada y variante en el tiempo. Si otros efectos dinámicos o perturbaciones tienen que ser considerados, estos son incluidos en el término  $\sigma(t)$ . Este último es estimado por el observador de alta ganancia GPI. De igual forma al modelo anterior se presenta un observador de alta ganancia GPI. Observe que el observador de alta ganancia solo requiere de la medida del ángulo de posición del volante, minimizando el total de los sensores del sistema.

Basado en el espacio de estados, ecuación (3.16), se propone un observador de alta ganancia GPI para el sistema lineal perturbado. El número de integradores requeridos en el observador de alta ganancia GPI depende del orden y la complejidad de las no-linealidades representadas en  $\sigma(t)$ , este puede modelarse localmente como un polinomio en el tiempo, o polinomio de Taylor, pero en este caso una buena aproximación implicaría una cadena infinita de integradores. El número de integradores fue ajustado de manera heurística en base al valor del error de estimación  $\tilde{e}_s = y_1 - \hat{y}_1$ .

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{7s}(y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{y}}_2 &= \frac{N_s k_1}{J_{re} R_s} V_s(t) + \hat{\sigma}_1 + \lambda_{6s}(y_1 - \hat{y}_1) \\ \dot{\hat{\sigma}}_1 &= \hat{\sigma}_2 + \lambda_{5s}(y_1 - \hat{y}_1) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\sigma}}_6 &= \lambda_{0s}(y_1 - \hat{y}_1)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Note que el término  $\hat{\sigma}_1$  corresponde al término de perturbación estimada  $\sigma(t)$ . El error de estimación ( $\tilde{e}_s = y_1 - \hat{y}_1$ ) del observador de alta ganancia GPI, satisface la siguiente dinámica,

$$\tilde{e}_s^{(8)} + \lambda_{7s}\tilde{e}_s^{(7)} + \dots + \lambda_{2s}\ddot{\tilde{e}}_s + \lambda_{1s}\dot{\tilde{e}}_s + \lambda_{0s}\tilde{e}_s = \varphi^{(6)} \quad (3.19)$$

La expresión (3.19), corresponde a un sistema dinámico lineal no homogéneo, con una entrada dada por una derivada de sexto orden. Para asegurar la convergencia de la dinámica del error a una vecindad pequeña alrededor del origen de coordenadas de fase de error de estimación, las ganancias  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 7$  son seleccionadas, tal que, las raíces del polinomio característico estén suficientemente alejadas hacia la izquierda del eje imaginario, en el plano complejo, esto implica ganancias de alto valor. Una elección simple de estas ganancias es asociando el polinomio característico a un polinomio de grado suficientemente alto de Taylor con el conocimiento adecuado de sus raíces. Dado que el orden del observador es un número par, entonces se selecciona un polinomio de segundo orden con coeficientes  $\xi_{obs,s}$  y  $\omega_{n(obs,s)}$  relacionados con el amortiguamiento y la frecuencia natural, respectivamente:

$$s^{(8)} + \lambda_{7s}s^{(7)} + \dots + \lambda_{2s}s^2 + \lambda_{1s}s + \lambda_{0s} = (s^2 + 2\xi_{obs,s}\omega_{n(obs,s)}s + \omega_{n(obs,s)}^2)^4 \quad (3.20)$$

Dado el observador de la ecuación (3.18), se propone un control PD con rechazo activo de perturbaciones:

$$V_s(t) = -\frac{J_{se}R_s}{k_1N_s}[\hat{\sigma}_1 + \omega_{n(c,s)}^2(\theta_s - \theta_m(t)) + 2\xi_{c,s}\omega_{n(c,s)}(\hat{y}_2 - \hat{x}_2) - \dot{\hat{x}}_2] \quad (3.21)$$

El término  $\hat{\sigma}_1$  corresponde a la señal de perturbación estimada en el subsistema de rack de dirección. Definiendo el error de seguimiento en el subsistema de rack de dirección como  $e_s = \theta_s - \theta_m$ , entonces el lazo cerrado formado por la ecuación (3.16) (variables de estado), la ecuación (3.21) (control) y el observador de alta ganancia GPI, ecuación (3.18), esta dado por la siguiente ecuación lineal no homogénea:

$$\ddot{e}_s + 2\xi_{c,s}\omega_{n(c,s)}\dot{e}_s + \omega_{n(c,s)}^2e_s = (\sigma - \hat{\sigma}_1) + 2\xi_{c,s}\omega_{n(c,s)}(\dot{\tilde{e}}_m - \dot{\tilde{e}}_s) - \ddot{\tilde{e}}_s \quad (3.22)$$

Que se obtiene de igual forma a la ecuación (3.15).

### 3.3. Adquisición de datos: Unidad de Medición Inercial

Como se ha mencionado en el Capítulo 2, para calcular el torque de autoalineación serán necesarios encontrar los parámetros que lo definen, tales como: ángulo de inclinación, ángulo de deslizamiento, rastro neumático, coeficientes de fricción, entre otros. Para encontrar algunos de ellos fue necesario proveer al sistema de una Unidad de Medición Inercial (Inertial Measurement Unit, IMU). Para este trabajo fue usada una IMU de la compañía Xsens Technologies B.V. de referencia MTx, además de unidad de medición inercial, se tiene un modulo llamado X-bus Master, que tiene la capacidad de conectar distintas IMU a través de la vía de comunicación RS-485 y establecer comunicación mediante tecnología Bluetooth® con una computadora. La configuración de la IMU esta definida por el fabricante, pero también es posible configurar la unidad por medio de un lenguaje de bajo nivel (trabajando directamente con el Procesador Digital de Señales, DSP, que poseen internamente). En esta sección se explica como se estableció comunicación con la Unidad de Medición Inercial a través de lenguaje C, utilizando Funciones-S, en el software Matlab® mediante una plataforma de Simulink®.



Figura 3.5: X-bus Master y Unidad de Medición Inercial.

En el manual [35] del fabricante se puede encontrar todo al respecto al protocolo de comunicación de bajo nivel para la IMU y en el manual [36] todo al respecto a la construcción de la unidad. La unidad de medición inercial tiene dos estados: el primero es el de configuración, en el cual se configura que tipo de dato se enviará a la IMU, tales como: tasa de envío del dato, el tiempo de muestreo, etc. el segundo estado es el de medición, en este estado la unidad de medición inercial envía los datos que lee, según la configuración realizada.

Para configurar la IMU se envía una palabra de tamaño estándar o extendida de la siguiente forma,

|                 |            |            |                          |                |             |                 |
|-----------------|------------|------------|--------------------------|----------------|-------------|-----------------|
| Estandar:       |            |            |                          |                |             |                 |
| <b>PREAMBLE</b> | <b>BID</b> | <b>MID</b> | <b>LEN</b>               |                | <b>DATA</b> | <b>CHECKSUM</b> |
| Extendido:      |            |            |                          |                |             |                 |
| <b>PREAMBLE</b> | <b>BID</b> | <b>MID</b> | <b>LEN<sup>EXT</sup></b> | <b>EXT LEN</b> | <b>DATA</b> | <b>CHECKSUM</b> |

Figura 3.6: Palabra de configuración: estándar y extendida.

donde la descripción de cada campo de la palabra de configuración es la siguiente:

| CAMPO                   | TAMAÑO DEL CAMPO   | DESCRIPCIÓN                      |
|-------------------------|--------------------|----------------------------------|
| PREAMBLE                | 1 BYTE: 250 (0XFA) | INDICADOR DE INICIO DE PAQUETE   |
| BID                     | 1 BYTE: 255 (0XFF) | IDENTIFICADOR DE BUS O DIRECCIÓN |
| LEN                     | 1 BYTE             | TAMAÑO ESTANDAR: MÁX. 254 (0XFE) |
| EXT LEN                 | 2 BYTES            | VALOR MÁXIMO: 2048 (0X0800)      |
| DATA (TAMAÑO ESTANDAR)  | 0 - 254 BYTES      | BYTES DE DATOS                   |
| DATA (TAMAÑO EXTENDIDO) | 255 - 2048 BYTES   | BYTES DE DATOS                   |
| CHECKSUM                | 1 BYTE             | CHECKSUM DEL MENSAJE             |

Tabla 3.1: Descripción de los campos de la palabra

Como se mencionó anteriormente la programación se realizó en código C, a través de funciones-S. El código de programación (Apéndice A) describe la apertura del puerto virtual COM, lectura y configuración de la IMU en tiempo real. Para configurar la unidad inercial se envía una palabra para indicar el estado de configuración (MID 62 = 0X3E). A continuación se presenta los modos de salida en que puede ser configurada la IMU, la palabra tiene la siguiente estructura:

|    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R  |    | R  |    |    | R  | R | R |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Figura 3.7: Estructura de la palabra para el modo de configuración

| MODO BITS | MODO DE SALIDA                   |
|-----------|----------------------------------|
| BIT 0     | DATO DE TEMPERATURA              |
| BIT 1     | DATO DE CALIBRACIÓN              |
| BIT 2     | DATO DE ORIENTACIÓN              |
| BIT 3     | DATO AUXILIAR                    |
| BIT 4     | DATO DE POSICIÓN                 |
| BIT 5     | DATO DE VELOCIDAD                |
| BIT 11    | DATO DE ESTATUS                  |
| BIT 12    | DATO CRUDO DEL GPS               |
| BIT 14    | DATO CRUDO DE LA UNIDAD INERCIAL |

Tabla 3.2: Modos de salida

en la Tabla 3.2 los Bits 12 y 14, son usados solo para el uso de Unidades de Medición Inercial con Sensor de Posición Global incluido (GPS), para Xsens Technologies B.V. es la unidad de medición inercial de referencia MTi-G. Los campos con **R** en la estructura de la palabra de modo de configuración en la Figura 3.7 son reservados. Se permiten 3 estados de configuración de la orientación de la IMU (bit 3-2): cuaterniones (00), ángulos de Euler (01) o matriz de rotación (10). Para este trabajo fue configurada la IMU con orientación según cuaterniones, esto para evitar singularidades. Fueron habilitados en el modo de calibración (bit 6-4) el acelerómetro (bit 4) y magnetómetro (bit 6). En la siguiente tabla se presentan los mensajes hacia la unidad de medición inercial y su respectiva función:

| MENSAJE         | MID    | DIRECCIÓN | DESCRIPCIÓN   |
|-----------------|--------|-----------|---|
| WakeUp          | (0X3E) | Host      | Se envía este mensaje cuando se enciende o cuando se restablece |
| GoToConfig      | (0X3F) | MT        | Estado de configuración   |
| GoToMeasurement | (0X10) | MT        | Estado de medición  |
| Reset           | (0X41) | MT        | Restablecer dispositivo   |

Tabla 3.3: Mensajes relacionados con la IMU

Ya configurada la IMU se envía el mensaje correspondiente para activar el estado de medición de la unidad de medición inercial. Para restablecer el dispositivo se hizo uso del reset de alineación (0X44). Al restablecer la IMU, esta ignora el marco global-terrestre y define un nuevo marco de referencia sobre la orientación actual de la unidad de medición inercial, estableciendo que la coordenada  $z$  de la IMU debe estar sobre el eje vertical. Para este trabajo se calibró la IMU sobre una posición vertical, para poder así obtener la prolongación de los ángulos requeridos en la llanta de la plataforma experimental.

### 3.4. Tratamiento de señal de la Unidad de Medición Inercial

Como se ha mencionado anteriormente, la configuración de la IMU fue hecha en función-S en lenguaje C, en el mismo código se establece cuantos puertos de salida

requerirá el bloque en Simulink® que llamará el código de programación. También se hace uso de una función para convertir los datos de cuaterniones a ángulos de Euler (Apéndice A) debido a que con cuaterniones no se describen los movimientos angulares que se necesitarán para encontrar el torque de restauración en el neumático.

Una vez obtenidos los datos, es posible manipularlos en Simulink®. Para este trabajo los datos de la IMU fueron enviados por el puerto paralelo de la computadora. Para la programación de este puerto se usaron 10 bits para el envío de los datos de la IMU. Por lo cual el primer paso fue hacer una cuantificación de los datos, esto es, transformar el dato de punto flotante a una escala decimal, que en este caso es de 0 a 1023. La escala fue hecha para cada señal de manera independiente ya que cada ángulo de Euler tiene un espacio de trabajo. El ángulo de guiñada tiene una variación de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$  por lo cual la cuantificación de este dato es de la siguiente forma:

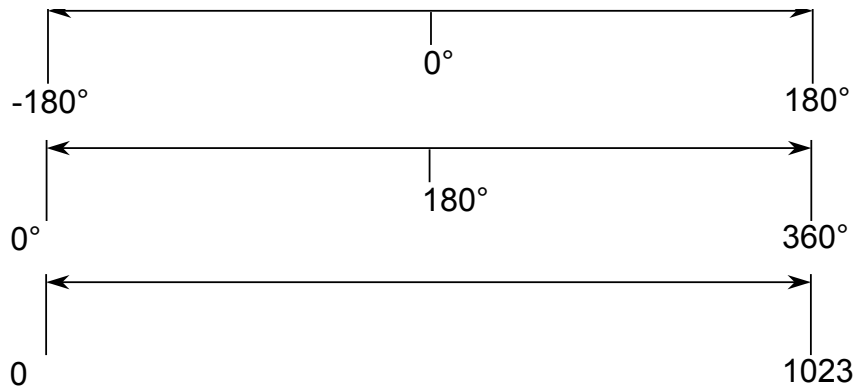


Figura 3.8: Cuantificación del ángulo de guiñada y balanceo

Y se usa la siguiente expresión para transformar el dato:

$$\begin{aligned}
 Q_i &= (q_i + 180) \frac{2^n}{360} \\
 n &= 10
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Debido a que el ángulo de balanceo posee el mismo rango de trabajo al igual que el de guiñada, en la expresión (3.23), para  $i = 1, 2$ ,  $q_1$  es el ángulo de guiñada y  $q_2$  es el ángulo de balanceo. Con esto se obtiene la cuantificación de cada uno de estos dos ángulos. Ahora, para el ángulo de cabeceo tiene un área de trabajo de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ , por lo cual su cuantificación fue hecha de la siguiente forma:

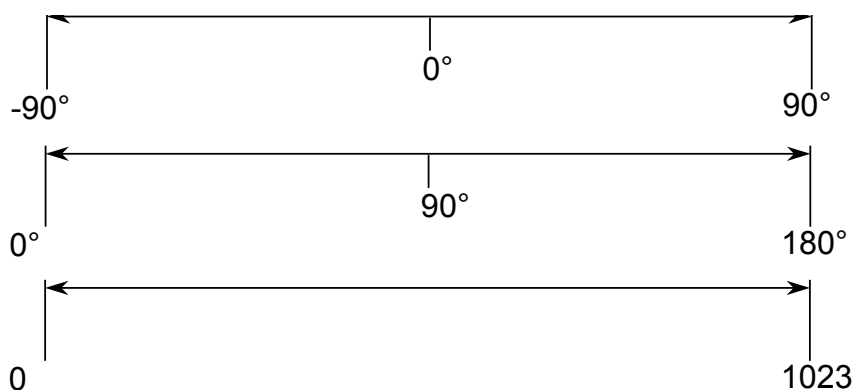


Figura 3.9: Cuantificación del ángulo de cabeceo

Y se usa la siguiente expresión para transformar el dato:

$$Q_3 = (q_3 + 90) \frac{2^n}{180} \quad (3.24)$$

$$n = 10$$

donde,  $q_3$  es el ángulo de cabeceo.

Una vez enviados los datos por el puerto paralelo, el receptor aplica una transformación inversa a la de las expresiones (3.24) y (3.23), para reconstruir el dato de la IMU.

### 3.5. Comunicación

La adquisición de los datos de la unidad de medición inercial es hecha por una computadora independiente a la que realiza el control del sistema, esto debido a que por la naturaleza de la comunicación de los sensores (comunicación serial) el software no permite la implementación en tiempo real. Como se comentó anteriormente, los datos de la IMU son enviados por el puerto serial de la computadora 1 a la tarjeta de adquisición de datos instalada en la computadora 2.

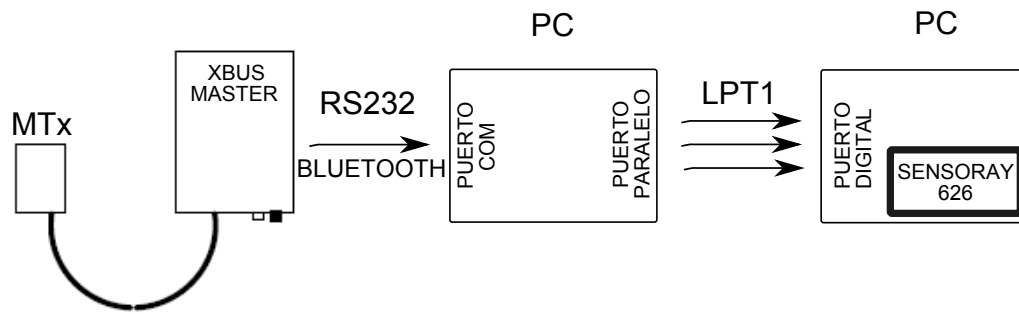


Figura 3.10: Diagrama de comunicación

Como se muestra en la Figura 3.10, la primer etapa de izquierda a derecha es enviar los datos con una frecuencia de muestreo de 100 Hz por medio de tecnología Bluetooth® a la computadora 1 con el software mencionado anteriormente, la señal de la IMU es tratada acá y enviada por medio del puerto paralelo a la computadora 2. para esto fue necesario realizar un código en Simulink® donde se emplearon bloques especiales para el uso del puerto paralelo, Figura 3.11

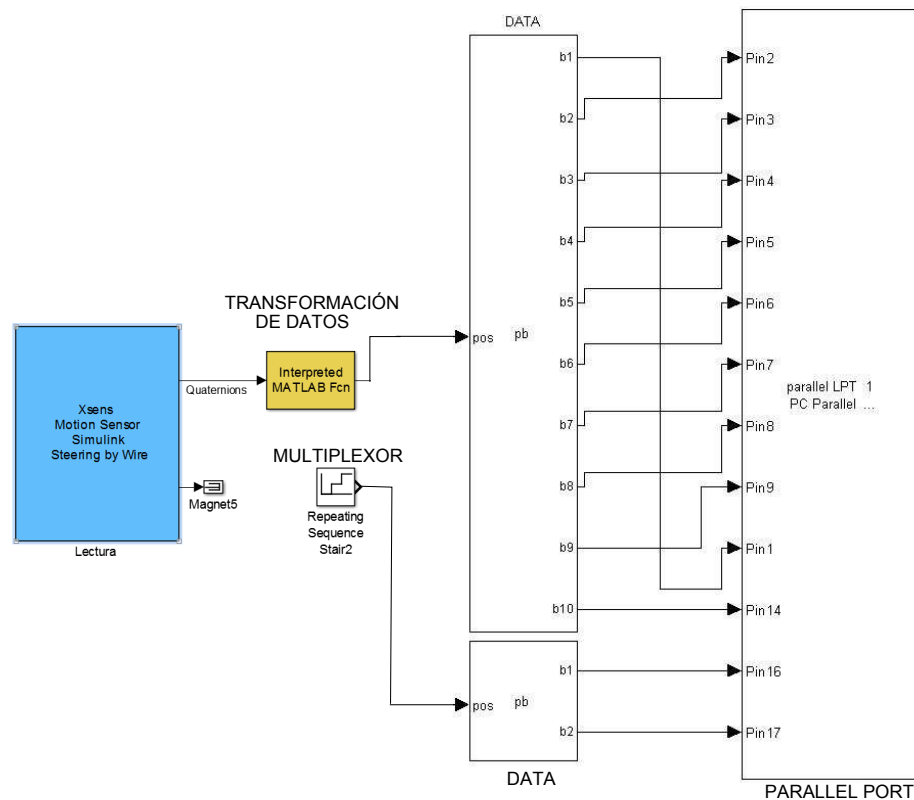


Figura 3.11: Bloques en Simulink®: Lectura, transformación y puerto paralelo



El puerto físico en la computadora es el LPT1, este es conectado directamente a los pines bidireccionales de la tarjeta de adquisición de datos de la marca Sensoray, modelo 626, esta además cuenta con 6 entradas para encoder, 4 conectores convertidores de señales digitales y analógicas como salidas, 16 convertidores analógicos digitales como entradas, con 48 pines digitales bidireccionales. La cual es usada bajo un entorno de programación en Matlab<sup>®</sup>, con Simulink<sup>®</sup> usando Real Time Windows Target. Esta tarjeta se encuentra instalada en la segunda computadora, y es la encargada de ejecutar las leyes de control mencionadas anteriormente, y la conexión con plataforma física usada. Se hace uso de dos bits más, esto con el fin de multiplexar la señal que es enviada (ángulos de Euler), esta multiplexación es hecha de tal forma que se envía sucesivamente números del 0 al 2, y en la computadora que recibe la señal a través de Simulink<sup>®</sup> se hace uso de bloques para traducir la señal que se está recibiendo por el puerto digital de la tarjeta de adquisición de datos, también se implementa un bloque de condición (*if*) para identificar cada dato multiplexado. En la segunda computadora la frecuencia de muestreo es de 2 kHz por tanto fue necesario el uso de retenedores de orden cero para tener sincronización entre ambas computadoras.

# Capítulo 4

## Resultados Experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales del esquema bilateral Maestro-esclavo con reflexión de fuerza-posición, se presenta primero como es la respuesta del sistema sin tracción y con tracción en la llanta, posterior a esto se presentan experimentos con perturbaciones impulsivas excitadas exteriormente mediante objetos al sistema sin tracción y con tracción en la llanta. También son presentados la obtención de los parámetros para calcular el torque de auto-alineación.

Los experimentos fueron realizados con una computadora con sistema operativo Windows<sup>®</sup> XP, como mencionado en el Capítulo 3, cada subsistema posee un sensor de posición, circuitos electrónicos de amplificación y comparten la tarjeta de adquisición de datos y la computadora como el control.

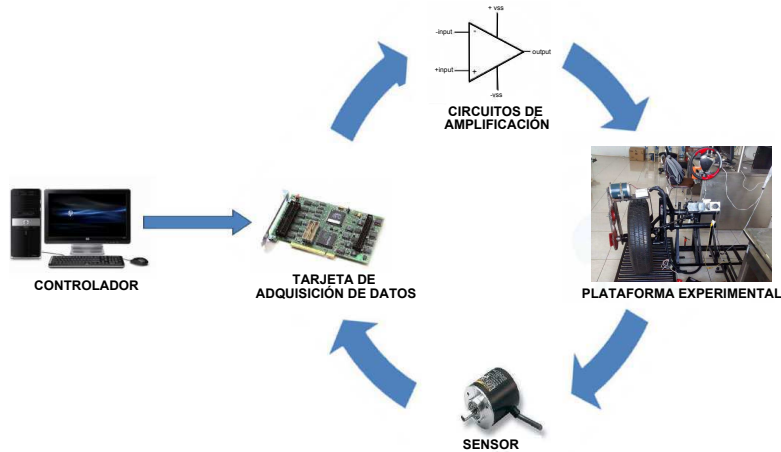


Figura 4.1: Diagrama de plataforma experimental

Los circuitos electrónicos de amplificación de cada subsistema están compuestos por transistores de referencia  $TIP142T$  y  $TIP42C$ , también poseen un amplificador operacional de referencia  $OPA2604AP$ , (diagrama del circuito, Apéndice C).

Para todos los experimentos las ganancias del controlador fueron seleccionadas de tal manera que el error de posición permaneciera pequeño, y las ganancias del observador GPI fueron escogidas como se mencionó en el Capítulo 2. Las ganancias para el subsistema maestro son las siguientes:

| $\xi_{c,m}$ | $\omega_{n(c,m)}$ | $\xi_{obs,m}$ | $\omega_{n(obs,m)}$ |
|-------------|-------------------|---------------|---------------------|
| 1.01        | 5.92              | 2.2           | 15.2                |

Tabla 4.1: Ganancias para el subsistema maestro: controlador y observador

Y las ganancias para el subsistema esclavo:

| $\xi_{c,s}$ | $\omega_{n(c,s)}$ | $\xi_{obs,s}$ | $\omega_{n(obs,s)}$ |
|-------------|-------------------|---------------|---------------------|
| 2.53        | 5.92              | 10            | 25                  |

Tabla 4.2: Ganancias para el subsistema esclavo: controlador y observador

## 4.1. Resultados experimentales sin perturbaciones tipo impulsivas

### 4.1.1. Experimento sin tracción

Para este experimento, fue impuesta una trayectoria arbitraria a través del volante de dirección  $\theta_m^*$ . El objetivo de este experimento es observar el comportamiento del sistema sin tener tracción en la llanta, monitoreando el seguimiento de trayectoria y que el error de seguimiento permaneciera acotado.

En la Figura 4.2 se puede apreciar el seguimiento de trayectoria de la señal de posición del volante  $\theta_m^*$  y la señal del rack de dirección  $\theta_s$

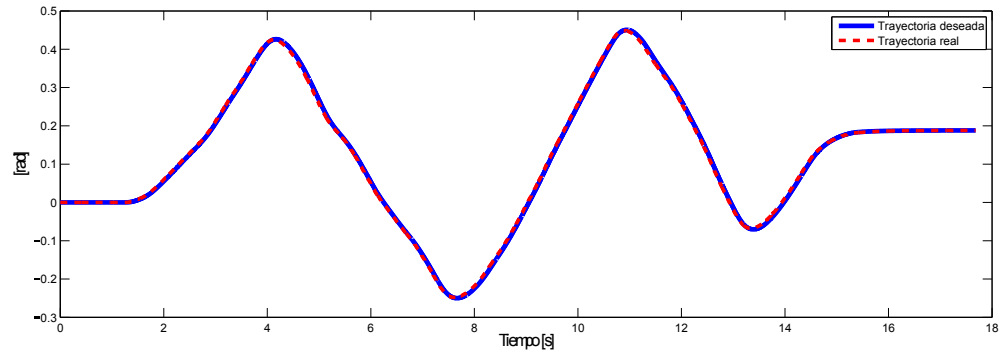


Figura 4.2: Posición actual vs deseada sin tracción en la rueda

En la Figura 4.3 se presenta la trayectoria del sistema real con respecto a la trayectoria estimada por el observador de alta ganancia GPI.

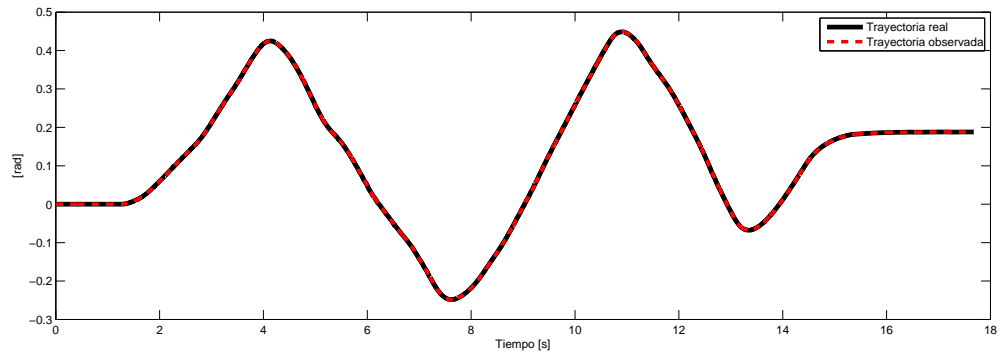


Figura 4.3: Trayectoria observada contra trayectoria real sin tracción en la rueda

La estimación de la trayectoria por parte del observador se puede considerar que es buena. En la Figura 4.4 se observa el error de seguimiento de la trayectoria  $e_s$  correspondiente al sistema bidireccional con reflexión de fuerza-posición sin tracción en la rueda:

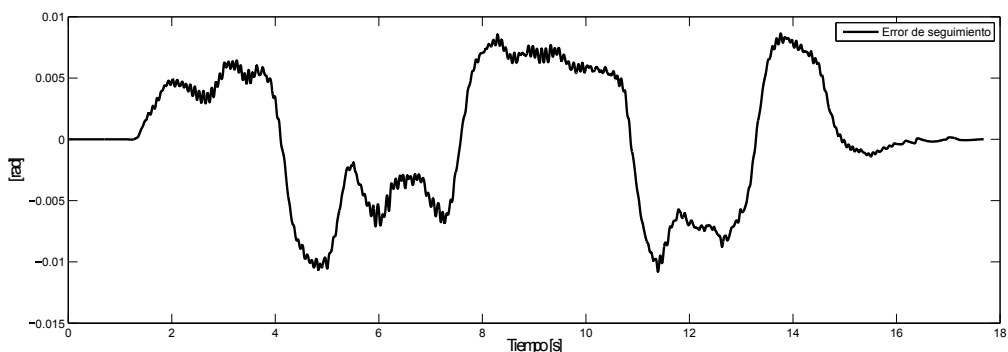


Figura 4.4: Error de seguimiento de trayectoria  $e_s$  sin tracción en la rueda

Nótese que los valores de error son muy pequeños, los picos más altos no llegan a valores de  $0,01$  [rad]. En la Figura 4.5 se presenta la señal de perturbación estimada en línea por el observador GPI de estados. Para la reflexión de fuerza hacia el dispositivo maestro, se usó una ganancia ( $K_h$ ) para sopesar el valor de la reflexión de la perturbación, para este experimento se ajustó al valor de  $0,015$  debido a que la rigidez para dar giros al volante se hacía mayor conforme la ganancia se aumentaba, el valor seleccionado se consideró adecuado de acuerdo a la sensación del operador.

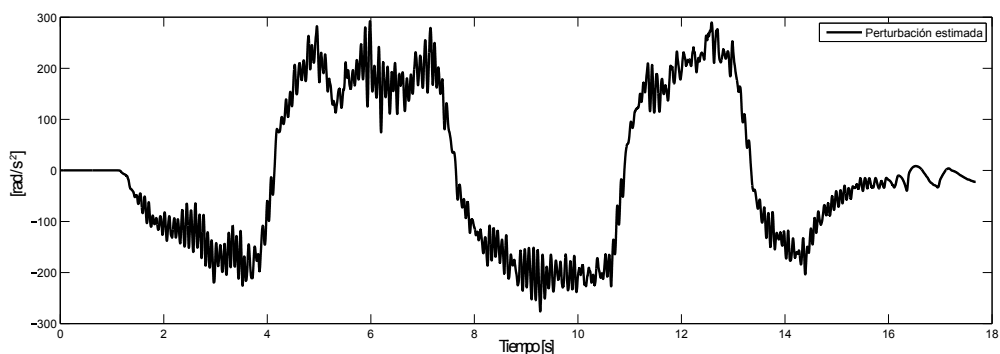


Figura 4.5: Perturbación estimada  $\hat{\sigma}_s(t)$  retroalimentada al subsistema maestro sin tracción en la rueda

Se puede apreciar que para este caso sin tracción y sin perturbaciones impulsivas los picos positivos de la perturbación no exceden valores de  $300$  [ $\frac{rad}{s^2}$ ]. En la Figura 4.6 se

puede observar el voltaje de control para este experimento:

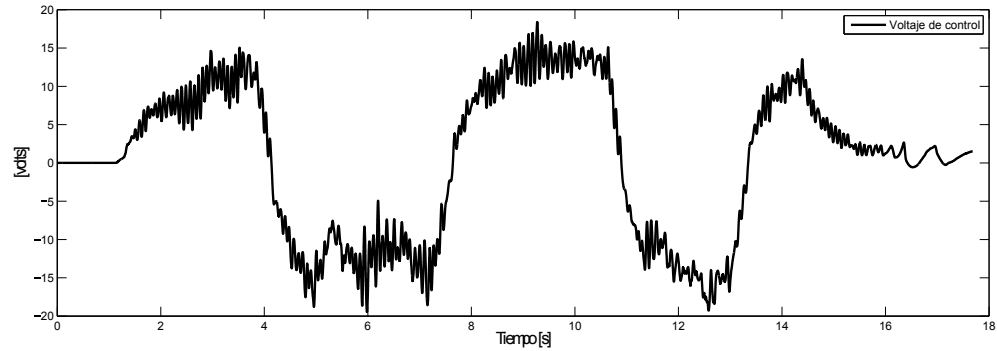


Figura 4.6: Voltaje de control sin tracción en la rueda

#### 4.1.2. Experimento con tracción

Para este experimento, fue impuesta una trayectoria aleatoria a través del volante de dirección  $\theta_m^*$ . El objetivo de este experimento es observar el comportamiento del sistema teniendo tracción en la llanta a un rango de velocidades entre  $0,522 \frac{m}{s}$  y  $1,068 \frac{m}{s}$ , monitoreando el seguimiento de trayectoria y que el error de seguimiento permaneciera acotado.

En la Figura 4.7 se puede apreciar el seguimiento de trayectoria de la señal de posición del volante  $\theta_m^*$  y la señal del rack de dirección  $\theta_s$

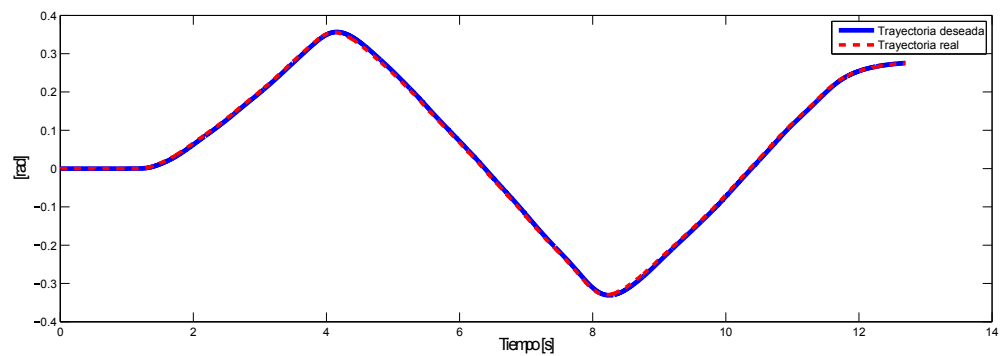


Figura 4.7: Posición actual vs deseada con tracción en la rueda

En la Figura 4.8 se presenta la trayectoria del sistema real con respecto a la trayectoria estimada por el observador de alta ganancia GPI.

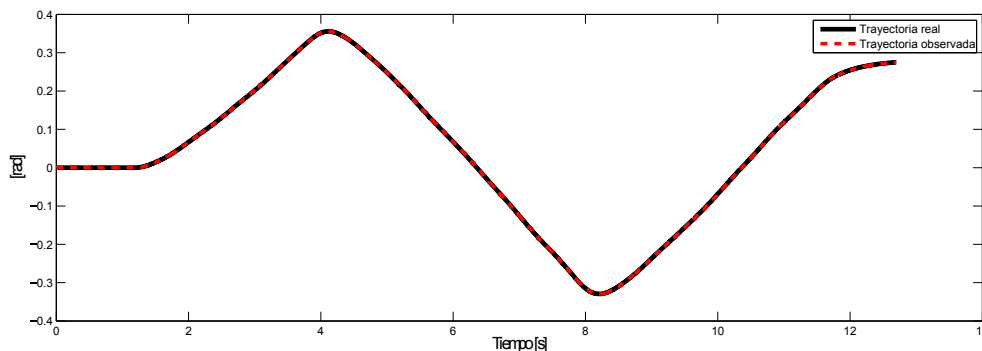


Figura 4.8: Trayectoria observada contra trayectoria real con tracción en la rueda

El observador estima en línea de manera correcta la trayectoria del rack de dirección. En la Figura 4.9 se observa el error de seguimiento de la trayectoria  $e_s$  correspondiente al sistema bidireccional con reflexión de fuerza-posición con tracción en la rueda:

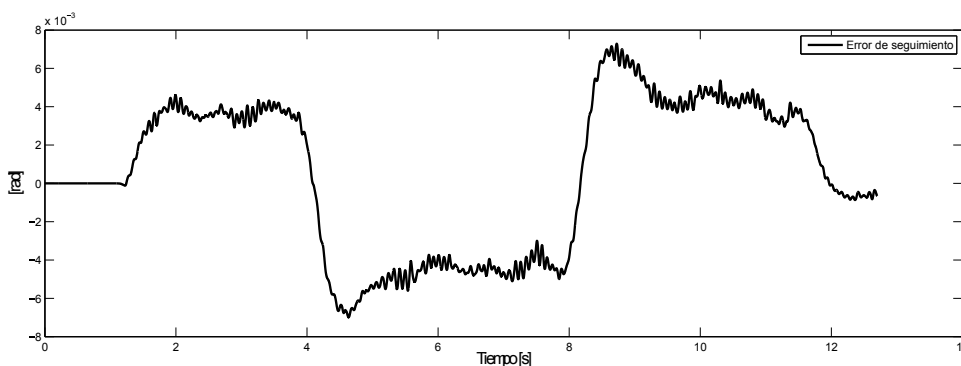


Figura 4.9: Error de seguimiento de trayectoria  $e_s$  con tracción en la rueda

En la Figura 4.10 se presenta la señal de perturbación estimada en línea por el observador GPI de estados. Para la reflexión de fuerza hacia el dispositivo maestro se usó una ganancia ( $K_h$ ) para sopesar el valor de la reflexión de la perturbación, para este experimento se llevó al valor de 0,015 debido a que la rigidez para dar giros al volante se hacia mayor conforme la ganancia se aumentaba, el valor seleccionado se considero adecuado de acuerdo a la sensación del operador.

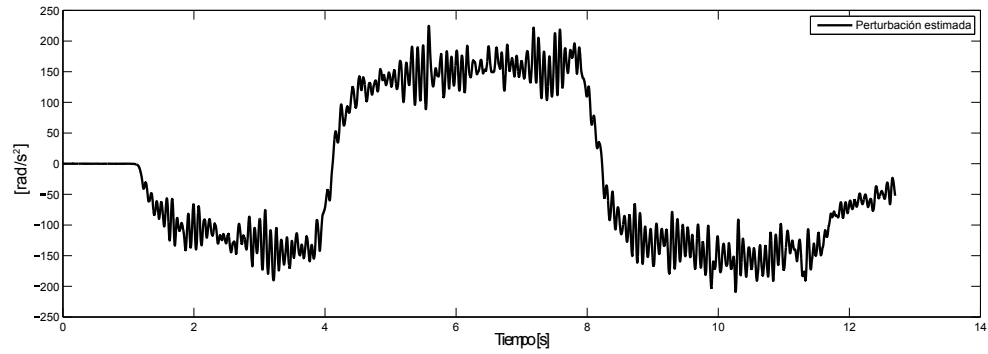


Figura 4.10: Perturbación estimada  $\hat{\sigma}_s(t)$  retroalimentada al subsistema maestro con tracción en la rueda

En la Figura 4.11 se aprecia el voltaje de control en este experimento:

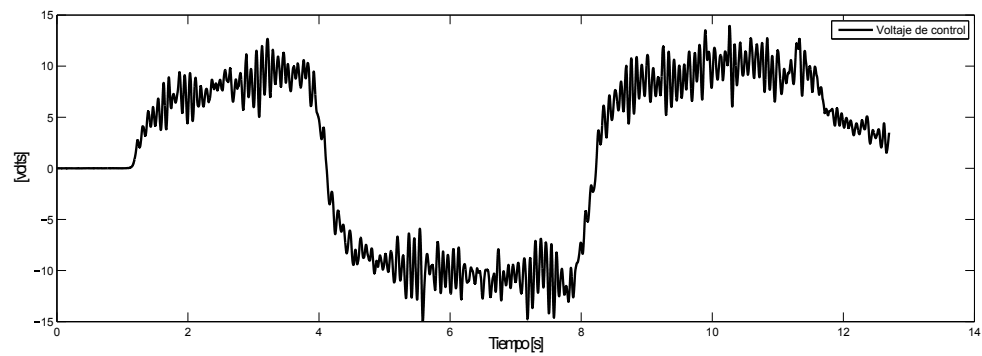


Figura 4.11: Voltaje de control con tracción en la rueda



## 4.2. Resultados experimentales con perturbaciones tipo impulsivas

### 4.2.1. Experimento sin tracción

Para este experimento fue impuesta una trayectoria aleatoria a través del volante de dirección  $\theta_m^*$ . El objetivo de este experimento es observar el comportamiento del sistema sin tracción en la llanta pero perturbando tipo impulsivamente por medio de elementos (externamente), monitoreando el seguimiento de trayectoria y que el error de seguimiento permaneciera acotado.

Para este experimento se introdujeron perturbaciones aproximadamente a los 4 s del experimento, luego cada 3 s aproximadamente. A continuación se presenta la Figura 4.12 donde se encuentran la trayectoria del subsistema de rack de dirección con respecto a la trayectoria impuesta por el volante.

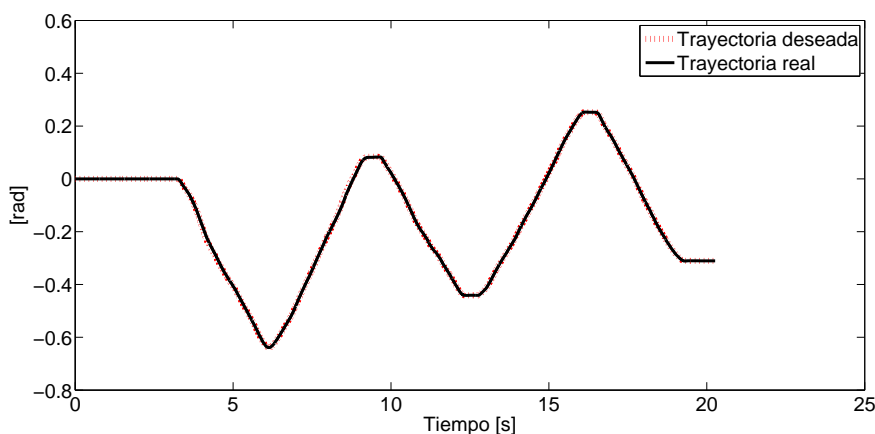


Figura 4.12: Posición actual vs deseada sin tracción sin tracción, con perturbaciones tipo impulsivas

En la Figura 4.13 se presenta la trayectoria del sistema real con respecto a la trayectoria estimada por el observador de alta ganancia GPI.

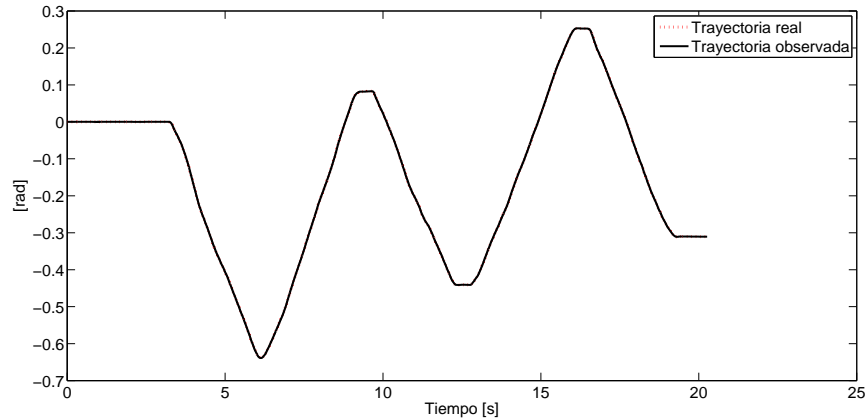


Figura 4.13: Trayectoria observada contra trayectoria real sin tracción con perturbaciones tipo impulsivas

La estimación de la trayectoria por parte del observador se puede considerar que es adecuada. En la Figura 4.14 se observa el error de seguimiento de la trayectoria  $e_s$  correspondiente al subsistema esclavo implementando un esquema bilateral de fuerza-posición, sin tracción en la rueda con las perturbaciones tipo impulsivas:

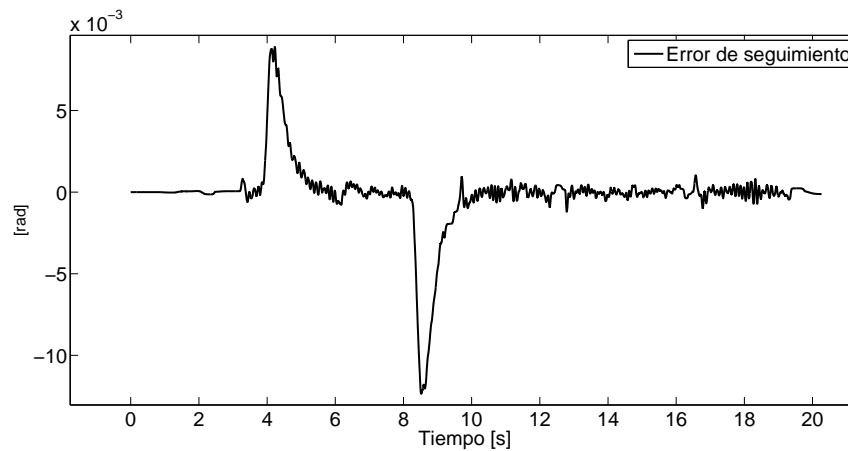


Figura 4.14: Error de seguimiento de trayectoria  $e_s$  sin tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas.

Los valores del error se encuentran acotados, el pico más alto no excede  $1,2 \text{ m rad}$ . En la Figura 4.15 se presenta la señal de perturbación estimada en línea por el observador GPI de estados. Para la reflexión de fuerza hacia el dispositivo maestro se usó una ganancia ( $K_h$ ) que sopesa el valor de la reflexión de la perturbación, para este experimento se llevo al valor de 0,015.

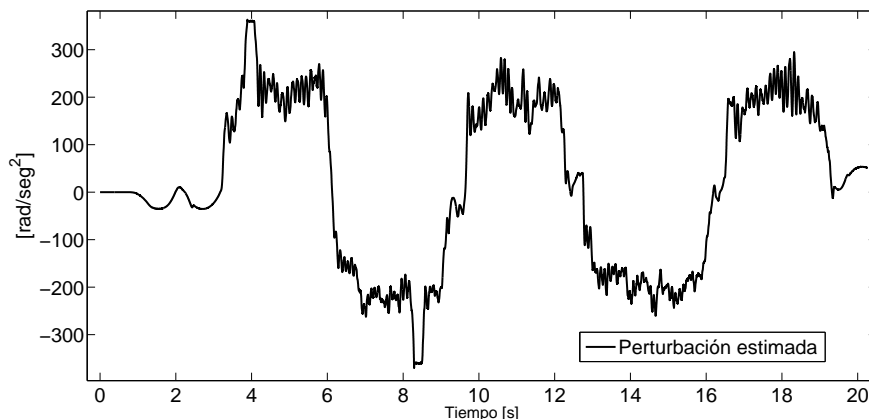


Figura 4.15: Perturbación estimada  $\hat{\sigma}_s(t)$  retroalimentada al subsistema maestro sin tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas

Se puede apreciar que aproximadamente entre 3 y 4, 6 y 7, 9 y 10 s los picos son más notables que los demás. Cuando se perturbada el sistema (frenando el movimiento rotacional de la llanta) el usuario podía percibir livianamente cuando sucedía, dando la sensación en el manubrio de frenado del movimiento. Los picos de los valores de la perturbación estimada en línea llegan aproximadamente a  $\pm 350 \frac{rad}{s^2}$ . En la Figura 4.16 se presenta el voltaje de control que es enviado al subsistema de rack de dirección.

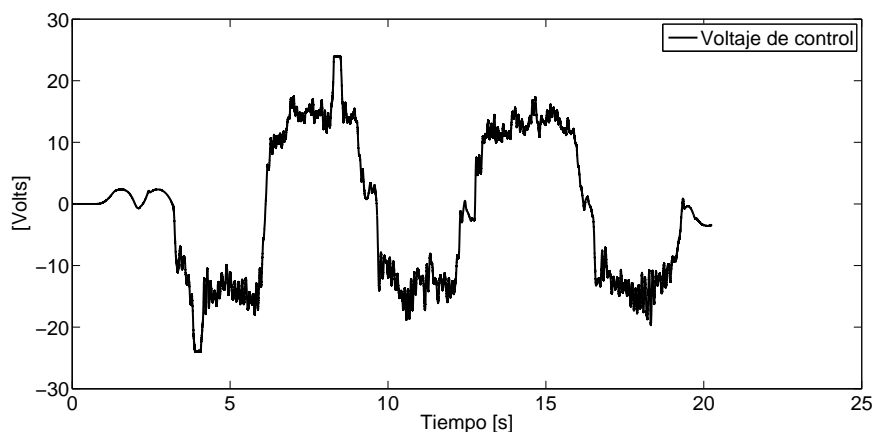


Figura 4.16: Voltaje de control  $V_s(t)$  del subsistema Esclavo sin tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas

El voltaje de control posee un comportamiento similar pero de manera inversa a la perturbación estimada en línea, esto debido a que se implementó un control por rechazo activo de perturbaciones.

### 4.2.2. Experimento con tracción

Para este experimento, fue impuesta una trayectoria arbitraria a través del volante de dirección  $\theta_m^*$ . El objetivo de este experimento es observar el comportamiento del sistema con tracción en la llanta a las mismas velocidades mencionadas anteriormente pero perturbando por medio de elementos (externamente), monitoreando el seguimiento de trayectoria y que el error de seguimiento permaneciera acotado.

Para este experimento se puso en marcha tracción en la llanta a un rango de velocidades entre  $0,522 \frac{m}{s}$  y  $1,068 \frac{m}{s}$ , se obtuvieron los siguientes resultados al introducir perturbaciones tipo impulsivas al sistema por medio de golpes u obstrucción de la rueda con objetos, aproximadamente estos sucesos ocurrieron en los 4, 7, 11, 16 s del experimento. A continuación se presenta la Figura 4.17 donde se encuentran la trayectoria del subsistema de rack de dirección con respecto a la trayectoria impuesta por el volante.

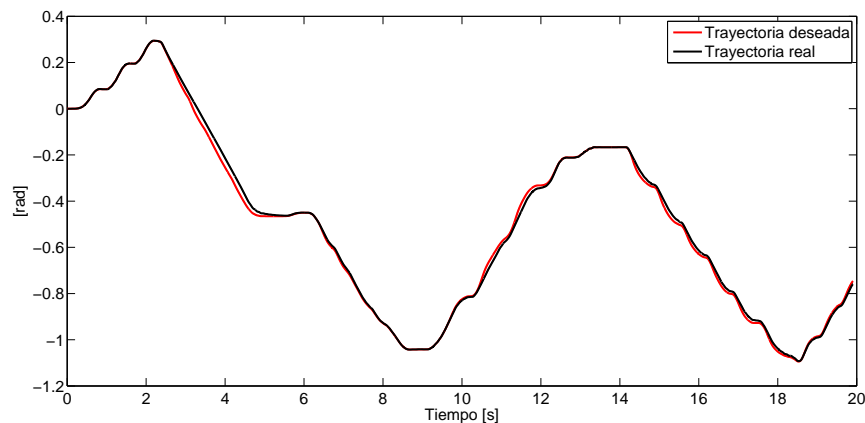


Figura 4.17: Trayectoria real vs deseada con tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas

A pesar de las perturbaciones se puede apreciar un buen seguimiento de la trayectoria del rack de dirección a la impuesta por el volante. En la Figura 4.18 se presenta la trayectoria del sistema real con respecto a la trayectoria estimada por el observador de alta ganancia GPI.

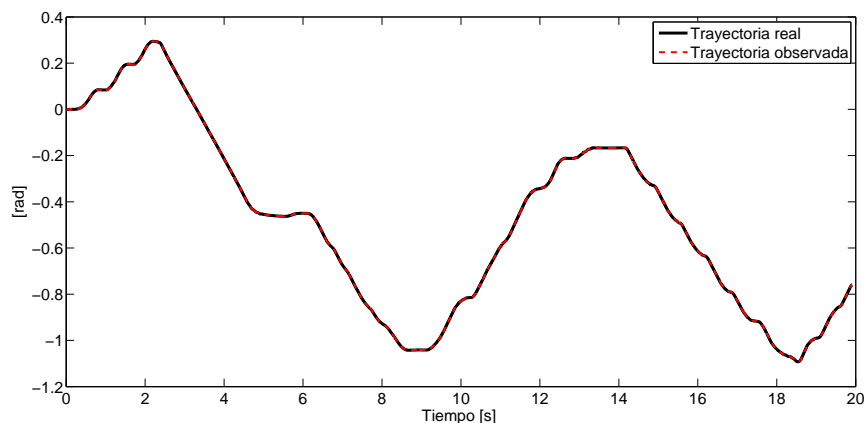


Figura 4.18: Trayectoria observada contra trayectoria real con tracción con perturbaciones tipo impulsivas

La observación en línea por parte del observador de alta ganancia se considera adecuada. En la Figura 4.19 se observa el error de seguimiento de la trayectoria correspondiente al sistema Maestro-Eslavo implementando un esquema bilateral de fuerza-posición con tracción en la rueda.

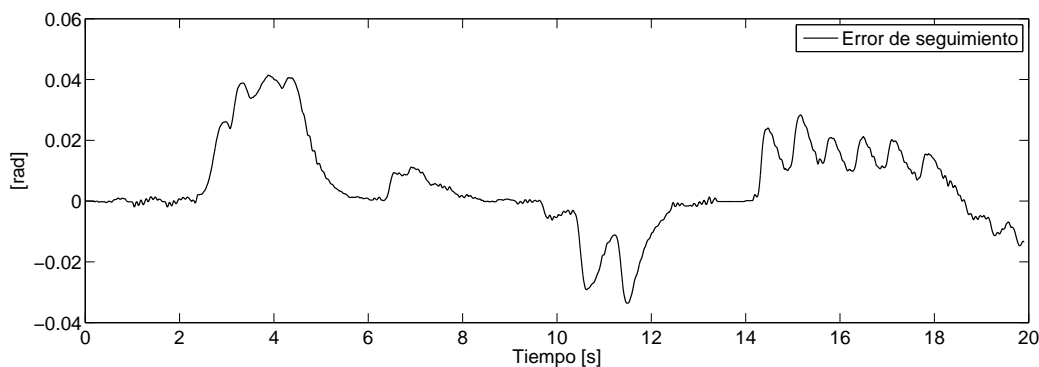


Figura 4.19: Error de seguimiento de trayectoria  $e_s$

Note que los picos más representativos en el error suceden aproximadamente en los tiempos que anteriormente se mencionaron. El error se encuentra acotado, sus picos no exceden valores cercanos a  $\pm 0,04 \text{ rad}$ . En la Figura 4.20 se presenta la señal de perturbación estimada en línea por el observador GPI de estados. Para la reflexión de fuerza hacia el dispositivo maestro se usó una ganancia  $k_h = 0,015$  para ajustar el valor de la reflexión de la perturbación.

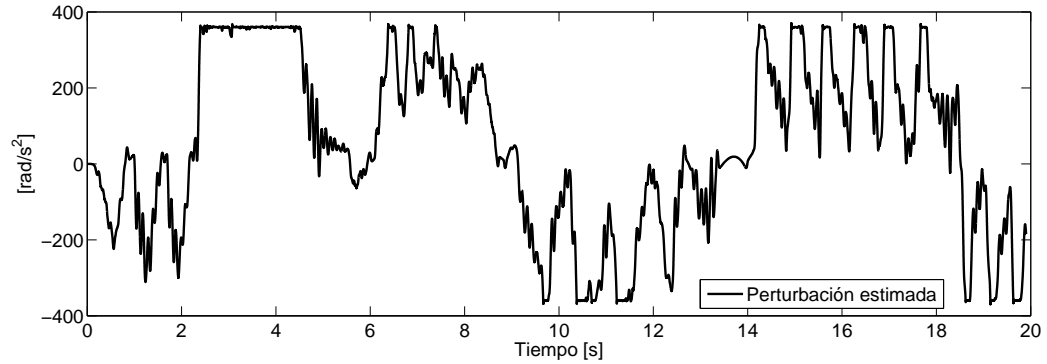


Figura 4.20: Perturbación estimada  $\hat{\sigma}(t)$  retroalimentada al subsistema maestro con tracción en la rueda con perturbaciones tipo impulsivas

En la Figura 4.21 se observa el voltaje de control que es suministrado al actuador ubicado en el rack de dirección.

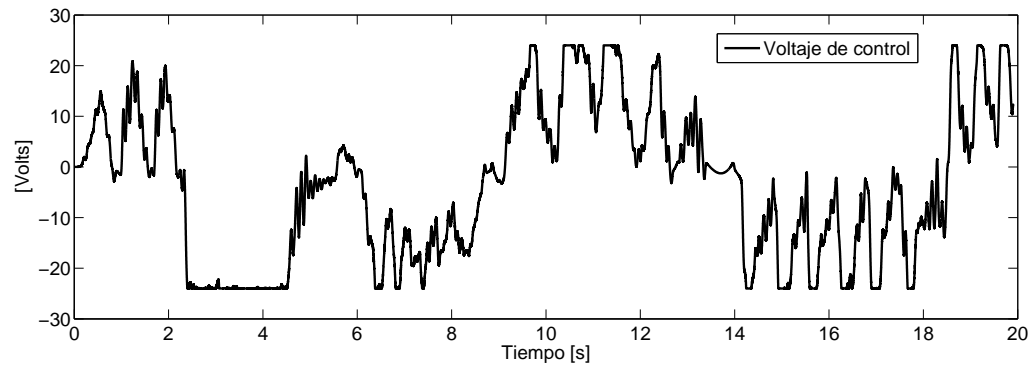


Figura 4.21: Voltaje de control  $V_s(t)$  del subsistema Esclavo con tracción en la rueda con perturbaciones impulsivas

Se observa que tiene un comportamiento similar pero con la señal invertida, a la señal de perturbación estimada en línea por parte del observador, debido a que se implementó un control con rechazo activo de perturbaciones. En las Figuras 4.20 y 4.21 se pueden apreciar algunas saturaciones. Estas fueron implementadas para la protección de la tarjeta de adquisición de datos y de los circuitos electrónicos debido a que el rango de voltaje de salida por parte del amplificador es limitado (-25 a 25 V), por lo cual, cuando el sistema necesita más torque en el rack de dirección no es posible entregarlo, debido a las limitaciones físicas. Las saturaciones no fueron tomadas en cuenta en la dinámica de ambos subsistemas.

### 4.3. Torque de autoalineación

Para obtener el torque de auto-alineación se usaron dos computadoras con sistema operativo Windows<sup>®</sup> XP, como mencionado en el capítulo 3, una para adquirir los datos de la unidad de medición inercial y otra para realizar los cálculos pertinentes y el control del sistema. Como fue mencionado anteriormente el envío de los datos fue hecho a través de puerto paralelo con comunicación serial RS-232 y recibido por el puerto digital de la tarjeta de adquisición de datos, Sensoray 626, la cual es el canal (enviar y recibir señales físicas) de la plataforma física con la computadora, para realizar el control.

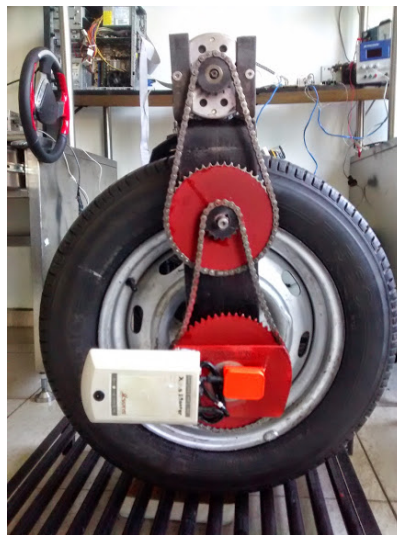


Figura 4.22: Ubicación de la unidad de medición inercial y del X-Bus Master

Algunos de los coeficientes usados para obtener el torque de auto-alineación, tales como: el coeficiente de fricción ( $\mu$ ), coeficiente de rigidez en las curvas ( $C_s$ ) y el coeficiente de rigidez de inclinación ( $C_c$ ), fueron seleccionados de acuerdo al tipo de neumático que posee la plataforma experimental:

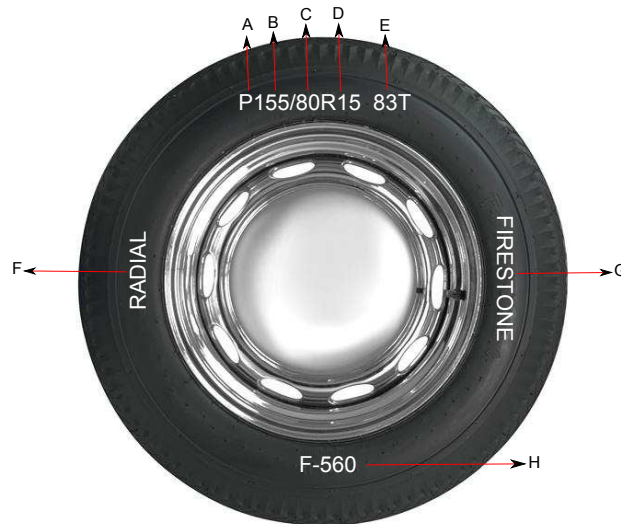


Figura 4.23: Neumático de la plataforma experimental

En la Figura 4.23 se puede apreciar el neumático con sus características resaltadas en blanco, en la tabla 4.3 se encuentra la descripción de cada una:

| Literal | Descripción                                     |
|---------|---|
| A       | Neumático para pasajeros (P)                    |
| B       | ancho de sección (155)                          |
| C       | relación de aspecto(/80)                        |
| D       | tamaño del rin (15) y construcción radial (R)   |
| E       | índice de carga (83) y símbolo de velocidad (T) |
| F       | Tipo de construcción: Aplicación radial         |
| G       | Marca: FIRESTONE                                |
| H       | Modelo: F-560                                   |

Tabla 4.3: Características del neumático

Entre las características solo se prestó atención a las que son relevantes para este trabajo, las cuales son: *R15* y *83T*. Describen un neumático de construcción tipo radial, en esta clase de neumático las cuerdas de las placas del cuerpo van de ceja a ceja formando semiovalos, las cuales ejercen la función de soportar la carga. Sobre las capas del cuerpo, en el área de la banda de rodamiento, son montadas las capas estabilizadoras; sus cuerdas corren en sentido diagonal y son estas las que soportan la carga y dan estabilidad al neumático. A diferencia de otros tipos de construcción de neumáticos (convencional, tela de sesgo), el de aplicación radial permite tener mayor confort, manejabilidad y adherencia a la superficie de rodamiento. El tamaño del rin es de 15 pulgadas, la velocidad máxima para el neumático es de 190 Km/h y la carga



máxima del neumático es de 487 Kg. Basado en el tipo de construcción del neumático, se tomaron coeficientes experimentales citados en la literatura [29], [8], [28], debido a que estos pueden variar dependiendo el tipo superficie, neumático y geometría de la suspensión, etc. lo cual los hace inciertos.

Para obtener el torque de auto-alineación primero se identificaron los parámetros que influyen en él, uno de estos es el rastro neumático  $t_m$ , como se mencionó en el Capítulo 2, este corresponde aproximadamente a un sexto de la huella  $l$  que hace el neumático con respecto a la superficie de contacto, donde la llanta rueda. Para obtener este parámetro, se cubrió el neumático mediante un líquido con color y se colocó sobre una superficie plana con una hoja de papel blanca encima para que se impregnara con la huella del neumático (esto gracias a que la construcción de la plataforma experimental no tiene un peso considerable para levantarla manualmente), esto se realizó en diferentes ocasiones para evitar incertidumbre en la medición, en la Tabla 4.4 se encuentra el valor que se obtuvo del largo de la huella.

En la Figura 4.24 se presenta un diagrama donde se muestra como es la interconexión de los bloques en simulink del sistema completo integrando los bloques correspondientes de la unidad de medición inercial.

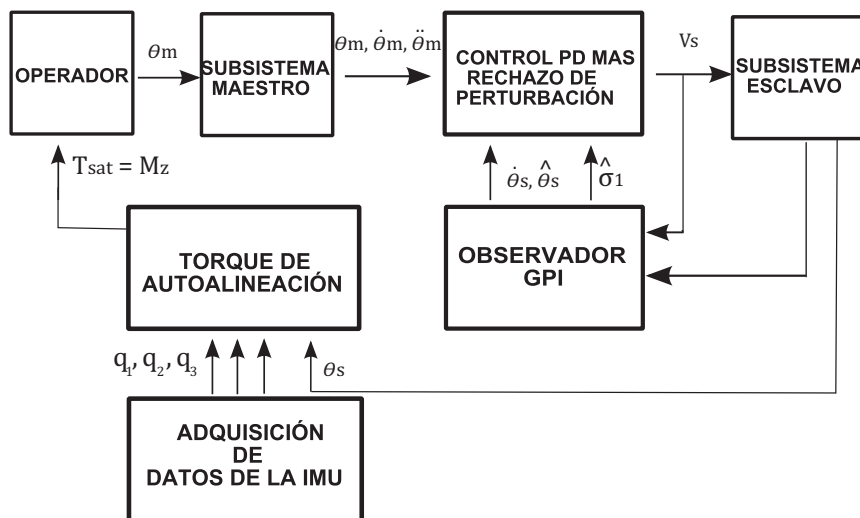


Figura 4.24: Diagrama de bloques de sistema háptico bidireccional con reflexión de fuerza-posición.

Se realizó un experimento para encontrar el ángulo de inclinación  $\gamma$ , esto debido a que se considerará constante para obtener el torque de auto-alineación, en la Figura 4.25 se observa la medición del ángulo de inclinación, obtenido a través de la unidad de medición inercial mediante la comunicación serial en la computadora 2, como fue mencionado en el Capítulo 3.

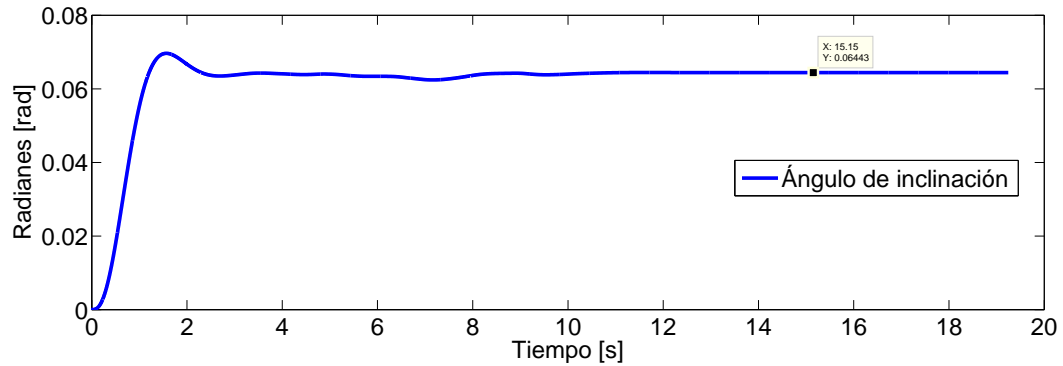


Figura 4.25: Ángulo de inclinación  $\gamma$

Ahora, con base a lo realizado hasta el momento se presentan en la Tabla 4.4 los parámetros de la llanta necesarios para obtener el torque de auto-alineación.

| PARÁMETRO                                   | VALOR           | UNIDADES                                |
|---|-----------------|---|
| MASA  | 25              | kg                                      |
| LARGO DE LA HUELLA DEL NEUMÁTICO            | 0.118           | m                                       |
| ÁNGULO DE INCLINACIÓN $\gamma$              | 3.691 / 0.06443 | Grados / Rad                            |
| COEFICIENTE DE FRICCIÓN $\mu$               | 1.5             | SIN UNIDADES                            |
| COEFICIENTE DE RIGIDEZ EN LAS CURVAS $C_s$  | 0.18            | $\frac{\text{Unidades}}{\text{Grados}}$ |
| COEFICIENTE DE RIGIDEZ DE INCLINACIÓN $C_c$ | 0.008           | $\frac{\text{Unidades}}{\text{Grados}}$ |

Tabla 4.4: Parámetros de la llanta

Para obtener el ángulo de deslizamiento  $\alpha$  fue necesario considerar que este resulta de la diferencia entre la posición angular del rack de dirección  $\theta_s$  obtenida mediante el encoder y la posición angular de la llanta obtenida a través de la IMU. Esta consideración es hecha ya que la plataforma experimental carece de movimiento traslacional de cuerpo completo y solo tiene movimiento angular en un punto, con lo cual se desprecia la dinámica con respecto al ángulo de guiñada del chasis de un vehículo completo o de modelo de bicicleta, también no se cuenta con la inercia del cuerpo del vehículo que influye sobre la dinámica de la llanta, además se hace el supuesto de que  $\theta_s$  es la dirección del vehículo en movimiento. Con estas consideraciones en la Figura 4.26 se presenta el ángulo de deslizamiento:

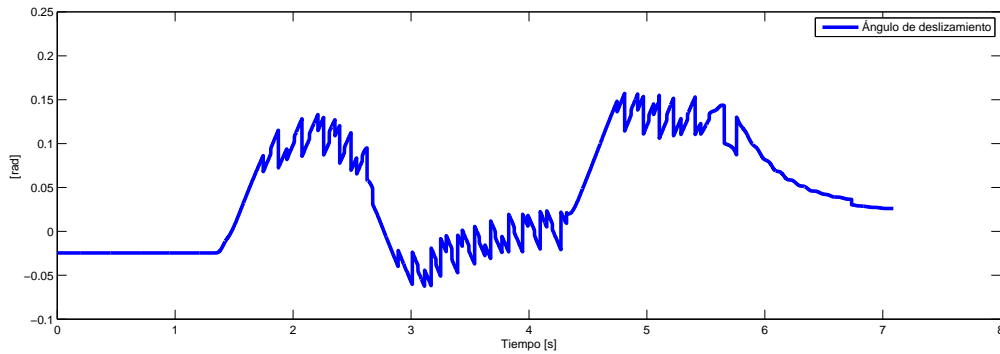


Figura 4.26: Ángulo de deslizamiento  $\alpha$

La fuerza lateral  $F_y$  se presenta en la Figura 4.27:

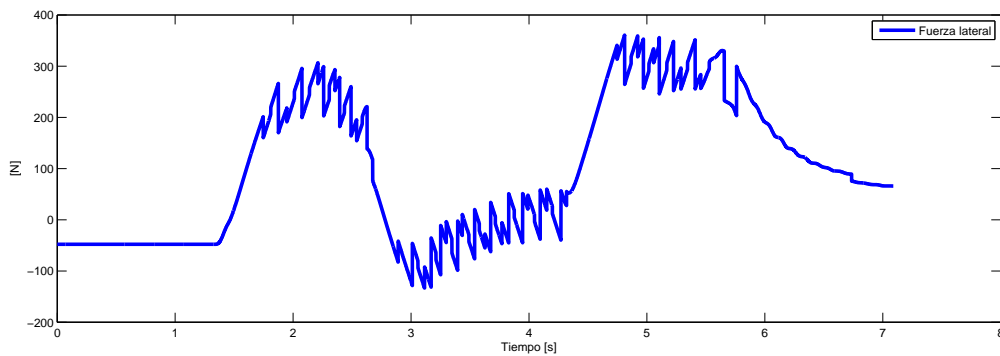


Figura 4.27: Fuerza lateral  $F_y$

El ángulo de inclinación y deslizamiento y la fuerza lateral son necesarios para obtener el torque de autoalineación de la Ecuación 2.20. Ya con todas los parámetros y términos necesarios, se obtuvo en tiempo real en el mismo experimento el torque de auto-alineación  $T_{sat} = M_z$ , el cual se puede apreciar en la Figura 4.28

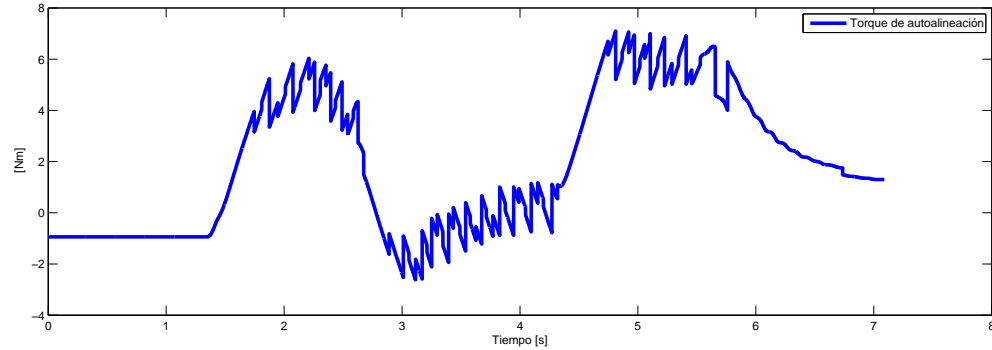


Figura 4.28: Torque de autoalineación  $T_{sat}$

El cual es de valor pequeño, debido a la poca inercia y otros factores presentes en el sistema. También se comparó la señal del ángulo de posición de la llanta que entrega la unidad de medición inercial con respecto a la posición angular del rack de dirección y la posición estimada por medio del observador de alta ganancia GPI. En la Figura 4.29 se presentan las 3 señales:

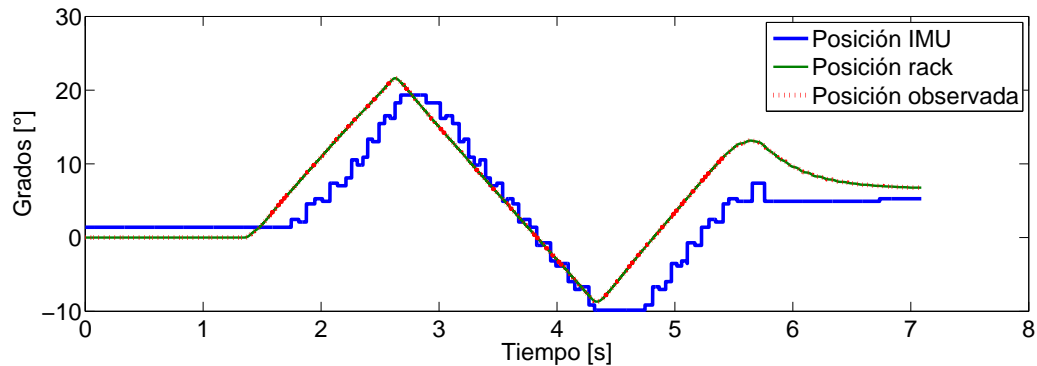


Figura 4.29: Comparación de posiciones del subsistema esclavo

se puede apreciar que en ciertos valores las señales difieren, esto es debido a que existe un porcentaje de holgura en los elementos mecánicos que se encuentran después de la caja de reducción mecánica, tales como: desmultiplicador mecánico, barras de torsión, y de inclinación. Todos estos pertenecen al tipo de suspensión de la plataforma experimental. Teniendo en cuenta esto, se puede apreciar que el observador de alta ganancia GPI, estima de manera aproximada el comportamiento del sistema.

En este capítulo de la tesis se pudo observar como el observador de alta ganancia GPI estimó en línea la entrada de perturbación en la cual se agruparon todos los fenómenos inciertos para este trabajo tales como: fricción de Coulomb, amortiguamiento, torque de autoalineación, entre otros. La estimación de la entrada de perturbación permitió la

cancelación de estos fenómenos por parte del control por rechazo activo de perturbaciones. En los diferentes experimentos realizados se puede apreciar como la señal de control es similar a la señal de perturbación pero de manera invertida, esto con el fin de rechazar dicha perturbación. Al introducir las perturbaciones tipo impulsivas se apreció un adecuado seguimiento de trayectoria por parte del subsistema esclavo. Sin embargo al realizar maniobras en el volante de dirección de manera abrupta, la respuesta por parte del rack de dirección es lenta pero el seguimiento de trayectoria es correcto, esto se le puede atribuir a que los circuitos electrónicos quizás no suministran la corriente necesaria que requiere el actuador eléctrico. El torque de autoalineación fue usado solo como retroalimentación háptica de la plataforma experimental, no se contempló una compensación de este fenómeno en el control. En la Figura 4.29 en la señal procedente de la IMU se puede observar que su apariencia no es suave, esto se debe a que el periodo de muestro de la IMU es de 100 Hz y en la tarjeta de adquisición de datos es de 2000 Hz, a pesar del uso del retenedor de orden cero la diferencia en suavidad entre las señales es apreciable.

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

### 5.1. Conclusiones

En la primer parte de este trabajo se presentó una dirección háptica por cable basada en observadores de alta ganancia GPI con control por rechazo activo de perturbaciones. Para los resultados prácticos se construyó una plataforma que permite dar tracción a la rueda de la plataforma experimental para que los experimentos sean más cerca de lo real. La técnica del observador de alta ganancia GPI requiere de un mínimo conocimiento del modelo dinámico, solo se requiere la ganancia del sistema y tan solo se usan encoders como sensores. Esto es una ventaja comparada con otras técnicas usadas en Sistemas de Dirección por Cable (SDC) que requieren sensores especializados. La técnica estima la entrada de perturbación y los términos inciertos que afectan la dinámica del SDC y los cancela por medio del control. En los diferentes experimentos realizados se puede concluir lo siguiente:

- Los primeros experimentos en el sistema háptico de conducción por cable del tren de dirección de un automóvil real, se observó que al imponer diferentes trayectorias a través del volante de dirección, el subsistema esclavo seguía fielmente la trayectoria impuesta, permaneciendo el error de seguimiento absolutamente, uniformemente acotado. Se estimó localmente la perturbación desconocida mediante un polinomio en el tiempo o de Taylor, para obtener los resultados presentados.
- Al realizar los experimentos introduciendo perturbaciones tipo impulsivas, se aprecia la robustez del control, al observar que el error de seguimiento para ambas situaciones con tracción y sin tracción, los picos de la señal son adecuados y el error permanece acotado. Los resultados con respecto a la interfaz háptica son prometedores, cuando la rueda era perturbada, en el volante se recreaba una sensación parecida a un frenado del movimiento. Al incrementar los valores de la

ganancia  $kh$  que sopesa la cantidad que se transmite de perturbación al volante, se desestabiliza el volante, permaneciendo en movimiento al primer contacto, esto se podría resolver poniendo actuadores que respondan más rápido a la señal del control. Un fenómeno que se pudo observar es que si se sujetaba con más fuerza se podía tomar el control del volante y concretar el experimento, pero si se llegaba a soltar se perdía la estabilidad que el usuario tenía en él.

- Se implementó el uso de una unidad de medición inercial para obtener una aproximación del torque de auto-alineación presente en el sistema. Al realizar los experimentos se encontró que el torque es pequeño, esto se debe a que no se cuenta con una masa despreciable comparada con la masa de un vehículo completo, también a que los momentos de inercia debidos al chasis del vehículo no están presentes en la plataforma. Gracias a la implementación de la unidad de medición inercial, se obtuvieron diferentes parámetros que están presentes en una llanta de un vehículo.

## 5.2. Perspectivas

- Es evidente que como trabajo futuro está en construir una plataforma que permita el movimiento traslacional, con el objetivo de hacer más realistas los experimentos, y de obtener una aproximación más precisa del torque de autoalineación considerando un modelo mas completo de un vehículo, como el modelo *Brush* descrito en [8], que considera todas las dinámicas presentes en la llanta, esto es, las interacciones entre el rin y el neumático y el neumático con la superficie de contacto. Para esta construcción sería interesante diseñar todos los elementos de la plataforma, principalmente diseñando la suspensión como se puede observar en [23]. Diseñando los elementos que componen la dirección y la suspensión de un vehículo, se puede proponer un observador y un control diferente al usado en este trabajo, en base a un modelo de vehículo completo. los resultados prácticos de esta aplicación podrían compararse con respecto al control por rechazo activo de perturbaciones basado en los observadores de alta ganancia GPI.
- Diseñar y desarrollar un software y un hardware que permita obtener los datos de la unidad de medición inercial en tiempo real, para evitar el uso de dos computadoras.
- Diseñar mediante software y hardware, un elemento que considere las restricciones mecánicas presentes en el rack de dirección, para que el volante no pueda girar libremente, ya que esto afecta los circuitos electrónicos presentes.
- Ya que se usa tecnología por cable, implementar también un acelerador y frenado por cable.

# Apéndice A

## Código en Matlab

En este apartado se presentan los códigos de programación para configurar la Unidad de Medición Inercial, y para la apertura del puerto virtual COM. También es presentado el algoritmo con el cual se transforman las señales procedentes de la IMU de cuaterniones a ángulos de Euler

Algoritmo A.1: Código para configurar la Unidad de medición inercial y para la apertura del puerto COM

```
1 /*
2 Xsens S-function for reading orientation
3
4 by Damir Omrcen, Jozef Stefan Institute, Ljubljana, Slovenia
5 28/8/2006
6
7 Modified from the original xsens_simul.cpp by
8 Miguel Dominguez Casta o
9 CINVESTAV, MEXICO CITY, MEXICO
10 3/7/2014
11
12 For detailes see: windows example on Xsens CD:
13 C:\Program Files\Xsens\Software Development\MTCComm class\Example (
    Windows)\
14
15 */
16
17 #define S_FUNCTION_NAME  xsens_read_wireless
18 #define S_FUNCTION_LEVEL 2
19
20
21 //Xsens-Library
22 #include "MTCComm.h"
23 #include "MTCComm.cpp"
24
25 //Include Library of C
```



```

26 #include <stdio.h>
27 #include "stdlib.h"
28 #include "simstruc.h"
29
30 static char_T msg[256];
31
32
33 /*=====*/
34 * Number of S-function Parameters and macros to access from the
   SimStruct *
35 *=====*/
36 #define NUM_PARAMS                2
37 #define COM_PORT_PARAM            (ssGetSFcnParam(S,0)) /* Parameter:
   number of port, selectable on Simulink */
38 #define SAMPLE_TIME_PARAM        (ssGetSFcnParam(S,1)) /* Parameter:
   sample time of the IMU, selectable on Simulink */
39
40 /*=====*/
41 * Macros to access the S-function parameter values *
42 *=====*/
43 #define SAMPLE_TIME                ((real_T)  mxGetPr(SAMPLE_TIME_PARAM
   ) [0])
44 #define portNumber                (((int_T)  mxGetPr(COM_PORT_PARAM)
   [0]))
45
46 /*=====*/
47 * Global variables *
48 *=====*/
49
50 CMTComm mtcomm;
51 char deviceName[15];
52 int outputMode;
53 int outputSettings;
54 unsigned short numDevices;
55 int screenSensorOffset = 0;
56
57 /*=====*/
58 * S-function methods *
59 *=====*/
60
61 #define MDL_CHECK_PARAMETERS      /* Change to #undef to remove
   function */
62 #if defined(MDL_CHECK_PARAMETERS) && defined(MATLAB_MEX_FILE)
63 /* Function: mdlCheckParameters
   =====
64 *
65 */
66 static void mdlCheckParameters(SimStruct *S)
67 {

```

```

68
69     static char_T errMsg[256];
70     boolean_T allParamsOK = 1;
71
72     /*
73      * COM port
74      */
75     if (mxGetNumberOfElements(COM_PORT_PARAM) != 1) {
76         sprintf(errMsg, "COM port parameter must be a positive
77             scalar.\n");
78         allParamsOK = 0;
79         goto EXIT_POINT;
80     }
81
82     /*
83      * Sample Time
84      */
85     if (mxGetNumberOfElements(SAMPLE_TIME_PARAM) != 1) {
86         sprintf(errMsg, "Sample Time must be a positive scalar.\n
87             ");
88         allParamsOK = 0;
89         goto EXIT_POINT;
90     }
91
92 EXIT_POINT:
93     if (!allParamsOK) {
94         ssSetErrorStatus(S, errMsg);
95     }
96 }
97 #endif /* MDL_CHECK_PARAMETERS */
98
99 /* Function: mdlInitializeSizes
100  =====
101  *
102  */
103 static void mdlInitializeSizes(SimStruct *S)
104 {
105     ssSetNumContStates(S, 0);
106     ssSetNumDiscStates(S, 0);
107
108     ssSetNumSFcnParams(S, NUM_PARAMS);
109
110     if (ssGetNumSFcnParams(S) == ssGetSFcnParamsCount(S)) {
111         if (ssGetErrorStatus(S) != NULL) {
112             return; /* Error reported in mdlCheckParameters
113                 */
114         }
115     } else {

```

```

114     return; /* Parameter mismatch will be reported by Simulink
115         */
116 }
117 /* None of this s-functions's parameters are tunable during
118 simulation */
119 {
120     int_T i;
121     for (i=0; i < NUM_PARAMS-1; i++) {
122         ssSetSFcnParamNotTunable(S, i);
123     }
124 }
125 ssSetNumSampleTimes(S, 1);
126 ssSetNumInputPorts(S, 0);
127
128 //if (!ssSetNumOutputPorts(S,2)) return;
129 if (!ssSetNumOutputPorts(S,1)) return;
130
131 //1st sensor
132 //Quaternion
133 if (!ssSetOutputPortMatrixDimensions(S, 0, 4, 1)) return;
134 //Calibrated data
135 //if (!ssSetOutputPortMatrixDimensions(S, 1, 9, 1)) return;
136
137 }
138
139 /* Function: mdlInitializeSampleTimes
140 =====
141 *
142 */
143 static void mdlInitializeSampleTimes(SimStruct *S)
144 {
145     ssSetSampleTime(S, 0, SAMPLE_TIME);
146     ssSetOffsetTime(S, 0, 0.0);
147 }
148 /* My functions =====
149 *
150 */
151
152 // doMTSettings
153 //
154 // Set user settings in MTi/MTx
155 // Assumes initialized global MTCmm class
156 bool doMtSettings(void)
157 {
158     unsigned long tmpOutputMode, tmpOutputSettings;
159     unsigned short tmpDataLength;
160     const unsigned long dataVal = 0;
161     const unsigned char dataValLen = 0;

```

```

162
163 // Put MTi/MTx in Config State
164 if(mtcomm.writeMessage(MID_GOTOCONFIG) != MTRV_OK){
165     printf("No device connected, check COM port\n");
166     return false;
167 }
168
169 // Get current settings and check if Xbus Master is connected
170 if (mtcomm.getDeviceMode(&numDevices) != MTRV_OK) {
171     if (numDevices == 1)
172         printf("MTi / MTx has not been detected\nCould not get
173         device mode\n");
174     else
175         printf("Not just MTi / MTx connected to Xbus\nCould
176         not get all device modes\n");
177     return false;
178 }
179 printf("Numero de sensores conectados: %d\n", numDevices);
180
181 // Set output mode and output settings for each attached MTi/
182 MTx
183 for (int i = 0; i < numDevices; i++) {
184     if (mtcomm.setDeviceMode(outputMode, outputSettings,
185     BID_MT + i) != MTRV_OK) {
186         printf("Could not set (all) device mode(s)\n");
187         return false;
188     }
189 }
190
191 // Put MTi/MTx in Measurement State
192 mtcomm.writeMessage(MID_GOTOMEASUREMENT, dataVal, dataValLen,
193     BID_MASTER);
194
195 //mtcomm.writeMessage(MID_RESETOrientation, 1, 2, BID_MASTER);
196 // Heading reset
197 mtcomm.writeMessage(MID_RESETOrientation, 4, 2, BID_MASTER);
198 // Alignment reset
199
200 return true;
201 }
202
203
204 #define MDL_START /* Change to #undef to remove function */
205 #if defined(MDL_START)
206 /* Function: mdlStart Open the COM port and sends the
207 configuration Parameters to doMTsettings funcion ==
208 *
209 */
210 static void mdlStart(SimStruct *S)
211 {
212     static char_T errMsg[256];/* Error message array*/

```

```

205     unsigned long baudr=460800; /*Defining the baudrate of wireless
        */
206
207     // Output mode and output settings
208     outputMode=6; //Orientation data
209     outputSettings=0; //quaternions
210
211     // Open and initialize serial port
212     if (mtcomm.openPort(portNumber, baudr) != MTRV_OK) {
213         sprintf(errMsg, "Cannot open COM port %d\n", portNumber);
214         printf(errMsg);
215         ssSetErrorStatus(S, errMsg);
216         return; // MTRV_INPUTCANNOTBEOPENED;
217     }
218
219     // Call to the function
220     if(doMtSettings() == false){
221         sprintf(errMsg, "Xsens Unexpected message,
                MTRV_UNEXPECTEDMSG\n");
222         printf(errMsg);
223         ssSetErrorStatus(S, errMsg);
224         return; // MTRV_UNEXPECTEDMSG;
225     }
226
227 }
228 #endif /* MDL_START */
229
230
231
232 /* Function: mdlOutputs =====
233 *This function open the COM PORT
234 *This function sends the data to the output port
235 *
236 */
237 static void mdlOutputs(SimStruct *S, int_T tid)
238 {
239     real_T *y0 = ssGetOutputPortRealSignal(S,0);
240     // real_T *y1 = ssGetOutputPortRealSignal(S,1);
241
242     real_T *prwrk=ssGetRWork(S); /*General purpose array*/
243
244     static char_T errMsg[256]; /*Error message array*/
245
246     unsigned char data[MAXMSGLEN]; /*Message array*/
247     short datalen; /*Data length*/
248     float fdata[18] = {0}; /*Final data array*/
249
250     int j; /*Counter 1*/
251     double aux = 0; /*Auxiliary variable*/
252
253     /*Reading the complete frame data*/

```

```

254     if (mtcomm.readDataMessage(data, datalen) != MTRV_OK)
255     {
256         sprintf(errMsg, "Xsens readdata error \n");
257         printf(errMsg);
258         ssSetErrorStatus(S, errMsg);
259         return;
260     }
261
262     // Sensor output: Quaternions
263     mtcomm.getValue(VALUE_ORIENT_QUAT, fdata, data, BID_MT);
264     //Output
265     for (j = 0; j < 4; j++)
266     {
267         y0[j]=fdata[j];
268     }
269
270
271
272
273 }
274
275 /* Function: mdlTerminate
276 =====
277 *
278 */
279 static void mdlTerminate(SimStruct *S)
280 {
281     // When done, close the serial port
282     mtcomm.close();
283 }
284
285 #ifdef MATLAB_MEX_FILE /* Is this file being compiled as a MEX
286 -file? */
287 #include "simulink.c" /* MEX-file interface mechanism */
288 #else
289 #include "cg_sfun.h" /* Code generation registration
290 function */
291 #endif

```

Algoritmo A.2: Código para transformar los datos de cuaterniones a ángulos de Euler

```

1  %Matlab function
2
3  function output = conversion(quat)
4
5  r=28.45/100; %radio: distance from Inertial frame of IMU to the
6             center of the tyre.
7
8  % Input from IMU: Quaternion
9  q0=quat(1);

```

```

10 q1=quat(2);
11 q2=quat(3);
12 q3=quat(4);
13
14
15
16
17 % Vectors to obtain Euler angles: Yaw, Pitch, Roll
18
19     xgs=r*(2*q1*q3 + 2*q0*q2);
20     ygs=r*(2*q2*q3 - 2*q0*q1);
21     zgs=r*(2*q0^2+ 2*q3^2 - 1);
22     yaw=atan2(2*q1*q2+2*q0*q3,2*q0^2+2*q1^2-1);
23     roll= atan2(2*q2*q3+2*q0*q1,2*q0^2+2*q3^2-1);
24     pitch= asin(2*q1*q3-2*q0*q2);
25
26
27
28 output=[xgs ygs zgs yaw roll pitch];
29
30 end

```

# Apéndice B

## Modelo de vehículo completo linealizado

En este apartado se presentan las ecuaciones diferenciales del modelo de un vehículo simple. Se emplea la formulación de Lagrange [37] para obtener las ecuaciones de movimiento que describen el sistema. Para ver todo el procedimiento matemático consultar a Pacejka [8].

Considere un sistema con  $n$  grados de libertad, el cual tiene  $n$  coordenadas generalizadas ( $q_i$ ) que describen el movimiento del sistema. Este sistema, posee energía potencial  $U$  y energía cinética  $T$ . El vector de fuerzas generalizadas ( $Q_i$ ) está asociado con el vector de coordenadas generalizadas, ambos actúan en el sistema y producen un trabajo  $W$ . La formulación de Lagrange para la coordenada generalizada  $q_i$  es de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{B.1})$$

Ahora considere el modelo del vehículo simple, figura 2.2, su marco de coordenadas propias son:  $X$  y  $Y$  con respecto al punto medio  $A$ , el ángulo de guiñada  $\psi$  y el ángulo de balanceo  $\varphi$  alrededor del eje de balanceo del vehículo. Para movimientos cerca del eje  $X$  y por lo tanto ángulos de guiñada pequeños la formulación de Lagrange es adecuada para obtener las ecuaciones de movimiento. Ahora considere las velocidades  $u$ ,  $v$  y  $r$  (velocidades: longitudinal, vertical y angular de guiñada), como las coordenadas de movimiento generalizadas que reemplazan las coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $\psi$  (considerando prolongaciones suficientemente largas de  $\psi$ ) para obtener las ecuaciones de movimiento del vehículo. Cuando  $\psi$  alcanza valores muy largos, por ejemplo, cuando el vehículo se mueve a lo largo de una trayectoria circular es preferible utilizar ecuaciones modificadas



donde por medio de manipulación algebraica se pueden obtener las ecuaciones de Lagrange modificadas para las variables  $u$ ,  $v$ ,  $r$  y  $\varphi$  [8] reemplazando las variables del marco de coordenadas propio del sistema.

Cuando el vehículo se encuentra en una curva el vehículo se balancea alrededor del eje de balanceo, la altura del eje de balanceo esta definida por las distancias  $h_{1,2}$ , donde los subíndices  $i = 1, 2$  representan las llantas delanteras y traseras, las cuales se encuentran en la parte posterior y anterior del eje de balanceo. El eje del balanceo se evalúa considerando el movimiento del cuerpo con respecto a los cuatro centros de contacto de las ruedas en el suelo bajo la acción de un fuerza lateral externa que actúa sobre el centro de gravedad. El resorte de torsión que se ilustra en la rueda derecha de la parte posterior, representan la rigidez de la parte delantera y trasera que representaremos como  $c_{\varphi_1}$ . Esta rigidez resulta de los resortes de amortiguamiento y las barras anti-volqueo presentes en el vehículo. También son considerados amortiguadores en las ruedas, están representados por los momentos lineales resultantes alrededor del eje de balanceo, este amortiguamiento es representado por  $k_{\varphi_{1,2}}$ . La distancia del centro de masa hacia el eje de las llantas delanteras es  $a$  y la distancia al eje de las llantas traseras como  $b$ ; su altura se deduce luego de definir la altura  $h'$  al eje de balanceo. La masa del vehículo se representa por  $m$  y los momentos de inercia con respecto al centro de la masa Y los ejes horizontales y verticales por  $I_x$ ,  $I_z$ ,  $I_{x,z}$ . Por último las fuerzas laterales y longitudinales se representan de la siguiente forma,  $F_{yi}$ ,  $F_{xi}$  y el momento de restauración de la llanta se representa como  $M_{zi}$ . En la Figura 2.2 en la parte b, se observa una ampliación del plano de una rueda en el cual se pueden apreciar los ángulos mas representativos;  $\alpha_1$  es el ángulo de deslizamiento,  $\psi_1$  es el ángulo de guiñada y  $\delta$  es el ángulo de la dirección. Debido al deslizamiento se producen fuerzas y pares de momento, en la figura se observan las fuerzas laterales y los pares de momento que actúan en el llanta,  $F_{yi}$  para las fuerzas laterales y  $M_{zi}$  para el momento de autoalineación; también se considera que resultan fuerzas longitudinales debido al deslizamiento. Ver mas en [8]. Adicionalmente se considera  $\delta$  como el ángulo de dirección.

Teniendo en cuenta la definición de estos términos se presentan las ecuaciones de las energías cinética y potencial:

$$T = \frac{1}{2}m(u - h'\varphi r)^2 + \frac{1}{2}I_x\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_y(\varphi r)^2 + \frac{1}{2}I_z \left[ r^2 - \varphi^2 r^2 + 2\left(\frac{h_2 - h_1}{l}\right)r\dot{\varphi} \right] - I_{xz}r\dot{\varphi} \quad (\text{B.2})$$

$$U = \frac{1}{2}(c_{\varphi_1} + c_{\varphi_2})\varphi^2 - \frac{1}{2}mgh'\varphi^2 \quad (\text{B.3})$$

Donde la energía potencial  $U$  es generada en los resortes de la suspensión y a través de la altura del centro de gravedad y también se asume para ángulos pequeños. Ahora

---

se usan las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento con respecto a las coordenadas generalizadas  $u$ ,  $v$ ,  $r$ ,  $\varphi$  (lateral, longitudinal, ángulo de guiñada y de balanceo respectivamente), que corresponden a los ejes de movimiento del vehículo simple.

$$m(\dot{u} - rv - h'\varphi\dot{r} - 2h'r\dot{\varphi}) = F_{x1} - F_{y1}\delta + F_{x2} \quad (\text{B.4})$$

$$m(\dot{v} + ru + h'\ddot{\varphi} - h'r^2\dot{\varphi}) = F_{x1}\delta + F_{y1} + F_{y2} \quad (\text{B.5})$$

$$I_z\dot{r} + (I_z\theta_r - I_{xz})\ddot{\varphi} - mh'(\dot{u} - rv)\varphi = aF_{x1}\delta + aF_{x1} + M_{z1} - bF_{y2} + M_{z2} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} (I_x + mh'^2)\ddot{\varphi} + mh'(\dot{v} + ru) + (I_z\theta_r - I_{xz})\dot{r} - (mh'^2 + I_y - I_z)r^2\dot{\varphi} + \\ (k_{\varphi1} + k_{\varphi2})\dot{\varphi} + (c_{\varphi1} + c_{\varphi2} - mgh')\varphi = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$



# Apéndice C

## Circuitos de amplificación

En este apartado se presentan el circuito electrónico de amplificación de potencia usados en ambos subsistemas.

| Componentes              | Referencia |
|--------------------------|------------|
| Transistor NPN           | TIP41C     |
| Transistor PNP           | TIP42C     |
| Diodo                    | 1N5400     |
| Resistor                 | 14K Ohm    |
| Resistor                 | 10K Ohm    |
| Amplificador Operacional | OPA2604AP  |

Tabla C.1: Componentes del circuito electrónico de amplificación

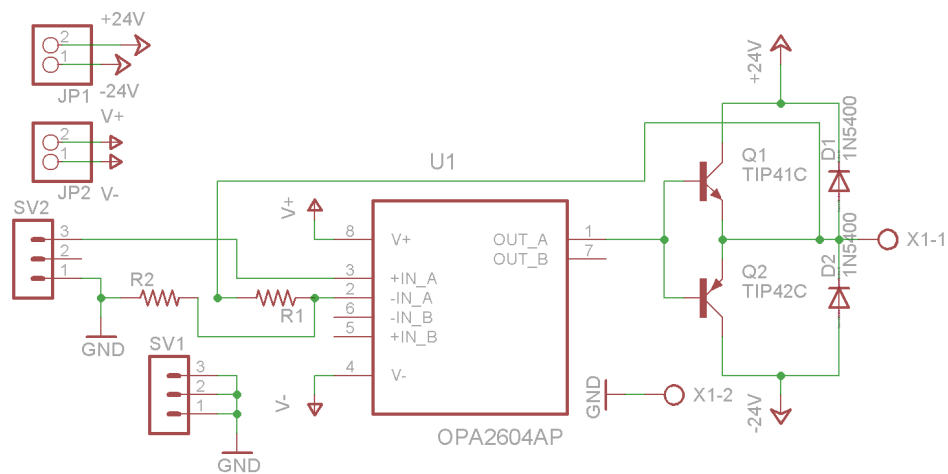


Figura C.1: Circuito electrónico de amplificación



# Apéndice D

## Artículos publicados

- Miguel Domínguez-Castaño, A. Rodríguez-Angeles, H. Sira-Ramírez, “Control por rechazo activo de perturbaciones de un sistema háptico bidireccional por cable del sistema de dirección de un automóvil real”. Congreso Latinoamericano de Control Automático, Cancún, Quintana Roo, México, Octubre 2014.



# Bibliografía

- [1] 2015 TTTech Computertechnik AG. Delphi brake-by-wire concept. <https://www.tttech.com/de/markets/automotive/projekte-referenzen/delphi-brake-by-wire-concept/>.
- [2] Instructional Materials Laboratory. *Automotive Technology, Module 5: Steering and Suspension Systems*. University of Missouri-Columbia, 2006.
- [3] Richard Zurawski. *The industrial communication technology handbook*. Taylor Francis Group, 2005.
- [4] W.F. Milliken and D.L. Milliken. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, 1995.
- [5] M. H. Kim, S. Lee, and K. C. Lee. A fuzzy predictive redundancy system for fault-tolerance of x-by-wire systems. *Microprocessors and Microsystems*, 35 No. 5:453–461, Julio 2011.
- [6] P. Ciáurriz, I. Díaz, and J. J. Gil. Bimanual drive-by-wire system with haptic feedback. *Haptic Audio Visual Environments and Games (HAVE), IEEE International Symposium on*, pages 18–23, 2013.
- [7] M. H. Kim, S. Lee, and K. C. Lee. A fuzzy predictive redundancy system for fault-tolerance of x-by-wire systems. *Microprocessors and Microsystems*, 35:453–461, 2011.
- [8] Hans B. Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Elsevier, 2006.
- [9] M.L. Pinto. *Análisis e Implementación de una Interfaz Háptica en Entornos Virtuales*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería, Bogotá D.C. Colombia, 2009.
- [10] L. Basañez and E. Nuño. *Técnicas, aplicaciones, entorno sensorial y teleoperación inteligente*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales, Barcelona, España, 2004.
- [11] A. García, M. Gómez, and A. Ollero. *Teleoperación y Telerobótica*. Pearson Prentice Hall, CEA Comité Español de Automatica, 2006.



- [12] C. Morton, V. Pickert, and M. Armstrong. Self-alignment torque as a source of energy recovery for hybrid electric trucks. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 63 No. 1:62–71, 2014.
- [13] B. H. Nguyen and J. H. Ryu. Direct current measurements based steer-by wire systems for realistic driving feeling. *IEEE ISIE*, 56:1023–1028, 2009.
- [14] Y. Yamaguchi and T. Murakami. Adaptive control for virtual steering characteristics on electric vehicle using steer-by-wire system. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 56:1585–1594, 2009.
- [15] A. Bertacchini, L. Tamagnini, and P. Pavan. Force feedback in steer-by-wire systems: Architecture and experimental results. *IEEE ISIE*, pages 3050–3055, 2006.
- [16] J. S. Im, F. Ozaki, N. Matsunaga, and S. Kawaji. Control of steering-by-wire system using bilateral control scheme with passivity approach. *International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 1488–1943, 2007.
- [17] B. Z. Guo and Z. L. Zhao. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty. *Systems & Control Letters*, 60:420–430, June 2011.
- [18] B. Z. Guo and Z. L. Zhao. On convergence of nonlinear active disturbance rejection control for mimo systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51 No. 2:1727–1757, abril 2013.
- [19] H. Sira Ramírez, J. Linares Flores, C. García Rodríguez, and M. A. Contreras ordaz. On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach. *IEEE Transactions On Control Systems Technology*, 22 No. 5, September 2014.
- [20] E. Bakker, L. Nyborg, and H. B. Pacejka. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. *SAE Technical Paper*, 870421, 1987.
- [21] G. Baffet, A. Charara, and J. Stéphant. Sideslip angle, lateral tire force and road friction estimation in simulations and experiments. *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 903–908, 2006.
- [22] D.M. Bevly, J. Ryu, and J.C. Gerdes. Integrating ins sensors with gps measurements for continuous estimation of vehicle sideslip, roll, and tire cornering stiffness. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 7:483–493, 2006.
- [23] S. Laws, C. Gadda, S. Kohn, P. Yih, J.C. Gerdes, and J.C. Milroy. Steer-by-wire suspension and steering design for controlability and observability. *IFAC, Department of Mechanical Engineering Stanford University*, pages 483–493, 2005.

- 
- [24] WIRED.com. Take a look inside the first steer-by-wire car. <http://www.wired.com/2013/05/aldrivebywire/>.
- [25] Inc Hearst Communication. Nissan will put drive-by-wire in 2013 cars. <http://www.popularmechanics.com/cars/news/auto-blog/nissan-will-put-drive-by-wire-in-2013-cars-13818193>.
- [26] J. C. Negrete. Interfaz háptica para dirección por cable steering-by-wire. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2011.
- [27] J. A. García. Control robusto de un sistema háptico de conducción por cable mediante el rechazo activo de perturbaciones. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2013.
- [28] N. D. Smith. Understanding parameters influencing tire modeling. *Colorado State University, 2004 Formula SAE Platform*.
- [29] J.C. Dixon. *Warrendale: Society of Automotive Engineers. SAE*, 1996.
- [30] M.A. Ceballos and C.A. Prato. Determinación de la rigidez dinámica de fundaciones superficiales usando un modelo modal de propagación de ondas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, XXX:1059–1073, 2011.
- [31] E. Rosario Gabriel. Estimación de la orientación de un cuerpo rígido: Estudio experimental comparativo. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2013.
- [32] M. Fliess and S. Diop. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. *IEEE Conference on Decision and Control*, 1:714–719, 1991.
- [33] Y. E. Gliklikh. Necessary and sufficient conditions for global in-time existence of solutions of ordinary, stochastic and parabolic differential equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2006:1–17, 2006.
- [34] C.D. Jonhson. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18:326, 1973.
- [35] Xsens Technologies B.V. *MT Low-Level Communication Protocol Documentation*.
- [36] Xsens Technologies B.V. *MTi and MTx User Manual and Technical Documentation*.
- [37] Hebert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, Third Edition.