

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA**

Consenso en el control de sistemas subactuados inestables

Tesis que presenta el
Ing. Efraín Hernández Flores

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

En la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:
Dr. Hebertt José Sira Ramírez

Ciudad de México

Febrero, 2018

Dedicatoria

*A mi familia, quienes han sido la guía y el camino
para llegar a este punto de mi carrera, que
con su ejemplo, dedicación y palabras de aliento
me impulsaron a salir adelante día a día.*

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mis padres, pues son ellos quienes me han brindado todo su amor y sus sabios consejos y que siempre han estado cerca de mi para brindarme su apoyo incondicional.

A mis hermanos, quienes son el motivo de mi inspiración para formarme como un profesionalista y más aun como una mejor persona.

A mi director de tesis Dr. Hebertt Sira Ramírez por su confianza y apoyo para la realización de este trabajo, además, por compartir sus conocimientos y su amistad.

A mis compañeros, por que junto con ellos compartimos buenos y malos momentos, pero que sin duda fueron toda una experiencia.

Por último al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca para poder realizar mis estudios de maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., (CINVESTAV)

Resumen

En la búsqueda de nuevas técnicas de control cooperativo y el movimiento sincronizado, el uso de sistemas mecánicos subactuados en problemas de sincronización, plantea múltiples retos en el área de control automático.

En este trabajo se da solución a diferentes problemáticas de consenso, donde se busca, que las variables de interés de un conjunto de sistemas mecánicos subactuados converjan a un valor de consenso, o bien a la alineación y seguimiento de un modelo de referencia.

Se muestra como los esquemas de consenso y otras estrategias control como control por rechazo activo de perturbaciones y control proporcional integral generalizado en combinación con la planitud del sistema son especialmente adecuadas para controlar con éxito sistemas mecánicos subactuados con linealizaciones controlables, estando posiblemente sujetos a perturbaciones exógenas imprevistas, y endógenas debido a dinámicas no modeladas y a los efectos de las no linealidades ignoradas debido al uso de las linealizaciones aproximadas usadas.

La implementación de algoritmos de consenso para la sincronización de sistemas subactuados, como una nueva técnica de control, plantea, el uso de sistemas de alto orden, la implementación de sistemas no diferencialmente planos, el uso de linealizaciones aproximadas alrededor de puntos de equilibrio deseados, el uso de propiedades como la planitud del sistema, la implementación de estrategias de control como control por rechazo activo de perturbaciones y control proporcional integral generalizado en conjunto con algoritmos de consenso y la implementación de observadores de estado.

A través de diferentes ejemplos ilustrativos y sus simulaciones se muestra la solución de problemáticas planteadas, con las cuales, se busca mostrar el funcionamiento de algoritmos de consenso y otras estrategias de control basándose en la planitud del sistema linealizado, por último se validan los resultados de simulación a través de múltiples experimentos, realizados de forma física sobre una plataforma experimental.

Abstract

In the search for new techniques of cooperative control and synchronized movement, the use of underactuated mechanical systems in synchronization problems represents multiple challenges in the area of automatic control.

This work contains a solution for different consensus problems, where the objective is, that the variables of interest in a set of underactuated mechanical systems converge to a consensus value, or to the alignment and follow-up of a reference model.

It can be that for the consensus schemes and other control strategies, such as active disturbance rejection control and generalized proportional integral control in combination with the flatness property, are especially suitable for successful control of underactuated mechanical systems with controllable linearizations including possible exogenous disturbance effects and endogenous perturbations due to unmodeled dynamics and ignored effects of nonlinearities as a result of the use of an approximate linearization.

The implementation of consensus algorithms for the synchronization of underactuated systems, such as a new control strategy, involves the use of high-order systems, the implementation of control strategies on non-differentially flat systems, the use of approximate linearization around desired equilibrium points, the implementation of control strategies such as active disturbance rejection control and generalized proportional integral control in conjunction with consensus algorithms and the implementation of state observers.

Through different illustrative examples, and their simulations, the solutions of the proposed problems are shown, to be easily combined with consensus algorithms and other control strategies that are based on the flatness (flat systems) of the linearized system finally. The simulation is validated by experiments physically performed in an experimental platform.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	3
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Preguntas de investigación	6
1.4. Justificación	7
1.5. Objetivos	8
1.5.1. Objetivo General	8
1.5.2. Objetivos particulares	8
1.6. Alcances	9
1.7. Estructura del documento	9
1.8. Resumen del capítulo	10
2. Preliminares Teóricos y Matemáticos	11
2.1. Linealización aproximada	11
2.2. Planitud diferencial	14
2.2.1. Controlabilidad en sistemas lineales	15
2.2.2. Relación entre planitud y controlabilidad	15
2.2.3. Controlabilidad mediante la representación de estados y obtención de la salida plana para sistemas SISO	17
2.3. Control por Rechazo Activo de Perturbaciones	21
2.3.1. Observador de estado extendido	22
2.3.2. ADRC para sistemas de integración pura que experimentan los efectos de una entrada de perturbación	24
2.4. Control integral proporcional generalizado	26
2.4.1. Control integral proporcional generalizado para sistemas de integración pura	26

2.4.2.	GPIC para sistemas de integración pura que experimentan los efectos de una entrada de perturbación	31
2.5.	Algoritmos de consenso	32
2.5.1.	Teoría de Grafos	32
2.5.2.	Tipos de Grafos y definiciones	32
2.5.3.	Algoritmos de consenso de orden superior: problema no restringido.	33
2.5.4.	Algoritmos de consenso de orden superior: problema restringido.	37
2.6.	Resumen del capítulo	39
3.	Modelado de Sistemas Subactuados	41
3.1.	Sistemas mecánicos subactuados	41
3.2.	Descripción matemática de la grúa viajera	42
3.2.1.	Modelado matemático grúa viajera vía Euler-Lagrange	42
3.2.2.	Linealización aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio estable	44
3.2.3.	Obtención de la salida plana de la grúa viajera	44
3.3.	Descripción matemática del péndulo invertido sobre un carro	46
3.3.1.	Modelado matemático vía Euler-Lagrange	47
3.3.2.	Linealización aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable	48
3.3.3.	Obtención de la salida plana del péndulo invertido sobre un carro	48
3.4.	Resumen del capítulo	50
4.	Diseño y Simulación de Estrategias de Control	51
4.1.	ADRC para sistemas no lineales subactuados usando una linealización aproximada	51
4.1.1.	Formulación del problema	52
4.1.2.	Solución de la problemática implementando ADRC	52
4.1.3.	Simulación del esquema ADRC diseñado	55
4.2.	GPIC para sistemas no lineales subactuados usando una linealización aproximada	59
4.2.1.	Formulación del problema	60
4.2.2.	Solución de la problemática implementando GPIC	60
4.2.3.	Simulación del esquema GPIC diseñado	65
4.3.	Consenso de sistemas no lineales subactuados usando una linealización aproximada	69
4.3.1.	Formulación del problema	69
4.3.2.	Aspectos a considerar en la solución de los problemas de consenso planteados	70
4.3.3.	Problema de consenso no restringido y simulación	71
4.3.4.	Problema de consenso restringido a un punto de referencia deseado y simulación	78
4.3.5.	Problema de consenso restringido a un modelo de referencia y simulación	84
4.4.	Resumen del capítulo	97

5. Resultados Experimentales	99
5.1. Plataforma experimental	99
5.1.1. Componentes mecánicos	100
5.1.2. Partes pre-ensambladas	102
5.1.3. Componentes electrónicos	103
5.1.4. Datos y diagramas generales usados en la implementación de plataforma experimental	104
5.2. Implementación de las estrategias de control	105
5.2.1. Implementación del ADRC en la plataforma experimental configurada como grúa viajera	105
5.2.2. Implementación del ADRC en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro	108
5.2.3. Implementación del GPIC en la plataforma experimental configurada como grúa viajera	110
5.2.4. Implementación del GPIC en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro	113
5.2.5. Implementación del algoritmo de consenso no restringido en la plataforma experimental configurada como grúa viajera	115
5.2.6. Implementación del algoritmo de consenso restringido a un punto deseado en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro	117
5.2.7. Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia en la plataforma experimental configurada como grúa viajera	119
5.2.8. Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro	125
5.3. Resumen del capítulo	131
6. Conclusiones	133
6.1. Aportaciones	133
6.2. Trabajo a futuro	134
6.3. Conclusiones	134
Bibliografía	141
Appendices	142
A. Generación de trayectoria	145

Índice de figuras

2.1. Linealización aproximada.	11
2.2. GPIC de un sistema de orden n a través de reconstructores integrales.	28
2.3. GPIC para una planta de integración pura de orden n como una red de compensación clásica	30
3.1. Grúa viajera.	42
3.2. Péndulo invertido sobre un carro.	46
4.1. Esquema a bloques del ADRC y de los observadores.	55
4.2. Esquema a bloques del ADRC y de los observadores usando la grúa viajera	56
4.3. Simulación de la grúa viajera implementando ADRC.	56
4.4. Simulación de la grúa viajera implementando ADRC con perturbaciones aplicadas al péndulo.	57
4.5. Esquema a bloques del ADRC y de los observadores usando el péndulo invertido sobre un carro	58
4.6. Simulación del péndulo invertido sobre un carro implementando ADRC.	58
4.7. Simulación del péndulo invertido sobre un carro implementando ADRC con perturbaciones aplicadas al péndulo.	59
4.8. Diagrama esquemático GPIC.	61
4.9. Diagrama esquemático como redes de compensación.	64
4.10. Diagrama esquemático del control de la grúa viajera como redes de compensación.	66
4.11. Simulación de la grúa viajera implementando GPIC	66
4.12. Simulación de la grúa viajera implementando GPIC con perturbaciones aplicadas al péndulo.	67
4.13. Diagrama esquemático del control del péndulo invertido sobre un carro como redes de compensación.	67
4.14. Simulación del péndulo invertido sobre un carro implementando GPIC.	68
4.15. Simulación del péndulo invertido sobre un carro implementando GPIC con perturbaciones aplicadas al péndulo.	69
4.16. Diagrama esquemático del ESO a usar en los ejemplos de consenso.	71
4.17. Topología de intercambio de información para dos agentes.	71
4.18. Diagrama esquemático general del control para cada agente (grúa viajera)	74
4.19. Simulación de consenso no restringido, usando a la grúa viajera como agente	75

4.20. Diagrama esquemático general del control para cada agente (péndulo invertido sobre un carro)	76
4.21. Simulación de consenso no restringido, usando el péndulo invertido sobre un carro	77
4.22. Topología de intercambio de información para un líder y dos agentes.	78
4.23. Simulación de consenso restringido a un punto de referencia deseado, usando la grúa viajera	81
4.24. Simulación de consenso restringido a un punto de referencia deseado, usando el péndulo invertido sobre un carro	83
4.25. Topología de intercambio de información para un líder y dos agentes.	85
4.26. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con ADRC), usando la grúa viajera.	89
4.27. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con ADRC), con perturbaciones, usando la grúa viajera.	90
4.28. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con GPIC), usando la grúa viajera.	91
4.29. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con GPIC), con perturbaciones, usando la grúa viajera.	92
4.30. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con ADRC), usando el péndulo invertido sobre un carro	94
4.31. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con ADRC), con perturbaciones, usando el péndulo invertido sobre un carro	95
4.32. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con GPIC), usando el péndulo invertido sobre un carro	96
4.33. Simulación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con GPIC), con perturbaciones, usando el péndulo invertido sobre un carro	97
5.1. Plataforma experimental.	99
5.2. Vistas laterales y frontal del carro montado sobre los rieles.	100
5.3. Esquema de la implementación de los controladores.	105
5.4. Implementación del ADRC en la plataforma experimental, usando la grúa viajera.	106
5.5. Implementación del ADRC en la plataforma experimental, usando la grúa viajera con perturbaciones aplicadas al péndulo.	107
5.6. Implementación del ADRC en la plataforma experimental, usando el péndulo invertido sobre un carro.	109
5.7. Implementación del ADRC en la plataforma experimental, usando el péndulo invertido sobre un carro con perturbaciones aplicadas al péndulo.	110
5.8. Implementación del GPIC en la plataforma experimental, usando la grúa viajera.	111
5.9. Implementación del GPIC en la plataforma experimental, usando la grúa viajera con perturbaciones aplicadas al péndulo.	112

5.10. Implementación del GPIC en la plataforma experimental, usando el péndulo invertido sobre un carro.	114
5.11. Implementación del GPIC en la plataforma experimental, usando el péndulo invertido sobre un carro con perturbaciones aplicadas al péndulo.	115
5.12. Implementación de consenso no restringido, usando la grúa viajera	117
5.13. Implementación de consenso restringido a un punto deseado, usando el péndulo invertido	119
5.14. Implementación de consenso restringido a un modelo de referencia, usando la grúa viajera	121
5.15. Topología de intercambio de información para un líder y un agente 1.	122
5.16. Error de seguimiento usando ADRC en la grúa viajera.	123
5.17. Error de seguimiento usando GPIC en la grúa viajera.	124
5.18. Implementación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con ADRC), usando la grúa viajera	125
5.19. Implementación de consenso restringido a un modelo de referencia, usando el péndulo invertido sobre un carro	127
5.20. Topología de intercambio de información para un líder y un agente 2.	128
5.21. Error de seguimiento usando ADRC en el péndulo invertido sobre un carro.	129
5.22. Error de seguimiento usando GPIC en el péndulo invertido sobre un carro.	130
5.23. Implementación de consenso restringido a un modelo de referencia (líder controlado con ADRC), usando el péndulo invertido sobre un carro	131

Índice de tablas

4.1. Parámetros de configuración para la simulación	56
4.2. Condiciones iniciales (Problema de consenso no restringido-grúa viajera) .	73
4.3. Condiciones iniciales (Problema de consenso no restringido-péndulo inver- tido sobre un carro)	76
4.4. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-grúa viajera)	80
4.5. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-péndulo in- vertido sobre un carro)	82
4.6. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-grúa viajera)	87
4.7. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-péndulo in- vertido sobre un carro)	92
5.1. Datos de los piñones usados para la configuración piñón cremallera	101
5.2. Datos de los fabricación de la cremallera	101
5.3. Características del motor de CD con caja de engranes con relación de 29:1	102
5.4. Características del Monster Motor Shield VNH2SP30	104
5.5. Parámetros de configuración para la implementación en la plataforma ex- perimental	104
5.6. Condiciones iniciales (Problema de consenso no restringido-grúa viajera) .	116
5.7. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-péndulo in- vertido sobre un carro)	117
5.8. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-grúa viajera)	120
5.9. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-grúa viajera)	122
5.10. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-péndulo in- vertido sobre un carro)	126
5.11. Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-péndulo in- vertido sobre un carro)	128

Capítulo 1

Introducción

Los grados de libertad de un sistema son el número mínimo de variables que se necesita para la ubicación de los elementos inerciales de masa que constituyen un sistema con respecto a un marco de referencia. Estas variables de posición reciben el nombre de “variables generalizadas”.

El número de fuerzas generalizadas representa los grados de actuación en el sistema. Tomando en cuenta esto se tiene la siguiente clasificación:

- Un sistema completamente actuado es aquel en el cual el número de grados de actuación coincide con el número de grados de libertad.
- Un sistema subactuado es aquel que contiene mayor número de grados de libertad que de fuerzas generalizadas.

Los sistemas subactuados constituyen una gran cantidad de ejemplos que puede ser interesante analizar desde la perspectiva del control automático. El interés en esta clase de sistemas, es debido a las ventajas que el control de estos puede ofrecer, como el ahorro de energía o el esfuerzo de control. El estudio de los sistemas subactuados es un importante campo activo de la investigación, debido a la gran cantidad de aplicaciones, como lo son la industria aeroespacial, vehículos marinos, robótica, entre otras.

Algunas aplicaciones de los sistemas subactuados son:

- Por su nombre en inglés “Segway Human Transporter”, el cual es un péndulo invertido sobre un carro, cuyo control está basado en entradas sensoriales de giroscopios montados en la base del segway y un sistema de control por computadora que mantiene el balance mientras las personas se pasean sobre el vehículo. En el artículo [2] se hace un análisis y se diseña un control de este sistema.
- En el libro titulado “Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems”, véase [7], se presenta un conjunto de ejemplos donde se usan sistemas mecánicos subactuados, para los cuales, se aplica un control basado en energía, se aprovechan las propiedades de pasividad para establecer una ley de control con base en la teoría de estabilidad de Lyapunov, con el objetivo de estabilizar los sistemas alrededor

de una posición deseada. También se estudian diferentes sistemas como aerodeslizadores, aviones y helicópteros donde se implementaron leyes de control en modelos simplificados de tales sistemas.

- Otra aplicación de los sistemas subactuados, es la generación de patrones de marcha para robots bípedos. Cuando un robot bípedo sostiene su cuerpo sobre una pierna, su dinámica dominante puede ser representada por un solo péndulo invertido que conecta el pie de apoyo y el centro de masa de todo el robot, por lo que se analiza como un péndulo invertido el cual tiene desplazamientos en los ejes X, Y, y Z. Este análisis se encuentra en el artículo [20].

Por otra parte, en la naturaleza pueden observarse comportamientos cooperativos entre individuos; tales como parvadas de aves y bancos de peces que se agrupan para evitar a los depredadores. La auto-organización de estos grupos caracteriza el comportamiento colectivo animal. El control cooperativo y el movimiento sincronizado se han convertido en temas de gran importancia, debido a las investigaciones que se han realizado en ingeniería.

Según la definición de la Real Academia Española, sincronizar es “hacer coincidir en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos”. Desde el punto de vista de control, se han estudiado las condiciones que permiten llevar determinadas variables de un grupo de sistemas (bajo una interconexión adecuada) a cierto valor común mediante leyes de control definido así al consenso de sistemas.

En la literatura, se han publicado una gran cantidad de ejemplos de control de sistemas multiagentes, utilizando vehículos autónomos, vehículos aéreos no tripulados, robots móviles y satélites, entre otros. Estos sistemas son vistos como *agentes*, entidades autónomas actuando sobre un ambiente a través de la implementación de sensores y actuadores. Esta definición se encuentra en la tesis [23].

Gran parte del trabajo sobre los sistemas descritos anteriormente, explora la coordinación y el control cooperativo con sistemas dinámicos, que se basan en modelos de integradores simples o dobles. En el artículo [44] se plantea el análisis de problemas para redes de agentes con la siguiente dinámica $\dot{x}_i(t) = u_i(t)$ y con diferentes tipos de topologías en el intercambio de información entre los agentes. Otro ejemplo es el artículo [30] donde se buscan las condiciones suficientes para que un conjunto de agentes autónomos descritos por integradores dobles, converjan a un valor común haciendo uso de un método basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov y en la técnica de descomposición espacial relacionada.

Otro caso estudiado es el consenso para un grupo de agentes de alto orden, el cual es abordado en el artículo [17]. El problema de consenso analizado es para un grupo de agentes integradores de alto orden con topología fija. Se propone un protocolo de consenso, que sólo depende de la información del agente y de sus vecinos. Se establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia al consenso. Basándose en el protocolo de consenso para redes de agentes integradores de bajo orden, se proporciona un controlador para el consenso de grupo de agentes idénticos con dinámica descrita por un sistema controlable lineal invariante en el tiempo de una sola entrada.

Un nuevo caso de estudio, en el control cooperativo es el control coordinado de sistemas mecánicos en red con dinámica inestable, el cual es presentado en el artículo [26], donde el objetivo es estabilizar cada uno de los péndulos y coordinar el movimiento relativo de los carros a través de la implementación de una ley de control obtenida con el método de los Lagrangianos controlados. También se utilizan métodos de energía, para demostrar la estabilidad y el comportamiento coordinado de los sistemas mecánicos.

1.1. Estado del arte

En años recientes han sido reportados múltiples trabajos que desarrollan diferentes temas relacionados con sistemas mecánicos subactuados que van desde el modelado de los mismos, hasta el control y la implementación en múltiples aplicaciones.

En la literatura, se tienen artículos donde se resuelve el problema de seguimiento de trayectoria que implica excursiones considerablemente alejadas a un punto de equilibrio dado, para sistemas mecánicos subactuados. Un ejemplo de esto es la bola y la viga (en inglés Ball and Beam), véase [36]. Donde se utiliza un esquema de control integral proporcional generalizado (GPIC por sus siglas en Inglés *Generalized Proportional Integral Control*. En lo que sigue se hace mención usando las siglas en inglés). El control se desarrolla en base a un modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio. El modelo obtenido es controlable y por lo tanto diferencialmente plano. La principal tarea del controlador, además de compensar perturbaciones, será compensar los efectos de las no linealidades descartadas en el proceso de la linealización aproximada.

En el artículo [1] se presenta un enfoque de planitud diferencial para la estabilización y el seguimiento de trayectoria, usando como ejemplo el péndulo de Furuta (en inglés Furuta Pendulum). Suponiendo que el péndulo invertido viaja dentro de una vecindad suficientemente pequeña de su punto de equilibrio inestable, mientras que el brazo horizontal cubre un desplazamiento angular de magnitud considerable en un intervalo de tiempo preespecificado. La planitud diferencial de la aproximación tangente es entonces explotada en tres enfoques y diseños de controladores diferentes: un controlador basado en posicionamiento de polos, un controlador jerárquico de alta ganancia y finalmente un enfoque de GPIC.

Otra aplicación del esquema de GPIC es el balanceo y estabilización alrededor de su posición vertical inestable del péndulo con una rueda inercial (en inglés The Inertia Wheel Pendulum). Ambas tareas se logran utilizando un sólo controlador GPI, evadiendo de esta manera, la práctica común de conmutar entre dos controladores diferentes. Este análisis se encuentra en el artículo [16].

Otro controlador usado en sistemas mecánicos subactuados, es el control por rechazo activo de perturbaciones (ADRC por sus siglas en inglés *Active Disturbance Rejection Control*. En adelante se hace mención usando las siglas en inglés), el cual está basado en el observador de estado extendido (ESO por sus siglas en inglés *Extended State Observer*. En adelante se hace mención usando las siglas en inglés).

Un ejemplo de la implementación del ADRC en un sistema subactuado es analizado en [34]. En este artículo se propone un rechazo activo de perturbaciones, utilizando el control basado en el observador de estado extendido para el problema de estabilización del péndulo de Furuta, llevando el brazo horizontal desde una posición inicial a una final en un tiempo predefinido. El esquema de control supone un conocimiento limitado del sistema y utiliza un modelo simplificado. El modelo obtenido es una cadena perturbada de integradores, donde la señal de perturbación representa una función agregada de las no linealidades del sistema entrada-salida que contienen dinámicas no modeladas y funciones de perturbación. Estas perturbaciones deben ser estimadas y rechazadas activamente. El esquema de control ADRC se evalúa en una plataforma experimental real, mostrando buenos resultados en el desempeño del sistema en lazo cerrado..

La estabilización del péndulo con una rueda inercial, utilizando un observador de estado extendido y un control de rechazo activo de perturbación, se analiza en el artículo [35]. Para la solución del problema de estabilización, alrededor del punto de equilibrio inestable, se implementa un esquema ADRC usando un modelo simplificado del sistema que consiste en una cadena perturbada de integradores. El esquema de control se evalúa en un marco de simulación, presentando buenos resultados para la evolución del error de estabilización.

Uno de los ejemplos más recientes es abordado en el artículo [37]. En este trabajo, se propone un procedimiento sistemático para el diseño del controlador para una clase de sistemas no lineales subactuados, que son linealizables sin retroalimentación pero que exhiben una linealización tangente controlable alrededor de un punto de equilibrio. Se muestra que el control por ADRC basado en el ESO permite tareas de seguimiento de trayectorias que implican excursiones significativamente lejanas desde el punto de equilibrio. La planitud del modelo tangente proporciona una propiedad estructural única que da lugar a una descomposición ventajosa en cascada de bajo orden del diseño del ESO. El sistema de la bola y la viga se toma como un ejemplo de aplicación. Los resultados experimentales muestran la efectividad del enfoque propuesto en la estabilización, así como en las tareas de seguimiento de trayectoria y la robustez ante la perturbación del sistema.

Un problema importante que aparece con frecuencia en el contexto de la coordinación de multiagentes, es el consenso en la estabilización a un punto de equilibrio, o, alternativamente, para seguimiento de trayectorias. En la literatura, encontramos trabajos que introducen protocolos de consenso lineales para redes de agentes dinámicos que permiten un consenso de forma distribuida y cooperativa, véase [44].

En otros artículos como [29], se tiene el análisis de algoritmos de consenso para sistemas multiagentes en red, con énfasis en el papel del flujo de información dirigida y robustez a los cambios en la topología de la red debido a fallas de comunicación.

Se tienen múltiples ejemplos de consenso, para sistemas modelados por dinámicas de segundo orden y de orden superior. En estos desarrollos se abordan los problemas de control en la formación geométrica de sistemas multiagentes, a través de la elección adecuada de los estados y de la información necesaria para alcanzar el consenso, incluso en ausencia de liderazgo centralizado. Numerosos artículos muestran la implementación de diferentes algoritmos de consenso y del uso de múltiples plataformas experimentales. [39].

Otro de los problemas de consenso que ha sido poco estudiado, pero que a tomado gran importancia en el área científica, es el estudio de los algoritmos de consenso de alto orden. Estos estudios generalizan los algoritmos de consenso para sistemas de primer y segundo orden existentes en la literatura. En el artículo [42] se muestran las condiciones suficientes bajo las cuales cada variable de información y sus derivadas de orden superior convergen a valores acordados. Se presenta también la idea de consenso para sistemas de orden superior con un líder, donde cada variable de información y sus derivadas de alto orden no sólo alcanzan el consenso sino que también convergen a la solución de una dinámica, de referencia dada.

Para la sincronización de los sistemas mecánicos subactuados sólo algunas instancias específicas han sido investigadas. Se tiene muy poca información de trabajos de investigación realizados en este contexto, algunos de ellos se muestran a continuación:

En [51] los autores presentan un diseño de control para un sistema de péndulos invertidos, en el que dos péndulos invertidos y una barra que conecta los extremos superiores, son accionados por un par de servomotores lineales los cuales permiten un movimiento paralelo. El problema de control de los péndulos invertidos implica tanto el equilibrado del péndulo, como el control de seguimiento síncrono, este tipo de control es muy parecido al de un robot bípedo o bien al control del dispositivo “Segway”. Tsai y Shen proponen un controlador de equilibrio robusto y un esquema de control de sincronización para coordinar el movimiento de ejes dobles. El control de movimiento sincronizado es a través de un compensador coordinado en lugar del esquema maestro-esclavo clásico.

Otro ejemplo de sincronización [52], donde se obtiene un modelo linealizado para un sistema subactuado Euler-Lagrange, compuesto por dos péndulos invertidos denominado como sistema aumentado. Se propone un método para construir una señal de error de sincronización entre los dos sistemas para garantizar que el nuevo sistema sea completamente controlable y contiene las variables de estado originales de los dos subsistemas y el error de sincronización. Para el sistema aumentado se diseña un controlador de sincronización óptimo. Los resultados experimentales muestran que el sistema de control de sincronización óptimo ha realizado un equilibrio estable de los dos péndulos invertidos y una ubicación precisa de los dos coches mientras se mueven de forma sincronizada.

Otro ejemplo, para redes de agentes múltiples, tiene como objetivo de consenso, llegar a un acuerdo entre ciertas coordenadas de interés utilizando un controlador distribuido. En [28] tenemos el análisis de este problema, donde se tiene un controlador proporcional con amortiguamiento que puede asintóticamente conducir una red compuesta de n sistemas Euler-Lagrange, no idénticos hacia la estabilización a un punto de equilibrio. La red se modela como un gráfico de interconexión estática ponderada y no dirigida que puede presentar retardos de tiempo variables asimétricos.

En esta sección se presenta el panorama encontrado de la forma de trabajo con sistemas mecánicos subactuados, la implementación de los mismos para la coordinación de un conjunto de estos sistemas y el uso de estrategias de consenso. Esto motiva el planteamiento del problema a resolver en este trabajo de investigación.

1.2. Planteamiento del problema

La mayoría de los sistemas subactuados son no linealizables a través de una realimentación estática o dinámica. Por esta razón, no cuentan con una variable, llamada “salida plana”, capaz de parametrizar diferencialmente todas las variables del sistema incluyendo las variables de control.

Las estrategias de control para esta clase de sistemas se centran en aproximaciones tangentes que sean controlables alrededor de puntos de equilibrio estables o inestables dependiendo del caso analizado. En otras ocasiones, la estrategia de control está basada en aproximaciones no lineales diferencialmente planas, en sistemas como el mostrado en [5], donde es usado un control basado en pasividad.

La linealización tangente de tales sistemas alrededor de un punto de equilibrio resulta generalmente controlable (es decir, plana), permitiéndonos así formular el problema de estabilización o seguimiento de trayectoria de manera directa mediante una planificación adecuada de las variables de salida plana incrementales.

La implementación de sistemas mecánicos subactuados para redes de agentes múltiples es poco usual, ya que como se ha mencionado en la coordinación y el control cooperativo, el uso de vehículos autónomos completamente actuados es más habitual. En específico se tiene poca información de la implementación de sistemas mecánicos subactuados donde el objetivo principal es llegar a un acuerdo entre ciertas coordenadas de interés obteniendo un consenso entre los sistemas.

Existen principalmente dos problemas de consenso:

- El problema de consenso no restringido, es un problema de alineación, en el cual se necesita que los estados de un conjunto de sistemas sean asintóticamente iguales, este valor es conocido como el estado de consenso.
- El problema de consenso restringido es aquel donde se tiene un valor deseado del estado al cual deben converger los estados de un conjunto de sistemas.

La problemática que se plantea en este trabajo es la implementación de sistemas subactuados no linealizables a través de una retroalimentación estática o dinámica, donde se requiere un consenso entre ciertas variables de salida para un conjunto de estos sistemas, considerando que no se tiene acceso al estado del sistema.

1.3. Preguntas de investigación

Algunas preguntas clave en el consenso de sistemas mecánicos subactuados son:

- ¿Cómo diseñar leyes de control con una estrategia descentralizada, tal que de manera colectiva un conjunto de sistemas mecánicos subactuados, presente un comportamiento deseado, en el cual converjan las variables de interés a un valor predefinido?

- ¿Cuál es la estrategia de control idónea, para implementar en un líder, teniendo en cuenta que se desea un consenso de sistemas mecánicos subactuados con un líder y el seguimiento de una trayectoria de referencia deseada?
- ¿Tendrán un buen desempeño los sistemas mecánicos subactuados con estrategias de control diseñadas a través de algoritmos de consenso?
- El problema de consenso, consiste en diseñar un protocolo con el cual se pueda lograr un consenso entre ciertas variables de interés de un conjunto de sistemas. ¿Hacer uso de esta estrategia de control representa una forma idónea para resolver el problema de sincronización de sistemas mecánicos subactuados?
- ¿Son viables las estrategias de control usadas para el consenso entre ciertas variables de interés en sistemas subactuados, implementadas sobre la base de una linealización tangente del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable dado?

1.4. Justificación

La implementación de sistemas mecánicos subactuados en problemas de sincronización, plantea múltiples retos en el área de control. Uno de los fines de tratar esta clase de sistemas es el de encontrar nuevas técnicas de control para estos sistemas y de probar su eficiencia. Por lo general estos desarrollos tienen importancia en problemas industriales radicalmente diferentes en su naturaleza pero con ciertas propiedades análogas (tal es el caso del sistema “Actuador de masa rotacional/translacional” mostrado en [5]).

El uso de protocolos de consenso representa una nueva técnica para la sincronización de sistemas mecánicos subactuados ya que plantea el uso de sistemas de alto orden, la implementación de sistemas no diferencialmente planos, el uso de linealizaciones tangentes controlables alrededor de puntos de equilibrio y la implementación de estrategias de control en combinación con el consenso de sistemas mecánicos subactuados como ADRC y GPIC, a través de la implementación de observadores de estado extendido.

En este trabajo damos solución al problema de consenso restringido, en el cual, se desea que las variables de interés de un conjunto de sistemas mecánicos subactuados converjan a un valor de equilibrio deseado, o bien el alineamiento con un líder y el seguimiento del mismo.

En este caso, ilustramos cómo los esquemas de consenso y otras estrategias de control como ADRC y GPI en combinación con la planitud son especialmente adecuados para controlar con éxito sistemas mecánicos subactuados con linealizaciones controlables, estando posiblemente sujetos a perturbaciones exógenas imprevistas, y perturbaciones endógenas debido a dinámicas no modeladas y a efectos de no linealidades ignoradas debido al uso del proceso de linealización tangente.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

El objetivo general de esta Tesis puede enunciarse de la siguiente manera:

Diseñar, analizar, simular e implementar experimentalmente algoritmos de consenso en combinación con otras estrategias de control como ADRC y GPIC, para la coordinación de dos sistemas subactuados no lineales y no diferencialmente planos pero que tienen una linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio. Los modelos adoptados serán modelos linealizados controlables y por lo tanto planos, que sobrellevan perturbaciones endógenas (debidas a las no linealidades no modeladas dependientes del estado) y exógenas (debidas a influencias externas) sobre el comportamiento de los sistemas linealizados.

1.5.2. Objetivos particulares

Con el propósito de alcanzar de manera satisfactoria el objetivo general se plantean los siguientes objetivos particulares:

- Analizar y modelar los sistemas mecánicos subactuados a usar como ejemplos, *la grúa viajera y el péndulo invertido sobre un carro*.
- Diseñar una ley de control para un sistema mecánico subactuado, usando diferentes estrategias de control tales como: control por rechazo activo de perturbaciones o control proporcional integral generalizado. Con lo cual se busca estabilizar el sistema en una posición constante lejos del punto de equilibrio.
- Diseñar una ley de control para un conjunto de sistemas mecánicos subactuados atacando el problema de consenso no restringido.
- Diseñar una ley de control para un conjunto de sistemas mecánicos subactuados atacando el problema de consenso restringido a una referencia constante y con el enfoque líder-seguidor.
- Realizar las simulaciones necesarias, implementando las leyes de control previamente diseñadas.
- Hacer la puesta a punto de la plataforma experimental para la implementación física.
- Validar las leyes de control de forma experimental mediante la implementación de las leyes de control en la plataforma experimental.

1.6. Alcances

A continuación se muestra un listado de los alcances esperados una vez concluido este trabajo de investigación.

- Obtención de un modelo matemático de los sistemas usados como ejemplos, linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio del modelo matemático obtenido y obtención de la salida plana del modelo linealizado.
- Diseño de una ley de control implementado ADRC para el seguimiento de una trayectoria de referencia, haciendo uso de los sistemas usados como ejemplos (grúa viajera y péndulo invertido sobre un carro).
- Diseño de una ley de control implementado GPIC para el seguimiento de una trayectoria de referencia, haciendo uso de los sistemas usados como ejemplos (grúa viajera y péndulo invertido sobre un carro).
- Solución al problema de consenso no restringido y restringido (a una referencia constante y a un modelo de referencia con el enfoque líder seguidor), a través del diseño de leyes de control implementado algoritmos de consenso en los sistemas usados como ejemplos (grúa viajera y péndulo invertido sobre un carro).
- Simulación de las leyes de control diseñadas.
- Validación de forma experimental de las leyes de control diseñadas.

1.7. Estructura del documento

El presente documento está estructurado de la siguiente forma:

El capítulo 1 presenta una breve introducción al consenso de sistemas mecánicos subactuados, el estado del arte detrás de este trabajo, el planteamiento del problema, la justificación, objetivo general y objetivos particulares del trabajo de investigación, los alcances del mismo y la estructura del documento.

El capítulo 2 muestra la teoría relacionada, con el análisis y algunas propiedades de los sistemas mecánicos subactuados usados como ejemplos y de igual forma la teoría de las estrategias y algoritmos de control a implementar.

El capítulo 3 contiene una descripción de los sistemas mecánicos subactuados y presenta el modelo matemático de los sistemas que se usaran como ejemplos, obteniendo de estos una linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio para la obtención de la salida plana y un modelo simplificado de la dinámica de entrada-salida en términos de la salida plana y sus derivadas.

El capítulo 4 presenta el diseño y simulación de las leyes de control que se implementaran, así como el diseño de los observadores de estado extendido, con los cuales es posible estimar el estado de los sistemas a controlar y las señales de perturbación.

El capítulo 5 contiene la información más relevante de la plataforma experimental, con la cual se validan físicamente las leyes de control propuestas y muestra los resultados obtenidos de la implementación física de las leyes de control.

El capítulo 6 muestra las conclusiones obtenidas y se proponen algunos trabajos futuros sobre la base de los resultados de esta tesis.

Por último se muestran los apéndices y la bibliografía utilizada durante el transcurso de este proyecto.

1.8. Resumen del capítulo

En este capítulo se establecen las razones por las cuales se realizó este trabajo de investigación. Se presenta una breve introducción y el estado del arte, donde se muestra los trabajos que se tienen en la literatura sobre: sistemas subactuados, implementación de ADRC y GPIC, algoritmos de consenso para sistemas dinámicos representados por integradores y sincronización de sistemas mecánicos subactuados. También se presenta el planteamiento del problema general a resolver, algunas preguntas de investigación relevantes, la justificación de esta tesis, el objetivo general y los objetivos particulares, los alcances esperados al concluir el trabajo de investigación y la estructura que presenta este documento.

Capítulo 2

Preliminares Teóricos y Matemáticos

2.1. Linealización aproximada

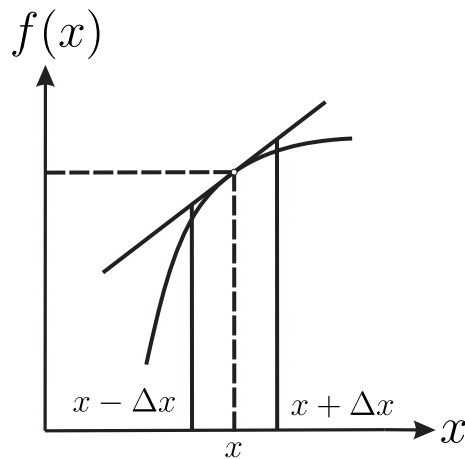


Figura 2.1: Linealización aproximada.

Los fenómenos de naturaleza no lineales son susceptibles de aproximaciones lineales. Tales aproximaciones son usadas como modelos válidos en una región restringida. El análisis del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales, implementando, una linealización aproximada del sistema, es útil en la cercanía de un punto de equilibrio, siempre y cuando las perturbaciones que pueden afectar la evolución del sistema sean pequeñas.

Considerando el sistema no lineal dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control y $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema.

Se presenta el sistema de ecuaciones diferenciales en términos de la ecuación integral equivalente.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \\ y(t) &= h\left(x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Supondremos, que el sistema se encuentra operando en un punto de equilibrio. Un punto de equilibrio está dado por la solución de la ecuación $\dot{x} \equiv 0$, en el sistema (2.1). Cuando la tasa de variación de x respecto al tiempo es cero o bien $\frac{dx}{dt} = 0$, tenemos:

$$f(X(U), U) \equiv 0 \quad (2.3)$$

Remplazando el estado del sistema $x(t)$ por $x(t) = X = X(U)$. De la ecuación (2.3), podemos observar, que para calcular el punto de equilibrio (X, U) , se debe resolver una ecuación implícita que depende de la señal de control en el equilibrio, dada por U .

Entonces el punto de equilibrio está parametrizado en función de la señal de control U , considerando sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma (2.1), que poseen puntos de equilibrio constantes, dados por:

$$u(t) = U; \quad x(t) = X(U); \quad y(t) = Y(U) = h(X(U)), \quad \forall t. \quad (2.4)$$

Los puntos de equilibrio para el sistema (2.1) son constantes y están dados por: (U, X, Y) . Supondremos que el sistema (2.1) se encuentra operando en un punto de equilibrio perfecto. por lo que

$$x(t_0) = x_0 = X, \quad u(t) = U \quad y(t) = h(x) = Y. \quad (2.5)$$

Es decir, el estado inicial en que se encuentra operando el sistema coincide en el instante t_0 con el estado de equilibrio constante X , el cual, no se altera si el sistema es asintóticamente estable tomando la entrada como $u = U$, durante un periodo de tiempo indefinidamente grande. Ahora se consideran perturbaciones en el estado inicial de equilibrio $x_0 = X$ y en la función de entrada de equilibrio $u(t) = U$, las cuales estarán dadas por:

$$x(t_0) = x_0 + x_{0\delta} = X + x_{0\delta}, \quad u(t) = U + u_\delta(t) \quad (2.6)$$

Tomando en cuenta las perturbaciones alrededor de los valores de equilibrio, se producen cambios o perturbaciones en el estado de equilibrio constante del sistema X y en el valor de la salida Y . Haciendo uso de las ecuaciones del sistema (2.2).

$$\begin{aligned} x(t) &= X + x_{0\delta} + \int_{t_0}^t f(X + x_\delta(\sigma), U + u_\delta(\sigma)) d\sigma \\ y(t) &= h(X + x_\delta(t)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

La representación (2.7) del sistema (2.2), considerando perturbaciones constituye una representación exacta del efectos debido a las perturbaciones. Por otro lado esta representación no es muy útil, ya que, sigue describiendo el valor del estado perturbado

$x(t) = X + x_\delta(t)$ como una ecuación no lineal y como una relación no lineal el valor de la salida perturbada $y(t) = Y + y_\delta(t)$. Tanto el valor del estado perturbado como de la salida perturbada y la señal de entrada perturba definida como $u(t) = U + u_\delta(t)$, son llamadas variables incrementales y pueden ser escritas equivalentemente como:

$$x_\delta(t) = x(t) - X; \quad u_\delta(t) = u(t) - U; \quad y_\delta(t) = y(t) - Y \quad (2.8)$$

Se toman en cuenta las ecuaciones definidas para el estado perturbado y la salida perturbada, se obtiene la siguiente representación para la ecuación (2.7).

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x_{0\delta} + \int_{t_0}^t f(X + x_\delta(\sigma), U + u_\delta(\sigma)) d\sigma \\ y_\delta(t) &= h(X + x_\delta(t)) - h(X) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se usará una aproximación lineal de las ecuaciones (2.9), implementado una expansión en series de Taylor. Se pueden escribir los valores perturbados del estado y de la salida como:

$$\begin{aligned} f(X+x_\delta(t), U+u_\delta(t)) &= f(X, U) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X,U)} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)} u_\delta(t) + \dots + T.O.S. \\ h(X+x_\delta(t)) &= h(X) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X x_\delta(t) + \dots + T.O.S. \end{aligned} \quad (2.10)$$

El término T.O.S hace referencia a “términos de orden superior”. De la definición de punto de equilibrio se tiene que $f(X, U) = 0$, entonces, se pueden calcular el valor tanto del estado como de la salida ambos perturbados como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x_{0\delta} + \int_{t_0}^t \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X,U)} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)} u_\delta(t) + \dots + T.O.S. \right] d\sigma \\ y_\delta(t) &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X x_\delta(t) + \dots + T.O.S \end{aligned} \quad (2.11)$$

Despreciando los términos de orden superior utilizados en las ecuaciones (2.11), se obtiene una aproximación (lineal) a los valores de x_δ y y_δ . Esta aproximación no es exactamente igual, sin embargo no se establecerá diferencia entre el valor de la ecuación (2.9) y la ecuación (2.12).

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x_{0\delta} + \int_{t_0}^t \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X,U)} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)} u_\delta(t) \right] d\sigma \\ y_\delta(t) &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X x_\delta(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Se definen las siguientes matrices (A,B,C), llamadas matrices Jacobianas.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X,U)}; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)}; \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_X \quad (2.13)$$

De tal forma que la ecuación (2.12), puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}x_{\delta}(t) &= x_{0\delta} + \int_{t_0}^t (Ax_{\delta}(\sigma) + Bu_{\delta}(\sigma)) d\sigma \\y_{\delta}(t) &= Cx_{\delta}(t)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Se toma la derivada con respecto al tiempo de la ecuación integral (2.14), se puede observar que se toma como condición inicial $t = t_0$, y el valor $x_{0\delta} = x_0 - X$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\delta}(t) &= Ax_{\delta}(t) + Bu_{\delta}(t); & x_{\delta}(t_0) &= x_{0\delta} \\y_{\delta}(t) &= Cx_{\delta}(t)\end{aligned}\tag{2.15}$$

La ecuación diferencial (2.15), representa un sistema de ecuaciones lineales en x_{δ} y u_{δ} . A este sistema se le llama representación (lineal) en el espacio de estados o modelo incremental. Un análisis mas detallado de sistemas no lineales puede ser encontrado [45], así como múltiples ejemplos de linealización aproximada.

2.2. Planitud diferencial

El concepto de planitud, o planitud diferencial, proviene del enfoque algebraico diferencial en el control de sistemas dinámicos. Fue inventado en Francia, por el Profesor Michel Fliess y sus colaboradores. En el artículo [9], se introducen los sistemas planos, los cuales son equivalentes a un sistema lineal a través de un tipo especial de retroalimentación de estado y cambio de coordenadas basado en la determinación de una salida especial llamada “salida plana”.

Se dice que un sistema SISO (SISO por sus siglas en Inglés *Single Input-Single Output*. En adelante se hace mención usando las siglas en inglés) es plano si existe una salida endógena especial denominada “salida plana”, indicada por ψ , que es una función de los estados del sistema y posiblemente de un número finito de sus derivadas temporales, tal que, a su vez, todas las variables del sistema (estados, entradas, salidas) pueden expresarse únicamente en términos de la salida plana y un número finito de sus derivadas de tiempo.

Considere un sistema SISO dado por::

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\z &= h(x)\end{aligned}\tag{2.16}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control y $z \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema. El sistema (2.16) es plano si existe una salida endógena ψ tal que:

$$\psi = \varphi(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})\tag{2.17}$$

Donde:

$$\begin{aligned}x &= \phi(\psi, \dot{\psi}, \dots, \psi^{(\beta)}) \\u &= \rho(\psi, \dot{\psi}, \dots, \psi^{(\beta+1)}) \\z &= \gamma(\psi, \dot{\psi}, \dots, \psi^{(\beta)})\end{aligned}\tag{2.18}$$

Al conjunto de ecuaciones (2.18), donde $\beta \in \mathbb{Z}^+$, se les denomina parametrización diferencial del sistema en función de la salida plana ψ . Los sistemas SISO planos son, por lo tanto, sistemas completamente parametrizables diferencialmente en términos de una función diferencial de la salida plana.

2.2.1. Controlabilidad en sistemas lineales

Considerando el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.19)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. La controlabilidad de un sistema lineal, sólo depende del par de matrices A y B como se muestra en el siguiente criterio obtenido por R.E. Kalman:

Teorema 2.2.1 *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (2.19) sea controlable es que el rango de la matriz*

$$C = (B:AB:\dots:A^{n-1}B) \quad (2.20)$$

sea igual a n. La matriz C es llamada matriz de controlabilidad de Kalman y es de tamaño $n \times n$. Este Teorema y la prueba del mismo se pueden encontrar en [22]

2.2.2. Relación entre planitud y controlabilidad

La relación entre planitud y controlabilidad en el contexto de los sistemas SISO lineales invariantes en el tiempo es: “controlabilidad y planitud son equivalentes”.

Un sistema lineal representado como función de transferencia, mantiene la propiedad de controlabilidad siempre y cuando, tanto el numerador como el denominador sean coprimos, es decir, no existen factores comunes no triviales que ocasionen una cancelación de términos en la función de transferencia, véase [19]. Considerando el siguiente sistema lineal, a través, de su representación como función de transferencia:

$$y(s) = \frac{n(s)}{d(s)}u(s) \quad (2.21)$$

$$y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} u(s) \quad \text{con } m < n \quad (2.22)$$

Donde $y(s)$ representa la salida del sistema, $u(s)$ es la señal de entrada de control y $n(s)$ y $d(s)$ son polinomios coprimos en el dominio de la frecuencia, por tanto, el sistema es controlable. Se define una salida ψ , como

$$\psi(s) = k \frac{u(s)}{d(s)} \quad (2.23)$$

Con $k \neq 0$, como una constante arbitraria. Se muestran expresiones para las variables del sistema. La salida y la entrada son expresadas como funciones diferenciales de ψ .

$$y(s) = \frac{1}{k}n(s)\psi(s) \quad y \quad u(s) = \frac{1}{k}d(s)\psi(s) \quad (2.24)$$

Debido a que el sistema (2.21) es controlable, entonces, existen dos polinomios $p(s)$ y $q(s)$ acordes con la identidad de Bezout, tales que:

$$p(s)n(s) + q(s)d(s) = 1$$

Multiplicando ambos lados por la salida definida ψ

$$p(s)n(s)\psi(s) + q(s)d(s)\psi(s) = \psi(s) \quad (2.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.24), se obtiene

$$k(p(s)z(s) + q(s)u(s)) = \psi(s) \quad (2.26)$$

La salida ψ depende de la entrada del sistema u , de la salida del sistema z y de un numero finito de sus derivadas. ψ es una salida endógena. Entonces para un sistema lineal SISO controlable, se puede encontrar una salida plana.

Ahora se tiene que un sistema lineal SISO, con entrada $u(s)$ y salida $y(s)$ es plano. Es decir que existe una salida plana, $\psi(s)$, la cual, es una función diferencial de la entrada y de la salida, por lo tanto, existen polinomios $a(s)$ y $b(s)$ tal que:

$$\psi(s) = a(s)y(s) + b(s)u(s) \quad (2.27)$$

Se colocan todas las variables del sistema en términos de $\psi(s)$

$$y(s) = p(s)\psi(s) \quad y \quad u(s) = q(s)\psi(s) \quad (2.28)$$

Se sustituyen las ecuaciones (2.28) en (2.27), tal que

$$\begin{aligned} \psi(s) &= a(s)p(s)\psi(s) + b(s)q(s)\psi(s) \\ &= (a(s)p(s) + b(s)q(s))\psi(s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Entonces

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = 1 \quad (2.30)$$

Por lo que, $q(s)$ y $p(s)$ son coprimos, lo que implica que el sistema (2.31) es controlable

$$y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}u(s) \quad (2.31)$$

Con esto se prueba que un sistema lineal SISO es plano, si y solo si, es controlable. Esta prueba puede encontrarse en [46], así como un análisis más detallado de sistemas planos SISO lineales invariantes en el tiempo.

2.2.3. Controlabilidad mediante la representación de estados y obtención de la salida plana para sistemas SISO

Se considera el sistema (2.21). La salida plana para cualquier valor constante $k \neq 0$, está dada por:

$$\psi(s) = \frac{k}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} u(s) \quad (2.32)$$

Se realiza una representación entrada salida del sistema en términos de una ecuación diferencial y una ecuación de salida escalar, dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d^n \psi}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \psi}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \psi &= ku \\ y &= \frac{1}{k} \left[b_m \frac{d^m \psi}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} \psi}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \psi \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se coloca el sistema en su representación canónica controlable en espacio de estados. Se definen las siguientes expresiones: $x_1 = \psi, x_2 = \dot{\psi}, \dots, x_n = \psi^{(n-1)}$ y se obtiene la siguiente representación.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + Bu, \quad y = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad C = \frac{1}{k} (b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

Mediante, la implementación del criterio de Kalman, se verifica la controlabilidad del sistema.

La matriz de controlabilidad de Kalman para el sistema (2.34) esta dada por:

$$C_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ 1 & -a_{n-1} & \dots & * \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Por lo que la matriz es de rango completo, es decir, es una matriz no singular, por lo tanto, el sistema es controlable. Se define mediante una transformación de coordenadas la entrada de control del sistema, estableciendo como nueva entrada a:

$$v = ku - a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n \quad (2.36)$$

El nuevo sistema, con la entrada redefinida, es reducida a un sistema en la forma canónica de Brunovsky.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (2.37)$$

Donde nuevamente la salida plana ψ esta dada por la primera coordenada del estado $\psi = x_1$. Cualquier sistema lineal controlable, invariante en el tiempo SISO, en su forma canónica controlable, es por lo tanto equivalente, bajo una transformación estática de coordenadas de la entrada, a un sistema lineal en la forma canónica de Brunovsky.

$$\psi^{(n)} = v \quad (2.38)$$

Por otro lado se toma el polinomio característico de la matriz constante A del sistema (2.19) escrito en la variable compleja s , dado por:

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (2.39)$$

Se define una transformación de coordenadas en el espacio de estados, para el sistema (2.19), dada por, $z = Tx$, donde, T esta definida como la inversa de la matriz de controlabilidad de Kalman.

$$T = [B, AB, \cdots A^{n-1}B]^{-1} \quad (2.40)$$

El sistema en términos de las nuevas coordenadas z , se representa de la siguiente manera:

$$\dot{z} = \Lambda z + \gamma u, \quad \Lambda = TAT^{-1}, \quad \gamma = Tb \quad (2.41)$$

Donde:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La coordenada de estado $\psi = z_n$, parametriza completamente las variables de estado transformadas, las variables originales x y la entrada del sistema u . Se puede verificar que las variables transformadas y las variables de entrada del sistema u , pueden ser escritas en términos de ψ y de un número finito de sus derivadas.

$$\begin{aligned} z_{n-1} &= \dot{\psi} + \alpha_{n-1}\psi \\ z_{n-2} &= \ddot{\psi} + \alpha_{n-1}\dot{\psi} + \alpha_{n-2}\psi \\ &\vdots \\ z_1 &= \psi^{(n-1)} + \alpha_{n-1}\psi^{(n-2)} + \cdots + \alpha_1\psi \\ u &= \psi^{(n)} + \alpha_{n-1}\psi^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0\psi \end{aligned} \quad (2.42)$$

El análisis anterior así como la siguiente proposición pueden ser encontrados en [46].

Proposición 2.2.1 *La salida plana de un sistema lineal controlable en su forma de espacio de estado:*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Está dada, módulo un factor constante, por una combinación lineal de los estados obtenidos mediante el último renglón de la matriz inversa de controlabilidad de Kalman (2.20)

$$\psi = k [0 \ 0 \ \cdots \ 1] [B, AB, \dots, A^{n-1}B]^{-1} x \quad (2.43)$$

Ahora, supongamos que la salida plana es una función que sólo depende del estado, en consecuencia, todos los estados originales x pueden también ser parametrizados en términos de la salida plana ψ . Ya que el sistema es lineal podemos suponer que ψ es una función lineal del vector de estado x .

$$\psi = \lambda x \quad (2.44)$$

El problema al encontrar la salida plana del sistema puede ser visto como la forma de encontrar el vector λ de dimensiones $1 \times n$ de la ecuación (2.44). Se determina el siguiente vector, a través, de $n - 1$ derivadas de la salida plana ψ y sustituir (2.19).

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda x \\ \dot{\psi} &= \lambda \dot{x} = \lambda Ax + \lambda Bu \\ \ddot{\psi} &= \lambda A^2 x + \lambda ABu + \lambda B\dot{u} \\ &\vdots \\ \psi^{(n-1)} &= \lambda A^{n-1} x + \lambda A^{n-2} bu + \cdots + \lambda bu^{(n-2)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

En forma matricial, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \vdots \\ \lambda A^{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda B & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda AB & \lambda B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda A^{n-2} B & \lambda A^{n-3} B & \cdots & \lambda B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Puesto que a partir de aquí deberíamos ser capaces de obtener el estado del sistema x en términos de la salida plana ψ y sólo con sus derivadas temporales, todas las entradas en la matriz que relacionan la salida plana ψ , y las derivadas de esta, con u y las derivadas temporales de u , deberían desaparecer. Entonces tenemos que λ debe satisfacer:

$$\lambda B = 0, \quad \lambda AB = 0, \dots, \lambda A^{n-2} B = 0 \quad (2.47)$$

Es decir el vector λ debe ser ortogonal a todo vector columna de la matriz de controlabilidad a excepción del último vector con el cual debe de estar alineado. Se debe asegurar que el término $\lambda A^{n-1} B \neq 0$ de lo contrario la única solución sería $\lambda = 0$. Con esto obtenemos

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \vdots \\ \lambda A^{n-1} \end{pmatrix} x \quad (2.48)$$

Se debe considerar que el vector que multiplica a x , debe de ser invertible, con esto se asegura que la salida plana es una salida observable, para algún grado relativo n . Si lo anterior no sucede, entonces, se tiene un vector φ , tal que

$$\varphi \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \vdots \\ \lambda A^{n-1} \end{pmatrix} x = 0 \quad (2.49)$$

Con lo que ψ , evoluciona por si sola y no esta relacionada con ninguna otra variable del sistema, por lo tanto, ψ es una variable exógena, lo que vuelve al sistema no controlable. Para que el sistema, mantenga la propiedad de controlabilidad, se debe satisfacer que $\lambda A^{n-1}B = k$. Entonces

$$\lambda [B, AB, \dots, A^{n-2}B, A^{n-1}B] = [0, 0, \dots, k] \quad (2.50)$$

Por lo tanto ya que el sistema es controlable, se tiene

$$\lambda = k [0, 0, \dots, 1] [B, AB, \dots, A^{n-1}B]^{-1} \quad (2.51)$$

Entonces λ es proporcional al último renglón de la matriz de controlabilidad. De la ecuación (2.48) se puede observar que ψ , parametriza diferencialmente todas las variables del sistema.

$$x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda A \\ \vdots \\ \lambda A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

De la ecuación matricial (2.48), se tiene, $\psi^{(n-1)} = \lambda A^{n-1}x$, derivando y sustituyendo el modelo lineal (2.19), se encuentra la siguiente expresión

$$\psi^{(n)} = \lambda A^{n-1}\dot{x} = \lambda A^n x + \lambda A^{(n-1)}Bu \quad (2.53)$$

Por otro lado recordando el teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema 2.2.2 *Cada matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Esto es, si $p(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A , entonces $p(A) = 0$. Este Teorema y la prueba del mismo se pueden encontrar en [14]*

Sea A una matriz cuadrada definida sobre \mathbb{R} la cual pertenece al sistema (2.19), con un polinomio característico dado por:

$$p(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (2.54)$$

Entonces la siguiente relación es valida.

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I = 0 \quad (2.55)$$

Así, la n -ésima potencia de la matriz A de dimensiones $n \times n$, puede expresarse como una combinación lineal de potencias de A que nunca exceden la potencia $n-1$.

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_1A - \alpha_0I \quad (2.56)$$

Se sustituye en la ecuación (2.53), con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= \lambda A^n x + \lambda A^{(n-1)} B u \\ &= \lambda (-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_1A - \alpha_0I)x + k u \end{aligned} \quad (2.57)$$

Equivalentemente, se puede reescribir tomando en cuenta la ecuación (2.48).

$$\psi^{(n)} = -\alpha_{n-1}\psi^{(n-1)} - \dots - \alpha_1\dot{\psi} - \alpha_0\psi + k u \quad (2.58)$$

Despejando a la variable u se tiene

$$k u = \psi^{(n)} + \alpha_{n-1}\psi^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{\psi} + \alpha_0\psi \quad (2.59)$$

tal, es posible obtener una salida endógena, iniciando con una combinación lineal de los estados del sistema como lo muestra la ecuación (2.44), con la cual es posible parametrizar diferencialmente el sistema (2.19) de manera completa.

2.3. Control por Rechazo Activo de Perturbaciones

El control por rechazo activo de perturbaciones, se ha estudiado desde el siglo XIX. El ingeniero y matemático francés Jean Victor Poncelet, sugirió en 1829 el llamado principio de invariancia, “*las perturbaciones deben ser utilizadas para generar una señal activa que tenderá a cancelar el efecto de las mismas perturbaciones*”. Véase [32]. El principio de invariancia, o principio de Poncelet, fue reforzado con el llamado principio de retroalimentación. En aquellos primeros días, el enfoque era fundamentalmente lineal, y el análisis se realizaba en sistemas descritos por funciones de transferencia en el dominio de la variable compleja.

En la década de 1960, la metodología se abordó dentro de la representación de los sistemas en espacio de estados. En este caso la perturbación de entrada, se trató como un estado ficticio, que se estima con la ayuda de un observador del estado. Naturalmente, el proceso de estimación estaba dirigido a proporcionar la acción de control de realimentación con una capacidad de cancelación de perturbaciones.

Los desarrollos iniciales fueron propuestos por C.D. Johnson en los años 70 véase [18]. En el trabajo de C.D. Johnson, se muestran las modificaciones que realizó a las teorías existentes en aquel entonces para tener en cuenta la presencia de perturbaciones fluctuantes persistentes. En [27], se describe el diseño de un controlador, denominado controlador adaptativo de acomodación de perturbaciones, que elimina el efecto de estas perturbaciones en la salida de la planta.

En la década de los noventa, el fallecido profesor Jingqing Han, propuso tanto para las incertidumbres dinámicas como para las perturbaciones externas desconocidas, el ESO. Las contribuciones de Han en ese momento formaron la columna vertebral del nuevo paradigma de diseño ADRC. Véase [12]. La metodología se aplicó con éxito en implementaciones industriales y en laboratorios académicos.

En libros recientes como [15] se incluyen diferentes contribuciones para una amplia gama de sistemas dinámicos.

La idea principal del ADRC, es obtener una expresión simplificada ,la cual, describa a la planta y agrupe todas las perturbaciones, tanto exógenas como endógenas en un sólo termino. Es necesario cancelar los efectos de las perturbaciones, por lo que se utiliza su estimación como parte de la acción de control por retroalimentación. La pieza fundamental y uno de los puntos más cuestionados del ADRC es tratar las perturbaciones en un sólo bloque unificado, que esencialmente, toma perturbaciones tanto endógenas como exógenas, considerando a ambas con la misma naturaleza.

El ADRC, hace uso de la dinámica del sistema en una relación de entrada-salida en la que se mantienen los aspectos estructurales más sobresalientes, como el orden del sistema y los factores que acompañan a las variables de entrada de control. El ADRC tiene como objetivo, reducir un proceso complejo a una planta afectada por un término de perturbación total, que es fácil de controlar por medio de una ley de control de retroalimentación de salida.

La ley de control por retroalimentación, generalmente requiere un conocimiento completo del estado del sistema. Entonces se requiere diseñar un observador de un sólo estado que estime simultáneamente las variables de estado no medidas del sistema y las perturbaciones desconocidas.

2.3.1. Observador de estado extendido

Para un sistema de control no lineal, por lo general, no podemos determinar el vector de estado del sistema de forma completa, a partir, de las variables de salida medidas. Normalmente se conoce la salida del sistema o bien algunas variables de estado, las cuales, sólo son información parcial. De esta forma surge la siguiente pregunta ¿Cómo conocer el vector de estado utilizando solamente la salida del sistema?.

En este trabajo se plantea que la estimación del estado de un sistema se puede realizar mediante el diseño de un ESO, es decir, un sistema capaz de proporcionar una estimación del estado interno del sistema y de las perturbaciones. El observador hace que la retroalimentación de la salida sea posible, una vez que esté disponible la información completa del estado.

Se considera el siguiente sistema perturbado de integración pura de orden n

$$y^{(n)} = u + \xi(t) \tag{2.60}$$

Colocándolo en su forma canónica, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + \xi(t)) \\ y &= [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Se propone el siguiente observador de estado extendido de orden m :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{y}_0 &= \hat{y}_1 + \lambda_{m+n-1}(y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{m+n-2}(y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_{n-1} &= u + z_1 + \lambda_m(y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}(y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_2 &= z_3 + \lambda_{m-2}(y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} z_{m-1} &= z_m + \lambda_1(y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_m &= \lambda_0(y_0 - \hat{y}_0) \end{aligned} \quad (2.62)$$

La dinámica del error de estimación está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_0 &= e_1 - \lambda_{m+n-1}e_0 \\ \frac{d}{dt} e_1 &= e_2 - \lambda_{m+n-2}e_0 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} e_{n-1} &= \xi(t) - z_1 - \lambda_m e_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}z_1 &= z_2 + \lambda_{m-1}e_0 \\
\frac{d}{dt}z_2 &= z_3 + \lambda_{m-2}e_0 \\
&\vdots \\
\frac{d}{dt}z_{m-1} &= z_m + \lambda_1e_0 \\
\frac{d}{dt}z_m &= \lambda_0e_0
\end{aligned} \tag{2.63}$$

La dinámica del error de estimación $e_0 = y - \hat{y}_0$, satisface la siguiente ecuación diferencial lineal perturbada.

$$e_0^{(m+n)} + \lambda_{m+n-1}e_0^{(m+n-1)} + \dots + \lambda_1\dot{e}_0 + \lambda_0e_0 = \xi^{(m)} \tag{2.64}$$

Para una derivada temporal de orden m , uniformemente acotada de la señal de perturbación, las trayectorias del error de observación y sus variables de fase asociadas ($e_0(t), \dots, e_{n-1}(t)$), se pueden hacer converger, en un tiempo finito, al interior de una vecindad arbitrariamente pequeña centrada alrededor del origen del espacio de fase del error de observación, considere la n -ésima ecuación en (2.63).

$$\frac{d}{dt}e_{n-1} = \xi(t) - z_1 - \lambda_me_0 \tag{2.65}$$

Se puede observar que la trayectoria de $z_1(t)$ representará una estimación suficientemente cercana de la trayectoria de la señal de perturbación $\xi(t)$. Por lo tanto, se sigue que $z_2 \approx \dot{z}_1$, es decir, $z_2(t)$ se aproximará a la derivada temporal de primer orden de $\xi(t)$ y, en general, $z_i(t), i = 1, 2, \dots, m-1$, representarán, respectivamente, las estimaciones aproximadas en línea de las trayectorias de $\xi^{(i-1)}(t)$, si e_0 y e_{n-1} son arbitrariamente pequeños.

La posibilidad de estimar las derivadas, respecto al tiempo, de la señal de perturbación, la cual, es desconocida $\xi(t)$ es especialmente útil en esquemas de predicción de perturbaciones en sistemas con retardo. Este desarrollo puede ser encontrado en [47].

2.3.2. ADRC para sistemas de integración pura que experimentan los efectos de una entrada de perturbación

Se considera el sistema (2.60), el cual es un sistema de integración pura de orden n perturbado, el cual, admite un ESO, que estima de forma cercana las variables de fase asociadas con la salida ($y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$) y un cierto número de derivadas con respecto al tiempo de la señal de perturbación $\xi(t)$, incluyendo la propia señal de perturbación.

Se tiene, una ley de control por retroalimentación que cancela la perturbación, sobre la base de su estimación en línea e impone una dinámica (perturbada) en lazo cerrado, que aproximadamente resuelve una estabilización o una tarea de seguimiento de una trayectoria de referencia de la salida dada por $y^*(t)$.

El controlador por retroalimentación, para una tarea en la que $y \rightarrow y^*(t)$, la cual, representa el objetivo deseado, está dado por

$$u = [y^*(t)]^{(n)} - z_1 - \sum_{j=0}^{n-1} k_j \left(\hat{y}_j - [y^*(t)]^{(j)} \right) \quad (2.66)$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{y}_0 &= \hat{y}_1 + \lambda_{m+n-1} (y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_{m+n-2} (y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \hat{y}_{n-1} &= u + z_1 + \lambda_m (y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_1 &= z_2 + \lambda_{m-1} (y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_2 &= z_3 + \lambda_{m-2} (y_0 - \hat{y}_0) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} z_{m-1} &= z_m + \lambda_1 (y_0 - \hat{y}_0) \\ \frac{d}{dt} z_m &= \lambda_0 (y_0 - \hat{y}_0) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Se define el error de seguimiento de la salida como $e_y = y - y^*(t)$, el error de estimación, dado por, $e_0 = y - \hat{y}_0$ y las derivadas del error de estimación $e_0^{(j)} = y^{(j)} - \hat{y}_j$.

Se puede apreciar en la ecuación (2.68), la dinámica del error de estimación para e_0 , está dada, por

$$e_0^{(m+n)} + \lambda_{m+n-1} e_0^{(m+n-1)} + \dots + \lambda_1 \dot{e}_0 + \lambda_0 e_0 = \xi^{(m)} \quad (2.68)$$

Después de sustituir \hat{y}_j en (2.66) por $\hat{y}_j = y^{(j)} - e_0^{(j)}$, el error de seguimiento $e_y = y - y^*(t)$ evoluciona satisfaciendo la siguiente dinámica de lazo cerrado:

$$e_y^{(n)} + k_{n-1} e_y^{(n-1)} + \dots + k_0 e_y = \xi(t) - z_1 + \sum_{j=0}^{n-1} k_j e_0^{(j)} \quad (2.69)$$

Los conjuntos de coeficientes $\{k_0, k_1, \dots, k_{n-1}\}$ y $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{m+n-1}\}$ se eligen para ser conjuntos Hurwitz. Un conjunto finito de coeficientes reales se dicen conformar un “conjunto de Hurwitz” si estos coeficientes son coeficientes de polinomios cuyas raíces exhiben parte real estrictamente negativa.

El término de perturbación $\xi(t) - z_1$ es arbitrariamente pequeño, así como los términos $e_0^{(j)}$ para todo j . Entonces, el lado derecho de (2.69) resulta ser un término pequeño de perturbación que afecta a una dinámica que si no hubiesen perturbaciones sería exponencial asintóticamente estable. El resultado neto es que no hay necesidad de elegir altas ganancias para el controlador de realimentación lineal (2.66). Este desarrollo puede ser encontrado en [47].

2.4. Control integral proporcional generalizado

Uno de los problemas a resolver en el diseño de controladores para sistemas dinámicos, es el uso de controladores eficientes manejando la mínima cantidad posible de información. Se tiene conocimiento de múltiples enfoques usados para el control de estos sistemas, como se mencionó en la sección 2.3, uno de ellos es el uso de observadores de estado extendido, que utiliza la información de entradas y salidas para construir una estimación, arbitrariamente cercana, de las variables de fase y de la perturbación aditiva con el fin de lograr una cancelación (aproximada) de las perturbaciones que afectan el sistema. Otro enfoque se encuentra en el dominio de las redes clásicas de compensación por medio del GPIC.

Mediante la interpretación del GPIC en términos de redes clásicas de compensación se busca obtener un “*Filtro plano*”, el cual se pretende usar como una herramienta para el control por retroalimentación de la salida de sistemas lineales controlables provenientes de linealizaciones tangentes de sistemas no lineales alrededor de un punto de equilibrio.

Si un sistema lineal controlable presenta una salida plana, este es observable desde la salida plana. El filtro plano se basa en el hecho de que un controlador GPI robusto se puede considerar como un sistema lineal dinámico que tiene una salida plana.

El filtro plano constituye una versión robusta y una reinterpretación, en forma de red clásica de compensación, del controlador GPI. El GPIC fue planteado por Michel Fliess y Richard Marquez, véase [10], [11], donde presentan un marco general basado en la propiedad de planitud para el control predictivo lineal continuo.

Cualquier sistema lineal, controlable y perturbado, cuya salida del modelo del sistema lineal no perturbado sea una salida plana, puede ser controlado con la ayuda de un filtro lineal apropiado, esté también es capaz de manejar eficientemente el control de sistemas no lineales que tienen linealización tangente alrededor de un punto de equilibrio.

En este trabajo se pretende hacer uso de un control GPI, como red de compensación clásica. Con la finalidad de agregar robustez al esquema tradicional GPI se hace uso de un número extra de integradores (los cuales funcionan como modelos aproximados de las no-linealidades en términos de expansiones en serie de Taylor con coeficientes variables en el tiempo), ya que se hará uso de un modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio, quedando no linealidades sin compensar.

2.4.1. Control integral proporcional generalizado para sistemas de integración pura

Considérese el siguiente sistema de integración pura:

$$y^{(n)} = u \tag{2.70}$$

La dinámica del error de seguimiento, correspondiente, a una trayectoria de referencia de salida $y^*(t)$, esta dada por:

$$e_y^{(n)} = e_u, \quad e_y = y - y^*, \quad e_u = u - u^*, \quad [y^*]^{(n)} = u^* \quad (2.71)$$

Tomando en cuenta la siguiente notación para integraciones múltiples de una función que depende del tiempo $\Phi(t)$:

$$\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{i-1}} \Phi(\sigma_i) d\sigma_i \cdots d\sigma_1 = \int^{(i)} \Phi(t) \quad (2.72)$$

Se proponen como reconstructores integrales de las variables $\dot{e}_y, \dots, e_y^{(n-1)}$

$$\widehat{e_y^{(n-i)}} = \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_{i-1}} e_u(\sigma_i) d\sigma_i \cdots d\sigma_1 = \int^{(i)} e_u(t) \quad (2.73)$$

De la misma forma se definen los errores debidos a las condiciones iniciales de los reconstructores integrales:

$$\sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \quad (2.74)$$

Con lo que se obtiene:

$$e_y^{(n-i)} = \widehat{e_y^{(n-i)}} + \sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.75)$$

Un controlador lineal por retroalimentación, basado en reconstructores integrales, requiere una compensación mediante integraciones múltiples o iteradas, realizadas sobre la señal de error de seguimiento de la salida $e_y(t)$:

$$\begin{aligned} e_u(t) &= - \sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \widehat{e_y^{(n-i)}} - \sum_{i=1}^n k_{n-i} \left(\int^{(i-1)} e_y(t) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \left(\int^{(i)} e_u(t) \right) - \sum_{i=1}^n k_{n-i} \left(\int^{(i-1)} e_y(t) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int^{(i)} (k_{2n-i-1} e_u(t) + k_{n-i-1} e_y(t)) \right) - k_{n-1} e_y \end{aligned} \quad (2.76)$$

En la figura 2.2 se representa el controlador GPI para seguimiento de trayectoria junto con una planta de integración pura de orden n . Tomando en cuenta las expresiones anteriores, el sistema en bucle cerrado también puede ser representado por la ecuación (2.77).

$$\begin{aligned} e_y^{(n)} &= - k_{2n-2} \widehat{e_y^{(n-1)}} - k_{2n-3} \widehat{e_y^{(n-2)}} - \cdots - k_n \widehat{e_y} - k_{n-1} e_y \\ &\quad - k_{n-2} \left(\int^{(1)} e_y \right) - \cdots - k_1 \left(\int^{(n-2)} e_y \right) - k_0 \left(\int^{(n-1)} e_y \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

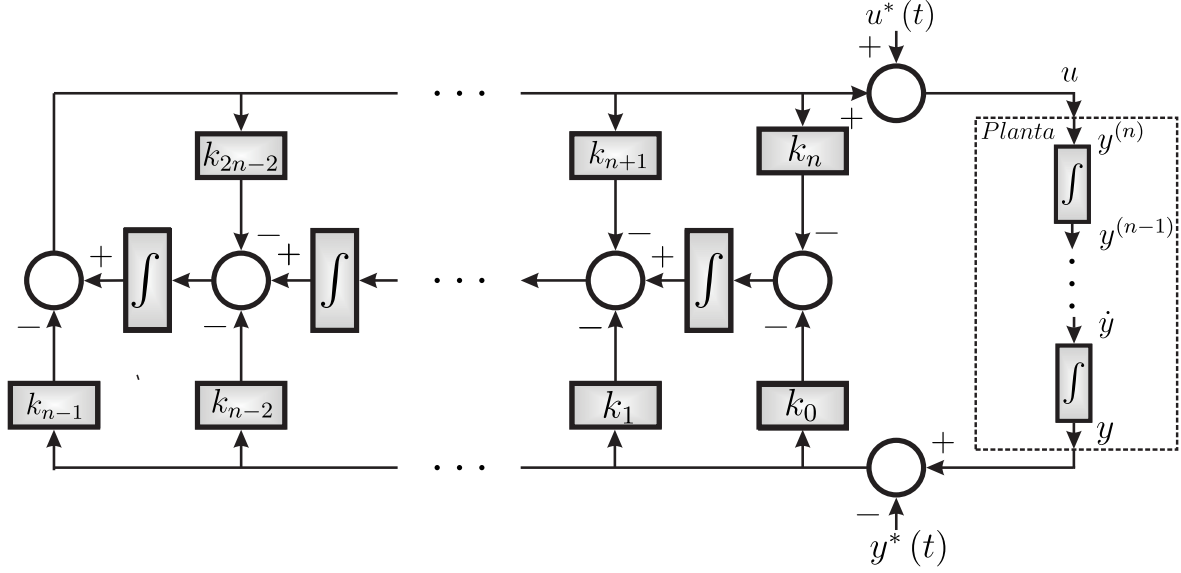


Figura 2.2: GPIC de un sistema de orden n a través de reconstructores integrales.

Sustituyendo las expresiones encontradas para las variables de fase estimadas en (2.75), en la ecuación (2.77), incluyendo los efectos de las condiciones iniciales al colocar los reconstructores integrales obtenemos la siguiente dinámica.

$$\begin{aligned}
 e_y^{(n)} = & - k_{2n-2}e_y^{(n-1)} - k_{2n-3}e_y^{(n-2)} - \dots - k_n\dot{e}_y - k_{n-1}e_y \\
 & - k_{n-2} \left(\int^{(1)} e_y \right) - \dots - k_0 \left(\int^{(n-1)} e_y \right) \\
 & + \left(\sum_{i=1}^{(n-1)} k_{2n-i-1} \sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \right) \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Definiendo las siguientes variables:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \left(\int^{(1)} e_y \right) + \frac{k_{n-3}}{k_{n-2}} \left(\int^{(2)} e_y \right) + \dots + \frac{k_1}{k_{n-2}} \left(\int^{(n-2)} e_y \right) + \frac{k_0}{k_{n-2}} \left(\int^{(n-1)} e_y \right) \\
 & - \left(\sum_{i=1}^{(n-1)} \frac{k_{2n-i-1}}{k_{n-2}} \sum_{j=1}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\
 z_1(0) &= \frac{k_{2n-2}}{k_{n-2}} e_y^{(n-1)}(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(\int^{(1)} e_y \right) + \frac{k_{n-4}}{k_{n-3}} \left(\int^{(2)} e_y \right) + \cdots + \frac{k_1}{k_{n-3}} \left(\int^{(n-3)} e_y \right) + \frac{k_0}{k_{n-3}} \left(\int^{(n-2)} e_y \right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{(n-1)} \frac{k_{2n-i-1}}{k_{n-3}} \sum_{j=2}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-2}}{(j-2)!} \right) \\
z_2(0) &= \frac{k_{2n-2}}{k_{n-3}} e_y^{(n-2)}(0) + \frac{k_{2n-3}}{k_{n-3}} e_y^{(n-1)}(0) \\
&\quad \vdots \\
z_{n-2} &= \left(\int^{(1)} e_y \right) + \frac{k_0}{k_1} \left(\int^{(2)} e_y \right) - \left(\sum_{i=1}^{(n-1)} \frac{k_{2n-i-1}}{k_1} \sum_{j=n-2}^i e_y^{(n-i+j-1)}(0) \frac{t^{j-n+2}}{(j-n+2)!} \right) \\
z_{n-2}(0) &= \frac{k_{2n-2}}{k_1} e_y^{(2)}(0) + \frac{k_{2n-3}}{k_1} e_y^{(3)}(0) + \cdots + \frac{k_{n+1}}{k_1} e_y^{(n-1)}(0) \\
z_{n-1} &= \left(\int^{(1)} e_y \right) \\
z_{n-1}(0) &= \frac{k_{2n-2}}{k_0} e_y^{(1)}(0) + \frac{k_{2n-3}}{k_0} e_y^{(2)}(0) + \cdots + \frac{k_n}{k_0} e_y^{(n-1)}(0) \tag{2.79}
\end{aligned}$$

El sistema en lazo cerrado, está dado por la siguiente ecuación:

$$e_y^{(n)} = -k_{2n-2} e_y^{(n-1)} - \cdots - k_n \dot{e}_y - k_{n-1} e_y - k_{n-2} z_1$$

$$\dot{z}_i = e_y + \frac{k_{n-i-2}}{k_{n-i-1}} z_{i+1}, \quad i=1, \dots, n-2$$

$$\dot{z}_{n-1} = e_y \tag{2.80}$$

Se eliminan las variables z de la ecuación (2.80) mediante la diferenciación directa con respecto al tiempo de $e_y^{(n)}$ $n-1$ veces. Obtenemos la ecuación diferencial de lazo cerrado para la señal de error de seguimiento e_y , la cual está expresada como:

$$e_y^{(2n-1)} + k_{2n-2} e_y^{(2n-2)} + \cdots + k_1 \dot{e}_y + k_0 e_y = 0 \tag{2.81}$$

El polinomio característico de esta ecuación, está dado por:

$$p(s) = s^{2n-1} + k_{2n-2} s^{2n-2} + \cdots + k_1 s + k_0 \tag{2.82}$$

Un conjunto adecuado de coeficientes de diseño $\{k_{2n-2}, k_{2n-1}, \dots, k_1, k_0\}$, puede garantizar que la localización de todas las raíces del polinomio dado en la ecuación (2.82), se encuentren situadas en la mitad izquierda del plano complejo, garantizando la estabilidad asintótica de la trayectoria de error de seguimiento de la salida en lazo cerrado.

Partiendo de la siguiente representación:

$$e_y^{(n)} = e_u = - \sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-i-1} \left(\int^{(i)} e_u(t) \right) - \sum_{i=1}^n k_{n-i} \left(\int^{(i-1)} e_y(t) \right) \tag{2.83}$$

Se ordena y coloca la expresión (2.83) en el dominio de la frecuencia, tomando en cuenta que la transformada de Laplace de una integral iterada $\left(\int^{(i)} \phi(t)\right)$ esta dado por $\frac{\phi(s)}{s^i}$. Se obtiene una expresión para el controlador como una red de compensación clásica dada por la ecuación (2.84) y se muestra un esquema de la misma en la figura 2.3.

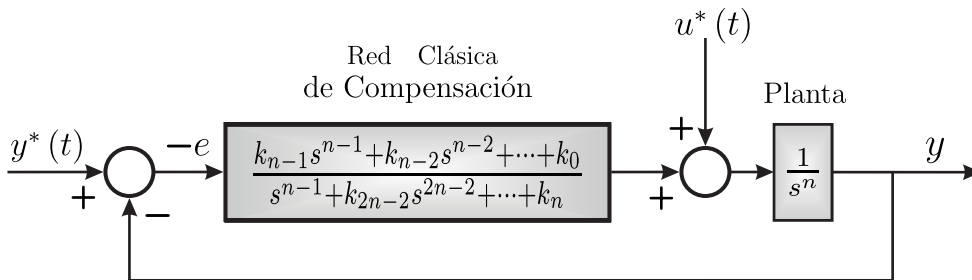


Figura 2.3: GPIC para una planta de integración pura de orden n como una red de compensación clásica

$$e_u(s) = - \left[\frac{k_{n-1}s^{n-1} + k_{n-2}s^{n-2} + \dots + k_0}{s^{n-1} + k_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + k_n} \right] e_y(s) \quad (2.84)$$

Una reinterpretación del controlador GPI conduce a un esquema de control basado en filtrado plano. Se define, en el dominio de la frecuencia, el error filtrado del seguimiento de la salida como:

$$e_{yf}(s) = \left(\frac{1}{s^{n-1} + k_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + k_n} \right) e_y(s) \quad (2.85)$$

Se colocan en el dominio del tiempo, al controlador y al error de filtrado del seguimiento de la salida, como se muestra continuación, partiendo de la ecuación (2.85).

$$\begin{aligned} (y - y^*) &= e_{yf}(s) (s^{n-1} + k_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + k_n) \\ (y - y^*) &= e_{yf}(s) s^{n-1} + k_{2n-2}e_{yf}(s) s^{2n-2} + \dots + k_n e_{yf}(s) \\ (y - y^*) &= e_{yf}^{(n-1)} + k_{2n-2}e_{yf}^{(n-2)} + \dots + k_n e_{yf} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Despejando al termino de más alto orden tenemos:

$$\begin{aligned} e_{yf}^{(n-1)} &= -k_{2n-2}e_{yf}^{(n-2)} - \dots - k_n e_{yf} + (y - y^*) \\ e_u &= -k_{n-1}e_{yf}^{(n-1)} - k_{n-2}e_{yf}^{(n-2)} - \dots - k_0 e_{yf} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Tanto el error de seguimiento de la salida $e_y = y - y^*(t)$, como el error de entrada $e_u = u - u^*(t)$, es posible expresarlos en términos de la salida filtrada e_{yf} y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo. A continuación, se colocan en su forma de espacio de estados.

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_{n-1} &= -k_{2n-2}\zeta_{n-1} - \dots - k_{n+1}\zeta_2 - k_n\zeta_1 + (y - y^*(t)) \\
\dot{\zeta}_i &= \zeta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \\
e_{yf} &= \zeta_1 \\
e_u &= (k_{n-1}k_{2n-2} - k_{n-2})\zeta_{n-1} + (k_{n-1}k_{2n-3} - k_{n-3})\zeta_{n-2} + \dots \\
&\quad + (k_{n-1}k_{n+1} - k_1)\zeta_2 + (k_{n-1}k_n - k_0)\zeta_1 - k_{n-1}(y - y^*)
\end{aligned} \tag{2.88}$$

2.4.2. GPIC para sistemas de integración pura que experimentan los efectos de una entrada de perturbación

Como un caso adicional a la tarea de control de seguimiento de trayectoria de referencia de salida sin el uso de observadores, para una cadena de n integradores, la cual, experimenta los efectos de una entrada de perturbación uniformemente acotada $\xi(t)$, y está dada por la siguiente ecuación.

$$y^{(n)} = \alpha u + \xi(t), \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.89}$$

La perturbación $\xi(t)$ es modelada localmente como un polinomio de grado $m-1$ dependiente del tiempo. El controlador como filtro plano o controlador como red de compensación clásica robusta, tomando en cuenta que $u^*(t) = (\frac{1}{\alpha})[y^*(t)]^{(n)}$, está dado por la ecuación:

$$u = u^*(t) - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{k_{n+m-1}s^{n+m-1} + k_{n+m-2}s^{n+m-2} + \dots + k_0}{s^m (s^{n-1} + k_{2n+m-2}s^{n-2} + \dots + k_{n+m})} \right] (y - y^*(t)) \tag{2.90}$$

El polinomio característico del sistema en lazo cerrado está dado por:

$$p(s) = s^{2n+m-1} + k_{2n+m-2}s^{2n+m-2} + k_{2n+m-3}s^{2n+m-3} + \dots + k_1s + k_0 \tag{2.91}$$

Debido a que el menor orden de diferenciación, inducido por el controlador propuesto en el término de perturbación $\xi(t)$, es m , la perturbación modelada es eliminada. El análisis presentado en la sección 2.4 puede ser encontrado en [47].

2.5. Algoritmos de consenso

2.5.1. Teoría de Grafos

En esta sección, se introducen algunos conceptos básicos acerca de la teoría de grafos, utilizados posteriormente en este trabajo. Para más detalles acerca de esta teoría consulte [13],[24].

La teoría de grafos usa grafos como herramientas para representar los protocolos de comunicación entre agentes, esta es una forma clara y simple de interpretar el intercambio de información, con lo que es posible ver a un conjunto de sistemas (sin importar su dinámica) como elementos conectados que buscan lograr un objetivo en común.

Un grafo \mathcal{G} es un par ordenado $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$, donde \mathcal{N} es un conjunto finito de vértices o nodos, $\mathcal{N} = 1, \dots, n$ y \mathcal{E} es un conjunto de enlaces o bordes que relacionan los nodos, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Un enlace de \mathcal{G} es denotado como $e_{ij} = (i, j)$.

2.5.2. Tipos de Grafos y definiciones

Un *grafo dirigido* es un par $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$, donde en el enlace $e_{ij} = (i, j) \in \mathcal{E}$, el nodo j puede obtener información del nodo i , pero no necesariamente al revés. Por lo tanto el i -ésimo nodo, es llamado nodo padre y el j -ésimo es llamado nodo hijo. Por otro lado un *grafo no dirigido* indica que en el enlace $e_{ij} = (i, j)$, los nodos j e i pueden obtener información uno del otro.

Un *camino dirigido* es una secuencia de enlaces en un grafo dirigido de la forma e_{12}, e_{23}, \dots o bien $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots$. Un ciclo es un camino dirigido que empieza y finaliza en el mismo nodo. Por otro lado, un camino no dirigido es aquel que es generado de la misma forma que un dirigido, pero, haciendo uso de un grafo no dirigido.

Un *árbol dirigido* es un grafo dirigido, en donde cada nodo tiene exactamente un sólo nodo padre excepto para un nodo, llamado nodo raíz, el cual no tiene padre. Es importante mencionar que la raíz tiene un camino dirigido a todos los otros nodos.

Un árbol de expansión dirigido de \mathcal{G} es un árbol dirigido que contiene todos los nodos de \mathcal{G} . Un grafo dirigido contiene un árbol de expansión dirigido si existe un árbol de expansión dirigido como un subconjunto del grafo dirigido, es decir, si existe cuando menos un nodo que tiene un camino dirigido hacia todos los demás nodos.

Una *Matriz de Adyacencia* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de un grafo dirigido con un conjunto de nodos $\mathcal{N} = 1, \dots, n$, es ponderada de la siguiente manera, $a_{ij} > 0$ si, $e_{ij} \in \mathcal{E}$, en donde $i \neq j$, mientras que, $a_{ij} = 0$ si $e_{ij} \notin \mathcal{E}$. Si la ponderación no es relevante, entonces, $a_{ij} = 1$ para todo $e_{ij} \in \mathcal{E}$. Un grafo es balanceado si $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$ para toda i .

Una *matriz Laplaciana* $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de un grafo dirigido está dada por $l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ y $l_{ij} = -a_{ij}$ para todo $i \neq j$, donde se satisfacen las siguientes condiciones:

$$l_{ji} \leq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^N l_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.92)$$

A lo largo del presente trabajo se usará la notación basada en el producto de Kronecker. el producto de Kronecker de dos matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{P \times Q}$, esta dado por:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

El producto de Kronecker satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (\gamma A) \otimes B &= A \otimes (\gamma B), \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD) \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ A \otimes B + A \otimes C &= A \otimes (B + C) \end{aligned} \quad (2.94)$$

2.5.3. Algoritmos de consenso de orden superior: problema no restringido.

Considerando el siguiente sistema con una dinámica de orden l

$$\begin{aligned} \dot{y}_i^0 &= y_i^1 \\ \dot{y}_i^1 &= y_i^2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_i^{l-2} &= y_i^{l-1} \\ \dot{y}_i^{l-1} &= u_i, \quad i \in 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde $y_i^\kappa \in \mathbb{R}^m$, $\kappa = 0, 1, \dots, l-1$ son los estados del sistema, $u_i \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, y y_i^κ denota la κ -ésima derivada de y_i , tomando en cuenta que, $y_i^0 = y_i$, $i = 1, \dots, n$, n es el número de agentes.

Se busca un consenso no restringido, el cual, es visto como un problema de alineación, donde, se necesita que las variables de interés de un conjunto de “ n ” agentes sean asintóticamente iguales, el valor al cual se sincronizan es conocido como el estado de consenso, el cual, está dado por el promedio de las condiciones iniciales del sistema. Matemáticamente tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^\kappa - y_j^\kappa| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \kappa = 0, \dots, l-1, \quad \forall i \neq j. \quad (2.96)$$

El objetivo de un algoritmo de consenso, es derivar una ley de control u_i , tal que, se logre un consenso entre algunas variables de interés de un conjunto de agentes. Motivados por los artículos [30],[40], donde se busca el consenso de redes de agentes dinámicos con topología fija y conmutada para agentes de primer y segundo orden, los cuales, logran la sincronización de los mismos usando algoritmos de consenso, como los que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \zeta_i \\ \dot{\zeta}_i &= u_i\end{aligned}$$

Donde

$$u_i = - \sum_{j=1}^n g_{ij} k_{ij} [(\xi_i - \xi_j) + \gamma (\zeta_i - \zeta_j)], \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (2.97)$$

Con $k_{ij} > 0$ y $\gamma > 0$, $g_{ii} = 0$, y $g_{ij} = 1$ si hay flujo de información del agente j al i , véase [40]. Se propone el siguiente algoritmo de consenso de orden superior con topología fija usado en [42].

$$u_i = - \sum_{j=1}^n g_{ij} k_{ij} \left[\sum_{\kappa=0}^{l-1} \gamma_{\kappa} (y_i^{\kappa} - y_j^{\kappa}) \right], \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.98)$$

Donde $k_{ij} > 0$ y $\gamma_{\kappa} > 0$, $g_{ii} = 0$, y $g_{ij} = 1$ si hay flujo de información del agente j al i y 0 en cualquier otro caso, para todo $i \neq j$. Se toma en cuenta que k_{ij} representa el peso del enlace e_{ij} y γ_{κ} es un factor de escalamiento. Se puede observar que este algoritmo de consenso engloba el caso de primer y segundo orden. Haciendo uso de la ecuación (2.98) en (2.95) y colocándolo en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}^0 \\ \dot{y}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}^{l-1} \end{bmatrix} = (\eta \otimes I_m) \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^{l-1} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Donde

$$\eta = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & \cdots & I_n \\ -\gamma_0 L & -\gamma_1 L & -\gamma_2 L & \cdots & -\gamma_{l-1} L \end{bmatrix}$$

En η , $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $l_{ii} = \sum_{j \neq i} g_{ij} k_{ij}$, $\forall i = j$ y $l_{ij} = -g_{ij} k_{ij} \forall i \neq j$, L satisface las condiciones dadas en (2.92), I_n es una matriz identidad de dimensiones $n \times n$, 0_n es una matriz de ceros de dimensiones $n \times n$ y cada componente del vector $[y^0 \ y^1 \ \dots \ y^{l-1}]^T$, está dado por $y^{\kappa} = [y_1^{\kappa} \ \dots \ y_n^{\kappa}]^T$, debido al número de agentes. En los resultados de

ahora en adelante sólo se considera el caso cuando $l = 4$ y $m = 1$, tomando en cuenta que los ejemplos desarrollados son sistemas de cuarto orden del tipo SISO. El Análisis también puede ser aplicado al caso $l > 4$.

En el artículo [43] se presenta el *Lema 3.1 pp. 558*, para el caso $l = 3$, el cual, se extiende a continuación para el caso de cuarto orden con $l = 4$.

Se propone que η contenga al menos cuatro valores propios ceros. Se tendrán cuatro valores propios ceros si y sólo si $-L$, tiene un valor propio cero. Con lo que, si $-L$ tiene un valor propio cero, el valor propio cero de η tiene una multiplicidad geométrica igual a uno.

Si λ es un valor propio de η y $q = [p^T, r^T, s^T, z^T]^T$ es su vector propio asociado, en donde p, r, s y z son vectores columna de dimensiones $n \times 1$, se obtiene:

$$\eta q = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & 0_n & I_n \\ -\gamma_0 L & -\gamma_1 L & -\gamma_2 L & -\gamma_3 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

De la ecuación (2.100) se observa que:

$$\begin{aligned} r &= \lambda p \\ s &= \lambda r \\ z &= \lambda s \\ -\gamma_0 Lp - \gamma_1 Lr - \gamma_2 Ls - \gamma_3 Lz &= \lambda z \end{aligned} \quad (2.101)$$

De la ecuación (2.101), se puede ver que, $q = [p^T, \lambda p^T, \lambda^2 p^T, \lambda^3 p^T]^T$, por lo tanto $-\gamma_0 Lp - \gamma_1 L\lambda p - \gamma_2 L\lambda^2 p - \gamma_3 L\lambda^3 p = \lambda^4 p$, lo cual, puede reescribirse como:

$$-Lp = \frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3} p \quad (2.102)$$

Por lo que $\frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3}$, es un valor propio de $-L$, asociado con el vector propio p . Tomando la siguiente relación $\mu = \frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3}$, donde, μ es un valor propio de $-L$ con p como su vector propio asociado, se obtiene:

$$\lambda^4 - \gamma_3 \mu \lambda^3 - \gamma_2 \mu \lambda^2 - \gamma_1 \mu \lambda + \gamma_0 \mu = 0 \quad (2.103)$$

De la ecuación (2.103) se observa que, existen 4 raíces para λ correspondientes a μ , es decir cada valor propio de $-L$ corresponde a 4 valores propios de η . Colocando $\mu_i, i = 0, \dots, n$ como el i -ésimo valor propio de $-L$. De la misma manera $\lambda_{4i-3}, \lambda_{4i-2}, \lambda_{4i-1}$ y λ_{4i} , $i = 1, \dots, n$ son los valores propios de η los cuales corresponden a μ_i . De la ecuación (2.103) se puede observar que si $\mu_i = 0$, implica que, $\lambda_{4i-3} = \lambda_{4i-2} = \lambda_{4i-1} = \lambda_{4i} = 0$. También se puede ver que $-L$ tiene al menos un valor propio cero con un vector propio asociado $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$ es un vector columna de dimensión $n \times 1$ de unos) ya que todas las sumas de sus filas son iguales a 0. Por lo tanto η tiene al menos cuatro valores propios cero.

De la ecuación (2.103) también se puede observar ver que $-L$ tiene un valor propio cero si y sólo si η tiene exactamente cuatro valores propios cero. De la misma forma, si $-L$ tiene

un valor propio cero, denotado como $\mu_1 = 0$, entonces sólo hay un vector propio lineal e independiente p para $-L$ asociado con el valor propio cero. Tenga en cuenta que $\mu_1 = 0$ implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, lo que a su vez implica que $q = [p^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T]^T$. Por lo tanto, sólo hay un vector propio linealmente independiente q para η asociado con el valor propio cero. Es decir, el valor propio cero de η tiene una multiplicidad geométrica igual a uno si $-L$ tiene un valor propio cero.

Haciendo uso de el *teorema 3.1, pp. 559*, presentado en [43] para el caso $l = 3$, el cual, se extiende a continuación para sistemas de cuarto orden con $l = 4$ tomando en cuenta el resultado anterior.

En el caso con $l = 4$, el algoritmo de consenso (2.98), logra el consenso exponencialmente si y sólo si η tiene exactamente cuatro valores propios cero y todos los otros valores propios tienen parte real negativa. Este Teorema y la prueba del mismo para el caso $l = 3$ se pueden encontrar en [43].

En el caso en que $l = 4$, con $\lambda_k, k = 1, \dots, 4n$ como los valores propios de η . Se tiene que tomar en cuenta que L tiene un valor propio cero y sus demás valores propios tienen parte real negativa si y sólo si la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión dirigido, como se mostró en [41].

En el caso de $l = 4$, si (2.98) logra el consenso exponencialmente, sabemos que η tiene exactamente cuatro valores propios cero haciendo uso del *teorema 3.1, pp. 559*, presentado en [43]. Por lo tanto, vemos que $-L$ tiene un valor propio cero, lo que a su vez implica que la topología de intercambio de información tiene un árbol de expansión dirigido. Por lo tanto, en el caso de $l = 4$, tener un árbol de expansión dirigido es una condición necesaria para la búsqueda de consenso, sin embargo, tener un árbol de expansión dirigido no es una condición suficiente para la búsqueda de consenso. Tanto la topología de intercambio de información como los valores de $\gamma_k, k = 0, 1, 2, 3$. afectarán la convergencia del algoritmo de consenso de orden l con $l > 1$.

De la ecuación (2.103) se puede observar que $\gamma_k, k = 0, 1, 2, 3$, tiene un efecto importante en los valores propios de η . En el caso en que $-\eta$ sea en sí mismo un árbol de expansión dirigido, $-L$ tiene un valor propio cero y todos los otros valores propios son reales y por lo tanto negativos, por lo que, los coeficientes del polinomio (2.103) son números reales positivos cuando $\mu \neq 0$ donde μ es un valor propio de $-\eta$. Desde el criterio de Routh, siempre existe $\gamma_k, k = 0, 1, 2, 3$ de modo que todas las raíces de (2.103) tienen parte real negativa cuando $\mu \neq 0$.

Por último se observa que μ depende de las entradas de $-\eta$ es decir del grafo de comunicación y las raíces de (2.103) dependen continuamente de sus coeficientes, sabemos que para cada $-L$ cuyo grafo de comunicación tiene un árbol de expansión dirigido, siempre existe $\gamma_k, k = 0, 1, 2, 3$ de modo que todas las raíces de (2.103) tienen parte real negativa cuando $\mu \neq 0$. Los parámetros $\gamma_k, k = 0, 1, 2, 3$, se pueden elegir de acuerdo con el teorema de Routh-Hurwitz. Como resultado, las condiciones del *teorema 3.1, pp. 559*, presentado en [43] se satisfacen.

2.5.4. Algoritmos de consenso de orden superior: problema restringido.

En el artículo [50], se considera la noción clásica de controlabilidad, para un grupo de agentes de primer orden autónomos interconectados. Una conclusión importante es que la controlabilidad del grupo sólo depende de la estructura de la topología de interconexión. Se obtienen condiciones en la topología de la red para asegurar que el grupo puede ser controlado por un miembro en particular, el cual, actúa como un líder. Entonces se introduce la idea de un nodo líder, por lo que se elige un único nodo que ignora a todos los otros nodos, pero continúa transmitiendo su propia información.

Otro artículo en el cual se plantea la idea de un consenso restringido a través de la incorporación de un agente líder es el presentado en [25]. Donde se abordan dos casos en específico. El primer caso es donde los agentes individualmente enfrentan restricciones y el segundo caso es donde hay múltiples conjuntos de agentes, cada grupo buscando un consenso sobre una variable diferente, pero posiblemente con restricciones entre las diferentes variables. El algoritmo presentado en [25] logra que todos los agentes converjan al punto de referencia del líder. Esto se llama consenso con un líder.

Consenso tomando un modelo de referencia como líder y acceso completo de todos los agentes a su información

Se considera un modelo dinámico de referencia dado por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_r^0 &= y_r^1 \\
 \dot{y}_r^1 &= y_r^2 \\
 &\vdots \\
 \dot{y}_r^{l-2} &= y_r^{l-1} \\
 \dot{y}_r^{l-1} &= u_r
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Donde $y_r^k \in \mathbb{R}^m$ con $k = 0, 1, \dots, l-1$, son los estados de referencia y $u_r \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control de la referencia. Se dice que un problema de consenso restringido a un modelo referencia se resuelve si $y_i^k \rightarrow y_r^k, k = 0, \dots, l-1$, asintóticamente y $y_i^k \rightarrow y_j^k, \forall i \neq j$, durante la transición. De forma matemática se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^\kappa - y_j^\kappa| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^\kappa - y_r^\kappa| = 0 \\
 \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \kappa = 0, \dots, l-1, \forall i \neq j. \tag{2.105}$$

En el caso de que el modelo de referencia esté disponible para cada agente en el conjunto de sistemas, proponemos el siguiente algoritmo de consenso considerando la ecuación (2.104) como modelo de referencia:

$$\begin{aligned}
u_i = & - \sum_{j=1}^n g_{ij} k_{ij} \left[\sum_{\kappa=0}^{l-1} \gamma_{\kappa} (y_i^{\kappa} - y_j^{\kappa}) \right] \\
& - \sum_{\kappa}^{l-1} \gamma_{\kappa} (y_i^{\kappa} - y_r^{\kappa}) + u_r, \quad i \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Donde, se define $\tilde{y}_i^{\kappa} = y_i^{\kappa} - y_r^{\kappa}$, $\kappa = 1, \dots, l-1$ y \tilde{y}^{κ} es un vector columna de dimensión $mn \times 1$ con componentes dadas por \tilde{y}_i^{κ} , $i = 1, \dots, n$. Se utiliza la ecuación (2.106) en la ecuación (2.95), con lo que obtenemos de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}}^0 \\ \tilde{y}^1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}^{l-1} \end{bmatrix} = (\Sigma \otimes I_m) \begin{bmatrix} \tilde{y}^0 \\ \tilde{y}^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}^{l-1} \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

Donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & \cdots & I_n \\ -\gamma_0 M & -\gamma_1 M & -\gamma_2 M & \cdots & -\gamma_{l-1} M \end{bmatrix}$$

Con $M = L + I_n$. Tomando a μ_i y ρ_i como los valores propios de $-L$ y $-M$ respectivamente, se puede ver que $\rho_i = \mu_i - 1$, siguiendo un procedimiento parecido al anterior y haciendo uso del *teorema 3.1*, pp. 559, presentado en [43], se sabe que cada valor propio de $-M$ tiene correspondencia con uno de $-L$, que a su vez corresponde a cuatro valores propios de Σ . Se tiene ν_{4i-3} , ν_{4i-2} , ν_{4i-1} y ν_{4i} con $i = 1, \dots, n$ como los valores propios de Σ , los cuales corresponden a ρ_i y a μ_i , los cuales se relacionan a través de la siguiente ecuación:

$$\nu^4 - \gamma_3 \rho \nu^3 - \gamma_2 \rho \nu^2 - \gamma_1 \rho \nu + \gamma_0 \rho = 0 \tag{2.108}$$

Se observa que si $Re(\nu_i) < 0$, $i = 1, \dots, 4n$, es decir, Σ es una matriz Hurwitz, entonces $\tilde{y}_i^k \rightarrow \tilde{y}_j^k$ de forma asintótica, con $k = 0, \dots, l-1$, que a su vez implica que $y_i^k \rightarrow y_j^k$ de igual forma. Se puede observar que $Re(\rho_i) < 0$, $i = 1, \dots, 4n$, debido al hecho de que $Re(\mu_i) \leq 0$ como se mostró en la sección 2.5.3. Los γ_k , $k = 0, 1, 2, 3$, juega un papel importante en los valores propios de Σ en la ecuación (2.108). Se debe de tomar en cuenta que si la topología de intercambio de información no tiene un árbol de expansión dirigido, todavía es posible elegir γ_k , $k = 0, 1, 2, 3$, de acuerdo con el teorema de Routh Hurwitz tal que todos los valores propios de Σ tienen partes reales negativas. Sin embargo, tener un árbol de expansión dirigido garantiza que $y_i^k \rightarrow y_j^k$, $k = 0, \dots, l-1$, $\forall i \neq j$ cuando $y_i^k \rightarrow y_r^k$.

2.6. Resumen del capítulo

Este capítulo tiene como principal objetivo el mostrar diversos conceptos y desarrollos teóricos que se encuentran en la literatura, los cuales ayudarán al lector a entender y analizar de una manera más sencilla lo que se propone y desarrolla a lo largo de los siguientes capítulos de este trabajo.

Se analizaron herramientas para obtener un modelo lineal simplificado de los sistemas no lineales subactuados, el cual nos permite implementar las estrategias de control mostradas y los diferentes algoritmos de consenso, con los cuales se pretende controlar un conjunto de estos sistemas y darle solución a los problemas de consenso planteados.

Capítulo 3

Modelado de Sistemas Subactuados

3.1. Sistemas mecánicos subactuados

Los sistemas subactuados se refieren a la clase de sistemas dinámicos con al menos una entrada de control menor que el número de grados de libertad del sistema.

Existen algunos sistemas subactuados que no son diferencialmente planos, por tanto, no son linealizables por medio de una transformación de coordenadas de los estados, junto con una retroalimentación estática o dinámica. Entre estos sistemas se encuentran:

- El péndulo invertido giratorio o péndulo de Furuta, la bola y la viga, el péndulo invertido sobre un carro con uno o varios eslabones, la grúa viajera, entre otros. Estos sistemas no son diferencialmente planos, sin embargo, su linealización aproximada alrededor de un punto de equilibrio es controlable por tanto es plana.
- Otros sistemas, como el “péndulo Kapitza”, no son linealizables en forma exacta y su linealización no es controlable. Estos sistemas representan la clase de sistemas más difíciles de controlar (El control del péndulo de Kapitza se logra mediante la implementación de un control vibratorio de alta frecuencia, véase [8]).

En este capítulo se realiza el modelado de sistemas subactuados, los cuales, no son diferencialmente planos. Se presenta la linealización aproximada de los mismos alrededor de puntos de equilibrio estables e inestables y la obtención de la salida plana de los sistemas linealizados controlables.

3.2. Descripción matemática de la grúa viajera

La grúa viajera es uno de los sistemas mecánicos clásicos utilizado con frecuencia para la implementación de nuevas estrategias de control. La grúa viajera lleva cargas de un punto de partida a otro punto de llegada, exhibiendo, por lo general, oscilaciones pendulares de la carga. Uno de los objetivos en este tipo de problema es lograr reducir las oscilaciones al final de la maniobra, manteniendo las oscilaciones producidas al mínimo. Este sistema es analizado en [6],[7]. El esquema de la grúa viajera mostrado en la figura 3.1 es un sistema no lineal subactuado de cuarto orden.

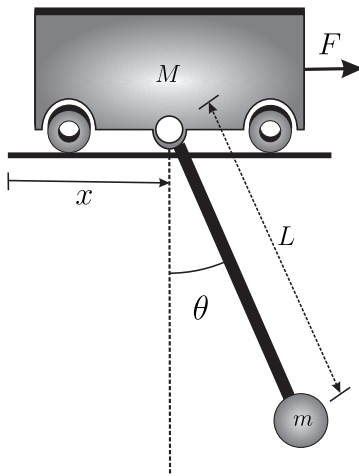


Figura 3.1: Grúa viajera.

3.2.1. Modelado matemático grúa viajera vía Euler-Lagrange

Se considera el sistema mostrado en la figura 3.1, el modelo matemático es obtenido usando el formalismo de Euler Lagrange.

La energía cinética asociada a los elementos del sistema está dada por:

$$K = \frac{M}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) \quad (3.1)$$

Donde (x_M, y_M) representa la posición de la masa del carro y (x_m, y_m) representa la posición de la masa del péndulo.

$$x_M = x, \quad y_M = 0, \quad x_m = x - L \sin \theta, \quad y_m = -L \cos \theta$$

Se usa la ecuación (3.1), las posiciones de las masas y sus derivadas, para obtener la ecuación de la energía cinética:

$$K = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}L\cos\theta\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2\right) \quad (3.2)$$

La energía potencial se muestra en la siguiente ecuación:

$$P = mgL(1 - \cos \theta) \quad (3.3)$$

El lagrangiano del sistema se obtiene a partir de $\mathcal{L} = K - P$, por lo tanto la función lagrangiana se define como:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}L\cos\theta\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2\right) - mgL(1 - \cos\theta) \quad (3.4)$$

Las ecuaciones que representan el modelo dinámico del sistema son obtenidas mediante la formulación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = u \quad (3.5)$$

Donde \mathcal{L} representa el lagrangiano del sistema, q_i es la variable generalizada, \dot{q}_i su derivada y u la entrada de control. Aplicando la metodología de Euler-Lagrange se obtiene el modelo dinámico del sistema mostrado en la figura 3.1, expresado matemáticamente por:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} - mL\cos\theta\ddot{\theta} + mL\sin\theta\dot{\theta}^2 &= F \\ -mL\ddot{x}\cos\theta + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde la fuerza de entrada F es obtenida mediante un motor de CD. La entrada de control se expresa mediante una función de la tensión aplicada al motor de CD a través de la siguiente relación aproximada.

$$F = \frac{k_t}{rR}v(t) \quad (3.7)$$

Donde k_t representa la constante de torque del motor, R es la resistencia de armadura del motor y r es el radio del piñón usado para el desplazamiento del carro. por lo que las ecuaciones del sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} - mL\cos\theta\ddot{\theta} + mL\sin\theta\dot{\theta}^2 &= \frac{k_t}{rR}v(t) \\ -mL\ddot{x}\cos\theta + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

En su forma matricial se puede expresar como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F \quad (3.9)$$

Para el modelo de la grúa viajera se tiene:

$$\begin{bmatrix} M + m & -mL\cos\theta \\ -mL\cos\theta & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mL\sin\theta\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgL\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_t}{rR}v(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.2.2. Linealización aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio estable

El modelo obtenido del sistema, es no diferencialmente plano, ya que no es equivalente a un sistema lineal controlable por medio de una transformación de coordenadas de los estados y una redefinición de la variable de control. El sistema no es linealizable mediante una retroalimentación estática o dinámica. El modelo es linealizable, sólo aproximadamente, alrededor de un punto de equilibrio.

Se linealizará el modelo matemático del sistema alrededor del siguiente punto de equilibrio estable:

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{\dot{x}} = 0; \quad \bar{\theta} = 0; \quad \bar{\dot{\theta}} = 0; \quad \bar{v} = 0;$$

Se definen las variables incrementales que representan variaciones desde el punto de equilibrio.

$$x_\delta = x - \bar{x}, \quad \theta_\delta = \theta - \bar{\theta}, \quad V_\delta = v - \bar{v}$$

Todas las variables incrementales coinciden con las variables reales medidas. El sistema es linealizado alrededor del punto de equilibrio estable, siguiendo el procedimiento presentado en la sección 2.1. El sistema linealizado esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x}_\delta - mL\ddot{\theta}_\delta &= \frac{k_t}{Rr}V_\delta(t) \\ -mL\ddot{x}_\delta + mL^2\ddot{\theta}_\delta &= -mgL\theta_\delta \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.3. Obtención de la salida plana de la grúa viajera

El sistema linealizado se coloca en la representación de estados, dada por la siguiente ecuación.

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta + Bv_\delta \quad (3.12)$$

por lo que se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \dot{x}_\delta \\ \theta_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{LM} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \dot{x}_\delta \\ \theta_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_t}{rRLM} \\ 0 \\ \frac{k_t}{rRLM} \end{bmatrix} v_\delta \quad (3.13)$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_\delta \\ \dot{x}_\delta \\ \theta_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(M+m)g}{LM} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{rRLM} \\ 0 \\ \frac{k}{rRLM} \end{bmatrix};$$

El sistema linealizado en su representación de estados (3.13), es controlable, ya que la matriz de controlabilidad del sistema es de rango completo y se cumple el criterio de Kalman dado en el teorema 2.2.1. Debido a que el sistema linealizado es controlable y tomando en cuenta la relación de controlabilidad y planitud estudiada en la sección 2.2.2, sabemos que el sistema es plano.

La salida plana del sistema lineal controlable en su forma de espacio de estado se obtiene a través de la ecuación (2.43), dada en la proposición 2.2.1. Por lo tanto, para la obtención de la salida plana de la grúa viajera se tiene:

$$\psi = [0 \ 0 \ 0 \ 1][b, Ab, A^2b, A^3b]^{-1}x \quad (3.14)$$

Por lo que para la grúa viajera se puede obtener la siguiente expresión para la salida plana del sistema:

$$\psi_g = x_\delta - L\theta_\delta \quad (3.15)$$

Las derivadas consecutivas en el tiempo de la salida plana del sistema se muestran a continuación.

$$\dot{\psi}_g = \dot{x}_\delta - L\dot{\theta}_\delta; \quad \ddot{\psi}_g = g\theta_\delta; \quad \psi_g^{(3)} = g\dot{\theta}_\delta; \quad \psi_g^{(4)} = \frac{gk_t}{rRLM}V_\delta - \frac{g^2(M+m)}{LM}\theta_\delta \quad (3.16)$$

La relación inversa produce la siguiente parametrización diferencial de todas las variables del sistema:

$$x_\delta = \psi_g + \frac{L}{g}\ddot{\psi}_g; \quad \dot{x}_\delta = \dot{\psi}_g + \frac{L}{g}\dot{\psi}_g^{(3)}; \quad \theta_\delta = \frac{1}{g}\ddot{\psi}_g; \quad \dot{\theta}_\delta = \frac{1}{g}\dot{\psi}_g^{(3)} \quad (3.17)$$

La ecuación para la entrada de control en términos de la salida plana y sus derivadas es:

$$V_\delta = \frac{rRLM}{gk_t}\psi_g^{(4)} + \frac{rR(M+m)}{k_t}\ddot{\psi}_g \quad (3.18)$$

La dinámica de entrada-salida para el sistema linealizado, se define mediante la siguiente ecuación:

$$\psi_g^{(4)} = \frac{gk_t}{rRLM}V_\delta - \frac{g(M+m)}{LM}\ddot{\psi}_g \quad (3.19)$$

Simplificando la ecuación (3.19), se obtiene la siguiente expresión de la dinámica de entrada-salida para el sistema linealizado.

$$\psi_g^{(4)} = \beta V_\delta + \xi(t), \quad \beta = \frac{gk_t}{rRLM}, \quad \xi(t) = -\frac{g(M+m)}{LM}\ddot{\psi}_g \quad (3.20)$$

Donde $\xi(t)$ representa una perturbación al sistema. Se hace la siguiente suposición: tanto $\xi(t)$, como su primera derivada $\dot{\xi}(t)$, se encuentran acotadas uniformemente de manera absoluta. Es decir $\sup_t |\xi^j(t)| \leq K_j$, $j = 0, 1$.

3.3. Descripción matemática del péndulo invertido sobre un carro

El péndulo invertido sobre un carro es un sistema mecánico clásico muy utilizado para la implementación de nuevas estrategias de control. Es un sistema mecánico que su modelo matemático es representado mediante ecuaciones diferenciales, las cuales, mediante ciertas analogías pueden ser relacionadas con procesos reales de mayor complejidad, algunos ejemplos son: el sistema de control de vuelo para aeronaves, el control de la posición vertical de un vehículo espacial durante su despegue, el modelado de robots bípedos humanoides, entre otros. El control de este sistema puede subdividirse en dos problemas a resolver:

- El problema conocido por su denominación inglesa como “*swing up*”
- El problema de estabilización del péndulo en torno a un punto de equilibrio.

El problema de “*swing up*”, representa el reto de levantar al péndulo desde su posición en reposo hasta su posición perpendicular con respecto al plano de desplazamiento del carro. El segundo problema es el abordado en esta tesis, el cual, consiste en la estabilización del péndulo en torno a un punto de equilibrio, es semejante al problema en el cual un malabarista pretende equilibrar un palo en la punta de un dedo. El segundo problema puede resolverse mediante la linealización entorno a la posición de equilibrio, esta forma de abordar el problema tiene un carácter exclusivamente local ya que para perturbaciones de cierta magnitud el control del péndulo se pierde.

El esquema del péndulo invertido sobre un carro mostrado en la figura 3.2 es un sistema no lineal subactuado de cuarto orden.

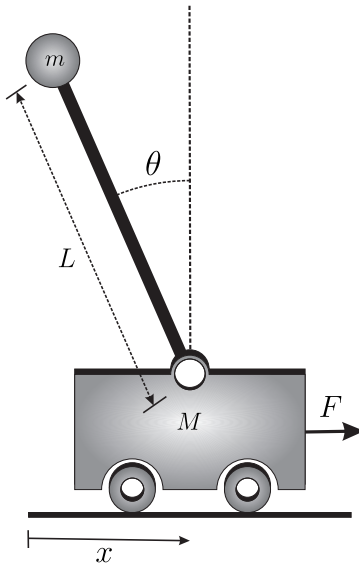


Figura 3.2: Péndulo invertido sobre un carro.

3.3.1. Modelado matemático vía Euler-Lagrange

Se considera el sistema mostrado en la figura 3.2 el modelo matemático es obtenido usando el formalismo de Euler Lagrange.

la energía cinética asociada a los elementos del sistema esta dada por:

$$K = \frac{M}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) \quad (3.21)$$

Donde (x_M, y_M) representa la posición de la masa del carro y (x_m, y_m) representa la posición de la masa del péndulo.

$$x_M = x, \quad y_M = 0, \quad x_m = x - L \sin \theta, \quad y_m = L \cos \theta$$

Se usa la ecuación (3.21), las posiciones de las masas y sus derivadas, para obtener la ecuación de la energía cinética:

$$K = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - 2\dot{x}L \cos \theta \dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2) \quad (3.22)$$

La energía potencial se muestra en la siguiente ecuación:

$$P = mgL \cos \theta \quad (3.23)$$

El lagrangiano del sistema se obtiene a partir de $\mathcal{L} = K - P$, por lo tanto la función lagrangiana se define como:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - 2\dot{x}L \cos \theta \dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2) - mgL \cos \theta \quad (3.24)$$

Se usa la ecuación (3.5), la metodología de Euler-Lagrange y se obtiene el modelo dinámico del sistema mostrado en la figura 3.2, expresado matemáticamente por:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} - mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 &= F \\ -mL\ddot{x} \cos \theta + mL^2\ddot{\theta} - mgL \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

La entrada de control del sistema F es obtenida mediante un motor de CD. Esta es expresada con una relación aproximada de la tensión aplicada al motor, la cual, está dada por la ecuación (3.7), con lo que las ecuaciones del sistema son modificadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} - mL \cos \theta \ddot{\theta} + mL \sin \theta \dot{\theta}^2 &= \frac{k_t}{rR}v(t) \\ -mL\ddot{x} \cos \theta + mL^2\ddot{\theta} - mgL \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para expresar el modelo dinámico en su forma matricial se hace uso de la ecuación (3.9). Con lo que el modelo dinámico del péndulo invertido sobre un carro en su forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} M + m & -mL \cos \theta \\ -mL \cos \theta & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mL \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mgL \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_t}{rR}v(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.3.2. Linealización aproximada del sistema alrededor de un punto de equilibrio inestable

El modelo obtenido del sistema, es no diferencialmente plano, ya que no es equivalente a un sistema lineal controlable por medio de una transformación de coordenadas de los estados y una redefinición de la variable de control. El sistema no es linealizable mediante una retroalimentación estática o dinámica. El modelo es linealizable, sólo aproximadamente, alrededor de un punto de equilibrio.

Se linealizará el modelo matemático del sistema alrededor del siguiente punto de equilibrio inestable:

$$\bar{x} = 0; \quad \bar{\dot{x}} = 0; \quad \bar{\theta} = 0; \quad \bar{\dot{\theta}} = 0; \quad \bar{v} = 0;$$

Se definen las variables incrementales que representan variaciones desde el punto de equilibrio.

$$x_\delta = x - \bar{x}, \quad \theta_\delta = \theta - \bar{\theta}, \quad V_\delta = v - \bar{v}$$

Todas las variables incrementales coinciden con las variables reales medidas. El sistema es linealizado alrededor del punto de equilibrio inestable, siguiendo el procedimiento presentado en la sección 2.1. El sistema linealizado esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x}_\delta - mL\ddot{\theta}_\delta &= \frac{k_t}{Rr}V_\delta(t) \\ -mL\ddot{x}_\delta + mL^2\ddot{\theta}_\delta &= mgL\theta_\delta \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3.3. Obtención de la salida plana del péndulo invertido sobre un carro

El sistema linealizado (3.28) se coloca en la representación de estados, dada por la ecuación (3.12). Por lo que se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \dot{x}_\delta \\ \theta_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{LM} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \dot{x}_\delta \\ \theta_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_t}{rRLM} \\ 0 \\ \frac{k_t}{rRLM} \end{bmatrix} v_\delta \quad (3.29)$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_\delta \\ \dot{x}_\delta \\ \theta_\delta \\ \dot{\theta}_\delta \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{LM} & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{rRM} \\ 0 \\ \frac{k}{rRLM} \end{bmatrix};$$

El sistema linealizado en su representación de estados (3.29), es controlable, ya que la matriz de controlabilidad del sistema es de rango completo y se cumple el criterio de

Kalman dado en el teorema 2.2.1. Debido a que el sistema linealizado es controlable y tomando en cuenta la relación de controlabilidad y planitud estudiada en la sección 2.2.2, sabemos que el sistema es plano.

La salida plana del sistema lineal controlable en su forma de espacio de estado se obtiene a través de la ecuación (2.43), dada en la proposición 2.2.1. Por lo tanto, para la obtención de la salida plana del péndulo invertido sobre un carro se tiene:

$$\psi = [0 \ 0 \ 0 \ 1][b, Ab, A^2b, A^3b]^{-1}x \quad (3.30)$$

Por lo que para el péndulo invertido sobre un carro se puede obtener la siguiente expresión para la salida plana del sistema:

$$\psi_p = -x_\delta + L\theta_\delta \quad (3.31)$$

Las derivadas consecutivas en el tiempo de la salida plana del sistema se muestran a continuación

$$\dot{\psi}_p = -\dot{x}_\delta + L\dot{\theta}_\delta; \quad \ddot{\psi}_p = g\theta_\delta; \quad \psi_p^{(3)} = g\dot{\theta}_\delta; \quad \psi_p^{(4)} = \frac{gk_t}{rRLM}V_\delta + \frac{g^2(M+m)}{LM}\theta_\delta \quad (3.32)$$

La relación inversa produce la siguiente parametrización diferencial de todas las variables del sistema:

$$x_\delta = -\psi_p + \frac{L}{g}\ddot{\psi}_p; \quad \dot{x}_\delta = -\dot{\psi}_p + \frac{L}{g}\dot{\psi}_p^{(3)}; \quad \theta_\delta = \frac{1}{g}\ddot{\psi}_p; \quad \dot{\theta}_\delta = \frac{1}{g}\dot{\psi}_p^{(3)} \quad (3.33)$$

La ecuación para la entrada de control en términos de la salida plana y sus derivadas es:

$$V_\delta = \frac{rRLM}{gk_t}\psi_p^{(4)} + \frac{rR(M+m)}{k_t}\ddot{\psi}_p \quad (3.34)$$

La dinámica de entrada-salida para el sistema linealizado, se define mediante la siguiente ecuación.

$$\psi_p^{(4)} = \frac{gk_t}{rRLM}V_\delta + \frac{g(M+m)}{LM}\ddot{\psi}_p \quad (3.35)$$

Simplificando la ecuación (3.35), se obtiene la siguiente expresión simplificada de la dinámica de entrada salida para el sistema linealizado.

$$\psi_p^{(4)} = \beta V_\delta + \xi(t), \quad \beta = \frac{gk_t}{rRLM}, \quad \xi(t) = \frac{g(M+m)}{LM}\ddot{\psi}_p \quad (3.36)$$

Donde $\xi(t)$ representa una perturbación al sistema. Se hace la siguiente suposición: tanto $\xi(t)$ como su primera derivada $\dot{\xi}(t)$ se encuentran acotadas uniformemente de manera absoluta. Es decir $\sup_t |\xi^j(t)| \leq K_j$, $j = 0, 1$.

3.4. Resumen del capítulo

Este capítulo tiene como principal objetivo, la descripción de los sistemas implementados como ejemplos a lo largo de este trabajo, la obtención del modelo matemático de los sistemas, la obtención de modelos matemáticos lineales a través de una aproximación alrededor de un punto de equilibrio deseado, la obtención de la salida plana del sistema y de una simplificación de la dinámica de entrada-salida para los sistemas en términos de la salida plana.

Capítulo 4

Diseño y Simulación de Estrategias de Control

En este capítulo se presenta el diseño y simulación de las estrategias de control a implementar, desarrollando ejemplos ilustrativos. Se hace uso de los controles presentados en el capítulo 2, controlando los modelos obtenidos en el capítulo 3.

La primera estrategia de control a diseñar, es la implementación del ADRC en la ecuación simplificada de la dinámica de entrada salida para el sistema linealizado, tanto de la grúa viajera (3.20) como para el péndulo invertido sobre un carro (3.36). En esta sección se plantea una problemática a resolver y la solución de está implementando el ADRC. Utilizando de la misma forma las ecuaciones de la dinámica entrada-salida simplificadas del modelo linealizado de la grúa viajera y del péndulo invertido sobre un carro, en la siguiente sección se busca, el control de ambos implementando ahora el GPIC, formulando y dándole solución a una nueva problemática.

Por último se desarrollan múltiples ejemplos ilustrativos, dando solución a los problemas de consenso planteados en el capítulo 1 y 2, a través, de la implementación, de las estrategias de control desarrolladas en las dos primeras secciones de este capítulo y los diferentes algoritmos de consenso presentados en el capítulo 2.

4.1. ADRC para sistemas no lineales subactuados usando una linealización aproximada

Como ya fue analizado en el Capítulo 3, los sistemas tanto de la grúa viajera como del péndulo invertido sobre un carro son linealizables alrededor de un punto de equilibrio, por tanto, se obtuvo el modelo linealizado, el cual es controlable y por lo tanto plano, se encontró una posible ecuación para la salida plana y una parametrización diferencial entre los estados y la salida plana, para ambos sistemas. Por último se expresó la dinámica de entrada-salida para el sistema linealizado en terminos de la salida plana de cada sistema.

Analizando las ecuaciones de la dinámica de entrada-salida (3.20) y (3.36), se puede observar que tienen la misma expresión para la dinámica simplificada representada por un sistema de integración pura, de cuarto orden, y un término de perturbación total (endógena y exógena), debido a que, ambas expresiones sólo difieren en un signo, el cual, está incluido en el término de perturbaciones, por lo tanto, se considera el diseño de una sola ley de control de retroalimentación, tomando en cuenta la siguiente expresión general para la dinámica de entrada-salida de ambos sistemas.

$$\psi^{(4)} = \beta V_\delta + \xi(t) \quad (4.1)$$

Donde $\xi(t)$ representa las perturbaciones al sistema y β es la ganancia del sistema. Sin embargo, es necesario usar la expresión obtenida para la salida plana, la cual, se encuentra en términos de los estados medibles, y la parametrización diferencial usada para expresar todas las variables del sistema como funciones de la salida plana y un número finito de sus derivadas temporales, dependiendo del sistema que se desea controlar ya sea la grúa viajera o el péndulo invertido sobre un carro.

4.1.1. Formulación del problema

Supongamos que se tiene la salida plana ψ (esta representa la salida plana de la grúa viajera o bien del péndulo invertido) y se desea hacer un seguimiento de trayectoria de referencia de una salida suave dada por $\psi^*(t)$, motivada por la necesidad de estabilizar al sistema en un punto de equilibrio deseado, lejos del punto de equilibrio inicial ya sea estable o inestable dependiendo del sistema a controlar (grúa viajera o péndulo invertido sobre un carro), eliminando las posibles oscilaciones que pudieran aparecer al final del recorrido generadas en el péndulo y tomando en cuenta que sólo se tiene acceso a la medición de la posición angular del péndulo y a la posición del carro.

4.1.2. Solución de la problemática implementando ADRC

Debido a que no se cuenta con acceso completo al estado del sistema es necesario estimar las variables no medidas, por lo tanto, se pretende usar un ESO para estimar las derivadas de la salida plana a las que no se tiene acceso y a través de la parametrización diferencial obtenida se puede obtener el estado completo del sistema. Considerando las siguientes relaciones obtenidas en la parametrización diferencial para la grúa viajera y para el péndulo invertido sobre un carro respectivamente:

$$\ddot{\psi}_g = g\theta_\delta; \quad \ddot{\psi}_p = g\theta_\delta$$

Se puede observar que la segunda derivada de la salida plana, para ambos sistemas está dada en términos de las variables medidas por lo que no es necesario estimarla. Debido a lo anterior el ESO puede ser diseñado como dos observadores en cascada, con los cuales se estimara la primera y tercera derivada de la salida plana así como las perturbaciones. Esta consideración es planteada en sistemas del mismo tipo en [33].

Diseño del ESO

Denotando a ψ_0 como la estimación de la salida plana de forma redundante ya que se cuenta con su medición debido a que está dada en términos de las variables que son medibles en ambos sistemas, las cuales para nuestros ejemplos son la posición del carro y la posición angular del péndulo. El ESO para la estimación de la primera derivada con respecto al tiempo de la salida plana esta dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\psi}_0 &= \hat{\psi}_1 + \lambda_1(\psi - \hat{\psi}_0) \\ \frac{d}{dt}\hat{\psi}_1 &= g\theta_\delta + \lambda_0(\psi - \hat{\psi}_0)\end{aligned}\quad (4.2)$$

El segundo observador, estima simultáneamente la derivada con respecto al tiempo de tercer orden de la salida plana, aquí denotada por $\hat{\psi}^{(3)}$, y las posibles perturbaciones desconocidas $\xi(t)$, representadas aquí por la variable de extensión z . Esta variable z estima los efectos concentrados de las no linealidades descuidadas y de las perturbaciones exógenas (dinámica no modelada, perturbaciones de fuerza, etc.). Para el segundo observador se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\psi}_2 &= \hat{\psi}_3 + \lambda_4(g\theta_\delta - \hat{\psi}_2) \\ \frac{d}{dt}\hat{\psi}_3 &= z + \beta V_\delta + \lambda_3(g\theta_\delta - \hat{\psi}_2) \\ \frac{d}{dt}z &= \lambda_2(g\theta_\delta - \hat{\psi}_2)\end{aligned}\quad (4.3)$$

Se define la dinámica del error de estimación para cada uno de los dos observadores, tomando en cuenta que la segunda derivada temporal de la salida plana esta dada por $\ddot{\psi} = g\theta_\delta$ y se definen los errores de estimación para cada uno de los observadores. Para el primer observador se tiene como error de estimación $e_0 = \psi - \hat{\psi}_0$, por lo cual:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e_0 &= e_1 - \lambda_1 e_0 \\ \frac{d}{dt}e_1 &= -\lambda_0 e_0\end{aligned}\quad (4.4)$$

Para el segundo observador, el error de observación esta dado por $e_\theta = g\theta - \hat{\psi}_2 = \ddot{\psi} - \hat{\psi}_2$, por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e_\theta &= e_1 - \lambda_4 e_\theta \\ \frac{d}{dt}e_1 &= \xi(t) - z - \lambda_3 e_\theta \\ \frac{d}{dt}z &= \lambda_2 e_\theta\end{aligned}\quad (4.5)$$

Cambiando la notación para designar la derivada con respecto al tiempo por “ \cdot ”. Las dinámica de los errores de estimación para cada ESO, satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \ddot{e}_0 + \lambda_1 \dot{e}_0 + \lambda_0 e_0 &= 0 \\ e_\theta^{(3)} + \lambda_4 \ddot{e}_\theta + \lambda_3 \dot{e}_\theta + \lambda_2 e_\theta &= \dot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Los efectos debidos a $\dot{\xi}(t)$ se atenúan mediante los parámetros de diseño de alta ganancia. Una elección adecuada de los coeficientes $(\lambda_4, \dots, \lambda_0)$ garantiza que los errores de estimación e_0 y e_θ sean exponencialmente decrecientes, y que convergen hacia una pequeña vecindad del origen de los espacios de fase de e_0 y e_θ .

Con el objetivo de determinar los parámetros de diseño $(\lambda_4, \dots, \lambda_0)$ igualamos los polinomios obtenidos a un polinomio de Hurwitz de segundo y tercer orden con la siguiente forma: $(s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2)$ y $(s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2)(s + p)$, con lo que se obtiene para el primer observador:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \omega_1^2 \\ \lambda_1 &= 2\zeta_1\omega_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

para el segundo observador:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= p\omega_2^2 \\ \lambda_3 &= 2p\zeta_2\omega_2 + \omega_2^2 \\ \lambda_4 &= 2\zeta_2\omega_2 + p \end{aligned} \quad (4.8)$$

Diseño del esquema ADRC

El controlador de seguimiento de trayectoria de referencia de salida se sintetiza con la ayuda de una estrategia de cancelación basada en los valores estimados en línea de la función de entrada perturbación, $\xi(t)$. La estimación de $\xi(t)$ esta dado por z . El control por retroalimentación de la salida, esta dado por:

$$e_V = \frac{1}{\beta} \left[-z - k_0 e_0 - k_1 \dot{e}_0 - k_2 \ddot{e}_0 - k_3 \hat{e}_0^{(3)} \right] \quad (4.9)$$

Donde, $e_V = V_\delta - V^*(t)$ y los errores de seguimiento dados por \dot{e}_0 y $\hat{e}_0^{(3)}$ se usan en términos de sus estimaciones. Por otro lado se tiene que $e_0^{(4)} = \psi^4 - [\psi^*(t)]^{(4)}$, colocando la ecuación (4.1) en términos del error y por lo tanto cerrando el lazo de control se obtiene:

$$e_0^{(4)} = \beta e_V + \xi(t) \quad (4.10)$$

Con lo que obtenemos la siguiente ecuación, que representa la dinámica del error de seguimiento a través de una ecuación diferencial.

$$e_0^{(4)} + k_3 \hat{e}_0^{(3)} + k_2 \ddot{e}_0 + k_1 \dot{e}_0 + k_0 e_0 = \xi(t) - z \quad (4.11)$$

Con el objetivo de determinar los parámetros de diseño (k_3, \dots, k_0) igualamos los coeficientes de (4.11), a un polinomio Hurwitz de cuarto orden con la siguiente forma, $(s^2 + 2\zeta\omega s + 2\omega)^2$

$$\begin{aligned} k_0 &= \omega^4 \\ k_1 &= 4\omega^3\zeta \\ k_2 &= 4\zeta^2\omega^2 + 2\omega^2 \\ k_3 &= 4\zeta\omega \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.1.3. Simulación del esquema ADRC diseñado

En la figura 4.1 se muestra un diagrama a bloques del control y de los observadores diseñados en la sección 4.1.2, los cuales serán implementados en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s]. Tanto los observadores como el control serán implementados en las simulaciones de la grúa viajera y del péndulo invertido sobre un carro.

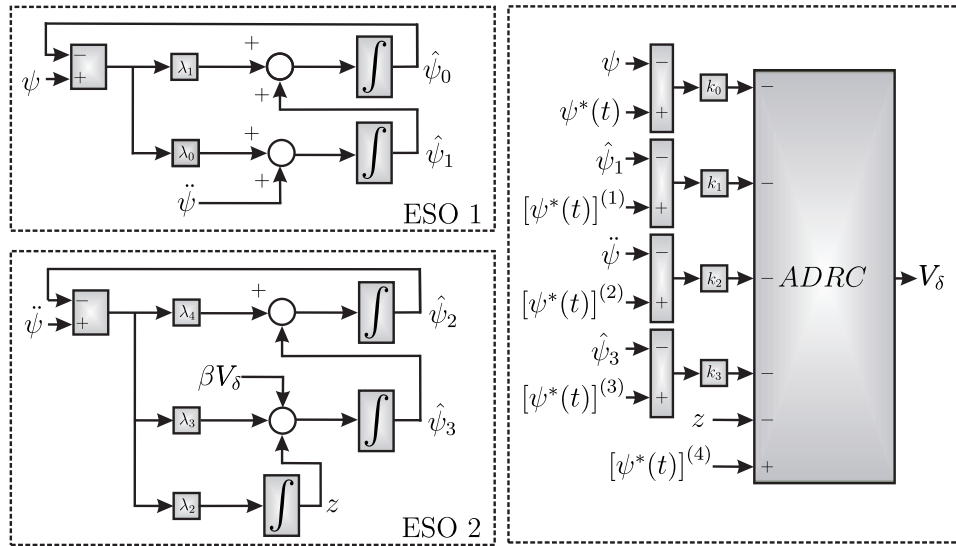


Figura 4.1: Esquema a bloques del ADRC y de los observadores.

Simulación de la grúa viajera implementando ADRC

Para la simulación de la grúa viajera se considera el esquema mostrado en la figura 3.1 con las siguientes condiciones iniciales $[x_\delta = 0, \theta_\delta = 0]$ respectivamente para la posición del carro y del péndulo. Se hace uso del esquema de control y observadores mostrados en la figura 4.1. El esquema general a simular se muestra en la figura 4.2. En la tabla 4.1 se muestran los parámetros usados en el modelo matemático, para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.8).

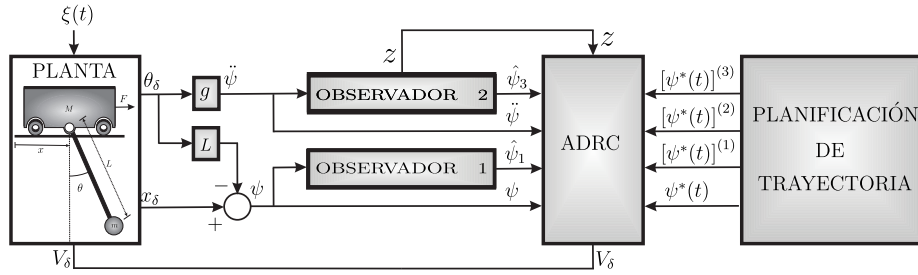


Figura 4.2: Esquema a bloques del ADRC y de los observadores.

Tabla 4.1: Parámetros de configuración para la simulación

Parámetro	valor	Parámetro	valor
Resistencia de armadura R	2.4Ω	Masa del carro	1.672 kg
Constante de par k_t	0.35 Nm/A	Masa del péndulo	0.278 kg
Radio del piñón	0.03 m	Longitud del péndulo	0.56 m

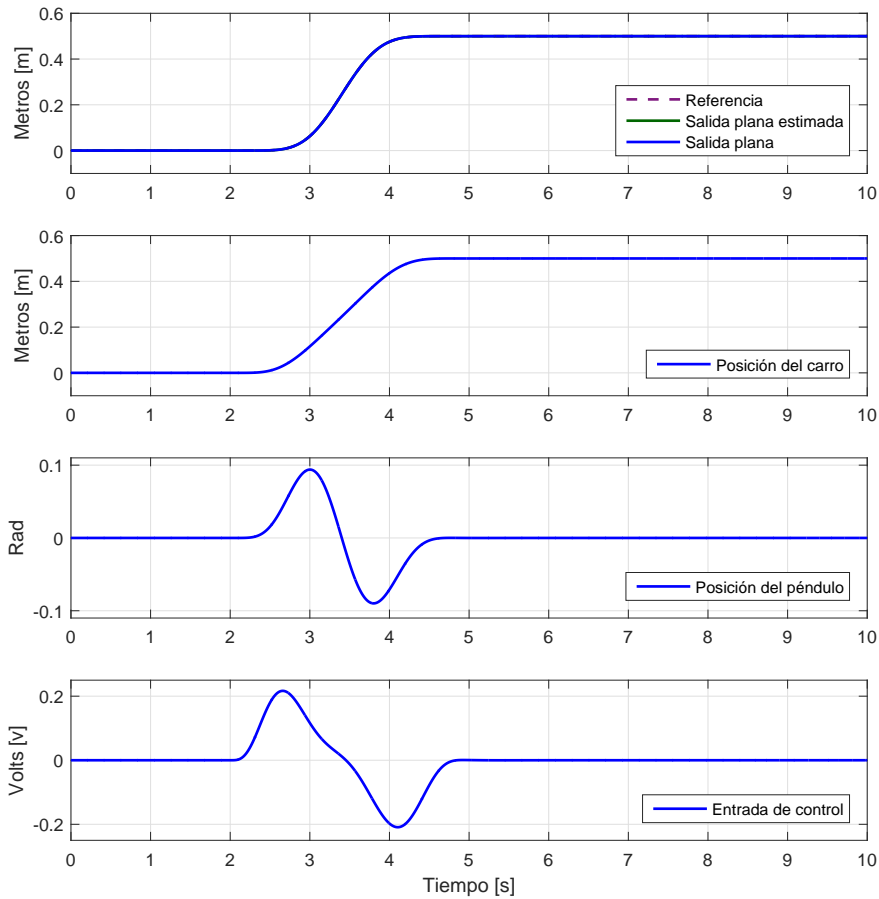


Figura 4.3: Seguimiento de la trayectoria de referencia y comparación con la salida plana estimada, variables del sistema y entrada de control.

La trayectoria de referencia deseada está dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos.

Los parámetros de diseño del observador se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 8$.

La figura 4.3 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado. La trayectoria deseada, se sigue con buena precisión y la salida plana alcanza el valor deseado en el tiempo especificado por la trayectoria deseada. El funcionamiento del observador puede evaluarse a partir de la comparación de la salida plana y la salida plana estimada, la correspondencia entre ambas señales nos permite confirmar el correcto funcionamiento del observador. La señal de control permanece dentro de los valores nominales de operación de un motor de CD de $\mp 12V$.

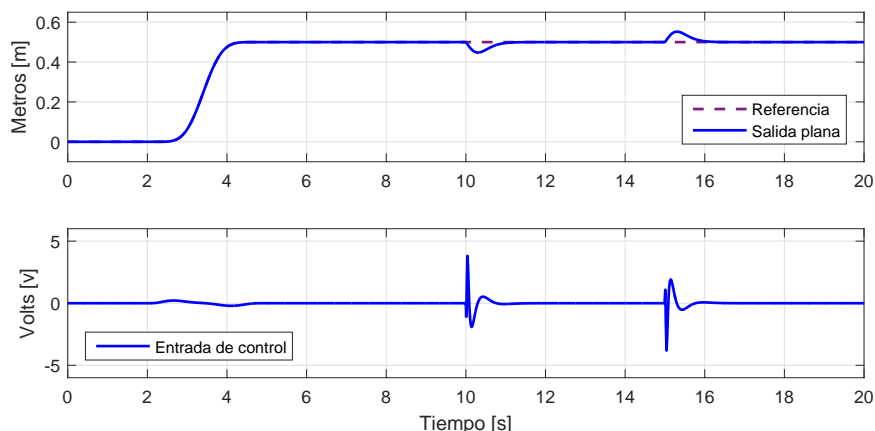


Figura 4.4: Seguimiento de la trayectoria de referencia y entrada de control.

La figura 4.4 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo, una vez que el sistema está en equilibrio (En $t = 10$ [s] y $t = 15$ [s]). Es posible evaluar la robustez del controlador ya que la reacción del controlador evita los efectos de las perturbaciones y atrae la respuesta del sistema a la trayectoria deseada.

Simulación del péndulo invertido sobre un carro implementando ADRC

Para la simulación del péndulo invertido sobre un carro se considera el esquema mostrado en la figura 3.2 con las siguientes condiciones iniciales para la posición del carro y del péndulo [$x_\delta = 0$, $\theta_\delta = 0$]. Se hace uso del esquema de control y observadores mostrados en la figura 4.1. El esquema general a simular se muestra en la figura 4.5.

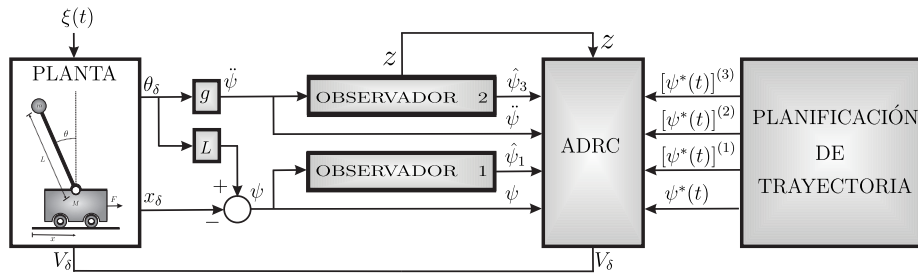


Figura 4.5: Esquema a bloques del ADRC y de los observadores.

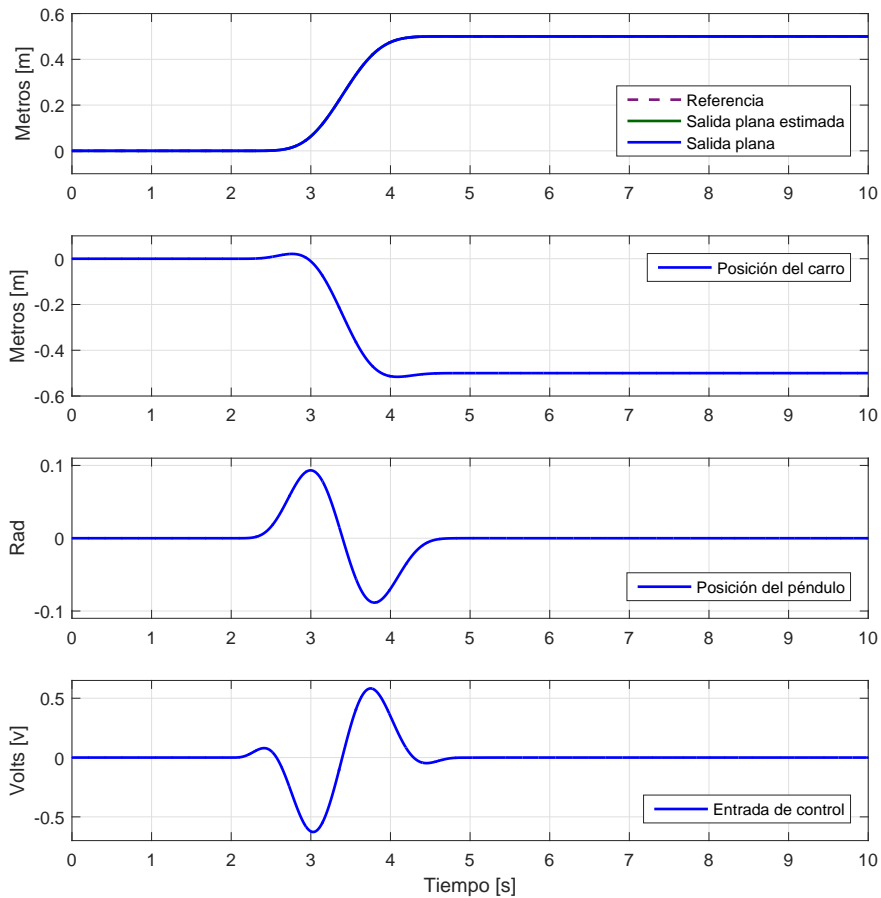


Figura 4.6: Seguimiento de la trayectoria de referencia y comparación con la salida plana estimada, variables del sistema y entrada de control.

En la tabla 4.1 se muestran los parámetros usados en el modelo matemático, para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.26).

La trayectoria de referencia deseada está dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del observador se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 9$.

La figura 4.6 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado, donde se observa el seguimiento de la trayectoria deseada. El seguimiento se desarrolla con buena precisión y la salida plana alcanza el valor deseado en el tiempo especificado por la trayectoria deseada. Se observa un buen desempeño del observador en la comparación de la salida plana con la salida plana estimada en el observador. La señal de control permanece dentro de los valores esperados tomando en cuenta los parámetros usados para el motor en la simulación.

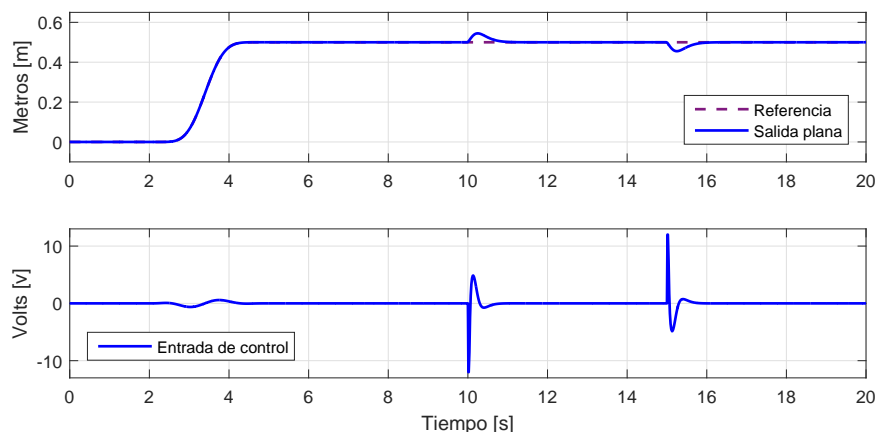


Figura 4.7: Seguimiento de la trayectoria de referencia y entrada de control.

La figura 4.7 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo, una vez que el sistema está en equilibrio (En $t = 10$ [s] y $t = 15$ [s]). Se observa la reacción del controlador al evitar los efectos de las perturbaciones y llevar la respuesta del sistema a la trayectoria deseada.

4.2. GPIC para sistemas no lineales subactuados usando una linealización aproximada

De la misma manera que en el sección 4.1 tomando la ecuación (4.1) como una expresión general para la dinámica de entrada-salida de la grúa viajera y del péndulo invertido sobre un carro, tomando en cuenta la salida plana correspondiente a cada uno de los sistema, se formula la siguiente problemática a resolver.

4.2.1. Formulación del problema

Supongamos que se tiene la salida plana ψ (está representa la salida plana de la grúa viajera o bien del péndulo invertido) y se desea hacer un seguimiento de trayectoria de referencia de una salida suave dada por $\psi^*(t)$, motivada por la necesidad de estabilizar al sistema en un punto de equilibrio deseado, lejos del punto de equilibrio inicial ya sea estable o inestable dependiendo del sistema a controlar (grúa viajera o pendulo invertido sobre un carro), eliminando las posibles oscilaciones generadas en el péndulo y tomando en cuenta que sólo se tiene acceso a la posición angular del péndulo y a la posición del carro.

4.2.2. Solución de la problemática implementando GPIC

Se define el error de seguimiento de la trayectoria deseada como $e_\psi = \psi - \psi^*(t)$, donde ψ representa la salida plana del sistema y $\psi^*(t)$ la referencia que se desea seguir. El error con respecto a la entrada de control y su valor nominal esta dado por $e_V = V_\delta - V^*(t)$, tomando en cuenta que $[\psi^*(t)]^{(4)} = V^*(t)$. La descripción simplificada de la dinámica entrada-salida en términos del error de seguimiento y el error con respecto a la entrada de control y su valor nominal, sin modificar el termino de perturbación, esta dada por:

$$e_\psi^{(4)} = \beta e_V + \xi(t) \quad (4.13)$$

Tomando en cuenta que es un sistema de cuarto orden, se propone, un controlador por retroalimentación del estado, el cual esta dado por:

$$e_V(t) = -\frac{1}{\beta} \left[k_7 e_\psi^{(3)} + k_6 \ddot{e}_\psi + k_5 \dot{e}_\psi + k_4 e_\psi \right] \quad (4.14)$$

De la ecuación (4.14) se puede observar que son necesarias las derivadas respecto al tiempo de primer, segundo y tercer orden del error de seguimiento, esto puede ser un problema, debido al ruido que normalmente se genera al calcular las derivadas; sin embargo, para evitar el cálculo de estas, se usaran reconstructores integrales, y se supone a $\xi(t)$ como una perturbación acotada por un valor constante.

$$\hat{e}_\psi^{(3)} = \beta \int e_{V(t)}; \quad \hat{\hat{e}}_\psi = \beta \int^{(2)} e_{V(t)}; \quad \hat{e}_\psi = \beta \int^{(3)} e_{V(t)} \quad (4.15)$$

Se tienen que tomar en cuenta el error producido por las condiciones iniciales de los reconstructores integrales, por lo que, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} e_\psi^{(3)} &= \hat{\hat{e}}_\psi^{(3)} + e_\psi^{(3)}(0) = \beta \int e_{V(t)} + e_\psi^{(3)}(0) \\ \ddot{e}_\psi &= \hat{\hat{e}}_\psi + \ddot{e}_\psi(0) + e_\psi^{(3)}(0)t = \beta \int^{(2)} e_{V(t)} + \ddot{e}_\psi(0) + e_\psi^{(3)}(0)t \\ \dot{e}_\psi &= \hat{e}_\psi + \dot{e}_\psi(0) + \ddot{e}_\psi(0)t + \frac{1}{2} e_\psi^{(3)}(0)t^2 = \beta \int^{(3)} e_{V(t)} + \dot{e}_\psi(0) + \ddot{e}_\psi(0)t + \frac{1}{2} e_\psi^{(3)}(0)t^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_\psi^{(3)} &= e_\psi^{(3)} - e_\psi^{(3)}(0) \\
 \hat{\dot{e}}_\psi &= \ddot{e}_\psi - \ddot{e}_\psi(0) - \dot{e}_\psi^{(3)}(0)t \\
 \hat{e}_\psi &= \dot{e}_\psi - \dot{e}_\psi(0) - \ddot{e}_\psi(0)t - \frac{1}{2}e_\psi^{(3)}(0)t^2
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Para compensar el error debido a las condiciones iniciales de los reconstructores integrales, agregamos un número finito de integrales iteradas del error de seguimiento y se agrega un término más, para atenuar los efectos de las perturbaciones “ $\xi(t)$ ” que puedan afectar al sistema. El controlador entonces puede ser escrito como se muestra en la ecuación (4.18), en la figura 4.8 se aprecia el diagrama esquemático del GPIC.

$$e_V(t) = -\frac{1}{\beta} \left[k_7 \hat{e}_\psi^{(3)} + k_6 \hat{\dot{e}}_\psi + k_5 \hat{e}_\psi + k_4 e_\psi + k_3 \int e_\psi + k_2 \int^{(2)} e_\psi + k_1 \int^{(3)} e_\psi + k_0 \int^{(4)} e_\psi \right]
 \tag{4.18}$$

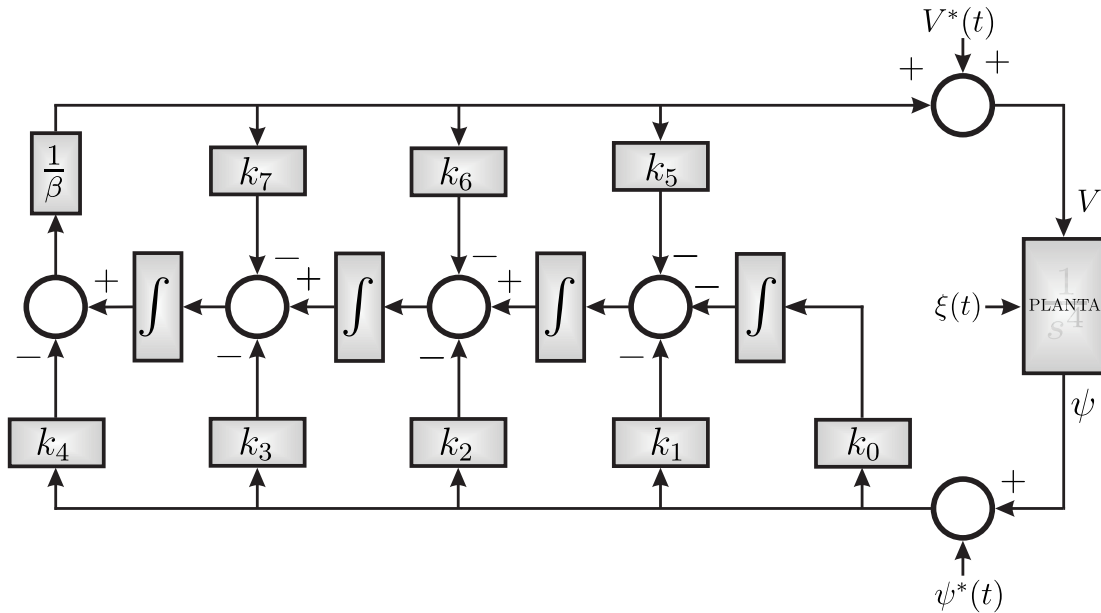


Figura 4.8: Diagrama esquemático GPIC.

El sistema en lazo cerrado sin considerar las perturbaciones, está dado por:

$$\begin{aligned}
 e_\psi^{(4)} + k_7 e_\psi^{(3)} + k_6 \ddot{e}_\psi + k_5 \dot{e}_\psi + k_4 e_\psi &= -k_3 \int e_\psi - k_2 \int^{(2)} e_\psi - k_1 \int^{(3)} e_\psi - k_0 \int^{(4)} e_\psi \\
 k_7 e_\psi^{(3)}(0) + k_6 \ddot{e}_\psi(0) + k_6 e_\psi^{(3)}(0)t + k_5 \dot{e}_\psi(0) + k_5 \ddot{e}_\psi(0)t + k_5 \frac{1}{2} e_\psi^{(3)}(0)t^2 &
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned}
z_1 &= \int e_\psi + \frac{k_2}{k_3} \int^{(2)} e_\psi + \frac{k_1}{k_3} \int^{(3)} e_\psi + \frac{k_0}{k_3} \int^{(4)} e_\psi - \frac{k_7}{k_3} e_\psi^{(3)}(0) - \frac{k_6}{k_3} \ddot{e}_\psi(0) - \frac{k_6}{k_3} e_\psi^{(3)}(0)t \\
&\quad - \frac{k_5}{k_3} \dot{e}_\psi(0) - \frac{k_5}{k_3} \ddot{e}_\psi(0)t - \frac{k_5}{k_3} \frac{1}{2} e_\psi^{(3)}(0)t^2 \\
z_1(0) &= -\frac{k_7}{k_3} e_\psi^{(3)}(0) - \frac{k_6}{k_3} \ddot{e}_\psi(0) - \frac{k_5}{k_3} \dot{e}_\psi(0) \\
z_2 &= \int e_\psi + \frac{k_1}{k_2} \int^{(2)} e_\psi + \frac{k_0}{k_2} \int^{(3)} e_\psi - \frac{k_6}{k_2} e_\psi^{(3)}(0) - \frac{k_5}{k_2} \ddot{e}_\psi(0) - \frac{k_5}{k_2} e_\psi^{(3)}(0)t \\
z_2(0) &= -\frac{k_6}{k_2} e_\psi^{(3)}(0) - \frac{k_5}{k_2} \ddot{e}_\psi(0) \\
z_3 &= \int e_\psi + \frac{k_0}{k_1} \int^{(2)} e_\psi - \frac{k_5}{k_1} e_\psi^{(3)}(0) \\
z_3(0) &= -\frac{k_5}{k_1} e_\psi^{(3)}(0) \\
z_4 &= \int e_\psi
\end{aligned} \tag{4.20}$$

El sistema en lazo cerrado esta dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
e_\psi^{(4)} + k_7 e_\psi^{(3)} + k_6 \ddot{e}_\psi + k_5 \dot{e}_\psi + k_4 e_\psi &= -k_3 z_1 \\
\dot{z}_1 &= e_\psi + \frac{k_2}{k_3} z_2 \\
\dot{z}_2 &= e_\psi + \frac{k_1}{k_2} z_3 \\
\dot{z}_3 &= e_\psi + \frac{k_0}{k_1} z_4 \\
\dot{z}_4 &= e_\psi
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Eliminando las variables z mediante la diferenciación directa con respecto al tiempo de la primera ecuación $n - 1$ veces y una más debido al integrador extra colocado, obtenemos la ecuación diferencial en lazo cerrado para la señal de seguimiento e_ψ , la cual está expresada como:

$$e_\psi^{(8)} + k_7 e_\psi^{(7)} + k_6 e_\psi^{(6)} + k_5 e_\psi^{(5)} + k_4 e_\psi^{(4)} + k_3 e_\psi^{(3)} + k_2 \ddot{e}_\psi + k_1 \dot{e}_\psi + k_0 e_\psi = 0 \tag{4.22}$$

El polinomio característico de está ecuación, esta dado por:

$$P(s) = s^{(8)} + k_7 s^7 + k_6 s^6 + k_5 s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \tag{4.23}$$

Un conjunto adecuado de coeficientes de diseño $\{k_7, \dots, k_0\}$, puede garantizar que la localización de todas las raíces del polinomio dado en la ecuación (4.23), se encuentren situadas en la mitad izquierda del plano complejo, garantizando la estabilidad asintótica

de la trayectoria de seguimiento de la salida en lazo cerrado, por lo que los valores de los coeficientes se escogen igualado a los de un polinomio hurwitz, con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
k_7 &= 8\omega\zeta \\
k_6 &= (24\omega^2\zeta^2 + 4\omega^2) \\
k_5 &= (32\omega^3\zeta^3 + 24\omega^3\zeta) \\
k_4 &= (16\omega^4\zeta^4 + 48\omega^4\zeta^2 + 6\omega^4) \\
k_3 &= (32\omega^5\zeta^3 + 24\omega^5\zeta) \\
k_2 &= (24\omega^6\zeta^2 + 4\omega^6) \\
k_1 &= 8\omega^7\zeta \\
k_0 &= \omega^8
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Retomando la ecuación (4.18)

$$e_V(t) = -\frac{1}{\beta} \left[k_7 \hat{e}_\psi^{(3)} + k_6 \hat{e}_\psi + k_5 \hat{e}_\psi + k_4 e_\psi + k_3 \int e_\psi + k_2 \int^2 e_\psi + k_1 \int^3 e_\psi + k_0 \int^4 e_\psi \right]$$

Considerando las siguientes relaciones obtenidas en la parametrización diferencial para la grúa viajera y para el péndulo invertido sobre un carro respectivamente:

$$\ddot{\psi}_g = g\theta_\delta; \quad \ddot{\psi}_p = g\theta_\delta$$

Se puede observar que la segunda derivada de la salida plana esta dada en términos de las variables que pueden ser medidas, por lo que, se define el siguiente error de seguimiento $\ddot{e}_\psi = \ddot{\psi} - [\psi^*(t)]^{(2)} = g\theta_\delta - g\theta^*(t) = ge_\theta = \hat{e}_\psi$ dado en términos de la diferencia de la posición angular del péndulo y su valor nominal $\theta^*(t)$, obtenido de la parametrización diferencial.

Debido a lo anterior se obtienen las siguientes relaciones para el controlador.

$$\begin{aligned}
e_\psi &= \psi - \psi^* \\
\hat{e}_\psi &= \dot{\psi} - [\psi^*(t)]^{(1)} = \beta \int e_\theta \\
\hat{\hat{e}}_\psi &= \ddot{\psi} - [\psi^*(t)]^{(2)} = g\theta_\delta - g\theta^*(t) = ge_\theta \\
\hat{\hat{\hat{e}}}_\psi^{(3)} &= \beta \int e_V(t)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Tomando en cuenta las relaciones obtenidas en (4.25), el controlador puede ser reescrito como se muestra continuación

$$\begin{aligned}
e_V(t) = -\frac{1}{\beta} \left[k_7 \beta \int e_V(t) + k_6 g e_\theta + k_5 \beta \int e_\theta + k_4 e_\psi + k_3 \int e_\psi + k_2 \int^2 e_\psi \right. \\
\left. + k_1 \int^3 e_\psi + k_0 \int^4 e_\psi \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Aplicando la transformada de Laplace tenemos una representación en el dominio de la frecuencia.

$$e_{V(s)} = -\frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta k_7}{s} e_{V(s)} + \left(k_6 + \frac{k_5}{s} \right) g e_\theta \right] - \frac{1}{\beta} \left[k_4 + \frac{k_3}{s} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_1}{s^3} + \frac{k_0}{s^4} \right] e_\psi \quad (4.27)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas tenemos una representación en términos de redes de compensación como se muestra en la ecuación (4.28), se puede ver un esquema en 4.9.

$$e_{V(s)} = -\frac{g}{\beta} \left[\frac{k_6 s + k_5}{s + k_7} \right] e_\theta(s) - \frac{1}{\beta} \left[\frac{k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^3(s + k_7)} \right] e_\psi(s) \quad (4.28)$$

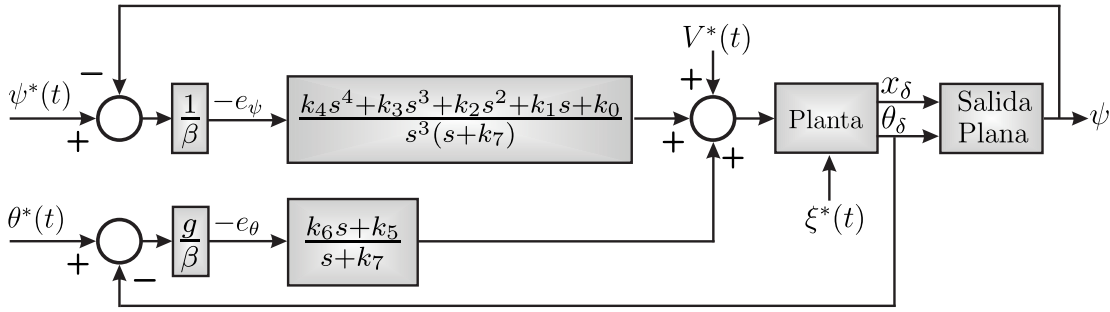


Figura 4.9: Diagrama esquemático como redes de compensación.

Para la implementación se obtiene una expresión en el dominio del tiempo en espacio de estados como se muestra continuación. Se definen:

$$e_{\theta f}(s) = \frac{e_\theta(s)}{s + k_7} \quad (4.29)$$

$$e_{\psi f}(s) = \frac{e_\psi(s)}{s^3(s + k_7)} \quad (4.30)$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores en (4.28).

$$e_{V(s)} = -\frac{g}{\beta} (k_6 s + k_5) e_{\theta f}(s) - \frac{1}{\beta} (k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0) e_{\psi f}(s) \quad (4.31)$$

pasando al dominio del tiempo se tiene:

$$e_{V(t)} = -\frac{g}{\beta} (k_6 \dot{e}_{\theta f} + k_5 e_{\theta f}) - \frac{1}{\beta} \left(k_4 e_{\psi f}^{(4)} + k_3 e_{\psi f}^{(3)} + k_2 \ddot{e}_{\psi f} + k_1 \dot{e}_{\psi f} + k_0 e_{\psi f} \right) \quad (4.32)$$

retomando la ecuación (4.29), se obtienen:

$$\begin{aligned} e_{\theta f}(s)(s + k_7) &= e_\theta(s) \\ s e_{\theta f}(s) + k_7 e_{\theta f}(s) &= e_\theta(s) \\ s e_{\theta f}(s) &= e_\theta(s) - k_7 e_{\theta f}(s) \end{aligned} \quad (4.33)$$

pasando al dominio del tiempo.

$$\dot{e}_{\theta f} = e_{\theta} - k_7 e_{\theta f} \quad (4.34)$$

colocando la ecuación anterior en espacio de estados se obtiene:

$$\dot{x}_{\theta 1} = \dot{e}_{\theta f} = e_{\theta} - k_7 x_{\theta 1} \quad (4.35)$$

Para la ecuación (4.30), se tiene:

$$\begin{aligned} e_{\psi f}(s)(s^4 + s^3 k_7) &= e_{\psi}(s) \\ s^4 e_{\psi f}(s) + k_7 s^3 e_{\psi f}(s) &= e_{\psi}(s) \\ s^4 e_{\psi f}(s) &= e_{\psi}(s) - k_7 s^3 e_{\psi f}(s) \end{aligned} \quad (4.36)$$

pasando al dominio del tiempo.

$$e_{\psi f}^{(4)} = e_{\psi} - k_7 e_{\psi f}^{(3)} \quad (4.37)$$

colocando la ecuación anterior en espacio de estados se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\psi 1} &= x_{\psi 2} \\ \dot{x}_{\psi 2} &= x_{\psi 3} \\ \dot{x}_{\psi 3} &= x_{\psi 4} \\ \dot{x}_{\psi 4} &= e_{\psi f}^{(4)} = e_{\psi} - k_7 x_{\psi 4} \end{aligned} \quad (4.38)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.35) y (4.38) en la ecuación (4.32) se obtiene la siguiente representación del controlador, la cual, sera implementada con sus ecuaciones de estado para la simulación.

$$e_V(t) = -\frac{g}{\beta} (k_6 e_{\theta} + (k_5 - k_6 k_7) x_{\theta}) - \frac{1}{\beta} (k_4 e_{\psi} + (k_3 - k_4 k_7) x_{\psi 4} + k_2 x_{\psi 3} + k_1 x_{\psi 2} + k_0 x_{\psi 1}) \quad (4.39)$$

4.2.3. Simulación del esquema GPIC diseñado

En la figura 4.8 se puede observar un diagrama esquemático del GPIC a bloques y en la figura 4.9 se muestra su representación como redes de compensación, esta forma será implementada en la simulación en el dominio del tiempo haciendo uso de la ecuación (4.39), su implementación se realizara en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s].

Simulación de la grúa viajera implementando GPIC

Para la simulación de la grúa viajera se considera el esquema mostrado en la figura 3.1 con las siguientes condiciones iniciales $[x_{\delta} = 0, \theta_{\delta} = 0]$ para la posición del carro y del péndulo. El esquema a simular se muestra en la figura 4.10. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, esta dado por las ecuaciones (3.8).

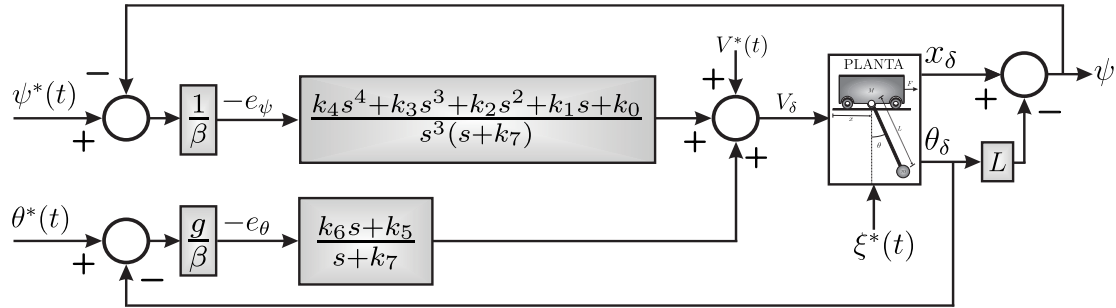


Figura 4.10: Diagrama esquemático del control de la grúa viajera como redes de compensación.

La trayectoria de referencia deseada esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 8$.

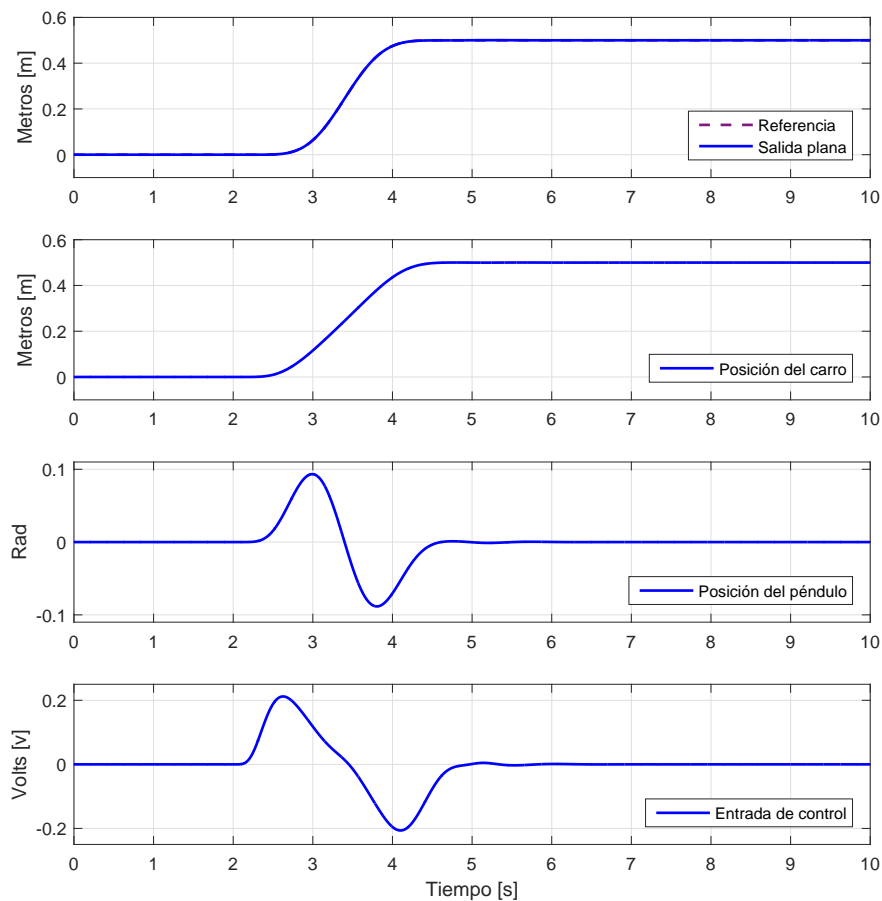


Figura 4.11: Seguimiento de la trayectoria de referencia, variables del sistema y entrada de control.

En la figura 4.11 se puede observar la respuesta del sistema en lazo cerrado. La salida plana alcanza el valor esperado en el tiempo especificado por la trayectoria deseada y esta se encuentra completamente sobrepuesta a la referencia por lo que sabemos que se está realizando el seguimiento con buena precisión. Se puede observar el comportamiento de las variables del sistema así como la señal de control, la cual, permanece dentro de los valores esperados.

La figura 4.12 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo, una vez que el sistema está en equilibrio (En $t = 10$ [s] y $t = 15$ [s]). El controlador atrae la respuesta del sistema a la trayectoria deseada, por lo tanto los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados por el controlador lo cual nos indica el correcto funcionamiento del mismo.

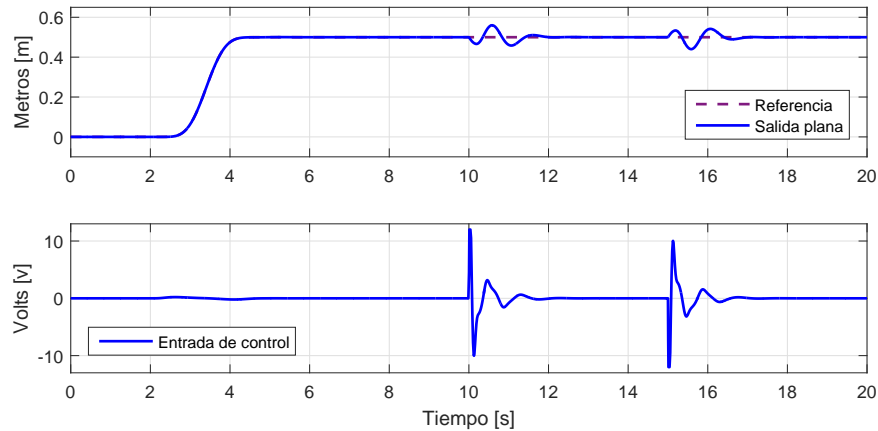


Figura 4.12: Seguimiento de la trayectoria de referencia y entrada de control.

Simulación del péndulo invertido sobre un carro implementando GPIC

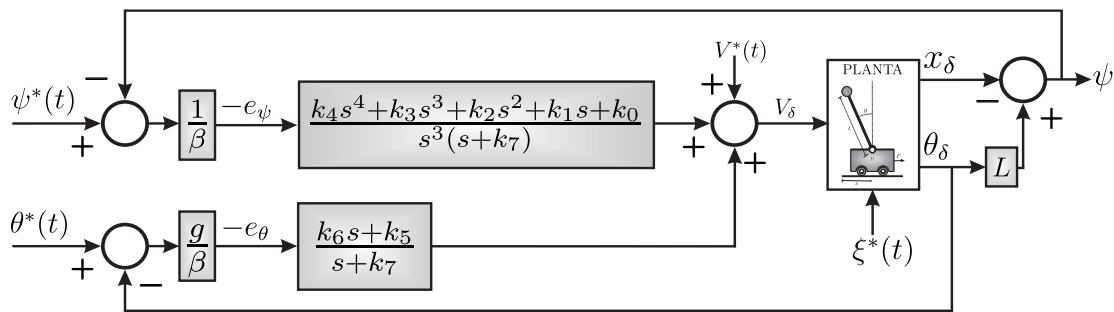


Figura 4.13: Diagrama esquemático del control del péndulo invertido sobre un carro como redes de compensación.

Para la simulación del péndulo invertido sobre un carro se considera el esquema mostrado en la figura 3.2 con las siguientes condiciones iniciales para la posición del carro y del

péndulo respectivamente $[x_\delta = 0, \theta_\delta = 0]$. Se hace uso del esquema de control mostrado en la figura 4.13. En la tabla 4.1 se muestran los parámetros usados en el modelo matemático, para la simulación, el cual, esta dado por las ecuaciones (3.26).

La trayectoria de referencia deseada se realiza con una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 7.5$.

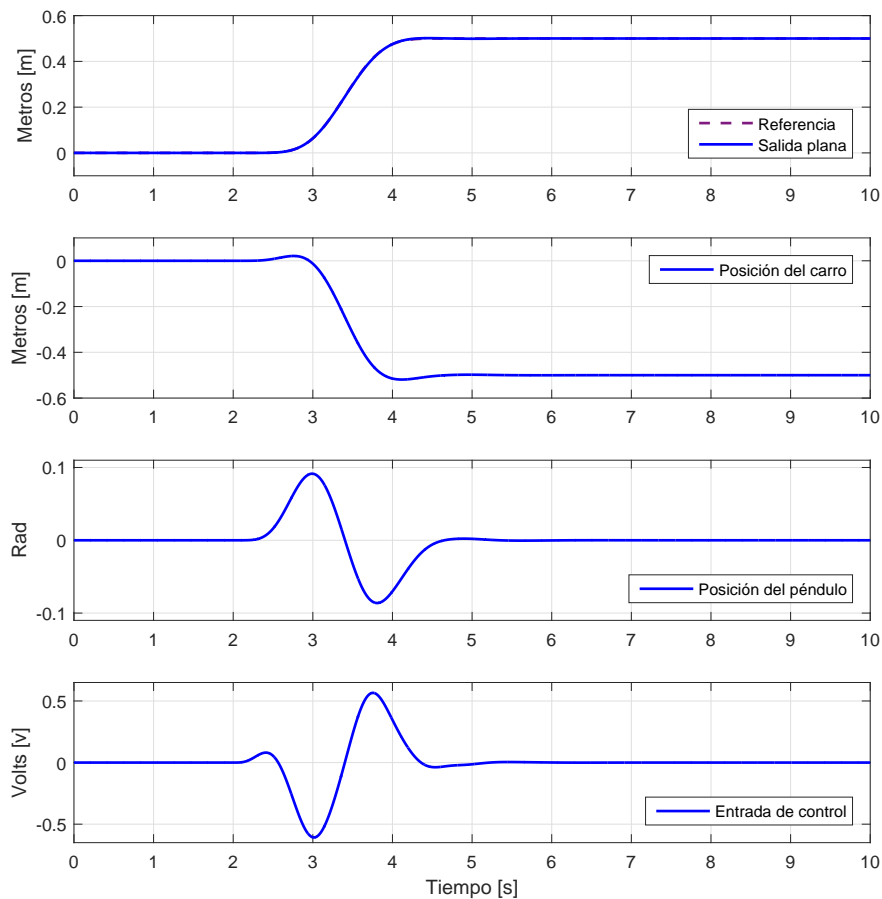


Figura 4.14: Seguimiento de la trayectoria de referencia, variables del sistema y entrada de control.

Como se muestra en la figura 4.14, la respuesta del sistema en lazo cerrado es de la forma esperada, debido a que la salida plana alcanza el valor esperado en el tiempo especificado realizando el seguimiento con buena precisión. La señal de control, permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor y se observa el comportamiento de las variables del sistema.

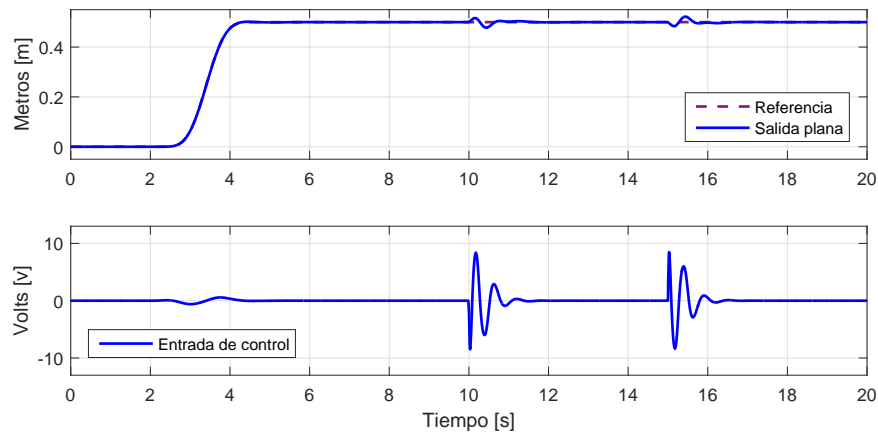


Figura 4.15: Seguimiento de la trayectoria de referencia y entrada de control.

La figura 4.15 muestra la respuesta del sistema a perturbaciones en lazo cerrado. El sistema es perturbado con una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo, una vez que el sistema está en equilibrio (En $t = 10$ [s] y $t = 15$ [s]). Se observa la reacción del controlador, la cual, conduce la respuesta del sistema a la trayectoria deseada, por lo tanto, los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados por el controlador, por lo que se puede observar un buen funcionamiento del mismo.

4.3. Consenso de sistemas no lineales subactuados usando una linealización aproximada

La popularidad de la implementación de control por consenso de sistemas subactuados va en aumento, en la literatura se pueden encontrar múltiples ejemplos de control cooperativo. Algunos de los ejemplos más usuales plantean el control de un conjunto de vehículos aéreos no tripulados donde se busca el uso de estrategias de control para realizar un vuelo en formación o bien se busca una solución al problema de consenso líder-seguidor, véase [21], [31], [38].

En esta sección se plantea como objetivo principal lograr un consenso entre ciertas variables de interés en sistemas no lineales subactuados, resolviendo los principales problemas de consenso planteados en el capítulo 2. De la misma forma que en las secciones 4.1 y 4.2, en esta sección se toman la grúa viajera y el péndulo invertido como casos de estudio y donde serán vistos como agentes, los cuales conformarán una red de n elementos.

4.3.1. Formulación del problema

La problemática a resolver es la implementación de sistemas subactuados no lineales (grúa viajera y péndulo invertido sobre un carro) usando una linealización aproximada alrede-

dor de un punto de equilibrio, donde se requiere un consenso entre ciertas variables de interés (salida plana del sistema ψ donde $\psi = \psi_i^0$) para un conjunto de estos sistemas, considerando el problema de consenso no restringido y restringido.

- Problema de consenso no restringido. Se busca un consenso no restringido, el cual, es visto como un problema de alineación, donde, se necesita que las variables de interés de un conjunto de n sistemas sean asintóticamente iguales.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_i^\kappa - \psi_j^\kappa| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \kappa = 0, \dots, l-1, \quad \forall i \neq j. \quad (4.40)$$

- Problema de consenso restringido. Se busca un consenso restringido, donde, se tiene un valor de consenso deseado al cual deben converger las variables de interés de un conjunto de n sistemas. Este problema puede ser subdividido en dos casos.
 - El problema de consenso restringido donde se toma como valor de consenso deseado una referencia constante por lo que $\psi_r^0 = C$ donde $C \in \mathbb{R}$, $\psi_r^1 = 0$, $\psi_r^2 = 0$, $\psi_r^3 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_i^\kappa - \psi_j^\kappa| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_i^\kappa - \psi_r^\kappa| = 0 \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \kappa = 0, \dots, l-1, \quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (4.41)$$

- El problema de consenso restringido donde se toma como valor de consenso un modelo de referencia. Este problema también es conocido como consenso con un líder.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_i^\kappa - \psi_j^\kappa| = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_i^\kappa - \psi_r^\kappa| = 0 \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \kappa = 0, \dots, l-1, \quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para los tres casos se considera que se desea estabilizar el carro y el péndulo en cada sistema en un punto de equilibrio deseado, lejos del punto de equilibrio inicial ya sea estable o inestable dependiendo del sistema a controlar (grúa viajera o péndulo invertido sobre un carro), eliminando las posibles oscilaciones generadas en el péndulo y tomando en cuenta que sólo se tiene acceso a la posición angular del péndulo y a la posición del carro.

4.3.2. Aspectos a considerar en la solución de los problemas de consenso planteados

Debido a que no se cuenta con acceso completo al estado del sistema es necesario estimar las variables no medidas, por lo tanto, se pretende usar un ESO para estimar las derivadas de la salida plana a las que no se tiene acceso y a través de la parametrización diferencial obtenida se puede obtener el estado completo del sistema. Por lo que para las simulaciones e implementación de los ejemplos de consenso se hará uso del esquema del ESO mostrado

en la figura 4.16. El análisis y diseño del ESO así como la obtención de las ganancias para su implementación son los desarrollados en la sección 4.1.2

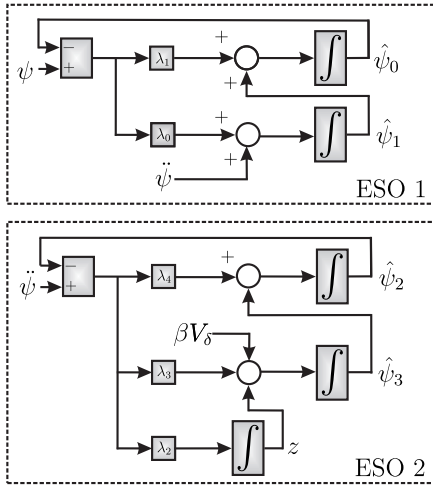


Figura 4.16: Diagrama esquemático del ESO a usar en los ejemplos de consenso.

4.3.3. Problema de consenso no restringido y simulación

Para el problema de consenso no restringido se considera la topología de intercambio de información para dos agentes (los cuales pueden ser la grúa viajera o el péndulo invertido sobre un carro), mostrada en la figura 4.17, donde se puede observar que el grafo contiene un árbol de expansión.



Figura 4.17: Topología de intercambio de información para dos agentes.

Retomando nuevamente la ecuación (4.1) como una expresión general para la dinámica de entrada-salida de la grúa viajera o del péndulo invertido sobre un carro, tomando en cuenta la salida plana correspondiente a cada uno de los sistema.

$$\psi^{(4)} = \beta V_\delta + \xi(t) \quad (4.43)$$

Se coloca la dinámica del sistema de la ecuación (4.43) en representación de espacio de estados, considerando sin considerar el termino de perturbaciones y $u = \beta V_\delta$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i^0 &= \psi_i^1 \\ \dot{\psi}_i^1 &= \psi_i^2 \\ \dot{\psi}_i^2 &= \psi_i^3 \\ \dot{\psi}_i^3 &= \psi_i^{(4)} = u_i \end{aligned} \quad (4.44)$$

Se busca un consenso no restringido para las salidas planas, de agentes, cuya representación dinámica de entrada-salida está dada por la ecuación (4.44), para lo cual, se pretende implementar el algoritmo de consenso dado por la ecuación (2.98). y que para el caso a tratar se tiene:

$$u_i = - \sum_{j=1}^2 g_{ij} k_{ij} \left[\sum_{\kappa=0}^3 \gamma_{\kappa} (\psi_i^{\kappa} - \psi_j^{\kappa}) \right], \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.45)$$

Donde $g_{ij} = 1$ si hay flujo de información del agente j al i y cero en cualquier otro caso. Los k_{ij} representan el peso del enlace entre el agente j e i , para nuestro ejemplo los k_{ij} se tomaran de valor unitario y los γ_{κ} son ganancias a diseñar. Haciendo uso de la ecuación (4.45) en la ecuación (4.44) y colocándolo en forma matricial se obtiene la ecuación (4.46).

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}^0 \\ \dot{\psi}^1 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\psi}^3 \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Donde

$$\eta = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -\gamma_0 L & -\gamma_1 L & -\gamma_2 L & -\gamma_3 L \end{bmatrix}$$

En la ecuación (4.46), I_2 es una matriz identidad de dimensiones 2×2 , 0_2 es una matriz de ceros de dimensiones 2×2 , cada componente del vector $[\psi^0 \ \psi^1 \ \psi^2 \ \psi^3]^T$, está dado por $\psi^{\kappa} = [\psi_1^{\kappa} \ \psi_2^{\kappa}]^T$, debido a que el número de agentes es n y $n = 2$. Acorde con la topología de comunicación mostrada en la figura 4.17, se muestra la matriz laplaciana L obtenida, la cual, es usada en η .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Tomando a λ como valor propio de η y $q = [p^T, r^T, s^T, z^T]^T$ es su vector propio asociado, en donde p, r, s y z son vectores columna de dimensiones 2×1 , se tiene la siguiente ecuación:

$$\eta q = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -\gamma_0 L & -\gamma_1 L & -\gamma_2 L & -\gamma_3 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

las siguientes expresiones son obtenidas de la ecuación (4.48).

$$\begin{aligned} r &= \lambda p \\ s &= \lambda r \\ z &= \lambda s \\ -\gamma_0 L p - \gamma_1 L r - \gamma_2 L s - \gamma_3 L z &= \lambda z \end{aligned} \quad (4.49)$$

De la ecuación (4.49), se observa que, $q = [p^T, \lambda p^T, \lambda^2 p^T, \lambda^3 p^T]^T$, por lo tanto $-\gamma_0 Lp - \gamma_1 L\lambda p - \gamma_2 L\lambda^2 p - \gamma_3 L\lambda^3 p = \lambda^4 p$, lo cual, puede reescribirse como:

$$-Lp = \frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3} p \quad (4.50)$$

Por lo que $\frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3}$, es un valor propio de $-L$, asociado con el vector propio p . Tomando la siguiente relación $\mu = \frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3}$, donde, μ es un valor propio de $-L$ con p como su vector propio asociado, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lambda^4 - \gamma_3 \mu \lambda^3 - \gamma_2 \mu \lambda^2 - \gamma_1 \mu \lambda - \gamma_0 \mu = 0 \quad (4.51)$$

Para la obtención de los coeficientes $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1$ y γ_0 igualamos los coeficientes de (4.51), a un polinomio Hurwitz de cuarto orden con la siguiente forma, $(s^2 + 2\zeta\omega s + 2\omega^1)^2$

$$\begin{aligned} -\rho\gamma_0 &= \omega^4 \\ -\rho\gamma_1 &= 4\omega^3\zeta \\ -\rho\gamma_2 &= 4\zeta^2\omega^2 + 2\omega^2 \\ -\rho\gamma_3 &= 4\zeta\omega \end{aligned} \quad (4.52)$$

Asignados los valores de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ y γ_3 a través de la ecuación (4.51) se corrobora que se cumplan las condiciones necesarias y suficientes para lograr un consenso exponencial entre las variables deseadas. En el caso de $l = 4$, tener un árbol de expansión es una condición necesaria para lograr el consenso, pero no es una condición suficiente por lo que se verifica la condición presentada en el *teorema 3.1, pp. 559*, presentado en [43] extendida para el caso $l = 4$ donde se logra un consenso exponencialmente si y sólo si $-\eta$ tiene exactamente cuatro valores propios cero y todos los otros valores propios tienen parte real negativa.

Simulación del problema de consenso no restringido usando la grúa viajera

La simulación se realiza en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s]. En este ejemplo se usa la grúa viajera como agente y se considera el esquema mostrado en la figura 3.1 con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes mostradas en la tabla 4.2.

Tabla 4.2: Condiciones iniciales (Problema de consenso no restringido-grúa viajera)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	0.6	0
Agente 2	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.18. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.8)

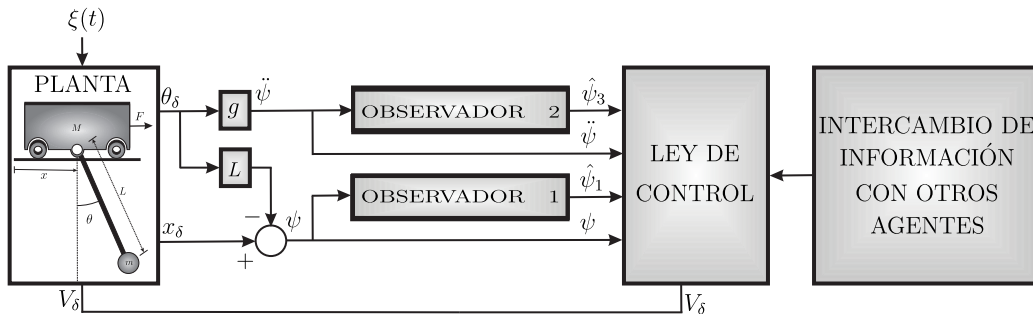


Figura 4.18: Diagrama esquemático general del control para cada agente (grúa viajera)

Analizando la matriz $-L$ dada en (4.47), se obtienen los valores propios de la matriz $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$. Se puede observar que contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contienen un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria.

Los parámetros de diseño del observador para cada agente se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 5.5$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 915.0625$, $-\rho\gamma_1 = 665.5$, $-\rho\gamma_2 = 181.5$ y $-\rho\gamma_3 = 22$, Haciendo uso de la ecuación (4.51) se encuentran los valores propios de $-\eta$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -5.5011$, $\lambda_{4j-2} = -5.5000 + 0.0011i$, $\lambda_{4j-1} = -5.5000 - 0.0011i$ y $\lambda_{4j} = -5.4989$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\eta$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (4.53), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.45) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.17.

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1} \quad V_{\delta 1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) \right\} \\
 \text{Agente 2} \quad V_{\delta 2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Los términos δ_i denotan las separaciones de formación deseadas entre los agentes (de modo que $(\delta_1 - \delta_j)$ es la separación deseada entre el agente i y el agente j). Para el caso de simulación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros, por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1$ [m] y $\delta_2 = -0.1$ [m].

La figura 4.19, muestra la respuesta de los dos agentes en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al valor de consenso esperado (promedio de las condiciones iniciales de las salidas planas) y como las derivadas de estas convergen a cero, situando de esta manera a cada agente en la posición deseada, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos. Se observa que la señal de control, permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

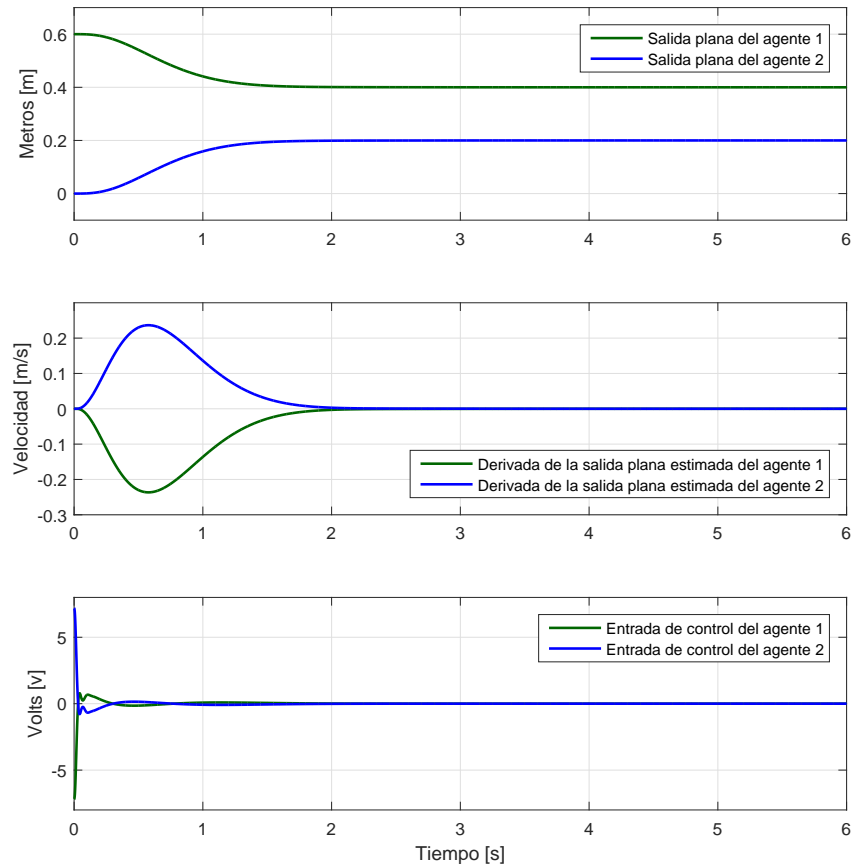


Figura 4.19: Consenso de las salidas planas, consenso de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

Simulación del problema de consenso no restringido usando el péndulo invertido sobre un carro

La simulación se realiza en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s]. En este ejemplo se usa el péndulo invertido sobre un carro como agente y se considera el esquema mostrado en la figura 3.2 con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes mostradas en la tabla 4.3.

Tabla 4.3: Condiciones iniciales (Problema de consenso no restringido-péndulo invertido sobre un carro)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	-0.6	0
Agente 2	0	0

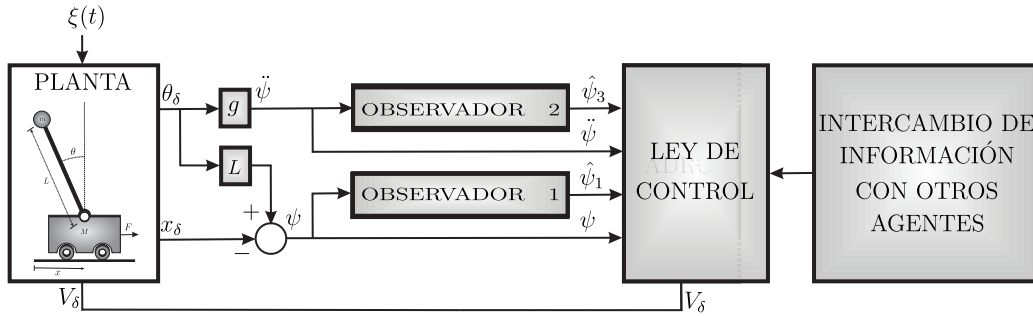


Figura 4.20: Diagrama esquemático general del control para cada agente (péndulo invertido sobre un carro)

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.20. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.26). En este ejemplo de simulación se usará la topología de comunicación mostrada en la figura 4.17, como ya se mostró, la matriz $-L$ dada en (4.47) contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contienen un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria.

Los parámetros de diseño del observador para cada agente se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 6$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 1296$, $-\rho\gamma_1 = 864$, $-\rho\gamma_2 = 216$ y $-\rho\gamma_3 = 24$, Haciendo uso de la ecuación (4.51) se encuentran los valores propios de $-\eta$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -6.0011$, $\lambda_{4j-2} = -6.0000 + 0.0011i$, $\lambda_{4j-1} = -6.0000 - 0.0011i$ y $\lambda_{4j} = -5.9989$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\eta$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (4.54), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.45) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.17.

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1} \quad V_{\delta 1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) \right\} \\
 \text{Agente 2} \quad V_{\delta 2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Para el caso de simulación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros, por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1 [m]$ y $\delta_2 = -0.1 [m]$.

La figura 4.21, muestra la respuesta de los tres agentes en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes las cuales son llevadas al valor de consenso y las derivadas de estas convergen a cero, situando de esta manera a cada agente en la posición deseada, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos. Se observa que la señal de control, permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

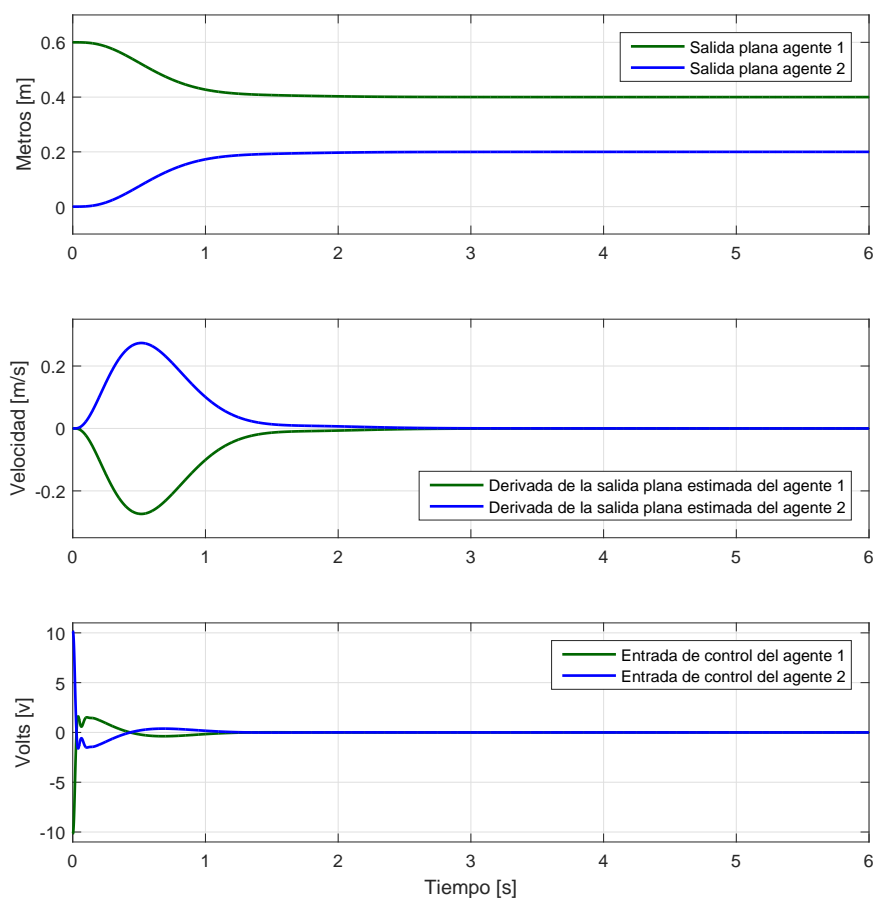


Figura 4.21: Consenso de las salidas planas, consenso de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

4.3.4. Problema de consenso restringido a un punto de referencia deseado y simulación

Para el problema de consenso restringido se considera la topología de intercambio de información para un líder y dos agentes (los cuales pueden ser la grúa viajera o el péndulo invertido sobre un carro), mostrada en la figura 4.22, donde se puede observar que el grafo contiene un árbol de expansión.

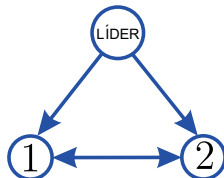


Figura 4.22: Topología de intercambio de información para un líder y dos agentes.

Retomando nuevamente la ecuación (4.1) como una expresión general para la dinámica de entrada-salida de la grúa viajera o del péndulo invertido sobre un carro, tomando en cuenta la salida plana correspondiente a cada uno de los sistema.

$$\psi^{(4)} = \beta V_\delta + \xi(t) \quad (4.55)$$

Se coloca la dinámica del sistema de la ecuación (4.43) en representación de espacio de estados, sin considerar el termino de perturbaciones y $u = \beta V_\delta$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i^0 &= \psi_i^1 \\ \dot{\psi}_i^1 &= \psi_i^2 \\ \dot{\psi}_i^2 &= \psi_i^3 \\ \dot{\psi}_i^3 &= \psi_i^{(4)} = u_i \end{aligned} \quad (4.56)$$

Se busca un consenso restringido para las salidas planas de dos agentes a un valor deseado, cuya representación dinámica de entrada-salida está dada por la ecuación (4.55), para lo cual, se pretende implementar el algoritmo de consenso dado por la ecuación (2.106). y que para el caso a tratar se tiene:

$$u_i = - \sum_{j=1}^2 g_{ij} k_{ij} \left[\sum_{\kappa=0}^3 \gamma_\kappa (\psi_i^\kappa - \psi_j^\kappa) \right] - \alpha \left[\sum_{\kappa=0}^3 \gamma_\kappa (\psi_i^\kappa - \psi_r^\kappa) \right], \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.57)$$

Donde $g_{ij} = 1$ si hay flujo de información del agente j al i y cero en cualquier otro caso. Los k_{ij} representan el peso del enlace entre el agente j e i , para nuestro ejemplo los k_{ij} se tomaran de valor unitario y los γ_κ son ganancias a diseñar. Para este ejemplo $\alpha = 1$ para ambos agentes debido a que ambos tienen acceso a la información de la referencia la cual está dada por $\psi_r^3 = 0$, $\psi_r^2 = 0$, $\psi_r^1 = 0$, $\psi_r^0 = C = 0.25$ [m], tomando el último valor como el valor de consenso deseado.

Haciendo uso de la parte de la ecuación (4.57) en la que no se encuentra involucrado el líder, en la ecuación (4.56) y colocándolo en forma matricial se obtiene la ecuación (4.58).

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}^0 \\ \dot{\psi}^1 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\psi}^3 \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Donde

$$\eta = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -\gamma_0 L & -\gamma_1 L & -\gamma_2 L & -\gamma_4 L \end{bmatrix}$$

En la ecuación (4.58), I_2 es una matriz identidad de dimensiones 2×2 , 0_2 es una matriz de ceros de dimensiones 2×2 , cada componente del vector $[\psi^0 \ \psi^1 \ \psi^2 \ \psi^3]^T$, está dado por $\psi^\kappa = [\psi_1^\kappa \ \psi_2^\kappa]^T$, debido a que el número de agentes es n y $n = 2$. Acorde con la topología de comunicación mostrada en la figura 4.22 sin considerar al líder, se muestra la matriz laplaciana L obtenida, la cual, es usada en η .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Tomando a λ como valor propio de η y $q = [p^T, r^T, s^T, z^T]^T$ es su vector propio asociado, en donde p, r, s y z son vectores columna de dimensiones 2×1 , se tiene la siguiente ecuación:

$$\eta q = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -\gamma_0 L & -\gamma_1 L & -\gamma_2 L & -\gamma_3 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

las siguientes expresiones son obtenidas de la ecuación (4.60).

$$\begin{aligned} r &= \lambda p \\ s &= \lambda r \\ z &= \lambda s \\ -\gamma_0 L p - \gamma_1 L r - \gamma_2 L s - \gamma_3 L z &= \lambda z \end{aligned} \quad (4.61)$$

De la ecuación (4.61), se observa que, $q = [p^T, \lambda p^T, \lambda^2 p^T, \lambda^3 p^T]^T$, por lo tanto $-\gamma_0 L p - \gamma_1 L \lambda p - \gamma_2 L \lambda^2 p - \gamma_3 L \lambda^3 p = \lambda^4 p$, lo cual, puede reescribirse como:

$$-L p = \frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3} p \quad (4.62)$$

Por lo que $\frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3}$, es un valor propio de $-L$, asociado con el vector propio p . Tomando la siguiente relación $\mu = \frac{\lambda^4}{\gamma_0 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda^3}$, donde, μ es un valor propio de $-L$ con p como su vector propio asociado, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lambda^4 - \gamma_3 \mu \lambda^3 - \gamma_2 \mu \lambda^2 - \gamma_1 \mu \lambda - \gamma_0 \mu = 0 \quad (4.63)$$

Para la obtención de los coeficientes $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1$ y γ_0 igualamos los coeficientes de (4.63), a un polinomio Hurwitz de cuarto orden con la siguiente forma, $(s^2 + 2\zeta\omega s + 2\omega^1)^2$

$$\begin{aligned}
 -\rho\gamma_0 &= \omega^4 \\
 -\rho\gamma_1 &= 4\omega^3\zeta \\
 -\rho\gamma_2 &= 4\zeta^2\omega^2 + 2\omega^2 \\
 -\rho\gamma_3 &= 4\zeta\omega
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Asignados los valores de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ y γ_3 a través de la ecuación (4.63) se corrobora que se cumplan las condiciones necesarias y suficientes para lograr un consenso exponencial entre las variables deseadas. En el caso de $l = 4$, tener un árbol de expansión es una condición necesaria para lograr el consenso, pero no es una condición suficiente por lo que se verifica la condición presentada en el *teorema 3.1, pp. 559*, presentado en [43] extendida para el caso $l = 4$ donde se logra un consenso exponencialmente si y sólo si $-\eta$ tiene exactamente cuatro valores propios cero y todos los otros valores propios tienen parte real negativa.

Simulación del problema de consenso restringido a un punto referencia deseado usando la grúa viajera

La simulación se realiza en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s]. En este ejemplo se usa la grúa viajera como agente y se considera el esquema mostrado en la figura 3.1 con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes mostradas en la tabla 4.4.

Tabla 4.4: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-grúa viajera)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	0.45	0
Agente 2	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.18. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.8)

Analizando la matriz $-L$ dada en (4.59), se obtienen los valores propios de la matriz $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$. Se puede observar que contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria.

Los parámetros de diseño del observador para cada agente se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 6$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 1296$, $-\rho\gamma_1 = 864$, $-\rho\gamma_2 = 216$ y $-\rho\gamma_3 = 24$, Haciendo uso de la ecuación (4.63) se encuentran los valores propios de $-\eta$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -6.0011$, $\lambda_{4j-2} = -6.0000 + 0.0011i$, $\lambda_{4j-1} = -6.0000 - 0.0011i$

y $\lambda_{4j} = -5.9989$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\eta$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (4.65), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.57) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.22.

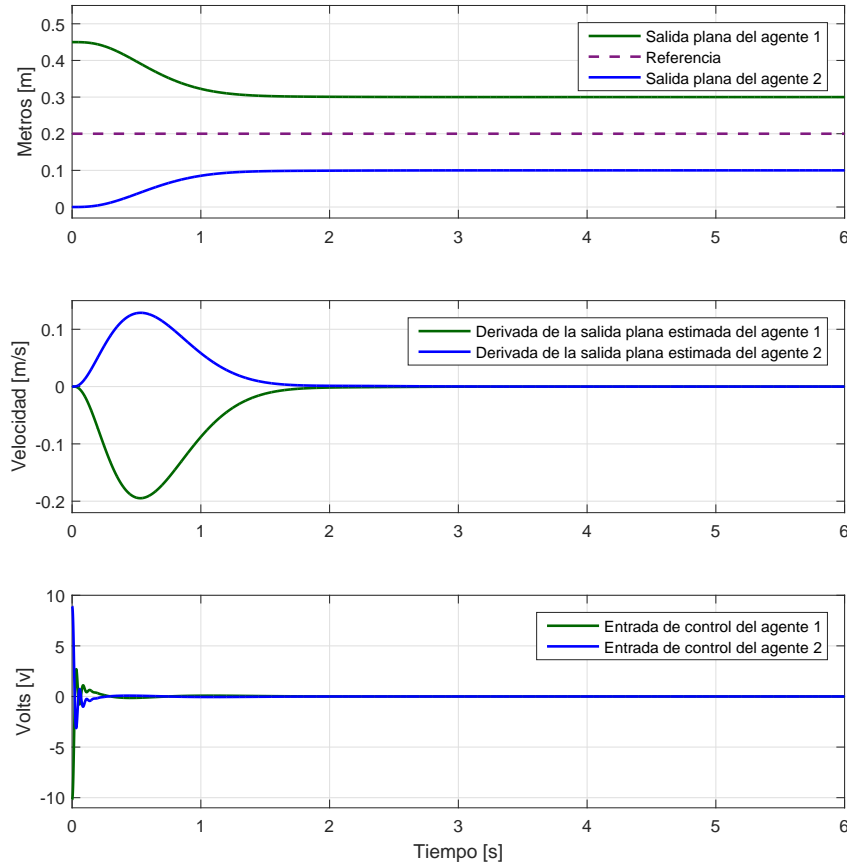


Figura 4.23: Consenso de las salidas planas, consenso de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1 } V_{\delta 1} = & -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \\
 & + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 & + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Agente } 2 \quad V_{\delta_2} = & -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \\
& + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
& + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) \}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Los términos δ_i denotan las separaciones de formación deseadas entre los agentes (de modo que $(\delta_1 - \delta_j)$ es la separación deseada entre el agente i y el agente j), el término δ_r es la separación del agente i con el valor de consenso deseado. Para el caso de simulación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el valor de consenso deseado de $\delta_r = 0.1$ [m], por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1$ [m] y $\delta_2 = -0.1$ [m].

La figura 4.23, muestra la respuesta de los dos agentes en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al valor de consenso esperado (punto de referencia deseado $\psi_r^0 = C = 0.2$ [m]). Las derivadas de las salidas planas de los agentes convergen a cero, situando de esta manera a cada agente en la posición deseada, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con la referencia. Se observa que la señal de control, permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

Simulación del problema de consenso restringido a un punto referencia deseado usando al péndulo invertido sobre un carro

La simulación se realiza con un paso de integración $1E - 5$ [s] en el software MATLAB-Simulink. En este ejemplo se usa el péndulo invertido sobre un carro como agente y se considera el esquema mostrado en la figura 3.2 con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes mostradas en la tabla 4.5.

Tabla 4.5: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-péndulo invertido sobre un carro)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	-0.45	0
Agente 2	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.20. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.26). En este ejemplo de simulación se usará la topología de comunicación mostrada en la figura 4.22, como ya se mostró, la matriz $-L$ dada en (4.59) contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria.

Los parámetros de diseño del observador para cada agente se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 6.6$ con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 1897.5$, $-\rho\gamma_1 = 1150$, $-\rho\gamma_2 = 261.36$ y $-\rho\gamma_3 = 26.4$. Haciendo uso de la ecuación (4.63) se encuentran los valores propios de $-\eta$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -7.1445$, $\lambda_{4j-2} = -6.5858 + 0.5307i$, $\lambda_{4j-1} = -6.5858 - 0.5307i$ y $\lambda_{4j} = -6.0839$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\eta$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (4.66), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.57) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.22.

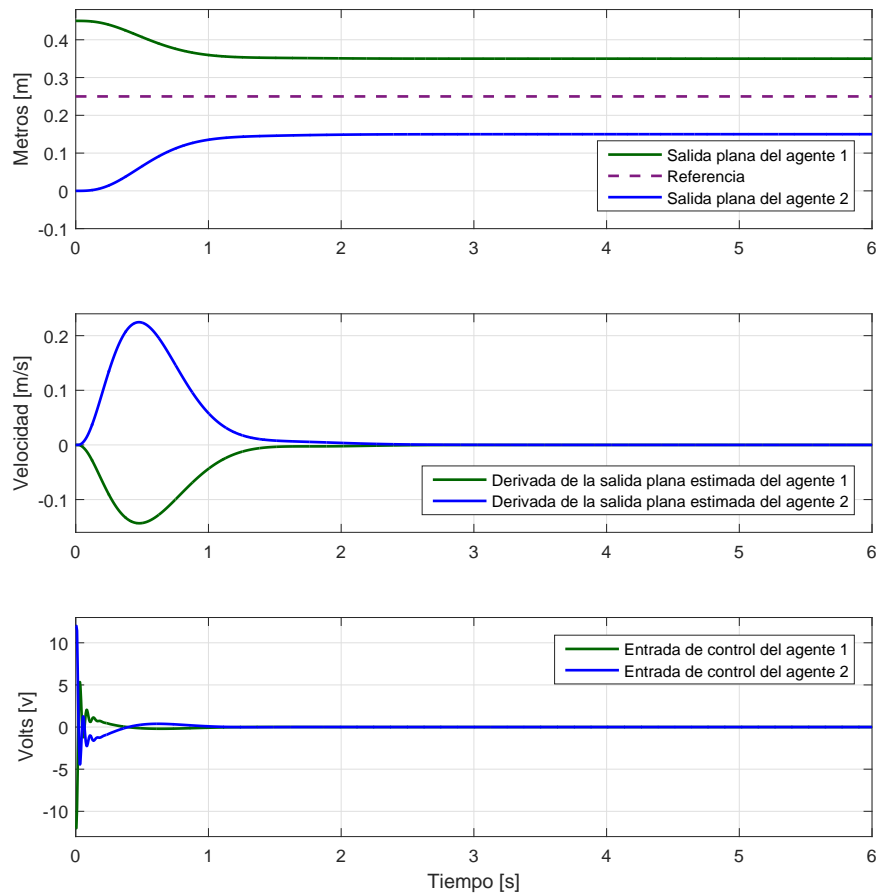


Figura 4.24: Consenso de las salidas planas, consenso de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

$$\begin{aligned}
\text{Agente 1 } V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \\
&\quad + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
&\quad + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) \} \\
\\
\text{Agente 2 } V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \\
&\quad + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
&\quad + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) \}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Los términos δ_i denotan las separaciones de formación deseadas entre los agentes (de modo que $(\delta_1 - \delta_j)$ es la separación deseada entre el agente i y el agente j), el término δ_r es la separación del agente i con el valor de consenso deseado. Para el caso de simulación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el valor de consenso deseado de $\delta_r = 0.1 [m]$, por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1 [m]$ y $\delta_2 = -0.1 [m]$.

La figura 4.24, muestra la respuesta de los dos agentes en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al valor de consenso esperado (punto de referencia deseado $\psi_r^0 = C = 0.25 [m]$). Las derivadas de las salidas planas de los agentes convergen a cero, situando de esta manera a cada agente en la posición deseada, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con la referencia. Se observa que la señal de control, permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

4.3.5. Problema de consenso restringido a un modelo de referencia y simulación

Para el problema de consenso restringido a un modelo de referencia se considera la topología de intercambio de información mostrada en la figura 4.25, la cual considera a un líder y dos agentes (como agentes en los ejemplos serán utilizados la grúa viajera o péndulo invertido sobre un carro), se puede observar que el grafo contiene un árbol de expansión.

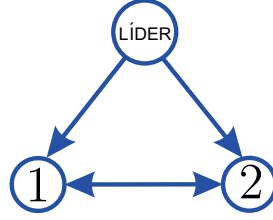


Figura 4.25: Topología de intercambio de información para un líder y dos agentes.

Tomando como expresión general a la ecuación (4.1) para la dinámica de entrada-salida de la grúa viajera o del péndulo invertido sobre un carro a la ecuación, sin olvidar tomar en cuenta la salida plana correspondiente a cada uno de los sistemas usados como ejemplos.

$$\psi^{(4)} = \beta V_\delta + \xi(t) \quad (4.67)$$

Se coloca la dinámica del sistema de la ecuación (4.67) en representación de espacio de estados, sin considerar el termino de perturbaciones y $u = \beta V_\delta$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i^0 &= \psi_i^1 \\ \dot{\psi}_i^1 &= \psi_i^2 \\ \dot{\psi}_i^2 &= \psi_i^3 \\ \dot{\psi}_i^3 &= \psi_i^{(4)} = u_i \end{aligned} \quad (4.68)$$

Por otro lado se considera un modelo dinámico de referencia dado por las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_r^0 &= \psi_r^1 \\ \dot{\psi}_r^1 &= \psi_r^2 \\ \dot{\psi}_r^2 &= \psi_r^3 \\ \dot{\psi}_r^3 &= \psi_r^{(4)} = u_r \end{aligned} \quad (4.69)$$

Donde $\psi_r^k \in \mathbb{R}^m$ con $k = \{0, 1, 2, 3\}$, como los estados de referencia y $u_r \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control de la referencia.

Se busca un consenso restringido para las salidas planas de dos agentes a un modelo de referencia dado por la ecuación (4.69), cuya representación dinámica de entrada-salida está dada por la ecuación (4.67), para lo cual, se pretende implementar el algoritmo de consenso dado por la ecuación (2.106) y que para el caso a tratar se tiene:

$$u_i = - \sum_{j=1}^2 g_{ij} k_{ij} \left[\sum_{\kappa=0}^3 \gamma_\kappa (\psi_i^\kappa - \psi_j^\kappa) \right] - \sum_{\kappa=0}^{-3} \gamma_\kappa (\psi_i^\kappa - \psi_r^\kappa) + u_r, \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.70)$$

Donde $g_{ij} = 1$ si hay flujo de información del agente j al i y cero en cualquier otro caso. Los k_{ij} representan el peso del enlace entre el agente j e i , para nuestro ejemplo los k_{ij} se tomaran de valor unitario y los γ_κ son ganancias a diseñar.

Se define $\tilde{\psi}_i^\kappa = \psi_i^\kappa - \psi_r^\kappa$, $\kappa = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\tilde{\psi}^\kappa$ es un vector columna de dimensión 2×1 con componentes dadas por $\tilde{\psi}_i^\kappa$, $i = \{1, 2\}$. Se utiliza la ecuación (4.70) en la ecuación (4.68), con lo que obtenemos de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\psi}^0 \\ \tilde{\psi}^1 \\ \tilde{\psi}^2 \\ \tilde{\psi}^3 \\ \tilde{\psi}^3 \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} \tilde{\psi}^0 \\ \tilde{\psi}^1 \\ \tilde{\psi}^2 \\ \tilde{\psi}^3 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -\gamma_0 M & -\gamma_1 M & -\gamma_2 M & -\gamma_3 M \end{bmatrix}$$

En la ecuación (4.71), I_2 es una matriz identidad de dimensiones 2×2 , 0_2 es una matriz de ceros de dimensiones 2×2 , cada componente del vector $[\psi^0 \ \psi^1 \ \psi^2 \ \psi^3]^T$, está dado por $\psi^\kappa = [\psi_1^\kappa \ \psi_2^\kappa]^T$, debido a que el número de agentes es n y $n = 2$. Acorde con la topología de comunicación mostrada en la figura 4.25, se muestra la matriz laplaciana L obtenida:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Con lo que se puede obtener el valor de M usando la siguiente ecuación $M = L + I_2$, la cual es usada en Σ . Tomando a μ_i y ρ_i como los valores propios de $-L$ y $-M$ respectivamente, se puede ver que $\rho_i = \mu_i - 1$.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Se selecciona a ν como valor propio de Σ y $q = [p^T, r^T, s^T, z^T]^T$ es su vector propio asociado, en donde p, r, s y z son vectores columna de dimensiones 2×1 , se tiene la siguiente ecuación:

$$\Sigma q = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -\gamma_0 M & -\gamma_1 M & -\gamma_2 M & -\gamma_3 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \\ z \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

las siguientes expresiones son obtenidas de la ecuación (4.74).

$$\begin{aligned} r &= \nu p \\ s &= \nu r \\ z &= \nu s \\ -\gamma_0 M p - \gamma_1 M r - \gamma_2 M s - \gamma_3 M z &= \nu z \end{aligned} \quad (4.75)$$

De la ecuación (4.75), se observa que, $q = [p^T, \nu p^T, \nu^2 p^T, \nu^3 p^T]^T$, por lo tanto $-\gamma_0 Mp - \gamma_1 M\nu p - \gamma_2 M\nu^2 p - \gamma_3 M\nu^3 p = \nu^4 p$, lo cual, puede reescribirse como:

$$-Mp = \frac{\nu^4}{\gamma_0 + \gamma_1\nu + \gamma_2\nu^2 + \gamma_3\nu^3} p \quad (4.76)$$

Por lo que $\frac{\nu^4}{\gamma_0 + \gamma_1\nu + \gamma_2\nu^2 + \gamma_3\nu^3}$, es un valor propio de $-M$, asociado con el vector propio p . Tomando la siguiente relación $\rho = \frac{\nu^4}{\gamma_0 + \gamma_1\nu + \gamma_2\nu^2 + \gamma_3\nu^3}$, donde, ρ es un valor propio de $-M$ con p como su vector propio asociado, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nu^4 - \gamma_3\rho\nu^3 - \gamma_2\rho\nu^2 - \gamma_1\rho\nu - \gamma_0\rho = 0 \quad (4.77)$$

Para la obtención de los coeficientes $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1$ y γ_0 igualamos los coeficientes de (4.63), a un polinomio Hurwitz de cuarto orden con la siguiente forma, $(s^2 + 2\zeta\omega s + 2\omega^1)^2$

$$\begin{aligned} -\rho\gamma_0 &= \omega^4 \\ -\rho\gamma_1 &= 4\omega^3\zeta \\ -\rho\gamma_2 &= 4\zeta^2\omega^2 + 2\omega^2 \\ -\rho\gamma_3 &= 4\zeta\omega \end{aligned} \quad (4.78)$$

Asignados los valores de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ y γ_3 a través de la ecuación (4.77) se corrobora que se cumplan las condiciones necesarias y suficientes para lograr un consenso exponencial entre las variables deseadas. En el caso de $l = 4$, tener un árbol de expansión es una condición necesaria para lograr el consenso, pero no es una condición suficiente por lo que se verifica la condición presentada en el *teorema 3.1, pp. 559*, presentado en [43] extendida para el caso $l = 4$ donde se logra un consenso exponencialmente si y sólo si $-\Sigma$ tiene exactamente cuatro valores propios cero y todos los otros valores propios tienen parte real negativa.

Simulación del problema de consenso restringido a un modelo de referencia usando la grúa viajera

La simulación se realiza en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s]. En este ejemplo se usa la grúa viajera como agente y se considera el esquema mostrado en la figura 3.1 con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes y el líder, mostradas en la tabla 4.6.

Tabla 4.6: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-grúa viajera)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	0.25	0
Agente 2	-0.25	0
Agente Líder	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.18. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, esta dado por las ecuaciones (3.8)

Analizando la matriz $-L$ dada en la ecuación (4.72) y la matriz $-M$ dada en la ecuación (4.73), se obtienen los valores propios $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$ para la matriz $-L$ y los valores propios $\rho_1 = -3$ y $\rho_2 = -1$ para la matriz $-M$. Se puede observar que $-L$ contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria para el consenso de las salidas planas de los agentes y del líder.

Los parámetros de diseño de los observadores para el agente 1 y el agente 2 respectivamente se configuran como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador para el agente 1 y 2 se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 7$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 2401$, $-\rho\gamma_1 = 1372$, $-\rho\gamma_2 = 294$ y $-\rho\gamma_3 = 28$, Haciendo uso de la ecuación (4.77) se encuentran los valores propios de $-\Sigma$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -7.0005 + 0.0005i$, $\lambda_{4j-2} = -7.0005 - 0.0005i$, $\lambda_{4j-1} = -6.9995 + 0.0005i$ y $\lambda_{4j} = -6.9995 - 0.0005i$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\Sigma$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (4.79), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.70) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.25.

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1 } V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) + u_r \right\} \\
 \\
 \text{Agente 2 } V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) + u_r \right\}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Los términos δ_i denotan las separaciones de formación deseadas entre los agentes (de modo que $(\delta_1 - \delta_j)$ es la separación deseada entre el agente i y el agente j), el término δ_r es la separación del agente i con el modelo de referencia. Para el caso de simulación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el modelo de referencia de $\delta_r = 0.1 [m]$, por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1 [m]$ y $\delta_2 = -0.1 [m]$.

Como primer ejemplo se usa en el líder el esquema ADRC diseñado en la sección 4.1.2 y simulado en la sección 4.1.3, para la grúa viajera, donde se busca el seguimiento de una trayectoria deseada, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolado entre 0 y 0.3 metros en 3 segundos.

Los parámetros de diseño del observador para el líder se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador en el líder se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 8$.

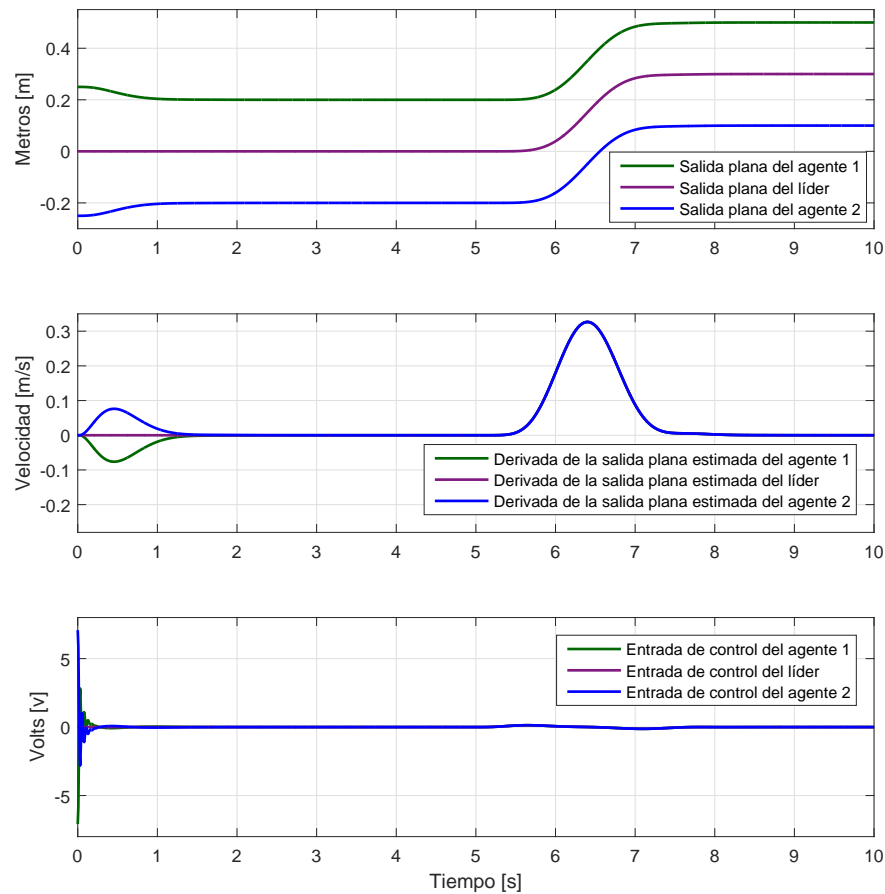


Figura 4.26: Consenso con un líder de las salidas planas, consenso con un líder de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

La figura 4.26, muestra la respuesta de los dos agentes como seguidores y del líder en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al modelo de referencia dado por la posición del líder. Las derivadas de las salidas planas de los agentes convergen a la del líder, situando de esta manera a cada agente en la posición deseada, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con el líder. Se observa el seguimiento del líder por los dos agentes, el cual, es realizado con buena precisión y manteniendo la alineación especificada. Se observa que la señal de control, para los dos agentes y el líder permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

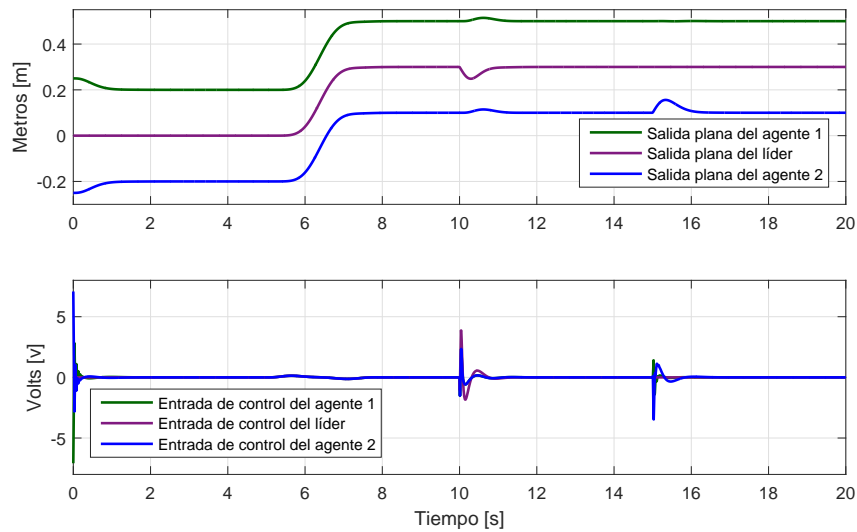


Figura 4.27: Consenso con un líder de las salidas planas y entradas de control.

La figura 4.27 muestra la respuesta de los dos agentes y del líder a perturbaciones en lazo cerrado. El líder es perturbado con una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo del líder, (en $t = 10$ [s]), una segunda perturbación es aplicada al péndulo del agente 2 (en $t = 15$ [s]). Se observa la reacción del controlador en el líder, los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados por el controlador, por lo que se puede observar un buen funcionamiento del mismo, la salida plana de los agentes 1 y 2 es afectada, debido a que el control de los agentes depende de la salida plana del líder. La segunda perturbación sólo afecta las salidas planas de los agentes debido a que estas no tienen injerencia en el control del líder.

Como segundo ejemplo se usa en el líder el esquema GPIC diseñado en la sección 4.2.2 y simulado en la sección 4.2.3, para la grúa viajera, donde se busca el seguimiento de una trayectoria deseada, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolado entre 0 y 0.3 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 8$.

En la figura 4.28, se puede observar la respuesta de los dos agentes como seguidores y del líder en lazo cerrado. Se observa como se alcanza el consenso entre las salidas planas de los dos agentes, las cuales son llevadas al modelo de referencia dado por la posición del líder. Las derivadas de las salidas planas de los agentes convergen a la del líder, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con el líder. Se observa el seguimiento del líder por ambos agentes, este es realizado con buena precisión y manteniendo la alineación especificada. Se observa que la señal de control, para los dos agentes y el líder permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

La figura 4.29 muestra la respuesta de los dos agentes y del líder a perturbaciones en lazo cerrado. El líder es perturbado con una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo del líder, (en $t = 10$ [s]), una segunda perturbación es aplicada al péndulo del agente 2 (en $t = 15$ [s]). Los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados por el controlador, por lo que se puede observar un buen funcionamiento del mismo, la salida plana de los agentes 1 y 2 es afectada, debido a que el control de los agentes depende de la salida plana del líder. La segunda perturbación sólo afecta las salidas planas de los agentes debido a que estas no tienen injerencia en el control del líder.

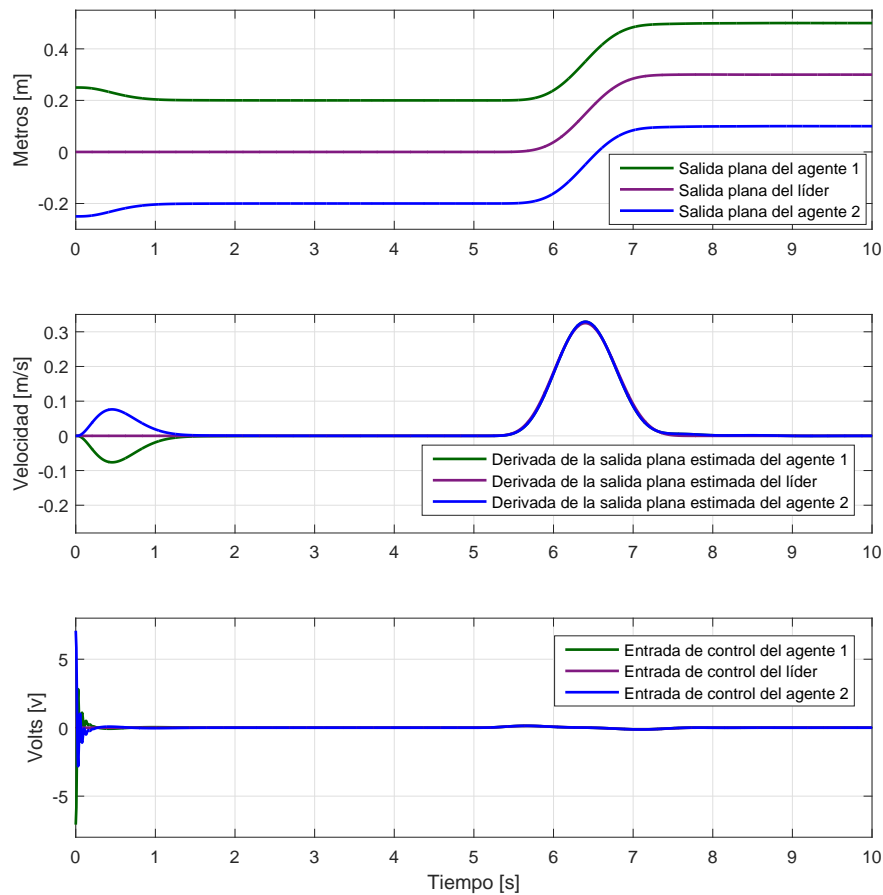


Figura 4.28: Consenso con un líder de las salidas planas, consenso con un líder de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

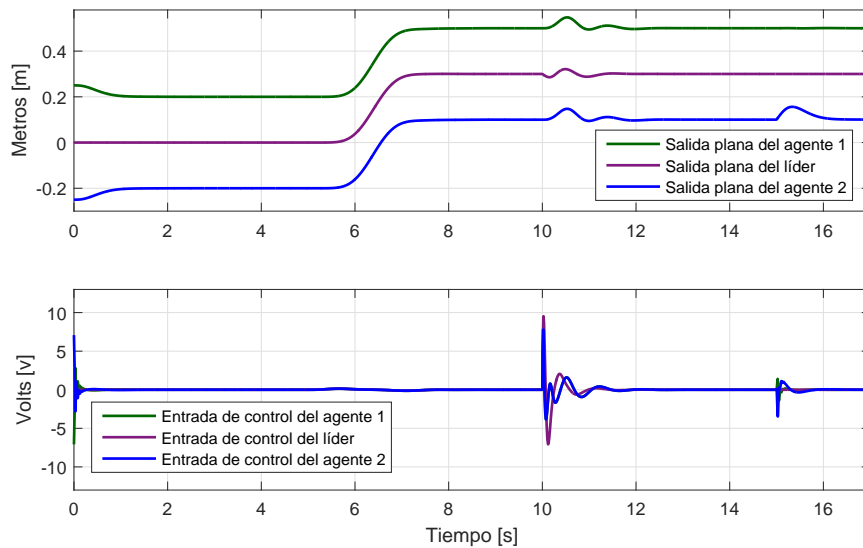


Figura 4.29: Consenso con un líder de las salidas planas y entradas de control.

Simulación del problema de consenso restringido a un modelo de referencia usando el péndulo invertido sobre un carro

La simulación se realiza en el software MATLAB-Simulink con un paso de integración $1E - 5$ [s]. En este ejemplo se usa el péndulo invertido sobre un carro como agente y se considera el esquema mostrado en la figura 3.2 con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes y el líder, mostradas en la tabla 4.7.

Tabla 4.7: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-péndulo invertido sobre un carro)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	-0.25	0
Agente 2	0.25	0
Agente Líder	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.20. La tabla 4.1 muestra los parámetros usados en el modelo matemático para la simulación, el cual, está dado por las ecuaciones (3.26).

Analizando la matriz $-L$ dada en la ecuación (4.72) y la matriz $-M$ dada en la ecuación (4.73), se obtienen los valores propios $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$ para la matriz $-L$ y los valores propios $\rho_1 = -3$ y $\rho_2 = -1$ para la matriz $-M$. Se puede observar que $-L$ contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria para el consenso de las salidas planas de los agentes y del líder.

Los parámetros de diseño de los observadores para el agente 1 y 2 se configuran como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador para ambos agentes se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 6$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 1296$, $-\rho\gamma_1 = 864$, $\rho\gamma_2 = 216$ y $-\rho\gamma_3 = 24$, Haciendo uso de la ecuación (4.77) se encuentran los valores propios de $-\Sigma$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -6.0011$, $\lambda_{4j-2} = -6.0000 + 0.0011i$, $\lambda_{4j-1} = -6.0000 - 0.0011i$ y $\lambda_{4j} = -5.9989$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\Sigma$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (4.80), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.70) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.25.

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1 } V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) + u_r \right\} \\
 \\
 \text{Agente 2 } V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) + u_r \right\}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Los términos δ_i denotan las separaciones de formación deseadas entre los agentes (de modo que $(\delta_1 - \delta_j)$ es la separación deseada entre el agente i y el agente j), el término δ_r es la separación del agente i con el modelo de referencia. Para el caso de simulación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el modelo de referencia de $\delta_r = 0.1$ [m], por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1$ [m] y $\delta_2 = -0.1$ [m].

Como primer ejemplo se usa en el líder el esquema ADRC diseñado en la sección 4.1.2 y simulado en la sección 4.1.3, para la grúa viajera, donde se busca el seguimiento de una trayectoria deseada, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolado entre 0 y 0.3 metros en 3 segundos.

Los parámetros de diseño del observador para el líder se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador en el líder se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 8$.

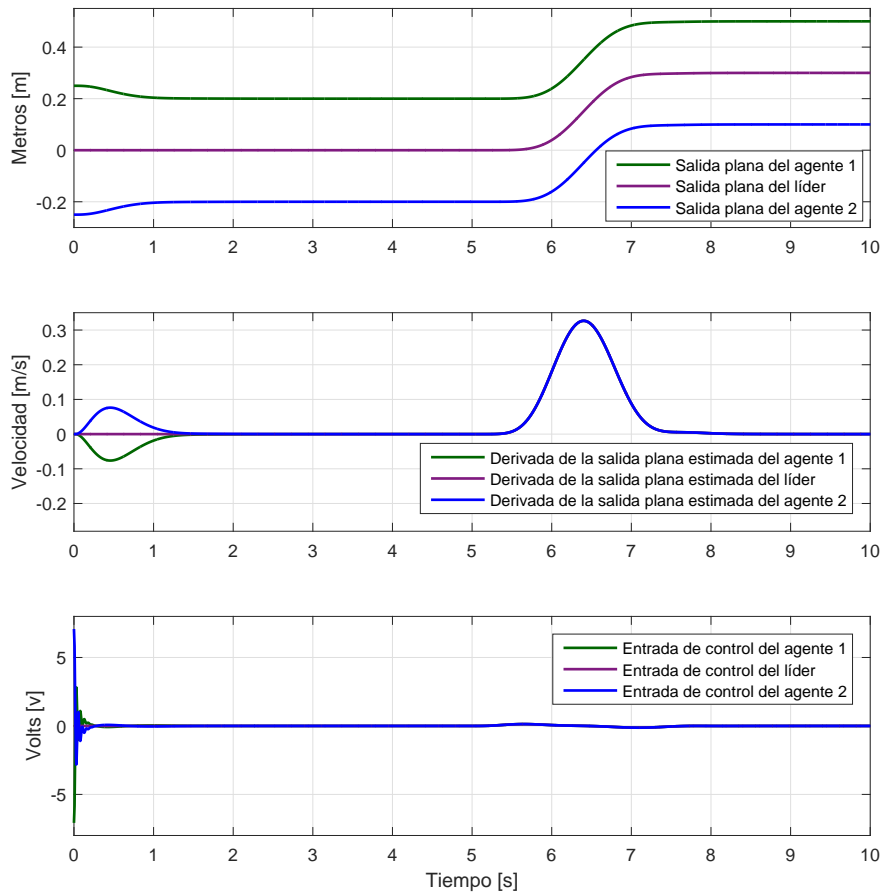


Figura 4.30: Consenso con un líder de las salidas planas, consenso con un líder de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

La figura 4.30, muestra la respuesta de los dos agentes como seguidores y del líder en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al modelo de referencia dado por la posición del líder. Las derivadas de las salidas planas de los agentes convergen a la del líder, situando de esta manera a cada agente en la posición deseada, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con el líder. Se observa el seguimiento del líder por los dos agentes, el cual, es realizado con buena precisión y manteniendo la alineación especificada. Se observa que la señal de control, para los dos agentes y el líder permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

La figura 4.31 muestra la respuesta de los dos agentes y del líder a perturbaciones en lazo cerrado. El líder es perturbado con una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo del líder, (en $t = 10$ [s]), una segunda perturbación es aplicada al péndulo del agente 2 (en $t = 15$ [s]). Se observa la reacción del controlador en

el líder, los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados por el controlador, por lo que se puede observar un buen funcionamiento del mismo, la salida plana de los agentes 1 y 2 es afectada, debido a que el control de los agentes depende de la salida plana del líder. La segunda perturbación sólo afecta las salidas planas de los agentes debido a que estas no tienen injerencia en el control del líder.

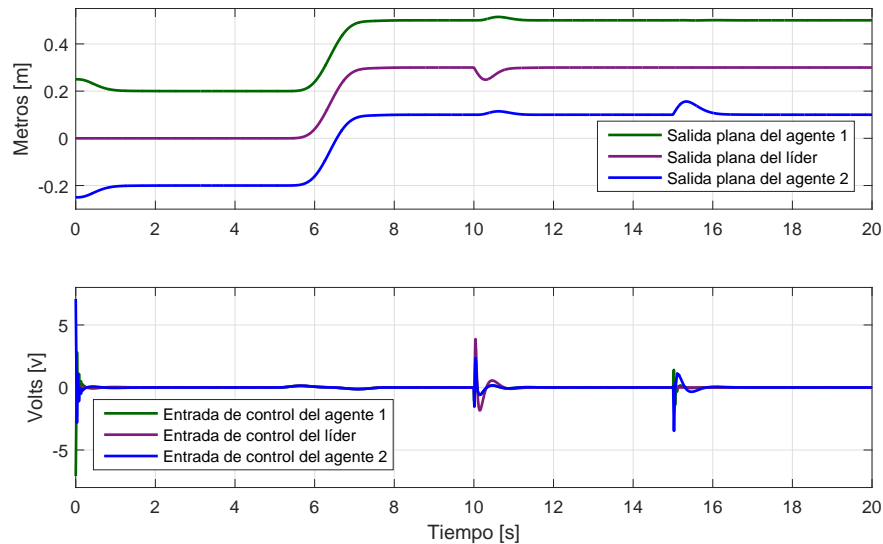


Figura 4.31: Consenso con un líder de las salidas planas y entradas de control.

Como segundo ejemplo se usa en el líder el esquema GPIC diseñado en la sección 4.2.2 y simulado en la sección 4.2.3, para la grúa viajera, donde se busca el seguimiento de una trayectoria deseada, la cual, está dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolado entre 0 y 0.3 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 8$.

En la figura 4.32, se puede observar la respuesta de los dos agentes como seguidores y del líder en lazo cerrado. Se observa como se alcanza el consenso entre las salidas planas de los dos agentes, las cuales son llevadas al modelo de referencia dado por la posición del líder. Las derivadas de las salidas planas de los agentes convergen a la del líder, logrando la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con el líder. Se observa el seguimiento del líder por ambos agentes, este es realizado con buena precisión y manteniendo la alineación especificada. Se observa que la señal de control, para los dos agentes y el líder permanece dentro de los valores esperados debido a los parámetros usados para el modelo simplificado del motor.

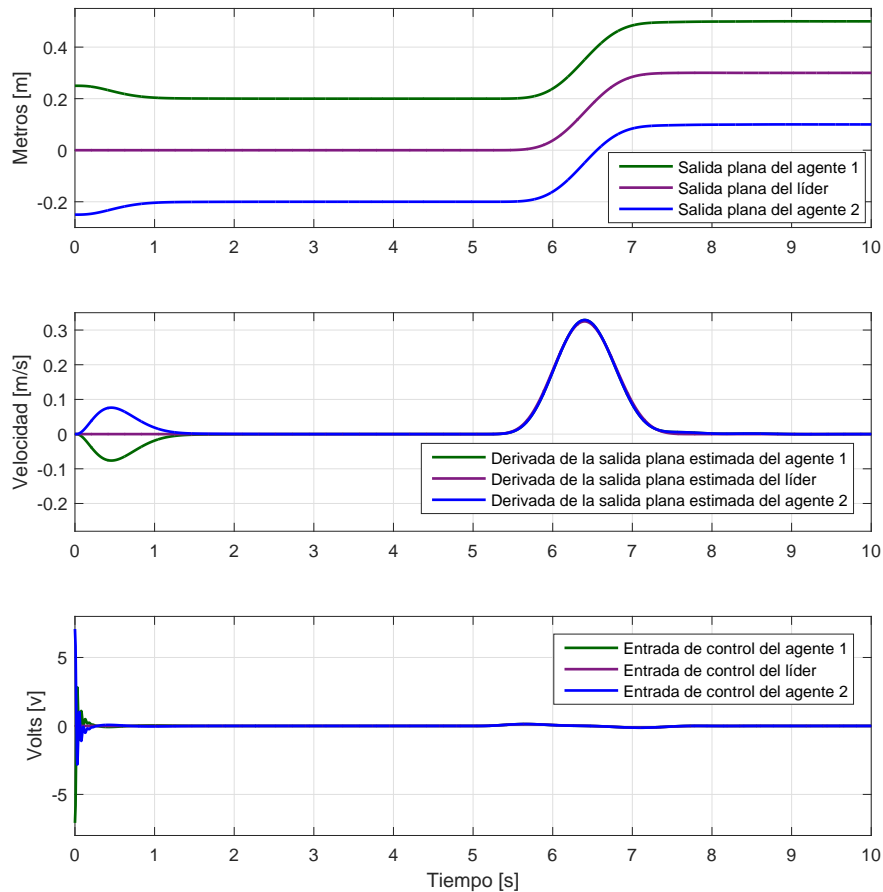


Figura 4.32: Consenso con un líder de las salidas planas, consenso con un líder de la primera derivada de las salidas planas y entradas de control.

La figura 4.33 muestra la respuesta de los dos agentes y del líder a perturbaciones en lazo cerrado. El líder es perturbado con una fuerza externa instantánea, la cual es simulada como un par aplicado al péndulo del líder, (en $t = 10$ [s]), una segunda perturbación es aplicada al péndulo del agente 2 (en $t = 15$ [s]). los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados por el controlador, por lo que se puede observar un buen funcionamiento del mismo, la salida plana de los agentes 1 y 2 es afectada, debido a que el control de los agentes depende de la salida plana del líder. La segunda perturbación sólo afecta las salidas planas de los agentes debido a que estas no tienen injerencia en el control del líder.

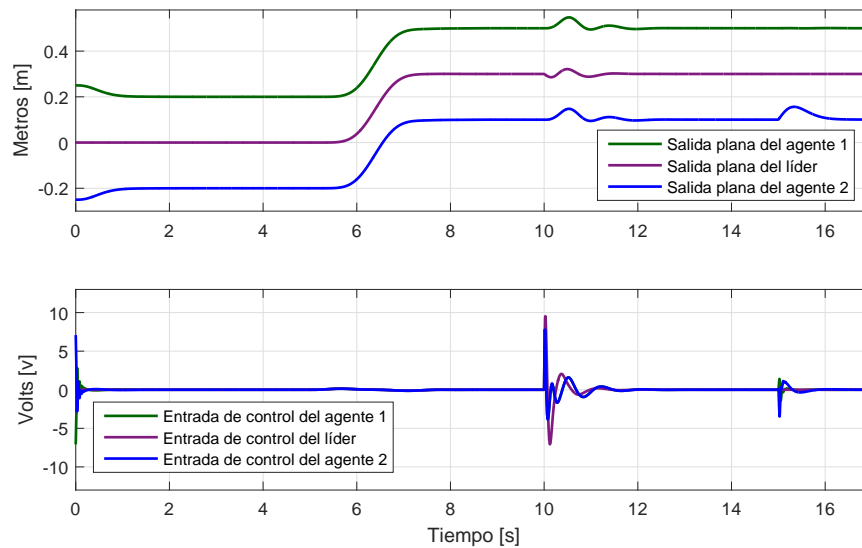


Figura 4.33: Consenso con un líder de las salidas planas y entradas de control.

4.4. Resumen del capítulo

Este capítulo muestra la solución al problema de seguimiento de trayectoria, implementando ADRC y GPIC, en los sistemas modelados en el capítulo 3. También haciendo uso de los sistemas modelados en el capítulo 3 se muestra el uso de algoritmos de consenso en combinación con otras estrategias de control (ADRC y GPIC) para la sincronización de un conjunto de sistemas, dando solución a los problemas de consenso no restringido y restringido. Se muestra simulaciones en el software MATLAB-Simulink de los ejemplos realizados.

Capítulo 5

Resultados Experimentales

Debido a que siempre existen fenómenos no modelados, incertidumbre en los parámetros usados en simulación, entre otros factores, se vuelve necesario evaluar de manera experimental en un sistema físico, el desempeño de las estrategias de control diseñadas e implementadas en simulación.

En este capítulo, se hace una descripción de la plataforma experimental, en la cual, se implementaron los diferentes esquemas de control diseñados y simulados en el capítulo 4. Se presentan los resultados obtenidos de forma experimental, con el objetivo de validar los desarrollos teóricos y los resultados de simulación

5.1. Plataforma experimental

En este trabajo, se hace uso de la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1, la cual fue proporcionada por el departamento de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV, a través de la Sección de Mecatrónica. Esta plataforma fue diseñada y manufacturada para el desarrollo del trabajo de tesis “Control descentralizado mediante rechazo activo de perturbaciones para movimiento coordinado de sistemas mecánicos interconectados”, véase [4].



Figura 5.1: Plataforma experimental.

De forma general la plataforma cuenta, con una estructura base de color rojo, la cual, funciona como soporte principal y es sobre está donde se colocan dos rieles en la parte intermedia y una cremallera en la parte superior como se muestra en la Figura 5.2. En cada uno de los rieles se encuentran acoplados con rodamientos dos bases que en conjunto con los rieles conforman un sistema de deslizamiento. Sobre las bases de los rieles se fijan con tornillos las bases principales de los carros que servirán para colocar diferentes soportes que anclaran a cada uno de los carros dos encoders relativos y un motor de CD.

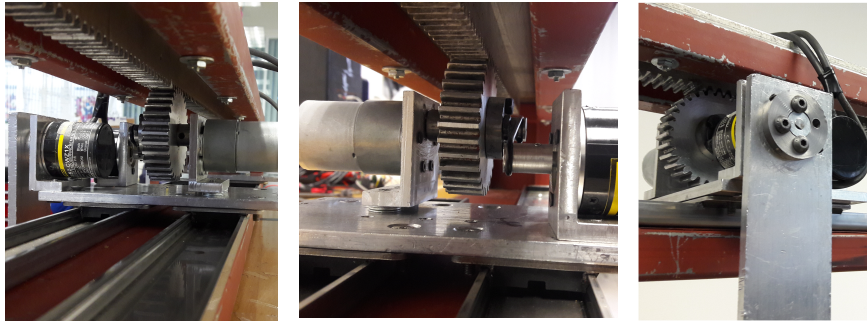


Figura 5.2: Vistas laterales y frontal del carro montado sobre los rieles.

Cada uno de los carros tiene anclado un motor de CD con caja de engranes y sobre la flecha de la caja de engranes se encuentra acoplado un piñón, estos, en conjunto con la cremallera generan la fuerza necesaria para desplazar al carro sobre los rieles. También se encuentran en cada uno de los carros dos encoders relativos, los cuales, servirán para obtener la posición del carro sobre el riel y la posición angular del péndulo. Uno de los encoders se encuentra acoplado con el eje del motor a través de una banda colocada entre la flecha del motor y la flecha del encoder, al segundo encoder se encuentra acoplado el péndulo, como se muestra en la figura 5.2.

5.1.1. Componentes mecánicos

A continuación se describen más a detalle cada uno de los componentes mecánicos que conforman a la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1, la cual cuenta con dos subsistemas, los cuales serán implementados como grúa viajera o bien como péndulo invertido sobre un carro.

Estructura base o soporte principal

Esta estructura fue manufacturada utilizando como material perfil tubular rectangular galvanizado de 1 [in] por 1 [in] y en la parte superior se colocó una solera de aluminio de 0.25 [in] de espesor, en la parte inferior se encuentran cuatro soportes, con el fin de dar mayor estabilidad cuando el sistema se encuentre en funcionamiento. Sus dimensiones sin tomar en cuenta los soportes, son 0.1 [m] de espesor por 0.8 [m] de alto por 1.35 [m] de largo.

Cremallera y piñones

La plataforma experimental cuenta con una cremallera y dos piñones. La cremallera se mantiene fija a la estructura base y los piñones son los que reciben el torque del eje de la caja de engranes y convierten dicho movimiento rotacional en uno traslacional, para ellos mismos, al moverse los piñones en conjunto con todo el carro a lo largo de la cremallera. A continuación se muestran en las tablas 5.1 y 5.2, los datos de fabricación de los piñones y la cremallera.

Tabla 5.1: Datos de los piñones usados para la configuración piñón cremallera

Especificación	Valor
Módulo métrico	2
Número de dientes del piñón	31
Diámetro de paso	62 <i>mm</i>
Diámetro exterior	66 <i>mm</i>
Diámetro raíz	57 <i>mm</i>
Ángulo de ataque	20°
Ancho de cara	16 <i>mm</i>
Factor de alineamiento	0.17
Factor dinámico	1.169
Esfuerzo flexionante en el piñón	1.83 <i>MPa</i>
Esfuerzo flexionante en la cremallera	1.51 <i>MPa</i>
Esfuerzo de contacto	83.36 <i>MPa</i>
Material	Aluminio macizo
Coefficiente elástico	142 <i>MPa</i>

Tabla 5.2: Datos de los fabricación de la cremallera

Especificación	Valor
Módulo métrico	2
Ancho de cara	16 <i>mm</i>
Altura desde la base	18 <i>mm</i>
Longitud de la sección dentada	1.12 <i>m</i>
Longitud de toda la cremallera	1.2 <i>mm</i>
Tipo de dentado	Recto

Péndulos y soportes

Se cuenta con dos péndulos fabricados en aluminio 0.25 [*in*] de espesor por 56 [*cm*] de largo por 5 [*cm*] de ancho, los cuales son acoplados a la flecha del encoder a través de dos piezas fabricadas en aluminio y acero estirado en frío sólo para sujeción del péndulo al eje. Las bases de los carros que fueron fijados a las bases sobre los rieles, fueron fabricadas en aluminio de 0.25 [*in*] de espesor, por 11.5 [*cm*] de ancho por 16.5 [*cm*] de largo, a estas

bases se anclan todos los elementos de cada carro, es decir, encoders, motores, soportes, piñones, y péndulos.

Los soportes para el anclaje de los encoders y del motor, fueron fabricados en ángulo de aluminio de 0.25 [in] de espesor por 2.5 [in] por 4 [cm] de largo y algunos acoplamientos para los ejes de los encoders se fabricaron en aluminio tubular, así como cuatro poleas para transmitir el movimiento del eje los motores a los encoders para medir su posición.

5.1.2. Partes pre-ensambladas

La plataforma experimental cuenta con elementos mecánicos, que fueron adquiridos de fábrica, los cuales serán descritos a continuación:

Rieles THK y carros con rodamientos para los rieles THK

La plataforma experimental cuenta con un dos rieles THK y cuatro carros con rodamientos, dos por cada riel. Se colocó un riel de 1.2 [m] y un riel de 0.8 [m], con lo cual la distancia efectiva de trabajo es de 0.8 [m]. Cada uno de los carros tiene un peso de 250 [g] los cuales contribuyen al peso del carro utilizado en la simulación

Motores de CD

Cada uno de los carros contiene un motor de CD de la marca pololu los cuales generan la fuerza necesaria para mover los carros sobre los rieles, estos motores de CD están acoplados a una caja de engranes con una reducción de 29:1 con lo que se obtiene un torque en el eje del motor de 8 Kg – cm a 5 [A] cuando es detenido por una fuerza externa, su funcionamiento idóneo es a 12 [v]. Las especificaciones del motor se muestran en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Características del motor de CD con caja de engranes con relación de 29:1

Especificación	Valor
Relación de engranes	29 : 1
Constante del motor	0.15696 $N - m/A$
Velocidad nominal a 6 v	137 rpm
Corriente nominal a 6 v	250 mA
Corriente al paro a 6 v	2500 mA
Torque al paro a 6 v	4 Kg – cm
Velocidad nominal a 12 v	350 rpm
Corriente nominal a 12 v	300 mA
Corriente al paro a 12 v	5000 mA
Torque al paro a 12 v	8 Kg – cm

5.1.3. Componentes electrónicos

Los componentes electrónicos con los que cuenta la plataforma experimental son: sensores para medir las variables de interés del sistema (encoders), tarjetas que servirán para la adquisición de datos que serán procesados en la misma tarjeta con el fin de obtener la señal de control, la cual, será enviada a la etapa de potencia. La etapa de potencia está constituida por una tarjeta que contiene un puente H. El puente H controla el sentido de giro de los motores de CD mencionados en la sección 5.1.2. A continuación se presenta una breve descripción de cada uno de los componentes electrónicos.

Encoder

La plataforma cuenta con encoders para medir la posición angular de los péndulos y la posición sobre los rieles de cada uno de los carros. Se emplean encoders OMRON E6B2-CWZ1X, estos encoders son de tipo incremental y cuentan con 2000 pulsos por revolución, los cuales pueden ser aumentados hasta 8000, haciendo uso de la cuadratura con la que cuenta el encoder. Los encoders son alimentados a 5 [v] y la configuración de su salida es Line-Driver, por lo que cuentan con dos canales A y B más la negación de ambos canales, además del índice y su negación. La diferencia de fase entre los canales A y B es de $90^\circ \pm 45^\circ$, aceptan una velocidad máxima de 6000 *rpm*.

STM32f407 Discovery kit

La tarjeta de desarrollo STM32F407 Discovery kit cuenta con librerías y soporte en el software MATLAB-simulink, por lo que, es posible implementar los esquemas de control diseñados y simulados en el capítulo 4. Esta tarjeta cuenta con un microcontrolador de alto rendimiento STM32F407 basado en un procesador ARM Cortex-M4 de 32 bits. La tarjeta tiene entradas y salidas analógicas y digitales las cuales facilitan la adquisición y el envío de datos. En este caso la señal proveniente de los encoders es procesada para la obtención de la señal de control y esta a su vez será enviada a la etapa de potencia. Para visualizar el comportamiento del sistema son enviadas algunas señales de interés a través del puerto USB para ser graficadas en la computadora.

C2000 Delfino TMS320F28335

Debido a la cantidad de información que se tenía que procesar para algunos de los casos experimentales, fue necesario implementar una tarjeta con mejores características, por lo que también se implementaron las estrategias de control diseñadas en el capítulo 4 en la tarjeta C2000 Delfino TMS320F28335, haciendo uso del software PSIM, el cual, es un software dedicado a la electrónica de potencia y que cuenta con un módulo de control digital, para la implementación de esquemas de control.

Este Kit está basado en el C2000 Delfino TMS320F28335 MCU, que cuenta con un núcleo de procesamiento de 150 MIPS con soporte de punto flotante, 512 KB de flash integrado, 18 canales PWM con alta capacidad. La tarjeta cuenta con entradas y salidas analógicas y digitales usadas para la adquisición y el envío de datos. A través de las entradas digitales serán obtenidas las señales de los encoders las cuales será procesadas en la tarjeta para la obtención de la señal de control, esta, será enviada a la etapa de potencia haciendo uso de las salidas digitales. Para visualizar el comportamiento del sistema son enviadas algunas señales de interés a través del puerto USB para ser graficadas en la computadora.

Puente H

El Monster motor shield basado en circuitos integrados VN2SP30 es ideal para control de motores de alta potencia. Con esta tarjeta se puede controlar un par de motores de corriente directa que requieren hasta 15 [A]. Sus características se muestran en la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Características del Monster Motor Shield VN2SP30

Especificación	Valor
Circuito integrado	VN2SP30
Voltaje máximo	16 <i>v</i>
Corriente máxima	30 <i>A</i>
Corriente continua	14 <i>A</i>
Frecuencia máxima de PWM	20 <i>khz</i>
Apagado térmico automático	
Apagado por alto y bajo voltaje	

Esta etapa es activada a través de una señal de PWM enviada desde la tarjeta donde se está procesando el control, más dos señales que marcan la dirección de giro del motor de CD. A esta tarjeta son conectadas las terminales de los motores de CD.

5.1.4. Datos y diagramas generales usados en la implementación de plataforma experimental

En la tabla 5.5, se muestra los parámetros usados en la implementación de la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1, estos datos fueron obtenidos de forma experimental directamente de la plataforma.

Tabla 5.5: Parámetros de configuración para la implementación en la plataforma experimental

Parámetro	valor	Parámetro	valor
Resistencia de armadura R	2.4 Ω	Masa del carro	1.672 <i>kg</i>
Constante de par k_t	0.35 <i>Nm/A</i>	Masa del péndulo	0.278 <i>kg</i>
Radio del piñón	0.03 <i>m</i>	Longitud del péndulo	0.56 <i>m</i>

La figura 5.3, muestra de manera gráfica la plataforma experimental usada en este trabajo de tesis, así como, las tarjetas usadas para la implementación del control y la forma en la que se realiza el intercambio de información para la visualización de los datos obtenidos en cada uno de los experimento realizados.

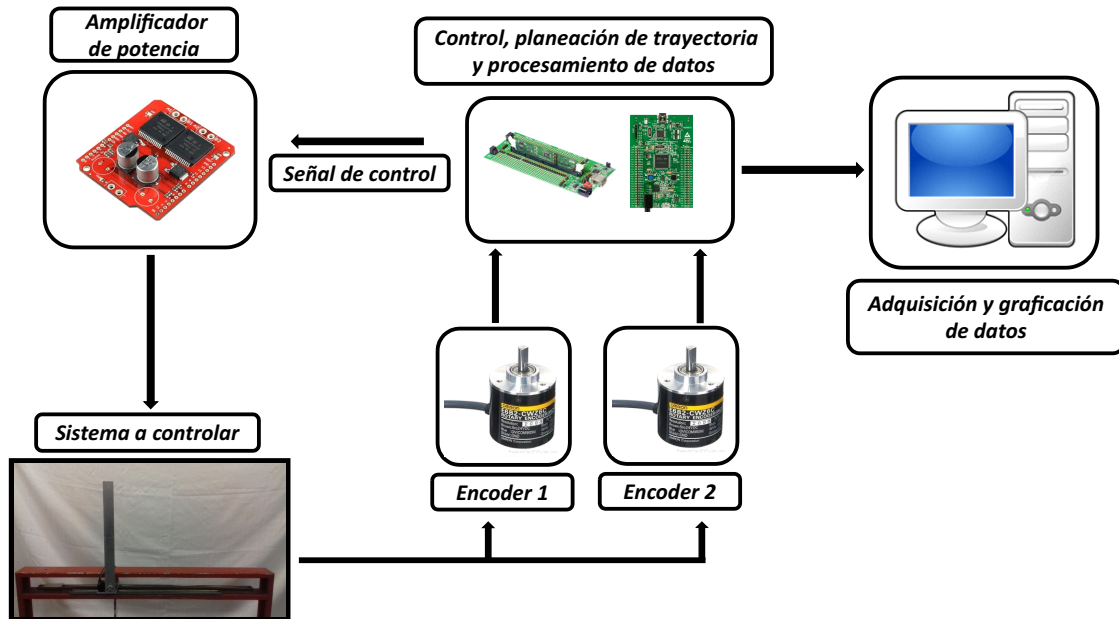


Figura 5.3: Esquema de la implementación de los controladores.

5.2. Implementación de las estrategias de control

En esta sección se presentan las gráficas obtenidas en la implementación de los esquemas de control propuestos en el capítulo 4, en la plataforma experimental descrita en la sección 5.1. Por último, se analizan los datos obtenidos con los diferentes esquemas de control, y se presentan algunas observaciones realizadas del comportamiento del sistema físico con cada esquema de control durante su funcionamiento.

5.2.1. Implementación del ADRC en la plataforma experimental configurada como grúa viajera

Como primer ejemplo se dará solución a la problemática planteada en 4.1.1 de forma experimental, se tiene la implementación de la grúa viajera haciendo uso del ADRC, se considera la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1, en su configuración como grúa viajera, con las siguientes condiciones iniciales $[x_\delta = 0, \theta_\delta = 0]$ respectivamente para la posición del carro y del péndulo. Se hace uso del esquema de control y observadores mostrados en la figura 4.1. El esquema general a implementar se muestra en la figura 4.2, este es programado en el software PSIM de donde es generado el programa que sera

cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 6$ [s]. En la tabla 5.5 se muestran los parámetros usados en el esquema de control, los cuales, fueron obtenidos de la plataforma experimental.

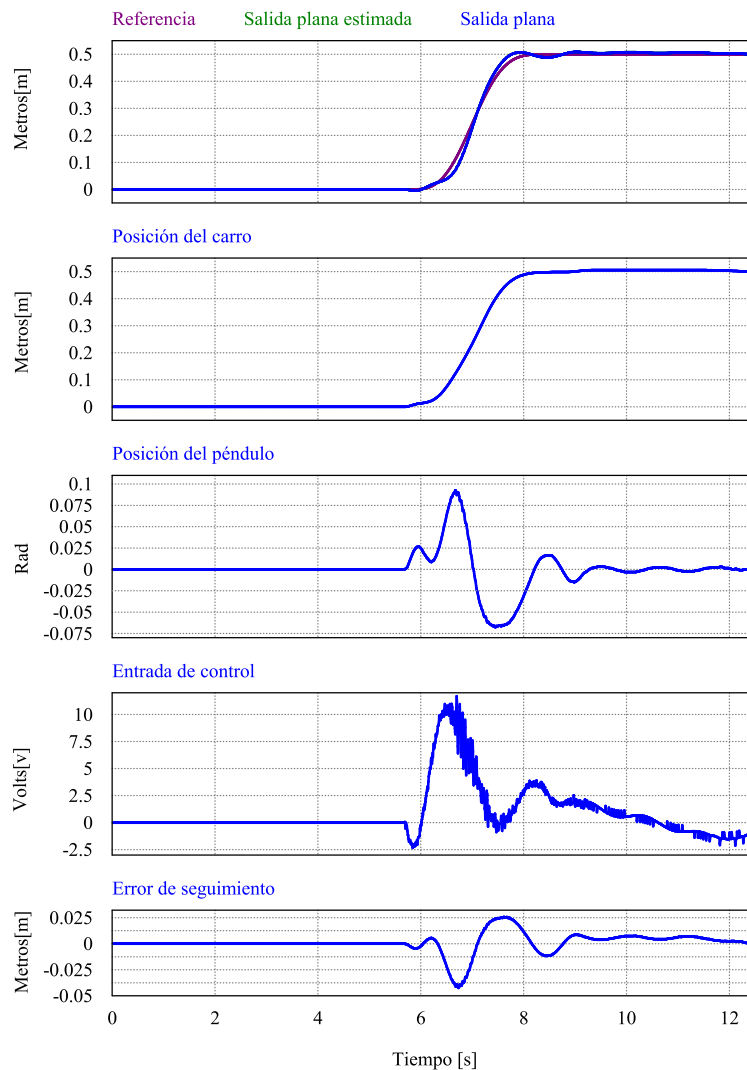


Figura 5.4: Seguimiento de la trayectoria de referencia y comparación con la salida plana estimada, variables del sistema, entrada de control y error de seguimiento de la trayectoria deseada.

La trayectoria de referencia deseada esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del observador se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 4.3$.

La figura 5.4 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado. La trayectoria deseada, se sigue con buena precisión y la salida plana alcanza el valor deseado en el tiempo es-

pecificado por la trayectoria deseada. El funcionamiento del observador puede evaluarse a partir de la comparación de la salida plana y la salida plana estimada, donde se puede observar que se encuentran superpuestas una sobre la otra, la correspondencia entre ambas señales permite observar el correcto funcionamiento del observador.

Las gráficas de la posición del carro y del péndulo invertido muestran el comportamiento de las variables que conforman a la salida plana. Se puede observar como la posición angular del péndulo permanece siempre cerca del punto de equilibrio teniendo como máximo valor $0.08 [Rad]$.

La señal de control toma su valor máximo, en el momento que se hace la maniobra de reposo a reposo, permaneciendo siempre dentro de los valores nominales de operación del motor de CD usando en la plataforma experimental.

El error de seguimiento tiene su valor máximo en $-0.0375 [m]$, el cual es causado por el seguimiento de la trayectoria deseada en el momento en el que cambia de un valor a otro la trayectoria deseada, posteriormente el valor del error decrece a cero cuando la trayectoria regresa al estado de reposo.

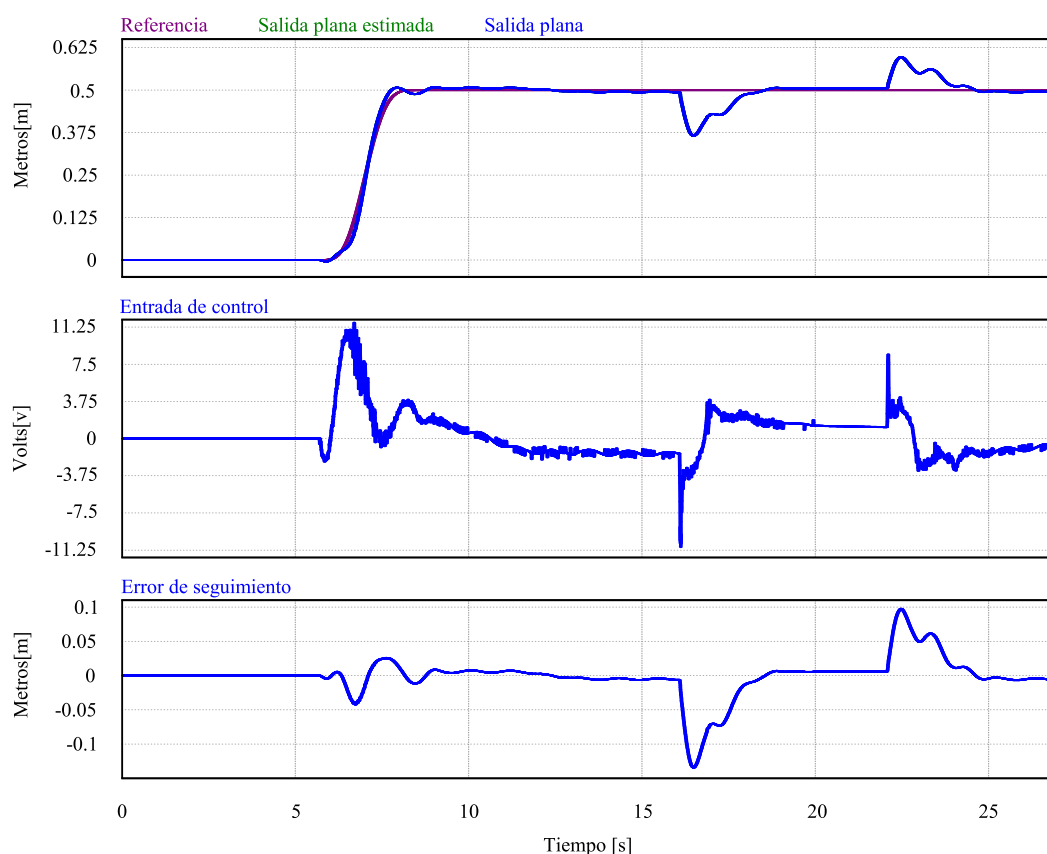


Figura 5.5: Seguimiento de la trayectoria de referencia, entrada de control y error de seguimiento de trayectoria.

La figura 5.5 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa, la cual es causada al golpear el péndulo por un corto periodo de tiempo, una vez que el sistema está en equilibrio (En $t = 16 [s]$ y $t = 22 [s]$ aproximadamente). Se puede observar la reacción del controlador al instante que el péndulo es golpeado y como el error de seguimiento aumenta al perturbar el sistema. Debido a la reacción del controlador los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados llevando nuevamente al sistema al punto de equilibrio.

5.2.2. Implementación del ADRC en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro

Otro ejemplo en el que se da solución a la problemática planteada en 4.1.1 de forma experimental, es la implementación de la plataforma mostrada en la figura 5.1, en su configuración como péndulo invertido sobre un carro haciendo uso del ADRC.

Se usan las siguientes condiciones iniciales $[x_\delta = 0, \theta_\delta = 0]$ respectivamente para la posición del carro y del péndulo. Se hace uso del esquema de control y observadores mostrados en la figura 4.1. El esquema general a implementar se muestra en la figura 4.5, este es programado en el software PSIM de donde es generado el programa que será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 6 [s]$. En la tabla 5.5 se muestran los parámetros usados en el esquema de control, los cuales, fueron obtenidos de la plataforma experimental.

La trayectoria de referencia deseada esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos. Los parámetros de diseño del observador se configuraron como: $\zeta_1 = 1, \omega_1 = 120, \zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 9$.

La figura 5.6 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado. El comportamiento del observador puede ser confirmado a partir de la comparación de la salida plana y la salida plana estimada. Se puede visualizar una correspondencia entre ambas señales debido a que se encuentran sobrepuestas, lo que valida el correcto funcionamiento del observador. La salida plana alcanza el valor deseado en el tiempo especificado por la trayectoria deseada realizando el seguimiento con buena precisión.

Las gráficas de la posición del carro y del péndulo invertido muestran el comportamiento de las variables que conforman a la salida plana. Se puede observar como la posición angular del péndulo permanece siempre cerca del punto de equilibrio teniendo como valor más alejado a $-0.0825 [Rad]$.

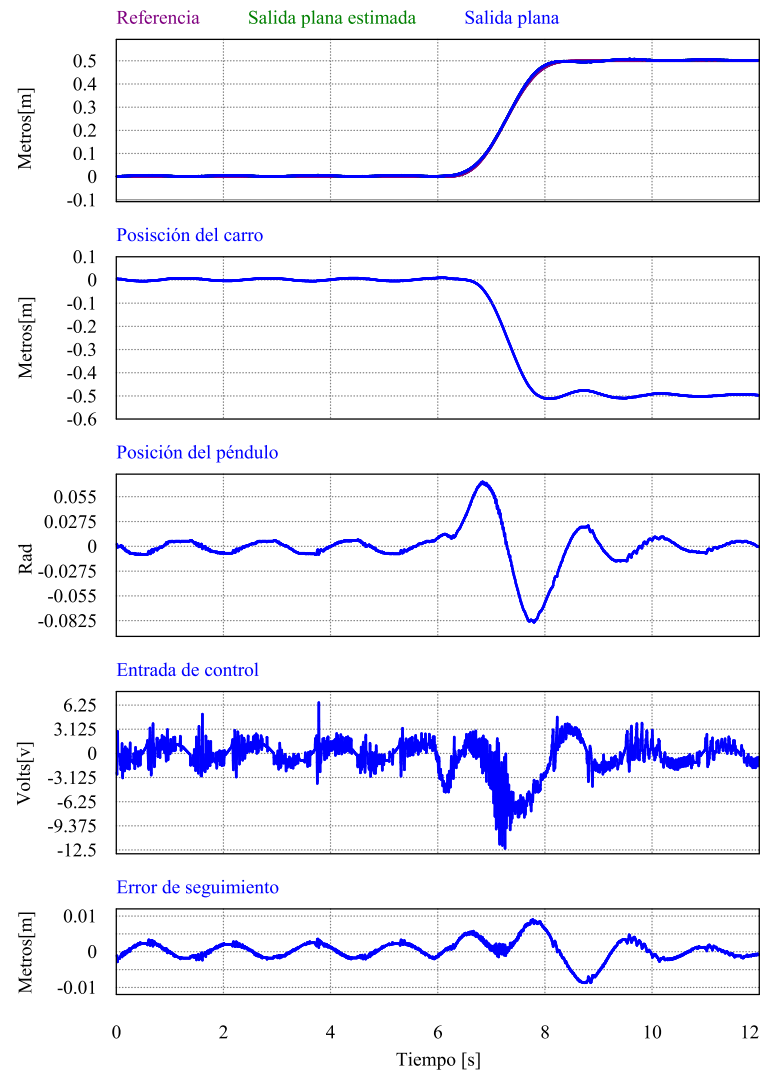


Figura 5.6: Seguimiento de la trayectoria de referencia y comparación con la salida plana estimada, variables del sistema, entrada de control y error de seguimiento de la trayectoria deseada.

El error de seguimiento está contenido entre 0.01 y -0.01 [m]. Su máximo valor es causado por el seguimiento de la trayectoria deseada en el momento que cambia de un valor a otro la trayectoria deseada, antes y después de este, el valor del error decrece y se encuentra oscilando muy cerca de cero, por lo que se corrobora nuevamente el seguimiento de la trayectoria deseada.

La señal de control toma su valor máximo, en el momento que se hace la maniobra de reposo a reposo, permaneciendo siempre dentro de los valores nominales de operación del motor de CD usado en la plataforma experimental.

La figura 5.7 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa. El sistema es perturbado después de haber realizado la maniobra de reposo a reposo, se golpea el péndulo por un corto periodo de tiempo, una vez que el

sistema se encuentra en equilibrio, lo que es tomado como perturbación (En $t = 12.5$ [s] y $t = 17.5$ [s] aproximadamente). Se observa la reacción del controlador al instante que el péndulo es golpeado y como el error de seguimiento aumenta al perturbar el sistema. Debido a la reacción del controlador los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados en un tiempo no mayor a los 2.5 [s], llevando nuevamente al sistema al punto de equilibrio.

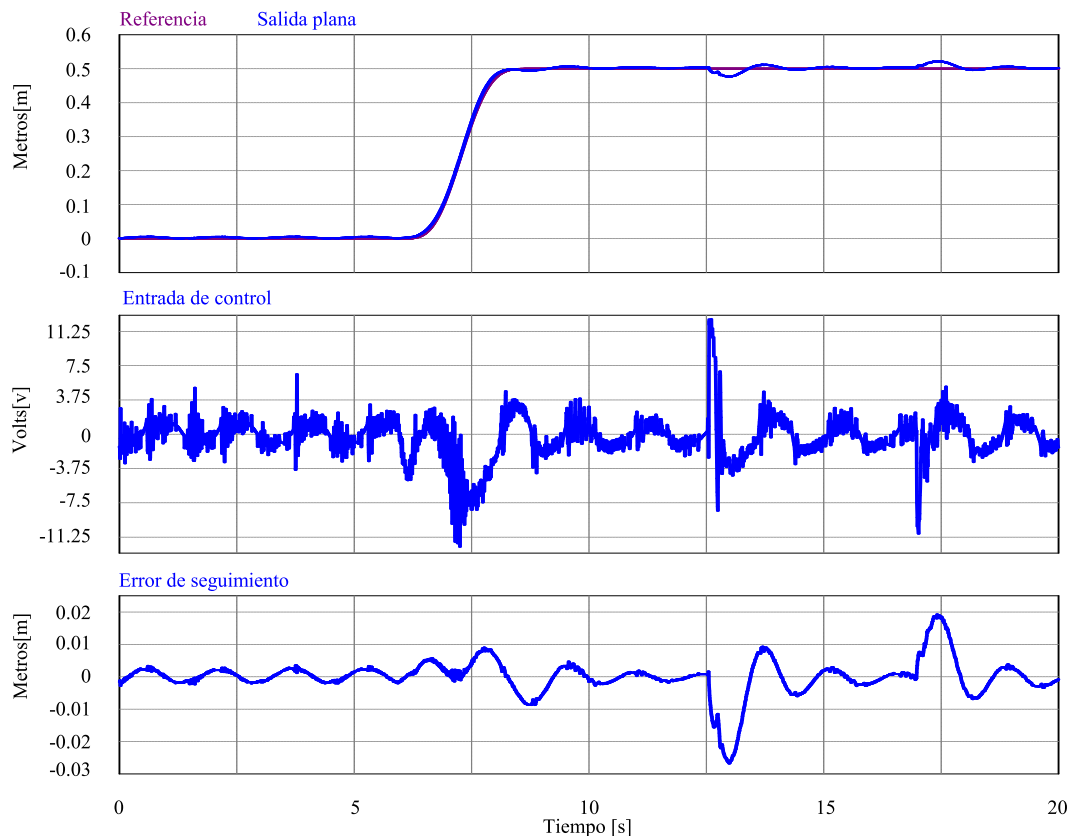


Figura 5.7: Seguimiento de la trayectoria de referencia, entrada de control y error de seguimiento de trayectoria.

5.2.3. Implementación del GPIC en la plataforma experimental configurada como grúa viajera

Haciendo uso del GPIC se muestra el siguiente ejemplo de implementación, dando solución a la problemática planteada en la sección 4.2.1 y haciendo uso de la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1 configurada como grúa viajera, Las condiciones iniciales del sistema son $[x_\delta = 0, \theta_\delta = 0]$ para la posición del carro y del péndulo respectivamente. El esquema a implementar se muestra en la figura 4.10. En la tabla 5.5 se pueden observar los parámetros usados en el control, obtenidos de la plataforma experimental.

El esquema general a implementar es programado y cargado a la tarjeta que controla el sistema desde el software MATLAB Simulink. La tarjeta usada para el control es la

“STM32f407 Discovery kit”, usando un paso de integración de $1E - 3$ [s]. En la tabla 5.5 se muestran los parámetros usados en el esquema de control, los cuales, fueron obtenidos de la plataforma experimental.

La trayectoria de referencia deseada esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3.5 segundos. Los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 3.7$.

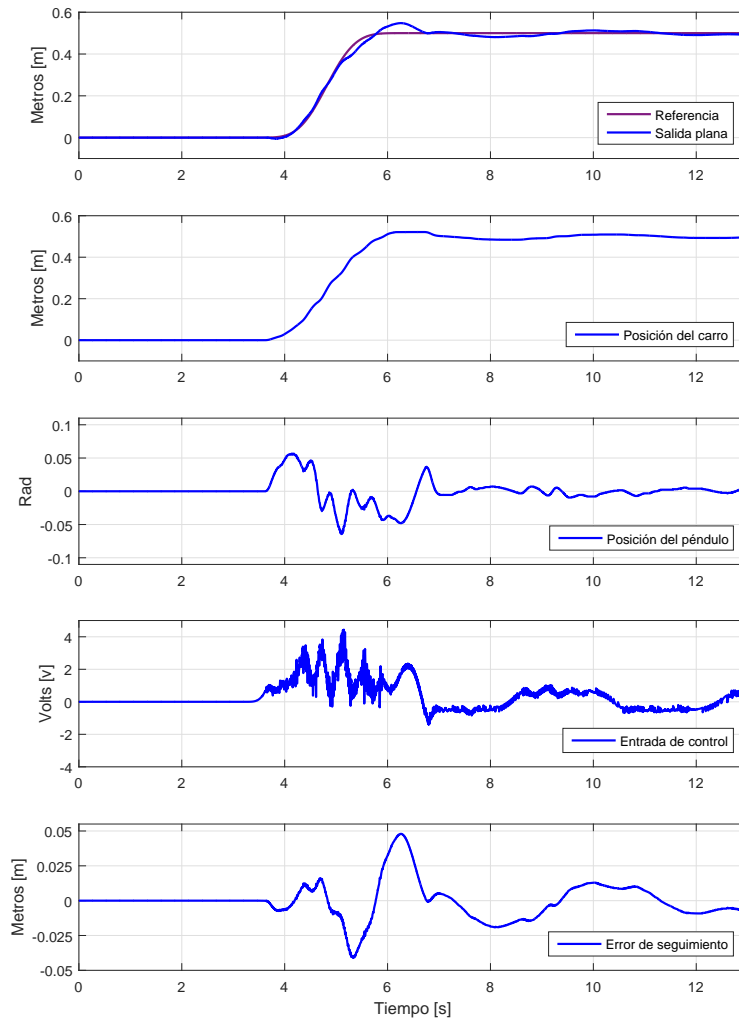


Figura 5.8: Seguimiento de la trayectoria de referencia, entrada de control y error de seguimiento de trayectoria

La respuesta del sistema en lazo cerrado se muestra en la figura 5.8. La salida plana alcanza el valor deseado, pero no en el tiempo especificado, debido a que se tiene un sobrepaso al tratar de realizar la maniobra de reposo, también se pueden observar oscilaciones de

la salida plana entorno a la referencia, las cuales se van atenuando con una tendencia al valor deseado.

Se muestra el comportamiento de las variables que conforman a la salida plana. Se puede observar como la posición angular del péndulo tiene oscilaciones que siempre permanecen cerca del punto de equilibrio teniendo como el valor más alejado al punto de equilibrio a -0.05 [Rad] aproximadamente.

El error de seguimiento esta contenido entre 0.05 y -0.05 [m]. Su máximo valor es causado por el seguimiento de la trayectoria deseada en el momento que cambia de un valor a otro, posteriormente se observan oscilaciones que disminuyen con una tendencia a cero.

La señal de control toma su valor máximo 4.1 v aproximadamente, en el momento que se hace la maniobra de reposo a reposo, permaneciendo siempre dentro de los valores nominales de operación del motor de CD usando en la plataforma experimental.

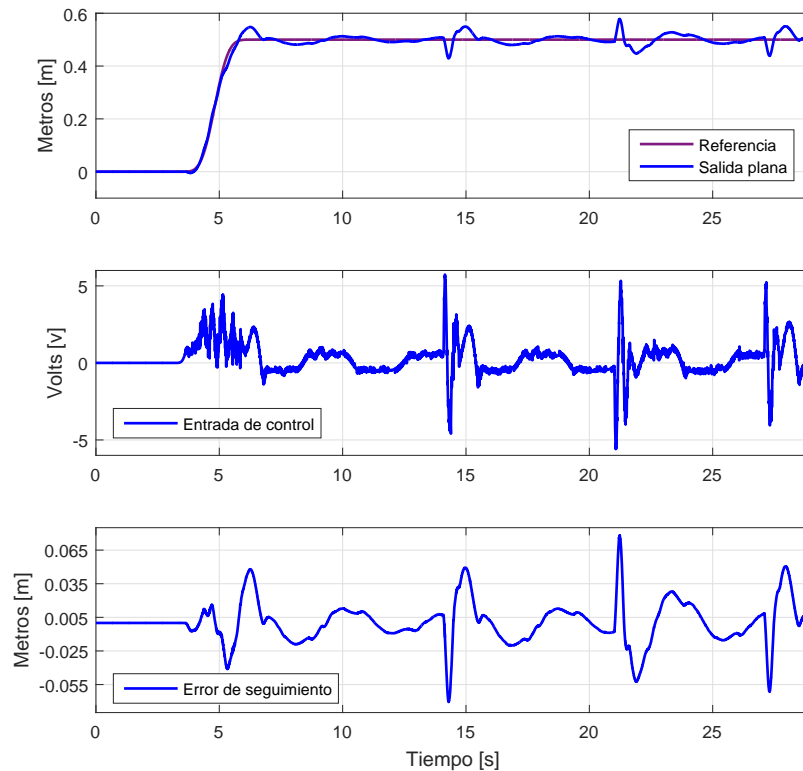


Figura 5.9: Seguimiento de la trayectoria de referencia, variables del sistema, entrada de control y error de seguimiento de la trayectoria deseada.

La figura 5.9 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa. El sistema es perturbado después de haber realizado la maniobra de reposo a reposo, el péndulo es golpeado por un corto periodo de tiempo, una vez que el sistema se encuentra en equilibrio, lo que es tomado como perturbación (En $t = 14$ [s],

$t = 21.5$ [s] y $t = 28$ [s] aproximadamente). Se observa la reacción del controlador en el instante que el péndulo es golpeado y como el error de seguimiento aumenta al perturbar el sistema, y disminuye teniendo un sobrepaso que se va atenuando y tendiendo a cero. Debido a la reacción del controlador los efectos de las perturbaciones son atenuados y eliminados en un tiempo no mayor a los 3.5 [s], llevando nuevamente al sistema al punto de equilibrio.

5.2.4. Implementación del GPIC en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro

Se muestra el siguiente ejemplo de implementación, dando solución a la problemática de forma experimental, planteada en la sección 4.2.1 y haciendo uso de la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1 configurada como péndulo invertido sobre un carro, usando GPIC.

En la tabla 5.5 se pueden observar los parámetros usados en el control, obtenidos de la plataforma experimental. Las condiciones iniciales del sistema son $[x_\delta = 0, \theta_\delta = 0]$ para la posición del carro y del péndulo respectivamente. El esquema a implementar se muestra en la figura 4.13. El esquema de control es programado y cargado a la tarjeta que controla el sistema desde el software MATLAB Simulink. La tarjeta usada para el control es la “STM32f407 Discovery kit”, usando un paso de integración de $1E - 3$ [s].

La trayectoria de referencia deseada esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.4 metros en 3.5 segundos. Los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 3.5$ y $\omega = 4.5$.

La figura 5.10, muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado. La salida plana alcanza el valor deseado aproximadamente en el tiempo especificado pero se observan oscilaciones que disminuyen y tienden a la referencia.

El comportamiento de las variables que conforman a la salida plana es acorde con la salida plana obtenida, ya que se visualizan en está pequeñas oscilaciones, las cuales pueden ser también observadas en las gráficas de la posición del carro y en la posición angular del péndulo, pero que aun con estas oscilaciones se puede observar como la posición angular del péndulo tiene oscilaciones que siempre permanecen cercanas al punto de equilibrio. El valor más alejado al punto de equilibrio es -0.12 [Rad] aproximadamente.

La señal de control toma su valor máximo en -11 [v] aproximadamente, en el momento que se hace la maniobra de reposo a reposo, permaneciendo siempre dentro de los valores nominales de operación del motor de CD usando en la plataforma experimental.

El máximo valor del error de seguimiento es causado por el seguimiento de la trayectoria deseada en el momento que cambia de un valor a otro. El error de seguimiento esta contenido entre 0.03 y -0.03 [m].

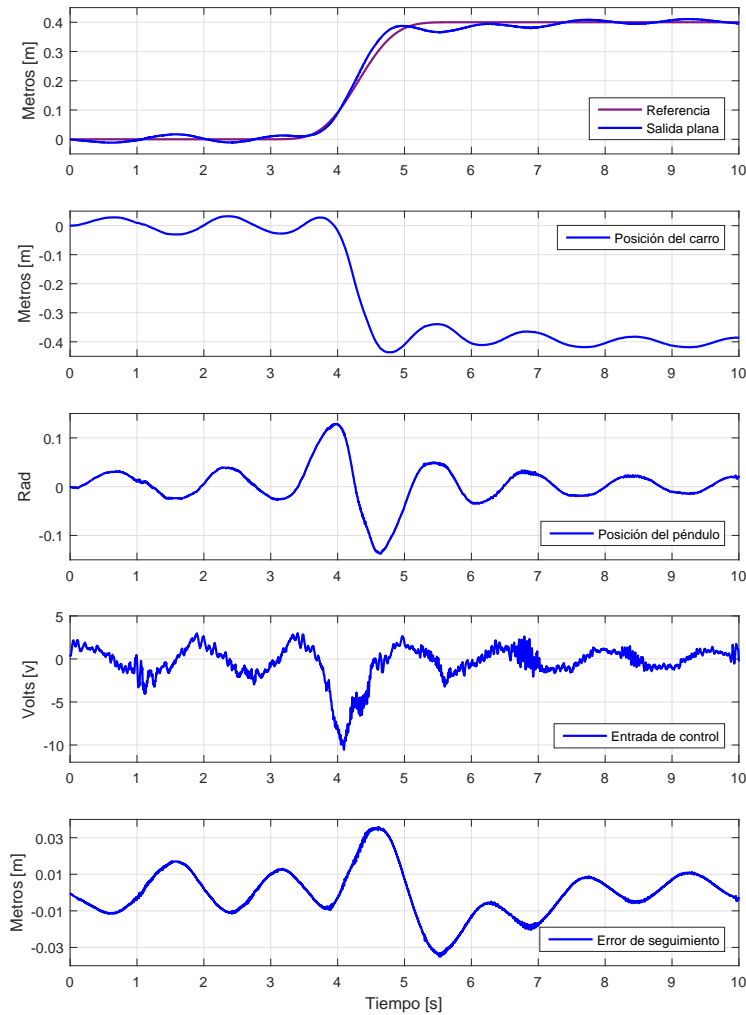


Figura 5.10: Seguimiento de la trayectoria de referencia, entrada de control y error de seguimiento de trayectoria

La respuesta del sistema en lazo cerrado cuando es perturbado por una fuerza externa se muestra en la figura 5.11. Después de haber realizado la maniobra de reposos el sistema es perturbado. El péndulo es golpeado por un pequeño lapso de tiempo, lo que es tomado como perturbación (En $t = 11.5 [s]$, $t = 17 [s]$ y $t = 23.2 [s]$ aproximadamente). Se observa la reacción del controlador en el momento que péndulo es golpeado y en consecuencia el error de seguimiento aumenta. Debido a la reacción del controlador los efectos de las perturbaciones son atenuados y por lo tanto el error de seguimiento disminuye hasta quedar oscilando entre 0.01 y $-0.01 [m]$ llevando nuevamente al sistema cerca del punto de equilibrio.

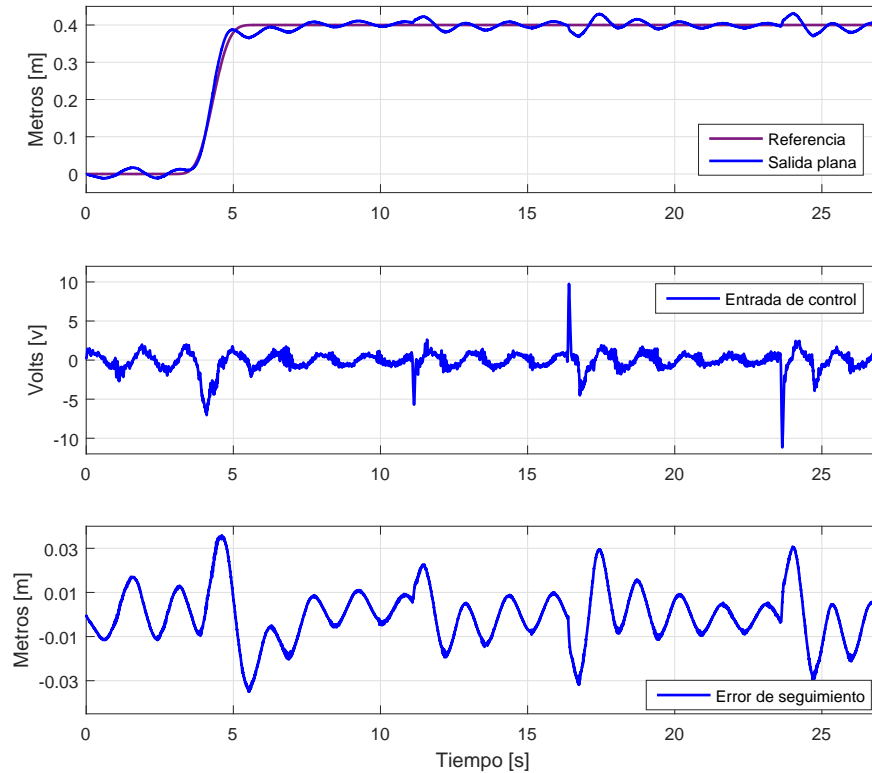


Figura 5.11: Seguimiento de la trayectoria de referencia, variables del sistema, entrada de control y error de seguimiento de la trayectoria deseada.

5.2.5. Implementación del algoritmo de consenso no restringido en la plataforma experimental configurada como grúa viajera

El siguiente ejemplo busca dar solución de manera experimental al problema de consenso no restringido haciendo uso de la plataforma experimental mostrada en la figura 5.1 en su configuración como grúa viajera.

La implementación se realiza a través de un programa generado en el software PSIM, el cual, será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 5$ [s].

El esquema general a implementar para cada agente se muestra en la figura 4.18, con las condiciones iniciales mostradas en la tabla 5.6. La tabla 5.5 muestra los parámetros usados en el control los cuales fueron obtenidos de la plataforma experimental.

Tabla 5.6: Condiciones iniciales (Problema de consenso no restringido-grúa viajera)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	0.6	0
Agente 2	0	0

Para este ejemplo se toma como topología de intercambio de información entre dos agentes el grafo mostrado en la figura 4.17 de donde se obtiene la matriz $-L$ dada en la ecuación (4.47). Analizando la matriz $-L$ se obtienen los valores propios de esta los cuales están dados por $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$. Se puede observar que contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria.

Los parámetros de diseño del observador para cada agente se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 1.3$ y $\omega = 7.5$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador

$-\rho\gamma_0 = 3164$, $-\rho\gamma_1 = 1687$, $-\rho\gamma_2 = 337.5$ y $-\rho\gamma_3 = 30$, Haciendo uso de la ecuación (4.51) se encuentran los valores propios de $-\eta$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -8.4809 + 1.0439i$, $\lambda_{4j-2} = -8.4809 - 1.0439i$, $\lambda_{4j-1} = -6.5191 + 0.9137i$ y $\lambda_{4j} = -6.5191 - 0.9137i$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\eta$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (5.1), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.45) y de la topología de comunicación mostrada en la figura 4.17. Se requiere en este caso de implementación una separación entre los agentes de 0.2 metros, por lo que se colocan los siguientes valores para $\delta_1 = 0.1$ [m] y $\delta_2 = -0.1$ [m].

$$\begin{aligned}
\text{Agente 1} \quad V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) \right\} \\
\text{Agente 2} \quad V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) \right\} \tag{5.1}
\end{aligned}$$

La figura 5.12, muestra la respuesta de dos agentes en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al valor de consenso (promedio de las condiciones iniciales de las salidas planas). La gráfica del error de seguimiento muestra como ambos agentes convergen al valor esperado volviendo al error de seguimiento cero y colocando a ambos agentes en la alineación especificada, manteniendo la separación deseada entre ellos. El máximo valor de la señal de control en ambos agentes es de 12 [v], este es generado debido a el cambio de posición de los agentes para llegar a la alineación predefinida.

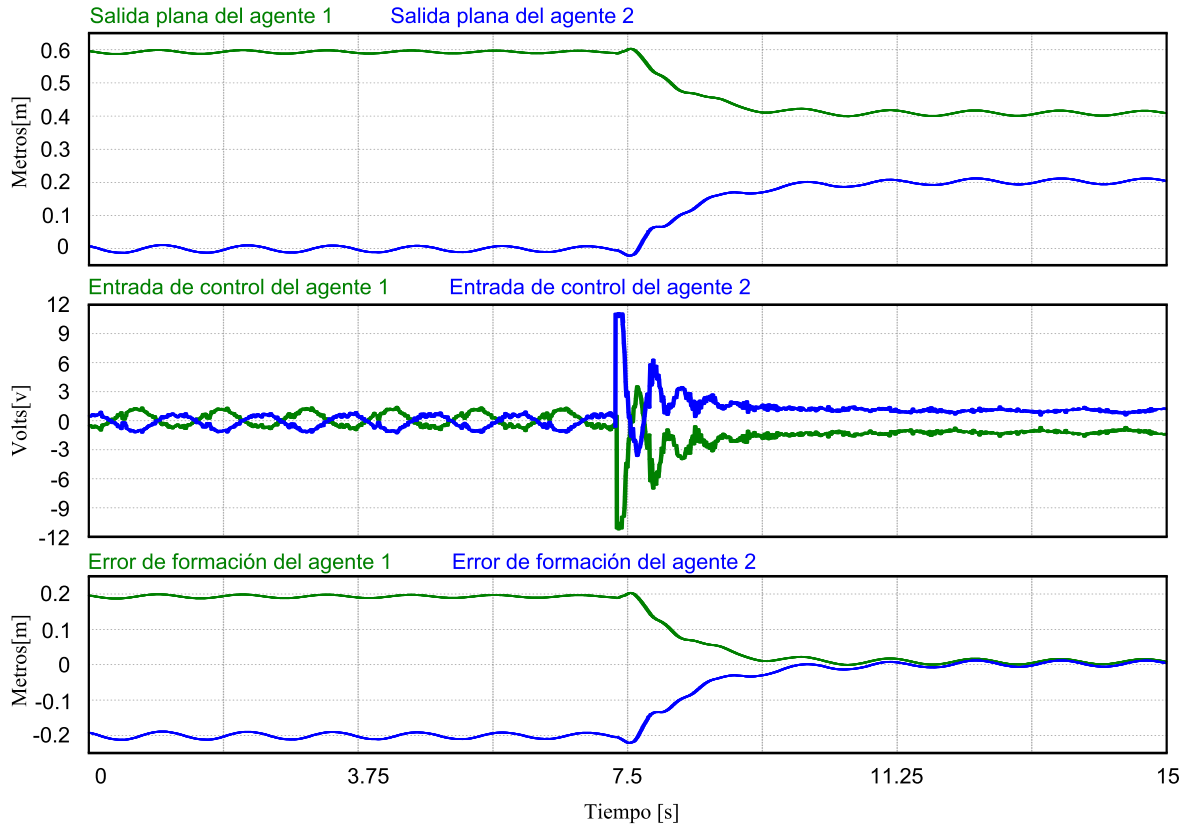


Figura 5.12: Consenso de las salidas planas, entrada de control de ambos agentes y error de formación de ambos agentes.

5.2.6. Implementación del algoritmo de consenso restringido a un punto deseado en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro

El ejemplo mostrado a continuación resuelve el problema de consenso restringido a un punto de referencia deseado de forma experimental, haciendo uso de la plataforma mostrada en la figura 5.1, configurada como péndulo invertido sobre un carro, con las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes mostradas en la tabla 5.7. La imple-

Tabla 5.7: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-péndulo invertido sobre un carro)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	-0.45	0
Agente 2	0	0

mentación se realiza a través de un programa generado en el software PSIM, el cual, será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para

controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 6$ [s].

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.20. La tabla 5.5 contiene los parámetros usados en el control usado en la implementación, los cuales son obtenidos de la plataforma experimental.

En este ejemplo de implementación se usara la topología de comunicación mostrada en la figura 4.22, como ya se mostró, la matriz $-L$ dada en (4.59), tiene los siguientes valores propios $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$, lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria.

Los parámetros de diseño del observador para cada agente se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador se especificaron como: $\zeta = 3.3$ y $\omega = 14$ con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 38416$, $-\rho\gamma_1 = 36221$, $-\rho\gamma_2 = 8929.8$ y $-\rho\gamma_3 = 184.8$. Haciendo uso de la ecuación (4.51) se encuentran los valores propios de $-\eta$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -90.2277 + 0.1992i$, $\lambda_{4j-2} = -90.2277 - 0.1992i$, $\lambda_{4j-1} = -2.1779$ y $\lambda_{4j} = -2.1667$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\eta$ tienen parte real negativa, por lo que se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (5.2), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.57).

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1 } V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) \} \\
 \\
 \text{Agente 2 } V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) \}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para el caso de implementación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el valor de consenso deseado de $\delta_r = 0.25$ [m], por lo que se colocan los siguientes valores $\delta_1 = 0.1$ [m] y $\delta_2 = -0.1$ [m].

La figura 5.13, muestra la respuesta de los dos agentes en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al valor de consenso especificado (punto de referencia deseado $\psi_r^0 = C = 0.25$ [m]), situando de esta manera a cada agente en la posición deseada por lo que el error de formación para ambos agentes es muy cercano a cero. Se logra la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con la referencia. Se observa

que la señal de control, permanece dentro de los valores esperados evitando algún daño a los motores de CD usados en la plataforma experimental.

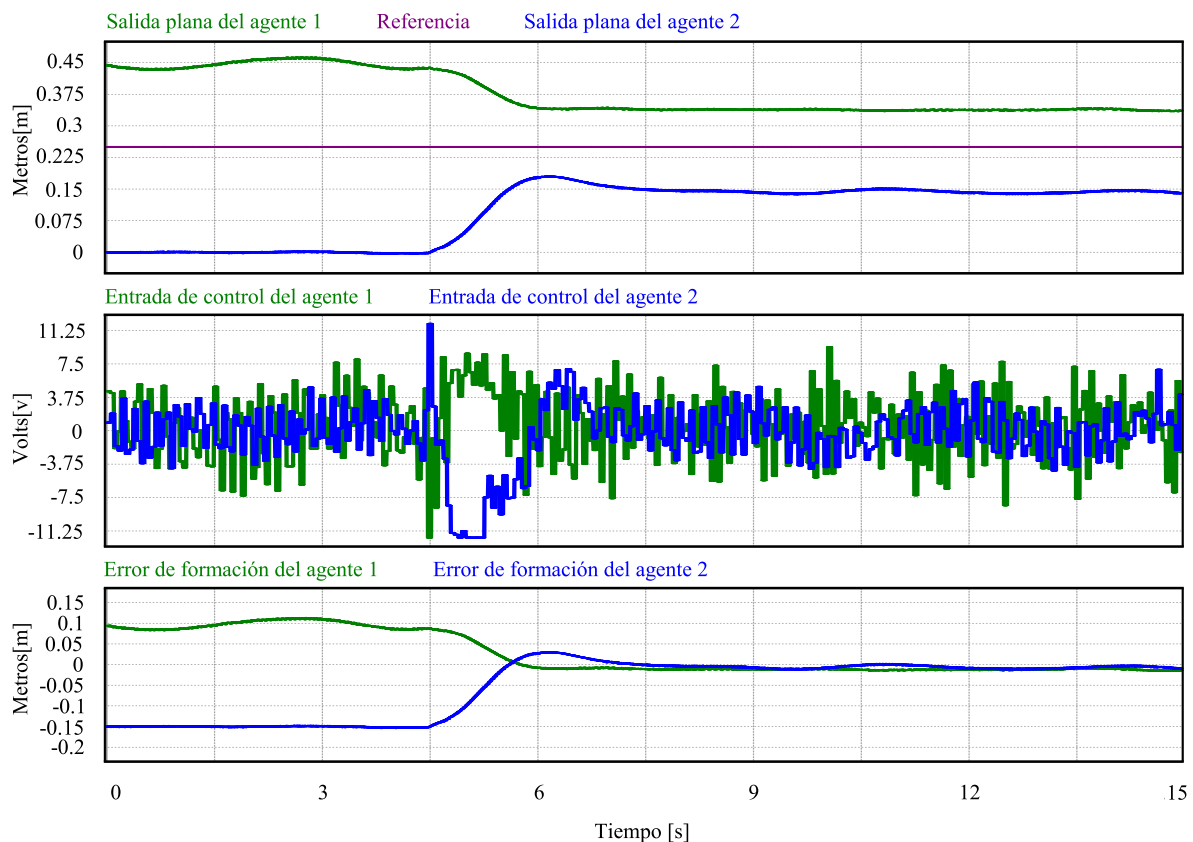


Figura 5.13: Consenso de las salidas planas, entrada de control de ambos agentes y error de formación de ambos agentes.

5.2.7. Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia en la plataforma experimental configurada como grúa viajera

El siguiente ejemplo permite dar solución al problema de consenso restringido a un modelo de referencia de forma experimental usando la plataforma mostrada en la figura 5.1, en su configuración como grúa viajera. Debido a que sólo se cuenta con dos sistemas en la plataforma experimental, se presentan dos casos experimentales. En el primer caso se tiene como modelo de referencia una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier y a dos agentes como seguidores, para el segundo caso se tiene un agente como seguidor y se usa como modelo de referencia un líder, el cual, a su vez realiza un seguimiento de trayectoria usando otra estrategia de control.

Caso 1 Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia usando como modelo una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier

El caso 1 usa como modelo de referencia una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.3 metros en 3.5 segundos. La implementación se realiza a través de un programa generado en el software PSIM, el cual, será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E-3$ [s]. Se usan las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes y para el modelo de referencia, mostradas en la tabla 5.8.

Tabla 5.8: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-grúa viajera)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	0.3	0
Agente 2	-0.3	0
Modelo de referencia	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.18. La tabla 5.5 contiene los parámetros usados en el control usado en la implementación, los cuales son obtenidos de la plataforma experimental.

Para este caso se usa como topología de comunicación el grafo mostrado en la figura 4.25, de la cual, se obtiene la matriz $-L$ y la matriz $-M$ mostradas en la ecuación (4.72) y en la ecuación (4.73) respectivamente. Analizando la matriz $-L$ y la matriz $-M$, se obtienen los valores propios $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$ para la matriz $-L$ y los valores propios $\rho_1 = -3$ y $\rho_2 = -1$ para la matriz $-M$. Se puede observar que $-L$ contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria para el consenso de las salidas planas de los agentes y del líder.

Los parámetros de diseño de los observadores para el agente 1 y el agente 2 se configuran como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador para el agente 1 y 2 se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 7.7$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 3515.3$, $-\rho\gamma_1 = 1826.1$, $-\rho\gamma_2 = 355.74$ y $-\rho\gamma_3 = 30.8$, Haciendo uso de la ecuación (4.77) se encuentran los valores propios de $-\Sigma$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -8.1962 + 0.5122i$, $\lambda_{4j-2} = -8.1962 - 0.5122i$, $\lambda_{4j-1} = -7.2038 + 0.4797i$ y $\lambda_{4j} = -7.2038 - 0.4797i$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\Sigma$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (5.3), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.70).

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1 } V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) + u_r \right\} \\
 \text{Agente 2 } V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) + u_r \right\}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

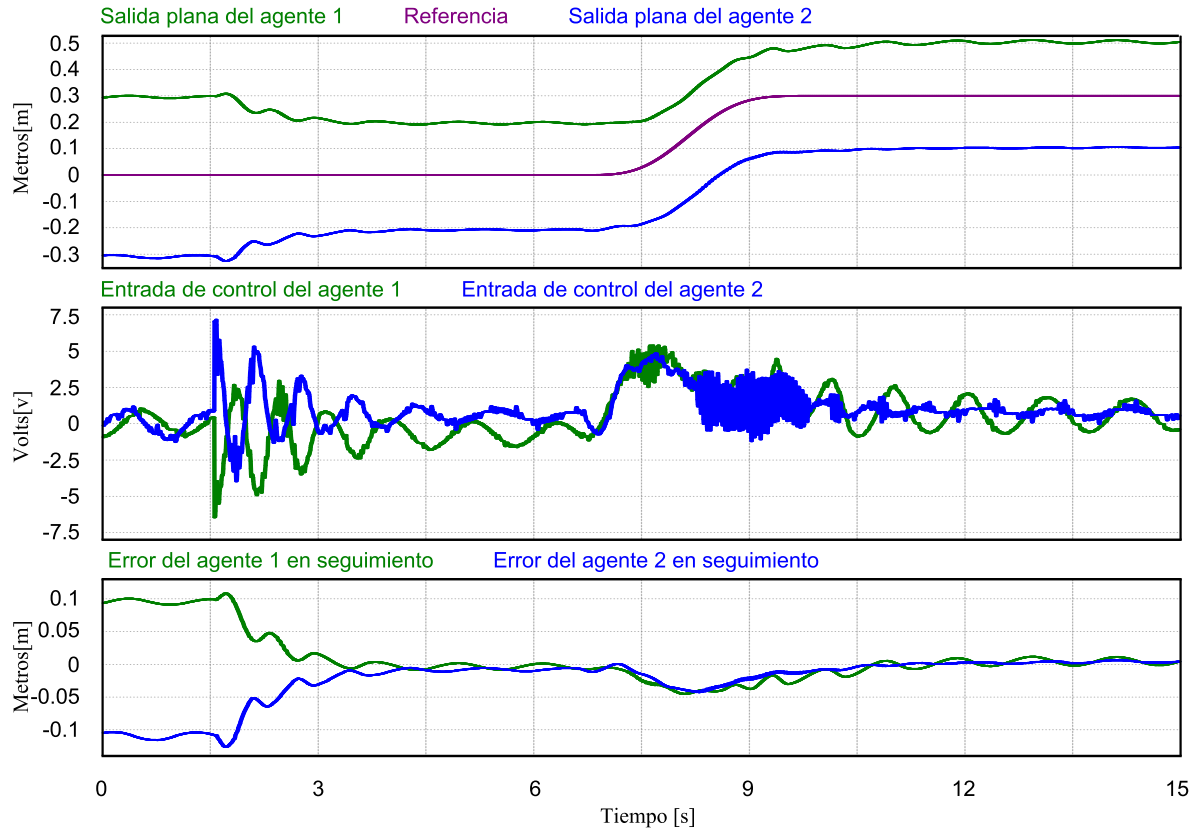


Figura 5.14: Consenso de las salidas planas, entrada de control de ambos agentes y error de formación de ambos agentes.

Para este caso de implementación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el modelo de referencia de $\delta_r = 0.1 [m]$, por lo que se colocan los siguientes valores para $\delta_1 = 0.1 [m]$ y $\delta_2 = -0.1 [m]$.

La figura 5.14, muestra la respuesta de los dos agentes como seguidores en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre las salidas planas de los dos agentes llevándolas al

modelo de referencia. Se coloca a cada agente en la posición deseada y se logra la alineación de cada uno de los agentes con la separación especificada entre ellos y con la separación deseada con el modelo de referencia.

Se puede visualizar el seguimiento del líder por los dos agentes, el cual, es realizado con buena precisión, como se observa en la gráfica del error la cual se encuentra muy cerca de cero durante todo el seguimiento. Se pueden notar pequeñas oscilaciones en la salida plana del agente 1 y un mejor comportamiento en el agente 2, esto es atribuido a la manufactura de los carros.

La señal de control, para los dos agentes permanece dentro de los valores nominales del motor de CD usado en la plataforma experimental.

Caso 2 Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia usando como modelo un líder

El caso 2 usa como modelo de referencia un líder, el cual, a su vez realiza un seguimiento de trayectoria usando otra estrategia de control. La implementación se realiza a través de un programa generado en el software PSIM, el cual, será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 3$ [s]. Se usan las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes y para el líder, mostradas en la tabla 5.9. El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.18.

Tabla 5.9: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-grúa viajera)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	-0.3	0
Líder	0	0

La tabla 5.5 contiene los parámetros usados en el control usado en la implementación, los cuales son obtenidos de la plataforma experimental.

Para este caso se usa como topología de comunicación el grafo mostrado en la figura 5.15, de la cual, se obtiene la matriz $-L$ mostrada en la ecuación (5.4).

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$



Figura 5.15: Topología de intercambio de información para un líder y un agente.

Se analiza la matriz $-L$, donde se obtienen los valores propios $\mu_1 = -1$ y $\mu_2 = 0$. Se puede observar que $-L$ contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de

intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria para el consenso de las salida plana del agente y del líder.

Los parámetros de diseño de los observador para el agente 1 se configuran como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador para el agente 1 se especificaron como: $\zeta = 1.2$ y $\omega = 7.2$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 2687.4$, $-\rho\gamma_1 = 1791.6$, $-\rho\gamma_2 = 402.2784$ y $-\rho\gamma_3 = 34.56$, Haciendo uso de la ecuación (4.77) se encuentran los valores propios de $-\Sigma$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -13.4513$, $\lambda_{4j-2} = -13.3805$, $\lambda_{4j-1} = -3.8799$ y $\lambda_{4j} = -3.8484$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\Sigma$ tienen parte real negativa, por lo que se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuación mostradas en (5.5), es el control generado para el agente 1 haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.70). Para este caso de implementación se requiere una separación entre el agente y el líder de $\delta_r = 0.2$.

$$\begin{aligned} \text{Agente 1 } V_{\delta 1} = & -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) \\ & + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) + u_r \} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para este ejemplo se hace una comparación entre los resultados obtenidos en la sección 5.2.1 y los resultados de la sección 5.2.3, donde se pretende seleccionar la estrategia de control más adecuada para implementarla en el líder de este ejemplo.

En la figura 5.16, se muestra la gráfica del error de seguimiento obtenida en la sección 5.2.1, donde se busca un seguimiento de una trayectoria suave, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada por un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos, implementando ADRC. El máximo valor del error de seguimiento es de 0.0399 [m].

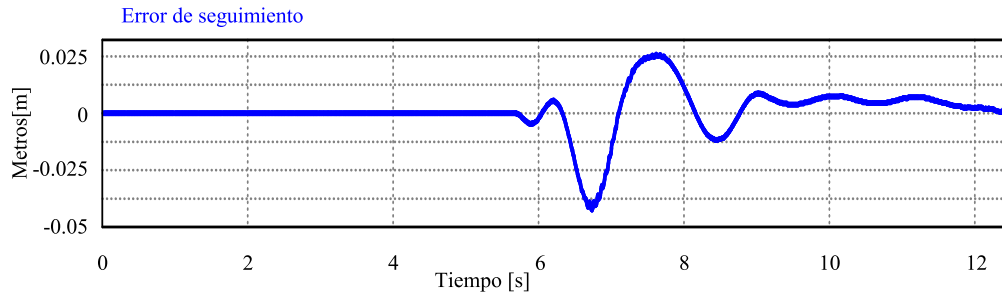


Figura 5.16: Error de seguimiento usando ADRC en la grúa viajera.

En la figura 5.17, se muestra la gráfica del error de seguimiento obtenida en la sección 5.2.3, donde se busca un seguimiento de una trayectoria suave, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada por un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3.5 segundos, implementando GPIC. El máximo valor del error de seguimiento es de 0.04793 [m].

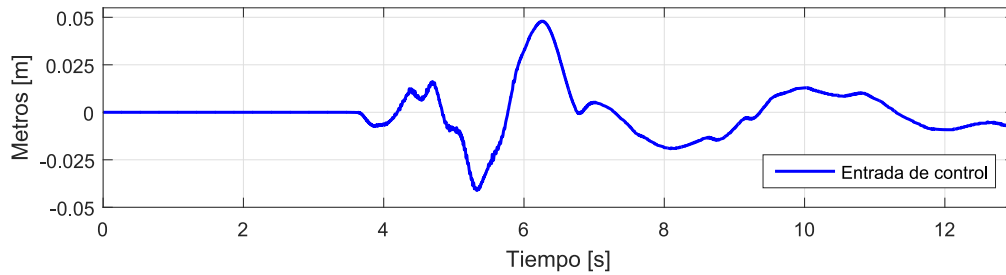


Figura 5.17: Error de seguimiento usando GPIC en la grúa viajera.

Comparando ambas gráficas, se puede notar como el error de seguimiento es menor en la implementación del ADRC, debido a que es más pequeño el valor máximo y es más cercano a cero después de la maniobra de reposo a reposo, también se debe tomar en cuenta que la maniobra de reposo a reposo es realizada en menor tiempo en la implementación del ADRC.

Por lo descrito anteriormente se implementara el ADRC en el líder de este ejemplo. Se hace uso del esquema de control y observadores mostrados en la figura 4.1. El esquema general a implementar en el líder se muestra en la figura 4.2. En la tabla 5.5 se muestran los parámetros usados en el esquema de control, los cuales, fueron obtenidos de la plataforma experimental.

La trayectoria de referencia deseada para el líder esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.3 metros en 3.5 segundos. Los parámetros de diseño del observador en el líder se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador en el líder se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 5$.

La figura 5.18, muestra la respuesta del agente como seguidor y el líder en lazo cerrado. Se observa como se logra un consenso entre la salida plana del agente y la salida plana del líder. Se coloca al agente en la posición deseada y se logra la alineación del mismo con la separación especificada entre el agente y el líder.

Se puede visualizar el seguimiento del líder por el agente, el cual, es realizado con buena precisión, como se observa en la gráfica del error la cual se encuentra muy cerca de cero durante todo el seguimiento. Se pueden notar pequeñas oscilaciones en la salida plana del agente al alinearse con el líder, pero son atenuadas después de realizar la maniobra de reposo a reposo junto con el líder.

La señal de control, para el agente y el líder permanece dentro de los valores nominales del motor de CD usado en la plataforma experimental.



Figura 5.18: Consenso de las salidas planas, entrada de control de ambos agentes y error de formación de ambos agentes.

5.2.8. Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia en la plataforma experimental configurada como péndulo invertido sobre un carro

El siguiente ejemplo permite dar solución al problema de consenso restringido a un modelo de referencia de forma experimental usando la plataforma mostrada en la figura 5.1, en su configuración como péndulo invertido sobre un carro.

Se presentan dos casos experimentales. En el primer caso se tiene como modelo de referencia una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier y a dos agentes como seguidores, para el segundo caso se tiene un agente como seguidor y se usa como modelo de referencia un líder, el cual, a su vez realiza un seguimiento de trayectoria usando otra estrategia de control.

Caso 1 Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia usando como modelo una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier

El caso 1 usa como modelo de referencia una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.2 metros en 3.5 segundos. La implementación se realiza a través de un programa generado en el software PSIM, el cual, será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 3$ [s]. Se usan las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes y para el modelo de referencia, mostradas en la tabla 5.10.

Tabla 5.10: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 1-péndulo invertido sobre un carro)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	-0.3	0
Agente 2	0.3	0
Modelo de referencia	0	0

El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.20. La tabla 5.5 contiene los parámetros usados en el control para la implementación, los cuales son obtenidos de la plataforma experimental.

Para este caso se usa como topología de comunicación el grafo mostrado en la figura 4.25, de la cual, se obtiene la matriz $-L$ y la matriz $-M$ mostradas en la ecuación (4.72) y en la ecuación (4.73) respectivamente. Analizando la matriz $-L$ y la matriz $-M$, se obtienen los valores propios $\mu_1 = -2$ y $\mu_2 = 0$ para la matriz $-L$ y los valores propios $\rho_1 = -3$ y $\rho_2 = -1$ para la matriz $-M$. Se puede observar que $-L$ contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria para el consenso de las salidas planas de los agentes y del líder.

Los parámetros de diseño de los observadores para el agente 1 y el agente 2 se configuran como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador para el agente 1 y 2 se especificaron como: $\zeta = 3.3$ y $\omega = 14$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 38416$, $-\rho\gamma_1 = 36221$, $-\rho\gamma_2 = 8929$ y $-\rho\gamma_3 = 184.8$, Haciendo uso de la ecuación (4.77) se encuentran los valores propios de $-\Sigma$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -91.1221$, $\lambda_{4j-2} = -89.3329$, $\lambda_{4j-1} = -2.1953$ y $\lambda_{4j} = -2.1497$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\Sigma$ tienen parte real negativa, por lo que se cumple las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuaciones mostradas en (5.6), son los controles generados para cada agente haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.70).

$$\begin{aligned}
 \text{Agente 1 } V_{\delta_1} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_2^0 - (\delta_1 - \delta_2)) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_2^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_2^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_2^3) + \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) + u_r \right\} \\
 \text{Agente 2 } V_{\delta_2} &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_1^0 - (\delta_2 - \delta_1)) + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_1^1) \right. \\
 &\quad + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_1^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_1^3) + \gamma_0 (\psi_2^0 - \psi_r^0 - \delta_r) \\
 &\quad \left. + \gamma_1 (\psi_2^1 - \psi_r^1) + \gamma_2 (\psi_2^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_2^3 - \psi_r^3) + u_r \right\}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

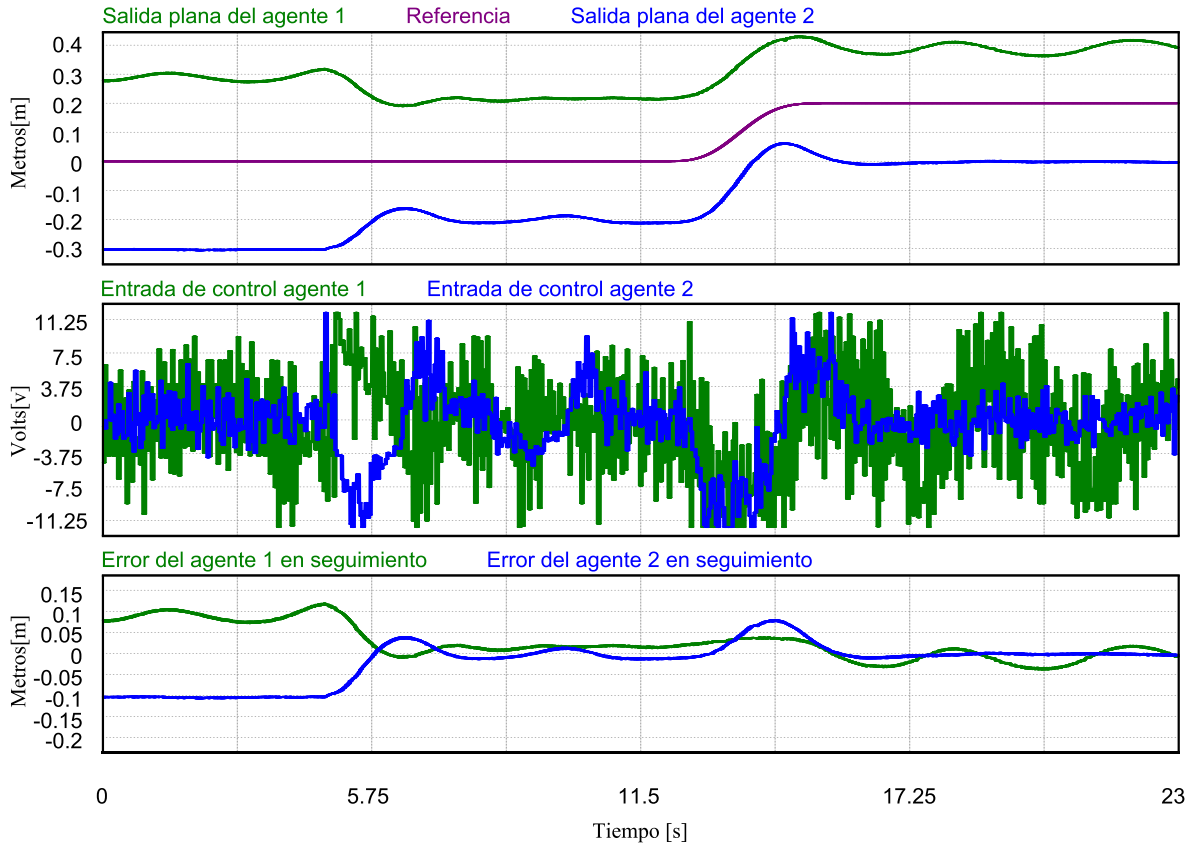


Figura 5.19: Consenso de las salidas planas, entrada de control de ambos agentes y error de formación de ambos agentes.

Para este caso de implementación se requiere una separación entre los agentes de 0.2 metros y una separación con el modelo de referencia de $\delta_r = 0.1 [m]$, por lo que se colocan los siguientes valores para $\delta_1 = 0.1 [m]$ y $\delta_2 = -0.1 [m]$.

La figura 5.19, muestra la respuesta de los dos agentes como seguidores en lazo cerrado. Se puede ver que se alcanza un consenso entre las salidas planas de los dos agentes y el

modelo de referencia. Se logra la alineación de cada uno de los agentes con la separación deseada entre ellos y con la separación deseada con el modelo de referencia.

Se puede visualizar el seguimiento del líder por los dos agentes, el cual, es realizado con un error considerable, como se observa en la gráfica del error la cual se encuentra muy cerca de cero durante todo el seguimiento, pero el valor del error crece en el momento que se realiza la maniobra de reposo a reposo para después disminuir y oscilar cerca del cero. Se pueden observar pequeñas oscilaciones en la salida plana del agente 1 y un mejor comportamiento en el agente 2, esto es atribuido a la manufactura de los carros.

La señal de control, para los dos agentes permanece dentro de los valores nominales del motor de CD usado en la plataforma experimental.

Caso 2 Implementación del algoritmo de consenso restringido a un modelo de referencia usando como modelo un líder

El caso 2 usa como modelo de referencia un líder, el cual, a su vez realiza un seguimiento de trayectoria usando otra estrategia de control. La implementación se realiza a través de un programa generado en el software PSIM, el cual, será cargado a la tarjeta usando el programa “Code Composer Estudio”. La tarjeta usada para controlar el sistema es la “C2000 Delfino TMS320F28335”, usando un paso de integración de $1E - 3$ [s]. Se usan las siguientes condiciones iniciales para cada uno de los agentes y para el líder, mostradas en la tabla 5.11. El esquema general a simular para cada agente se muestra en la figura 4.20.

Tabla 5.11: Condiciones iniciales (Problema de consenso restringido caso 2-péndulo invertido sobre un carro)

	Posición del carro x_δ [m]	Posición angular del péndulo θ_δ [rad]
Agente 1	0.3	0
Líder	0	0

La tabla 5.5 contiene los parámetros usados en el control usado en la implementación, los cuales son obtenidos de la plataforma experimental.

Para este caso se usa como topología de comunicación el grafo mostrado en la figura 5.20, de la cual, se obtiene la matriz $-L$ mostrada en la ecuación (5.7).

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$



Figura 5.20: Topología de intercambio de información para un líder y un agente.

Se analiza la matriz $-L$, donde se obtienen los valores propios $\mu_1 = -1$ y $\mu_2 = 0$. Se puede observar que $-L$ contiene un valor propio cero lo que implica que la topología de

intercambio de información contiene un árbol de expansión, por lo tanto se cumple la condición necesaria para el consenso de las salida plana del agente y del líder.

Los parámetros de diseño de los observadores para el agente 1 se configuran como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador para el agente 1 se especificaron como: $\zeta = 2.3$ y $\omega = 21$, con lo que se obtienen los siguientes valores para las ganancias del controlador $-\rho\gamma_0 = 194481$, $-\rho\gamma_1 = 85201$, $-\rho\gamma_2 = 10214$ y $-\rho\gamma_3 = 193.2$, Haciendo uso de la ecuación (4.77) se encuentran los valores propios de $-\Sigma$, los cuales, están dados por $\lambda_{4j-3} = -91.7962 + 0.7017i$, $\lambda_{4j-2} = -91.7962 - 0.7017i$, $\lambda_{4j-1} = -4.8038 + 0.0383i$ y $\lambda_{4j} = -4.8038 - 0.0383i$. Se puede observar que todos los valores propios de $-\Sigma$ tienen parte real negativa, por lo que se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para lograr el consenso de forma exponencial.

Las ecuación mostradas en (5.8), es el control generado para el agente 1 haciendo uso del algoritmo de consenso mostrado en la ecuación (4.70). Para este caso de implementación se requiere una separación entre el agente y el líder de $\delta_r = 0.2$.

$$\begin{aligned} \text{Agente 1 } V_{\delta 1} = & -\frac{1}{\beta} \{ \gamma_0 (\psi_1^0 - \psi_r^0 - \delta_r) + \gamma_1 (\psi_1^1 - \psi_r^1) \\ & + \gamma_2 (\psi_1^2 - \psi_r^2) + \gamma_3 (\psi_1^3 - \psi_r^3) + u_r \} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para este ejemplo se hace una comparación entre los resultados obtenidos en la sección 5.2.2 y los resultados de la sección 5.2.4, donde se pretende seleccionar la estrategia de control más adecuada para implementarla en el líder de este ejemplo.

En la figura 5.21, se muestra la gráfica del error de seguimiento obtenida en la sección 5.2.2, donde se busca un seguimiento de una trayectoria suave, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada por un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.5 metros en 3 segundos, implementando ADRC. El máximo valor del error de seguimiento es de 0.09017 [m].

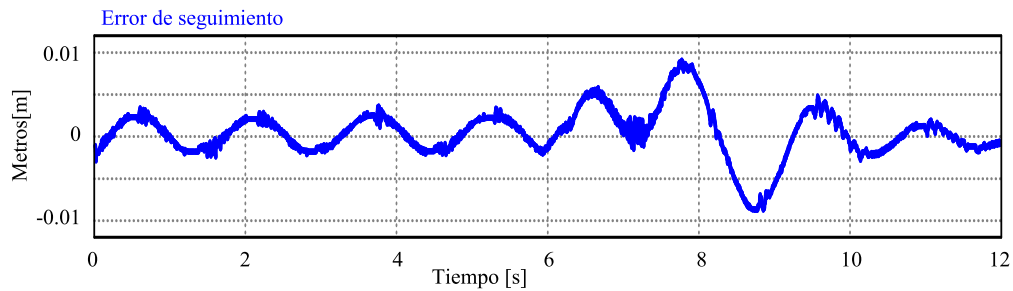


Figura 5.21: Error de seguimiento usando ADRC en el péndulo invertido sobre un carro.

En la figura 5.22, se muestra la gráfica del error de seguimiento obtenida en la sección 5.2.4, donde se busca un seguimiento de una trayectoria suave, la cual, esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada por un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0.4 metros en 3.5 segundos, implementando GPIC. El máximo valor del error de seguimiento es de 0.03591 [m].

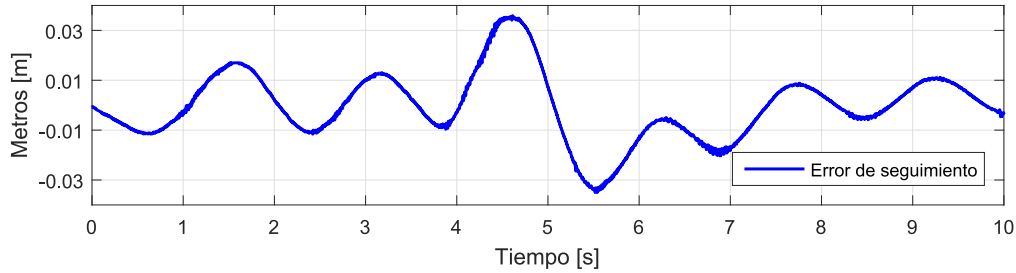


Figura 5.22: Error de seguimiento usando GPIC en el péndulo invertido sobre un carro.

Comparando ambas gráficas, se puede notar como el error de seguimiento es menor en la implementación del ADRC, debido a que es más pequeño el valor máximo y es más cercano a cero después de la maniobra de reposo a reposo, también se debe tomar en cuenta que la maniobra de reposo a reposo es realizada en menor tiempo y que la distancia es mayor y que la distancia es mayor en la implementación del ADRC.

Por lo descrito anterior se implementara el ADRC en el líder de este ejemplo. Se hace uso del esquema de control y observadores mostrados en la figura 4.5. El esquema general a implementar en el líder se muestra en la figura 4.2. En la tabla 5.5 se muestran los parámetros usados en el esquema de control, los cuales, fueron obtenidos de la plataforma experimental.

La trayectoria de referencia deseada para el líder esta dada por una maniobra de reposo a reposo sintetizada mediante un polinomio de Bézier, interpolando entre 0 y 0,25 metros en 3.5 segundos. Los parámetros de diseño del observador en el líder se configuraron como: $\zeta_1 = 1$, $\omega_1 = 120$, $\zeta_2 = 1$ y $\omega_2 = 120$, mientras que los parámetros de diseño del controlador en el líder se especificaron como: $\zeta = 1$ y $\omega = 9$.

La figura 5.23, muestra la respuesta del líder y el seguidor en lazo cerrado. Se logra un consenso entre la salida plana del líder y la salida plana del seguidor. Se coloca al agente en la posición deseada, logrando así la alineación con la separación especificada entre el agente y el líder.

Se puede visualizar el seguimiento del líder por el agente, el cual, es realizado con buena precisión, como se puede corroborar en la gráfica del error la cual se encuentra muy cerca de cero durante todo el seguimiento aumentando su valor en la maniobra de reposo a reposo, para después disminuir y tender a cero. Se pueden notar pequeñas oscilaciones en la salida plana del agente al alinearse con el líder, pero son atenuadas después de realizar la maniobra de reposo a reposo.

La señal de control, para el agente y el líder permanece dentro de los valores nominales del motor de CD usado en la plataforma experimental, evitando así cualquier daño al motor.

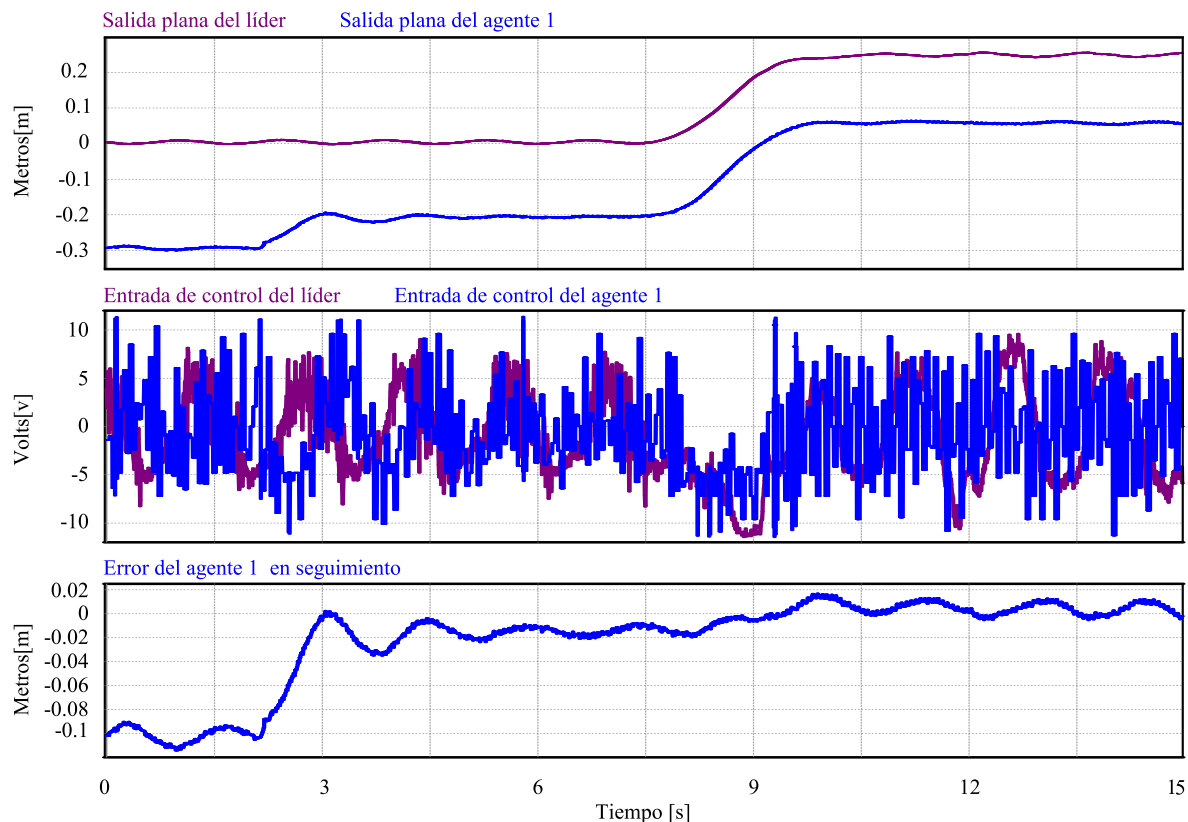


Figura 5.23: Consenso de las salidas planas, entrada de control de ambos agentes y error de formación de ambos agentes.

5.3. Resumen del capítulo

Este capítulo tiene como principal objetivo, la validación de las simulaciones mostradas en el capítulo 4. Se muestra la solución al problema de seguimiento de trayectoria, implementando ADRC y GPIC, en la plataforma experimental y el uso de algoritmos de consenso en combinación con ADRC para la sincronización de dos sistemas usando la plataforma experimental, dando solución a los problemas de consenso no restringido y restringido.

Capítulo 6

Conclusiones

Se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de este trabajo de investigación. Como primer punto, se mencionan las aportaciones o contribuciones logradas en esta área de investigación, posteriormente, se propone el trabajo a futuro para facilitar la obtención de resultados continuando con la línea de investigación presentada en este documento y por último se habla de lo concluido durante el desarrollo de esta tesis.

6.1. Aportaciones

- Se implementaron, algoritmos de consenso en sistemas subactuados, no lineales y no diferencialmente planos pero con una linealización aproximada a un punto de equilibrio (estable o inestable) controlable, usando la propiedad de planitud del sistema. De esta manera se dio solución a los problemas de consenso restringido y no restringido, contemplando en el segundo problemas dos casos: consenso a un punto de referencia y a un modelo de referencia deseado.
- Se diseñaron leyes de control para un sistema mecánico subactuado, usando diferentes estrategias de control tales como: control por rechazo activo de perturbaciones o control proporcional integral generalizado. Se realizó una comparación entre estas estrategias de control.
- Se validaron los resultados de simulación a través de la implementación diferentes ejemplos ilustrativos en una plataforma experimental.
- Se publicaron dos artículos, basados en los resultados experimentales obtenidos implementando ADRC.
 - “*On the ADRC of Non-Differentially Flat, Underactuated, Nonlinear Systems: An Experimental Case Study*”, presentado en 13th ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications Cleveland, Ohio, USA, véase [49]

- “*Sliding Mode Control Devoid of State Measurements*”, presentado en libro *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*, véase, [48]

6.2. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro, partiendo de este trabajo de investigación, se proponen los siguientes puntos:

- Mejorar la plataforma experimental, tomando en cuenta que se desea implementar sistemas subactuados en puntos inestables y considerando un aumento en los eslabones del sistema para poder controlar péndulos con dos o más eslabones. Con el fin de mejorar los resultados experimentales se propone la implementación de una forma diferente de transmitir el movimiento traslacional al carro, disminuyendo el juego mecánico y la fricción entre el carro y el riel.
- Implementación de tarjetas individuales, para cada uno de los sistemas, lo cual, permitiría considerar casos con retardos en la comunicación entre agentes.
- Considerar, en el análisis de consenso el termino de perturbaciones, con lo cual, se pretende mejorar el desempeño de los controles usando algoritmos de consenso.
- Implementar, diferentes herramientas para la estimación de las variables no medidas del estado, como el uso del modulador delta.
- Comparar los resultados obtenidos, con estrategias de control similares para el control de formación y seguimiento de trayectorias usando sistemas multiagentes.
- Cambiar de una plataforma fija a un sistema móvil para poder implementar coordinación de vehículos en dos direcciones y dotar de mayor autonomía a los sistemas utilizados como agentes.

6.3. Conclusiones

Como ya se a mencionado en múltiples ocasiones, la implementación de sistemas subactuados, no lineales y no diferencialmente planos en la resolución de problemas de consenso es poco usual, pero una línea de trabajo bastante interesante y con muchas vertientes a considerar.

En los diferentes ejemplos mostrados de consenso, se puede observar un buen comportamiento de los sistemas controlados en lazo cerrado. Se deberán tomar en cuenta diferentes factores si se desea abordar nuevamente esta línea de investigación y poder mejorar y extender los resultados obtenidos, se observo que la parte experimental tiene un alto impacto en los resultados y que estos dependen de muchos factores, como lo son: la manufactura correcta de la plataforma experimental, una correcta adquisición de datos, la implementación de una etapa de potencia idónea entre otros. Por otro lado y también sumamente

importante a considerar, es el modelado correcto de tu sistema y de las variables que afectan su funcionamiento.

Los resultados obtenidos en simulación fueron validados de forma experimental, obteniendo resultados muy parecidos en ambos casos, con diferencias entre ellos debido a factores no considerados en la simulación. Se obtuvieron también resultados en conjunto con otras estrategias de control, las cuales, complementaron los experimentos realizados.

Las estrategias de control usadas en este trabajo, para el control del líder (ADRC Y GPIC), funcionaron como una aproximación al entendimiento del comportamiento y el control de sistemas subactuados, se tienen como una opción viable, para el desarrollo y la implementación en futuros trabajos de investigación.

La implementación de algoritmos de consenso, para la solución de los diferentes problemas mencionados, haciendo uso de sistemas no lineales, subactuados, con una linealización aproximada a un punto de equilibrio, controlable y por lo tanto plana, es una solución viable a problemas de consenso restringidos y no restringidos, en base, a los experimentos realizados en simulación y validados de forma experimental.

Por último, de manera personal, durante el desarrollo de este trabajo de investigación se obtuvieron múltiples conocimientos no sólo asociados con esta línea de investigación, si no también, asociados con mi desarrollo profesional en áreas de interés personal. El trabajo realizado aporta conocimientos nuevos, de estrategias de control implementadas en sistema poco usuales representando un reto el desarrollo y la implementación de las mismas debido a la reducida información encontrada en la literatura, lo que permitió el desarrollo de nuevas habilidades de trabajo y de desarrollo personal.

Bibliografía

- [1] Aguilar-Ibanez, C. and Sira-Ramírez, H. (2002). Control of the furuta pendulum based on a linear differential flatness approach. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 3, pages 1954–1959. IEEE.
- [2] Azizan, H., Jafarinasab, M., Behbahani, S., and Danesh, M. (2010). Fuzzy control based on lmi approach and fuzzy interpretation of the rider input for two wheeled balancing human transporter. In *Control and Automation (ICCA), 2010 8th IEEE International Conference on*, pages 192–197. IEEE.
- [3] Craig, J. (2006). *Robótica*, ed.
- [4] Cuevas, L. A. R. (2014). *Control descentralizado mediante rechazo activo de perturbaciones para movimiento coordinado de sistemas mecánicos interconectado*. CINVESTAV-INP, Unidad Zacatenco, México. PhD thesis, Tesis de Maestría en Ciencias en en Mecatrónica.
- [5] Escobar, G., Ortega, R., and Sira-Ramírez, H. (1999). Output-feedback global stabilization of a nonlinear benchmark system using a saturated passivity-based controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(2):289–293.
- [6] Fantoni, I. and Lozano, R. (2001). Control of nonlinear mechanical systems. *European Journal of Control*, 7(2-3):328–348.
- [7] Fantoni, I. and Lozano, R. (2002). *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media.
- [8] Fliess, M. and Jean, L. (1996). Flat systems theory and practice. Technical report, Sylviane GENTIL.
- [9] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International journal of control*, 61(6):1327–1361.
- [10] Fliess, M. and Marquez, R. (2000). Continuous-time linear predictive control and flatness: a module-theoretic setting with examples. *International Journal of Control*, 73(7):606–623.

- [11] Fliess, M., Marquez, R., Delaleau, E., and Sira-Ramírez, H. (2002). Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 7:23–41.
- [12] Gao, Z., Huang, Y., and Han, J. (2001). An alternative paradigm for control system design. In *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 5, pages 4578–4585. IEEE.
- [13] Godsil, C. and Royle, G. F. (2013). *Algebraic graph theory*, volume 207. Springer Science & Business Media.
- [14] Grossman, S. and Grossman, S. I. S. I. (2008). *Álgebra lineal*. McGraw-Hill.
- [15] Guo, B.-Z. and Zhao, Z.-L. (2016). *Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems: An Introduction*. John Wiley & Sons.
- [16] Hernandez, V. M. and Sira-Ramirez, H. (2003). Generalized pi control for swinging up and balancing the inertia wheel pendulum. In *Proceedings of American Control Conference*.
- [17] Jiang, F., Wang, L., and Jia, Y. (2009). Consensus in leaderless networks of high-order-integrator agents. In *American Control Conference, 2009. ACC'09.*, pages 4458–4463. IEEE.
- [18] Johnson, C. (1971). Accomodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6):635–644.
- [19] Kailath, T. (1980). *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- [20] Kajita, S., Kanehiro, F., Kaneko, K., Yokoi, K., and Hirukawa, H. (2001). The 3d linear inverted pendulum mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation. In *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 239–246. IEEE.
- [21] Kuriki, Y. and Namerikawa, T. (2015). Experimental validation of cooperative formation control with collision avoidance for a multi-uav system. In *Automation, Robotics and Applications (ICARA), 2015 6th International Conference on*, pages 531–536. IEEE.
- [22] Levine, J. (2009). *Analysis and control of nonlinear systems: A flatness-based approach*. Springer Science & Business Media.
- [23] Martínez, A. and Jafet, E. (2014). Consenso en arreglos maestro-seguidores de agentes inerciales. Master’s thesis, IPICYT.
- [24] Merris, R. (1994). Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear algebra and its applications*, 197:143–176.
- [25] Moore, K. L. and Lucarelli, D. (2005). Forced and constrained consensus among cooperating agents. In *Networking, Sensing and Control, 2005. Proceedings. 2005 IEEE*, pages 449–454. IEEE.

- [26] Nair, S., Leonard, N. E., and Moreau, L. (2003). Coordinated control of networked mechanical systems with unstable dynamics. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 1, pages 550–555. IEEE.
- [27] Nikiforuk, P. and Tamura, K. (1988). Design of a disturbance accommodating adaptive control system and its application to a dc-servo motor system with coulomb friction. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 110(4):343–349.
- [28] Nuno, E., Sarras, I., and Basanez, L. (2013). Consensus in networks of nonidentical euler–lagrange systems using p+ d controllers. *IEEE Transactions on Robotics*, 29(6):1503–1508.
- [29] Olfati-Saber, R., Fax, J. A., and Murray, R. M. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):215–233.
- [30] Olfati-Saber, R. and Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on automatic control*, 49(9):1520–1533.
- [31] Ortega, G., Muñoz, F., Quesada, E. E., Garcia, L. R., and Ordaz, P. (2015). Implementation of leader-follower linear consensus algorithm for coordination of multiple aircrafts. In *Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS), 2015 Workshop on*, pages 25–32. IEEE.
- [32] Preminger, J. and Rootenberg, J. (1964). Some considerations relating to control systems employing the invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(3):209–215.
- [33] Ramírez Neria, M. (2017). *Control mediante rechazo activo de perturbaciones de sistemas mecánicos subactuados no lineales*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- [34] Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Garrido-Moctezuma, R., and Luviano-Juarez, A. (2014). Linear active disturbance rejection control of underactuated systems: The case of the furuta pendulum. *ISA transactions*, 53(4):920–928.
- [35] Ramirez-Neria, M., Sira-Ramirez, H., Garrido-Moctezuma, R., and Luviano-Juarez, A. (2015). Active disturbance rejection control of singular differentially flat systems. In *Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE), 2015 54th Annual Conference of the*, pages 554–559. IEEE.
- [36] Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Garrido-Moctezuma, R., and Luviano-Juarez, A. (2016a). Linear robust generalized proportional integral control of a ball and beam system for trajectory tracking tasks. In *American Control Conference (ACC), 2016*, pages 4719–4724. IEEE.
- [37] Ramírez-Neria, M., Sira-Ramírez, H., Garrido-Moctezuma, R., and Luviano-Juárez, A. (2016b). On the linear control of underactuated nonlinear systems via tangent

- flatness and active disturbance rejection control: The case of the ball and beam system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 138(10):104501.
- [38] Rao, S. and Ghose, D. (2014). Sliding mode control-based autopilots for leaderless consensus of unmanned aerial vehicles. *IEEE transactions on control systems technology*, 22(5):1964–1972.
- [39] Ren, W. (2007). Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations. *IET Control Theory & Applications*, 1(2):505–512.
- [40] Ren, W. and Atkins, E. (2007). Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(10-11):1002–1033.
- [41] Ren, W., Beard, R. W., and McLain, T. W. (2005). Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. In *Cooperative control*, pages 171–188. Springer.
- [42] Ren, W., Moore, K., and Chen, Y. (2006). High-order consensus algorithms in cooperative vehicle systems. In *Networking, Sensing and Control, 2006. ICNSC'06. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on*, pages 457–462. IEEE.
- [43] Ren, W., Moore, K. L., and Chen, Y. (2007). High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 129(5):678–688.
- [44] Saber, R. O. and Murray, R. M. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents. *IEEE*.
- [45] Sira, H., Márquez, R., Rivas, F., and Llanes, O. (2005). Control de sistemas no lineales. *Mdrid: Pearson Prentice Hall*.
- [46] Sira-Ramirez, H. and Agrawal, S. K. (2004). *Differentially Flat Systems*, chapter Linear Time-Invariant SISO Systems, pages 11–68. Crc Press.
- [47] Sira-Ramirez, H., Luviano-Juárez, A., Ramírez-Neria, M., and Zurita-Bustamante, E. (2017). *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems: A Flatness Based Approach*. Elsevier Science.
- [48] Sira-Ramírez, H., Zurita-Bustamante, E., Aguilar-Orduña, M., and Hernández-Flores, E. (2018). Sliding mode control devoid of state measurements. In *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*, pages 73–102. Springer.
- [49] Sira-Ramírez, H., Zurita-Bustamante, E., and Hernández-Flores, E. (2017). On the adrc of non-differentially flat, underactuated, nonlinear systems: An experimental case study. In *ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages V009T07A014–V009T07A014. American Society of Mechanical Engineers.

- [50] Tanner, H. G. (2004). On the controllability of nearest neighbor interconnections. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 3, pages 2467–2472. IEEE.
- [51] Tsai, M.-C. and Shen, B.-H. (2007). Synchronisation control of parallel dual inverted pendulums driven by linear servomotors. *IET Control Theory & Applications*, 1(1):320–327.
- [52] Zhu, D. and Zhou, D. (2008). Synchronization control of parallel dual inverted pendulums. In *Automation and Logistics, 2008. ICAL 2008. IEEE International Conference on*, pages 1486–1490. IEEE.

Appendices

Apéndice A

Generación de trayectoria

En sistemas subactuados, específicamente en los ejemplo considerados en este trabajo, la generación de trayectoria se emplea para llevar el sistema de un punto a otro de una forma suave y en un tiempo determinado. Este apéndice esta basado en el libro Robótica [3], donde se establece que por trayectoria se entiende a una historia en el tiempo de la posición, velocidad y aceleración para cada grado de libertad.

Comúnmente es necesario especificar a detalle la trayectoria deseada, para lo cual se emplean los puntos vía, estos son puntos intermedios entre el punto inicial y final de la trayectoria deseada, de tal forma que para llegar del punto inicial se tenga que pasar por dichos puntos vía, al conjunto de puntos vía con los puntos inicial y final se le conoce como puntos ruta.

En el diseño de trayectoria deseada, también es importante establecer atributos temporales de la trayectoria, ya que comúnmente es requerido que el movimiento del sistema sea uniforme.

Con el propósito de generar una función que describa una trayectoria deseada, para la cual, el movimiento del sistema sea uniforme, es necesario establecer un número de restricciones suficientes que satisfagan el problema. Una forma de satisfacer el número de restricciones es a través de un polinomio de orden tal que el número de coeficientes sea igual o mayor al número de restricciones establecidas.

Para este trabajo de tesis se desea generar una trayectoria que comience en $0 [m]$ y finalice en $0.5 [m]$, en la mayoría de los ejemplos, se desea que tanto la velocidad como la aceleración, comiencen y terminen cero; estas restricciones definen a una trayectoria que parte del reposo y termina en reposo. Por lo que las restricciones se pueden resumir en las ecuaciones mostradas en (A.1).

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \psi_0 & \dot{\psi}(0) &= 0 & \ddot{\psi}(0) &= 0 & \psi^{(3)}(0) &= 0 & \psi^{(4)}(0) &= 0 \\
\psi(t_f) &= \psi_f & \dot{\psi}(t_f) &= 0 & \ddot{\psi}(t_f) &= 0 & \psi^{(3)}(t_f) &= 0 & \psi^{(4)}(t_f) &= 0
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Estas restricciones pueden ser satisfechas con un polinomio de séptimo orden como se muestra en la ecuación (A.2).

$$\psi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 + a_7t^7 + a_8t^8 + a_9t^9 \tag{A.2}$$

Donde ψ_0 representa el punto inicial de la trayectoria y ψ_f el punto final. Lo que nos deja conjunto de ecuaciones mostradas en (A.3).

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= a_0 \\
\psi(t_f) &= a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 + a_6t_f^6 + a_7t_f^7 + a_8t_f^8 + a_9t_f^9 \\
\dot{\psi}(0) &= a_1 \\
\dot{\psi}(t_f) &= a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 + 6a_6t_f^5 + 7a_7t_f^6 + 8a_8t_f^7 + 9a_9t_f^8 \\
\ddot{\psi}(0) &= 2a_2 \\
\ddot{\psi}(t_f) &= 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 + 30a_6t_f^4 + 42a_7t_f^5 + 56a_8t_f^6 + 72a_9t_f^7 \\
\psi^{(3)}(0) &= 6a_3 \\
\psi^{(3)}(t_f) &= 6a_3 + 24a_4t_f + 60a_5t_f^2 + 120a_6t_f^3 + 210a_7t_f^4 + 336a_8t_f^5 + 504a_9t_f^6 \\
\psi^{(4)}(0) &= 24a_4 \\
\psi^{(4)}(t_f) &= 24a_4 + 120a_5t_f + 360a_6t_f^2 + 840a_7t_f^3 + 1680a_8t_f^4 + 3024a_9t_f^5
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Resolviendo las ecuaciones dadas en (A.3) se obtienen los coeficientes del polinomio dados por las ecuaciones (A.4).

$$\begin{aligned}
a_0 &= \psi_0 & a_5 &= \frac{126(\psi_f - \psi_0)}{t_f^5} \\
a_1 &= \dot{\psi}(0) = 0 & a_6 &= \frac{-420(\psi_f - \psi_0)}{t_f^6} \\
a_2 &= \frac{1}{2}\ddot{\psi}(0) = 0 & a_7 &= \frac{540(\psi_f - \psi_0)}{t_f^7} \\
a_3 &= \frac{1}{6}\psi^{(3)}(0) = 0 & a_8 &= \frac{-315(\psi_f - \psi_0)}{t_f^8} \\
a_4 &= \frac{1}{24}\psi^{(4)}(0) = 0 & a_9 &= \frac{70(\psi_f - \psi_0)}{t_f^9}
\end{aligned} \tag{A.4}$$