



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA**

**Aplicación de Cosechadores de Energía Basados en  
Parches Piezoeléctricos para la Absorción de  
Vibraciones en Estructuras**

Tesis que presenta el  
**Ing. Francisco Albarrán Bravo**

Para obtener el grado de:  
**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

---

Directores de Tesis:  
**Dr. Gerardo Silva Navarro  
Dr. Francisco Beltrán Carbajal**

Ciudad de México

Noviembre de 2016.



# Dedicatoria

*A mis padres, siempre incondicionales con su afecto y apoyo mostrado en toda mi existencia.*

*A mis hermanas por su apoyo y cariño.*

*A mis sobrinos Ángel, Camila e Ian, su ánimo, alegría hacen pasar unos ratos extraordinarios de sonrisas y carcajadas.*

*A mis amigos y compañeros durante mi maestría, por los buenos momentos pasados, las enseñanzas y confianza mostrada.*

---

# Agradecimientos

A mis asesores Dr. Gerardo Silva Navarro y Dr. Francisco Beltrán Carbajal por su consejos, apoyo, su enorme paciencia mostrada y claro por todos los conocimientos transmitidos.

A Conacyt por el apoyo brindado para la elaboración de esta investigación y manuscrito.



# Resumen

El uso de los materiales piezoeléctricos en conjunto con circuitos pasivos tipo resistencia-inductancia-capacitancia (RLC) para amortiguar modos de vibración específicos se ha estado explorando. Los materiales piezoeléctricos convierten la energía mecánica en energía eléctrica, la cual se disipa después como calentamiento por el efecto joule a través del circuito RLC. Entonces, cuando se aplica una fuerza a una viga en voladizo y por medio de la variación de los valores de la inductancia y la resistencia, la frecuencia de oscilación natural para el circuito RLC se sintoniza para inyectar amortiguamiento a un determinado modo de vibración.

En el presente trabajo se presenta una revisión sobre la aplicación de parches piezoeléctricos para cosechar energía de una estructura mecánica, tipo viga en voladizo, que vibra por fuerzas exógenas o también como posible mecanismo de absorción de energía en ciertos modos de vibración específicos. De hecho, se describe una implementación de los circuitos RLC para atenuar vibraciones en los primeros 4 modos de vibración de la viga y, posteriormente, se obtiene la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) de la estructura mecánica. A partir de la FRF se pueden obtener los parámetros modales de la estructura, que se comparan después cuando la estructura cuenta con la presencia de un circuito tipo semiactivo para la absorción de energía que se denomina como *piezo-shunt*. Se presentan resultados experimentales que permiten validar el buen funcionamiento de los *piezo-shunts* para la absorción de vibraciones.





# Abstract

The use of piezoelectric materials in conjunction with passive resistance-inductance-capacitance (RLC) circuits to damp specific vibration modes has been explored. The piezoelectric materials convert the mechanical energy into electrical energy, which is then dissipated as heating by the joule effect through the RLC circuit. Then, when a force is applied to a cantilever beam and by varying the values of inductance and resistance, the natural oscillation frequency for the RLC circuit is tuned to inject damping to a particular mode of vibration. This work presents a review on the application of piezoelectric patches to harvest energy from a mechanical structure, in particular a cantilever beam, vibrating by exogenous forces or also as a possible mechanism of energy absorption in certain specific modes of vibration. In fact, an implementation of the RLC circuits is described to attenuate vibrations in the first 4 modes of vibration of the beam and, later, the Frequency Response Function (FRF) of the mechanical structure is obtained. From the FRF, the modal parameters of the structure can be obtained, which are then compared when the structure has the presence of a semi-active type circuit for energy absorption, which is also called as *piezo-shunt*. Some experimental results that validate the good dynamic performance of the application of *piezo-shunts* for semiactive damping injection in a cantilever beam-type structure are presented and discussed.



# Índice general

Dedicatoria . . . . .	I
Agradecimientos . . . . .	III
Resumen . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sensores y Actuadores Piezoeléctricos . . . . .	2
1.2. Control de Vibración Convencional . . . . .	3
1.3. Control de Vibraciones por medio de los Piezo-Shunt . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo General . . . . .	5
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	5
1.5. Organización de la Tesis . . . . .	6
<b>2. Circuitos de amortiguamiento Tipo <i>Shunt</i></b>	<b>7</b>
2.1. Diseño de Circuitos Tipo <i>Shunt</i> . . . . .	7
2.2. Topologías en Circuitos Tipo <i>Shunt</i> . . . . .	7
2.2.1. Circuitos Tipo <i>Shunt</i> Pasivos . . . . .	8
2.2.2. Circuitos Tipo <i>Shunt</i> Lineales . . . . .	8
2.2.3. Circuitos Tipo <i>Shunt</i> No-lineales . . . . .	10
2.2.4. Circuitos Tipo <i>Shunt</i> Activos . . . . .	12
2.3. Implementación de un Circuito Tipo <i>Shunt</i> . . . . .	14
2.3.1. Impedancia Sintética . . . . .	14
2.3.2. Inductores Virtuales . . . . .	14
2.4. Cosechadores de Energía . . . . .	14
2.4.1. Principio de los Cosechadores de Energía . . . . .	14
2.4.2. Ventajas y desventajas de los materiales piezoeléctricos . . . . .	15
2.4.3. Conceptos básicos en el cosechamiento de energía . . . . .	17
2.4.4. Caso de Estudio: Placas piezoeléctricas colocadas a una viga larga en voladizo con masa en el extremo . . . . .	19
2.4.5. Circuitos para cosechamiento de energía . . . . .	22

2.4.6. Estrategias para el mejoramiento y desempeño de los recolectores de energía . . . . .	23
<b>3. Implementación de Circuitos <i>Shunt</i> de Resonancia Adaptable con Circuitos Analógicos</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Ley Adaptable . . . . .	29
3.2.1. Circuito <i>Shunt</i> $R - L$ Adaptable para un solo modo de vibración . . . . .	30
3.3. Circuitos <i>Shunt</i> $R - L$ Adaptables . . . . .	33
3.4. Inductores Virtuales Controlados por Voltaje . . . . .	35
3.4.1. Inductores Virtuales . . . . .	35
3.4.2. Resistores Controlados por Voltaje . . . . .	37
3.4.3. Circuito Inductor Controlado por Voltaje . . . . .	39
3.4.4. Circuito de Adaptación . . . . .	39
<b>4. Modelado del Sistema y colocación de sensores y actuadores</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Modelado del sistema mecánico . . . . .	43
4.2.1. Modelado de la viga de Euler-Bernoulli . . . . .	43
4.2.2. Modelado de parches piezoeléctricos . . . . .	48
4.2.3. Modelado de un circuito <i>shunt</i> . . . . .	51
4.3. Colocación de sensores y actuadores . . . . .	52
4.3.1. Formulación del problema . . . . .	52
4.4. Propiedades aditivas para las normas modales . . . . .	53
4.4.1. Índice basado en la norma $H_2$ . . . . .	53
4.4.2. Índice basado en la norma $H_\infty$ . . . . .	54
4.5. Índices de colocación usando las normas $H_2$ y $H_\infty$ . . . . .	55
4.6. Localización de sensores y actuadores . . . . .	56
<b>5. Resultados Experimentales</b>	<b>61</b>
5.1. Introducción . . . . .	61
5.2. Plataforma Experimental . . . . .	61
5.3. Frecuencias Naturales del sistema (viga en voladizo) con y sin masa en punta	64
5.4. Cosechador de Energía . . . . .	66
5.5. Circuitos tipo <i>Piezo-Shunt</i> . . . . .	72
<b>6. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>Anexos</b>	<b>87</b>
<b>A. Anexo I: Hojas de Datos</b>	<b>87</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los materiales denominados inteligentes pueden amortiguar las vibraciones mecánicas en una estructura de una manera inteligente [1, 2]. Durante mucho tiempo este tipo de materiales han anunciado el amanecer de una nueva era en la construcción de vehículos automotores, aviones y otras estructuras que tienen que cumplir con requisitos más exigentes en rendimiento. En este contexto, el comportamiento dinámico es el principal criterio de diseño para muchos tipos de cargas en estructuras mecánicas. Las vibraciones indeseables de gran amplitud a menudo impiden el funcionamiento eficaz de diversos tipos de sistemas mecánicos, incluyendo casos como antenas, naves espaciales, turbomaquinaria, automóviles e instrumentos de alta sensibilidad. Por tanto, es necesario introducir mecanismos de amortiguamiento estructural a un sistema mecánico para lograr una respuesta más satisfactoria y retrasar la fatiga que posteriormente cause daños a la estructura [3]. En la actualidad hay disponibilidad de muchos tipos de materiales inteligentes y otros se encuentran en distintas fases de desarrollo e implementación tecnológica.

Las aplicaciones se centran en gran medida en las naves espaciales, satélites, aeronaves, industria militar y biomédica. Unas pocas empresas han estado aplicando la tecnología de amortiguamiento inteligente para productos comerciales tales como esquís inteligentes, palos de golf inteligentes, esquís acuáticos electrónicos y raquetas de tenis inteligente, pero el énfasis parece estar más en el valor de comercialización en lugar de sobre los beneficios demostrables [1, 2].

Esta tesis se centra en el uso de absorbedores inteligentes que utilizan los transductores piezoeléctricos. Se desarrolla y demuestra que la conexión de un circuito tipo *shunt* a un transductor piezoeléctrico conduce a un controlador de vibración simple y de bajo costo, que es capaz de inyectar amortiguamiento de manera eficiente a una estructura mecánica para la atenuación de vibración indeseables y sin la necesidad de sensores.

## 1.1. Sensores y Actuadores Piezoeléctricos

En el control de la vibración se utilizan ampliamente los actuadores y sensores piezoeléctricos. La piezoelectricidad (de la palabra griega  $\pi\iota\epsilon\zeta\omega$  (piezo) que significa presionar) se define como un cambio en el desplazamiento eléctrico  $D_z$  a través del cristal piezoeléctrico que resulta de un cambio en la tensión aplicada  $T_z$  sobre el cristal. Este fenómeno fue descubierto originalmente por los hermanos Jacques y Pierre Curie en 1880 y se conoce como el efecto piezoeléctrico directo [4]. Este efecto se utiliza sobre todo para aplicaciones donde se requiere medir movimiento, deformación, fuerza, presión, etc. El efecto piezoeléctrico inverso es el cambio en la deformación  $S_z$  del cristal piezoeléctrico cuando el campo eléctrico aplicado  $E_z$  cambia. Refiriéndonos a la Figura 1.1 a), un transductor piezoeléctrico se puede describir por la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} D_z \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T & d_{33} \\ d_{33} & s^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ T_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

donde  $D_z$ ,  $T_z$ ,  $S_z$ ,  $E_z$  son el desplazamiento eléctrico (carga / área), la deformación de los materiales de ingeniería, el campo eléctrico en el material (voltios / metro) y la tensión del material (fuerza / área). Los parámetros  $\varepsilon^T$ ,  $d_{33}$ ,  $s^E$  corresponden a la constante dieléctrica, la constante piezoeléctrica y la conformidad del material piezoeléctrico. La ecuación 1.1, donde un campo eléctrico a lo largo del eje  $z$  genera una deformación a lo largo del eje  $z$ , se conoce como el efecto 3-3.

Normalmente, los actuadores piezoeléctricos para el control de las vibraciones se utilizan como parche monolítico, siendo actuadores que explotan el efecto 3-1. Esto se muestra en la Fig. 1.1 b). Debido a la tensión aplicada  $U$ , las deformaciones del transductor a lo largo del eje  $z$ . Debido al efecto de Poisson (i.e., el fenómeno de la deformación lateral), el material también se deforma a lo largo del eje  $x$ . La deformación resultante a lo largo del eje  $x$  deforma la estructura mecánica subyacente, donde se une el transductor. Recientemente se han propuesto materiales compuestos de fibra activa (AFCS, por sus siglas en inglés) para el amortiguamiento inteligente [5]. Como se ilustra en la Fig. 1.1 c), las fibras piezoeléctricas se alinean en la misma dirección y se embeben con una resina epóxica. Están conectados eléctricamente a electrodos inter-digitados que proporcionan el campo eléctrico a lo largo de la orientación longitudinalmente de las fibras de PZT. Por lo tanto la deformación de las fibras a lo largo del eje  $x$ , cuando se aplica una tensión  $U$ . Las principales ventajas de las fibras piezoeléctricas son su alta conformabilidad e integrabilidad en las estructuras de curvas complejas. Además, logran una mayor densidad de energía de accionamiento mediante la explotación del efecto 3-3 a lo largo de las fibras, mientras que los actuadores piezoeléctricos tipo pila y monolíticos se basan en el efecto menos eficaz a través del efecto 3-1 por medio del efecto de Poisson.

Los parámetros del material de los transductores piezoeléctrico son altamente variables con la temperatura y otros factores ambientales [6, 7]. Este factor es muy importante para el diseño de materiales para amortiguamiento inteligente, ya que podría hacer que

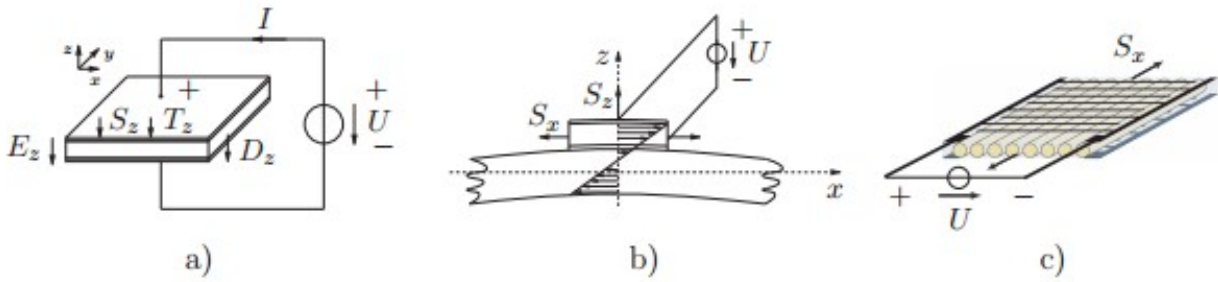


Figura 1.1: a) Actuador piezoeléctrico tipo pila. b) Transductor piezoeléctrico en una estructura mecánica, donde por la tensión aplicada  $U$ , el transductor deforma la estructura mecánica. c) Estructura de material compuesto con fibras y piezoeléctrico integrados.

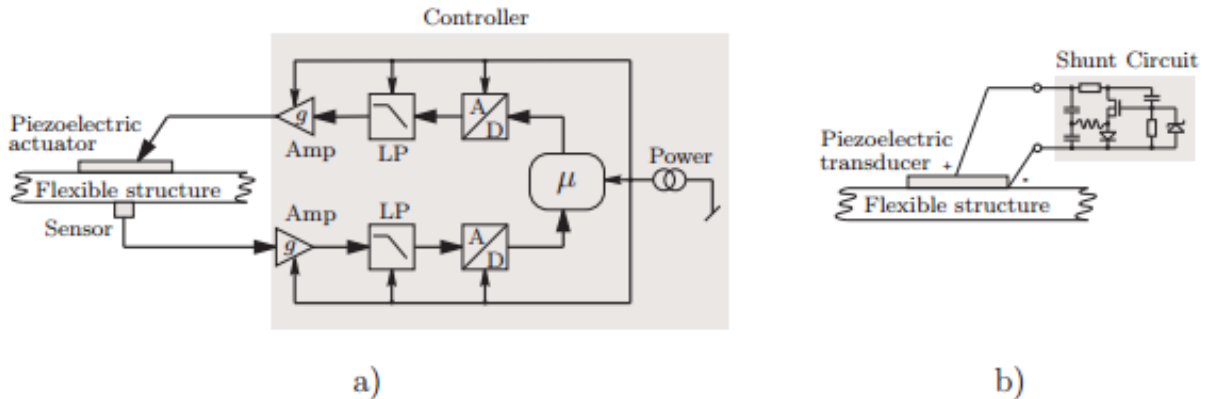


Figura 1.2: a) Control de vibración convencional, y b) Técnica de derivación piezoeléctrico (este último enfoque se describe en la presente tesis).

el rendimiento del amortiguamiento sea muy sensible e incluso conducir a la inestabilidad del sistema controlado.

## 1.2. Control de Vibración Convencional

Durante las dos últimas décadas ha habido un creciente interés en la investigación de materiales para amortiguamiento inteligente y sus aplicaciones, debido a que el amortiguamiento con materiales pasivos (por ejemplo, silenciadores, amortiguadores en placas, etc.) no es muy eficaz en las frecuencias bajas y requieren de más espacio y peso. La gran mayoría de la investigación en los materiales para amortiguamiento inteligentes se ha concentrado en el control de las estructuras de material compuesto, incorporando o uniendo

transductores piezoeléctricos. Así, se han implementado controladores para amortiguar las vibraciones, principalmente en una disposición puramente activa, es decir, se aplica un campo eléctrico a los materiales piezoeléctricos basados en una acción de control que utiliza la retroalimentación de un sensor [8–10]. Esto se muestra en la Fig. 1.2 a), donde el controlador activo produce una señal de accionamiento basada en una señal de un sensor por medio de un acelerómetro, velocidad o sensor de deformación. Normalmente, los controladores activos se implementan en microprocesadores que están conectados a los sensores y actuadores por amplificadores especiales como se ilustra en Fig. 1.2 a). Estos enfoques tienen varias desventajas. En primer lugar, cada sensor y actuador necesitan de amplificadores voluminosos (AMPS) y la puesta en práctica con un microprocesador digital implica el uso de **anti-aliasing** y filtros que reconstruyen (LP) y convertidores A/D y D/A. Esto dificulta la integración del controlador en la estructura, que exactamente sería necesario para materiales de amortiguamiento inteligente. Además, la gran sobrecarga de instrumentación eleva los costos de energía y los suministros de energía adicionales para los amplificadores y filtros, que necesitan tanto los convertidores como el microprocesador. Esto hace que el sistema sea más sensible a fallas y el cableado de la fuente de alimentación también se hace difícil.

Para dar cuenta de los inconvenientes de las técnicas común de control de vibración descritos en la sección anterior, se requiere un nuevo enfoque de control de los materiales para amortiguamiento inteligente. La demanda de nuevos materiales de amortiguamiento inteligente se puede resumir como se propone en [11]:

- No se requiere fuente de alimentación externa para su funcionamiento.
- El dispositivo no necesita ser sintonizado a una frecuencia específica.
- El funcionamiento del equipo no se ve afectada por cambios en la frecuencia modal.
- Dispositivo suprime la vibración durante un número de modos, es decir, es multi-modal.
- El peso y tamaño del dispositivo deben reducirse al mínimo.
- El dispositivo debe ser una unidad autónoma.

### 1.3. Control de Vibraciones por medio de los Piezo-Shunt

El gran sobrecarga de instrumentación de control de vibración convencional en la Fig. 1.2 a) se puede reducir de manera significativa por un nuevo método que consiste en unir un controlador eléctrico de derivación entre las terminales de un transductor piezoeléctrico con el fin de minimizar las vibraciones estructurales, como se muestra en la Fig. 1.2 b). Este enfoque se refiere al amortiguamiento *piezo-shunt* [12–15] y es conocido por ser simple, de bajo costo, ligero y fácil de implementar el método para el amortiguamiento de vibración. Así, parece que ésta pueda cumplir con las demandas de los materiales de amortiguamiento



inteligente descritos en la sección anterior.

La idea del amortiguamiento tipo *piezo-shunt* es que el circuito pasivo tipo *shunt* disipe la energía eléctrica que se transforma por el material piezoeléctrico. Por lo tanto, el *piezo-shunt* retira la energía de vibración del sistema mecánico y amortigua las vibraciones. Adicionalmente, el circuito tipo *shunt* puede almacenar la energía eléctrica y suministrarla de nuevo al sistema mecánico en el momento adecuado para contrarrestar las vibraciones. Veremos que el circuito tipo *shunt* permite parametrizar un controlador retroalimentado que controla las vibraciones mecánicas. A medida que el transductor piezoeléctrico es a la vez el actuador y el sensor, el sistema de control ideal se formula como un problema de control colocado.

El método de amortiguamiento tipo *piezo-shunt* tiene varias ventajas en comparación con el control de vibración convencional. En particular, no requiere ningún sensor para la retroalimentación, la implementación es muy fácil, ya que se necesitan sólo unos pocos componentes electrónicos, y en algunas circunstancias, puede ser que no requiera ningún apoyo de la electrónica o la fuente de alimentación. Por otra parte, ofrece los beneficios de la estabilidad, robustez y rendimiento sin necesidad de complejos procesadores digitales de señales, y en muchos casos no requiere de modelos dinámicos complejos y sus parámetros para los propósitos de síntesis y diseño.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo General

Modelar, analizar, diseñar y evaluar experimentalmente la aplicación de cosechadores de energía basados en parches piezoeléctricos para la absorción de vibraciones en estructuras y sistemas mecánicos continuos, usando el método de amortiguamiento tipo *piezo-shunt*, análisis modal, parches piezoeléctricos y con aplicación a una viga delgada en voladizo tipo Euler-Bernoulli.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

Estudiar los sistemas mecánicos continuos o distribuidos, su modelado y los posibles esquemas de control pasivo usados para la atenuación de vibraciones en este tipo de sistemas.

Instrumentar una plataforma experimental de pruebas, constituida por una viga en cantilever tipo Euler-Bernoulli, en la que la fuerza de excitación sea suministrada por un generador de fuerzas armónicas y el control pasivo se implementa a través de parches piezoeléctricos con su respectivo circuito tipo *shunt*.

Estudiar los posibles esquemas de amortiguamiento tipo *piezo-shunt*, así como los cosechadores de energía como fuente de energía verde.

Implementar y validar esquemas de control pasivo en la plataforma experimental.  
Construir un sistema autónomo para la inyección de amortiguamiento en la estructura que se utiliza como plataforma experimental.

## 1.5. Organización de la Tesis

El trabajo de tesis se divide en seis capítulos. El Capítulo 1 presenta una breve introducción y el planteamiento del problema estudiado. En el Capítulo 2 se presentan algunas bases teóricas importantes para la aplicación de los cosechadores de energía en la absorción de vibraciones en estructuras, donde se ven diferentes topologías para la inyección de amortiguamiento tipo *shunt*, así como la introducción a grandes rasgos de un *piezo-shunt* para la inyección de amortiguamiento en la estructura. En el Capítulo 3 se hace la implementación del circuito tipo *piezo-shunt* en combinación con el control utilizado para la re-sintonización del circuito, debido a variaciones en la rigidez de la estructura o de los parches piezoeléctricos. El Capítulo 4 se enfoca en el modelado del sistema y además presenta resultados sobre el problema de colocación de actuadores y sensores, donde se valida teórica y experimentalmente el modelo propuesto. El Capítulo 5 presenta una descripción general de la plataforma experimental y se muestran algunos resultados experimentales obtenidos con la aplicación del circuito tipo *piezo-shunt* en la estructura. En el Capítulo 6 se discuten los resultados finales y se presentan algunas conclusiones generales del trabajo realizado, para posteriormente describir algunas recomendaciones para trabajo futuro.

## Capítulo 2

# Circuitos de amortiguamiento Tipo *Shunt*

En este capítulo se abordan los fundamentos básicos acerca del conocimiento del amortiguamiento tipo *shunt*. Se definirá el problema asociado al diseño de los circuitos para el amortiguamiento de vibración. Posteriormente se dará una breve reseña de las diferentes topologías para el amortiguamiento tipo *shunt* que se han propuesto anteriormente, junto a una breve descripción de sus ventajas y desventajas. Por último, se mencionará el concepto de cosechador de energía y una breve explicación del diseño del circuito para el almacenamiento de la misma.

### 2.1. Diseño de Circuitos Tipo *Shunt*

La clave en la técnica de amortiguamiento tipo *shunt* es poder encontrar y diseñar un circuito tipo *shunt* simple que amortigüe eficientemente la estructura a analizar. La demanda en el diseño de estos circuitos para el amortiguamiento inteligente puede resumirse en: el circuito tipo *shunt* debe minimizar las vibraciones en la estructura, es decir este debe amortiguar eficientemente la vibración mecánica.

Debe ser robusto en contra de variaciones en los parámetros del sistema, y su estabilidad deberá ser aun garantizada. Además, el circuito tipo *shunt* no requerirá de energía alterna para su operación y si este no es el caso deberá de consumir la menor energía necesaria, así como su peso y costo para su implementación debe ser el mínimo. Porque éste tendrá que integrarse a la estructura, entonces su tamaño debe ser el menor posible.

### 2.2. Topologías en Circuitos Tipo *Shunt*

Se han estudiado muchas topologías diferentes. Estas mismas se han dividido en circuitos pasivos y activos.

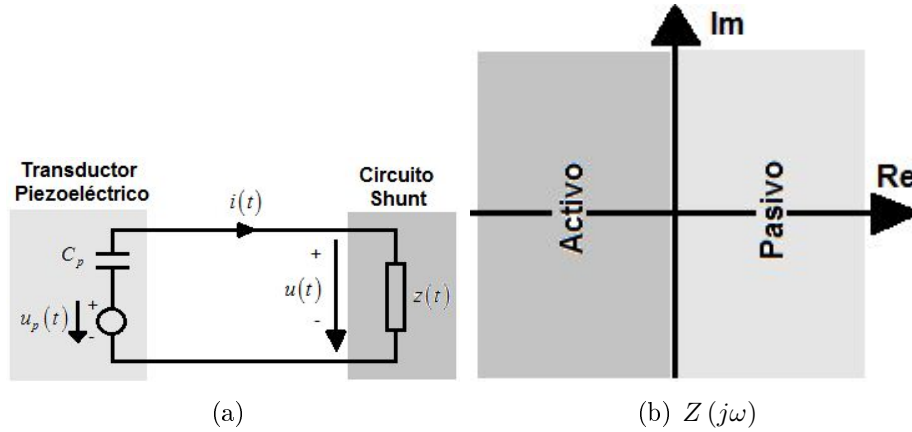


Figura 2.1: Definición de circuito *shunt* pasivo y activo: a)  $z(t)$ , conectado en *shunt* al transductor piezoeléctrico. b) Región de impedancia pasiva y activa  $Z(j\omega)$  en el dominio de la frecuencia.

### 2.2.1. Circuitos Tipo *Shunt* Pasivos

Los circuitos tipo *shunt* están caracterizados por el hecho de que no necesitan energía para el sistema, es decir, que

$$\int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \geq 0 \quad \forall T, \quad (2.1)$$

donde las direcciones de  $u(t)$  e  $i(t)$  están definidas en la Fig. 2.2 a). Para sistemas lineales, la pasividad de la impedancia  $Z(j\omega)$  está definida en el dominio de la frecuencia por

$$\Re(U(j\omega) I^*(j\omega)) \geq 0 \quad \text{o} \quad \Re(Z(j\omega)) \geq 0 \quad \forall \omega, \quad (2.2)$$

donde  $I^*(j\omega)$  es el complejo conjugado de  $I(j\omega)$ . Las regiones pasiva y activa de la impedancia se muestran en la Fig. 2.1b). Si el circuito es pasivo, la estabilidad de todo el sistema está garantizado, porque no se requiere añadir energía al sistema. Los circuitos tipo *shunt* pueden también clasificarse dentro de los sistemas lineales y no lineales.

### 2.2.2. Circuitos Tipo *Shunt* Lineales

Los circuitos tipo *shunt* lineales son todos aquellos para los cuales se verifica el llamado principio de superposición. Así, suponiendo condiciones iniciales cero, el circuito tipo *shunt*

$f_z(i, t)$ , relacionando el voltaje y corriente con  $u(t) = f_z(i, t)$ , sería lineal si

$$\begin{aligned} u_1(t) &= f_z(i_1, t) \\ u_2(t) &= f_z(i_2, t) \\ i(t) &= \alpha_1 i_1(t) + \alpha_2 i_2(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

implican que

$$\begin{aligned} u(t) &= f_z(i, t) = f_z(\alpha_1 i_1(t) + \alpha_2 i_2(t)) \\ &= \alpha_1 f_z(i_1, t) + \alpha_2 f_z(i_2, t) \\ &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Si el circuito tipo *shunt* es lineal, entonces uno puede escribir la relación voltaje-corriente en el dominio de la frecuencia junto con la impedancia  $Z(j\omega) = U(j\omega)/I(j\omega)$  o la admitancia  $Y(j\omega) = I(j\omega)/U(j\omega)$ .

Entre los circuitos tipo *shunt* lineales pueden mencionarse los siguientes:

- Circuitos tipo *shunt* resistivos.

Hagood y von Flotow [13] sugirieron un circuito tipo *shunt*, es decir, la conexión de un resistor al transductor piezoeléctrico. Este circuito *shunt* es muy fácil de implementar, de bajo costo y para su operación no requiere de ninguna fuente de energía. Sin embargo, su amortiguamiento es muy pobre y en algunas aplicaciones ni siquiera es medible.

- Circuitos tipo *shunt* resonantes.

Más eficiente están los circuitos *shunt* resonantes [12, 13, 16–18], como los circuitos resonantes mono-modo  $R-L$  o los multi-modo. Estos tipos de circuitos generan una resonancia eléctrica con la capacitancia piezoeléctrica. Si esta resonancia eléctrica es sintonizada a una de las frecuencias modales de la estructura y así el efecto de amortiguamiento alcanzado en dicho modo es mejor.

Para implementar los circuitos resonantes de mono-modo, se han propuesto 2 diferentes topologías de resistor-inductor ( $R-L$ ) que son el paralelo [19] o el serie [13]. Mientras los circuitos mono-modo solo pueden amortiguar un modo, los multimodo son capaces de amortiguar muchos modos con un solo parche piezoeléctrico. En [20] se propusieron circuitos bloqueante como [21] sugirió circuitos de corriente fluyente, pero para más modos, este circuito se vuelve demasiado complejo.

Generalmente, todos los circuitos resonantes sufren del inconveniente de que su rendimiento de Fig. es muy sensible a las variaciones en los parámetros del sistema. En este caso, los circuitos *shunt* resonantes se desintonizan y por lo tanto no amortiguan más. Por lo tanto, se propone un circuito auto-sintonizable [22, 23]. Sin embargo los

algoritmos sugeridos para la sintonización no han entregado resultados satisfactorios, porque son muy lentos, difícil de implementar y no existe una convergencia muy buena. Además, su implementación representa ser muy voluminosa.

Los circuitos *shunt* adaptables se encuentran dentro de la categoría de los semi-activos, porque estos activamente se autosintonizan. De acuerdo a la definición de pasividad de la ecuación (2.1), los circuitos adaptables todavía son pasivos si los valores del inductor y la resistencia se mantienen positivos. Sin embargo, estos circuitos *shunt* auto sintonizables no son lineales.

Por los grandes valores de las inductancias requeridos para los circuitos *shunt* resonantes, estos deben ser sintetizados con inductores virtuales usando amplificadores operacionales. Por lo tanto, los circuitos resonantes normalmente requieren de una pequeña energía para su operación. Sin embargo, estos todavía son pasivos de acuerdo a la definición de pasividad (2.1), porque la impedancia virtual de los inductores sigue siendo una  $Z(s) = sL$ .

- Redes eléctricas distribuidas.

Circuitos eléctricos *shunt* distribuidos fueron propuestos por [24,25]. En esta técnica, muchos transductores piezoeléctricos están interconectados por medio de circuitos *shunt*.

Sin embargo, su solución resulta en redes muy complejas con giradores y transformadores que son muy difíciles de construir y requiere filtros activos. Sus últimos resultados con redes sencillas distribuidas [26] son comparables con el rendimiento de Fig. de un *shunt* resonante para un transductor piezoeléctrico.

### 2.2.3. Circuitos Tipo *Shunt* No-lineales

Estos circuitos están caracterizados por el hecho de que el principio de superposición establecido en la ecuación (2.3) no se mantiene.

- Circuitos *shunt* con interruptores.

Estos circuitos implementan como dice su nombre interruptores para cambiar la dinámica del circuito de tal manera que el amortiguamiento pueda ser mejorado. Los interruptores en este tipo de circuitos pueden ser prometedores para una implementación que no requiera energía para su operación, estos interruptores pueden ser realizados con MOSFETs que no quieren casi energía para su operación. La pequeña cantidad de energía requerida para hacer la interrupción puede ser suministrada adicionando un parche piezoeléctrico. Sin embargo, todos los interruptores *shunt* propuestos en la literatura implementan complejos procesadores digitales y acondicionamiento de energía que hace que requiera más energía para su operación.

En [27] se aplicó una conmutación *shunts R*, donde una sola resistencia también se conmuta, o es desconectado del transductor piezoeléctrico que resulta en cambios en la rigidez del parche. Con una ley de conmutación heurística, fueron capaces de amortiguar las vibraciones de una estructura tipo viga. Más tarde, los *shunt* de conmutación R-L se han propuesto por [28, 29]. Estos circuitos *shunt* de conmutación logran resultados más prometedores, pero la ley sigue siendo poco clara. [30] mejoró las derivaciones de conmutación por la adición de un condensador negativo. Sin embargo, sólo se han realizado simulaciones y el problema de la ley de conmutación óptima no ha sido resuelto. Además, condensadores negativos son muy difíciles de implementar, porque tienden a la inestabilidad y requieren de una implementación activa, exactamente lo que se pretende evitar con la conmutación en derivaciones. En [27] se aplicó una conmutación *shunt R*, donde una sola resistencia también se conmuta, o es desconectado del transductor piezoeléctrico que resulta en cambios en la rigidez del parche. Con una ley de conmutación heurística, fueron capaces de amortiguar las vibraciones de una estructura tipo viga. Más tarde, los *shunt* de conmutación R-L se han propuesto por [28, 29]. Estos circuitos *shunt* de conmutación logran resultados más prometedores, pero la ley sigue siendo poco clara. [30] mejoró las derivaciones de conmutación por la adición de un condensador negativo. Sin embargo, sólo se han realizado simulaciones y el problema de la ley de conmutación óptima no ha sido resuelto. Además, condensadores negativos son muy difíciles de implementar, porque tienden a la inestabilidad y requieren una implementación activa, exactamente lo que se pretende evitar con la conmutación derivaciones.

- Cosechamiento de energía.

El cosechamiento de energía de transductores piezoeléctricos también puede utilizarse para amortiguar vibración [31] o para suministrar energía a otros circuitos electrónicos. [32] propone un circuito rectificador AC-DC con un interruptor de modo de convertidor DC-DC para controlar el flujo de potencia máxima, que luego se utiliza para cargar una batería. Se propuso un convertidor AC-DC de medio puente en [33] para sintetizar una impedancia, es decir, para amortiguar sistema, y para el poder cosechar energía. Sin embargo, debido a la naturaleza altamente reactiva de los circuitos piezoeléctricos de derivación de amortiguamiento, dicha operación se ha evitado hasta la fecha. El poder del cosechamiento se utiliza para suministrar energía a sistemas de computación [34]. Sin embargo, los circuitos de recolección de energía bien desarrollados requieren casi tanta energía como cosechan, especialmente en los casos en que se encuentran en baja vibración.

- Circuitos *shunt* capacitivos de conmutación.

Redes de capacitores en los cuales se puede conmutar a transductores piezoeléct-

tricos fueron sugeridos por [35,36]. Esta técnica cambia la rigidez del transductor y por lo tanto las frecuencias naturales y la razón modal de amortiguamiento de un actuador piezoeléctrico está alterado. En este método, el circuito *shunt* es solo usado para cambiar la rigidez del transductor piezoeléctrico y así cambiar la frecuencia natural del amortiguador mecánico piezoeléctrico. Esto significa que a diferencia de los *shunt* resonantes, no es creada una resonancia eléctrica.

- Circuitos *shunt* de resistencia variable.

En [37] se sugiere una resistencia *shunt* variable. Estos tratan de encontrar el historial de tiempo ideal de la resistencia periódica asumiendo que las variaciones lineales de la resistencia con tiempo entre valores en los puntos finales de cada intervalo de vibración. La resistencia variable fue determinada maximizando el factor de pérdida del sistema *shunt* compuesto. Esto se hizo mediante la división de cada medio ciclo en un número de intervalos iguales y utilizando una rutina de optimización simple. Sin embargo, no se presentaron resultados experimentales y no está claro si esta derivación es capaz de amortiguar significativamente la estructura ya que las derivaciones de resistencia o resistencias conmutadas tienden a no mostrar resultados prometedores. Además, la implementación de la variable resistencia con el controlador no es sencillo.

#### 2.2.4. Circuitos Tipo *Shunt* Activos

Los circuitos *shunt* activos son aquellos que añaden energía al sistema, es decir, estos no son pasivos. De acuerdo a la Fig. 2.2 a), un circuito *shunt* activo lineal debe ser tal que

$$\exists \omega : \Re(U(j\omega)I^*(j\omega)) < 0 \quad \text{o} \quad \exists \omega : \Re(Z(j\omega)) < 0 \quad (2.5)$$

Si un circuito *shunt* es activo, la estabilidad no está garantizada automáticamente. Además, para operar el circuito *shunt* activo se requiere adicionar energía.

##### **Circuitos *shunts* lineales**

- Capacitores negativos, Como la resistencia del circuito *shunt* no puede disipar mucha energía por la energía reactiva de los componentes del capacitor piezoeléctrico, un capacitor negativo *shunt* fue propuesto por [20,38–40]. El capacitor negativo elimina la capacitancia piezoeléctrica tal que el resistor resultante pueda óptimamente disipar la energía. Esto significa que el factor de energía es corregida por el capacitor negativo en el circuito. En experimentos, fue demostrado que este circuito *shunt* es altamente sensible a variaciones dentro de la capacitancia del piezoeléctrico. Si el valor absoluto del capacitor negativo es más grande que la capacitancia del piezoeléctrico, después el sistema se vuelve inestable. Además, la implementación del capacitor negativo requiere componentes activos para el circuito.



- Controlador *Shunt* activo vía síntesis de control orientado.

Generalmente, cualquier circuito *shunt* puede considerarse como un controlador que regula la corriente como función de voltaje o viceversa. Esto significa que el circuito *shunt* puede ser diseñado usando una técnica de control estándar como el LQG, o diseñada por [41]. Sin embargo, resultó que un modelo muy bien identificado del sistema es necesario y el diseño de control no es sencillo debido a la impedancia altamente reactiva del transductor piezoeléctrico. Además, los circuitos *shunt* resultantes son activos y es muy difícil implementarlos con circuitos analógicos. Por lo tanto, se han implementado con impedancias sintéticas. Sin embargo, Fleming y Moheimi [41] implementa una impedancia activa con un amortiguamiento considerable que es robusto frente a pequeñas variaciones en la estructura mecánica. Podría ser muestra que el controlador resultante es similar a un *shunt* resonante con adición de una capacitancia negativa.

- Técnica de auto-detección.

La auto-detección o la técnica de accionamiento actuador-sensorial estima la deformación del transductor piezoeléctrico restando la caída de tensión de la capacitancia del piezoeléctrico de la tensión aplicada a los terminales del transductor [42–44]. Esta información de la deformación es retroalimentada a través de un controlador a las terminales de voltaje del transductor piezoeléctrico. La técnica de auto-detección es similar a los *shunt* activos, pero tienen el inconveniente de que la estimación de la deformación es altamente sensible a la capacitancia piezoeléctrica. Esta incertidumbre puede disminuir significativamente el rendimiento.

### Circuitos *Shunt* No Lineales

- Circuitos *shunt* activos de conmutación.

Petit et al. [45] propuso un circuito *shunt* de conmutación (SSDV), donde un interruptor conecta dos diferentes fuentes de voltaje a través de una red resonante al transductor piezoeléctrico. Esta técnica es similar al Inductor de Amortiguamiento por Interrupción Síncrono (SSDI), pero en el caso de un débil coeficiente de acoplamiento, esta nueva configuración puede mejorar el rendimiento del amortiguamiento. Sin embargo, requiere de una fuente de energía adicional.

## 2.3. Implementación de un Circuito Tipo *Shunt*

### 2.3.1. Impedancia Sintética

Un tiempo significativo es frecuentemente requerido para implementar un circuito *shunt* electrónico complejo para experimentos y es difícil cambiar sus parámetros una vez que está construido. Por lo tanto [46, 47] por eso se sugiere utilizar una impedancia sintética. Esta impedancia puede sintetizar una red eléctrica arbitraria que es definida por un procesador digital (DSP) como se muestra en la Fig. 2.3 (derecha). Alternativamente al DSP, plataformas de tiempo real pueden ser usadas para fácilmente cambiar la estructura de y ajustar sus parámetros. Esto permite probar diferentes técnicas *shunt* en corto tiempo y con poco esfuerzo. Esto ahorra mucho tiempo en el desarrollo de nuevos circuitos. Sin embargo, para aplicaciones en estructuras de amortiguamiento inteligentes, esto solo puede ser útil para el desarrollo y pruebas de redes *shunt*. Posteriormente, los circuitos *shunt* tendrán que ser implementados con circuitos analógicos porque en muchos casos, la impedancia sintética podría ser muy cara y muy grande para productos comerciales y requiere de cierta energía para su operación.

### 2.3.2. Inductores Virtuales

En las mayorías de los materiales de amortiguamiento, la capacitancia piezoeléctrica es muy pequeña y la frecuencia de la vibración para ser amortiguada es baja. Por lo tanto, la inductancia de los *shunt* resonantes necesita ser demasiado grande (de varios Henrios). En la mayoría de los casos, estos valores no pueden ser realizados con un inductor de bobina, por lo tanto los inductores virtuales fueron introducidos. Para la implementación de los inductores virtuales se usan, giradores de Antoniou [48] o los inductores virtuales de Riordan [49] Fig. 2.2. Sin embargo, estas redes no pueden trabajar sin energía adicional debido a los amplificadores operacionales que requieren que se les suministre energía de algunos miliwatts. Esta energía que se requiere puede ser suministrada, adicionando más parches piezoeléctricos en la modalidad de cosechadores de energía por medio de la vibración mecánica.

## 2.4. Cosechadores de Energía

### 2.4.1. Principio de los Cosechadores de Energía

Los cosechadores de energía convierten la energía del ambiente en energía eléctrica útil. Existen muchos mecanismos posibles de conversión, pero en nuestro caso estudiaremos solamente uno que es el absorbedor de vibraciones. Es un mecanismo convertidor, cosecha energía desde las vibraciones o movimientos. Para lograr tal propósito, mencionaremos 3 mecanismos de conversión que existen: El capacitivo, el inductivo y el piezoeléctrico

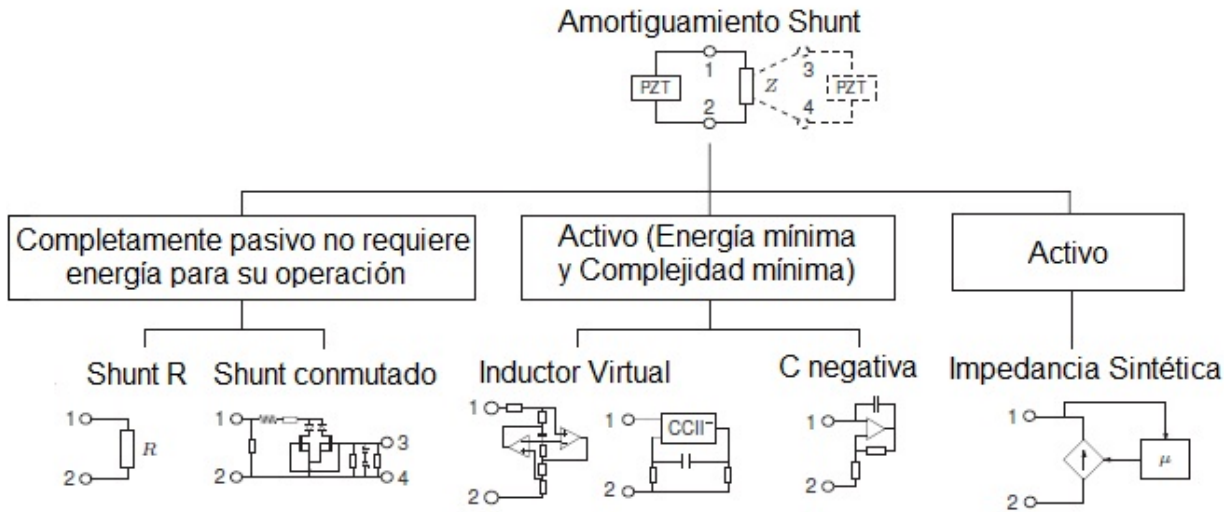


Figura 2.2: Diferentes implementaciones de circuitos tipo *shunt*.

principalmente. El capacitivo principalmente explota el movimiento relativo de 2 platos de capacitores con respecto a la otra. Este movimiento causa almacenamiento de cargas en el plato del capacitor para ser movidos a través de una carga externa, produciendo energía eléctrica. La Fig. 2.3 muestra un ejemplo de un micro generador de capacitancia envasado en un soporte de chip plomo cerámica (CLCC). Para el principio convertidor de inductancia, un imán permanente mueve relativamente a la bobina, induciendo un voltaje a través de ésta. Por último, la deformación producida en una capa del material piezoeléctrico produce una carga de separación en el material que se convierte en un voltaje entre 2 superficies de la capa. En la Fig. 2.4 se representa una imagen en microscopio de un escaneo de electrones (SEM) de una curva triangular piezoeléctrica en voladizo.

### 2.4.2. Ventajas y desventajas de los materiales piezoeléctricos

El principio de conversión piezoeléctrico ofrece una aproximación simple, porque no es necesario tener una geometría compleja ni muchos componentes extras y las vibraciones son directamente convertidas a electricidad a través de un material piezoeléctrico con electrodos. Los materiales piezoeléctricos pueden simplemente depositarse usando una lámina delgada con poco espesor y, por lo tanto, es muy adecuado para procesos como los en los circuitos micro electromecánicos (MEMS). Los cosechadores piezoeléctricos son capaces de producir relativamente altas salidas de voltaje pero solo a corrientes bajas. Debido al hecho de que los materiales piezoeléctricos son directamente deformables, las propiedades piezoeléctricas limitan toda la actuación y tiempo de vida. El titanato zirconato de plomo es un material de uso común (PZT), que muy frágil y, por lo tanto, tiende a agrietarse si está sobre esforzado. De acuerdo a Roundy et al. [40], de los tres mecanismos de conver-

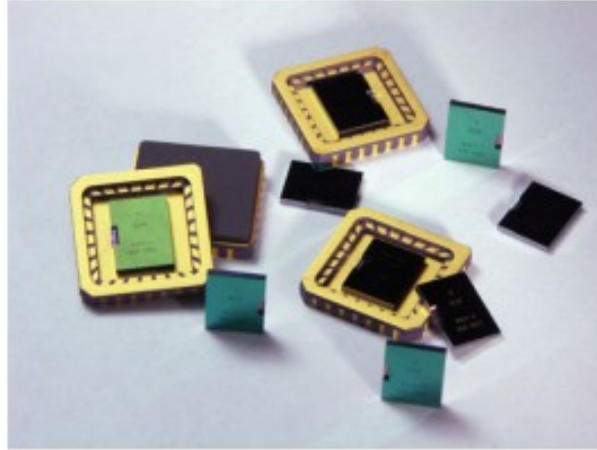


Figura 2.3: Micro generador de capacitancia envasado en un soporte de chip plomo cerámica (CLCC).

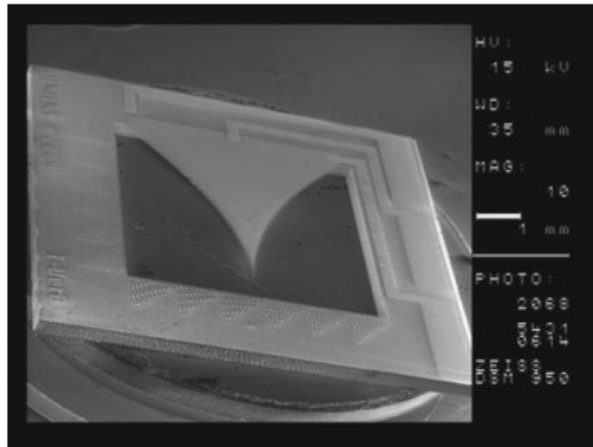


Figura 2.4: Escaneo de electrones (SEM) de una curva triangular piezoeléctrica en voladizo.

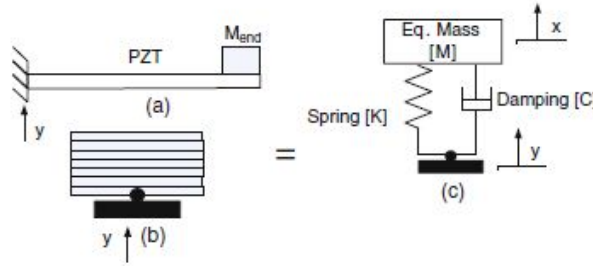


Figura 2.5: (a) Viga en voladizo con masa en punta, (b) PZT multicapa sometida a vibración transversal excitada en la base, y (c) sistema de masa de resorte equivalente de un cuerpo rígido vibrante.

sión cinemática, los generadores piezoeléctricos ofrecen la más alta densidad máxima de almacenamiento de energía práctica.

### 2.4.3. Conceptos básicos en el cosechamiento de energía

La vibración de un cuerpo rígido puede ser causada por varios factores tales como masa desequilibrada en un sistema, desgarramiento y desgaste de materiales y puede ocurrir en casi todos los sistemas dinámicos. El comportamiento característico es único para cada sistema y puede ser descrito simplemente por dos parámetros: amortiguamiento constante y frecuencia natural. Comúnmente, se utiliza un sistema de masa-resorte con un solo grado de libertad para estudiar las características dinámicas de un cuerpo vibrante asociado con la recolección de energía [50]. El único grado de libertad ayuda a estudiar unidireccional la respuesta del sistema.

La Fig. 2.5 muestra un diagrama de una viga en voladizo con placas piezoeléctricas unidas sobre un sustrato y una masa de prueba en el extremo; Placas piezoeléctricas multicapa y masa equivalente de resorte con excitación externa. La estructura en voladizo con masa de punta es la configuración más utilizada para el dispositivo de recolección de energía piezoeléctrica. La fuente de vibración se muestra con una flecha en la base del punto de contacto. La rigidez de la estructura depende de la condición de carga, el material y el área de la sección transversal perpendicular a la dirección de la vibración. La ecuación gobernante de movimiento para el sistema mostrado en la Fig. 2.5 (c) puede obtenerse a partir de la ecuación del balance energético o del principio de D’Alembert. Esta configuración se aplica tanto a los mecanismos de recolección de energía mostrados en las Figs. 2.5 a) y b). La ecuación gobernante del movimiento de un sistema masa-resorte puede describirse como:

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = -M\ddot{y} \quad (2.6)$$

donde  $z = x - y$  es el desplazamiento neto de la masa. La ecuación (2.6) puede ser también escrita en términos del amortiguamiento constante y la frecuencia natural. La

relación de amortiguamiento  $\zeta$ , es un número adimensional definido como la relación del amortiguamiento del sistema y el amortiguamiento crítico como:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mK}} \quad (2.7)$$

La frecuencia natural de un sistema masa-resorte se define como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.8)$$

donde se debe calcular inicialmente la rigidez  $K$  para cada condición de carga. Por ejemplo, en el caso de una viga en voladizo, la rigidez  $K$  viene dada por  $K = 3EI/L^3$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $I$  es el momento de inercia y  $L$  es la longitud de la viga. El momento de inercia para una sección transversal rectangular puede ser obtenida por la expresión,  $I = (1/12)bh^3$ , donde  $b$  y  $h$  son el ancho y el espesor de la viga en dirección transversal, respectivamente. Para la otra área transversal y rigidez, las fórmulas están disponibles en el manual de ingeniería mecánica estándar [51]. La potencia de salida del sistema piezoeléctrico será mayor si el sistema está funcionando a una frecuencia natural determinada por la selección del material y dimensiones. Los términos "frecuencia natural" "frecuencia de resonancia" se utilizan alternativamente en la literatura, donde la frecuencia natural del sistema piezoeléctrico no debe confundirse con la frecuencia natural del sistema mecánico.

La relación de salida  $z(t)$  y la entrada  $y(t)$  puede ser obtenida aplicando la transformada de Laplace con condición inicial cero sobre la ecuación (2.6) como:

$$\left| \frac{Z(s)}{Y(s)} \right| = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.9)$$

La respuesta en el dominio del tiempo puede ser obtenida si aplicamos la transformada inversa de Laplace en la ecuación (2.8) y considerando que la excitación externa en la base es sinusoidal, dada por:  $y = Y \sin(\omega t)$ :

$$z(t) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} Y \sin(\omega t - \phi) \quad (2.10)$$

El ángulo de fase entre la salida y la entrada puede ser expresada como  $\phi = \arctan\left(\frac{C\omega}{K - \omega^2 M}\right)$ . La potencia mecánica aproximada de una vibración del transductor piezoeléctrico bajo la condición mencionada anteriormente puede obtenerse a partir del producto de la velocidad y de la fuerza sobre la masa como:

$$P(t) = \frac{m\zeta Y^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.11)$$


---

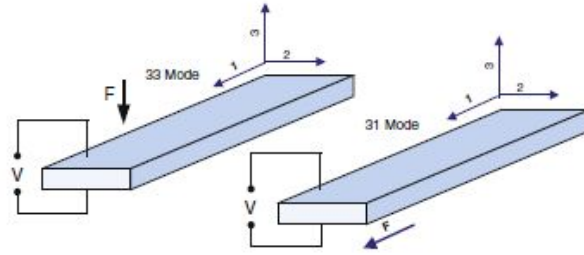


Figura 2.6: Modos de operación de un transductor piezoeléctrico.

La potencia máxima puede ser obtenida mediante la fijación de la frecuencia de operación como la frecuencia natural en la ecuación (2.10):

$$P_{\text{máx}} = \frac{mY^2\omega_n^3}{4\zeta} \quad (2.12)$$

Usando la ecuación (2.12) se puede ver que la potencia se puede maximizar disminuyendo el amortiguamiento, aumentando la frecuencia natural, la masa y la amplitud de la excitación. Hay dos modos comunes utilizados para el cosechamiento de energía piezoeléctrica: el modo 33 (actuadores de pila) y el modo 31 (bimorfos). En el modo 33 la dirección de la tensión aplicada (fuerza) y el voltaje generado son las mismas, mientras que en el modo 31 la tensión se aplica en la dirección axial, pero el voltaje se obtiene a partir de la dirección perpendicular. Como se muestra en la Fig. 2.6. Para una viga en voladizo con longitud larga, el modelo de parámetros agrupados puede no proporcionar una estimación razonable de la salida. Contrariamente al modelo de un solo grado de libertad (sistema de masa-resorte acoplado), el sistema continuo tiene un número infinito de frecuencias naturales y es una extensión lógica de sistemas de masa discretos donde infinitos números de masas están conectados entre sí, teniendo cada uno su propio grado de libertad.

#### 2.4.4. Caso de Estudio: Placas piezoeléctricas colocadas a una viga larga en voladizo con masa en el extremo

A veces las placas piezoeléctricas de pequeño tamaño están unidas a una viga larga en voladizo y es necesario encontrar la distribución de esfuerzos a lo largo de la longitud de la viga como una función de la frecuencia de excitación. Enseguida se describe un sencillo procedimiento, paso a paso, como guía inicial para encontrar la distribución de esfuerzos a lo largo de la viga continua que se puede utilizar para localizar la posición de las placas piezoeléctricas.

1. Mediante la ecuación gobernante del movimiento en la viga se determina la deflexión o deformación transversal, que es una función de la coordenada (distribuida) longitudinal

y del tiempo. La curvatura y deflexión de una viga pueden obtenerse a partir de la ecuación de movimiento (vibraciones libres) de una viga tipo Euler-Bernoulli (i.e., una viga de sección transversal delgada), para condiciones de frontera de viga en voladizo, la cual se expresa como sigue:

$$\lambda_m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t} - EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2.13)$$

donde  $\lambda_m = \rho A$  es la densidad de masa por unidad de longitud en la viga.

2. Se aplica la condición de frontera y se resuelve la ecuación diferencial. Para la viga en voladizo de masa  $M_v$  y con masa en el extremo  $M$ , las condiciones de frontera se dan como:

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad (2.14)$$

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = M \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t)$$

3. Se obtiene la solución de la ecuación diferencial parcial, usando el método de separación de variables y el llamado *teorema de expansión modal de Rayleigh*. La solución general de la ecuación (2.13) se da como:

$$y(x, t) = Y(x) q(t) \quad (2.15)$$

$$Y(x) = C_1 \cosh \lambda \frac{x}{L} + C_2 \sinh \lambda \frac{x}{L} + C_3 \cos \lambda \frac{x}{L} + C_4 \sin \lambda \frac{x}{L}$$

donde  $\lambda$  es un parámetro positivo por determinar.

4. Se aplican las condiciones de frontera y resuelven para las constantes  $C$ 's desconocidas. La frecuencia natural de vibración transversal de una viga en voladizo continua puede obtenerse analíticamente a partir de la ecuación desacoplada de la viga de Euler-Bernoulli y está dada por la ecuación (2.16) como:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.16)$$

donde  $i = 1, 2, \dots$  es el índice que denota el  $i$ -ésimo modo,  $\rho$  es la densidad de masa,  $A$  es el área de la sección transversal de la viga, y  $L$  es la longitud total de la viga.

5. Se obtiene la solución para forzar el término  $q(t)$  a partir de la ecuación de movimiento. La solución de la ecuación (2.13) para una masa distribuida en voladizo  $Mv = \rho A$ , una



masa en el extremo ( $M$ ) y una condición de frontera (ecuación (2.14)), fue obtenida por [52] como sigue:

$$y(x, t) = Y(x) q(t) = \omega^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi(x)(\psi)}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega_r\omega}$$

donde

$$Y(x) = C_r \left\{ \cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) - \cosh\frac{\lambda x}{L} - \beta \left[ \sin\frac{\lambda x}{L} - \sinh\frac{y_i x}{L} \right] \right\}$$

$$\beta = \frac{mL(\sin\lambda - \sinh\lambda) + \lambda M(\cos\lambda - \cosh\lambda)}{mL(\sin\lambda - \cosh\lambda) - \lambda M(\sin\lambda - \sinh\lambda)}$$

$$q(t) = \frac{\psi\omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_r} y_0 e^{j\omega t}$$

$$\psi = -m \int_0^L \phi(x) dx + M_z \phi(L) \quad (2.17)$$

6. La deformación unitaria  $\varepsilon(x)$  en la superficie de la viga a una distancia  $y$  desde el eje neutro puede obtenerse tomando la segunda derivada parcial de la deflexión transversal  $\omega_i(x, t)$ :

$$\varepsilon(x) = -y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (2.18)$$

7. El esfuerzo normal en función de la relación entre la distancia desde el extremo fijo y la posición específica en la viga se puede obtener de la ley de Hooke de la siguiente manera:

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) \quad (2.19)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material de la viga. Si las placas piezoeléctricas están unidas en determinada sección de una viga, el voltaje de salida del PZT se puede estimar multiplicando simplemente la tensión en esa posición con la constante de voltaje piezoeléctrica  $g$ . Suponiendo que el material es lineal, elástico e isotrópico con una tensión media aplicada a lo largo de la dirección 1-1, el voltaje de salida se puede determinar de la siguiente manera:

$$V\left(\frac{x}{L}\right) = g_{31} E \varepsilon\left(\frac{x}{L}\right) L_b \quad (2.20)$$

La potencia de salida de un PZT en la posición  $x$  desde el extremo sujetado y conectada a una carga resistiva puede expresarse como:

$$P = \frac{v^2}{R_L} = \frac{1}{R_L} \left\{ g_{31} E \varepsilon\left(\frac{x}{L}\right) L_b \right\}^2 \quad (2.21)$$

donde  $R_L$  es la resistencia de carga y  $L_b$  es la longitud del cristal piezoeléctrico unido al sustrato de la viga.

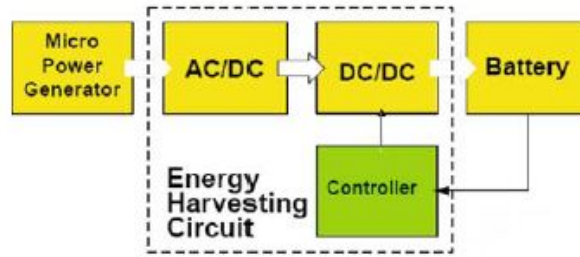


Figura 2.7: Diagrama a bloques para un circuito cosechador de energía.

### 2.4.5. Circuitos para cosechamiento de energía

Un simple circuito de recolección de energía consiste en un rectificador de diodo (AC / DC) y un convertidor DC-DC, como se muestra en la Fig. 2.7. Se ha demostrado que la adición del convertidor DC-DC mejora la recolección de energía en un factor de 7. La eficiencia del convertidor reductor se situó entre el 74 % y el 88 %. A través de la explotación del funcionamiento discontinuo del modo de conducción del convertidor DC-DC, se ha propuesto un sistema de recolección de energía independiente con circuitos de control simplificados de manera significativa [53].

En [54] han presentado una técnica de procesamiento no lineal "Recolección de Interruptores Sincronizados en Inductor" (SSHI) para recolectar energía, que consiste en un dispositivo de conmutación en paralelo con el elemento piezoeléctrico. El dispositivo se compone de un interruptor y un inductor conectados en serie. El interruptor está en estado abierto excepto cuando ocurre el desplazamiento máximo en el transductor. En ese instante, el interruptor se cierra y la capacitancia del elemento piezoeléctrico y la inductancia juntos constituyen un oscilador. El interruptor se mantiene cerrado hasta que la tensión en el elemento piezoeléctrico se ha invertido. En el caso de un dispositivo de CA no lineal, una carga resistiva está directamente relacionada con el elemento piezoeléctrico en paralelo con el dispositivo de conmutación. Esta técnica no lineal ha demostrado mejorar significativamente el rendimiento del circuito de recolección de energía y será adecuada para las estructuras resonantes [54].

Microgeneradores piezoeléctricos requieren el desarrollo de componentes basados en CMOS para una eficiente recolección y almacenamiento de energía. Normalmente, la impedancia interna del generador piezoeléctrico es alta en el rango de pocas decenas de  $k\Omega$ . Esta alta impedancia interna restringe la cantidad de corriente de salida que puede alcanzar por la fuente el rango de los microampere. Por lo tanto, es importante tener baja disipación de la corriente en reposo tanto para el rectificador como para el controlador doblador regulado por SC para la eficiencia del sistema de conversión de energía. Recientemente, [55] han propuesto un rectificador de alta eficiencia para la transmisión de potencia transcutánea en aplicaciones biomédicas como se muestra en la Fig. 2.8(a). El rectificador fue implementado en un CMOS estándar de  $0.35\mu m$  y se encontró que alcanzaba una relación de

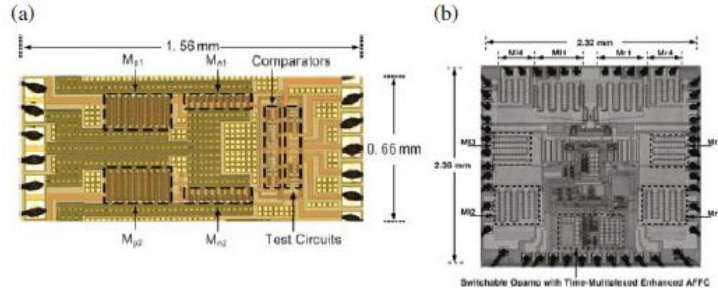


Figura 2.8: (a) Un rectificador CMOS de alta eficiencia, y (b) un duplicador de voltaje de CC [57]

conversión de pico de 95 % con capacidad de manejo de corriente de salida de hasta 20 mA. El rectificador adopta dos interruptores controlados por comparador para permitir flujo de corriente unidireccional con sólo  $2V_{ds}$  de caída en la trayectoria conductora, donde  $V_{ds}$  es el voltaje de drenaje-fuente a través de un transistor en la región lineal. Con el uso de interruptores controlados por comparador, este diseño no sólo funcional bajo la amplitud de entrada más baja, sino también tiene buena eficiencia de energía. En un trabajo posterior, [56] desarrollaron un condensador conmutado (SC) con control pseudo-continuo como se muestra en la Fig. 2.8(b). El doblador de voltaje regulado por SC proporciona una tensión continua constante a través de una conversión DC-DC escalonada. Estos desarrollos son importantes para la implementación de microgeneradores. En el caso del nodo de sensor inalámbrico, se requiere un mecanismo de almacenamiento de energía con una densidad de energía significativa entre el circuito de recolección de energía y la unidad de transmisión inalámbrica. Las soluciones posibles son baterías recargables de iones de litio y ultracapacitores de doble capa. La elección apropiada se basa en la densidad de energía y la densidad de potencia requeridas por la aplicación, usando baterías de iones de litio si se requiere alta densidad de energía y ultra condensadores si se requiere alta densidad de potencia.

## 2.4.6. Estrategias para el mejoramiento y desempeño de los recolectores de energía

### Recolectores de energía multi-modales

Con el fin de aprovechar eficazmente la energía de los recursos ambientales disponibles, se está aplicando el concepto de aprovechamiento multimodal de energía. Este concepto mejora los sistemas existentes integrando las siguientes ideas: (i) en un escenario dado, dos o más fuentes de energía pueden estar disponibles para recolectar energía como la solar, el viento y las vibraciones y (ii) dos esquemas diferentes para el cosechamiento de energía

pueden ser combinadas en un sistema de tal manera que uno ayude al otro.

Un ejemplo adecuado de dispositivo de recolección de energía multi-modal es un sistema que combina mecanismos de recolección de energía electromagnética y piezoeléctrica [58]. Dicho dispositivo consiste en un transductor piezoeléctrico y un sistema electromagnético que contribuyen mutuamente a la generación de energía [59]. El diseño consiste en una viga en voladizo con placas piezoeléctricas unidas en las ubicaciones de tensión máxima como se muestra en la Fig. 2.9(a) y (b). En la punta de la viga en voladizo, se fija un imán permanente que oscila dentro de una bobina fijada a la parte superior de todo. El imán permanente cumple dos funciones: actúa como una masa de prueba para la viga en voladizo y actúa como un núcleo que oscila entre las bobinas inductivas dando como resultado la generación de corriente eléctrica a través del efecto de Faraday.

La Fig. 2.10 muestra el diagrama del dispositivo prototipo. Las placas piezoeléctricas monocristales se unieron tanto en la parte superior como en la parte inferior de la viga. Las placas se aislaron de la viga usando un material epóxico aislante. Las tensiones de salida de la fila superior e inferior del piezoeléctrico se conectaron en paralelo. La viga tiene una geometría cónica con una variación lineal de la dimensión a lo largo de la longitud, de manera que su momento de inercia a lo largo del eje perpendicular a la dirección de vibración también varía linealmente. Esto permite que la viga exhiba una sensibilidad más alta. Cuando una viga en voladizo se somete a excitación externa, se producen varios modos a frecuencias de resonancia respectivas dependiendo de la geometría, el módulo de elasticidad, la densidad y las condiciones de frontera.

### Máquina auto-sintonizable

Un elemento de eficiencia es la magnitud de la potencia cosechada cuando la frecuencia de entrada mecánica es diferente de la resonancia de la cosechadora piezoeléctrica. Es muy deseable tener una cosechadora de energía que es capaz de auto-sintonizarse para optimizar su potencia de salida en prácticamente cualquier entorno de vibración. Un enfoque común es el uso de la derivación. En este caso, la impedancia mecánica adimensional ( $Z$ ) está dada por [60]

$$\bar{Z}_{jj} = \frac{Z^{shunted}}{Z^{open}} = \frac{1 - k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2 \left( \frac{Z^{elect}}{Z^{piezo}} \right)} \quad (2.22)$$

En [60] se ha demostrado el concepto de condensador de derivación para alterar la frecuencia natural del haz ilustrado por la expresión,  $\omega = \sqrt{k_{eff} + C^{-1}d^2/m_{eff}}$ , donde  $k$  es el factor de acoplamiento electromecánico. Este método tiene un inconveniente, ya que requiere un complejo diseño electrónico con microcontrolador programable para conectar o desconectar una serie de cargas capacitivas. Otro método que se puede concebir para alterar la frecuencia del cosechador es mediante conexiones eléctricas en cascada, es decir, cambiar el número de transductores conectados en serie o en paralelo por un conmutador activo. El interruptor puede regular las conexiones comparando los niveles de potencia

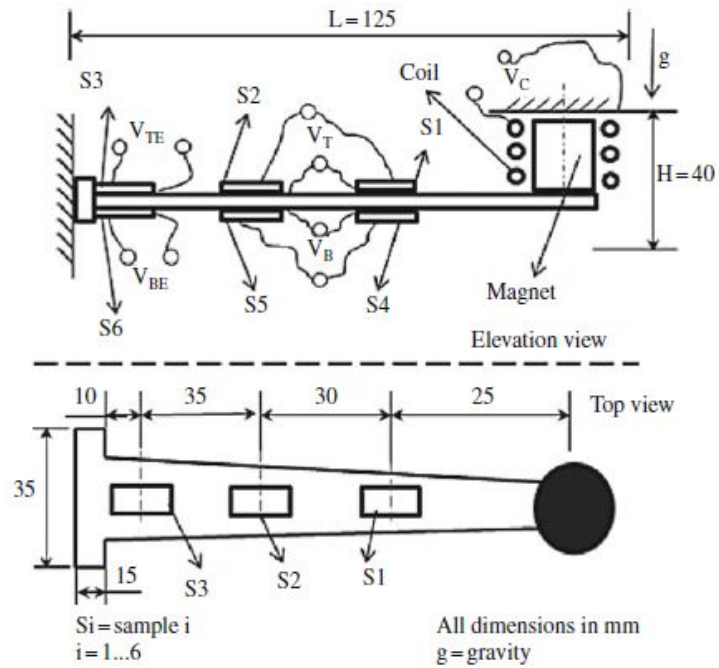


Figura 2.9: Diagrama esquemático de la cosechadora de energía multi-modal, vista lateral y vista superior [57].

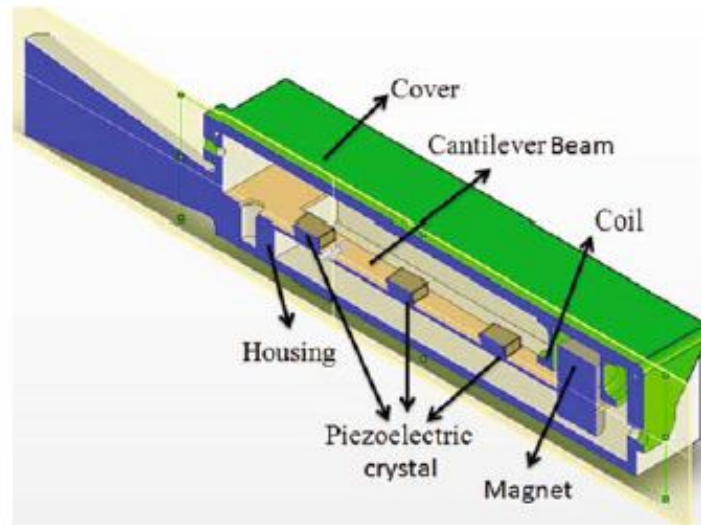


Figura 2.10: Vista isométrica de la máquina cosechadora de energía mecánica con prototipo multi-modal de mano.

sobre una banda de frecuencia. Este método tiene el inconveniente de que requiere varios transductores que estén disponibles y dispuestos de una manera sistemática para implementar la cascada. El dispositivo es voluminoso y tiene baja densidad de potencia.

Existe otro enfoque basado en la no linealidad del material piezoeléctrico. Se sabe que la tensión eléctrica aplicada tiene un efecto sobre la resonancia que se atribuye a los cambios en la rigidez. A medida que aumenta el voltaje aplicado, la frecuencia de resonancia del material piezoeléctrico se desplaza a frecuencias más bajas. Anteriormente, hemos demostrado que este fenómeno está relacionado con las no linealidades elásticas y el cambio en la frecuencia de resonancia con el aumento de la excitación puede ser representado por una relación de respuesta empírica dada como [61, 62]

$$f_r(ef) = f_r^{lin} + \frac{3}{8} \left( \frac{\alpha \varepsilon^2}{f_r^{lin}} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{K}{f_r^{lin} \varepsilon} \right)^2 - \delta^2} \quad (2.23)$$

donde  $f_r(ef)$  es la frecuencia resonante efectiva,  $f_r^{lin}$  es la amplitud lineal de la frecuencia resonante,  $\alpha$  es la constante elástica no lineal,  $\delta$  es la constante lineal inelástica,  $K$  es la excitación externa, y  $\varepsilon$  es la amplitud rms de la deformación del muestreo de vibración. El valor de la constante no lineal  $\alpha$  depende del material y determina el desplazamiento de la frecuencia de resonancia bajo un campo externo. Por ejemplo, se ha encontrado que  $\alpha/f_r^{lin}$  es aproximadamente 40 veces más alto en PZT blando que en PZT duro. En un cosechador de energía el cambio en la frecuencia de operación se puede lograr usando el voltaje de polarización o la tensión.

### Transductores de ancho de banda

Un esquema eficiente para aumentar la eficiencia global de un cosechador de energía es asegurar que cosecha la energía a través de entradas variables de la vibración. El principal problema de la cosechador de energía actual es su estrecho ancho de banda. Por ejemplo, la cosechadora piezoeléctrica convencional comprende una sola viga piezocerámica en voladizo, donde la frecuencia de operación viene dada por:

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

donde  $k$  es la constante de rigidez equivalente del haz y  $m$  es la masa equivalente de la masa distribuida de la viga y la masa concentrada en el extremo. Desafortunadamente, para las desviaciones minuciosas de la frecuencia de resonancia de la viga, hay una caída significativa en los niveles de potencia producidos. Cabe señalar aquí que se pueden diseñar varios esquemas sencillos para conseguir el funcionamiento de gran ancho de banda, pero la mayoría de ellos tienen inconvenientes fundamentales como la disminución en densidad de potencia. La Fig. 2.11 describe un ejemplo de algunos de los enfoques más comunes.

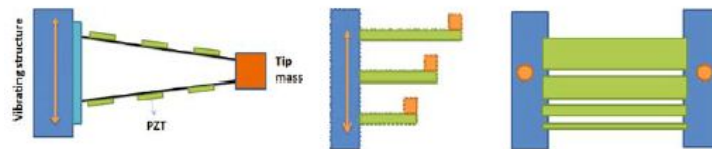


Figura 2.11: Estructuras para lograr ancho de banda a costa de la densidad de potencia.





# Capítulo 3

## Implementación de Circuitos *Shunt* de Resonancia Adaptable con Circuitos Analógicos

### 3.1. Introducción

Como las inductancias de los circuitos *shunt* resonantes tienen que ser de valores muy grandes (hasta un centenar de Henrios), entonces el inductor se ha implementado a través de la técnica de los inductores virtuales propuesta en [48, 63] o de impedancias sintéticas propuesta por [47].

Con la impedancia sintética es muy fácil de implementar un inductor variable que es sintonizado a la frecuencia diseñada automáticamente. Sin embargo, la implementación requiere de un procesador de señales digitales, convertidores analógicos/digitales, filtros y amplificadores, por lo que este enfoque es caro y voluminoso. Por otro lado, los inductores virtuales se realizan con solo componentes de circuitos analógicos, que permiten una aplicación más simple, más pequeña y barata. Sin embargo, el problema para hacerlos adaptables no se ha resuelto todavía. Por ejemplo, Hollkamp [64] ha intentado utilizar un potenciómetro motorizado, con el fin de cambiar el valor del inductor. Esto ciertamente no es un enfoque adecuado para los materiales inteligentes, dado que la motorización hace el circuito muy voluminoso. En este capítulo se presenta un nuevo circuito inductor variable.

### 3.2. Ley Adaptable

En esta sección se introducirá el método de adaptación de fase relativa para los piezo-*shunt*  $R - L$  en un solo modo.

### 3.2.1. Circuito *Shunt* $R - L$ Adaptable para un solo modo de vibración

Una impedancia *shunt* eléctrica parametriza un controlador equivalente de retroalimentación por deformación colocada. Si la impedancia  $Z(s)$  se elige como una serie red inductor-resistencia ( $R - L$  *shunt*), un controlador *shunt* resonante se obtiene que reduce significativamente la vibración asociado con un único modo estructural [13]. Como se describe en [6,65], el rendimiento de amortiguamiento de los *shunt* resonantes es sensible a la variación ambiental en las frecuencias de resonancia estructurales y capacitancia del transductor. Se requiere la sintonización en línea de la inductancia  $L$  para mantener un amortiguamiento óptimo. Con este fin, las técnicas de adaptación basadas en valor cuadrático medio (RMS) de minimización [64] se han propuesto. En lo que sigue, vamos a introducir una nueva técnica adaptativa basado en el desplazamiento de fase relativo.

La adaptación de fase relativo se basa en el ajuste de la diferencia de fase relativa entre la la velocidad y la corriente del *shunt* para  $-\pi/2$ . Una simple operación de multiplicación y una operación de filtrado evalúa la diferencia de fase relativa. Considere la Fig. 3.2, donde  $Z(s) = R + sL$ .

Insertando  $U_z(s) = I_z(s) \cdot (R + sL)$  dentro de la ecuación

$$U_z(s) = \frac{Z(s)}{\frac{1}{C_p s} + Z(s)} U_p(s) \quad (3.1)$$

Nos lleva a

$$I_z(s) = U_p(s) \frac{sC_p}{s^2 LC_p + sC_p R + 1} \quad (3.2)$$

Como  $U_p(s)$  es dinámicamente proporcional a la deformación  $x(s)$  experimentada por el transductor piezoeléctrico, es decir,  $U_p(s) = cx(s) = cv(s)/s$ , en donde  $c$  es una constante y  $v(s)$  es la velocidad, la función de transferencia  $G_{Iv}(s)$  a partir de la velocidad  $v(s)$  a la corriente  $I_z(s)$  se puede expresar como

$$G_{Iv}(s) = \frac{I_z(s)}{v(s)} = \frac{cC_p}{1 + sC_p R + s^2 LC_p} \quad (3.3)$$

La fase de  $G_{Iv}(j\omega)$  es

$$\angle(G_{Iv}(j\omega)) = \phi_n = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega C_p R}{1 - LC_p \omega^2} \right) \quad (3.4)$$

De acuerdo con [13], el ajuste óptimo del *shunt*  $R - L$  se logra cuando  $\omega_n = 1/(LC_p)$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia de resonancia estructural del  $n^{th}$  modo. De la ecuación (3.4), se puede ver que esta condición de sintonización puede ser reformulada por la condición  $\angle G_{Iv}(j\omega_n) = -\pi/2$ . Una función  $f_p(L, \omega_n) = \text{sign}(\angle(G_{Iv}(j\omega_n)) + \frac{\pi}{2})$  puede definirse

### CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE CIRCUITOS *SHUNT* DE RESONANCIA ADAPTABLE CON CIRCUITOS ANALÓGICOS

---

tal que revele la dirección de sintonización requerida para el valor de la inductancia. La adaptación discreta de  $L$  que sintoniza el  $n^{th}$  modo viene dada por

$$L_{k+1} = L_k + \alpha \cdot (f_p(L_k, \omega_n)) = L_k + \alpha \cdot \text{sign} \left( \angle(G_{Iv}(j\omega_n)) + \frac{\pi}{2} \right)$$

donde  $\alpha$  es la constante de sintonización. Una evaluación directa del ángulo de fase no es sencilla y complica el esquema de adaptación mostrado arriba. Una alternativa práctica para la evaluación de la dirección de ajuste se muestra a continuación. Si suponemos que la velocidad  $v(t)$  y la corriente  $I_z(t)$  están tonal, una suposición razonable es que las resonancias son amortiguadas muy ligeramente, la multiplicación de  $v(t) = \sin(\omega_n t)$  con  $I_z(t)$  se puede escribir como

$$v(t) \cdot I_z(t) = \sin(\omega_n t) \cdot A_n \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

Donde  $\phi_n$  es el cambio de fase igual a  $\angle(G_{Iv}(j\omega_n))$  y  $A_n = |G_{Iv}(j\omega_n)|$ . Después de algunas manipulaciones, la siguiente expresión puede ser obtenida

$$v(t) \cdot I_z(t) = A_n \left( \frac{1}{2} \cos(\phi_n) - \cos(2\omega_n t + \phi_n) \right) \quad (3.5)$$

Por filtro de paso bajo la expresión anterior con una frecuencia de corte por debajo de , el segundo término puede despreciarse y se tiene

$$g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)] = \frac{A_n}{2} \cdot \cos(\phi_n), \quad (3.6)$$

donde  $g_{LP}(t)$  representa la respuesta a impulso de un filtro de paso bajo, y  $*$  denota el operador convolución en el dominio del tiempo. Puede observarse que

$$\text{sign}(g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)]) = \text{sign}(\cos(\phi_n)) = \text{sign} \left( \angle(G_{Iv}(j\omega_n)) + \frac{\pi}{2} \right),$$

para  $-\frac{3\pi}{2} < \phi_n < \frac{\pi}{2}$ , Esta técnica constituye nuevos medios para evaluar la dirección de sintonía. La ley de adaptación discreta se puede reescribir como

$$L_{k+1} = L_k + \alpha \cdot \text{sign}(g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)]). \quad (3.7)$$

Al eliminar el operador signo, lo que permite de forma efectiva, la tasa de ajuste de sintonización a variar, se puede obtener la siguiente ley de sintonización continua

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta (g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)]), \quad (3.8)$$

donde  $\beta$  es la tasa de sintonización. La ecuación (3.8) representa la ley de adaptación de fase relativa propuesta para un solo modo *shunt*  $R - L$ .

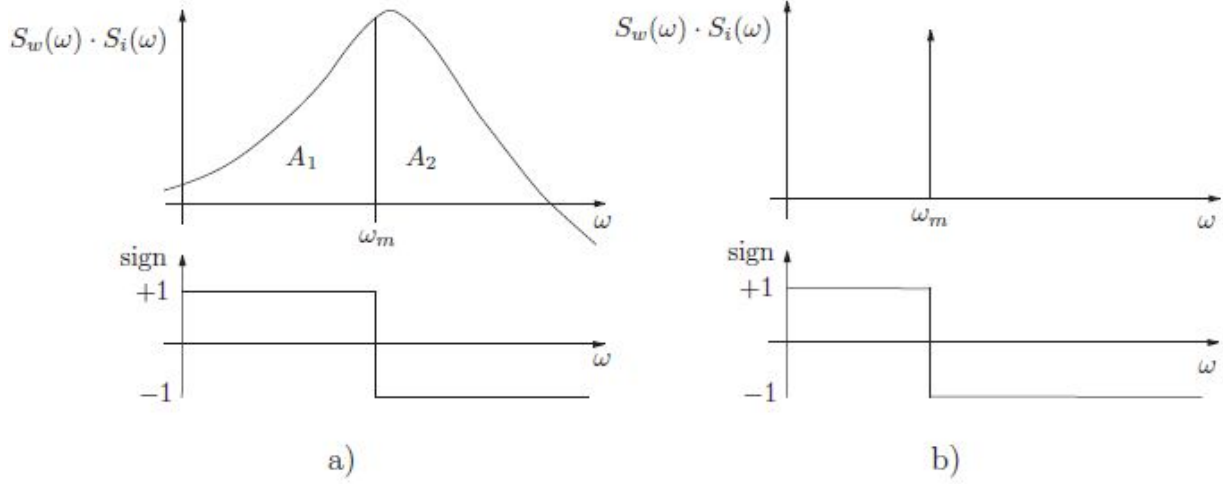


Figura 3.1: Análisis de convergencia, donde las gráficas de la parte de arriba muestran la densidad espectral  $S_v \cdot S_I$ , y las de la parte de abajo, el signo de la dirección de sintonización. En a) la adaptación de  $L$  converge tal que  $1/\sqrt{LC_p} = \omega_m$ , donde  $A_1 = A_2$ . En b), la excitación es tonal y  $1/\sqrt{LC_p} = \omega_m$  converge a la frecuencia de excitación.

### Análisis de Convergencia más detallada:

En la realidad, donde las señales no son puramente tonal, las señales  $v(t)$  e  $I_z(t)$  puede ser generalmente escrita como

$$v(t) = \int_0^{\infty} S_v(\omega_v) \sin(\omega_v t + \phi_v(\omega_v)) d\omega_v, \quad (3.9)$$

$$I_z(t) = \int_0^{\infty} S_I(\omega_I) \sin(\omega_I t + \phi_I(\omega_I)) d\omega_I, \quad (3.10)$$

donde  $S_v(\omega)$  y  $S_I(\omega)$  son las densidades espectrales de  $v(t)$  e  $I_z(t)$  respectivamente, y  $\phi_v(\omega)$  y  $\phi_I(\omega)$  los desplazamientos de fase correspondientes. Puesto que la corriente  $I_z(t)$  es un filtrado de banda de paso por la red  $RC_pL$ , se puede suponer que  $S_I(\omega)$  se compone sólo de la señal de un modo. A partir de la ecuación (3.8), si las resonancias son muy ligeramente amortiguadas, sabemos que  $G_{Iv}$  cambia de fase a  $\omega_m = 1/\sqrt{LC_p}$  de 0 a  $-\pi$ . Por lo tanto, se puede escribir  $\phi_I(\omega) = \phi_v(\omega)$  para  $\omega < \omega_m$  y  $\phi_I(\omega) = \phi_v(\omega) - \pi$  para  $\omega > \omega_m$ .

La ley propuesta de adaptación de fase relativo que filtra de forma pasa-baja la multiplicación de  $v(t)$  e  $I_z(t)$  (ecuación (3.8)) y converge a un valor tal que él  $g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)] = 0$ . Como la multiplicación en el dominio del tiempo corresponde a una convolución en el

### CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE CIRCUITOS *SHUNT* DE RESONANCIA ADAPTABLE CON CIRCUITOS ANALÓGICOS

dominio de la frecuencia, primero calculamos todos los posibles pares filtrados de forma paso bajo de la multiplicación  $\prod (\omega_v, \omega_I)$  entre las dos frecuencias  $\omega_v$  y  $\omega_I$ , respectivamente. Se tiene

$$\begin{aligned} \Pi(\omega_v, \omega_I) &= g_{LP}(t) * [S_v(\omega_v) \sin(\omega_v t + \phi_v) \cdot S_I(\omega_I) \sin(\omega_I t + \phi_I)] \\ &= \frac{1}{2} S_v(\omega_v) S_I(\omega_I) \cdot g_{LP}(t) * [( \cos((\omega_v - \omega_I)t + \phi_v - \phi_I) - \cos((\omega_v + \omega_I)t + \phi_v + \phi_I) )] \\ &\quad \begin{cases} 0 : \omega_v \neq \omega_I \\ \frac{1}{2} S_v(\omega_v) S_I(\omega_I) : \omega_v = \omega_I < \omega_m \rightarrow \phi_I = \phi_v \\ 0 : \omega_v = \omega_I = \omega_m \\ -\frac{1}{2} S_v(\omega_v) S_I(\omega_I) : \omega_v = \omega_I > \omega_m \rightarrow \phi_I = \phi_v - \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, todas las frecuencias  $\omega_v = \omega_I < \omega_m$  contribuyen positivamente, todas las frecuencias  $\omega_v = \omega_I > \omega_m$  negativamente, y todas las otras frecuencias no contribuyen. El valor del inductor  $L$  convergerá a un valor tal que para  $\omega_m = 1/\sqrt{LC_p}$  es la contribución positiva es igual a la contribución negativa, es decir,  $A_1 = A_2$  en la Fig. 3.1 a). Para tener  $g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)] = 0$ , el siguiente debe ocurrir

$$\text{arg} \omega_m \left( \int_0^{\omega_m} S_v(\omega) S_I(\omega) d\omega - \int_{\omega_m}^{\infty} S_v(\omega) S_I(\omega) d\omega \right) = 0.$$

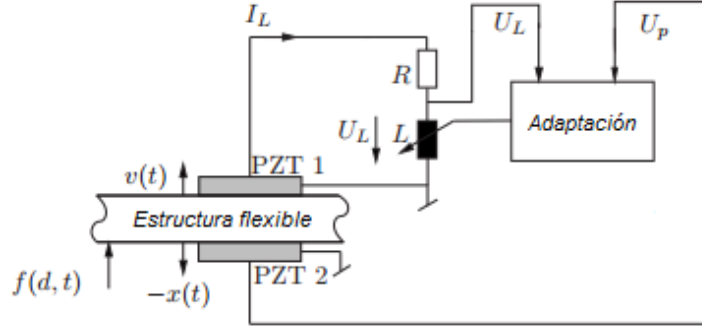
### 3.3. Circuitos *Shunt* $R - L$ Adaptables

Como la capacitancia de un piezoeléctrico es muy variable [66] y dada la variedad y complejidad de los acoplamientos mecánicos del material piezoeléctrico a una estructura, entonces la resonancia estructural equivalente también puede variar, por lo que la frecuencia de resonancia de los circuitos *shunt* resonantes necesitan ajustarse o adaptarse de forma práctica (automática) con el fin de mantener un rendimiento óptimo del amortiguamiento. Se conoce de algunos métodos para la adaptación de la resonancia *shunt* en mono-modo y multi-modo. Se ha demostrado que esta metodología de adaptación sintoniza más rápido y es más sencilla de implementar que las técnicas antiguas de adaptación como el valor RMS (*Root Mean Square*), adaptación que utiliza un algoritmo de búsqueda del gradiente [23, 64, 67].

La ley de adaptación de fase relativa requiere información de la corriente en el inductor y la velocidad de la estructura. De acuerdo con la ecuación (3.22), el valor del inductor *shunt* resonante mono-modo ( $R - L$  *shunt*) es entonces sintonizado con

$$\frac{dL(t)}{dt} = \alpha (g_{LP}(t) * [v(t) \cdot I_z(t)]) \quad (3.11)$$

donde  $\alpha$  es la constante de ajuste,  $I_z(t)$  la corriente en el *shunt* y  $v(t)$  la velocidad de la estructura. Esta fórmula se origina a partir de la observación de que la sintonización


 Figura 3.2: Circuito *shunt*  $R - L$  adaptable.

óptima es alcanzado, si  $\angle(I_z(s)/v(s)) = -\pi/2$ . La ecuación 3.11 se dedujo a partir

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta \text{sign} \left( \angle \left( \frac{I_z(t)}{v(s)} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.12)$$

Por diferenciación  $I_z(t)$  y  $v(s)$  y tomando en cuenta que  $U_L(s) = sLI_z(s)$ , uno obtiene

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta \text{sign} \left( \angle \left( \frac{U_L(s)}{s \cdot v(s)} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.13)$$

Como  $s \cdot v(s) = s^2X(s)$  y  $\angle(U_L(s)/s^2X(s)) = -\angle(U_L(s)/X(s))$  uno puede escribir

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\beta \text{sign} \left( \angle \left( \frac{U_L(s)}{X(s)} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.14)$$

O finalmente

$$\frac{dL(t)}{dt} = \gamma (g_{LP}(t) * [x(t) \cdot U_L(t)]) \quad (3.15)$$

Esta adaptación es más adecuada para la aplicación con un circuito analógico, ya que la deformación de  $x(t)$  se puede medir con una galga extensiométrica colocada (PZT2 en la Fig. 3.2) y la tensión  $U_L(t)$  es más fácil de medir que la corriente  $I_L(t)$ . Todo el esquema de adaptación se dibuja en la Fig. 3.2.

A continuación, se muestra cómo implementar esta nueva ley de adaptación usando componentes circuito analógica. En primer lugar se discuten inductores virtuales que se utilizan comúnmente para *shunts*  $R - L$ , como normalmente se requiere una muy alta inductancia. A continuación, se muestra cómo aplicar resistencias controlado por tensión utilizando transistores de efecto de campo (FET) para hacer la tensión de inductores virtual controlado. Por último, la aplicación de la ley de adaptación de fase relativa se presenta y todas las partes se implementan juntos en una solo circuito.

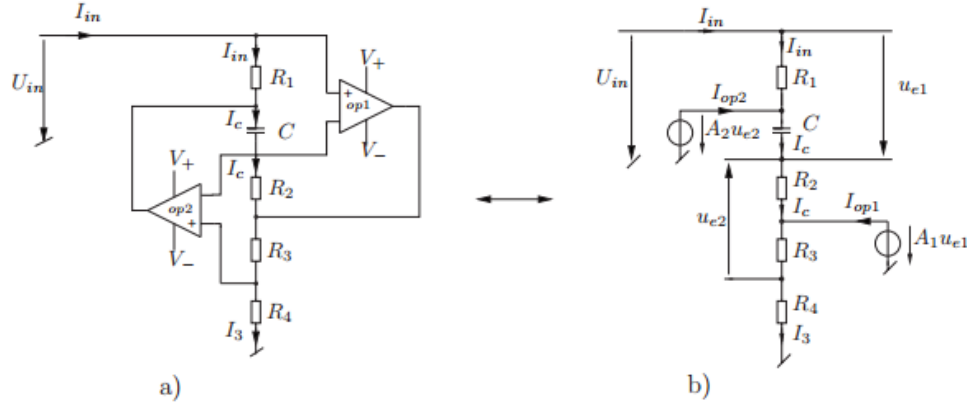


Figura 3.3: Inductor virtual construido a partir de amplificadores operacionales de ganancia infinita, resistencias y un condensador. Note que este circuito puede verse como la impedancia de un inductor de prácticamente cualquier valor.

## 3.4. Inductores Virtuales Controlados por Voltaje

### 3.4.1. Inductores Virtuales

Como la capacitancia  $C_p$  piezoeléctrico es normalmente más pequeño que  $200\text{ nF}$  y la frecuencia  $\omega$  de ser amortiguado hasta por debajo de  $500 \cdot 2\pi\text{ rad/s}$ , la inductancia  $L = 1/(\omega^2 C_p)$  es necesita ser muy alto (de  $1\text{ H}$  hasta varios  $100\text{ H}$ ). Estos valores no se pueden realizar con una inductancia de bobina, se han introducido, por lo tanto inductores virtuales. En la Fig. 3.3 a), el inductor Riordan-Type [63] o circuito de Antoniou [48] se dibuja. Nosotros primero se presenta un análisis de este circuito con el fin de entender cómo funciona. Después, se demuestra cómo modificar este circuito con el fin de obtener un inductor controlado por voltaje que se utilizará para un sintonizar automáticamente el *shunt*  $R - L$ . El análisis de la inductor virtual en la Fig. 3.3 a) se lleva a cabo primero en el supuesto que los amplificadores operacionales (AmpsOp) tienen una ganancia infinita y sus corrientes de entrada son cero. En este caso, el principio de la tierra virtual se puede aplicar y uno obtienetienen una ganancia infinita y sus corrientes de entrada son cero. En este caso, el principio de la tierra virtual se puede aplicar y uno obtiene

$$\frac{I_c}{sC} + I_{in}R_1 = 0 \quad (3.16)$$

$$I_cR_2 + I_3R_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$U_{in} - I_3R_4 = 0 \quad (3.18)$$

Empezando con la ecuación 3.18 y sustituyendo con la ecuación 3.16 y 3.17 resulta en

$$U_{in} = I_3 R_4 = \frac{-R_2}{R_3} I_c R_4 = \frac{-R_2}{R_3} (-sC R_1) I_{in} R_4 \quad (3.19)$$

Por lo tanto, la entrada a la impedancia es

$$Z_{in} = \frac{U_{in}}{I_{in}} = \frac{sC R_1 R_2 R_4}{R_3} = sL \quad (3.20)$$

Con  $L = \frac{C R_1 R_2 R_3}{R_3}$ . Esto significa que el circuito se entiende como la impedancia de una inductancia.

Como la ganancia real de los OpAmps no es infinita y su corriente de salida y el voltaje están limitados, es necesario un cálculo más detallado del circuito de inductancia virtual. Considere el esquema correspondiente del inductor virtual en la Fig. 3.3 b), en donde los OpAmps se reemplazan por sus modelos equivalentes. Suponemos que la entrada de las corrientes de los OpAmps siguen siendo cero, pero las ganancias no son infinitas pero  $A_1$  y  $A_2$ .

El sistema matricial de ecuaciones que describe el circuito de la Fig. 3.3 b) es

$$\begin{pmatrix} R_1 & \frac{1}{sC} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & R_4 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & R_3 + R_4 & -A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{in} \\ I_c \\ I_3 \\ U_{e1} \\ U_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} U_{in} \quad (3.21)$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones es la siguiente:

$$I_{in} = \frac{R_2 C (A_2 R_3 + A_2 R_4 + R_3 + R_4) s + R_3 (A_2 A_1 + 1 + A_1) + R_4 + R_4 A_1}{R_1 R_2 C ((R_4 (A_2 A_1 + A_2 + 1) + R_3 (A_2 + 1)) s + (R_3 + R_4) (A_1 + 1))} \cdot U_{in}$$

$$I_c = \frac{-sC A_1 (R_3 (A_2 + 1) + R_4)}{R_2 C (A_2 R_4 A_1 + A_2 R_3 + A_2 R_4 + R_3 + R_4) s + (R_3 + R_4) (A_1 + 1)} \cdot U_{in}$$

$$I_3 = \frac{A_1 (R_2 C (A_2 + 1) s + 1)}{R_2 C (A_2 R_4 A_1 + A_2 R_3 + A_2 R_4 + R_3 + R_4) s + (R_3 + R_4) (A_1 + 1)} \cdot U_{in}$$

$$U_{e1} = \frac{R_2 C (R_3 + R_4) ((A_2 + 1) s + 1)}{R_2 C (A_2 R_4 A_1 + A_2 R_3 + A_2 R_4 + R_3 + R_4) s + (R_3 + R_4) (A_1 + 1)} \cdot U_{in}$$

$$U_{e2} = \frac{A_1 (-R_3 + R_2 sC R_4)}{R_2 C (A_2 R_4 A_1 + A_2 R_3 + A_2 R_4 + R_3 + R_4) s + (R_3 + R_4) (A_1 + 1)} \cdot U_{in}$$


---



### CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE CIRCUITOS *SHUNT* DE RESONANCIA ADAPTABLE CON CIRCUITOS ANALÓGICOS

---

Para comprobar el resultado y compararlo con la ecuación (3.20), hacemos que  $(A_1, A_2) \rightarrow \infty$ , con lo cual se obtiene

$$\lim_{(A_1, A_2) \rightarrow \infty} I_{in} = \frac{R_3}{R_1 R_2 R_4 C s} \cdot U_{in} \quad (3.22)$$

$$\lim_{(A_1, A_2) \rightarrow \infty} I_c = \frac{-R_3}{R_2 R_4} \cdot U_{in} \quad (3.23)$$

$$\lim_{(A_1, A_2) \rightarrow \infty} I_3 = \frac{1}{R_4} \cdot U_{in} \quad (3.24)$$

$$\lim_{(A_1, A_2) \rightarrow \infty} U_{e1} = 0 \quad (3.25)$$

$$\lim_{(A_1, A_2) \rightarrow \infty} U_{e2} = 0 \quad (3.26)$$

Los voltajes de entrada de los OpAmps  $U_{e1}$  y  $U_{e2}$  se van a cero como se esperaba debido a la retroalimentación negativa y se obtiene el mismo resultado derivada de la ecuación 3.20. Las corrientes de salida de los OpAmps son importantes, ya que son limitadas. Ellos pueden ser calculada con

$$I_{op1} = I_3 - I_c = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_4} U_{in} \quad (3.27)$$

$$I_{op2} = I_c - I_{in} = -\frac{R_3 (R_1 s C + 1)}{R_1 R_2 R_4 C s} U_{in} \quad (3.28)$$

Uno tiene que asegurarse de que estas corrientes no exceden las especificaciones de los OpAmps y que las tensiones de salida de los OpAmps están dentro de los límites de la tensión de alimentación. Por lo tanto, los valores de las resistencias y la capacitancia tienen que ser elegidos cuidadosamente.

#### Energía Disipada en el Inductor Virtual

Incluso si los amplificadores operacionales son ideales y no consumen energía, todavía hay potencia disipada en el inductor virtual por las resistencias. Esta energía es

$$P_R = U_{in}^2 \left( \frac{R_3^2}{R_1 R_2^2 R_4^2 C^2 \omega^2} + \frac{R_3^2}{R_4^2 R_2} + \frac{R_3}{R_4^2} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (3.29)$$

#### 3.4.2. Resistores Controlados por Voltaje

Hemos visto que la inductancia del inductor virtual es una función de los valores de las resistencias. Por lo tanto, el inductor virtual puede ser controlado por tensión, si la resistencia controlada por voltaje es usada para una de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  o  $R_4$ . Bajo ciertas condiciones de funcionamiento, un transistor de efecto campo de unión

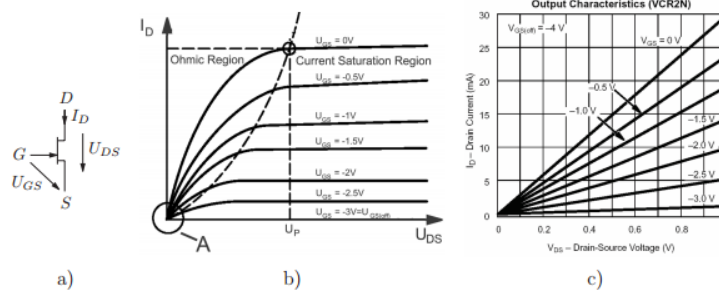


Figura 3.4: : a) Esquema de un JFET, b)  $U_{DS} - I_D$  curvas en dependencia de  $U_{GS}$ , C) características de salida lineales alrededor del origen.

(JFET) como se muestra en la Fig. 3.4 a), se comporta como una resistencia controlada por voltaje. En este caso, el valor de la resistencia entre el drenaje (D) y la fuente (S) puede ser controlado por la puerta de voltaje  $U_{GS}$ . La condición para un comportamiento resistivo es que el JFET opere en la región óhmica, también llamada zona insaturado para ello hay que observar las hojas de especificaciones del jfet utilizado. Para garantizar esta condición,  $U_{DS}$  tiene que ser mantenido pequeño. Podemos deducir el comportamiento óhmico cuasi observando la ecuación de salida del JFET

$$I_D = K (2(U_{GS} - U_p)U_{DS} - U_{DS}^2) \quad (3.30)$$

donde  $U_p$  es la tensión mínima de encendido. El transistor opera en la región óhmica, siempre que no se desconecte, es decir,

$$U_{DS} < U_{GS} - U_p \quad (3.31)$$

Para una  $U_{DS}$  suficientemente pequeña, se puede simplificar la ecuación (3.30) a

$$I_D = k (2(U_{GS} - U_p)U_{DS}) = \frac{1}{R_{JFET}} U_{DS}, \quad (3.32)$$

que describe curvas volt-amperios lineales, donde la resistencia  $R_{JFET}$  estará controlada por la compuerta de voltaje  $U_{GS}$

$$R_{JFET}(U_{GS}) = \frac{1}{k(2(U_{GS} - U_p))}, \quad (3.33)$$

La aplicación de la resistencia controlada por tensión para el inductor variable requiere que la distorsión de la señal se mantenga al mínimo y la capacidad de manejo debe ser lo más grande posible. Una técnica sencilla es realizar mediante el acoplamiento de una resistencia en la señal de drenaje (véase la Fig. 3.5). Esta señal de drenaje debe mantenerse dentro de la zona ohmica del JFET para que pueda reajustarse el valor de la resistencia debido al voltaje aplicado a la puerta  $U_{GS}$ . En el caso de la media de ciclo negativo, un

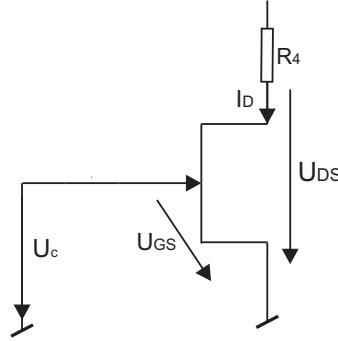


Figura 3.5: Resistencia controlada por voltaje, utilizando la zona ohmica de un JFET.

pequeño voltaje negativo está acoplado a la puerta para reducir la cantidad de polarización directa de drenaje-puerta. Esto a su vez reduce la corriente de drenaje y linealiza las líneas de polarización. A menos que  $U_{DS} = U_{GS} - U_{GS_{off}}$ , la resistencia del canal sólo depende de la tensión de control de la puerta y no en la señal de drenaje.

### 3.4.3. Circuito Inductor Controlado por Voltaje

Hemos visto que el valor del inductor virtual está determinado por

$$L = \frac{R_1 R_2 R_4 C}{R_3} \quad (3.34)$$

Con el fin de hacer que la tensión de inductancia controlada, una resistencia podría ser sustituida por una resistencia controlada por tensión. La mejor opción es  $R_4$ , ya que esta resistencia está conectado a tierra y, por lo tanto, una tensión de control a tierra  $U_c$  puede ser usada. El nuevo circuito se dibuja en la Fig. 3.6. Los valores de las resistencias  $R_1$  a  $R_3$  tienen que ser elegidos de manera que el voltaje y la corriente de la resistencia controlado por voltaje estén dentro de los límites que garantizan un comportamiento lineal, pero también hay que asegurarse de que los voltajes y corrientes de salida de los OpAmps no se excedan de sus límites.

### 3.4.4. Circuito de Adaptación

En las últimas secciones presentamos un circuito analógico para una inductor virtual controlado por tensión. Mediante el control de este inductor virtual con la adaptación de fase relativa en la ecuación (3.15), un controlador *shunt*  $R - L$  adaptable puede ser construido. Esto se muestra en la Fig. 3.7. En la parte superior se puede ver el inductor

### 3.4. INDUCTORES VIRTUALES CONTROLADOS POR VOLTAJE

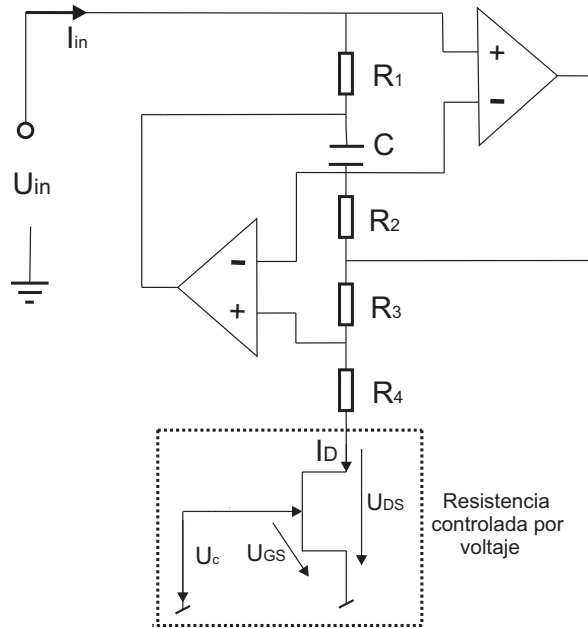


Figura 3.6: Inductancia virtual con la resistencia variable (JFET).

virtual controlado por tensión que es conectado a través de la resistencia *shunt*  $R_{damp}$  a las terminales del parche piezoeléctrico. La tensión de control  $U_c(t)$  para el inductor virtual se obtiene a partir de la fase relativa de adaptación. En primer lugar, las señales de  $U_L(t)$  y hasta  $U_p(t) = cx(t)$  se filtran. Estos filtros se tienen que establecer cuando el sistema está configurado inicialmente. A continuación, las dos señales se multiplican por medio de un multiplicador analógico realizando la operación de la convolución. Para este propósito, se utilizó un dispositivo de bajo costo de cuatro cuadrantes multiplicador analógico (ver Tabla 3.1). Después, el producto se integra, donde la velocidad de sintonización puede ser fijada por la resistencia  $R_{gain}$  y  $C_{int}$ . El producto integrado se utiliza entonces para establecer el valor del inductor virtual nuevamente.

AD633	
Descripción	Multiplicador analógico de bajo costo de 4 cuadrantes
Función de Transferencia	$W = \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10V} + Z$
Voltaje de Suministro	$\pm 15V$
Corriente de Suministro	$4mA$

Cuadro 3.1: Descripción corta del multiplicador analógico AD633

CAPÍTULO 3. IMPLEMENTACIÓN DE CIRCUITOS *SHUNT* DE RESONANCIA ADAPTABLE CON CIRCUITOS ANALÓGICOS

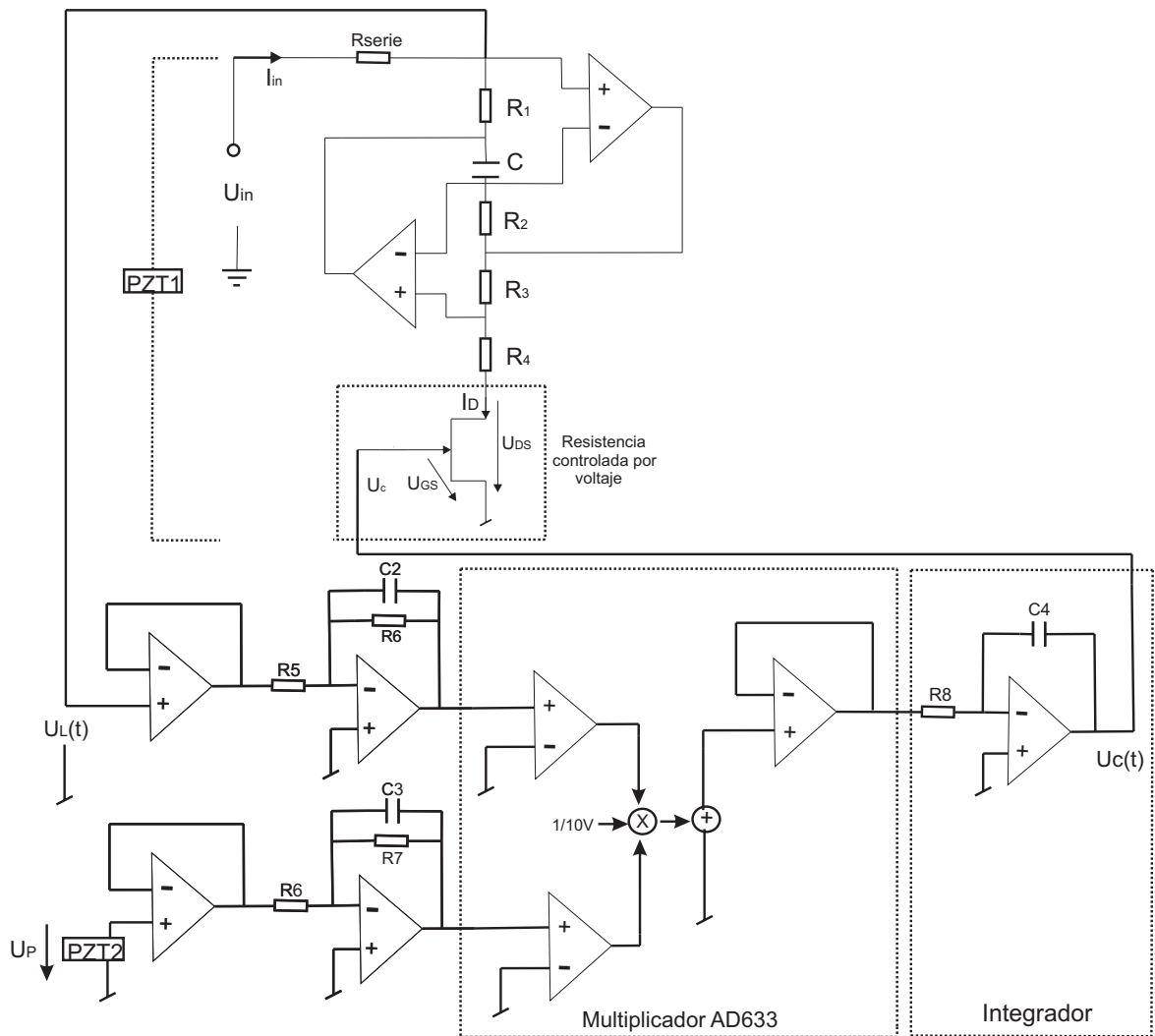


Figura 3.7: Inductancia virtual con la resistencia variable (JFET).



# Capítulo 4

## Modelado del Sistema y colocación de sensores y actuadores

### 4.1. Introducción

### 4.2. Modelado del sistema mecánico

#### 4.2.1. Modelado de la viga de Euler-Bernoulli

Se considera una viga de longitud  $L$  con un extremo libre y otro empotrado como la mostrada en la Fig. 4.1. La masa  $M$  representa una masa (concentrada) del acelerómetro ubicado en el extremo libre de la misma. Por otra parte, la viga tiene masa distribuida por unidad de longitud  $m(x)$ , módulo de Young  $E$ , momento de inercia de la sección transversal sobre el eje neutral  $I$ , densidad  $\rho$  y área de la sección transversal  $A$ . Además,  $x$  representa la coordenada longitudinal ó distribuida y  $y(x, t)$  representa las deflexiones transversales de la viga. Considerando que el elemento viga es suficientemente largo comparado con las dimensiones de la sección transversal (al menos 10 veces mayor), lo que garantiza que se puedan despreciar las deformaciones cortantes y la inercia rotatoria, la ecuación de movimiento que describe las deflexiones transversales de la viga delgada está dada por la ecuación de Euler Bernoulli:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + f(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < t \quad (4.1)$$

Observe que la ecuación (4.1) es un caso particular se conoce mejor como la ecuación de la viga de Euler-Bernoulli, donde  $f(x, t)$  y  $m(x) = \rho A$  representan la fuerza y la masa distribuida por unidad de longitud, respectivamente. También es posible incluir un término de amortiguamiento de tipo viscoso o estructural, aunque posteriormente se determinará el amortiguamiento viscoso equivalente (modal) mediante la aplicación de las técnicas de

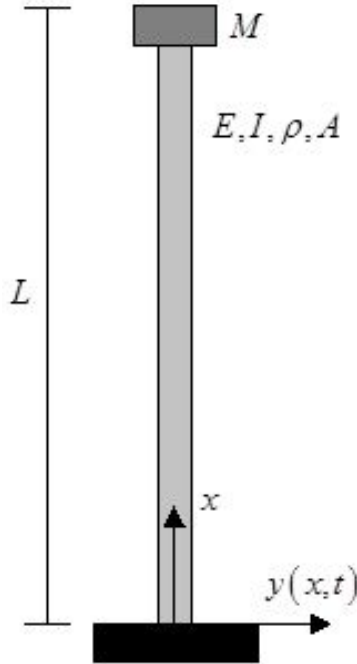


Figura 4.1: Viga en voladizo.

análisis modal experimental.

Para el extremo empotrado en  $x = 0$  las condiciones de frontera son

$$y(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.2)$$

Para el extremo libre en  $x = L$ , considerando que hay una masa concentrada  $M$ , las condiciones de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \quad x = L \\ EI(x) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} - M \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= 0, \quad x = L \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando el teorema de expansión, la solución puede separarse en términos de la variable espacial y del tiempo como sigue

$$y(x, t) = Y(x) q(t) \quad (4.4)$$

donde  $Y(x)$  representa el perfil de la viga y  $q(t)$  indica como la amplitud de ese perfil varía con el tiempo. Considerando vibraciones libres y asumiendo que el término  $EI$  es



CAPÍTULO 4. MODELADO DEL SISTEMA Y COLOCACIÓN DE SENSORES Y ACTUADORES

---

constante a lo largo de la coordenada longitudinal  $x$ , (4.1) se puede simplificar como

$$-\frac{1}{m(x)Y(x)}EI\frac{d^4Y(s)}{dx^4} = \frac{1}{q(t)}\frac{d^2q(t)}{dt^2} \quad (4.5)$$

Como el lado derecho de (4.5) depende solo de  $t$  y el lado izquierdo solo de  $x$ , entonces la solución puede separarse y ambos lados deben ser igual a una constante

$$-\frac{1}{m(x)Y(x)}EI\frac{d^4Y(s)}{dx^4} = \frac{1}{q(t)}\frac{d^2q(t)}{dt^2} = \lambda \quad (4.6)$$

Utilizando los dos términos a la derecha en (4.6) se obtiene que

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} - \lambda q(t) = 0 \quad (4.7)$$

Representa una oscilación armónica y su solución tiene la forma

$$q(t) = C \cos(\omega t - \phi) \quad (4.8)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación y  $\phi$  el ángulo de fase. Ahora, derivando dos veces (4.8) y sustituyendo en (4.6) se tiene

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 C \cos(\omega t - \phi)$$

y sustituyendo en (4.6) se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m(x)Y(x)}EI\frac{d^4Y(x)}{dx^4} &= -\omega^2 \\ \frac{d^4Y(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2 m Y(x)}{EI} & \\ \frac{d^4Y(x)}{dx^4} - \beta Y(x) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}$$

Por lo tanto las condiciones de frontera se simplifican a

$$Y(0) = 0, \quad \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{d^3Y(x)}{dx^3} + \frac{M}{m}\beta^4 Y(x) \right|_{x=L} = 0, \quad x = L \quad (4.11)$$

La solución de la ecuación (4.9) tiene la forma

$$Y(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (4.12)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes que serán calculadas para cumplir con las condiciones de frontera.

Sustituyendo (4.12) y sus respectivas derivadas en las condiciones de frontera para  $x = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} Y(0) &= B + D = 0 \\ \left. \frac{dY}{dx} \right|_{x=0} &= A + C \end{aligned} \quad (4.13)$$

Y la primera condición de frontera en  $x = L$

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = 0 \quad (4.14)$$

Se tiene que

$$B = -A \frac{(\sin \beta L + \sinh \beta L)}{\cos \beta L + \cosh \beta L} \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.13), (4.14) y (4.15) en (4.12) resulta

$$Y(x) = A \left[ \sin \beta x - \sinh \beta x - \frac{\sin \beta L + \sinh \beta L}{\cos \beta L + \cosh \beta L} (\cos \beta x - \cosh \beta x) \right] \quad (4.16)$$

Obteniendo la tercera derivada de (4.16), sustituyendo en la segunda condición de frontera  $x = L$  y haciendo las simplificaciones necesarias se obtiene

$$\frac{2A\beta^3}{(\cos \beta L + \cosh \beta L)} \left[ - (1 + \cos \beta L \cosh \beta L) + \frac{M}{m} \beta (\sin \beta L \cosh \beta L - \sinh \beta L \cos \beta L) \right] = 0 \quad (4.17)$$

Considerando que  $(\cos \beta L + \cosh \beta L) \neq 0$ , la ecuación (4.17) es equivalente a

$$- (1 + \cos \beta L \cosh \beta L) + \frac{M}{m} \beta (\sin \beta L \cosh \beta L - \sinh \beta L \cos \beta L) = 0 \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) es conocida como la ecuación característica o ecuación de frecuencia, y es una ecuación trascendental cuya solución da lugar a un conjunto infinito de valores propios o frecuencias naturales dado por

$$\omega_r = \beta_r^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$


---

## CAPÍTULO 4. MODELADO DEL SISTEMA Y COLOCACIÓN DE SENSORES Y ACTUADORES

---

Asociados a un conjunto infinito de funciones propias, también llamadas eigenfunciones o formas modales

$$\phi_r(x) = Y_r(x) = A_r \left[ \sin \beta_r x - \sinh \beta_r x - \frac{\sin \beta_r L + \sinh \beta_r L}{\cos \beta_r L + \cosh \beta_r L} (\cos \beta_r x - \cosh \beta_r x) \right] \quad (4.20)$$

Para  $r = 1, 2, \dots$

Una vez obtenidas las formas modales  $\phi_r(x)$ , la solución de (4.1), (4.2) y (4.3) puede describirse como

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) \quad (4.21)$$

donde  $q_r(t)$  son coordenadas modales. Sustituyendo (4.21) en (4.1), y haciendo uso de las condiciones de ortogonalidad de las formas modales e integrando sobre  $x$ , se tiene que

$$\ddot{q}_r[t] + \omega_r^2 q_r(t) = f_r(t) \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

donde  $f_r(t)$  representa las fuerzas modales externas.

La ecuación (4.22) representa la dinámica del sistemas en coordenadas modales o coordenadas generalizadas, en este caso no se ha considerado amortiguamiento. Si se considera amortiguamiento proporcional la ecuación (4.22) puede reescribirse como

$$\ddot{q}_r[t] + 2\zeta\omega_r^2\dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = f_r(t), \quad r = 1, 2, \dots$$

donde  $\zeta_r$  representa el amortiguamiento modal asociado al  $r$  -ésimo modo de vibración y éste puede calcularse experimentalmente a partir de las técnicas de análisis modal experimental como el método conocido como Peak Picking.

Utilizando la ecuación (4.18) y los parámetros de las tablas 4.1 y 4.2 se obtienen las frecuencias naturales del sistema. Los resultados se pueden apreciar en la tabla 4.3

Parámetros	Modelo de parche <i>DuraAct</i> ®	
	P-876.A12	P-876.A15
Dimensiones ( $l \times w \times d$ ) [mm]	(61 × 35 × 0.5)	(61 × 35 × 0.8)
Masa [g]	3.5	7.2
Capacitancia [nF]	90	45
Rango de voltaje de entrada [V]	−100 a 400	−250 a 1000
Fuerza de bloqueo [N]	265	775
Módulo de Young [GPa]	23.3	34.7
$d_{31}$ [m/V]	$2173 \times 10^{-12}$	$1250 \times 10^{-12}$

Cuadro 4.1: Especificaciones técnicas de los parches piezoeléctricos P-876.A12 y P-876.A15 de *DuraAct*<sup>TM</sup> de *Phisik Instrumente*®.

Descripción	Parámetro	Valor
Dimensiones [m]	( $l \times w \times d$ )	(1.016 × 0.038 × 0.0015)
Masa [g]	3.5	7.2
Capacitancia [nF]	90	45

Cuadro 4.2: Parámetros de la viga.

Frec. Naturales	1era. [Hz]	2da. [Hz]	3era. [Hz]	4ta. [Hz]
Experimental	0.7172	5.798	17.24	34.32

Cuadro 4.3: Frecuencias naturales de la viga en voladizo.

### 4.2.2. Modelado de parches piezoeléctricos

Los parches piezoeléctricos son cementados a la viga en la configuración asimétrica mostrada en la Fig. 4.2. Se considera que el parche piezoeléctrico, de espesor  $h_a$  es sementado perfectamente en la viga y se desprecian sus efectos inerciales en virtud de que se trata de un elemento delgado y con una masa muy pequeña ver [18].

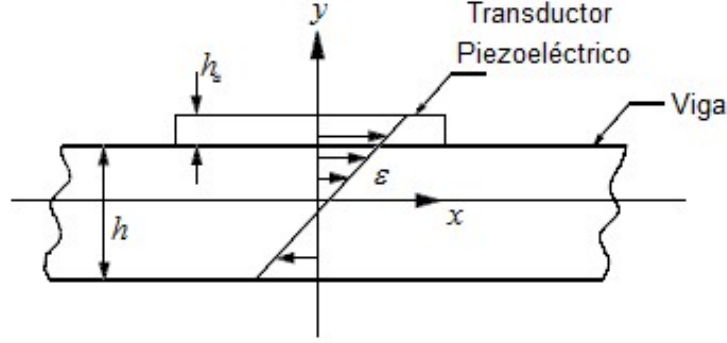


Figura 4.2: Diagrama esquemático de un parche piezoeléctrico en configuración asimétrica.

El parche piezoeléctrico recibe un voltaje en sus terminales y produce una deformación proporcional a este voltaje de entrada, dada por

$$\varepsilon_{pe} = \frac{d_{31}V}{h_a} \quad (4.23)$$

donde  $V$  es el voltaje aplicado en la dirección de polarización,  $h_a$  es el espesor del actuador y  $d_{31}$  es una constante de deformación del material piezoeléctrico.

Además, el actuador piezoeléctrico induce en la viga un momento distribuido  $m_x(x)$  descrito como

$$m_x(x) = EIK^f\varepsilon_{pe} \quad (4.24)$$

Y una deformación longitudinal dada por

$$\varepsilon(x) = K^L\varepsilon_{pe} \quad (4.25)$$

donde  $E$ ,  $I$  son el módulo de Young y el momento de inercia de la viga y  $K^f$  y  $K^L$  son constantes que dependen de parámetros tanto de la viga como del parche piezoeléctrico y se definen como

$$K^f = \frac{12EE_{pe}hh_a(2h + h_a)}{16E^2h^4 + EE_{pe}(32h^3h_a + 24h^2h_a^2 + 8hh_a^3) + E_{pe}^2h_a^4} \quad (4.26)$$

$$K^L = \frac{E_{pe}h_a(8Eh^3 + E_{pe}h_a^3)}{16E^2h^4 + EE_{pe}(32h^3h_a + 24h^2h_a^2 + 8hh_a^3) + E_{pe}^2h_a^4} \quad (4.27)$$

donde  $h$  es el espesor de la viga y  $E_{pe}$  y  $h_a$  son el módulo de Young y el espesor del parche piezoeléctrico, respectivamente.

Siguiendo el enfoque planteado por [68], el momento distribuido de la ecuación (4.24) puede reescribirse, para un elemento de longitud  $L_a$ , como

$$m_x(x) = EIK^f\varepsilon_{pe} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \quad (4.28)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  los extremos del parche y  $H(\cdot)$  es la función escalón unitario de Heaviside, definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

La ecuación (4.28) implica que el momento inducido únicamente existe para cada punto bajo la localización de un actuador finito. La fuerza equivalente que el actuador ejerce sobre la viga está dada por

$$f(x, t) = \frac{\partial^2 m_x(x)}{\partial x^2} \quad (4.30)$$

Sustituyendo el momento distribuido  $m_x(x)$  y la deformación  $\varepsilon_{pe}$  en la ecuación (4.30) y derivando dos veces con respecto a la coordenada longitudinal  $x$  se tiene que

$$f(x, t) = \frac{EIK^f d_{31}}{h_a} [\delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2)] V(t) \quad (4.31)$$

Por otra parte, las fuerzas modales están dadas por

$$f_r(t) = \int_0^L \phi_r(x) f(x, t) dx \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Sustituyendo (4.31) en (4.32), se obtiene

$$f_r(t) = k \int_0^L \phi_r(x) [\delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2)] V(t) dx \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

donde

$$k = \frac{EIK^f d_{31}}{h_a} \quad (4.34)$$

y  $\delta'(x)$  como la primera derivada, con respecto a  $x$ , de la función Delta de Dirac. Usando las propiedades de la derivada de la función Delta de Dirac, se tiene que

$$f_r(t) = k [\phi'_r(x_2) - \phi'_r(x_1)] V(t) \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

donde  $\phi'_r(\cdot)$  representa la primera derivada, con respecto a  $x$ , de la  $r$ -ésima forma modal. Para el caso de  $n_a$  actuadores piezoeléctricos la fuerza modal está dada por

$$f_r(t) = \sum_{i=1}^{n_a} k_i [\phi'_r(x_{2i}) - \phi'_r(x_{1i})] V_i(t) \quad r = 1, 2, \dots$$

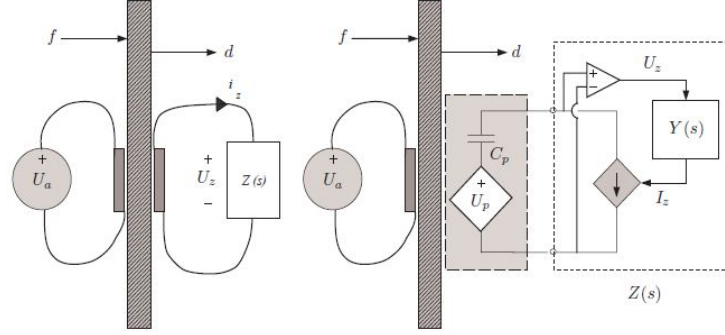


Figura 4.3: Vista física y equivalente eléctrico de una estructura perturbada por una tensión de accionamiento aplicada  $U_a(s)$  y la fuerza externa  $F(r, s)$ . La resultante de vibración  $(r, s)$  se suprime por la presencia de una impedancia shunt.

### 4.2.3. Modelado de un circuito *shunt*

Usando las funciones de transferencia en lazo abierto, la presencia de una impedancia eléctrica  $Z(s)$  se incorporara dentro de la dinámica de la estructura. Refiriéndose a la Fig. 4.3.

La relación entre el voltaje y la corriente es el dominio de Laplace es

$$U_z(s) = I_z(s) Z(s) \quad (4.36)$$

Aplicando las leyes de voltaje de Kirchhoff se obtiene

$$U_z(s) = U_p(s) - \frac{1}{C_p s} I_z(s) \quad (4.37)$$

donde  $C_p$  representa la capacitancia del transductor shunt. Combinando las ecuaciones (4.36) y (4.37) obtenemos

$$U_z(s) = \frac{Z(s)}{\frac{1}{C_p s} + Z(s)} U_p(s) \quad (4.38)$$

o

$$U_z(s) = \frac{C_p s Z(s)}{1 + C_p s Z(s)} U_p(s) \quad (4.39)$$

Aplicando el principio de superposición, las contribuciones de la perturbación y la deformación del voltaje del shunt son

$$U_p(s) = G_{ua}(s) U_a(s) + G_{uu}(s) U_z(s) \quad (4.40)$$

El sistema compuesto por el circuito shunt puede obtenerse a partir de las ecuaciones (4.36), (4.37) y (4.40),

$$\frac{U_p(s)}{U_a(s)} = \frac{G_{ua}(s)}{1 + G_{uu}(s) K(s)}, \quad (4.41)$$

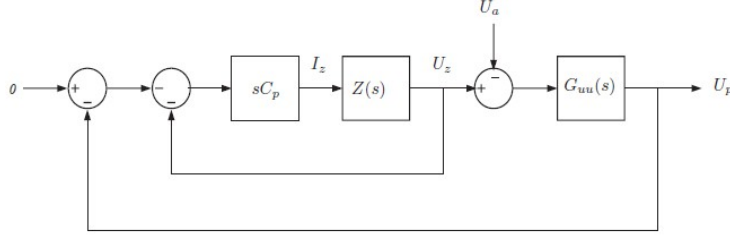


Figura 4.4: Interpretación de la retroalimentación por deformación del amortiguamiento piezoeléctrico shunt con  $G_{uu}(s) = -G_{ua}(s)$ .

donde

$$K(s) = \frac{-Z(s)}{Z(s) + \frac{1}{C_p s}} \quad (4.42)$$

La función de transferencia compuesta puede también ser derivada en una forma similar,

$$\frac{d(r, s)}{U_a(s)} = \frac{G_{da}(r, s)}{1 + G_{uu}(s) K(s)} \quad (4.43)$$

Nuevamente aplicando el principio de superposición, los efectos de la perturbación de fuerza  $F(r, s)$  localizada en el punto  $r$  pueden ser incluidos,

$$U_p(s) = \frac{1}{1 + G_{uu}(s) K(s)} (G_{ua}(s) U_a(s) + G_{uf}(r, s) F(r, s)), \quad (4.44)$$

$$d(r, s) = \frac{1}{1 + G_{uu}(s) K(s)} (G_{da}(r, s) U_a(s) + G_{df}(r, s) F(r, s)), \quad (4.45)$$

donde  $G_{df}(r, s)$  y  $G_{uf}(r, s)$  son las funciones de transferencia respectivas desde una fuerza aplicada  $F(r, s)$  al desplazamiento  $d(r, s)$  y el voltaje de transductor piezoeléctrico shunt  $U_p$ . Es decir,

$$G_{uf}(r, s) = \frac{U_p(s)}{F(r, s)} \quad G_{df}(r, s) = \frac{d(r, s)}{F(r, s)} \quad (4.46)$$

De la ecuación (4.41) se puede concluir que la presencia de una impedancia eléctrica parametrizada shunt y un controlador por retroalimentación de deformación equivalente. Una representación esquemática de la ecuación (4.41) se muestra en la Fig. 4.4.

## 4.3. Colocación de sensores y actuadores

### 4.3.1. Formulación del problema

Dado un conjunto más grande de sensores y actuadores, el problema de colocación consiste en determinar las ubicaciones de un subconjunto más pequeño de sensores o actuadores, de tal manera que las normas  $H_2$  o  $H_\infty$  de un subconjunto están tan cerca como



## CAPÍTULO 4. MODELADO DEL SISTEMA Y COLOCACIÓN DE SENSORES Y ACTUADORES

---

sea posible a las normas del conjunto original. Se resolverá el problema de colocación en coordenadas modales utilizando las propiedades estructurales derivados previamente. Proponemos una metodología relativamente sencilla de elección de un pequeño subconjunto de sensores y/o actuadores de la discretización espacial en un gran conjunto de posibles ubicaciones (ver, e.g., Gawronski [69]).

Sean  $R$  y  $S$  los conjuntos de sensor candidato y lugares de actuadores, respectivamente. Estos son elegidos de antemano como localizaciones permisibles de actuadores de la población  $S$ , y como localizaciones permisibles de sensores de población  $R$ . La colocación de  $s$  actuadores dentro de  $S$  lugares candidatos actuador, y la colocación de sensores  $r$  dentro de  $R$  lugares candidatos sensor se considera. Por supuesto, el número de lugares candidatos es mayor que el número de ubicaciones finales, es decir,  $R > r$  y  $S > s$ .

### 4.4. Propiedades aditivas para las normas modales

Las propiedades de las normas modales que son usadas en el procedimiento de colocación de actuadores y sensores se describen en este apartado.

#### 4.4.1. Índice basado en la norma $H_2$

Considerando una estructura en representación modal. La norma  $H_2$  del  $i$  –ésimo modo está dado

$$\|G_i\|_2 \cong \frac{\|B_{mi}\|_2 \|C_{mi}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}} = \frac{\|B_{mi}\|_2 \|C_{mi}\|_2}{\sqrt{2\Delta\omega_i}} \cong \gamma_i \sqrt{2\Delta\omega_i}$$

es decir,

$$\|G_i\|_2 \cong \frac{\|B_{mi}\|_2 \|C_{mi}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}}, \quad (4.47)$$

donde  $B_{mi}$  y  $C_{mi}$  son las entradas y salidas de las matrices del  $i$  –ésimo modo. Para  $S$  entradas y  $R$  salidas, estas matrices son

$$B_{mi} = [B_{mi1} \quad B_{mi2} \quad \cdots \quad B_{miS}], \quad C_{mi} = \begin{bmatrix} C_{m1i} \\ C_{m2i} \\ \vdots \\ C_{mRi} \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

Y  $B_{mij}$  es un bloque de  $2 \times 1$  para la  $j$  –ésimo entrada, mientras  $C_{mji}$  es un bloque de  $1 \times 2$  del  $j$  –ésimo salida. De las propiedades

$$\|G\|_h = \sqrt{\lambda_{\max}(W_c W_o)}, \quad \|G\|_h = \gamma_{\max} \leq 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i \cdot \|G\|_h = \gamma_{\max} \leq 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i$$

Obtenemos las siguientes propiedades aditivas de la norma  $H_2$ :

$$\|G_i\|_2^2 \cong \sum_{j=1}^R \|G_{ij}\|_2^2 \quad \text{o} \quad \|G_i\|_2^2 \cong \sum_{k=1}^S \|G_{ik}\|_2^2, \quad (4.49)$$

donde

$$\|G_{ij}\|_2 = \frac{\|B_{mij}\|_2 \|C_{mi}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}}, \quad \|G_{ik}\|_2 = \frac{\|B_{mi}\|_2 \|C_{mki}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}}, \quad (4.50)$$

Son las normas  $H_2$  del  $i$  –ésimo modo con el actuador  $j$  –ésimo solamente, o el  $i$  –ésimo modo con el sensor  $k$  –ésimo solamente. La ecuación 4.49 muestra que la norma  $H_2$  de un modo con un conjunto de actuadores (sensores) es la media cuadrática (rms) la suma de las normas  $H_2$  de este modo con un solo actuador (sensor).

#### 4.4.2. Índice basado en la norma $H_\infty$

Una relación similar puede ser obtenida para la norma  $H_\infty$ . A partir de

$$\|G_i\|_\infty \cong \frac{\|B_{mi}\|_2 \|C_{mi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i} = \frac{\|b_{mi}\|_2 \|c_{mi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i}$$

Utilizando las propiedades

$$\|G_d\|_2^2 = \text{tr}(C^T C W_{dc}) = \text{tr}(B_d B_d^T W_{do}), \quad \|G\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \|G_d\|_2,$$

Nos deja la propiedad aditiva de la norma  $H_\infty$  de la siguiente forma:

$$\|G_i\|_\infty^2 \cong \sum_{j=1}^S \|G_{ij}\|_\infty^2 \quad \text{o} \quad \|G_i\|_\infty^2 \cong \sum_{k=1}^R \|G_{ik}\|_\infty^2, \quad (4.51)$$

donde

$$\|G_{ij}\|_\infty = \frac{\|B_{mij}\|_2 \|C_{mi}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}}, \quad \|G_{ik}\|_\infty = \frac{\|B_{mi}\|_2 \|C_{mki}\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}}, \quad (4.52)$$

Son las normas  $H_\infty$  del  $i$  –ésimo modo con el actuador  $j$  –ésimo solamente, o el  $i$  –ésimo modo con el sensor  $k$  –ésimo solamente. La ecuación 4.49 muestra que la norma  $H_\infty$  de un modo con un conjunto de actuadores (sensores) es la media cuadrática (rms) la suma de las normas  $H_\infty$  de este modo con un solo actuador (sensor).

## 4.5. Índices de colocación usando las normas $H_2$ y $H_\infty$

La colocación de actuadores y sensores se resuelve independientemente, y ambos procedimientos son similares.

Sea  $G$  la función de transferencia del sistema con  $S$  actuadores candidatos. El índice de colocación  $\sigma_{2ki}$  que evalúa el  $k$  –ésimo actuador en el  $i$  –ésimo modo en términos de la norma  $H_2$  y  $H_\infty$  está definida con respecto a todos los modos y todos los actuadores permitidos.

$$\sigma_{2ki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_2}{\|G\|_2}, \quad k = 1, \dots, S, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.53)$$

$$\sigma_{\infty ki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_\infty}{\|G\|_\infty}, \quad k = 1, \dots, S, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.54)$$

donde  $w_{ki} \geq 0$  es el peso asignado al  $k$  –ésimo actuador y el  $i$  –ésimo modo,  $n$  es el número de modos, y  $G_{ki}$  es la función de transferencia del  $i$  –ésimo modo y  $k$  –ésimo actuador. El peso refleja la importancia del modo y del actuador en aplicaciones, y refleja las dimensiones de las entradas. El índice de colocación da una medida de que tanta influencia tiene el actuador  $k$  en el modo  $i$ . De esta manera, se está interesado en encontrar las posiciones en las cuales el actuador o conjunto de actuadores pueden excitar los modos de interés.

En algunas aplicaciones es conveniente representar los índices de colocación como matrices de colocación de las siguientes maneras: Para el índice de colocación  $H_2$ :

$$\sum_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{211} & \sigma_{212} & \dots & \sigma_{21k} & \dots & \sigma_{21S} \\ \sigma_{221} & \sigma_{222} & \dots & \sigma_{22k} & \dots & \sigma_{22S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2i1} & \sigma_{2i2} & \dots & \sigma_{2ik} & \dots & \sigma_{2iS} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{2n1} & \sigma_{2n2} & \dots & \sigma_{2nk} & \dots & \sigma_{2nS} \end{bmatrix} \leftarrow \text{modo } i \text{ –ésimo} \quad (4.55)$$

↑  
actuador (sensor)  $k$  –ésimo

Para el índice de colocación  $H_\infty$ :

$$\sum_{\infty} = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \cdots & \sigma_{\infty 1k} & \cdots & \sigma_{\infty 1S} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \cdots & \sigma_{\infty 2k} & \cdots & \sigma_{\infty 2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \cdots & \sigma_{\infty ik} & \cdots & \sigma_{\infty iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \cdots & \sigma_{\infty nk} & \cdots & \sigma_{\infty nS} \end{bmatrix} \leftarrow \text{modo } i - \acute{e}simo \quad (4.56)$$

$\uparrow$   
 actuador (sensor)  $k - \acute{e}simo$

El índice de colocación para el  $k - \acute{e}simo$  actuador (sensor) es la suma de la rms de la  $k - \acute{e}sima$  columna.

$$\sigma_{ak} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{ik}^2}, \quad k = 1, \dots, S, \quad (4.57)$$

El índice  $\sigma_{ak}$  expresa la influencia del actuador  $k$  en los  $n$  modos de interés.

## 4.6. Localización de sensores y actuadores

Utilizando la teoría vista en secciones pasadas, se determinará la adecuada colocación de sensores y actuadores para la viga empotrada, el objetivo es encontrar la posición adecuada en la que debe colocarse un parche piezoeléctrico que será usado para propósito de piezo-shunt, con el fin de que los primeros cuatro modos de vibración tomen su mayor excitación. Sabiendo esto, la viga utilizada en los experimentos se dividió en 100 nodos a lo largo de su eje longitudinal y se calcularon los índices de localización para un conjunto de sensores cementados en cada nodo.

La Fig. 4.5 muestra los índices de localización para cada uno de los primeros cuatro modos, como funciones de la posición de los sensores, donde se observa que en el caso del primero modo sería más fácil obtener el mayor sensado si se coloca el parche piezoeléctrico cerca de la base de la viga (nodo 1). Para el segundo modo de igual forma la posición de la base continua siendo el más conveniente, sin embargo, un parche piezoeléctrico colocado aproximadamente en el nodo 60 obtendría los mismos datos. Para el tercer modo los máximos del índice de colocación se encuentran en los nodos 1 y 78. Finalmente, para el cuarto modo el sensor debería tomar la posición cercana al nodo 86.

En la Fig. 4.6(b) en línea continua se gráfica el índice, calculado a partir de ecuación (4.57), para los nodos uno y dos, se observa que un máximo en el nodo uno, y está sería la posición adecuada para colocar un parche para el sensado de los dos primeros modos. La Fig. 4.6(c) muestra que los primeros tres modos entregan un mayor sensado en el nodo 1 y finalmente de la Fig. 4.6(d) se concluye que la posición adecuada para colocar el

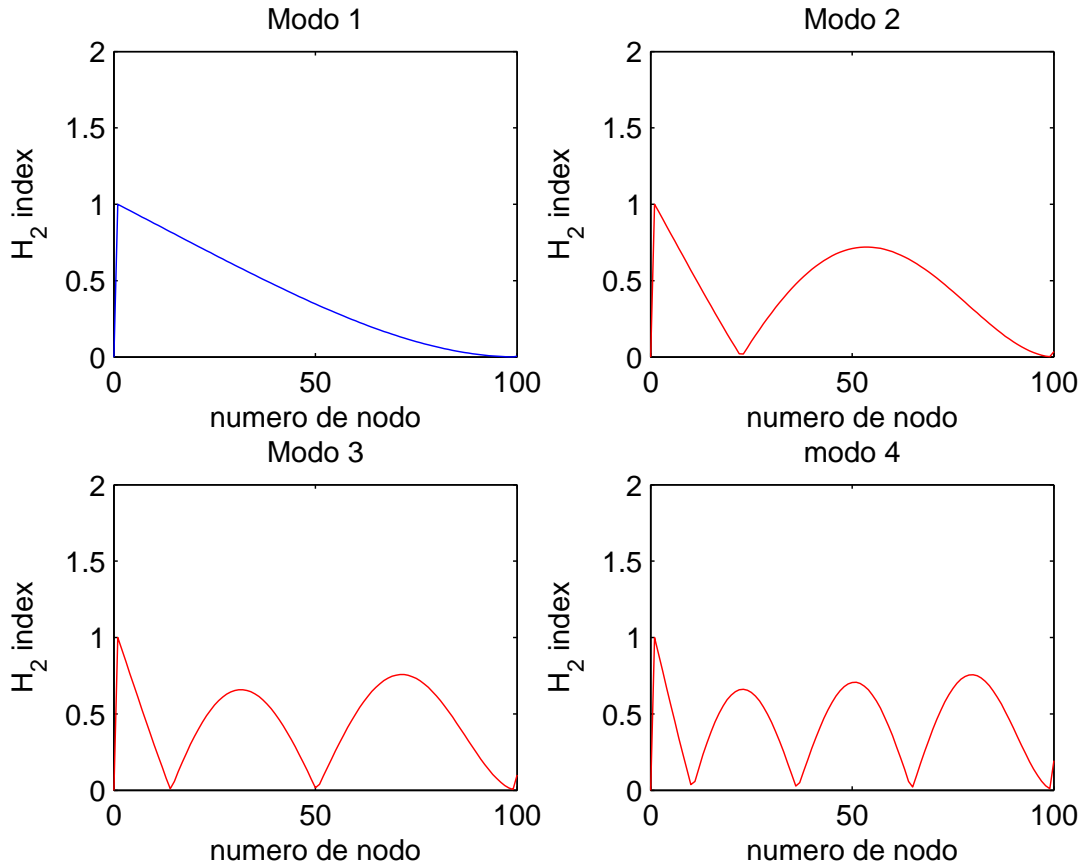


Figura 4.5: Indices de localización  $H_2$  para 100 sensores en los primeros cuatro modos de vibración.

parche piezoeléctrico es en el nodo 1 (el extremo inferior del parche debe colocarse en esa posición), pues permitirá el correcto sensado de los primeros cuatro modos de vibración. Para la colocación del segundo parche piezoeléctrico en modo referencia y teniendo el inconveniente de que la otra cara en nodo 1 de la viga empotrada se adherió una galga extensiométrica, se buscara otro lugar donde se pueda colocar este segundo parche y tenga la mayor influencia por parte de los modos de vibración tomados en consideración.

Por lo que observando nuevamente las figuras se puede apreciar que en el nodo 82 representa el siguiente punto máximo después del nodo 1, sin embargo, en este nodo no se tiene mucha influencia sobre el primer modo, por esta razón el parche de referencia se colocó en el nodo 50 donde la influencia de los cuatro modos de vibración es más notorio.

Observando la Fig. 4.5 se puede notar que para el modo 1 de vibración la máxima incidencia o el lugar donde más sensado o repercusión puede tener el parche piezoeléctrico es el nodo 1.

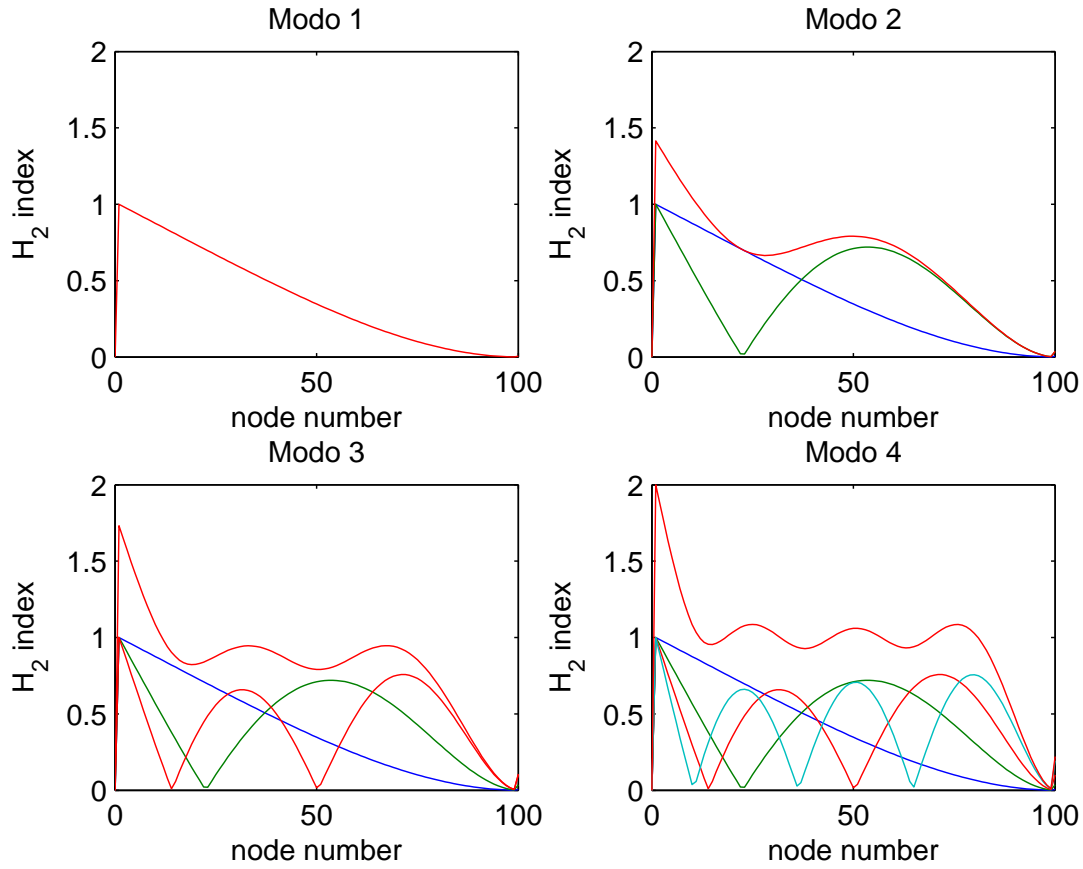


Figura 4.6: Índices de localización  $H_2$  para 100 sensores en los primeros cuatro modos de vibración y la colaboración conjunta de modos de vibración.

En la Fig. 4.7 se muestra como quedaron colocados los 2 parches piezoeléctricos, la galga extensiométrica y el acelerómetro.

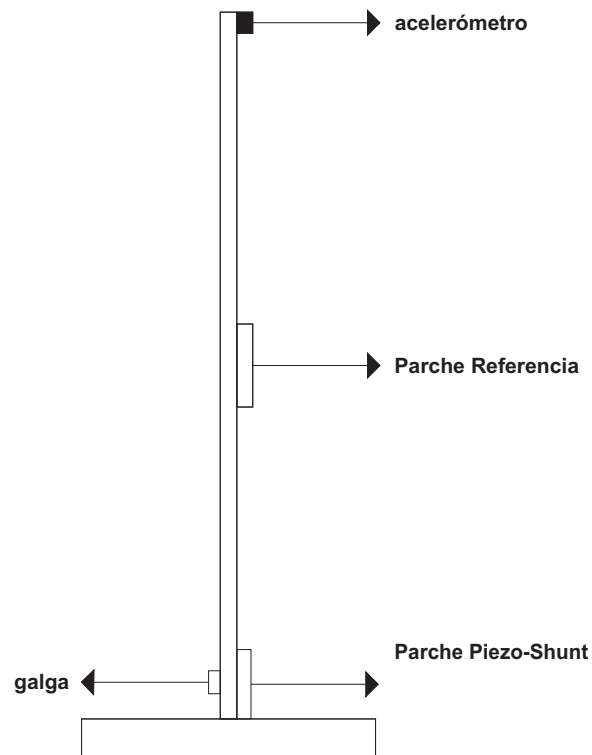


Figura 4.7: Colocación de parches piezoeléctricos, galga y acelerómetro en la viga empotrada.





# Capítulo 5

## Resultados Experimentales

### 5.1. Introducción

Conociendo las frecuencias naturales se realiza en dar una descripción de la implementación práctica-experimental de los circuitos *piezo-shunt* (absorbedores pasivo y semi-activo) previamente fabricados, seleccionando una de las cuatro frecuencias resonantes del sistema o utilizando un barrido frecuencial hasta donde se aprecian los primeros cuatro modos de vibración, esto para ver el comportamiento de la frecuencia natural al cual está diseñado el circuito *piezo-shunt* y sus repercusiones sobre los demás modos de vibración. También con el mismo sistema se hacen pruebas experimentales para el cosechamiento de energía en su implementación más primitiva (rectificador de onda completa y capacitor para su almacenamiento). También se sujetó a pruebas un sistema de cosechamiento de energía de la marca *Smart Materials*® que se adquirió. De este se presentan gráficos con salidas de fuerza y voltaje respectivamente. Con ello se puede ver la eficiencia del cosechador. También con este dispositivo se aplicaron experimentos para ver su funcionamiento como absorbedor de vibraciones.

En otra instancia también se implementó un sistema en base a interruptores con la utilización de circuitos integrados Mosfets.

### 5.2. Plataforma Experimental

La plataforma mecánica se compone de un *shaker* para vibraciones montado sobre una base y con carril. Al extremo opuesto al *shaker* cuenta con una base en posición vertical unidas ambos por un embolo, como se puede observar en la figura 5.1.

A esto se le suma una viga de aluminio empotrada en un solo extremo o como comúnmente se le denomina en voladizo.

Por otro lado tenemos la parte del sensado y/o accionamiento y en último el circuito electrónico y de instrumentación.

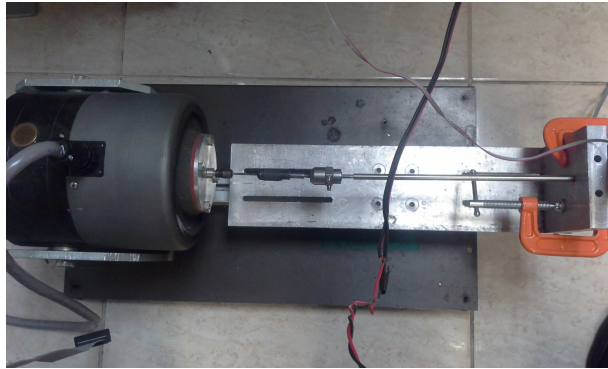


Figura 5.1: Plataforma Experimental.

En la primera parte se instalan los sensores y/o actuadores que están sujetos a la viga; para este caso de estudio se optó por colocar dos parches piezoeléctricos ubicados con precisión en puntos estratégicos en la viga se pueden observar sus parámetros en la tabla 4.1, una galga extensiométrica de igual forma colocada de forma eficiente cercana a la base para la medición de deflexión en la viga y un acelerómetro marca *Kistler*® ubicado en el extremo libre de la misma; en la Fig. 5.2 se puede apreciar estos sensores y/o actuadores. En la parte de electrónica que es externa a la viga se encuentran los circuitos *piezo-shunt* para las cuatro primeras frecuencias naturales Fig. 5.4 junto a todo el sistema para la integración y adquisición de datos para su posterior procesamiento. En este caso se optó por sistemas NI cDAQ-9172 y NI cDAQ-9174 y los módulos NI 9236 configurado con los datos de la tabla 5.1 para medir las deformaciones laterales que la galga experimental, la NI 9205 para la adquisición de señales analógicas de entrada, la NI 9234 para la medición de aceleración y el módulo NI 9263 para señales analógicas de salida, con esta se realiza un barrido frecuencial o se envía una señal de frecuencia fija con el valor o valores que deseamos, esto a un periodo de muestreo de 2 kHz y por un lapso de 120 seg. al *shaker* que es el mecanismo de excitación de la viga. Los datos recabados por estos sistemas son guardados y almacenados en *LabView*®. Y posteriormente procesados para la obtención de parámetros modales por medio de *Matlab*® y haciendo uso del método *Peak Picking*, como técnica de identificación modal; donde se hizo uso del software que fue desarrollado en *Matlab*® por el compañero Trujillo-Franco. El siguiente diagrama a bloques en la Fig. 5.2 muestra la construcción final de todo el proceso de adquisición de datos.

---

## CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

Resistencia nominal [ $\Omega$ ]	Factor de la galga a 24°C	Sensitividad transversal
$350.0 \pm 0.15 \%$	$2.135 \pm 0.5 \%$	$(+0.9 \pm 0.2) \%$

Cuadro 5.1: Especificaciones técnicas generales de las galgas extensiométricas EA-13-125AC de *Vishay*®.

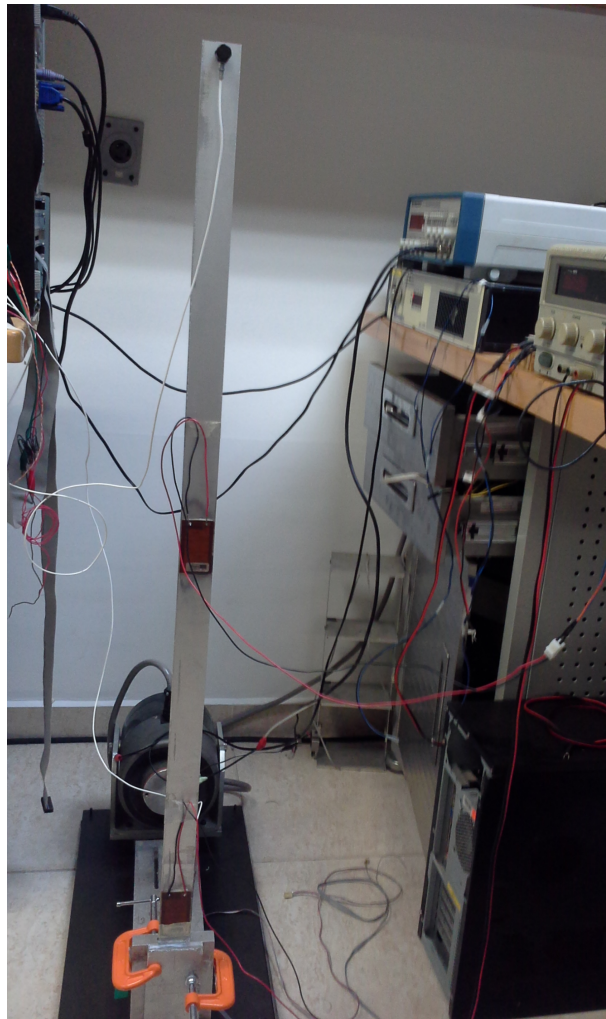


Figura 5.2: Plataforma Experimental.

### 5.3. Frecuencias Naturales del sistema (viga en voladizo) con y sin masa en punta

Una vez construida la plataforma experimental se realizan las pruebas experimentales para validar las frecuencias naturales del sistema obtenidas de forma analítica y simuladas mediante el software de ANSYS 11.

En el proceso mostraremos un barrido frecuencial o comúnmente llama señal *chirp* de rango de  $45\text{ Hz}$  y duración de  $120\text{ seg.}$  con frecuencia de muestreo de  $2\text{ kHz}$ , Fig. 5.3 esto ya mencionados en el apartado anterior. Se obtiene la FRF del nuestro sistema para conocer los valores de estas frecuencias resonantes. Cabe recordar que estos valores son la base para la sintonización de los circuitos *piezo-shunt*. También estos valores sirven para realizar los análisis y desarrollo en las pruebas con el cosechador de energía.

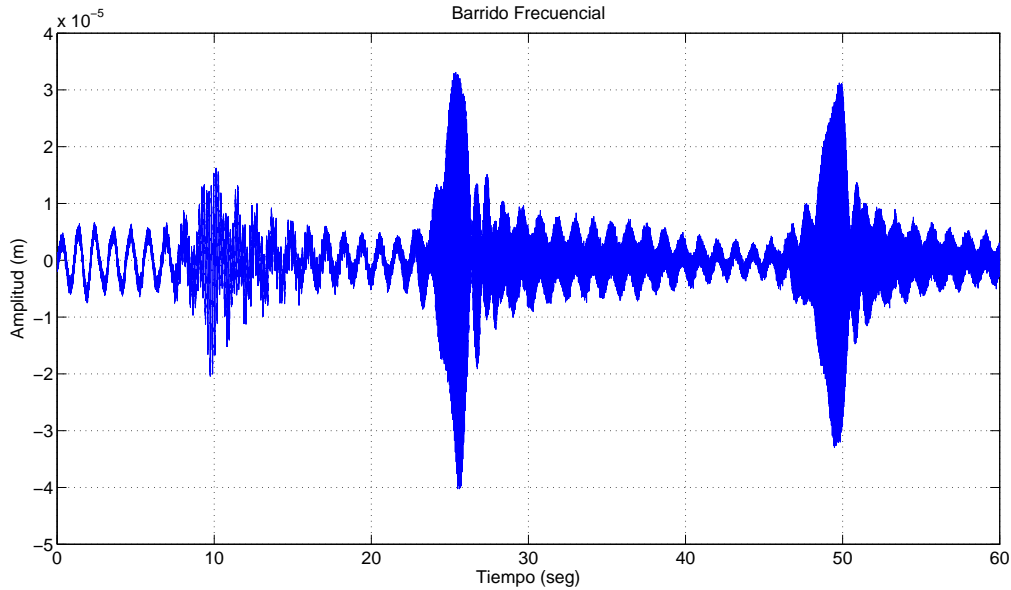


Figura 5.3: Señal tipo *chirp* o barrido frecuencial de  $0\text{ Hz}$  a  $45\text{ Hz}$  con duración de  $60\text{ seg.}$

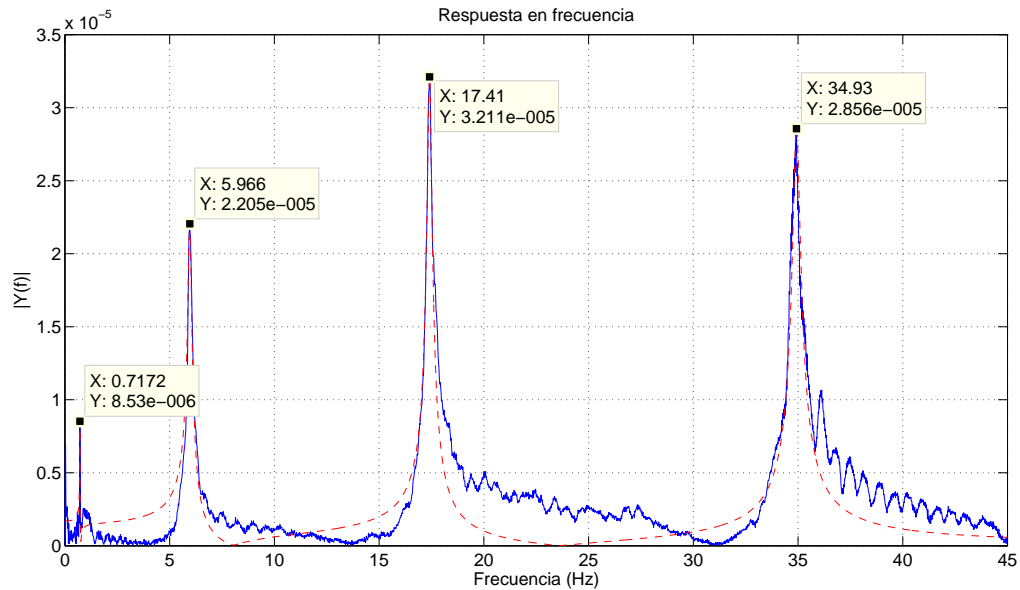


Figura 5.4: Frecuencias naturales con FFT de MatLab.

En la Tabla 5.2 se pueden observar los resultados obtenidos de la forma analítica, simulada, experimental con masa en punta y experimental sin masa en punta.

Frec. Naturales	1era. [Hz]	2da. [Hz]	3era. [Hz]	4ta. [Hz]
Analítico	0.9449	6.586	19.37	39.14
Simulado	0.7172	5.798	17.24	34.32
Experimental con masa	0.7172	5.96	17.41	34.93
Experimental sin masa	0.885	5.546	18.50	36.54

Cuadro 5.2: Frecuencias naturales de la viga en voladizo.

## 5.4. Cosechador de Energía

En la Fig. 5.5 se muestra el diagrama a bloques para la adquisición de datos en las pruebas ejercidas al circuito cosechador de energía.

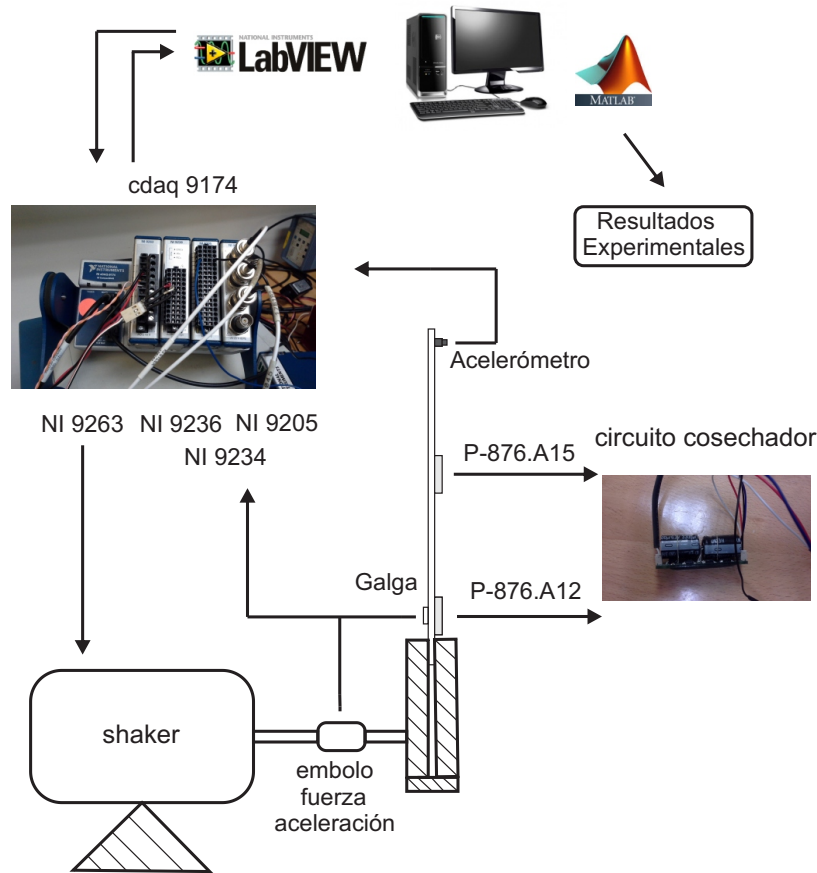
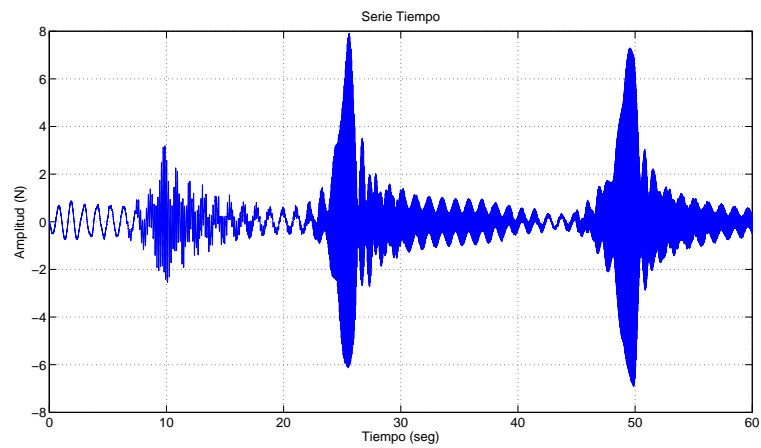


Figura 5.5: Diagrama a bloques de la adquisición de datos para el circuito cosechador de energía.

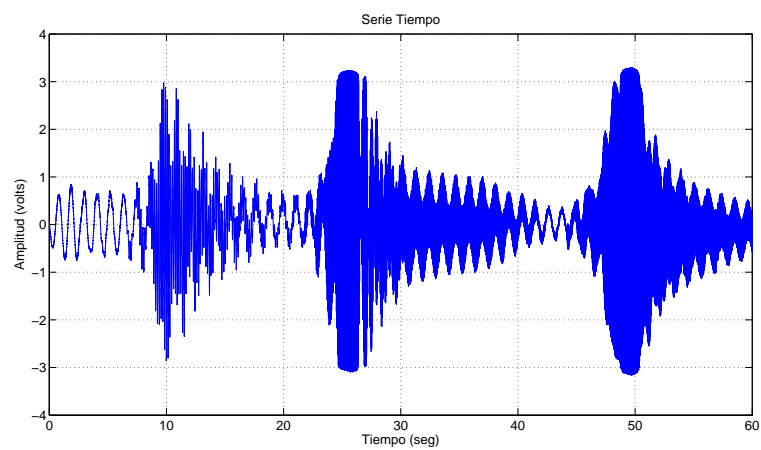
## CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

La siguiente Fig. 5.6 son pruebas donde se puede apreciar el consumo en voltaje que realiza el cosechador de energía sobre la estructura en estudio con respecto al tiempo.



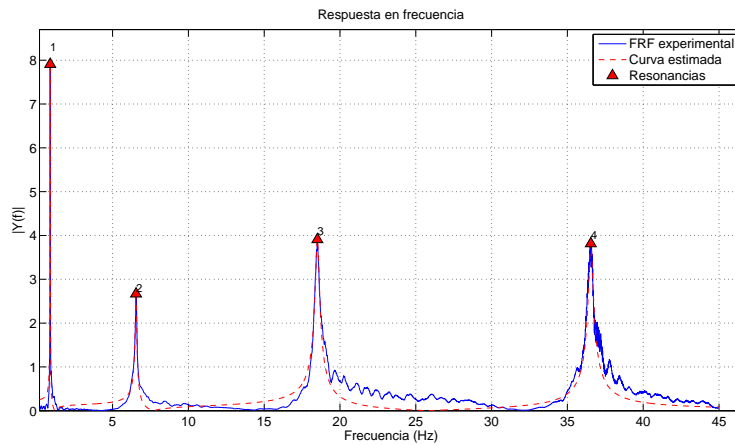
(a)



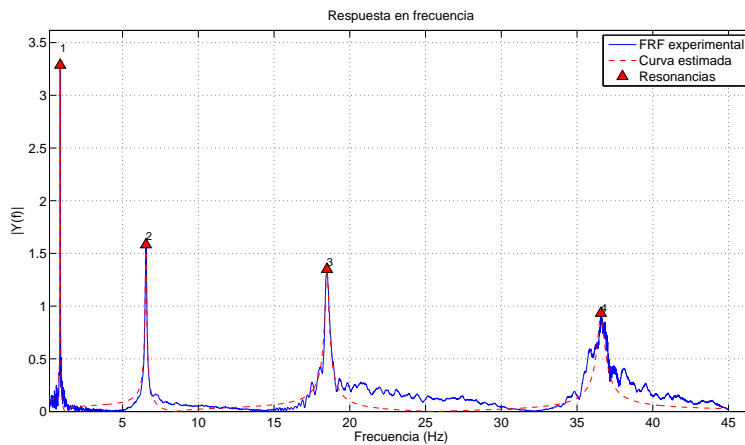
(b)

Figura 5.6: (a) Barrido frecuencial sin cosechador de energía y (b) Aplicando el cosechador de energía.

Posterior se obtienen sus FRF's de las señales para observar su comportamiento en el dominio de la frecuencia Fig. 5.7. Se observa una gran disminución de la amplitud de la señal de voltaje de entrada del dispositivo, pero esto no necesariamente indica que tenga un desempeño de absorbedor eficiente para ello podemos observar sus parámetros modales



(a)



(b)

Figura 5.7: (a) FRF sin cosechador de energía y (b) FRF con el cosechador de energía.

En este caso se pueden obtener los valores de potencia de salida utilizando la ecuación (2.12) en el sistema de cosechamiento de energía.

Este resultado te da una valoración del consumo de energía por parte del sistema de cosechamiento de energía.



## CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

En la Fig. 5.8 se observan los parámetros modales obtenidos mediante las FRF's de las señales del voltaje obtenidas sin cosechador y con cosechador de energía.

	Modo	Frecuencia(Hz)	psi	coeficiente
1	1	0.8850	0.0072	0.0890
2	2	6.5461	0.0079	1.8018
3	3	18.5092	0.0079	21.1162
4	4	36.5454	0.0045	45.9654

(a)

	Modo	Frecuencia(Hz)	psi	coeficiente
1	1	0.8850	0.0074	0.0381
2	2	6.5461	0.0077	1.0382
3	3	18.4939	0.0072	6.6568
4	4	36.5759	0.0063	15.6539

(b)

Figura 5.8: (a) Parámetros modales sin cosechador de energía y (b) Y con el cosechador de energía.

Ahora bien tratándose del cosechamiento de energía un aspecto importante a tratar es la cantidad de energía que es transformada y almacenada en el dispositivo por cierto instante de tiempo, es decir, que se quiere conocer los valores máximos de voltaje por instante de tiempo. Para esta prueba lo que se realizó fue fijar las frecuencias de modales por un lapso de 60seg. y a la salida del dispositivo registrar los datos obtenidos con esto se puede estimar el tiempo en que puede completar el total del almacenamiento de energía del artefacto. No hay que olvidar que el cosechamiento es proporcional a la deformación de la viga.

En la Fig. 5.9 se pueden apreciar las señales obtenidas por cada modo de vibración a la salida del cosechador de energía. A proporción por la fuerza implementada en el *shaker* como se muestra en la Fig. 5.10.

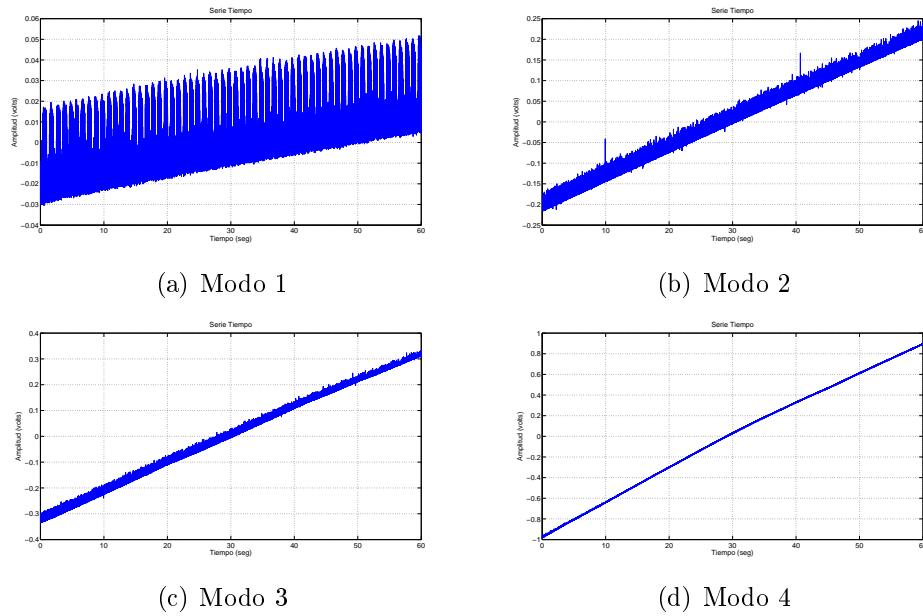


Figura 5.9: Salidas de voltaje para diferentes modos de vibración.

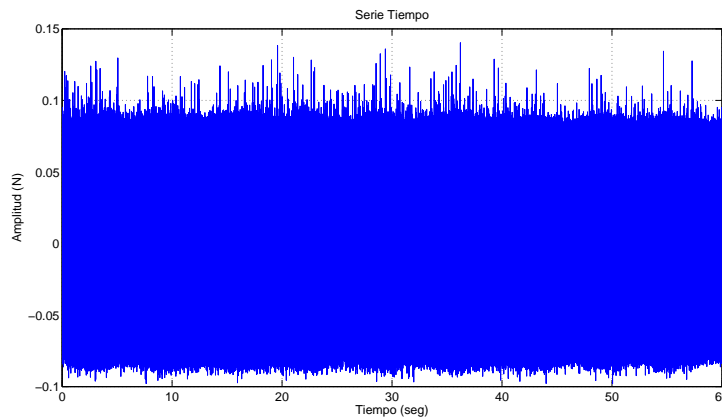
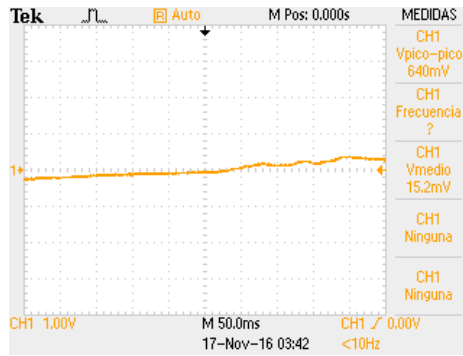


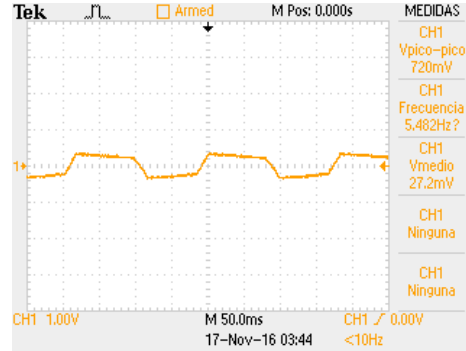
Figura 5.10: Fuerza aplicada para el cosechamiento de energía en los 4 modos de vibración.

En la Fig. 5.11 se observa la proporcionalidad que existe entre la deformación de la viga y la corriente de entrada emitida por los parches piezoeléctricos.

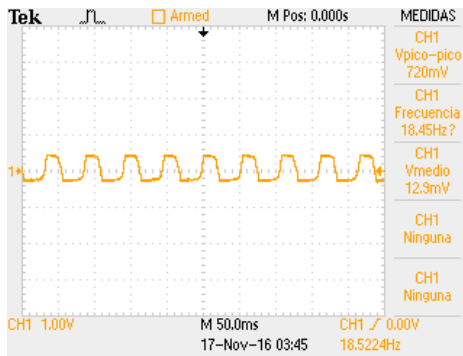
## CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES



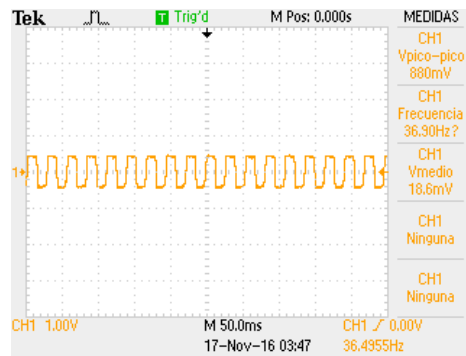
(a) Modo 1



(b) Modo 2



(c) Modo 3



(d) Modo 4

Figura 5.11: Salidas de voltaje para diferentes modos de vibración.

## 5.5. Circuitos tipo *Piezo-Shunt*

En esta sección se realizan pruebas a los circuitos *piezo-shunt* construidos para los 4 modos de vibración. Con un sistema de adquisición y procesamiento de señales se obtienen las respuestas del circuito. Fig. 5.12 refleja el diagrama del sistema total para la el procesamiento de las señales y la Fig. 5.13 muestra el circuito *shunt* utilizado.

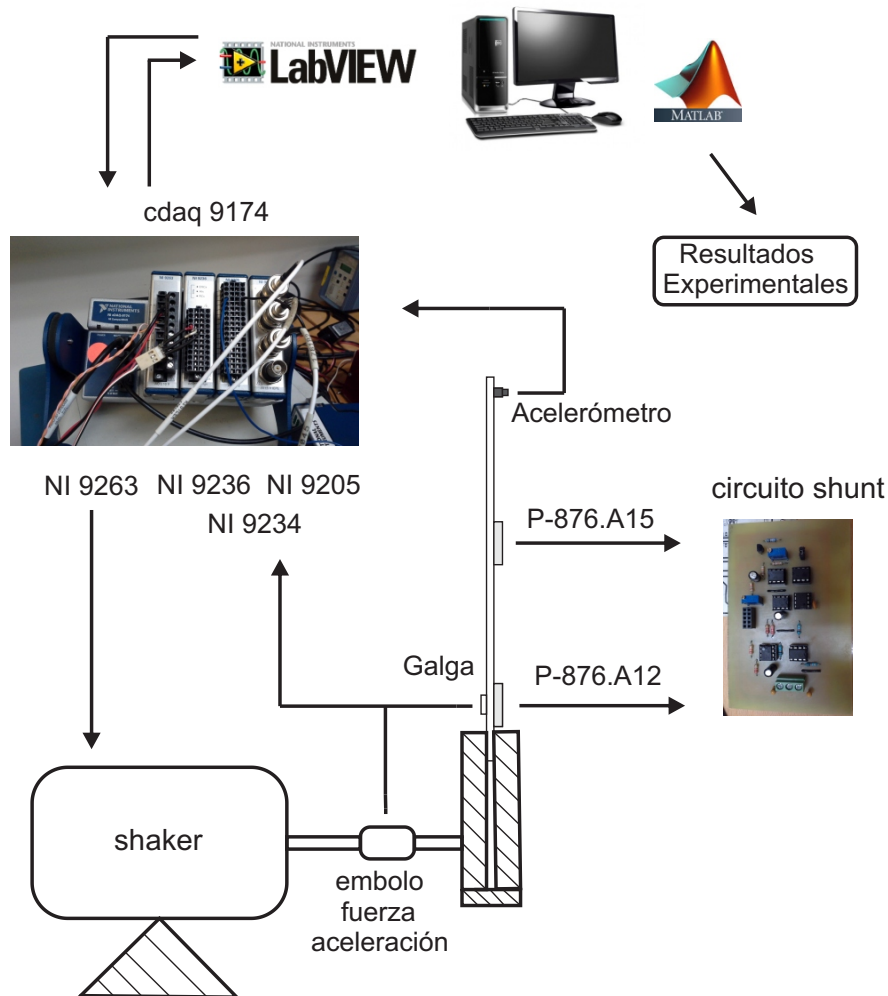


Figura 5.12: Diagrama a bloques para la adquisición y procesamiento de datos para los circuitos *piezo-shunts*.

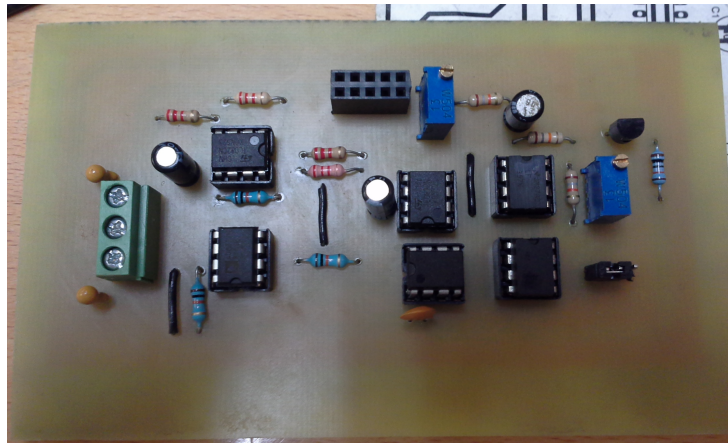


Figura 5.13: Circuito piezo-shunt.

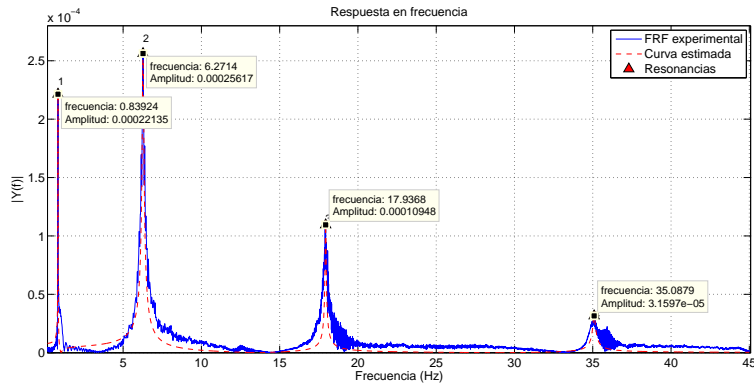
El proceso ya es conocido, se realiza un barrido frecuencial libre del circuito *shunt* para obtener sus parámetros en estado normal, como segunda fase se realiza un segundo barrido frecuencial pero ahora incluyendo el circuito *shunt* para también obtener sus parámetros. Posteriormente, haciendo uso del análisis modal y del método de *Peak Picking* se analizan las señales obtenidas.

1. Señal obtenida sin utilización del circuito *piezo-shunt*
2. Señal obtenida incluyendo el circuito *piezo-shunt*

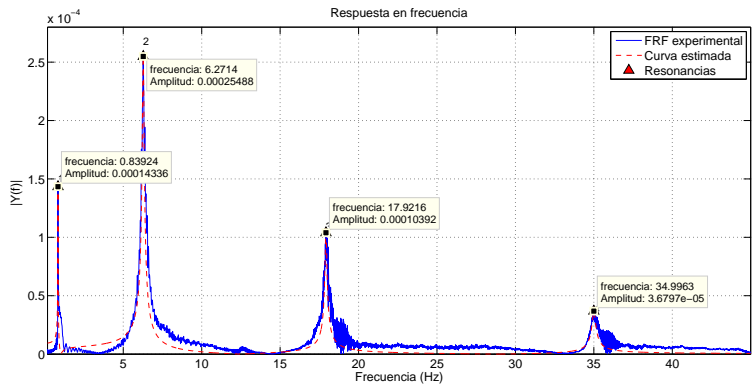
Esto para la obtención de los parámetros modales de los dos sistemas, los cuales incluyen el conocimiento de la frecuencia, razón de amortiguamiento  $\zeta$  y el coeficiente modal. Con los parámetros se puede hacer una comparación del amortiguamiento inyectado al sistema a causa del circuito *piezo-shunt*, también te dice si el funcionamiento del sistema *piezo-shunt* como absorbedor de vibraciones es eficiente y viable.

Como primer experimento se presentan las pruebas realizadas para la primera frecuencia natural, donde en la Fig. 5.14 se muestran los resultados después de haber implementado un barrido frecuencial de  $0\text{ Hz}$  a  $45\text{ Hz}$  sobre la estructura. Y en la Fig. 5.15 se muestran los parámetros modales resultantes de las dos etapas.

## 5.5. CIRCUITOS TIPO *PIEZO-SHUNT*



(a)



(b)

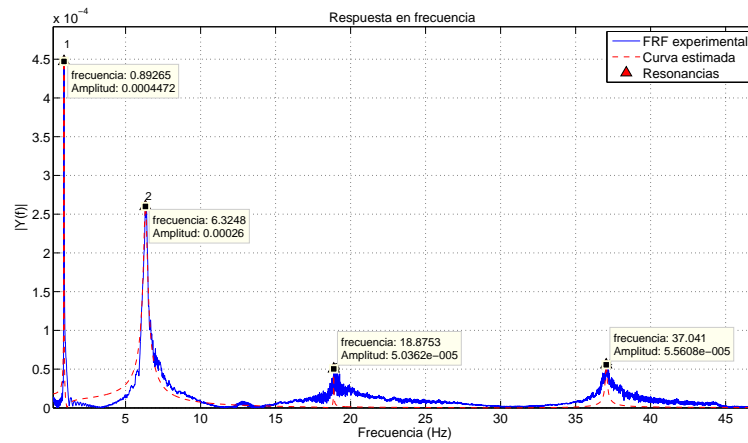
Figura 5.14: (a) Modo 1 sin circuito *piezo-shunt* y (b) modo 1 con circuito *piezo-shunt*.

Peak Picking					Peak Picking				
	Modo	Frecuencia(Hz)	zeta	coeficiente		Modo	Frecuencia(Hz)	zeta	coeficiente
	1	0.8392	0.0062	1.9293e-06	1	1	0.8392	0.0112	2.2708e-06
	2	6.2714	0.0089	1.7898e-04	2	2	6.2714	0.0100	2.0038e-04
	3	17.9368	0.0020	1.4137e-04	3	3	17.9216	0.0037	2.4402e-04
	4	35.0879	0.0025	1.9771e-04	4	4	34.9963	0.0033	2.9357e-04

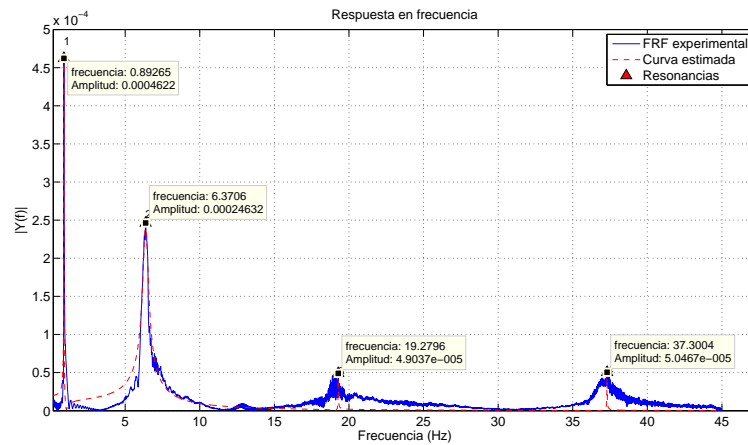
Figura 5.15: Obtenemos una inyección de amortiguamiento ( $\zeta$ )=80.6 %.

En los resultados para el segundo modo de vibración Fig. 5.16 se aprecian las FRF's obtenidas, donde puede apreciar en magnitud la atenuación del modo 2 de vibración y en la Fig. 5.17 los parámetros modales obtenidos una vez que se aplica el método de *Pick Picking*. Nos enfocaremos en la constante de amortiguamiento  $\zeta$  que es la que nos da una información válida del funcionamiento del circuito tipo *shunt*.

## CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a)



(b)

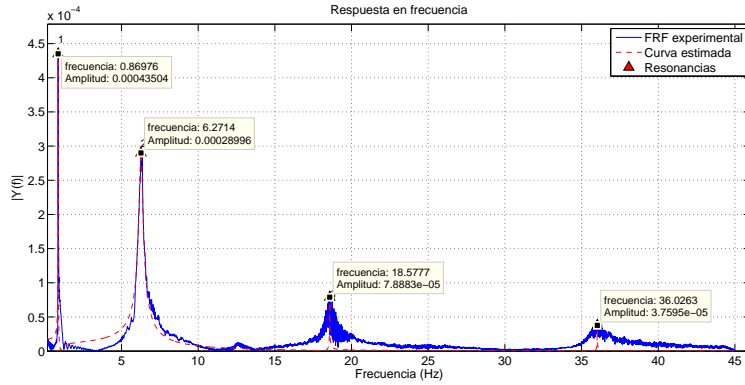
Figura 5.16: (a) Modo 2 sin circuito *piezo-shunt* y (b) modo 2 con circuito *piezo-shunt*.

Peak Picking					Peak Picking				
	Modo	Frecuencia(Hz)	psi	coeficiente		Modo	Frecuencia(Hz)	psi	coeficiente
1	1	0.8926	0.0069	4.9248e-06	1	1	0.8926	0.0064	4.6894e-06
2	2	6.3248	0.0220	4.5697e-04	2	2	6.3706	0.0282	5.6289e-04
3	3	18.8753	4.6852e-04	1.6813e-05	3	3	19.2796	3.6419e-04	1.3276e-05
4	4	37.0410	0.0016	2.3778e-04	4	4	37.3004	1.7850e-04	2.5067e-05

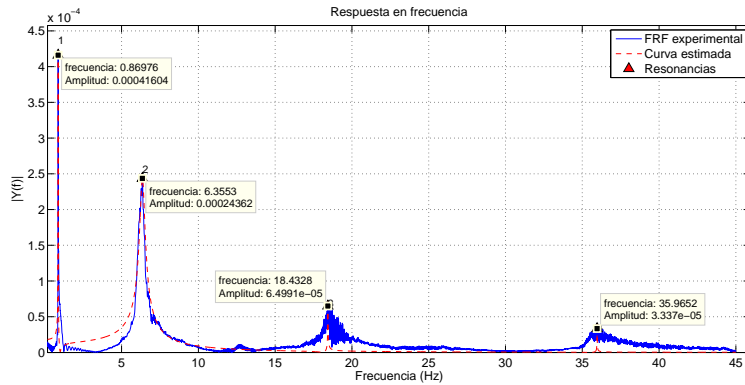
Figura 5.17: Obtenemos una inyección de amortiguamiento ( $\zeta$ )=28.18 %.

De igual forma se continua con los modos 3 y 4 de vibración de la estrucutra tipo viga

en voladizo. En las Fig. 5.18 y 5.19 se presentan los resultados del tercer modo de vibración y en las Fig. 5.20 y Fig. 5.21 se muestran los resultados del último modo de vibración.



(a)



(b)

Figura 5.18: (a) Modo 3 sin circuito *piezo-shunt* y (b) modo 3 con circuito *piezo-shunt*.

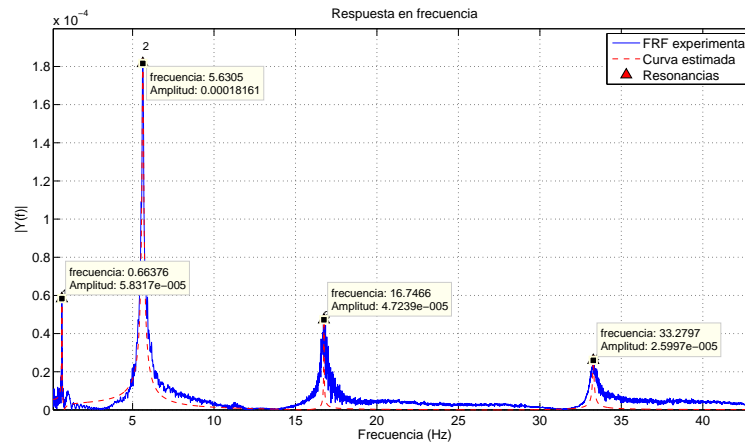
Peak Picking				
	Modo	Frecuencia(Hz)	zeta	coeficiente
1	1	0.8698	0.0059	3.8787e-06
2	2	6.2714	0.0207	4.7145e-04
3	3	18.5777	4.7499e-04	2.5863e-05
4	4	36.0263	1.9525e-04	1.9054e-05

Peak Picking				
	Modo	Frecuencia(Hz)	zeta	coeficiente
1	1	0.8698	0.0054	3.4015e-06
2	2	6.3553	0.0278	5.4690e-04
3	3	18.4328	5.8123e-04	2.5669e-05
4	4	35.9652	1.8399e-04	1.5883e-05

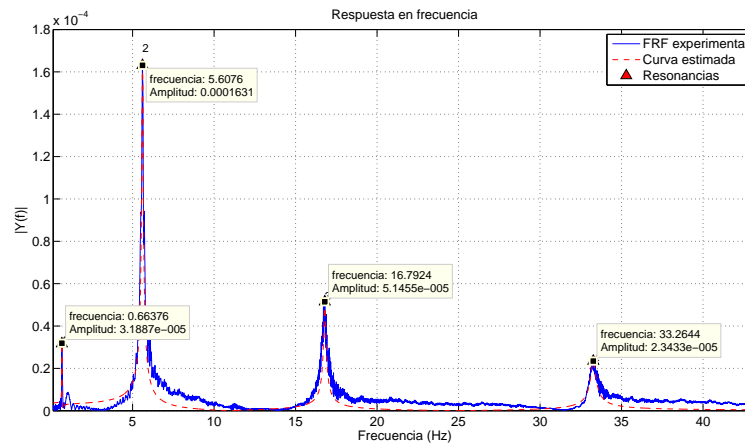
Figura 5.19: Obtenemos una inyección de amortiguamiento ( $\zeta$ )=22.5 %.



## CAPÍTULO 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a)



(b)

Figura 5.20: (a) Modo 4 sin circuito *piezo-shunt* y (b) modo 4 con circuito *piezo-shunt*.

Peak Picking				
	Modo	Frecuencia(Hz)	psi	coeficiente
1	1	0.6638	0.0156	8.0382e-07
2	2	5.6305	0.0094	1.0839e-04
3	3	16.7466	6.5804e-04	1.7435e-05
4	4	33.2797	0.0012	6.9199e-05

Peak Picking				
	Modo	Frecuencia(Hz)	psi	coeficiente
1	1	0.6638	0.0065	1.8144e-07
2	2	5.6076	0.0081	8.2790e-05
3	3	16.7924	0.0039	1.1456e-04
4	4	33.2644	0.0045	2.3235e-04

Figura 5.21: Obtenemos una inyección de amortiguamiento ( $\zeta$ )=275 %.



# Capítulo 6

## Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se presentó una forma de inyección de amortiguamiento pasivo como cosechador de energía y uno semiactivo denominado como *piezo-shunt* para la inyección de amortiguamiento y absorción de vibraciones empleando una estructura tipo viga en voladizo.

Se incluyen los diagramas utilizados para la implementación del circuito electrónico, exhibiendo cada paso realizado para el control adaptable de los primeros 4 modos de vibración considerados. Cabe recalcar que los componentes utilizados son comerciales por lo que reproducir el diseño del circuito no tendría que alcanzar mayores dificultades.

Con respecto a los resultados experimentales obtenidos, se pudo constatar que las variables ambientales existentes en el entorno donde se realizaron los experimentos fueron un factor importante, ya que los parches piezoeléctricos presentan cambios en sus parámetros, debido a la variación de la temperatura.

Cabe mencionar que también se llevaron a cabo varias pruebas, modificando el circuito *piezo-shunt* para ver que factores son los que se debían atacar de forma directa, así como recabar datos de la máxima obtención de energía del circuito cosechador utilizado.

Es importante señalar que los coeficientes de amortiguamiento en los cuatro primeros modos de vibración de la viga que se modificaron, se incrementaron en 80.6 % para el primer modo, 22.18 % para el segundo modo, 22.5 % en el tercer modo y un porcentaje de 275 % para el último modo de vibración en estudio, y por consecuencia reduciendo la respuesta resonante en los modos de vibración.

Como trabajo futuro se propone abordar el aspecto del fenómeno conocido como *spillover* que también se llegó a presentar en los resultados recabados en esta tesis, así como atacar los problemas de variación de temperatura, que ocasionan variaciones en los parámetros de los parches piezoeléctricos. Asimismo, se puede hacer una mejor integración entre el circuito tipo *piezo-shunt* y el cosechador de energía, es decir, diseñar un circuito completamente autónomo. Adicionalmente, las estrategias de inyección de amortiguamiento o cosechamiento de energía se podrían aplicar a una estructura mecánica más compleja, como un plato o estructura espacial con elementos tipo vigas o barras, así como evaluar

---

el desempeño obtenido cuando las fuerzas de excitación son del tipo estocástico o cuyo contenido armónico sea más amplio, como aquellas que ocurren en entornos exteriores (e.g., por efectos del viento u incluso otras cargas regulares).

# Bibliografía

- [1] G Song, V Sethi, and H-N Li. Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: a review. *Engineering Structures*, 28(11):1513–1524, 2006.
- [2] S Hurlebaus and L Gaul. Smart structure dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(2):255–281, 2006.
- [3] Devendra P Garg, Mohammed A Zikry, and Gary L Anderson. Current and potential future research activities in adaptive structures: an aro perspective. *Smart Materials and Structures*, 10(4):610, 2001.
- [4] Miguel Cúpich Rodríguez and Fernando Javier Elizondo Garza. Actuadores piezoeléctricos. *Ingenierías*, 3(6):22–28, 2000.
- [5] NW Hagood and AA Bent. Development of piezoelectric fiber composites for structural actuation. In *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 34th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 3625–3638, 1993.
- [6] Holger Hanselka. Adaptronik und fragen zur systemzuverlässigkeit. *Automatisierungstechnische Praxis*, 44(2):40–49, 2002.
- [7] Alberto Belloli, Dominik Niederberger, Stanislaw Pietrzko, Manfred Morari, and Paolo Ermanni. Structural vibration control via rl shunted active fiber composites. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18(3):275–287, 2007.
- [8] Christopher C Fuller, Sharon Elliott, and Philip A Nelson. *Active control of vibration*. Academic Press, 1996.
- [9] Stephen Prajna, Oliver Kaiser, Stanislaw Pietrzko, and Manfred Morari. Robust active control of a vibrating plate. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108(5):2452–2453, 2000.
- [10] C-C Sung and C-Y Chiu. Control of sound transmission through thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 218(4):605–618, 1998.

- [11] Michael J Konak, Ian G Powlesland, Stephen P van der Velden, and Stephen C Galea. Self-powered discrete time piezoelectric vibration damper. In *Far East and Pacific Rim Symposium on Smart Materials, Structures, and MEMS*, pages 270–279. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- [12] Robert L Forward. Electronic damping of vibrations in optical structures. *Applied Optics*, 18(5):690–697, 1979.
- [13] Nesbitt W Hagood and Andreas von Flotow. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2):243–268, 1991.
- [14] DL Edberg, AS Bicos, CM Fuller, JJ Tracy, and JS Fechter. Theoretical and experimental studies of a truss incorporating active members. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 3:333–347, 1992.
- [15] Sam Behrens, SO Reza Moheimani, and AJ Fleming. Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller. *Journal of Sound and Vibration*, 266(5):929–942, 2003.
- [16] MS Tsai and KW Wang. On the structural damping characteristics of active piezoelectric actuators with passive shunt. *Journal of Sound and Vibration*, 221(1):1–22, 1999.
- [17] SO Reza Moheimani. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(4):482–494, 2003.
- [18] Dominik Niederberger, Andrew Fleming, SO Reza Moheimani, and Manfred Morari. Adaptive multi-mode resonant piezoelectric shunt damping. *Smart Materials and Structures*, 13(5):1025, 2004.
- [19] Shu-yau Wu. Piezoelectric shunts with a parallel rl circuit for structural damping and vibration control. In *1996 Symposium on Smart Structures and Materials*, pages 259–269. International Society for Optics and Photonics, 1996.
- [20] Shu-yau Wu. Broadband piezoelectric shunts for passive structural vibration control. In *SPIE's 8th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*, pages 251–261. International Society for Optics and Photonics, 2001.
- [21] Sam Behrens and SO Reza Moheimani. Current flowing multiple-mode piezoelectric shunt dampener. In *SPIE's 9th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*, pages 217–226. International Society for Optics and Photonics, 2002.

- [22] Jaehwan Kim and Jin-Young Choi. Passive piezoelectric damping tuned by using measured electrical impedance. In *SPIE's 8th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*, pages 420–431. International Society for Optics and Photonics, 2001.
- [23] AJ Fleming and SOR Moheimani. Adaptive piezoelectric shunt damping. *Smart Materials and Structures*, 12(1):36, 2003.
- [24] Maurizio Porfiri, FM Frattale Mascioli, et al. Circuit analog of a beam and its application to multimodal vibration damping, using piezoelectric transducers. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 32(4):167–198, 2004.
- [25] Corrado Maurini, Francesco Dell'Isola, and Dionisio Del Vescovo. Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5):1243–1271, 2004.
- [26] Francesco dell'Isola, Corrado Maurini, and Maurizio Porfiri. Passive damping of beam vibrations through distributed electric networks and piezoelectric transducers: prototype design and experimental validation. *Smart Materials and Structures*, 13(2):299, 2004.
- [27] William W Clark. Vibration control with state-switched piezoelectric materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11(4):263–271, 2000.
- [28] Claude Richard, Daniel Guyomar, David Audigier, and Henri Bassaler. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In *SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*, pages 288–299. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [29] Lawrence R Corr and William W Clark. A novel semi-active multi-modal vibration control law for a piezoceramic actuator. *Journal of Vibration and Acoustics*, 125(2):214–222, 2003.
- [30] Qirong Lin and Paolo Ermanni. Semi-active damping of a clamped plate using pzt. *International Journal of Solids and Structures*, 41(7):1741–1752, 2004.
- [31] George A Lesieutre, Geoffrey K Ottman, and Heath F Hofmann. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, 269(3):991–1001, 2004.
- [32] Geoffrey K Ottman, Heath F Hofmann, and George A Lesieutre. Optimized piezoelectric energy harvesting circuit using step-down converter in discontinuous conduction mode. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 18(2):696–703, 2003.

- [33] Andrew J Fleming, Sam Behrens, and SO Reza Moheimani. An autonomous piezoelectric shunt damping system. In *Smart Structures and Materials*, pages 207–216. International Society for Optics and Photonics, 2003.
- [34] Nathan S Shenck and Joseph A Paradiso. Energy scavenging with shoe-mounted piezoelectrics. *IEEE micro*, 21(3):30–42, 2001.
- [35] George A Lesieutre, Christopher L Davis, and Jeffrey J Dosch. Piezoceramic vibration control device and tuning control thereof, February 27 2001. US Patent 6,193,032.
- [36] Christopher L Davis, George A Lesieutre, and Jeffrey J Dosch. Tunable electrically shunted piezoceramic vibration absorber. In *Smart Structures and Materials '97*, pages 51–59. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- [37] David J Warkentin and Nesbitt W Hagood. Nonlinear piezoelectric shunting for structural damping. In *Smart Structures and Materials '97*, pages 747–757. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- [38] Douglas R Browning and Woodson D Wynn. Vibration damping system using active negative capacitance shunt circuit with piezoelectric reaction mass actuator, September 24 1996. US Patent 5,558,477.
- [39] Shu-Yau Wu. Broadband piezoelectric shunts for structural vibration control, June 13 2000. US Patent 6,075,309.
- [40] Chul-Hue Park. Multi-mode vibration damping device and method using negative capacitance shunt circuits, March 22 2005. US Patent 6,870,303.
- [41] Andrew J Fleming and SO Reza Moheimani. Control orientated synthesis of high-performance piezoelectric shunt impedances for structural vibration control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(1):98–112, 2005.
- [42] Jay M Goodliff. Self-sensing piezoelectric actuation: analysis and application to controlled structures. 1992.
- [43] Jeffrey J Dosch, Daniel J Inman, and Ephrahim Garcia. A self-sensing piezoelectric actuator for collocated control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 3(1):166–185, 1992.
- [44] Wai Wing Law, WH Liao, and J Huang. Vibration control of structures with self-sensing piezoelectric actuators incorporating adaptive mechanisms. *Smart Materials and Structures*, 12(5):720, 2003.



- [45] Lionel Petit, Elie Lefevre, Claude Richard, and Daniel Guyomar. A broadband semi passive piezoelectric technique for structural damping. In *Smart Structures and Materials*, pages 414–425. International Society for Optics and Photonics, 2004.
- [46] Andrew Fleming, Sam Behrens, and Reza Moheimani. Vibrational damping apparatus and method for deriving a digital signal processing algorithm, November 18 2002. US Patent App. 10/295,822.
- [47] AJ Fleming, S Behrens, and SOR Moheimani. Synthetic impedance for implementation of piezoelectric shunt-damping circuits. *Electronics Letters*, 36(18):1, 2000.
- [48] A Antoniou. Realisation of gyrators using operational amplifiers, and their use in re-active-network synthesis. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 116(11):1838–1850, 1969.
- [49] RHS Riordan. Simulated inductors using differential amplifiers. *Electronics Letters*, 2(3):50–51, 1967.
- [50] PAA Laura, JL Pombo, and EA Susemihl. A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, 37(2):161–168, 1974.
- [51] Robert D Blevins. Formulas for natural frequencies and mode shapes, robt. *Kreiger Co*, 1979.
- [52] Alper Erturk and Daniel J Inman. Mechanical considerations for modeling of vibration-based energy harvesters. In *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 769–778. American Society of Mechanical Engineers, 2007.
- [53] Hyeoungwoo Kim, Shashank Priya, Harry Stephanou, and Kenji Uchino. Consideration of impedance matching techniques for efficient piezoelectric energy harvesting. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 54(9):1851–1859, 2007.
- [54] Daniel Guyomar, Adrien Badel, Elie Lefevre, and Claude Richard. Toward energy harvesting using active materials and conversion improvement by nonlinear processing. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 52(4):584–595, 2005.
- [55] Song Guo and Hoi Lee. An efficiency-enhanced integrated cmos rectifier with comparator-controlled switches for transcutaneous powered implants. In *2007 IEEE Custom Integrated Circuits Conference*, pages 385–388. IEEE, 2007.

- 
- [56] Hoi Lee and Philip KT Mok. An sc voltage doubler with pseudo-continuous output regulation using a three-stage switchable opamp. *IEEE journal of solid-state circuits*, 42(6):1216–1229, 2007.
- [57] Shashank Priya and Daniel J Inman. *Energy harvesting technologies*, volume 21. Springer, 2009.
- [58] G Poulin, E Sarraute, and F Costa. Generation of electrical energy for portable devices: Comparative study of an electromagnetic and a piezoelectric system. *Sensors and Actuators A: physical*, 116(3):461–471, 2004.
- [59] Yonas Tadesse, Shujun Zhang, and Shashank Priya. Multimodal energy harvesting system: piezoelectric and electromagnetic. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(5):625–632, 2009.
- [60] Muturi G Muriuki. *An investigation into the design and control of tunable piezoelectric resonators*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 2004.
- [61] Shashank Priya, Dwight Viehland, Alfredo Vázquez Carazo, Jungho Ryu, and Kenji Uchino. High-power resonant measurements of piezoelectric materials: Importance of elastic nonlinearities. *Journal of applied physics*, 90(3):1469–1479, 2001.
- [62] AH Nayfeh and DT Mook. *Nonlinear oscillations* john wiley & sons. *New York*, 1979.
- [63] Wai-Kai Chen. *Passive and active filters: theory and implementations*. Wiley, 1986.
- [64] Joseph J Hollkamp and Thomas F Starchville. A self-tuning piezoelectric vibration absorber. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5(4):559–566, 1994.
- [65] Dominik Niederberger, Manfred Morari, and Stanislaw J Pietrzko. Adaptive resonant shunted piezoelectric devices for vibration suppression. In *Smart Structures and Materials*, pages 213–224. International Society for Optics and Photonics, 2003.
- [66] Niederberger D. *Smart damping materials using shunt control*. Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 16043, 2006, 2005.
- [67] Andrew J Fleming and SO Reza Moheimani. Adaptive piezoelectric shunt damping. In *SPIE's 9th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*, pages 556–567. International Society for Optics and Photonics, 2002.
- [68] Edward F Crawley and Javier De Luis. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA journal*, 25(10):1373–1385, 1987.
- [69] Wodek Gawronski. *Advanced structural dynamics and active control of structures*. Springer Science & Business Media, 2004.
-

## Anexos A

### Anexo I: Hojas de Datos

# P-876 DuraAct™

## Piezoelectric Patch Transducers



The small-sized P-876.SP1 DuraAct™ transducers (left) are designed for applications where space is at a premium. On the right, the P-876.A12 series transducer (golf ball for size comparison)

- Actuator, Sensor or Energy Source
- Highly Formable Ceramics
- Can be Applied to Curved Surfaces
- Customized Solutions on Request
- Cost-Effective

P-876 DuraAct™ patch transducers combine the functionality of piezoceramic materials as sensors and actuators as well as for electrical charge generation and storage. Used as a bender actuator, they allow high deflection with high force and precision. Other possible operation modes of DuraAct™ transducers are as high-dynamics sensor (e.g. for structural health monitoring) or for energy harvesting.

### Integration into Adaptive Systems

With their compact design, DuraAct™ transducers can be applied to structure areas where deformations are to be generated or detected. For this purpose the transducers can be affixed to the surface of structures or they can be integrated as structural elements. Whole areas are monitored effectively by applying an array of several DuraAct™ on a surface.

DuraAct™ patch transducers are ideally suited for active and adaptive systems. Embedded in a servo-control loop, vibrations can be reduced and structures can be controlled in the nanometer range.

### Robust and Cost-Effective Design for Industrial Applications

The laminated design consisting of a piezoceramic plate and polymers provides a mechanically preloaded and electrically insulated device for easy handling. P-876 patch transducers

feature a rugged design with the mechanical stability of a structural material.

### Energy Harvesting: Self-Sustaining Systems in a Small Package

Another operation mode of DuraAct™ patch transducers is the application as energy harvester. The transformation of mechanical vibrations up to some kilohertz may yield electrical power in the milliwatt range. This power supplies miniature electronic devices like LEDs, sensors or even transmitters for remote data control.

### Notes

DuraAct™ Transducers can be offered in highly customized versions:

- Flexible choice of dimensions

### Ordering Information

**P-876.A11**  
DuraAct™ Patch Transducer,  
61 x 35 x 0,4 mm

**P-876.A12**  
DuraAct™ Patch Transducer,  
61 x 35 x 0,5 mm

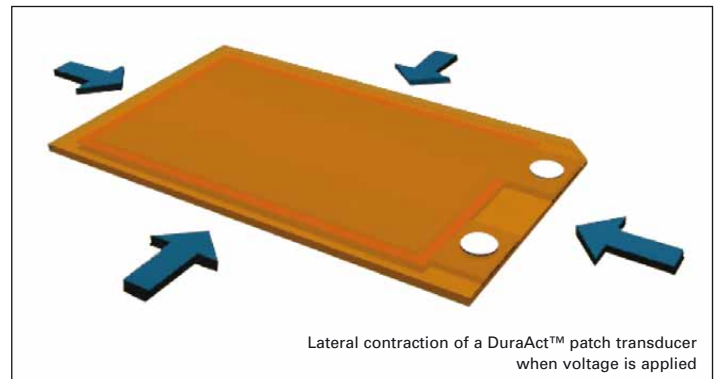
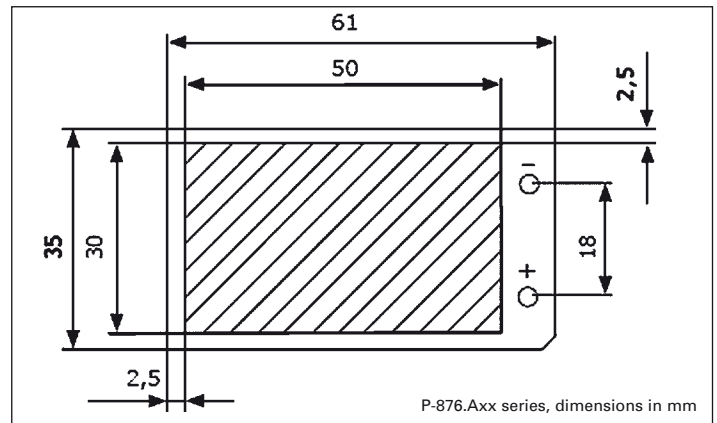
**P-876.A15**  
DuraAct™ Patch Transducer,  
61 x 35 x 0,8 mm

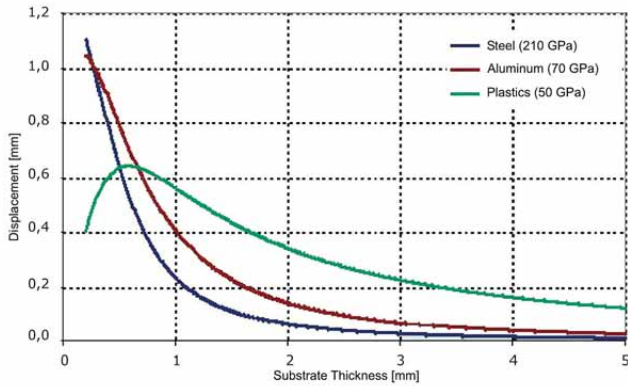
**P-876.SP1**  
DuraAct™ Patch Transducer,  
16 x 13 x 0,5 mm

### Ask about custom designs!

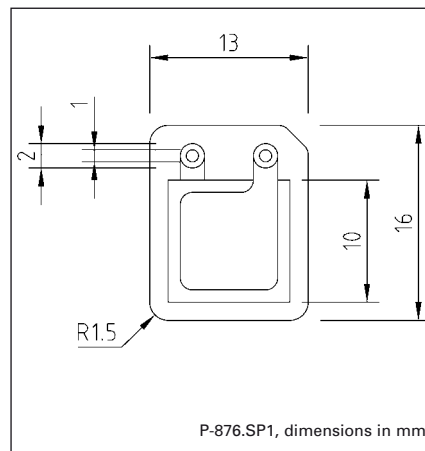
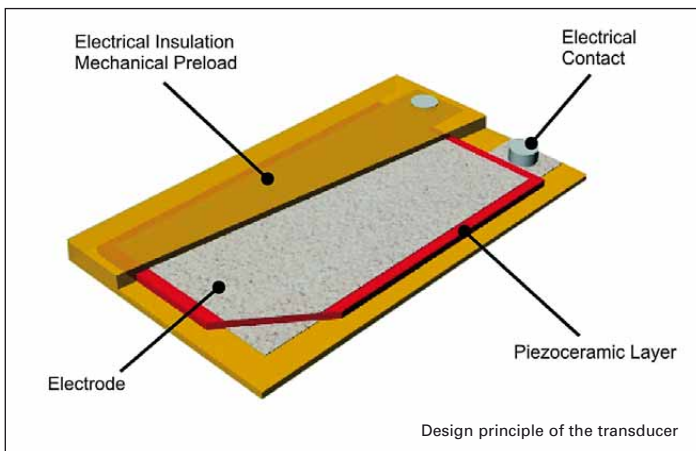
- Flexible choice of thickness and bending properties
- Flexible choice of piezo-ceramic materials and operating temperature
- Various electrical connection designs

Combining sensor and actuator functions (multiple ceramic layers)





Deflection of a bending transducer as a function of the substrate thickness for different materials. A bending transducer consists of a substrate with a P-876 actuator (here: P-876.A15) glued to one side. A contraction of the actuator effects a deflection  $W$



### Linear Actuators & Motors

PiezoWalk® Motors / Actuators

PILine® Ultrasonic Motors

DC-Servo & Stepper Actuators

### Piezo Actuators & Components

Guided / Preloaded Actuators

Unpackaged stack Actuators

Patches/Benders/Tubes/Shear..

### Nanopositioning / Piezoelectrics

### Nanometrology

### Micropositioning

### Index

### Technical Data

Model	P-876.A11	P-876.A12	P-876.A15	P-876.SP1	Tolerances
Operating voltage	-50 to +200 V	-100 to +400 V	-250 to +1000 V	-100 to +400 V	
<b>Motion and positioning</b>					
Lateral contraction, open-loop	400 $\mu\text{m}/\text{m}$ 1.6 $\mu\text{m}/\text{m}/\text{V}$	650 $\mu\text{m}/\text{m}$ 1.3 $\mu\text{m}/\text{m}/\text{V}$	800 $\mu\text{m}/\text{m}$ 0.64 $\mu\text{m}/\text{m}/\text{V}$	650 $\mu\text{m}/\text{m}$ 1.3 $\mu\text{m}/\text{m}/\text{V}$	min. (+20%/-0) min. (+20%/-0)
<b>Mechanical properties</b>					
Blocking force	90 N	265 N	775 N	280 N	
Length	61 mm	61 mm	61 mm	16 mm	$\pm 0.5$ mm
Width	35 mm	35 mm	35 mm	13 mm	$\pm 0.5$ mm
Thickness	0.4 mm	0.5 mm	0.8 mm	0.5 mm	$\pm 0.5$ mm
Bending radius	12 mm	20 mm	70 mm	-	max.
<b>Drive properties</b>					
Ceramic type	PIC 252 Layer thickness: 100 $\mu\text{m}$	PIC 255 Layer thickness: 200 $\mu\text{m}$	PIC 255 Layer thickness: 500 $\mu\text{m}$	PIC 255 Layer thickness: 200 $\mu\text{m}$	
Electrical Capacitance	150 nF	90 nF	45 nF	8 nF	$\pm 20\%$
<b>Miscellaneous</b>					
Operating temperature range*	-20 to +150 °C	-20 to +150 °C	-20 to +150 °C	-20 to +150 °C	
Mass	2.1 g	3.5 g	7.2 g	0.3 g	$\pm 10\%$
Voltage connection	Soldering pads	Soldering pads	Soldering pads	Soldering pads	
Recommended controller / amplifier (actuator mode)	E-413.D2 (s. p. 2-120) E-835 (s. p. 2-166)	E-413.D2 (s. p. 2-120) E-835 (s. p. 2-166)	E-508 (s. p. 2-150) E-835 (s. p. 2-166)	E-413.D2 (s. p. 2-120) E-835 (s. p. 2-166)	

\* Short-term operation up to 180 °C

## LFX5x JFET Input Operational Amplifiers

### 1 Features

- Advantages
  - Replace Expensive Hybrid and Module FET Op Amps
  - Rugged JFETs Allow Blow-Out Free Handling Compared With MOSFET Input Devices
  - Excellent for Low Noise Applications Using Either High or Low Source Impedance—Very Low 1/f Corner
  - Offset Adjust Does Not Degrade Drift or Common-Mode Rejection as in Most Monolithic Amplifiers
  - New Output Stage Allows Use of Large Capacitive Loads (5,000 pF) Without Stability Problems
  - Internal Compensation and Large Differential Input Voltage Capability
- Common Features
  - Low Input Bias Current: 30 pA
  - Low Input Offset Current: 3 pA
  - High Input Impedance:  $10^{12} \Omega$
  - Low Input Noise Current:  $0.01 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}$
  - High Common-Mode Rejection Ratio: 100 dB
  - Large DC Voltage Gain: 106 dB
- Uncommon Features
  - Extremely Fast Settling Time to 0.01%:
    - 4  $\mu\text{s}$  for the LFX55 devices
    - 1.5  $\mu\text{s}$  for the LFX56
    - 1.5  $\mu\text{s}$  for the LFX57 ( $A_V = 5$ )
  - Fast Slew Rate:
    - 5  $\text{V}/\mu\text{s}$  for the LFX55
    - 12  $\text{V}/\mu\text{s}$  for the LFX56
    - 50  $\text{V}/\mu\text{s}$  for the LFX57 ( $A_V = 5$ )
  - Wide Gain Bandwidth:
    - 2.5 MHz for the LFX55 devices
    - 5 MHz for the LFX56
    - 20 MHz for the LFX57 ( $A_V = 5$ )
  - Low Input Noise Voltage:
    - 20  $\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  for the LFX55
    - 12  $\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  for the LFX56
    - 12  $\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  for the LFX57 ( $A_V = 5$ )

### 2 Applications

- Precision High-Speed Integrators
- Fast D/A and A/D Converters
- High Impedance Buffers
- Wideband, Low Noise, Low Drift Amplifiers
- Logarithmic Amplifiers
- Photocell Amplifiers
- Sample and Hold Circuits

### 3 Description

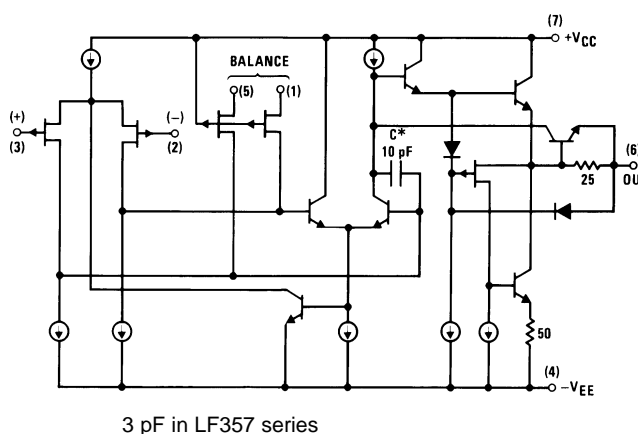
The LFX5x devices are the first monolithic JFET input operational amplifiers to incorporate well-matched, high-voltage JFETs on the same chip with standard bipolar transistors (BI-FET™ Technology). These amplifiers feature low input bias and offset currents/low offset voltage and offset voltage drift, coupled with offset adjust, which does not degrade drift or common-mode rejection. The devices are also designed for high slew rate, wide bandwidth, extremely fast settling time, low voltage and current noise and a low 1/f noise corner.

#### Device Information<sup>(1)</sup>

PART NUMBER	PACKAGE	BODY SIZE (NOM)
LFX5x	SOIC (8)	4.90 mm × 3.91 mm
	TO-CAN (8)	9.08 mm × 9.08 mm
	PDIP (8)	9.81 mm × 6.35 mm

(1) For all available packages, see the orderable addendum at the end of the data sheet.

#### Simplified Schematic



## Table of Contents

<b>1 Features</b> .....	<b>1</b>	7.2 Functional Block Diagram .....	<b>15</b>
<b>2 Applications</b> .....	<b>1</b>	7.3 Feature Description .....	<b>16</b>
<b>3 Description</b> .....	<b>1</b>	7.4 Device Functional Modes.....	<b>16</b>
<b>4 Revision History</b> .....	<b>2</b>	<b>8 Application and Implementation</b> .....	<b>17</b>
<b>5 Pin Configuration and Functions</b> .....	<b>3</b>	8.1 Application Information.....	<b>17</b>
<b>6 Specifications</b> .....	<b>4</b>	8.2 Typical Application .....	<b>18</b>
6.1 Absolute Maximum Ratings .....	<b>4</b>	8.3 System Examples .....	<b>20</b>
6.2 ESD Ratings.....	<b>4</b>	<b>9 Power Supply Recommendations</b> .....	<b>33</b>
6.3 Recommended Operating Conditions.....	<b>4</b>	<b>10 Layout</b> .....	<b>33</b>
6.4 Thermal Information .....	<b>5</b>	10.1 Layout Guidelines .....	<b>33</b>
6.5 AC Electrical Characteristics, $T_A = T_J = 25^\circ\text{C}$ , $V_S = \pm 15\text{ V}$ .....	<b>5</b>	10.2 Layout Example .....	<b>34</b>
6.6 DC Electrical Characteristics, $T_A = T_J = 25^\circ\text{C}$ , $V_S = \pm 15\text{ V}$ .....	<b>6</b>	<b>11 Device and Documentation Support</b> .....	<b>35</b>
6.7 DC Electrical Characteristics .....	<b>6</b>	11.1 Related Links .....	<b>35</b>
6.8 Power Dissipation Ratings .....	<b>7</b>	11.2 Community Resources.....	<b>35</b>
6.9 Typical Characteristics .....	<b>8</b>	11.3 Trademarks .....	<b>35</b>
<b>7 Detailed Description</b> .....	<b>14</b>	11.4 Electrostatic Discharge Caution.....	<b>35</b>
7.1 Overview .....	<b>14</b>	11.5 Glossary .....	<b>35</b>
		<b>12 Mechanical, Packaging, and Orderable Information</b> .....	<b>35</b>

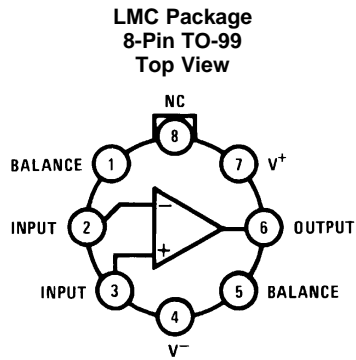
## 4 Revision History

NOTE: Page numbers for previous revisions may differ from page numbers in the current version.

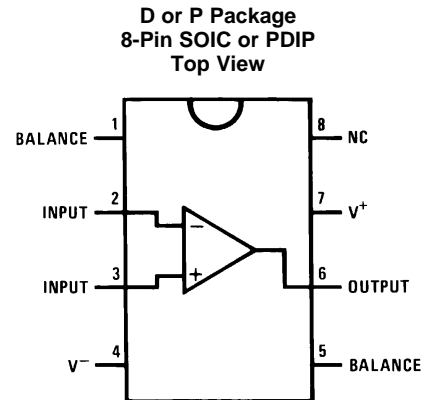
Changes from Revision C (March 2013) to Revision D	Page
• Added <i>Pin Configuration and Functions</i> section, <i>ESD Ratings</i> table, <i>Thermal Information</i> table, <i>Feature Description</i> section, <i>Device Functional Modes</i> , <i>Application and Implementation</i> section, <i>Power Supply Recommendations</i> section, <i>Layout</i> section, <i>Device and Documentation Support</i> section, and <i>Mechanical, Packaging, and Orderable Information</i> section .....	<b>1</b>
• Removed $T_{\text{HIGH}}$ parameter as it is redundant to $T_A$ maximum .....	<b>4</b>

Changes from Revision B (March 2013) to Revision C	Page
• Changed layout of National Data Sheet to TI format .....	<b>31</b>

## 5 Pin Configuration and Functions



Available per JM38510/11401 or  
JM38510/11402



### Pin Functions

PIN		I/O	DESCRIPTION
NAME	NO.		
BALANCE	1, 5	I	Balance for input offset voltage
+INPUT	3	I	Noninverting input
-INPUT	2	I	Inverting input
NC	8	—	No connection
OUTPUT	6	O	Output
V+	7	—	Positive power supply
V-	4	—	Negative power supply



## 6 Specifications

### 6.1 Absolute Maximum Ratings

over operating free-air temperature range (unless otherwise noted) <sup>(1)(2)(3)</sup>

		MIN	MAX	UNIT	
Supply voltage	LF155x, LF256x, LF356B		±22	V	
	LF35x		±18		
Differential input voltage	LF15x, LF25x, LF356B		±40	V	
	LF35x		±30		
Input voltage <sup>(4)</sup>	LF15x, LF25x, LF356B		±20	V	
	LF35x		±16		
Output short circuit duration		Continuous		—	
T <sub>JMAX</sub>	LMC package	LF15x	150	°C	
		LF25x, LF356B, LF35x	115		
	P package	LF25x, LF356B, LF35x	100		
	D package	LF25x, LF356B, LF35x	100		
Soldering information (lead temp.)	TO-99 package	Soldering (10 sec.)		°C	
	PDIP package	Soldering (10 sec.)			
	SOIC package	Vapor phase (60 sec.)	LF25x, LF356B, LF35x		215
		Infrared (15 sec.)	LF25x, LF356B, LF35x		220
Storage temperature, T <sub>stg</sub>		-65	150	°C	

- Stresses beyond those listed under *Absolute Maximum Ratings* may cause permanent damage to the device. These are stress ratings only, which do not imply functional operation of the device at these or any other conditions beyond those indicated under *Recommended Operating Conditions*. Exposure to absolute-maximum-rated conditions for extended periods may affect device reliability.
- The maximum power dissipation for these devices must be derated at elevated temperatures and is dictated by  $T_{JMAX}$ ,  $\theta_{JA}$ , and the ambient temperature,  $T_A$ . The maximum available power dissipation at any temperature is  $P_D = (T_{JMAX} - T_A) / \theta_{JA}$  or the 25°C  $P_{dMAX}$ , whichever is less.
- If Military/Aerospace specified devices are required, contact the TI Sales Office/Distributors for availability and specifications.
- Unless otherwise specified the absolute maximum negative input voltage is equal to the negative power supply voltage.

### 6.2 ESD Ratings

		VALUE	UNIT
V <sub>(ESD)</sub>	Electrostatic discharge	Human body model (HBM), per ANSI/ESDA/JEDEC JS-001 <sup>(1)(2)</sup>	±1000 V

- JEDEC document JEP155 states that 500-V HBM allows safe manufacturing with a standard ESD control process.
- 100 pF discharged through 1.5-kΩ resistor

### 6.3 Recommended Operating Conditions

over operating free-air temperature range (unless otherwise noted)

		MIN	NOM	MAX	UNIT
Supply voltage, V <sub>S</sub>	LF15x	±15	V <sub>S</sub>	±20	V
	LF25x	±15	V <sub>S</sub>	±20	
	LF356B	±15	V <sub>S</sub>	±20	
	LF35x			±15	
T <sub>A</sub>	LF15x	-55	T <sub>A</sub>	125	°C
	LF25x	-25	T <sub>A</sub>	85	
	LF356B	0	T <sub>A</sub>	70	
	LF35x	0	T <sub>A</sub>	70	

## 6.4 Thermal Information

THERMAL METRIC <sup>(1)</sup>		LF155, LF156, LF355, LF357			LF356	UNIT
		P (PDIP)	D (SOIC)	LMC (TO-99)	P (PDIP)	
		8 PINS	8 PINS	8 PINS	8 PINS	
R <sub>θJA</sub>	Junction-to-ambient thermal resistance	130	195	—	55.2	°C/W
	Still Air	—	—	160	—	
	400 LF/Min Air Flow	—	—	65	—	
R <sub>θJC(top)</sub>	Junction-to-case (top) thermal resistance	—	—	23	44.5	°C/W
R <sub>θJB</sub>	Junction-to-board thermal resistance	—	—	—	32.4	°C/W
ψ <sub>JT</sub>	Junction-to-top characterization parameter	—	—	—	21.7	°C/W
ψ <sub>JB</sub>	Junction-to-board characterization parameter	—	—	—	32.3	°C/W

(1) For more information about traditional and new thermal metrics, see the *Semiconductor and IC Package Thermal Metrics* application report, [SPRA953](#).

## 6.5 AC Electrical Characteristics, T<sub>A</sub> = T<sub>J</sub> = 25°C, V<sub>S</sub> = ±15 V

PARAMETER		TEST CONDITIONS		MIN	TYP	MAX	UNIT
SR	Slew Rate	LF15x: A <sub>V</sub> = 1	LFx55		5		V/μs
			LFx56, LF356B		7.5		
			LFx56, LF356B		12		
		LF357: A <sub>V</sub> = 5	LFx57		50		
GBW	Gain Bandwidth Product	LFx55			2.5		MHz
		LFx56, LF356B			5		
		LFx57			20		
t <sub>s</sub>	Settling Time to 0.01% <sup>(1)</sup>	LFx55			4		μs
		LFx56, LF356B			1.5		
		LFx57			1.5		
e <sub>n</sub>	Equivalent Input Noise Voltage	R <sub>S</sub> = 100 Ω	f = 100 Hz	LFx55		25	nV/√Hz
				LFx56, LF356B		15	
				LFx57		15	
			f = 1000 Hz	LFx55		20	nV/√Hz
				LFx56, LF356B		12	
				LFx57		12	
i <sub>n</sub>	Equivalent Input Current Noise	f = 100 Hz	LFx55		0.01	pA/√Hz	
			LFx56, LF356B		0.01		
			LFx57		0.01		
		f = 1000 Hz	LFx55		0.01	pA/√Hz	
			LFx56, LF356B		0.01		
			LFx57		0.01		
C <sub>IN</sub>	Input Capacitance	LFx55			3	pF	
		LFx56, LF356B			3		
		LFx57			3		

(1) Settling time is defined here, for a unity gain inverter connection using 2-kΩ resistors for the LF15x. It is the time required for the error voltage (the voltage at the inverting input pin on the amplifier) to settle to within 0.01% of its final value from the time a 10-V step input is applied to the inverter. For the LF357, A<sub>V</sub> = -5, the feedback resistor from output to input is 2 kΩ and the output step is 10 V (See [Settling Time Test Circuit](#)).

## 6.6 DC Electrical Characteristics, $T_A = T_J = 25^\circ\text{C}$ , $V_S = \pm 15\text{ V}$

PARAMETER	TEST CONDITIONS	MIN	TYP	MAX	UNIT
Supply current	LF155		2	4	mA
	LF355		2	4	
	LFx56, LF356B		5	7	
	LF356		5	10	
	LF357		5	10	

## 6.7 DC Electrical Characteristics

See <sup>(1)</sup>

PARAMETER	TEST CONDITIONS		MIN	TYP	MAX	UNIT
$V_{OS}$ Input offset voltage	$R_S = 50\ \Omega$	$T_A = 25^\circ\text{C}$	LF15x, LF25x, LF356B	3	5	mV
			LF35x	3	10	
	Over temperature		LF15x		7	
			LF25x, LF356B		6.5	
			LF35x		13	
$\Delta V_{OS}/\Delta T$ Average TC of input offset voltage	$R_S = 50\ \Omega$		LF15x, LF25x, LF356B, LF35x	5		$\mu\text{V}/^\circ\text{C}$
$\Delta TC/\Delta V_{OS}$ Change in average TC with $V_{OS}$ adjust	$R_S = 50\ \Omega$ <sup>(2)</sup>		LF15x, LF25x, LF356B, LF35x	0.5		$\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ per mV
$I_{OS}$ Input offset current	$T_J = 25^\circ\text{C}$ <sup>(1) (3)</sup>		LF15x, LF25x, LF356B	3	20	pA
			LF35x	3	50	
	$T_J \leq T_{HIGH}$		LF15x		20	nA
			LF25x, LF356B		1	
			LF35x		2	
$I_B$ Input bias current	$T_J = 25^\circ\text{C}$ <sup>(1) (3)</sup>		LF15x, LF25x, LF356B	30	100	pA
			LF35x	30	200	
	$T_J \leq T_{HIGH}$		LF15x		50	nA
			LF25x, LF356B		5	
			LF35x		8	
$R_{IN}$ Input resistance	$T_J = 25^\circ\text{C}$		LF15x, LF25x, LF356B, LF35x	$10^{12}$		$\Omega$
$A_{VOL}$ Large signal voltage gain	$V_S = \pm 15\text{ V}$ , $V_O = \pm 10\text{ V}$ , $R_L = 2\text{ k}\Omega$	$T_A = 25^\circ\text{C}$	LF15x, LF25x, LF356B	50	200	V/mV
				LF35x	25	
		Over temperature	LF15x, LF25x, LF356B	25		
			LF35x	15		
$V_O$ Output voltage swing	$V_S = \pm 15\text{ V}$ , $R_L = 10\text{ k}\Omega$		LF15x, LF25x, LF356B, LF35x	$\pm 12$	$\pm 13$	V
	$V_S = \pm 15\text{ V}$ , $R_L = 2\text{ k}\Omega$		LF15x, LF25x, LF356B, LF35x	$\pm 10$	$\pm 12$	

(1) Unless otherwise stated, these test conditions apply:

	LF15x	LF25x	LF356B	LF35x
Supply Voltage, $V_S$	$\pm 15\text{ V} \leq V_S \leq \pm 20\text{ V}$	$\pm 15\text{ V} \leq V_S \leq \pm 20\text{ V}$	$\pm 15\text{ V} \leq V_S \leq \pm 20\text{ V}$	$V_S = \pm 15\text{ V}$
$T_A$	$-55^\circ\text{C} \leq T_A \leq +125^\circ\text{C}$	$-25^\circ\text{C} \leq T_A \leq +85^\circ\text{C}$	$0^\circ\text{C} \leq T_A \leq +70^\circ\text{C}$	$0^\circ\text{C} \leq T_A \leq +70^\circ\text{C}$
$T_{HIGH}$	$+125^\circ\text{C}$	$+85^\circ\text{C}$	$+70^\circ\text{C}$	$+70^\circ\text{C}$

and  $V_{OS}$ ,  $I_B$  and  $I_{OS}$  are measured at  $V_{CM} = 0$ .

- The Temperature Coefficient of the adjusted input offset voltage changes only a small amount ( $0.5\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$  typically) for each mV of adjustment from its original unadjusted value. Common-mode rejection and open-loop voltage gain are also unaffected by offset adjustment.
- The input bias currents are junction leakage currents which approximately double for every  $10^\circ\text{C}$  increase in the junction temperature,  $T_J$ . Due to limited production test time, the input bias currents measured are correlated to junction temperature. In normal operation the junction temperature rises above the ambient temperature as a result of internal power dissipation,  $P_d$ .  $T_J = T_A + \theta_{JA} P_d$  where  $\theta_{JA}$  is the thermal resistance from junction to ambient. Use of a heat sink is recommended if input bias current is to be kept to a minimum.

## DC Electrical Characteristics (continued)

 See <sup>(1)</sup>

PARAMETER		TEST CONDITIONS		MIN	TYP	MAX	UNIT	
V <sub>CM</sub>	Input common-mode voltage range	V <sub>S</sub> = ±15 V	V <sub>CM, High</sub>	LF15x, LF25x, LF356B	11	15.1	V	
				LF35x	10	15.1		
			V <sub>CM, Low</sub>	LF15x, LF25x, LF356B		-12		-11
				LF35x		-12		-10
CMRR	Common-mode rejection ratio	LF15x, LF25x, LF356B		85	100	dB		
		LF35x		80	100			
PSRR	Supply voltage rejection ratio <sup>(4)</sup>	LF15x, LF25x, LF356B		85	100	dB		
		LF35x		80	100			

(4) Supply Voltage Rejection is measured for both supply magnitudes increasing or decreasing simultaneously, in accordance with common practice.

## 6.8 Power Dissipation Ratings

			MIN	MAX	UNIT
Power Dissipation at T <sub>A</sub> = 25°C <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>	LMC Package (Still Air)	LF15x		560	mW
		LF25x, LF356B, LF35x		400	
	LMC Package (400 LF/Min Air Flow)	LF15x		1200	
		LF25x, LF356B, LF35x		1000	
	P Package	LF25x, LF356B, LF35x		670	
	D Package	LF25x, LF356B, LF35x		380	

(1) The maximum power dissipation for these devices must be derated at elevated temperatures and is dictated by T<sub>JMAX</sub>, θ<sub>JA</sub>, and the ambient temperature, T<sub>A</sub>. The maximum available power dissipation at any temperature is P<sub>D</sub> = (T<sub>JMAX</sub> - T<sub>A</sub>) / θ<sub>JA</sub> or the 25°C P<sub>DMAX</sub>, whichever is less.

(2) Maximum power dissipation is defined by the package characteristics. Operating the part near the maximum power dissipation may cause the part to operate outside specified limits.



## N-Channel JFETs

2N5484    SST5484  
 2N5485    SST5485  
 2N5486    SST5486

PRODUCT SUMMARY				
Part Number	$V_{GS(off)}$ (V)	$V_{(BR)GSS}$ Min (V)	$g_{fs}$ Min (mS)	$I_{DSS}$ Min (mA)
2N/SST5484	-0.3 to -3	-25	3	1
2N/SST5485	-0.5 to -4	-25	3.5	4
2N/SST5486	-2 to -6	-25	4	8

### FEATURES

- Excellent High-Frequency Gain: Gps 13 dB (typ) @ 400 MHz – 5485/6
- Very Low Noise: 2.5 dB (typ) @ 400 MHz – 5485/6
- Very Low Distortion
- High AC/DC Switch Off-Isolation

### BENEFITS

- Wideband High Gain
- Very High System Sensitivity
- High Quality of Amplification
- High-Speed Switching Capability
- High Low-Level Signal Amplification

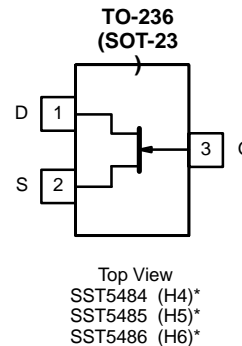
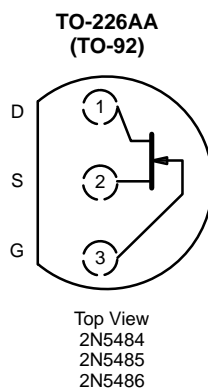
### APPLICATIONS

- High-Frequency Amplifier/Mixer
- Oscillator
- Sample-and-Hold
- Very Low Capacitance Switches

### DESCRIPTION

The 2N/SST5484 series consists of n-channel JFETs designed to provide high-performance amplification, especially at high frequencies up to and beyond 400 MHz.

The 2N series, TO-226AA (TO-92), and SST series, TO-236 (SOT-23), packages provide low-cost options and are available with tape-and-reel to support automated assembly (see Packaging Information).



\*Marking Code for TO-236

For applications information see AN102 and AN105.



### ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Gate-Drain, Gate-Source Voltage ..... -25 V  
 Gate Current ..... 10 mA  
 Lead Temperature ..... 300°C  
 Storage Temperature ..... -65 to 150°C

Operating Junction Temperature ..... -55 to 150°C  
 Power Dissipation<sup>a</sup> ..... 350 mW

Notes  
 a. Derate 2.8 mW/°C above 25°C

SPECIFICATIONS FOR 2N SERIES (T <sub>A</sub> = 25°C UNLESS OTHERWISE NOTED)											
Parameter	Symbol	Test Conditions	Typ <sup>a</sup>	Limits						Unit	
				2N5484		2N5485		2N5486			
				Min	Max	Min	Max	Min	Max		
<b>Static</b>											
Gate-Source Breakdown Voltage	V <sub>(BR)GSS</sub>	I <sub>G</sub> = -1 μA, V <sub>DS</sub> = 0 V	-35	-25		-25		-25		V	
Gate-Source Cutoff Voltage	V <sub>GS(off)</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, I <sub>D</sub> = 10 nA		-0.3	-3	-0.5	-4	-2	-6		
Saturation Drain Current <sup>b</sup>	I <sub>DSS</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V		1	5	4	10	8	20	mA	
Gate Reverse Current	I <sub>GSS</sub>	V <sub>GS</sub> = -20 V, V <sub>DS</sub> = 0 V	-0.002		-1		-1		-1	nA	
		T <sub>A</sub> = 100°C	-0.2		-200		-200		-200		
Gate Operating Current <sup>c</sup>	I <sub>G</sub>	V <sub>DG</sub> = 10 V, I <sub>D</sub> = 1 mA	-20							μA	
Gate-Source Forward Voltage <sup>c</sup>	V <sub>GS(F)</sub>	I <sub>G</sub> = 10 mA, V <sub>DS</sub> = 0 V	0.8							V	
<b>Dynamic</b>											
Common-Source Forward Transconductance <sup>b</sup>	g <sub>fs</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V f = 1 kHz		3	6	3.5	7	4	8	mS	
Common-Source Output Conductance <sup>b</sup>	g <sub>os</sub>				50		60		75	μS	
Common-Source Input Capacitance	C <sub>iss</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V f = 1 MHz	2.2		5		5		5	pF	
Common-Source Reverse Transfer Capacitance	C <sub>rss</sub>		0.7		1		1		1		
Common-Source Output Capacitance	C <sub>oss</sub>		1		2		2		2		
Equivalent Input Noise Voltage <sup>c</sup>	e <sub>n</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V f = 100 Hz	10							nV/ √Hz	
<b>High-Frequency</b>											
Common-Source Transconductance	Y <sub>fs(RE)</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V V <sub>GS</sub> = 0 V	f = 100 MHz	5.5	2.5					mS	
			f = 400 MHz	5.5		3		3.5			
Common-Source Output Conductance	Y <sub>os(RE)</sub>		f = 100 MHz	45		75				μS	
			f = 400 MHz	65			100		100		
Common-Source Input Conductance	Y <sub>is(RE)</sub>		f = 100 MHz	0.05		0.1				mS	
			f = 400 MHz	0.8			1		1		
Common-Source Power Gain	G <sub>ps</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, I <sub>D</sub> = 1 mA f = 100 MHz	20	16	25					dB	
		V <sub>DS</sub> = 15 V I <sub>D</sub> = 4 mA	f = 100 MHz	21		18	30	18	30		
			f = 400 MHz	13		10	20	10	20		
Noise Figure	NF	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V R <sub>G</sub> = 1 MΩ, f = 1 kHz	0.3		2.5		2.5		2.5	dB	
		V <sub>DS</sub> = 15 V, I <sub>D</sub> = 1 mA R <sub>G</sub> = 1 kΩ, f = 100 MHz	2		3						
			V <sub>DS</sub> = 15 V I <sub>D</sub> = 4 mA R <sub>G</sub> = 1 kΩ	f = 100 MHz	1			2			2
				f = 400 MHz	2.5			4			4



SPECIFICATIONS FOR SST SERIES (T <sub>A</sub> = 25 °C UNLESS OTHERWISE NOTED)										
Parameter	Symbol	Test Conditions	Typ <sup>b</sup>	Limits						Unit
				SST5484		SST5485		SST5486		
				Min	Max	Min	Max	Min	Max	
<b>Static</b>										
Gate-Source Breakdown Voltage	V <sub>(BR)GSS</sub>	I <sub>G</sub> = -1 μA, V <sub>DS</sub> = 0 V	-35	-25		-25		-25		V
Gate-Source Cutoff Voltage	V <sub>GS(off)</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, I <sub>D</sub> = 10 nA		-0.3	-3	-0.5	-4	-2	-6	
Saturation Drain Current <sup>b</sup>	I <sub>DSS</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V		1	5	4	10	8	20	mA
Gate Reverse Current	I <sub>GSS</sub>	V <sub>GS</sub> = -20 V, V <sub>DS</sub> = 0 V	-0.002		-1		-1		-1	nA
		T <sub>A</sub> = 100 °C	-0.2		-200		-200		-200	
Gate Operating Current <sup>c</sup>	I <sub>G</sub>	V <sub>DG</sub> = 10 V, I <sub>D</sub> = 1 mA	-20							pA
Gate-Source Forward Voltage <sup>c</sup>	V <sub>GS(F)</sub>	I <sub>G</sub> = 10 mA, V <sub>DS</sub> = 0 V	0.8							V
<b>Dynamic</b>										
Common-Source Forward Transconductance <sup>b</sup>	g <sub>fs</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V f = 1 kHz		3	6	3.5	7	4	8	mS
Common-Source Output Conductance <sup>b</sup>	g <sub>os</sub>				50		60		75	μS
Common-Source Input Capacitance	C <sub>iss</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V f = 1 MHz	2.2							pF
Common-Source Reverse Transfer Capacitance	C <sub>rss</sub>		0.7							
Common-Source Output Capacitance	C <sub>oss</sub>		1							
Equivalent Input Noise Voltage <sup>c</sup>	e <sub>n</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V f = 100 Hz	10							nV/ √Hz
<b>High-Frequency</b>										
Common-Source Transconductance	Y <sub>fs</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V V <sub>GS</sub> = 0 V	f = 100 MHz	5.5						mS
			f = 400 MHz	5.5						
Common-Source Output Conductance	Y <sub>os</sub>		f = 100 MHz	45						μS
			f = 400 MHz	65						
Common-Source Input Conductance	Y <sub>is</sub>		f = 100 MHz	0.05						mS
			f = 400 MHz	0.8						
Common-Source Power Gain	G <sub>ps</sub>	V <sub>DS</sub> = 15 V, I <sub>D</sub> = 1 mA f = 100 MHz	20							dB
		V <sub>DS</sub> = 15 V I <sub>D</sub> = 4 mA	f = 100 MHz	21						
			f = 400 MHz	13						
Noise Figure	NF	V <sub>DS</sub> = 15 V, V <sub>GS</sub> = 0 V R <sub>G</sub> = 1 MΩ, f = 1 kHz	0.3							dB
		V <sub>DS</sub> = 15 V, I <sub>D</sub> = 1 mA R <sub>G</sub> = 1 kΩ, f = 100 MHz	2							
		V <sub>DS</sub> = 15 V I <sub>D</sub> = 4 mA R <sub>G</sub> = 1 kΩ	f = 100 MHz	1						
			f = 400 MHz	2.5						

Notes

- a. Typical values are for DESIGN AID ONLY, not guaranteed nor subject to production testing.
- b. Pulse test: PW ≤ 300 μs duty cycle ≤ 3%.
- c. This parameter not registered with JEDEC.

NH



### TYPICAL CHARACTERISTICS ( $T_A = 25^\circ\text{C}$ UNLESS OTHERWISE NOTED)

