



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

## **Control de orden fraccional de un cuadirotor**

Tesis que presenta:

**Arturo Govea Vargas**

Para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Director de la Tesis:

**Dr. Rafael Castro Linares**



# Agradecimientos

**Al Dr. Rafael Castro Linares:** *Por sus consejos, su apoyo y sus críticas para lograr la culminación de este trabajo. Por darme la oportunidad de trabajar con él y por confiar en mí para el desarrollo de este proyecto de tesis.*

**Al M.C. Manuel Alejandro Vallejo Alarcón:** *Por haberme ayudado a llevar a cabo los experimentos presentados en esta tesis.*

**Al Dr. Manuel A. Duarte Mermoud y la Dra. Norelys Águila Camacho:** *Por su apoyo y guía en el comienzo y conclusión de este trabajo de tesis.*

**Al Dr. José Juan Corona Sánchez:** *Por haberme ayudado a entender mejor mi plataforma experimental, por su guía y apoyo.*

**A los miembros del jurado:** *Por sus comentarios y las aportaciones que hicieron a este trabajo de tesis.*

**A los doctores de la sección de mecatrónica:** *Por su enseñanza, sus consejos y por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo. Por confiar en mí y darme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría en la sección de mecatrónica.*

**A mis amigos y compañeros del CINVESTAV:** *Por compartir su amistad conmigo y los buenos momentos que pasamos juntos.*

**A mi estimada Familia:** *Por todo el apoyo que me han brindado, hasta en los momentos más difíciles.*

**Al CONACYT:** *Por su apoyo económico para realizar mis estudios de Maestría a través de la beca con número de registro 786275 y al proyecto número CB-2019-01,254329.*



# Resumen

En este trabajo se propone una técnica de control de orden fraccional por regímenes deslizantes, para sistemas no lineales de segundo orden y además se da una aplicación de un cuadrirotor para probar las características de dicho control. Se brinda una prueba de estabilidad para dicho control, el cual puede tener perturbaciones desconocidas pero acotadas. También se muestran resultados en simulación numérica y experimentales, con el cuadrirotor como plataforma. Además se brinda una comparación con un control de orden entero por regímenes deslizantes, para investigar las ventajas y desventajas del control de orden fraccional utilizado. En particular se implementa un método numérico para calcular la derivada fraccional de la función signo, utilizada en este trabajo de tesis.



# Abstract

In this thesis a Fractional Order Sliding Mode Control is proposed, for a Nolinear System of Second Order and we give an application of a Quadro-  
tor, in order to test the characteristics of this control scheme. We give a  
proof of stability for such control, which may have unknown but bounded  
perturbations. We give simulation and experimental results of the quadro-  
tor platform. We also make a comparison between the FOSMC and the  
IOSMC(Integer Order Sliding Mode Control), in order to set advantages  
and disadvantages of the FOSMC. In particular it is implemented a nu-  
merical method in order to compute the fractional derivative of the sign  
function used in this thesis.





# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>XIV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas Aéreos No-Tripulados. . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema. . . . .	3
1.3. Objetivos de la tesis. . . . .	3
1.4. Aportaciones de la tesis. . . . .	4
1.5. Organización de la tesis. . . . .	4
<b>2. Control Fraccional de una Clase de Sistema Nolineal de Segundo Orden con Perturbaciones</b>	<b>5</b>
2.1. Cálculo Fraccional. . . . .	5
2.1.1. Definiciones básicas. . . . .	6
2.1.2. Cálculo Fraccional por Regímenes Deslizantes. . . . .	10
<b>3. Aplicación al Seguimiento de Trayectoria de un Cuadrirotor</b>	<b>13</b>
3.1. Dinámica del Cuadrirotor Modelado por Euler-Lagrange . . . . .	13
3.2. Dinámica del Cuadrirotor Modelado por Newton-Euler. . . . .	18
3.3. Seguimiento de Trayectoria de un Cuadrirotor . . . . .	21
<b>4. Resultados en Simulación Numérica y Experimentales</b>	<b>25</b>
4.1. Simulaciones con Trayectoria tipo Vuelo Suspendido . . . . .	27

4.1.1.	Simulaciones sin Perturbaciones . . . . .	27
4.1.2.	Simulaciones con Perturbaciones . . . . .	31
4.2.	Simulaciones con Trayectoria tipo Lemniscata . . . . .	38
4.2.1.	Simulaciones sin Perturbaciones . . . . .	39
4.2.2.	Simulaciones con Perturbaciones . . . . .	47
4.3.	Comparación con CERD . . . . .	54
4.4.	Simulaciones con Trayectoria tipo Vuelo Suspendido . . . . .	55
4.4.1.	Simulaciones sin Perturbaciones . . . . .	56
4.4.2.	Simulaciones con Perturbaciones . . . . .	58
4.5.	Simulaciones con Trayectoria tipo Lemniscata . . . . .	60
4.5.1.	Simulaciones sin Perturbaciones . . . . .	61
4.5.2.	Simulaciones con Perturbaciones . . . . .	63
4.6.	Discusión de los Resultados en Simulación Numérica . . . . .	65
4.7.	Plataforma experimental. . . . .	66
4.8.	Experimentos con Trayectoria tipo Vuelo Suspendido . . . . .	68
4.8.1.	Experimentos con Sin Perturbaciones . . . . .	69
4.8.2.	Experimentos con Perturbación tipo Viento . . . . .	73
4.8.3.	Experimentos con Perturbación tipo Carga . . . . .	78
4.9.	Experimentos con Trayectoria tipo Lemniscata . . . . .	82
4.9.1.	Experimentos con Sin Perturbaciones . . . . .	82
4.9.2.	Experimentos con Perturbación tipo Viento . . . . .	87
4.9.3.	Experimentos con Perturbación tipo Carga . . . . .	91
4.10.	Discusión de los Resultados Experimentales . . . . .	95
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>97</b>
5.1.	Conclusiones. . . . .	97
5.2.	Trabajo Futuro. . . . .	98
	<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>
<b>A.</b>	<b>Artículos Publicados</b>	<b>105</b>
A.1.	IASTED . . . . .	105
A.2.	Algorithms . . . . .	105
<b>B.</b>	<b>Derivada Fraccional mediante Grünwald-Letnikov</b>	<b>107</b>
B.1.	Definición 2.3 . . . . .	107
B.2.	Definición 2.4 . . . . .	109
<b>C.</b>	<b>Equivalencia</b>	<b>113</b>
C.1.	Relación cinemática . . . . .	113

# Lista de Figuras

1.1. Cuadrirotor Mavic Pro DJI $\text{\textcircled{R}}$ . . . . .	2
2.1. a) Derivada Fraccional de $\text{sen}(t)$ con base a la definición 2.3 b) Derivada Fraccional de $\text{sen}(t)$ con base a la definición 2.4. . . . .	9
3.1. Sistema de Coordenadas y fuerzas/momentos que actúan en el cuadrirotor. . . . .	14
3.2. Evolución de marcos de referencia conforme a los ángulos de Euler. . . . .	15
4.1. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de $\beta = 0.1$ a $\beta = 0.5$ . . . . .	28
4.2. <b>(a)</b> Errores en x; <b>(b)</b> Errores en y; <b>(c)</b> Errores en z . . . . .	28
4.3. <b>(a)</b> Errores en $\phi$ ; <b>(b)</b> Errores en $\theta$ ; <b>(c)</b> Errores en $\psi$ . . . . .	29
4.4. <b>(a)</b> Empuje Vertical <b>(b)</b> Torque en Alabeo <b>(c)</b> Torque en Cabeceo <b>(d)</b> Torque en Guiñada . . . . .	30
4.5. <b>(a)</b> Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.5$ ; <b>(b)</b> Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.9$ . . . . .	30
4.6. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de $\beta = 0.1$ a $\beta = 0.9$ . . . . .	31
4.7. Errores en x Vuelo Suspendingido con Perturbación. . . . .	32
4.8. Errores en y Vuelo Suspendingido con Perturbación. . . . .	32
4.9. Errores en z Vuelo Suspendingido con Perturbación. . . . .	33
4.10. Error en el Ángulo de Euler $\phi$ Vuelo Suspendingido con Perturbación. . . . .	33
4.11. Error en el Ángulo de Euler $\theta$ Vuelo Suspendingido con Perturbación. . . . .	34
4.12. Error en el Ángulo de Euler $\psi$ Vuelo Suspendingido con Perturbación. . . . .	34
4.13. Los Ángulos de Euler están dentro de la aproximación de ángulo pequeño. . . . .	35
4.14. <b>(a)</b> Empuje vertical con $\beta$ s distintos; <b>(b)</b> Empuje vertical con $\beta = 0.5$ . . . . .	36
4.15. <b>(a)</b> Torque en Alabeo con $\beta$ s distintos; <b>(b)</b> Torque en Alabeo con $\beta = 0.5$ . . . . .	36
4.16. <b>(a)</b> Torque en Cabeceo con $\beta$ s distintos; <b>(b)</b> Torque en cabeceo con $\beta = 0.5$ . . . . .	37
4.17. <b>(a)</b> Torque en Guiñada con $\beta$ s distintos; <b>(b)</b> Torque en Guiñada con $\beta = 0.5$ . . . . .	37
4.18. <b>(a)</b> Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.5$ ; <b>(b)</b> Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.9$ . . . . .	38

4.19. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de $\beta = 0.1$ a $\beta = 0.9$ .	39
4.20. Proyección en el plano x-y de la trayectoria	40
4.21. Errores en x Lemniscata sin Perturbaciones.	40
4.22. Errores en y Lemniscata sin Perturbaciones.	41
4.23. Errores en z Lemniscata sin Perturbaciones.	41
4.24. Errores en el ángulo de Euler $\phi$ Lemniscata sin Perturbaciones.	42
4.25. Errores en el ángulo de Euler $\theta$ Lemniscata sin Perturbaciones.	43
4.26. Errores en el ángulo de Euler $\psi$ Lemniscata sin Perturbaciones.	43
4.27. Los Ángulos de Euler cumplen con la aproximación de ángulo pequeño.	44
4.28. (a) Empuje vertical con $\beta$ s distintos; (b) Empuje vertical con $\beta = 0.5$ .	44
4.29. (a) Torque en Alabeo con $\beta$ s distintos; (b) Torque en Alabeo con $\beta = 0.5$ .	45
4.30. (a) Torque en Cabeceo con $\beta$ s distintos; (b) Torque en Cabeceo con $\beta = 0.5$ .	45
4.31. (a) Torque en Guiñada con $\beta$ s distintos; (b) Torque en Guiñada con $\beta = 0.5$ .	46
4.32. (a) Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.5$ ; (b) Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.9$ .	46
4.33. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de $\beta = 0.1$ a $\beta = 0.5$ .	47
4.34. Proyección en el plano x-y de la trayectoria	47
4.35. Errores en x.	48
4.36. Errores en y.	48
4.37. Errores en z.	49
4.38. Error en el ángulo de Euler $\phi$ .	50
4.39. Error en el ángulo de Euler $\theta$ .	50
4.40. Error en el ángulo de Euler $\psi$ .	51
4.41. Euler Angles are within the small angle approximation.	51
4.42. (a) Empuje vertical con $\beta$ s distintos; (b) Empuje vertical con $\beta = 0.5$ .	52
4.43. (a) Torque en Alabeo para $\beta$ s distintos; (b) Torque en Alabeo con $\beta = 0.5$ .	52
4.44. (a) Torque en cabeceo para $\beta$ s distintos; (b) Torque en Cabeceo con $\beta = 0.5$ .	53
4.45. (a) Torque en Guiñada para $\beta$ s distintos; (b) Torque en Guiñada con $\beta = 0.5$ .	53
4.46. (a) Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.5$ ; (b) Señal de Control $u_1$ con $\beta = 0.9$ .	54
4.47. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD.	56
4.48. Errores de posición con CERD.	56
4.49. Errores en Ángulos de Euler con CERD.	57
4.50. (a)Empuje Vertical (b)Torque en Alabeo (c)Torque en Cabeceo (d)Torque en Guiñada	57
4.51. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD.	58
4.52. Errores de posición con CERD.	58
4.53. Errores en Ángulos de Euler con CERD.	59

4.54. (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo (c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada . . . . .	60
4.55. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD. . . . .	61
4.56. Errores de posición con CERD. . . . .	61
4.57. Errores en Ángulos de Euler con CERD. . . . .	62
4.58. (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo (c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada . . . . .	63
4.59. Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD. . . . .	63
4.60. Errores de posición con CERD. . . . .	64
4.61. Errores en Ángulos de Euler con CERD. . . . .	64
4.62. (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo (c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada . . . . .	65
4.63. Cuadrirotor utilizado. . . . .	66
4.64. Esquema de interconexión. . . . .	67
4.65. Dimensiones del Cuadrirotor. . . . .	67
4.66. Vuelo Suspendido sin Perturbaciones con Distintos Ordenes Fraccionales.	69
4.67. Errores en x Vuelo Suspendido sin Perturbaciones. . . . .	69
4.68. Errores en y Vuelo Suspendido sin Perturbaciones. . . . .	70
4.69. Errores en z Vuelo Suspendido sin Perturbaciones. . . . .	70
4.70. Errores en $\phi$ Vuelo Suspendido sin Perturbaciones. . . . .	71
4.71. Errores en $\theta$ Vuelo Suspendido sin Perturbaciones. . . . .	71
4.72. Errores en $\psi$ Vuelo Suspendido sin Perturbaciones. . . . .	72
4.73. Vuelo Suspendido sin Perturbaciones con CERD. . . . .	72
4.74. a) Empuje Vertical con CFRD b)Empuje Vertical con CERD. . . . .	73
4.75. Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Viento con Distintos Ordenes Fraccionales. . . . .	73
4.76. Errores en x Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento. . . . .	74
4.77. Errores en y Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento. . . . .	74
4.78. Errores en z Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento. . . . .	75
4.79. Errores en $\phi$ Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento. . . . .	75
4.80. Errores en $\theta$ Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento. . . . .	76
4.81. Errores en $\psi$ Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento. . . . .	76
4.82. Empuje Vertical con Perturbación tipo Viento con CFRD. . . . .	77
4.83. Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Carga con Distintos Ordenes Fraccionales. . . . .	78
4.84. Errores en x Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga. . . . .	78
4.85. Errores en y Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga. . . . .	79
4.86. Errores en z Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga. . . . .	79
4.87. Errores en $\phi$ Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga. . . . .	80
4.88. Errores en $\theta$ Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga. . . . .	80
4.89. Errores en $\psi$ Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga. . . . .	81
4.90. Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Carga con CERD. . . . .	81
4.91. a) Empuje Vertical con Perturbación tipo Carga con CFRD b)Empuje Vertical con Perturbación tipo Carga con CERD. . . . .	82

---

4.92. Lemniscata sin Perturbaciones con Distintos Ordenes Fraccionales. . . . .	83
4.93. Errores en $x$ Lemniscata sin Perturbaciones. . . . .	83
4.94. Errores en $y$ Lemniscata sin Perturbaciones. . . . .	84
4.95. Errores en $z$ Lemniscata sin Perturbaciones. . . . .	84
4.96. Errores en $\phi$ Lemniscata sin Perturbaciones. . . . .	85
4.97. Errores en $\theta$ Lemniscata sin Perturbaciones. . . . .	85
4.98. Errores en $\psi$ Lemniscata sin Perturbaciones. . . . .	86
4.99. Empuje Vertical con Lemniscata con CFRD . . . . .	86
4.100 Lemniscata con Perturbación tipo Viento con Distintos Ordenes Fraccionales. . . . .	87
4.101 Errores en $x$ Lemniscata con Perturbación tipo Viento. . . . .	87
4.102 Errores en $y$ Lemniscata con Perturbación tipo Viento. . . . .	88
4.103 Errores en $z$ Lemniscata con Perturbación tipo Viento. . . . .	88
4.104 Errores en $\phi$ Lemniscata con Perturbación tipo Viento. . . . .	89
4.105 Errores en $\theta$ Lemniscata con Perturbación tipo Viento. . . . .	89
4.106 Errores en $\psi$ Lemniscata con Perturbación tipo Viento. . . . .	90
4.107 Empuje Vertical con Perturbación tipo Viento con CFRD . . . . .	90
4.108 Lemniscata con Perturbación tipo Carga con Distintos Ordenes Fraccionales. . . . .	91
4.109 Errores en $x$ Lemniscata con Perturbación tipo Carga. . . . .	91
4.110 Errores en $y$ Lemniscata con Perturbación tipo Carga. . . . .	92
4.111 Errores en $z$ Lemniscata con Perturbación tipo Carga. . . . .	92
4.112 Errores en $\phi$ Lemniscata con Perturbación tipo Carga. . . . .	93
4.113 Errores en $\theta$ Lemniscata con Perturbación tipo Carga. . . . .	93
4.114 Errores en $\psi$ Lemniscata con Perturbación tipo Carga. . . . .	94
4.115 Empuje Vertical Lemniscata con Perturbación tipo Carga con CFRD . . . . .	94

# Lista de Tablas

4.1. Parámetros del Modelo. . . . .	26
4.2. Parámetros del CFRD. . . . .	26
4.3. Limitación de las señales de control. . . . .	26
4.4. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending Sin Perturbaciones	29
4.5. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending con Perturbaciones	35
4.6. Promedio absoluto de los errores Lemniscata Sin Perturbaciones . . .	42
4.7. Promedio absoluto de los errores . . . . .	49
4.8. Parámetros CERD. . . . .	55
4.9. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending Sin Perturbaciones CERD . . . . .	57
4.10. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending Con Perturbaciones	59
4.11. Promedio absoluto de los errores Lemniscata sin Perturbaciones CERD	62
4.12. Promedio absoluto de los errores Lemniscata Con Perturbaciones CERD	64
4.13. Parámetros de la Plataforma. . . . .	68
4.14. Parámetros del CFRD. . . . .	68
4.15. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending Sin Perturbaciones Experimentos . . . . .	72
4.16. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending con Perturbación tipo Viento . . . . .	77
4.17. Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspending con Perturbación tipo Carga . . . . .	81
4.18. Promedio absoluto de los errores Lemniscata Sin Perturbaciones . . .	86
4.19. Promedio absoluto de los errores Lemniscata con Perturbación tipo Carga . . . . .	90
4.20. Promedio absoluto de los errores Lemniscata con Perurbación tipo Carga	94
B.1. Proporción Entrada/Salida . . . . .	112





# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presenta una introducción a los vehículos aéreos no-tripulados, con énfasis en los cuadricópteros también conocidos como cuadrirotos. Se describe el problema a resolver y los objetivos que se requieren alcanzar para resolverlo. Finalmente, se mencionan las aportaciones y se da una explicación de la organización de la tesis.

### 1.1. Sistemas Aéreos No-Tripulados.

Los Sistemas Aéreos No-Tripulados han tenido un gran desarrollo durante la última década, tanto en actividades de investigación como en la industria, debido a sus diversas aplicaciones, que van desde actividades recreacionales hasta operaciones de rescate en ambientes donde es peligroso para el ser humano [1].

Los vehículos aéreos no-tripulados existen en un amplio rango que va desde vehículos que pesan 10 toneladas y con una envergadura de 10 metros hasta micro-vehículos que pesan pocos gramos y con una envergadura de pocos milímetros[1].

Existen dos tipos de vehículos aéreos no-tripulados, los de ala fija y los de ala rotativa. Una ventaja de los vehículos de ala fija es que pueden recorrer largas distancias, mientras que los de ala rotativa poseen mayor maniobrabilidad[2].

Uno de los tipos más populares de vehículos aéreos no tripulados es el cuadricóptero también conocido como cuadrirotor. Una de las razones por las que es tan popular entre ingenieros e investigadores, es la estructura mecánica simple del cuadrirotor, en comparación con un helicóptero que posee un plato-cíclico, el cual es una estructura mecánica compleja, un cuadrirotor no tiene que compensar los torques giróscopicos creados por los motores[1].

Un cuadrirotor consiste en cuatro motores montados en los extremos de una estructura en forma de cruz[1]. Como el que se muestra en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Cuadrirotor Mavic Pro DJI ®.

Para explicar el funcionamiento del cuadrirotor se debe introducir el concepto de arrastre aerodinámico, el arrastre es una fuerza mecánica que se opone al movimiento de cualquier objeto a través de un fluido. En este caso el cuadrirotor pasa a través del aire. Este arrastre aerodinámico se produce debido a la diferencia de velocidad del cuadrirotor y el aire. Primero se debe vencer este arrastre aerodinámico y el peso del cuadrirotor, para poder ponerlo en movimiento[3].

El empuje es la fuerza generada por las hélices, que contraresta el arrastre aerodinámico. Este empuje permite al cuadrirotor viajar a través del aire, el cual es un fluido. Las hélices del cuadrirotor generan una fuerza de levantamiento, usando dos principios[3]:

- Tercera ley de Newton: Se genera un levantamiento en la parte inferior de la hélice, debido a que una masa de aire es empujada hacia abajo y de regreso[3].
- El efecto Coanda: Se genera una diferencia de presión en la parte superior de la hélice y la parte inferior, lo cual genera una fuerza de levantamiento[3].

Esta fuerza de levantamiento debe ser mayor al peso del cuadrirotor. El vuelo suspendido de un cuadrirotor se obtiene satisfaciendo tres restricciones[3]:

- Los cuatro motores deben girar a la misma velocidad[3].

- La velocidad de rotación debe ser suficiente para que el cuadrirotor genere una fuerza de levantamiento que contraresta su peso, pero no tan fuerte como para que el cuadrirotor siga levantándose indefinidamente[3].
- Se debe cancelar el efecto del torque producido por los motores, de otra manera el cuadrirotor tenderá a girar[3].

## 1.2. Planteamiento del problema.

El vuelo autónomo de vehículos aéreos no tripulados (UAV por sus siglas en inglés) se requiere en varias situaciones como búsqueda urbana, misiones de rescate, vigilancia y vuelos en formación, entre otras [4],[5],[6]. El despegue, el vuelo estacionario, la navegación y el aterrizaje, son cuatro de los procesos básicos en el vuelo autónomo de los UAV.

En la Sección de Mecatrónica del Departamento de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV IPN se han desarrollado diversas investigaciones sobre el control del UAV con el objetivo de seguir trayectorias, y realizar vuelos estacionarios(veáse por ejemplo [7] y [2]).En el presente trabajo de tesis se plantea el uso de técnicas de control basadas en ecuaciones diferenciales de orden fraccional para mejorar el comportamiento de vuelo en un UAV en presencia de incertidumbres y perturbaciones externas como son cambios en la velocidad del viento y en la masa y/o inercia del vehículo. En particular se propone usar técnicas de modos deslizantes y compararlas con el desempeño obtenido al utilizar acciones de control basadas en ecuaciones diferenciales de orden entero.

## 1.3. Objetivos de la tesis.

El objetivo general de la tesis se presenta a continuación:

El objetivo del trabajo de tesis es el de diseñar y realizar un esquema de control para el control de vuelo de un UAV utilizando técnicas de control discontinuas con base a ecuaciones diferenciales de orden fraccional

Para alcanzar el objetivo general, se han determinado los siguientes objetivos específicos:

- Familiarización con la operación del UAV que se usará y obtención del modelo correspondiente.
- Estudio del esquema de control de vuelo(vuelo estacionario y navegación) utilizando la técnica de modos deslizantes y con base en ecuaciones diferenciales de orden fraccional.[8]
- Evaluación del esquema en simulación numérica.

- Realización del esquema de control y evaluación experimental del mismo.

#### 1.4. Aportaciones de la tesis.

El elemento principal que será utilizado en este trabajo de tesis es el control fraccional, aplicado a un cuadrirotor, el cual es una plataforma experimental y todo un sistema mecatrónico que nos permitirá evaluar esta técnica de control. Las principales aportaciones de la tesis son:

- Desarrollo del esquema de control fraccional por regímenes deslizantes aplicado a un cuadrirotor.
- Elaboración de una prueba de estabilidad para la técnica de control utilizada.
- Evaluación en simulación numérica y experimental del esquema de control propuesto.
- Comparación del desempeño de dos esquemas de control, por una parte el control fraccional por regímenes deslizante (CFRD) y por otro lado el control de orden entero por regímenes deslizantes (CERD).

#### 1.5. Organización de la tesis.

En el capítulo 2 se presenta una introducción a la diferenciación e integración de orden arbitrario y también se da una prueba de estabilidad para el control propuesto.

En el capítulo 3 se muestra el modelo del cuadrirotor y también se describe el esquema de control fraccional por regímenes deslizantes.

El capítulo 4 tiene como objetivo mostrar los resultados en simulación numérica y experimentales utilizando el modelo y también aplicando el esquema de control descritos en el capítulo 3.

Por último, en el capítulo 5 se muestran algunas conclusiones y posibles trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Control Fraccional de una Clase de Sistema No lineal de Segundo Orden con Perturbaciones

En este capítulo se da una introducción a la integración y diferenciación de orden arbitrario, y se propone un esquema de control de orden fraccional por modos deslizando para sistemas no lineales de segundo orden donde aparecen incertidumbres aditivas.

### 2.1. Cálculo Fraccional.

El cálculo fraccional se refiere principalmente al cálculo de integrales y derivadas de un orden fraccional arbitrario que puede ser real o complejo[9]. El cálculo fraccional es tan antiguo como el cálculo convencional, sin embargo no es tan popular entre científicos e ingenieros[9]. El cálculo fraccional nació el día 30 de septiembre de 1695, en una carta que escribió L'Hopital dirigida a Leibniz, en la cual le preguntaba cuál sería el significado de una derivada elevada al orden  $1/2$ , es decir[9]

$$\frac{D^{\frac{1}{2}}f(x)}{Dx^{\frac{1}{2}}}.$$

La respuesta que dió Leibniz fue: "sería una paradoja aparente de la cual algún día útiles consecuencias serán obtenidas"[9].

Recientemente, el diseño de controladores de orden fraccional se ha convertido en uno de los temas más interesantes en teoría de control que ha desembocado en aplicaciones de sistemas físicos tales como sistemas de suspensión, motores síncronos de imán permanente, sistemas de electrónica de potencia y vehículos aéreos no tripulados, entre otros. La idea de control de orden fraccional fue propuesta inicialmente por [10]

quien introdujo el esquema de control de orden fraccional robusto. También Podlubny [11, 12] introdujo el conocido controlador proporcional-derivativo de orden fraccional. Por lo tanto, muchos controladores de orden fraccional han sido introducidos en la literatura, incluyendo los controladores TID [13], compensadores lead-lag de orden fraccional [14, 15], controladores óptimos de orden fraccional [16, 17], y controladores adaptativos de orden fraccional [18, 19].

Por otra parte el control por regímenes deslizantes (CRD) es una técnica de control conocida aplicada tanto a sistemas lineales como a sistemas no lineales permitiendo lidiar con incertidumbres [20]. Sin embargo, la retroalimentación monótona de conmutación producida por estos controladores causa castaño de alta frecuencia en las señales de control, que conduce a cargas indeseables en los actuadores de control [21, 22]. En años recientes, el control de orden fraccional por regímenes deslizantes (CFRD) ha sido empleado para eliminar estas desventajas. Por ejemplo, en [23], una estrategia de control llamada control de orden fraccional por regímenes deslizantes terminal (FOTSMC) es diseñado para una clase de sistemas dinámicos con incertidumbres; una superficie de conmutación de orden fraccional es propuesta para satisfacer una condición deslizante y simulaciones numéricas son realizadas para mostrar la estabilidad en tiempo finito del sistema en lazo cerrado. También, en [24] un CFRD (FOSMC) es propuesto para el control de un manipulador de un solo eslabón flexible, construyendo una superficie de conmutación basada en derivadas fraccionales; ese controlador tiene un desempeño mejor con un castaño pequeño y con robustez respecto a perturbaciones de carga externas y variaciones en parámetros. Un CFRD para sistemas de frenos antibloqueo (ABS) es propuesto en [25, 26] para regular el valor de deslizamiento deseado; estos controladores funcionan bajo incertidumbres en el ABS y siguen el deslizamiento más rápido que los controladores de orden entero por regímenes deslizantes convencionales (IOSMC). Adicionalmente, el CFRD ha sido usado para el control de motores síncronos de imán permanente [27], para la supresión de vibraciones en estructuras [28], para el control de sistemas caóticos de orden fraccional [29, 30] y demás, obteniendo un mejor desempeño del control.

### 2.1.1. Definiciones básicas.

**Definición 2.1** [9] (*Derivada Fraccional de Riemann-Liouville*). Sea  $f(t)$  una función suave<sup>1</sup>, se define entonces la derivada fraccional de  $f(t)$  como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (n - 1) \leq \alpha < n, \quad (2.1)$$

con  $n$  un entero y  $\alpha$  un número real.  $\Gamma(z)$  es la llamada función Gama de Euler.

---

<sup>1</sup>Una función suave (*smooth* en inglés) es una función que tiene derivadas continuas hasta algún orden deseado sobre algún dominio. Una función así se puede decir que es suave sobre algún intervalo restringido  $(a, b)$  o  $[a, b]$ . El número de derivadas continuas necesarias para que una función sea considerada suave depende del problema en cuestión, y puede variar desde dos hasta infinito. Una función que tiene todos sus órdenes de derivadas continuas es llamada función  $C^\infty$ .

**Definición 2.2** [9](Función Gama de Euler). Sea  $z$  un número real, la función Gama de Euler se define como sigue

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.2)$$

La función gama generaliza la noción del factorial de un número entero, a números reales. De alguna manera esta función gama debe estar presente en la definición de derivada fraccional debido a que, para obtener la derivada fraccional mediante la definición de Riemann-Liouville, primero se tiene que integrar la función de la cual se quiere obtener la derivada fraccional y después se debe derivar al orden  $n$ -ésimo. De estas definiciones, se puede notar que cuando  $\alpha < 0$  se obtienen integrales fraccionales y cuando  $\alpha > 0$  se obtienen derivadas fraccionales, cuando  $\alpha = 0$  se obtiene la función original.

Algunas propiedades de las derivadas e integrales fraccionales son las siguientes[9]:

- Si  $f(z)$  es una función analítica<sup>2</sup> de  $z$ , entonces su derivada fraccional  ${}_0D_z^\alpha f(z)$  es una función analítica de  $z$  y  $\alpha$ .
- Para  $\alpha = n$ , con  $n$  un entero, el operador  ${}_0D_z^\alpha f(z)$  nos da el mismo resultado que la integración y derivación convencionales de orden entero  $n$ .
- Para  $\alpha = 0$ , la operación  ${}_0D_z^\alpha f(z)$  nos da el operador identidad, es decir  ${}_0D_z^0 f(z) = f(z)$ .
- La integración y derivación fraccional, son operadores lineales:

$${}_0D_z^\alpha a f(z) + {}_0D_z^\alpha b g(z) = a {}_0D_z^\alpha f(z) + b {}_0D_z^\alpha g(z)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$

- La ley de adición de índices:

$${}_0D_z^\alpha {}_0D_z^\beta f(z) = {}_0D_z^\beta {}_0D_z^\alpha f(z) = {}_0D_z^{\alpha+\beta} f(z)$$

es válida, bajo ciertas condiciones de la función  $f(z)$ .

Desafortunadamente no se puede utilizar directamente la definición de derivada fraccional de Riemann-Liouville en la función signo que posteriormente se expondrá, por lo tanto se usa un método numérico dado por la definición de derivada fraccional de Grünwald-Letnikov.

<sup>2</sup>Una función compleja se dice que es analítica en una región  $R$  si es diferenciable compleja en cada punto de  $R$ . Una función cuyo rango está en los números complejos se dice que es una función compleja. Sea  $z = x + iy$  y  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  en alguna región  $G$  que contiene al punto  $z_0$ . Si  $f(z)$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y tiene derivadas parciales continuas en la vecindad de  $z_0$ , entonces  $f'(z_0)$  existe y está dada por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y la función se dice que es diferenciable compleja. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ .

**Definición 2.3** (*Derivada Fraccional de Grünwald-Letnikov*). Si  $f(t)$  es una función suave, la derivada de Grünwald-Letnikov es equivalente a la derivada de Riemann-Liouville [31], es decir

$$[{}_0D_t^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} f(t_n - j) \quad (2.3)$$

dónde:

$$\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha+1-j)}$$

La definición de derivada fraccional de Grünwald-Letnikov, utiliza todos los valores anteriores de la función a la cual se le quiere aplicar la derivada fraccional. Esta definición proporciona un algoritmo que toma en realizarse un tiempo del orden  $\mathcal{O}(N)^3$ , este tiempo del algoritmo no es deseable, debido a que en una implementación en tiempo real, tardaría mucho tiempo en calcularse esta derivada fraccional y, además, consumiría recursos en memoria considerables, afortunadamente existen versiones de la derivada de Grünwald-Letnikov con un tiempo de algoritmo del orden de  $\mathcal{O}(\log_2(N))$ .

**Definición 2.4** (*Derivada Fraccional de Grünwald-Letnikov con Memoria Adaptativa en Tiempo de Muestreo como una Secuencia Artimética*).

Sea  $k$  el tiempo de muestro iterativo para el cual la dicretización de Grünwald-Letnikov está siendo computada. Considere un punto de tiempo arbitrario en la historia del sistema anterior a  $k$ . Para  $i \in \mathbb{N}_1$  con  $i = 1$ , se define el intervalo de este historial pasado como

$$I = [a^{i-1} + i, a^i], \quad (2.4)$$

donde  $\mathbb{N}_1$  representa el conjunto de números naturales empezando en uno. Como están definidos los índices  $i$ , el primer intervalo anterior a  $k$  es independiente de (2.4) y está dado por  $[0, a]$ ; este se considera como el intervalo base.

Intervalos subsecuentes son definidos como una función de esta base, esto es como función de “ $a$ ” y determinados por la ecuación (2.4). Sea  $i_{max}$  el valor de  $i$  tal que  $k \in I_{max} = [a^{i_{max}-1} + i_{max}, a^{i_{max}}]$ . El conjunto completo de intervalos es definido como

$$\zeta = \{I = [a^{i-1} + i, a^i] : i \in \mathbb{N}_1, i \neq 1, i \leq i_{max}\}. \quad (2.5)$$

Para el conjunto de intervalos  $\zeta$  definidos en (2.5),  $D = \{d = 2i - 1 : i \in \mathbb{N}_1, i = 1\}$  es el conjunto de distancias  $d$  para las cuales los intervalos correspondientes en  $\zeta$  son muestreados.

---

<sup>3</sup>Sea  $n$  una variable entera que tiende al infinito y sea  $x$  una variable continua que tiende a algún límite. También, sea  $\phi(n)$  o  $\phi(x)$  una función positiva y  $f(n)$  o  $f(x)$  cualquier función, entonces se define  $f=O(\phi)$  significa que  $|f| < A\phi$  para alguna constante  $A$  y todos los valores de  $n$  y  $x$ . Se conoce esta definición como notación asintótica en el campo de ciencias de la computación y es útil para saber el tiempo que requerirá un algoritmo para ejecutarse, para saber su eficiencia, no nos proporciona un tiempo real en segundos de cuanto tardará, pero en un alto nivel sirve para comparar la eficiencia de distintos algoritmos.



Si  $f(t)$  es una función suave, la discretización de la derivada de Grünwald-Letnikov, está dada por[32]

$$[{}_0D_t^\alpha f(t)]_{t=k} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left[ \sum_{j=0}^a \omega_j^{(\alpha)} f(k-j) + \dots \right. \\ \left. \sum_{i=2}^{i_{max}} \sum_{m_i=a^{i-1}+i}^{a^i} (2i-1)\omega_{m_i}^{(\alpha)} f(k-m_i) + \sum_{p=m_{max}+i_{max}}^k \omega_p^{(\alpha)} f(k-p) \right]. \quad (2.6)$$

dónde  $p \in \mathbb{N}_1$  y para cada  $i$  (esto es para cada intervalo)  $M = \{m_i = a^{i-1} + (2i-1)\eta - i + 1 : \eta \in \mathbb{N}_1 \text{ y } m_i \leq m_{max}\}$  es el conjunto de puntos de tiempo para los cuales  $\omega_{m_i}^{(\alpha)} f(k-m_i)$  es evaluada. Como los puntos de tiempo  $k$ , pueden ser menores a la longitud total del último intervalo  $I_{max}$ ,  $|m_{max}| \leq |k - i_{max}|$  representa el máximo valor en  $I_{max}$  que puede ser evaluado, esto es el último elemento en el conjunto  $M$  para  $I_{max}$ , con  $\omega_\xi^{(\alpha)} = (-1)^\xi \binom{\alpha}{\xi}$ ,  $\binom{\alpha}{\xi} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\xi! \Gamma(\alpha+1-\xi)}$

En la figura 2.1 se puede observar la derivada fraccional de  $\sin(t)$ , para valores de orden fraccional de 0, 0.25, 0.5, 0.75 y 1.0, usando las dos definiciones 2.3 (figura 2.1a) y 2.4 (figura 2.1b). Dependiendo del ordenador utilizado, el tiempo que toma realizar la derivada con cada definición difiere una de la otra en una proporción 2:1, tardándose menos la derivada usando la definición 2.4. Por ejemplo un ordenador con procesador Intel(R)Celeron(R) CPU N3060@1.60GHz le toma a la definición 2.3 aproximadamente 2.0 segundos en realizar los cálculos necesarios para realizar la derivada fraccional, mientras que usando la definición 2.4 le toma 1.0 segundos en realizar los cálculos necesarios de la derivada fraccional, estas gráficas fueron obtenidas con MATLAB. En el apéndice B se da un discusión respecto a la técnica utilizada para calcular la derivada fraccional de una función.

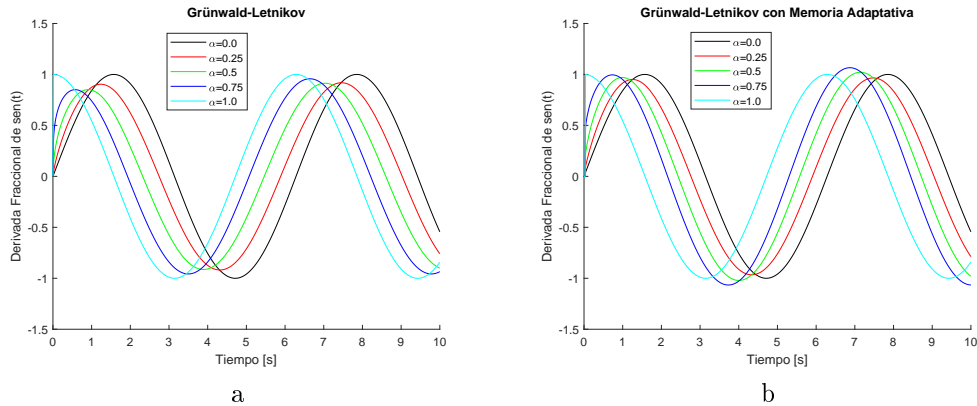


Figura 2.1: a) Derivada Fraccional de  $\sin(t)$  con base a la definición 2.3 b) Derivada Fraccional de  $\sin(t)$  con base a la definición 2.4.

### 2.1.2. Cálculo Fraccional por Regímenes Deslizantes.

Considérese ahora un sistema no lineal de segundo orden perturbado, descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{\chi} = f_{\chi}(\chi, t) + g_{\chi}(\chi, t)u(t) + \Delta_{\chi}(\chi, t), \quad (2.7)$$

dónde:  $\chi(\cdot) \in \mathbb{R}$ ,  $f_{\chi}(\cdot)$  y  $g_{\chi}(\cdot)$  son funciones suaves de sus argumentos y  $u(\cdot) \in \mathbb{R}$  es la entrada del sistema.  $\Delta_{\chi}(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}$  es un término de perturbación que incluye incertidumbres asociadas al proceso de modelado y a perturbaciones externas. Se hace la siguiente suposición sobre  $\Delta_{\chi}(\cdot, \cdot)$

**Suposición 2.1** *El término de perturbación  $\Delta_{\chi}(\cdot, \cdot)$  es desconocido pero acotado, más precisamente  $\Delta_{\chi}(\cdot, \cdot)$  satisface*

$$|\Delta_{\chi}(\chi, t)| \leq \kappa_{\Delta}, \quad (2.8)$$

para todo  $\chi(\cdot)$  que es solución de (2.7) y para todo  $t \geq 0$  con  $\kappa_{\Delta}$  una constante real positiva diferente de 0.

Es deseable que la señal  $\chi$  siga a una señal de referencia dada  $\chi_d$ , a pesar de la presencia del término de perturbación  $\Delta_{\chi}$ . Se define entonces el error de seguimiento  $e$  como:

$$e = \chi - \chi_d. \quad (2.9)$$

De acuerdo con la metodología del control por regímenes deslizantes [33], se define una función de conmutación  $s_{\chi}$  como

$$s_{\chi} = \dot{e} + \lambda_{\chi}e, \quad (2.10)$$

dónde  $\lambda_{\chi}$  es un parámetro constante real. La función de conmutación (2.10) define la superficie de deslizamiento

$$s_x = 0 = \dot{e} + \lambda_{\chi}e. \quad (2.11)$$

Así,  $\lambda_{\chi}$  es seleccionada de tal manera que la ecuación diferencial de primer orden (2.11) tenga una solución que converja a cero exponencialmente ; como consecuencia  $\chi$  también converge a  $\chi_d$  exponencialmente.

Considérese también el *sistema no lineal nominal* asociado con el sistema perturbado (2.7), esto es con  $\Delta_{\chi}(\chi, t) = 0$ , para todo  $\chi \in \mathbb{R}$  y todo  $t > 0$ , dado por

$$\ddot{\chi} = f_{\chi}(\chi, t) + g_{\chi}(\chi, t)u(t). \quad (2.12)$$

Para atraer la dinámica del sistema (2.7) a la superficie deslizante (2.11), y basándose en la estrategia propuesta en [8], la derivada de orden fraccional  $(1 + \beta)$  de  $s_{\chi}$  se asigna como

$$s_{\chi}^{1+\beta} = -\sigma_{\chi} \text{sgn}(s_{\chi}) - \mu_{\chi} s_{\chi}^{\beta}, \quad (2.13)$$

dónde  $\sigma_\chi$  y  $\mu_\chi$  son constantes reales positivas y  $sgn(\cdot)$  es la función signo<sup>4</sup>. Considérese la a derivada de orden  $(-\beta)$  de (2.13)(esto es equivalente a integrar (2.13) al orden  $\beta$ ), lo que conduce a la ecuación

$$\dot{s}_\chi = -\sigma_\chi(D^{-\beta}sgn(s_\chi)) - \mu_\chi s_\chi. \quad (2.14)$$

Por otra parte, a partir de (2.10) y el sistema no lineal nominal (2.12), se tiene que

$$\dot{s}_\chi = \ddot{\chi} - \ddot{x}_d + \lambda_\chi \dot{\chi} = f_x + g_x u - \ddot{x}_d + \lambda_\chi \dot{\chi}. \quad (2.15)$$

Combinando las ecuaciones (2.14) y (2.15), se obtiene el siguiente Control Fraccional por Regímenes Deslizantes (CFRD):

$$u = \frac{1}{g_\chi(\chi, t)}[-f_\chi(\chi, t) + P_\chi(\chi, \dot{\chi}, t)], \quad (2.16)$$

dónde

$$P_\chi(\chi, \dot{\chi}, t) = \ddot{x}_d - \lambda_\chi \dot{\chi} - \sigma_\chi(D^{-\beta}sgn(s_\chi)) - \mu_\chi s_\chi. \quad (2.17)$$

De hecho, el CFRD (2.16)–(2.17) puede lograr la atracción de la dinámica perturbada (2.7) a la superficie deslizante (2.11) bajo la suposición 2.1 y una condición suficiente que involucra los parámetros  $\sigma_\chi, \mu_\chi$  y el término discontinuo  $D^{-\beta}sgn(s_\chi)$ , como se establece en el siguiente resultado.

**Teorema 2.1** *Considérese el sistema no lineal perturbado (2.7) junto con la suposición 2.1. Si los parámetros  $\sigma_\chi, \mu_\chi$  y la cota  $\kappa_\Delta$  satisfacen*

$$\sigma_\chi |D^{-\beta}sgn(s_\chi)| + \mu_\chi > \kappa_\Delta, \quad (2.18)$$

*entonces el CFRD asegura la atracción del sistema perturbado a la superficie de deslizamiento  $s_\chi = 0$  definida por (2.11).*

**Demostración** Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_\chi(s_\chi) = \frac{1}{2}s_\chi^2, \quad (2.19)$$

---

<sup>4</sup>La función signo de un número real, también llamada sgn o signum, es -1 para número negativos y +1 para números positivos. Esto es para  $x \in \mathbb{R}$ :

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Para números reales con  $x \neq 0$  se puede escribir la función signo como

$$sgn(x) = \frac{x}{|x|}$$

En este trabajo de tesis se utilizará una versión de la función signo, que permite que cuando  $x = 0$ , no se indetermine la función, esta versión es descrita como:

$$sgn(x) = \frac{x}{|x| + \epsilon}$$

dónde la cantidad suficientemente pequeña  $\epsilon > 0$  es una constante real positiva.

la cual es definida positiva. La derivada con respecto al tiempo de  $V_\chi$  tiene la forma

$$\dot{V}_\chi = s_\chi \dot{s}_\chi = s_\chi (\ddot{\chi} - \ddot{\chi}_d + \lambda_\chi \dot{e}). \quad (2.20)$$

substituyendo la dinámica del sistema perturbado (2.7) en (2.20) junto con el CFRD (2.16)–(2.17) conduce a

$$\dot{V}_\chi = -\sigma_\chi (D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)) s_\chi - \mu_\chi s_\chi^2 + s_\chi \Delta_\chi. \quad (2.21)$$

Debido a que  $s_\chi = |s_\chi| \text{sgn}(s_\chi)$ ,  $\dot{V}_\chi$  puede describirse como

$$\dot{V}_\chi = -\sigma_\chi (D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)) |s_\chi| \text{sgn}(s_\chi) - \mu_\chi s_\chi^2 + s_\chi \Delta_\chi. \quad (2.22)$$

Ya que  $0 < \beta < 1$ , entonces  $\text{sgn}(D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)) = \text{sgn}(s_\chi)$  [8], por lo tanto (2.22) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_\chi &= -\sigma_\chi |s_\chi| (D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)) \text{sgn}(D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)) - \mu_\chi s_\chi^2 + s_\chi \Delta_\chi \\ &= -\sigma_\chi |s_\chi| |D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)| - \mu_\chi s_\chi^2 + s_\chi \Delta_\chi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando esta última expresión y usando la cota  $\kappa_\Delta$  en (2.8), se obtiene

$$\dot{V}_\chi \leq -|s_\chi| [(\sigma_\chi |D^{-\beta} \text{sgn}(s_\chi)| + \mu_\chi) - \kappa_\Delta]. \quad (2.24)$$

Por lo tanto si la condición (2.8) se satisface,  $\dot{V}_\chi < 0$ , y se asegura la convergencia a la superficie  $s_\chi = 0$ .

**Comentario 2.1** *El CFRD (2.16)–(2.17) compensa el efecto de las perturbaciones aditivas en el sistema no lineal de segundo orden descrito por (2.7). De hecho, la razón principal de definir una superficie deslizante (2.11) junto con su derivada de orden fraccional  $(1+\beta)$ , es para que tan pronto como la perturbación aparezca,  $s_\chi$  se convierta diferente de cero y, al mismo tiempo, el término de control discontinuo se vuelva activo y rechace la perturbación. Además, y de manera similar al esquema de control propuesto en [34], la expresión (2.24) muestra que se logra una atracción más fuerte a  $s_\chi = 0$  y la atracción es mayor para cualquier  $s_\chi$  con  $\mu_\chi \neq 0$  que aquella alcanzada con  $\mu_\chi = 0$ . En particular, el parámetro  $\mu_\chi$  no se usa en [34] donde se controla un sistema de orden fraccional.*

El resultado anterior permite aplicar la metodología de regímenes deslizantes de orden fraccional al modelo de un cuadirotor. El sistema no lineal perturbado será precisamente el modelo del cuadirotor y las perturbaciones aditivas, serán una función que está acotada. Se pretende que el cuadirotor realice un seguimiento de trayectoria, para lo cual este resultado nos permitirá asegurar que el control realice su función.

## Capítulo 3

# Aplicación al Seguimiento de Trayectoria de un Cuadrirotor

En este capítulo se presenta el modelo del cuadrirotor por el formalismo de Euler-Lagrange y Newton-Euler. El formalismo de Euler-Lagrange se utiliza para introducir conceptos y variables, como los ángulos de Euler, los cuales se usan a su vez para describir el formalismo de Newton-Euler. Se muestra la aplicación del CFRD propuesta en el capítulo anterior a este modelo de cuadrirotor.

### 3.1. Dinámica del Cuadrirotor Modelado por Euler-Lagrange

Como se puede observar en la Figura 3.1, se considera un cuadrirotor en el cuál se describen las fuerzas y momentos que actúan en éste. El vehículo aéreo no tripulado recibe cuatro empujes que se denotan como fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ , estos empujes son los que hacen posible levantar al vehículo y adicionalmente, tener un vuelo suspendido o seguir trayectorias. Los momentos describen una configuración tipo cuadrada que requiere que los cuatro motores varíen su velocidad de rotación [7]. Por ejemplo para el giro en guiñada se requiere que los motores 1 y 2 giren en un sentido y los motores 2 y 4 en el sentido opuesto; para el giro en alabeo los motores 2 y 3 giran en un sentido y los motores 1 y 4 en el sentido opuesto; finalmente para el giro en cabeceo los motores 1 y 2 giran en un sentido y los motores 3 y 4 en el sentido opuesto [7].

El cuadrirotor tiene un sistema de referencia local denotado como  $x_B, y_B, z_B$ . Más adelante se utilizan los ángulos de Euler para representar al cuadrirotor del sistema global  $(X, Y, Z)$  al sistema cuerpo(local). El sistema dinámico del cuadrirotor consiste en 12 ecuaciones y 4 señales de control, lo cual representa un reto por ser un sistema subactuado.

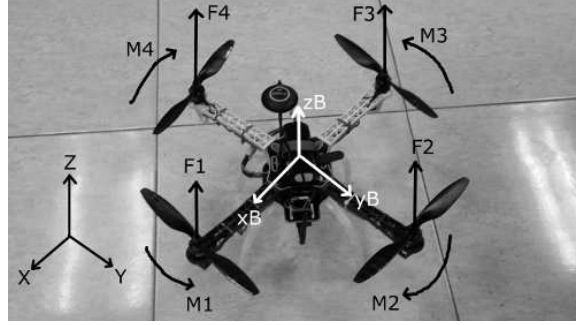


Figura 3.1: Sistema de Coordenadas y fuerzas/momentos que actúan en el cuadrirotor.

Se definen primero las coordenadas generalizadas del cuadrirotor, que serán substituidas más adelante en la ecuación de Euler-Lagrange. Este formalismo permite obtener de manera directa las ecuaciones del sistema dinámico del cuadrirotor. Estas coordenadas están dadas por:

$$q = (x, y, z, \phi, \theta, \psi). \quad (3.1)$$

A partir del vector  $q$  que contiene las coordenadas generalizadas, se puede distinguir el vector de posición del centro de masa del cuadrirotor relativo a un marco de referencia inercial fijo ( $\{X, Y, Z\}$ ):

$$\xi = (x, y, z), \quad (3.2)$$

y los ángulos de Euler del cuadrirotor dados por

$$\eta = (\phi, \theta, \psi) \quad (3.3)$$

Los tres ángulos de Euler tienen los siguientes nombres y representan una rotación en el eje correspondiente:

$\phi$  : ángulo de alabeo alrededor del eje x.

$\theta$  : ángulo de cabeceo alrededor del eje y.

$\psi$  : ángulo de guiñada alrededor del eje z.

Se define ahora el lagrangiano del cuadrirotor como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U$$

dónde  $T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}$  es la energía cinética translacional, y  $T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\Omega}^T I \dot{\Omega}$  es la energía cinética rotacional,  $U = mgz$  es la energía potencial, siendo  $m$  la masa del cuadrirotor y  $g = 9.81[m/s^2]$  la constante gravitacional,  $\Omega = (p, q, r)$  es el vector de la velocidad angular, y

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix},$$

la matriz de inercias del cuadrirotor, dónde  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  y  $I_{zz}$  son los momentos de inercia respecto al eje “x”, “y” y “z” respectivamente.

Se usan aquí los ángulos de Euler con la convención Z-Y-X (guiñada-cabeceo-alabeo) para modelar la rotación del cuadrirotor en el sistema de referencia global ( $\{X, Y, Z\}$ ). Para llegar al sistema global respecto del sistema cuerpo ( $\{x_B, y_B, z_B\}$ ), la secuencia de rotación es la siguiente:

- Primero se rota alrededor del eje Z (global) un ángulo de guiñada  $\psi$ . Después de hacer esta rotación el vehículo se transfiere a un marco de referencia intermedio rotado una vez.
- Después rotaremos alrededor del eje intermedio  $y_1$  (para visualizar este marco de referencia intermedio véase la Figura 3.2, el marco de referencia intermedio sería  $\{\hat{n}_{11}, \hat{n}_{12}, \hat{n}_{13}\}$  con  $x_1 = \hat{n}_{11}$ ,  $y_1 = \hat{n}_{12}$  y  $z_1 = \hat{n}_{13}$ ), un ángulo de cabeceo  $\theta$ . Después de realizar esta rotación, se obtiene un marco de referencia intermedio rotado dos veces (cuyo eje  $x_2$  coincide con el eje  $x_B$ ).
- Por último rotaremos alrededor del eje  $x_B$  (o el eje  $x_2$ , para visualizar este segundo marco de referencia intermedio rotado dos veces véase la Figura 3.2, este marco de referencia sería  $\{\hat{n}_{21}, \hat{n}_{22}, \hat{n}_{23}\}$  con  $x_2 = \hat{n}_{21}$ ,  $y_2 = \hat{n}_{22}$  y  $z_2 = \hat{n}_{23}$ ) un ángulo de alabeo  $\phi$  [35].

Existe una relación cinemática estándar que permite expresar al vector de velocidad angular  $\Omega$  en el sistema de coordenadas cuerpo por medio de las velocidades generalizadas  $\dot{\eta}$  (en la región donde los ángulos de Euler son válidos)[7]. Ésta puede obtenerse a partir del llamado teorema de adición [36] como sigue

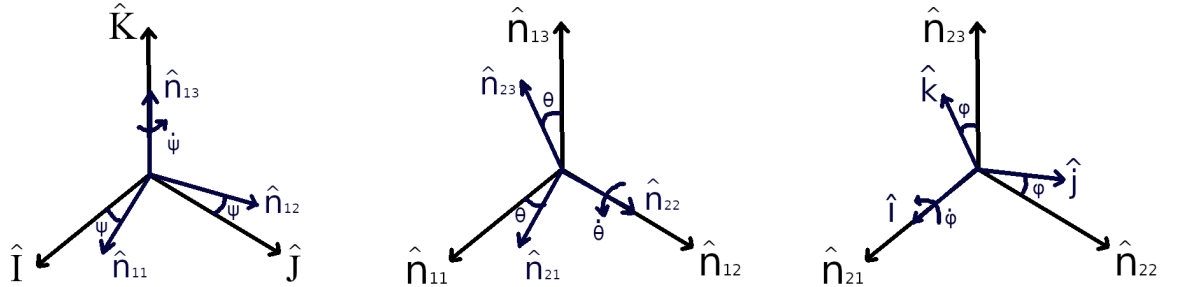


Figura 3.2: Evolución de marcos de referencia conforme a los ángulos de Euler.

Primero se definen los siguientes marcos de referencia: marco global fijo  $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$ , marco F1  $\{\hat{n}_{11}, \hat{n}_{12}, \hat{n}_{13}\}$ , marco F2:  $\{\hat{n}_{21}, \hat{n}_{22}, \hat{n}_{23}\}$ , marco cuerpo-fijo  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ .

El teorema de adición establece que la velocidad angular del sistema cuerpo con respecto al sistema fijo,  $\vec{\omega}_{cuerpo/fijo}$ , será la suma de los sub-sistemas de referencias  $\vec{\omega}_{cuerpo/F1}$ ,  $\vec{\omega}_{F2/F1}$ ,  $\vec{\omega}_{F1/fijo}$ , es decir

$$\vec{\omega}_{cuerpo/fijo} = \vec{\omega}_{cuerpo/F1} + \vec{\omega}_{F2/F1} + \vec{\omega}_{F1/fijo}$$

De la figura 3.2 se puede observar que las derivadas de los ángulos de Euler están asociadas a los sub-sistemas de referencia  $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}, \{n_{\hat{11}}, n_{\hat{12}}, n_{\hat{13}}\}$  y  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ .

Entonces al substituir las velocidades angulares se obtiene

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{i} + \dot{\theta}n_{\hat{12}} + \dot{\psi}\hat{K}. \quad (3.4)$$

Se expresa ahora todos los sub-sistemas en ejes cuerpo. Esto se logra observando la figura 3.2; por ejemplo el eje  $n_{\hat{12}}$  se relaciona con el eje  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , por medio de una relación de senos y cosenos a partir de la construcción de un triángulo rectángulo con el eje  $n_{\hat{12}}$  como hipotenusa. Al resolver todos los ejes intermedios en ejes cuerpo se obtiene

$$n_{\hat{12}} = \cos(\phi)\hat{j} - \sin(\phi)\hat{k},$$

$$\hat{K} = -\sin(\theta)n_{\hat{21}} + \cos(\theta)n_{\hat{23}} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)(\sin(\phi)\hat{j} + \cos(\phi)\hat{k}).$$

Finalmente la relación cinemática (3.4) toma la forma

$$\vec{\omega} = \hat{i}(\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta)) + \hat{j}(\dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi)) + \hat{k}(\dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi) - \dot{\theta}\sin(\phi)).$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \dot{\eta} = W_{\eta}\dot{\eta} \quad (3.5)$$

En esta relación cinemática  $W_{\eta}$  es útil para definir la matriz de inercia asociada a la energía cinética rotacional completa como

$$J = J(\eta) = W_{\eta}^T I W_{\eta}. \quad (3.6)$$

El modelo completo del cuadrirotor se obtiene entonces a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, utilizando la ecuación de Euler-Lagrange con las coordenadas generalizadas y los torques correspondientes, más precisamente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} R\hat{F} \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

dónde  $R$  representa la matriz de rotación,  $R(\phi, \theta, \psi) \in SO(3)$ <sup>1</sup> y representa la orientación del cuadrirotor relativa al marco inercial fijo. Al usar la notación  $c(\alpha) = \cos(\alpha)$  y  $s(\alpha) = \sin(\alpha)$ , la matriz  $R$  se puede escribir como

$$R = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\psi)s(\theta)s(\phi) - c(\phi)s(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta) \\ c(\theta)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\theta)s(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - c(\psi)s(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>Un grupo de rotación es un grupo cuyos elementos son matrices ortogonales con determinante 1. En el caso del espacio de tres-dimensiones, el grupo de rotación se conoce como grupo especial ortogonal o  $SO(3)$ . Un grupo  $G$  es un conjunto finito o infinito de elementos junto con una operación binaria (llamada la operación de grupo) que satisfacen las cuatro propiedades fundamentales de cerradura, asociatividad, la identidad y el inverso.



$\hat{F}$  es la fuerza translacional aplicada al cuadrirotor debida al empuje principal  $u$ .

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Cada motor tiene una velocidad angular  $\omega_i$  y produce una fuerza vertical  $f_i$  de acuerdo a

$$f_i = k\omega_i^2$$

El empuje principal  $u$  está entonces dado por:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i$$

$\tau \in R^3$  representa los momentos de guiñada, cabeceo y alabeo, más precisamente

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(f_2 - f_4) \\ l(f_3 - f_1) \\ \tau_{M_1} - \tau_{M_2} + \tau_{M_3} - \tau_{M_4} \end{bmatrix},$$

dónde  $\tau_{M_i}$  es el momento producido por el motor  $M_i$ , alrededor del centro de gravedad del cuadrirotor y  $l$  es la distancia del eje de rotación de los motores al centro del cuadrirotor.

El lagrangiano no tiene terminos cruzados que involucren a  $\xi$  y  $\eta$ , por lo tanto se puede dividir la dinámica en dos, una con respecto a  $\xi$  y otra con respecto a  $\eta$  [1]. Para las coordenadas  $\xi$  se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{trans}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{trans}}{\partial \xi} = R\hat{F}$$

De esta manera se obtiene la ecuación que gobierna al centro de masa

$$m\ddot{\xi} + mgE_z = R\hat{F} \quad (3.9)$$

dónde  $E_z = [0; 0; 1]$ .

Para las coordenadas  $\eta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \eta} = \tau$$

Obteniéndose la ecuación de la aceleración angular

$$J\ddot{\eta} + J\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) = \tau \quad (3.10)$$

El modelo que se obtiene mediante el formalismo de Euler-Lagrange, descrito por las ecuaciones (3.9)–(3.10), no será utilizado para obtener resultados en simulación numérica ni experimentales. Sin embargo el motivo por el cual es presentado, es para introducir conceptos y variables, que serán de utilidad en la descripción del modelado mediante el formalismo de Newton-Euler, tales como los ángulos de Euler y la relación cinemática (3.5).

### 3.2. Dinámica del Cuadrirotor Modelado por Newton-Euler.

Se presenta ahora el modelado del cuadrirotor con el formalismo de Newton-Euler, este enfoque es el más utilizado en la literatura (por ejemplo [8][37][38][39]) y será el que se utilizará en este trabajo para obtener resultados en simulación numérica y experimentales.

Se usa el formalismo de Newton-Euler, en dónde la dinámica de un cuerpo rígido sometido a fuerzas externas aplicadas en el centro de masa y expresadas en el marco de referencia global está descrita como [1]:

$$\dot{\xi} = v \quad (3.11)$$

$$m\dot{v} = R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\dot{R} = R\hat{\Omega} \quad (3.13)$$

$$I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega + \tau \quad (3.14)$$

dónde  $\hat{\Omega}$  representa al operador “wedge”, el cual es una matriz anti-simétrica de  $\Omega$ ,  $\times$  representa el producto cruz,  $T_f$  representa el empuje aplicado en el cuadrirotor  $T_f = \sum_{i=1}^4 f_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2$ .

Se desarrolla la ecuación (3.11) y se obtienen las tres primeras ecuaciones del sistema dinámico del cuadrirotor

$$\dot{x} = v_x \quad (3.15)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (3.16)$$

$$\dot{z} = v_z \quad (3.17)$$

En la ecuación (3.11)  $\xi$  sigue siendo como en la sección anterior  $\xi = (x, y, z)$ , y con  $\dot{\xi} = v$  se obtienen ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Se desarrolla ahora la ecuación (3.12) y se obtienen las siguientes tres ecuaciones del sistema dinámico del cuadrirotor:

$$\ddot{x} = \frac{\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)}{m} u_1 \quad (3.18)$$

$$\ddot{y} = \frac{\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)}{m} u_1 \quad (3.19)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{m} u_1 \quad (3.20)$$

Se puede observar que en estas ecuaciones aparece el control  $u_1$  y son ecuaciones no lineales de segundo orden, la mayoría de los sistemas dinámicos en mecatrónica son

no lineales y estas ecuaciones describen de mejor manera el sistema dinámico del cuadrirotor.

Para la ecuación (3.13) se puede hacer una equivalencia entre  $\dot{R} = R\hat{\Omega}$  y  $\Omega = W_\eta\dot{\eta}$ , como en la sección anterior R representa la matriz de rotación (3.8),  $\Omega$  representa el vector de la velocidad angular y  $\eta$  los ángulos de Euler. En el apéndice C.1 se da una explicación de esta equivalencia.

De las expresiones para p,q y r obtenidas se puede observar que es la relación cinemática que se buscaba, de hecho estas son las siguientes tres ecuaciones en el sistema dinámico del cuadrirotor:

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta) \quad (3.21)$$

$$q = \dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi) \quad (3.22)$$

$$r = \dot{\psi}\cos(\phi)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\phi) \quad (3.23)$$

Finalmente se desarrollan las últimas tres ecuaciones del sistema dinámico del cuadrirotor, estas ecuaciones están dadas por

$$\dot{p} = qr \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} + \frac{u_2}{I_{xx}} \quad (3.24)$$

$$\dot{q} = pr \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} + \frac{u_3}{I_{yy}} \quad (3.25)$$

$$\dot{r} = pq \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} + \frac{u_4}{I_{zz}} \quad (3.26)$$

Las 12 ecuaciones que se obtuvieron anteriormente (3.15) a (3.26), describen el modelo del cuadrirotor, pero las últimas 3 ecuaciones pueden ser transformadas en las ecuaciones (3.36) a (3.38)[1, 37]. Esta simplificación nos permite utilizar directamente las señales de los sensores que se tendrían en una implementación real, en particular una Unidad de Medida Inercial es utilizada, la cual brinda los ángulos de Euler y sus velocidades. El desarrollo de esta últimas tres ecuaciones (3.15) a (3.26) se muestra a continuación:

De la relación cinemática (3.5), se desarrolla “p”, “q” y “r”:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Y se obtienen las siguientes expresiones para “p”, “q” y “r”:

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta)$$

$$q = \dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi)$$

$$r = \dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi) - \dot{\theta}\sin(\phi)$$

Ahora se deriva con respecto al tiempo “p”, “q” y “r” para obtener “ $\dot{p}$ ”, “ $\dot{q}$ ” y “ $\dot{r}$ ”:

$$\dot{p} = \ddot{\phi} - \ddot{\psi}\sin(\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta)$$

$$\dot{q} = \ddot{\theta}\cos(\phi) - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi) + \ddot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi) - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\theta)\sin(\phi) + \dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi)$$

$$\dot{r} = -\ddot{\theta}\sin(\phi) - \dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi) + \ddot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi) - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\phi) - \dot{\psi}\dot{\phi}\cos(\theta)\sin(\phi)$$

Y también se calculan los productos “qr”, “pr” y “pq”:

$$qr = \dot{\psi}^2\cos^2(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi) + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos^2(\phi)\cos(\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta)\sin^2(\phi) - \dot{\theta}^2\cos(\phi)\sin(\phi)$$

$$pr = -\dot{\psi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi) + \dot{\psi}\dot{\phi}\cos(\theta)\cos(\phi) + \dot{\theta}\dot{\psi}\sin(\theta)\sin(\phi) - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\phi)$$

$$pq = -\dot{\psi}^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\phi) + \dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi) - \dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\phi)\sin(\theta) + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\phi)$$

Ahora se utiliza la aproximación de ángulo pequeño para estas últimas seis expresiones, esta simplificación da como resultado las siguientes expresiones

$$\dot{p} = \ddot{\phi} - \dot{\theta}\dot{\psi} \quad (3.27)$$

$$\dot{q} = \ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi} \quad (3.28)$$

$$\dot{r} = -\dot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\psi} \quad (3.29)$$

$$qr = \dot{\theta}\dot{\psi} \quad (3.30)$$

$$pr = \dot{\phi}\dot{\psi} \quad (3.31)$$

$$pq = \dot{\theta}\dot{\phi} \quad (3.32)$$

Al substituir (3.27)–(3.32) en (3.24)–(3.26), se obtiene el modelo dinámico del cuadrirotor

$$\ddot{x} = \frac{\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)}{m}u_1, \quad (3.33)$$

$$\ddot{y} = \frac{\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)}{m}u_1, \quad (3.34)$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{m}u_1, \quad (3.35)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}\frac{(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} + \frac{u_2}{I_{xx}}, \quad (3.36)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}\frac{(I_{zz} - I_{xx} - I_{yy})}{I_{yy}} + \frac{u_3}{I_{yy}}, \quad (3.37)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\frac{(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} + \frac{u_4}{I_{zz}}, \quad (3.38)$$

dónde  $u_1 = T_f$ ,  $u_2 = \tau_\phi$ ,  $u_3 = \tau_\theta$  y  $u_4 = \tau_\psi$  son consideradas como señales de control.

Es posible establecer un mapeo entre  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$ ; y la velocidad angular de cada motor eléctrico del cuadrirotor  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  y  $\omega_4$ . De hecho, cada motor produce una fuerza vertical  $F_i$  y un momento  $M_i$  que está relacionado con la velocidad angular del motor  $\omega_i$  de la forma [35]

$$F_i = k_F \omega_i^2, \quad M_i = k_M \omega_i^2, \quad (3.39)$$

dónde  $k_F$  y  $k_M$  son constantes reales positivas que pueden ser obtenidas experimentalmente. La relación entre las velocidades angulares de los motores y las señales de control están dadas como por [35]:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = K_{MF} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

dónde  $K_{MF}$  una matriz invertible de la forma

$$K_{MF} = \begin{bmatrix} k_F & k_F & k_F & k_F \\ 0 & k_FL & 0 & -k_FL \\ -k_FL & 0 & k_FL & 0 \\ k_M & -k_M & k_M & -k_M \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

dónde  $L$  es la distancia del eje de rotación de los motores al centro del cuadrirotor.

### 3.3. Seguimiento de Trayectoria de un Cuadrirotor

Considérese la dinámica de la posición  $z$  en el modelo del cuadrirotor (3.33)–(3.38), más precisamente la ecuación (3.35). Esta dinámica tiene la forma de la ecuación (2.7) con  $\chi = z$ ,  $u = u_1$  y

$$f_\chi = f_z = -g, \quad g_\chi = g_z = \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{m}, \quad \Delta_\chi = \Delta_z. \quad (3.42)$$

El error de seguimiento  $e$ , también toma la forma  $e = e_z = z - z_d$  con  $\chi_d = z_d$  como una señal de referencia. De acuerdo a la metodología descrita en la sección previa, el CFRD que asegura la convergencia de  $z$  hacia  $z_d$  a pesar de la presencia del término de perturbación  $\Delta_z$  está dado por

$$u_1 = \frac{m}{\cos(\phi)\cos(\theta)} [g + P_z(z, \dot{z}, t)], \quad (3.43)$$

dónde

$$P_z(z, \dot{z}, t) = P_\chi(\chi, \dot{\chi}, t) = \ddot{z}_d - \lambda_z \dot{e}_z - \sigma_z (D^{-\beta} \text{sgn}(s_z)) - \mu_z s_z, \quad (3.44)$$

con  $s_z = s_\chi = \dot{e} + \lambda_\chi e = \dot{e}_z + \lambda_z e_z$  como función de conmutación ( $\lambda_\chi = \lambda_z$ ) y  $\sigma_z = \sigma_\chi$ ,  $\mu_z = \mu_\chi$  in (3.44).  $\Delta_z = \Delta_\chi$  se supone que satisface (2.18), con una cota  $\kappa_\Delta = \kappa_{\Delta_z}$ .

Para diseñar las señales de control  $u_2$  y  $u_3$ , se define primero una señal de referencia deseada para los ángulos  $\phi$  and  $\theta$ , esto es  $\phi_d$  y  $\theta_d$ , respectivamente. Ahora se adopta la aproximación de ángulo pequeño ampliamente utilizada en la literatura de vehículos aéreos no tripulados (véase por ejemplo [37, 39]). Bajo esta suposición, la dinámica (3.33), (3.34), (3.36)–(3.38) toman la forma

$$\ddot{x} \approx \tan(\theta)(g + P_z) + \Delta_x, \quad (3.45)$$

$$\ddot{y} \approx -\tan(\phi)(g + P_z) + \Delta_y, \quad (3.46)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{u_2}{I_{xx}}, \quad \ddot{\theta} = \frac{u_3}{I_{yy}}, \quad \ddot{\psi} = \frac{u_4}{I_{zz}}, \quad (3.47)$$

dónde  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  son términos de perturbación desconocidos acotados por constantes reales positivas  $\kappa_{\Delta_x}$  y  $\kappa_{\Delta_y}$  respectivamente que afectan la dinámica de  $x$  y  $y$ .

Ahora se considera que  $\tan(\phi)$  y  $\tan(\theta)$  son señales de control “virtuales”, es decir  $u_x = \tan(\theta)$  y  $u_y = \tan(\phi)$  en (3.45) y (3.46). Similarmente al razonamiento previo para el diseño de la señal  $u_1$ , los errores de seguimiento  $e_x$  y  $e_y$  se definen como

$$e_x = x - x_d, \quad e_y = y - y_d, \quad (3.48)$$

dónde  $x_d$  y  $y_d$  son señales de referencia para  $x$  y  $y$ , respectivamente. Las siguientes superficies de conmutación son definidas:

$$s_x = \dot{e}_x + \lambda_x e_x, \quad s_y = \dot{e}_y + \lambda_y e_y, \quad (3.49)$$

dónde, como antes,  $\lambda_x$  y  $\lambda_y$  son parámetros constantes reales seleccionados de tal manera que las ecuaciones lineales de primer orden definidas por las superficies deslizantes

$$s_x = 0 = \dot{e}_x + \lambda_x e_x, \quad s_y = 0 = \dot{e}_y + \lambda_y e_y, \quad (3.50)$$

tengan soluciones que exponencialmente convejan a cero. De la misma manera, la derivada fraccional al orden  $(1 + \beta)$  de  $s_x$  y  $s_y$  se definen como

$$s_x^{1+\beta} = -\sigma_x \operatorname{sgn}(s_x) - \mu_x s_x^{(\beta)}, \quad s_y^{1+\beta} = -\sigma_y \operatorname{sgn}(s_y) - \mu_y s_y^{(\beta)}, \quad (3.51)$$

dónde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\mu_x$  y  $\mu_y$  son constantes reales positivas. La derivada fraccional de orden  $(-\beta)$  de las ecuación (3.51) tiene la forma (3.52), es decir

$$\dot{s}_x = -\sigma_x D^{-\beta} \operatorname{sgn}(s_x) - \mu_x s_x, \quad \dot{s}_y = -\sigma_y D^{-\beta} \operatorname{sgn}(s_y) - \mu_y s_y. \quad (3.52)$$

De la dinámica (3.45) y (3.46), con  $\Delta_x = \Delta_y = 0$ , se obtiene que la ecuación (2.15) está dada por

$$\dot{s}_x = \ddot{e}_x + \lambda_x \dot{e}_x = \tan(\theta)(g + P_z) - \ddot{x}_d + \lambda_x \dot{e}_x, \quad (3.53)$$

$$\dot{s}_y = \ddot{e}_y + \lambda_y \dot{e}_y = -\tan(\phi)(g + P_z) - \ddot{y}_d + \lambda_y \dot{e}_y. \quad (3.54)$$

Las señales deseadas  $\theta_d$  and  $\phi_d$  se pueden calcular a partir de (3.53) y (3.54) cuando las señales  $\tan(\theta)$  y  $\tan(\phi)$  son consideradas como señales de entrada virtuales, como se

mencionó anteriormente. Esta consideración permite tener las siguientes expresiones para  $\theta_d$  y  $\phi_d$ :

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{P_x}{P_z + g}\right), \quad \phi_d = -\arctan\left(\frac{P_y}{P_z + g}\right), \quad (3.55)$$

dónde

$$P_x = \ddot{x}_d - \lambda_x \dot{e}_x - \sigma_x D^{-\beta} \text{sgn}(s_x) - \mu_x s_x, \quad (3.56)$$

$$P_y = \ddot{y}_d - \lambda_y \dot{e}_y - \sigma_y D^{-\beta} \text{sgn}(s_y) - \mu_y s_y. \quad (3.57)$$

Notése que, cuando  $\theta$  y  $\phi$  logran aproximarse a  $\theta_d$  y  $\phi_d$  tan pronto como es posible, la estrategia de CFRD discutida anteriormente permite alcanzar la superficie deslizante  $s_x = 0$  y  $s_y = 0$  dónde los errores de seguimiento  $e_x$  y  $e_y$  tienden a cero exponencialmente. En este trabajo, una estrategia proporcional-derivativa es implementada para permitir que  $\theta \rightarrow \theta_d$ ,  $\phi \rightarrow \phi_d$  y  $\psi \rightarrow \psi_d$ , es decir

$$u_2 = I_{xx}[\ddot{\phi}_d - Kd_\phi \dot{e}_\phi - Kp_\phi e_\phi], \quad (3.58)$$

$$u_3 = I_{yy}[\ddot{\theta}_d - Kd_\theta \dot{e}_\theta - Kp_\theta e_\theta], \quad (3.59)$$

$$u_4 = I_{zz}[-Kd_\psi \dot{\psi} - Kp_\psi \psi], \quad (3.60)$$

dónde  $e_\phi = \phi - \phi_d$ ,  $e_\theta = \theta - \theta_d$  y  $e_\psi = \psi - \psi_d$  son los errores de seguimiento de los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  respectivamente. Notése que en particular,  $\phi_d$  es cero en la ecuación (3.60).

La ley de control descrita por las ecuaciones (3.43), (3.58), (3.59) y (3.60), desarrollada en este capítulo se utiliza en el siguiente capítulo para realizar simulaciones numéricas y en la plataforma experimental, para obtener resultados experimentales. Esta ley de control utiliza la metodología de regimenes deslizantes de orden fraccional y además se implementa una derivada fraccional en la función signo que aparece en la ley de control.





## Capítulo 4

# Resultados en Simulación Numérica y Experimentales

Algunas simulaciones fueron llevadas a cabo para evaluar el desempeño del esquema de control propuesto. Estas simulaciones fueron hechas en MATLAB, integrando las ecuaciones dinámicas del cuadrirotor (3.33)–(3.38) y usando un script que implementa el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. Para calcular la derivada fraccional usada en las ecuaciones (3.44), (3.56) y (3.57) del esquema de control propuesto en el capítulo anterior, se usa el método numérico de Grünwald-Letnikov , implementando el algoritmo de memoria adaptativa en tiempo de muestreo descrito en [32]. Distintos valores del orden fraccional  $\beta$  se prueban, para mostrar el desempeño del esquema de control. También la función signo se implementa usando la siguiente expresión

$$\text{sgn}(s_z) = \frac{s_z}{|s_z| + \epsilon},$$

dónde la cantidad suficientemente pequeña  $\epsilon > 0$  es una constante real positiva.

Los parámetros del modelo usados en la simulación se muestran en la Tabla 4.1, mientras que los parámetros del control se muestran en la Tabla 4.2. Los parámetros del modelo corresponden a un cuadrirotor real. Estos parámetros serán usados en las simulaciones de este capítulo.

Es importante mencionar que las señales de control que serán mostradas en las siguientes secciones están limitadas a los valores mostrados en la Tabla 4.3 [40]. Estos valores son similares a aquellos que corresponden a un cuadrirotor que será utilizado en experimentos reales. Debido a que en una aplicación real, el valor absoluto de dichas señales están limitadas por los actuadores(motores).

Tabla 4.1: Parámetros del Modelo.

Parámetro	Valor	Unidades
Masa m	0.6162	kg
Gravedad g	9.81	$\frac{m}{s^2}$
Ixx	0.00360481639	kg·m <sup>2</sup>
Iyy	0.00372100553	kg·m <sup>2</sup>
Izz	0.00703101500	kg·m <sup>2</sup>

Tabla 4.2: Parámetros del CFRD.

Nombre	Valor
$\epsilon$	0.005
$\sigma_z$	0.03
$\lambda_z$	1.5
$\mu_z$	1.0
$\sigma_y$	0.03
$\lambda_y$	1.23
$\mu_y$	1.24
$\sigma_x$	0.03
$\lambda_x$	1.23
$\mu_x$	1.24
$Kd_\phi$	0.3
$Kp_\phi$	1.75
$Kd_\theta$	0.3
$Kp_\theta$	1.75
$Kd_\psi$	0.3
$Kp_\psi$	1.75

Todas las simulaciones presentadas fueron hechas con un tiempo de muestreo de 0.01 segundos que corresponde a 100 Hz.

Tabla 4.3: Limitación de las señales de control.

Señal	Valor Máximo	Unidades
Empuje Vertical	35	N
Torque en Alabeo	4	Nm
Torque en Cabeceo	4	Nm
Torque en Guiñada	2	Nm

## 4.1. Simulaciones con Trayectoria tipo Vuelo Suspendido

Se usa una trayectoria definida a trozos, como referencia de seguimiento en el espacio, como a continuación se describe: los primeros 10 segundos se utilizan para el despegue del cuadrirotor hasta que alcanza el vuelo suspendido a 40cm, luego se mantiene en vuelo suspendido por 20 segundos, y finalmente se realiza el aterrizaje desde 40cm dentro de los últimos 10 segundos.

La expresión matemática para la trayectoria de referencia utilizada es la siguiente:

$$x_d = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & , 10 < t \leq 30 \\ 0 & , 30 < t \leq 40 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$y_d = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & , 10 < t \leq 30 \\ 0 & , 30 < t \leq 40 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$z_d = \begin{cases} \frac{0.4t}{10} & , 0 \leq t \leq 10 \\ 0.4 & , 10 < t \leq 30 \\ 0.4 - \frac{0.4(t-30)}{10} & , 30 < t \leq 40 \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.1.1. Simulaciones sin Perturbaciones

En la Figura 4.1 se muestra el seguimiento de trayectoria en el espacio, para nueve órdenes fraccionales, nótese que la mayoría de las gráficas de estos órdenes son indistinguibles y que predomina el color naranja rojizo que corresponde al orden fraccional  $\beta = 0.9$ . Debido a que es una trayectoria sin perturbaciones se puede apreciar que se logra el vuelo suspendido sin problema alguno, sin desviaciones.

Los errores en posición se muestran en la Figura 4.2, como se esperaba el error es muy pequeño. Los errores están en cero, excepto para la dirección z, en donde se tienen pequeñas desviaciones en las transiciones despegue-vuelo suspendido y vuelo suspendido-aterrizaje.

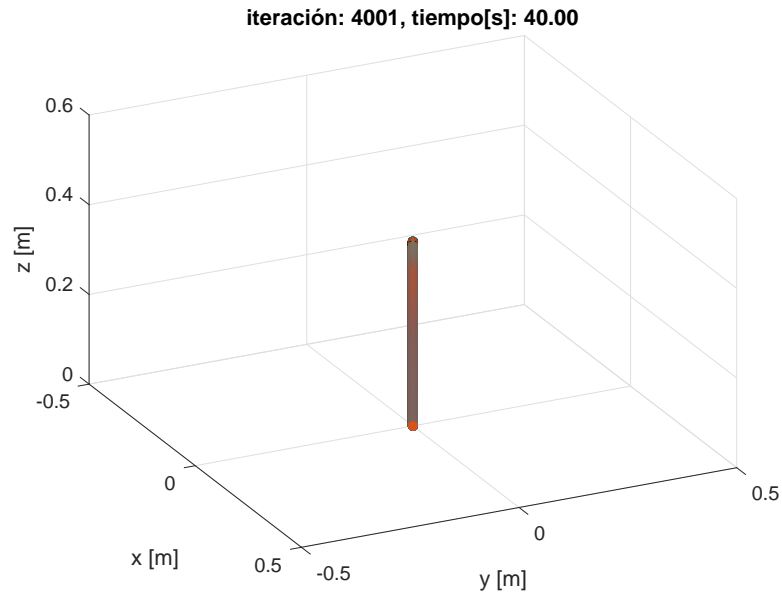


Figura 4.1: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de  $\beta = 0.1$  a  $\beta = 0.5$ .

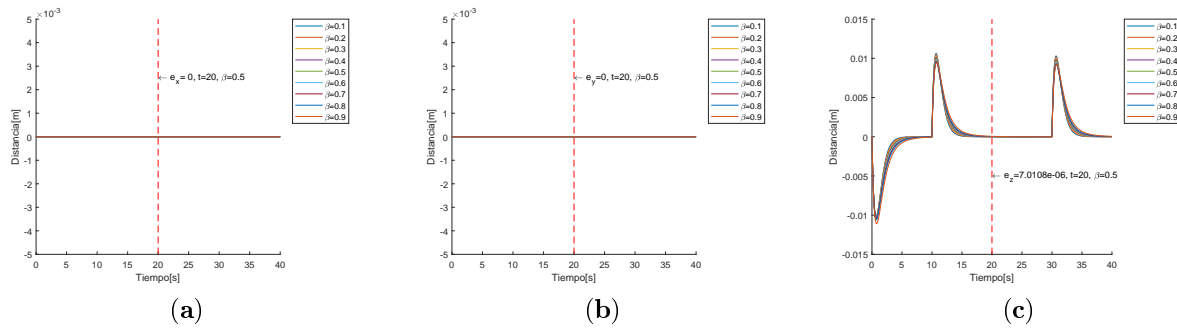


Figura 4.2: (a)Errores en x;(b)Errores en y;(c)Errores en z

Los errores en ángulos de Euler se muestran en la Figura 4.3, debido a que estamos realizando una simulación numérica y sin perturbaciones, los errores son cero a lo largo de la trayectoria, incluso en las transiciones de despegue-vuelo suspendido y vuelo suspendido-aterrizaje.

Se obtiene un promedio de los errores, el cual se muestra en la Tabla 4.4, este promedio es de errores en valor absoluto, como podemos corroborar los errores están en cero, excepto en la dirección z que tiene un promedio de 30cm y este error se presenta en las transiciones despegue-vuelo suspendido y vuelo suspendido-aterrizaje.

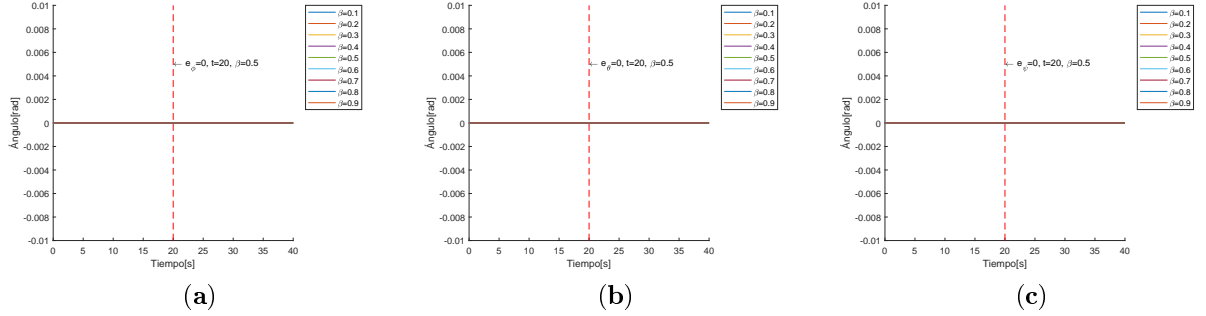


Figura 4.3: (a)Errores en  $\phi$ ;(b)Errores en  $\theta$ ;(c)Errores en  $\psi$

Tabla 4.4: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendido Sin Perturbaciones

Órden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0	0	0.3	0	0	0
0.2	0	0	0.3	0	0	0
0.3	0	0	0.3	0	0	0
0.4	0	0	0.3	0	0	0
0.5	0	0	0.3	0	0	0
0.6	0	0	0.3	0	0	0
0.7	0	0	0.3	0	0	0
0.8	0	0	0.3	0	0	0
0.9	0	0	0.3	0	0	0

Las cuatro señales de control se muestran en la Figura 4.4, desafortunadamente no podemos observar la acción de control debido a que no existen perturbaciones. Sin embargo, para el empuje vertical podemos observar cierto castaño para el orden fraccional  $\beta = 0.9$ , el cual no está presente en órdenes fraccionales inferiores.

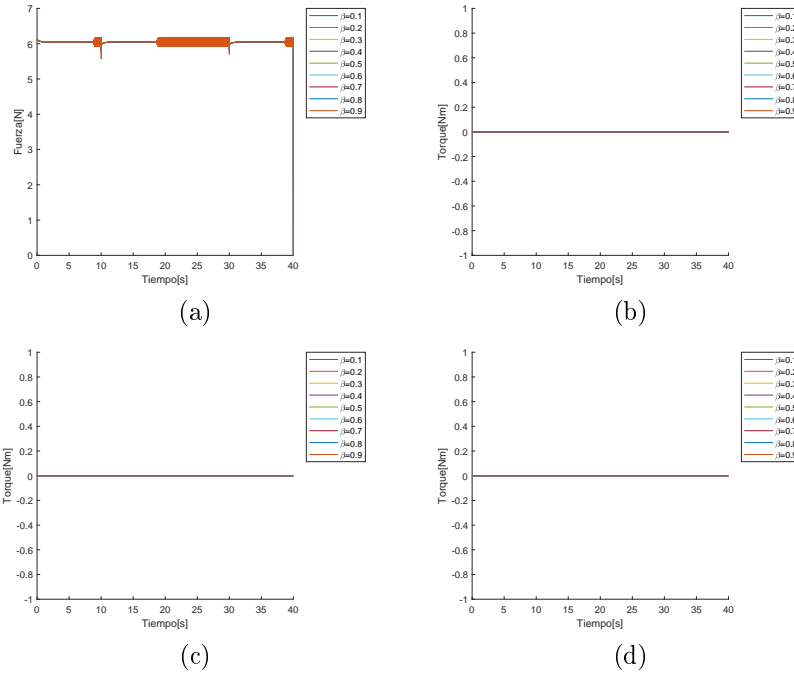


Figura 4.4: (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo (c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada

Las señales de control son indistinguibles unas de otras, y podemos observar que para órdenes fraccionales pequeños no existe castaño alguno (es decir  $\beta \leq 0.7$ ), sin embargo para órdenes fraccionales grandes (por ejemplo  $\beta = 0.9$ ), aparece un castaño indeseable. Esto es más evidente cuando el orden fraccional tiende a 1 ( $\beta \rightarrow 1$ ). Una comparación entre el empuje vertical para un orden fraccional de  $\beta = 0.5$  y otro de  $\beta = 0.9$  se muestra en la Figura 4.5.

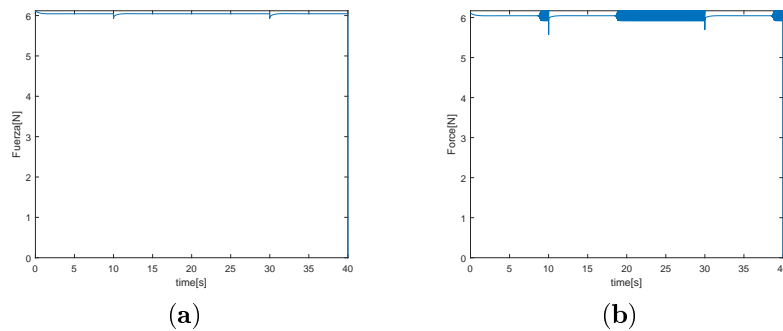


Figura 4.5: (a) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.5$ ; (b) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.9$ .

### 4.1.2. Simulaciones con Perturbaciones

Un término de perturbación se introduce en el lado derecho de la dinámica del modelo del cuadrirotor (3.33)–(3.38) en el segundo  $t = 13$  para simular el efecto de condiciones climáticas, tales como variaciones del viento. Este término de perturbación está dado por

$$\Delta_z = \Delta_x = \Delta_y = K_a + K_b \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right), \quad (4.4)$$

$$\Delta_\phi = \Delta_\theta = \Delta_\psi = K_\alpha + K_\beta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right), \quad (4.5)$$

con  $K_a = 0.15$  [m/s<sup>2</sup>],  $K_b = 0.01$  [m/s<sup>2</sup>],  $T_1 = 1.2$  [s],  $K_\alpha = 0.087$  [rad/s<sup>2</sup>],  $K_\beta = 0.015$  [rad/s<sup>2</sup>] y  $T_2 = 1.8$  [s].

En la Figura 4.6 se muestra el seguimiento de trayectoria en el espacio con un término de perturbación introducido en el segundo 13. Nótese que en este caso se aprecia que la trayectoria se desvía de la referencia en las direcciones “x” y “y”, en vez de mantenerse en el punto  $(x, y) = (0, 0)$  como debería, según la trayectoria propuesta.

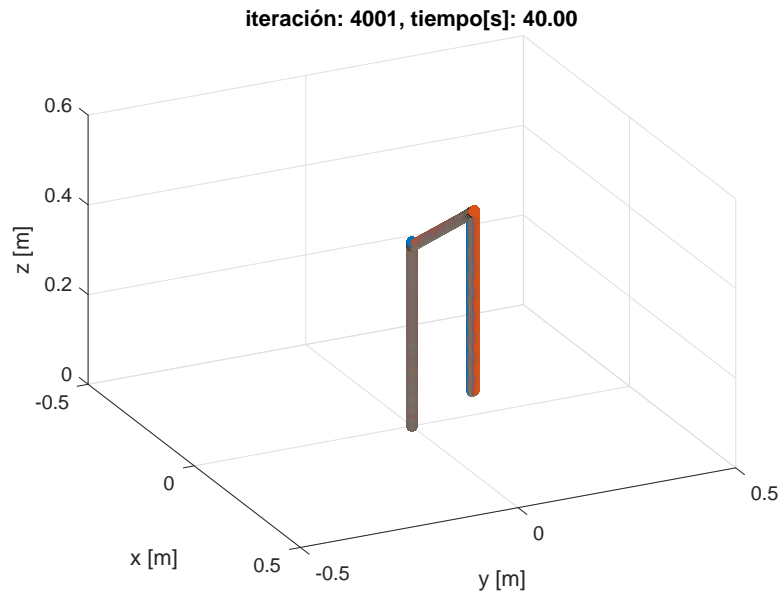


Figura 4.6: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de  $\beta = 0.1$  a  $\beta = 0.9$ .

Los errores de posición para esta trayectoria tipo vuelo suspendido, con perturbación, se muestran en las Figuras 4.7 a 4.9. Nótese que en el momento en que aparece el término de perturbación, es decir en el segundo 13, los errores comienzan a incrementarse hasta alcanzar alrededor de 10cm de error.

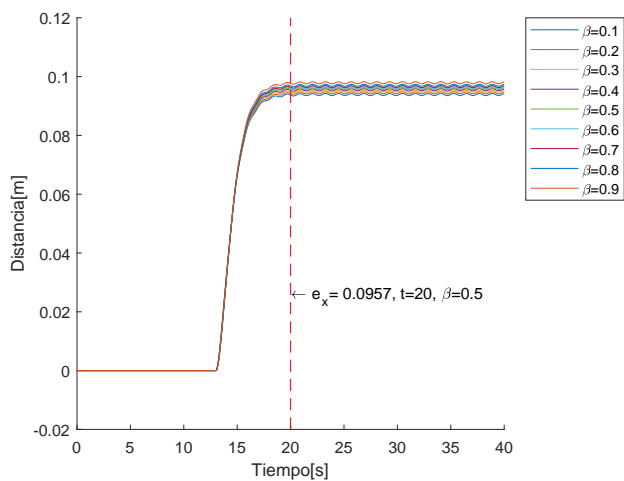


Figura 4.7: Errores en x Vuelo Suspendido con Perturbación.

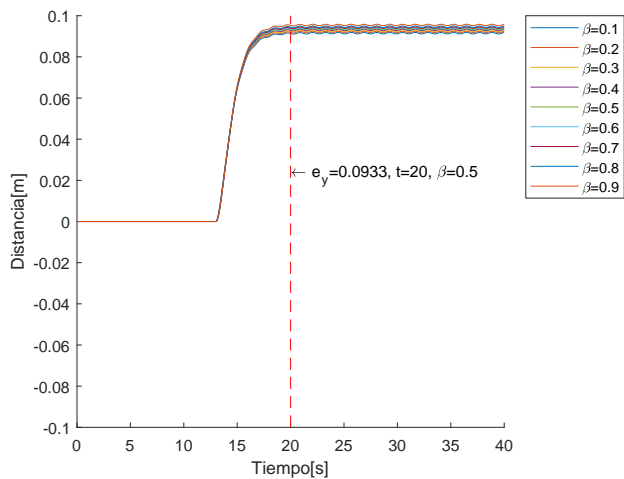


Figura 4.8: Errores en y Vuelo Suspendido con Perturbación.



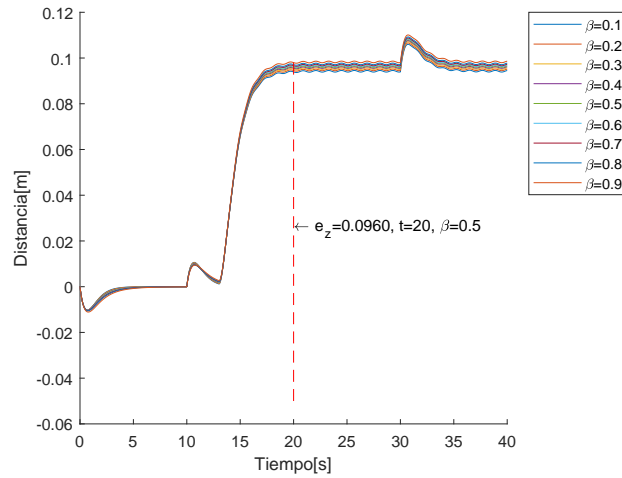


Figura 4.9: Errores en  $z$  Vuelo Suspendido con Perturbación.

Los errores en Ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.10–4.12. Nótese que estos errores son muy cercanos a cero y que no se alcanza a apreciar el efecto del término de perturbación introducido en la dinámica de los ángulos de Euler. A pesar de que el término de perturbación está presente, la trayectoria no exige cambios bruscos en los ángulos de Euler, está es una de las razones por las cuales los errores son tan cercanos a cero. Sin embargo si se observa la Figura 4.13, se puede apreciar el efecto de la perturbación en los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , también se puede observar que estos ángulos están dentro de la aproximación de ángulo pequeño.

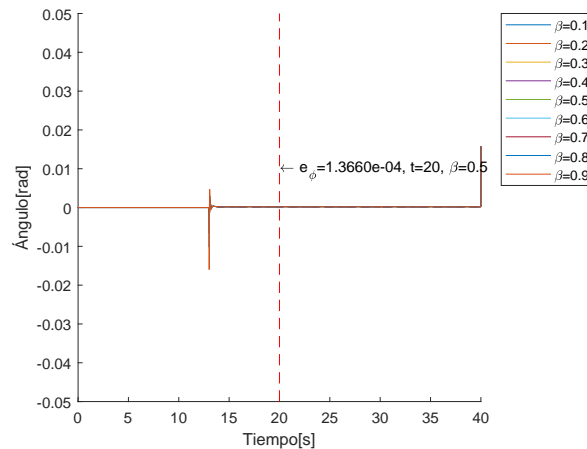
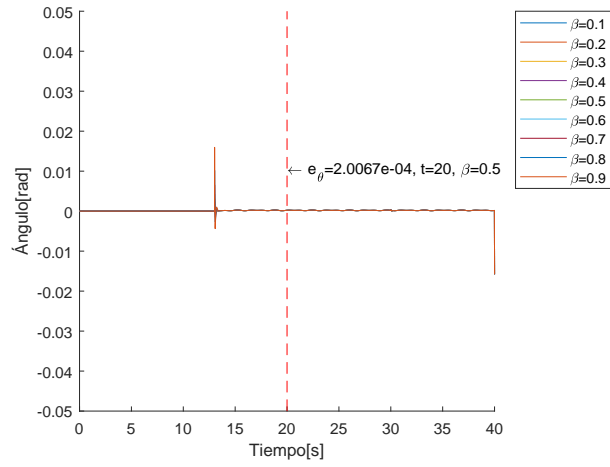
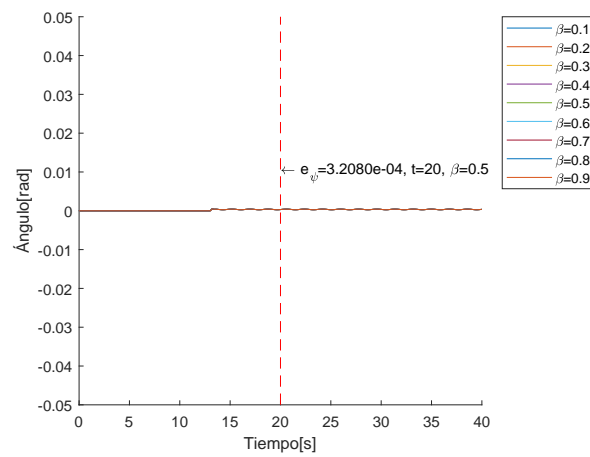


Figura 4.10: Error en el Ángulo de Euler  $\phi$  Vuelo Suspendido con Perturbación.

Figura 4.11: Error en el Ángulo de Euler  $\theta$  Vuelo Suspendido con Perturbación.Figura 4.12: Error en el Ángulo de Euler  $\psi$  Vuelo Suspendido con Perturbación.

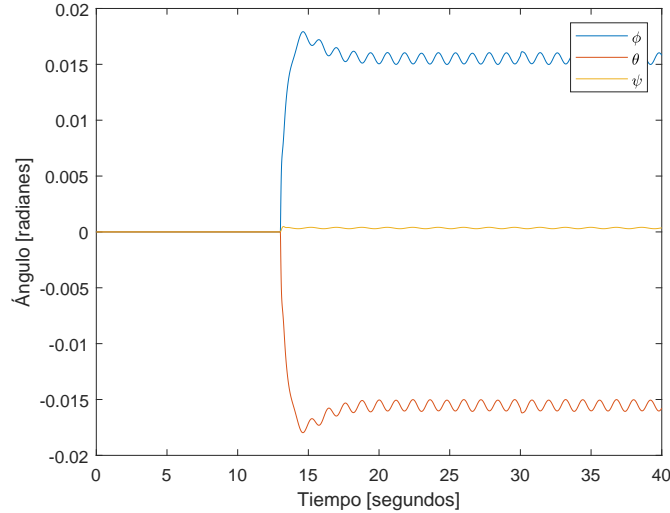


Figura 4.13: Los Ángulos de Euler están dentro de la aproximación de ángulo pequeño.

El promedio de los valores absolutos de los errores en posición y en ángulos de Euler se muestra en la Tabla 4.5. Nótese que los errores son muy cercanos unos de otros y que el error mínimo se alcanza cuando  $\beta = 0.1$  y el error máximo se obtiene cuando  $\beta = 0.9$  que corresponde a un valor más cercano al Control de Orden Entero por Regímenes Deslizantes.

Tabla 4.5: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendido con Perturbaciones

Orden Fraccional $\beta$	x	y	z	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0596	0.0581	0.0612	1.2914e-04	1.2907e-04	2.3528e-04
0.2	0.0599	0.0584	0.0616	1.2926e-04	1.2916e-04	2.3528e-04
0.3	0.0602	0.0587	0.0620	1.2944e-04	1.2930e-04	2.3528e-04
0.4	0.0605	0.0590	0.0623	1.2972e-04	1.2964e-04	2.3528e-04
0.5	0.0607	0.0592	0.0626	1.3022e-04	1.3035e-04	2.3527e-04
0.6	0.0609	0.0594	0.0628	1.3108e-04	1.3167e-04	2.3526e-04
0.7	0.0611	0.0596	0.0630	1.3252e-04	1.3378e-04	2.3522e-04
0.8	0.0614	0.0599	0.0634	1.3540e-04	1.3696e-04	2.3515e-04
0.9	0.0620	0.0604	0.0640	1.3971e-04	1.4162e-04	2.3499e-04

Las cuatro señales de control se muestran en las Figuras 4.14–4.17, para los nueve órdenes fraccionales, sin embargo se puede observar que son indistinguibles unas de otras, por esta razón es que se ha escogido el orden fraccional  $\beta = 0.5$ , para mostrar lo que pasa con órdenes fraccionales menores. Nótese que existe un castaño indeseable mayor cuando el orden fraccional es alto, es decir cuando tiende a 1.

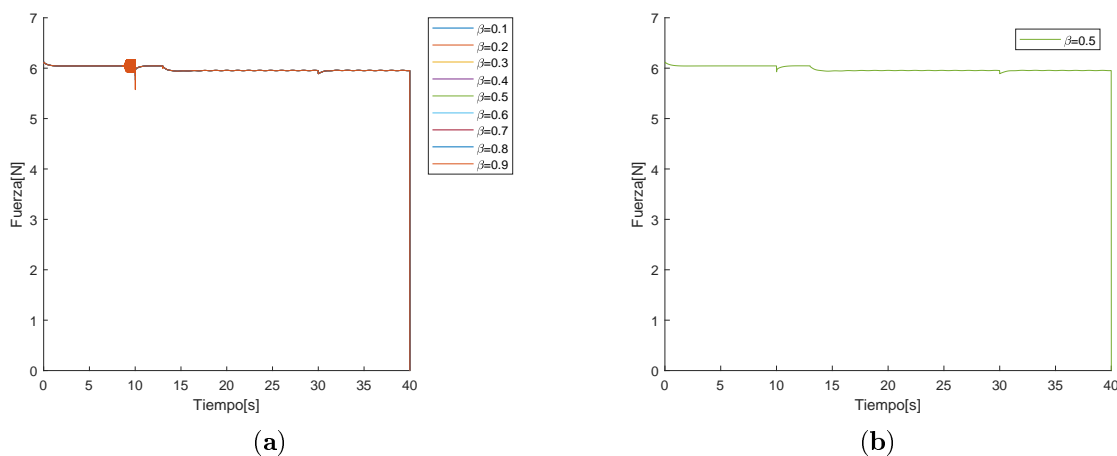


Figura 4.14: (a) Empuje vertical con  $\beta$ s distintos; (b) Empuje vertical con  $\beta = 0.5$ .

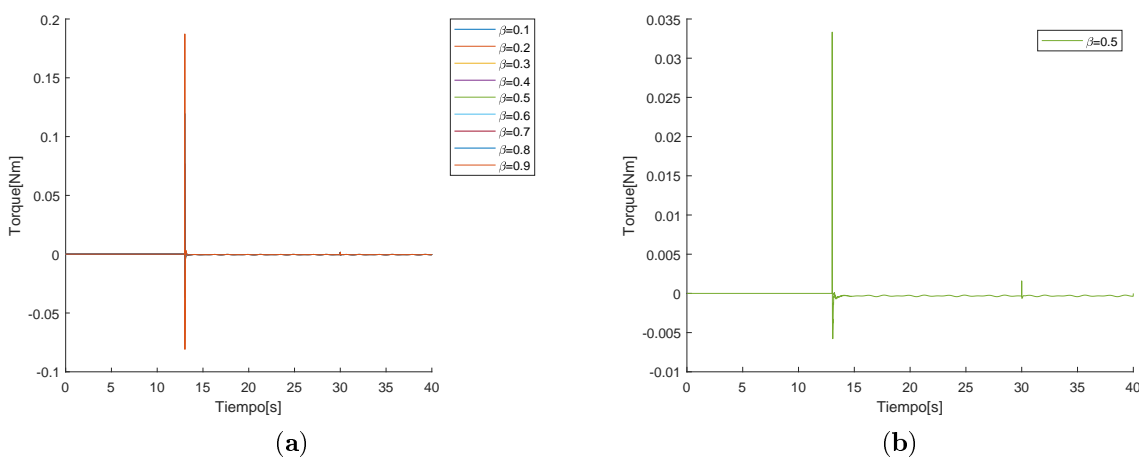


Figura 4.15: (a) Torque en Alabeo con  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Alabeo con  $\beta = 0.5$ .

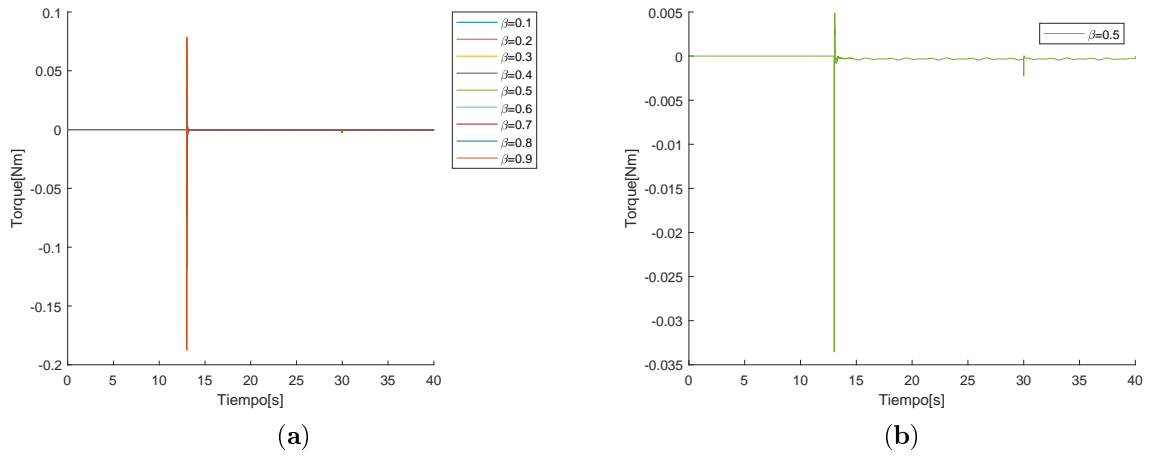


Figura 4.16: (a) Torque en Cabeceo con  $\beta$ s distintos; (b) Torque en cabeceo con  $\beta = 0.5$ .

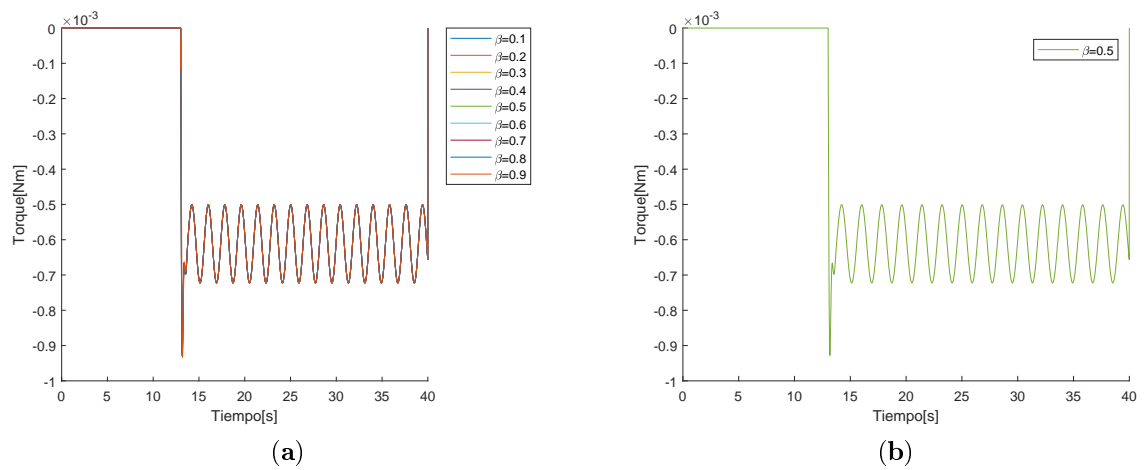


Figura 4.17: (a) Torque en Guiñada con  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Guiñada con  $\beta = 0.5$ .

Las señales de control son indistinguibles unas de otras, y se puede observar que para órdenes fraccionales pequeños no existe castaño alguno (es decir  $\beta \leq 0.7$ ), sin embargo para órdenes fraccionales grandes (por ejemplo  $\beta = 0.9$ ), aparece un castaño indeseable. Esto es más evidente cuando el orden fraccional tiende a 1 ( $\beta \rightarrow 1$ ). Una comparación entre el empuje vertical para un orden fraccional de  $\beta = 0.5$  y otro de  $\beta = 0.9$  se muestra en la Figura 4.18.

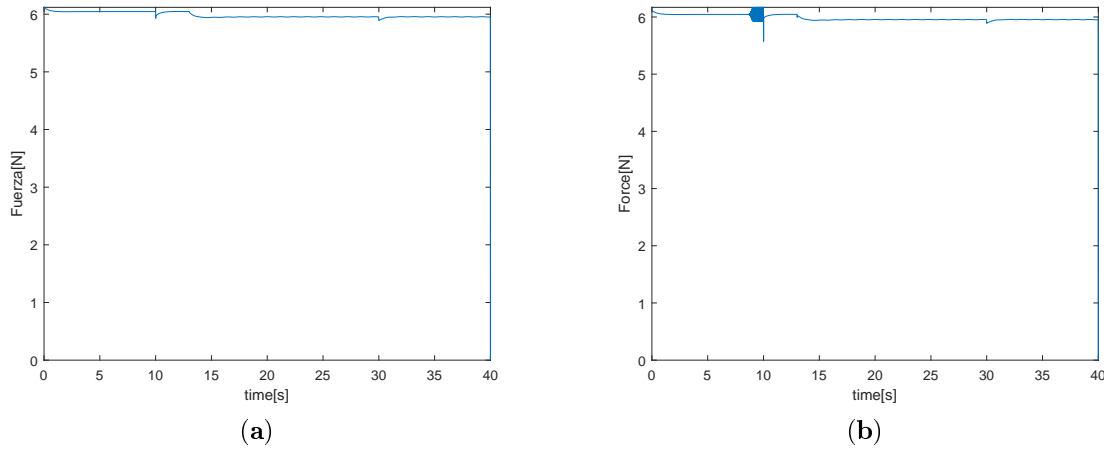


Figura 4.18: (a) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.5$ ; (b) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.9$ .

## 4.2. Simulaciones con Trayectoria tipo Lemniscata

Una trayectoria definida a trozos se usa como referencia de seguimiento en el espacio como a continuación se describe: los primeros 10 segundos se utilizan para el despegue del cuadrirotor hasta que alcanza el vuelo suspendido a 40cm, luego se realizan dos vueltas de una lemniscata durante 20 segundos, y finalmente se realiza el aterrizaje desde 40cm dentro de los últimos 10 segundos.

La expresión matemática para la trayectoria de referencia utilizada es la siguiente:

$$x_d = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{0.5 \sin(\frac{2\pi(t-10)}{10})}{1 + \cos(\frac{2\pi(t-10)}{10})^2} & , 10 < t \leq 30 \\ 0 & , 30 < t \leq 40 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$y_d = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{0.5 \sin(\frac{2\pi(t-10)}{10}) \cos(\frac{2\pi(t-10)}{10})}{1 + \cos(\frac{2\pi(t-10)}{10})^2} & , 10 < t \leq 30 \\ 0 & , 30 < t \leq 40 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$z_d = \begin{cases} \frac{0.4t}{10} & , 0 \leq t \leq 10 \\ 0.4 & , 10 < t \leq 30 \\ 0.4 - \frac{0.4(t-30)}{10} & , 30 < t \leq 40 \end{cases} \quad (4.8)$$

#### 4.2.1. Simulaciones sin Perturbaciones

La trayectoria del cuadrirotor en el espacio se muestra en la Figura 4.19. Nueve órdenes fraccionales son graficados (desde  $\beta = 0.1$  a  $0.9$ ). Nótese que la evolución de las variables con algunos valores de  $\beta$  son indistinguibles, y que el color rojo anaranjado, que corresponde al orden fraccional  $\beta = 0.9$ , es predominante.

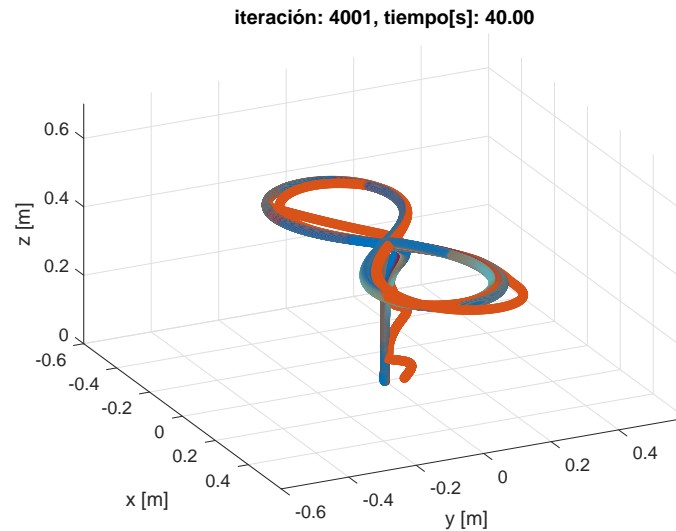


Figura 4.19: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de  $\beta = 0.1$  a  $\beta = 0.9$ .

La proyección de la trayectoria en el plano x-y es mostrada en la Figura 4.20. La trayectoria deseada no se sigue perfectamente, sin embargo el error de desviación es pequeño (véase las Figuras 4.21–4.26), las cuales tienen un mejor comportamiento cuando  $\beta = 0.1$ .

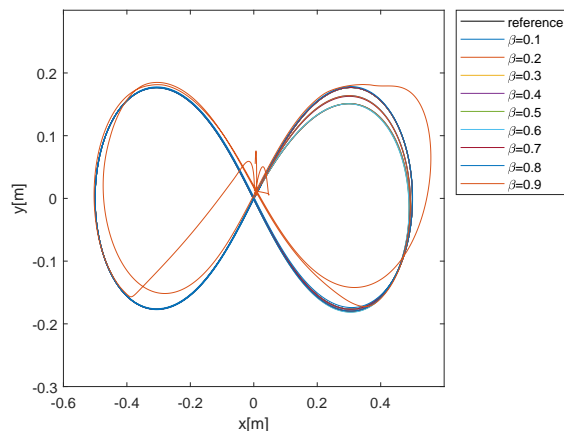


Figura 4.20: Proyección en el plano x-y de la trayectoria

La posición del error de seguimiento en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , esto es  $e_x = x - x_d$ ,  $e_y = y - y_d$  y  $e_z = z - z_d$  se muestra en las Figuras 4.21–4.23. El error alcanza casi los 4 cm en las direcciones “x” y “y”, y 8 cm en la dirección “z” cuando  $\beta = 0.5$ . Nótese que hay un sobrepaso significativo y un error de seguimiento más grande cuando  $\beta = 0.9$ , además de tener un comportamiento diferente al resto de los órdenes fraccionales, en particular se puede observar que tiene sobrepasos en toda la trayectoria.

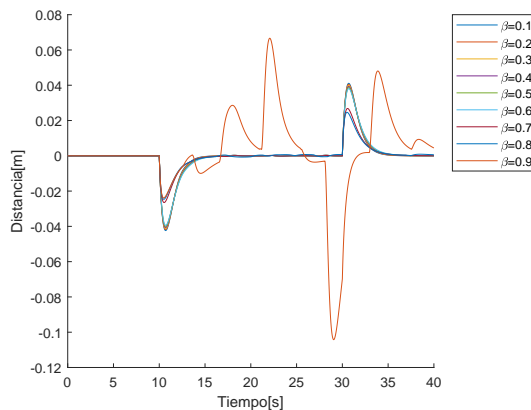


Figura 4.21: Errores en x Lemniscata sin Perturbaciones.



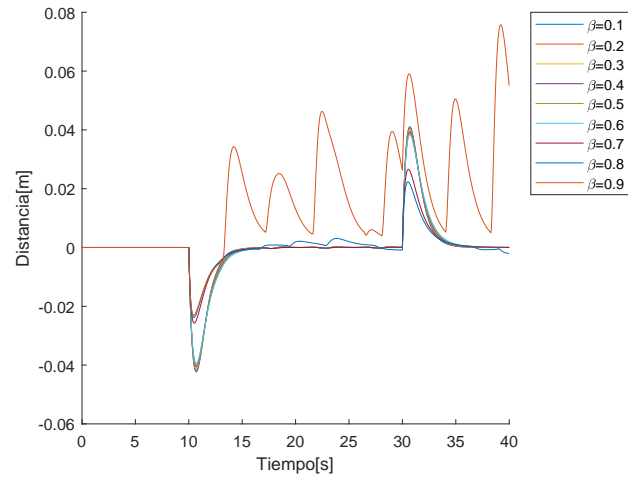


Figura 4.22: Errores en y Lemniscata sin Perturbaciones.

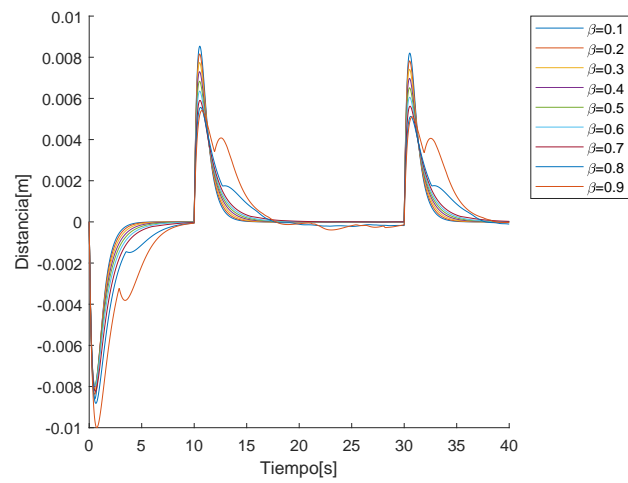


Figura 4.23: Errores en z Lemniscata sin Perturbaciones.

Los errores en posición para la trayectoria tipo lemniscata sin perturbaciones tienen un promedio que es mostrado en la Tabla 4.6, como se puede observar en dicha tabla el error más pequeño se alcanza cuando  $\beta = 0.1$ .

Tabla 4.6: Promedio absoluto de los errores Lemniscata Sin Perturbaciones

Órden Fraccional $\beta$	x	y	z	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.1249	0.0555	0.2998	1.8399e-04	1.8813e-04	2.5709e-05
0.2	0.1249	0.0555	0.2998	1.8716e-04	1.9081e-04	2.8351e-05
0.3	0.1249	0.0555	0.2998	1.9213e-04	1.9541e-04	3.2714e-05
0.4	0.1249	0.0556	0.2998	1.9916e-04	2.0267e-04	4.0308e-05
0.5	0.1250	0.0556	0.2998	2.0887e-04	2.1269e-04	5.4541e-05
0.6	0.1250	0.0557	0.2997	2.2166e-04	2.2591e-04	8.3810e-05
0.7	0.1251	0.0556	0.2997	5.0229e-04	4.7922e-04	1.5557e-04
0.8	0.1251	0.0555	0.2996	0.0081	0.0130	0.0015
0.9	0.1332	0.0594	0.2997	0.0062	0.0070	5.3169e-04

Los errores en Ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.24–4.26. Nótese que la cota de error absoluto para el error de ángulos de Euler es de 0.4 radianes para valores de  $\beta$  entre 0.1 y 0.9; observando ahora la evolución de los ángulos de Euler, podemos notar que se encuentran dentro de la aproximación de ángulo pequeño, la cual dice que los ángulos deben estar debajo de 0.3 radianes.

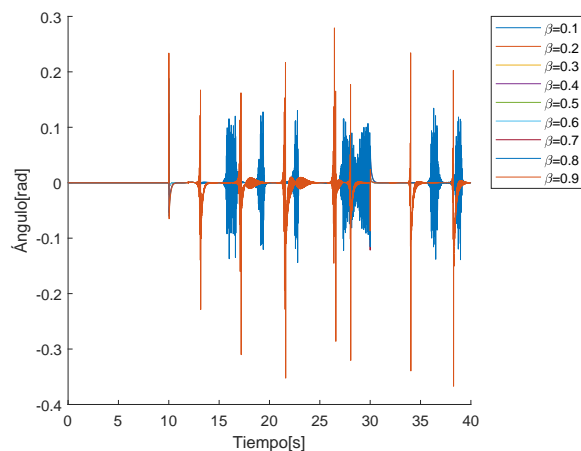
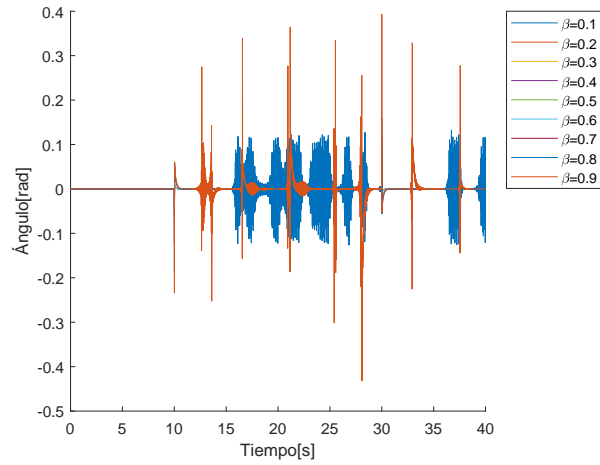
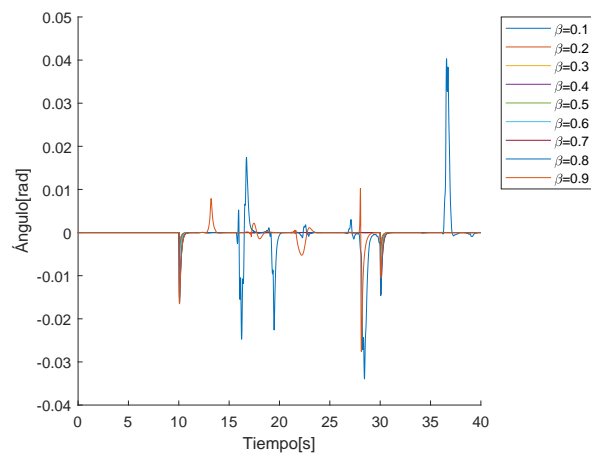


Figura 4.24: Errores en el ángulo de Euler  $\phi$  Lemniscata sin Perturbaciones.

Figura 4.25: Errores en el ángulo de Euler  $\theta$  Lemniscata sin Perturbaciones.Figura 4.26: Errores en el ángulo de Euler  $\psi$  Lemniscata sin Perturbaciones.

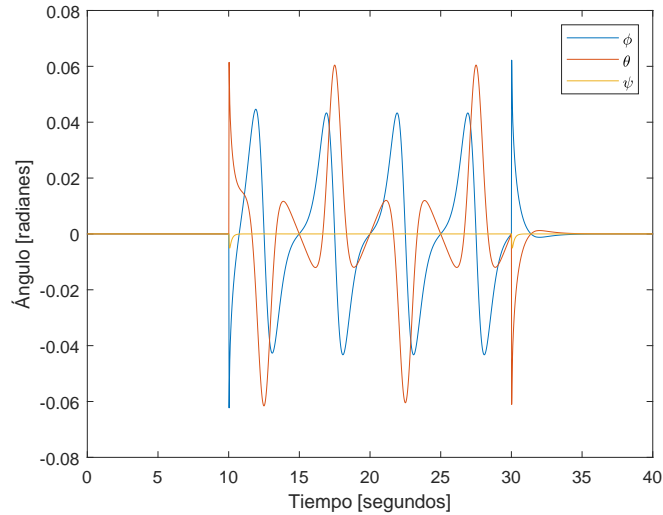


Figura 4.27: Los Ángulos de Euler cumplen con la aproximación de ángulo pequeño.

Las cuatro señales de control se muestran en las Figuras 4.28–4.31. Nótese que existe un castaño notable, para el orden fraccional  $\beta = 0.9$ , el cual es predominante y no permite ver lo que sucede para los demás órdenes fraccionales, por esta razón se muestran las señales de control para el orden fraccional  $\beta = 0.5$ , el cual no tiene castaño

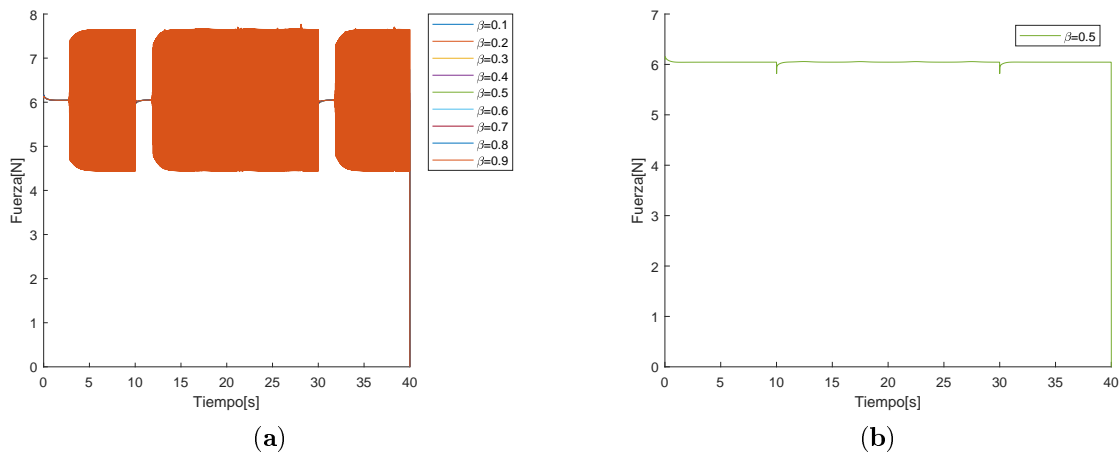


Figura 4.28: (a) Empuje vertical con  $\beta$ s distintos; (b) Empuje vertical con  $\beta = 0.5$ .

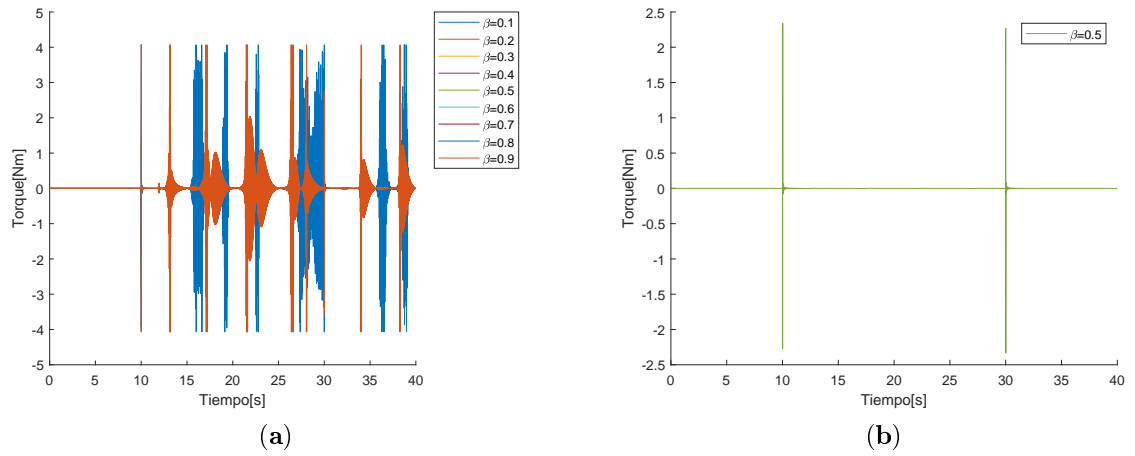


Figura 4.29: (a) Torque en Alabeo con  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Alabeo con  $\beta = 0.5$ .

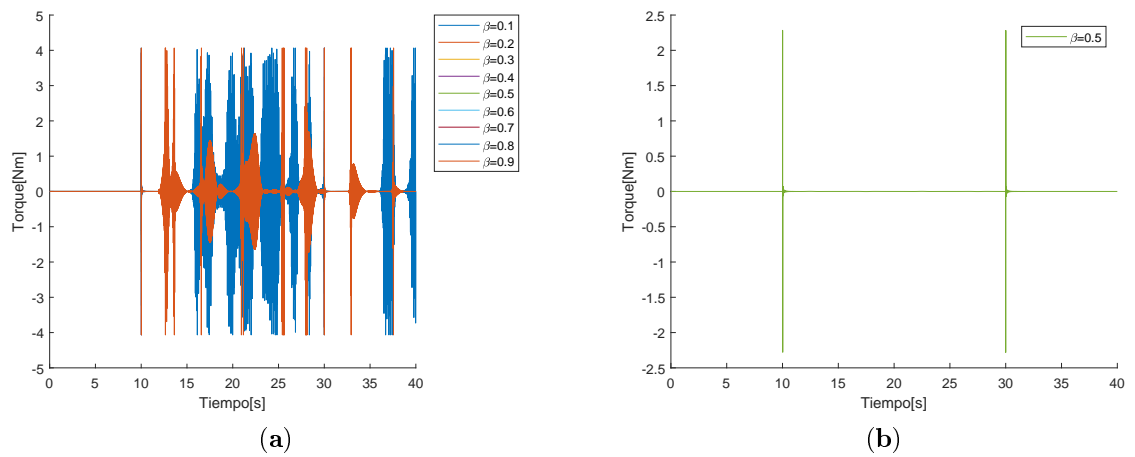


Figura 4.30: (a) Torque en Cabeceo con  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Cabeceo con  $\beta = 0.5$ .

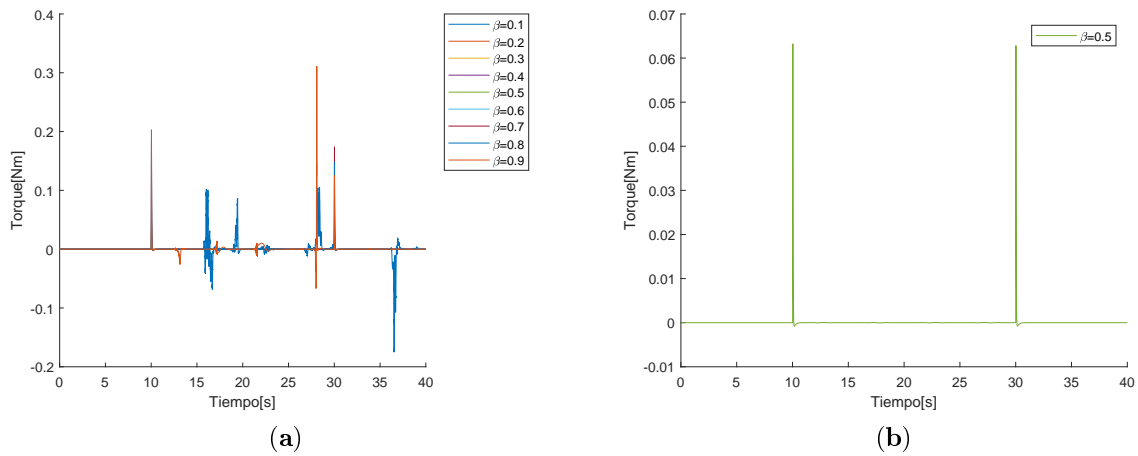


Figura 4.31: (a) Torque en Guiñada con  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Guiñada con  $\beta = 0.5$ .

Además, las nueve señales de control, correspondientes a los nueve órdenes fraccionales, son indistinguibles unas de otras, pero cuando  $\beta = 0.1$  no hay castaño alguno; órdenes fraccionales más altos conducen a la presencia de castaño. Esto es más evidente cuando el orden fraccional tiende a 1 ( $\beta \rightarrow 1$ ). Una comparación entre el empuje vertical para un orden fraccional de  $\beta = 0.5$  y otro de  $\beta = 0.9$  se muestra en la Figura 4.32.

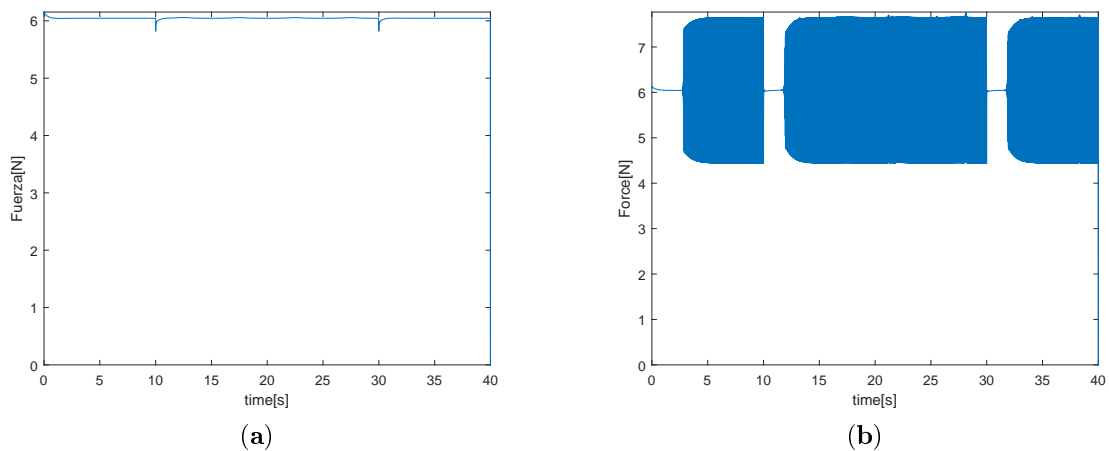


Figura 4.32: (a) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.5$ ; (b) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.9$ .

### 4.2.2. Simulaciones con Perturbaciones

La trayectoria del cuadrirotor en el espacio se muestra en la Figura 4.33, en la cual se ha introducido un término de perturbación descrito por 4.4–4.5, en el segundo  $t = 13[s]$ . Nueve órdenes fraccionales se grafican (desde  $\beta = 0.1$  a  $0.9$ ). Nótese que la evolución de las variables con algunos valores de  $\beta$  son indistinguibles, y que el rojo anaranjado, que corresponde al orden fraccional  $\beta = 0.9$ , es predominante.

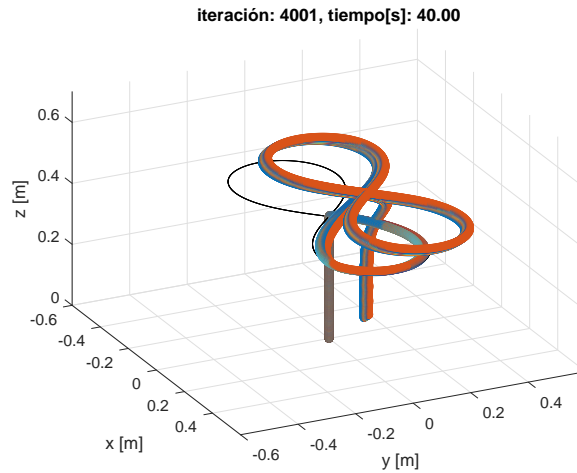


Figura 4.33: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con órdenes fraccionales de  $\beta = 0.1$  a  $\beta = 0.9$ .

La proyección de la trayectoria en el plano x-y plane se muestra en la Figura 4.34. La trayectoria deseada no se sigue perfectamente, debido a la presencia de la perturbación, sin embargo el error de desviación es pequeño (véase las Figuras 4.35–4.40), y se tiene un mejor comportamiento cuando  $\beta = 0.1$ .

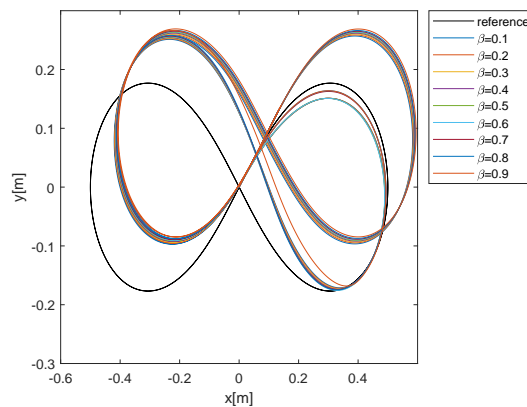


Figura 4.34: Proyección en el plano x-y de la trayectoria

La posición del error de seguimiento en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , esto es  $e_x = x - x_d$ ,  $e_y = y - y_d$  y  $e_z = z - z_d$  se muestran en las Figuras 4.35–4.37. Nótese que hay un sobrepaso significativo y un error de seguimiento más grande cuando  $\beta = 0.9$ .

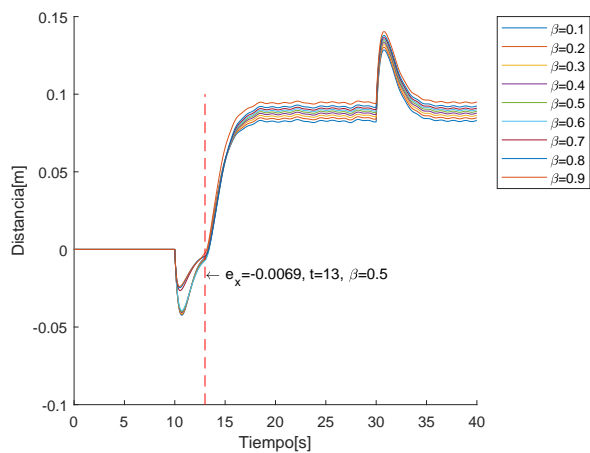


Figura 4.35: Errores en  $x$ .

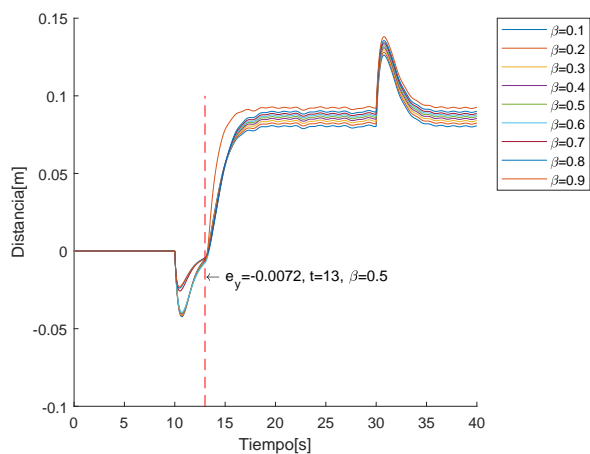


Figura 4.36: Errores en  $y$ .



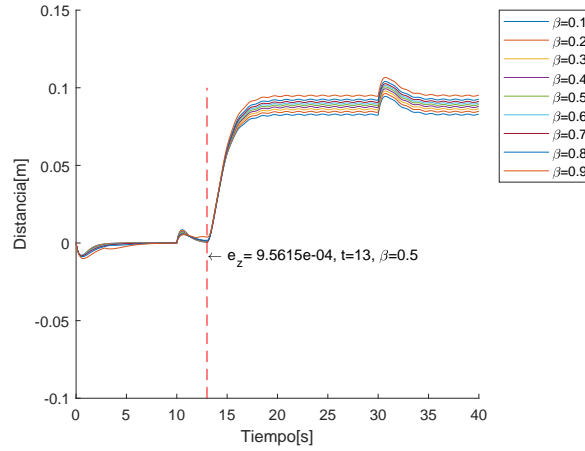


Figura 4.37: Errores en z.

El promedio de los valores absolutos de los errores se muestra en la Tabla 4.7, esta tabla muestra que los promedios están muy cercanos unos de otros, y que estos son pequeños no sobrepasa los 6cm para los errores de posición y respecto a los errores en ángulos de Euler son muy pequeños del orden de  $1 \times 10^{-4}$ , lo cual en ángulos que están en radianes es muy pequeño.

Tabla 4.7: Promedio absoluto de los errores

Orden Fraccional $\beta$	x	y	z	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0567	0.0552	0.0536	2.5992e-04	2.6212e-04	2.4825e-04
0.2	0.0577	0.0562	0.0547	2.6134e-04	2.6366e-04	2.4957e-04
0.3	0.0586	0.0571	0.0557	2.6365e-04	2.6706e-04	2.5174e-04
0.4	0.0594	0.0579	0.0566	2.6707e-04	2.7264e-04	2.5547e-04
0.5	0.0600	0.0585	0.0573	2.7364e-04	2.8051e-04	2.6241e-04
0.6	0.0606	0.0591	0.0579	2.8292e-04	2.9047e-04	2.7682e-04
0.7	0.0606	0.0591	0.0586	4.4559e-04	4.3793e-04	3.1523e-04
0.8	0.0614	0.0598	0.0596	5.4458e-04	5.3129e-04	3.3708e-04
0.9	0.0634	0.0630	0.0615	9.4973e-04	0.0011	3.3094e-04

Los errores en Ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.38–4.40. Nótese que estos errores se encuentran en una cota de error absoluta de alrededor de 0.3 radianes para  $\phi$  y  $\theta$ . También nótese que los ángulos de Euler evolucionan en valores que están dentro de la aproximación de ángulo pequeño.

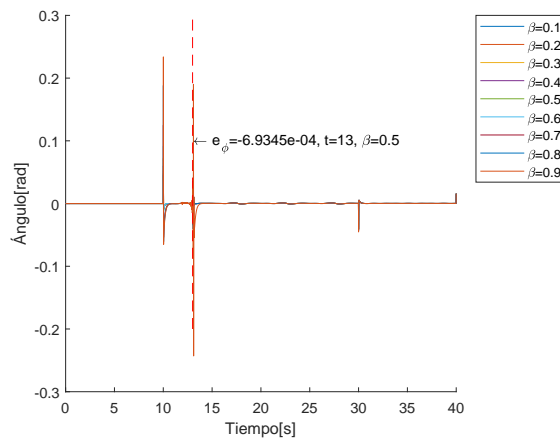


Figura 4.38: Error en el ángulo de Euler  $\phi$ .

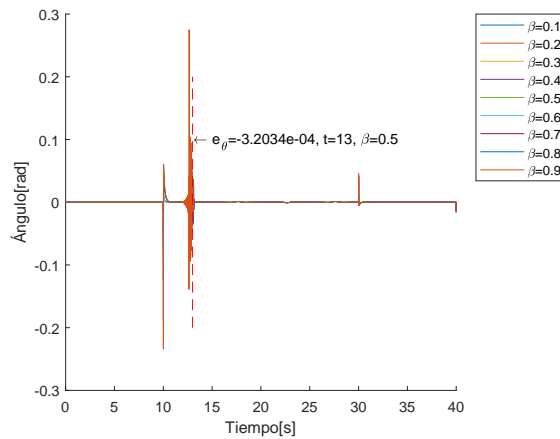


Figura 4.39: Error en el ángulo de Euler  $\theta$ .

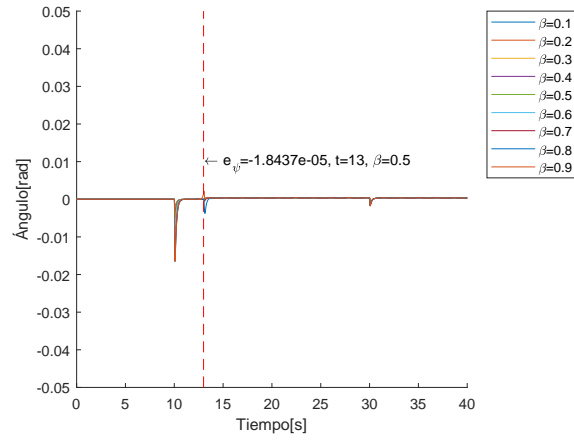


Figura 4.40: Error en el ángulo de Euler  $\psi$ .

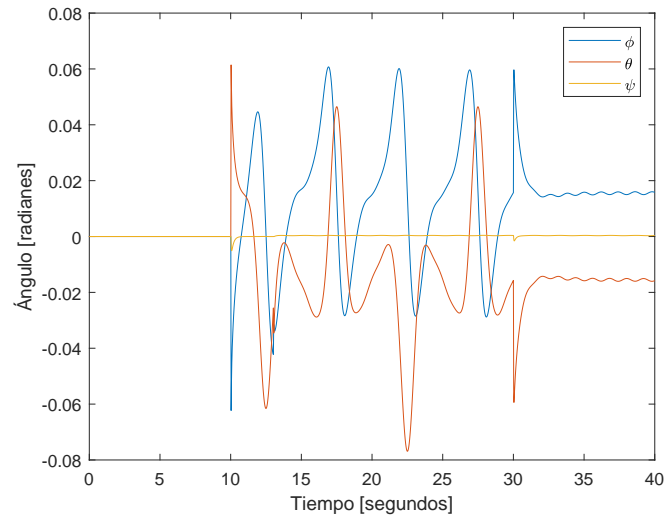


Figura 4.41: Euler Angles are within the small angle approximation.

Las cuatro señales de control se muestran en las Figuras 4.42–4.45. Nótese que el castaño para  $\beta = 0.9$  hace indistinguible las señales para los otros valores de  $\beta$ , sin embargo se escoge el valor de  $\beta = 0.5$ , para poder mostrar lo que pasa para órdenes fraccionales menores.

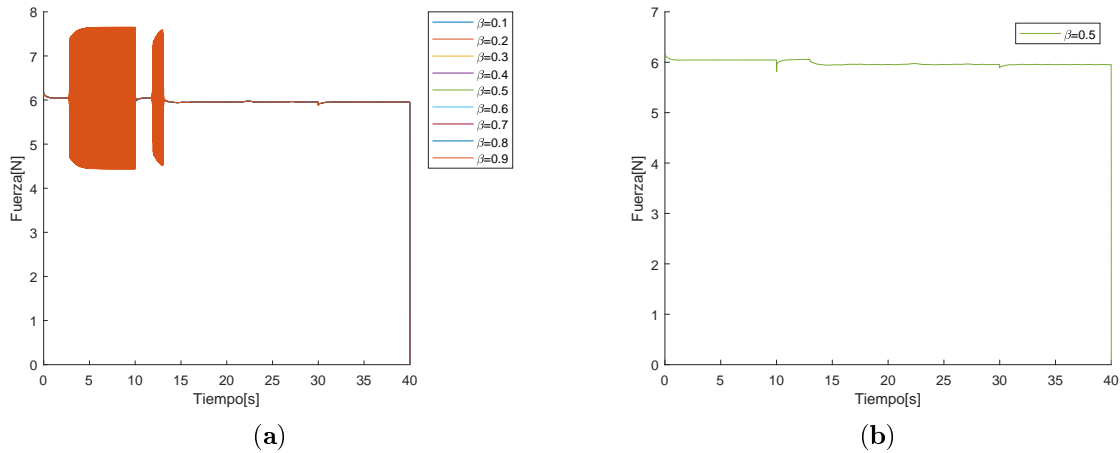


Figura 4.42: (a) Empuje vertical con  $\beta$ s distintos; (b) Empuje vertical con  $\beta = 0.5$ .

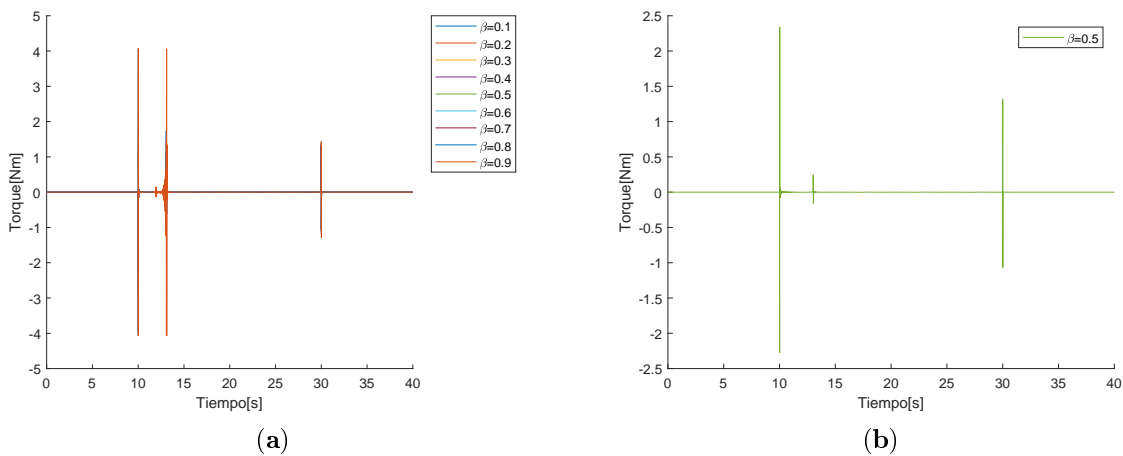


Figura 4.43: (a) Torque en Alabeo para  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Alabeo con  $\beta = 0.5$ .

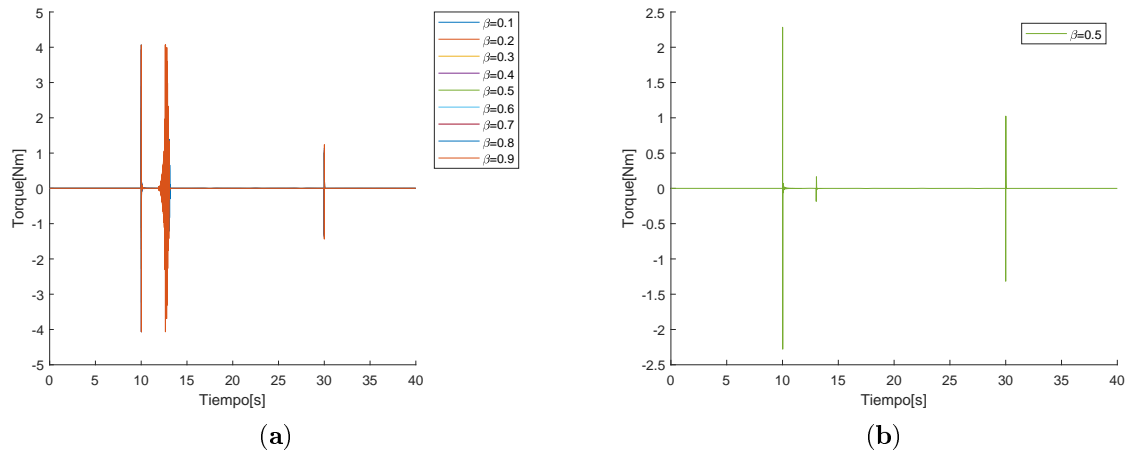


Figura 4.44: (a) Torque en cabeceo para  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Cabeceo con  $\beta = 0.5$ .

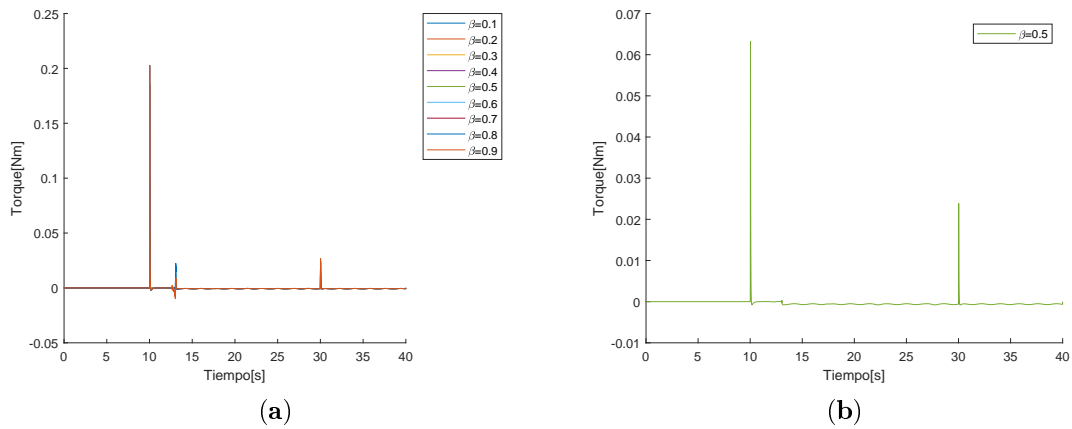


Figura 4.45: (a) Torque en Guiñada para  $\beta$ s distintos; (b) Torque en Guiñada con  $\beta = 0.5$ .

Las nueve señales de control correspondientes a nueve órdenes fraccionales distintos, son indistinguibles unas de otras, pero cuando  $\beta = 0.1$  no existe castaño alguno; órdenes fraccionales más altos presentan castaño de una forma más marcada. Esto es más evidente cuando el orden fraccional tiende a 1 ( $\beta \rightarrow 1$ ). Una comparación entre el empuje vertical para un orden fraccional de  $\beta = 0.5$  y otro de  $\beta = 0.9$  se muestra en la Figura 4.46.

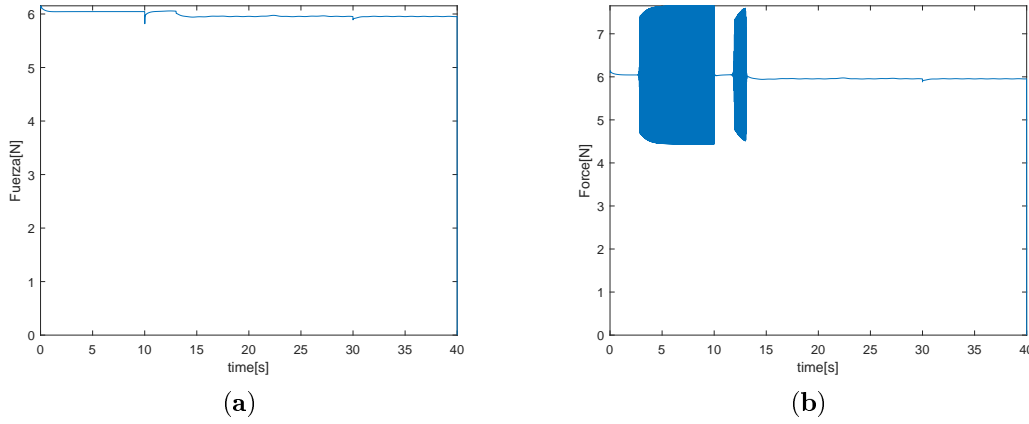


Figura 4.46: (a) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.5$ ; (b) Señal de Control  $u_1$  con  $\beta = 0.9$ .

### 4.3. Comparación con CERD

Para comparar el desempeño del CFRD presentado en este trabajo, un CERD fue implementado para el modelo simplificado del cuadrirotor. Usando la aproximación de ángulo pequeño este controlador es descrito por las Ecuaciones (3.35), (3.36)–(3.38) con

$$P_z = \ddot{z}_d - \lambda_z \dot{e}_z - \sigma_z \frac{d}{dt} \text{sgn}(s_z) - \mu_z s_z, \quad (4.9)$$

$$P_y = \ddot{y}_d - \lambda_y \dot{e}_y - \sigma_y \frac{d}{dt} \text{sgn}(s_y) - \mu_y s_y, \quad (4.10)$$

$$P_x = \ddot{x}_d - \lambda_x \dot{e}_x - \sigma_x \frac{d}{dt} \text{sgn}(s_x) - \mu_x s_x. \quad (4.11)$$

dónde, como antes,  $\lambda_z$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\mu_z$ ,  $\mu_y$  y  $\mu_x$ , son coeficientes reales escogidos de tal manera que las soluciones de las ecuaciones de primer orden definidas por las superficies deslizantes

$$s_z = 0 = \dot{e}_z + \lambda_z e_z, \quad (4.12)$$

$$s_y = 0 = \dot{e}_y + \lambda_y e_y, \quad (4.13)$$

$$s_x = 0 = \dot{e}_x + \lambda_x e_x. \quad (4.14)$$

converjan asintóticamente a cero. La simulación con el controlador CERD tiene los mismos parámetros utilizados para la simulación del CFRD, estos parámetros de control están descritos en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8: Parámetros CERD.

Nombre	Valor
$\epsilon$	0.005
$\sigma_z$	0.03
$\lambda_z$	1.5
$\mu_z$	1.0
$\sigma_y$	0.03
$\lambda_y$	1.23
$\mu_y$	1.24
$\sigma_x$	0.03
$\lambda_x$	1.23
$\mu_x$	1.24
$Kd_\phi$	0.3
$Kp_\phi$	1.75
$Kd_\theta$	0.3
$Kp_\theta$	1.75
$Kd_\psi$	0.3
$Kp_\psi$	1.75

#### 4.4. Simulaciones con Trayectoria tipo Vuelo Suspendido

La trayectoria tipo vuelo suspendido está descrita como anteriormente para el CFRD, esta trayectoria está definida por las expresiones (4.1), (4.2) y (4.3). Los parámetros del sistema son los mismos del CFRD, descritos en la Tabla 4.1. Las siguientes simulaciones corresponden a aquellas realizadas con el CFRD, pero ahora utilizando una derivada de orden entero.

#### 4.4.1. Simulaciones sin Perturbaciones

Los errores de posición y el error en ángulos de Euler del seguimiento de trayectoria se muestran en las Figuras 4.48 y 4.49, respectivamente, mientras que la gráfica en 3 dimensiones del seguimiento de trayectoria se muestra en la Figura 4.47. Nótese que los errores de seguimiento tienen un buen desempeño. Sin embargo, aparece un castaño indeseable en las señales de control, en particular en el empuje vertical  $u_1$ , como se puede observar en las Figura 4.50.

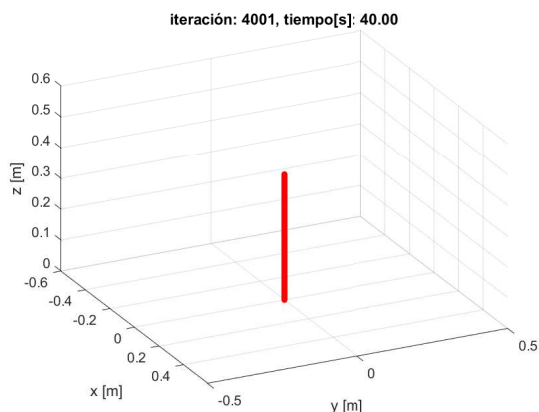


Figura 4.47: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD.

Si se comparan los errores de posición mostrados en la Figura 4.48 que corresponden al esquema de control CERD y los errores de la Figura 4.2, se puede observar que se alcanza un mejor desempeño en el seguimiento de trayectoria con el CERD debido a que los errores en la dirección  $z$  son más pequeños del orden de  $5\text{mm}$ , mientras que para el CFRD están alrededor de  $1\text{cm}$ ; sin embargo este mejor desempeño se alcanza a un precio alto, el cual es el castaño indeseable que se obtiene en las señales de control del CERD.

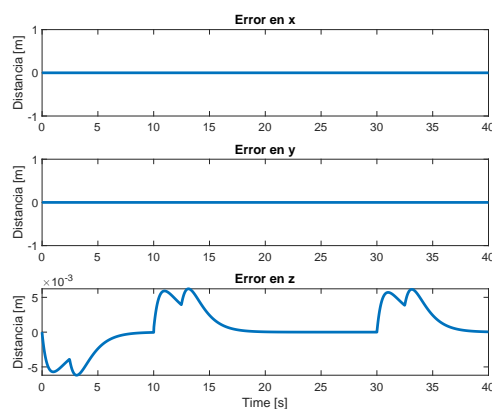


Figura 4.48: Errores de posición con CERD.



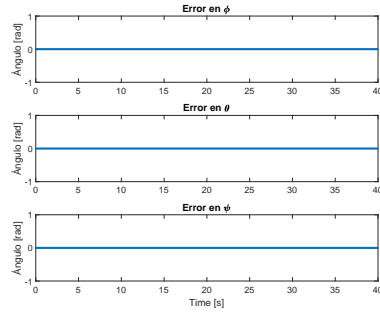


Figura 4.49: Errores en Ángulos de Euler con CERD.

Tabla 4.9: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendido Sin Perturbaciones CERD

$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.0	0.0	0.002	0.0	0.0	0.0

El empuje vertical es donde se puede observar el contraste del castaño entre el CFRD y el CERD, en particular si se observa la Figura (4.4a) y la Figura (4.50a), se puede notar que el castaño es mucho mayor para el CERD, también se puede notar que en el CFRD el castaño aparece para órdenes fraccionales altos (es decir  $0.7 < \beta \leq 1.0$ ), sin embargo si mantenemos el CFRD en órdenes fraccionales pequeños el desempeño de éste tiene la ventaja de no presentar castaño alguno.

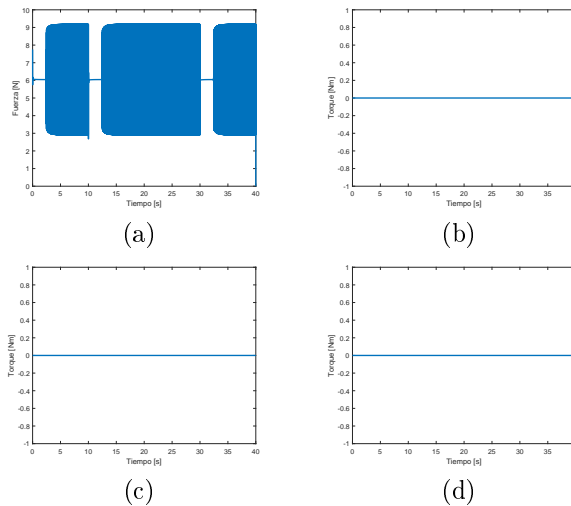


Figura 4.50: (a)Empuje Vertical (b)Torque en Alabeo (c)Torque en Cabeceo (d)Torque en Guiñada

#### 4.4.2. Simulaciones con Perturbaciones

La simulación con CERD con la trayectoria tipo vuelo suspendido y un término de perturbación dado por (4.4) y (4.5), se muestra en la Figura 4.51. Nótese que ahora existe una desviación en las direcciones “x” y “y”, debido al término de perturbación.

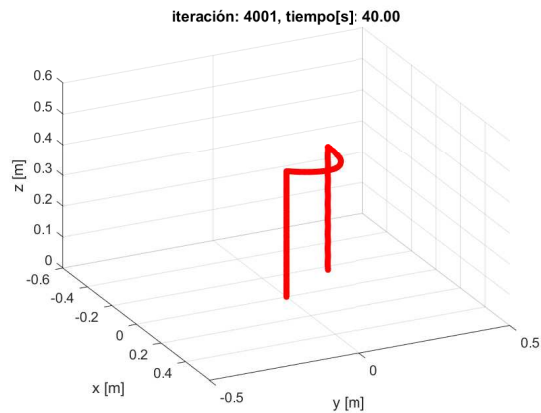


Figura 4.51: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD.

Los errores en posición se muestran en la Figura 4.52, si se comparan con la simulación obtenida con CFRD (véase las Figuras 4.7,4.8 y 4.9), se puede observar que en ambos esquemas de control, el error está alrededor de los 10cm, por lo que no hay ventaja alguna en el error de posición, sin embargo se verá que el CFRD disminuye el castaño indeseable presente en las señales de control.

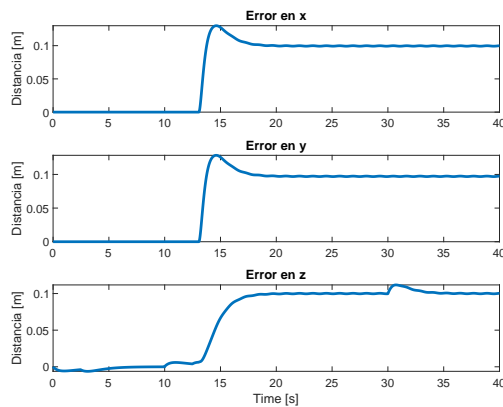


Figura 4.52: Errores de posición con CERD.

Tabla 4.10: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendido Con Perturbaciones

$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.0679	0.0663	0.0648	0.0011	0.0011	4.6262e-04

Si se compara el error en Ángulos de Euler para el CERD (véase la Figura 4.53)) y el CFRD (véase las Figuras 4.10,4.11 y 4.12), se puede observar que el error es considerablemente menor en el CFRD.

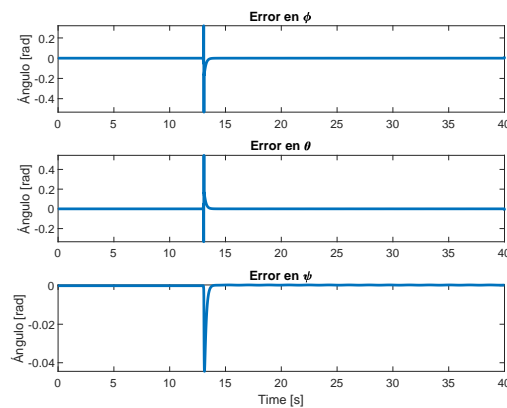


Figura 4.53: Errores en Ángulos de Euler con CERD.

Las señales de control para el CERD se muestran en la Figura 4.54, si se comparan con las señales de control para el CFRD (véase Figuras 4.14–4.17), se puede observar que el castaño para órdenes fraccionales para  $\beta \leq 0.7$  es mucho menor que el mostrado en el CERD, en particular el empuje vertical muestra de mejor manera este contraste.

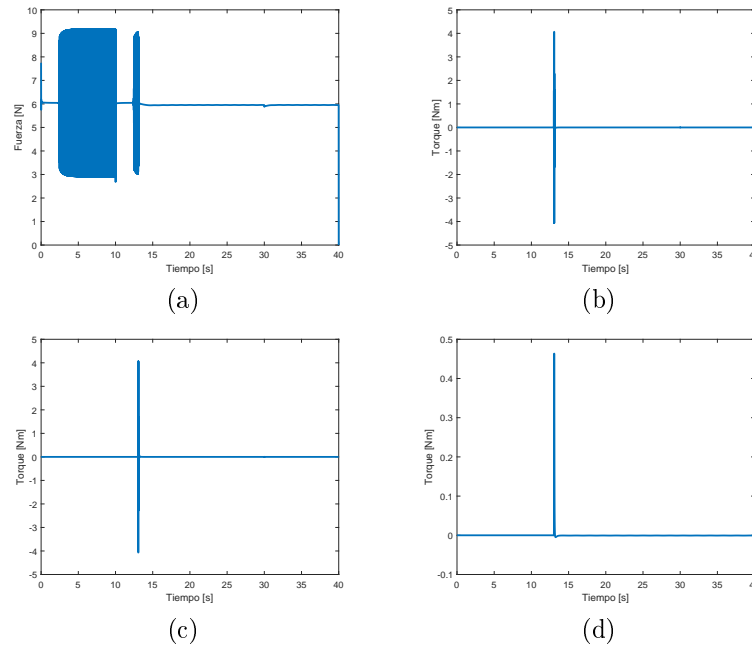


Figura 4.54: (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo  
(c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada

## 4.5. Simulaciones con Trayectoria tipo Lemniscata

Las simulaciones que a continuación se presentan fueron realizadas con el esquema CERD, utilizando como trayectoria de referencia la descrita por las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8). Los parámetros utilizados son los descritos en la Tabla 4.8.

### 4.5.1. Simulaciones sin Perturbaciones

La simulación con la trayectoria tipo lemniscata sin perturbaciones, tiene un comportamiento que se puede observar en la Figura 4.55. Nótese que a pesar de no haber perturbaciones, existe un error de seguimiento, sin embargo éste es pequeño.

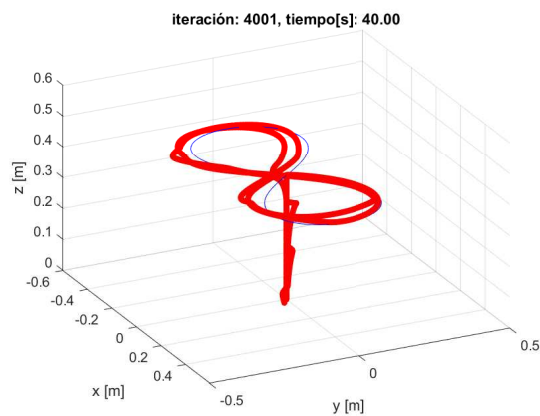


Figura 4.55: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD.

El error en posición se muestra en la Figura 4.56, si lo comparamos con los errores obtenidos con el CFRD descritos en las Figuras 4.21–4.23, se puede observar que en magnitud son muy similares, excepto cuando  $\beta = 0.9$  donde el error es mayor.

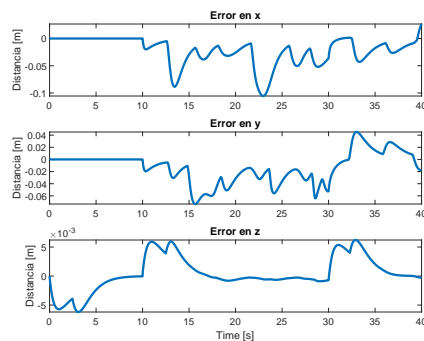


Figura 4.56: Errores de posición con CERD.

Los errores en Ángulos de Euler se muestran en la Figura 4.57, si se comparan con los obtenidos para el CFRD descritos en las Figuras 4.24–4.26, se puede observar que es mayor el error en el esquema CERD.

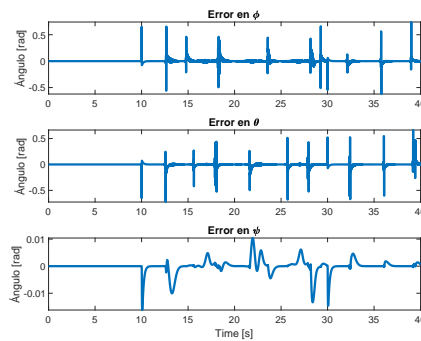


Figura 4.57: Errores en Ángulos de Euler con CERD.

Tabla 4.11: Promedio absoluto de los errores Lemniscata sin Perturbaciones CERD

<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.0227	0.0209	0.0020	0.0121	0.0108	0.0010

Las cuatro señales de control se muestran en la Figura 4.58, como se puede observar existe un castaño indeseable, en particular en el empuje vertical. Si se compara con las señales de control obtenidas para el CFRD, descritas en las Figuras 4.28–4.31, se puede observar que para órdenes fraccionales  $\beta \leq 0.7$  no existe este castaño indeseable.

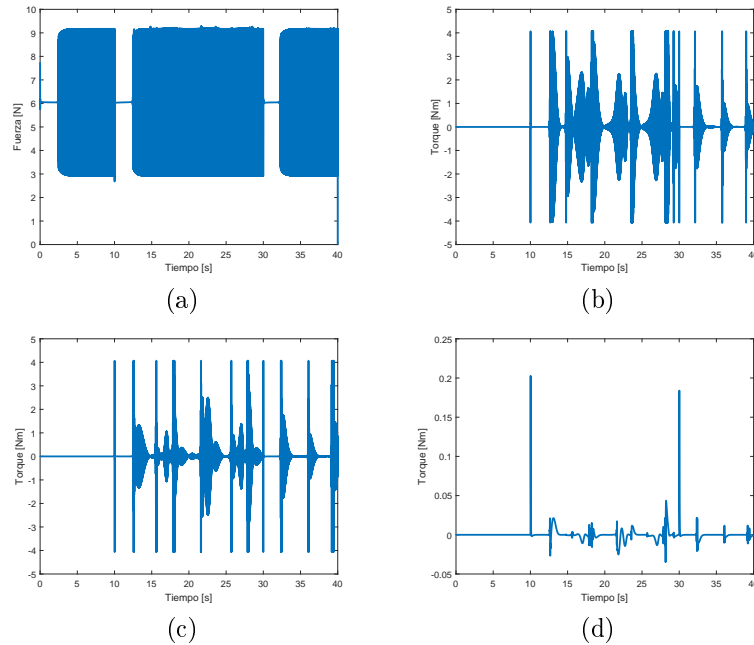


Figura 4.58: (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo  
(c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada

#### 4.5.2. Simulaciones con Perturbaciones

La gráfica 3D del seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con un término de perturbación añadido en el segundo 13, se muestra en la Figura 4.59. Nótese que en este caso la trayectoria tiene una desviación, debido al término de perturbación presente.

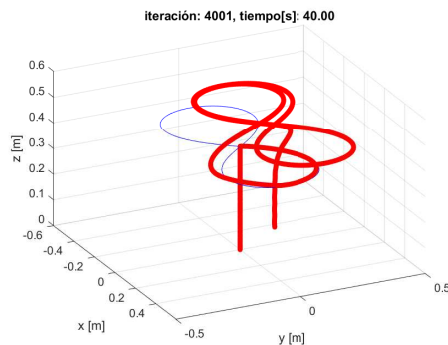


Figura 4.59: Gráfica 3D del seguimiento de trayectoria con CERD.

Los errores de posición se muestran en la Figura 4.60, si se compara con los obtenidos en el CFRD, descritos en las Figuras 4.35–4.37; se puede observar que el error es mayor para el CFRD en sus distintos órdenes fraccionales, este error es 5cm mayor, sin embargo esto se alcanza a un alto precio, el cual es el castaño indeseable que se presenta en el CERD.

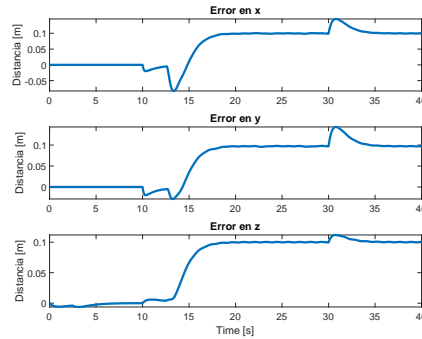


Figura 4.60: Errores de posición con CERD.

Los errores en Ángulos de Euler se muestran en la Figura 4.61, si se comparan con la simulación obtenida para el CFRD (véase Figuras 4.38–4.40), se puede notar que en este caso el error es mayor en el esquema CERD.

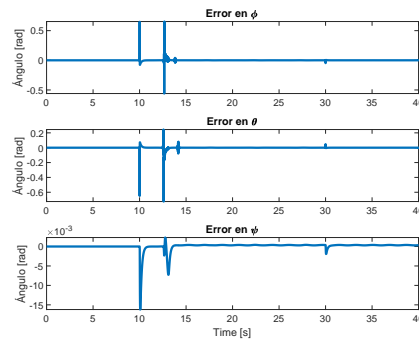


Figura 4.61: Errores en Ángulos de Euler con CERD.

Tabla 4.12: Promedio absoluto de los errores Lemniscata Con Perturbaciones CERD

$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.0656	0.0632	0.0648	0.0018	0.0019	3.8188e-04

Las cuatro señales de control se muestran en la Figura 4.62, si se comparan estas señales con las obtenidas en las Figuras 4.42–4.45, se puede observar que el castaño es menor en el esquema CFRD, en particular el empuje vertical muestra un mayor contraste.



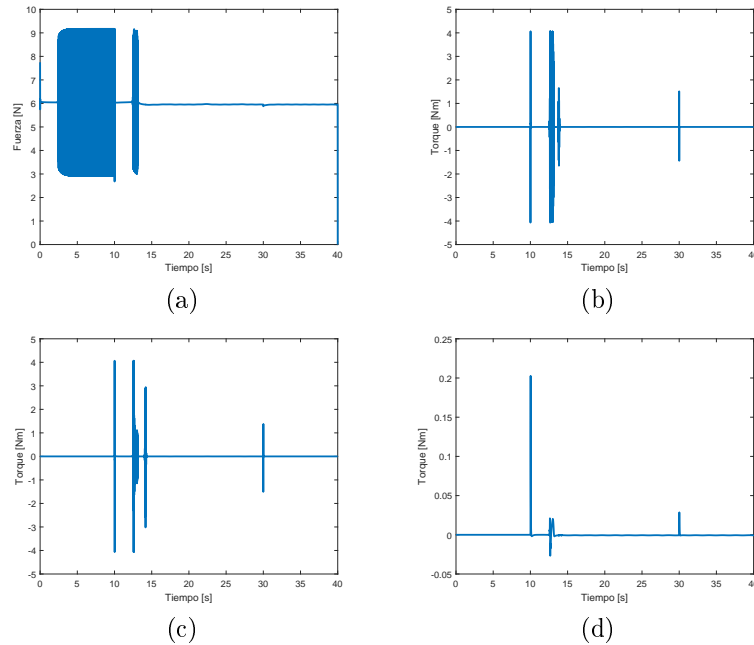


Figura 4.62: (a)Empuje Vertical (b) Torque en Alabeo  
(c)Torque en Cabeceo (d) Torque en Guiñada

## 4.6. Discusión de los Resultados en Simulación Numérica

Los resultados en simulación numérica obtenidos son idealizados, a pesar de que se usaron parámetros de un cuadricóptero real y también se acotaron las señales de control. Los resultados sin perturbaciones muestran un error menor al que se obtiene con perturbaciones, también cabe señalar que el castaño indeseable empieza a ser presente con órdenes fraccionales  $\beta \geq 0.7$ , este castaño no se presenta para órdenes inferiores, además de que las tablas y las gráficas nos dicen que el mejor comportamiento se obtiene cuando  $\beta = 0.1$ , que es el que más se acerca a un control por regímenes deslizantes convencional. Respecto a la comparación hecha con el CERD, se puede observar que no se obtiene un mejor desempeño con el CFRD, sin embargo se obtiene una gran ventaja, la cual es la disminución del castaño indeseable, presente en las señales de control. Si se comparan las Tablas 4.4 con 4.9, 4.5 con 4.12, 4.6 con 4.11 y 4.7 con 4.12, se verificará precisamente que no hay ventaja del CFRD con respecto al CERD. Después de los conjuntos de simulaciones realizadas con el CFRD, se puede observar que se tiene un buen desempeño, en las funciones básicas del cuadricóptero, las cuales son despegue, vuelo suspendido, seguimiento de trayectorias y aterrizaje.

## 4.7. Plataforma experimental.

Para poder probar el esquema de control propuesto en esta tesis, se utilizó un cuadrirotor de la empresa “AscendingTechnologies (AscTec)” (véase Figura 4.63), junto con un Sistema de Visión Artificial de la marca OptiTrack que hace las veces de un sensor del cual se obtiene la posición del cuadrirotor. Para obtener los ángulos de Euler se utilizó la herramienta AscTec Autopilot, la cual integra todos los sensores necesarios para funcionar como una unidad de medida inercial (IMU) y varias interfaces de comunicación a través de una tarjeta ARM7. También se utilizó un módulo de comunicación XBee, para poder enviar las señales de control desde una computadora portátil hacia el cuadrirotor.



Figura 4.63: Cuadrirotor utilizado.

En la figura 4.64, se puede observar el diagrama que muestra el esquema de interconexión de la plataforma experimental. Es importante mencionar que la tarjeta ARM7 del cuadrirotor trabaja a 1kHz y los sensores que hacen las veces de la IMU también a 1kHz, sin embargo el sistema de visión artificial trabaja a 100Hz y a través del módulo de comunicación sólo se puede enviar paquetes a 50Hz. Sin embargo se realiza una interpolación en la tarjeta ARM7 del cuadrirotor, para calcular los datos faltantes y así escalar a 100Hz.

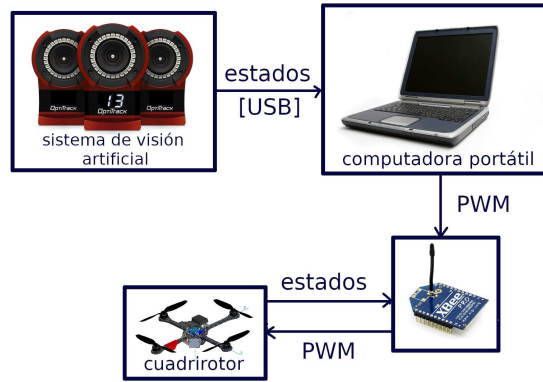


Figura 4.64: Esquema de interconexión.

En la Figura 4.65 se puede observar las dimensiones del cuadricóptero en milímetros, también en la Tabla 4.13, podemos observar los parámetros del cuadricóptero, tales como masa e inercias.

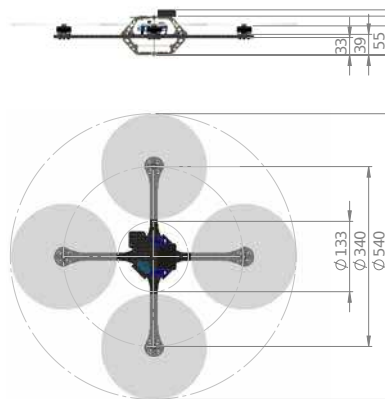


Figura 4.65: Dimensiones del Cuadricóptero.

Tabla 4.13: Parámetros de la Plataforma.

Parámetro	Valor	Unidades
Masa m	0.6162	kg
Gravedad g	9.81	$\frac{m}{s^2}$
Ixx	0.00360481639	kg·m <sup>2</sup>
Iyy	0.00372100553	kg·m <sup>2</sup>
Izz	0.00703101500	kg·m <sup>2</sup>
Distancia centro-rotor L	0.170	m
Constante de empuje $k_F$	0.00000005400515839604174	$\frac{N}{rpm^2}$
Constante de arrastre $k_M$	0.0000000008	$\frac{Nm}{rpm^2}$

En la Tabla 4.14, se muestran los parámetros utilizados para el CFRD, exclusivamente el control que interviene en el empuje vertical y las definiciones de los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$ .

Tabla 4.14: Parámetros del CFRD.

Nombre	Valor
$\epsilon$	0.005
$\sigma_z$	0.1
$\lambda_z$	2.5
$\mu_z$	2.0
$\sigma_y$	0.06
$\lambda_y$	2.23
$\mu_y$	2.24
$\sigma_x$	0.06
$\lambda_x$	2.23
$\mu_x$	2.24

## 4.8. Experimentos con Trayectoria tipo Vuelo Suspendido

Los siguientes resultados experimentales fueron hechos con una trayectoria tipo vuelo suspendido, análoga a la utilizada en las simulaciones numéricas, esta trayectoria viene dada por las expresiones (4.1)–(4.3).

### 4.8.1. Experimentos con Sin Perturbaciones

El primer conjunto de experimentos, es sin perturbaciones, se prueban algunos órdenes fraccionales representativos estos son  $\beta = 0.1, \beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.7$ , en algunos casos el orden fraccional  $\beta = 0.7$  falla y solo tenemos una parte del experimento de tan solo algunos segundos, en ocasiones no alcanza a despegar. Este es el caso de este conjunto de experimentos, en donde el orden fraccional  $\beta = 0.7$  está incompleto, en la Figura 4.66 se puede observar la gráfica en el espacio de este conjunto de experimentos.

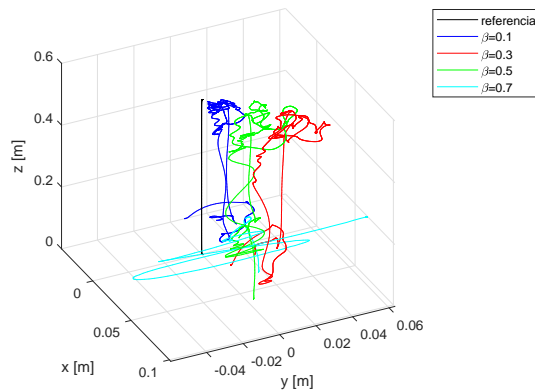


Figura 4.66: Vuelo Suspendido sin Perturbaciones con Distintos Ordenes Fraccionales.

Los errores de posición se muestran en las Figuras 4.67–4.69, se puede observar que existe un error con una cota en valor absoluto de aproximadamente 10cm, en las direcciones “x” y “y”, en la dirección z es mayor del orden de 12cm, excepto para  $\beta = 0.7$  el cual es un experimento fallido; a pesar de no haber perturbaciones. Aún así el error es pequeño y se obtiene un buen desempeño de la plataforma experimental con el esquema de control utilizado.

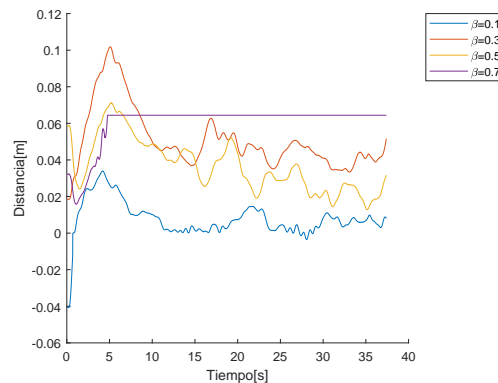


Figura 4.67: Errores en x Vuelo Suspendido sin Perturbaciones.

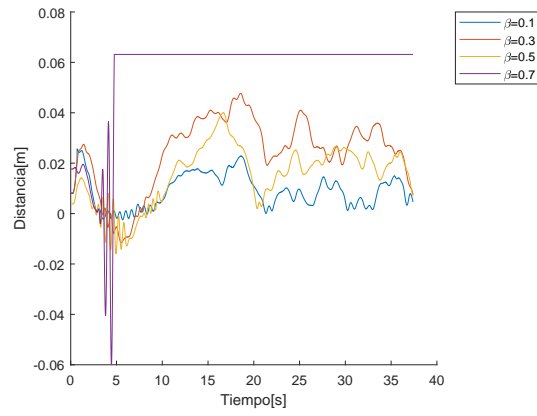


Figura 4.68: Errores en y Vuelo Suspendido sin Perturbaciones.

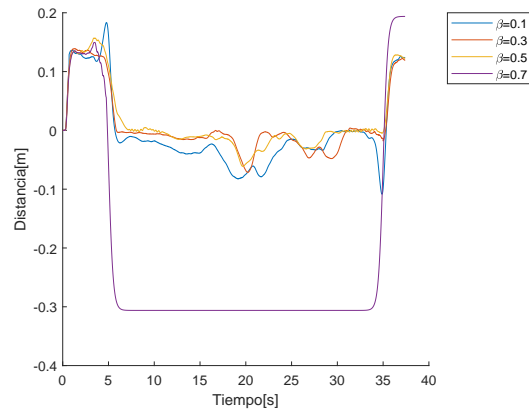


Figura 4.69: Errores en z Vuelo Suspendido sin Perturbaciones.

Los errores en ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.70–4.72. Nótese que los errores son pequeños, excepto cuando  $\beta = 0.7$ , precisamente con este orden fraccional falla y solo se tienen unos pocos segundos del experimento.

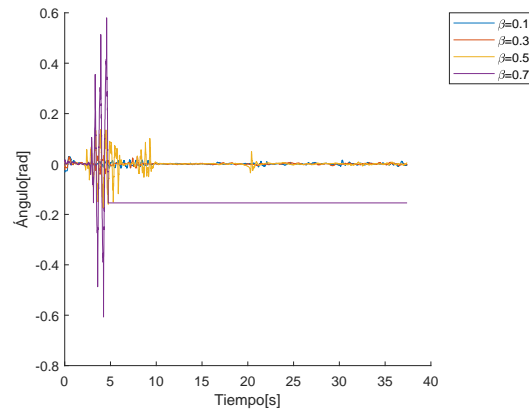


Figura 4.70: Errores en  $\phi$  Vuelo Suspendido sin Perturbaciones.

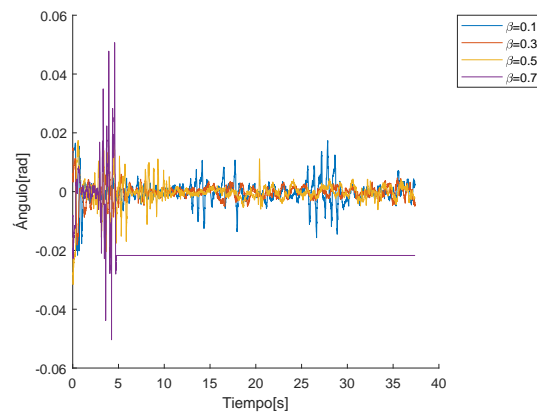


Figura 4.71: Errores en  $\theta$  Vuelo Suspendido sin Perturbaciones.

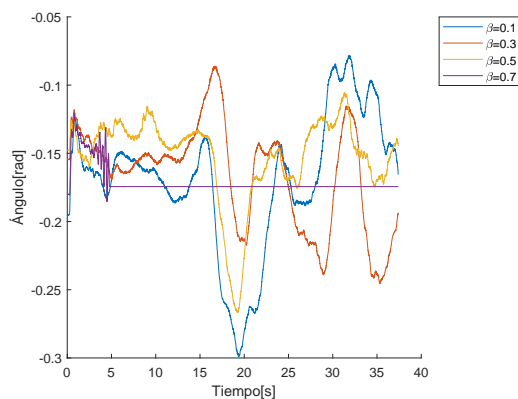


Figura 4.72: Errores en  $\psi$  Vuelo Suspendingo sin Perturbaciones.

Tabla 4.15: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendingo Sin Perturbaciones Experimentos

Órden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0090	0.0091	0.0451	0.0033	0.0025	0.1684
0.3	0.0508	0.0255	0.0343	0.0029	0.0016	0.1650
0.5	0.0365	0.0167	0.0346	0.0093	0.0023	0.1515
0.7	0.0602	0.0570	0.2649	0.1446	0.0198	0.1705

Un experimento con la trayectoria tipo vuelo suspendingo sin perturbaciones fue llevada acabo con el esquema CERD, para realizar una comparación, sin embargo este es un experimento fallido, debido a que con este esquema no logra despegar el cuadrirotor. En la Figura 4.73, se puede observar unos segundos del experimento con CERD.

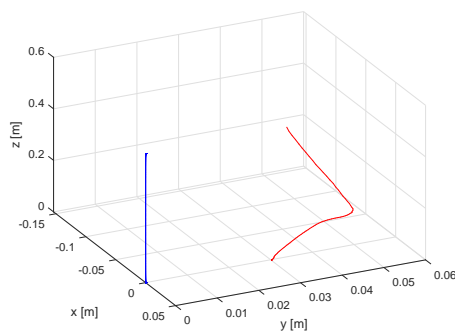


Figura 4.73: Vuelo Suspendingo sin Perturbaciones con CERD.



La señal de control  $u_1$  (empuje vertical) se muestra en la Figura 4.74 (a), y se puede observar que el castaño va aumentando conforme va aumentando el orden fraccional. En la misma Figura 4.74 (b), se muestra el empuje vertical con el esquema CERD, como se puede observar solo se muestran 1.2 segundos del experimento, esto es porque es fallido, utilizando los mismos parámetros del CFRD, el CERD falla.

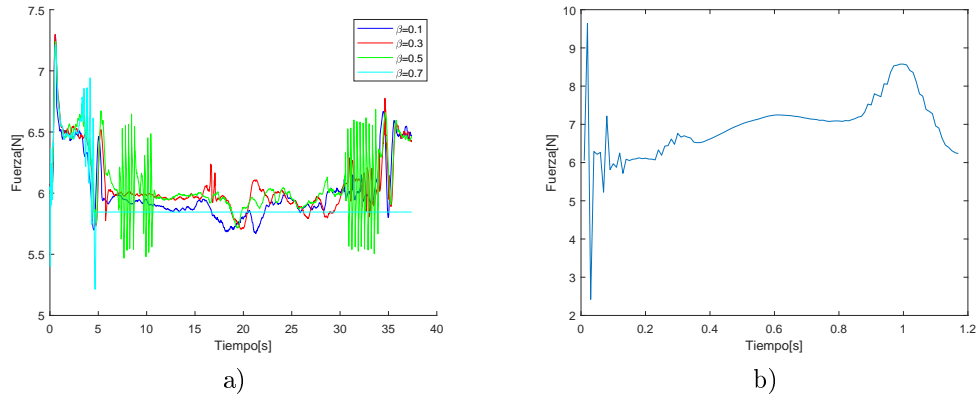


Figura 4.74: a) Empuje Vertical con CFRD b)Empuje Vertical con CERD.

#### 4.8.2. Experimentos con Perturbación tipo Viento

El siguiente conjunto de experimentos consiste en la trayectoria tipo vuelo suspendido, y se aplica ahora una perturbación que hace las veces de ráfagas de viento, que actúan principalmente en el eje  $y$  del cuadricóptero, esto se logró con un ventilador. En la Figura 4.75 se muestran los experimentos para tres órdenes fraccionales  $\beta = 0.1, \beta = 0.3$  y  $\beta = 0.5$ , para órdenes fraccionales mayores el experimento falla, como también los hace el experimento con CERD y este tipo de perturbación.

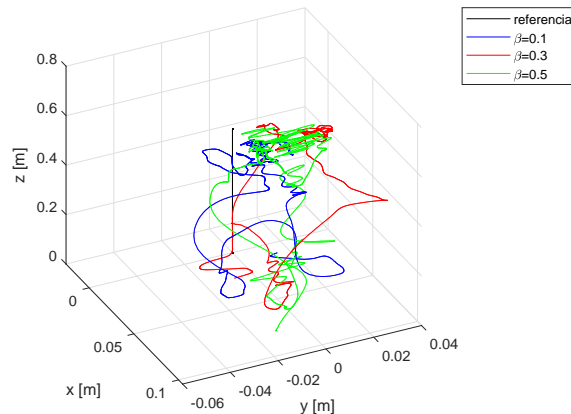


Figura 4.75: Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Viento con Distintos Ordenes Fraccionales.

Los errores de posición para el conjunto de experimentos con trayectoria tipo vuelo suspendido y perturbación tipo viento se muestran en las Figuras 4.76–4.78. Los errores en la dirección “x” tienen una cota de 4cm, mientras que en la dirección “y” se encuentran en 10cm, respecto a la dirección “z”, se puede observar que se alcanza un mejor desempeño cuando  $\beta = 0.3$ .

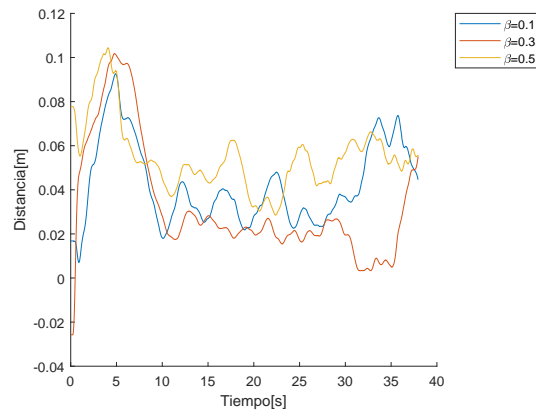


Figura 4.76: Errores en x Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento.

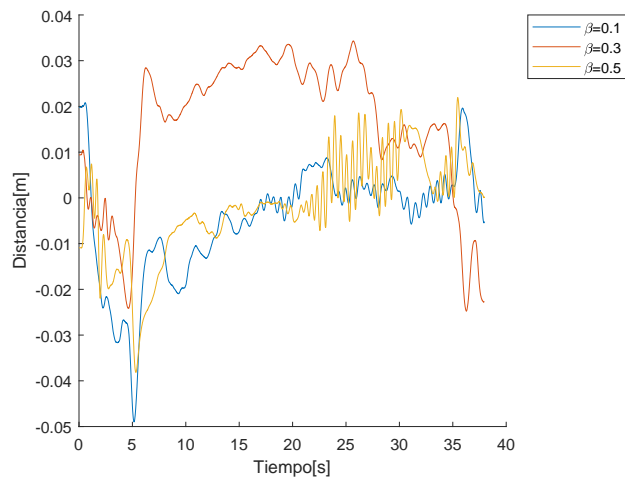
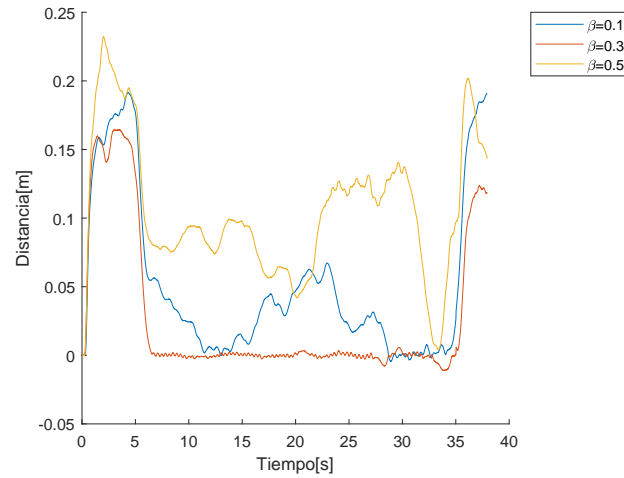
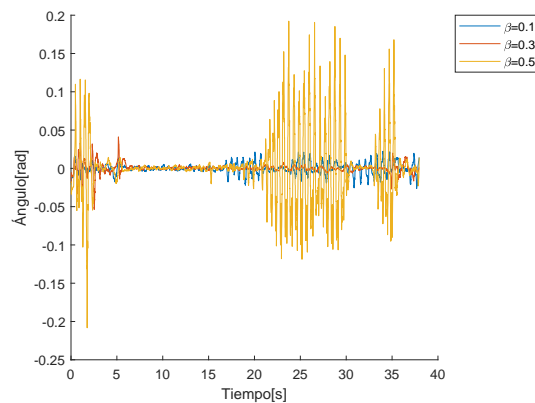


Figura 4.77: Errores en y Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento.

Figura 4.78: Errores en  $z$  Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento.

Los errores en ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.79–4.81, se puede observar que éstos son muy pequeños. Además para  $\beta = 0.5$  tienen un comportamiento peor, en particular para el ángulo  $\phi$ .

Figura 4.79: Errores en  $\phi$  Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Viento.

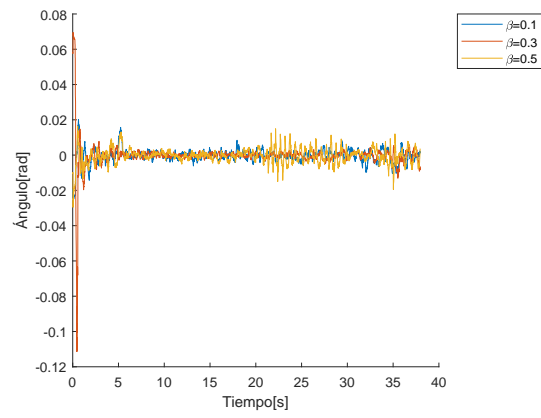


Figura 4.80: Errores en  $\theta$  Vuelo Suspenso con Perturbación Tipo Viento.

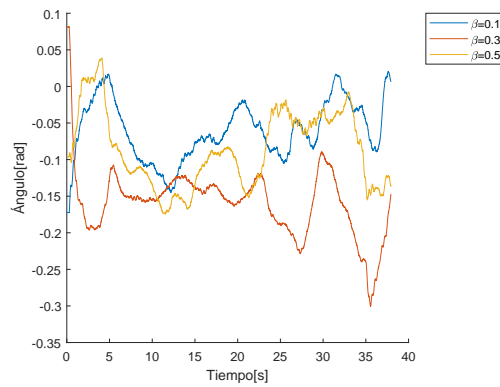


Figura 4.81: Errores en  $\psi$  Vuelo Suspenso con Perturbación Tipo Viento.

Tabla 4.16: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Viento

Órden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0424	0.0089	0.0524	0.0050	0.0025	0.0625
0.3	0.0334	0.0202	0.0285	0.0032	0.0026	0.1605
0.5	0.0550	0.0081	0.1053	0.0217	0.0029	0.0883

La señal de control  $u_1$ , conocida como empuje vertical, se muestra en la Figura 4.82. Nótese que existe castaño indeseable en estas señales, en particular para  $\beta = 0.3$  este es más grande, se obtuvo un mejor desempeño en el error en la dirección “z”, sin embargo el precio se observa en esta señal de control.

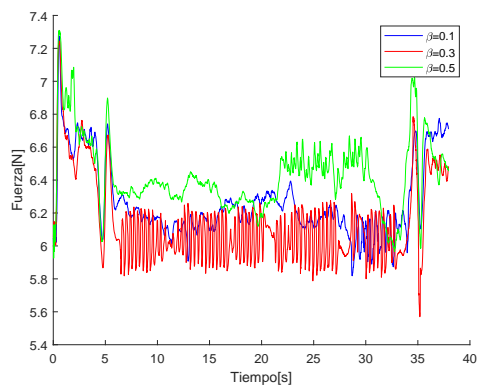


Figura 4.82: Empuje Vertical con Perturbación tipo Viento con CFRD.

### 4.8.3. Experimentos con Perturbación tipo Carga

El siguiente conjunto de experimentos se realizó, al aplicar una perturbación tipo carga, esto es al aplicar una carga de 130 gramos en uno de los brazos, la carga máxima que puede levantar el cuadrirotor es de 200 gramos, por lo tanto estamos aplicando una perturbación al 65 %, esta carga se aplicó en uno de los brazos del eje yB. En la Figura 4.83, se puede observar una gráfica 3D de los experimentos.

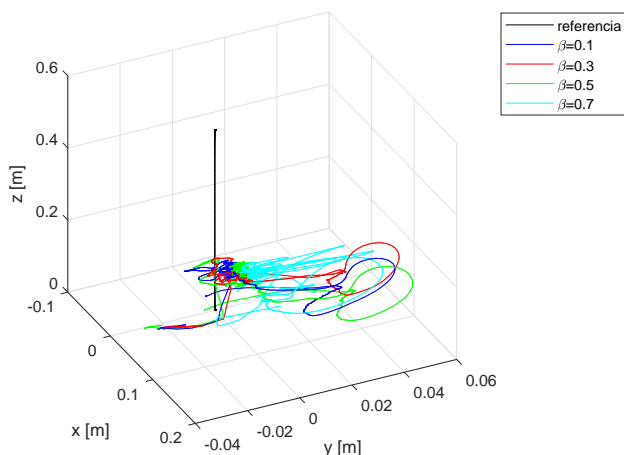


Figura 4.83: Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Carga con Distintos Ordenes Fraccionales.

En las Figuras 4.84–4.86 se muestran los errores de posición. Nótese que en este conjunto de experimentos el orden fraccional  $\beta = 0.7$  fue exitoso, y además los errores son más grandes que los anteriores, tanto así que en la dirección “z”, no logra llegar a la referencia de 40cm y el error es bastante grande, solo logra elevarse 10cm.

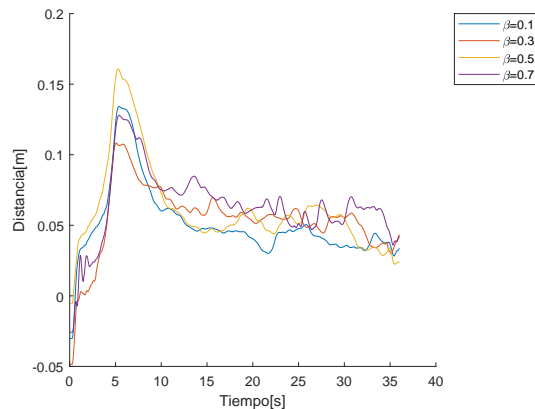


Figura 4.84: Errores en x Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga.

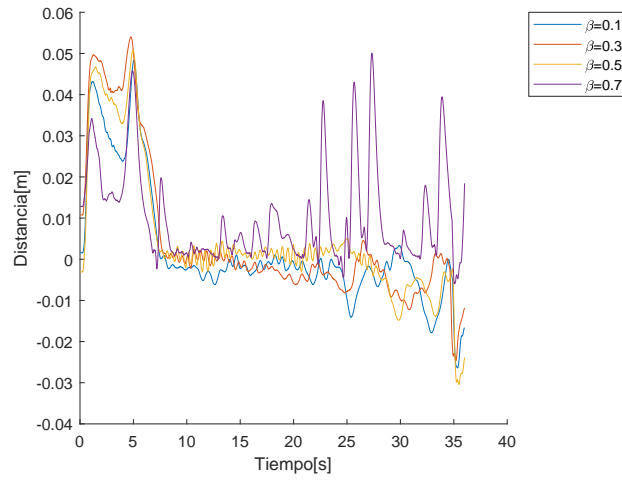


Figura 4.85: Errores en y Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga.

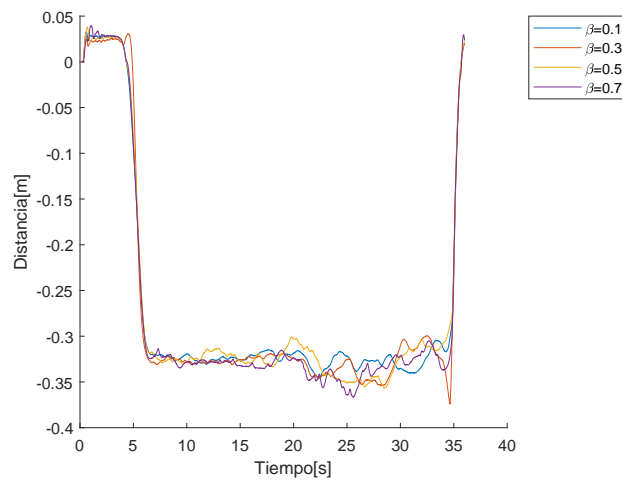


Figura 4.86: Errores en z Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga.

Los errores en ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.87–4.89. Nótese que estos errores son más grandes que los mostrados en experimentos anteriores.

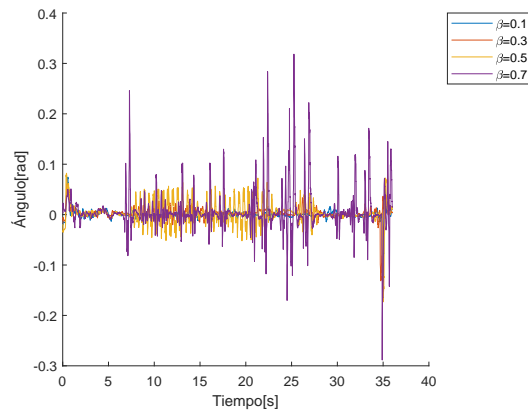


Figura 4.87: Errores en  $\phi$  Vuelo Suspendingo con Perturbación Tipo Carga.

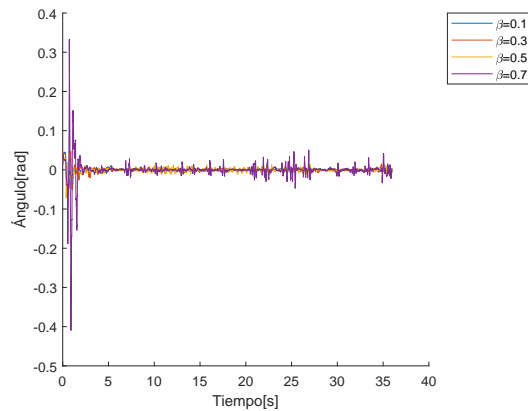


Figura 4.88: Errores en  $\theta$  Vuelo Suspendingo con Perturbación Tipo Carga.



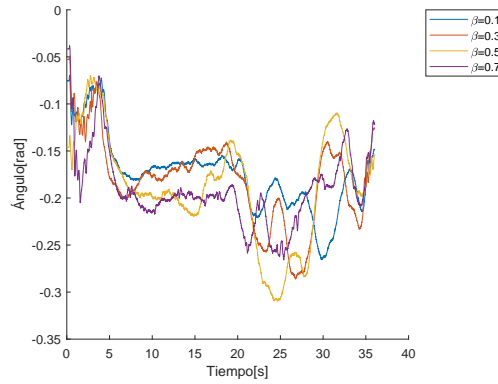
Figura 4.89: Errores en  $\psi$  Vuelo Suspendido con Perturbación Tipo Carga.

Tabla 4.17: Promedio absoluto de los errores Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Carga

Órden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0518	0.0093	0.2720	0.0047	0.0024	0.1732
0.3	0.0557	0.0109	0.2748	0.0069	0.0031	0.1798
0.5	0.0613	0.0098	0.2726	0.0138	0.0036	0.1873
0.7	0.0650	0.0104	0.2776	0.0203	0.0078	0.1907

Para comparar con el orden entero, se realizó un experimento con la perturbación tipo carga, sin embargo este experimento es fallido, aún así se muestra parte del experimento el cual falla a los 3 segundos, en la Figura 4.90, se puede observar parte del experimento.

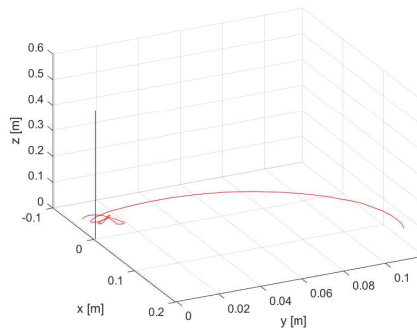


Figura 4.90: Vuelo Suspendido con Perturbación tipo Carga con CERD.

La señal de control  $u_1$  se muestra en la Figura 4.91. Nótese que a pesar de aplicar una perturbación grande, como es la carga de 130 gramos, el desempeño del control es el mejor mostrado hasta ahora, debido a que no existe un castaño indeseable grande y a pesar que no se sigue la referencia a la perfección, de alguna manera la presencia de la perturbación ayuda a que el control entre en acción y trate de compensarla.

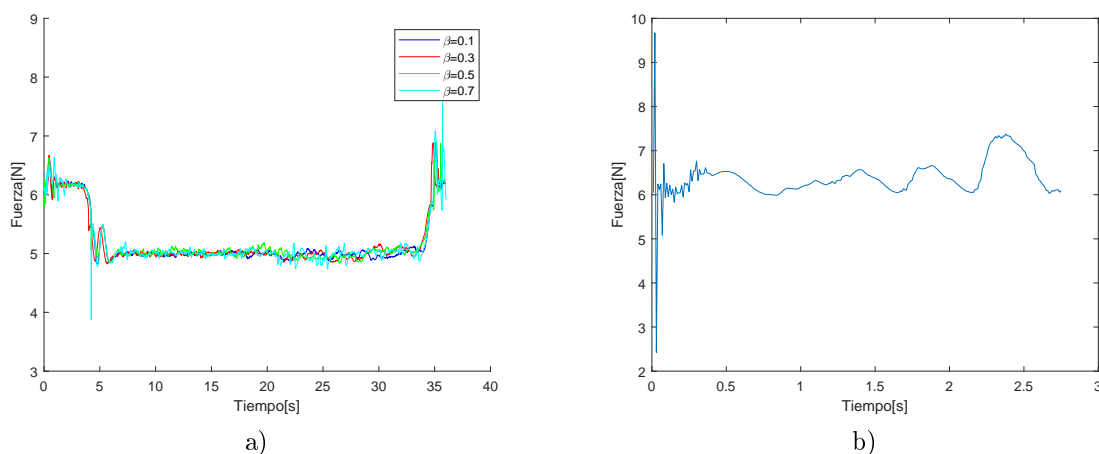


Figura 4.91: a) Empuje Vertical con Perturbación tipo Carga con CFRD b)Empuje Vertical con Perturbación tipo Carga con CERD.

## 4.9. Experimentos con Trayectoria tipo Lemniscata

Los siguientes experimentos fueron hechos con una trayectoria tipo Lemniscata, descrita por las ecuaciones (4.6)–(4.8). Se darán un conjunto de experimentos sin perturbaciones, con perturbación tipo viento y con perturbación tipo carga.

### 4.9.1. Experimentos con Sin Perturbaciones

El siguiente conjunto de experimentos es sin perturbaciones, se probaron distintos órdenes fraccionales  $\beta = 0.1, \beta = 0.3, \beta = 0.5$  y  $\beta = 0.7$ , sin embargo para este último orden fraccional el experimento falla. En la Figura 4.92 se puede observar la gráfica en el espacio del conjunto de experimentos en cuestión.

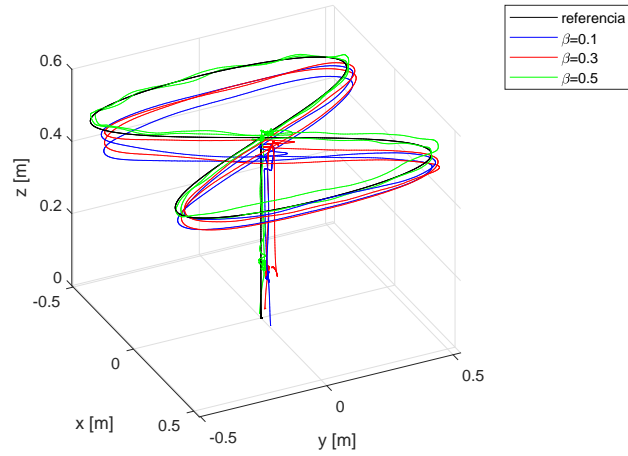


Figura 4.92: Lemniscata sin Perturbaciones con Distintos Ordenes Fraccionales.

Los errores en posición se muestran en las Figuras 4.93–4.95. Nótese que los errores están en una cota de alrededor de 10cm para las direcciones “x” y “y”, y de 15cm para la dirección “z”, a pesar de existir un error la trayectoria de referencia es seguida de la mejor manera posible.

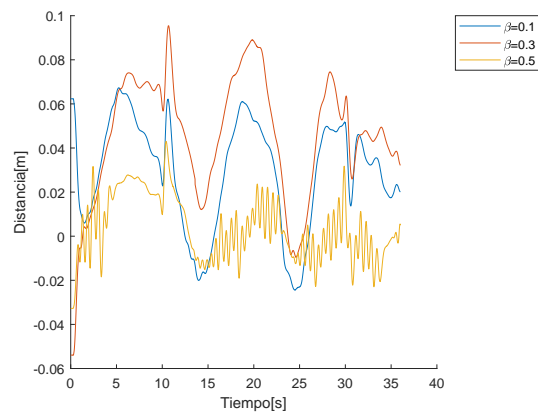


Figura 4.93: Errores en x Lemniscata sin Perturbaciones.

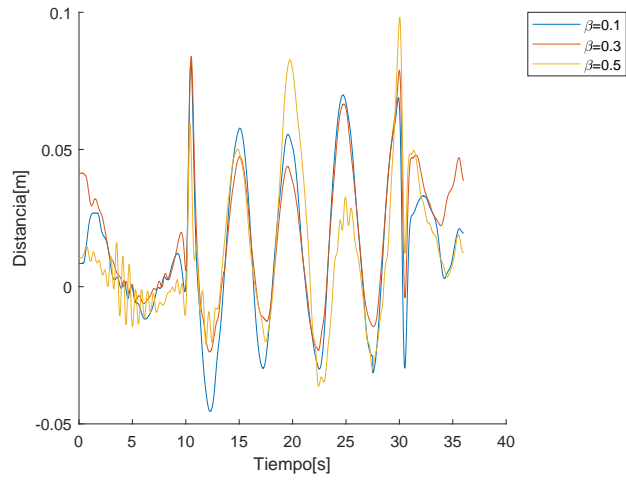


Figura 4.94: Errores en y Lemniscata sin Perturbaciones.

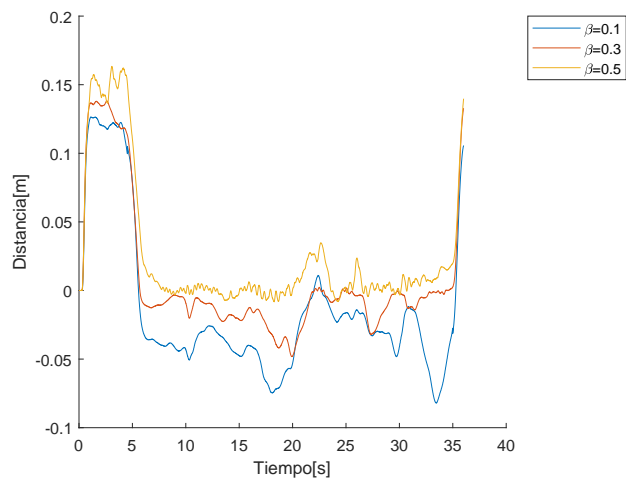


Figura 4.95: Errores en z Lemniscata sin Perturbaciones.

Los errores en ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.96–4.98. Nótese que estos errores se encuentran dentro de una cota de error absoluto de 0.3 radianes para  $\phi, \theta$  y  $\psi$ , también se puede observar que para  $\phi$  y  $\theta$  existe más variación, esto es porque el CFRD está actuando directamente en los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$ .

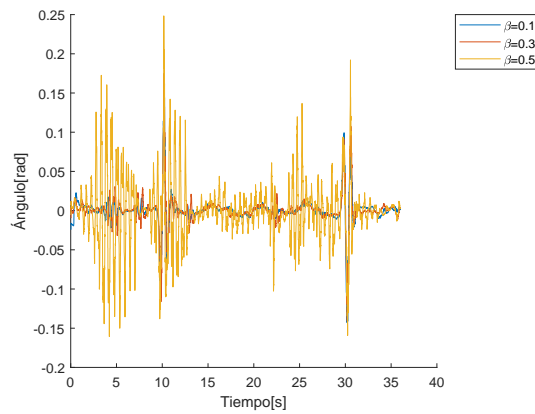


Figura 4.96: Errores en  $\phi$  Lemniscata sin Perturbaciones.

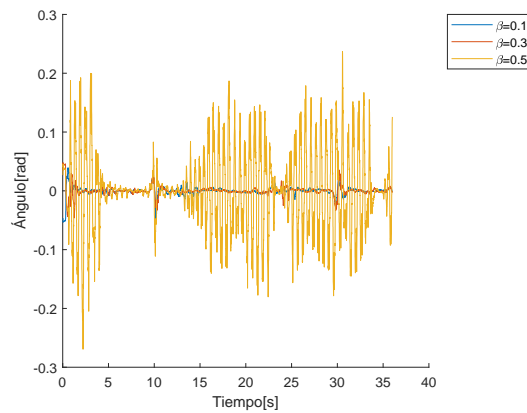


Figura 4.97: Errores en  $\theta$  Lemniscata sin Perturbaciones.

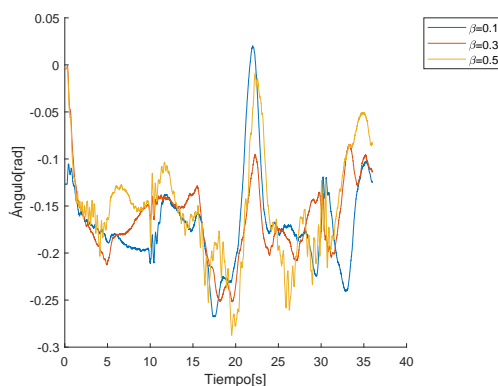
Figura 4.98: Errores en  $\psi$  Lemniscata sin Perturbaciones.

Tabla 4.18: Promedio absoluto de los errores Lemniscata Sin Perturbaciones

Orden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0317	0.0198	0.0479	0.0080	0.0037	0.1688
0.3	0.0467	0.0207	0.0321	0.0083	0.0040	0.1622
0.5	0.0109	0.0168	0.0307	0.0253	0.0496	0.1509

La señal de control  $u_1$  se muestra en la Figura 4.99. Nótese que con el orden fraccional  $\beta = 0.5$  ya aparece el castaño indeseable propio del control por regímenes deslizantes. Sin embargo para los órdenes fraccionales  $\beta = 0.1$  y  $\beta = 0.3$  este castaño indeseable es pequeño.

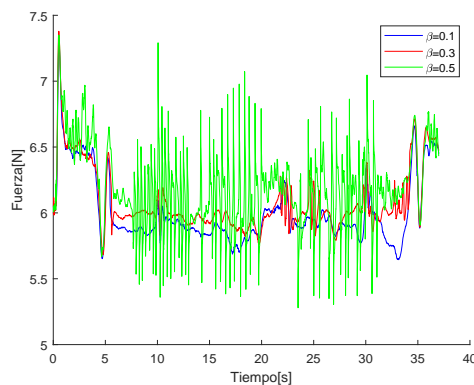


Figura 4.99: Empuje Vertical con Lemniscata con CFRD

### 4.9.2. Experimentos con Perturbación tipo Viento

El siguiente conjunto de experimentos se realizó introduciendo una perturbación tipo Viento en toda la trayectoria. Esta perturbación consiste en un ventilador que simula ráfagas de viento, principalmente en el eje yB del cuadrirotor. En la Figura 4.100 se puede observar la evolución del experimento en el espacio, esto es el seguimiento de trayectoria tipo lemniscata.

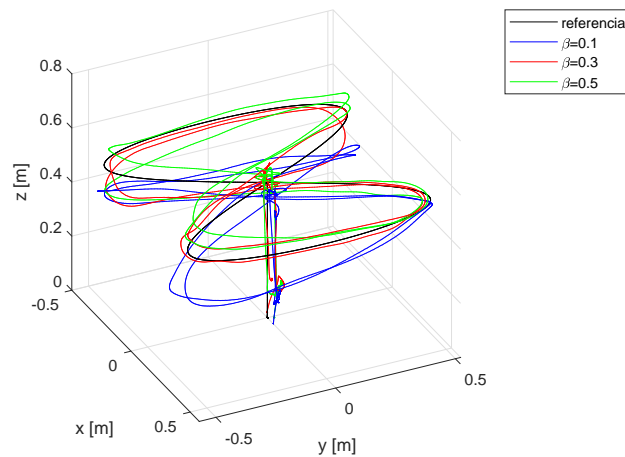


Figura 4.100: Lemniscata con Perturbación tipo Viento con Distintos Ordenes Fraccionales.

El error en posición se muestra en las Figuras 4.101–4.103. Nótese que los errores están acotados en valor absoluto de 12 cm en la dirección “x”, 6cm en la dirección “y”, y 15cm en la dirección “z”, también se puede observar que el mejor desempeño se obtiene cuando  $\beta = 0.3$ .

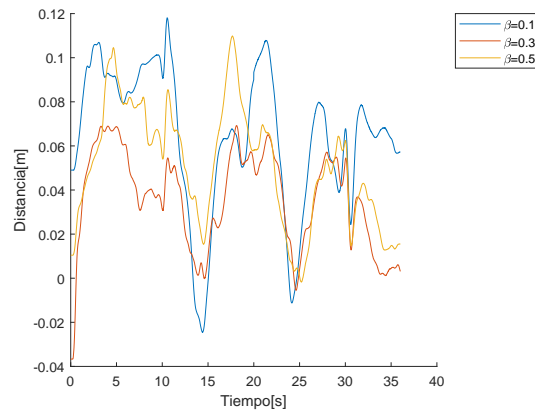


Figura 4.101: Errores en x Lemniscata con Perturbación tipo Viento.

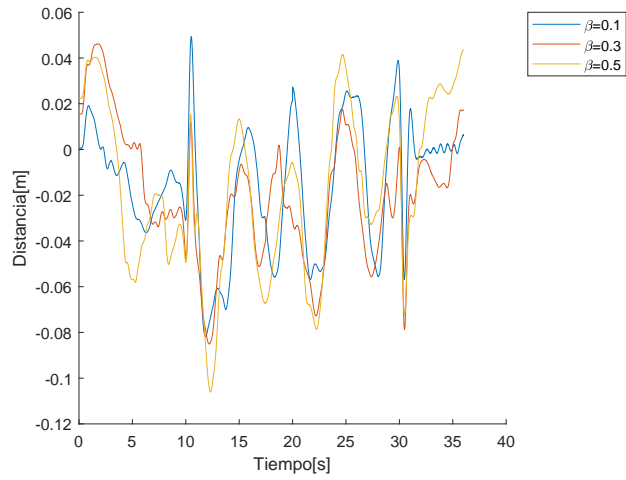


Figura 4.102: Errores en y Lemniscata con Perturbación tipo Viento.

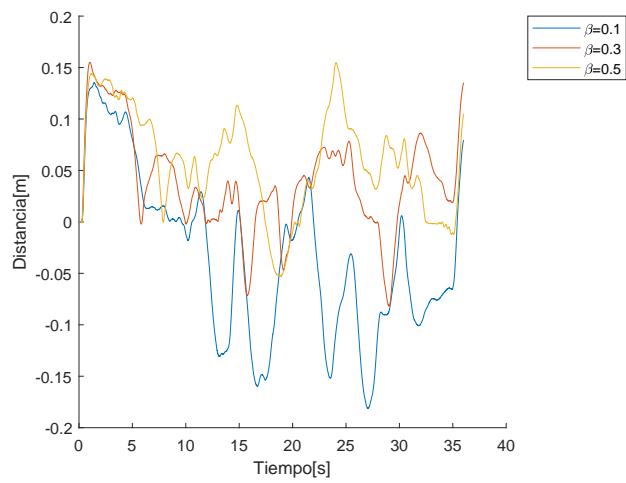


Figura 4.103: Errores en z Lemniscata con Perturbación tipo Viento.



Los errores en ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.104–4.106. Nótese que estos errores son pequeños y que además no exceden una cota en error absoluto de 0.2 radianes. También se puede observar que el mejor desempeño se obtiene cuando  $\beta = 0.3$ .

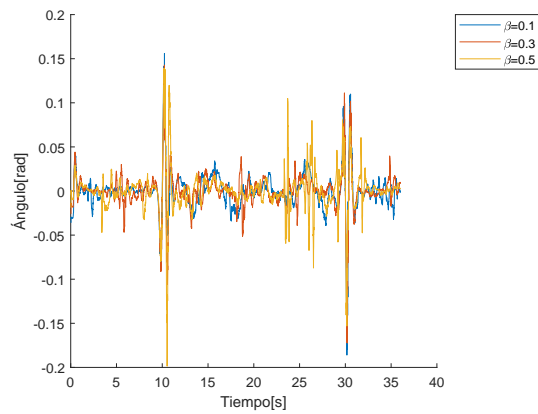


Figura 4.104: Errores en  $\phi$  Lemniscata con Perturbación tipo Viento.

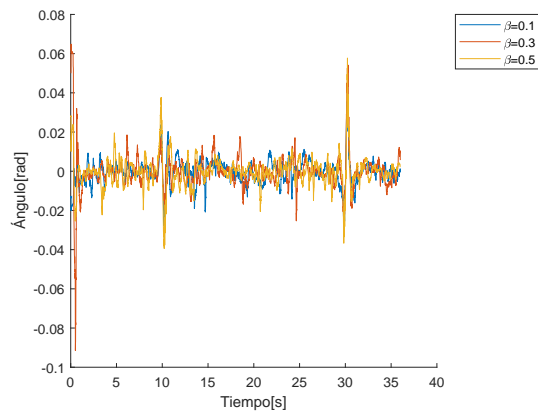


Figura 4.105: Errores en  $\theta$  Lemniscata con Perturbación tipo Viento.

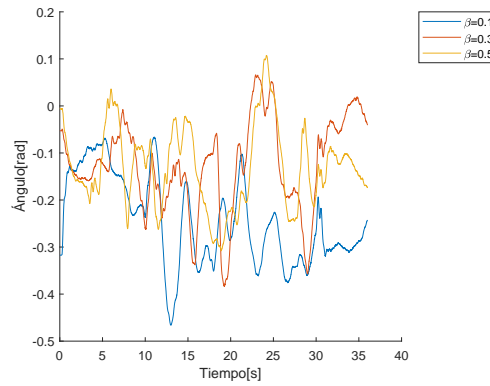


Figura 4.106: Errores en  $\psi$  Lemniscata con Perturbación tipo Viento.

Tabla 4.19: Promedio absoluto de los errores Lemniscata con Perturbación tipo Carga

Órden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0658	0.0215	0.0693	0.0126	0.0043	0.2449
0.3	0.0368	0.0273	0.0497	0.0117	0.0053	0.1305
0.5	0.0508	0.0313	0.0645	0.0130	0.0049	0.1356

La señal de control  $u_1$  se muestra en la Figura 4.107. Nótese que aunque existe algo de castaño este no es tan marcado como en la simulación sin perturbaciones (véase la Figura 4.99).

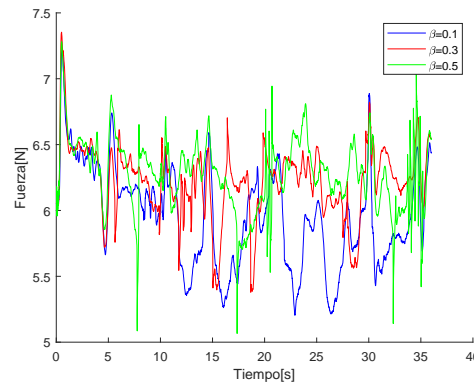


Figura 4.107: Empuje Vertical con Perturbación tipo Viento con CFRD

### 4.9.3. Experimentos con Perturbación tipo Carga

Los siguientes experimentos se realizaron aplicando una perturbación tipo carga durante toda la trayectoria, esto es una carga de 130 gramos colocada a 8cm del centro del cuadrirotor y en uno de los brazos del eje  $y_B$ , esta carga se consiguió con un candado. En la Figura 4.108 se muestra la trayectoria seguida en el espacio.

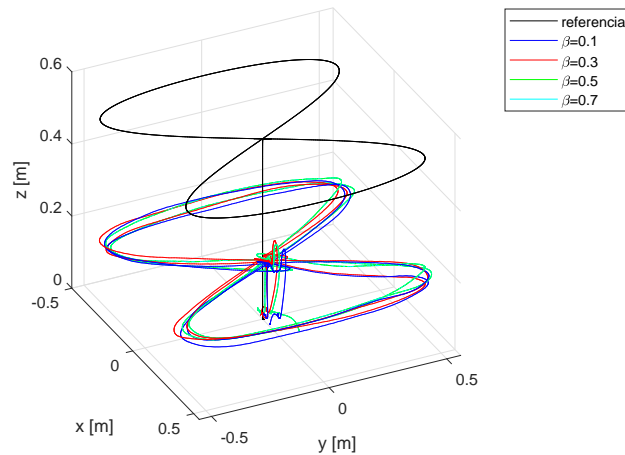


Figura 4.108: Lemniscata con Perturbación tipo Carga con Distintos Ordenes Fraccionales.

Los errores en posición se muestran en la Figura 4.109–4.111. Nótese que estos errores son más grandes que los de experimentos anteriores (véase Figuras 4.93–4.95 y 4.101–4.103), se tiene una cota en error absoluto de 15cm en la dirección “x”, 8cm en la dirección “y”, y 35cm en la dirección “z”. Debido a la carga grande impuesta al cuadrirotor, éste no alcanza a levantarse más allá de los 10cm.

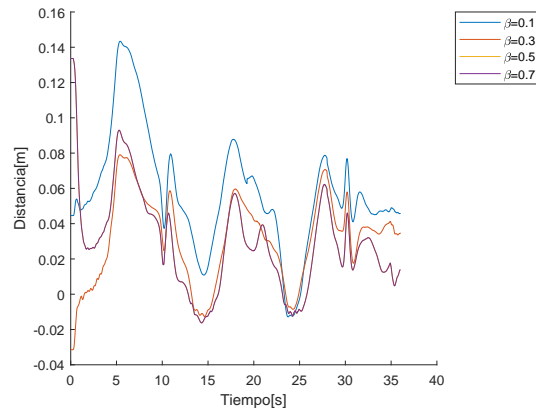


Figura 4.109: Errores en x Lemniscata con Perturbación tipo Carga.

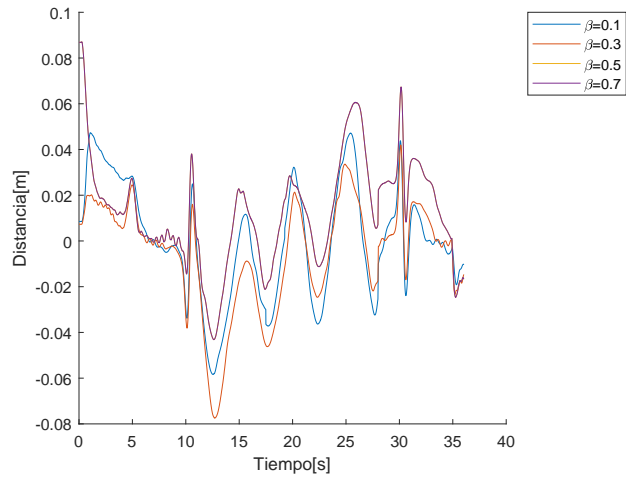


Figura 4.110: Errores en y Lemniscata con Perturbación tipo Carga.

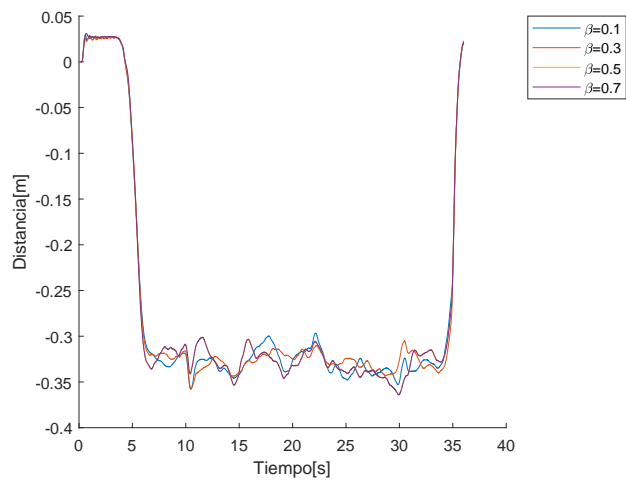


Figura 4.111: Errores en z Lemniscata con Perturbación tipo Carga.

Los errores en ángulos de Euler se muestran en las Figuras 4.112–4.114. Nótese que estos son pequeños, con una cota en error absoluto de 0.4 radianes en los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , y 0.15 radianes para  $\psi$ , también se puede observar más variación en los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , esto es porque el CFRD está actuando en estos ángulos.

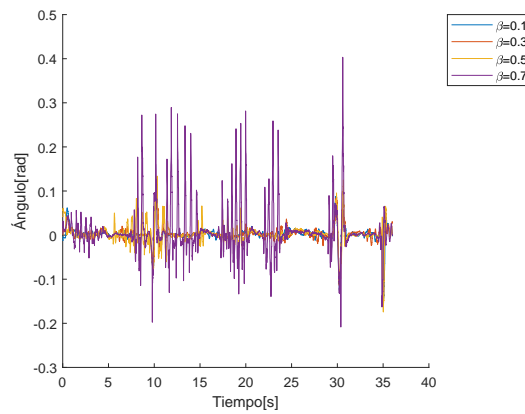


Figura 4.112: Errores en  $\phi$  Lemniscata con Perturbación tipo Carga.

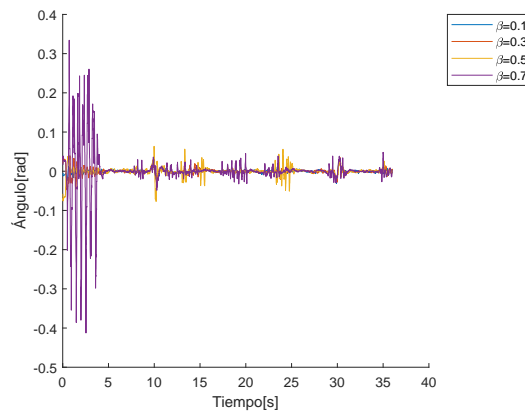


Figura 4.113: Errores en  $\theta$  Lemniscata con Perturbación tipo Carga.

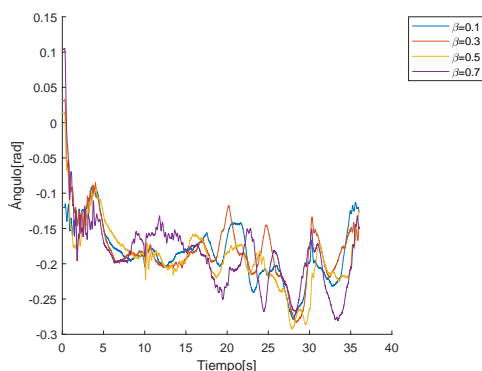
Figura 4.114: Errores en  $\psi$  Lemniscata con Perturbación tipo Carga.

Tabla 4.20: Promedio absoluto de los errores Lemniscata con Perurbación tipo Carga

Órden Fraccional $\beta$	$x$	$y$	$z$	$\phi$	$\theta$	$\psi$
0.1	0.0586	0.0178	0.2745	0.0086	0.0029	0.1838
0.3	0.0336	0.0162	0.2734	0.0099	0.0042	0.1789
0.5	0.0318	0.0198	0.2742	0.0125	0.0059	0.1896
0.7	0.0318	0.0198	0.2742	0.0257	0.0163	0.1887

La señal de control  $u_1$ , mejor conocida como empuje vertical se muestra en la Figura 4.115. Nótese que no existe gran castaño, como sí lo había en el experimento sin perturbaciones (véase la Figura 4.99), de hecho es una señal limpia a pesar de aplicar una perturbación grande, la explicación a este fenómeno es que tan pronto como se detecta la perturbación, el control empieza a actuar y trata de compensarla, con lo cual se obtiene un mejor desempeño que cuando no hay perturbación.

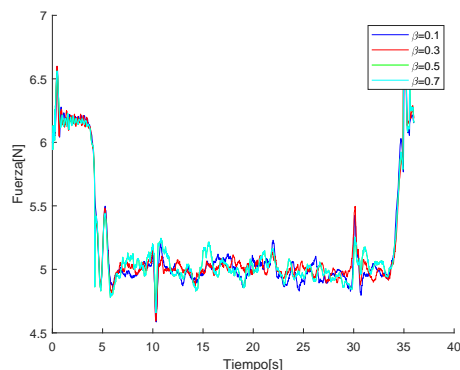


Figura 4.115: Empuje Vertical Lemniscata con Perturbación tipo Carga con CFRD

## 4.10. Discusión de los Resultados Experimentales

Los resultados experimentales presentados en este capítulo, muestran dos características del CFRD, estas son por una parte la disminución del castaño indeseable en la señal de control del empuje vertical, para órdenes fraccionales  $\beta \leq 0.5$ , para el otro orden fraccional que se probó de  $\beta = 0.7$ , empieza a ser presente el castaño indeseable propio del control por regímenes deslizantes o incluso falla el experimento con ese orden fraccional. La otra característica mostrada es que el CFRD funciona mejor con perturbaciones, ya sean tipo viento o tipo carga, esto es porque tan pronto la perturbación es detectada el CFRD empieza actuar, intentando compensarla y es aquí dónde se puede ver como trabaja el CFRD, principalmente al observar la gráfica del empuje vertical.

Se comparan las Tablas 4.15 con 4.19 y 4.20, se puede observar que el menor se obtiene con  $\beta = 0.1$ , sin embargo cabe mencionar que con  $\beta = 0.3$  también se obtiene un buen desempeño. Este resultado corresponde a la trayectoria tipo vuelo suspendido. Para la trayectoria tipo lemniscata ocurre algo similar, si se comparan las Tablas 4.18 con 4.19 y 4.20, se puede observar que el menor se obtiene con  $\beta = 0.1$ , sin embargo cabe mencionar que con  $\beta = 0.3$  en el experimento con perturbación tipo carga, se obtiene un mejor desempeño que en los demás casos, excepto para la dirección “z”. También cabe mencionar que la perturbación tipo carga es una perturbación que afecta al centro de masa del cuadrirotor y las inercias de éste, por lo tanto se afecta directamente la dirección “z”, esto se puede analizar, al revisar las ecuaciones del modelado del cuadrirotor, al afectar las ecuaciones de los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  (ecuaciones (3.36) y (3.37)), se afecta a la ecuación (3.35) de la dinámica de “z”; es por ello que se obtiene un resultado tan pobre en la dirección “z” para los experimentos con perturbación tipo carga, también cabe mencionar que no se realizó una prueba de estabilidad para este tipo de perturbaciones.

Respecto a la comparación con el CERD, se tienen pocos datos de estos experimentos, debido a que la mayoría son fallidos, incluso cuando no se presentó algún resultado en CERD no quiere decir que no se haya llevado a cabo el experimento, sino que precisamente falla. Lo único que podemos decir respecto al CERD en estos resultados experimentales, es que en la mayoría de los casos falla, no fue así en los resultados en simulación numérica en donde se tenían los datos suficientes para hacer una comparación.

Además podemos decir que el CFRD, tiene un buen desempeño en experimentos con un cuadrirotor real, esto es que cumple con las funciones básicas de un cuadrirotor, las cuales son, despegue, vuelo suspendido, seguimiento de trayectorias y aterrizaje.





## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones.

Las conclusiones a las que se llegaron en el presente trabajo se presentan en los siguientes puntos:

- Un control de orden fraccional por regímenes deslizantes (CFRD) fue propuesto para el control de seguimiento de trayectoria de un sistema no lineal de segundo orden con un término de perturbación desconocido. Dicho esquema de control fue implementado en resultados de simulación numérica y experimentales, los cuales muestran que el CFRD tiene un buen desempeño en las funciones básicas del cuadrirotor, las cuales son despegue, vuelo suspendido, seguimiento de trayectorias y aterrizaje.
- Una condición suficiente fue dada para asegurar la atracción de la superficie deslizante donde el seguimiento de trayectoria es realizado. La condición suficiente encontrada permite ajustar dos parámetros ( $\sigma_\chi$  y  $\mu_\chi$ ) del CFRD, para poder asegurar la atracción a la superficie deslizante propuesta.
- La metodología CFRD fue implementada al modelo dinámico del cuadrirotor para el seguimiento de trayectorias. Se obtuvieron resultados en simulación numérica, además de una comparación con CERD, la cual muestra que para órdenes fraccionales  $\beta \leq 0.5$ , el CFRD muestra una disminución del castaño indeseable propio del control por regímenes deslizantes.
- También se obtuvieron resultados experimentales, los cuales muestran el buen desempeño del esquema CFRD aplicado al seguimiento de trayectoria de un cuadrirotor. Una comparación con el CERD fallida fue implementada en los experimentos, precisamente los experimentos fallidos con el esquema CERD, muestran que con los mismos parámetros de un CFRD, el esquema CERD falla, mientras que el CFRD no lo hace para valores del orden fraccional  $\beta \leq 0.5$ .
- Los resultados tanto en simulación numérica como en los experimentos, muestran cierto error en posición y ángulos de Euler, incluso sin perturbaciones presentes.

Se podría pensar que los errores no converjen a cero, sin embargo con resultados sin perturbaciones se obtuvo un error menor que aquél con perturbaciones presentes. Además en particular para el resultado experimental con perturbación tipo carga el error fue mucho mayor, sin embargo aún así el CFRD logró realizar la trayectoria propuesta, aún con el error grande en la dirección  $z$ .

- El esquema CFRD representó un reto, debido a que se tuvo que aplicar una derivada fraccional a una función que no es suave, esto es al término discontinuo (función signo) que aparece en el control. Cabe mencionar que la función signo utilizada no es la convencional, sino que se utilizó una versión suavizada que involucra un  $\epsilon$ , además esta versión de la función signo, le asigna un valor a la función cuando está en cero, dependiendo de si su argumento se acerca a cero por la izquierda o por la derecha. Este valor que da la función signo, es el que hace posible que se pueda aplicar una derivada fraccional a dicha función, en particular se utilizó el método numérico de Grünwald-Letnikov.
- La ventaja que se obtiene con el esquema CFRD, es principalmente la reducción del castaño indeseable en las señales de control, cabe mencionar que esta reducción de castaño puede lograrse con otras técnicas, tales como el uso del llamado twisting y supertwisting, así como aumentar el grado del control por modos deslizantes o incluso el uso de filtros en las señales de control. Precisamente la derivada fraccional hace las veces de un filtro que atenúa el castaño indeseable.

## 5.2. Trabajo Futuro.

Como trabajo futuro se proponen los siguientes puntos:

- Hacer una comparación amplia con distintos controladores, tales como el controlador proporcional-integral-derivativo de orden fraccional (FOPID), el controlador proporcional-derivativo de orden fraccional (FOPD), controlador proporcional-integral de orden fraccional (FOPI) y otros controladores clásicos como el PID, PI, PD y también controladores que usan la técnica de backstepping y adaptativos.
- Diseño de una ley de control, mediante la metodología CFRD, para un cambio de carga. Esto representa una perturbación paramétrica, que afecta a los parámetros como son la masa y las inercias del cuadricóptero. Realizar simulaciones numéricas y experimentos con esta ley de control.
- Diseño de una ley de control, mediante la metodología CFRD, tomando en cuenta perturbaciones en el lado de la dinámica del modelo que involucra a las entradas, esto es en el término  $g_x(\chi, t)u(t)$  de la ecuación (2.7). Realizar simulaciones numéricas y experimentos con esta ley de control.
- Variar los parámetros  $\sigma_\chi$  y  $\mu_\chi$ , para verificar el comportamiento del CFRD y ver con cuáles parámetros se obtiene el mejor desempeño.

- Realizar experimentación con otros parámetros para el esquema CERD y compararlo con el CFRD.
- Realizar experimentos en ambientes exteriores para probar el esquema CFRD.



# Bibliografía

- [1] Lozano R. y Pégard C. García Carrillo L.R., Dzúl López A.E. *Quad Rotorcraft Control. Vision Based Hovering and Navigation*. Springer-Verlag London, 2013.
- [2] Tlatelpa Osorio Y.E. Control para despegue y aterrizaje de un cuadirotor en presencia de momentos y fuerzas externo. Master's thesis, CINVESTAV-IPN, 2017.
- [3] V Kadamatt. How quadcopters work and fly: An intro to multirotors. <http://www.dronebee.com/how-quadcopters-work/>, Mayo 2017.
- [4] Tomic T. Schmid K. Luts P. Domel A. Kassecker M. Mair E. Grixia I.L. Ruess F. Suppa M. y Burschka D. Toward a fully autonomous uav: research platform for indoor and outdoor urban search and rescue. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 19(3):46–56, 2012.
- [5] Burman J. Hespanaha J. Madhow U. Isaacs J. Venkateswaran S. y Pham T. Autonomous uav persistent surveillance using bio-inspired strategies. *Memorias de SPIE Defense, Security, and Sensing, International Society for Optics and Photonics*, 2012.
- [6] Mahboubi Z. Kolter Z. Wang T. Bower G. y Ng A. Camera based localization for autonomous uav formation flight. *Memorias de la AIAA Infotech Conference*, 2011.
- [7] Sumano Mejía Eva. Sincronización de cuadirotores en forma coordinada. Master's thesis, CINVESTAV-IPN, 2014.
- [8] Önder Efe Mehmet. Integral sliding mode control of a quadrotor with fractional order reaching dynamics. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 33(8):985–1003, 2011.
- [9] Shantanu Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [10] Oustaloup A. From fractality to non integer derivation: A fundamental idea for a new process control strategy. *Anal. Optim. Syst.*, pages 53–64, 2006.
- [11] K. Kostial I. Podlubny, I. Dorcak. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and  $pi^{\lambda}d^{\mu}$  controllers. *In Proceedings of the Conference on*

- Decision and Control, San Diego, CA, USA, 10–12 December 1997*, pages 4985–4990, 1997.
- [12] Podlubny I. Fractional-order systems and  $pi^\lambda d^\mu$  controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999.
- [13] Lurie B.J. Three parameter tunable tilt-integral derivative (tid) controller. *US Patent, US5371 670*, 1994.
- [14] B.M. Monje C.A. Calderon, A.J. Vinagre. The fractional order lead compensator. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, pages 347–352, 2004.
- [15] M.S. Tavakoli-Kakhki M. Tavazoei. Compensation by fractional-order phase-lead/lag compensators. *IET Control Theory Appl.*, 2014.
- [16] F.M. Federico, S.F. Torres. Fractional conservation laws in optimal control theory. *Nonlinear Dyn.*, 2008.
- [17] Y.Q. Agrawal, C. Chen. An approximate method for numerically solving fractional-order optimal control problems of general. *Comput. Math. Appl.*, 2010.
- [18] Ladcai S. Charef. On fractional adaptive control. *Nonlinear Dyn.*, 2006.
- [19] N. Duarte-Mermoud M.A. Aguila-Camacho. Fractional adaptive control for automatic voltage regulator. *ISA Trans.*, pages 807–815, 2013.
- [20] Utkin V.I. *Sliding Modes in Optimization and Control Problems*. Springer, New York NY USA, 1992.
- [21] Fridman L. An averaging approach to chattering. *IEEE Trans. Autom. Control*, pages 1260–1265, 2001.
- [22] Slotine J.J.E. Li. W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Inc.: London, UK, 1991.
- [23] S. Momeni H.R. Dadras. Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2012.
- [24] S. Tamhane B. Mujumdar, A. Kurode. Fractional-order sliding mode control for single link flexible manipulator. *IEEE Int. Conf. Control Appl.*, 2013.
- [25] Tang Y.G. Zhang X. Zhang D. Zhao G. Guan X. Fractional-order sliding mode controller design for antilock braking systems. *Neurocomputing*, pages 122–130, 2013.
- [26] Tang Y.G. Wang Y. Han M.Y. Lian Q. Adaptive fuzzy fractional-order sliding mode controller design for antilock braking systems. *Neurocomputing*, 2016.

- [27] Zhang B.T. Pi Y.G. Luo Y. Fractional-order sliding mode control based on parameter auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor. *ISA Trans.*, 2012.
- [28] Aghababa M.P. A fractional-order controller for vibration suppression of uncertain structures. *ISA Trans.*, 2013.
- [29] Shao S.Y. Chen M. Yan X.H. Adaptive sliding mode synchronization for a class of fractional-order chaotic systems with disturbance. *Nonlinear Dyn.*, 2016.
- [30] Q. Shao S.Y. Chen M. Chen S.D. Wu. Adaptive neural control for an uncertain fractional-order rotational mechanical system using disturbance observer. *IET Control Theory Appl.*, 2016.
- [31] Li Changping and Zeng Fanhai. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. CRC Press Taylor and Francis Group LL, UK, 2015.
- [32] Brian P. Sprouse Christopher L. MacDonald, Nirupama Bhattacharya and Gabriel A. Silva. Efficient computation on the grünwald-letnikov fractional diffusion derivative using adaptive time step memory. *Journal of Computational Physics*, pages 221–236, 2015.
- [33] Önder Efe Mehmet Yu Xinghuo. *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*. Springer International Publishing Swtzerland, 2015.
- [34] Önder Efe Mehmet. Fractional order sliding mode control with reaching law approach. *Acad. J.*, pages 731–747, 2010.
- [35] Daniel Warren Mellinger. *Trajectory Generation and Control for Quadrotors*. PhD thesis, Universidad de Pennsylvania, 2012.
- [36] Anindya Chatterjee. Intermediate dynamics in about 100 pages. <http://home.iitk.ac.in/~anindya/bk123.pdf>, Noviembre 2014.
- [37] D. Reinoso M. Minchala L.I. Ortiz, J.P. Astudillo D. Verdugo. Trajectory tracking of a quadrotor using sliding mode control. *IEEE Latin Am. Trans.*, pages 2157–2166, 2016.
- [38] Zhihao Cheng Zhiqiang Ma Guanghui Sun and Hanlin Dong. Fractional order sliding mode control for attitude and altitude stabilization of a quadrotor uav. *IEEE Chinese Automation Congress (CAC)*, pages 2651–2656, 2017.
- [39] Guadarrama-Olvera J.R. Corona-Sánchez J.J. Rodríguez-Cortés H. Hard real-time implementation of nonlinear controller for the quadrotor helicopter. *J. Intell. Robot. Syst.*, pages 81–97, 2013.
- [40] N. Andrew. *Linear and Non-Linear Control of a Quadrotor UAV*. PhD thesis, All Theses, 2017.





# Apéndice A

## Artículos Publicados

En este apéndice se mencionan los artículos aceptados en dos foros.

### A.1. IASTED

Govea-Vargas A., Castro-Linares R., Aguila-Camacho N. y Duarte-Mermoud M.A.; "Fractional Order Sliding Mode Control of a Quadrotor"; *IASTED*; The International Conference on Modelling, Simulation and Identification (MSI 2018); Calgary, Canada; Julio 16-17, 2018; 857-023. DOI: 10.2316/P.2018.857-023

### A.2. Algorithms

Govea-Vargas A., Castro-Linares R., Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A. y Ceballos-Benavides G.E.; "Fractional Order Sliding Mode Control of a Class of Second Order Perturbed Nonlinear Systems: Application to the Trajectory Tracking of a Quadrotor"; *Algorithms*; Special Issue: Fractional Order Systems and Signals: Modelling, Identification and Control Applications; Octubre 2018; 11(11),168. DOI:10.3390/a11110168



## Apéndice B

# Derivada Fraccional mediante Grünwald-Letnikov

En este apéndice se muestra el código en MATLAB de la definición 2.3 y 2.4, también se muestra su aplicación en el cálculo de la derivada fraccional de la función  $\sin(t)$ , se proporciona el tiempo del algoritmo en notación asintótica del código utilizado.

### B.1. Definición 2.3

La definición (2.3) es implementada en el script `GrunwaldLetnikov_23.m`, sin embargo se requieren tres scripts adicionales para obtener la gráfica de la Figura (2.1a). Estos scripts se llaman `GraphFD_GL_23.m`, `TestGL_23.m` y `binomial.m` y se definen con los siguientes códigos en MATLAB:

`GrunwaldLetnikov_23.m:`

```
function [y]=GrunwaldLetnikov_23(ts,n,alpha,funcion)
sum = 0.0;
for j=0:n
    omega = ((-1)^j) * binomial(alpha, j);
    f=funcion(n-j+1);
    sum = sum + omega * f;
end
solution=sum/(ts^alpha);
y=solution;
end
```

`binomial.m:`

```
function [b] = binomial(n,k)
b=gamma(n+1)/(gamma(n+1-k)*gamma(k+1));
end
```

GraphFD\_GL\_23.m:

```
tic
ts=0.01;
tn=10;
xf=0:ts:tn;
func=sin(xf);
figure('Name','Animación 23');
hold on;
[yf]=TestGL_23(ts,tn,0,func);
plot(xf,yf,'-k')
[yf]=TestGL_23(ts,tn,0.25,func);
plot(xf,yf,'-r')
[yf]=TestGL_23(ts,tn,0.5,func);
plot(xf,yf,'-g')
[yf]=TestGL_23(ts,tn,0.75,func);
plot(xf,yf,'-b')
[yf]=TestGL_23(ts,tn,1.0,func);
plot(xf,yf,'-c')
legend("\alpha=0.0", "\alpha=0.25", "\alpha=0.5", "\alpha=0.75", "\alpha=1.0")
title('Grünwald-Letnikov')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Derivada Fraccional de sen(t)')
axis([0 10 -1.5 1.5])
toc
```

TestGL\_23.m:

```
function [yf]=TestGL_23(ts,tn,alpha, funcion)
timespan = floor(tn / ts)+1;
solution=zeros(1,timespan);
for i=0:timespan-1
    [y]=GrunwaldLetnikov_23(ts,i,alpha, funcion);
    solution(i+1)=y;
end
yf=solution;
end
```

La Figura (2.1a) se obtiene al ejecutar el script `GraphFD_GL_23.m`, y se menciona en el capítulo 2 que el tiempo del algoritmo para la definición (2.3) es de  $\mathcal{O}(N)$ , este tiempo se cumple para el script `GrunwaldLetnikov_23.m`, sin embargo para el script `TestGL_23.m` el tiempo es diferente, el análisis es el siguiente:

Se define primero la función a la cual se le aplicará la derivada fraccional, se escoge el  $\sin(t)$  y se define en forma discreta, esto es se define un vector con 1001 elementos, ya que se están simulando 10 segundos con un tiempo de muestreo de 0.01 segundos:

```
ts=0.01;
tn=10;
xf=0:ts:tn;
func=sin(xf);
```

El script `TestGL_23.m` tiene un ciclo, entonces para la primer iteración el algoritmo se tardará cero, ya que el índice  $i$  empieza en cero, para la segunda iteración el algoritmo se tardará una vez más que la primera iteración, para la tercera iteración el algoritmo se tardará dos veces más que la primera iteración y así sucesivamente hasta llegar a 1001 o la  $n$ -ésima iteración, recuérdese que el algoritmo para calcular la  $n$ -ésima más uno iteración necesita utilizar los  $n$ -ésimos valores anteriores.

Entonces el tiempo del algoritmo se asemeja a una secuencia aritmética, descrita por:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Por lo tanto el tiempo del algoritmo para calcular la derivada de  $\sin(t)$  en un rango de  $0 < t < n$  segundos, sería de  $\mathcal{O}(N^2)$ , esto es indeseable porque en una simulación o experimento de 40 segundos, el algoritmo se tardaría en ejecutarse un número de iteraciones proporcionales a  $4001^2$

## B.2. Definición 2.4

La definición (2.4) es implementada en el script `GrunwaldLetnikov_24.m`, sin embargo se requieren tres scripts adicionales para obtener la gráfica de la Figura (2.1b). Estos scripts se llaman `GraphFD_GL_24.m`, `TestGL_24.m` y `binomial.m` y se definen con los siguientes códigos en MATLAB:

`GrunwaldLetnikov_24.m`:

```
function [y]=GrunwaldLetnikov_24(ts,k,alpha,funcion)
a=3;
i=2;
I_min=0;
d=2*i-1;
sum = 0.0;
if (k>a)
    for j=0:a
        omega = ((-1)^j) * binomial(alpha, j);
        f=funcion(k-j+1);
        sum = sum + omega * f;
    end
end
while (I_min<k)
    I_min=a^(i-1)+i;
```

```

    I_max=a^i;
    if (I_max>k)
        I_max=k;
    end
    for m=I_min:d:I_max
        omega = ((-1)^m) * binomial(alpha, m);
        f=funcion(k-m+1);
        sum = sum + d*omega * f;
    end
    d=2*i-1;
    i=i+1;
end
for p=I_min+i:k
    omega = ((-1)^p) * binomial(alpha, p);
    f=funcion(k-p+1);
    sum = sum + omega * f;
end
solution=sum/(ts^alpha);
y=solution;
end

```

binomial.m:

```

function [b] = binomial(n,k)
b=gamma(n+1)/(gamma(n+1-k)*gamma(k+1));
end

```

GraphFD\_GL\_24.m:

```

tic;
ts=0.01;
tn=10;
xf=0:ts:tn;
func=sin(xf);
figure('Name','Animación 24');
hold on;
[yf]=TestGL_24(ts,tn,0,func);
plot(xf,yf,'-k')
[yf]=TestGL_24(ts,tn,0.25,func);
plot(xf,yf,'-r')
[yf]=TestGL_24(ts,tn,0.5,func);
plot(xf,yf,'-g')
[yf]=TestGL_24(ts,tn,0.75,func);
plot(xf,yf,'-b')
[yf]=TestGL_24(ts,tn,1.0,func);

```

```

plot(xf,yf,'-c')
legend("\alpha=0.0", "\alpha=0.25", "\alpha=0.5", "\alpha=0.75", "\alpha=1.0")
title('Grünwald-Letnikov con Memoria Adaptativa')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Derivada Fraccional de sen(t)')
axis([0 10 -1.5 1.5])
toc

```

TestGL\_24.m:

```

function [yf]=TestGL_24(ts,tn,alpha, funcion)
timespan = floor(tn / ts)+1;
solution=zeros(1,timespan);
for i=0:timespan-1
    [y]=GrunwaldLetnikov_24(ts,i,alpha, funcion);
    solution(i+1)=y;
end
yf=solution;
end

```

La Figura (2.1b) se obtiene al ejecutar el script `GraphFD_GL_24.m`, y se menciona en el capítulo 2 que el tiempo del algoritmo para la definición (2.4) es de  $\mathcal{O}(\log_2(N))$ , este tiempo se cumple para el script `GrunwaldLetnikov_24.m`, sin embargo para el script `TestGL_24.m` el tiempo es diferente, el análisis es el siguiente:

Se define primero la función a la cual se le aplicará la derivada fraccional, se escoge el  $\sin(t)$  y se define en forma discreta, esto es se define un vector con 1001 elementos, ya que se están simulando 10 segundos con un tiempo de muestreo de 0.01 segundos:

```

ts=0.01;
tn=10;
xf=0:ts:tn;
func=sin(xf);

```

El script `TestGL_24.m` tiene un ciclo, entonces para la primer iteración el algoritmo se tardará cero, ya que el índice  $i$  empieza en cero, para la segunda iteración el algoritmo se tardará nuevamente cero, para la tercera iteración el algoritmo se tardará una vez más que la primera iteración, para la cuarta iteración se tarda dos veces más que la primera y así sucesivamente hasta llegar a 1001 o la enésima iteración, recuérdese que el algoritmo para calcular la enésima más uno iteración necesita utilizar un número igual al logaritmo base dos de los enésimos valores anteriores.

Entonces el tiempo del algoritmo se asemeja a una secuencia aritmética, descrita por:

$$\log_2(0) + \log_2(1) + \log_2(2) + \log_2(3) + \dots + \log_2(n) = \log_2(n!)$$

Por lo tanto el tiempo del algoritmo para calcular la derivada de  $\sin(t)$  en un rango de  $0 < t < n$  segundos, sería de  $\mathcal{O}(\log_2(N!))$ , esto es un avance, ya que

$$\mathcal{O}(N) < \mathcal{O}(\log_2(N!)) < \mathcal{O}(N^2),$$

en la siguiente tabla se muestra la proporción del número de iteraciones que se tendrían que hacer con base en el tamaño de entrada N:

Tabla B.1: Proporción Entrada/Salida

N	$\mathcal{O}(N^2)$	$\mathcal{O}(\log_2(N!))$
4	30	5
40	22140	160
400	21413400	2887
4000	$2.13 \times 10^{10}$	42100
40000	$2.13 \times 10^{13}$	553180
400000	$2.13 \times 10^{16}$	$6.86 \times 10^6$
4000000	$2.13 \times 10^{19}$	$8.19 \times 10^7$

La Tabla B.1 muestra que el tiempo del algoritmo  $\mathcal{O}(\log_2(N!))$  crece más lento que  $\mathcal{O}(N^2)$ , esto nos proporciona una pequeña ventaja y por esta razón se decidió usar la definición (2.4) para calcular la derivada fraccional de las simulaciones numéricas y los experimentos.



## Apéndice C

# Equivalencia

En este apéndice se desarrolla la equivalencia entre la ecuación  $\dot{R} = R\hat{\Omega}$  y la relación cinemática  $\Omega = W_\eta\dot{\eta}$ .

### C.1. Relación cinemática

Se puede hacer la equivalencia entre  $\dot{R} = R\hat{\Omega}$  y  $\Omega = W_\eta\dot{\eta}$ . Para esta equivalencia se usará código de MATLAB, ya que la expresión que se obtiene es demasiado grande, se despeja  $\hat{\Omega}$  y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\hat{\Omega} = R^T \dot{R} \quad (\text{C.1})$$

Ahora se definen las siguientes matrices, que son las que forman la matriz de rotación,  $R_z, R_y$  y  $R_x$ :

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix}$$
$$R_y = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix}$$
$$R_z = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de rotación se forma multiplicando estas matrices en el siguiente orden  $R = R_z R_y R_x$ , por lo tanto la derivada con respecto al tiempo de la matriz de rotación está descrita como

$$\dot{R} = \dot{R}_z R_y R_x + R_z \dot{R}_y R_x + R_z R_y \dot{R}_x$$

Y además las derivadas de las matrices  $R_z, R_y$  y  $R_x$ , están descritas como

$$\dot{R}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s(\phi) & -c(\phi) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

$$\dot{R}_y = \begin{bmatrix} -s(\theta) & 0 & c(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ -c(\theta) & 0 & -s(\theta) \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

$$\dot{R}_z = \begin{bmatrix} -s(\psi) & -c(\psi) & 0 \\ c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}$$

También se puede calcular  $R^T$ , es decir la transpuesta de la matriz de rotación, se toma la matriz de rotación y simplemente se intercambian renglones por columnas

$$R^T = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ c(\psi)s(\theta)s(\phi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\theta)s(\phi)s(\psi) & c(\theta)s(\phi) \\ s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - c(\psi)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix}$$

Ahora se puede calcular  $\hat{\Omega}$ , pero primero se calculan las siguientes matrices  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ :

$$R_1 = \dot{R}_z R_y R_x$$

$$R_2 = R_z \dot{R}_y R_x$$

$$R_3 = R_z R_y \dot{R}_x$$

Se desarrollan estas matrices  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ :

$$R_1 = \begin{bmatrix} -c(\theta)s(\psi) & -c(\phi)c(\psi) - s(\phi)s(\psi)s(\theta) & c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta) \\ c(\psi)c(\theta) & c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\phi)s(\psi) & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -c(\psi)s(\theta) & c(\psi)c(\theta)s(\phi) & c(\phi)c(\psi)c(\theta) \\ -s(\psi)s(\theta) & c(\theta)s(\phi)s(\psi) & c(\phi)c(\theta)s(\psi) \\ -c(\theta) & -s(\phi)s(\theta) & -c(\phi)s(\theta) \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta) & c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta) \\ 0 & c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi) & -c(\phi)c(\psi) - s(\phi)s(\psi)s(\theta) \\ 0 & c(\phi)c(\theta) & -c(\theta)s(\phi) \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

Ahora se puede obtener  $\hat{\Omega} = R^T(R_1 + R_2 + R_3)$ , de esta última expresión por el lado izquierdo se tiene el “wedge” operator, descrito como

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Y del lado derecho se tiene una matriz demasiado grande que se llamará Omega:

$$\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} = \text{Omega}$$

Para obtener “r” se utiliza el siguiente código de MATLAB:

$$r = \text{simplify}(2 * \text{Omega}(2, 1) + \text{Omega}(1, 2))$$

Se obtiene el siguiente resultado para “r”

$$r = \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi)$$

Similarmente para “q” y “p” se tiene el siguiente código:

$$q = \text{simplify}(2 * \text{Omega}(1, 3) + \text{Omega}(3, 1))$$

$$p = \text{simplify}(2 * \text{Omega}(3, 2) + \text{Omega}(2, 3))$$

Y se obtienen las expresiones para “q” y “p”:

$$q = \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi)$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)$$

Código en MATLAB:

```
syms phi theta psi psi_dot theta_dot phi_dot
Rx=[1,0,0;0,cos(phi),-sin(phi);0,sin(phi),cos(phi)]
Ry=[cos(theta),0,sin(theta);0,1,0;-sin(theta),0,cos(theta)]
Rz=[cos(psi),-sin(psi),0;sin(psi),cos(psi),0;0,0,1]
Rz_dot=[-sin(psi),-cos(psi),0;cos(psi),-sin(psi),0;0,0,0]
Ry_dot=[-sin(theta),0,cos(theta);0,0,0;-cos(theta),0,-sin(theta)]
Rx_dot=[0,0,0;0,-sin(phi),-cos(phi);0,cos(phi),-sin(phi)]
R1=Rz_dot*(Ry*Rx)*psi_dot
R2=Rz*Ry_dot*Rx*theta_dot
R3=Rz*Ry*Rx_dot*phi_dot
R_trans=[cos(theta)*cos(psi),...
cos(theta)*sin(psi),...
-sin(theta);...
cos(psi)*sin(theta)*sin(phi)-cos(phi)*sin(psi),...
cos(phi)*cos(psi)+sin(theta)*sin(phi)*sin(psi),...
cos(theta)*sin(phi);...
sin(phi)*sin(psi)+cos(phi)*cos(psi)*sin(theta),...
cos(phi)*sin(theta)*sin(psi)-cos(psi)*sin(phi),...
cos(theta)*cos(phi)]
Omega=R_trans*(R1+R2+R3)
r=simplify(2*Omega(2,1)+Omega(1,2))
q=simplify(2*Omega(1,3)+Omega(3,1))
p=simplify(2*Omega(3,2)+Omega(2,3))
```