



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN MECATRÓNICA

Manipulación Casi-estática de Objetos por un Robot Móvil con Restricciones de Tipo No Holónomas

T E S I S

Que presenta:

Ing. Rubén García Saldívar

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

En la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de la Tesis:

Dr. Jaime Álvarez Gallegos

Dr. Rafael Castro Linares

México DF.

Febrero, 2015

[Página intencionalmente en blanco]

Dedicatoria

A Margarita

Agradecimientos

A a mis padres y hermanos, por su infinito cariño y apoyo, por nunca dejar de creer en mi y darme animo cuando más lo necesitaba.

A mis asesores de tesis, los Doctores Jaime Álvarez Gallegos y Rafael Castro Linares, por confiarme este trabajo de tesis, por sus comentarios que siempre fueron para mejorar mi trabajo y por todo el apoyo que me brindaron para terminar mis estudios de maestría.

A los Doctores Miguel Gabriel Villarreal Cervantes y Martín Velasco Villa, por haber aceptado formar parte del jurado, por la pronta revisión del presente trabajo de tesis y por las sugerencias realizadas para enriquecer al mismo.

A mi novia Karla Beatriz Pérez Anaya, por todo su amor, comprensión y paciencia. Por estar conmigo en los momentos difíciles y darme el apoyo necesario para seguir adelante.

A mis amigos de maestría, por todo su apoyo, consejos, momentos divertidos y de trabajo arduo, en especial a Edgar y Jesus, que sin su apoyo y consejos, no hubiera podido terminar esta tesis con éxito.

A los Doctores de la sección de Mecatrónica, por aportar sus conocimientos y por exigirnos cada vez más para mejorar nuestra formación científica.

A los auxiliares M.en C. Igor Morett Valenzulea e Ing. Andrés González Rodríguez, por el préstamo de equipo especializado y la fabricación de circuitos impresos usados en este trabajo de tesis.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca para realizar estos estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo de tesis, se considera el problema de manipular objetos por medio de un robot móvil con restricciones de tipo no holónomas. Se elige un esquema de manipulación casi-estático, para evitar el diseño de un dispositivo de anclaje para el objeto a transportar. Se considera que el objeto transportado en el robot móvil puede tener una masa considerable, ésto puede alterar significativamente la distribución de masa del sistema, por lo que se desarrolla un modelo cinemático y uno dinámico que considere este efecto en el sistema.

Las trayectorias que debe seguir el robot móvil, con la finalidad de que el objeto transportado tenga un movimiento relativo al robot móvil mínimo, se obtienen por medio de un proceso de optimización. En el proceso de optimización se consideran dos casos, en el primero, no se consideran las fuerzas aplicadas en el objeto a consecuencia del movimiento del robot móvil; en el segundo caso, se consideran las fuerzas aplicadas en el objeto a consecuencia del movimiento del robot móvil.

Se desarrolla un esquema de control para el seguimiento de trayectoria basado en un control por par calculado, dentro de este se desarrolla un control auxiliar diseñado por la técnica de *Backstepping* para mejorar el seguimiento de las velocidades del sistema. Se presentan los resultados de simulación numérica y se desarrolla una plataforma experimental que cuenta con un robot móvil diferencial con la capacidad de controlarlo de forma dinámica, así mismo, se presentan los resultados obtenidos al usar esta plataforma experimental y se compraran los resultados obtenidos del proceso de optimización.

Por último, se dan las conclusiones del trabajo de tesis y se plantean una serie de puntos a tratar en el futuro para mejorar este trabajo.

Abstract

In this thesis, the problem of manipulating objects by means of a mobile robot with non-holonomic restrictions is considered. To avoid the design of an anchoring device for the object to be transported, a system of quasi-static handling is chosen. It is considered that the transported object in the mobile robot may have a considerable mass. This can significantly alter the mass distribution of the system, thus a kinematic and dynamic model is developed to consider such a fact.

The to be followed by the mobile robot, in order that the transported object has a minimum movement relative to the robot, are obtained via an optimization process. Two possibilities are considered in the optimization process which was designed and built is described. In the first one, no forces applied to the object are considered, as a result of the movement of the mobile robot. In the second case, the forces applied to the object are considered as a result of movement of the mobile robot.

A control scheme is developed for the trajectory tracking of the optimal trajectory, based on computed torque control together with the technique of Backstepping, to improve the tracking of the system speeds. Numerical simulation are presented to show the generation of the optimal trajectory and the performance of the trajectory tracking control scheme. Also, an experimental platform with a differential mobile robot with the ability to dynamically control it. The results obtained by using this experimental platform are presented and compared with the results of the optimization process.

Finally, some conclusions are given together with future that may improve the result obtained.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Objetivo	3
1.4. Metodología	4
1.5. Organización del Documento	4
2. Optimización de Trayectorias para un Robot Móvil Diferencial	7
2.1. Clasificación de los Robots Móviles con Ruedas	7
2.2. Robot Móvil Diferencial	10
2.2.1. Modelo Cinemático	11
2.2.2. Restricciones no Holónomas del Robot Móvil Diferencial	13
2.2.3. Modelo Dinámico	14
2.2.4. Simulaciones del Modelo Dinámico	18
2.3. Trayectoria Óptima	20
2.3.1. Problema de Optimización	21
2.3.2. Optimización de la trayectoria para un robot móvil diferencial	24
2.3.3. Trayectoria Óptima	25
2.4. Esquema de Control para Seguimiento de Trayectoria	30
2.4.1. Diseño del controlador	31
2.4.2. Simulaciones del Controlador	34
3. Plataforma Experimental	41
3.1. Descripción de la Plataforma Experimental	41
3.1.1. Robot Móvil Diferencial	42
3.1.2. Sistema de Visión	47
3.1.3. Sistema de Comunicación	49
4. Resultados Experimentales	53
4.1. Resultados Experimentales del Controlador Siguiendo una Trayectoria Cerrada	53
4.1.1. Experimentos bajo consideraciones del <i>caso 1</i>	54
4.1.2. Experimentos bajo consideraciones del <i>caso 2</i>	60

4.1.3. Experimentos bajo consideraciones del <i>caso 3</i>	62
4.2. Resultados Experimentales del Controlador Siguiendo la Trayectoria Óptima	63
4.3. Análisis de Resultados	68
5. Conclusiones y Trabajo a Futuro	69
5.1. Conclusiones	69
5.2. Trabajo a Futuro	70
Bibliografía	71
A. Cinemática de las ruedas del móvil diferencial	75
B. Curva de Lissajous	77
C. Artículo	79
D. CD de Contenidos	87

Índice de figuras

1.1.1. Móvil para el transporte de materiales de forma automática.	2
1.2.1. Ejemplos de diferentes esquemas para la manipulación de objetos.	2
1.2.2. Ejemplos de transporte de material.	3
1.4.1. Diagrama del Robot y el objeto (vista superior).	4
2.1.1. Clasificación de los robots móviles con ruedas.	9
2.2.1. Diagrama del robot móvil diferencial con distribución de masa no uniforme.	10
2.2.2. Velocidades en un Robot Móvil (2,0).	11
2.2.3. Cinemática del cuerpo rígido.	12
2.2.4. Velocidades consideradas para la restricción no holónoma en un robot móvil diferencial.	14
2.2.5. Fuerzas presentes en el robot móvil diferencial.	17
2.2.6. Trayectorias del móvil diferencial ante cambios en la posición del centro de masa.	19
2.2.7. Trayectorias del móvil diferencial ante cambios en los pares de las ruedas, con distribución de masa simétrica ($\gamma = 0$).	20
2.3.1. Trayectoria óptima 1.	26
2.3.2. Trayectoria óptima 2.	28
2.3.3. Fuerza resultante en la trayectoria óptima 2.	28
2.3.4. Errores de aproximación par la trayectoria óptima 1.	29
2.3.5. Errores de aproximación par la trayectoria óptima 5.	30
2.4.1. Diagrama del controlador.	31
2.4.2. Diagrama de Simulink TM	34
2.4.3. Seguimiento de una línea recta.	35
2.4.4. Seguimiento de una circunferencia.	36
2.4.5. Seguimiento de una curva de Lissajous.	37
2.4.6. Seguimiento de una curva de Lisajous con perturbaciones.	38
2.4.7. Comparación del seguimiento ante cambios de la posición del centro de masa.	39
2.4.8. Acercamiento a la gráfica de comparación de pares.	39
2.4.9. Comparación de controladores usando modelos distinto.	40
3.1.1. Diagrama de la plataforma experimental.	42

3.1.2. Robot móviles comerciales.	43
3.1.3. Renderizado del prototipo en CAD.	43
3.1.4. Piezas de la estructura de aluminio del robot móvil.	44
3.1.5. Esquemático de la tarjeta de control.	45
3.1.6. Baterías LiPo usadas en el movil.	46
3.1.7. Robot móvil con renderizado.	47
3.1.8. Marcadores reflejantes montados en el prototipo.	49
3.1.9. Marcadores reflejantes montados en el prototipo.	49
4.1.1. Seguimiento de trayectoria experimento 1.	55
4.1.2. Graficas del esquema de control para experimento 1.	55
4.1.3. Seguimiento de trayectoria experimento 2.	56
4.1.4. Graficas del esquema de control para experimento 2.	57
4.1.5. Seguimiento de trayectoria experimento 3.	58
4.1.6. Graficas del esquema de control para experimento 3.	58
4.1.7. Seguimiento de trayectoria experimento 4.	59
4.1.8. Graficas del esquema de control para experimento 4.	60
4.1.9. Seguimiento de trayectoria experimento 5.	61
4.1.10. Graficas del esquema de control para experimento 5.	61
4.1.11. Seguimiento de trayectoria experimento 6.	62
4.1.12. Graficas del esquema de control para experimento 6.	63
4.2.1. Seguimiento de trayectoria experimento 7.	64
4.2.2. Graficas del esquema de control para experimento 7.	65
4.2.3. Seguimiento de trayectoria experimento 8.	65
4.2.4. Graficas del esquema de control para experimento 8.	66
4.2.5. Distancia relativa del objeto transportado en el experimento 8.	67
4.2.6. Distancia relativa del objeto transportado en el experimento 9.	67
A.0.1. Diagrama de velocidades del móvil considerándolo un cuerpo rígido.	75

Índice de tablas

2.2.1. Parámetros de simulación para móvil diferencial.	19
2.3.1. Características de hardware y software para simulación de optimización. .	25
2.3.2. Parámetros de simulación.	25
2.3.3. Parametros del modelo dinámico para optimización.	27
2.4.1. Valores de los parámetros del esquema de control usados en las simulaciones numéricas.	34
2.4.2. Valores de los parámetros del robot móvil usados en las simulaciones numéricas.	35
3.1.1. Parámetros del motor Pololu # 1444.	44
3.1.2. Tarjeta AZB10A4.	45
3.1.3. Tarjeta de desarrollo EK-TM4C123GXL.	46
3.1.4. Parámetros de diseño del móvil diferencial.	47
3.1.5. Cámara Reflex 13.	48
3.1.6. Tarjeta WiFly.	50
3.1.7. Parámtrros de conexión Ad-hoc WiFly.	50
4.1.1. Parámetros del móvil diferencial con distribución de masa no uniforme. .	54

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se aborda la motivación y antecedentes que dan origen al desarrollo de esta tesis, además del objetivo de este trabajo y la metodología para lograrlo, por último, se da una descripción de los capítulos subsecuentes a éste.

1.1. Motivación

Desde la introducción de los robots industriales en la década de los cincuentas, se ha incrementado el uso de estos para aumentar la automatización de los procesos de producción. Lo anterior incluye el uso de robots móviles autónomos para el transporte de materias primas, herramientas, producto terminado y tareas de almacenamiento. El incremento en el uso de móviles para manipular objetos dentro de la cadena productiva se debe a la amplia variedad de investigación en torno a ellos, desarrollos en avances en el control de movimiento del robot móvil, planeación de trayectorias, evasión de obstáculos, entre otros [17] [26] [30]. Sin embargo, de este cúmulo de desarrollos, existe poca información relacionada al transporte de materiales por medio de un móvil sin considerar un elemento de anclaje. Esto se debe a que la mayoría de los móviles usados en esta tarea de transporte usan elementos de anclaje y contenedores especiales para la manipulación de los mismos (véase figura 1.1.1). El estudio del transporte de materiales por medio de un robot móvil sin el uso de elementos de anclaje es muy escaso y se limita a casos particulares del movimiento o arrastre del objeto [4] [2], lo que da cabida a futuros desarrollos y aportes en la materia.

En este documento se aborda el problema de transportar un objeto de forma casi-estática por medio de un robot móvil con restricciones de tipo no holónomas, considerando además el cálculo de la trayectoria óptima y la evasión de al menos un objeto. Se plantea una estrategia de optimización donde se considera el modelo cinemático del móvil y se considera al modelo dinámico como una restricción del sistema, el movimiento del móvil solo es limitado por las restricciones implícitas en su morfología.



Figura 1.1.1: Móvil para el transporte de materiales de forma automática.

1.2. Antecedentes

La manipulación de objetos por medio de mecanismos robóticos se puede clasificar en dos grupos, la manipulación prensil y la manipulación no prensil. La manipulación prensil implica una interacción con el objeto que evita que éste se desplace libremente durante su transporte, éste es el esquema de manipulación más usado en la industria y un ejemplo es la manipulación por agarre (grasping, en Inglés). Desarrollar medios de sujeción prensil implica generalmente el uso de mecanismos complejos tanto en su planeación como en su diseño, es aquí donde la manipulación no prensil toma importancia. En la manipulación no prensil los manipuladores del objeto no entran en conflicto entre la dinámica del objeto y el ambiente; se explota, principalmente, su dinámica y su geometría para completar la tarea de manipulación. Los métodos de manipulación no prensil se dividen en dos categorías principales: manipulación casi-estática y manipulación dinámica [4]. En la manipulación casi-estática, se supone que los movimientos son suficientemente suaves y permiten despreciar las fuerzas de inercia; esto requiere que el objeto siempre esté en contacto con el robot y no existe movimiento relativo entre ambos. Por el contrario, en la manipulación dinámica el objeto puede perder el contacto con el manipulador en algunas porciones del periodo de manipulación. La figura 1.2.1 muestra algunos ejemplos de los diferentes esquemas de manipulación.



Figura 1.2.1: Ejemplos de diferentes esquemas para la manipulación de objetos.

Desde el punto de vista de manipulación no prensil, una posible aplicación de los robots móviles es la manipulación de un objeto de manera casi-estática de tal manera que un robot móvil traslade un objeto desde una configuración inicial hasta otra configuración mientras lleva un objeto sobre si mismo (vease figura 1.2.2). En este tipo de tarea, el problema crucial es planear el movimiento del robot de tal manera que éste mantenga el contacto con el objeto durante la tarea de manipulación. A pesar de que se han desarrollado varios métodos de planeación (véase [19], por ejemplo), el problema de planeación de movimiento para un robot móvil mientras lleva un objeto sobre él no ha sido estudiado de forma amplia y suficiente.

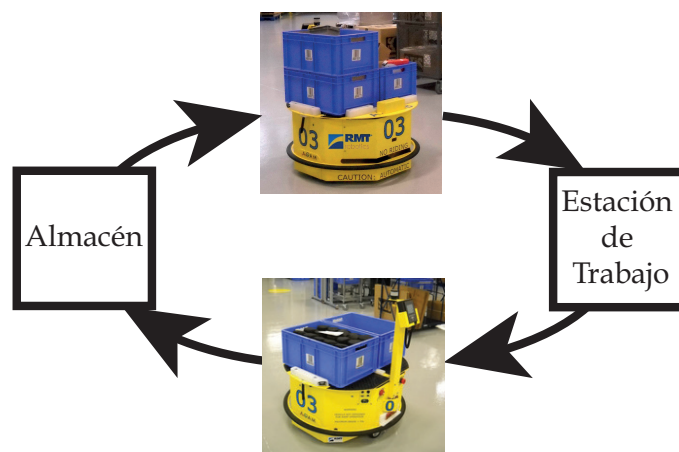


Figura 1.2.2: Ejemplos de transporte de material.

Por otro lado, abordando el problema que implica la obtención de las trayectorias, existe una amplia variedad de técnicas para lograrlo [21] [27] [18] [24], sin embargo, hay que considerar que se desea trabajar con un robot móvil con restricciones del tipo no holónomas [23] [3]. El problema que implica calcular una trayectoria para un sistema con estas restricciones es muy complicado de abordar [20], por lo que generalmente se opta por el uso de técnicas de control óptimo, aunque la solución factible y óptima para cualquier sistema no holónomo es desconocida, por lo que son más usados los algoritmos meta-heurísticos y tratar la tarea como un problema de optimización.

1.3. Objetivo

El objetivo del presente trabajo de tesis es el de diseñar y realizar la manipulación casi-estática de un objeto por medio de un robot móvil. Más precisamente, al desplazarse el robot desde una posición inicial a otra posición final, la manipulación debe llevarse a cabo de tal manera que traslade sobre su superficie superior un objeto rígido sin que se produzca un desplazamiento relativo entre esta superficie y el objeto (condición de agarre dinámico).

1.4. Metodología

Se trata de diseñar y realizar la manipulación casi-estática de un objeto por medio de un robot móvil. Se considera optimizar el movimiento del robot al considerar las condiciones de agarre dinámico como un conjunto de restricciones [4]. Se planea realizar experimentos en una plataforma como la mostrada en la figura 1.4.1, en una área cerrada con información de la posición del robot móvil a través de cámaras. El trabajo de tesis se realizará considerando lo siguiente:

- Desarrollo del modelo matemático que describe el comportamiento del robot móvil considerando que transporta un objeto con una posición libre sobre el móvil.
- Diseño del esquema de manipulación casi-estática.
- Evaluación del esquema de manipulación en simulación numérica.
- Realización del esquema de manipulación y evaluación experimental del mismo.

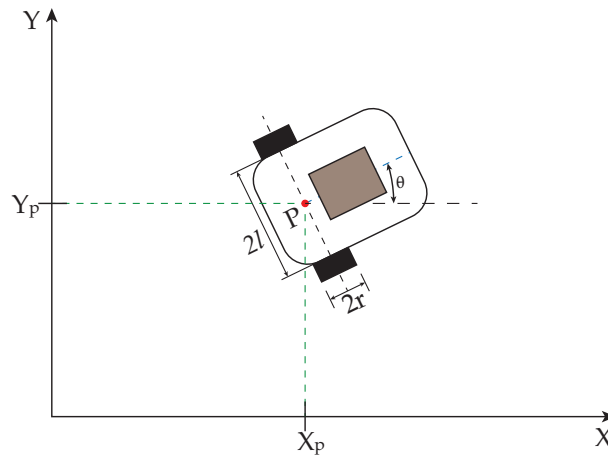


Figura 1.4.1: Diagrama del Robot y el objeto (vista superior).

1.5. Organización del Documento

A continuación se presenta un resumen de cada uno de los capítulos de que consta la tesis:

Capítulo 2 *Optimización de Trayectorias para un Robot Móvil Diferencial.* En este capítulo se da una descripción del modelo matemático del robot móvil, se aborda el problema de tener una distribución no uniforme de masa al desarrollar el modelo dinámico. Se describe también el proceso de optimización de la trayectoria considerando el modelo cinemático como sistema de análisis y al modelo dinámico como restricción del mismo. Se propone también un esquema de control apropiado para el seguimiento de la trayectoria y sus simulaciones numéricas.

Capítulo 3 *Plataforma Experimental.* En este capítulo se presenta una descripción de la plataforma experimental, desde su diseño mecánico, los elementos que la conforman y los dispositivos usados para la odometría.

Capítulo 4 *Resultados Experimentales.* En este capítulo se describen todos los resultados obtenidos con la plataforma experimental, además de una comparación con los datos obtenidos de simulación numérica.

Capítulo 5 *Conclusiones y Trabajo a Futuro* En este capítulo se dan las conclusiones de la tesis y el trabajo que sería posible abordar en el futuro.

Capítulo 2

Optimización de Trayectorias para un Robot Móvil Diferencial

En este capítulo se aborda el problema de optimización de trayectorias para robots móviles, iniciando con una breve descripción de los tipos de robots móviles, dando una descripción más detallada del robot móvil diferencial, explicando su modelo cinemático y dinámico. Se describe el problema de optimización para este tipo específico de robot móvil y se consideran dos casos, sin evasión de obstáculos y con evasión de obstáculos. Por último se desarrolla un controlador con el cual es posible hacer el seguimiento de la trayectoria para el tipo de robot móvil considerado.

2.1. Clasificación de los Robots Móviles con Ruedas

Para clasificar a los robots móviles con ruedas es necesario conocer, primero, que su locomoción se puede generar por dos tipos de ruedas, las ruedas convencionales y las omnidireccionales [10]. En las ruedas convencionales se supone que el contacto entre ésta y el suelo cumplen con la condición de *rodamiento puro* y *no deslizamiento* durante el movimiento y sólo se pueden mover en la dirección de su orientación; es decir, la componente de velocidad ortogonal al plano de la rueda es cero (restricción no holónoma) [10]. Este tipo de ruedas son más comúnmente usadas en los vehículos con ruedas (automóviles, motocicletas, bicicletas, etc.) y se clasifican en rueda fija, de dirección y castor. Las ruedas omnidireccionales, a diferencia de las convencionales, cumplen con la condición de *rodamiento puro*; esto quiere decir que se puede desplazar por toda el área de trabajo sin restricción de movimiento (su velocidad ortogonal al plano de la rueda puede ser diferente de cero) y las ruedas pueden ser de dos tipos, de esfera o "suecas".

La clasificación de los robot móviles con ruedas se da en cinco categorías de acuerdo al número y tipo de grados de libertad [10], que depende del tipo, ubicación y configuración de las ruedas a utilizar. Los grados de libertad son clasificados en *grados de movilidad* (δ_m) y *grados de direccionabilidad* (δ_s). El grado de direccionabilidad tiene que ver con la cantidad de ruedas que se pueden orientar independientemente para direccionar al móvil. El grado de movilidad tiene que ver con la cantidad de ruedas fijas que pueden generar desplazamiento en el móvil. Los grados de libertad que pueden ser actuados independientemente en el móvil son igual a la suma de sus grados de direccionabilidad y movilidad. Un robot móvil viable que se mueve sobre un plano debe tener como mínimo dos grados de libertad y como máximo tres [10]. Esto implica que se debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3$$

Un solo grado de libertad en el robot sólo le permitirá moverse en un círculo o sobre una línea recta ($\delta_m = 1, \delta_s = 0$) o bien no tendría propulsión y solo se podría controlar la orientación de sus ruedas convencionales ($\delta_m = 0, \delta_s = 1$). Más de tres grados de libertad no son posibles como ha sido demostrado en [8] y [10]. De acuerdo a la notación anterior (δ_m, δ_s), los robots móviles con locomoción por ruedas se clasifican en [22]:

- Robot móvil tipo (1,1): Robot construido con una o más ruedas fijas sobre el mismo eje actuadas al mismo tiempo y al menos una rueda orientable fuera del eje de las ruedas fijas (véase la figura 2.1.1). Este robot tiene un grado de movilidad, que es la velocidad lineal, u_1 , y un grado de direccionabilidad, que es la velocidad angular de la dirección de las ruedas orientables, u_2 . La movilidad de este robot se logra actuando la velocidad y dirección de las ruedas orientables o actuando la velocidad de las ruedas fijas y la dirección de las orientables. De manera más común, se puede hacer la analogía con un automóvil de tracción delantera, en el primer caso, y de tracción trasera, en el segundo caso.
- Robot móvil tipo (1,2): Robot construido con al menos dos ruedas orientables (véase la figura 2.1.1). Este robot tiene un grado de movilidad que es la velocidad lineal, u_1 , y dos grados de direccionabilidad, cada uno de ellos asociado a la orientación de una rueda tipo orientable. La movilidad de este robot se logra actuando la velocidad y dirección de una de las ruedas orientables y únicamente la orientación de la otra.
- Robot móvil tipo (2,0): Robot construido utilizando dos o más ruedas fijas sobre el mismo eje (véase la figura 2.1.1). Este robot cuenta con dos grados de movilidad, uno es la velocidad lineal, u_1 , y el otro la velocidad angular, u_2 . La movilidad del robot depende de tener dos velocidades diferentes asociadas a dos ruedas convencionales fijas. Este robot también es conocido como diferencial o unicycle por el tipo de movilidad que generan sus ruedas.
- Robot móvil tipo (2,1): Robot construido con ruedas orientables (véase la figura 2.1.1). Este robot tiene dos grados de movilidad que son la velocidad lineal, u_1 , y la velocidad angular, u_2 , y un grado de direccionabilidad, que es la velocidad angular

de la dirección de las ruedas orientables, u_3 . La movilidad de este robot se logra actuando la velocidad de las ruedas orientables y su orientación. Este robot tiene una configuración muy parecida a un automóvil.

- Robot móvil tipo (3,0): Robot construido con solo ruedas omnidireccionables (véase la figura 2.1.1). Estos robot son llamados ominidireccibles debido a que pueden moverse en cualquier dirección del plano sin ningún tipo de reorientación, de aquí que su grado de movilidad sea $\delta_m = 3$. Dos grados de movilidad son las velocidades lineales, u_1 y u_2 , y el tercero es la velocidad angular, u_3 .

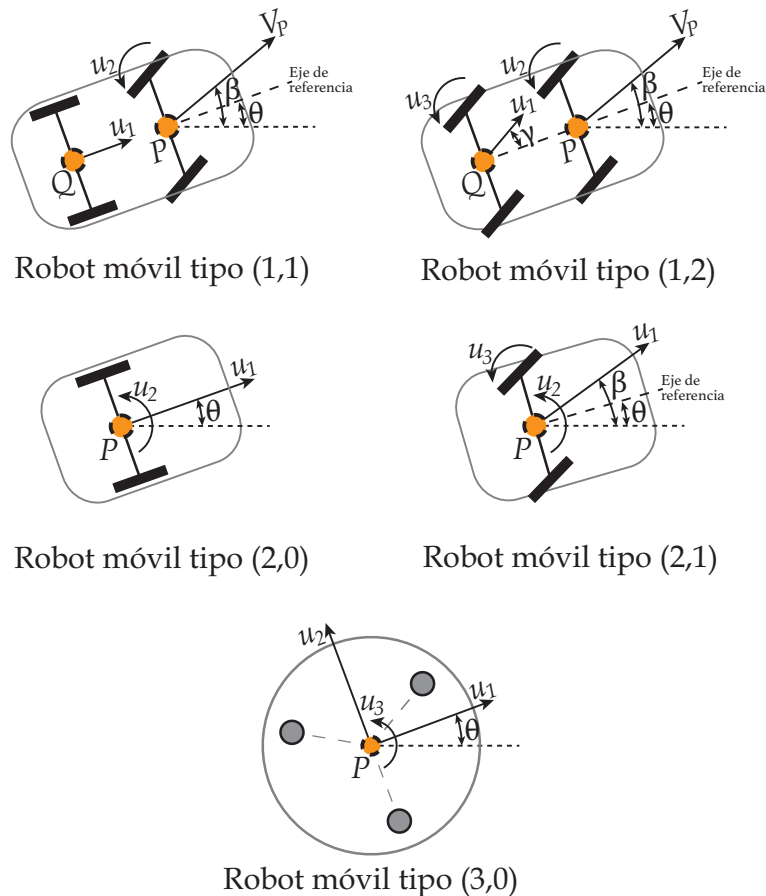


Figura 2.1.1: Clasificación de los robots móviles con ruedas.

De los diferentes tipos de robots móviles antes mencionados, se decidió usar el robot móvil tipo (2,0) o diferencial, debido a que es más comúnmente usado en ambientes industriales y de investigación, además de que se puede diseñar y construir fácilmente debido a que solo usa dos motores en línea y estos proporcionan tanto la velocidad lineal como angular al variar únicamente las velocidades de cada rueda, permitiendo así controlar su posición y orientación; de esta capacidad surge su definición como robot móvil diferencial.

2.2. Robot Móvil Diferencial

En la figura 2.2.1 se muestra el diagrama de un robot móvil (2,0) o diferencial con una distribución de masa no uniforme, donde;

P_0 es el punto medio del eje de giro de las llantas.

P_{cm} es el centro de masa del robot.

γ es el ángulo de desfase del centro de masa con respecto al eje de simetría del móvil.

r es el radio de cada llanta.

d es la distancia del punto P_0 al centro de masa.

b es la separación de la llanta medido desde el eje de simetría del móvil.

m es la masa total del robot móvil.

θ es el ángulo de orientación medido desde el eje X_w al eje X_m .

x_0 es la componente x del punto P_0 en el marco de referencia fijo.

y_0 es la componente y del punto P_0 en el marco de referencia fijo.

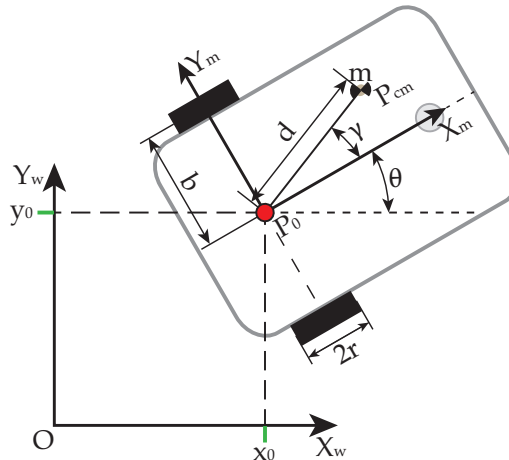


Figura 2.2.1: Diagrama del robot móvil diferencial con distribución de masa no uniforme.

Como ya se mencionó anteriormente, el modelo presentado considera cambios en la distribución de masa pero, para fines prácticos, se considera que el objeto que transporta el móvil no se mueve durante el recorrido, por lo que se considera al centro de masa como fijo.

Para obtener el modelo matemático del robot móvil diferencial, es necesario definir una variable articular que proporcione la ubicación en un espacio de trabajo y la orientación del móvil como:

$$\xi = [X \ Y \ \Theta]^T \quad (2.2.1)$$

La ecuación (2.2.1) es una representación general de las variables que se usan para obtener el modelado del robot móvil. Como se supone que el robot móvil se mueve en un plano horizontal solo se necesitan dos coordenadas de posición (generalmente se usan X y Y). La última variable Θ se asocia a la orientación del robot, generalmente referenciada al marco inercial fijo.

2.2.1. Modelo Cinemático

El modelo cinemático de un robot móvil se obtiene al relacionar las velocidades presentes en el sistema con la velocidad de cambio de posición y orientación del móvil en un marco de referencia fijo. Para el caso particular del robot móvil diferencial considerado en este trabajo, se usa la siguiente variable articular $q = [x \ y \ \theta]^T$, donde la posición del punto de análisis (x,y) se escoge en cualquier punto diferente de P_0 (véase la figura 2.2.2) para obtener un modelo cinemático más completo.

La figura 2.2.2 muestra el diagrama del móvil con las velocidades presentes en el sistema, donde los nuevos parámetros mostrados representan lo siguiente:

$\dot{\phi}_l$ es la velocidad angular de la rueda izquierda.

$\dot{\phi}_r$ es la velocidad angular de la rueda derecha.

v es la velocidad lineal resultante originada por las velocidades en las ruedas.

ω es la velocidad angular resultante originada por las velocidades en las ruedas.

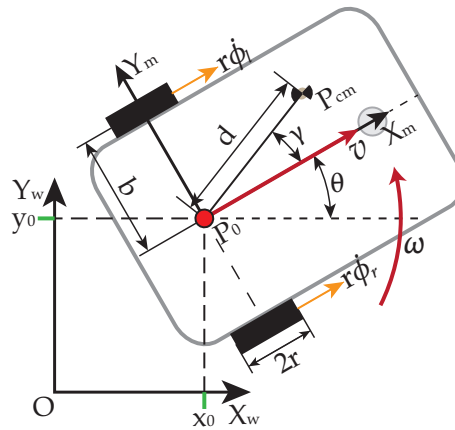


Figura 2.2.2: Velocidades en un Robot Móvil (2,0).

Si se considera al robot móvil como un cuerpo rígido (véase figura 2.2.3), es posible encontrar una relación directa entre las velocidades de las ruedas y la velocidad lineal y angular del robot móvil. La ecuación vectorial que rige el movimiento cinemático de un cuerpo rígido está dada por [14]:

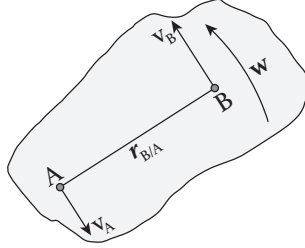


Figura 2.2.3: Cinemática del cuerpo rígido.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{w} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (2.2.2)$$

donde \times indica el producto vectorial y

\mathbf{v}_A es la velocidad lineal en el punto A.

\mathbf{v}_B es la velocidad lineal en el punto B.

\mathbf{w} es la velocidad angular considerando al punto A como pivote.

$\mathbf{r}_{B/A}$ es la distancia del punto A al punto B.

Para obtener el modelo cinemático del robot móvil diferencial se toma el centro de masa, P_{cm} y obtenemos su velocidad \mathbf{v}_{cm} , considerando al móvil como un cuerpo rígido con centro de giro en el punto P_0 (véase la figura 2.2.2). Las velocidades presentes en el móvil son originadas por la velocidad de giro de sus ruedas, una descripción de como se asocian estas velocidades se encuentra en el apéndice A.

Reescribiendo la ecuación (2.2.2) como sigue

$$\mathbf{v}_{cm} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{d}, \quad (2.2.3)$$

donde $V_{cm} = [x_{cm} \ y_{cm} \ z_{cm}]^T$ y

$$\mathbf{v} = [v \cos(\theta) \ v \sin(\theta) \ 0]^T, \quad (2.2.4a)$$

$$\mathbf{w} = [0 \ 0 \ \omega]^T, \quad (2.2.4b)$$

$$\mathbf{d} = [d \cos(\theta + \gamma) \ d \sin(\theta + \gamma) \ 0]^T. \quad (2.2.4c)$$

x_{cm} , y_{cm} y z_{cm} son las coordenadas espaciales del centro de masa, recordando que el robot móvil solo se mueve en el plano $X - Y$ implica que el valor de z_{cm} es constante y por lo tanto su aportación a la velocidad del centro de masa es cero. Sustituyendo las ecuaciones (2.2.4a), (2.2.4b) y (2.2.4c) en (2.2.3) tenemos:

$$\mathbf{v}_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{cm} \\ \dot{y}_{cm} \\ \dot{z}_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) - d \sin(\theta + \gamma) \omega \\ v \sin(\theta) + d \cos(\theta + \gamma) \omega \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Considérese la variable articular

$$\mathbf{q}_{cm} = [x_{cm} \quad y_{cm} \quad \theta]^T. \quad (2.2.6)$$

La derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.2.6) queda como

$$\dot{\mathbf{q}}_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{cm} \\ \dot{y}_{cm} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \sin(\theta + \gamma) \\ \sin(\theta) & d \cos(\theta + \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

La ecuación (2.2.7) representa un modelo cinemático generalizado para el robot móvil diferencial. Por ejemplo, si se desea usar el punto P_0 , basta con considerar $d = 0$. De igual manera, si se desea usar un punto sobre el eje de simetría del robot, basta con tomar $\gamma = 0$ y obteniéndose un modelo más simple pero que conduce a leyes de control singulares [11].

2.2.2. Restricciones no Holónomas del Robot Móvil Diferencial

Si se desea que el robot móvil vaya del punto (x_0, y_0, θ_0) al punto (x_f, y_f, θ_f) , este sólo puede llegar por medio de una cantidad limitada de trayectorias; esto se debe a que el robot móvil diferencial no se puede mover con libertad por el espacio de trabajo. Sin embargo, el robot móvil puede alcanzar todos los puntos del espacio de trabajo. El móvil tiene entonces restricciones en el movimiento. Estas restricciones se originan porque se supone que el robot móvil no puede desplazarse libremente sobre el eje Y_m y son del tipo no holónomas. En la figura 2.2.4 se muestran las velocidades consideradas para obtener la restricción no holónoma del sistema.

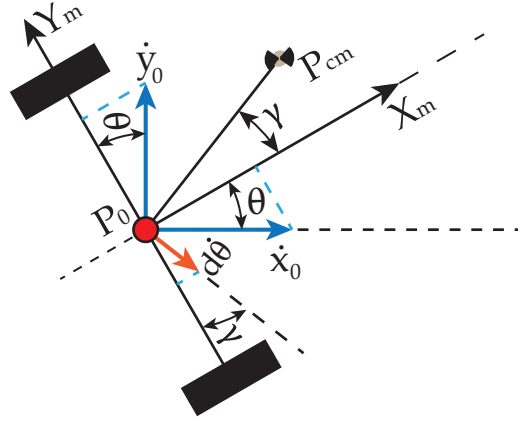


Figura 2.2.4: Velocidades consideradas para la restricción no holónoma en un robot móvil diferencial.

De la figura 2.2.4 se obtiene la ecuación

$$-\dot{x}_0 \sin(\theta) + \dot{y}_0 \cos(\theta) - d \cos(\gamma) \dot{\theta} = 0. \quad (2.2.8)$$

La ecuación (2.2.8) se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & -d \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A(q) \dot{q} = 0. \quad (2.2.9)$$

La ecuación (2.2.9) corresponde a la ecuación matricial que define las restricciones no holónomas del sistema (robot móvil diferencial), donde la matriz $A(q)$ es la llamada matriz de restricciones no holónomas y que se usa más adelante en el modelo dinámico.

2.2.3. Modelo Dinámico

Como ya se mencionó anteriormente, el robot móvil diferencial es un sistema dinámico con restricciones de tipo no holónomas, por lo que el modelo dinámico tiene la siguiente forma [12]

$$M(q) \ddot{q} + V_m(q, \dot{q}) \dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_e = B(q) \tau - A^T(q) \lambda. \quad (2.2.10)$$

Donde $M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $V_m(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas de coriolis y centrípetas, $F(\dot{q}) \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de fricción con la superficie, $G(q) \in \mathfrak{R}^n$ es el

vector de gravedad, $\tau_e \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de los pares no modelados, $B(q) \in \mathfrak{R}^{n \times r}$ es la matriz de transformación de los pares, $\tau \in \mathfrak{R}^r$ es el vector de pares de entrada, $A(q) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ es la matriz relacionada con las restricciones y $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ es un vector multiplicador de Lagrange.

Para el modelo dinámico aquí presentado se considera que no hay vector de fricción, vector de pares no modelados y vector de gravedad (solo se mueve en un plano horizontal). Por otro lado, el vector multiplicador de Lagrange no se calcula ya que más adelante se elimina. Bajo estas consideraciones, el modelo dinámico considerado tiene la siguiente forma

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - A^T(q)\lambda. \quad (2.2.11)$$

Para obtener el modelo dinámico se usa la siguiente ecuación, la cual permite obtener el modelo dinámico de robots móviles con restricciones no holónomas a partir de la energía cinética [25]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - a_{1i}\lambda_1, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (2.2.12)$$

donde K es la energía cinética, Q_i son los pares de entrada del sistema, a_{1i} son los elementos del vector de restricciones no holónomas y λ_1 es un multiplicador de Lagrange.

La energía cinética del robot móvil se obtiene de la siguiente ecuación [14]

$$K = \frac{1}{2}mv_{cm}^T v_{cm} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_z. \quad (2.2.13)$$

donde v_{cm} es la velocidad lineal del centro de masa presentado en la ecuación (2.2.5), I_z es el momento de inercia del móvil sobre el eje Z_m del marco de referencia fijo en el móvil y m es la masa total del robot móvil.

La velocidad del centro de masa se obtiene de la ecuación (2.2.5), sustituyendo $v \cos(\theta) = \dot{x}_0$, $v \sin(\theta) = \dot{y}_0$ y $\omega = \dot{\theta}$, con lo que se obtiene

$$K = \frac{1}{2}m \left[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + d^2\dot{\theta}^2 - 2d \sin(\theta + \gamma) \dot{x}_0\dot{\theta} + 2d \cos(\theta + \gamma) \dot{y}_0\dot{\theta} \right] + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2. \quad (2.2.14)$$

Es claro que la variable articular para el modelo dinámico está dada por

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T = [x_0 \quad y_0 \quad \theta]^T$$

Al usar la ecuación (2.2.14) se obtienen los siguientes términos de (2.2.12):

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_0} &= m\dot{x}_0 - md \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_0} &= m\dot{y}_0 + md \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta}\end{aligned}\tag{2.2.15a}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = (I_z + md^2) \dot{\theta} - md \sin(\theta + \gamma) \dot{x}_0 + md \cos(\theta + \gamma) \dot{y}_0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_0} \right) &= m\ddot{x}_0 - md \sin(\theta + \gamma) \ddot{\theta} - md \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}_0} \right) &= m\ddot{y}_0 + md \cos(\theta + \gamma) \ddot{\theta} - md \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta}^2\end{aligned}\tag{2.2.15b}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (I_z + md^2) \ddot{\theta} - md \sin(\theta + \gamma) \ddot{x}_0 + md \cos(\theta + \gamma) \ddot{y}_0 \\ &\quad - md \cos(\theta + \gamma) \dot{x}_0 \dot{\theta} - md \sin(\theta + \gamma) \dot{y}_0 \dot{\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial x_0} &= 0 \\ \frac{\partial K}{\partial y_0} &= 0 \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} &= -md \cos(\theta + \gamma) \dot{x}_0 \dot{\theta} - md \sin(\theta + \gamma) \dot{y}_0 \dot{\theta}\end{aligned}\tag{2.2.15c}$$

El vector $Q(q) = [Q_{x_0} \quad Q_{y_0} \quad Q_{\theta}]^T$ involucra las fuerzas y los pares en el sistema. De la figura 2.2.5 se puede observar que las fuerzas involucradas en el sistema son ocasionadas por los pares presentes en las ruedas; esto conduce a las expresiones

$$\begin{aligned}Q_{x_0} &= \frac{\tau_i}{r} \cos(\theta) + \frac{\tau_d}{r} \cos(\theta) \\ Q_{y_0} &= \frac{\tau_i}{r} \sin(\theta) + \frac{\tau_d}{r} \sin(\theta) \\ Q_{\theta} &= -\frac{\tau_i}{r} b + \frac{\tau_d}{r} b\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

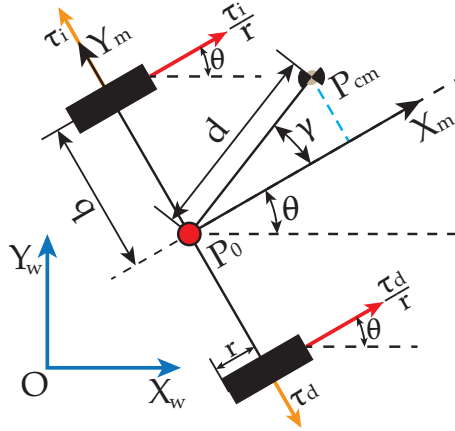


Figura 2.2.5: Fuerzas presentes en el robot móvil diferencial.

Por último se tiene que la matriz de restricciones no holónomas $A(q)$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & -d \cos(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (2.2.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.17), (2.2.16), (2.2.15c) y (2.2.15b) en (2.2.12) y reordenando se obtiene la forma de la ecuación (2.2.11), con

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -md \sin(\theta + \gamma) \\ 0 & m & md \cos(\theta + \gamma) \\ -md \sin(\theta + \gamma) & md \cos(\theta + \gamma) & md^2 + I_z \end{bmatrix},$$

$$V_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -md \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & -md \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -b & b \end{bmatrix}.$$

El modelo dinámico presentado es un sistema subactuado; esto quiere decir que hay mas variables articulares que controles. Sin embargo, es posible reducir su dimensión y convertirlo en un sistema totalmente actuado [12]. Para lograr esta reducción es necesario representar a las restricciones no holónomas como en la ecuación (2.2.9). Además, es posible encontrar una matriz $S(q)$ tal que sus columnas se encuentren en el espacio nulo de $A(q)$ de tal modo que [7]

$$S^T(q)A^T(q) = 0. \quad (2.2.18)$$

Por otro lado, la velocidad \dot{q} se encuentra también en el espacio nulo de $A(q)$ y existe un vector suave η tal que [7]

$$\dot{q} = S(q)\eta. \quad (2.2.19)$$

En este caso el vector η está dado por $\eta = [v \ \omega]^T$, por lo que la ecuación anterior está directamente relacionada con el modelo cinemático del robot móvil en el punto P_{cm} y la matriz $S(q)$ está dada por

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \sin(\theta + \gamma) \\ \sin(\theta) & d \cos(\theta + \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.20)$$

Para tener un modelo dinámico más apropiado, es necesario sustituir la ecuación (2.2.19) en (2.2.11) y multiplicar por la izquierda por $S(q)^T$ con lo que se obtiene

$$S^T M (S\dot{\eta} + \dot{S}\eta) + S^T V_m S \eta = S^T B \tau. \quad (2.2.21)$$

Una representación simplificada de la ecuación (2.2.21) es

$$\bar{M}\dot{\eta} + \bar{V}_m \eta = \bar{B}\tau, \quad (2.2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{M} &= S^T M S, \\ \bar{V}_m &= S^T M \dot{S} + S^T V_m S, \\ \bar{B} &= S^T B. \end{aligned}$$

La matriz $\bar{M} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ sigue siendo una matriz simétrica definida positiva, $\bar{V}_m \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ es la matriz que sustituye a la matriz de coriolis y fuerzas centripetas y $\bar{B} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de transformación de los pares de entrada. Además se cumple que $\dot{\bar{M}} - 2\dot{\bar{V}}_m$ es una matriz antisimétrica. El modelo dinámico propuesto en la ecuación (2.2.22) es un modelo totalmente actuado más fácil de manipular.

2.2.4. Simulaciones del Modelo Dinámico

A continuación se muestran una serie de simulaciones numéricas del modelo dinámico del robot móvil diferencial en lazo abierto. En estas simulaciones se observa el comportamiento del móvil diferencial ante cambios en el centro de masa y diferentes pares de entrada en las ruedas. Para las simulaciones se usan los siguientes parámetros dados en la tabla 2.2.1

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	2.593	[Kg]
d	0.022	[m]
r	0.045	[m]
b	0.13	[m]
I	0.02	[Kg - m ²]
γ	0-55°	[grad]
τ_i	0.005	[N - m]
τ_d	0.005	[N - m]

Tabla 2.2.1: Parámetros de simulación para móvil diferencial.

En la figura 2.2.6 se presenta una gráfica que muestra como el cambio en la posición del centro de masa altera la trayectoria que debe seguir el móvil diferencial a medida que cambiamos los valores de γ . Por otro lado, en la figura 2.2.7, se muestra una gráfica de la simulación del móvil diferencial con una distribución de masa simétrica ($\gamma = 0$) con diferentes pares de entrada en las ruedas. En ambas simulaciones se observa un comportamiento muy similar. Esta comparación es de gran ayuda cuando se diseña un controlador para seguimiento de trayectoria, ya que muestra el comportamiento del sistema ante el cambio del centro de masa.

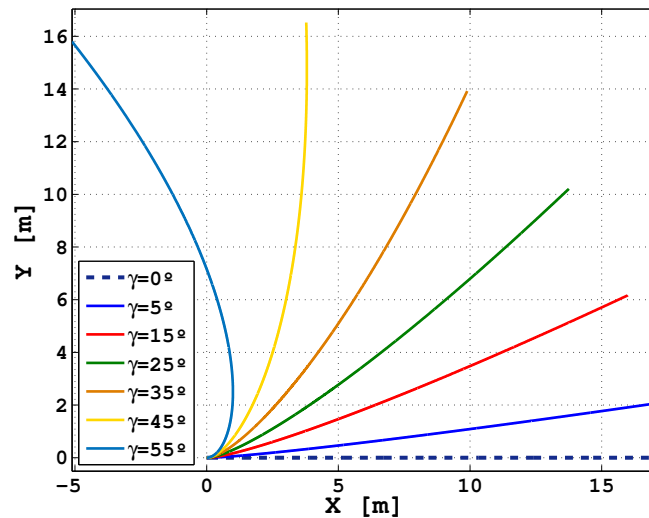


Figura 2.2.6: Trayectorias del móvil diferencial ante cambios en la posición del centro de masa.

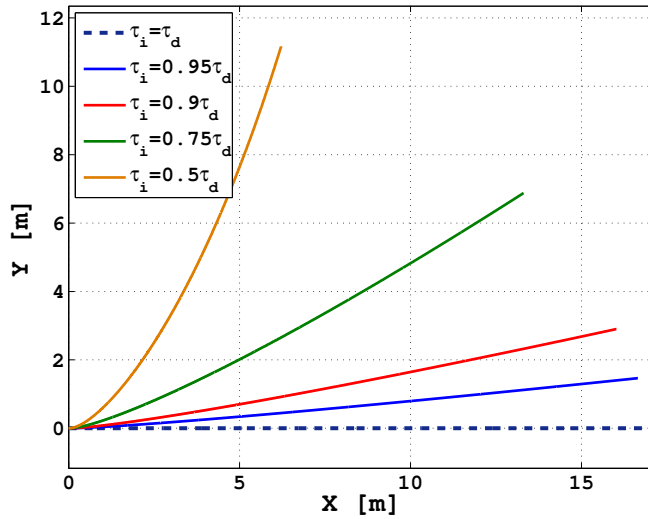


Figura 2.2.7: Trayectorias del móvil diferencial ante cambios en los pares de las ruedas, con distribución de masa simétrica ($\gamma = 0$).

2.3. Trayectoria Óptima

Como se mencionó en el capítulo anterior, existe una gran variedad de metodologías para obtener las trayectorias de un robot móvil, en este trabajo se decide usar un método de optimización para obtener las trayectorias. Al usar optimización para obtener las trayectorias, da como resultado una curva que satisface las condiciones planteadas en el problema de optimización, estas pueden incluir la minimización del error de seguimiento, minimizar el consumo de energía, minimizar el tiempo para llegar de una posición inicial a una final o todas las anteriores, esto da como resultado una trayectoria óptima.

Para obtener la trayectoria óptima, usar el modelo cinemático es la forma más fácil de abordar este problema; por otro lado, dada la naturaleza del problema planteado en esta tesis, donde es necesario usar el modelo dinámico para obtener las fuerzas involucradas en el sistema, con la finalidad de usarlas como restricciones en el problema de optimización. En [3] se muestra una metodología para obtener las trayectorias óptimas de un sistema con restricciones de tipo no holónomas, desarrollando un método basado en programación cuadrática secuencial para obtener las trayectorias considerando las restricciones de tipo no holónomas. Sin embargo, en ese trabajo solo se utilizan modelos cinemáticos de robots móviles debido a la gran complejidad que implica la optimización de sistemas dinámicos con restricciones de tipo no holónomas [20].

Considerando lo anterior, en este trabajo se propone un método para obtener la trayectoria óptima usando al modelo cinemático y como restricciones las fuerzas de reacción del objeto a transportar (obtenidas a partir del modelo dinámico), las limitaciones de par y la evasión de obstáculos.

El método que se propone como solución para encontrar las trayectorias óptimas es considerado como un problema de control óptimo ya que, como tal, se tiene un sistema en el cual es necesario encontrar los controles de entrada (velocidad en el caso del modelo cinemático) que lleven a la trayectoria óptima. Sin embargo, se puede convertir este problema de control óptimo a un problema de programación no lineal usando la metodología planteada en [6], donde además se puede usar el Toolbox de Optimización de MatlabTM.

2.3.1. Problema de Optimización

Siguiendo la metodología descrita en [6], se discretiza el modelo que se va usar, es decir, el modelo cinemático del robot móvil. Se considera el modelo obtenido por discretización exacta desarrollado en [22] dado por

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + Tv(k) \psi(\omega(k)) \cos(\theta(k) + \frac{T}{2}\omega(k)) \\ y(k) + Tv(k) \psi(\omega(k)) \sin(\theta(k) + \frac{T}{2}\omega(k)) \\ \theta(k) + T\omega(k) \end{bmatrix}, \quad (2.3.1)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, T$ es el periodo de muestreo y

$$\psi(\omega(k)) = \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\omega(k)\right)}{\frac{T}{2}\omega(k)} \quad (2.3.2)$$

La ecuación (2.3.2) es mejor conocida como la función $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ o seno cardinal; esta función tiene singularidad evitable en cero ($\text{sinc}(0) = 1$) y es analítica en todo su dominio, esta función corresponde a la transformada de Fourier de un pulso rectangular [16].

Se propone el índice de desempeño J

$$J = \varphi(\xi(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\xi(k), u(k)), \quad (2.3.3)$$

donde $\xi(k)$ es la variable articular del modelo cinemático discreto, $u(k)$ es el vector de controles, $\varphi(\xi(N))$ es una función de peso escalar del estado final en $\xi(N)$, $L(x(k), u(k))$

es la llamada función objetivo. Este índice de desempeño puede estar sujeto a funciones de restricción de desigualdad e igualdad de la forma

$$G(x(k)) \leq 0, \quad k = 0, \dots, N, \quad (2.3.4a)$$

$$\Psi(x(N)) = 0. \quad (2.3.4b)$$

La restricción de desigualdad (2.3.4a) están sujetas generalmente a las funciones que limitan los parámetros del sistema, la restricción de igualdad (2.3.4b) implica que el estado final del sistema es cero. Por otro lado, se supone que el sistema empieza en el estado inicial $x_0 = x(0)$ y que los controles están acotados por un límite superior e inferior como sigue:

$$u_{i \min} \leq u_i(k) \leq u_{i \max}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (2.3.5)$$

El control u_1 está relacionado con la velocidad lineal del robot móvil y solo puede tener valores positivos mayores a cero ($u_{1 \min} = 0, u_{2 \max} = v_{\max}$); el control u_2 está relacionado con la velocidad angular del robot móvil y está acotado por ambos extremos por la velocidad angular máxima ($|u_2| \leq \omega_{\max}$).

Se propone entonces el siguiente problema de control óptimo:

$$\min_{u(k)} J = \min_{u(k)} \varphi(\xi(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\xi(k), u(k)) \quad (2.3.6)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= F(\xi(k), u(k)), \quad k = 0, \dots, N-1, \\ x(0) &= x_0, \\ G(x(k)) &\leq 0, \quad k = 0, \dots, N, \\ \Psi(x(N)) &= 0, \\ u_{i \min} &\leq u_i(k) \leq u_{i \max}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

donde $\min_{u(k)} J$ significa que deseamos minimizar la función con respecto a los controles de entrada u_i .

El problema de control óptimo planteado en la ecuación (2.3.6) puede ser formulado como un problema de programación no lineal [5] usando el concepto de parametrización del control [13], [15], [28], [29]. Se define la siguiente matriz de decisión

$$\Upsilon = [u(0), u(1), \dots, u(N-1)]^T \quad (2.3.8)$$

donde $\dim \Upsilon = N \cdot 2$.

Se define la región admisible para la matriz de decisión como

$$\Omega = \{ \Upsilon \in \mathfrak{R}^{N \times m} : |\Upsilon_{min}| \leq ||\Upsilon|| \leq |\Upsilon_{max}| \}, \quad (2.3.9)$$

donde $\Upsilon_{min} = [U_1^T, U_2^T]$ y $\Upsilon_{max} = [U_1^T, U_2^T]$. $U_{i\min}, U_{i\max} \in \mathfrak{R}^N$ y están formadas las cotas máximas y mínimas de cada control.

De esta manera, el problema de control óptimo se puede reescribir como

$$\min_{\Upsilon \in \Omega} \tilde{f}(\Upsilon), \quad (2.3.10)$$

sujeto a

$$g(\Upsilon) \leq 0, \quad (2.3.11a)$$

$$\psi(\Upsilon) = 0, \quad (2.3.11b)$$

donde \tilde{f} representa el mapeo entre la matriz de decisión Υ y la función objetivo J , $g(\Upsilon)$ es la función de restricciones de desigualdad que representa el mapeo entre el conjunto de la matriz de decisión al rango de mapeo de restricciones $G(\xi(k))$ en el periodo $k = 0, \dots, N$ y $\psi(\Upsilon)$ es la función de restricciones de igualdad que representa el mapeo entre el conjunto de la matriz de decisión al rango de mapeo de restricciones terminales de igualdad $\Psi(\xi(N))$.

Para resolver el problema de programación no lineal de la ecuación (2.3.10), se puede convertir este problema con restricciones a uno sin restricciones [5], mediante el uso de funciones de penalización, agregando funciones cuadráticas como sigue:

$$\min_{\Upsilon} [\tilde{f}(\Upsilon) + P(\Upsilon)], \quad (2.3.12)$$

donde

$$\tilde{f}(\Upsilon) = \varphi(\Upsilon(N), \xi(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} \Upsilon^T Q \Upsilon,$$

$$P(\Upsilon) = \frac{1}{2} \rho \left[\sum_{i=1}^{\dim g} [\max(0, g_i(\Upsilon))]^2 + \sum_{i=1}^{\dim \psi} [\psi_i(\Upsilon)]^2 \right],$$

$$|\Upsilon_{min} \leq ||\Upsilon(k, i)|| \leq |\Upsilon_{max}|, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

ρ es el factor de penalización y Q es una matriz de factores de ponderación.

2.3.2. Optimización de la trayectoria para un robot móvil diferencial

La discusión anterior da una idea general de cómo abordar el problema que implica la obtención de una trayectoria óptima para un robot móvil diferencial. Ahora se darán las condiciones para obtener la trayectoria óptima usando los modelos obtenidos en este capítulo. Para obtener los límites para la velocidad angular y lineal máxima, se usan las ecuaciones (A.0.4a) y (A.0.4b) y los valores máximos de velocidad angular de cada rueda dependerán de la selección de los motores. Se debe también considerar que el par de entrada se encuentra acotado por la cantidad de corriente que mantiene la batería de forma constante. Además se debe considerar que la batería suministrará de corriente a los dos motores y las tarjetas de control. Por esta razón se limita la corriente máxima por motor al 45% de la corriente máxima que aporta la batería. Para la restricción de las fuerzas de reacción del objeto, se considera que todas las fuerzas involucradas en el sistema que inciden en el objeto transportado deben ser menores a la fuerza de fricción estática. Considerando todo lo anterior se propone el siguiente índice de desempeño a minimizar:

$$\begin{aligned} \tilde{f} + P &= \omega_1 (\xi(N) - P_f)^T (\xi(N) - P_f) + \omega_2 \Upsilon(N)^T \Upsilon(N) \\ &+ \omega_3 \left(\sum_{k=0}^N \Upsilon(k, 1)^2 + \sum_{k=0}^N \Upsilon(k, 2)^2 \right) + \frac{1}{2} \rho \sum_{k=0}^N [\text{máx}(0, f_r - f_{max})]^2 \\ &+ \frac{1}{2} \rho \left[\sum_{k=0}^N [\text{máx}(0, \Upsilon(k, 1) - v_{max})]^2 + \sum_{k=0}^N [\text{máx}(0, \Upsilon(k, 1) - v_{min})]^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \rho \left[\sum_{k=0}^N [\text{máx}(0, \Upsilon(k, 2) - \omega_{max})]^2 + \sum_{k=0}^N [\text{máx}(0, \Upsilon(k, 2) - \omega_{min})]^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

donde $\Upsilon(k, 1)$ es el vector de control correspondiente a la velocidad lineal del móvil, $\Upsilon(k, 2)$ es el vector de control correspondiente a la velocidad angular del móvil, P_f es el punto final (X, Y) al cual se desea llegar, v_{max} y v_{min} son las velocidades lineales máxima y mínima, ω_{max} y ω_{min} son las velocidades angulares máxima y mínima. f_r es la fuerza resultante aplicada al objeto transportado generada en el robot móvil a partir de los controles de velocidad y f_{max} es la fuerza máxima para vencer la fuerza de fricción estática [14].

En la ecuación (2.3.13) la función objetivo tiene como objeto minimizar la energía cinética del robot móvil. Para lograrlo se usaron únicamente las velocidades del móvil, ya que estas están directamente relacionadas con esta energía. Por último, se tienen los pesos del índice

de desempeño $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, con los cuales se pueden dar prioridades a los elementos de la función objetivo.

2.3.3. Trayectoria Óptima

Para obtener las trayectorias óptimas se utilizó el software y hardware mostrado en la tabla 2.3.1 y los parámetros de la tabla 2.3.2 para el modelo cinemático discreto (2.3.1) y los coeficientes para el índice de desempeño.

Parámetro	Valor
Velocidad CPU	2.6 GHz Intel Core i5
Memoria RAM	8 GB 1600 Mhz DDR3
SO	OS X 10.10.2
Matlab	R2014a (8.3.0.532 64 bits)

Tabla 2.3.1: Características de hardware y software para simulación de optimización.

Parámetro	Valor
r	0.045 [m]
b	0.13 [m]
v_{max}	0.942 [m/s]
ω_{max}	7.25 [rad/s]
T	0.01 [s]
ρ	10
w_1	0.4
w_2	0.4
w_3	0.2

Tabla 2.3.2: Parámetros de simulación.

Las trayectorias óptimas a continuación mostradas se dividen en dos caso de estudio, en el primer caso no se consideran las fuerzas como restricción; en el segundo caso, se consideran las fuerzas originadas por las ruedas del robot y el efecto que tienen sobre algún objeto que se esté transportando.

El primer caso se puede asociar a un problema en donde, el objeto montado en el robot móvil esta anclado, esto quiere decir que el objeto no tiene movimiento relativo con el robot móvil. En esta trayectoria no se considera los efectos inerciales en el objeto transportado, solo se considera que este objeto altera la distribución de masa del robot móvil. Esta trayectoria nos sirve además para comparar los resultados para el segundo caso. En la

figura 2.3.1 se tienen los resultados de la trayectoria óptima 1, la cual inicia en el origen y termina en el punto $P_f(1.5, 1.5)$, en este caso, la condición inicial es $q_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ y se pide que la trayectoria se realice en 10 segundos.

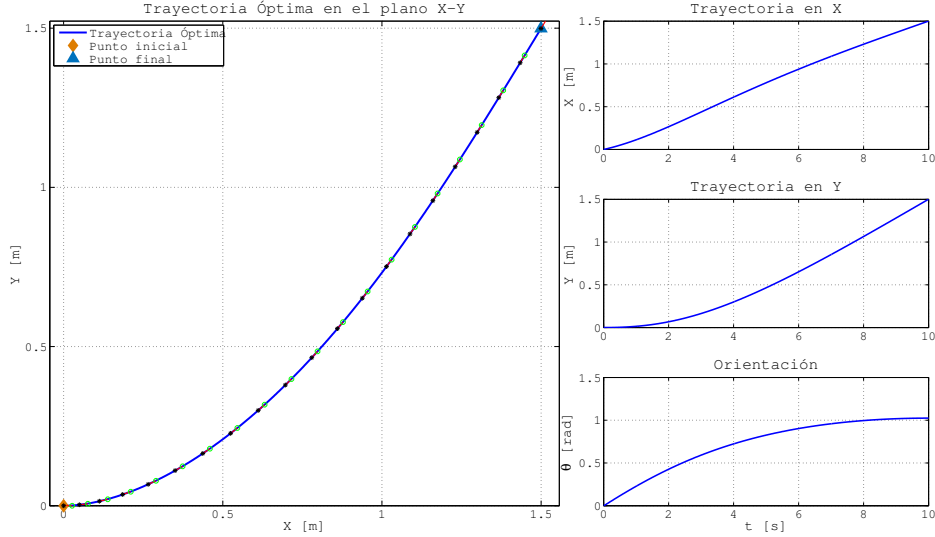


Figura 2.3.1: Trayectoria óptima 1.

El segundo caso se puede asociar a un problema en donde, por ejemplo, el robot móvil tenga que transportar un objeto sin ningún medio de sujeción. En este tipo de problemas, es importante tener en cuenta a las fuerzas aplicadas en el sistema como una restricción para el proceso de optimización de la trayectoria. Como se observó en la subsección 2.3.2, se deben introducir al problema de optimización las fuerzas presentes en el sistema. Estas fuerzas pueden ser obtenidas a partir del modelo dinámico descrito en la ecuación (2.2.22), de donde es posible obtener los pares de las ruedas a partir del modelo dinámico, posteriormente, con ayuda de la ecuación (2.3.14), se obtienen las fuerzas y par presentes en el sistema.

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_d \end{bmatrix}, \quad (2.3.14)$$

donde f_x es la fuerza generada en dirección del eje X , f_y es la fuerza generada en dirección del eje Y y τ_θ es el par generado en el centro de giro del robot móvil. τ_i es el par de la rueda izquierda, τ_d es el par de la rueda derecha y la matriz B esta definida en el modelo dinámico. Para obtener la fuerza resultante en el objeto transportado, usamos las ecuaciones (2.3.15a) y (2.3.15b), que nos dan como resultado las fuerzas en el eje X y Y que actúan sobre el objeto.

$$f_x m = f_x + \tau_\theta \sin(\theta + \gamma) L^{-1}, \quad (2.3.15a)$$

$$f_y m = f_y + \tau_\theta \cos(\theta + \gamma) L^{-1}, \quad (2.3.15b)$$

donde L es la distancia del centro de giro del robot al centro de masa del objeto transportado.

La fuerza resultante aplicada al objeto esta dada por

$$f_r = \sqrt{f_x^2 m + f_y^2 m}, \quad (2.3.16)$$

donde esta fuerza no puede superar a la fuerza de fricción estática ($f_e = N$) del objeto a transportar.

$$f_e = W\mu, \quad (2.3.17)$$

donde W es el peso del objeto a transportar y μ es el coeficiente de fricción estática entre las superficies de contacto.

En este trabajo, solo se consideraron dos trayectorias óptimas con restricciones de par, la primera no se considera la evasión de obstáculos y en la segunda solo se considera la evasión de un obstáculo.

Para el modelo dinámico se usan los parámetros de la tabla 2.3.3, que corresponden a un robot móvil que transporta un objeto de 1.25 Kg y los parámetros de la tabla 2.3.2 para el modelo cinemático.

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	4.05	[Kg]
d	0.0	[m]
r	0.045	[m]
b	0.13	[m]
I	0.02	[Kg - m ²]
γ	15°	[rad]
L	0.138	[m]

Tabla 2.3.3: Parametros del modelo dinámico para optimización.

En la figura 2.3.2, se tienen los resultados de la trayectoria óptima 2, la cual inicia en el origen y termina en el punto $P_f(1.5, 1.5)$, en este caso, la condición inicial es $q_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ y se pide que la trayectoria se realice en 10 segundos. En la gráfica de la izquierda, se puede observar que existe una gran similitud entre la trayectoria óptima 1 y la trayectoria óptima 2, la diferencia radica en que esta curva empieza de forma más suave para que el par de arranque no mueva al objeto a transportar.

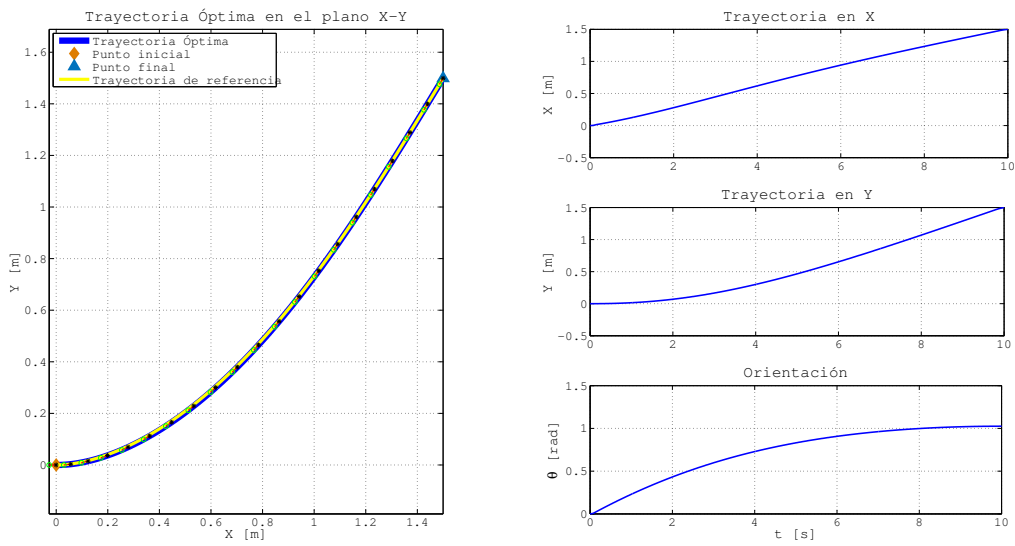


Figura 2.3.2: Trayectoria óptima 2.

En la figura 2.3.3, se muestra una gráfica de la fuerza resultante en el objeto. Se puede observar como la fuerza al inicio y al final de la trayectoria está acotada por la fuerza máxima, esto evita sobrepasar la fuerza de fricción estática del objeto transportado.

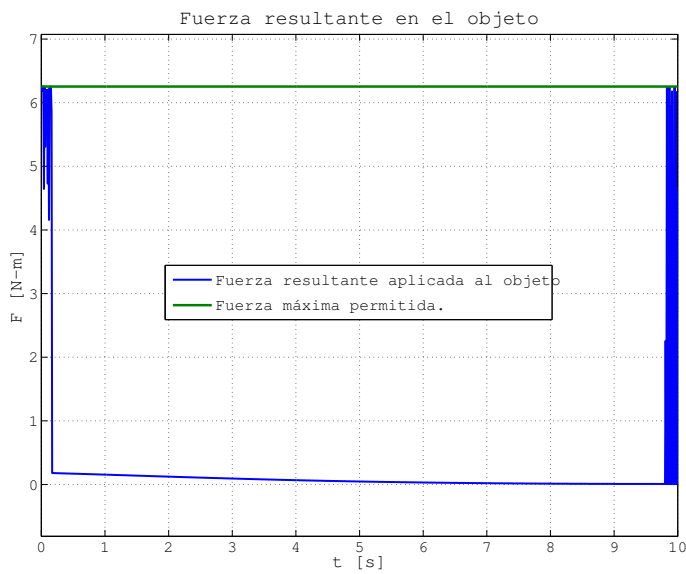


Figura 2.3.3: Fuerza resultante en la trayectoria óptima 2.

La similitud entre las trayectorias óptimas se debe principalmente a que el robot móvil se mueve a baja velocidad, esto reduce los efectos inerciales en el objeto transporta y evita que se mueva, esto se puede corroborar en la figura 2.3.3, en donde solo al inicio y al final de la trayectoria presentan valores altos de fuerza y en la trayectoria restante la fuerza aplicada sobre el objeto es pequeña.

Para realizar simulaciones y pruebas experimentales con las curvas óptimas obtenidas, es necesario conocer una curva que se aproxime a los datos obtenidos, para esto, usamos el Tool Box *Curve Fitting* de MatlabTM, con el cual podemos hacer una aproximación polinomial mediante el método de mínimos cuadrados. A continuación se muestran los polinomios obtenidos para cada curva de las trayectorias óptimas, se eligió el polinomio de más alto grado con el menor número de coeficientes iguales a cero.

Para la trayectoria óptima 1, las ecuaciones que describen el movimiento son:

$$\begin{aligned} x &= -0.00502 + 0.09682t + 0.02592t^2 - 0.00351t^3 + 0.00015t^4 \\ y &= 0.00647 - 0.02275t + 0.0291t^2 - 0.0013t^3 + 0.00001t^4 \\ \theta &= -0.00702 + 0.2562t - 0.02058t^2 + 0.00053t^3 \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Los errores de aproximación se muestran en la figura 2.3.4.

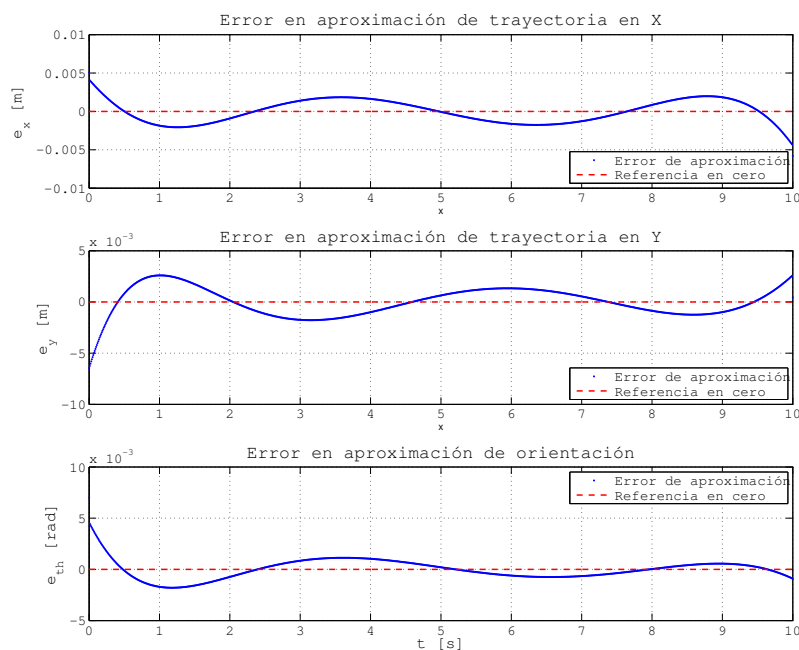


Figura 2.3.4: Errores de aproximación por la trayectoria óptima 1.

Para la trayectoria óptima 2, las ecuaciones que describen el movimiento son:

$$\begin{aligned} x &= -0.0014 + 0.1023t + 0.02694t^2 - 0.00462t^3 + 0.00033t^4 - 8.6 \times 10^{-6}t^5 \\ y &= 0.00516 - 0.01852t + 0.02731t^2 - 0.00104t^3 \\ \theta &= -0.01274 + 0.2639t - 0.02203t^2 + 0.00061t^3 \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Los errores de aproximación se muestran en la figura 2.3.5.

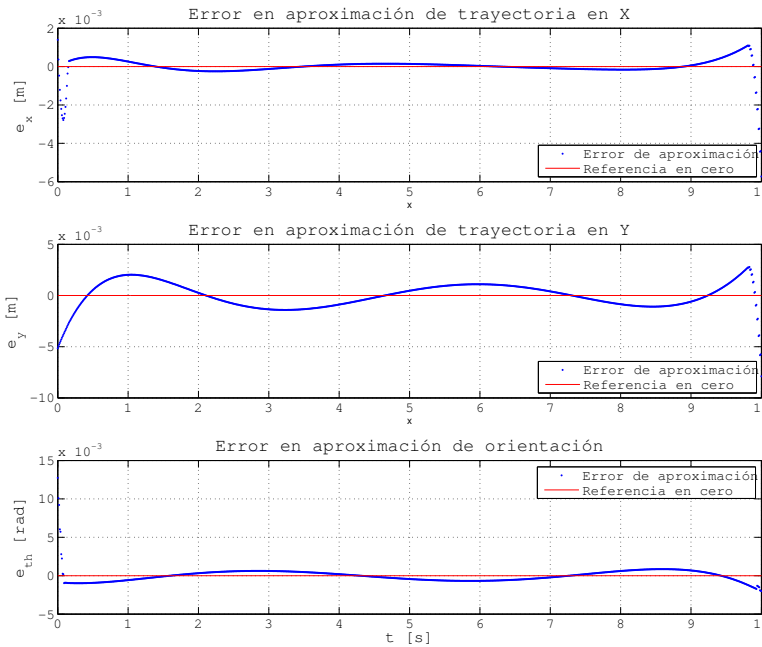


Figura 2.3.5: Errores de aproximación par la trayectoria óptima 5.

2.4. Esquema de Control para Seguimiento de Trayectoria

Una vez que se obtiene la trayectoria óptima que se desea seguir, se necesita desarrollar una estrategia de control que permita seguirla con el menor error posible. Para lograr esto, el control aquí propuesto se basa en el trabajo desarrollado en [12] con las modificaciones necesarias para usar el modelo dinámico desarrollado en este documento.

2.4.1. Diseño del controlador

El objetivo de control es lograr el seguimiento de la trayectoria con el menor error posible, usando como referencia entradas de velocidad lineal y angular del modelo cinemático y como salidas los pares aplicados a las ruedas del robot móvil diferencial.

Para cumplir con el objetivo de control mencionado arriba, se propuso una estrategia de control basada en los resultados presentados en [12]. El esquema de control obtenido es un controlador por par calculado que usa a su vez un control auxiliar diseñado con la técnica de backstepping; la diferencia con los resultados presentados en [12] es que se utiliza el modelo dinámico descrito en la subsección 2.2.3. En la figura 2.4.1 se muestra un diagrama del esquema de control donde se observan las etapas que lo comprenden.

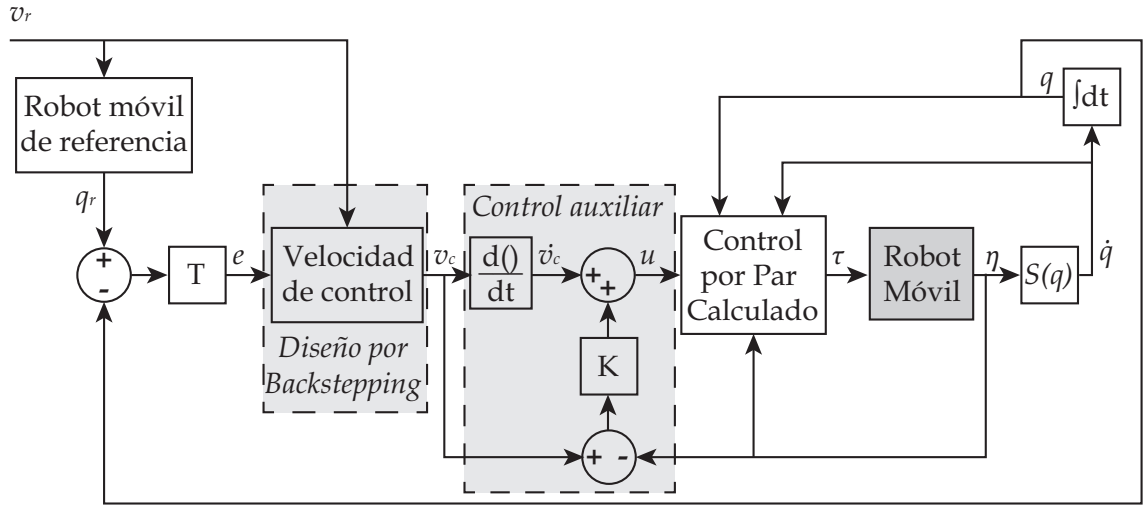


Figura 2.4.1: Diagrama del controlador.

Se propone primero un control por par calculado de la forma

$$\tau = \bar{B}^{-1}(q) [\bar{M}(q) u + \bar{V}_m(q, \dot{q}) \eta], \quad (2.4.1)$$

donde se considera una entrada de control auxiliar u . De esta manera se convierte el problema de control dinámico en uno cinemático por medio de la ecuación (2.2.19), es decir

$$\dot{q} = S(q) \eta, \quad (2.4.2a)$$

$$\dot{\eta} = u, \quad (2.4.2b)$$

y el control auxiliar u es diseñado a partir de la técnica de backstepping como se muestra en el desarrollo siguiente.

El esquema de control que se propone tiene como objetivo el seguimiento punto a punto de una trayectoria considerando velocidades y posiciones de referencia proporcionados por un robot móvil de referencia descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= v_r \cos(\theta_r), & \dot{y}_r &= v_r \sin(\theta_r), & \dot{\theta}_r &= \omega_r, \\ q_r &= [x_r \ y_r \ \theta_r]^T, & V_r &= [v_r \ \omega_r]^T \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

donde v_r es la velocidad lineal de referencia, ω_r es la velocidad angular de referencia y q_r es la variable articular de referencia.

Para desarrollar el control por backstepping es necesario representar las posiciones y velocidades de referencia en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Para el problema de seguimiento, se define el error de seguimiento como [9]

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

donde e_1 y e_2 son los errores de posición referenciados al marco de referencia móvil $\{P_o \ X_m \ Y_m\}$, e_3 es el error en orientación y $q_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$ es la trayectoria a seguir. La derivada del error e con respecto al tiempo toma entonces la forma

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) - v_1 + v_2 e_2 \\ v_r \sin(e_3) - v_2 e_1 \\ \omega_r - v_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

donde v_1 y v_2 son los componentes de un vector de velocidades de control $v_c = [v_1 \ v_2]^T = [v \ \omega]^T$ dado por

$$v_c = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) + K_x e_1 \\ \omega_r + v_r (K_y e_2 + K_\theta \sin(e_3)) \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

donde K_x , K_y y K_θ son constantes.

La ecuación (2.4.7) se desarrolla a partir de la función de Lyapunov mostrada más adelante, esta ecuación se desarrolla con la finalidad de que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa.

La derivada de (2.4.7) con respecto al tiempo está dada por

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \begin{bmatrix} \dot{v}_r \cos(e_3) - \dot{\omega}_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) \\ \dot{\omega}_r + \dot{v}_r (K_y e_2 + K_\theta \sin(e_3)) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} K_x & 0 & -v_r \sin(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \cos(e_3) \\ 0 & v_r K_y & v_r K_\theta \cos(e_3) \end{bmatrix} \dot{e} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Y se introducen ahora las siguientes suposiciones

Suposición 1. La velocidad lineal de referencia v_r es tal que

$$v_r \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.4.9)$$

Suposición 2. Las constantes K_x , K_y y K_θ en el vector de velocidades de control v_c dado por (2.4.7) son suficientemente grandes de tal modo que se satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} K_x e_1^2 + v_r (d \cos(\gamma) K_y e_2^2 + K_\theta \sin^2(e_3) K_y^{-1}) \geq \\ d \cos(\gamma) e_2 (\omega_r (1 - \cos(e_3)) + v_r K_\theta \sin(e_3)) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

La *suposición 1* significa que la velocidad lineal debe ser siempre positiva, lo que implica que el robot solo se puede mover en dirección de X_m positiva; ésto impide que el robot se mueva hacia atrás con la finalidad de seguir la trayectoria. Por otro lado, la *suposición 2* puede verificarse a priori al suponer que el error e_2 es suficientemente pequeño para la trayectoria que se quiere seguir.

Se tiene entonces el siguiente resultado sobre la dinámica del error de seguimiento.

Theorem 1. *Considere la dinámica del error dada por la ecuación (2.4.6) junto con el vector de velocidades de control dado por (2.4.7) y las suposiciones 1 y 2. Entonces el error $e = 0$ es un punto de equilibrio estable para el sistema (2.4.6)-(2.4.7)*

Demostración. Considere la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + (1 - \cos(e_3)) K_y^{-1} \quad (2.4.11)$$

Es claro que la ecuación (2.4.11) es definida positiva y $V = 0$ solo cuando $e = 0$. Al obtener la derivada con respecto al tiempo de V y sustituyendo \dot{e} y v_c de (2.4.6) y (2.4.7) se tiene que

$$\dot{V} = -K_x e_1^2 - v_r K_\theta \sin^2(e_3) K_y^{-1} \quad (2.4.12)$$

Entonces bajo las *suposiciones 1 y 2*, el punto de equilibrio $e = 0$ del sistema (2.4.6) en lazo cerrado es estable. \square

Por último, con las ecuaciones (2.4.7) y (2.4.8) se propone el siguiente control auxiliar de entrada para la retroalimentación de aceleración

$$u = \dot{v}_c + K (v_c - \eta) \quad (2.4.13)$$

Este control auxiliar busca que las velocidades de control v_c se aproximen a las velocidades reales del robot móvil, con esto es posible usar la ecuación (2.4.13) como sustituto de las aceleraciones, ya que en ocasiones es difícil poder medir las aceleraciones en un prototipo. Con la ecuación (2.4.13) se completa la ley de control por par calculado definida en la ecuación (2.4.1).

2.4.2. Simulaciones del Controlador

Para la simulación del esquema de control se usó la herramienta de simulación Simulink™ y Matlab™ de Matworks™. En la figura 2.4.2 se muestra el diagrama correspondiente.

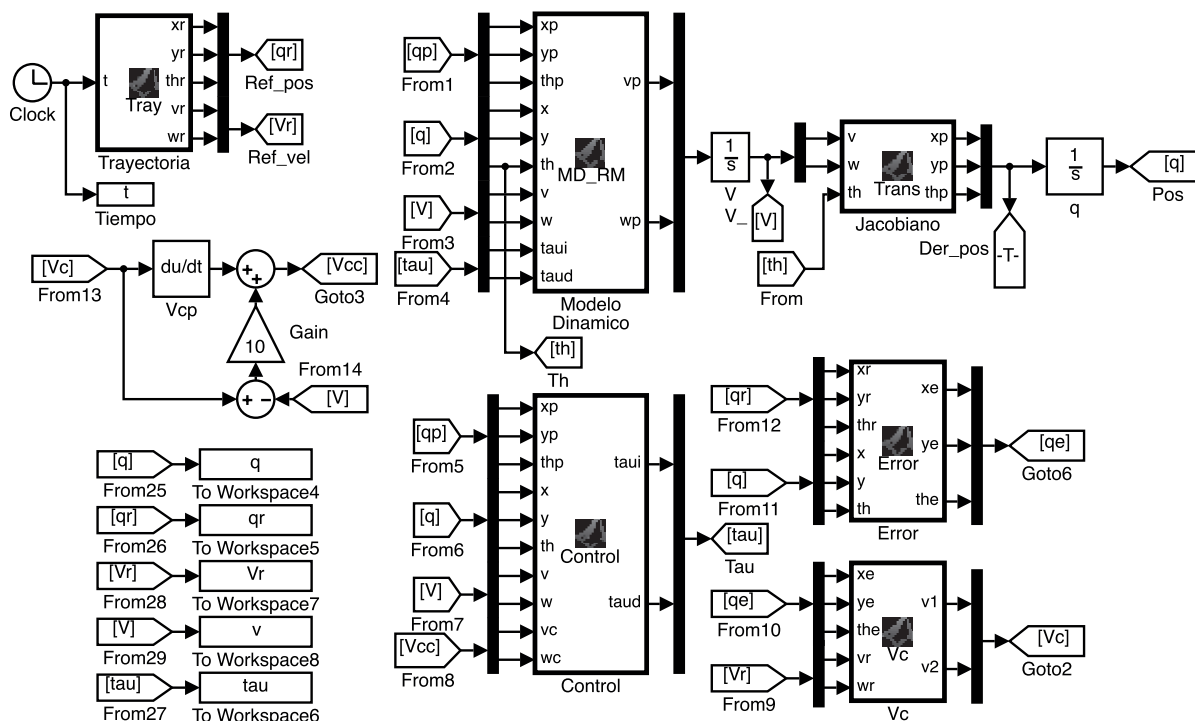


Figura 2.4.2: Diagrama de Simulink™.

En todas las simulaciones siguientes se usaron los parámetros de la tabla 2.4.1 y la tabla 2.2.1

Ganancia	Valor
K_x	7.5
K_y	7.5
K_θ	5
K	20

Tabla 2.4.1: Valores de los parámetros del esquema de control usados en las simulaciones numéricas.

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	2.593	[Kg]
d	0.022	[m]
r	0.045	[m]
b	0.13	[m]
I	0.02	[Kg - m ²]
γ	15°	[rad]
τ_{max}	0.36	[N - m]

Tabla 2.4.2: Valores de los parámetros del robot móvil usados en las simulaciones numéricas.

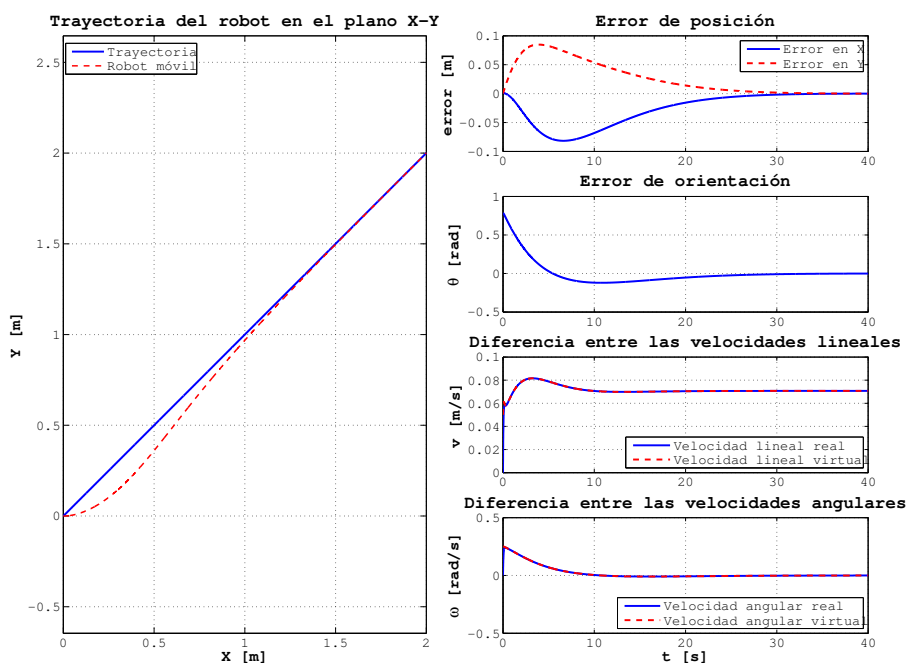


Figura 2.4.3: Seguimiento de una línea recta.

Para verificar el desempeño del esquema de control, se llevan a cabo varias simulaciones con diferentes condiciones de operación. En todas las simulaciones mostradas, el robot móvil se encuentra sobre la trayectoria al inicio.

La primera prueba a realizar consta del seguimiento de una línea recta, esto tiene como objetivo probar como primera condición una velocidad lineal constante y una velocidad angular cero. Se sigue una línea recta de dos metros de largo a 45° con respecto al eje X , la trayectoria se completa en cuarenta segundos y la condición inicial del móvil es $q_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$.

En la figura 2.4.3 se observan las gráficas correspondientes a la simulación del seguimiento de una línea recta. Se presenta el seguimiento de la trayectoria y sus errores de seguimiento, además de una comparación entre la velocidad del móvil y la velocidad virtual del controlador. En esta simulación, la condición inicial de orientación no está alineada con la trayectoria, por lo que se genera una velocidad angular la cual tiende a cero al momento en que se llega a la orientación deseada.

La siguiente prueba consta del seguimiento de una circunferencia con centro en el origen y radio de un metro, con esta trayectoria se prueba la condición de velocidad lineal y angular constantes. La trayectoria, al igual que con la línea recta se debe completar en cuarenta segundos y la condición inicial del móvil es $q_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$

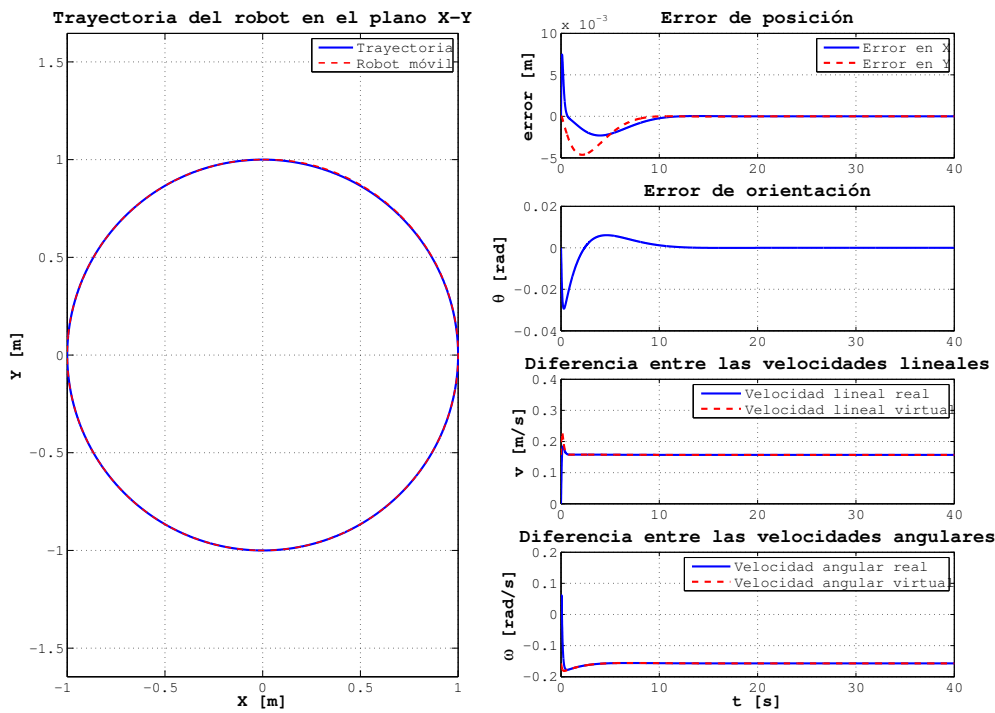


Figura 2.4.4: Seguimiento de una circunferencia.

En la figura 2.4.4 se observan las gráficas correspondientes a la simulación del seguimiento de una circunferencia. En esta simulación se observa una convergencia más rápida a la trayectoria y con un menor error; esto se debe a que, en esta ocasión, el robot inicia en un punto donde las condiciones iniciales coinciden con los valores en posición en esta ubicación de la trayectoria. Se observa una convergencia rápida de las velocidades virtuales a las velocidades del móvil.

La siguiente prueba consta del seguimiento de una curva de Lissajous (en el apéndice B se da una descripción de esta curva y sus propiedades). La curva está centrada en el origen y abarca un espacio de trabajo de tres por dos metros. Con esta trayectoria se prueba la condición en donde la velocidad lineal y angular no son constantes. La trayectoria se debe completar en cuarenta segundos y la condición inicial es $q_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$.

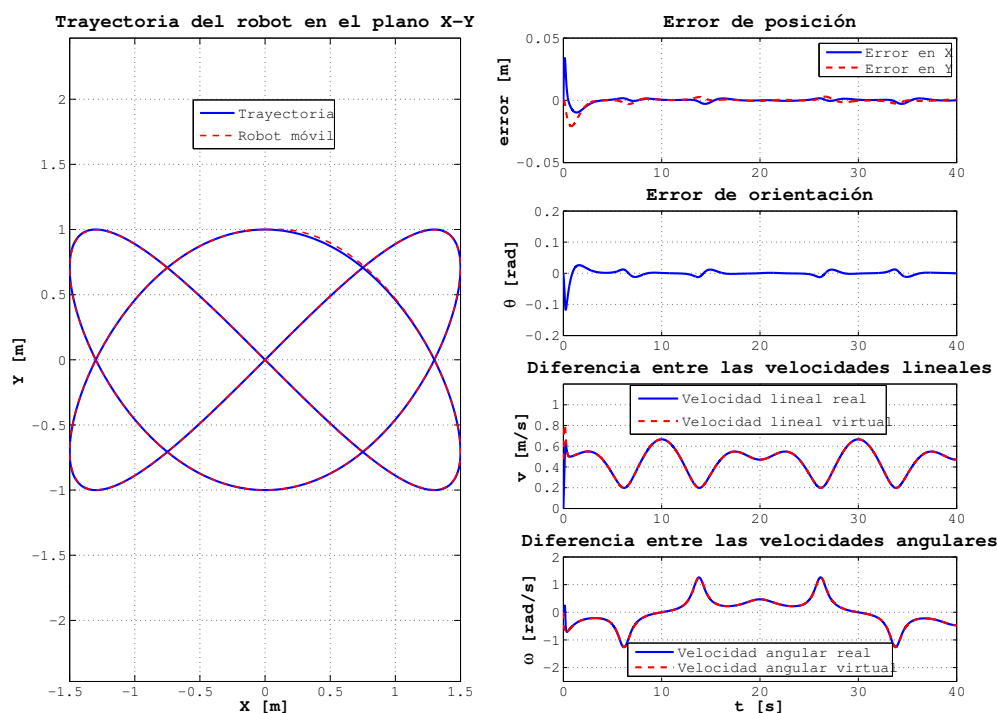


Figura 2.4.5: Seguimiento de una curva de Lissajous.

En la figura 2.4.5 se observan las gráficas correspondientes a la simulación del seguimiento de la curva de Lissajous. En este caso se observa que si el error de seguimiento no tiende a cero, al menos se mantiene acotado. Es posible disminuir más el error de seguimiento aumentando los valores de las ganancias con un costo en el aumento en los pares de los motores. A pesar de esto, se observa una convergencia y buen seguimiento de las velocidades del móvil por parte de las velocidades virtuales.

Con la finalidad de observar el comportamiento del controlador cuando el robot no empieza en la trayectoria y tiene algunas perturbaciones en la orientación se realiza una simulación bajo estas condiciones. En la figura 2.4.6 se observan los resultados de esta simulación, se ve claramente que no inicia en la trayectoria y las perturbaciones se ven claramente en el error en orientación, sin embargo, el seguimiento de trayectoria es bueno. El seguimiento

de la velocidad lineal es el correcto, pero en las velocidades lineales se observa que las perturbaciones en la orientación introducen valores altos de velocidad. A pesar de esto, estos valores no son lo suficientemente significativos para afectar gravemente al seguimiento.

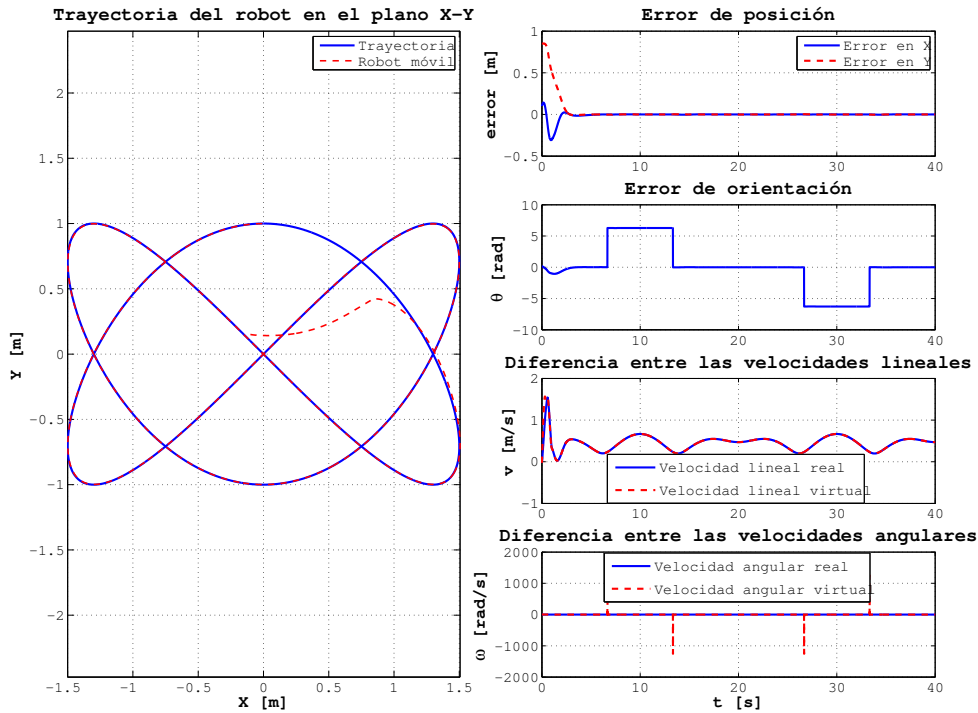


Figura 2.4.6: Seguimiento de una curva de Lisajous con perturbaciones.

Con la finalidad de observar el comportamiento del controlador ante diferentes valores en la posición del centro de masa, se realizó una simulación en la que el móvil sigue una curva de Lissajous con diferentes valores de γ (5° , 10° , 35°). La curva tiene su centro en el origen y cubre una área de trabajo de tres por dos metros, la curva se completa en un tiempo de cuarenta segundos. La condición inicial del móvil es $P_0 = [0 \ 1.5 \ 0]^T$.

En la figura 2.4.7 se puede observar que ante cambios en la posición del centro de masa no hay cambios en la trayectoria final, a tal grado que el error de seguimiento es prácticamente el mismo para todos los casos. La diferencia radica principalmente en los pares aplicados al sistema. En esta misma figura se puede observar que ante una mayor desviación del centro de masa, se requiere un par de arranque mayor. Por otro lado, en la figura 2.4.8 se observa un acercamiento de los pares de entrada (con un perfil parecido pero con diferente amplitud).

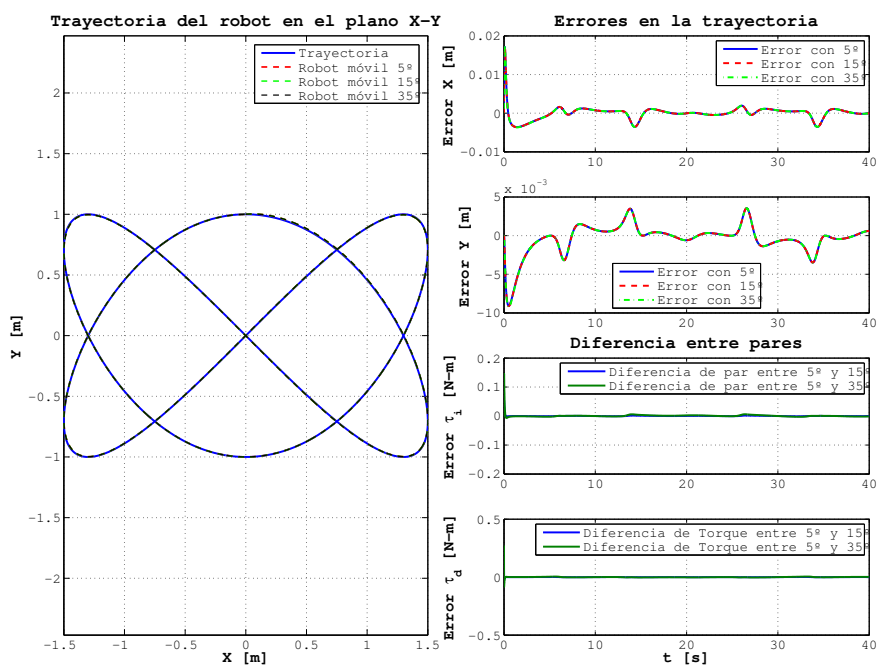


Figura 2.4.7: Comparación del seguimiento ante cambios de la posición del centro de masa.

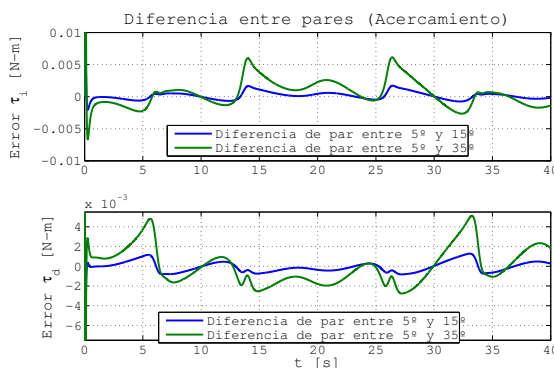


Figura 2.4.8: Acercamiento a la gráfica de comparación de pares.

Con la finalidad de observar el comportamiento del controlador sin considerar la desviación del centro de masa, se realiza una simulación para verificar este comportamiento, la cual consta del seguimiento de una circunferencia usando dos controladores: el *control 1* es considerado una distribución de masa uniforme ($\gamma = 0$); el *control 2* considera una distribución de masa no uniforme. El móvil tiene las mismas consideraciones que se usaron en el seguimiento de la circunferencia antes mostrado (véase la figura 2.4.4).

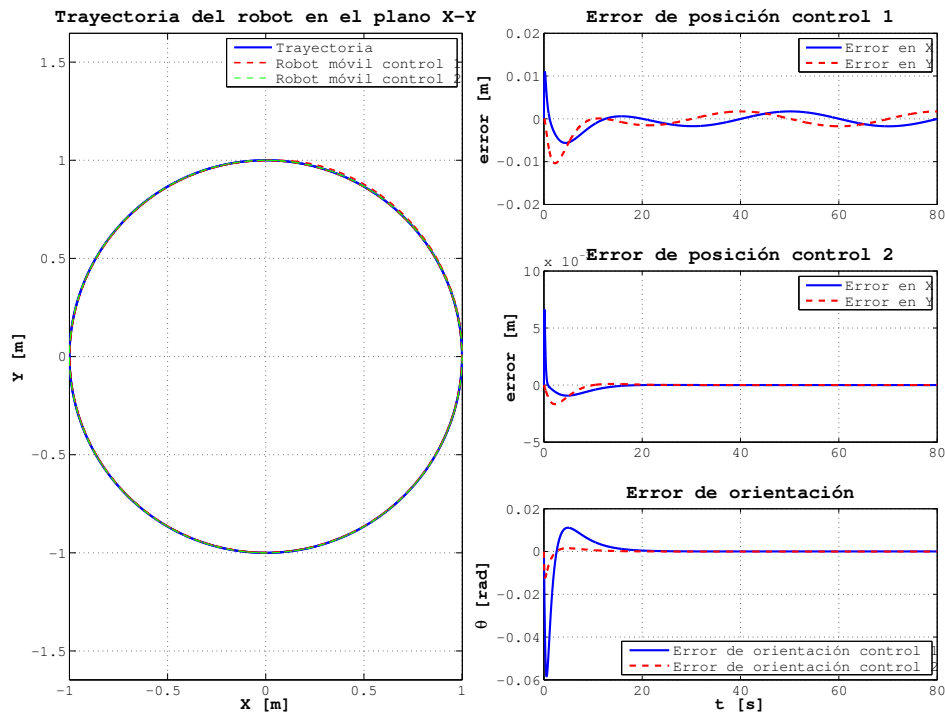


Figura 2.4.9: Comparación de controladores usando modelos distinto.

En la figura 2.4.9 se observa como, a pesar de que el controlador 1 no considera la desviación en el centro de masa, se tiene un buen resultado en el seguimiento de la trayectoria, se puede apreciar como el error de seguimiento genera pequeñas oscilaciones que se mantienen acotadas; efecto que no se tiene al considerar en el controlador la desviación del centro de masa. De igual forma, se observa un error mayor en la orientación al inicio y este no converge a cero aunque si lo hace a un valor muy pequeño usando el control 1.

De los resultados presentados anteriormente, se observa que el esquema de control propuesto es capaz de realizar adecuadamente el seguimiento de una trayectoria, además, se mostró como ante diferentes escenarios el comportamiento es adecuado. Este esquema de control puede seguir las trayectorias óptimas descritas anteriormente considerando todos los casos presentados. En los siguientes capítulos se desarrolla la propuesta de plataforma experimental y los resultados del seguimiento de trayectoria en esta plataforma.

Capítulo 3

Plataforma Experimental

En este capítulo abordamos el desarrollo de la plataforma experimental, desde el desarrollo de la estructura y elementos electromecánicos que componen al robot móvil diferencial, el sistema usado para medir la posición del móvil y por último se da una descripción de la comunicación entre los dispositivos de la plataforma.

3.1. Descripción de la Plataforma Experimental

La plataforma experimental se encuentra integrada por los siguientes dispositivos:

- Robot móvil diferencial.
- Unidad de Procesamiento.
- Sistema de comunicación.
- Sistema de visión.

En la figura 3.1.1 se ve un diagrama de los componentes y el flujo de información entre los elementos de la plataforma experimental. Esta plataforma es totalmente centralizado, esto quiere decir que el móvil no toma sus propias decisiones, este solo recibe los pares que tiene que asignar a cada rueda y los interpreta por medio de un microcontrolador integrado en el móvil; las decisiones son tomadas por una PC que se encarga de procesar la información proveniente de las cámaras infrarrojas que por medio de marcadores montados en el móvil calcula su posición. La comunicación entre las cámaras y la PC se hace por medio de software especializado que crea una conexión interna en la PC para poder ser interpretada por otro programa específico, por otro lado, entre la PC y el móvil la comunicación se da por medio de una conexión WiFi, Si no se tiene una conexión WiFi el móvil tiene la flexibilidad de funcionar también con una conexión Bluetooth.

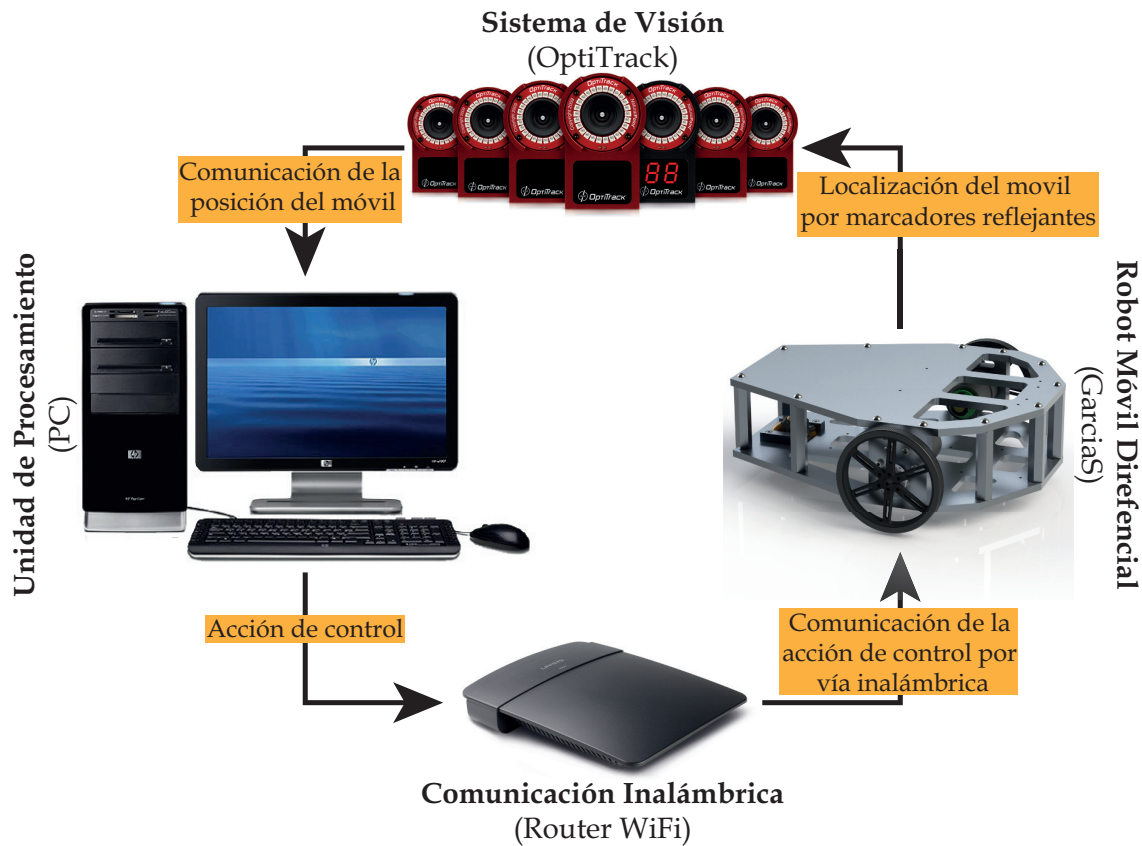


Figura 3.1.1: Diagrama de la plataforma experimental.

La figura 3.1.1 muestra un diagrama muy general de la plataforma sin dar detalle de sus elementos, por lo que a continuación se presentará una descripción de cada una de las etapas que conforman a la plataforma experimental.

3.1.1. Robot Móvil Diferencial

El robot móvil diferencial considerado inicialmente para este trabajo es el modelo Pioneer P3-DX (véase figura 3.1.2) de la empresa Mobile Robots™. Se desechó esta opción debido a que se necesitaba realizar un control dinámico para tener un mejor resultado y no tener que obtener las fuerzas del sistema en forma indirecta, por otro lado, la mayoría de los robots móviles comerciales tienen un control cinemático, debido a esto, se decidió diseñar y construir un prototipo de robot móvil diferencial con un control dinámico.

*Pioneer P3-DX**Garcia*

Figura 3.1.2: Robot móviles comerciales.

Para el diseño del móvil diferencial se tomó como base al robot Garcia (véase figura 3.1.2) de la empresa AcronameTM, este es un robot tipo uniclo con una rueda omidireccional de apoyo no es un robot diseñado para transportar objetos, pero se puede tomar su geometría básica y proporciones para generar una propuesta en CAD (véase figura 3.1.3).

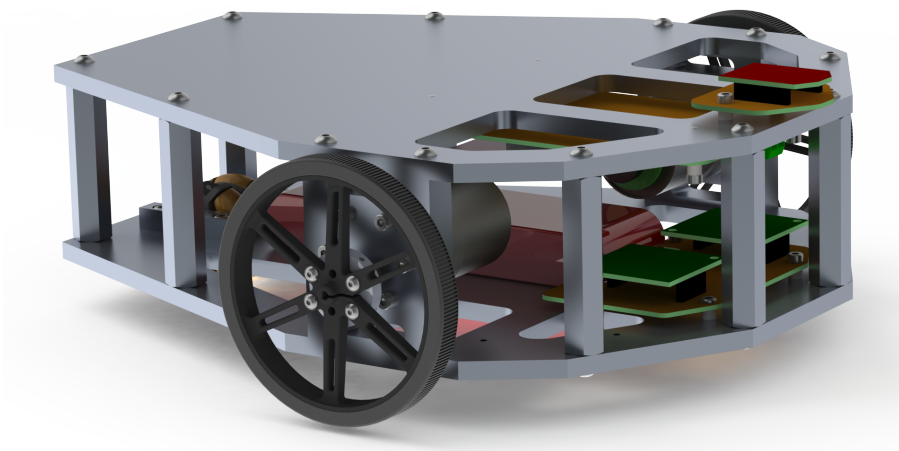


Figura 3.1.3: Renderizado del prototipo en CAD.

El robot móvil mostrado en la figura 3.1.3 tiene una estructura de aluminio como se muestra en la figura 3.1.4, con la finalidad de reducir el peso de estos elementos se elaboraron cortes que quitaran la mayor cantidad de material sin comprometer la rigidez del móvil y dejando una superficie donde poder colocar las piezas que se quieren transportar. Se realizaron también barrenos para poder montar las tarjetas del control de corriente de los motores y las tarjetas de comunicación y control. Las placas más grandes se realizaron con ayuda de una máquina de control numérico (CNC), las demás piezas fueron elaboradas en el taller de la sección de Mecatrónica del CINVESTAV.

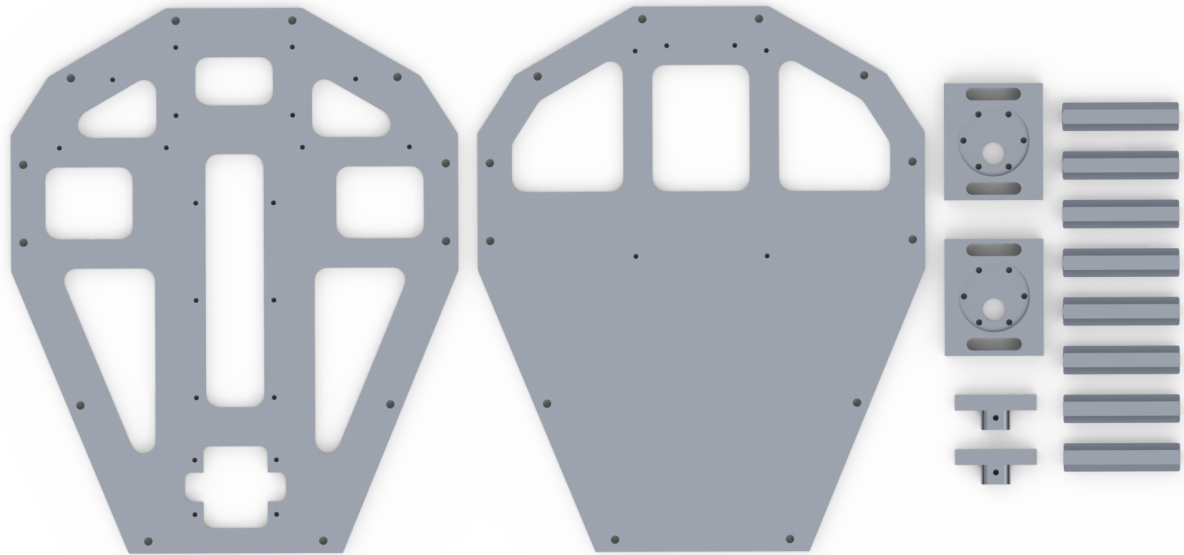


Figura 3.1.4: Piezas de la estructura de aluminio del robot móvil.

Para dar movimiento al móvil se usan dos motores de la marca Pololu modelo # 1444, el cual es un motor de corriente directa con un codificador de cuadratura montado al rotor, el cual tiene las características mencionadas en la tabla 3.1.1.

Parámetro	Valor	Imagen
Reducción de la caja de engranes	1:50	
Velocidad sin carga @12V	200 RPM	
Par de bloqueo @12V	1.2 N-m	
Corriente de bloqueo @12V	5 A	
Resolución del codificador en rotor	64 PPR	

Tabla 3.1.1: Parámetros del motor Pololu # 1444.

Para controlar a este motor se usa un controlador de corriente modelo AZB10A4 de la marca Advanced Motion Control™, este controlador es de bajo costo y es controlado por medio de una señal analógica y tiene una salida de referencia de la corriente que realmente está pasando por el motor. Las características mostradas en la tabla 3.1.2 pertenecen a este controlador.

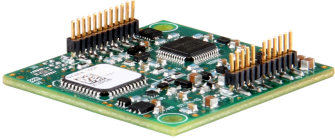
Parámetro	Valor	Imagen
Rango de voltaje de operación	10-36 V	
Corriente continua	5 A	
Corriente pico	10 A 2s	
Entrada analógica	± 10 V	
Relación $V_{in}-I_{out}$	1	

Tabla 3.1.2: Tarjeta AZB10A4.

Para interpretar la acción de control y convertirla a los valores adecuados de voltaje, se utiliza una tarjeta de control que incluye una serie de circuitos como los mostrados en la figura 3.1.5.

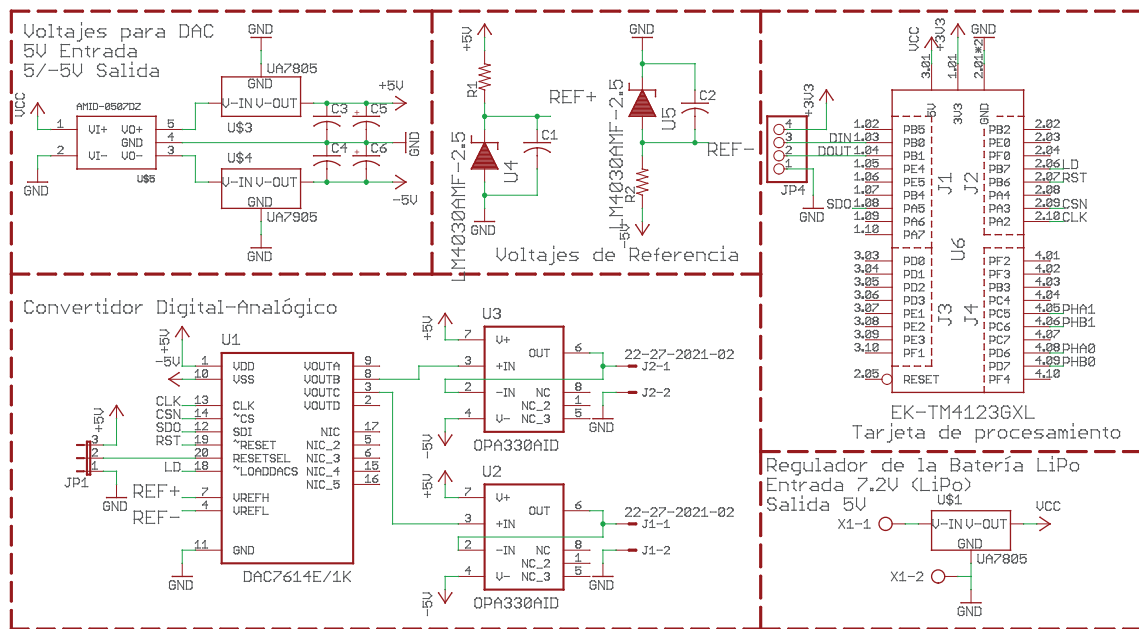


Figura 3.1.5: Esquemático de la tarjeta de control.

En la figura 3.1.5 podemos ver varias etapas en el diseño de la tarjeta, la cual fue diseñada para poder montar una tarjeta de desarrollo Texas Instruments modelo EK-TM4C123GXL, esta tarjeta tiene un microcontrolador TM4C123GH6PM Cortex-M4 de 32 bits con características mostradas en la tabla 3.1.3, las demás etapas comprenden un acondicionamiento de voltajes por medio del cual se entrega a la tarjeta de control un voltaje de 5V, y a la etapa de conversión D/A (digital-analógica) un voltaje de ± 5 V con la ayuda de un convertidor DC/DC, por último, la etapa de conversión D/A es realizada

por medio del circuito integrado DAC7614, el cual tiene cuatro salidas analógicas y los datos de entrada son por comunicación serial.

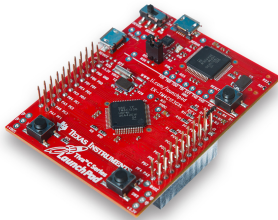
Parámetro	Valor	Imagen
Velocidad	80 MHz	
Memoria Flash	256 KB	
Memoria EEPROM	2 KB	
Entradas GPIO	43	
Entradas analógicas	2x 12ch 12-bit (1 MSPS)	
Puertos de comunicación	3x SPI/SSI, 4x I2c, 8x UART	

Tabla 3.1.3: Tarjeta de desarrollo EK-TM4C123GXL.

Para comunicar al móvil con la computadora se decidió usar una tarjeta WiFly RN-171 de la marca Roving, la cual nos permite realizar una conexión por medio de WiFi con cualquier dispositivo que soporte este tipo de conexión. Las características de esta tarjeta se explicaran más adelante.

Para dar energía al móvil se decidió usar dos baterías con tecnología LiPo ya que son actualmente más usadas en equipos de radio control. Se usa una batería dedicada a los motores y otra dedicada a las tarjetas de control y comunicación. La batería para los motores es de la marca ElectriFly™ con una capacidad de 3350 mAh y un voltaje de salida de 11.1 V (véase figura 3.1.6), la batería usada para las tarjetas es de la marca Duratrax™ con una capacidad de 2000 mAh y un voltaje de salida de 7.4 V (véase figura 3.1.6).



Figura 3.1.6: Baterías LiPo usadas en el movil.

El conjunto de todos estos elementos dan como resultado el mostrado en la figura 3.1.7, donde además se muestra una imagen del prototipo .

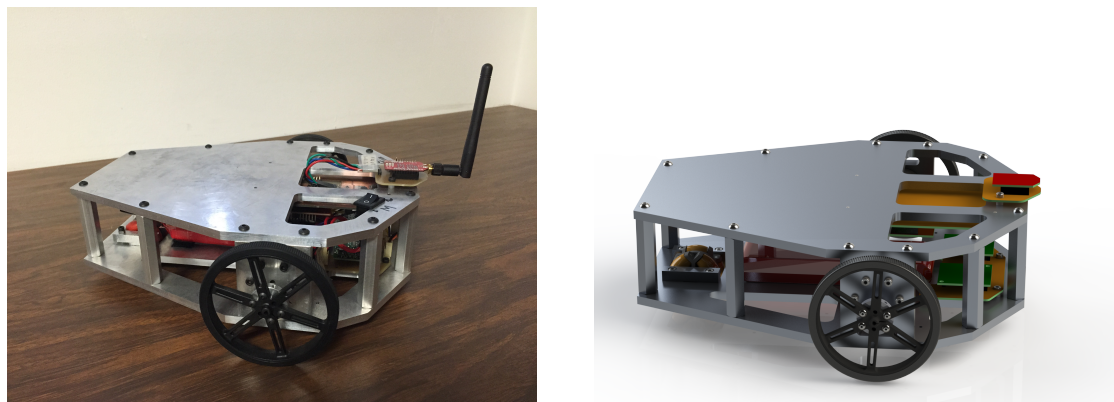


Figura 3.1.7: Robot móvil con renderizado.

Los parámetros de este diseño son los siguientes

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	2.809	$[Kg]$
d	0.027	$[m]$
r	0.045	$[m]$
b	0.133	$[m]$
I	0.014	$[Kg - m^2]$
γ	π	$[rad]$

Tabla 3.1.4: Parámetros de diseño del móvil diferencial.

Cabe mencionar que estos valores son aproximados a la realidad, debido a que no se considera el peso ni la forma de los cables de conexión ni los circuitos integrados que van sobre las tarjetas, sin embargo, la diferencia de peso entre el robot real y el CAD es de apenas 150 gramos aproximadamente, en cuanto a los parámetros estructurales los datos concuerdan ya que las piezas concuerdan con los diseños en CAD, por último es difícil saber si el parámetro de inercia es el correcto, por lo que es el único que se toma de facto.

3.1.2. Sistema de Visión

El sistema de visión nos permite tener un medio por el cual se obtiene la localización espacial y orientación del móvil. Para lograr la localización del móvil es indispensable tener un sistema de reconocimiento, lo más comúnmente usado son cámaras con la finalidad de tomar una imagen en la cual se encuentre algún tipo de patrón que después sea procesado por un software especializado que da como resultado la posición relativa del objeto y en ocasiones también su orientación. Una opción de hardware y software que pueden realizar esta tarea es el sistema OptiTrackTM [1] de la empresa NaturalPointTM, el cual cuenta con

un juego de cámaras infrarrojas con emisores LED infrarrojos alrededor de ésta, que en conjunto con el software Motive™ puede dar la posición y orientación de un conjunto de marcadores reflejantes montados sobre un objeto en un espacio tridimensional.

Sistema OptiTrack

El sistema OptiTrack usado para los experimentos que se mostraran más adelante, consta de un juego de 12 cámaras modelo Reflex 13, la cual tiene las especificaciones mostradas en la tabla 3.1.5. Estas cámaras están diseñadas para hacer el procesamiento de la imagen más rápido, ya que cuentan con un microcontrolador programado específicamente para hacer el procesamiento de imágenes y entregar al software las posiciones de los marcadores vistos por cada cámara. El sistema también cuenta con dos OptiHUB, cada uno se encarga de coleccionar los datos de 6 cámaras y generar la cadena de datos adecuada para el procesamiento por parte del software *Motive*, el cual es el encargado de mostrar los datos en la PC.


Parámetro	Valor	Imagen
Resolución	1280 × 1024	
Velocidad	120 FPS	
Lente FOV	42°, 56°	
No. LEDs	28	
Área de Pixel	4.8 μ m ²	

Tabla 3.1.5: Cámara Reflex 13.

Los marcadores reflejantes montados en el objeto a medir (véase figura 3.1.8) tienen que ser vistos por al menos tres cámaras para procesar su ubicación y en su conjunto medir la orientación del grupo de marcadores, los patrones de marcadores deben formar una figura irregular con la finalidad de poder distinguirse con mayor facilidad de otros objetos medidos por el sistema, esto también facilita al programa la distinción de objetos cuando uno de los marcadores se pierde al ser muy difícil que este nuevo patrón se repita en otros objetos. Una vez colocados los marcadores, es posible visualizarlos por medio del software *Motive* en una PC, donde se puede asociar un grupo de marcadores para formar un cuerpo rígido virtual, en la figura 3.1.9 se muestra la captura de pantalla de lo que muestra el software, donde se observa dos tamaños de esferas, las más pequeñas son los marcadores y la esfera grande en donde se intersectan los ejes en rojo, verde y azul, es el centroide de del cuerpo rígido; el centroide puede ser elegido al azar y por software compensar su posición para ubicar un punto en específico del objeto a medir o se pueden acomodar los marcadores de tal modo que el centroide coincida con el punto en el objeto del cual se requiere su posición.

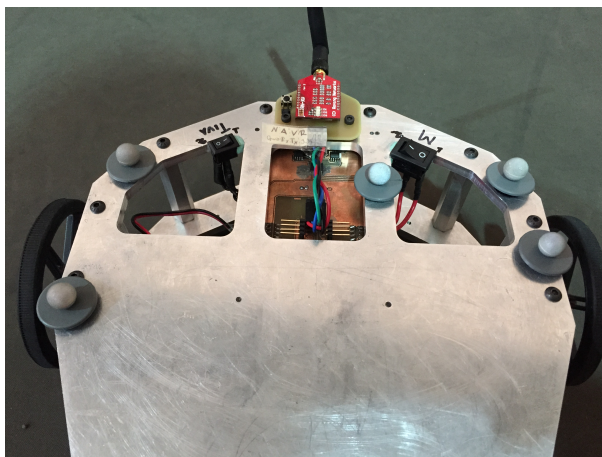


Figura 3.1.8: Marcadores reflejantes montados en el prototipo.

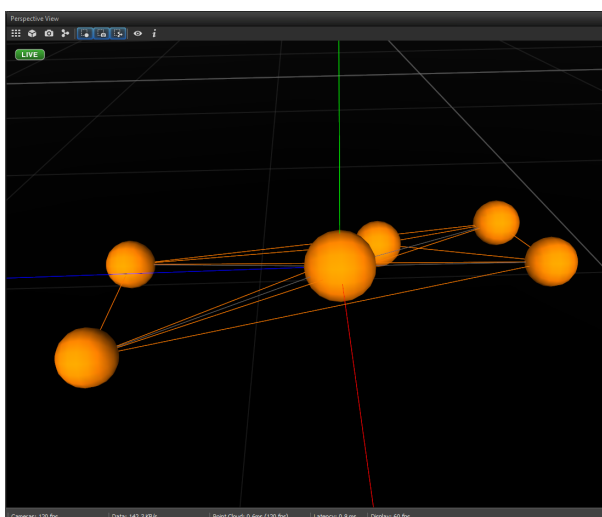


Figura 3.1.9: Marcadores reflejantes montados en el prototipo.

3.1.3. Sistema de Comunicación

El sistema de comunicación nos permite enviar y recibir datos entre los diferentes dispositivos de la plataforma experimental, este sistema comprende la transferencia de datos del sistema OptiTrack a un programa desarrollado en C++ que contiene el controlador del móvil, además de la comunicación entre el programa del controlador y el móvil. Entre el sistema OptiTrack y el programa de control existe una comunicación por medio de un sistema cliente-servidor VRPN, por otro lado, entre el programa de control y el móvil se tiene una comunicación por medio de una red WiFi en configuración Ad-hoc.

Servidor VRPN

Se tomó como base para el servidor VRPN el código y procedimientos mostrados en [22], en el cual se da una explicación paso a paso de como hacer la configuración de este tipo de conexión además de una breve descripción de su funcionamiento. En este caso el código fue modificado para rastrear dos objetos los cuales son el móvil y el objeto transportado.

Conexión WiFi

Como se mencionó anteriormente, el móvil cuenta con una tarjeta de comunicación WiFi, la cual tiene las características mostradas en la tabla 3.1.6.

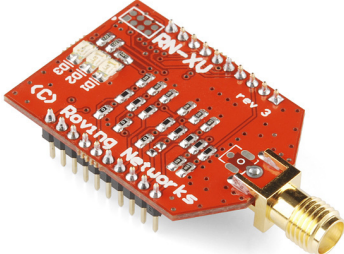
Características	Imagen
Soporte de conexiones Ad-hoc e Infraestructura Transferencia de datos por UART TTL 8 puertos GPIO 3 entradas analógicas para sensores Voltaje de operación a 3.3 V Conector RP-SMA	

Tabla 3.1.6: Tarjeta WiFly.

Para realizar la comunicación de los dispositivos se decidió crear una conexión Ad-hoc la cual es un tipo de red inalámbrica descentralizada y solo habrá comunicación entre la PC y el móvil, para configurar esta conexión en la tarjeta WiFly hay dos maneras, la primera es por software, lo cual implica reprogramar el microcontrolador de la tarjeta, esto da la libertad de poder elegir todos los parámetros de la red; la segunda forma es por medio de hardware, esto se logra conectando el pin 8 del WiFly a 3.3V, con esto se genera una red Ad-hoc con los parámetros mostrados en la tabla 3.1.7

Parámetro	Valor
IP	169.254.1.1
Mascara de subred	255.255.0.0
SSID	Wifly-GSX-XX
(Las XX al final concuerdan con los últimos dos valores de la dirección MAC)	

Tabla 3.1.7: Parámetros de conexión Ad-hoc WiFly.

Nota

Las hojas de datos, códigos de programación en C++ y Matlab, además de los diseños en CAD se encuentran en el apéndice D.

Capítulo 4

Resultados Experimentales

En este capítulo, se muestran los resultados experimentales usando el esquema de control y la plataforma experimental descrita anteriormente. Se desarrollan dos tipos de experimentos, en los primeros, se da el resultado obtenido del seguimiento de trayectorias cerradas para validar los alcances del esquema de control ante diferentes escenarios; en los segundos experimentos, se da el resultado obtenido del seguimiento de las trayectorias óptimas antes descritas.

4.1. Resultados Experimentales del Controlador Siguiendo una Trayectoria Cerrada

Para el seguimiento de trayectorias cerradas se consideran tres casos:

Caso 1 el robot móvil tiene una distribución de masa casi uniforme ($\gamma \approx 0$), y en el esquema de control se considera una distribución de masa uniforme del robot móvil ($\gamma = 0$).

Caso 2 el robot móvil tiene una distribución de masa no uniforme ($\gamma \neq 0$), y en el esquema de control se considera una distribución de masa uniforme del robot móvil ($\gamma = 0$).

Caso 3 se considera que el robot móvil tiene una distribución de masa no uniforme ($\gamma \neq 0$), y en el esquema de control se considera una distribución de masa no uniforme ($\gamma \neq 0$).

Para los casos en donde la distribución de masa del robot móvil es uniforme se consideran los parámetros de la tabla 3.1.4 y en los casos donde la distribución de masa del robot móvil no es uniforme se consideran los parámetros de la tabla 4.1.1.

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	4.05	[Kg]
d	0.059	[m]
r	0.045	[m]
b	0.133	[m]
I	0.028	[Kg - m ²]
γ	$\pi - 0.1135$	[rad]

Tabla 4.1.1: Parámetros del móvil diferencial con distribución de masa no uniforme.

Para el *caso 3*, los parámetros del esquema de control que se ven modificados por el objeto transportado, se calculan usando datos proporcionados por el sistema de visión, complementados con el peso y material del objeto a transportar. Con estos datos, se puede calcular la masa total y la nueva ubicación del centro de masa del sistema, que se muestran en la tabla 4.1.1.

4.1.1. Experimentos bajo consideraciones del *caso 1*

En la figura 4.1.1, se muestran los resultados del experimento 1, el cual tiene como objetivo que el robot móvil siga una trayectoria circular con centro en el origen y de radio igual a un metro, esto bajo las suposiciones del *caso 1*. Se observa que la trayectoria que describe el robot es muy similar a la trayectoria deseada, lo cual se puede corroborar en las gráficas a la izquierda de la figura 4.1.1 donde se muestra el error de seguimiento y orientación. Los errores que se muestran en figura 4.1.1 son muy similares a los mostrados en la figura 2.4.9, esto lo podemos asociar a que los parámetros del robot móvil no concuerdan con los obtenidos en CAD, a pesar de esto, el seguimiento de la trayectoria es adecuado.

En la figura 4.1.2, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 1, se muestran los controles virtuales y los pares aplicados a cada llanta. Se puede observar como las velocidades tienden a las reales y a su vez, estas están oscilando cerca de la velocidad deseada. En cuanto a los pares aplicados a las llantas, se observa que oscilan alrededor de un valor constante, esto corresponde al comportamiento normal para un robot móvil diferencial que está dando vuelta.

4.1. RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL CONTROLADOR SIGUIENDO UNA TRAYECTORIA CERRADA

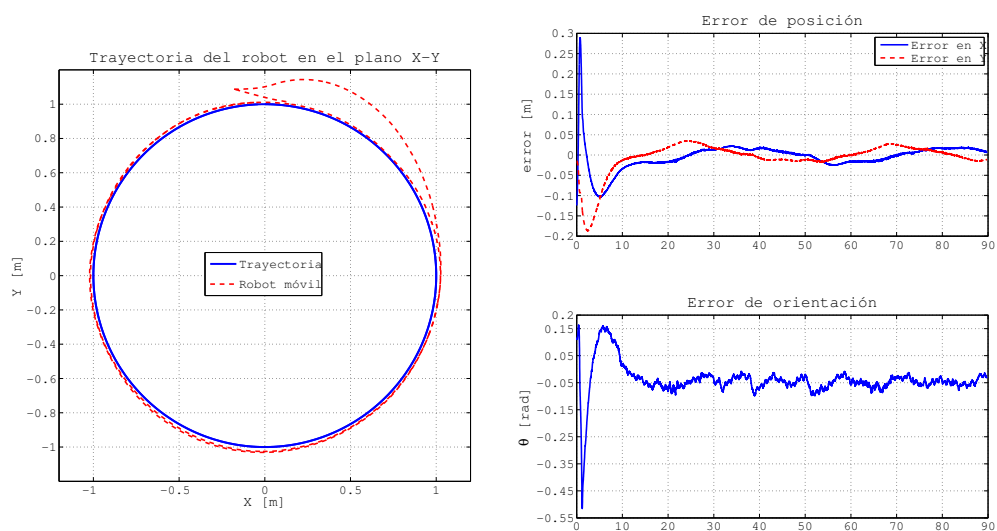


Figura 4.1.1: Seguimiento de trayectoria experimento 1.

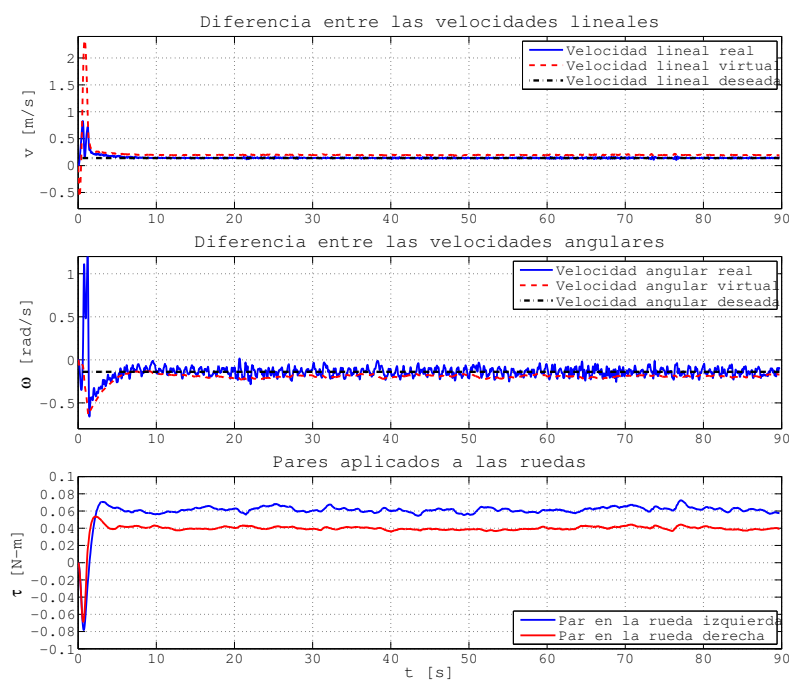


Figura 4.1.2: Graficas del esquema de control para experimento 1.

En la figura 4.1.3, se muestran los resultados del experimento 2, considerando la misma tarea del experimento 1. En este experimento, debido a un error en la programación, la velocidad deseada en y se mantuvo en cero durante todo el experimento, a pesar de ello, se observa un buen seguimiento de la trayectoria, y se presenta una oscilación que perdura durante todo el trayecto, esto último se puede observar en la gráfica de error de oscilación. Por otro lado, vemos que la oscilación en el error de posición no sigue un patrón, pero se mantiene acotado, por lo que el controlador tiene una buena reacción ante este tipo de perturbaciones.

En la figura 4.1.4, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 2, en la gráfica superior se puede observar más claramente el error que se genera en la velocidad lineal deseada, por otro lado, vemos como la velocidad virtual adquiere valores que compensen este error y den como resultado que la velocidad lineal en el robot móvil se encuentre oscilando alrededor de un valor constante. Por otro lado, en la gráfica del centro se observa como la velocidad angular oscila bastante debido al error en orientación, por otro lado se observa que la velocidad angular virtual es un promedio de estas oscilaciones y se mantiene cerca del valor deseado, por lo que el esquema de control logra compensar el error antes descrito. En la gráfica inferior se observan los pares de salida de las ruedas, podemos ver como estos pares son muy similares a los obtenidos en el experimento anterior pero con una oscilación más fuerte, con lo cual se compensa el error pero genera una oscilación en el sistema.

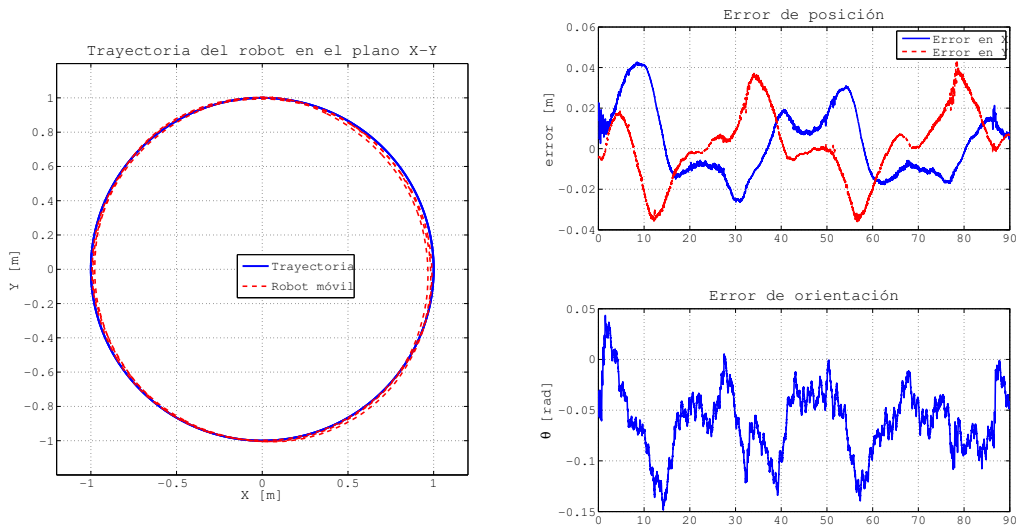


Figura 4.1.3: Seguimiento de trayectoria experimento 2.

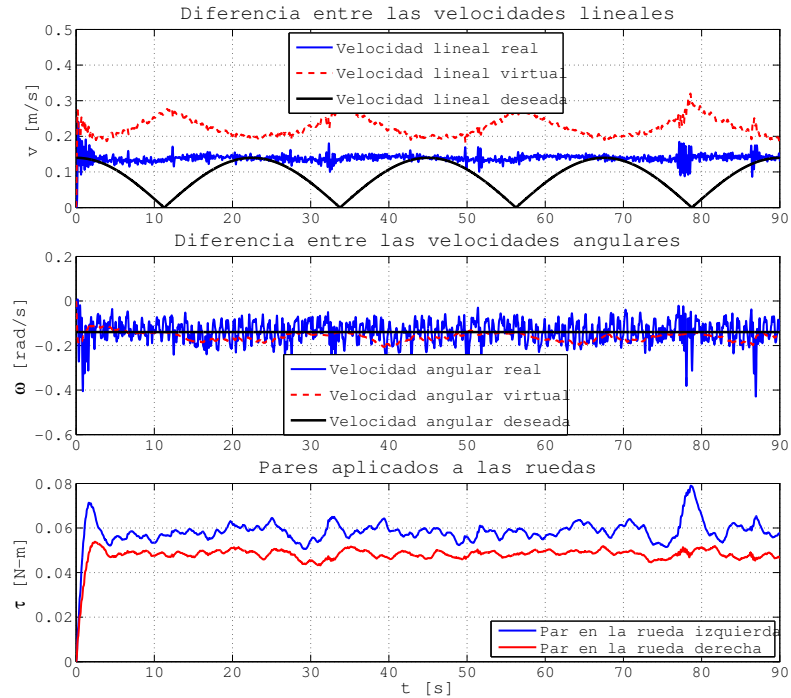


Figura 4.1.4: Graficas del esquema de control para experimento 2.

En la figura 4.1.5, se muestran los resultados del experimento 3, el cual tiene como objetivo que el robot móvil siga una curva de Lissajous ($a=1$, $b=2$, $\alpha = \pi/4$) con centro en el origen, con un ancho de 2.5 metros por un metro de alto, esto bajo las suposiciones del *caso 1*. En este experimento podemos observar que el seguimiento de trayectoria no es tan bueno como en los experimentos anteriores, esto se debe a varios factores, entre los que se encuentran que la trayectoria cuenta con cambios de signo en la derivada de la orientación lo cual afecta directamente en el comportamiento de los motores, ya que los motores usados en el robot móvil no tienen comportamiento simétrico ante un cambio en el sentido de giro, esto quiere decir que los motores entregan diferentes pares en ambos sentidos de giro. Este comportamiento se compensó ajustando las ganancias del controlador durante la trayectoria. Por otro lado, en la gráfica de errores de orientación vemos que existen cambios abruptos, ésto se debe a que usamos la función de la tangente inversa para calcular la orientación de la trayectoria deseada, ésto afecta como una pequeña perturbación que ocasiona que el móvil se desoriente al cruzar por el origen, esta perturbación es absorbida por el esquema de control y evita que el robot móvil se descontrole. Los errores de seguimiento observados son considerables pero se mantienen acotados, ésto, como en el experimento 1, lo podemos atribuir a diferencias entre los parámetros del CAD y los reales para el robot móvil.

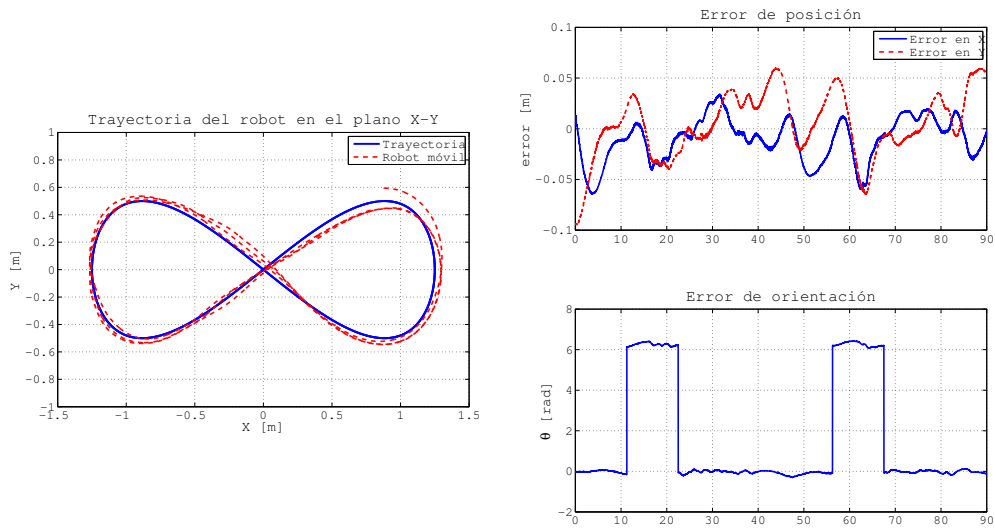


Figura 4.1.5: Seguimiento de trayectoria experimento 3.

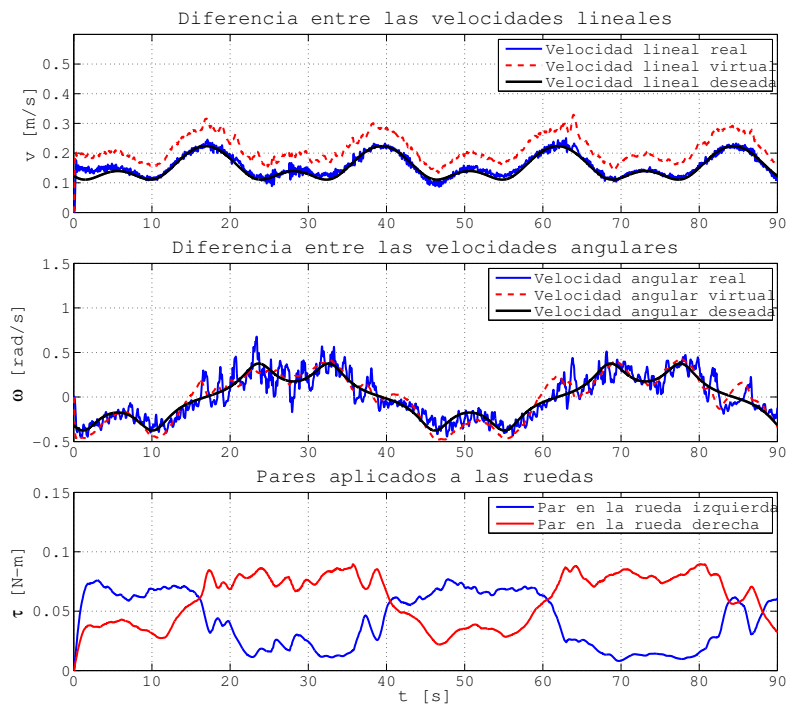


Figura 4.1.6: Graficas del esquema de control para experimento 3.

En la figura 4.1.6, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 3. En este experimento se observa en la gráfica superior, que la velocidad lineal virtual no converge a la velocidad real del móvil pero presenta una similitud, esto se debe principalmente que esta variable depende de los errores de orientación y de seguimiento en el eje x , a medida que los errores disminuyen, esta velocidad virtual converge a su valor deseado. Por otro lado, se observa en la gráfica central, como la velocidad angular virtual se mantiene cerca de la velocidad angular real y la deseada, esto a pesar de las oscilaciones en la velocidad angular real. En la gráfica inferior, se observan los pares de salida y como estos se permutan a medida en que cambia el signo de la derivada para la orientación, en este caso los pares son de mayor magnitud comparados con los de los experimentos anteriores, esto se debe a que el robot móvil debe completar una trayectoria mayor en el mismo tiempo que los casos anteriores.

En la figura 4.1.7, se muestran los resultados del experimento 4, el cual tiene como objetivo que el robot móvil siga una curva de Lissajous ($a=2$, $b=3$, $\alpha = 0$) con centro en el origen, con un ancho de 2.5 metros por un metro de alto, esto bajo las suposiciones del *caso 1*. En este experimento se puede observar que hay un incremento considerable en el error de seguimiento, aun así, en las gráficas mostradas en la figura 2.4.5 observamos que en simulación existen errores de seguimiento considerables, esto se debe a lo ya antes mencionado y agregando que esta curva exige mucho al esquema de control debido a que tiene cambios tanto en la velocidad lineal como en la angular, además de contar con curvas cerradas en las cuales el robot móvil no se comporta adecuadamente, a pesar de ello, se observa que los errores se mantienen acotados.

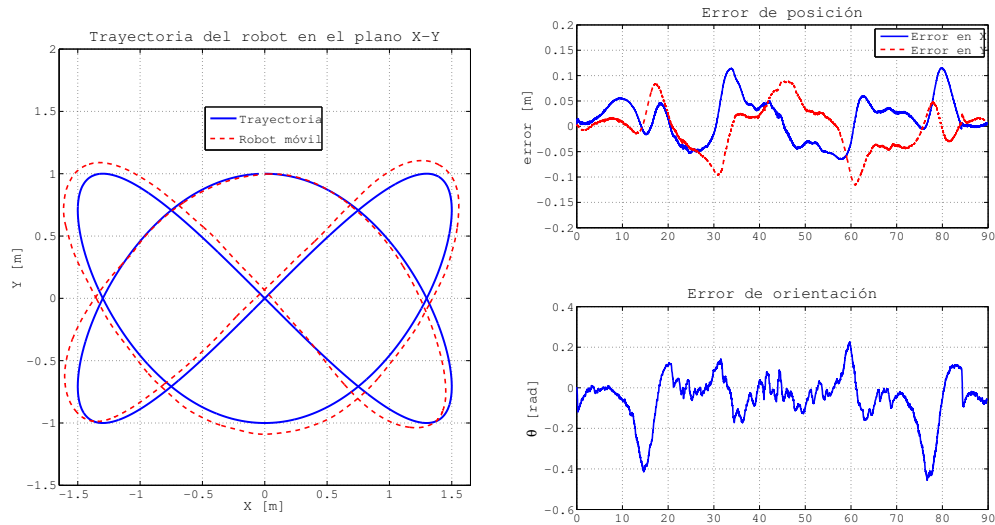


Figura 4.1.7: Seguimiento de trayectoria experimento 4.

En la figura 4.1.8, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 4. Los resultados del experimento 4 son muy similares en explicación al los del experimento 3.

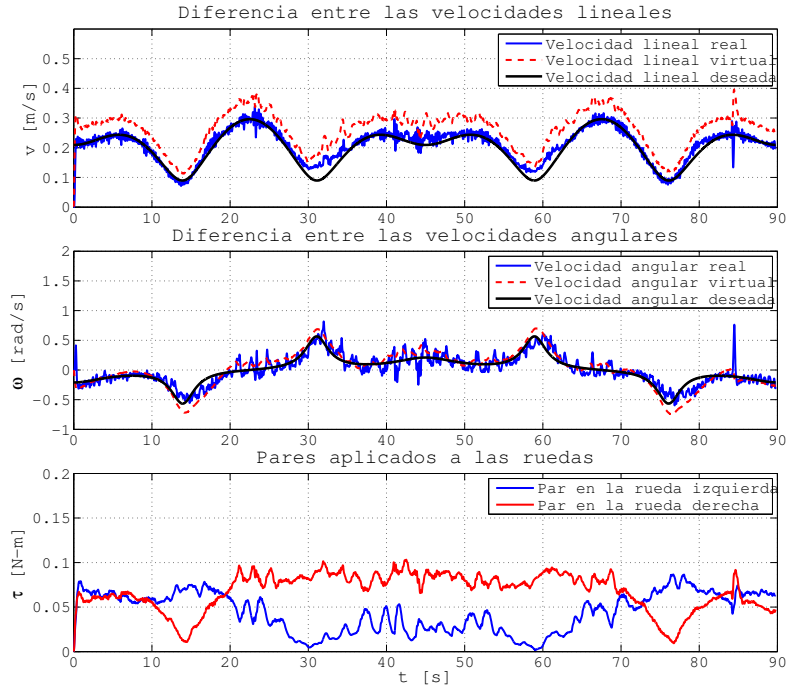


Figura 4.1.8: Graficas del esquema de control para experimento 4.

4.1.2. Experimentos bajo consideraciones del *caso 2*

En este caso, solo se consideró un experimento para el seguimiento de un círculo, ésto debido a que los errores de posición en las demás trayectorias probadas anteriormente salen de los rangos que puede medir el sistema de visión.

En la figura 4.1.9, se muestran los resultados del experimento 5, el cual tiene como objetivo que el robot móvil siga una trayectoria circular con centro en el origen y de radio de un metro, ésto bajo las suposiciones del *caso 1*. En este experimento se observa como el controlador no logra compensar el aumento en la masa del objeto y en cambio en el centro de masa, ésto a pesar de que el móvil inicio su movimiento muy cerca de la trayectoria. Los errores de seguimiento no se disparan y se mantienen acotados. Se puede observar también cómo el error en orientación no se dispara e intenta regularlo para que se mantenga muy cercano a cero.

4.1. RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL CONTROLADOR SIGUIENDO UNA TRAYECTORIA CERRADA

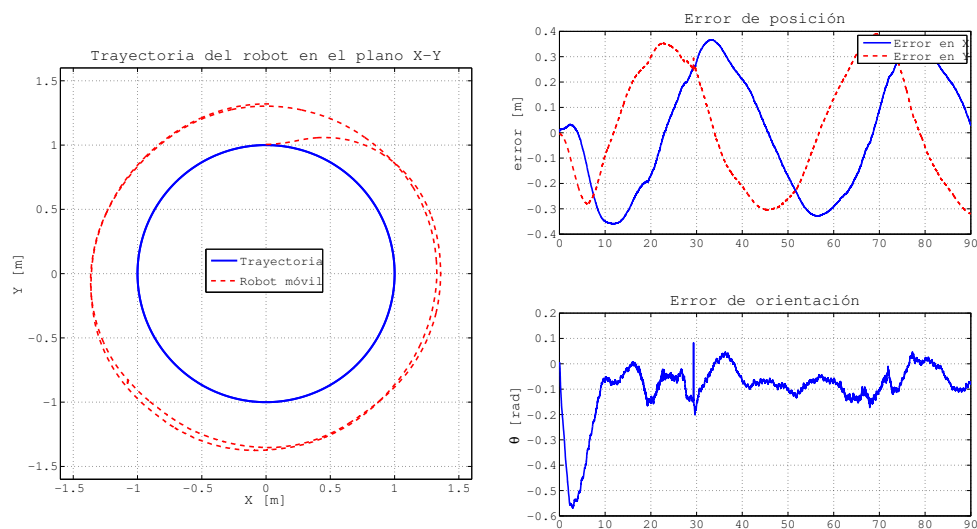


Figura 4.1.9: Seguimiento de trayectoria experimento 5.

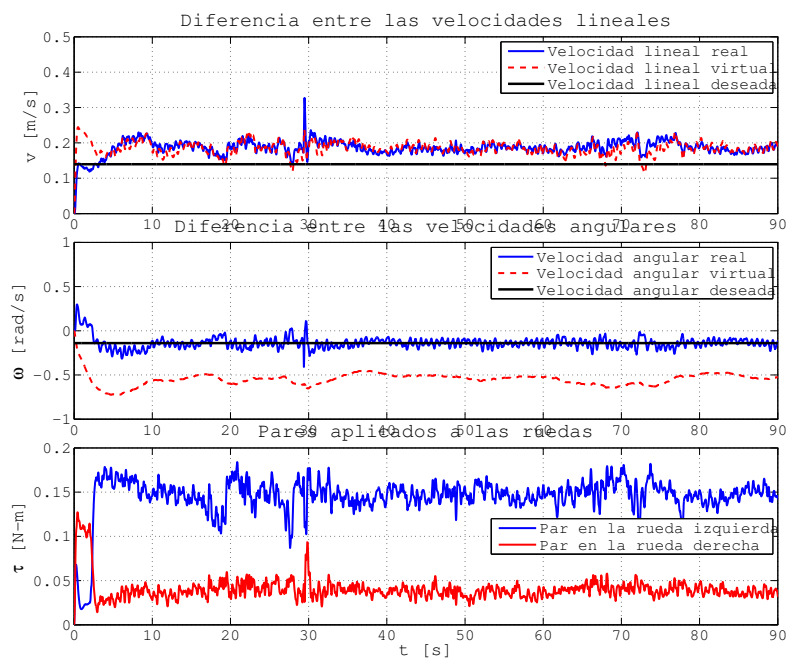


Figura 4.1.10: Graficas del esquema de control para experimento 5.

En la figura 4.1.10, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 5. En la gráfica superior se observa como hay un error considerable en la velocidad deseada, a pesar de ello, la velocidad virtual se mantiene muy cerca de la real y ésto al menos mantiene al error acotado. Por otro lado, vemos en la gráfica central como existe un mejor seguimiento de la velocidad angular y en este caso la velocidad angular virtual no se mantiene cerca de la velocidad angular real, esto se debe a que los errores en posición, tanto en x como en y , y el error en orientación afectan a esta variable, a pesar de esto, el esquema de control mantiene al móvil en una trayectoria estable.

4.1.3. Experimentos bajo consideraciones del *caso 3*

En este caso, solo se considera un experimento para el seguimiento de una trayectoria circular, no es necesario considerar más experimentos ya que serían similares los resultados a los del caso 1. Este experimento se realizó con la finalidad de observar el comportamiento del esquema de control al considerar una distribución de masa no uniforme ($\gamma \neq 0$). En la figura 4.1.11, se muestran los resultados del experimento 6, el cual tiene como objetivo que el robot móvil siga una trayectoria circular con centro en el origen y de radio de un metro, esto bajo las suposiciones del *caso 1*. En este experimento observamos cómo el esquema de control reduce considerablemente el error de seguimiento mostrado en el experimento anterior. Se puede observar también, como en el error de orientación se presentan oscilaciones pero se mantienen acotadas.

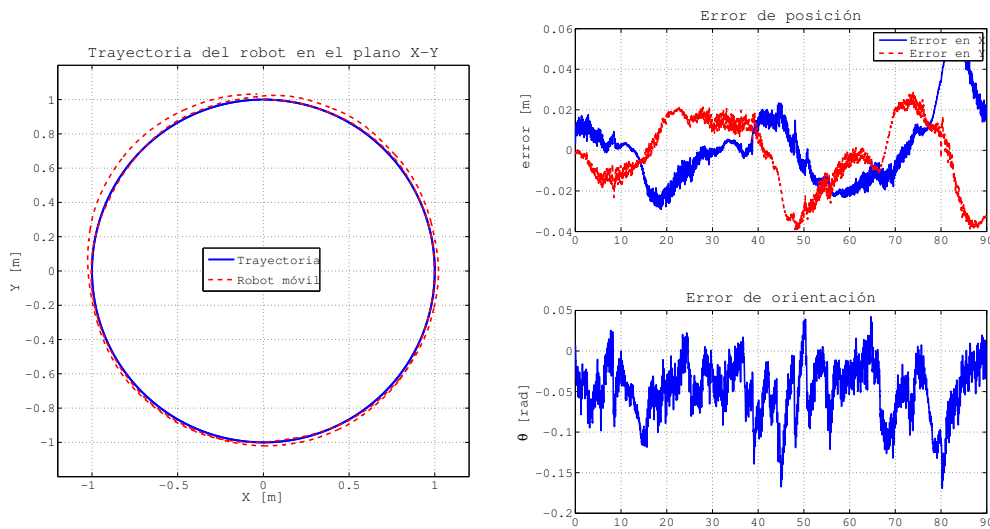


Figura 4.1.11: Seguimiento de trayectoria experimento 6.

En la figura 4.1.12, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 6. En las gráficas superior se observa como la velocidad lineal virtual no converge a la velocidad lineal real, esto, como en los casos anteriores, se debe al error de seguimiento. En la gráfica central, se observa que la velocidad angular virtual y la real se mantienen muy cerca de la velocidad angular real aunque se presenta una oscilación mayor a la mostrada en el experimento 1, esto en parte se debe a los pares ingresados en las ruedas.

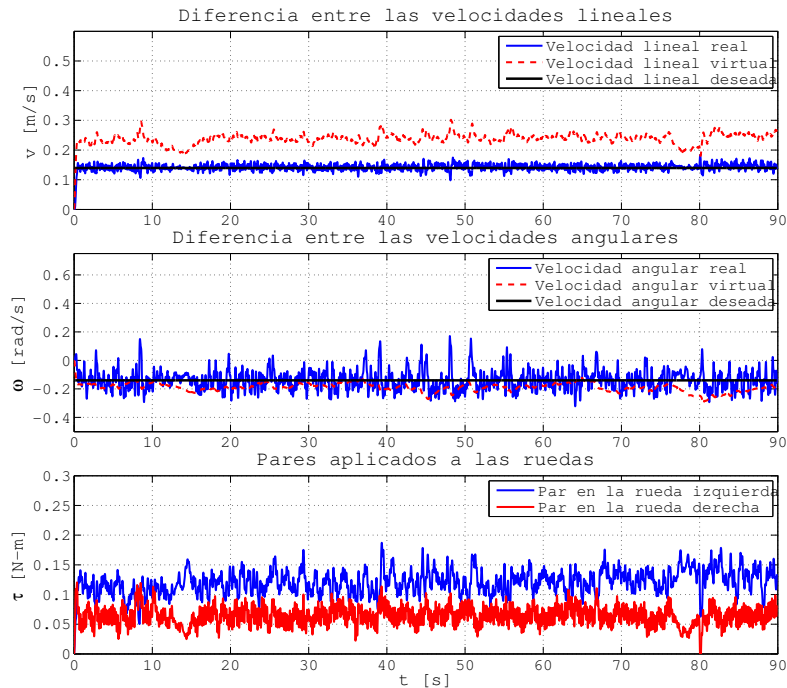


Figura 4.1.12: Graficas del esquema de control para experimento 6.

En los experimentos antes descritos, se tuvo que hacer una compensación de par, esto debido a que los motores no presentan un comportamiento simétrico ante un cambio en el sentido de giro. Esta compensación se realizo por medio de software y al no tener la certeza de las constantes adecuadas, generalmente ocasionaba una serie de oscilaciones en el robot móvil. A pesar de lo anterior, se observó que si el robot móvil no cambia constantemente el sentido de su orientación, se logra un seguimiento mejor de la trayectoria.

4.2. Resultados Experimentales del Controlador Siguiendo la Trayectoria Óptima

Los experimentos descritos a continuación, tienen la tarea de seguir las trayectorias óptimas descritas en la subsección 2.3.3.

En la figura 4.2.1, se muestran los resultados del experimento 7. En este experimento se sigue la trayectoria descrita en la ecuación (2.3.18), y el objetivo es llegar al punto $P_f(1.5, 1.5)$ en un tiempo de diez segundos. En las gráficas podemos observar que el seguimiento presenta resultados satisfactorios, el error se mantiene oscilando cerca de los dos centímetros, por otro lado, se observa que la orientación tiene un error considerable y cuando el robot móvil va a llegar al punto final empieza a oscilar para llegar con la orientación final.

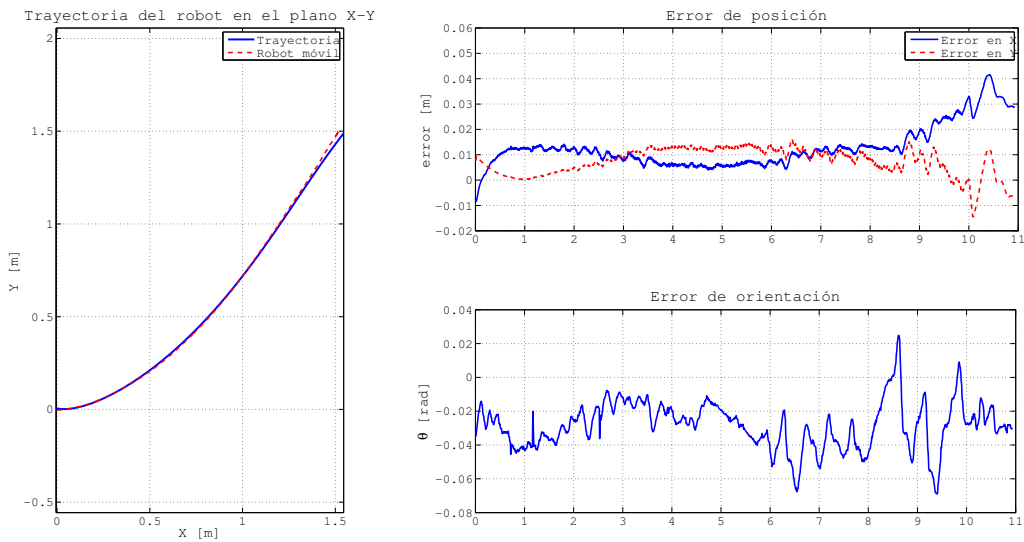


Figura 4.2.1: Seguimiento de trayectoria experimento 7.

En la figura 4.2.2, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 7. Se puede observar en las gráficas correspondientes a las velocidades virtuales, como el robot móvil sigue adecuadamente las velocidades deseadas y cuando este va a llegar al punto final empiezan a oscilar las velocidades, este efecto se da como resultado de los pares aplicados a las llantas. Este efecto se ocasiona por el echo de que en estas trayectorias no se le pide al móvil que siga una orientación tangente a la trayectoria y al haber errores en la aproximación de la orientación obliga al robot móvil a oscilar para alcanzar la trayectoria y la oscilación deseada. Al llegar al punto final, el robot se detiene pero como sigue existiendo un error de posición el controlador intenta corregirlo a pesar de que se indica que las velocidades deseadas son cero, esto ocasiona una pequeña oscilación al final del experimento.

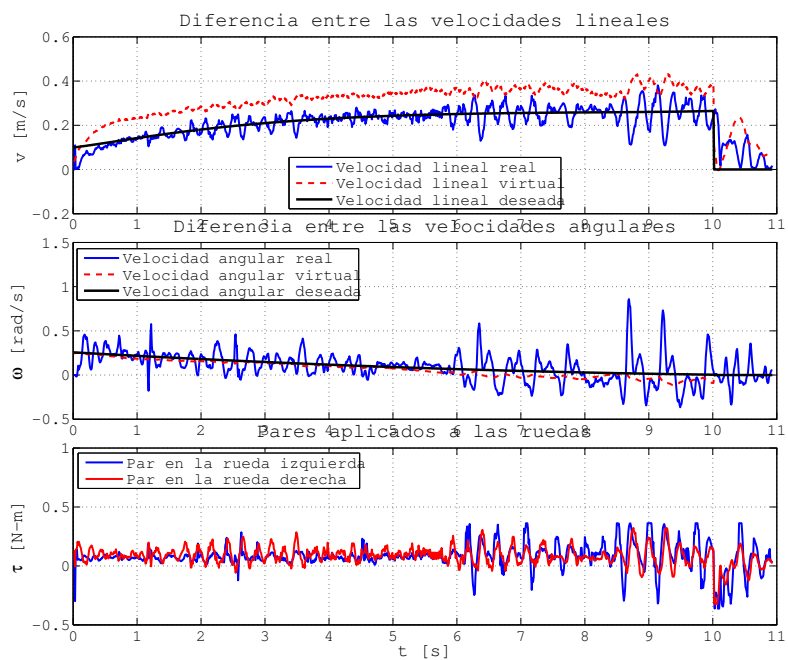


Figura 4.2.2: Graficas del esquema de control para experimento 7.

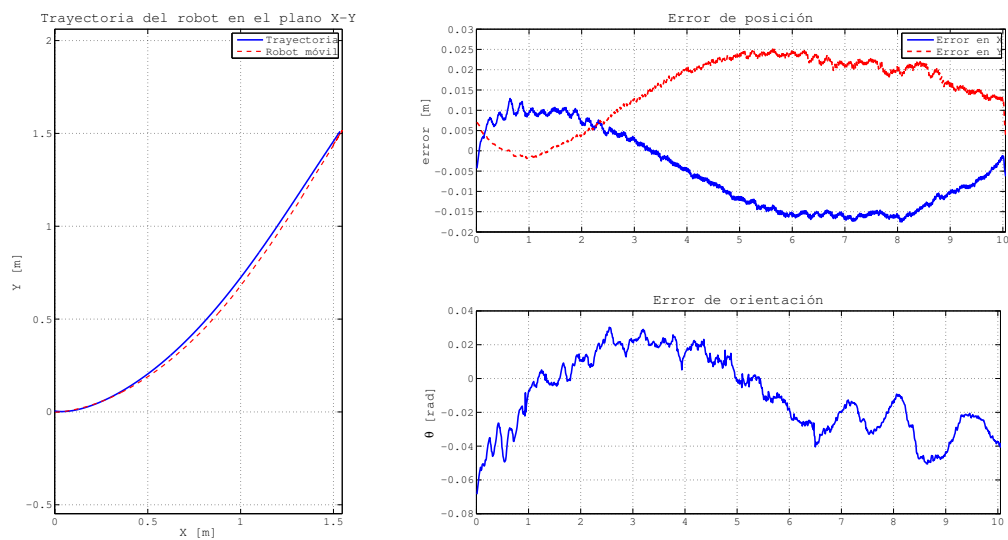


Figura 4.2.3: Seguimiento de trayectoria experimento 8.

En la figura 4.2.3, se muestran los resultados del experimento 8. En este experimento se sigue la trayectoria descrita en la ecuación (2.3.19), y el objetivo es llegar al punto $P_f(1.5, 1.5)$ en un tiempo de diez segundos. En las gráficas podemos observar que el seguimiento presenta resultados satisfactorios, el error no se mantiene en márgenes aceptables.

En la figura 4.2.4, se muestran los resultados del esquema de control del experimento 8. Se puede observar en las gráficas correspondientes a las velocidades virtuales, como el robot móvil sigue adecuadamente las velocidades deseadas y al igual que en el experimento 7, se presentan oscilaciones ocasionadas por el seguimiento de la orientación. En este experimento, la oscilación al llegar al punto final es mucho menor que en el experimento 7.

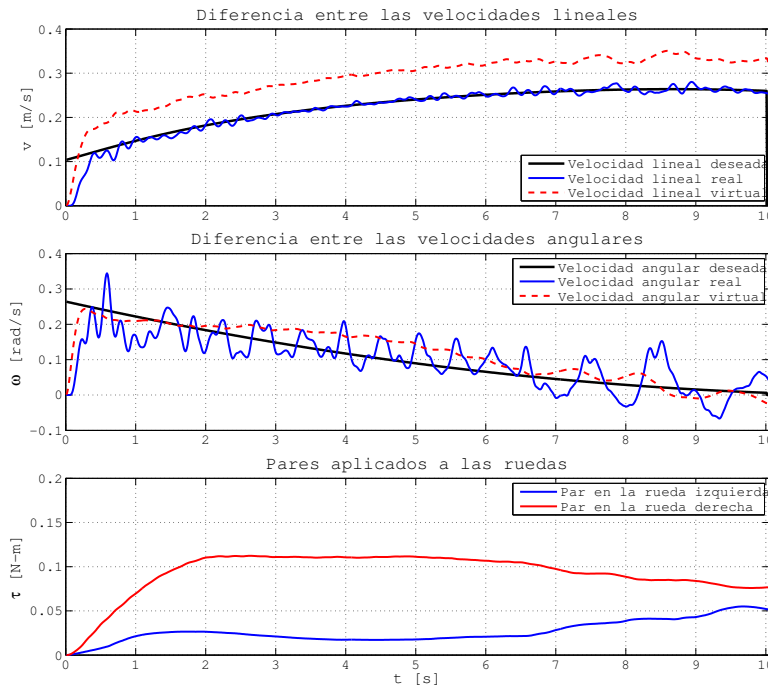


Figura 4.2.4: Graficas del esquema de control para experimento 8.

En la figura 4.2.5 se presenta la posición relativa del objeto transportado al centro de giro del robot. En esta gráfica se puede observar que el objeto tiene un movimiento muy reducido y solo se desplaza cerca de un milímetro durante el recorrido. El ruido de esta medición es ocasionado por el sistema de visión, el cual en mediciones menores a un milímetro, da valores que oscilan mucho.

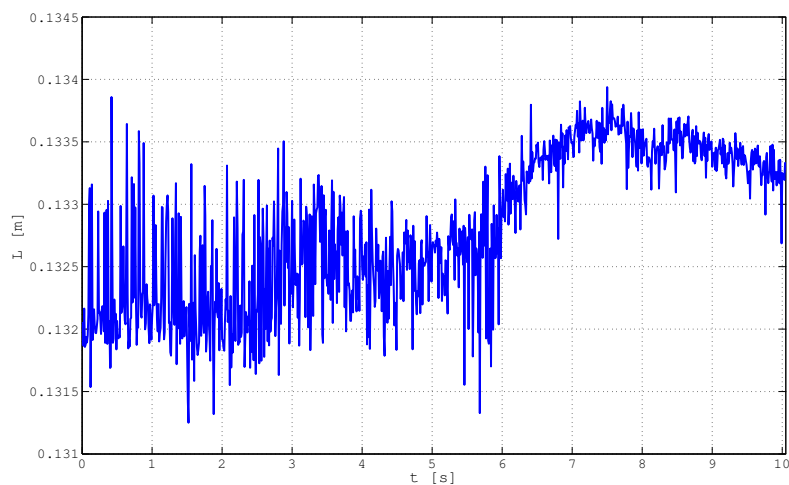


Figura 4.2.5: Distancia relativa del objeto transportado en el experimento 8.

Por último, con la finalidad de comparar los resultados obtenidos del experimento 8 con los del experimento 7, se realizó un experimento en el cual, el objeto transportado no estuviera anclado al robot móvil y éste, debe seguir la trayectoria descrita por la ecuación (2.3.18). En la figura 4.2.6, se puede observar como el objeto transportado, tiene un movimiento relativo al centro de giro del robot móvil mínimo.

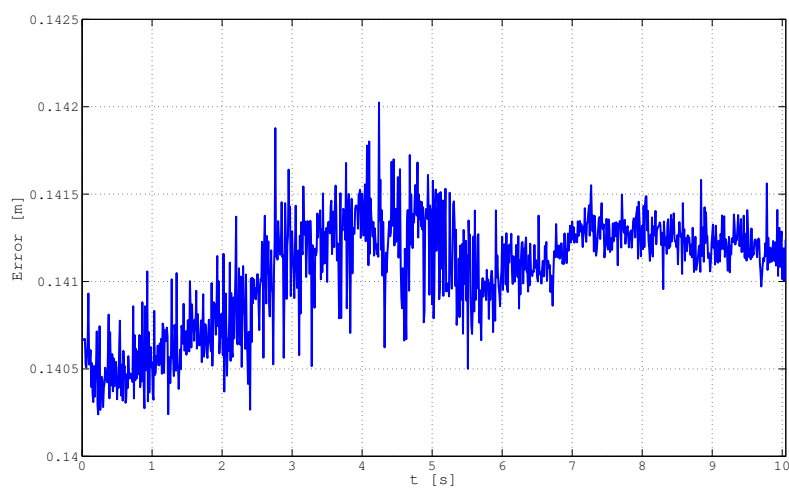


Figura 4.2.6: Distancia relativa del objeto transportado en el experimento 9.

4.3. Análisis de Resultados

En los experimentos antes descritos, se observó que para el seguimiento de la trayectoria, en los casos 1 y 3, los resultados son aceptables. Los resultados para estos experimentos muestran errores de seguimiento de mayor amplitud al aumentar la complejidad de la curva a seguir, en especial cuando las curvas más cerradas y cuando existe un cambio en el signo de la derivada de la orientación. En estos experimentos, se presentaron escenarios en donde se presentan discontinuidades en la orientación y errores en proporcionar las velocidades deseadas, a pesar de ello, los resultados bajo estos escenarios fueron aceptables.

En el experimento del caso 2, se presentaron errores de seguimiento considerables, a pesar de que el esquema de control regula las velocidades deseadas a valores con errores aceptables. Se observó que este tipo de controladores da prioridad a las velocidades de seguimiento y es sensible a los cambios de parámetros del modelo dinámico, esto, debido a que el esquema de control está basado en un controlador por par calculado.

Por otro lado, en el seguimiento de las trayectorias óptimas, los errores de seguimiento presentan valores aceptables, pero, presentan mayor oscilación durante el seguimiento de la trayectoria, esto, como ya se mencionó anteriormente, es originado por el seguimiento de la orientación, la cual debido a que es proporcionada por una ecuación, es ligeramente diferente a la que se obtiene al mantener al robot móvil tangente a la trayectoria.

Se observó que mientras las velocidades del móvil sean bajas, el error de movimiento relativo del objeto al centro de giro del robot móvil, es mínimo, esto nos permite utilizar un proceso de optimización más simple y con un tiempo de cómputo menor al usar sólo al modelo cinemático.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo a Futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis y el trabajo a futuro a desarrollar siguiendo esta línea de investigación.

5.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se consideró el problema de manipulación de objetos por un robot móvil. Con este objetivo, se desarrolló un esquema de control para el seguimiento de trayectorias y se obtuvieron las trayectorias óptimas para el transporte de objetos con un movimiento relativo al robot móvil mínimo. Se diseñó y construyó una plataforma experimental para probar el esquema de control y mostrar que las trayectorias óptimas permiten el transporte de objetos con un movimiento relativo mínimo. Las conclusiones de este trabajo de tesis son las siguientes:

- Se desarrolló un modelo cinemático y uno dinámico más general para un robot móvil diferencial. El modelo dinámico desarrollado permite entender mejor los efectos que tiene una distribución de masa no uniforme en este tipo de sistemas llevados a cabo con la plataforma experimental, con lo que se pueden desarrollar mejores esquemas de control para el seguimiento de trayectoria. Se observó en los experimentos, que la diferencia entre los parámetros reales del móvil y los usados en el esquema de control ocasionen un error que se mantiene constante; este efecto se pudo también observar en las simulaciones donde no coincidían estos parámetros.
- Con el esquema de control desarrollado, se puede controlar el modelo dinámico de un robot móvil diferencial mediante su cinemática. Además, con el uso de las velocidades virtuales, fue posible obtener una ecuación para la aceleración del sistema, evitando obtener las derivadas de las velocidades por un método de aproximación. Esto permitió reducir el ruido que puede ser propagado por las fluctuaciones en el sistema de medición de la posición.

- Se desarrolló un prototipo de robot móvil para el transporte de objetos, el cual tiene un control por corriente para los motores. A pesar de que los motores no presentan un comportamiento simétrico en el par que entregan, al cambiar el sentido de giro fue posible compensar mediante programación este problema, obteniendo resultados satisfactorios usando el esquema de control desarrollado en este trabajo. Se logró el seguimiento de trayectorias cerradas bajo diferentes escenarios y se mantuvieron errores de seguimiento considerables. Se observó un buen comportamiento del esquema de control para el seguimiento de trayectorias óptimas, donde se transportó un objeto con suficiente masa, con la finalidad de alterar de manera significativa los parámetros estructurales del robot móvil.
- En el transporte de objetos siguiendo una trayectoria óptima se observó que, mientras las velocidades del móvil sean bajas, no es necesario considerar las fuerzas que actúan sobre el objeto a consecuencia del movimiento del robot móvil como una restricción. El movimiento que sufre el objeto transportado es muy similar usando ambos métodos, aunque si se desea incorporar un criterio de tiempo mínimo, se debe considerar las fuerzas debido a que las velocidades aumentarán significativamente y pueden ocasionar un mayor desplazamiento del objeto transportado.

5.2. Trabajo a Futuro

A continuación se presentan una serie de puntos, con los cuales, se puede trabajar posteriormente para mejorar este trabajo de tesis.

- Desarrollar un esquema de control más completo, el cual sea robusto ante las diferencias entre los parámetros reales y los obtenidos de simulación.
- Se puede mejorar el comportamiento del prototipo de robot móvil diferencial usando motores de mejor calidad, preferentemente diseñados para control por corriente.
- Realizar más pruebas experimentales usando diferentes tipos de materiales, para probar de manera más extensiva el algoritmo para obtener las trayectorias óptimas.
- Desarrollar una metodología de optimización para obtener las trayectorias óptimas a partir de funciones paramétricas.
- Incluir el tiempo mínimo en el problema de optimización.

Bibliografía

- [1] (2015). [Online]. Available: <https://www.naturalpoint.com/optitrack/>
- [2] J. C. Alexander and J. H. Maddocks, “Bounds on the friction-dominated motion of a pushed object,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 12, no. 3, 1993.
- [3] G. Arechavaleta, “Optimización de trayectorias para sistemas sujetos a restricciones no holónomas,” *Computación y Sistemas*, vol. 14, no. 4, 2011.
- [4] H. Barghijand, A. Akbarimajd, and J. Keighobadi, “Quasi-static object manipulation by mobile robot: Optimal motion planning using ga,” *11th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 2011.
- [5] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3, Ed. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006.
- [6] V. M. Becerra, “Solving optimal control problems whit state constrains using nonlinear programming and simulation tools,” *IEEE Transactions on Education*, vol. 47, no. 3, pp. 377–384, 2004.
- [7] A. M. Bloch, “Stabilizability of nonholonomic control systems,” *Automatica*, vol. 28, no. 2, 1992.
- [8] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andréa-Novel, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 1, pp. 47–62, February 1996.
- [9] C. Canudas, H. Khenouf, C. Samson, and O. J. Sordalen, *Nonlinear Control Design for Mobile Robots. Recent Trends in Mobile Robots*, 1993.
- [10] C. Canudas, G. Bastin, and B. Siciliano, *Theory of Robot Control*. London: Springer-Verlag, 1996.
- [11] B. D’Andréa-Novel, G. Bastin, and G. Campion, “Modelling and control of nonholonomic wheeled mobile robots,” *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1991.

- [12] R. Fierro and F. L. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics," *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, 1995.
- [13] C. Goh and K. Teo, "Control parametrization: A unified approach to optimal control problems with general constraints," *Automatica*, vol. 24, 1988.
- [14] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. Addison-Wesley, jun 2001.
- [15] G. Hicks and W. Ray, "Approximation methods for optimal control synthesis," *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 49, 1971.
- [16] H. P. Hsu, *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley Iberoamerica, 1987.
- [17] N. B. Hui, V. Mahendar, and D. K. Pratihari, "Time-optimal, collision-free navigation of a car-like mobile robot using neuro-fuzzy approaches," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 16, 2006.
- [18] D. Keymeulen and J. Decuyper, "The fluid dynamics applied to mobile robot motion: the stream field method," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1994.
- [19] K. R. Kozłowski, *Robot Motion Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 2009.
- [20] J.-P. Laumond, S. Sekhavat, and F. Lamiroux, *Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots*. Springer-Verlag, 1998.
- [21] S. Lee and J. H. Park, "Dynamic path-following using temporary path generator," *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 1999.
- [22] O. Martínez-Zuñiga, "Sincronización de robots móviles tipo (2,0) en tiempo discreto," Master's thesis, CINVESTAV - Unidad Zacatenco, 2013.
- [23] V. Muñoz, A. Ollero, M. Prado, and A. Simón, "Mobile robot trajectory planning with dynamic and kinematic constraints," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1994.
- [24] G. Nagib and W. Ghariieb, "Path planning for a mobile robot using genetic algorithms," *International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering*, 2004.
- [25] R. M. Rosenberg, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*. New York: Plenum Press, 1977.
- [26] A. Sgorbissa and R. Zaccaria, "Planning and obstacle avoidance in mobile robotics," *Robotics and Autonomous Systems*, 2012.

- [27] L. Solaque-Guzmán, N. Muños-Caballos, and P. Niño-Suárez, “Planificación de trayectorias para un robot tipo con restricciones dinámicas,” *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 2008.
- [28] D. Tabak and B. C. Kuo, “Application of mathematical programming in the design of optimal control systems,” *Interncaional Journal in Control*, vol. 10, 1969.
- [29] K. Teo, C. Goh, and K. Wong, *A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems*. New York: Longman, 1991.
- [30] C. K. Volos, I. M. Kyprianidis, and I. N. Stouboulos, “A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots,” *Robotics and Autonomous Systems*, 2012.

Apéndice A

Cinemática de las ruedas del móvil diferencial

Usando la ecuación (2.2.2) y los parámetros presentados en la figura A.0.1, se obtienen los siguientes resultados vectoriales considerando el marco de referencia del punto C en esta figura para las velocidades de las ruedas en el robot móvil:

$$\vec{r}\dot{\phi}_r = \mathbf{v} + \omega \tilde{j} \times \mathbf{r}_{R/C} = v\tilde{i} + \omega \tilde{j} \times b\tilde{k} = (v + \omega b)\tilde{i}, \quad (\text{A.0.1a})$$

$$\vec{r}\dot{\phi}_l = \mathbf{v} + \omega \tilde{j} \times \mathbf{r}_{L/C} = v\tilde{i} + \omega \tilde{j} \times (-b)\tilde{k} = (v - \omega b)\tilde{i}. \quad (\text{A.0.1b})$$

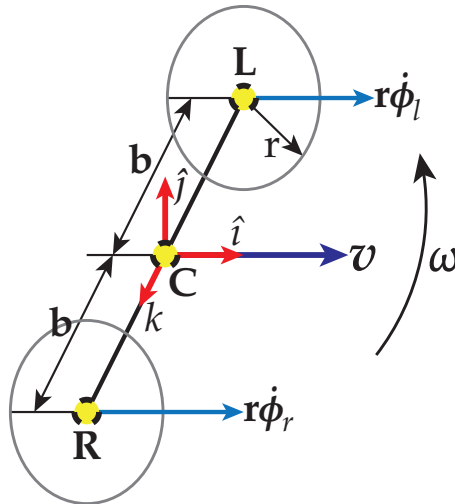


Figura A.0.1: Diagrama de velocidades del móvil considerándolo un cuerpo rígido.

De las ecuaciones (A.0.1a) y (A.0.1b) se observa que las velocidades de las ruedas y la

velocidad lineal del móvil se encuentran en la misma dirección. Si se considera el módulo de las ecuaciones (A.0.1a) y (A.0.1b) se tiene que, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (\text{A.0.2})$$

A partir de (A.0.2), se tiene entonces que la velocidad lineal y angular a partir de las velocidades angulares de las ruedas, está dado por

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{r}{2b} \begin{bmatrix} b & b \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}, \quad (\text{A.0.3})$$

o bien

$$v = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l), \quad (\text{A.0.4a})$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{r}{2b} (\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l). \quad (\text{A.0.4b})$$

Apéndice B

Curva de Lissajous

La curva de Lissajous es una curva paramétrica con la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}x &= A \sin(a\omega t + \alpha) \\y &= B \cos(b\omega t)\end{aligned}$$

Donde:

A Es la amplitud en el eje $\{x\}$.

B Es la amplitud en el eje $\{y\}$.

α Es el ángulo que se desfasan las dos señales.

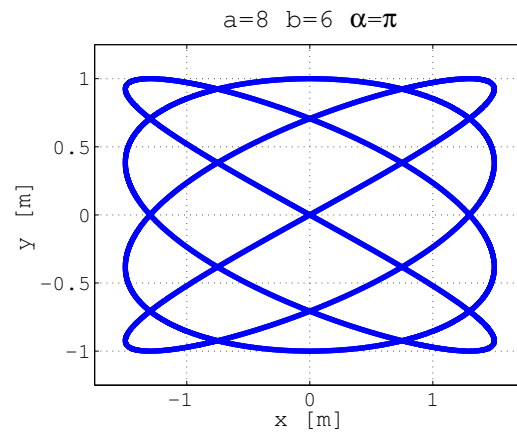
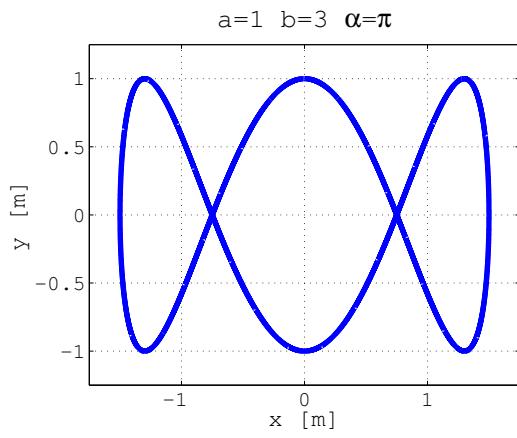
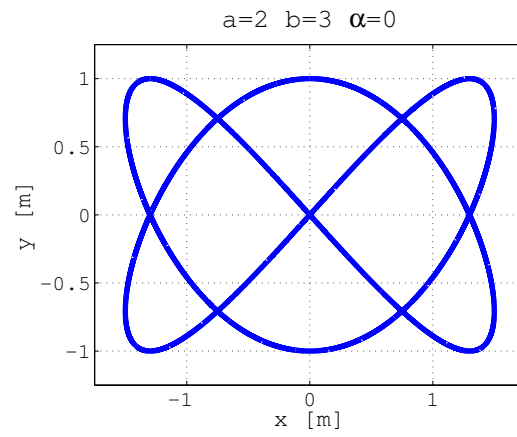
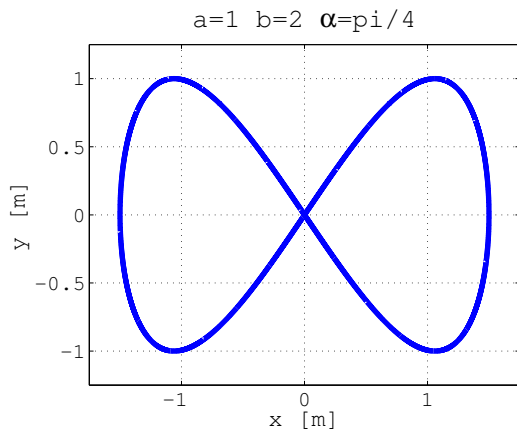
$a\omega$ Es el frecuencia de la señal en $\{x\}$.

$b\omega$ Es la frecuencia de la señal en $\{y\}$.

El valor de a nos indica cuantas veces se repite la señal en el eje x , el valor de b nos indica cuantas veces se repite la señal en el eje y y el ángulo α desfasa la señal para poder deformar la curva.

Por ejemplo, si escogemos $a = 1$, $b = 2$ y $\alpha = \pi/4$ se forma una curva Lemniscata, otros ejemplos donde se usa este tipo de curva es en algunos logotipos de instituciones como son Australian Broadcasting Corp. ($a = 1$, $b = 3$ y $\alpha = \pi$) y el Lincoln Laboratory del MIT ($a = 8$, $b = 6$ y $\alpha = \pi$).

A continuación se muestran algunas gráficas con sus respectivos valores de los parámetros a , b y α



Apéndice C

Artículo

Modelado Dinámico y Control de un Robot Móvil con Distribución de Masa No Uniforme

J. Álvarez-Gallegos, R. Castro-Linares, R. García-Saldívar

CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, Av. IPN, No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07300 México D.F., México (e-mail: {jalvarez, rcastro, garcias}@cinvestav.mx).

Resumen: En el presente trabajo se desarrolla el modelo dinámico de un robot móvil tipo (2,0) con una distribución de masa no uniforme y un controlador por par calculado, en el cual se incluye un controlador auxiliar diseñado con la técnica de backstepping. Se dan condiciones bajo las cuales el sistema en lazo cerrado es estable. Los resultados obtenidos en varias condiciones de simulación presentan un desempeño satisfactorio del controlador.

Palabras Clave: Robot móvil, backstepping, control por par calculado

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad se empieza a observar un incremento en el uso de robots móviles autónomos en el transporte de objetos dentro de la cadena productiva. La mayoría de estos robots móviles son diseñados para tener una distribución de masa simétrica, pero en la mayoría de los casos, los objetos que transportan no tienen una distribución de masa uniforme, por lo que al ser transportados por el robot móvil el sistema, en su conjunto, ve alterada su distribución de masa. En la literatura la mayoría de los trabajos que usan el modelo dinámico del robot móvil, localizan al centro de masa sobre el eje de simetría del robot (Barghijand et al. (2011), Yamamoto (1994)). A pesar de que existen trabajos como el desarrollado por Gholipour y Yazdanpanah (2003), donde se presenta un esquema de control que considera incertidumbres en los parámetros físicos del robot móvil, en ningún caso se consideran los efectos que podrían tener un cambio en la posición del centro de masa fuera del eje de simetría.

En el presente trabajo se aborda el modelado dinámico y cinemático de un robot móvil (2,0) con una distribución de masa no uniforme que provoca que el centro de masa del robot móvil se localice fuera del eje de simetría del robot móvil. Para controlar el movimiento del robot se desarrolla un controlador tomando como base el trabajo realizado por Fierro y Lewis (1995), en el cual se hacen los cambios pertinentes para que el controlador funcione con el modelo dinámico planteado.

2. ROBOT MÓVIL TIPO (2,0)

En la figura 1 se observa la configuración de un robot móvil tipo (2,0) con una distribución de masa no uniforme y los parámetros que conforman su geometría básica usada para la construcción de los modelos. El robot móvil está referenciado a un marco inercial fijo $\{O X_w Y_w\}$, donde la posición del centro de masa del robot está definida por el vector $q = [x_c \ y_c \ \theta + \gamma]^T$, donde x_c y y_c son las

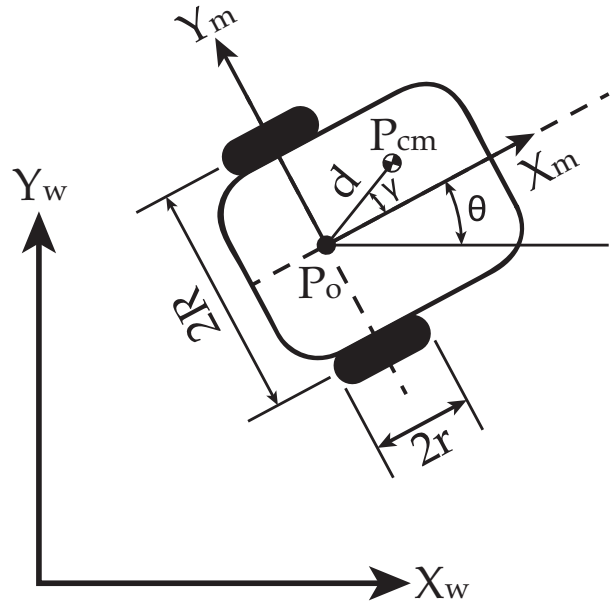


Figura 1. Robot móvil tipo (2,0)

coordenadas cartesianas del punto P_{cm} y θ es el ángulo de orientación medido desde el eje X_w al eje X_m . El parámetro d es la distancia de P_o a P_{cm} , donde P_{cm} es la posición del centro de masa, R es la distancia de P_o a la rueda a lo largo del eje Y_m , el parámetro r es el radio de la rueda y el parámetro γ es el ángulo de desviación del centro de masa medido a partir del eje X_m .

Este tipo de robot móvil es considerado un sistema mecánico con restricciones no holónomas. En este caso las restricciones se tienen al considerar que el robot no se puede desplazar en dirección del eje Y_m y no se consideran los efectos de deslizamiento, por lo que cumple con las condiciones de rodamiento puro sin deslizamiento Campion et al. (1991).

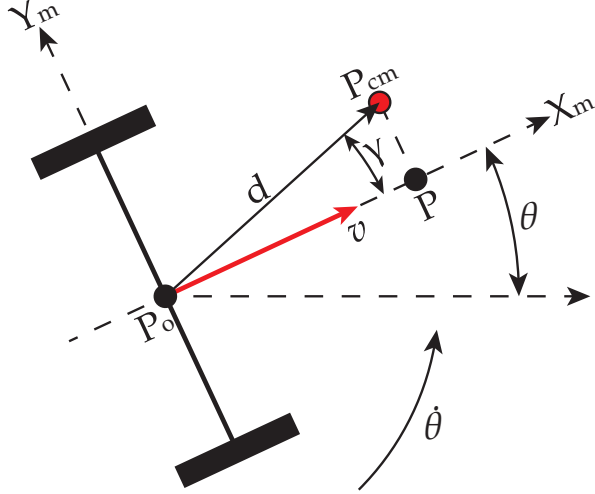


Figura 2. Velocidades del robot móvil tipo (2,0)

2.1 Modelo cinemático

El modelo cinemático de un robot móvil (2,0) puede obtenerse de dos formas, la primera es tomando el punto P_o como referencia (véase figura 1) y la segunda forma se considera un punto fuera de P_o como referencia. En este trabajo se usa la segunda forma debido a que la primera tiene el inconveniente de no poder controlar de forma directa la orientación del robot para el seguimiento de trayectorias. El modelo cinemático es el siguiente considerando a P como la referencia

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \cos(\gamma) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & d \cos(\gamma) \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde v es la velocidad lineal en dirección del eje X_m , ω es la velocidad angular alrededor del punto P_o y $(\dot{x} \ \dot{y})$ es la velocidad del robot móvil en el punto P (véase figura 2).

Otro aspecto cinemático presente en este tipo de robot móvil, es la presencia de restricciones de tipo no holónomas. En el caso del robot móvil presentado, la restricción no holónoma satisface la ecuación siguiente

$$-\sin(\theta) \dot{x}_o + \cos(\theta) \dot{y}_o - d \cos(\gamma) \dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

donde $v = [\dot{x}_o \ \dot{y}_o]^T$ es la velocidad en el punto P_o

2.2 Modelo dinámico

Para obtener el modelo dinámico se usa la siguiente ecuación presentada en Rosenberg (1977). Esta ecuación permite obtener el modelo dinámico de robots móviles con restricciones no holónomas.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - a_{1i} \lambda_1 - a_{2i} \lambda_2, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3)$$

donde K es la energía cinética, a_{1i} y a_{2i} son los elementos de la matriz de restricciones no holónomas y λ_1 y λ_2 son multiplicadores de Lagrange.

La energía cinética del robot móvil se obtiene de la siguiente ecuación, Lewis et al. (1993) usando las velocidades presentadas en la figura 2

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^T v_{cm} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I \quad (4)$$

donde

$$v_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o - d \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ \dot{y}_o + d \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el caso particular del modelo presentado a continuación, se tiene que todos los valores de a_{2i} son cero debido a que sólo se tiene una restricción no holónoma, por lo que al sustituir (4) en (3) se obtiene el modelo dinámico

$$M(q) \ddot{q} + V_m(q, \dot{q}) \dot{q} = B(q) \tau - A^T(q) \lambda \quad (5)$$

con:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & -md \sin(\theta + \gamma) \\ 0 & m & md \cos(\theta + \gamma) \\ -md \sin(\theta + \gamma) & md \cos(\theta + \gamma) & md^2 + I \end{bmatrix}$$

$$V_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -md \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & -md \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ R - d \sin(\gamma) & -R - d \sin(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$A = [-\sin(\theta) \ \cos(\theta) \ -d \cos(\gamma)]$$

donde m es la masa del robot móvil e I es el momento de inercia en P_{cm} alrededor del eje Z_m .

En este modelo dinámico no se calculan los multiplicadores de Lagrange ya que no son necesarios debido a simplificaciones mostradas más adelante. El modelo dinámico presentado, además de ser no holónomo, tiene el inconveniente de ser un sistema subactuado, sin embargo, es posible reducir su dimensión y convertirlo en un sistema totalmente actuado Bates y Sniatycki (1993). Para lograr esta reducción es necesario representar a las restricciones no holónomas como

$$A(q) \dot{q} = 0 \quad (6)$$

Además es posible encontrar una matriz $S(q)$ tal que sus columnas se encuentren en el espacio nulo de $A(q)$ de tal modo que

$$S^T(q) A^T(q) = 0 \quad (7)$$

Por otro lado, la velocidad \dot{q} se encuentra también en el espacio nulo de $A(q)$ y existe un vector suave η tal que

$$\dot{q} = S(q) \eta \quad (8)$$

En este caso el vector $\eta = [v \ \omega]^T$, por lo que la ecuación anterior está directamente relacionada con el modelo cinemático del robot móvil en el punto P_{cm} y la matriz $S(q)$ está dada por

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \sin(\theta + \gamma) \\ \sin(\theta) & d \cos(\theta + \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para tener un modelo dinámico más apropiado para el objetivo de control planteado, es necesario sustituir la ecuación (8) en (5) y multiplicar por la izquierda por $S(q)^T$ con lo que se obtiene

$$S^T M (S \ddot{\eta} + \dot{S} \eta) + S^T V_m S \eta = S^T B \tau \quad (10)$$

Una representación simplificada de la ecuación (10) es

$$\bar{M} \ddot{\eta} + \bar{V}_m \eta = \bar{B} \tau \quad (11)$$

donde

$$\bar{M} = S^T M S$$

$$\bar{V}_m = S^T M \dot{S} + S^T V_m S$$

$$\bar{B} = S^T B$$

$\bar{M} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ sigue siendo una matriz simétrica definida positiva, $\bar{V}_m \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es la matriz de coriolis y fuerzas centrífugas y $\bar{B} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es la matriz de transformación de los pares de entrada. Además se cumple que $\dot{\bar{M}} - 2\bar{V}_m$ es una matriz antisimétrica.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

En la mayoría de los casos basta con poder controlar al robot móvil con su modelo cinemático; esto permite controlar al robot únicamente con las velocidades del sistema. Por otro lado, si es necesario controlar las fuerzas que se involucran en el movimiento del robot móvil, como en el caso de transportar un objeto, sin algún dispositivo que evite su movimiento relativo al robot, se necesita controlar al robot móvil con el modelo dinámico. En este documento, se usa un esquema de control parecido al desarrollado por Fierro y Lewis (1995), pero con un modelo dinámico y cinemático diferente, en el cual se controla la posición del punto P .

Primero se considera una entrada de control auxiliar u que convierte el problema de control dinámico en uno cinemático mediante las relaciones siguientes:

$$\tau = \bar{B}^{-1}(q) [\bar{M}(q)u + \bar{V}_m(q, \dot{q})\eta] \quad (12)$$

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (13a)$$

$$\dot{\eta} = u \quad (13b)$$

La ecuación (12) corresponde a un control por par calculado el cual contiene una entrada de control auxiliar u que es diseñada a partir de la técnica de backstepping.

3.1 Control por Backstepping

Para desarrollar el control por backstepping se usa como base el trabajo desarrollado por Fierro y Lewis (1995). Esta metodología de control es adaptada para el caso específico del modelo dinámico dado por la ecuación (5). Para ello es necesario presentar las posiciones y velocidades de referencia de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & -d \cos(\gamma) \sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) & d \cos(\gamma) \cos(\theta_r) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (14)$$

Para el problema de seguimiento, se define de acuerdo al trabajo de Canudas et al. (1993)

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde e_1 y e_2 son los errores de posición referenciados al marco de referencia móvil $\{P_o X_m Y_m\}$, e_3 es el error en orientación y $q_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$ es la trayectoria a seguir. La derivada del error e con respecto al tiempo tiene la forma

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) - v_1 + v_2 e_2 \\ v_r \sin(e_3) + \omega_r d \cos(\gamma) \cos(e_3) - v_2 (d + e_1) \\ \omega_r - v_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde v_r y ω_r son las velocidades de referencia lineal y angular respectivamente, v_1 y v_2 pertenecen a un vector de velocidades de control $v_c = [v_1 \ v_2]^T = [v \ \omega]^T$ dado por

$$v_c = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) + K_x e_1 \\ \omega_r + v_r (K_y e_2 + K_\theta \sin(e_3)) \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde K_x , K_y y K_θ con constantes. La derivada de (17) con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{v}_c = \begin{bmatrix} \dot{v}_r \cos(e_3) - \dot{\omega}_r d \cos(\gamma) \sin(e_3) \\ \dot{\omega}_r + \dot{v}_r (K_y e_2 + K_\theta \sin(e_3)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x & 0 & -v_r \sin(e_3) - \omega_r d \cos(\gamma) \cos(e_3) \\ 0 & v_r K_y & v_r K_\theta \cos(e_3) \end{bmatrix} \dot{e} \quad (18)$$

Y se introducen ahora las siguientes suposiciones

Suposición 1. La velocidad lineal de referencia v_r es tal que

$$v_r \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (19)$$

Suposición 2. Las constantes K_x , K_y y K_θ en el vector de velocidades de control v_c dado por (17) son suficientemente grandes de tal modo que se satisface la desigualdad

$$K_x e_1^2 + v_r (d \cos(\gamma) K_y e_2^2 + K_\theta \sin^2(e_3) K_y^{-1}) \geq d \cos(\gamma) e_2 (\omega_r (1 - \cos(e_3)) + v_r K_\theta \sin(e_3)) \quad (20)$$

La *suposición 1* significa que la velocidad lineal debe ser siempre positiva, lo que implica que el robot solo se puede mover en dirección de X_m positiva; ésto impide que el robot se mueva hacia atrás con la finalidad de seguir la trayectoria. Por otro lado, la *suposición 2* puede verificarse a priori al suponer que el error e_2 es suficientemente pequeño para la trayectoria que se quiere seguir.

Se tiene entonces el siguiente resultado sobre la dinámica del error de seguimiento.

Teorema 1. Considere la dinámica del error dada por la ecuación (16) junto con el vector de velocidades de control dado por (17) y las *suposiciones 1 y 2*. Entonces el error $e = 0$ es un punto de equilibrio estable para el sistema (16)-(17)

Demostración. Considere la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + (1 - \cos(e_3)) K_y^{-1} \quad (21)$$

Es claro que la ecuación (21) es definida positiva y $V = 0$ solo cuando $e = 0$. Al obtener la derivada con respecto al tiempo de V y sustituyendo \dot{e} y v_c de (16) y (17) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -K_x e_1^2 - v_r (d \cos(\gamma) K_y e_2^2 + K_\theta \sin^2(e_3) K_y^{-1}) \\ & - d \cos(\gamma) e_2 (\omega_r (1 - \cos(e_3)) + v_r K_\theta \sin(e_3)) \end{aligned} \quad (22)$$

Entonces bajo las *suposiciones 1 y 2*, el punto de equilibrio $e = 0$ del sistema (16) en lazo cerrado es estable. \square

Usando las ecuaciones (19) y (20) se propone el siguiente control de entrada para la retroalimentación de aceleración

$$u = \dot{v}_c + K(v_c - \eta) \quad (23)$$

4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se presentan tres simulaciones con la finalidad de observar de forma más detallada el comportamiento de los parámetros involucrados en el control, cada una de estas simulaciones aborda un caso específico de combinación de parámetros.

Los parámetros del robot móvil usados para las simulaciones se muestran en la tabla 1. En todas las simulaciones se considera a la velocidad lineal tangente a la trayectoria,

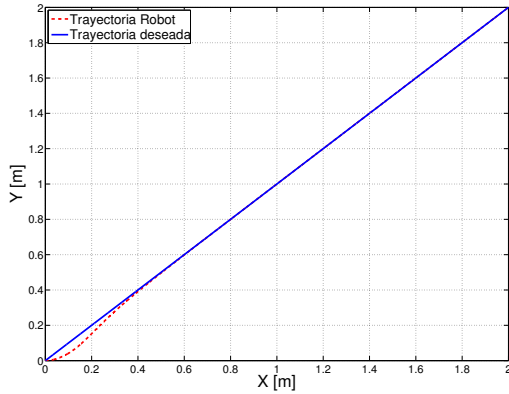


Figura 3. Seguimiento de línea recta

a la velocidad angular como el cambio en la orientación de la velocidad lineal y el robot debe iniciar su trayectoria sobre la curva a seguir.

4.1 Seguimiento de una línea recta

En esta simulación, el robot móvil sigue una línea recta que une al origen con el punto $P_f = [2 \ 2]$ e inicia con condiciones iniciales $q_0 = [0 \ 0 \ 0]$. En esta trayectoria la velocidad angular en cero y la velocidad lineal es constante y positiva, con lo que basta con elegir a k_x mucho mayor a k_y y k_θ para garantizar que el control es asintóticamente estable y los errores de posición y orientación son cero en estado estacionario (véase figura 4).

En la figura 3 se puede ver como el robot móvil sigue muy bien la trayectoria planeada, además observamos en la figura 5 que las velocidades de control tienden a las reales, por lo que el control bajo estas condiciones se comporta adecuadamente.

4.2 Seguimiento de una trayectoria circular

En esta simulación, el robot sigue una trayectoria circular con centro en el origen y radio de un metro, el robot inicia en la trayectoria en la condición inicial $q_0 = [0 \ 1 \ 0]$. En esta trayectoria, la velocidad lineal y angular son constantes, además, la velocidad lineal es siempre positiva. Bajo estas condiciones, para garantizar la estabilidad del controlador basta con seleccionar k_x y k_y más grandes que k_θ . En la figura 7 se puede ver que los errores angular y de posición son pequeños y se encuentran acotados, por lo que la trayectoria generada es muy parecida a la real (véase figura 6). Por otro lado, en la figura 8 se puede apreciar que la velocidad virtual tiende a la velocidad real, por lo que el controlador se sigue comportando satisfactoriamente.

Tabla 1. Parámetros físicos del robot móvil

Parámetro	Cantidad	Unidades
m	2.593	[Kg]
d	0.022	[m]
r	0.045	[m]
R	0.13	[m]
I	0.02	[Kg - m ²]
γ	0.262	[rad]

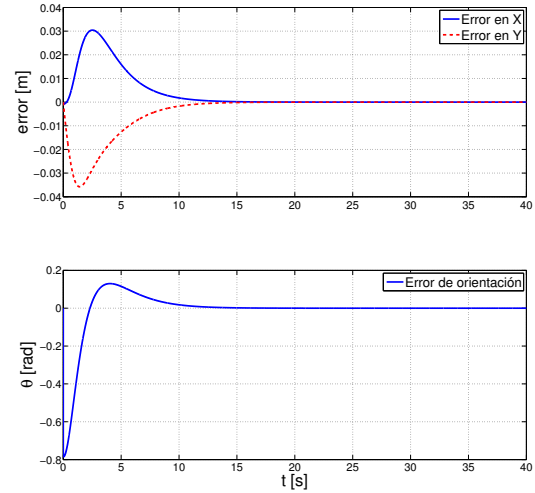


Figura 4. Error de posición y error angular

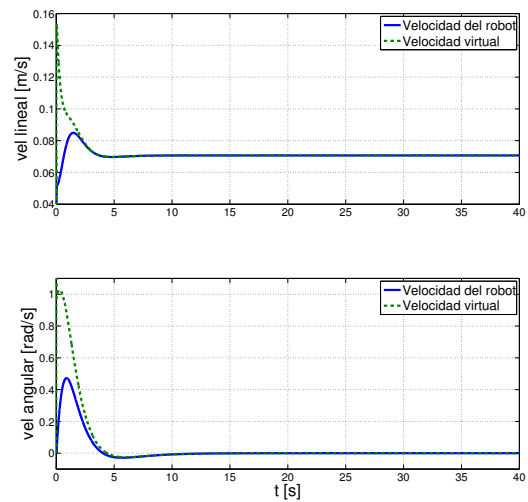


Figura 5. Comparación de la velocidad real con la de control

4.3 Seguimiento de una curva de Lissajous

En esta simulación, el robot móvil sigue una curva de Lissajous, la cual tiene la siguiente función paramétrica

$$\begin{aligned} x_r &= A \sin(a\omega t + \alpha) \\ y_r &= B \cos(b\omega t) \end{aligned} \quad (24)$$

donde:

A Es la amplitud de la curva en el eje X .

B Es la amplitud de la curva en el eje Y .

$a\omega$ La frecuencia en el eje X .

$b\omega$ La frecuencia en el eje Y .

α Ángulo de desfase entre las señales.

Se usa esta curva porque presenta una trayectoria que fácilmente puede ser modificada cambiando las constantes de la función paramétrica, además de que presenta curvas

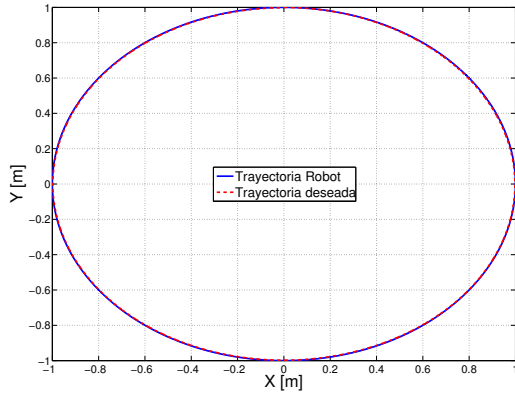


Figura 6. Seguimiento de una trayectoria circular

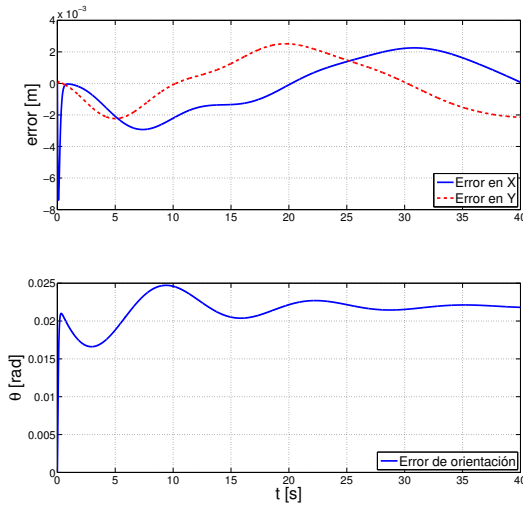


Figura 7. Error de posición y error angular

cerradas donde el robot puede presentar comportamientos no esperados. Esta curva además presenta una velocidad angular y lineal variantes en el tiempo, lo que complica el análisis de estabilidad del controlador. En esta trayectoria solo se garantiza que la velocidad lineal siempre es positiva (véase figura 11), por lo que para verificar las condiciones de estabilidad se realizaron varias simulaciones donde se observa que es suficiente seleccionar las constantes k_x , k_y y k_θ lo suficientemente grandes para que la parte de la ecuación (18) donde se encuentran los términos cuadráticos sea mayor que la que no los tiene, esto se puede verificar de forma numérica para garantizar estabilidad. En la figura 9 se observa que la trayectoria se sigue muy bien en las rectas y curvas amplias, lo cual no sucede en las curvas más cerradas; por otro lado, este error se mantiene acotado (véase figura 10).

4.4 Discusión de los resultados

Los resultados obtenidos en donde las velocidades lineales y angulares son constantes presentan un comportamiento muy bueno, las velocidades de control convergen rápida-

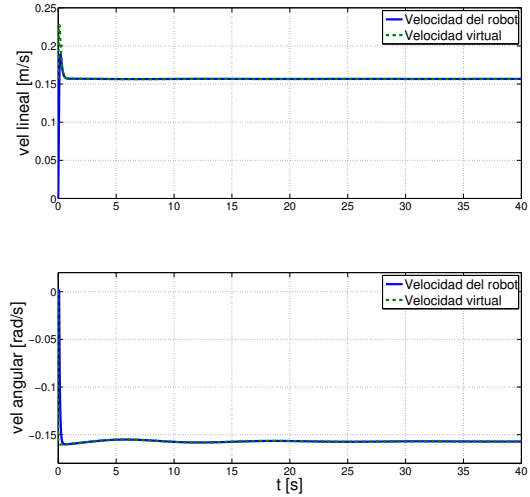


Figura 8. Comparación de la velocidad real con la de control

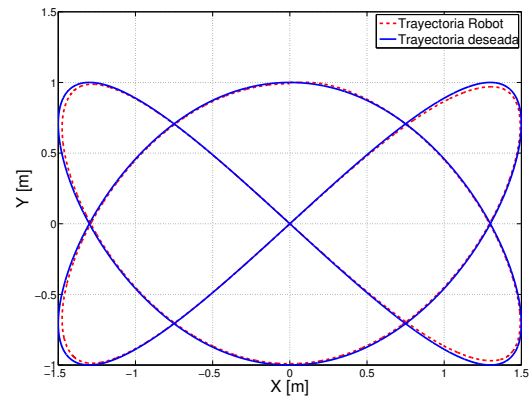


Figura 9. Seguimiento de una curva de Lissajous

mente a las velocidades reales; estos datos presentan una similitud con los presentados en Fierro y Lewis (1995), donde ellos suponen las mismas condiciones de velocidad. Por otro lado, no se analiza el efecto que tiene que las trayectorias presenten velocidades variantes en el tiempo. En el proceso de simulación del seguimiento de la curva de Lissajous se observó que existe un compromiso entre el seguimiento de la posición y el seguimiento de la orientación, si se eligen constantes que favorecen al seguimiento de la posición se tiene un error más grande en el seguimiento de la orientación (vease figura 11 y figura 4). En el futuro se realizará un análisis más riguroso de la función mostrada en la ecuación (18), que proporcione datos más precisos en la elección de estas constantes para lograr una mejor estabilidad.

5. CONCLUSIONES

Con el esquema de control propuesto se puede garantizar la estabilidad del mismo seleccionando apropiadamente las constantes del control auxiliar y de la velocidad virtual.

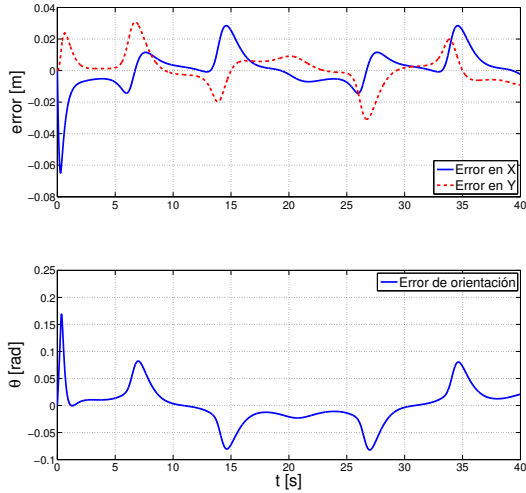


Figura 10. Error de posición y error angular

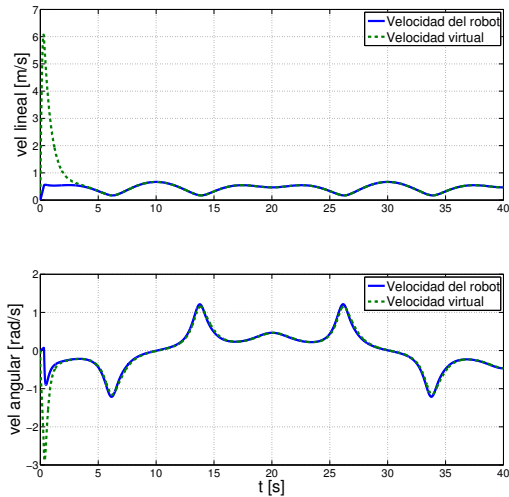


Figura 11. Comparación de la velocidad real con la de control

REFERENCIAS

- Barghijand, H., Akbarimajd, A., y Keighobadi, J. (2011). Quasi-static object manipulation by mobile robot: Optimal motion planning using ga. *11th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 202–207.
- Bates, L. y Sniatycki, J. (1993). Nonholonomic reduction. *Reports on Mathematical Physics*, 32, 99–115.
- Campion, G., d'Andréa Novel, B., y Bastain, G. (1991). Modeling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1184–1189.
- Canudas, C., Khennouf, H., Samson, C., y Sordalen, O.J. (1993). *Nonlinear Control Design for Mobile Robots*, 121–156. Recent Trends in Mobile Robots, world scientific edition.

- Fierro, R. y Lewis, F. (1995). Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. *Proc. 34th Conference on Decision and Control*, 3805–3810.
- Gholipour, A. y Yazdanpanah, M.J. (2003). Dynamic tracking control of nonholonomic mobile robot with model reference adaptation for uncertain parameters.
- Lewis, F.L., Abdallah, C.T., y Dawson, D.M. (1993). *Control of Robot Manipulators*. McMillan, New York.
- Rosenberg, R.M. (1977). *Analytical Dynamics of Discrete Systems*. Plenum Press, New York.
- Yamamoto, Y. (1994). *Control and Coordination of Locomotion and Manipulation of a Wheeled Mobile Manipulator*. Ph.D. thesis, University of Pennsylvania.

Apéndice D

CD de Contenidos

En este CD se encuentran todas las hojas de datos, programas y piezas del diseño mecánico que se realizaron para esta tesis.