



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Emulación de estructuras mecánicas mediante sistemas
multi-agente**

T E S I S
Que presenta
JAIME GONZÁLEZ SIERRA

Para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
INGENIERÍA ELÉCTRICA

Director de la Tesis:
Dr. Eduardo Aranda Bricaire

Agradecimientos

A Dios: *Ante todas las cosas, porque ha sido, es y será mi guía. Por darme salud para poder terminar con éxito esta etapa de mi vida. Gracias por darme la familia y los amigos que tengo. Y por darme la vida y la iluminación de cada día, creo que hubiera sido casi imposible sin Tu ayuda.*

A mi esposa María Inocente: *Por todo su apoyo incondicional, por estar conmigo en los momentos de gran felicidad y de profunda tristeza. Gran parte de este logro se lo dedico a ella porque nunca dejó de confiar en mi.*

A mis padres Jaime y Araceli: *Porque en todo momento me brindaron su apoyo y su confianza. Por todo el esfuerzo realizado para que yo pudiera tener una educación. Esto es lo menos que puedo ofrecerles como muestra de agradecimiento y de que he aprovechado las oportunidades que me han brindado. Este trabajo es para ustedes. Gracias por su sacrificio, los quiero y espero nunca defraudarlos.*

A mi hermano Toño: *Por los buenos y malos momentos que he pasado con él.*

A mi familia: *Tíos, tías, primos y primas, y sobre todo a mis abuelitos por su alegría y su cariño.*

Al Dr. Eduardo Aranda: *Por sus consejos, sus valiosas sugerencias y críticas, sus acertados aportes pero sobre todo la paciencia para la culminación de este trabajo.*

A los miembros del jurado: *Por las aportaciones, sugerencias y comentarios a esta tesis.*

A mis profesores: *A todos aquellos que he tenido durante mi formación, porque de alguna manera forman parte de lo que ahora soy.*

Al Dr. Rafael Fierro y al Dr. Patricio Cruz: *Por haberme permitido colaborar y trabajar en el laboratorio de MARHES de la Universidad de Nuevo México además de todas las facilidades que se me otorgaron durante la realización de la estancia de investigación.*

A mis amigos: *Luis Fernando Calderón, J. Enrique Olvera, Jorge Arroyo, Juan Carlos Montufar, por haberme dado ánimos cuando los necesitaba, por escucharme, apoyarme, aconsejarme y porque han estado conmigo siempre, momentos muy divertidos los he pasado a lado de ustedes.*

Al CONACYT: *Por apoyarme económicamente para realizar mis estudios de Doctorado.*

Resumen

Este trabajo de tesis está enfocado en el diseño y análisis de estrategias de control en tiempo continuo para emular el comportamiento de diferentes tipos de estructuras mecánicas por medio de un sistema multi-agente conformado por robots móviles del tipo unicycle a la vez de que se evaden obstáculos de manera individual o grupal. El tipo de estructuras mecánicas que se abordan son: traslación y rotación de estructuras mecánicas, configuración del n -tráiler y emulación de un pivote deslizante. Para emular el comportamiento de éstas estructuras mecánicas, se utilizan vectores de formación constantes y vectores de formación variantes en el tiempo.

Es bien conocido que los remolques del tráiler general y del tráiler estándar presentan desviaciones con respecto a la trayectoria del tractor. Esto sucede cuando el tractor está siguiendo una trayectoria con cierto radio de curvatura. A estos efectos se les conoce como subviraje y sobreviraje, respectivamente. En el caso de sobreviraje, los remolques se mantienen en el lado interno de la trayectoria del tractor. En el subviraje, los remolques se mantienen en el lado externo de la trayectoria del tractor. Estos efectos son reproducidos por el grupo de agentes móviles utilizando vectores de formación variantes en el tiempo, los cuales permiten establecer una unión de manera virtual entre los agentes. Se muestra que es posible emular las estructuras mecánicas cambiando solamente los correspondientes vectores de posición relativa y su respectiva derivada. Para reducir, o eliminar las desviaciones de la trayectoria, proponemos la emulación de un mecanismo de pivote deslizante el cual consiste en desplazar el punto de unión una distancia sobre el eje de las ruedas del agente que se encuentra adelante en dirección opuesta al centro de curvatura de la trayectoria, logrando así que los agentes seguidores sigan la misma trayectoria que el líder.

Abordamos el problema de evasión de colisiones añadiendo un campo vectorial repulsivo a la ley de control. Éste campo vectorial repulsivo presenta una estructura de foco inestable adecuadamente escalada y centrada en la posición de cada agente u obstáculo. Estos resultados se extienden al caso de agentes de segundo orden y se evalúa su desempeño con las ecuaciones de movimiento de los cuadrirrotores, específicamente con el dron Parrot 2.0.

Se utiliza la técnica de Inmersión e Invarianza para diseñar un grupo de observadores que permitan estimar la orientación de cada agente con el objetivo de dotar al sistema de cierta autonomía para poder trabajar en exteriores. Se demuestra que la combinación de un controlador clásico dinámico con un observador de orientación que converge exponencialmente produce un sistema asintóticamente estable en lazo cerrado.

Se realizan las siguientes simulaciones numéricas: comparación de la trayectoria de un tráiler estándar utilizando las ecuaciones de movimiento del tráiler físico y las ecuaciones de movimiento del sistema multi-agente donde se hacen evidentes los efectos de sobreviraje, emulación del pivote deslizante en el tráiler estándar y general, evasión de obstáculos de manera individual y grupal, y, evasión de colisiones en agentes de segundo orden. Por último, se realizan experimentos en tiempo real del sistema multi-agente emulando el movimiento de traslación y rotación de estructuras mecánicas con evasión de obstáculos, configuración del n -tráiler estándar, emulación del pivote deslizante y la estimación de los ángulos de orientación.

Abstract

This thesis is focused on the design and analysis of continuous-time control laws to emulate the behaviour of different types of mechanical structures, through a multi-agent system consisting of several unicycle-type mobile robots meanwhile they are avoiding obstacles in an individual or group manner. The type of mechanical structures addressed are: translational and rotational motion of mechanical structures, n -trailer configuration and emulation of the sliding kingpin mechanism.

It is well known that physics systems of the general and standard trailer present off-tracking effects. This happens when the tractor is following a trajectory with a certain radius of curvature. These effects are known as understeer and oversteer, respectively. In the case of oversteer, the trailers keep in the inner side of the tractor's trajectory. For the case of understeer, the trailers keep in the outer side of the tractor's trajectory. These effects are clearly reproduced by the group of mobile agents using time-varying formation vectors, which allow to establish a virtual union between agents. It is shown that is possible to emulate the mechanical structures changing only the corresponding relative position vectors and their corresponding time-derivative. To reduce, or in some cases eliminate the off-tracking effects, we propose the emulation of a virtual sliding kingpin mechanism which displaces the joint between two consecutive vehicles along the wheels axis of the leading trailer in the direction opposite to the center of curvature presented by the path, allowing the follower agents to follow almost the same path as the leader.

We address the collision avoidance problem adding a repulsive vector field to the control law. The repulsive vector field displays an unstable focus structure suitably scaled and centred at the position of each agent or obstacle. These results are extended to the case of agents with second order dynamics and their performance is compared with the dynamic equations of quadrotors, more specifically with the Parrot 2.0 drone.

The Immersion and Invariance technique is used to design a group of observers which allow to estimate the orientation of each agent in order to provide the system with some autonomy to work outdoors. It is shown that the combination of a classical dynamic full information controller with an exponentially convergent vehicle attitude observer yields an asymptotically stable closed-loop system.

The following numerical simulations are carried out: comparison of the trajectory between the standard trailer using the equations of motion of the trailer and the equations of motion of the multi-agent system where the oversteer effects become apparent, emulation of the sliding kingpin mechanism in a standard and general trailer, obstacle avoidance in individual and group manner, and, collision avoidance in agents with second order dynamics. Finally, real-time experiments are carried out emulating the translational and rotational motion of mechanic structures with obstacle avoidance, standard n -trailer configuration, emulation of the sliding kingpin mechanism and estimation of the orientation angles.

Glosario

Cuerpo rígido. Es un sistema de partículas en el que las distancias entre ellas son fijas y constantes¹.

Movimiento. Es el cambio de lugar o de posición de un cuerpo en el espacio².

Movimiento de traslación. Consiste en cambiar de lugar un cuerpo, de manera que, todas las partículas tienen la misma velocidad instantánea¹.

Movimiento de rotación. Este movimiento se realiza en torno a un eje fijo. Todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad angular instantánea y viajan en círculos en torno al eje de rotación¹.

Simular. Representar algo, imitando o fingiendo lo que no es. Esto permite trabajar en condiciones similares a las reales, pero con variables controladas y en un entorno que se asemeja al real pero que está creado o acondicionado artificialmente. La idea es permitir comprobar el comportamiento de una persona, de un objeto o de un sistema en ciertos contextos que, si bien no son idénticos a los reales, ofrecen el mayor parecido posible³.

Emular. Imitar las acciones de otro procurando igualarlas e incluso excederlas⁴.

Tráiler: Se define como un sistema compuesto de un tractor jalando una serie de remolques los cuales están unidos a través de conexiones físicas.

Desvíos de la trayectoria. En el sistema del tráiler, se refiere a la desviación del camino de cada vehículo articulado de los caminos de los vehículos precedentes.

Sobreviraje. Es el fenómeno de deslizamiento del eje trasero que puede ocurrir en un automóvil al tratar de tomar una curva o cuando ya se está girando. Se dice que el coche hace un sobreviraje cuando las ruedas traseras no siguen el mismo recorrido que el de las ruedas delanteras, sino que se deslizan hacia el interior de la curva.

Subviraje. Es un fenómeno que se produce durante la conducción de un vehículo que provoca que el giro real del mismo sea menor al que teóricamente debería inducir la posición de las ruedas delanteras. De este modo la parte delantera del vehículo tiende a salirse hacia el exterior de la curva. Se produce cuando el vehículo pierde adherencia en el tren delantero, por lo cual, da la sensación de “abrirse” en las curvas.

¹Wilson, Jerry D. y Buffa, Anthony J., *Física* 5a edición, Pearson Educación, México, 2003, página 261

²Diccionario de la lengua española <http://dle.rae.es/?id=Pxf8ZI5>

³Diccionario de la lengua española <http://lema.rae.es/drae/?val=simular>

⁴Diccionario de la lengua española <http://lema.rae.es/drae/?val=emular>

Contenido

Lista de figuras	XIII
Lista de tablas	XV
1. Introducción	1
1.1. Originalidad	2
1.2. Trabajo relacionado	2
1.3. Objetivos	4
1.4. Justificación	5
2. Preliminares	7
2.1. Modelo cinemático de los unicyclos	7
2.2. Modelo cinemático extendido de los unicyclos	8
2.3. Modelo cinemático del 2-tráiler	8
2.4. Gráficas de formación	9
2.5. Misceláneos matemáticos	11
2.5.1. Producto kronecker	11
2.5.2. Ecuación de movimiento cinemático de cuerpos rígidos	12
2.6. Planteamiento del problema	13
3. Descripción de estructuras mecánicas	15
3.1. Movimiento traslacional	15
3.2. Movimiento rotacional	16
3.3. Configuración n -tráiler	17
3.4. Emulación de un pivote deslizante	19
3.4.1. Diseño de la posición del pivote deslizante en un tráiler estándar	20
3.4.2. Diseño de la posición del pivote deslizante en un tráiler general	23
4. Estrategias de control	27
4.1. Ley de control en tiempo continuo	27
4.2. Ley de control en tiempo discreto	30
4.3. Simulaciones numéricas	33
4.3.1. Configuración n -tráiler estándar	33
4.3.2. Emulación de un pivote deslizante en un tráiler estándar	35
4.3.3. Emulación de un pivote deslizante en un tráiler general	38
5. Problema de evasión de colisiones	39
5.1. Diseño de la ley de control	39
5.1.1. Control de marcha	39
5.1.2. Campos vectoriales repulsivos	41

5.1.3. Evasión de obstáculos de manera individual	42
5.1.4. Evasión de obstáculos de manera grupal	44
5.2. Extensión al caso de agentes de segundo orden	46
5.2.1. Evasión de colisiones entre agentes	46
5.2.2. Evasión de colisiones con obstáculos	48
5.2.3. Modelo dinámico de los cuadrótopos	49
5.3. Simulaciones numéricas	51
6. Estimación de la orientación de un sistema multi-agente	61
6.1. Estrategias de control de marcha con control de orientación	61
6.2. Esquema de conmutación	64
6.3. Observador de orientación	66
6.4. Simulaciones numéricas	74
6.5. Conclusiones del capítulo	74
7. Resultados experimentales	77
7.1. Plataforma experimental	77
7.2. Emulación del movimiento de traslación y rotación	78
7.3. Configuración n -tráiler estándar	79
7.4. Emulación de pivote deslizante en un tráiler estándar	80
7.5. Emulación de pivote deslizante en un tráiler general	81
7.6. Tiempo discreto	82
7.7. Evasión de obstáculos	83
7.8. Estimación de la orientación	85
8. Conclusiones y trabajo futuro	97
Bibliografía	99
A. Artículos publicados	105
A.1. Capítulos de libro	105
A.2. Artículos de revista indizadas al JCR	105
A.3. Otros artículos de revista indizadas	105
A.4. Congresos internacionales	106
A.5. Congresos nacionales	106

Lista de figuras

2.1. Modelo cinemático de los unicyclos.	7
2.2. Preprocesamiento al sistema (2.2).	8
2.3. Modelo cinemático de un 2-tráiler estándar.	9
2.4. Ejemplo de gráfica de formación.	11
2.5. Gráficas de formación de especial interés. (a) Gráfica directa de cadena abierta con líder G_1 . (b) Gráfica directa centrada en el líder G_2	12
3.1. Movimiento de traslación de un grupo de agentes.	15
3.2. Ejemplo de vector de formación constante.	16
3.3. Movimiento de traslación y rotación de un grupo de agentes.	17
3.4. Configuración de n -tráiler estándar.	18
3.5. Configuración de n -tráiler general.	18
3.6. Configuración tipo tráiler. (a) Inicial. (b) Formación constante. (c) Formación variante en el tiempo.	19
3.7. Configuración del vector de formación variante en el tiempo.	19
3.8. Configuración de n -tráiler estándar con mecanismo de pivote deslizante.	20
3.9. Vector de posición variante en el tiempo.	20
3.10. Trayectoria del agente R_i , sin el mecanismo de pivote deslizante, y, con el mecanismo de pivote deslizante.	21
3.11. Obtención de la velocidad de los puntos \mathbf{z}_{i+1} y \mathbf{z}_i	22
3.12. Obtención de la posición del pivote deslizante en tráiler general.	24
4.1. Trayectorias en el plano del 2-tráiler estándar y el sistema multi-agente.	34
4.2. Errores de posición entre el tráiler real y el emulado.	34
4.3. Comparación ángulos de orientación entre el tráiler real y el emulado.	35
4.4. Comparación de velocidades lineales entre el tráiler real y el emulado.	35
4.5. Trayectoria de los agentes emulando un tráiler estándar con pivote deslizante.	36
4.6. Distancias deslizantes.	36
4.7. Comparación de las trayectorias entre un tráiler estándar y un sistema multi-agente emulando a un tráiler con pivote deslizante. (a) Tráiler estándar físico. (b) Sistema multi-agente.	37
4.8. Trayectoria de los agentes emulando un tráiler general con pivote deslizante.	38
4.9. Distancias deslizantes.	38
5.1. Distancia relativa entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo en el plano $a_{ji} - b_{ji}$	42
5.2. Obtención de la distancia mínima D	44
5.3. Definición de los parámetros de evasión de colisiones.	47
5.4. Plano $v_{ij} - (\rho_{ij} - \varrho_{ij})$	48
5.5. Diagrama NED de un cuadirotor.	50
5.6. Trayectoria en el plano de los agentes.	52

5.7.	Distancias entre los agentes y el obstáculo.	52
5.8.	(a) Error de posición del líder. (b) Error de formación de R_2 . (c) Error de formación de R_1	53
5.9.	Trayectoria en el plano de los cuatro agentes.	54
5.10.	Distancias entre los agentes y el obstáculo.	55
5.11.	Trayectoria en el plano de los cuatro agentes. (a) $t = 24.5$ segundos. (b) $t = 25$ segundos. (c) $t = 25.5$ segundos. (d) $t = 26$ segundos. (e) $t = 26.5$ segundos. (f) $t = 27$ segundos.	56
5.12.	(a) Error de posición del líder virtual. (b) Error de formación de R_3 . (c) Error de formación de R_2 . (d) Error de formación de R_1	57
5.13.	Trayectoria en el plano de seis agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.	58
5.14.	Distancias entre agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.	58
5.15.	Trayectoria en el plano de seis agentes en la presencia de obstáculos. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.	59
5.16.	Distancias entre agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.	59
5.17.	Distancias entre agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.	60
6.1.	Trayectoria en el plano de los agentes utilizando el control (6.29)-(6.31)	75
6.2.	Ángulos estimados de los agentes.	75
7.1.	Robots móviles del tipo AmigoBot.	77
7.2.	Cámara modelo Flex 13.	78
7.3.	Movimiento en el plano de los agentes. (a) Trayectoria cuando $t = 20$ segundos. (b) Trayectoria cuando $t = 40$ segundos. (c) Trayectoria cuando $t = 60$ segundos.	79
7.4.	Error de posición de los agentes. (a) Error de posición robot 3. (b) Error de posición robot 2. (c) Error de posición robot 1.	80
7.5.	Señales de control para los robots. (a) Control robot 3. (b) Control robot 2. (c) Control robot 1.	81
7.6.	Movimiento en el plano de los agentes sin utilizar la posición del pivote deslizante.	82
7.7.	Movimiento en el plano de los agentes al utilizar la posición del pivote deslizante.	82
7.8.	Error de posición de los agentes. (a) Error de posición robot 3. (b) Error de posición robot 2. (c) Error de posición robot 1.	83
7.9.	Señales de control para los robots. (a) Control robot 3. (b) Control robot 2. (c) Control robot 1.	84
7.10.	Distancias deslizantes del tráiler estándar.	85
7.11.	Movimiento en el plano de los agentes al utilizar la posición del pivote deslizante.	85
7.12.	Distancias deslizantes del tráiler general.	86
7.13.	Trayectoria en el plano de los agentes con $T = 0.2$ segundos.	86
7.14.	(a) Error de posición del líder. (b) Error de formación de R_2 . (c) Error de formación de R_1	88
7.15.	Trayectoria en el plano de dos agentes evadiendo un obstáculo fijo.	89
7.16.	(a) Error de formación entre el seguidor y el líder. (b) Error de posición entre el líder y la trayectoria deseada.	90
7.17.	(a) Experimento de las distancias entre los agentes y el obstáculo. (b) Simulación numérica de las distancias entre los agentes y el obstáculo.	90
7.18.	Trayectoria de los agentes en el plano.	91

7.19. Señales de control para los agentes. (a) Señales de control para el líder. (b) Señales de control para el seguidor.	91
7.20. Ángulos de orientación.	92
7.21. Trayectoria de los agentes en el plano.	92
7.22. Señales de control para los agentes. (a) Señales de control para el líder. (b) Señales de control para el primer seguidor. (c) Señales de control para el segundo seguidor.	93
7.23. Ángulos de orientación.	93
7.24. Trayectoria en el plano de los agentes.	94
7.25. Señales de control para los agentes. (a) Señales de control para el líder. (b) Señales de control para el primer seguidor. (c) Señales de control para el segundo seguidor.	94
7.26. Ángulos de orientación.	95

Lista de tablas

4.1. Parametrización de la trayectoria deseada	37
6.1. Condiciones iniciales de los agentes.	74
6.2. Parámetros del controlador y del observador	74
7.1. Parametrización de la trayectoria deseada	87

Capítulo 1

Introducción

Un agente es un ente (por ejemplo una persona, un animal, un programa de cómputo) capaz de percibir el ambiente en el que se encuentra y que tiene la capacidad de actuar en dicho ambiente. Un sistema de robots multi-agente (MARS por sus siglas en inglés) está conformado por varios robots autónomos (vehículos aéreos no tripulados, vehículos terrestres o submarinos) que se comunican, coordinan e interactúan entre sí para resolver tareas comunes de una manera más confiable, rápida y económica de lo que es posible con robots que trabajan de manera individual [27]. Entre las principales aplicaciones de los sistemas de robots multi-agente se encuentran el transporte y manipulación de objetos, operaciones de exploración y búsqueda, limpieza y vigilancia. Estas y otras aplicaciones pueden ser consultadas en [27, 30, 46, 59, 64].

Una de las principales áreas de investigación de los MARS es la coordinación de movimiento. Específicamente, se busca mantener una configuración geométrica definida al mismo tiempo que se realiza el seguimiento de alguna trayectoria. Por ejemplo, si se desea que un grupo de dos o más robots móviles desplacen un objeto de un lugar a otro, estos robots deben de mantener una configuración geométrica en relación con la forma del objeto, de tal manera que desplacen el objeto en una dirección deseada. Una forma de abordar este tipo de problemas es a través del concepto de estructuras mecánicas virtuales [61]. En el movimiento de cuerpo rígido de un objeto físico, todas las partículas que forman al objeto mantienen una relación geométrica fija. Si alguna de las partículas del objeto físico es sometida a una perturbación, ésta será propagada a las demás partículas. Con base a lo anterior, deseamos lograr que un conjunto de robots móviles no conectados entre sí, se comporte de esta manera.

En años recientes, el uso de MARS ha sido abordado para emular el comportamiento de estructuras mecánicas, por ejemplo en los trabajos [29, 49, 61]. Dentro de estas estructuras mecánicas se encuentran las configuraciones del n -tráiler estándar y general [23, 47]. Un n -tráiler es un sistema mecánico compuesto de un cierto número de remolques jalados por un tractor. El primer remolque está ligado al tractor y los restantes remolques están ligados al remolque que se encuentra delante de ellos, por medio de uniones mecánicas. Existen tres diferentes tipos de n -tráiler. En el caso en que las uniones mecánicas coinciden con el punto medio del eje de las ruedas del remolque que se encuentra adelante, el n -tráiler se conoce como estándar [26, 33, 43]. Cuando las uniones se encuentran fuera del punto medio del eje de las ruedas, el n -tráiler se conoce como general [2, 4, 39]. Finalmente, si los ejes de las ruedas del tráiler general pueden ser controladas independientemente, el sistema se denomina tráiler general multiactuado [45, 63]. Los tres tipos de n -tráiler presentan restricciones no holonomas [13]. A partir del trabajo de Brockett [11] se sabe que este tipo de sistemas no pueden ser estabilizados por leyes de control continuas e invariantes en el tiempo. Por esta razón, en los últimos 20 años, numerosos grupos de investigadores han estudiado la estabilización de los sistemas tipo tráiler desde diferentes puntos de vista [5, 35, 39, 40, 41, 53, 57, 62].

Una de las principales aplicaciones de los sistemas n -tráiler corresponde a los Sistemas Inteligentes de Transporte. El objetivo consiste en construir vehículos de transporte suficientemente inteligentes para ser conducidos con la menor intervención posible de los seres humanos. El principal

problema consiste en el desvío de la trayectoria por parte de los remolques cuando el vehículo líder se encuentra siguiendo una trayectoria. Sería deseable que los remolques siguieran exactamente la trayectoria del vehículo líder durante un giro. De lo contrario, es posible que algunos de los remolques violen las restricciones del espacio de trabajo y/o sufran colisiones.

Los sistemas n -tráiler estándar y general mencionados anteriormente presentan desvíos de la trayectoria conocidos como sobreviraje y subviraje, respectivamente. En el caso de sobreviraje, los remolques se mantienen en la parte interna de la trayectoria del tractor, mientras que en el subviraje, los remolques se mantienen en la parte externa de la trayectoria. En ambos casos, esto sucede cuando el tractor sigue una trayectoria con curvatura finita.

Para el caso de un MARS, es posible emular el comportamiento de este tipo de estructuras mecánicas estableciendo vectores de posición variantes en el tiempo. De hecho, los efectos de sobreviraje y subviraje son reproducidos en su totalidad por el grupo de agentes móviles. La reducción ó eliminación de estos efectos resultará en una mejora del desempeño en términos de seguridad durante los giros y curvas.

Otro problema que surge para que un grupo de agentes alcance un patrón geométrico determinado, es el de las posibles colisiones entre los mismos agentes o colisiones entre los agentes y obstáculos presentes en el ambiente. Inicialmente, las estrategias de no colisión fueron desarrolladas y basadas en funciones potenciales atractivas y repulsivas. Para la formación de un sistema multi-agente la estrategia involucra la suma de funciones potenciales atractivas que dependen de la dinámica de las posiciones de los otros agentes y funciones potenciales repulsivas que aparecen cuando hay peligro de colisión entre un par de agentes o en la presencia de obstáculos. El diseño estándar de una función potencial repulsiva se basa en funciones racionales de la distancia de un par de agentes la cual tiende a infinito cuando los agentes colisionan y se desvanece suavemente hasta que la distancia mínima permitida es alcanzada [30]. La desventaja que presenta la combinación de funciones potenciales atractivas y repulsivas es la aparición de puntos de equilibrio no deseados lo que provoca que los agentes puedan quedar atascados en una formación no deseada.

1.1. Originalidad

La originalidad de la presente tesis está basada en los siguientes aspectos:

1. Pocos trabajos abordan el uso de vectores de formación variantes en el tiempo para emular el comportamiento de estructuras mecánicas rígidas. De esta manera se crea una conexión no física entre los agentes.
2. Utilizar los vectores variantes en el tiempo para emular el mecanismo de pivote deslizante y de esta manera reducir ó eliminar los efectos de sobreviraje y subviraje. El análisis se realiza para las configuraciones del n -tráiler estándar y general.
3. Se utiliza un nuevo enfoque basado en campos vectoriales repulsivos para evitar colisiones entre los agentes y obstáculos presentes en el ambiente.
4. Se estima el ángulo de orientación de los agentes utilizando observadores. De esta manera se dota al sistema de cierta autonomía para poder trabajar en exteriores sin la necesidad de medir todos los estados del modelo matemático.

1.2. Trabajo relacionado

En [54] se propone el control de formación de grupos de agentes modelados por un doble integrador utilizando la transformación basada en el centroide (CBT por sus siglas en inglés) la cual básicamente, captura la relación entre agentes. De esta manera, un grupo de agentes forman una figura geométrica y el centroide de esa figura geométrica corresponde a algún vértice de una figura

geométrica mayor. Además utilizan una función potencial para evadir obstáculos entre los agentes. Por otra parte, en [58] se propone leyes de control de formación basadas en la distancia para un sistema líder-seguidor utilizando el modelo del integrador simple para modelar a los agentes. El controlador se asegura que los agentes mantengan la formación mientras se mueven a una velocidad constante de referencia. El líder es el único que conoce la velocidad de referencia, mientras que para los agentes seguidores, el controlador se encarga de estimar ésta velocidad. La desventaja que presenta este trabajo es que por el momento la prueba de estabilidad se realizó sólo para tres agentes. El trabajo [44] presenta una ley de control basada en la distancia entre agentes para lograr una formación triangular de tres agentes modelados por un simple integrador. Ésta ley de control se obtiene a partir de la derivada de la matriz eculidiana de distancias asociada con el grupo de agentes.

En [61] se introduce la definición de estructura virtual y se proponen estrategias de control para forzar a un grupo de robots a comportarse como si fueran partículas de una estructura rígida. Por otra parte en [47, 49] se proponen vectores de posición variantes en el tiempo para emular, respectivamente, el comportamiento de un n -tráiler y el comportamiento de una estructura rígida cuando ésta se encuentra en movimiento.

El desvío de la trayectoria puede ser eliminado o reducido usando un mecanismo de pivote deslizante, técnica que fue introducida por [36]. Esto se realiza deslizando el pivote de cada remolque en dirección perpendicular al eje longitudinal una cierta distancia en dirección opuesta al centro de curvatura de la trayectoria. El trabajo [12] presenta los límites del desvío de trayectoria de los remolques en un n -tráiler estándar. En [3] se aborda el problema de seguimiento de trayectoria junto con el problema de reducción del desvío de la trayectoria en el sistema del n -tráiler. Esto se logra haciendo que el error en distancia entre el punto medio del eje de las ruedas de cada vehículo y marcos de referencia móviles distribuidos a lo largo de una trayectoria sea mínimo. En [43] se presentan diferentes mecanismos pasivos y leyes de control para el sistema n -tráiler. El principal objetivo de estos mecanismos es el de reducir el error de seguimiento con respecto a la trayectoria del tractor. El trabajo [37] propone el uso de una unión móvil, que permite al pivote deslizarse a lo largo del eje trasero del vehículo delantero, logrando la reducción ó eliminación del desvío de la trayectoria. Además, se desarrolla de manera analítica un controlador no lineal, basado en el comportamiento que tiene el sistema n -tráiler una vez terminado el transitorio. En [17] se muestra que el n -tráiler estándar equipado con un mecanismo de pivote deslizante es un sistema diferencialmente plano. Con base en esto se proponen dos controladores, uno lineal y otro no lineal, para reducir los efectos de desvío de trayectoria por parte de los remolques.

Los trabajos expuestos anteriormente [3, 12, 17, 36, 37, 43] abordan solamente la configuración del n -tráiler estándar utilizando su modelo cinemático. Más aún, en [36, 37], a pesar de eliminar el desvío de la trayectoria en un tráiler estándar, sólo ha sido posible desarrollar las ecuaciones cinemáticas para cinco tráilers, esto debido a la complejidad de las restricciones no holonomas.

Un trabajo que logra eliminar las desviaciones de trayectoria utilizando robots móviles del tipo unicycle se presenta en [1], en donde el control se basa en la propiedad de planitud. Para lograrlo, definen vehículos virtuales y vehículos reales; cada vehículo real sigue la trayectoria de cada vehículo virtual, manteniendo una distancia constante entre ellos. La desventaja de este trabajo reside en que todos los agentes requieren conocer la trayectoria a seguir, por lo tanto, la estrategia de control es centralizada.

Algunos trabajos relacionados con la evasión de colisiones son [14, 15, 42, 56]. En [15] los autores consideran el problema de control de formación bajo un esquema limitado e intermitente de sensado. Basados en el enfoque de funciones de navegación desarrollan un control híbrido descentralizado para asegurar evasión de colisiones mientras se realiza el control de formación. En [42] utilizan la teoría de juegos diferenciales para que un grupo de agentes logren alcanzar una posición objetivo mientras evitan colisiones entre ellos mismos. En [56] se presenta un enfoque metódico para el problema de evasión de colisiones en robots móviles tomando en cuenta las ventajas de un sistema multi-agente. El trabajo [14] utiliza la teoría de grafos para modelar la comunicación entre agentes y para

evitar colisiones entre ellos propone un controlador difuso. En [50] se presenta una ley de control descentralizada, cooperativa para evadir colisiones en un grupo de vehículos con dinámicas de doble integrador. La estrategia de control es descentralizado en el sentido de que se requiere solamente la posición de los vehículos cercanos y permanece inactiva cuando todos los demás vehículos se encuentran a una distancia segura. La referencia [60] estudia el problema de la planificación de movimientos utilizando el enfoque líder-seguidor. El líder evita a los obstáculos mientras que lleva al sistema a un objetivo en especial. En [21] se desarrolla una técnica de control descentralizada por modos deslizantes que garantiza la coordinación de un grupo de agentes para alcanzar y mantener una formación deseada. Para el algoritmo de evasión de obstáculos, los obstáculos son representados por formas elipsoidales.

En un trabajo más reciente [24], se propone una nueva estrategia para diseñar los campos vectoriales repulsivos con el objetivo de evadir colisiones. Este enfoque está basado en un campo vectorial escalado tipo foco inestable centrado en la posición de los obstáculos u otros agentes la cual se desvanece cuando los agentes están suficientemente alejados entre sí y tiende a infinito cuando la distancia entre ellos tiende a cero. Estas funciones no pueden ser obtenidas como el gradiente de la función escalar de la distancia entre agentes o las distancias entre agentes y obstáculos. A pesar de que esta técnica también puede presentar equilibrios no deseados, estos pueden ser removidos. El análisis presentado en [24] toma en cuenta solo el caso de dos agentes, mientras que en [20] se realiza una extensión a un número arbitrario de agentes para el caso de gráficas de comunicación directas de perseguiamiento cíclico.

La mayoría de trabajos que hacen uso de los sistemas multi-agente, utilizan el modelo cinemático de robots móviles del tipo unicycle. Como se verá más adelante, a pesar de la sencillez de su modelo cinemático, controlarlo representa diferentes desafíos, por ejemplo, el sistema es subactuado y satisface restricciones no holonomas, es decir, el componente de la velocidad perpendicular a la dirección de las ruedas es cero. Como se indica en [11], éstos sistemas no holonomos no pueden ser estabilizados por controladores continuos e invariantes en el tiempo. Una solución consiste en utilizar el modelo cinemático extendido lo que conlleva a evitar la singularidad del sistema cuando la velocidad lineal del unicycle es cero. Por esta razón, el trabajo [6] propone una estrategia de conmutación entre dos esquemas de control para que un robot móvil del tipo unicycle siga una trayectoria deseada.

A continuación se mencionan algunos trabajos relacionados con la estimación de los estados del sistema utilizando observadores. En [10] se diseña un observador no lineal para estimar la orientación y velocidad de un cuerpo rígido moviéndose en tres dimensiones. Un trabajo similar es [9], el cual propone un observador para estimar la orientación de un cuerpo rígido en presencia de perturbaciones tales como ruido en las mediciones. En [48] se utiliza la técnica de inmersión e invarianza para estimar el ángulo de rotación y velocidades angulares y lineales de un robot manipulador con articulaciones revoluta/prismática de dos grados de libertad. Por otra parte en [16] proponen un controlador basado en un observador para estimar la dinámica lateral de un sólo vehículo autónomo.

1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es el siguiente:

Diseñar, analizar y validar algoritmos de control y observadores de estado para un sistema multi-agente conformado por robots móviles del tipo unicycle, los cuales permitirán emular el comportamiento de estructuras mecánicas rígidas mientras evaden colisiones con obstáculos presentes en el ambiente y, para el caso de los sistemas n -tráiler, eliminar o reducir los efectos de desvío de trayectoria.

Para alcanzar el objetivo general se establecen los siguientes objetivos específicos:

1. Diseñar vectores de formación (variantes e invariantes en el tiempo) para emular el comportamiento del movimiento traslacional y rotacional de los cuerpos rígidos así como vectores de formación para emular el comportamiento de un tráiler.
2. Diseñar vectores de formación variantes en el tiempo para modelar el mecanismo de un pivote deslizante. La posición del pivote deslizante debe estar relacionada con los ángulos de orientación entre dos agentes consecutivos y la distancia que debe de existir entre ellos. Esto permitirá eliminar o reducir los efectos de subviraje y sobreviraje.
3. Diseñar campos vectoriales repulsivos que permitan la evasión de colisiones ante la presencia de obstáculos y/u otros agentes.
4. Diseñar un grupo de observadores para reconstruir la orientación de cada agente.
5. Implementar los vectores de formación variante en el tiempo y las ecuaciones del observador en las leyes de control para coordinar un sistema multi-agente.
6. Cuando se utilice el modelo cinemático extendido de los unicyclos, evitar la singularidad del sistema cuando la velocidad lineal del agente es cero.
7. Análisis teórico de convergencia para las leyes de control propuestas.
8. Integración de la plataforma experimental, que consiste en
 - Cinco robots móviles marca AmigoBot.
 - Un sistema de visión compuesto de 12 cámaras Flex 13 y el software Motive para la captura de movimiento de los robots móviles.
 - Una computadora para medir las posiciones y realizar los cálculos de las leyes de control.
9. Validar las diferentes estrategias de control propuestas mediante simulaciones numéricas e implementación en la plataforma experimental.

1.4. Justificación

La mayoría de los robots móviles comerciales disponibles en el mercado utilizados en la investigación usan motores de corriente directa para realizar el movimiento de las ruedas. Cada motor incluye un encoder de alta resolución que es usado por el microcontrolador interno para determinar la inmediata velocidad traslacional y rotacional requerida para realizar el movimiento deseado. Debido a que las ruedas están fabricadas de un caucho resistente, se considera que éstas no presentan deformaciones durante el movimiento del robot. Tomando en cuenta que los robots se mueven sobre un plano horizontal y que además, el robot no pierde adherencia al terreno, entonces existe una relación directa entre el movimiento de rotación de las ruedas y el movimiento del robot. Con base a estas razones, en este trabajo se utiliza el modelo cinemático de los robots tipo unicyclo.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presenta el modelo cinemático de los unicyclos y del sistema n -tráiler. También se introduce el concepto de gráfica de formación y su aplicación al diseño y análisis de las estrategias de control. Además, se identifican los casos de estudio que serán abordados en este trabajo.

2.1. Modelo cinemático de los unicyclos

Sea $N = \{R_1, \dots, R_n\}$ un conjunto de robots móviles que se desplazan en el plano con posiciones

$$\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

De acuerdo a la Figura 2.1, el modelo cinemático de cada agente o robot R_i está dado por

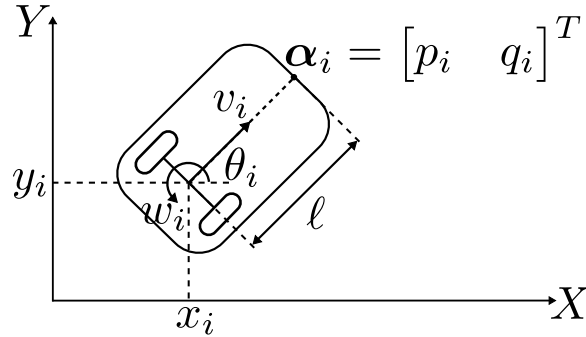


Figura 2.1: Modelo cinemático de los unicyclos.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

donde v_i es la velocidad lineal del punto medio del eje de las ruedas, w_i es la velocidad angular del robot y θ_i es el ángulo de orientación del i -ésimo agente con respecto al eje X . Es conocido [11] que el sistema (2.2) con las salidas definidas en (2.1) posee una matriz de desacoplamiento singular.

Debido a esto, se considera como salida la dinámica del punto $\boldsymbol{\alpha}_i = [p_i \ q_i]^T$, diferente al punto medio del eje de las ruedas [25, 34]. Las coordenadas del punto $\boldsymbol{\alpha}_i$ están dadas por

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + \ell \cos \theta_i \\ y_i + \ell \sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

La dinámica de éstas coordenadas es

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = A_i(\theta_i) \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde

$$A_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\ell \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \ell \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

es la matriz de desacoplamiento para cada robot R_i , la cual es no singular ya que $\det [A_i(\theta_i)] = \ell$.

2.2. Modelo cinemático extendido de los uniciclos

Considérese ahora la extensión dinámica mostrada en la Figura 2.2. Dicha extensión consiste en

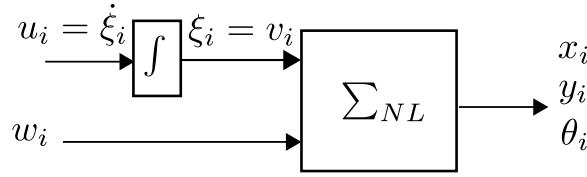


Figura 2.2: Preprocesamiento al sistema (2.2).

agregar un integrador antes de la señal de control v_i , obteniendo el siguiente sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\xi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_i \cos \theta_i \\ \xi_i \sin \theta_i \\ u_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

donde $\xi_i = v_i$ es un nuevo estado que representa la velocidad lineal de cada agente y u_i es una nueva señal de control. Para el sistema extendido, la dinámica de \mathbf{z}_i está dada por

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} = \hat{A}_i(\theta_i, \xi_i) \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde

$$\hat{A}_i(\theta_i, \xi_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\xi_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \xi_i \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

es la matriz de desacoplamiento del sistema aumentado. Nótese que $\det [\hat{A}_i(\theta_i, \xi_i)] = \xi_i$ con lo cual $\hat{A}_i(\theta_i, \xi_i)$ es no singular $\forall \xi_i \neq 0$. Bajo éstas condiciones es posible determinar una estrategia para controlar la posición de \mathbf{z}_i .

2.3. Modelo cinemático del 2-tráiler

Para efectos de comparación, se presenta el modelo cinemático de un 2-tráiler estándar (Figura 2.3). El modelo cinemático de un 2-tráiler estándar [12, 38, 45, 52] está dado por

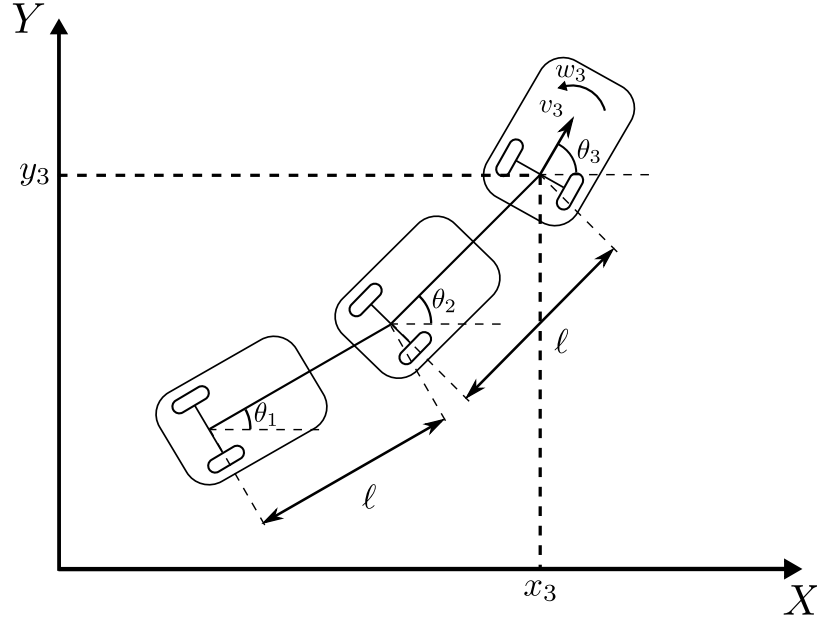


Figura 2.3: Modelo cinemático de un 2-tráiler estándar.

$$\dot{x}_3 = v_3 \cos \theta_3 \quad (2.7a)$$

$$\dot{y}_3 = v_3 \sin \theta_3 \quad (2.7b)$$

$$\dot{\theta}_3 = w_3 \quad (2.7c)$$

$$\dot{\theta}_2 = v_3 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\ell} \quad (2.7d)$$

$$\dot{\theta}_1 = v_3 \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\ell} \quad (2.7e)$$

donde $[x_3 \ y_3]^T$ son las coordenadas del punto medio del eje de las ruedas del tractor, θ_3 , θ_2 y θ_1 representan los ángulos de orientación del tractor y de los dos remolques, respectivamente. Las señales de control son la velocidad longitudinal del tractor v_3 , y la velocidad angular del tractor w_3 .

2.4. Gráficas de formación

De acuerdo a [18], los canales de comunicación entre un grupo de agentes puede modelarse a través de una gráfica de formación (basada en la teoría de grafos), la cual se define de la siguiente manera.

Definición 2.1 Una gráfica de formación $G = \{N, E, C\}$ consta de

- Un conjunto de vértices $N = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ que corresponden a los n agentes móviles.
- Un conjunto de aristas $E = \{(j, i) \in N \times N\}$ con $i \neq j$ que representan las comunicaciones posibles entre los agentes, por lo tanto si $(j, i) \in E$ entonces el agente i conoce la posición del agente j . El conjunto de posiciones de agentes detectables para el robot R_i está dado por $N_i = \{j \mid (i, j) \in E\} \subseteq N$.
- Un conjunto de etiquetas $C = \{\mathbf{c}_{ji}\}$ con $(j, i) \in E$ donde $\mathbf{c}_{ji} = [c_{ji_x} \ c_{ji_y}]^T \in \mathbb{R}^2$ es un vector que especifica la posición relativa deseada entre los agentes R_j y R_i .

□

Definición 2.2 Matriz de grados. El grado g_i de un vértice R_i es el número de aristas que se dirigen a dicho vértice. La matriz de grados de un grafo G , denotada por Δ , es una matriz diagonal cuadrada de $n \times n$ definida como

$$\Delta = \text{diag}\{g_1, \dots, g_n\}$$

donde $g_i = \text{card}(N_i)$, con $i = 1, \dots, n$.

□

Definición 2.3 Matriz de adyacencia. Dado un grafo $G = \{N, E\}$ de orden n , la matriz de adyacencia de G denotada por $\mathcal{A}_d = (a_{ij})$, es una matriz cuadrada de $n \times n$ definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (R_j, R_i) \in E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

Definición 2.4 Laplaciano. Dado un grafo G , el Laplaciano asociado con G está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \Delta - \mathcal{A}_d$$

donde Δ es la matriz de grados y \mathcal{A}_d es la matriz de adyacencia de G .

□

La Figura 2.4 presenta un ejemplo de gráfica de formación. Para este caso, $N = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, $N_1 = \{R_2, R_3, R_4\}$, $N_2 = \{R_1\}$, $N_3 = \{R_1, R_2\}$ y $N_4 = \{R_3\}$. La matriz de grados está dada por

$$\Delta = \text{diag}\{3, 1, 2, 1\}$$

y la matriz de adyacencia es

$$\mathcal{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, el laplaciano asociado a la gráfica de formación de la Figura 2.4 es

$$\mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dada una gráfica de formación, la posición deseada de un agente puede definirse como

$$\alpha_i^* = \frac{1}{g_i} \sum_{j \in N_i} (\alpha_j + \mathbf{c}_{ji}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

donde, como mencionamos anteriormente, g_i es el número de robots detectados por el agente R_i , i.e., $g_i = \text{card}(N_i)$. La posición deseada de un robot R_i puede interpretarse como el promedio de las posiciones relativas deseadas con respecto a los robots detectables para él.

Una gráfica de formación puede clasificarse como directa (GD) o indirecta (GI). Una GD satisface que si $(j, i) \in E$ entonces $(i, j) \notin E$. De manera equivalente, si $j \in N_i$, entonces $i \notin N_j$. Una GI satisface que si $(j, i) \in E$ entonces $(i, j) \in E$. De manera equivalente, si $j \in N_i$ entonces $i \in N_j$. Además, para una GI, se satisface que $\mathbf{c}_{ij} = -\mathbf{c}_{ji}$.

En la Figura 2.5 se presentan dos gráficas de formación que serán utilizadas en este trabajo. La Figura 2.5a muestra una GD de cadena abierta donde el n -ésimo agente es el líder de grupo. Esta estrategia es conocida también como formación tipo convoy [8, 19, 31] y es utilizada comúnmente en

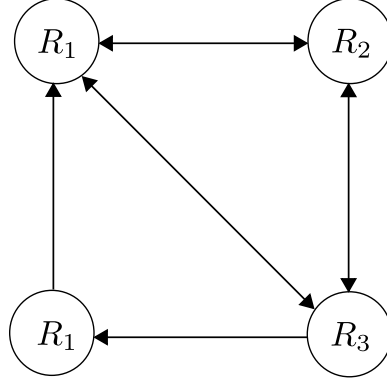


Figura 2.4: Ejemplo de gráfica de formación.

las estrategias de marcha. La ventaja de este tipo de gráfica de formación reside en que el agente R_i solo necesita información del agente R_{i+1} . La desventaja se presenta cuando algún agente tiene una falla, ésta falla se propagará a los agentes que se encuentran detrás de él, afectando el desempeño del sistema multi-agente. Para este caso, el subconjunto $N_i = \{R_{i+1}\}$ para $i = 1, \dots, n - 1$, $N_n = \{\emptyset\}$ y su laplaciano está dado por

$$\mathcal{L}(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, la Figura 2.5b muestra el caso de GD de formación centrada en el líder. La ventaja principal reside en que los seguidores solo necesitan información del agente líder. El subconjunto $N_i = \{R_n\}$ para $i = 1, \dots, n - 1$, $N_n = \{\emptyset\}$ y su laplaciano está dado por

$$\mathcal{L}(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

2.5. Misceláneos matemáticos

2.5.1. Producto kronecker

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz con elementos a_{ij} y sea $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, entonces el producto kronecker de A y B (denotado por $(A \otimes B) \in \mathbb{R}^{np \times mq}$) está dado por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

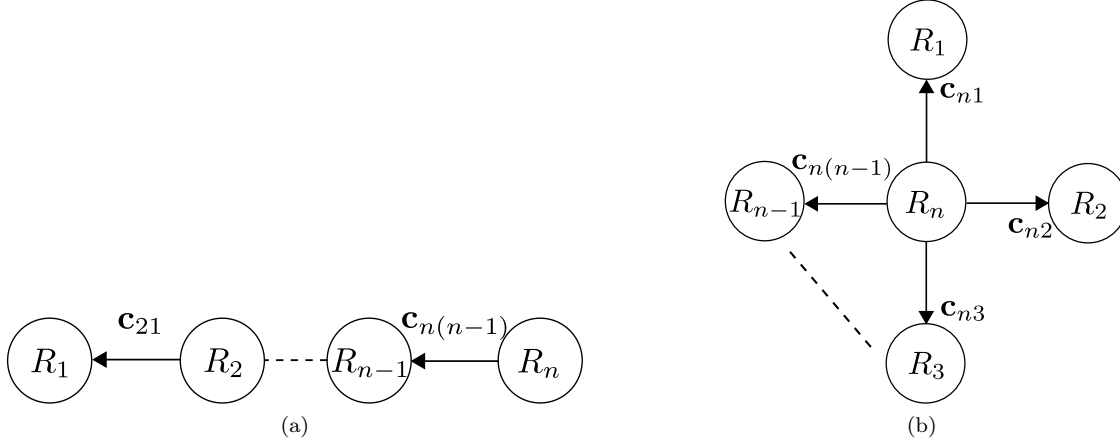


Figura 2.5: Gráficas de formación de especial interés. (a) Gráfica directa de cadena abierta con líder G_1 . (b) Gráfica directa centrada en el líder G_2 .

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El producto Kronecker ayudará posteriormente a una notación más compacta de las ecuaciones resultantes de estrategias de control de marcha.

2.5.2. Ecuación de movimiento cinemático de cuerpos rígidos

La ecuación de movimiento cinemático de cuerpos rígidos está dada por

$$v_p = v_q + w \times \mathbf{r}_{p/q} \quad (2.11)$$

donde v_p es la velocidad del punto p , v_q es la velocidad del punto q , w es la velocidad angular y $\mathbf{r}_{p/q}$ es el vector de posición del punto p con respecto al punto q .

Por ejemplo, considere el tractor y el remolque que se encuentra unido al tractor de la Figura 2.3. La velocidad del tractor v_3 expresada en términos de vectores unitarios está dada de la siguiente manera

$$v_3 = v_3(\hat{i} \cos \theta_3 + \hat{j} \sin \theta_3) \quad (2.12)$$

También la velocidad del tractor v_3 puede ser expresada con respecto al punto \mathbf{z}_2

$$v_3 = v_2(\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{j} \sin \theta_2) + \hat{k} w_2 \times \ell(\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{j} \sin \theta_2) \quad (2.13a)$$

$$= \hat{i}(v_2 \cos \theta_2 - \ell w_2 \sin \theta_2) + \hat{j}(v_2 \sin \theta_2 + \ell w_2 \cos \theta_2) \quad (2.13b)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.13b) y representando en forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} v_3 \cos \theta_3 \\ v_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\ell \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \ell \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para v_2 y w_2

$$\begin{aligned} v_2 &= v_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ w_2 &= \frac{1}{\ell} v_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \end{aligned}$$

Esto es, que la velocidad del remolque depende de la velocidad del tractor y del ángulo de orientación de cada vehículo. De forma general, se tiene

$$v_i = v_{i+1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.14a)$$

$$w_i = \frac{1}{\ell} v_{i+1} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) \quad (2.14b)$$

Tomando en cuenta que el radio de curvatura de la trayectoria de cada vehículo está dado por $r_i = \frac{v_i}{w_i}$ [37], entonces, utilizando las expresiones (2.14) se obtiene que

$$r_i = \ell \cot(\theta_{i+1} - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.15)$$

Estos resultados serán de utilidad en el resto del trabajo.

2.6. Planteamiento del problema

Se desea diseñar leyes de control que permitan que un grupo de robots móviles conformados por robots tipo uniclo emulen el movimiento traslacional de los cuerpos rígidos evitando colisiones con obstáculos y del movimiento rotacional así como del comportamiento del sistema n -tráiler y de su respectivo pivote deslizante para la reducción de los desvíos en la trayectoria presentes en este tipo de sistemas. Se considera un agente líder el cual seguirá una trayectoria deseada $\mathbf{m}(t) = [x_d(t) \quad y_d(t)]^T$ la cual es continuamente diferenciable.

Matemáticamente, el problema de emulación del movimiento traslacional y rotacional y del comportamiento del sistema n -tráiler con el pivote deslizante se define de la siguiente manera

- $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_i^*(t)) = 0$. (**Convergencia a la formación deseada**). Cada uno de los agentes convergen a un patrón de formación definido mediante vectores de posición $\mathbf{c}_{ji}(t)$. Dependiendo de como se defina la posición relativa deseada $\boldsymbol{\alpha}_i^*$ será el tipo de comportamiento que se estará emulando.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$. (**Control de marcha**). El agente líder R_n sigue una trayectoria predefinida $\mathbf{m}(t)$ que es al menos dos veces diferenciable.

Nótese que la posición deseada $\boldsymbol{\alpha}_i^*$ depende del vector de posición relativo deseado \mathbf{c}_{ji} , el cual puede ser variante o invariante en el tiempo y de éste parámetro dependerá el tipo movimiento que se esté emulando.

Para la evasión de colisiones se considera lo siguiente

- La velocidad de la trayectoria deseada $\dot{\mathbf{m}}(t)$ se encuentra acotada, i.e., $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta, \forall t \geq 0$.
- La posición de los obstáculos está dada por $\boldsymbol{\xi}_{o_j} = [x_{o_j} \quad y_{o_j}]^T, j = 1, \dots, n_{obs}$.
- La velocidad de cada obstáculo satisface $\|\dot{\boldsymbol{\xi}}_{o_j}\| \leq \mu$ para $j = 1, \dots, n_{obs}$.
- Dado un vector $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$, definimos $\tanh(\mathbf{x}) \triangleq [\tanh x_1 \quad \tanh x_2 \quad \dots \quad \tanh x_n]^T$. Esta representación será de gran ayuda en el Capítulo 5, correspondiente a la evasión de colisiones.
- No existe peligro de colisión entre los agentes y los obstáculos, esto es, $\|\boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_{o_j}(t)\| \geq D$, donde D es la distancia mínima que debe de existir entre los agentes y los obstáculos.

Capítulo 3

Descripción de estructuras mecánicas

En este capítulo se describen las configuraciones de estructuras mecánicas cuyo comportamiento será emulado a través de un grupo de robots móviles autónomos y se presenta el análisis para obtener los vectores de formación correspondientes. La primera parte consiste en ejemplificar el movimiento traslacional y rotacional de las estructuras mecánicas utilizando varios agentes moviéndose en el plano; el agente R_n se considera como el agente líder cuyo objetivo es el de realizar el seguimiento en una posición predefinida mientras que R_1, \dots, R_{n-1} son los agentes seguidores los cuales se mantendrán a una distancia definida por vectores constantes o variantes en el tiempo. La segunda parte consiste en presentar la configuración del sistema n -tráiler y el análisis para desarrollar un pivote deslizante *virtual* que permite reducir y en otros casos eliminar los desvíos en la trayectoria presentes en este tipo de sistemas. Los resultados presentados en este capítulo utilizan el punto frontal de los agentes como salida del sistema. Un análisis similar puede hacerse para emular el movimiento traslacional usando el modelo cinemático extendido de los unicyclos.

3.1. Movimiento traslacional

La Figura 3.1 muestra tres agentes moviéndose en el plano los cuales están alineados de tal manera que el punto frontal de cada uno de ellos representa el vértice de un triángulo. En este caso, las posiciones entre los agentes están definidas por vectores de formación constantes. Debido a esto, la figura formada por los agentes realiza un movimiento de traslación pero se mantiene la misma orientación durante el seguimiento de la trayectoria.

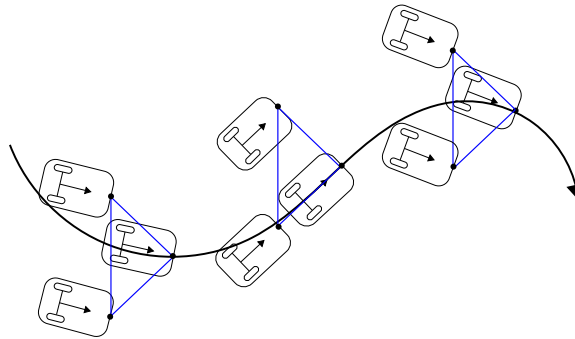


Figura 3.1: Movimiento de traslación de un grupo de agentes.

Los vectores de formación constantes se determinan dependiendo del patrón geométrico deseado. En la Figura 2.5a se presenta la gráfica directa de cadena abierta con líder, donde R_n es el líder y

los agentes restantes $\{R_1, \dots, R_{n-1}\}$ son los seguidores. Para este caso, el subconjunto $N_i = \{R_{i+1}\}$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $N_n = \{\emptyset\}$. Por lo tanto, la posición relativa deseada α_i^* para la gráfica directa de cadena abierta con líder, de acuerdo a (2.8), se define como

$$\alpha_i^* = \alpha_{i+1} + \mathbf{c}_{(i+1)i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.1a)$$

$$\alpha_n^* = \mathbf{m}(t) \quad (3.1b)$$

donde $\mathbf{c}_{(i+1)i} = [c_{(i+1)i_x} \quad c_{(i+1)i_y}]^T \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, \dots, n-1$, es el vector de formación constante relativo deseado del agente R_i con respecto al agente R_{i+1} , $\mathbf{m}(t) = [x_d(t) \quad y_d(t)]^T$ es la trayectoria de marcha predefinida, la cual es al menos dos veces diferenciable. La velocidad relativa deseada se obtiene al derivar (3.1) y, debido a que el vector de formación $\mathbf{c}_{(i+1)i}$ es constante, se obtiene

$$\dot{\alpha}_i^* = \dot{\alpha}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.2a)$$

$$\dot{\alpha}_n^* = \dot{\mathbf{m}}(t) \quad (3.2b)$$

En la Figura 3.2 se presenta un ejemplo con tres agentes para determinar los vectores de formación constantes utilizando la gráfica de formación de cadena abierta con líder. En este ejemplo, los vectores de formación son $\mathbf{c}_{32} = [c_{32_x} \quad c_{32_y}]^T$ y $\mathbf{c}_{21} = [c_{21_x} \quad c_{21_y}]^T$. Como se mencionó anteriormente, este tipo de configuración permite emular el movimiento traslacional de cuerpos rígidos.

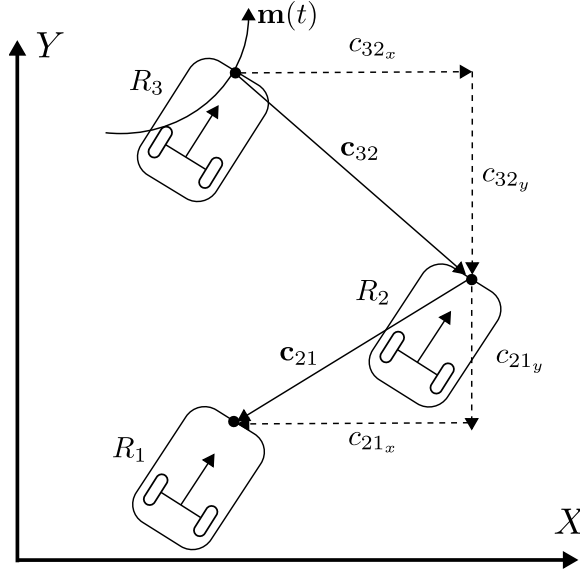


Figura 3.2: Ejemplo de vector de formación constante.

3.2. Movimiento rotacional

Al igual que en el caso anterior, la Figura 3.3 presenta tres agentes moviéndose en el plano los cuales están alineados de tal manera que el punto frontal de cada uno de ellos representa el vértice de un triángulo. La diferencia radica en que el triángulo formado por los agentes se orienta con respecto al ángulo de la trayectoria de marcha. Para lograr esto, los vectores de formación constantes del caso anterior se multiplican por una matriz de rotación, produciendo vectores de formación variantes en

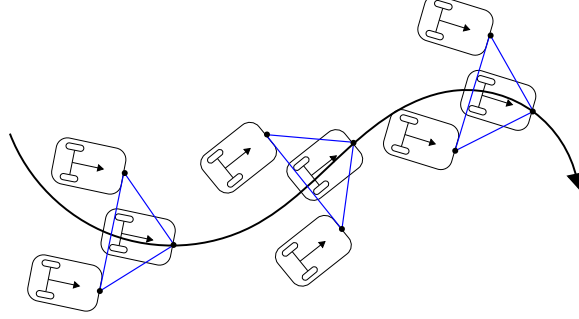


Figura 3.3: Movimiento de traslación y rotación de un grupo de agentes.

el tiempo. Esto permite que la figura formada por los agentes realice el movimiento de traslación y rotación durante el seguimiento de la trayectoria.

En este caso se utiliza la gráfica de formación centrada en el líder (Figura 2.5b) donde el subconjunto $N_i = \{R_n\}$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $N_n = \{\emptyset\}$. La posición realtiva deseada α_i^* para este tipo de gráfica, de acuerdo a (2.8), se define como

$$\alpha_i^* = \alpha_n + \mathbf{c}_{ni}(t) \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.3a)$$

$$\alpha_n^* = \mathbf{m}(t) \quad (3.3b)$$

donde $\mathbf{c}_{ni}(t)$ es el vector de formación variante en el tiempo entre el agente R_i y R_n , el cual está definido por

$$\mathbf{c}_{ni}(t) = R(\theta_n) \mathbf{C}_{ni} \quad (3.4)$$

donde \mathbf{C}_{ni} es un vector de posición estático que se obtiene a partir de la formación deseada. La matriz de rotación está dada por

$$R(\theta_n) = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix}$$

Los vectores de velocidad deseados se definen como

$$\dot{\mathbf{c}}_{ni}(t) = \dot{R}(\theta_n) \mathbf{C}_{ni}$$

$$\dot{R}(\theta_n) = \dot{\theta}_n \begin{bmatrix} -\sin \theta_n & -\cos \theta_n \\ \cos \theta_n & -\sin \theta_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la velocidad relativa deseada, está dada por

$$\dot{\alpha}_i^* = \dot{\alpha}_n + \dot{\mathbf{c}}_{ni}(t) \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.5a)$$

$$\dot{\alpha}_n^* = \dot{\mathbf{m}}(t) \quad (3.5b)$$

Éstos términos nos servirán más adelante para diseñar la ley de control.

3.3. Configuración n -tráiler

Las Figuras 3.4 y 3.5 presentan la configuración de un n -tráiler estándar y de un n -tráiler general, respectivamente. Este tipo de estructuras articuladas consisten de un tractor y de un conjunto de remolques los cuales están sujetos por medio de uniones mecánicas tipo revoluta. Para un n -tráiler

estándar las uniones mecánicas coinciden con el punto medio del eje de las ruedas del remolque que se encuentra adelante. Por el contrario, en un n -tráiler general, las uniones mecánicas se presentan en un punto externo al punto medio del eje de las ruedas. En ambos casos, el tractor sigue una trayectoria predefinida y, debido a que los remolques están unidos físicamente, éstos son jalados por el tractor. Debido a la configuración del sistema, los remolques presentan desviaciones con respecto a la trayectoria del tractor. Para el n -tráiler estándar este fenómeno se conoce como sobreviraje, el cual consiste en que los remolques se mantienen en la parte interna de la trayectoria del tractor cuando realiza un giro. En el caso del n -tráiler general, el fenómeno se conoce como subviraje y consiste en que los remolques se mantienen en la parte externa de la trayectoria del tractor cuando éste último se encuentra dando un giro.

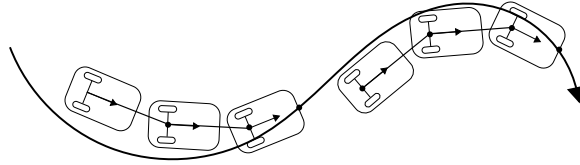


Figura 3.4: Configuración de n -tráiler estándar.

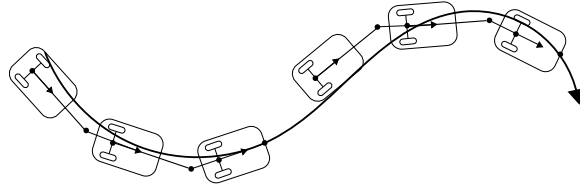


Figura 3.5: Configuración de n -tráiler general.

El uso de vectores de formación variantes en el tiempo para lograr la emulación del n -tráiler se justifica debido a que es imposible lograr dicho comportamiento usando vectores de formación constantes. La Figura 3.6 ilustra esta situación. Las Figuras 3.6a y 3.6b muestran que la formación tipo tráiler no es preservada si $\mathbf{c}_{n(n-1)}$ es constante. La formación tipo tráiler se pierde si los robots no siguen una línea recta paralela al vector constante de posición relativa. Por otro lado, la Figura 3.6c muestra que la formación tipo tráiler se preserva si $\mathbf{c}_{n(n-1)}(t)$ depende de la orientación instantánea del agente R_n .

Para emular el comportamiento del sistema del n -tráiler se utiliza la gráfica de formación de cadena abierta con líder donde la posición relativa deseada α_i^* es similar a (3.1) pero con la diferencia que el vector de formación $\mathbf{c}_{(i+1)i}(t) = [c_{(i+1)i_x}(t) \quad c_{(i+1)i_y}(t)]^T$, para $i = 1, \dots, n-1$, es variante en el tiempo.

De acuerdo a la definición del vector de posición deseado dado en (3.1) se tiene que

$$\alpha_i^* = \alpha_{i+1} + \mathbf{c}_{(i+1)i}(t) \quad (3.6a)$$

$$\alpha_n^* = \mathbf{m}(t) \quad (3.6b)$$

A partir de la Figura 3.7 se obtiene el vector de formación entre los agentes R_i y R_{i+1}

$$\mathbf{c}_{(i+1)i}(t) = \begin{bmatrix} -(\ell + d) \cos \theta_{i+1} \\ -(\ell + d) \sin \theta_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

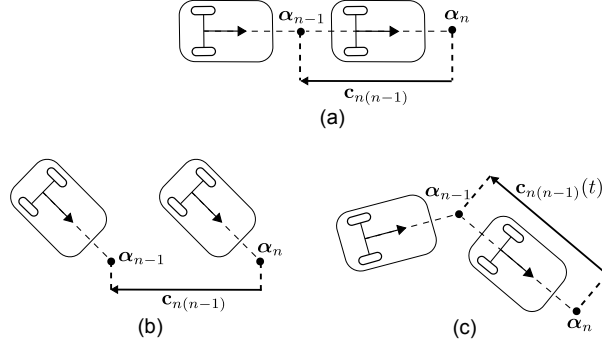


Figura 3.6: Configuración tipo tráiler. (a) Inicial. (b) Formación constante. (c) Formación variante en el tiempo.

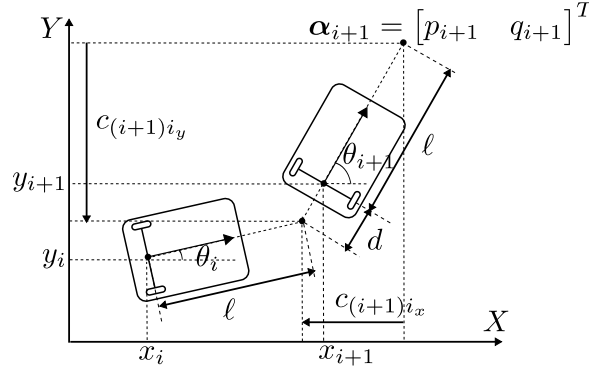


Figura 3.7: Configuración del vector de formación variante en el tiempo.

donde d es la distancia que existe entre el punto externo donde se hace la unión con el agente R_i al punto medio del eje de las ruedas del agente R_{i+1} . La velocidad relativa deseada se obtiene al derivar (3.6)

$$\dot{\alpha}_i^* = \begin{bmatrix} \dot{p}_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\ell + d)w_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\ -(\ell + d)w_{i+1} \cos \theta_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

El vector de formación dado en (3.7) corresponde a la configuración del n -tráiler general. Para obtener la configuración de un n -tráiler estándar se establece el parámetro $d = 0$ en (3.6), (3.7) y en (3.8).

3.4. Emulación de un pivote deslizante

La Figura 3.8 presenta la configuración de un n -tráiler estándar en el cual se implementa un mecanismo de pivote deslizante que tiene como objetivo eliminar los efectos de desvío de trayectoria presentes en este tipo de sistemas. El mecanismo de pivote deslizante consiste en desplazar el punto de unión virtual una cierta distancia sobre el eje de las ruedas del remolque que se encuentra adelante en dirección opuesta al centro de curvatura de la trayectoria predeterminada. De esta manera, se puede lograr que los remolques sigan la misma trayectoria que el tractor.

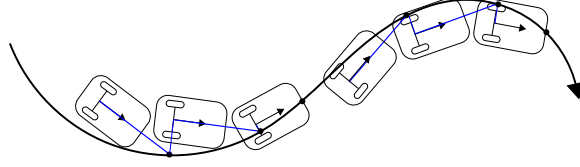


Figura 3.8: Configuración de n -tráiler estándar con mecanismo de pivote deslizante.

La Figura 3.9 muestra la configuración del n -tráiler general donde la unión virtual entre dos agentes se localiza en un punto externo al eje de las ruedas del agente que se encuentra adelante. A partir de la Figura 3.9, el vector de formación variante en el tiempo entre el agente R_i y el agente R_{i+1} está dado por

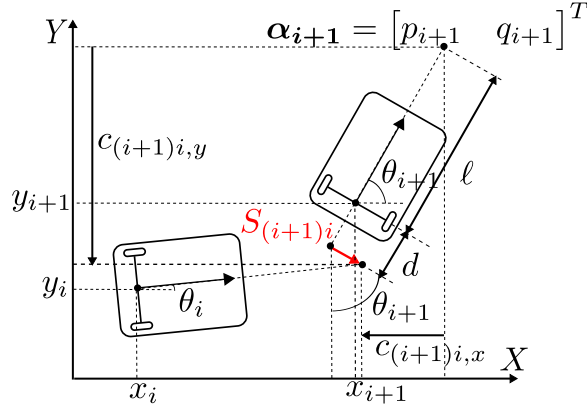


Figura 3.9: Vector de posición variante en el tiempo.

$$\mathbf{c}^{(i+1)i}(t) = \begin{bmatrix} -(\ell + d) \cos \theta_{i+1} + S_{(i+1)i} \sin \theta_{i+1} \\ -(\ell + d) \sin \theta_{i+1} - S_{(i+1)i} \cos \theta_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

El parámetro $S_{(i+1)i}$ corresponde a la posición del pivote deslizante, el cual permitirá reducir, y en algunos casos, eliminar el desvío de la trayectoria por parte de los agentes seguidores.

De acuerdo a la definición del vector de posición deseado dada en (2.8) se tiene que

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = \begin{bmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\ell + d) \cos \theta_{i+1} + S_{(i+1)i} \sin \theta_{i+1} \\ -(\ell + d) \sin \theta_{i+1} - S_{(i+1)i} \cos \theta_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Una vez definido el vector de posición deseado, se calcula la velocidad deseada del agente R_i con respecto a la velocidad del agente R_{i+1} de la siguiente manera

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^* = \begin{bmatrix} \dot{p}_{i+1} \\ \dot{q}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\ell + d)w_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\ -(\ell + d)w_{i+1} \cos \theta_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{S}_{(i+1)i} \sin \theta_{i+1} + S_{(i+1)i}w_{i+1} \cos \theta_{i+1} \\ -\dot{S}_{(i+1)i} \cos \theta_{i+1} + S_{(i+1)i}w_{i+1} \sin \theta_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) corresponden al sistema del n -tráiler general. Para obtener las ecuaciones correspondientes al n -tráiler estándar se establece el parámetro $d = 0$ en (3.9), (3.10) y (3.11).

3.4.1. Diseño de la posición del pivote deslizante en un tráiler estándar

Para obtener el modelo matemático de la posición del pivote deslizante en la configuración de un n -tráiler estándar se realizan algunas consideraciones:

- Por simplicidad, se supone que la distancia del punto medio del eje de las ruedas al punto frontal ℓ es la misma para cada uno de los agentes.
- Cada agente seguidor emula el comportamiento de un remolque en un sistema de tráiler físico.
- Cada agente seguidor está conectado virtualmente al eje trasero del agente precedente.
- El pivote deslizante se ubica en el eje de las ruedas de cada agente y se deslizará a lo largo de este eje.

A continuación se presentan dos resultados que serán de gran relevancia para obtener una expresión para la posición del pivote deslizante.

Lema 3.1 [12] *Si un agente intermedio se mueve a lo largo de una trayectoria circular con radio r_i , entonces, el agente que le antecede converge a una trayectoria circular de radio $r_{i-1} = \sqrt{r_i^2 - \ell^2}$ (Figura 3.10).*

Lema 3.2 [37] *Si un agente intermedio se mueve a lo largo de una trayectoria circular con radio r_i y si la posición del pivote deslizante está dada por*

$$S_{(i+1)i} = \sqrt{r_i^2 + \ell^2} - r_i \quad (3.12)$$

entonces, en estado estacionario, el agente R_{i-1} seguirá la trayectoria circular con el mismo radio r_i (Figura 3.10).

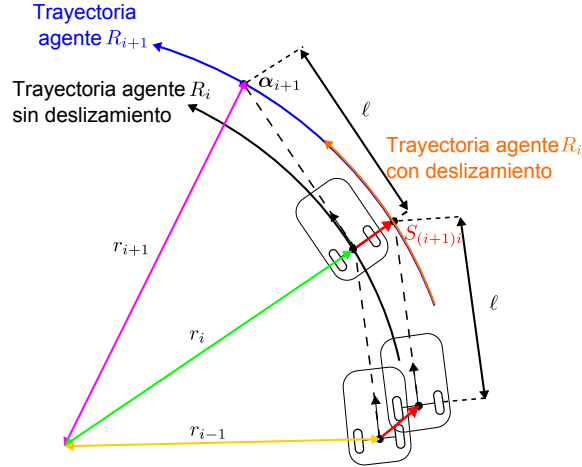


Figura 3.10: Trayectoria del agente R_i , sin el mecanismo de pivote deslizante, y, con el mecanismo de pivote deslizante.

Recordando que el radio de curvatura para cada vehículo está dado por

$$r_i = \ell \cot(\theta_{i+1} - \theta_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.13) en (3.12), se obtiene la posición del pivote deslizante variante en el tiempo en función de la distancia que existe entre cada agente y el ángulo de orientación del agente R_{i+1} y el agente R_i .

$$S_{(i+1)i} = \ell \left[\frac{1 - \cos(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right] \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.14)$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{S}_{(i+1)i} = \ell \left[\frac{w_{i+1} - w_i}{1 + \cos(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right] \quad (3.15)$$

La función definida en (3.14) no está definida cuando $\theta_{i+1}(t_0) = \theta_i(t_0)$. Esto sucede cuando el agente R_i y el agente R_{i+1} instantáneamente siguen la misma dirección. Al presentarse este caso, la posición del pivote deslizante debe ser igual a cero (no existe deslizamiento) y el punto frontal del agente R_i debe de coincidir con el punto medio del eje de las ruedas del agente R_{i+1} . Esto se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Sea t_0 un instante de tiempo tal que $\theta_i(t_0) = \theta_{i+1}(t_0)$. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_{(i+1)i}(t) = 0$$

y

$$\dot{S}_{(i+1)i}(t_0) = 0$$

Prueba 3.1 *Al calcular el límite de (3.14) se obtiene*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_{(i+1)i}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \ell \frac{1 - \cos(\theta_{i+1}(t_0) - \theta_i(t_0))}{\sin(\theta_{i+1}(t_0) - \theta_i(t_0))} \quad (3.16)$$

El límite de la función (3.16) presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ por lo que es posible aplicar la regla de L'Hôpital obteniendo lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_{(i+1)i}(t) = \ell \frac{(w_{i+1} - w_i) \sin(\theta_{i+1}(t_0) - \theta_i(t_0))}{(w_{i+1} - w_i) \cos(\theta_{i+1}(t_0) - \theta_i(t_0))} = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, cuando $\theta_i(t_0) = \theta_{i+1}(t_0)$ los agentes están alineados en una línea recta paralela al eje X (Figura 3.11). La velocidad del punto \mathbf{z}_{i+1} expresada en términos de vectores

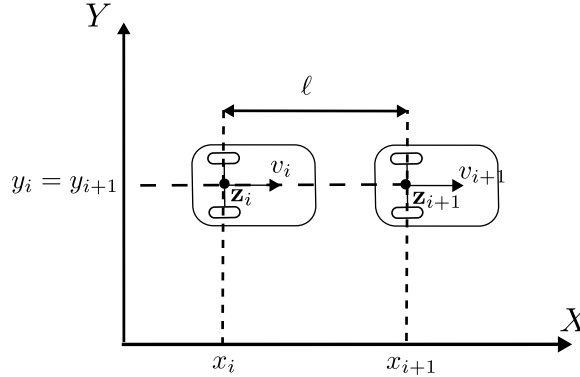


Figura 3.11: Obtención de la velocidad de los puntos \mathbf{z}_{i+1} y \mathbf{z}_i .

unitarios, es

$$v_{i+1} = v_{i+1} \hat{i} \quad (3.17)$$

Utilizando la ecuación de movimiento cinemático de cuerpos rígidos (2.11) para calcular la velocidad del punto \mathbf{z}_{i+1} con respecto al punto \mathbf{z}_i , se tiene

$$v_{i+1} = v_i \hat{i} + w_i \hat{k} \times \ell \hat{i} \quad (3.18a)$$

$$= v_i \hat{i} + \ell w_i \hat{j} \quad (3.18b)$$

Igualando los componentes de los términos (3.17) y (3.18b) se tiene que

$$v_{i+1} = v_i \quad (3.19a)$$

$$w_i = 0 \quad (3.19b)$$

Al realizar un análisis similar para calcular la velocidad del punto \mathbf{z}_i se obtiene

$$v_i = v_{i+1} \quad (3.20a)$$

$$w_{i+1} = 0 \quad (3.20b)$$

De la segunda ecuación de (3.19) y de (3.20) se tiene que $w_{i+1} = w_i = 0$. Por lo tanto

$$\dot{S}_{(i+1)i}(t_0) = 0$$

cuando $\theta_i(t_0) = \theta_{i+1}(t_0)$.

□

3.4.2. Diseño de la posición del pivote deslizante en un tráiler general

Para obtener el model matemático de la posición del pivote deslizante, haremos algunas consideraciones similares a las del caso del n -tráiler estándar:

- Nuevamente, por simplicidad, la distancia del punto medio del eje de las ruedas al punto frontal ℓ es la misma para cada uno de los agentes.
- Cada agente seguidor modela el comportamiento de un remolque en un sistema de tráiler físico.
- Cada agente seguidor está conectado virtualmente a un punto externo al eje de las ruedas del agente precedente. Este punto externo se encuentra localizado a una distancia d del punto medio del eje de las ruedas. Con el fin de obtener un modelo más simple, la distancia d es la misma para todos los agentes.
- Se considera que $\ell > d$.
- La posición del pivote deslizante se ubica en el punto de unión entre dos agentes.

A partir de la Figura 3.12 y tomando en consideración el Lema 3.1, esto es, si el agente R_{i+1} se mueve a lo largo de una trayectoria circular con radio r_{i+1} , entonces el punto medio del eje de las ruedas del agente R_{i+1} sigue una trayectoria circular de radio $\rho_{i+1} = \sqrt{r_{i+1}^2 - \ell^2}$.

Tomando en cuenta el nuevo sistema de coordenadas de la Figura 3.12, el punto frontal del agente R_{i+1} satisface la siguiente ecuación

$$p_{i+1}^2 + q_{i+1}^2 = r_{i+1}^2 \quad (3.21)$$

Por otro lado, la línea que es paralela al nuevo eje Y y se encuentra por debajo del eje X se encuentra a una distancia d y está dada por la ecuación

$$y = -d \quad (3.22)$$

Asumiendo que $y = q_{i+1}$, sustituyendo (3.22) en (3.21) y despejando para p_{i+1} se tiene que

$$p_{i+1} = \sqrt{r_{i+1}^2 - d^2} \quad (3.23)$$

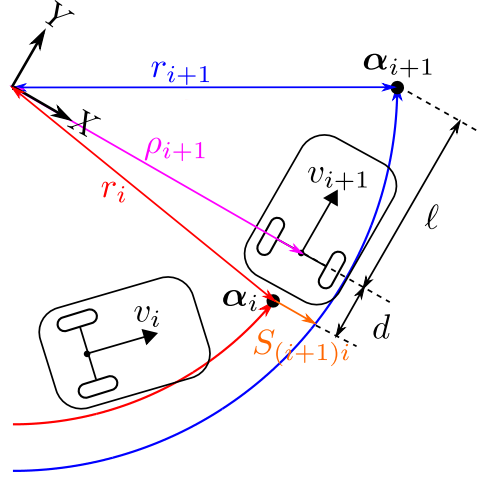


Figura 3.12: Obtención de la posición del pivote deslizante en tráiler general.

Lema 3.3 Si la posición del pivote deslizante está dada por

$$S_{(i+1)i} = p_{i+1} - \rho_{i+1} = \sqrt{r_{i+1}^2 - d^2} - \sqrt{r_{i+1}^2 - \ell^2} \quad (3.24)$$

donde $r_{i+1} = \frac{\beta_{i+1}}{w_{i+1}}$, $\beta_{i+1} = \|\dot{\alpha}_{i+1}\|$, entonces, en estado estacionario, el agente R_i sigue una trayectoria circular de radio r_{i+1} correspondiente a la trayectoria circular del agente R_{i+1} .

Prueba 3.2 De acuerdo al Lema 3.1, el punto frontal del agente R_i , seguirá una trayectoria circular de radio $r_i = \sqrt{\rho_z^2 + d^2}$ donde $\rho_z = \rho_{i+1} + S_{(i+1)i}$. Desarrollando este término se tiene

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(\rho_{i+1} + S_{(i+1)i})^2 + d^2} \\ &= \sqrt{(\rho_{i+1} + \sqrt{r_{i+1}^2 - d^2} - \rho_{i+1})^2 + d^2} \\ r_i &= r_{i+1} \end{aligned}$$

Es decir, el agente R_i seguirá la misma trayectoria circular que el agente R_{i+1} .

□

Desarrollando (3.24) se obtiene

$$S_{(i+1)i} = \frac{1}{w_{i+1}} \left(\sqrt{\beta_{i+1}^2 - d^2 w_{i+1}^2} - \sqrt{\beta_{i+1}^2 - \ell^2 w_{i+1}^2} \right) \quad (3.25)$$

y su derivada como

$$\dot{S}_{(i+1)i} = \tilde{g} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{i+1}^2 - d^2 w_{i+1}^2}} - \frac{1}{\sqrt{\beta_{i+1}^2 - \ell^2 w_{i+1}^2}} \right) \quad (3.26)$$

donde

$$\tilde{g} = \frac{w_{i+1} \dot{\beta}_{i+1} \beta_{i+1} - \dot{w}_{i+1} \beta_{i+1}^2}{w_{i+1}^2}$$

Comentario 3.1 Al igual que en el caso anterior, la función definida en (3.25) se indetermina cuando $w_{i+1}(t_0) = 0$. Esto sucede cuando el agente R_{i+1} se encuentra siguiendo una dirección con un ángulo $\theta_{i+1}(t_0)$ constante. Al presentarse este caso, la distancia deslizante debe ser igual a cero (no existe deslizamiento). Esto se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 3.2 Sea t_0 un instante de tiempo tal que $w_{i+1}(t_0) = 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_{(i+1)i}(t) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{S}_{(i+1)i}(t) = 0$$

Prueba 3.3 Calculando el límite de la función (3.25) se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_{(i+1)i}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{M}{w_{i+1}(t)} \quad (3.27)$$

donde

$$M = \left(\sqrt{\beta_{i+1}^2 - d^2 w_{i+1}^2(t)} - \sqrt{\beta_{i+1}^2 - \ell^2 w_{i+1}^2(t)} \right)$$

La derivada de M está dada por

$$\dot{M} = a(\beta_{i+1}, w_{i+1}) \left[\beta_{i+1} \dot{\beta}_{i+1} - d^2 \dot{w}_{i+1}(t) w_{i+1}(t) \right] - b(\beta_{i+1}, w_{i+1}) \left[\beta_{i+1} \dot{\beta}_{i+1} - \ell^2 \dot{w}_{i+1}(t) w_{i+1}(t) \right]$$

donde $a(\beta_{i+1}, w_{i+1}) = [\beta_{i+1}^2 - d^2 w_{i+1}^2(t)]^{-\frac{1}{2}}$ y $b(\beta_{i+1}, w_{i+1}) = [\beta_{i+1}^2 - \ell^2 w_{i+1}^2(t)]^{-\frac{1}{2}}$. Usando el método de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} S_{(i+1)i}(t) = \frac{\dot{M} |_{(w_{i+1}(t_0), \dot{w}_{i+1}(t_0))}}{\dot{w}_{i+1}(t_0)} = \frac{0}{\dot{w}_{i+1}(t_0)} = 0$$

Para calcular el límite de (3.26), nuevamente se utiliza el método de L'Hôpital obteniendo

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{S}_{(i+1)i}(t) = \frac{0}{2\dot{w}_{i+1}^2(t_0)\beta_{i+1}^2} = 0$$

□

Una vez definidos los vectores posición α_i^* y velocidad $\dot{\alpha}_i^*$ deseados así como de la posición del pivote deslizante $S_{(i+1)i}$ procedemos a implementarlos en la ley de control que se diseñará en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Estrategias de control

En este capítulo se presentan las leyes de control que permiten que un grupo de robots móviles emulen el comportamiento las estructuras mecánicas definidas en el capítulo anterior. Para la obtención de estas estrategias de control se usa una ley basada en funciones potenciales atractivas (FPA), la cual es común en la literatura [32]. Las FPA son diseñadas de acuerdo a la posición deseada entre agentes haciendo que el campo vectorial, resultante de su gradiente negativo, atraiga a cada robot hacia su valor mínimo y automáticamente los agentes converjan a la formación deseada y/o realicen un seguimiento de trayectoria. Una ley de control basada solamente en FPA garantiza la convergencia a la formación deseada, pero no asegura trayectorias libres de colisión. Posteriormente se presenta una ley de control en tiempo discreto para emular el comportamiento de un tráiler estándar.

4.1. Ley de control en tiempo continuo

Para cada agente R_i se establece la FPA dada por

$$\tau_i = \sum_{j \in N_i} \|\alpha_i - \alpha_j - \mathbf{c}_{ji}\|^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Recordemos que para la gráfica directa de cadena abierta con líder, el subconjunto $N_i = \{R_{i+1}\}$, $g_i = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $N_n = \{\emptyset\}$. Por lo tanto, las posiciones relativas deseadas están dadas por (3.1). Siguiendo la estrategia de formación basada sólo en FPAs, se tiene

$$\tau_i = \|\alpha_i - \alpha_i^*\|^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Entonces, se define la siguiente ley de control

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) \left[\dot{\alpha}_i^* - \frac{1}{2}k \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial \alpha_i} \right)^T \right], \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.3a)$$

$$\begin{bmatrix} v_n(t) \\ w_n(t) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) \left[\dot{\mathbf{m}}(t) - \frac{1}{2}k_m \left(\frac{\partial \tau_n}{\partial \alpha_n} \right)^T \right] \quad (4.3b)$$

Desarrollando los términos correspondientes a las derivadas parciales de (4.3) y considerando que se utiliza la gráfica de formación G_1 donde el vector de posición $\mathbf{c}_{(i+1)i}$ es constante, se obtiene la ley de control para los agentes seguidores y para el líder.

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) [\dot{\alpha}_{i+1} - k(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i})], \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.4a)$$

$$\begin{bmatrix} v_n(t) \\ w_n(t) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) [\dot{\mathbf{m}}(t) - k_m(\alpha_n - \mathbf{m}(t))] \quad (4.4b)$$

donde k y k_m son parámetros de diseño y $A_i^{-1}(\theta_i)$ es la inversa de la matriz de desacoplamiento. Se observa que la ley de control para el n -ésimo agente consiste simplemente en una retroalimentación del error de seguimiento y prealimentación de la velocidad de marcha. En el caso de la ley de control para los agentes seguidores se retroalimenta la posición y velocidad del agente R_{i+1} . Esta acción puede justificarse desde el punto de vista práctico puesto que, si cada agente conoce la posición del siguiente agente, entonces es posible obtener numéricamente un estimado de su velocidad.

La elección de la posición relativa deseada α_i^* dependerá del tipo de estructura mecánica que se quiera emular. Para emular estructuras mecánicas con vectores de formación constantes se utiliza el vector definido en (3.1), para emular a un sistema n -tráiler se emplea el vector definido en (3.6) y para emular un n -tráiler con pivotes deslizantes aplicamos el vector dado en (3.10).

Proposición 4.1 *Considere el sistema (2.4) y la ley de control (4.4), con $k > 0$ y $k_m > 0$, entonces en el sistema en lazo cerrado (2.4)-(4.4), los agentes R_i convergen a la formación deseada i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0$, $i = 1, \dots, (n-1)$ mientras que el agente líder R_n converge a la trayectoria de marcha i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$.*

Prueba 4.1 *Definiendo las coordenadas del error como*

$$\mathbf{e}_i(t) = \alpha_i(t) - \alpha_i^*(t) = \alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t) - \mathbf{c}_{(i+1)i}(t) \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{e}_n(t) = \alpha_n(t) - \mathbf{m}(t) \quad (4.5b)$$

En forma matricial se tiene

$$\mathbf{e} = (B_1 \otimes I_2) \alpha - \tilde{\mathbf{c}}$$

donde I_2 es la matriz identidad de 2×2 y \otimes representa el producto Kronecker,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{21}(t) \\ \mathbf{c}_{32}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n(n-1)}(t) \\ \mathbf{m}(t) \end{bmatrix}.$$

La dinámica del sistema en lazo cerrado en las coordenadas del error está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = (\tilde{B}_1 \otimes I_2) \mathbf{e}$$

donde

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_m \end{bmatrix}$$

Si $k > 0$ y $k_m > 0$, entonces la matriz \tilde{B}_1 es Hurwitz y los errores de posición convergen a cero. \square

El resultado de la Prueba 4.1 se aplica tanto para vectores de formación constantes como para vectores de formación variantes en el tiempo obteniendo al final la misma matriz \tilde{B}_1 . La diferencia radica en que la velocidad deseada $\dot{\alpha}_i^*(t)$ es más o menos compleja en cada caso.

En el caso particular del n -tráiler, la ley de control (4.4) puede ser modificada de la siguiente manera: en lugar de retroalimentar la velocidad longitudinal del agente precedente, se prealimenta la velocidad de la trayectoria de marcha y una combinación lineal de las derivadas de los vectores de posición relativas deseadas, lo que produce la siguiente ley de control para los agentes seguidores

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) \left[\dot{\mathbf{m}} + \sum_{j=i}^{n-1} \dot{\mathbf{c}}_{(j+1)j}(t) - k(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}(t)) \right] \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

Notemos que, en la ley de control (4.6), el primer agente requiere de las derivadas de todos los vectores de posición relativos deseados $\sum_{j=1}^{n-1} \dot{\mathbf{c}}_{(j+1)j}$. El segundo agente requiere las derivadas de los vectores de posición relativos de los agentes que se encuentran delante de él: $\sum_{j=2}^{n-1} \dot{\mathbf{c}}_{(j+1)j}$. Finalmente, el agente R_{n-1} sólo requiere de la derivada del último vector de posición relativo: $\dot{\mathbf{c}}_{n(n-1)}$.

Proposición 4.2 *Considere el sistema (2.4) y la ley de control (4.6). Suponga que $k > 0$ y $k_m > 0$, entonces el sistema en lazo cerrado (2.4)-(4.6), los agentes R_i convergen a la formación deseada i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_i^*(t)) = 0$, $i = 1, \dots, (n-1)$ mientras que el agente líder R_n converge a la trayectoria de marcha i. e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$.*

Prueba 4.2 *Las coordenadas del error están definidas por (4.5). La dinámica de las coordenadas del error está dada por*

$$\dot{\mathbf{e}} = (\tilde{B}_2 \otimes I_2) \mathbf{e} \quad (4.7)$$

donde

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -k & k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k & k_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_m \end{bmatrix}$$

La matriz \tilde{B}_2 es una matriz diagonal superior, por lo tanto, si $k > 0$ y $k_m > 0$ entonces \tilde{B}_2 es Hurwitz y los errores de posición convergen a cero.

□

Considerando la gráfica directa centrada en el líder G_2 , donde $N_i = \{R_n\}$, $g_i = 1$, $i = 1, \dots, n-1$ y $N_n = \{\emptyset\}$, las posiciones relativas deseadas están dadas por (3.3), el vector de posición \mathbf{c}_{ni} es variante en el tiempo, entonces, tomando en cuenta la definición (4.2) y la ley de control (4.3), se obtiene la siguiente ley de control

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n + \dot{\mathbf{c}}_{ni} - k(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{c}_{ni})] \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.8a)$$

$$\begin{bmatrix} v_n(t) \\ w_n(t) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) [\dot{\mathbf{m}} - k_m(\boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m})] \quad (4.8b)$$

donde k y k_m son los parámetros de diseño.

Proposición 4.3 *Considere el sistema (2.4) y la ley de control (4.8), con $k > 0$ y $k_m > 0$, entonces en el sistema en lazo cerrado (2.4)-(4.8), los agentes R_i convergen a la formación deseada i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_i^*(t)) = 0$, $i = 1, \dots, (n-1)$ mientras que el agente líder R_n converge a la trayectoria de marcha i. e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$.*

Prueba 4.3 *Definiendo las coordenadas del error como*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(t) &= \boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_i^*(t) = \boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{c}_{ni}(t) \\ \mathbf{e}_n(t) &= \boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{m}(t) \end{aligned}$$

De forma matricial se tiene

$$\mathbf{e} = (B_3 \otimes I_2) \boldsymbol{\alpha} - \hat{\mathbf{c}}$$

donde I_2 es la matriz identidad de 2×2 y \otimes representa el producto Kronecker,

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{n1} \\ \mathbf{c}_{n2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n(n-1)} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix}.$$

La dinámica del sistema en lazo cerrado en las coordenadas del error está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = \left(\tilde{B}_3 \otimes I_2 \right) \mathbf{e}$$

donde

$$\tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_m \end{bmatrix}$$

De nueva cuenta, si $k > 0$ y $k_m > 0$ entonces la matriz \tilde{B}_3 es Hurwitz y los errores de posición convergen a cero. □

4.2. Ley de control en tiempo discreto

Utilizamos la aproximación de Euler para discretizar el modelo (2.4), obteniendo lo siguiente

$$\boldsymbol{\alpha}_i(kT + T) = \boldsymbol{\alpha}_i(kT) + T\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(kT), \quad k \geq 0, \quad (4.9)$$

donde $T > 0$ es el período de muestreo. Se adopta la siguiente notación $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i(kT)$, $\boldsymbol{\alpha}_i^+ = \boldsymbol{\alpha}_i(kT + T)$, donde $\boldsymbol{\alpha}_i^+$ denota el corrimiento hacia adelante. Se asume que la entrada de control $[v_i \ w_i]^T$ tiene un retenedor de orden cero, es decir, que la entrada de control mantiene su valor entre dos instantes de muestreo consecutivos. Sustituyendo (2.4) en (4.9), se obtiene el siguiente modelo en tiempo discreto

$$\boldsymbol{\alpha}_i^+ = \begin{bmatrix} p_i^+ \\ q_i^+ \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_i + TA_i(\theta_i) \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

El modelo en tiempo discreto del vector de posición relativa deseada definido en (3.6) está dado por

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \mathbf{c}_{(i+1)i}(kT), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.11a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n^* = \mathbf{m}(kT) \quad (4.11b)$$

donde $\mathbf{c}_{(i+1)i}(kT) = [c_{(i+1)i_x}(kT) \ c_{(i+1)i_y}(kT)]^T \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, \dots, n-1$ es el vector de formación variante en el tiempo, el cual está definido como

$$\mathbf{c}_{(i+1)i}(kT) = -(\ell + d) \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) \\ \sin(\theta_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Anteriormente se utilizó el concepto de derivada para obtener expresiones que fueron de utilidad para el desarrollo de las leyes de control en tiempo continuo. De manera similar, en tiempo discreto aplicaremos el concepto de diferencia hacia adelante [51] a ciertas funciones para desarrollar la ley de control. Dada una función continua $x(t)$, la diferencia hacia adelante está definida por $\Delta_h x(t) =$

$x(t+h) - x(t)$. En nuestro caso, requerimos la diferencia hacia adelante de las señales $\alpha_i^*(t)$, $\mathbf{m}(t)$ y $\mathbf{c}_{(i+1)i}(t)$ con respecto al período de muestreo. Específicamente definimos

$$\begin{aligned}\Delta_T \alpha_i^*(t) &= \alpha_i^{*+} - \alpha_i^* \\ &= \alpha_{i+1}^+ + \mathbf{c}_{(i+1)i}^+ - (\alpha_{i+1} + \mathbf{c}_{(i+1)i}) \\ &= \alpha_{i+1}^+ - \alpha_{i+1} + (\mathbf{c}_{(i+1)i}^+ - \mathbf{c}_{(i+1)i}) \\ &= \Delta_T \alpha_{i+1}(t) + \Delta_T \mathbf{c}_{(i+1)i}(t)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_T \mathbf{c}_{(i+1)i}(t) &= \mathbf{c}_{(i+1)i}^+ - \mathbf{c}_{(i+1)i} \\ \Delta_T \alpha_{i+1}(t) &= \alpha_{i+1}^+ - \alpha_{i+1}\end{aligned}$$

La ley de control en tiempo discreto que imita a la ley de control en tiempo continuo (4.4) esta definida por

$$\begin{bmatrix} v_i(kT) \\ w_i(kT) \end{bmatrix} = \frac{1}{T} A_i^{-1}(\theta_i) [\Delta_T \alpha_i^* - k_f (\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i})], \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.13a)$$

$$\begin{bmatrix} v_n(kT) \\ w_n(kT) \end{bmatrix} = \frac{1}{T} A_n^{-1}(\theta_n) [\Delta_T \mathbf{m} - k_m (\alpha_n - \mathbf{m})] \quad (4.13b)$$

donde k_m y k_f son los parámetros de diseño, \mathbf{m} es la trayectoria de marcha predefinida y \mathbf{m}^+ es el corrimiento hacia adelante de la trayectoria de marcha.

Proposición 4.4 *Considere el sistema en lazo cerrado (4.10) - (4.13). Suponga que $0 < k_f < 2$ y $0 < k_m < 2$, entonces los agentes seguidores R_i , para $i = 1, \dots, n-1$, convergen a la formación deseada, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0$, mientras que el agente líder R_n converge a la trayectoria de marcha deseada, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_n - \mathbf{m}) = 0$.*

Prueba 4.4 *La dinámica de las coordenadas α_i del sistema en lazo cerrado (4.10) - (4.13) está dada por*

$$\begin{aligned}\alpha_i^+ &= \alpha_i + \alpha_i^{*+} - \alpha_i^* - k_f (\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}), \quad i = 1, \dots, n-1. \\ \alpha_n^+ &= \alpha_n + \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} - k_m (\alpha_n - \mathbf{m})\end{aligned}$$

Usando el producto Kronecker, se obtiene el siguiente modelo

$$\alpha^+ = (P_1 \otimes I_2) \alpha + \tilde{\mathbf{C}}_1 \quad (4.14)$$

donde I_2 es la matriz identidad de 2×2 ,

$$\tilde{\mathbf{C}}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^{*+} - \alpha_1^* + k_f \mathbf{c}_{21} \\ \alpha_2^{*+} - \alpha_2^* + k_f \mathbf{c}_{32} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^{*+} - \alpha_{n-1}^* + k_f \mathbf{c}_{n(n-1)} \\ \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} + k_m \mathbf{m} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 - k_f & k_f & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k_f & k_f & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - k_f & k_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - k_m \end{bmatrix}.$$

En coordenadas del error, el sistema se define como

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1} - \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^* \\ \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \mathbf{c}_{21} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1} - \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{c}_{n(n-1)} \\ \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m} \end{bmatrix}$$

De forma matricial se tiene

$$\mathbf{e} = (B_4 \otimes I_2) \boldsymbol{\alpha} - \bar{\mathbf{c}}(kT) \quad (4.15)$$

donde $\bar{\mathbf{c}}(kT) = [\mathbf{c}_{21}^T \quad \mathbf{c}_{32}^T \quad \dots \quad \mathbf{c}_{n(n-1)}^T \quad \mathbf{m}^T]^T$ y la matriz B_4 está dada por

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La dinámica de las coordenadas del error está dada por

$$\mathbf{e}^+ = (\tilde{B}_4 \otimes I_2) \mathbf{e} \quad (4.16)$$

donde $\tilde{B}_4 = \text{diag}\{1 - k_f, \dots, 1 - k_f, 1 - k_m\}$. La matriz \tilde{B}_4 es Schur si y sólo si $|1 - k_f| < 1$ y $|1 - k_m| < 1$. Es claro que $|1 - k_f| < 1$ y $|1 - k_m| < 1$ si y sólo si $0 < k_f < 2$ y $0 < k_m < 2$.

□

La ley de control en tiempo discreto que imita a la ley de control en tiempo continuo (4.6) esta definida por

$$\begin{bmatrix} v_i(kT) \\ w_i(kT) \end{bmatrix} = \frac{1}{T} A_i^{-1}(\theta_i) \left[\Delta_T \mathbf{m} + \sum_{j=i}^{n-1} \Delta_T \mathbf{c}_{(j+1)j} - k_f (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}) \right] \quad (4.17a)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

$$\begin{bmatrix} v_n(kT) \\ w_n(kT) \end{bmatrix} = \frac{1}{T} A_n^{-1}(\theta_n) [\Delta_T \mathbf{m} - k_m (\boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m})] \quad (4.17b)$$

Proposición 4.5 Considere el sistema en lazo cerrado (4.10) - (4.17). Suponga que $0 < k_f < 2$ y $0 < k_m < 2$, entonces, los agentes seguidores R_i , para $i = 1, \dots, n-1$, convergen a la formación deseada, i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_i^*) = 0$ mientras que el agente líder converge a la trayectoria de marcha deseada i.e., $\lim_{k \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m}) = 0$.

Prueba 4.5 La dinámica de las coordenadas $\boldsymbol{\alpha}_i$ del sistema en lazo cerrado (4.10) - (4.17) está dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i^+ &= \boldsymbol{\alpha}_i + \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} + \sum_{j=i}^{n-1} (\mathbf{c}_{(j+1)j}^+ - \mathbf{c}_{(j+1)j}) - k_f (\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}), \quad i = 1, \dots, n-1. \\ \boldsymbol{\alpha}_n^+ &= \boldsymbol{\alpha}_n + \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} - k_m (\boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m}) \end{aligned}$$

Usando el producto Kronecker, se obtiene el siguiente modelo

$$\boldsymbol{\alpha}^+ = (P_2 \otimes I_2) \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\mathbf{c}} \quad (4.18)$$

donde I_2 es la matriz identidad de 2×2 ,

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} + k_f \mathbf{c}_{21} + \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{c}_{(j+1)j}^+ - \mathbf{c}_{(j+1)j}) \\ \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} + k_f \mathbf{c}_{32} + \sum_{j=2}^{n-1} (\mathbf{c}_{(j+1)j}^+ - \mathbf{c}_{(j+1)j}) \\ \vdots \\ \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} + k_f \mathbf{c}_{n(n-1)} + \mathbf{c}_{n(n-1)}^+ - \mathbf{c}_{n(n-1)} \\ \mathbf{m}^+ - \mathbf{m} + k_m \mathbf{m} \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 - k_f & k_f & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k_f & k_f & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - k_f & k_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - k_m \end{bmatrix}.$$

Las coordenadas del error están definidas en (4.15). La dinámica de las coordenadas del error está dada por

$$\mathbf{e}^+ = (\tilde{B}_5 \otimes I_2) \mathbf{e} \quad (4.19)$$

donde

$$\tilde{B}_5 = \begin{bmatrix} 1 - k_f & k_f & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k_f & k_f & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - k_f & k_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - k_m \end{bmatrix}.$$

La matriz \tilde{B}_5 es Schur si y sólo si $|1 - k_f| < 1$ y $|1 - k_m| < 1$. Es fácil determinar que $|1 - k_f| < 1$ y $|1 - k_m| < 1$ si y sólo si $0 < k_f < 2$ y $0 < k_m < 2$.

□

4.3. Simulaciones numéricas

Se presentan diferentes simulaciones numéricas para mostrar el desempeño de la ley de control (4.4) y (4.6). Primero, se presenta una comparación entre el comportamiento de un tráiler estándar utilizando su modelo cinemático y un sistema multi-agente. Posteriormente, se exponen simulaciones numéricas correspondientes a la emulación del pivote deslizante en el tráiler estándar y en el tráiler general.

4.3.1. Configuración n -tráiler estándar

La Figura 4.1 presenta una simulación numérica de la comparación de trayectorias entre un 2-tráiler estándar y un sistema multi-agente con la ley de control (4.6) emulando un tráiler estándar. Los parámetros para el sistema multi-agente son: $k = 2$, $k_m = 1$, $\ell = 0.4$ metros. La trayectoria de marcha deseada es una Lemniscata de Geronon parametrizada por $\mathbf{m}(t) = [\cos(\omega t) \quad \sin(2\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 30$ segundos como el período. Las condiciones iniciales para el tráiler son $[x_3(0) \quad y_3(0) \quad \theta_3(0) \quad \theta_2(0) \quad \theta_1(0)]^T = [0.6 \quad -0.2 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{8}]^T$; para el agente líder $[p_3(0) \quad q_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [1.37 \quad -0.4531 \quad -\frac{\pi}{8}]^T$, y para los seguidores $[p_2(0) \quad q_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [0.4 \quad -0.5536 \quad \frac{\pi}{3}]^T$, $[p_1(0) \quad q_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [-0.2536 \quad -0.1 \quad -\frac{\pi}{6}]^T$. Como puede observarse, después del transitorio, el sistema multi-agente emula exactamente el comportamiento del 2-tráiler

estándar a pesar del hecho de que las condiciones iniciales son diferentes para cada sistema. Esto se aprecia mejor en la Figura 4.2, donde los errores de posición entre el tráiler real y el emulado convergen a cero. Es interesante señalar que ambos sistemas presentan el mismo fenómeno de *sobreviraje*.

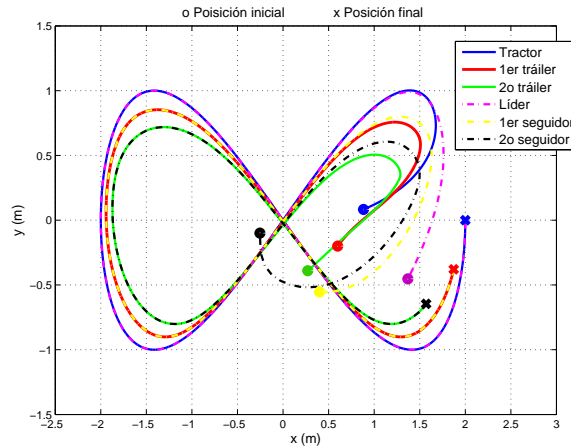


Figura 4.1: Trayectorias en el plano del 2-tráiler estándar y el sistema multi-agente.

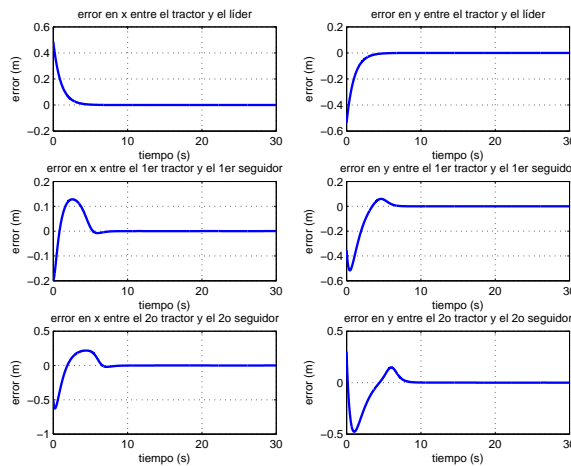


Figura 4.2: Errores de posición entre el tráiler real y el emulado.

La Figura 4.3 muestra la comparación de los ángulos de orientación entre el tráiler real y el emulado. Observamos claramente que el ángulo del líder converge al ángulo del tractor y que los ángulos de los seguidores convergen con los ángulos de los remolques.

En la Figura 4.4 se presenta una comparación de las velocidades lineales entre el sistema del tráiler físico y el tráiler emulado por el sistema multi-agente. Se observa que, a pesar de tener diferentes condiciones iniciales, los agentes convergen a la misma velocidad lineal del tractor y de los remolques, con lo que podemos concluir que el sistema del tráiler físico es emulado satisfactoriamente por el sistema multi-agente.

Comentario 4.1 El término “emulación” usado en esta tesis corresponde a “imitar el comportamiento cinemático”. Por supuesto, diferentes fuerzas surgen sobre la estructura de un tráiler real. En este trabajo de tesis, no se pretende estudiar dichas variables dinámicas.

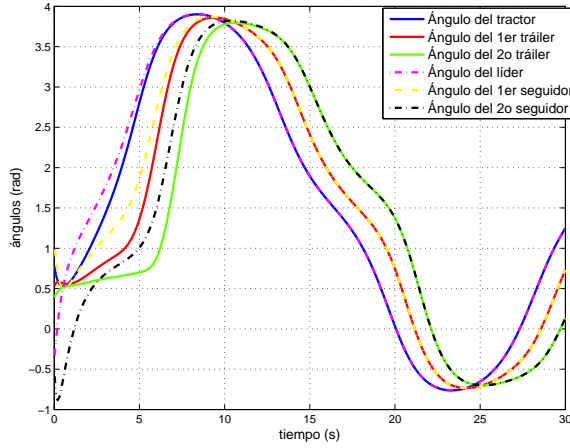


Figura 4.3: Comparación ángulos de orientación entre el tráiler real y el emulado.

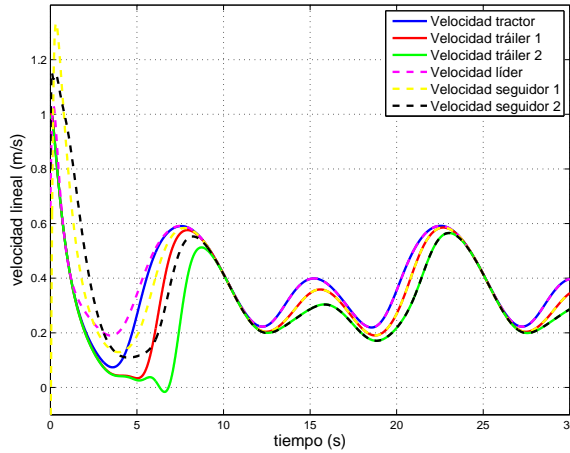


Figura 4.4: Comparación de velocidades lineales entre el tráiler real y el emulado.

4.3.2. Emulación de un pivote deslizante en un tráiler estándar

La Figura 4.5 presenta la trayectoria en el plano de cuatro agentes usando la ley de control (4.4) con el vector de posición relativa deseada definida en (3.10) con el parámetro $d = 0$ y con la posición del pivote deslizante definida en (3.14)-(3.15). En este caso, la trayectoria deseada es una Lemniscata de Geronon definida por $\mathbf{m}(t) = [2.5 \cos(\omega t) \quad 2 \sin(2\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 30$ segundos como el período. Las condiciones iniciales para los agentes seguidores son $[p_1(0) \quad q_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [0.2 \quad 0.3 \quad 0]^T$, $[p_2(0) \quad q_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [0.4 \quad -0.5 \quad 0]^T$, $[p_3(0) \quad q_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [0.9 \quad 0.3 \quad 0]^T$ y para el agente líder son $[p_4(0) \quad q_4(0) \quad \theta_4(0)]^T = [1.4 \quad -0.5 \quad 0]^T$. Los parámetros de diseño se establecieron en $k = 2$, $k_m = 1$ y $\ell = 0.4$ metros.

Por otra parte, la Figura 4.6 muestra la posición del pivote deslizante de los agentes seguidores, las cuales son tanto positivas como negativas. Esto se debe a que los agentes giran tanto en sentido horario como en sentido antihorario.

Comparando la Figura 4.1 y la Figura 4.5 se observa que la desviación de la trayectoria por parte de los agentes seguidores es prácticamente eliminada.

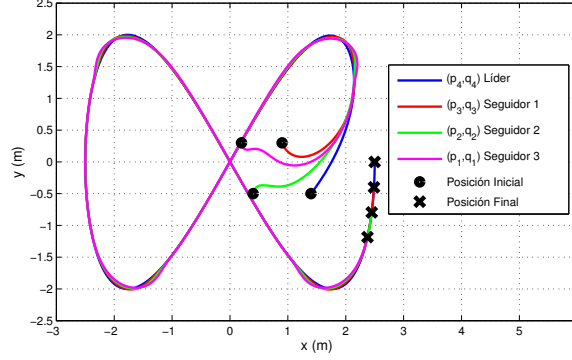


Figura 4.5: Trayectoria de los agentes emulando un tráiler estándar con pivote deslizante.

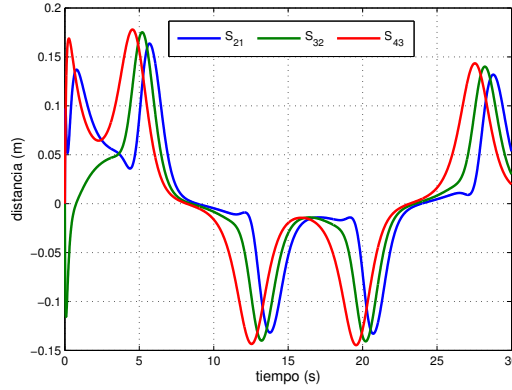


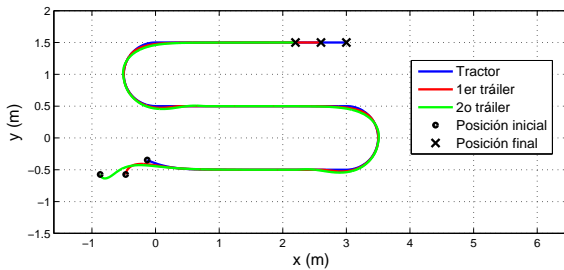
Figura 4.6: Distancias deslizantes.

La Figura 4.7a presenta la trayectoria en el plano de un 2-tráiler estándar utilizando las ecuaciones de movimiento (2.7) correspondientes a un tráiler físico. Se utilizó la ley de control diseñada en el trabajo [37] en la cual se implementa un controlador no lineal para definir la posición del pivote deslizante. En la Figura 4.7b, se muestra la trayectoria en el plano de un sistema multi-agente emulando a un 2-tráiler estándar utilizando la ley de control (4.4) con el vector de posición relativa deseada definida en (3.10), estableciendo el parámetro $d = 0$ y con la posición del pivote deslizante definido en (3.14)-(3.15). Las condiciones iniciales para el tráiler físico son $[x_3(0) \ y_3(0) \ \theta_3(0) \ \theta_2(0) \ \theta_1(0)]^T = [-0.5 \ -0.5 \ \frac{\pi}{8} \ 0 \ 0]^T$; para el agente líder $[p_3(0) \ q_3(0) \ \theta_3(0)]^T = [-0.1 \ 0.5 \ 0]^T$, y para los seguidores $[p_2(0) \ q_2(0) \ \theta_2(0)]^T = [-0.6536 \ -0.8 \ \frac{\pi}{6}]^T$, $[p_1(0) \ q_1(0) \ \theta_1(0)]^T = [-1.454 \ -0.3 \ -\frac{\pi}{6}]^T$. Los parámetros de diseño se establecieron en $k = 2$, $k_m = 1$ y $\ell = 0.4$ metros. La trayectoria deseada tiene 3 metros de largo y un radio $r_c = 0.5$ metros con una velocidad lineal $\mu_d = \frac{a_d}{t_s}$ donde $a_d = 12.1416$ metros es la longitud total de la trayectoria y $t_s = 60$ segundos el tiempo que requiere la trayectoria para ser completada. La Tabla 4.1 muestra la parametrización exacta de la trayectoria deseada donde

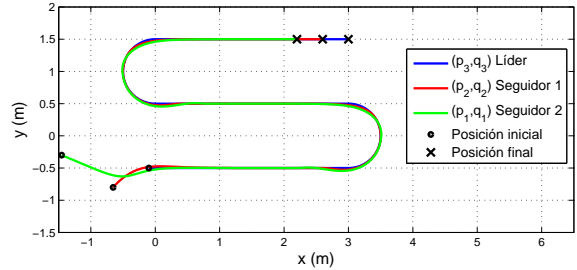
$b_d = -0.5$ metros es la distancia desde el eje horizontal.

Tabla 4.1: Parametrización de la trayectoria deseada

Intervalo de tiempo	Parametrización
$0 \leq t < t_1$	$x_d = \mu_d t; y_d = b_d$
$t_1 \leq t < t_2$	$x_d = t_1 \mu_d + r_c \sin \left[\frac{\pi (t - t_1)}{2 (t_2 - t_1)} \right]$ $y_d = b_d + r_c \left[1 - \cos \left(\frac{\pi (t - t_1)}{2 (t_2 - t_1)} \right) \right]$
$t_2 \leq t < t_3$	$x_d = t_1 \mu_d + r_c \cos \left[\frac{\pi (t - t_2)}{2 (t_3 - t_2)} \right]$ $y_d = b_d + r_c \left[1 + \sin \left(\frac{\pi (t - t_2)}{2 (t_3 - t_2)} \right) \right]$
$t_3 \leq t < t_4$	$x_d = \mu_d (t_1 + t_3 - t); y_d = b_d + 2r_c$
$t_4 \leq t < t_5$	$x_d = (t_1 + t_3 - t_4) \mu_d - r_c \sin \left[\frac{\pi (t - t_4)}{2 (t_5 - t_4)} \right]$ $y_d = b_d + 2r_c + r_c \left[1 - \cos \left(\frac{\pi (t - t_4)}{2 (t_5 - t_4)} \right) \right]$
$t_5 \leq t < t_6$	$x_d = (t_1 + t_3 - t_4) \mu_d - r_c \cos \left[\frac{\pi (t - t_5)}{2 (t_6 - t_5)} \right]$ $y_d = b_d + 3r_c + r_c \left[\sin \left(\frac{\pi (t - t_5)}{2 (t_6 - t_5)} \right) \right]$
$t_6 \leq t \leq t_7$	$x_d = (t_1 + t_3 - t_4 - t_6 + t) \mu_d; y_d = b_d + 4r_c$



(a)



(b)

Figura 4.7: Comparación de las trayectorias entre un tráiler estándar y un sistema multi-agente emulando a un tráiler con pivote deslizante. (a) Tráiler estándar físico. (b) Sistema multi-agente.

Nótese que en la Figura 4.7, tanto el tráiler físico como el emulado convergen a la trayectoria deseada y se logra reducir los efectos de sobreviraje presentes en este tipo de sistemas a pesar de que las condiciones iniciales para cada sistema son diferentes. La ventaja de emplear un sistema multi-agente reside en la simplicidad para aumentar el número de agentes al sistema, en contraste con [37] donde sólo ha sido posible desarrollar las ecuaciones cinemáticas con mecanismo de pivote deslizante para cinco tráilers, debido a la complejidad de las restricciones no holonomas.

4.3.3. Emulación de un pivote deslizante en un tráiler general

La Figura 4.8 presenta la trayectoria en el plano de tres agentes usando la ley de control (4.4) con el vector de posición deseada dado por (3.10) y la distancia deslizante definida en (3.24). En este caso, la trayectoria deseada es una Lemniscata de Geroño definida por $\mathbf{m}(t) = [2 \cos(\omega t) \quad 1.5 \sin(2\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 30$ segundos como el período. Las condiciones iniciales para los agentes seguidores son $[p_1(0) \quad q_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [0.5 \quad 0.3 \quad 0]^T$, $[p_2(0) \quad q_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [1.1 \quad 0 \quad 0]^T$, y para el agente líder son $[p_3(0) \quad q_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [1.6 \quad -0.3 \quad 0]^T$. Los parámetros de diseño se establecieron en $k = 2$, $k_m = 2$, $\ell = 0.3$ metros y $d = 0.2$ metros.

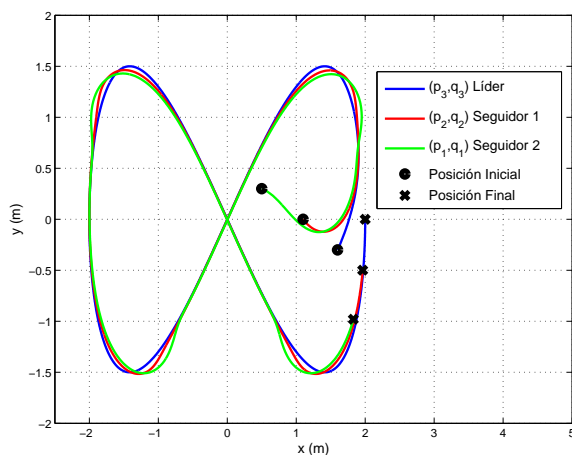


Figura 4.8: Trayectoria de los agentes emulando un tráiler general con pivote deslizante.

La Figura 4.9 muestra la posición del pivote deslizante de los agentes seguidores. En este caso, la posición del pivote deslizante también es tanto positiva como negativa.

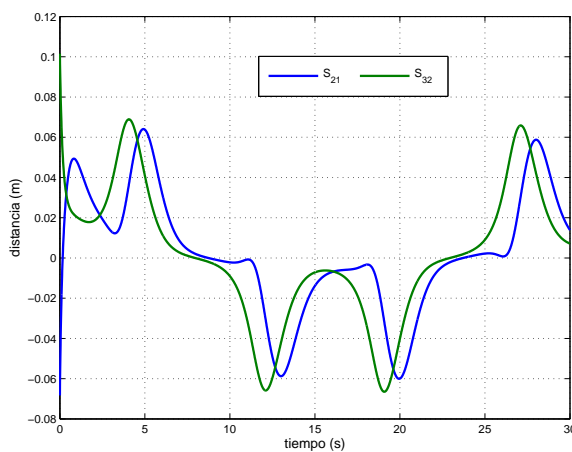


Figura 4.9: Distancias deslizantes.

Capítulo 5

Problema de evasión de colisiones

En este capítulo se presenta el problema de seguimiento de trayectoria con evasión de colisiones ante la presencia de obstáculos para un grupo de agentes. Dos casos son analizados. El primer caso considera la evasión de colisiones ante la presencia de obstáculos de manera individual utilizando la gráfica de formación de cadena abierta G_1 . El segundo caso considera la evasión de colisiones ante la presencia de obstáculos de todo el grupo de agentes sin perder la formación deseada, emulando el movimiento traslacional de una estructura rígida, usando la gráfica de formación centrada en el líder G_2 . Para este caso, el líder es representado por un agente virtual localizado en el centroide del patrón geométrico deseado. En los dos casos se considera que los vectores de formación son constantes. Abordamos el problema de evasión de colisiones añadiendo un campo vectorial repulsivo a la ley de control. El campo vectorial repulsivo muestra una estructura tipo foco inestable escalada y centrada en la posición de cada obstáculo o agente. Estos resultados se extienden al caso de agentes de segundo orden para evadir colisiones entre agentes y ante la presencia de obstáculos, específicamente al caso de cuadrirrotores.

5.1. Diseño de la ley de control

5.1.1. Control de marcha

Recordemos que la posición relativa deseada α_i^* y su derivada $\dot{\alpha}_i^*$ para la gráfica de formación G_1 están dadas por (3.1) y (3.2), respectivamente. Para la gráfica de formación G_2 , la posición relativa deseada α_i^* está dada por (3.3) y su derivada $\dot{\alpha}_i^*$ dada por

$$\dot{\alpha}_i^* = \dot{\alpha}_n \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.1a)$$

$$\dot{\alpha}_n^* = \dot{\mathbf{m}}(t) \quad (5.1b)$$

debido a que estamos considerando que en ambos casos los vectores de formación son constantes. Basándonos en la ley de control definida en (4.4), proponemos una ley de control basada en funciones saturadas de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) [\dot{\alpha}_i^* - k \tanh(\alpha_i - \alpha_i^*)] \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

donde $k > 0$ sigue siendo un parámetro de diseño, α_i^* y $\dot{\alpha}_i^*$ son parámetros correspondientes a las gráficas de formación G_1 y G_2 y $\tanh(\alpha_i - \alpha_i^*) \triangleq [\tanh(p_i - p_i^*) \quad \tanh(q_i - q_i^*)]^T$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Proposición 5.1 *Considere el sistema (2.4) y la ley de control (5.2). Suponga que $k > 0$ y que la gráfica de formación usada es G_1 . Entonces el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.2) los agentes seguidores convergen a la formación deseada, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t) - \mathbf{c}_{(i+1)i}) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, mientras que el agente líder converge a la trayectoria deseada, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$.*

Prueba 5.1 Reescribiendo en forma matricial el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.2) se tiene

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -(K \otimes I_2) \tanh(\tilde{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{C}) + \mathbf{a} \quad (5.3)$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1^T \ \dots \ \boldsymbol{\alpha}_n^T]^T$, $K = \text{diag}(k, \dots, k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_{21}^T \ \mathbf{c}_{32}^T \ \dots \ \mathbf{c}_{n(n-1)}^T \ \mathbf{m}(t)^T]^T$, $\mathbf{a} = [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2^T \ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_3^T \ \dots \ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_n^T \ \dot{\mathbf{m}}(t)^T]^T$ y

$$\tilde{A} = \mathcal{L}(G_1) + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5.4)$$

La dinámica de las coordenadas del error definidas en (4.5) está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = -(K \otimes I_2) \tanh(\mathbf{e}) \quad (5.5)$$

Proponemos una función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (K \otimes I_2)^{-1} \mathbf{e} \quad (5.6)$$

Calculando la derivada de (5.6) se tiene

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \tanh(\mathbf{e}) \leq 0 \quad (5.7)$$

para $\mathbf{e} \neq 0$. Por lo tanto, los errores de posición convergen asintóticamente a cero, lo que significa que los agentes seguidores logran el patrón geométrico deseado mientras que el líder logra el seguimiento de la trayectoria deseada. □

Proposición 5.2 Considere el sistema (2.4) y la ley de control (5.2). Suponga que $k > 0$ y que la gráfica de formación usada es G_2 . Entonces el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.2) los agentes seguidores convergen a la formación deseada, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_i(t) - \boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{c}_{ni}(t)) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, mientras que el agente líder converge a la trayectoria deseada, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$.

Prueba 5.2 El resultado es similar a la Prueba 5.1. La diferencia es que se utiliza la gráfica de formación G_2 , $\mathbf{a} = [\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n^T \ \dots \ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_n^T \ \dot{\mathbf{m}}(t)^T]^T$, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_{n1}^T \ \dots \ \mathbf{c}_{n(n-1)}^T \ \mathbf{m}(t)^T]^T$ y

$$\tilde{A} = \mathcal{L}(G_2) + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (5.8)$$

□

Lema 5.1 Si la velocidad de la trayectoria deseada está acotada, $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta$, $\forall t \geq 0$, entonces, la velocidad del agente líder también se encuentra acotada por $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t)\| \leq \eta + \sqrt{2}k$. Además, si consideramos la gráfica de formación directa de cadena abierta con líder G_1 , entonces, la velocidad de cada agente seguidor está acotada por $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t)\| \leq \eta + (n-i+1)\sqrt{2}k$, $\forall i = 1, \dots, n-1$.

Prueba 5.3 El sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.2) para el agente líder está dado por

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t) = \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m})$$

Aplicando el operador norma y considerando la desigualdad del triángulo, se tiene

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t)\| \leq \|\dot{\mathbf{m}}\| + \|k \tanh(\boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{m})\|$$

Debido a que la velocidad de la trayectoria deseada está acotada $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta$ y que $\|k \tanh(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_i^*)\| \leq \sqrt{2}k$, entonces, la velocidad del agente líder se encuentra acotada por

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n\| \leq \eta + \sqrt{2}k$$

Ahora, tomando en cuenta el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.2) para los agentes seguidores

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1} - k \tanh(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Volviendo a aplicar el operador norma y considerando la desigualdad del triángulo, obtenemos que la velocidad de cada agente seguidor está acotada por

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t)\| \leq \eta + (n-i+1)\sqrt{2}k \quad i = 1, \dots, n-1.$$

□

Lema 5.2 Si la velocidad de la trayectoria deseada está acotada, $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta$, $\forall t \geq 0$, entonces, la velocidad del agente líder también se encuentra acotada por $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t)\| \leq \eta + \sqrt{2}k$. Además, si consideramos la gráfica de formación directa centrada en el líder G_2 entonces, la velocidad de cada agente seguidor está acotada por $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t)\| \leq \eta + 2\sqrt{2}k$, $\forall i = 1, \dots, n-1$.

Prueba 5.4 Tomando en cuenta el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.2) para los agentes seguidores

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_n - k \tanh(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{c}_{ni}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Al aplicar el operador norma y considerar la desigualdad del triángulo, se tiene

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t)\| \leq \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n\| + \|k \tanh(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{c}_{ni})\|$$

Debido a que la velocidad de la trayectoria deseada está acotada $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta$ entonces, la velocidad de cada agente seguidor está acotada por

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(t)\| \leq \eta + 2\sqrt{2}k \quad i = 1, \dots, n-1.$$

□

5.1.2. Campos vectoriales repulsivos

La ley de control para evadir obstáculos está basada en campos vectoriales repulsivos que dependen de la distancia al obstáculo. Sea $N_o = \{Ob_1, \dots, Ob_{n_{obs}}\}$ un conjunto de obstáculos fijos o móviles con coordenadas $\boldsymbol{\xi}_{o_j} = [x_{o_j} \quad y_{o_j}]^T$, $j = 1, \dots, n_{obs}$. Sea $\|\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\xi}_{o_j}\|$ la distancia entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo. Entonces, los obstáculos Ob_j , que se encuentran en peligro de colisión con el i -ésimo agente, pertenecen al conjunto

$$M_n = \{Ob_j \in N_o \mid \|\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\xi}_{o_j}\| \leq D\}, \quad j = 1, \dots, n_{obs} \quad (5.9)$$

donde D es la distancia mínima permitida entre los agentes y los obstáculos. Para evitar las colisiones con los obstáculos, proponemos campos vectoriales repulsivos dados por

$$\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j \in M_n} \epsilon_i \delta_{ij} \begin{bmatrix} (p_i - x_{o_j}) - (q_i - y_{o_j}) \\ (p_i - x_{o_j}) + (q_i - y_{o_j}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.10)$$

donde $\epsilon_i > 0$ es un parámetro de diseño y el parámetro δ_{ij} está dado como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \|\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\xi}_{o_j}\| \leq D \\ 0, & \text{si } \|\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\xi}_{o_j}\| > D \end{cases} \quad (5.11)$$

El parámetro δ_{ij} de (5.11) depende de la distancia entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo. El campo vectorial repulsivo se propone de tal manera que existe un foco inestable con sentido anti-horario, centrado en la posición de cada obstáculo.

5.1.3. Evasión de obstáculos de manera individual

Considere la gráfica de formación G_1 y el escenario cuando los agentes están en peligro de colisión con sólo un obstáculo. Entonces, (5.10) se simplifica a

$$\beta_i = \epsilon_i \delta_{i1} \begin{bmatrix} (p_i - x_{o1}) - (q_i - y_{o1}) \\ (p_i - x_{o1}) + (q_i - y_{o1}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.12)$$

Se consideran las siguientes suposiciones.

Suposición 5.1 Las condiciones iniciales de todos los agentes satisface $\|\alpha_i(0) - \xi_{o_j}(0)\| \geq D$. Esto es, no existe riesgo de colisión entre ningún agente y los obstáculos en $t = 0$.

Suposición 5.2 El agente R_i conoce la posición del agente R_{i+1} mientras que R_n conoce la posición de la trayectoria de marcha $\mathbf{m}(t) \forall t \geq 0$ y todos los agentes pueden detectar la presencia de obstáculos.

Proponemos añadir el campo vectorial repulsivo (5.12) a la ley de control definida en (5.2) obteniendo la siguiente ley de control

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) [\dot{\alpha}_{i+1} - k \tanh(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}) + \beta_i] \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.13a)$$

$$\begin{bmatrix} v_n(t) \\ w_n(t) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) [\dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) + \beta_n] \quad (5.13b)$$

Para el análisis de no colisión es útil definir las variables de distancia relativa entre los agentes y los obstáculos dadas por $a_{ji} = p_i - x_{o_j}$ y $b_{ji} = q_i - y_{o_j}$, $i = 1, \dots, n$. Nótese que si se considera el plano $a_{ji} - b_{ji}$ (Figura 5.1), se puede identificar el origen de este plano como la colisión entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo. El círculo de radio D corresponde a la región de sensado del i -ésimo agente. Dentro de esta región, existe peligro de colisión y por lo tanto se activan los campos vectoriales repulsivos. Fuera de esta región, no existe peligro de colisión y solo aparecen los campos vectoriales atractivos.

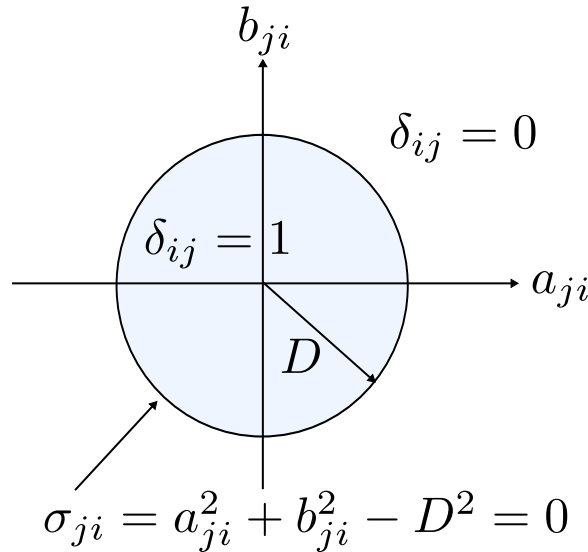


Figura 5.1: Distancia relativa entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo en el plano $a_{ji} - b_{ji}$.

Proposición 5.3 Considere el sistema (2.4) y la ley de control (5.13), con las definiciones dadas en (5.11), (5.12) con la gráfica de formación G_1 . Asuma que las Suposiciones 5.1 y 5.2 se satisfacen, y que el parámetro de diseño ϵ_i satisface $\epsilon_i > \frac{\eta + \mu + \sqrt{2k(n-i+1)}}{D}$ para $i = 1, \dots, n$ donde $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta$ y $\|\dot{\xi}_{o_j}(t)\| \leq \mu$. Entonces, el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.13) el agente líder logra seguir la trayectoria deseada, mientras que los agentes seguidores se alinean al patrón geométrico deseado y se mantienen a una distancia mayor o igual a D del obstáculo para todo $t \geq 0$.

Prueba 5.5 Considérese el caso cuando existe peligro de colisión entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo, entonces $\delta_{ij} = 1$. Definimos una superficie dada por

$$\sigma_{ji} = a_{ji}^2 + b_{ji}^2 - D^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.14)$$

donde la ley de control se vuelve discontinua y el campo vectorial repulsivo aparece en la superficie y en el interior de (5.14). El comportamiento de σ_{ji} se determina analizando la derivada de las variables de distancia relativa a_{ji} y b_{ji} evaluadas a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado con el fin de obtener el parámetro ϵ_i que permita a los agentes mantenerse fuera del círculo de radio D logrando de esta manera, la evasión de colisiones ante la presencia de obstáculos. La dinámica de las variables de distancia relativa está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{a}_{ji} \\ \dot{b}_{ji} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{i+1} - k \tanh(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}) - \dot{\xi}_{o_j} \\ \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} a_{ji} - b_{ji} \\ a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \begin{bmatrix} \dot{a}_{jn} \\ \dot{b}_{jn} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j} \\ \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} a_{jn} - b_{jn} \\ a_{jn} + b_{jn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando la derivada de (5.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ji} &= 2 \begin{bmatrix} a_{ji} & b_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_{ji} \\ \dot{b}_{ji} \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} a_{ji} & b_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{i+1} - k \tanh(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i}) - \dot{\xi}_{o_j} \\ \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j} \end{bmatrix} + 2\epsilon \begin{bmatrix} a_{ji} & b_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ji} - b_{ji} \\ a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix} \\ \dot{\sigma}_{jn} &= 2 \begin{bmatrix} a_{jn} & b_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j} \\ \dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j} \end{bmatrix} + 2\epsilon \begin{bmatrix} a_{jn} & b_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{jn} - b_{jn} \\ a_{jn} + b_{jn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es necesario mostrar que $\dot{\sigma}_{ji} > 0$, esto significa que el campo vectorial resultante dentro del círculo apunta hacia la región libre de colisiones. Por lo tanto, el parámetro ϵ_i debe ser seleccionado de tal manera que $\dot{\sigma}_{ji} > 0$. Utilizando la definición del producto punto entre dos vectores se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ji} &= 2\sqrt{a_{ji}^2 + b_{ji}^2} \left[\|\dot{\alpha}_{i+1}\| \cos \tilde{\theta} - k \|\tanh(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i})\| \cos \hat{\theta} - \|\dot{\xi}_{o_j}\| \cos \tilde{\theta} \right] \\ &\quad + 2\epsilon(a_{ji}^2 + b_{ji}^2) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\sigma}_{jn} &= 2\sqrt{a_{jn}^2 + b_{jn}^2} \left[\|\dot{\mathbf{m}}\| \cos \tilde{\varphi} - k \|\tanh(\alpha_n - \mathbf{m})\| \cos \hat{\varphi} - \|\dot{\xi}_{o_j}\| \cos \tilde{\varphi} \right] \\ &\quad + 2\epsilon(a_{jn}^2 + b_{jn}^2) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ y $\tilde{\theta}$ es el ángulo que forma el vector $\begin{bmatrix} a_{ji} & b_{ji} \end{bmatrix}$ con el vector $\dot{\alpha}_{i+1}$, $\tanh(\alpha_i - \alpha_{i+1} - \mathbf{c}_{(i+1)i})$ y $\dot{\xi}_{o_j}$, respectivamente. De manera similar $\tilde{\varphi}$, $\hat{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}$ son los ángulos que forma el vector $\begin{bmatrix} a_{jn} & b_{jn} \end{bmatrix}$ con los vectores $\dot{\mathbf{m}}$, $\tanh(\alpha_n - \mathbf{m})$ y $\dot{\xi}_{o_j}$, respectivamente. Recordando que la velocidad de la trayectoria deseada y de cada agente se encuentra acotada de la siguiente manera $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta$, $\|\dot{\alpha}_i(t)\| \leq \eta + (n-i+1)\sqrt{2k}$, $\forall t \geq 0$, al igual que la velocidad del obstáculo se encuentra acotada $\|\dot{\xi}_{o_j}(t)\| \leq \mu$, entonces, el valor más negativo de $\dot{\sigma}_{ji}$ está dado por

$$\dot{\sigma}_{ji} \geq -2\sqrt{a_{ji}^2 + b_{ji}^2} \left[\eta + \sqrt{2k}(n-i+1) + \mu \right] + 2\epsilon(a_{ji}^2 + b_{ji}^2) > 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.15a)$$

$$\dot{\sigma}_{jn} \geq -2\sqrt{a_{jn}^2 + b_{jn}^2} \left[\eta + \sqrt{2k} + \mu \right] + 2\epsilon(a_{jn}^2 + b_{jn}^2) > 0 \quad (5.15b)$$

De la expresión dada en (5.15) se diseña el parámetro ϵ_i , de tal manera que $\dot{\sigma}_{ji} > 0$, por lo que

$$\epsilon_i > \frac{\eta + \mu + \sqrt{2}k(n-i+1)}{\sqrt{a_{ji}^2 + b_{ji}^2}} \quad i = 1, \dots, n.$$

Cabe resaltar que se analiza el caso cuando el obstáculo se encuentra fuera de la región de sentido y, debido al movimiento de éste o de los agentes, posteriormente se localiza en algún punto de la circunferencia de dicho círculo. Debido a esto, podemos suponer que $a_{ji}^2 + b_{ji}^2 = D^2$, por lo tanto

$$\epsilon_i > \frac{\eta + \mu + \sqrt{2}k(n-i+1)}{D} \quad i = 1, \dots, n.$$

Con este valor de ϵ_i , se asegura que $\dot{\sigma}_{ji} > 0$. Esto implica que los agentes se alejarán del obstáculo cuando estén a una distancia D . Dado que $\|\alpha_i(0) - \xi_{o_j}(0)\| \geq D$ entonces los agentes evitan la colisión y satisfacen $\|\alpha_i(t) - \xi_{o_j}(t)\| \geq D \quad \forall t \geq 0$.

□

5.1.4. Evasión de obstáculos de manera grupal

Considere la gráfica de formación G_2 y el escenario cuando el agente líder es un agente virtual localizado en el centroide del patrón geométrico el cual está en peligro de colisión con un solo obstáculo, entonces (5.10) se simplifica a

$$\beta_n = \epsilon_n \delta_{n1} \begin{bmatrix} (p_n - x_{o_1}) - (q_n - y_{o_1}) \\ (p_n - x_{o_1}) + (q_n - y_{o_1}) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

En este caso, definimos que la distancia mínima D entre el líder y el obstáculo debe ser $D = \tilde{D} + \max \|\mathbf{c}_{ni}\|$, $i = 1, \dots, n-1$, donde \tilde{D} es un parámetro escogido por el usuario y corresponde a la distancia mínima permitida entre el i -ésimo seguidor y el obstáculo. Para ejemplificar, consideremos la Figura (5.2), la cual consiste de cuatro agentes; tres de ellos colocados en los vértices de un triángulo equilátero y el cuarto colocado en el centroide de dicho triángulo. Supongamos que el obstáculo se encuentra justo delante de uno de los agentes, tal y como se muestra en la Figura (5.2). Es en ese punto donde el obstáculo se encuentra más cercano al i -ésimo agente. De esta manera, se asegura que el patrón geométrico formado por los agentes evitarán la colisión con el obstáculo.

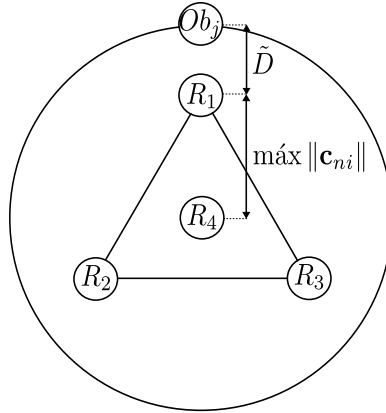


Figura 5.2: Obtención de la distancia mínima D .

Se consideran las siguientes suposiciones

Suposición 5.3 Al igual que en el caso anterior, las condiciones iniciales de todos los agentes satisface $\|\alpha_i(0) - \xi_{o_j}(0)\| \geq D$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n_{obs}$. Esto significa que los obstáculos se encuentran fuera de la región de sensado del i -ésimo agente.

Suposición 5.4 Los agentes seguidores R_i , $i = 1, \dots, n-1$ conocen la posición del líder virtual R_n $\forall t \geq 0$ pero no conocen la posición de los obstáculos, solo el líder virtual puede detectar la presencia de los obstáculos.

La ley de control con evasión de obstáculos para el líder virtual está dada por

$$\begin{bmatrix} v_n(t) \\ w_n(t) \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) [\dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) + \beta_n] \quad (5.17)$$

Proposición 5.4 Considere el sistema (2.4) y la ley de control (5.17), con las definiciones (5.11), (5.16) con la gráfica de formación G_2 . Suponga que existe riesgo de colisión con un obstáculo y que $\epsilon_n > \frac{\eta + \mu + \sqrt{2k}}{D}$. Entonces, el sistema en lazo cerrado (2.4)-(5.17) el líder virtual converge a la trayectoria deseada y $\|\alpha_n(t) - \xi_{o_j}(t)\| \geq D$, esto es, que el agente líder permanece a una distancia mayor o igual a D del obstáculo; lo que implica que todos los agentes seguidores permanecen a una distancia mayor o igual a la distancia mínima D del obstáculo, i.e. $\|\alpha_i(t) - \xi_{o_j}(t)\| \geq \tilde{D}$, $\forall t \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Prueba 5.6 La prueba es similar a la presentada en la Prueba 5.5. Se utiliza la superficie dada por (5.14) para el agente líder

$$\sigma_{jn} = a_{jn}^2 + b_{jn}^2 - D^2 = 0 \quad (5.18)$$

y se calcula su derivada, la cual está en función de la derivada de las variables de distancia relativa a_{jn} y b_{jn} evaluadas a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado, obteniendo

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{jn} \\ \dot{b}_{jn} \end{bmatrix} = [\dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j}] + \epsilon_n \begin{bmatrix} a_{jn} - b_{jn} \\ a_{jn} + b_{jn} \end{bmatrix}$$

La derivada de (5.18) está dada por

$$\dot{\sigma}_{jn} = 2[a_{jn} \quad b_{jn}] [\dot{\mathbf{m}} - k \tanh(\alpha_n - \mathbf{m}) - \dot{\xi}_{o_j}] + 2\epsilon_n [a_{jn} \quad b_{jn}] \begin{bmatrix} a_{jn} - b_{jn} \\ a_{jn} + b_{jn} \end{bmatrix}$$

Nuevamente el objetivo es diseñar el parámetro ϵ_n de tal manera que $\dot{\sigma}_{jn}$ sea positiva. Con esto se asegura que el campo vectorial resultante dentro del círculo apunta hacia la región libre de colisiones. Utilizando la definición del producto punto entre dos vectores se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{jn} &= 2\sqrt{a_{jn}^2 + b_{jn}^2} \left[\|\dot{\mathbf{m}}\| \cos \tilde{\phi} - k \|\tanh(\alpha_n - \mathbf{m})\| \cos \hat{\phi} - \|\dot{\xi}_{o_j}\| \cos \check{\phi} \right] \\ &\quad + 2\epsilon(a_{jn}^2 + b_{jn}^2) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\phi}$, $\hat{\phi}$ y $\check{\phi}$ son los ángulos que forma el vector $[a_{jn} \quad b_{jn}]$ con los vectores $\dot{\mathbf{m}}$, $\tanh(\alpha_n - \mathbf{m})$ y $\dot{\xi}_{o_j}$, respectivamente. Recordando que la velocidad de la trayectoria deseada se encuentra acotada de la siguiente manera $\|\dot{\mathbf{m}}(t)\| \leq \eta \forall t \geq 0$, al igual que la velocidad del obstáculo se encuentra acotada $\|\dot{\xi}_{o_j}(t)\| \leq \mu$, entonces, el valor más negativo de $\dot{\sigma}_{jn}$ está dado por

$$\dot{\sigma}_{jn} \geq -2\sqrt{a_{jn}^2 + b_{jn}^2} [\eta + \sqrt{2k} + \mu] + 2\epsilon(a_{jn}^2 + b_{jn}^2) > 0 \quad (5.19)$$

De (5.19) se diseña el parámetro ϵ_n , de tal manera que $\dot{\sigma}_{jn} > 0$, por lo que

$$\epsilon_n > \frac{\eta + \mu + \sqrt{2k}}{\sqrt{a_{jn}^2 + b_{jn}^2}}$$

Suponiendo que el obstáculo se encuentra en algún punto de la región de sensado entonces $a_{jn}^2 + b_{jn}^2 = D^2$, por lo que

$$\epsilon_n > \frac{\eta + \mu + \sqrt{2}k}{D}$$

Con este valor de ϵ_n , se asegura que $\dot{\sigma}_{jn} > 0$. Esto implica que el agente líder se aleja del obstáculo cuando se encuentra a una distancia \bar{D} y los agentes seguidores se alejan del obstáculo cuando éste se encuentre a una distancia \bar{D} . Esto es, $\|\alpha_n(t) - \xi_{o_j}(t)\| \geq D$ y $\|\alpha_i(t) - \xi_{o_j}(t)\| \geq \bar{D} \forall t \geq 0$.

□

5.2. Extensión al caso de agentes de segundo orden

Considere el grupo de agentes definido previamente $N = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$. Supongamos ahora que cada agente está modelado por dinámicas de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.20)$$

donde $\mathbf{r}_i = [x_i \ y_i] \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de posición en el plano y $\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{u}_{i_x} \ \hat{u}_{i_y}] \in \mathbb{R}^2$ representa la aceleración y corresponde a la entrada de control. La ley de control se basa en funciones potenciales atractivas para lograr formar un patrón geométrico y realizar el seguimiento de una trayectoria deseada y de campos vectoriales repulsivos para evadir colisiones entre agentes y ante la presencia de obstáculos, fijos o móviles. Usando la metodología estándar de funciones potenciales artificiales, el potencial atractivo está dado por

$$\mathbf{U}_{\text{att}i} = \frac{1}{2} (k_1 \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^*\|^2 + k_2 \|\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_i^*\|^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.21)$$

donde $k_1, k_2 > 0$ son parámetros de diseño, \mathbf{r}_i^* es la posición deseada del i -ésimo agente. Dada la gráfica de formación directa centrada en el líder G_2 la posición deseada de un agente está dada por

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_n + \mathbf{c}_{ni} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{r}_n^* = \mathbf{m}(t) \quad (5.22b)$$

Definimos la fuerza atractiva, $\mathbf{F}_{\text{att}i}$, como la suma del gradiente negativo de la función potencial con respecto a la posición y velocidad del agente R_i obteniendo la siguiente expresión

$$\mathbf{F}_{\text{att}i} = -k_1(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^*) - k_2(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_i^*) \quad (5.23)$$

5.2.1. Evasión de colisiones entre agentes

Para la evasión de colisiones entre agentes, se definen los siguientes parámetros

- $a_{\text{máx}i}$ es la máxima aceleración de cada agente, es decir, $\|\hat{\mathbf{u}}_i\| \leq a_{\text{máx}i}$.
- $\rho_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$, $i \neq j$ es la distancia entre el agente R_i y el agente R_j .
- $v_{ij} = [\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j]^T \mathbf{n}_{ij}$ es la proyección de la velocidad relativa entre el agente R_i y el agente R_j a la línea que los une, donde $\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|}$ es un vector unitario que apunta del agente R_i hacia el agente R_j , como se muestra en la Figura 5.3.
- D corresponde a la región de sensado del agente R_i , y,

- Considerando las siguientes ecuaciones de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (5.24a)$$

$$t = \frac{v_f - v_0}{a} \quad (5.24b)$$

donde d es la distancia recorrida, v_0 es la velocidad inicial, v_f es la velocidad final, a es la aceleración y t es el tiempo. Sustituyendo (5.24b) en (5.24a) se tiene

$$d = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$$

Considerando que la velocidad inicial $v_0 = 0$, y si se aplica una desaceleración máxima de magnitud $a_{\text{máx}_i}$ a cada agente para reducir su velocidad, entonces la distancia recorrida por el agente antes de que v_{ij} se reduzca a cero está dada por

$$\rho_{ij} = \frac{v_{ij}^2}{2a_{\text{máx}_i}} \quad (5.25)$$

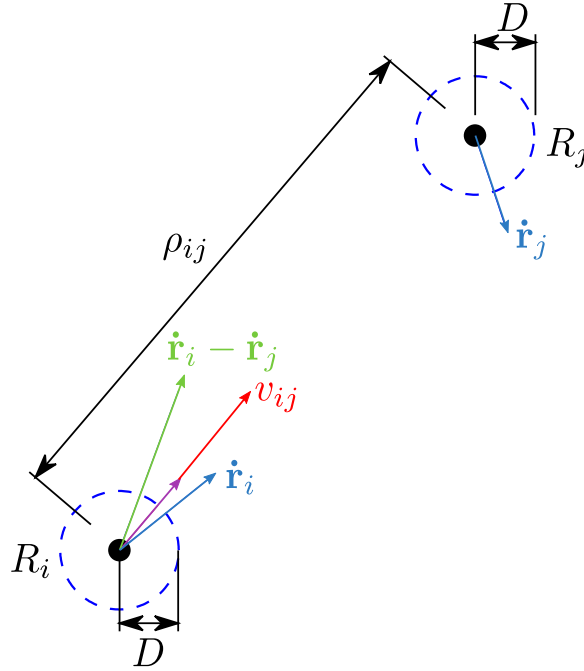


Figura 5.3: Definición de los parámetros de evasión de colisiones.

Los campos vectoriales repulsivos se definen de una manera similar a (5.10), obteniendo la siguiente expresión

$$\tilde{\beta}_i = \epsilon \sum_{j=1, i \neq j}^n \delta_{ij} \begin{bmatrix} (x_i - x_j) - (y_i - y_j) \\ (x_i - x_j) + (y_i - y_j) \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

La diferencia consiste en que los campos vectoriales repulsivos (5.10) están definidos para la colisión de agentes con obstáculos, además de que se basan en la posición del punto frontal de los agentes y

los campos vectoriales repulsivos (5.26) están definidos para la colisión entre agentes considerando la posición del centro geométrico de cada uno de ellos. El parámetro δ_{ij} está dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < |\rho_{ij} - \varrho_{ij}| \leq D \text{ y } v_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

con $\epsilon > 0$ como el parámetro de diseño. Note que ahora el parámetro δ_{ij} tiene restricciones tanto en posición como en velocidad, es decir, depende tanto de la distancia entre los agentes como de la velocidad relativa que existe entre dos pares de agentes. La Figura 5.4 muestra de manera gráfica el valor del parámetro δ_{ij} . En la zona 1, el i -ésimo agente se encuentra fuera de la zona de sentido y $v_{ij} < 0$, esto es, que el agente R_i se aleja del agente R_j , por lo tanto $\delta_{ij} = 0$ y no se necesita realizar algún movimiento de evasión. En la zona 2, el i -ésimo agente se encuentra fuera de la zona de sentido, $v_{ij} \geq 0$, esto es que el agente R_i se acerca al agente R_j , entonces $\delta_{ij} = 0$. En la zona 3, el i -ésimo agente se encuentra dentro de la zona de sentido pero $v_{ij} < 0$, esto es que el agente R_i se aleja del agente R_j agente por lo que $\delta_{ij} = 0$. Finalmente en la zona 4, el i -ésimo agente se encuentra dentro de la zona de sentido y se mueve de tal manera que se acerca al j -ésimo agente por lo que es necesario activar la estrategia de evasión y $\delta_{ij} = 1$.

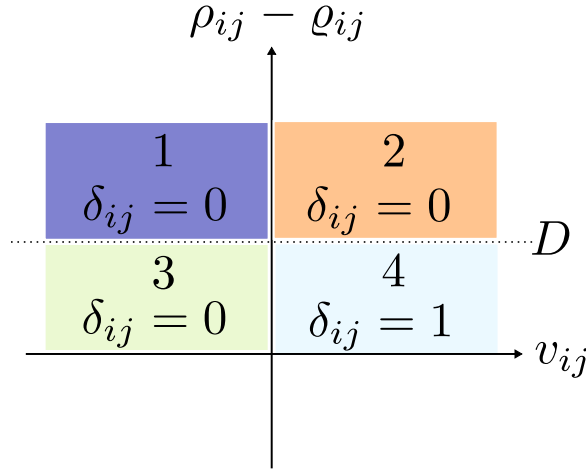


Figura 5.4: Plano $v_{ij} - (\rho_{ij} - \varrho_{ij})$.

5.2.2. Evasión de colisiones con obstáculos

Sea $\xi_{o_j} = [x_{o_j} \ y_{o_j}]^T$, $j = 1, \dots, n_{obs}$ el vector de posición del j -ésimo obstáculo en el plano. Los campos vectoriales repulsivos se definen de manera similar a (5.10)

$$\hat{\beta}_i = \epsilon \sum_{j=1}^{n_{obs}} \delta_{o_{ij}} \begin{bmatrix} (x_i - x_{o_j}) - (y_i - y_{o_j}) \\ (x_i - x_{o_j}) + (y_i - y_{o_j}) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.27)$$

donde

$$\delta_{o_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < |\rho_{i,o_j} - \varrho_{i,o_j}| \leq d_{obs} \text{ y } v_{i,o_j} \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y

- $\rho_{i,o_j} = \|\mathbf{r}_i - \xi_{o_j}\|$, es la distancia entre el agente R_i y el obstáculo ξ_{o_j} .

- $v_{i,o_j} = [\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\boldsymbol{\xi}}_{o_j}]^T \mathbf{n}_{i,o_j}$ es la proyección de la velocidad relativa entre el agente R_i y el obstáculo $\boldsymbol{\xi}_{o_j}$ a la línea que los une, donde $\mathbf{n}_{i,o_j} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{o_j} - \mathbf{r}_i}{\|\boldsymbol{\xi}_{o_j} - \mathbf{r}_i\|}$ es un vector unitario que apunta del agente R_i hacia el el obstáculo $\boldsymbol{\xi}_{o_j}$.
- d_{obs} corresponde a la región de sensado del agente R_i con respecto al obstáculo
- Si se aplica una desaceleración máxima de magnitud $a_{\text{máx}_i}$ a cada agente para reducir su velocidad, entonces la distancia recorrida por el agente antes de que v_{i,o_j} se reduzca a cero está dada por

$$\rho_{i,o_j} = \frac{v_{i,o_j}^2}{2a_{\text{máx}_i}} \quad (5.28)$$

Nuevamente, el parámetro $\delta_{o_{ij}}$ tiene restricciones en la posición y en la velocidad, i.e., depende de la distancia entre el i -ésimo agente y el j -ésimo obstáculo y la velocidad relativa entre ellos. La diferencia con los campos repulsivos (5.10), consiste en que en este último caso se utiliza la posición del centro geométrico de los agentes en lugar del punto frontal. Finalmente, la ley de control para cada agente está dada por

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_{\text{att}_i} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i + \hat{\boldsymbol{\beta}}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.29)$$

5.2.3. Modelo dinámico de los cuadrirotos

Para obtener el modelo dinámico se representa al cuadrirotor como un cuerpo rígido que se puede mover en un espacio tridimensional sujeto a una fuerza y a tres momentos. La dinámica de los cuatro motores eléctricos es relativamente rápida por lo que no se tomara en cuenta al igual que la flexibilidad de las hélices.

Colocamos al cuadrirotor dentro un marco de referencia fijo de tipo NED (Norte-East-Down), el más comúnmente utilizado para vehículos aéreos, como se muestra en la Figura 5.5. Representamos la posición del centro de masa del cuadrirotor respecto al marco de referencia fijo mediante el vector $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ y su orientación con respecto al marco inercial del cuadrirotor mediante el vector $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\psi \ \theta \ \phi]^T$, donde ψ , θ y ϕ son los ángulos de Euler de guiñada, alabeo y cabeceo respectivamente. La dinámica no lineal completa del cuadrirotor puede ser expresada como

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{D} + \mathbf{R}\mathbf{F} \quad (5.30a)$$

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\boldsymbol{\Omega} \times I\boldsymbol{\Omega} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (5.30b)$$

donde \mathbf{D} es un vector unitario sobre el eje D , $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(\mathbf{3})$ es una matriz de rotación que relaciona el marco de referencia fijo con el marco de referencia del dron, \mathbf{F} representa la fuerza total aplicada al dron, m es su masa total, g es la constante de gravedad, $\boldsymbol{\Omega}$ representa la velocidad angular del dron respecto al marco de referencia del mismo, I representa la matriz de inercia, y $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ es el par total.

Sea $u = \sum_{i=1}^4 T_i$ la fuerza aplicada al dron, la cual es generada por los cuatro motores. Asumiendo que esta fuerza tiene solamente una componente en la dirección de Z , la fuerza total puede ser escrita como $\mathbf{F} = [0 \ 0 \ -u]^T$. Representando $\cos(*)$ y $\sin(*)$ como c_* y s_* respectivamente, la matriz de rotación esta definida como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Definimos un vector auxiliar $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ relacionado al par generalizado $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ y basado en la ecuación (5.30b):

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_\psi \\ \hat{\tau}_\theta \\ \hat{\tau}_\phi \end{bmatrix} = I^{-1}W^{-1}(-I\dot{W}\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} - W\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \times IW\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \quad (5.32)$$

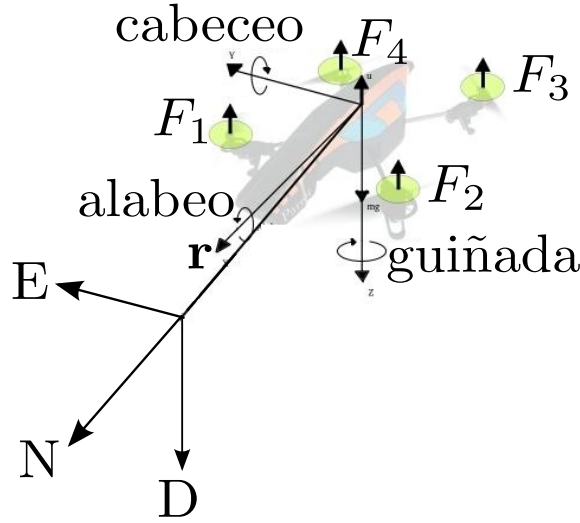


Figura 5.5: Diagrama NED de un cuadrirotor.

donde $\Omega = W\dot{\eta}$ y W es

$$W = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Utilizando las ecuaciones anteriores podemos representar el modelo dinámico del cuadrirotor como

$$m\ddot{x} = -u(\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) \quad (5.34a)$$

$$m\ddot{y} = -u(\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) \quad (5.34b)$$

$$m\ddot{z} = -u(\cos\theta \cos\phi) + mg \quad (5.34c)$$

$$\ddot{\psi} = \hat{\tau}_\psi \quad (5.34d)$$

$$\ddot{\theta} = \hat{\tau}_\theta \quad (5.34e)$$

$$\ddot{\phi} = \hat{\tau}_\phi \quad (5.34f)$$

donde x, y son las coordenadas en el plano horizontal, z es la posición vertical, ψ es el ángulo de guiñada alrededor del eje z , θ es el ángulo de cabeceo alrededor del eje y (del cuadrirotor), y ϕ es el ángulo de alabeo alrededor del eje x del cuadrirotor. Las entradas de control $u, \hat{\tau}_\psi, \hat{\tau}_\theta$ y $\hat{\tau}_\phi$ son el empuje total y los momentos angulares.

El modelo anterior puede ser simplificado utilizando solamente las ecuaciones (5.34a)-(5.34c) si consideramos que el cuadrirotor con el que se realizarán las pruebas experimentales cuenta con un controlador interno que se encarga de posicionarlo en cualquier ángulo solicitado por el usuario. Además las entradas de control serán los ángulos de cabeceo, alabeo y guiñada. El movimiento del cuadrirotor en el plano horizontal será controlado mediante pequeñas variaciones en los ángulos θ y ϕ en un rango de -5° a 5° por lo que podemos considerar que $\sin(*) = *$ y que $\cos(*) = 1$. Sustituyendo dichas consideraciones en las ecuaciones (5.34a)-(5.34c) obtenemos un nuevo sistema

$$m\ddot{x} = -u(\theta \cos\psi + \phi \sin\psi) \quad (5.35a)$$

$$m\ddot{y} = -u(\theta \sin\psi - \phi \cos\psi) \quad (5.35b)$$

$$m\ddot{z} = -u + mg \quad (5.35c)$$

En una primera etapa consideramos que el cuadrirotor solamente se moverá en el plano horizontal y mantendrá una altura constante, con lo que de la ecuación (5.35c) obtenemos que la fuerza de sustentación se equilibra con el peso del cuadrirotor.

$$u = mg \quad (5.36)$$

Sustituyendo (5.36) en (5.35a) y (5.35b) obtenemos un modelo más simple para controlar al cuadrirotor en el plano horizontal

$$\ddot{x} = -g(\theta \cos \psi + \phi \sin \psi) \quad (5.37a)$$

$$\ddot{y} = -g(\theta \sin \psi - \phi \cos \psi) \quad (5.37b)$$

Factorizamos las variables de control θ y ϕ para obtener el modelo dinámico simplificado del cuadrirotor

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = A_d(\psi) \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Si el modelo dado en (5.38) lo extendemos al caso de n cuadrirotos, entonces la ley de control para cada cuadrirotor está dada por

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} = -\frac{1}{g} A_d^{-1}(\psi_i) \hat{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.39)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_i$ es la entrada de control definida en (5.29).

5.3. Simulaciones numéricas

Para el caso de evasión de obstáculos de manera individual se consideran dos agentes seguidores y un líder donde el vector de posición relativo se define como $\mathbf{c}_{32} = [-0.3 \quad 0.2 \cos(\frac{\pi}{6})]^T$ y $\mathbf{c}_{21} = [0 \quad -0.4 \cos(\frac{\pi}{6})]^T$. La distancia mínima permitida es $D = 0.4$ metros. Se tiene que la velocidad de la trayectoria deseada está acotada por $\eta = 0.23$ m/s, la velocidad del obstáculo también está acotada por $\mu = 0.32$ m/s y $k = 1$. Con estos valores, el parámetro ϵ_i debe cumplir: $\epsilon_1 > 4.91$, $\epsilon_2 > 8.44$ y $\epsilon_3 > 11.98$. Por lo tanto, escogemos los siguientes valores: $\epsilon_1 = 5$, $\epsilon_2 = 9$ y $\epsilon_3 = 12.5$. De esta manera se asegura que la condición de la distancia mínima no sea violada. La Figura 5.6 muestra el comportamiento en el plano de los tres agentes. El líder sigue una trayectoria definida por $\mathbf{m}(t) = [1.6 \cos(\omega_1 t) \quad 0.8 \sin(2\omega_1 t)]^T$ con $\omega_1 = \frac{2\pi}{60}$. El punto frontal de cada agente forma un triángulo equilátero de 0.3464 metros por lado y se localiza a $\ell = 0.045$ metros del punto medio del eje de las ruedas. Las condiciones iniciales para los agentes seguidores son $[x_1(0) \quad y_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [1.9 \quad 0.2 \quad 0]^T$, $[x_2(0) \quad y_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [1.6 \quad 0.6 \quad -\frac{\pi}{8}]^T$ y para el líder $[x_3(0) \quad y_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [2.5 \quad -0.1 \quad \frac{\pi}{8}]^T$. El obstáculo tiene una trayectoria definida por $[1.6 \cos(\omega_2 t) \quad -0.8 \sin(2\omega_2 t)]^T$ con $\omega_2 = \frac{2\pi}{45}$, esto es, una trayectoria opuesta a la de los agentes. La condición inicial del obstáculo es $[x_{o1} \quad y_{o1}]^T = [1.6 \quad 0]^T$.

La Figura 5.7 presenta todas las posibles distancias entre los agentes y el obstáculo. Note que la distancia entre cualquier agente y el obstáculo siempre es mayor o igual a la distancia predefinida $D = 0.4$ metros.

Es importante destacar que el patrón geométrico se pierde cuando cualquiera de los agentes seguidores está evadiendo al obstáculo. Esto se puede apreciar mejor en la Figura 5.8 donde se muestran el error de posición y el error de formación.

Para el caso de evasión de obstáculos de forma grupal, el sistema consiste de tres agentes seguidores y un líder virtual donde el vector de posición relativo está definido como $\mathbf{c}_{43} = [0.2 \quad 0]^T$, $\mathbf{c}_{42} = [-0.2 \sin(\frac{\pi}{6}) \quad 0.2 \cos(\frac{\pi}{6})]^T$ y $\mathbf{c}_{41} = [-0.2 \sin(\frac{\pi}{6}) \quad -0.2 \cos(\frac{\pi}{6})]^T$. Se tiene que $\max \|\mathbf{c}_{ni}\| =$

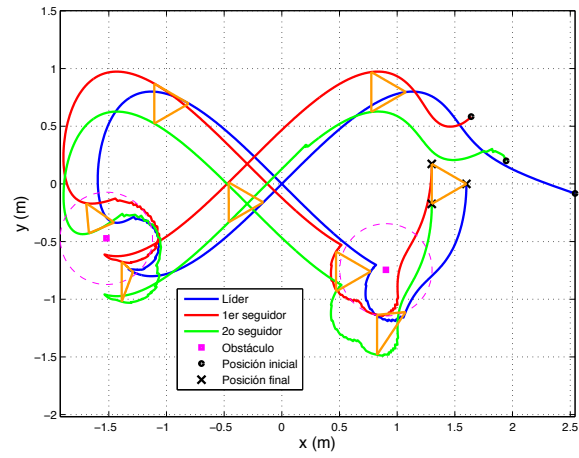


Figura 5.6: Trayectoria en el plano de los agentes.

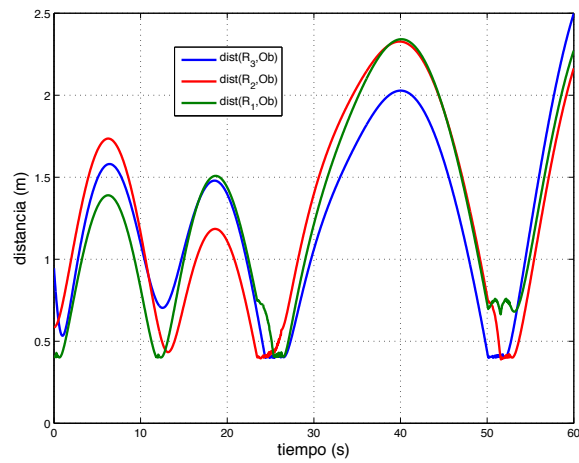


Figura 5.7: Distancias entre los agentes y el obstáculo.

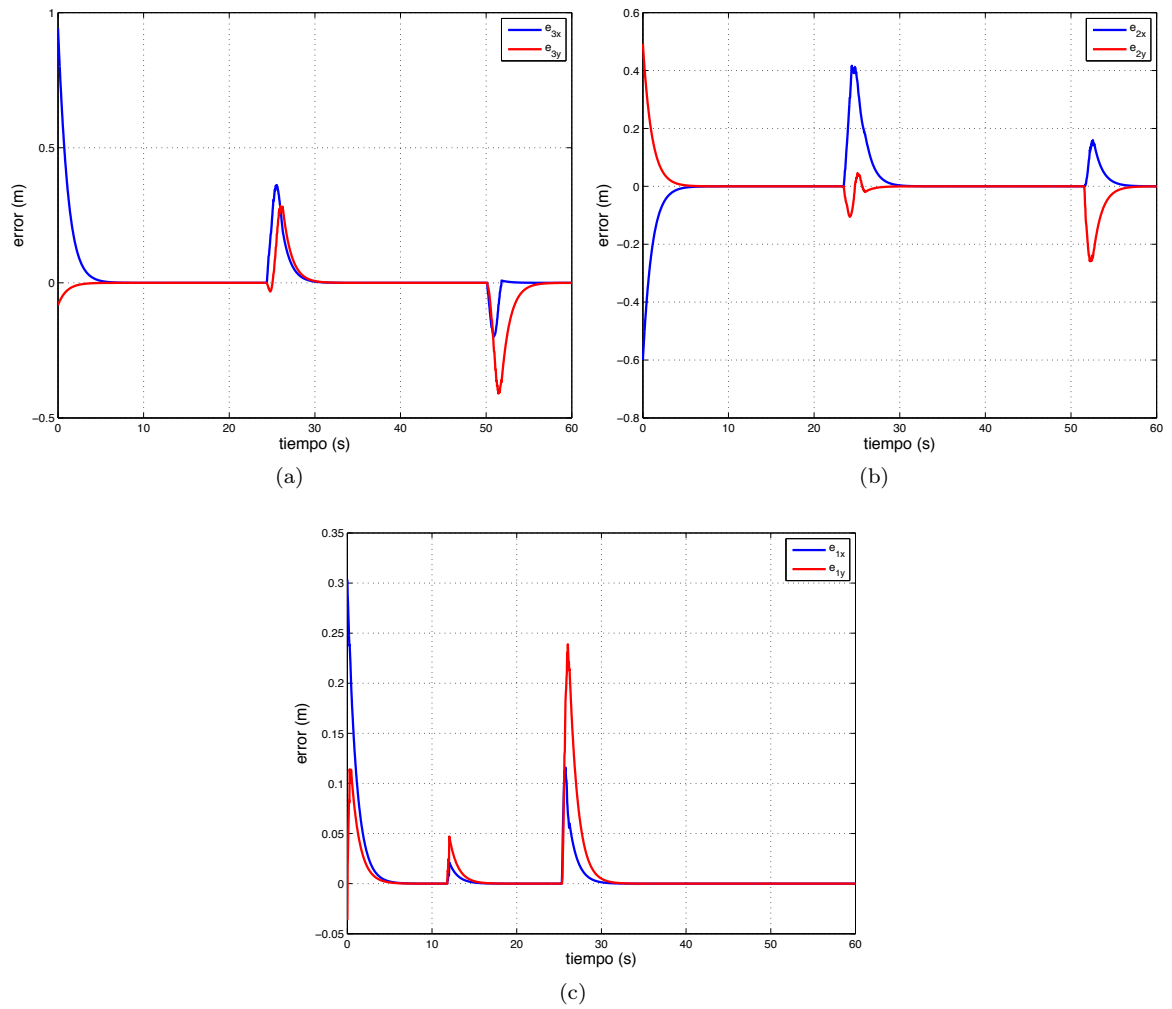


Figura 5.8: (a) Error de posición del líder. (b) Error de formación de R_2 . (c) Error de formación de R_1 .

0.2 metros y consideramos que la distancia mínima entre el i -ésimo agente y el obstáculo sea de $\tilde{D} = 0.2$ metros, entonces, la distancia mínima permitida es $D = 0.4$ metros. El parámetro $\epsilon_4 > 4.91$, por lo que escogemos $\epsilon_4 = 5$. De esta manera se asegura que la distancia mínima no será violada. La Figura 5.9 muestra el comportamiento en el plano de los cuatro agentes. El líder sigue la misma trayectoria $\mathbf{m}(t)$ definida en la simulación anterior. El punto frontal del líder se localiza en el centroide del patrón geométrico correspondiente al mismo triángulo equilátero de la simulación anterior. La condición inicial para el líder es $[x_4(0) \ y_4(0) \ \theta_4(0)]^T = [0.7 \ -0.2 \ 0]^T$ y para los seguidores $[x_3(0) \ y_3(0) \ \theta_3(0)]^T = [0.9 \ 0.2 \ -\frac{\pi}{8}]^T$, $[x_2(0) \ y_2(0) \ \theta_2(0)]^T = [1.3 \ -0.5 \ \frac{\pi}{8}]^T$, $[x_1(0) \ y_1(0) \ \theta_1(0)]^T = [1 \ -0.3 \ 0]^T$. También el obstáculo presenta la misma trayectoria y las mismas condiciones iniciales. Debido a que el vector de posición relativo es constante, el patrón geométrico formado por los agentes mantendrá la misma orientación, emulando el movimiento translacional de cuerpos rígidos.

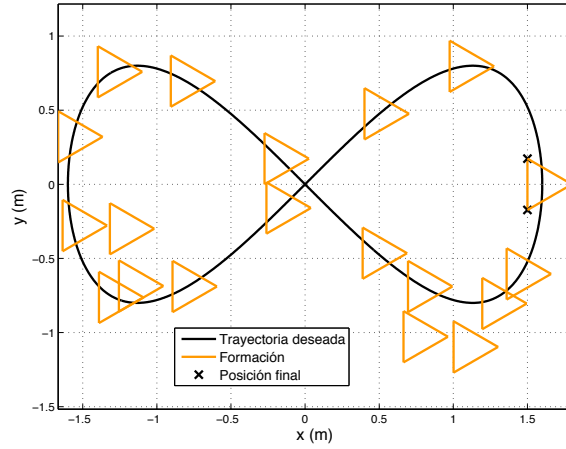


Figura 5.9: Trayectoria en el plano de los cuatro agentes.

La Figura 5.10 presenta las posibles distancias entre los agentes y el obstáculo. Note que la distancia entre el líder virtual y el obstáculo siempre es mayor o igual a la distancia mínima permitida $D = 0.4$ metros y que la distancia entre cualquier seguidor y el obstáculo es mayor o igual a la distancia predefinida $\tilde{D} = 0.2$ metros.

Esto se puede apreciar mejor en la Figura 5.11 donde el triángulo equilátero, formado por los agentes, evaden al obstáculo manteniendo el patrón geométrico.

Por otro lado, en la Figura 5.12 se muestra el error de posición y el error de formación. La perturbación presentada en el error de posición se debe a la presencia del obstáculo, mientras que el error de formación converge a cero, esto es, que el patrón geométrico se mantiene ante la presencia del obstáculo.

La Figura 5.13 presenta una comparación de las trayectorias de 6 agentes en un ambiente libre de obstáculos donde los agentes se tienen que evadir el uno al otro. La Figura 5.13a se obtiene usando el modelo (5.20) con la entrada de control dada por (5.29). Las condiciones iniciales son: $\mathbf{r}_1(0) = [3 \ -2]^T$, $\mathbf{r}_2(0) = [-3 \ -2]^T$, $\mathbf{r}_3(0) = [-5 \ 0]^T$, $\mathbf{r}_4(0) = [5 \ 0]^T$, $\mathbf{r}_5(0) = [3 \ 2]^T$ y $\mathbf{r}_6(0) = [-3 \ 2]^T$. Existe un séptimo agente *virtual* considerado como el líder localizado en $\mathbf{r}_7 = [0 \ 0]^T$ con el cual los otros seis agentes se alinean en el patrón geométrico deseado. Los vectores de posición deseados se definen de tal manera que los agentes forman un hexágono de 4 metros por lado y están definidos como $\mathbf{c}_{71} = [-2 \ 4 \cos(\pi/6)]^T$, $\mathbf{c}_{72} = [2 \ 4 \cos(\pi/6)]^T$, $\mathbf{c}_{73} = [2 + 4 \sin(\pi/6) \ 0]^T$, $\mathbf{c}_{74} = [-2 - 4 \sin(\pi/6)]^T$, $\mathbf{c}_{75} = [-2 \ -4 \cos(\pi/6)]^T$, $\mathbf{c}_{76} = [2 \ -4 \cos(\pi/6)]^T$. Los parámetros

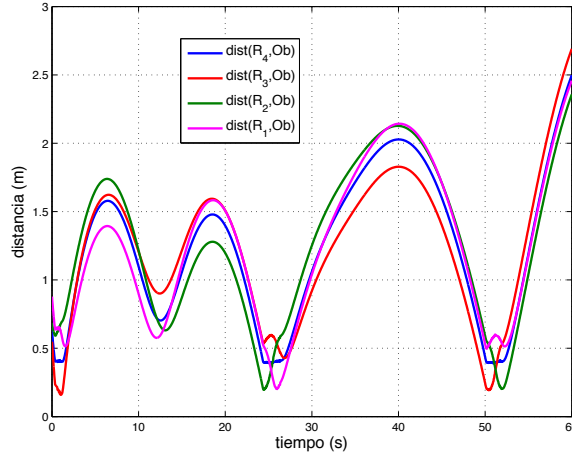


Figura 5.10: Distancias entre los agentes y el obstáculo.

de diseño se eligieron de la siguiente manera $k_1 = 0.1$, $k_2 = 2\sqrt{k_1}$, $\epsilon = 1.5$, la distancia mínima permitida entre agentes $D = 1$ metro y la máxima aceleración $a_{max_i} = 1 \frac{m}{s^2}$. En la Figura 5.13b, se utilizó la entrada de control dada por (5.39) y los resultados presentados en [55] donde un cuadricóptero comercial es modelado y controlado por funciones de transferencia. Con esta opción se obtiene un comportamiento más realista de los cuadricópteros. Las condiciones iniciales son las mismas que el caso anterior y los parámetros de diseño son $k_1 = 0.5$, $k_2 = 2\sqrt{k_1}$ y $\epsilon = 5$.

Las distancias entre agentes se muestran en la Figura 5.14. Note que en la Figura 5.14a la distancia entre cualquier par de agentes es siempre mayor o igual a la distancia mínima permitida $D = 1$ metro. Por otro lado, en la Figura 5.14b la distancia entre cualquier par de agentes puede llegar a ser un poco más pequeña que la distancia mínima permitida.

Ahora, hemos añadido dos obstáculos estáticos y un obstáculo dinámico. Los obstáculos estáticos tienen posiciones $\xi_{o_1} = [-2 \ 0]^T$, $\xi_{o_2} = [1 \ 1]^T$ y el obstáculo dinámico $\xi_{o_3}(0) = [-6 \ -2]^T$ con una velocidad dada por $\dot{\xi}_{o_3} = [0.25 \ -0.02]^T$. La distancia mínima permitida está dada por $d_{obs} = 0.8$ metros. La Figura 5.15 muestra el desempeño de los agentes en la presencia de obstáculos.

Las distancias entre agentes se muestra en la Figura 5.16. Como en el caso anterior, la distancia entre cualquier par de agentes es siempre mayor o igual a la distancia mínima permitida $D = 1$ metro.

Finalmente, la Figura 5.17 presenta la distancia entre los agentes y los obstáculos. En la Figura 5.17a la distancia entre cualquier par de agentes y obstáculos es siempre mayor o igual que la distancia mínima permitida $d_{obs} = 0.8$ metros. Por otro lado, en la Figura 5.17b la distancia entre cualquier par de cuadricópteros y obstáculos es un poco menor que la distancia mínima permitida.

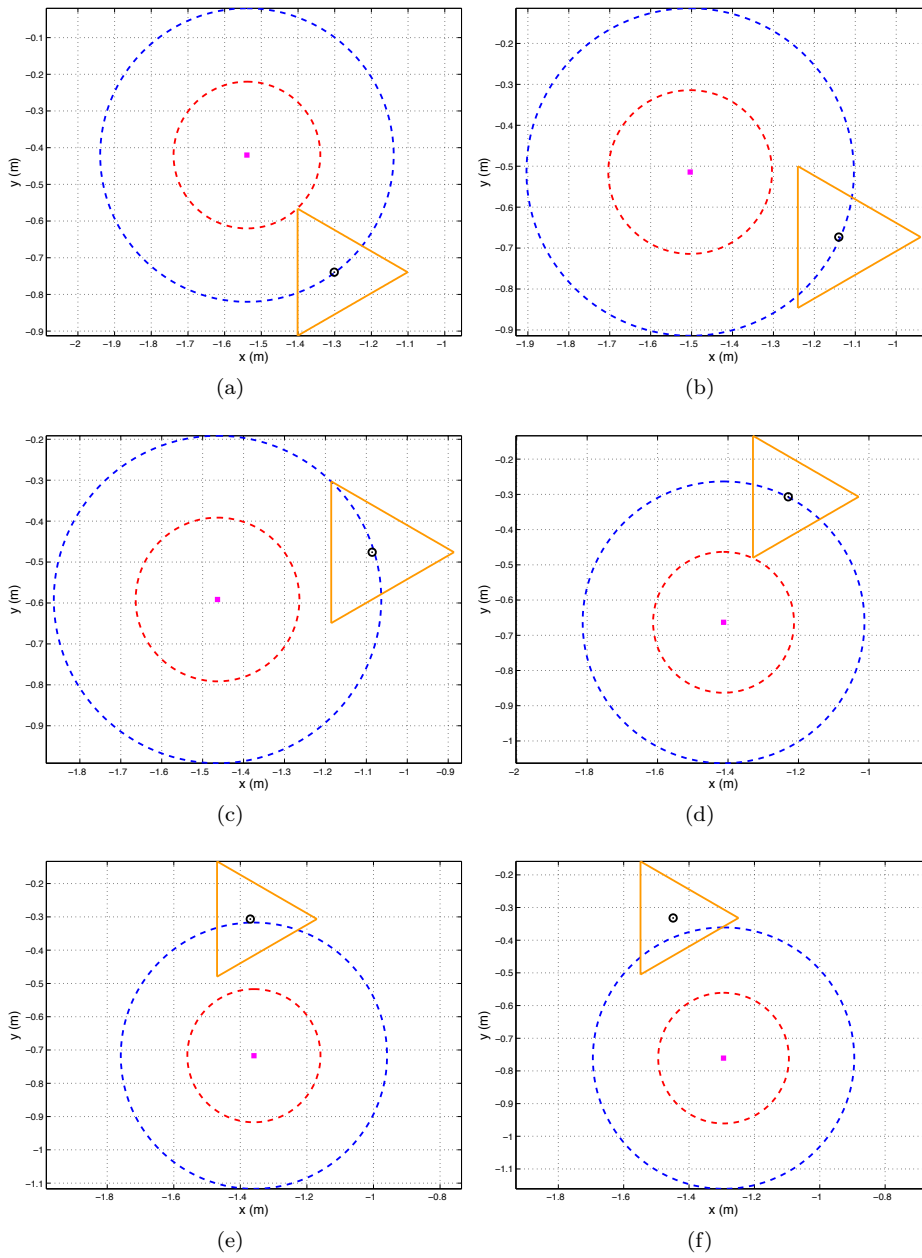


Figura 5.11: Trayectoria en el plano de los cuatro agentes. (a) $t = 24.5$ segundos. (b) $t = 25$ segundos. (c) $t = 25.5$ segundos. (d) $t = 26$ segundos. (e) $t = 26.5$ segundos. (f) $t = 27$ segundos.

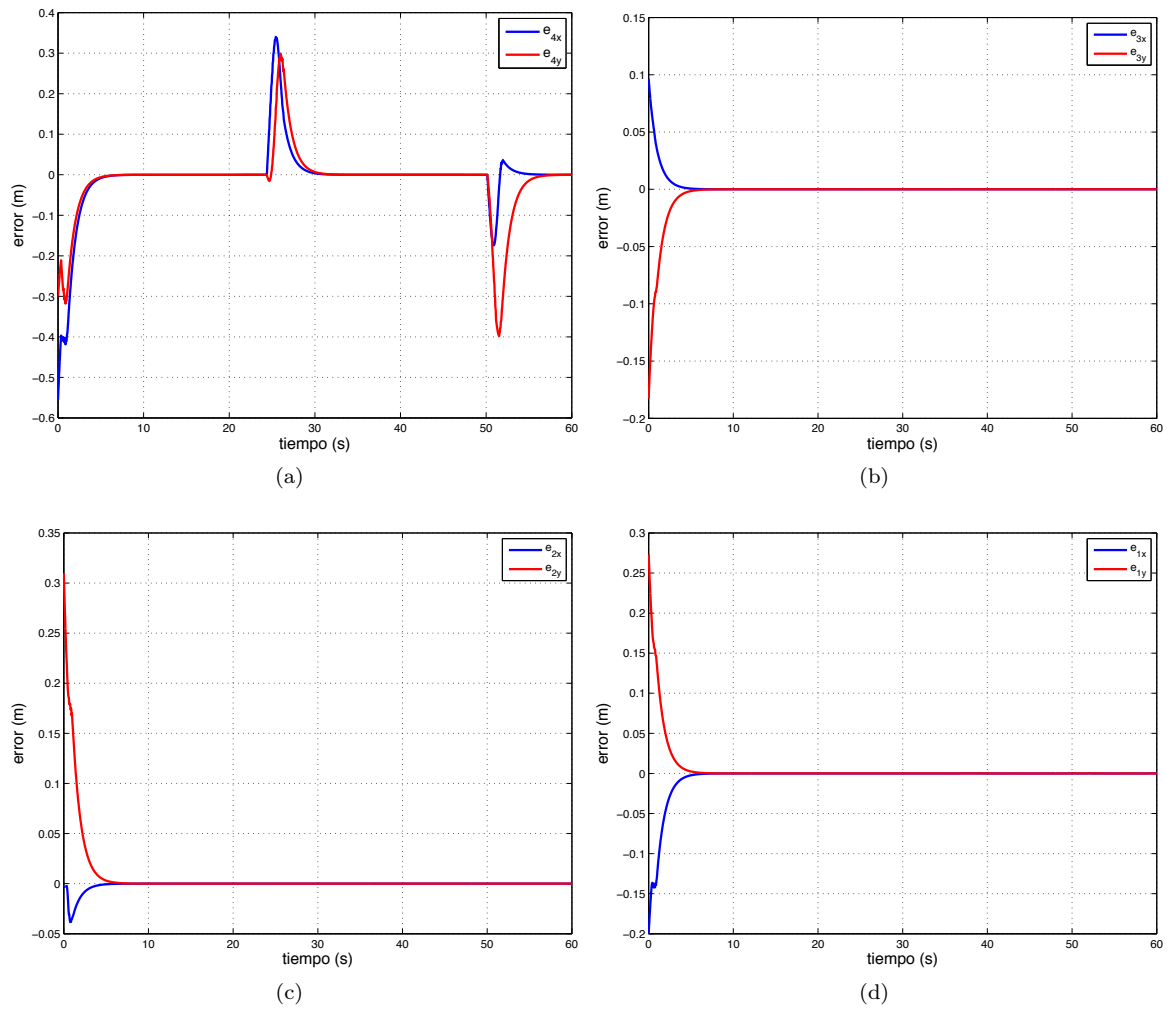


Figura 5.12: (a) Error de posición del líder virtual. (b) Error de formación de R_3 . (c) Error de formación de R_2 . (d) Error de formación de R_1 .

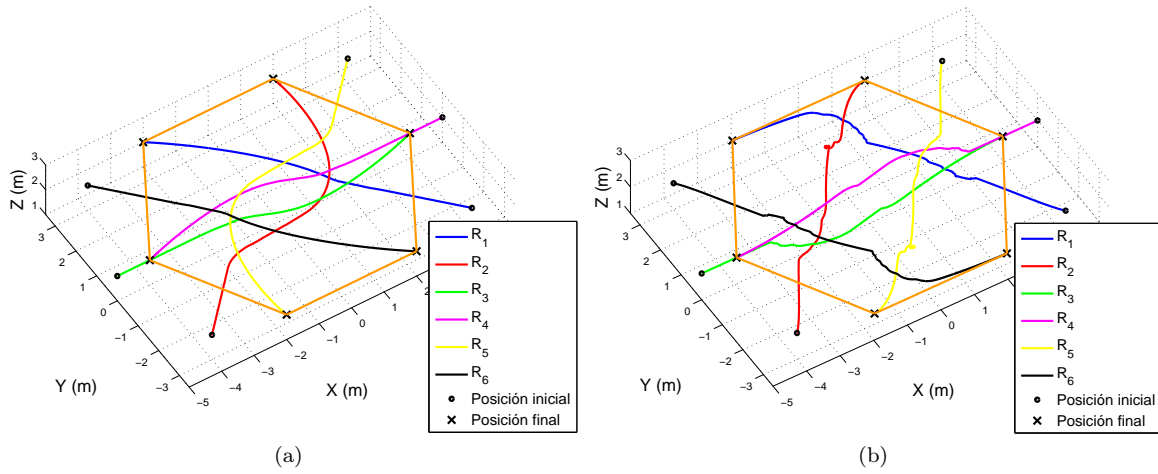


Figura 5.13: Trayectoria en el plano de seis agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrirotos.

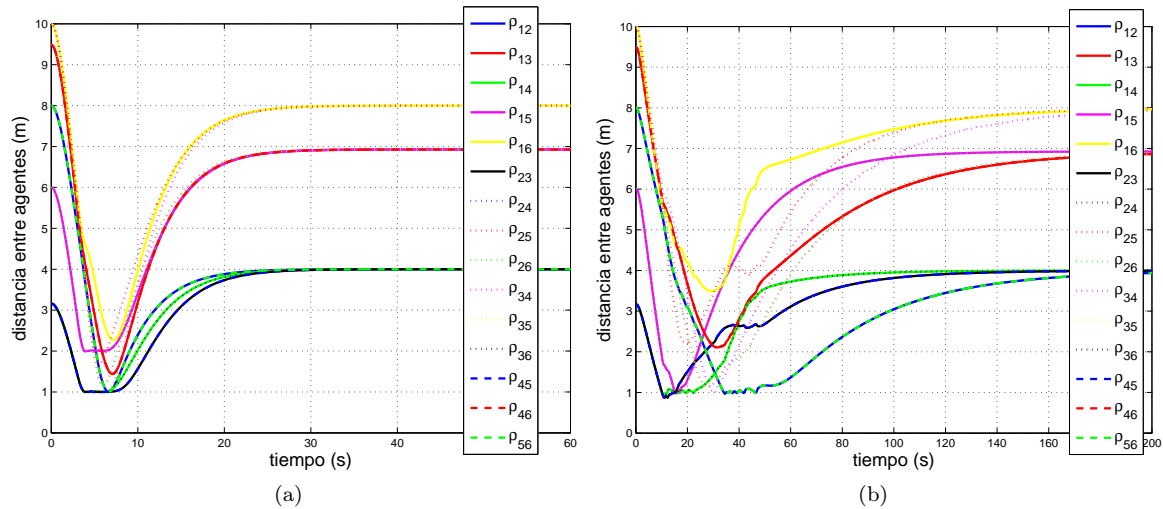


Figura 5.14: Distancias entre agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrirotos.

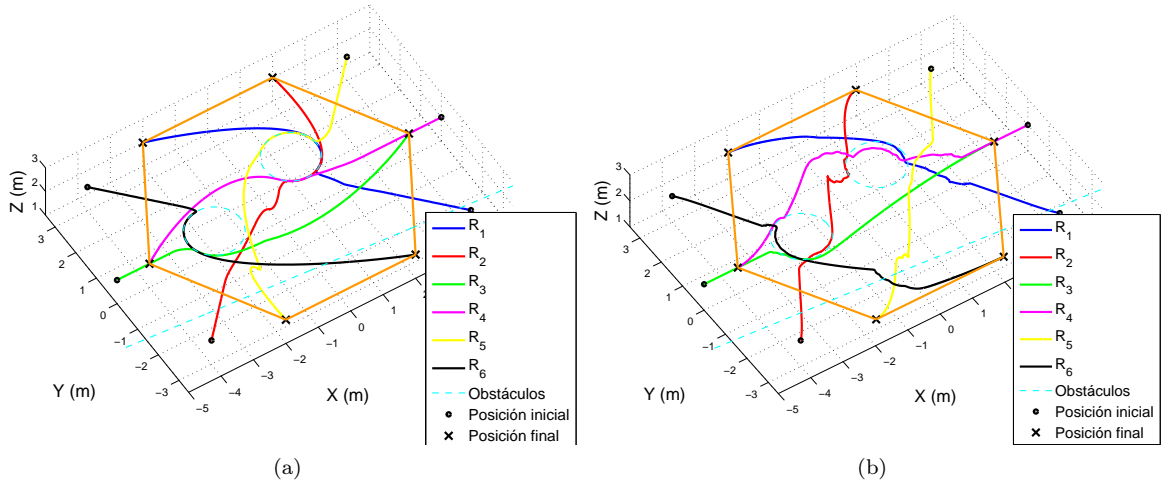


Figura 5.15: Trayectoria en el plano de seis agentes en la presencia de obstáculos. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.

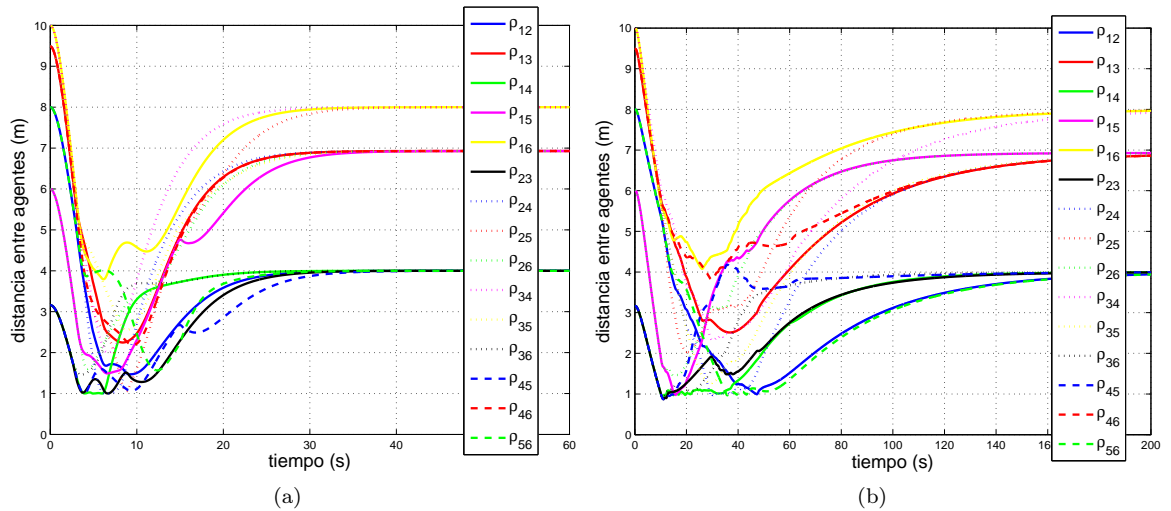


Figura 5.16: Distancias entre agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrópteros.

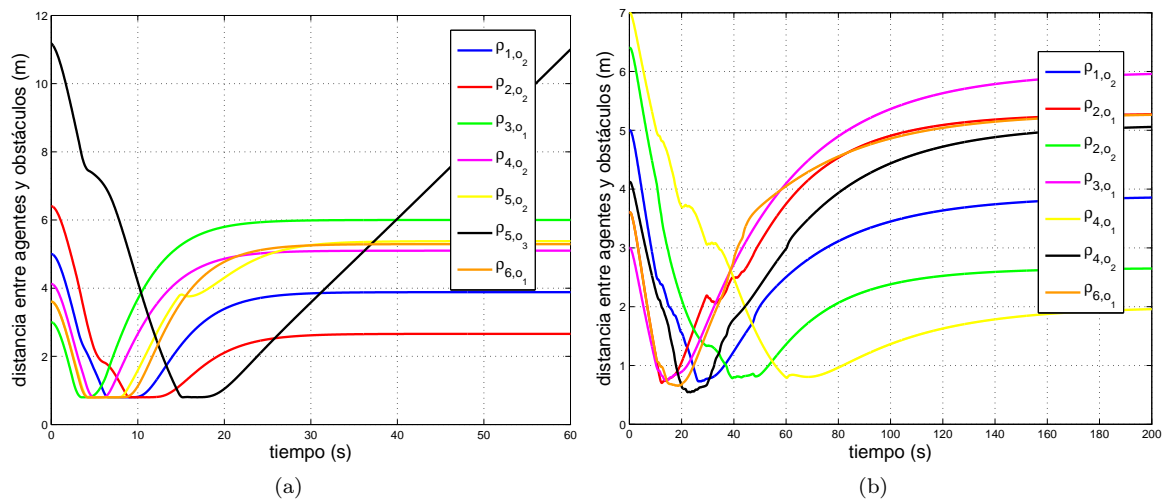


Figura 5.17: Distancias entre agentes. (a) Dinámica de segundo orden. (b) Dinámica de los cuadrirotores.

Capítulo 6

Estimación de la orientación de un sistema multi-agente

En esta capítulo se definen tres estrategias de control utilizando el modelo cinemático extendido de los uniciclos definido en (2.5) y la salida de este sistema dada por las coordenadas $\mathbf{z}_i = [x_i \ y_i]^T$. Posteriormente se presenta el desarrollo de un observador para reconstruir la orientación de un grupo de robots móviles utilizando la técnica de Inmersión e Invarianza [7]. Se definen los errores de estimación y se demuestra que estos errores convergen a cero. Los estados observados son inyectados en las leyes de control, bajo el principio de equivalencia cierta. Posteriormente, por medio de las propiedades de sistemas en cascada se concluye que los errores de posición convergen a cero.

6.1. Estrategias de control de marcha con control de orientación

El modelo previamente definido en (2.5) se representa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= C\xi \\ \dot{\xi} &= \mathbf{u} \\ \dot{\theta} &= \mathbf{w}\end{aligned}\tag{6.1a}$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad C = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos \theta_n \\ 0 & 0 & \cdots & \sin \theta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n},$$
$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

donde $\xi_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$ es un nuevo estado y u_i , $i = 1, \dots, n$ es la nueva señal de control.

Definamos las coordenadas del error como

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i &= \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i^*, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{z}_n - \mathbf{m}(t).\end{aligned}$$

donde \mathbf{z}_i^* es la posición deseada dada la gráfica de formación G_1

$$\mathbf{z}_i^* = \mathbf{z}_{i+1} + \mathbf{c}_{(i+1)i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{z}_n^* = \mathbf{m}(t) \quad (6.3b)$$

En este caso, el vector de formación deseado $\mathbf{c}_{(i+1)i} = [c_{(i+1)i_x} \quad c_{(i+1)i_y}]^T \in \mathbb{R}^2$ es constante, para $i = 1, \dots, n-1$, \mathbf{e}_i corresponde a los errores de formación mientras que \mathbf{e}_n corresponde al error de seguimiento de la trayectoria de marcha por parte del robot líder y $\mathbf{m}(t)$ es la trayectoria de marcha la cual es al menos dos veces diferenciable. En forma matricial se tiene

$$\mathbf{E} = (B \otimes I_2) \mathbf{X} - \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{e}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{e}_n^T]^T$, I_2 es la matriz identidad de 2×2 y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\mathbf{b} = [c_{21_x} \quad c_{21_y} \quad \dots \quad c_{n(n-1)_x} \quad c_{n(n-1)_y} \quad x_d \quad y_d]^T,$$

La dinámica del error está dada por

$$\dot{\mathbf{E}} = (B \otimes I_2) \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{b}}$$

$$\ddot{\mathbf{E}} = (B \otimes I_2) G \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbf{b}} \quad (6.4)$$

donde $G = [C \quad (\boldsymbol{\xi}^T \otimes I_{2n}) \frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{\theta}}] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ y

$$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{\theta}} \triangleq \left[\frac{\partial C}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial C}{\partial \theta_2} \quad \dots \quad \frac{\partial C}{\partial \theta_n} \right]^T, \quad \dot{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix}.$$

A partir de la dinámica de las coordenadas del error, definimos tres estrategias de control de marcha

$$\eta_1 : \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = H \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 (B \otimes I_2) \dot{\mathbf{E}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.5)$$

$$\eta_2 : \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = H \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\mathbf{E}} - k_0 \mathbf{E} \right] \quad (6.6)$$

$$\eta_3 : \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = H \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\mathbf{E}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.7)$$

con

$$H = [(B \otimes I_2) G]^{-1}$$

Para hacer evidente la diferencia entre las leyes de control (6.5), (6.6) y (6.7) las representamos en forma escalar. Para (6.5) se tiene

$$\begin{aligned} u_i &= \cos \theta_i (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{i_x} - k_0 e_{i_x}) + \sin \theta_i (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{i_y} - k_0 e_{i_y}) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ u_n &= \cos \theta_n (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{n_x} - k_0 e_{n_x}) + \sin \theta_n (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{n_y} - k_0 e_{n_y}) \\ w_i &= -\frac{1}{\xi_i} \sin \theta_i (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{i_x} - k_0 e_{i_x}) + \frac{1}{\xi_i} \cos \theta_i (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{i_y} - k_0 e_{i_y}) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ w_n &= -\frac{1}{\xi_n} \sin \theta_n (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{n_x} - k_0 e_{n_x}) + \frac{1}{\xi_n} \cos \theta_n (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{n_y} - k_0 e_{n_y}) \end{aligned}$$

La ley de control (6.6) en forma escalar está dada por

$$\begin{aligned} u_i &= \cos \theta_i (\ddot{x}_{i+1} - k_1 \dot{e}_{i_x} - k_0 e_{i_x}) + \sin \theta_i (\ddot{y}_{i+1} - k_1 \dot{e}_{i_y} - k_0 e_{i_y}) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ u_n &= \cos \theta_n (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{n_x} - k_0 e_{n_x}) + \sin \theta_n (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{n_y} - k_0 e_{n_y}) \\ w_i &= -\frac{1}{\xi_i} \sin \theta_i (\ddot{x}_{i+1} - k_1 \dot{e}_{i_x} - k_0 e_{i_x}) + \frac{1}{\xi_i} \cos \theta_i (\ddot{y}_{i+1} - k_1 \dot{e}_{i_y} - k_0 e_{i_y}) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ w_n &= -\frac{1}{\xi_n} \sin \theta_n (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{n_x} - k_0 e_{n_x}) + \frac{1}{\xi_n} \cos \theta_n (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{n_y} - k_0 e_{n_y}) \end{aligned}$$

y finalmente la ley de control (6.7) en forma escalar es

$$\begin{aligned} u_i &= \cos \theta_i (\ddot{x}_d - k_1 (\dot{x}_i - \dot{x}_d) - k_0 e_{i_x}) + \sin \theta_i (\ddot{y}_d - k_1 (\dot{y}_i - \dot{y}_d) - k_0 e_{i_y}) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ u_n &= \cos \theta_n (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{n_x} - k_0 e_{n_x}) + \sin \theta_n (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{n_y} - k_0 e_{n_y}) \\ w_i &= -\frac{1}{\xi_i} \sin \theta_i (\ddot{x}_d - k_1 (\dot{x}_i - \dot{x}_d) - k_0 e_{i_x}) + \frac{1}{\xi_i} \cos \theta_i (\ddot{y}_d - k_1 (\dot{y}_i - \dot{y}_d) - k_0 e_{i_y}) \quad i = 1, \dots, n-1, \\ w_n &= -\frac{1}{\xi_n} \sin \theta_n (\ddot{x}_d - k_1 \dot{e}_{n_x} - k_0 e_{n_x}) + \frac{1}{\xi_n} \cos \theta_n (\ddot{y}_d - k_1 \dot{e}_{n_y} - k_0 e_{n_y}) \end{aligned}$$

En (6.5) la ley de control para los agentes seguidores se prealimenta con la aceleración de marcha y se retroalimenta la posición y velocidad del agente R_{i+1} . En la ley de control (6.6) cada agente seguidor R_i se retroalimenta la posición, velocidad y aceleración del agente R_{i+1} . Por último, la ley de control (6.7) se obtiene de tal manera que, para los agentes seguidores se prealimenta la velocidad y aceleración de marcha y se retroalimenta la posición del agente R_{i+1} . En los tres casos, para el agente líder se prealimenta la posición, velocidad y aceleración de marcha.

Proposición 6.1 *La matriz G es invertible $\forall \xi_i \neq 0$ y $\det(G) = \xi_n \prod_{i=1}^{n-1} (-1)^i \xi_i$.*

Prueba 6.1 *Analizando el caso de $n = 1$, la matriz G está dada por*

$$G = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\xi_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \xi_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $\det(G) = \xi_1$. Ahora, tomando el caso de $n = 2$, se tiene

$$G = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\xi_1 \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \xi_1 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & 0 & -\xi_2 \sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & 0 & \xi_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante por medio de cofactores sobre la última columna, se tiene

$$\det(G) = -\xi_2 \sin \theta_2 (-1)^7 \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\xi_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & \xi_1 \cos \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix} + \xi_2 \cos \theta_2 (-1)^8 \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\xi_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & \xi_1 \cos \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Utilizando cofactores sobre la segunda columna

$$\det(G) = \xi_2 \sin^2 \theta_2 (-1)^5 \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\xi_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \xi_1 \cos \theta_1 \end{vmatrix} + \xi_2 \cos^2 \theta_2 (-1)^5 \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\xi_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \xi_1 \cos \theta_1 \end{vmatrix}$$

Resulta fácil ver que $\det(G) = -\xi_2 \xi_1$. Una vez analizados los casos $n = 1$ y $n = 2$, nos disponemos a analizar el caso $n + 1$, obteniendo lo siguiente

$$G_{n+1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\xi_1 \sin \theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \xi_1 \cos \theta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\xi_2 \sin \theta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \cos \theta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos \theta_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -\xi_n \sin \theta_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sin \theta_n & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_n \cos \theta_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cos \theta_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\xi_{n+1} \sin \theta_{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sin \theta_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_{n+1} \cos \theta_{n+1} \end{bmatrix}$$

Usando cofactores, el determinante de la matriz G_{n+1} está dado por

$$\det(G_{n+1}) = -\xi_{n+1} \sin \theta_{n+1} (-1)^{4n+3} M_{(2n+1)(2n+2)} + \xi_{n+1} \cos \theta_{n+1} (-1)^{4n+4} M_{(2n+2)(2n+2)}$$

donde M_{ij} es el determinante de la matriz obtenida al remover la i -ésima fila y la j -ésima columna de G_{n+1} . Es fácil ver que $M_{(2n+1)(2n+2)} = \sin \theta_{n+1} \prod_{i=1}^n (-1)^i \xi_i$ y $M_{(2n+2)(2n+2)} = \cos \theta_{n+1} \prod_{i=1}^n (-1)^i \xi_i$, por lo que podemos concluir que

$$\det(G_{n+1}) = \xi_{n+1} \left(\prod_{i=1}^n (-1)^i \xi_i \right)$$

□

Proposición 6.2 Considere el sistema (6.1) y la ley de control (6.5), (6.6) ó (6.7). Suponga que $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ y que $\xi_i \neq 0 \forall t \geq 0$. Entonces en el sistema en lazo cerrado (6.1)-(6.5), (6.1)-(6.6) y (6.1)-(6.7) los agentes seguidores convergen a la formación deseada i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{z}_i(t) - \mathbf{z}_i^*(t)) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$ mientras que R_n converge a la trayectoria de marcha i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{z}_n(t) - \mathbf{m}(t)) = 0$. Además $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i(t) - \theta_j(t)) = 0$, $\forall i \neq j$.

Prueba 6.2 La demostración de esta proposición puede ser encontrada en [22].

□

6.2. Esquema de conmutación

Las leyes de control (6.5), (6.6) y (6.7) no están definidas cuando $\xi_i = 0$, es decir, éstas leyes de control solo se pueden aplicar cuando las velocidades longitudinales son diferente de cero. Para resolver este problema [6] propone una nueva salida al sistema (2.5) dada por

$$h_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

La dinámica de éstas coordenadas está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Por lo que es posible definir la siguiente ley de control

$$\eta_4 : \begin{cases} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} = \dot{h}_{i+1} - q_0 (h_i - h_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1 \\ \begin{bmatrix} u_n \\ w_n \end{bmatrix} = \dot{h}_d - q_0 (h_i - h_d) \end{cases} \quad (6.10)$$

donde $h_d = [\xi_d \ \theta_d]^T$ y q_0 es un parámetro de diseño. Se propone una estrategia de conmutación entre los controles (6.5), (6.6), (6.7) y (6.10) de tal manera que se evite la singularidad de $\xi_i = 0$. Por lo tanto, se obtiene una estrategia de control definida globalmente como:

$$\eta = \begin{cases} \eta_1 \circ \eta_2 \circ \eta_3, & \text{cuando } |\xi_i| \geq \delta \\ \eta_4, & \text{cuando } |\xi_i| < \delta \end{cases} \quad (6.11)$$

con $\delta > 0$ como el parámetro de conmutación. Note que en la estrategia de control (6.11), no necesariamente todos los agentes cambian al mismo tiempo de ley de control. Finalmente, la trayectoria deseada h_d se define como si ésta fuera realizada por un robot móvil ideal

$$\begin{aligned} \xi_d &= \dot{x}_d \cos \theta_d + \dot{y}_d \sin \theta_d \\ \theta_d &= \arctan \left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d} \right) \end{aligned}$$

y la derivada \dot{h}_d como

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_d &= \ddot{x}_d \cos \theta_d - \dot{x}_d \dot{\theta}_d \sin \theta_d + \ddot{y}_d \sin \theta_d + \dot{y}_d \dot{\theta}_d \cos \theta_d \\ \dot{\theta}_d &= \frac{\ddot{y}_d \dot{x}_d - \ddot{x}_d \dot{y}_d}{\dot{y}_d^2 + \dot{x}_d^2} \end{aligned}$$

Proposición 6.3 Sea t_0 un instante de tiempo tal que $\dot{x}_d(t_0) = \dot{y}_d(t_0) = 0$. Entonces el

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{\theta}_d$$

está definido siempre y cuando la aceleración $\ddot{x}_d(t_0)$ y $\ddot{y}_d(t_0)$ sea diferente de cero.

Prueba 6.3 Al calcular el límite de la función $\dot{\theta}_d$, ésta presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Al aplicar dos veces la regla de L'Hôpital es posible determinar el valor de dicho límite. □

Comentario 6.1 El control propuesto en (6.10) no asegura la convergencia a la trayectoria deseada. De hecho, sólo se emplea para atravesar la singularidad de $\xi_i = 0$, esto es cuando el robot unicycle necesita detenerse para después continuar su marcha. Además, el control (6.10) preserva la convergencia de los ángulos de orientación.

Proposición 6.4 Considere el sistema (6.1) en lazo cerrado con la ley de control (6.10) y suponga que $q_0 > 0$, entonces, se satisface que $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i - \theta_j) = 0, \forall i \neq j$.

Prueba 6.4 La demostración de esta proposición puede ser encontrada en [22]. □

6.3. Observador de orientación

En esta sección proponemos un observador para estimar el valor de $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$ del sistema (6.1) utilizando la técnica de Inmersión e Invarianza [7]. El primer paso consiste en definir los errores de estimación de la siguiente manera

$$s_{i1} = \cos \theta_i - \gamma_{i1} + \beta_{i1}(x_i, y_i, \xi_i) \quad (6.12a)$$

$$s_{i2} = \sin \theta_i - \gamma_{i2} + \beta_{i2}(x_i, y_i, \xi_i) \quad (6.12b)$$

donde γ_{i1} y γ_{i2} son variables cuyas dinámicas definiremos posteriormente y $\beta_{i1}(x_i, y_i, \xi_i)$, $\beta_{i2}(x_i, y_i, \xi_i)$ son funciones que dependen de variables medibles. Despejando $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$ de (6.12)

$$\cos \theta_i = s_{i1} + \gamma_{i1} - \beta_{i1}(x_i, y_i, \xi_i) \quad (6.13a)$$

$$\sin \theta_i = s_{i2} + \gamma_{i2} - \beta_{i2}(x_i, y_i, \xi_i) \quad (6.13b)$$

Derivando (6.12) con respecto al tiempo

$$\dot{s}_{i1} = -\dot{\theta}_i \sin \theta_i - \dot{\gamma}_{i1} + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i \quad (6.14a)$$

$$\dot{s}_{i2} = \dot{\theta}_i \cos \theta_i - \dot{\gamma}_{i2} + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i \quad (6.14b)$$

Sustituyendo (6.13) en (6.14)

$$\begin{aligned} \dot{s}_{i1} &= -w_i (s_{i2} + \gamma_{i2} - \beta_{i2}) - \dot{\gamma}_{i1} + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i (s_{i1} + \gamma_{i1} - \beta_{i1}) \\ &\quad + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial y_i} \xi_i (s_{i2} + \gamma_{i2} - \beta_{i2}) + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \xi_i} u_i \end{aligned} \quad (6.15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{i2} &= w_i (s_{i1} + \gamma_{i1} - \beta_{i1}) - \dot{\gamma}_{i2} + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial x_2} \xi_2 (s_{i1} + \gamma_{i1} - \beta_{i1}) \\ &\quad + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i (s_{i2} + \gamma_{i2} - \beta_{i2}) + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial \xi_i} u_i \end{aligned} \quad (6.15b)$$

Elegimos $\dot{\gamma}_{i1}$ y $\dot{\gamma}_{i2}$ de tal manera que se cancelen los términos γ_{i2} , β_{i2} y γ_{i1} , β_{i1} . Con estas consideraciones, se definen las ecuaciones del observador para estimar la orientación de cada agente como

$$\dot{\gamma}_{i1} = -w_i (\gamma_{i2} - \beta_{i2}) + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i (\gamma_{i1} - \beta_{i1}) + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial y_i} \xi_i (\gamma_{i2} - \beta_{i2}) + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \xi_i} u_i \quad (6.16a)$$

$$\dot{\gamma}_{i2} = w_i (\gamma_{i1} - \beta_{i1}) + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial x_i} \xi_i (\gamma_{i1} - \beta_{i1}) + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i (\gamma_{i2} - \beta_{i2}) + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial \xi_i} u_i \quad (6.16b)$$

Al sustituir (6.16) en (6.15) se obtiene la siguiente dinámica para las ecuaciones del error

$$\begin{aligned} \dot{s}_{i1} &= -w_i s_{i2} + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i s_{i1} + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial y_i} \xi_i s_{i2} \\ \dot{s}_{i2} &= w_i s_{i1} + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial x_i} \xi_i s_{i1} + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i s_{i2} \end{aligned}$$

De forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_{i1} \\ \dot{s}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i & \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial y_i} \xi_i \\ \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial x_i} \xi_i & \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -w_i \\ w_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Si β_{i1} depende solo de x_i y ξ_i , y β_{i2} depende solo de y_i y ξ_i , entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_{i1} \\ \dot{s}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -w_i \\ w_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Si $\frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i < 0$ y $\frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i < 0$ entonces $s_{i1} \rightarrow 0$ y $s_{i2} \rightarrow 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma_{i1} - \beta_{i1}) &= \cos \theta_i \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma_{i2} - \beta_{i2}) &= \sin \theta_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$ se pueden aproximar mediante

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &\approx \gamma_{i1} - \beta_{i1} \\ \sin \theta_i &\approx \gamma_{i2} - \beta_{i2} \end{aligned}$$

El problema es diseñar explícitamente las funciones β_{i1} y β_{i2} . Una posible elección es

$$\beta_{i1} = -\Gamma x_i \varphi_i(\xi_i), \quad (6.19a)$$

$$\beta_{i2} = -\Gamma y_i \varphi_i(\xi_i) \quad (6.19b)$$

De tal manera que la derivada parcial de las funciones β_{i1} y β_{i2} esté dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial x_i} \xi_i &= -\Gamma \xi_i \varphi_i(\xi_i), \\ \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial y_i} \xi_i &= -\Gamma \xi_i \varphi_i(\xi_i) \end{aligned}$$

donde Γ es una constante positiva y $\varphi_i(\xi_i)$ es una función impar.

Para determinar la convergencia del sistema (6.18) consideramos la siguiente hipótesis

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \xi_i \varphi_i(\xi_i) dt = \infty \quad (6.20)$$

Proposición 6.5 *Considere el sistema definido en (6.16) con los valores de β_{i1} y β_{i2} dados en (6.19) con $\varphi_i(\xi_i) = \tan^{-1}(\xi_i)$, entonces, el sistema (6.16) se reescribe como*

$$\dot{\gamma}_{i1} = -[\gamma_{i2} + \Gamma y_i \tan^{-1}(\xi_i)] w_i - \Gamma \xi_i \tan^{-1}(\xi_i) [\gamma_{i1} + \Gamma x_i \tan^{-1}(\xi_i)] - \frac{\Gamma x_i u_i}{1 + \xi_i^2} \quad (6.21a)$$

$$\dot{\gamma}_{i2} = [\gamma_{i1} + \Gamma x_i \tan^{-1}(\xi_i)] w_i - \Gamma \xi_i \tan^{-1}(\xi_i) [\gamma_{i2} + \Gamma y_i \tan^{-1}(\xi_i)] - \frac{\Gamma y_i u_i}{1 + \xi_i^2} \quad (6.21b)$$

donde u_i , w_i y ξ_i son señales conocidas. Considere el modelo cinemático extendido de los unicyclos dado en (6.1) y el sistema definido en (6.21). Supongamos que (6.20) se cumple. Entonces existe una constante positiva Γ tal que para cualquier condición inicial $[\gamma_{i1}(0) \ \gamma_{i2}(0)]^T$ se cumple, para $i = 1, \dots, n$, que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [\cos \theta_i - \gamma_{i1} - \Gamma x_i \tan^{-1}(\xi_i)] &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\sin \theta_i - \gamma_{i2} - \Gamma y_i \tan^{-1}(\xi_i)] &= 0, \end{aligned}$$

Prueba 6.5 *Sustituyendo los valores de β_{i1} y β_{i2} dados en (6.19) con $\varphi_i(\xi_i) = \tan^{-1}(\xi_i)$ en (6.12), los errores de estimación se pueden reescribir como*

$$s_{i1} = \cos \theta_i - \gamma_{i1} - \Gamma x_i \tan^{-1}(\xi_i) \quad (6.22a)$$

$$s_{i2} = \sin \theta_i - \gamma_{i2} - \Gamma y_i \tan^{-1}(\xi_i) \quad (6.22b)$$

Simple cálculos muestran que los errores de estimación satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{s}_{i1} &= -w_i s_{i2} - \Gamma \xi_i s_{i1} \tan^{-1}(\xi_i) \\ \dot{s}_{i2} &= w_i s_{i1} - \Gamma \xi_i s_{i2} \tan^{-1}(\xi_i)\end{aligned}$$

Considérese ahora la función candidata de Lyapunov

$$V_i = \frac{1}{2} s_{i1}^2 + \frac{1}{2} s_{i2}^2 \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.23)$$

Derivando con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias (6.22) se tiene

$$\dot{V}_i = -2V_i \Gamma \xi_i \tan^{-1}(\xi_i) \leq 0. \quad (6.24)$$

El resultado obtenido en (6.24) garantiza solamente estabilidad debido a que cuando $\xi_i = 0$, $\dot{V}_i = 0$, esto es, que los errores de estimación están acotados, i.e., $s_{i1}, s_{i2} \leq \hat{\epsilon}$. Debido a esto, se procede a calcular la integral de (6.24)

$$V_i(t) = V_i(0) \exp\left(-2\Gamma \int_0^t \xi_i \tan^{-1}(\xi_i) dt\right) \quad (6.25)$$

Tomando en cuenta la hipótesis dada en (6.20), se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_i(t) = 0 \quad (6.26)$$

y por lo tanto los errores de estimación convergen asintóticamente a cero.

□

Comentario 6.2 Note que el observador (6.21) no estima directamente los ángulos θ_i , $i = 1, \dots, n$; en su lugar, provee estimados de las señales $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$, $i = 1, \dots, n$.

Debido a que los errores de estimación definidos en (6.22) convergen a cero entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\cos \theta_i \approx \bar{c}\theta_i &= \gamma_{i1} + \Gamma x_i \tan^{-1}(\xi_i) \\ \sin \theta_i \approx \bar{s}\theta_i &= \gamma_{i2} + \Gamma y_i \tan^{-1}(\xi_i) \\ \theta_i \approx \bar{\theta}_i &= \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_{i2} + \Gamma y_i \tan^{-1}(\xi_i)}{\gamma_{i1} + \Gamma x_i \tan^{-1}(\xi_i)}\right)\end{aligned}$$

donde γ_{i1} y γ_{i2} son calculados de la ecuación (6.21). De este manera la estructura de control (6.11) puede ser combinada con el observador (6.21) obteniendo la siguiente estrategia de control

$$\bar{U} = \begin{cases} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, & \text{cuando } |\xi_i| \geq \delta \\ \sigma_4, & \text{cuando } |\xi_i| < \delta \end{cases} \quad (6.27)$$

donde

$$\sigma_1 : \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \bar{H} \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 (B \otimes I_2) \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.28)$$

$$\sigma_2 : \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \bar{H} \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 \mathbf{E} \right] \quad (6.29)$$

$$\sigma_3 : \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \bar{H} \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.30)$$

y la ley de control alterna está dada por

$$\sigma_4 : \begin{cases} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i+1} - q_0(\xi_i - \xi_{i+1}) \\ w_{i+1} - q_0(\theta_i - \theta_{i+1}) \end{bmatrix}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \begin{bmatrix} u_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_d - q_0(\xi_n - \xi_d) \\ \dot{\theta}_d - q_0(\theta_n - \theta_d) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.31)$$

con $\bar{\mathbf{E}} = (B \otimes I_2) \bar{C} \bar{\xi} - \dot{\mathbf{b}}, \bar{H}, \bar{C}$ son matrices con los valores estimados de $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$ donde

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \overline{c\theta}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{s\theta}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{c\theta}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{s\theta}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{c\theta}_n \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{s\theta}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$$

Proposición 6.6 *Considere el sistema (6.1) en lazo cerrado con la estrategia de control (6.28), (6.29) o (6.30). Supóngase que (6.20) se cumple y que $\xi_i(t) \neq 0 \forall t \geq 0$. Entonces, los errores de posición están acotados y además*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Prueba 6.6 *Definamos la siguiente trasposición de coordenadas*

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_{1x} \\ \zeta_{1y} \\ \zeta_{2x} \\ \zeta_{2y} \\ \vdots \\ \zeta_{(2n-1)x} \\ \zeta_{(2n-1)y} \\ \zeta_{(2n)x} \\ \zeta_{(2n)y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ \dot{e}_{1x} \\ \dot{e}_{1y} \\ \vdots \\ e_{nx} \\ e_{ny} \\ \dot{e}_{nx} \\ \dot{e}_{ny} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Es posible definir la velocidad longitudinal ξ_i , $\cos \theta_i$ y $\sin \theta_i$ como funciones de estas nuevas coordenadas de la siguiente manera

$$\xi_n = \varphi_{u_n} = \sqrt{(\zeta_{(2n)x} + \dot{x}_d)^2 + (\zeta_{(2n)y} + \dot{y}_d)^2}$$

$$\xi_i = \varphi_{u_i} = \sqrt{\left(\sum_{j=i}^n \zeta_{(2j)x} + \dot{x}_d \right)^2 + \left(\sum_{j=i}^n \zeta_{(2j)y} + \dot{y}_d \right)^2} \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\sin \theta_n = \varphi_{s_n} = \frac{\zeta_{(2n)y} + \dot{y}_d}{\varphi_{u_n}}$$

$$\sin \theta_i = \varphi_{s_i} = \frac{\sum_{j=i}^n \zeta_{(2j)y} + \dot{y}_d}{\varphi_{u_i}} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$$\begin{aligned}\cos \theta_n &= \varphi_{c_n} = \frac{\zeta_{(2n)_x} + \dot{x}_d}{\varphi_{u_n}} \\ \cos \theta_i &= \varphi_{c_i} = \frac{\sum_{j=i}^n \zeta_{(2j)_x} + \dot{x}_d}{\varphi_{u_i}} \quad i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Ahora, reescribimos las leyes de control (6.28), (6.29) y (6.30) en términos del error de estimación, esto es, sustituimos la matriz \bar{H} por la diferencia entre la matriz H y una matriz compuesta por los errores de estimación S

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = (H - S) \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 (B \otimes I_2) \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.33)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = (H - S) \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 \mathbf{E} \right] \quad (6.34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = (H - S) \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.35)$$

donde la matriz S se define como

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{11} & \dots & s_{11} & s_{12} & s_{11} & s_{12} & s_{11} & s_{12} \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s^{(n-2)1} & s^{(n-2)2} & s^{(n-2)1} & s^{(n-2)2} & s^{(n-2)1} & s^{(n-2)2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s^{(n-1)1} & s^{(n-1)2} & s^{(n-1)1} & s^{(n-1)2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{n1}^1}{s_{12}^1} & \frac{s_{n2}^2}{s_{11}^2} \\ -\frac{s_{12}}{\varphi_{u_1}} & \frac{s_{11}}{\varphi_{u_1}} & -\frac{s_{12}}{\varphi_{u_1}} & \dots & -\frac{s_{12}}{\varphi_{u_1}} & \frac{s_{11}}{\varphi_{u_1}} & -\frac{s_{12}}{\varphi_{u_1}} & \frac{s_{11}}{\varphi_{u_1}} & -\frac{s_{12}}{\varphi_{u_1}} & \frac{s_{11}}{\varphi_{u_1}} \\ \vdots & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{s^{(n-2)2}}{\varphi_{u_{n-2}}} & \frac{s^{(n-2)1}}{\varphi_{u_{n-2}}} & -\frac{s^{(n-2)2}}{\varphi_{u_{n-2}}} & \frac{s^{(n-2)1}}{\varphi_{u_{n-2}}} & -\frac{s^{(n-2)2}}{\varphi_{u_{n-2}}} & \frac{s^{(n-2)1}}{\varphi_{u_{n-2}}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{s^{(n-1)2}}{\varphi_{u_{n-1}}} & \frac{s^{(n-1)1}}{\varphi_{u_{n-1}}} & -\frac{s^{(n-1)2}}{\varphi_{u_{n-1}}} & \frac{s^{(n-1)1}}{\varphi_{u_{n-1}}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{s_{n2}}{\varphi_{u_n}} & \frac{s_{n1}}{\varphi_{u_n}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

y

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \begin{bmatrix} \varphi_{u_1} (\varphi_{c_1} - s_{11}) + \varphi_{u_2} (s_{21} - \varphi_{c_2}) \\ \varphi_{u_1} (\varphi_{s_1} - s_{12}) + \varphi_{u_2} (s_{22} - \varphi_{s_2}) \\ \varphi_{u_2} (\varphi_{c_2} - s_{21}) + \varphi_{u_3} (s_{31} - \varphi_{c_3}) \\ \varphi_{u_2} (\varphi_{s_2} - s_{22}) + \varphi_{u_3} (s_{32} - \varphi_{s_3}) \\ \vdots \\ \varphi_{u_{n-1}} (\varphi_{c_{(n-1)}} - s^{(n-1)1}) + \varphi_{u_n} (s_{n1} - \varphi_{c_n}) \\ \varphi_{u_{n-1}} (\varphi_{s^{(n-1)}} - s^{(n-1)2}) + \varphi_{u_n} (s_{n2} - \varphi_{s_n}) \\ \varphi_{u_n} (\varphi_{c_n} - s_{n1}) - \dot{x}_d \\ \varphi_{u_n} (\varphi_{s_n} - s_{n2}) - \dot{y}_d \end{bmatrix}$$

La dinámica del error (6.4) en lazo cerrado con (6.33), (6.34) y (6.35) está dada, respectivamente, por

$$\ddot{\bar{\mathbf{E}}} = -k_1 (B \otimes I_2) \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} - D \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 (B \otimes I_2) \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.36)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{E}}} = -k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 \mathbf{E} - D \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 \mathbf{E} \right] \quad (6.37)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{E}}} = -k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} - D \left[\ddot{\mathbf{b}} - k_1 \dot{\bar{\mathbf{E}}} - k_0 (B \otimes I_2) \mathbf{E} \right] \quad (6.38)$$

donde $D = (B \otimes I_2)GS$. De una forma más compacta, la matriz D puede ser expresada como $D = \varphi S$

donde

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \varphi_2 & -\varphi_3 & 0_2 & \dots & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \varphi_3 & -\varphi_4 & \dots & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & \varphi_{n-2} & -\varphi_{n-1} & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & 0_2 & \varphi_{n-1} & -\varphi_n \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & 0_2 & 0_2 & \varphi_n \end{bmatrix},$$

$$\varsigma = \begin{bmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_1 & \varsigma_1 & \varsigma_1 & \dots & \varsigma_1 & \varsigma_1 & \varsigma_1 \\ 0_2 & \varsigma_2 & \varsigma_2 & \varsigma_2 & \dots & \varsigma_2 & \varsigma_2 & \varsigma_2 \\ 0_2 & 0_2 & \varsigma_3 & \varsigma_3 & \dots & \varsigma_3 & \varsigma_3 & \varsigma_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & \varsigma_{n-2} & \varsigma_{n-2} & \varsigma_{n-2} \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & 0_2 & \varsigma_{n-1} & \varsigma_{n-1} \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & 0_2 & 0_2 & \varsigma_n \end{bmatrix},$$

0_2 es una matriz de ceros de 2×2 y

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_{c_i} & -\varphi_{s_i} \\ \varphi_{s_i} & \varphi_{c_i} \end{bmatrix}, \quad \varsigma_i = \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} \\ -s_{i2} & s_{i1} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Expresando las dinámicas (6.36), (6.37) y (6.38) en términos de las coordenadas (ζ, s) se tiene

$$\dot{\zeta} = (K \otimes I_2) \zeta + \Psi(\zeta, s) \quad (6.39)$$

donde $\Psi(\zeta, s)$ es una perturbación definida como

$$\Psi(\zeta, s) = -\bar{D}(\zeta, s) [(K \otimes I_2) \zeta + \Omega(\zeta, s)] + \Lambda(\zeta, s) \quad (6.40)$$

con la matriz \bar{D} definida como $\bar{D} = \bar{\varphi} \bar{\varsigma}$ donde

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} 0_2 & \varphi_1 & 0_2 & -\varphi_2 & 0_{2 \times 4n} & 0_2 & \dots & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ & 0_{2 \times 6} & \varphi_2 & 0_{2 \times 4n} & -\varphi_3 & \dots & 0_2 & 0_2 & 0_2 & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & 0_{2 \times 4n-6} & & & \varphi_{n-1} & 0_2 & -\varphi_n & \\ & & & 0_{2 \times 4n} & & & & & & \vdots \\ & & & 0_{2 \times 4n-2} & & & & & & \varphi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$$

$$\bar{\varsigma} = \begin{bmatrix} 0_2 & \varsigma_1 & 0_2 & \varsigma_1 & 0_{2 \times 4n} & \varsigma_1 & \dots & \varsigma_1 & 0_2 & \varsigma_1 \\ & 0_{2 \times 6} & \varsigma_2 & 0_{2 \times 4n} & \varsigma_2 & \dots & \varsigma_2 & 0_2 & \varsigma_2 & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & 0_{2 \times 4n-6} & & & \varsigma_{n-1} & 0_2 & \varsigma_{n-1} & \\ & & & 0_{2 \times 4n} & & & & & & \vdots \\ & & & 0_{2 \times 4n-2} & & & & & & \varsigma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$$

con φ_i y ς_i definidas anteriormente.

Para el sistema (6.28), las matrices $K \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\Omega \in \mathbb{R}^{4n \times 1}$ y $\Lambda \in \mathbb{R}^{4n \times 1}$ están dadas por

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_0 & -k_1 & k_0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 & -k_1 & k_0 & k_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_0 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}(\zeta, s) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_1}s_1 + 2\varphi_{u_2}s_2 - \varphi_{u_3}s_3) \\ 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_2}s_2 + 2\varphi_{u_3}s_3 - \varphi_{u_4}s_4) \\ \vdots \\ -k_1(-\varphi_{u_{n-1}}s_{n-1} + 2\varphi_{u_n}s_n) \\ 0_{2 \times 1} \\ k_1\varphi_{u_n}s_n + \ddot{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}(\zeta, s) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_1}s_1 + 2\varphi_{u_2}s_2 - \varphi_{u_3}s_3) \\ 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_2}s_2 + 2\varphi_{u_3}s_3 - \varphi_{u_4}s_4) \\ \vdots \\ -k_1(-\varphi_{u_{n-1}}s_{n-1} + 2\varphi_{u_n}s_n) \\ 0_{2 \times 1} \\ k_1\varphi_{u_n}s_n \end{bmatrix}$$

Para el sistema (6.29), las matrices K , $\mathbf{\Omega}$ Y $\mathbf{\Lambda}$ están dadas por

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 & -k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_0 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}(\zeta, s) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_1}s_1 + \varphi_{u_2}s_2) \\ 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_2}s_2 + \varphi_{u_3}s_3) \\ \vdots \\ -k_1(-\varphi_{u_{n-1}}s_{n-1} + \varphi_{u_n}s_n) \\ 0_{2 \times 1} \\ k_1\varphi_{u_n}s_n + \ddot{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}(\zeta, s) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_1}s_1 + \varphi_{u_2}s_2) \\ 0_{2 \times 1} \\ -k_1(-\varphi_{u_2}s_2 + \varphi_{u_3}s_3) \\ \vdots \\ -k_1(-\varphi_{u_{n-1}}s_{n-1} + \varphi_{u_n}s_n) \\ 0_{2 \times 1} \\ k_1\varphi_{u_n}s_n \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz K para el sistema (6.30) está dada por

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_0 & -k_1 & k_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 & -k_1 & k_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_0 & -k_1 \end{bmatrix}$$

con Ω y Λ definidas como en el caso anterior.

Dado que la dinámica del sistema (6.1) en lazo cerrado con (6.5), (6.6) o (6.7) es asintóticamente estable, entonces existe una función de Lyapunov definida positiva

$$\hat{V} = \zeta^T P \zeta \quad (6.41)$$

tal que la derivada de (6.41) a lo largo de las trayectorias (6.1)-(6.5), (6.1)-(6.6), (6.1)-(6.7) satisface

$$\dot{\hat{V}} = -\zeta^T Q \zeta$$

donde P y Q son matrices definidas positivas. Simples cálculos muestran que la derivada de (6.41) a lo largo de (6.39) está dada por

$$\dot{\hat{V}} = -\zeta^T Q \zeta + \zeta^T P \Psi(\zeta, s) + \Psi^T(\zeta, s) P \zeta$$

La perturbación (6.40) puede ser acotada desde arriba como

$$\|\Psi(\zeta, s)\| \leq \bar{\gamma}_1(\|s\|) + \bar{\gamma}_2(\|s\|) \|\zeta\| \quad (6.42)$$

donde $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ son funciones clase- κ diferenciables en $s = 0$. Sabiendo que $\|\varphi_{u_i}\| \leq \|\zeta\| + \|\dot{m}\|$, $\forall i = 1, \dots, n$, $\|\bar{D}\| \leq \|\varphi\| \|\varsigma\|$ donde $\|\varphi\| = \sqrt{\lambda_{\max} \varphi^T \varphi} = \mu$, $\|\varsigma\| = \sqrt{\lambda_{\max} \varsigma^T \varsigma} = \eta$, entonces, $\|\bar{D}\| \leq \kappa \|s\|$ con $\kappa = \mu\eta$.

Para el caso $n = 1$ en (6.28), (6.29) y (6.30), las funciones $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$ están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(\|s\|) &= (\|\ddot{m}\| + k_1 \|\dot{m}\| \|s\| + k_1 \|\dot{m}\|) \|s\| \\ \bar{\gamma}_2(\|s\|) &= (k_0 + 2k_1) \|s\| + k_1 \|s\|^2 \end{aligned}$$

Par el caso de $n = 2$ en (6.28), las funciones $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$ son

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(\|s\|) &= (\kappa \|\ddot{m}\| + 3\kappa k_1 \|\dot{m}\| \|s\| + 3k_1 \|\dot{m}\|) \|s\| \\ \bar{\gamma}_2(\|s\|) &= (2\kappa k_0 + 2\kappa k_1 + 3k_1) \|s\| + 3\kappa k_1 \|s\|^2 \end{aligned}$$

Finalmente, $\forall i = 3, \dots, n$, en (6.28), las funciones $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$ se definen como

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(\|s\|) &= (\kappa \|\ddot{m}\| + 4\kappa k_1 \|\dot{m}\| \|s\| + 4k_1 \|\dot{m}\|) \|s\| \\ \bar{\gamma}_2(\|s\|) &= (2\kappa k_0 + 2\kappa k_1 + 4k_1) \|s\| + 4\kappa k_1 \|s\|^2 \end{aligned}$$

Las funciones $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$, en (6.29) $\forall i = 2, \dots, n$, están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(\|s\|) &= (\kappa \|\ddot{m}\| + 2\kappa k_1 \|\dot{m}\| \|s\| + 2k_1 \|\dot{m}\|) \|s\| \\ \bar{\gamma}_2(\|s\|) &= (\kappa k_0 + \kappa k_1 + 2k_1) \|s\| + 2\kappa k_1 \|s\|^2 \end{aligned}$$

Por último, las funciones $\bar{\gamma}_1$ y $\bar{\gamma}_2$, en (6.30) $\forall i = 2, \dots, n$, son

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(\|s\|) &= (\kappa \|\ddot{m}\| + 2\kappa k_1 \|\dot{m}\| \|s\| + 2k_1 \|\dot{m}\|) \|s\| \\ \bar{\gamma}_2(\|s\|) &= (2\kappa k_0 + \kappa k_1 + 2k_1) \|s\| + 2\kappa k_1 \|s\|^2 \end{aligned}$$

La derivada de (6.41) a lo largo de (6.39) satisface lo siguiente:

$$\dot{\hat{V}} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \|\zeta\| (\bar{\gamma}_1(\|s\|) + \bar{\gamma}_2(\|s\|) \|\zeta\|)$$

Por las propiedades de sistemas en cascada (Proposición 4.11 de [28]), $\bar{\gamma}_1 \|s\|$ y $\bar{\gamma}_2 \|s\|$ convergen a cero y por lo tanto, los errores de posición convergen a cero.

□

6.4. Simulaciones numéricas

La Figura 6.1 presenta la trayectoria en el plano de tres agentes utilizando la ley de control (6.29)-(6.31). Los vectores de formación deseado están dados por $\mathbf{c}_{32} = [-0.4 \ 0]^T$ y $\mathbf{c}_{21} = [-0.4 \ 0]^T$. De esta manera, el patrón geométrico que forman los agentes corresponde a una línea horizontal. Las condiciones iniciales de los agentes se muestran en la Tabla 6.1 y los parámetros del observador y del controlador se presentan en la Tabla 6.2. La trayectoria deseada es una parábola definida por $\mathbf{m}(t) = [0.2 \sin(\omega t) \ 0.2 \sin^2(\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 10$ segundos como el período.

Tabla 6.1: Condiciones iniciales de los agentes.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$x_i(0)$	-1 metros	-0.43 metros	-0.07 metros
$y_i(0)$	0.05 metros	-0.03 metros	-0.05 metros
$\xi_i(0)$	0	0	0
$\theta_i(0)$	0.34 rad	0.42 rad	0.76 rad

Tabla 6.2: Parámetros del controlador y del observador

Parámetro	Valor
k_1	7
k_0	12
q_0	1
Γ	20
δ	0.02
$\gamma_{11}(0)$	1
$\gamma_{12}(0)$	0
$\gamma_{21}(0)$	1
$\gamma_{22}(0)$	0
$\gamma_{31}(0)$	1
$\gamma_{32}(0)$	0

La Figura 6.2 presenta una comparación entre el ángulo deseado θ_d y los ángulos estimados de cada agente $\bar{\theta}_i$.

6.5. Conclusiones del capítulo

Para concluir este capítulo, es importante señalar que el diseño del observador se lleva a cabo independientemente del diseño del controlador para el seguimiento de trayectoria. Por lo tanto, el observador puede ser usado con cualquier otro controlador. La simulación numérica muestra que los agentes logran formarse en el patrón geométrico deseado y logran el correcto seguimiento de la trayectoria a pesar de que las condiciones iniciales de cada agente se encuentran alejadas de la trayectoria deseada. Al realizar el análisis de convergencia de los errores de posición al utilizar el observador (6.21) en lazo cerrado con cualquiera de los controles (6.28), (6.29) o (6.30), la teoría nos indica que los resultados obtenidos son resultados globales. Esto quiere decir que los agentes convergen a la formación deseada y a la trayectoria deseada, independientemente de la posición donde se encuentren. Por supuesto que diferentes problemas surgen cuando este método se implementa en los experimentos en tiempo real.

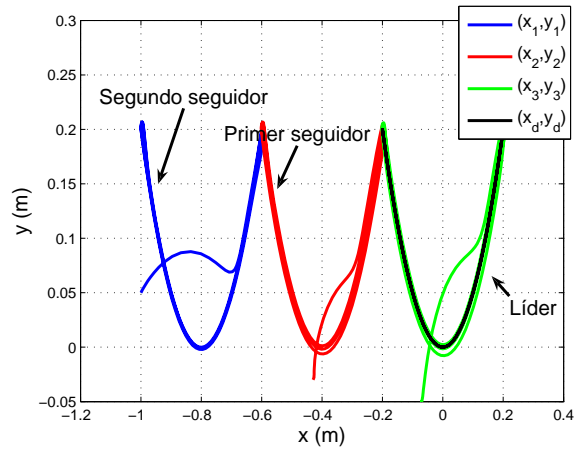


Figura 6.1: Trayectoria en el plano de los agentes utilizando el control (6.29)-(6.31)

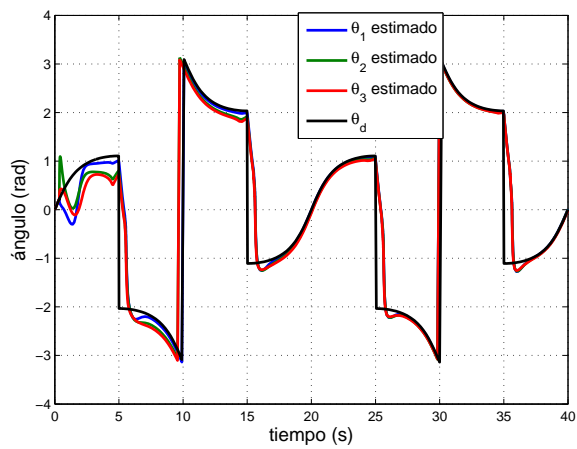


Figura 6.2: Ángulos estimados de los agentes.

Capítulo 7

Resultados experimentales

Este capítulo presenta los resultados experimentales de las leyes de control definidas en los capítulos anteriores. En la primera parte se describe los diferentes elementos que componen a la plataforma experimental. Posteriormente se presentan algunos experimentos relacionados con la configuración del tráiler y la emulación del pivote deslizante, así como la emulación de la traslación y rotación de un cuerpo rígido evadiendo un obstáculo fijo y por último un experimento donde se estima la orientación del sistema multi-agente.

7.1. Plataforma experimental

Los experimentos se llevaron a cabo en una plataforma compuesta por tres robots móviles del tipo unicycle modelo AmigoBot (Figura 7.1) manufacturados por la empresa MobileRobots Inc. Cada uno de estos robots tiene colocados en su parte superior una serie de marcadores infrarrojos los cuales forman una figura geométrica de tal manera que el centroide de esta figura coincida con el punto medio del eje de las ruedas de cada robot.



Figura 7.1: Robots móviles del tipo AmigoBot.

La posición y orientación de cada uno de los robots se obtiene a través de un sistema de visión conformado por 12 cámaras modelo Flex 13 (Figura 7.2) fabricadas por la empresa Natural Point repartidas en un área de 3.6×4.8 metros a una altura de 3.7 metros. Éstas cámaras cuentan con una resolución de 1280×1024 a una frecuencia de 120 cuadros por segundo. Para que un objeto sea detectado, éste debe de contar con un mínimo 3 marcadores y al menos 3 cámaras deben de localizar

al objeto dentro de su rango de visión. Las cámaras y el software asociado calculan la posición y orientación de cada robot. Ésta información es enviada a una computadora y es desplegada en pantalla a través del software propio de las cámaras llamado Motive.



Figura 7.2: Cámara modelo Flex 13.

Las leyes de control son calculadas en Visual C++ usando las librerías Aria, las cuales están diseñadas para comunicarse con los AmigoBots. Para realizar la comunicación entre el software Motive y Visual C++ se utiliza el protocolo de comunicación VRPN. Por último, las velocidades de cada rueda son enviadas a los robots por medio de comunicación Wi-Fi a través de la siguiente transformación

$$\begin{bmatrix} v_{r_i} \\ v_{\ell_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & \hat{D} \\ 2 & -\hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde v_{r_i} y v_{ℓ_i} es la velocidad lineal de la rueda derecha e izquierda, respectivamente y $\hat{D} = 28$ cm es la longitud del eje de las ruedas.

7.2. Emulación del movimiento de traslación y rotación

La Figura 7.3 muestra el comportamiento en el plano de tres agentes utilizando la ley de control (4.8) y el vector de posición relativo deseado dado por (3.3). La trayectoria deseada es una Lemniscata de Geronno dada por $\mathbf{m}(t) = [0.5 \sin(2\omega t) \quad 1.5 \cos(\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{60}$. La distancia del punto medio del eje de las ruedas al punto frontal es $\ell = 0.1$ metros y las ganancias se establecieron en $k = 1$, $k_m = 2.5$. Las condiciones iniciales son, para el robot líder $[p_3(0) \quad q_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [0.033 \quad 1.59 \quad 0.032]^T$ y para los seguidores $[p_2(0) \quad q_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [-0.275 \quad 1.24 \quad 0.715]^T$, $[p_1(0) \quad q_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [-0.429 \quad 1.84 \quad 0.524]^T$. La posición de los puntos frontales de los robots forman un triángulo de 0.5 metros por lado generando un vector de posición estático de la siguiente forma

$$\mathbf{C}_{31} = \begin{bmatrix} -0.5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0.5 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{32} = \begin{bmatrix} -0.5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ -0.5 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar, en la Figura 7.3a, y 7.3b los tres robots mantienen la formación tipo triángulo mientras el líder sigue la trayectoria deseada. De esta manera los agentes se comportan como si fueran una estructura rígida.

La Figura 7.4, presenta los errores de posición de los tres agentes, los cuales se mantienen oscilando alrededor de cero. La razón de éstas oscilaciones se debe a inevitables errores de medición al colocar los marcadores infrarrojos, originando que el centroide de la figura formada por los marcadores no coincida exactamente con el punto medio del eje de las ruedas.

La Figura 7.5 presenta la velocidad de las ruedas de cada uno de los robots para realizar y lograr el seguimiento de la trayectoria.

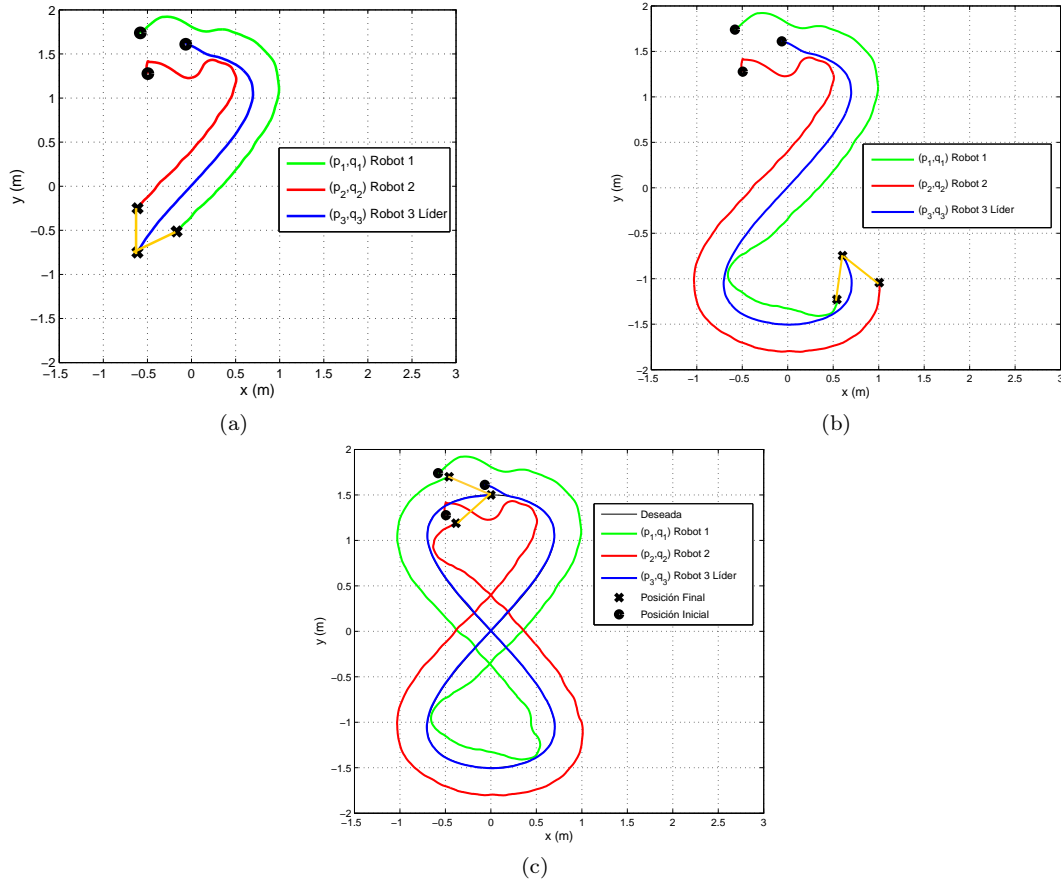


Figura 7.3: Movimiento en el plano de los agentes. (a) Trayectoria cuando $t = 20$ segundos. (b) Trayectoria cuando $t = 40$ segundos. (c) Trayectoria cuando $t = 60$ segundos.

7.3. Configuración n -tráiler estándar

La Figura 7.6 presenta el movimiento en el plano de tres agentes emulando el comportamiento de un tráiler estándar al utilizar la ley de control (4.4) con el vector de posición deseado definido en (3.6) estableciendo el parámetro $d = 0$. La trayectoria de marcha para el agente líder es una Lemniscata de Geronon dada por $\mathbf{m}(t) = [2 \cos(\omega t) \quad 1.5 \sin(2\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 60$ segundos es el período. Las condiciones iniciales son, para el líder $[x_3(0) \quad y_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [1.044 \quad -0.071 \quad 0.338]^T$ y para los seguidores, $[x_1(0) \quad y_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [-0.26 \quad -0.22 \quad -0.27]^T$, $[x_2(0) \quad y_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [0.432 \quad -0.295 \quad 0.174]^T$. Los parámetros de diseño son $k = k_m = 2$ y la distancia entre agentes es $\ell = 0.6$ metros. La distancia ℓ se escogió de tal manera que existiera un espacio entre cada agente para evitar posibles colisiones. Se puede apreciar que los agentes seguidores pierden totalmente el seguimiento de la trayectoria realizada por el agente líder. Esto se debe a dos aspectos. Primero, consiste en que el tráiler físico presenta efectos de sobreviraje (los remolques se mantienen en el lado interno de la trayectoria del líder), fenómeno que es reproducido por el grupo de agentes. El segundo aspecto se debe a que las distancias entre los agentes son relativamente grandes.

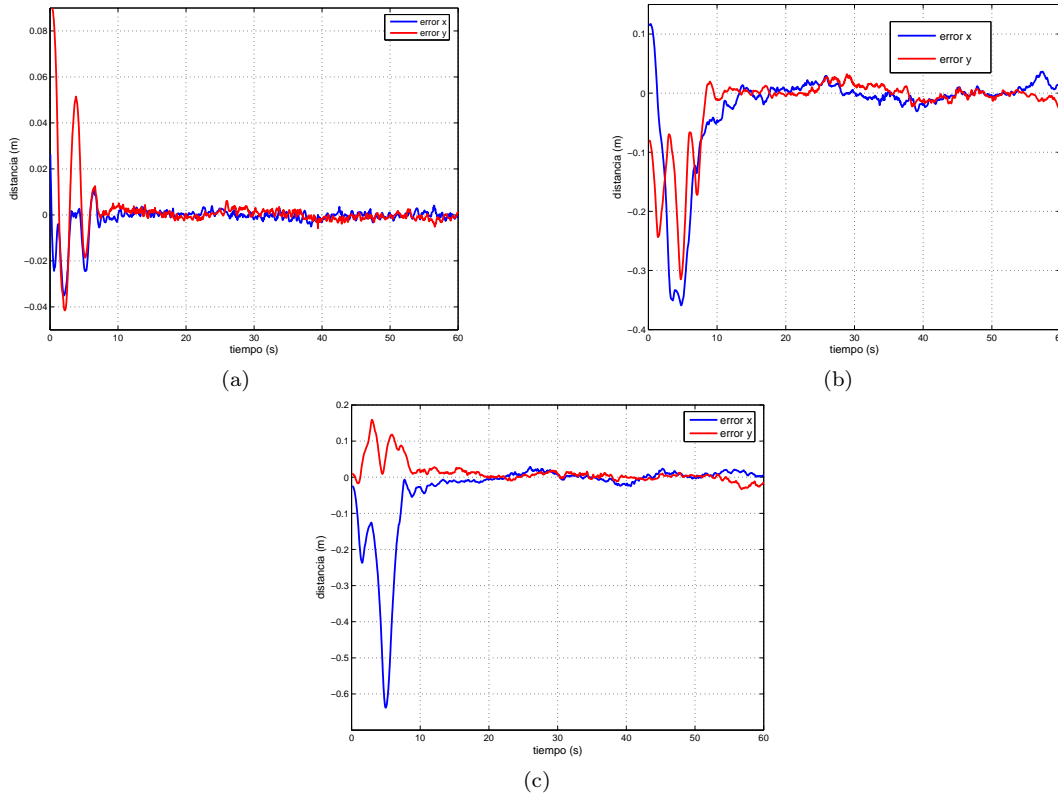


Figura 7.4: Error de posición de los agentes. (a) Error de posición robot 3. (b) Error de posición robot 2. (c) Error de posición robot 1.

7.4. Emulación de pivote deslizante en un tráiler estándar

La Figura 7.7 muestra la comparación entre una simulación numérica y un experimento de tres agentes emulando el comportamiento de un tráiler estándar con pivote deslizante utilizando la ley de control (4.4) con el vector de posición relativa deseado definido en (3.10) estableciendo el parámetro $d = 0$. La trayectoria para el líder, las condiciones iniciales y los parámetros de diseño son los mismos al experimento anterior. El comportamiento de los agentes en la simulación numérica es similar al comportamiento presentado en el experimento permitiéndonos validar la ley de control (4.4).

Comentario 7.1 *En la Figura 7.7 se puede apreciar que en los bordes de la Lemniscata de Geronon existe un desvío de la trayectoria por parte de los agentes seguidores. Esto sucede debido a que el análisis efectuado para obtener la distancia deslizante (3.14) está basado en circunferencias; es decir, se aproximan trayectorias de curvatura variable mediante circunferencias, lo que da como resultado un pequeño desvío del seguimiento de la trayectoria por parte de los agentes seguidores.*

Comparando la Figura 7.6 con la Figura 7.7 se observa que los efectos de sobreviraje se reducen considerablemente por lo que los agentes seguidores no se desvían demasiado de la trayectoria del líder. Para eliminar completamente los efectos de sobreviraje, la distancia ℓ entre agentes debe ser

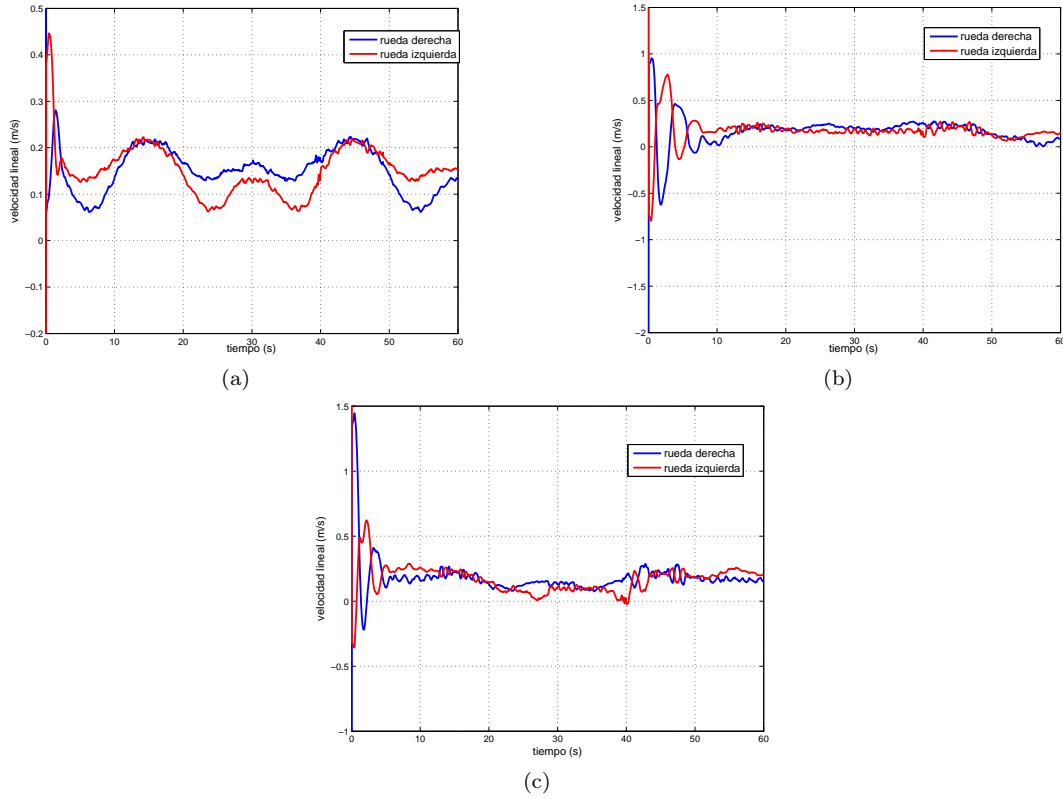


Figura 7.5: Señales de control para los robots. (a) Control robot 3. (b) Control robot 2. (c) Control robot 1.

pequeña. Esto en la práctica resulta difícil de llevar acabo debido a las restricciones físicas que los robots poseen.

La Figura 7.8 presenta los errores de posición para los tres agentes, los cuales se mantienen oscilando alrededor de cero. Éstas oscilaciones se atribuyen a inevitables errores de medición al colocar los marcadores infrarrojos.

La Figura 7.9 presenta la velocidad de las ruedas de cada uno de los robots para realizar y lograr el seguimiento de la trayectoria.

En la Figura 7.10 se muestran las distancias deslizantes S_{32} y S_{21} . Como se puede observar las distancias deslizantes son tanto positivas como negativas. Esto se debe a que los agentes giran tanto en sentido horario como en sentido antihorario.

7.5. Emulación de pivote deslizante en un tráiler general

La Figura 7.11 presenta el movimiento en el plano de tres agentes emulando el comportamiento de un tráiler general con pivote deslizante utilizando la ley de control (4.4) con el vector de posición relativa deseado definido en (3.10) estableciendo el parámetro $d = 0.2$ metros y el punto frontal $\ell = 0.3$ metros. La trayectoria de marcha para el agente líder es una margarita de cuatro pétalos dada por $\mathbf{m}(t) = [2 \sin(2\omega t) \cos(\omega t) \quad 2 \sin(2\omega t) \sin(\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 60$ segundos es el período.

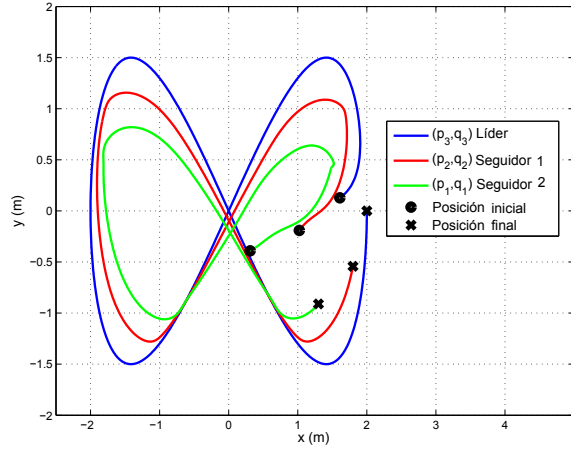


Figura 7.6: Movimiento en el plano de los agentes sin utilizar la posición del pivote deslizante.

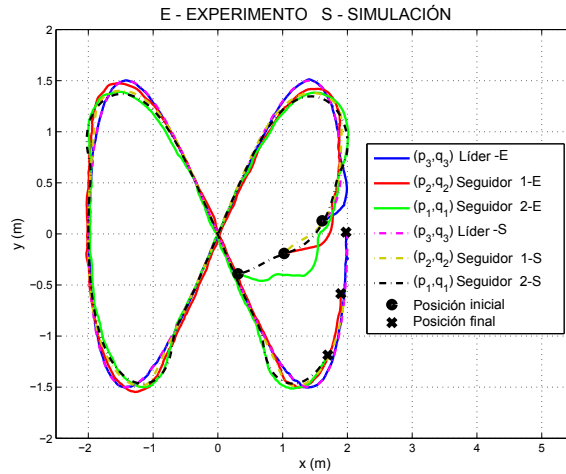


Figura 7.7: Movimiento en el plano de los agentes al utilizar la posición del pivote deslizante.

Las condiciones iniciales para el líder son $[x_3(0) \ y_3(0) \ \theta_3(0)]^T = [-0.41 \ -0.26 \ 0.225]^T$ y para los seguidores $[x_1(0) \ y_1(0) \ \theta_1(0)]^T = [-1.69 \ -0.2 \ -0.18]^T$, $[x_2(0) \ y_2(0) \ \theta_2(0)]^T = [-1.09 \ -0.34 \ 0.14]^T$

En la Figura 7.12 se muestran las distancias deslizantes S_{32} y S_{21} . En este caso las distancias deslizantes son positivas. Esto se debe a que los agentes solo giran en sentido antihorario.

7.6. Tiempo discreto

La Figura 7.13 presenta la trayectoria en el plano de los agentes. La trayectoria deseada es un rectángulo de 0.9 metros de largo y 0.45 metros de ancho, con las esquinas redondeadas $r_c = 0.1$ metros y una velocidad longitudinal $\mu = \frac{a}{t_s}$ donde $a = 2.5283$ metros es la longitud total de la trayectoria y $t_s = 60$ segundos es el tiempo que requiere la trayectoria en ser completada. La Tabla 7.1 presenta la exacta parametrización de la trayectoria deseada donde $b = -0.12$ es la distancia medida desde el eje horizontal. En este experimento, hemos usado $t_1 = 8.3059$, $t_2 = 12.0336$, $t_3 = 17.9664$, $t_4 = 21.6941$, $t_5 = 38.3059$, $t_6 = 42.0336$, $t_7 = 47.9664$, $t_8 = 51.6941$ y $t_9 = 60$.

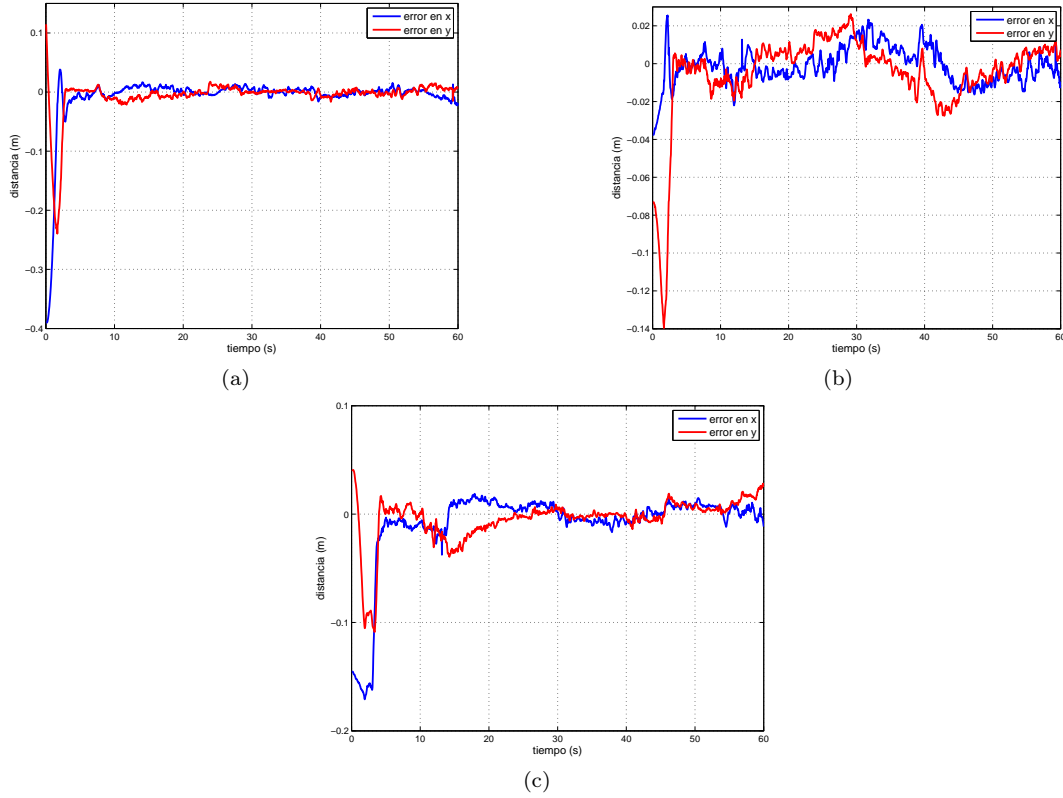


Figura 7.8: Error de posición de los agentes. (a) Error de posición robot 3. (b) Error de posición robot 2. (c) Error de posición robot 1.

En este caso escogimos la emulación de un tráiler estándar usando la ley de control (4.13) con un período de muestreo de $T = 0.2$ segundos. Los parámetros son $k_f = 0.4$, $k_m = 0.85$, $\ell_1 = \ell_2 = 0.1$ m, $\ell_3 = 0.5$ m, $C_{21} = 0.1$ m, $C_{32} = 0.05$ m. Las condiciones iniciales para el líder son $[p_3(0) \ q_3(0) \ \theta_3(0)]^T = [0.46 \ -0.16 \ 0.33]^T$, y para los seguidores $[p_2(0) \ q_2(0) \ \theta_2(0)]^T = [0.36 \ -0.26 \ 0.59]^T$, $[p_1(0) \ q_1(0) \ \theta_1(0)]^T = [0.23 \ -0.42 \ 0.54]^T$.

La Figura 7.14 muestra la norma del error de posición y del error de formación. Como puede verse en la Figura 7.14, el error de posición y el error de formación no converge exactamente a cero. Esto se debe a diferentes razones:

- Dinámicas no consideradas en el modelo, tal como la inercia del robot y la fricción.
- Algunos fenómenos no lineales como la presencia de zonas muertas.
- El período de muestreo es relativamente largo.

7.7. Evasión de obstáculos

La Figura 7.15 presenta la comparación entre una simulación numérica y un experimento en tiempo real del comportamiento en el plano de dos agentes ante la presencia de un obstáculo fijo

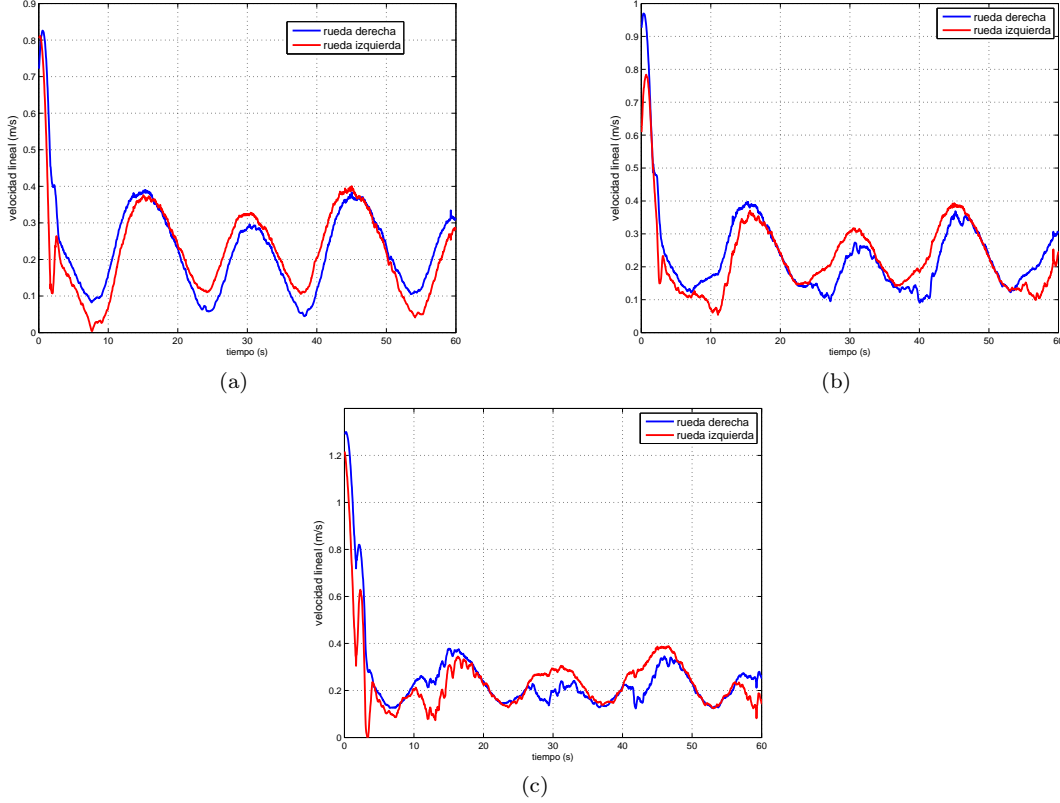


Figura 7.9: Señales de control para los robots. (a) Control robot 3. (b) Control robot 2. (c) Control robot 1.

utilizando la gráfica de formación G_1 . El agente líder sigue una trayectoria definida por $\mathbf{m}(t) = [1.6 \cos(\omega t) \quad 0.8 \sin(\omega t)]^T$ con $\omega = \frac{2\pi}{60}$. El punto frontal de cada agente, $\ell = 0.15$ metros, forma una línea paralela al eje X . El vector de posición relativo deseado es $\mathbf{c}_{21} = [0.5 \quad 0]^T$. Las condiciones iniciales para los agentes son $[p_1(0) \quad q_1(0)]^T = [1.42 \quad 0.1]^T$, $[p_2(0) \quad q_2(0)]^T = [1.25 \quad 0.07]^T$ y para el obstáculo $[x_o \quad y_o]^T = [-0.2 \quad 0.6]^T$. Tomando en cuenta que

- (i) el obstáculo se encuentra fijo, entonces su velocidad está dada por $\mu = 0$,
- (ii) la velocidad de la trayectoria deseada se encuentra acotada, $\eta = 0.17$,
- (iii) el parámetro de diseño se ajustó a $k = 1$,
- (iv) la mínima distancia permitida entre cualquier agente y el obstáculo es $D = 0.5$ metros,

entonces el parámetro $\epsilon_1 > 5.99$, $\epsilon_2 > 3.16$ por lo tanto se eligió $\epsilon_1 = 6.2$ y $\epsilon_2 = 3.5$.

El patrón geométrico se pierde cuando hay una posible colisión entre cualquier agente y el obstáculo. Los agentes se alinearán de nuevo al patrón geométrico cuando todos los agentes evadan al obstáculo. Esto se aprecia mejor en la Figura 7.16, donde el error de posición entre el líder y la trayectoria deseada se incrementa cuando hay riesgo de colisión con el obstáculo. Algo similar sucede con el error de formación entre el agente seguidor y el líder.

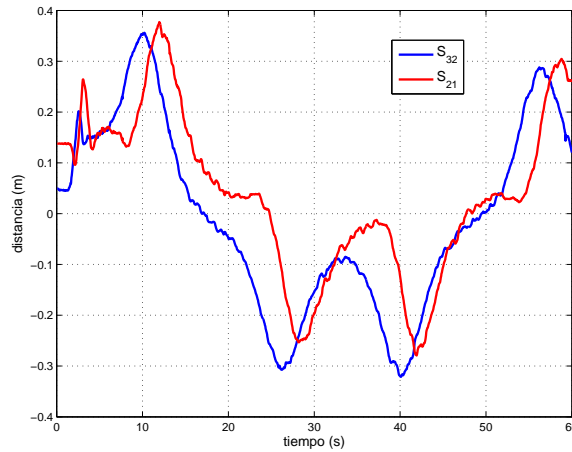


Figura 7.10: Distancias deslizando del tráiler estándar.

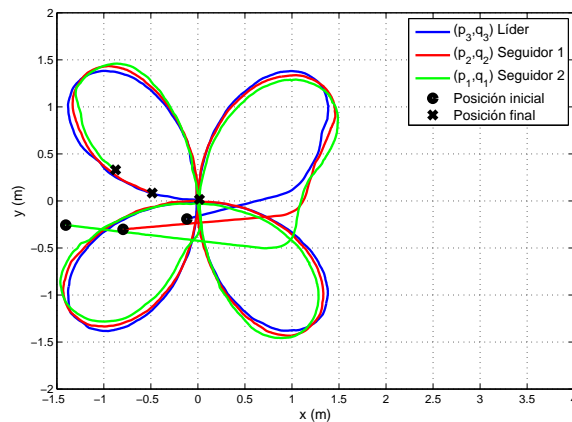


Figura 7.11: Movimiento en el plano de los agentes al utilizar la posición del pivote deslizando.

La Figura 7.17 muestra la distancia entre los agentes y el obstáculo. Note que en la simulación numérica la distancia entre los agentes y el obstáculo siempre es mayor o igual a la distancia mínima permitida $D = 0.5$ metros. Por otro lado, en el experimento en tiempo real, la distancia entre los agentes y el obstáculo es menor que la distancia mínima permitida. Esto se debe a que el modelo cinemático no toma en cuenta efectos dinámicos como la masa, la inercia y la fricción. A pesar de estas diferencias, los agentes evaden al obstáculo, convergen al patrón geométrico y siguen la trayectoria deseada.

7.8. Estimación de la orientación

La Figura 7.18 muestra un experimento en tiempo real de las trayectorias en el plano de dos agentes al utilizar la ley de control (6.28) y (6.31). La trayectoria deseada es una parábola definida como $\mathbf{m}(t) = [-0.5 + \sin(\omega t) \quad -1 + 2.5 \sin^2(\omega t)]^T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con $T = 70$ segundos es el período. El vértice de la parábola se localiza en $(-0.5, -1)$. La trayectoria deseada parte del vértice hacia la esquina superior derecha, posteriormente la esquina superior izquierda y finalmente regresa al vértice. Se escogió esta trayectoria debido a que, –en nuestra opinión– representa una de las condiciones de operación menos favorables de la ley de control en combinación con el observador

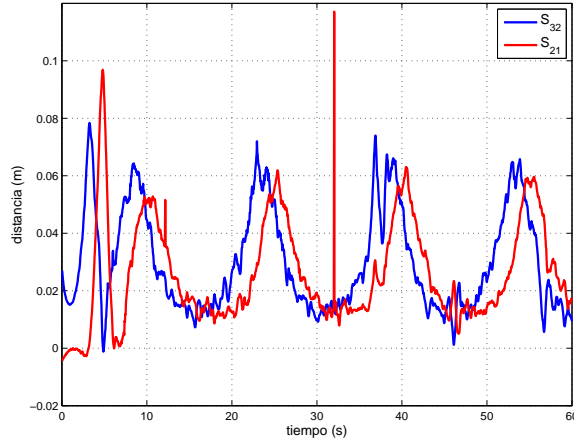


Figura 7.12: Distancias deslizantes del tráiler general.

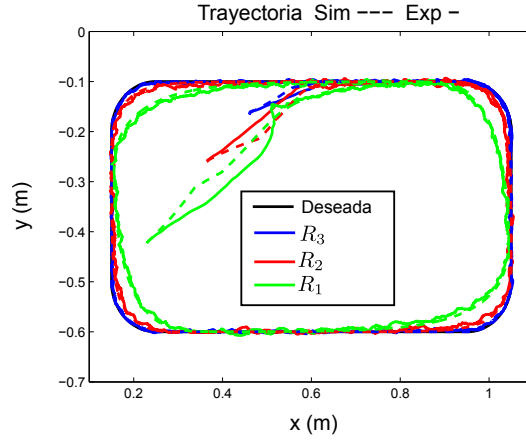


Figura 7.13: Trayectoria en el plano de los agentes con $T = 0.2$ segundos.

de orientación. Específicamente, cuando los agentes se aproximan a cualquiera de las esquinas de la parábola, la velocidad longitudinal de ambos tiende a cero. A pesar de que, en las esquinas de la parábola, la trayectoria deseada sufre un cambio brusco de dirección de π radianes, los agentes logran el seguimiento de trayectoria manteniendo la configuración geométrica deseada. Las condiciones iniciales del agente seguidor son $[x_1(0) \ y_1(0) \ \theta_1(0)]^T = [-.6391 \ -1.571 \ 0.2]^T$ y para el líder son $[x_2(0) \ y_2(0) \ \theta_2(0)]^T = [-.6188 \ -1.112 \ 0.1617]^T$. Los parámetros de control son $k_1 = 3$, $k_0 = 2$, $q_0 = 1$. El umbral de conmutación es $\delta = 0.05$, los parámetros del observador son: $\Gamma_1 = 40$, $\Gamma_2 = 25$ y las condiciones iniciales del observador son $\gamma_{11}(0) = 1$, $\gamma_{12}(0) = 0$, $\gamma_{21}(0) = 1$ y $\gamma_{22}(0) = 0$. El vector relativo de posiciones deseado está dado por

$$\mathbf{c}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Con esta elección en particular, el punto medio del eje de las ruedas de cada agente está alineado en una línea vertical, y los agentes están separados una distancia de 0.5 metros. Como se explicó anteriormente, las desviaciones presentadas en las esquinas de la parábola por parte de los agentes

Tabla 7.1: Parametrización de la trayectoria deseada

Intervalo de tiempo	Parametrización
$0 \leq t < t_1$	$x_d = \mu t; y_d = b$
$t_1 \leq t < t_2$	$x_d = t_1\mu + r_c \sin \left[\frac{\pi(t-t_1)}{2(t_2-t_1)} \right]; y_d = b - r_c \left[1 - \cos \left(\frac{\pi(t-t_1)}{2(t_2-t_1)} \right) \right]$
$t_2 \leq t < t_3$	$x_d = t_1\mu + r_c; y_d = b - r_c - \mu(t-t_2)$
$t_3 \leq t < t_4$	$x_d = t_1\mu + r_c \cos \left[\frac{\pi(t-t_3)}{2(t_4-t_3)} \right]$ $y_d = b - \mu * (t_3 - t_2) + r_c \left[1 + \sin \left(\frac{\pi(t-t_3)}{2(t_4-t_3)} \right) \right]$
$t_4 \leq t < t_5$	$x_d = (t_1 + t_4 - t)\mu; y_d = b - \mu(t_3 - t_2) - 2r_c$
$t_5 \leq t < t_6$	$x_d = (t_1 + t_4 - t_5)\mu - r_c \sin \left[\frac{\pi(t-t_5)}{2(t_6-t_5)} \right]$ $y_d = b - \mu(t_3 - t_2) - r_c \left[1 + \cos \left(\frac{\pi(t-t_5)}{2(t_6-t_5)} \right) \right]$
$t_6 \leq t < t_7$	$x_d = (t_1 + t_4 - t_5)\mu - r_c; y_d = b - \mu(t_3 - t_2 + t_6 - t) - r_c$
$t_7 \leq t < t_8$	$x_d = (t_1 + t_4 - t_5)\mu - r_c \cos \left[\frac{\pi(t-t_7)}{2(t_8-t_7)} \right]$ $y_d = b - \mu(t_3 - t_2 + t_6 - t_7) - r_c \left[1 - \sin \left(\frac{\pi(t-t_7)}{2(t_8-t_7)} \right) \right]$
$t_8 \leq t \leq t_9$	$x_d = (t_1 + t_4 - t_5 - t_8 + t)\mu; y_d = b - \mu(t_3 - t_2 + t_6 - t_7)$

surgen debido a la lenta convergencia del observador.

Comentario 7.2 *El agente seguidor presenta un mayor error de seguimiento cuando, en las esquinas de la parábola, gira para poder continuar con el seguimiento de la trayectoria. Esto se debe a dos aspectos. El primero consiste en que existe un cambio brusco de dirección de π radianes. El segundo aspecto tiene que ver con que el error se transmite de un agente a otro. Esto quiere decir que, debido a que el agente líder presenta un error de seguimiento cuando está girando en las esquinas de la parábola, este error se transmite al agente seguidor debido a que el seguidor no conoce información de la trayectoria deseada. Por lo tanto, si tuviéramos un grupo de agentes mayor, este error se acumularía y se vería reflejado en la trayectoria de cada agente. Una manera de reducir la propagación del error sería considerar que los agentes conozcan información de la trayectoria de marcha pero dejaría de considerarse como un sistema descentralizado.*

Las velocidades longitudinales de la rueda derecha y de la rueda izquierda de ambos agentes se presentan en la Figura 7.19. En color verde, se visualiza una onda cuadrada que simboliza los intervalos de tiempo en los cuales se realiza la conmutación entre leyes de control.

En la Figura 7.20 se visualiza los ángulos de orientación estimados los cuales presentan un valor cercano al ángulo de orientación deseado θ_d permitiendo validar el observador de orientación propuesto en el Capítulo 7.

La Figura 7.21 muestra un experimento en tiempo real de las trayectorias en el plano de tres agentes al usar la ley de control (6.29) y (6.31). La trayectoria deseada es una Lemniscata de Geronon de 2 metros de largo y 1 metro de ancho y está definida como $\mathbf{m}(t) = [-1 + \cos \phi_d \quad 0.5 \sin(2\phi_d)]^T$ donde $\phi_d(t) = -48\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 + 120\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 - 100\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 + 30\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^2$ es un polinomio de quinto orden con las siguientes condiciones: $\phi_d(0) = 0$, $\dot{\phi}_d(0) = 0$, $\phi_d\left(\frac{t_f}{2}\right) = \pi$, $\dot{\phi}_d\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0$, $\phi_d(t_f) = 2\pi$, $\dot{\phi}_d(t_f) = 0$. En este caso, $t_f = 60$ segundos y $0 \leq t \leq 60$ segundos. Con esta elección, $t = \frac{t_f}{2}$ y $t = t_f$, la velocidad longitudinal de cada agente tiende a cero. Las condiciones iniciales para los agentes seguidores son $[x_1(0) \quad y_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [0.8515 \quad 1.003 \quad 0.38]^T$, $[x_2(0) \quad y_2(0) \quad \theta_2(0)]^T = [0.3013 \quad -1.007 \quad 0.36]^T$ y para el líder son $[x_3(0) \quad y_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [0.151 \quad -0.0844 \quad 0.74]^T$.

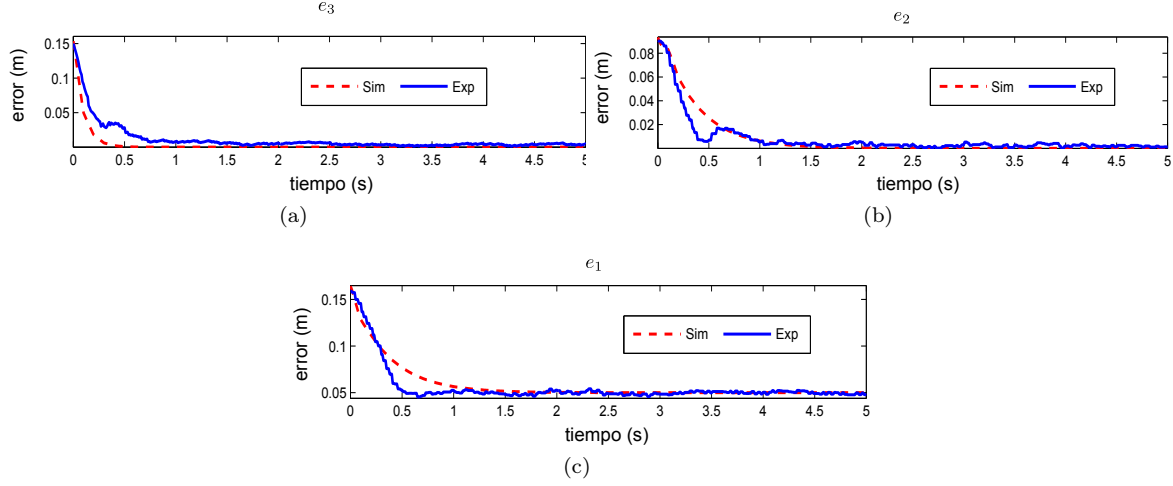


Figura 7.14: (a) Error de posición del líder. (b) Error de formación de R_2 . (c) Error de formación de R_1 .

Los parámetros de control son $k_1 = 3$, $k_0 = 2$, $q_0 = 1$. El umbral de conmutación está dado por $\delta = 0.02$, los parámetros del observador son: $\Gamma_1 = 20$, $\Gamma_2 = 25$ y $\Gamma_3 = 40$. Las condiciones iniciales para el observador son: $\gamma_{11}(0) = 1$, $\gamma_{12}(0) = 0$, $\gamma_{21}(0) = 1$, $\gamma_{22}(0) = 0$ y $\gamma_{31}(0) = 1$, $\gamma_{32}(0) = 0$. El vector relativo de posiciones deseado está dado por

$$\mathbf{c}_{21} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{32} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Con esta elección, el punto medio del eje de las ruedas de cada agente forman un triángulo escaleno.

Las velocidades longitudinales de la rueda derecha y de la rueda izquierda de cada agente se presentan en la Figura 7.22. Claramente se visualiza la conmutación entre las leyes de control por medio de una onda cuadrada, tomando en cuenta que la ley de control (6.29) es la que permanece activa por mas tiempo.

La Figura 7.23 presenta los ángulos de orientación estimados los cuales tiene un valor aproximado al ángulo de orientación deseado θ_d permitiendo de esta manera validar el observador de orientación presentado en el Capítulo 6.

La Figura 7.24 muestra un experimento en tiempo real de las trayectorias en el plano de tres agentes al utilizar la ley de control (6.30) y (6.31). La trayectoria deseada es una Lemniscata de Geronno de 2 metros de largo por 1 metro de ancho y está definida como $\mathbf{m}(t) = [\cos \phi_d \quad 0.5 \sin(2\phi_d)]^T$ donde $\phi_d(t) = -768\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 + 960\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 - 400\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 + 60\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^2$ cuando $0 \leq t < \frac{t_f}{2}$ y $\phi_d(t) = -768\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 + 2880\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 - 4240\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 + 3060\pi \left(\frac{t}{t_f}\right)^2 - 180\pi \frac{t}{t_f} + 150\pi$ cuando $\frac{t_f}{2} \leq t \leq t_f$. $\phi_d(t)$ es un polinomio de quinto orden con las siguientes condiciones: $\phi_d(0) = 0$, $\dot{\phi}_d(0) = 0$, $\phi_d\left(\frac{t_f}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\phi}_d\left(\frac{t_f}{4}\right) = 0$, $\phi_d\left(\frac{t_f}{2}\right) = \pi$, $\dot{\phi}_d\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0$, $\phi_d\left(\frac{3}{4}t_f\right) = \frac{3}{2}\pi$, $\dot{\phi}_d\left(\frac{3}{4}t_f\right) = 0$, $\phi_d(t_f) = 2\pi$, $\dot{\phi}_d(t_f) = 0$. En este caso, $t_f = 60$ segundos. Cuando $t = \frac{t_f}{4}$, $t = \frac{t_f}{2}$, $t = \frac{3}{4}t_f$ y $t = t_f$ la velocidad longitudinal de los tres agentes tiende a cero. Las condiciones iniciales de los agentes seguidores son $[x_1(0) \quad y_1(0) \quad \theta_1(0)]^T = [0.3932 \quad 0.8586 \quad 0.0861]^T$, $[x_2(0) \quad y_2(0) \quad \theta_2(0)]^T =$

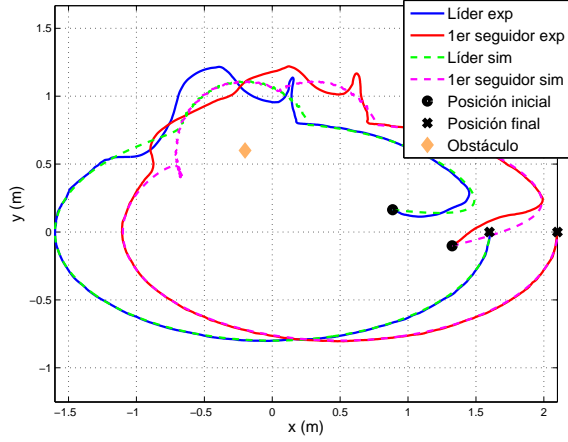


Figura 7.15: Trayectoria en el plano de dos agentes evadiendo un obstáculo fijo.

$[1.361 \quad 0.8754 \quad -0.1082]^T$ y para el líder $[x_3(0) \quad y_3(0) \quad \theta_3(0)]^T = [0.7977 \quad -0.0246 \quad -0.0474]^T$. Los parámetros de control están dados por $k_1 = 3$, $k_0 = 2$, $q_0 = 1$. El umbral de conmutación es $\delta = 0.02$, los parámetros del observador son: $\Gamma_1 = 20$, $\Gamma_2 = 25$ y $\Gamma_3 = 30$. Las condiciones iniciales para el observador están dadas por: $\gamma_{11}(0) = 1$, $\gamma_{12}(0) = 0$, $\gamma_{21}(0) = 1$, $\gamma_{22}(0) = 0$ y $\gamma_{31}(0) = 1$, $\gamma_{32}(0) = 0$. El vector relativo de posiciones deseado está dado por

$$\mathbf{c}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{32} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta elección, el punto medio del eje de las ruedas de cada agente forman un triángulo isósceles.

Las velocidades longitudinales de la rueda derecha y rueda izquierda de cada agente se muestran en la Figura 7.25. La conmutación entre leyes de control es claramente visible y está representada por una onda cuadrada de color verde.

La Figura 7.26 presenta los ángulos de orientación estimados los cuales son similares al ángulo de orientación deseado θ_d , permitiendo validar el observador de orientación presentado en el Capítulo 7.

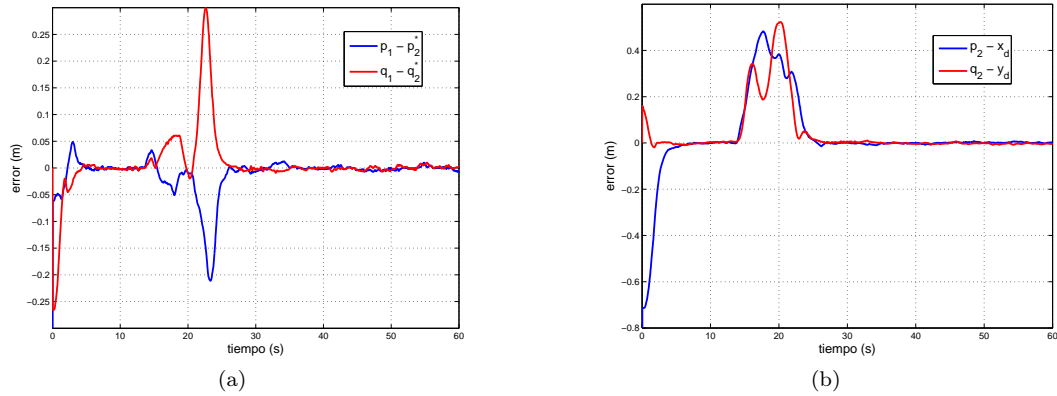


Figura 7.16: (a) Error de formación entre el seguidor y el líder. (b) Error de posición entre el líder y la trayectoria deseada.

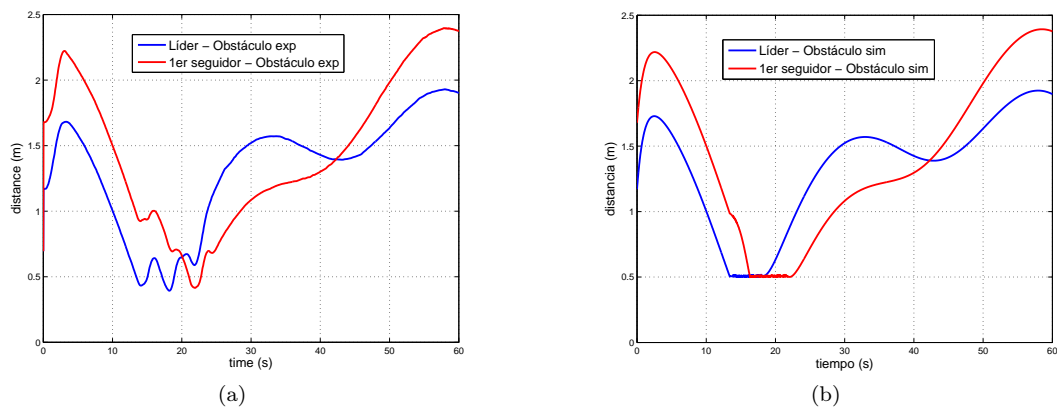


Figura 7.17: (a) Experimento de las distancias entre los agentes y el obstáculo. (b) Simulación numérica de las distancias entre los agentes y el obstáculo.

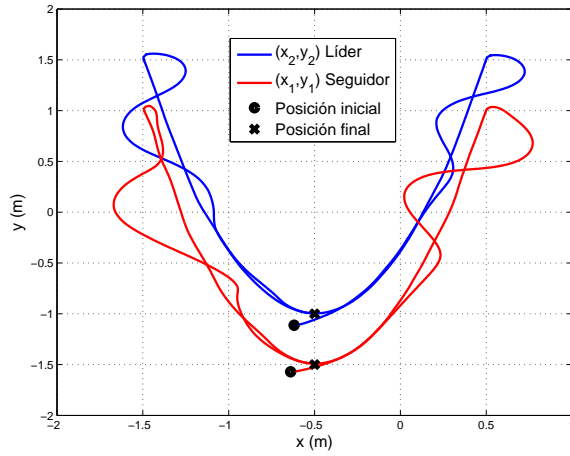


Figura 7.18: Trayectoria de los agentes en el plano.

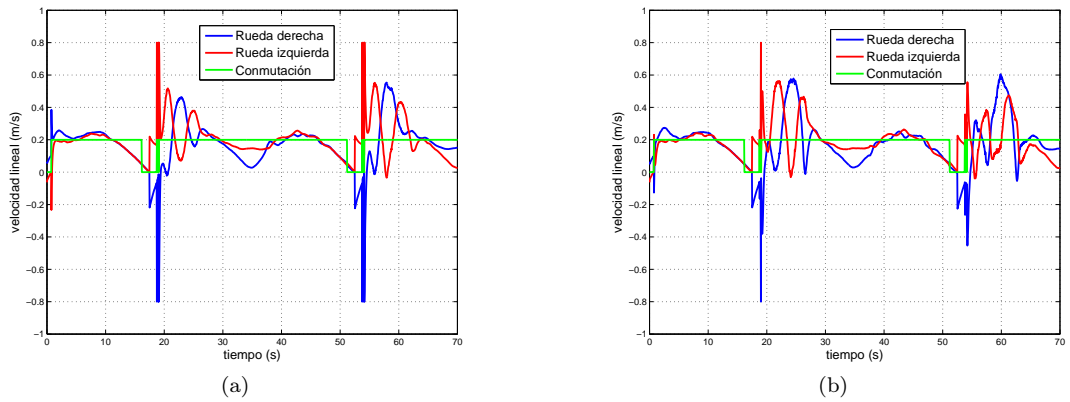


Figura 7.19: Señales de control para los agentes. (a) Señales de control para el líder. (b) Señales de control para el seguidor.

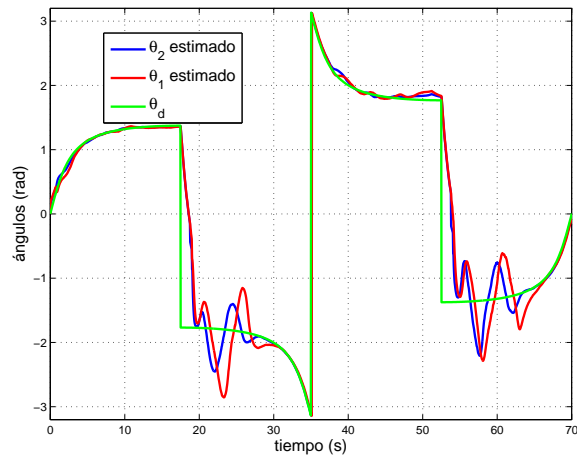


Figura 7.20: Ángulos de orientación.

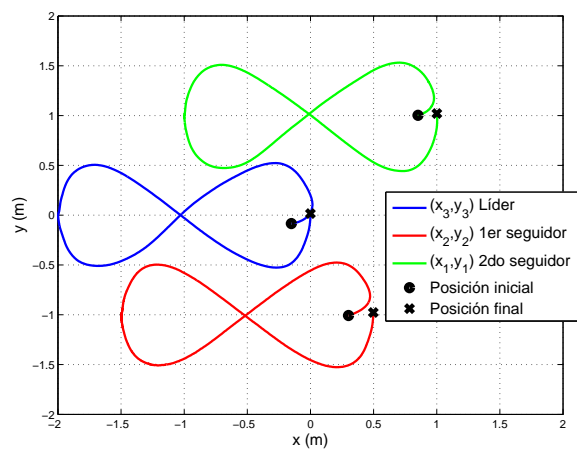


Figura 7.21: Trayectoria de los agentes en el plano.

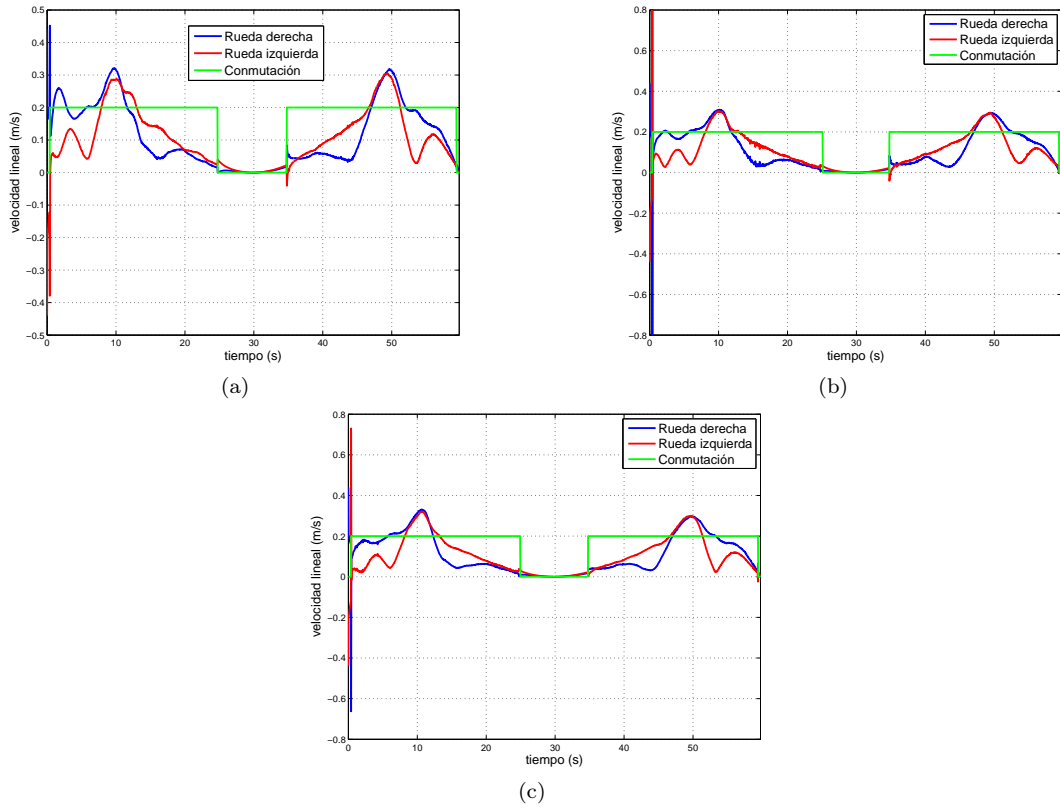


Figura 7.22: Señales de control para los agentes. (a) Señales de control para el líder. (b) Señales de control para el primer seguidor. (c) Señales de control para el segundo seguidor.

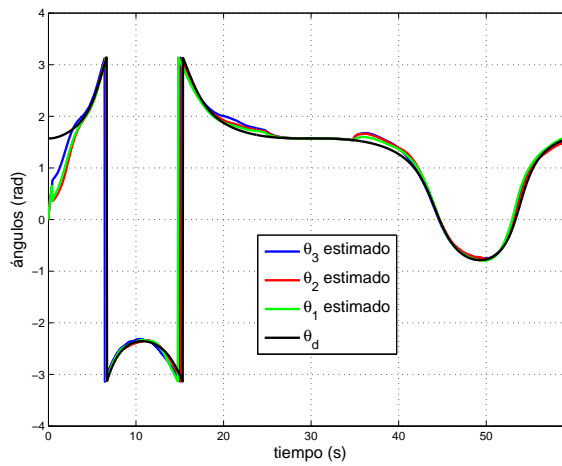


Figura 7.23: Ángulos de orientación.

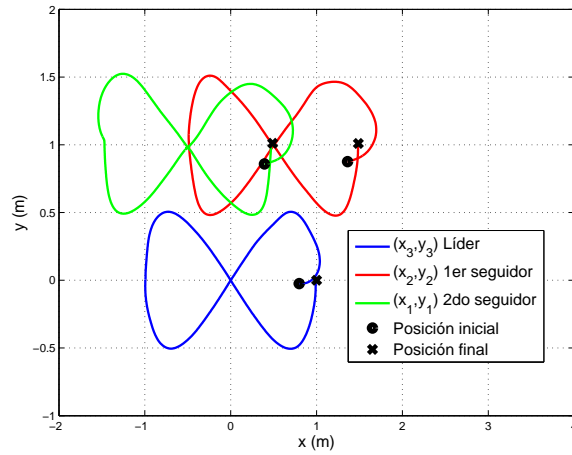
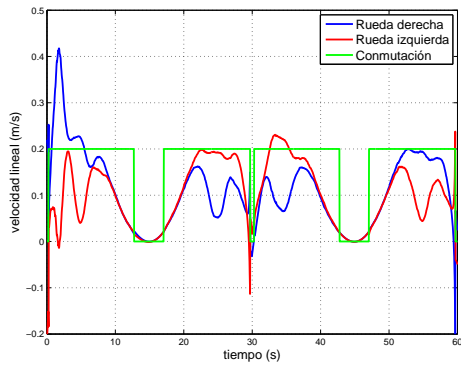
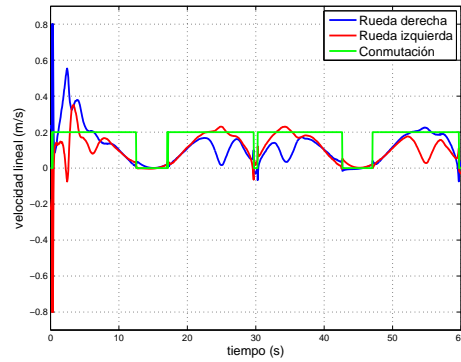


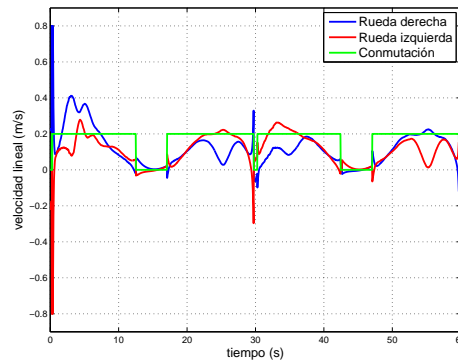
Figura 7.24: Trayectoria en el plano de los agentes.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.25: Señales de control para los agentes. (a) Señales de control para el líder. (b) Señales de control para el primer seguidor. (c) Señales de control para el segundo seguidor.

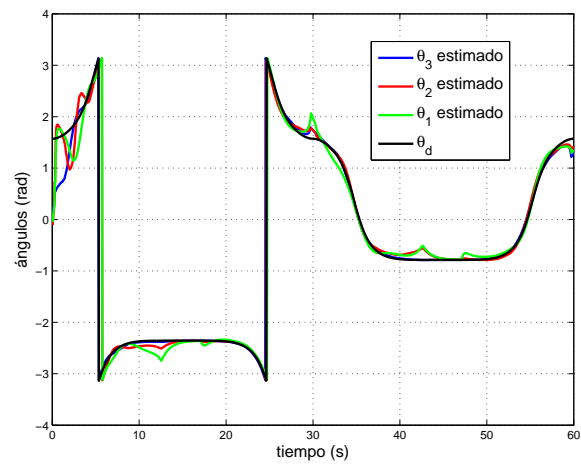


Figura 7.26: Ángulos de orientación.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se diseñaron vectores de formación variantes e invariantes en el tiempo para emular el movimiento traslacional y rotacional de estructuras rígidas así como la configuración del n -tráiler y de un mecanimso de pivote deslizante, utilizando el modelo cinemático de un grupo de robots móviles tipo uniciclo. La ley de control propuesta está basada en funciones potenciales atractivas. A pesar de la sencillez de esta ley de control, se demuestra que es posible emular los comportamientos antes mencionados cambiando solamente los vectores de posición y velocidad correspondientes. Para el caso de la configuración del n -tráiler, se compararon las trayectorias, las velocidades lineales y los ángulos de orientación entre el sistema físico de un tráiler y el emulado por el grupo de agentes, además de que se hacen evidentes los desvíos en la trayectoria. Los errores de posición y de formación convergen a cero, esto es que el agente líder logra el correcto seguimiento de la trayectoria y los seguidores se alinean en el patrón geométrico deseado. Cuando se introduce en la ley de control las expresiones correspondientes al pivote deslizante, se reducen significativamente los efectos de desvío en la trayectoria. El motivo por el cual no se eliminan completamente estos efectos se debe a que el análisis para obtener la expresión que determina la posición del pivote deslizante está basada a partir de circunferencias y, los casos presentados en este trabajo, son trayectorias con curvatura variable. La posición del pivote deslizante puede ser tanto positiva como negativa. Esto depende si los agentes giran en sentido horario o antihorario. Se demuestra que la función que determina la posición del pivote deslizante es cero cuando dos agentes consecutivos se mueven con el mismo ángulo de orientación. Una aplicación de nuestro enfoque, es el de usar este tipo de sistemas multi-agente en ambientes concurridos, donde la operación del tráiler físico sería peligrosa o imposible.

Es importante señalar que el desempeño expuesto por la ley de control basada en el modelo discreto es comparable con el desempeño de la ley de control en tiempo continuo, a pesar de que en el primer caso se utiliza una frecuencia de muestreo de 20 veces más lento que en el último caso. Por lo tanto, este tipo de leyes de control de tiempo discreto serían adecuados para la aplicación en robots móviles que cuenten con sistemas embebidos dentro del robot. Este es un tema abierto para futuras investigaciones.

Para la evasión de colisiones, cambiamos ligeramente la ley de control de tal manera que la velocidad de cada agente se mantuviera acotada. Esto se realiza utilizando funciones saturadas. Además agregamos a la ley de control un campo vectorial repulsivo el cual está diseñado de tal manera que presenta un foco inestable centrado en la posición de los obstáculos. Se demuestra que si la velocidad de la trayectoria, la velocidad del obstáculo y la velocidad de cada agente están acotadas, entonces es posible diseñar un parámetro ϵ_i que permita asegurarnos que los agentes se mantendrán a una distancia del obstáculo, logrando así la evasión de obstáculos. Se analizaron dos casos. El primer caso consistió en que cada agente posee su propio campo repulsivo permitiendo evadir los obstáculos de manera individual. Sin embargo, el patrón geométrico se pierde cuando cualquiera de los agentes seguidores está en peligro de colisión. En el segundo caso, el líder es el único agente con campo repulsivo permitiendo a los agentes preservar el patrón geométrico aun cuando se encuentren

en peligro de colisión. Extendemos el caso de evasión de colisiones a agentes de segundo orden y se realiza una comparación entre agentes modelados por un doble integrador y con las ecuaciones de movimiento del dron Parrot 2.0.

Para dotar de cierta autonomía a nuestro sistema multi-agente, se propuso un observador utilizando la técnica de Inmersión e Invarianza para estimar el ángulo de orientación de cada agente. En este caso, se utiliza el modelo cinemático extendido de los unicyclos. La desventaja que presenta este enfoque es que la matriz de desacoplamiento no está definida cuando la velocidad longitudinal de cada agente es cero. Para resolver este problema, se propone que las salidas del sistema sean la velocidad longitudinal y la orientación de cada agente. Se establece un parámetro para determinar el cambio entre leyes de control. El error de observación converge a cero lentamente cuando la velocidad longitudinal de cada agente tiende a cero. Esto se observa en el experimento donde se escogió la trayectoria de una parábola, la cual representa una de las condiciones de operación menos favorables para la ley de control. Específicamente, cuando los agentes se aproximan a cualquiera de las esquinas de la parábola, la velocidad longitudinal de ambos tiende a cero. A pesar de que, en las esquinas de la parábola, la trayectoria deseada sufre un cambio brusco de dirección de π radianes, los agentes logran el seguimiento de trayectoria manteniendo la configuración geométrica deseada.

Como trabajo futuro, se propone dotar de autonomía a los agentes así como de realizar tareas más complejas, como por ejemplo, la tarea de estacionar o coordinar a varios tráilers emulados por el sistema multi-agente. Estudiar el problema de evasión de colisiones con más obstáculos y las posibles colisiones entre los agentes y extender estos resultados a agentes de segundo orden así como tomar en cuenta a agentes que se muevan en el espacio.

Bibliografía

- [1] A. Ailon and I. Zohar. Control strategies for driving a group of nonholonomic kinematic mobile robots in formation along a time-parameterized path. *IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*, 17(2):326–336, 2012.
- [2] C. Altafini. Some properties of the general n -trailer. *International Journal of Control*, 74(4):409–424, 2001.
- [3] C. Altafini and P.-O. Gutman. Path following with reduced off-tracking for the n -trailer system. *Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, 3:3123–3128, Florida, USA, 1998.
- [4] C. Altafini, A. Speranzon, and K.H. Johansson. Hybrid control of a truck and trailer vehicle. In *Hybrid Systems: Computation and Control*, volume 2289 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 21–34. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [5] E. Aranda-Bricaire, C.H. Moog, and J.-B. Pomet. A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):127–132, January 1995.
- [6] E. Aranda-Bricaire and H. Rodríguez-Cortéz. Observer based trajectory tracking for a wheeled mobile robot. *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, 2007.
- [7] A. Astolfi, D. Karagiannis, and R. Ortega. Nonlinear and adaptive control with applications. *Springer*, 2008.
- [8] F. Belkhouche and B. Belkhouche. Modelling and controlling a robotic convoy using guidance laws strategies. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 35(4):813–825, 2005.
- [9] J. Bohn and A. K. Sanyal. Almost global finite-time stable observer for rigid body attitude dynamics. *American Control Conference*, pages Portland, Oregon, USA, 4949–4954, 2014.
- [10] S. Brás, M. Izadi, C. Silvestre, A. Sanyal, and P. Oliveira. Nonlinear observer for 3d rigid body motion. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages Florence, Italy, 2588–2593, 2013.
- [11] R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. S. Millman, R. W. Brockett, and H. J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*. pp. 181-191, Boston, Massachusetts, USA, 1983.
- [12] L. Bushnell, B. Mirtich, A. Sahai, and M. Secor. Off-tracking bounds for a car pulling trailers with kingpin hitching. *Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control*, pages 2944–2949, Lake Buena Vista, FL, 1994.
- [13] C. Canudas, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Communications and Control Engineering. Springer London, 1996.

- [14] Y.-H. Chang, C.-L. Chen, W.-S. Chan, H.-W. Lin, and C.-W. Chang. Fuzzy formation control and collision avoidance for multiagent systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- [15] T.-H. Cheng, Z. Kan, J. A. Rosenfeld, and W. E. Dixon. Decentralized formation control with connectivity maintenance and collision avoidance under limited and intermittent sensing. *Proceedings of the American Control Conference*, 7:3201–3206, Portland, Ore, USA, June 2014.
- [16] M. E. Dabladji, D. Ichalal, H. Arioui, and S. Mammar. Observer based controller for single track vehicles. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages Florence, Italy, 7420–7425, 2013.
- [17] V. Deligiannis, G. Davrazos, S. Manesis, and T. Arampatzis. Flatness conservation in the n -trailer system equipped with a sliding kingpin mechanism. *J Intell Robot Syst*, 46:151–162, 2006.
- [18] J. P. Desai. A graph theoretic approach for modeling mobile robot team formations. *Journal of Robotic Systems*, 19(11):511–525, 2002.
- [19] K. D. Do. Formation tracking control of unicycle-type mobile robots with limited sensing ranges. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 16(3):527–538, 2007.
- [20] J. F. Flores-Resendiz and E. Aranda-Bricaire. Cyclic pursuit formation control without collisions in multi-agent systems using discontinuous vector fields. *Proc. Latin American Congress on Automatic Control*, Cancún, México, 2014.
- [21] M. Ghasemi, S. G. Nersesov, G. Clayton, and H. Ashrafiuon. Sliding mode coordination control for multiagent systems with underactuated agent dynamics. *International Journal of Control*, Springer, London, 2008.
- [22] J. González-Sierra. Control de marcha y orientación de sistemas multiagente. *Tesis de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN*, 2010.
- [23] J. González-Sierra and E. Aranda-Bricaire. Avance en formación variante en el tiempo para sistemas multiagente. *Memorias del XIV Congreso Mexicano de Robótica COMROB 2012*, Puebla, México, 2012.
- [24] E. G. Hernández-Martínez and E. Aranda-Bricaire. Collision avoidance in formation control using discontinuous vector fields. *Proc. 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 797–802, Toulouse, France., 2013.
- [25] E. G. Hernandez-Martínez. *Estrategias de control para sistemas multiagentes*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 2009.
- [26] F. Jean. The car with n trailers: characterisation of the singular configurations. *Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1:241–266, October 1996.
- [27] A. B. Kahng, Y. U. Cao, and A. S. Fukunaga. Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions. *Autonomous Robotics*, 226-234, 1997.
- [28] P. Kokotović, R. Sepulchre, and M. Jankovic. Constructive nonlinear control. *Springer-Verlag, London*, 1997.
- [29] P. S. Krishnaprasad and E. W. Justh. Equilibria and steering laws for planar formations. *Systems and Control Letters*, 52, 25-38, 2004.
- [30] A. Kumar and H. G. Tanner. Towards decentralization of multi-robot navigation functions. *In International Conference on Robotics and Automation*, 4132-4137, 2005.

- [31] K. Kyriakopoulos and D. Dimarogonas. Formation control and collision avoidance for multi-agent systems and a connection between formation infeasibility and flocking behavior. *In Conference on Decision and Control*, pages 84–89, Sevilla, Spain, 2005.
- [32] K. J. Kyriakopoulos and D. V. Dimarogonas. Distributed cooperative control and collision avoidance for multiple kinematic agents. *In Conference on Decision and Control*, pages 721–726, 206.
- [33] J. P. Laumond. Controllability of a multibody mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6):755–763, 1993.
- [34] J. R. T. Lawton, R. W. Beard, and B. J. Young. A decentralized approach to formation maneuvers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(6):933–941, 2003.
- [35] D. Lizarraga, P. Morin, and C. Samson. Exponential stabilization of certain configurations of the general n-trailer system. *Proc. IFAC Workshop Motion Control*, 1998.
- [36] S. Manesis. Off-tracking elimination in road-trains of heavy duty trucks with multiple semi-trailers. *Proc. of the 8th IFAC/IFIP/IFORS/IMACS on Large Scale Systems: Theory and Applications*, Patras, Greece, 1998.
- [37] S. Manesis, N. T. Koussoulas, and G. N. Davrazos. On the suppression of off-tracking in multi-articulated vehicles through a movable junction technique. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 37(4):399–414, 2003.
- [38] Ph. Martin and P. Rouchon. Feedback linearization and driftless systems. *Math. Control Signal Syst.*, 7:235–254, 1994.
- [39] M. Michalek. Application of the vfo method to set-point control for the n-trailer vehicle with off-axle hitching. *International Journal of Control*, 85(5):502–521, May 2012.
- [40] P. Morin, J.-B. Pomet, and C. Samson. Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless systems via oscillatory approximation of lie brackets in closed loop. *SIAM J. on Control and Optimization*, 38:22–49, 1999.
- [41] P. Morin and C. Samson. Transverse function control of a class of non-invariant driftless systems. application to vehicles with trailers. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4312–4319, 2008.
- [42] T. Mylvaganam, M. Sassano, and A. Astolfi. A constructive differential game approach to collision avoidance in multi-agent systems. *Proceedings of the American Control Conference*, 7:311–316, Portland, Ore, USA, June 2014.
- [43] Y. Nakamura, H. Ezaki, Y. Tan, and W. Chung. Design of steering mechanism and control of nonholonomic trailer systems. *IEEE International Conference On Robotics and Automation*, pages 247–254, 2000.
- [44] K. K. Oh and H. S. Ahn. Distance-based formation control using euclidean distance dynamics matrix: Three-agent case. *American Control Conference*, pages San Francisco, CA, USA, 4810–4815, 2014.
- [45] R. Orosco-Guerrero, E. Aranda-Bricaire, and M. Velasco-Villa. Modeling and dynamic feedback linearization of a multi-steered n-trailer. *15th Triennial World Congress*, 2002.
- [46] L. E. Parker, T. Arai, and E. Pagello. Guest editorial advances in multirobot systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18:655–661, 2002.

- [47] G. R. Peñaloza-Mendoza, D. E. Hernández-Mendoza, and E. Aranda-Bricaire. Time-varying formation control for multi-agent systems applied to n -trailer configuration. *18th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE*, Mérida, Yucatán, México, 2011.
- [48] P. Rapp, O. Sawodny, and C. Tarín. An immersion and invariance based speed and rotation angle observer for a class of revolutes/prismatic manipulators with two degrees of freedom. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages Florence, Italy, 6365–6371, 2013.
- [49] F. Rendón-Benítez, J. Santiaguillo-Salinas, J. González-Sierra, and E. Aranda-Bricaire. Control de marcha de mistemas multi-mgente con orientación al ángulo de marcha del líder. *Memorias del XV Congreso latinoamericano de Control Automático CLCA 2012*, Lima, Perú, 2012.
- [50] E. J. Rodríguez-Seda. Self-triggered collision avoidance control for multi-vehicle systems. *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 461–466, Seattle, Washington., 2015.
- [51] M. R. Rokui and K. Khorasani. Adaptive tracking control of a flexible link manipulator using a discrete-time nonlinear model. *Proceedings of the American Control Conference*, 3:1848–1853, June 1997.
- [52] P. Rouchon, M. Fliess, J. Levine, and P. Martin. Flatness, and motion planning: the car with n trailers. *Proceedings of the 2nd European Control Conference*, 1993.
- [53] C. Samson. Control of chained systems. application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 64–77, 1995.
- [54] S. Sarkar and I. Narayan Kar. Formation control of multiple groups of robots. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages Florence, Italy, 1466–1471, 2013.
- [55] M. A. Rosaldo Serrano and E. Aranda Bricaire. Modeling and control of a commercial aircraft prototype quadrirotor type (in spanish). *Proc. of the XVI Latinoamerican Congress of Automatic Control CLCA*, 2014.
- [56] A. Soriano, E. J. Bernabeu, A. Valera, and M. Valls. Collision avoidance of mobile robots using multiagent systems. *Distributed Computing and Artificial Intelligence, S. Omatu, J. Neves, J. M. C. Rodriguez, J. F. Paz Santana, and S. R. Gonzalez, Eds.*, Springer, Berlin, Germany, 2013.
- [57] O. J. Sørđalden and K. Y. Wichlund. Exponential stabilization of a car with n trailers. *Proceedings of the 32th Conference on Decision and Control*, pages 978–983, 1993.
- [58] K. Sung-Mo, P. Myoung-Chul, L. Byung-Hun, and A. Hyo-Sung. Distance-based formation control with a single moving leader. *American Control Conference*, pages Portland, Oregon, USA, 305–310, 2014.
- [59] I. Suzuki, Y. Asahiro, H. Asama, and M. Yamashita. Improvement of distributed control algorithms for robots carrying an object. *Proc. of the 1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 608–613, Tokio, Japón, 1999.
- [60] S. Swaminathan, M. Phillips, and M. Likhachev. Planning for multiagent teams with leader switching. *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 5403–5410, Seattle, Washington., 2015.
- [61] K .H. Tan and M. Anthony-Lewis. Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control. *Proc. International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1, 132-139, Osaka, Japón, 1996.

- [62] K. Tanaka, S. Hori, and H. O. Wang. Multiobjective control of a vehicle with triple trailers. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 7(3):357–368, 2002.
- [63] D. Tilbury, O. J. Sørndalen, L. Bushnell, and S. S. Sastry. A multisteering trailer system: Conversion into chained form using dynamic feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(6):807–818, 1995.
- [64] H. Yamaguchi. A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operations. *Robotics and Autonomous Systems*, 43(1):257–282, 2003.

Apéndice A

Artículos publicados

A continuación se presenta un lista de los artículos que se han aceptado o publicado durante el periodo Mayo de 2012 a Abril de 2016.

A.1. Capítulos de libro

1. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire, *Emulation of Mechanical Structures through a Multi-agent Robot System: An Overview*, M. Ceccarelli and E.E. Hernández Martínez (eds.), Multi-body Mechatronic Systems, Springer International Publishing Switzerland 2015, Mechanisms and Machine Science 25, 327-337, DOI 10.1007/978-3-319-09858-6_31, 2015.

A.2. Artículos de revista indizadas al JCR

1. J. F. Flores-Resendiz, E. Aranda-Bricaire, **J. González-Sierra**, J. Santiaguillo-Salinas, *Finite-Time Formation Control without Collisions for Multiagent Systems with Communication Graphs Composed of Cyclic Paths*, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015, 17 pages, Hindawi Publishing Corporation, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/948086>
2. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire, D. E. Hernández-Mendoza, J. Santiaguillo-Salinas *Emulation of n-trailer Systems through Differentially Driven Multi-Agent Systems: Continuous- and Discrete-Time Approaches*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 75:129-146, DOI 10.1007/s10846-013-0002-9, 2014.
3. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire and E. G. Hernandez-Martinez. *Formation Tracking with Orientation Convergence for Groups of Unicycles*. Int J Adv Robot Syst, 10:180. DOI: 10.5772/55582, 2013.
4. M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire, H. Rodriguez-Cortes and **J. González-Sierra**, *Trajectory Tracking for a Wheeled Mobile Robot Using a Visual Servoing Positioning System and an Attitude Observer*, European Journal of Control, Vol. 18, No. 4: 348-355, 2012.

A.3. Otros artículos de revista indizadas

1. M. Méndez-Martínez, **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire, *Control de vuelo en configuración líder-seguidor para aeronaves tipo cuadricóptero*, AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications, Vol. 3, pp. 17-22, ISSN: 2007-7114, 2015.

2. **J. González-Sierra**, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire, *Reducción de los efectos de sobreviraje para un tráiler virtual*, AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications, Vol. 2, pp. 73-78, ISSN: 2007-7114, 2014.

A.4. Congresos internacionales

1. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire, *Reduction of Off-tracking Effects in an n-trailer Emulated through a Multi-agent Robot Mobile System*, International Conference on Robotics and Automation ICRA 2015, pp. 5935-5940, Seattle, Washington, USA, 2015.
2. M. Ramírez-Neria, **J. González-Sierra**, J. L. García-Antonio, J. A. García-Antonio, E. Ramírez-Neria, *On the Sliding Mode Control of a Magnetic Levitation System Case: Thomson's Jumping Ring*, Proceedings of the International Conference of Control, Dynamic Systems, and Robotics, Ottawa, Ontario, Canada, May 15-16, 2014.
3. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire, H. Rodríguez-Cortés, J. Santiaguillo-Salinas, *Trajectory Tracking for a Group of Unicycle-Type Robots Using an Attitude Observer*, 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Vol. 9, Part 1: 676-681, 2013.
4. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire *Design of a Virtual Mechanism for Trajectory Tracking of Convoys of Mobile Robots*, Proceedings of the 10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control (CCE 2013), Ciudad de México, Octubre 2-5, 2013.
5. F. Rendón Benitez, J. Santiaguillo Salinas, E. Aranda Bricaire, **J. González Sierra**, *Control de Marcha de Sistemas Multi-agente con Orientación al Ángulo de Marcha del Líder*, Memorias del XV Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA 2012, Lima, Perú, Octubre 23-26, 2013.
6. **J. González -Sierra**, E. Aranda-Bricaire, H. Rodríguez-Cortés, *Attitude Observer and Trajectory Tracking for a Group of Unicycle-Type Robots*, Proceedings of the 9th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control (CCE 2012), Ciudad de México, Septiembre 26-28, 2012.

A.5. Congresos nacionales

1. **J. González-Sierra**, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda Bricaire, *Individual Obstacle Avoidance for Groups of Mobile Robots in Formation Tracking*, Memorias del XVII Congreso Mexicano de Robótica, Los Cabos, Baja California Sur, México, 2015.
2. **J. González-Sierra**, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire, *Emulación de Estructuras Mecánicas mediante Sistemas Multi-Agente*, Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2013, Ensenada, Baja California, Octubre 16-18, 2013.
3. **J. González-Sierra**, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire, *Reducción de los Efectos de Sobreviraje para un Tráiler Virtual*, Memorias del XV Congreso Mexicano de Robótica (COMRob 2013), Manzanillo, Colima, Octubre 2-5, 2013.
4. **J. González-Sierra**, E. Aranda-Bricaire, *Avance en formación variante en el tiempo para sistemas multiagente*, Memorias del XIV Congreso Mexicano de Robótica (COMRob 2012), Puebla, Octubre 24-26, 2012.