



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Seguimiento Robusto de Trayectorias en la  
Manipulación de Objetos por un Robot móvil**

T E S I S

Que presenta

**CRUZ ANTONIO ARTEAGA ESCAMILLA**

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Directores de la Tesis:

**Dr. Jaime Álvarez Gallegos**

**Dr. Rafael Castro Linares**

México, D.F.

FEBRERO, 2016



# Agradecimientos

*Al CINVESTAV por dejarme pertenecer a este gran centro de investigación.*

*A la sección de mecatrónica por ayudarme en estos 2 años, a los doctores Jaime Álvarez, Rafael Castro, Hebertt Sira, Martín Velasco, Eduardo Aranda, Gerardo Silva, Carlos Cruz, Hugo Rodríguez y Alejandro Rodríguez por haberme orientado a lo largo de los cursos.*

*A los Doctores Jaime Álvarez Gallegos y Rafael Castro Linares, por ser mis directores de tesis y apoyarme en todo momento para la realización de este trabajo, además de comprometerse completamente con sus estudiantes.*

*A los Doctores Miguel Villarreal Cervantes y Hugo Rodríguez por ser mis sinodales de tesis.*

*A mi hermano Cruz Mauricio Arteaga Escamilla por apoyarme en las buenas y en las malas durante estos dos años de estudio.*

*A mis padres Leticia Escamilla Cruz y Alejandro Arteaga Troncoso por su apoyo incondicional, por los valores que me han inculcado y sus consejos.*

*A mi compañero Rubén García Saldívar por ayudarme a concluir los experimentos para el presente trabajo de tesis y en general por su apoyo incondicional durante mis dos años de estudio.*

*A los auxiliares M.en C. Igor Morett Valenzulea e Ing. Andrés González Rodríguez, por el préstamo de equipo especializado utilizado para la realización de este trabajo de tesis.*

*Al CONACyT por otorgarme una beca para realizar mis estudios de maestría.*

*Al Ing. Nereo López Portilla por ayudarme de manera indirecta para realizar este trabajo de tesis. En general agradezco a todas las personas que directa o indirectamente me apoyaron durante mis estudios de maestría.*

---

# Resumen

En este trabajo se aborda el problema de seguimiento robusto de trayectorias en la manipulación de objetos por un robot móvil tipo unicycle. Se pretende que el robot móvil tipo unicycle transporte objetos de manera casi-estática, es decir, que la única sujeción entre el objeto transportado y el robot móvil transportador es la fricción que existe entre las superficies de contacto entre los mismos. La masa del objeto transportado es 45 % de la masa del robot móvil transportador.

Se diseñan dos controladores robustos en el sentido que se deben compensar las incertidumbres en el modelo dinámico y las incertidumbres provocadas por el objeto transportado, ya que se desconoce el momento de inercia respecto al eje vertical y la masa del mismo. Además, cuando el objeto transportado se mueve provoca perturbaciones al robot móvil transportador. Los controladores robustos utilizados en este trabajo son un algoritmo de control por modos deslizantes de primer orden y un algoritmo de control por modos deslizantes de orden cero.

Las trayectorias deseadas que se utilizan para mostrar la efectividad de los controladores robustos son una lemniscata, una curva de Lissajous y la trayectoria óptima que existe entre el punto inicial y el final del recorrido de transporte. Se presentan y analizan los resultados en simulación numérica y los resultados experimentales. Por último, se dan algunas conclusiones y sugerencias para el trabajo futuro.

---

# Abstract

In this thesis the problem of robust trajectory tracking in objects manipulation for an unicycle mobile robot is discussed. It is intended that the unicycle mobile robot transports objects in a quasi-static way, that is, the only attachment between the conveyed object and mobile robot conveyor is the friction between the contact surfaces. The mass of the conveyed object is 45 % of the mass of the mobile robot conveyor.

Two robust controllers are designed, the controllers are robust in the sense that they must compensate for uncertainties in the dynamic model and the disturbances caused by the conveyed object. Since the vertical axis moment of inertia and its mass is unknown. Furthermore, when the conveyed object moves causes disturbances in the mobile robot conveyor. The robust controllers used in this work are a control algorithm for first order sliding mode and a control algorithm for zero order sliding mode.

The desired trajectories that are used to show the effectiveness of the robust controllers are a lemniscate, a Lissajous curve and the optimal path between the start and the end point of the transport path. Numerical simulation and experimental results are presented and analyzed. Finally, conclusions and suggestions for future work are given.

---

# Índice general

Lista de figuras	xiii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.4. Contribución del trabajo desarrollado . . . . .	4
1.5. Trabajo desarrollado . . . . .	4
1.6. Objetivo . . . . .	5
1.6.1. Objetivo general . . . . .	5
1.6.2. Objetivos particulares . . . . .	5
1.7. Organización de la tesis . . . . .	5
<b>2. Modelado de un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme</b>	<b>7</b>
2.1. Coordenadas de postura del robot móvil . . . . .	7
2.2. Modelo cinemático de un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme . . . . .	8
2.3. Modelo dinámico de un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme . . . . .	10
2.4. Análisis de estabilidad de la dinámica interna . . . . .	15
<b>3. Controlador por Modos Deslizantes</b>	<b>21</b>
3.1. Diseño del controlador por Modos Deslizantes de Orden Cero . . . . .	21
3.1.1. Control equivalente de orden cero ( $u_{eq}$ ) . . . . .	23
3.2. Diseño del controlador por Modos Deslizantes de Primer Orden . . . . .	24
3.2.1. Control equivalente de primer orden ( $u_{eq}$ ) . . . . .	25
3.3. Simulación numérica de ambos controladores . . . . .	26
3.3.1. Simulación 1: Seguimiento de una lemniscata . . . . .	27
3.3.2. Simulación 2: Seguimiento de una curva de Lissajous . . . . .	30
3.3.3. Simulación 3: Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos . . . . .	33
3.3.4. Conclusiones de los resultados en simulación numérica . . . . .	35

<b>4. Resultados experimentales</b>	<b>37</b>
4.1. Experimento 1: Seguimiento de trayectorias sin transportar ningún objeto .	37
4.1.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 1 . . . . .	37
4.1.2. Análisis de los resultados del experimento 1 en el seguimiento de una lemniscata . . . . .	39
4.1.3. Seguimiento de una curva de Lissajous para el experimento 1 . . . . .	41
4.1.4. Análisis de los resultados del experimento 1 en el seguimiento de una curva de Lissajous . . . . .	42
4.1.5. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 1 . . . . .	44
4.1.6. Análisis de los resultados del experimento 1 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos . . . . .	44
4.2. Experimento 2: Seguimiento de trayectorias transportando un objeto sin fricción entre las superficies de contacto . . . . .	47
4.2.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 2 . . . . .	47
4.2.2. Análisis de los resultados del experimento 2 en el seguimiento de una lemniscata . . . . .	48
4.2.3. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 2 . . . . .	51
4.2.4. Análisis de los resultados del experimento 2 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos . . . . .	52
4.3. Experimento 3: Seguimiento de trayectorias transportando un objeto de masa considerable comparado con la masa del robot móvil . . . . .	54
4.3.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 3 . . . . .	55
4.3.2. Análisis de los resultados del experimento 3 en el seguimiento de una lemniscata . . . . .	57
4.3.3. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 3 . . . . .	58
4.3.4. Análisis de los resultados del experimento 3 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos . . . . .	59
4.4. Experimento 4: Seguimiento de trayectorias con perturbación externa sin transportar objeto . . . . .	62
4.4.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 4 . . . . .	62
4.4.2. Análisis de los resultados del experimento 4 en el seguimiento de una lemniscata . . . . .	63
4.4.3. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 4 . . . . .	65
4.4.4. Análisis de los resultados del experimento 4 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos . . . . .	66
4.5. Conclusiones de los resultados experimentales . . . . .	68
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>69</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	69

5.2. Trabajo futuro . . . . .	70
<b>Referencias</b>	<b>71</b>
<b>A. Plataforma experimental</b>	<b>73</b>
A.1. Descripción de los componentes del robot móvil tipo (2,0) de arquitectura abierta . . . . .	73
A.1.1. Motorreductor marca Pololu . . . . .	74
A.2. Sensado por visión utilizando el software Motive: Tracker de OptiTrack . .	76
<b>B. Artículo</b>	<b>79</b>



# Índice de figuras

2.1.1.Coordenadas de postura del robot móvil. . . . .	8
2.2.1.Velocidad lineal y angular del robot móvil con masa no uniformemente distribuida. . . . .	9
2.2.2.Componentes de la velocidad lineal del robot móvil con masa uniformemente distribuida. . . . .	9
2.3.1.Fuerzas aplicadas al robot móvil. . . . .	12
2.4.1. $\ \phi_m\ $ . . . . .	18
2.4.2. $\ \xi\ $ . . . . .	19
2.4.3. $ \phi(z_5, \xi) $ . . . . .	19
3.3.1.Seguimiento de una lemniscata. . . . .	27
3.3.2.Velocidad angular [Lemniscata]. . . . .	28
3.3.3.Errores de seguimiento [Lemniscata]. . . . .	28
3.3.4.Pares de entrada [Lemniscata]. . . . .	29
3.3.5.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Lemniscata]. . . . .	29
3.3.6.Seguimiento de una curva de Lissajous. . . . .	30
3.3.7.Velocidad angular [Curva de Lissajous]. . . . .	31
3.3.8.Errores de seguimiento [Curva de Lissajous]. . . . .	31
3.3.9.Pares de entrada [Curva de Lissajous]. . . . .	32
3.3.10.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Curva de Lissajous]. . . . .	32
3.3.11.Seguimiento de la trayectoria óptima. . . . .	33
3.3.12.Velocidad angular [Trayectoria óptima]. . . . .	34
3.3.13.Errores de seguimiento [Trayectoria óptima]. . . . .	34
3.3.14.Pares de entrada [Trayectoria óptima]. . . . .	35
3.3.15.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Trayectoria óptima]. . . . .	35
4.1.1.Seguimiento de una lemniscata, experimento 1. . . . .	38
4.1.2.Velocidad angular [Lemniscata, experimento 1]. . . . .	38
4.1.3.Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 1]. . . . .	39
4.1.4.Pares de entrada [Lemniscata, experimento 1]. . . . .	39
4.1.5.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Lemniscata, experimento 1]. . . . .	40
4.1.6.Seguimiento de una curva de Lissajous, experimento 1. . . . .	41
4.1.7.Velocidad angular [Curva de Lissajous, experimento 1]. . . . .	42

4.1.8.Errores de seguimiento [Curva de Lissajous, experimento 1]. . . . .	42
4.1.9.Pares de entrada [Curva de Lissajous, experimento 1]. . . . .	43
4.1.10.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Curva de Lissajous, experimento 1]. . . . .	43
4.1.11.Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 1. . . . .	45
4.1.12.Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 1]. . . . .	45
4.1.13.Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 1]. . . . .	46
4.1.14.Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 1]. . . . .	46
4.1.15.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Trayectoria óptima, experimento 1]. . . . .	47
4.2.1.Seguimiento de una lemniscata, experimento 2. . . . .	48
4.2.2.Velocidad angular [Lemniscata, experimento 2]. . . . .	48
4.2.3.Distancia de $P_0$ al objeto [Lemniscata, experimento 2]. . . . .	49
4.2.4.Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 2]. . . . .	49
4.2.5.Pares de entrada [Lemniscata, experimento 2]. . . . .	50
4.2.6.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Lemniscata, experimento 2]. . . . .	50
4.2.7.Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 2. . . . .	51
4.2.8.Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 2]. . . . .	52
4.2.9.Distancia de $P_0$ al objeto [Trayectoria óptima, experimento 2]. . . . .	52
4.2.10.Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 2]. . . . .	53
4.2.11.Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 2]. . . . .	53
4.2.12.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Trayectoria óptima, experimento 2]. . . . .	54
4.3.1.Seguimiento de una lemniscata, experimento 3. . . . .	55
4.3.2.Velocidad angular [Lemniscata, experimento 3]. . . . .	55
4.3.3.Distancia de $P_0$ al objeto [Lemniscata, experimento 3]. . . . .	56
4.3.4.Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 3]. . . . .	56
4.3.5.Pares de entrada [Lemniscata, experimento 3]. . . . .	57
4.3.6.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Lemniscata, experimento 3]. . . . .	57
4.3.7.Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 3. . . . .	59
4.3.8.Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 3]. . . . .	59
4.3.9.Distancia de $P_0$ al objeto [Trayectoria óptima, experimento 3]. . . . .	60
4.3.10.Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 3]. . . . .	60
4.3.11.Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 3]. . . . .	61
4.3.12.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Trayectoria óptima, experimento 3]. . . . .	61
4.4.1.Seguimiento de una lemniscata, experimento 4. . . . .	62
4.4.2.Velocidad angular [Lemniscata, experimento 4]. . . . .	63
4.4.3.Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 4]. . . . .	63
4.4.4.Pares de entrada [Lemniscata, experimento 4]. . . . .	64
4.4.5.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Lemniscata, experimento 4]. . . . .	64
4.4.6.Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 4. . . . .	65
4.4.7.Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 4]. . . . .	66
4.4.8.Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 4]. . . . .	66
4.4.9.Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 4]. . . . .	67
4.4.10.Funciones $\dot{s}$ y $s$ [Trayectoria óptima, experimento 4]. . . . .	67

A.1.1	Prototipo experimental: Robot móvil tipo (2,0).	74
A.1.2	Flujo de datos de la plataforma experimental.	75
A.1.3	Baterías LiPo usadas en el robot móvil.	76
A.1.4	Rueda omnidireccional.	76
A.1.5	Motorreductor marca Pololu.	77
A.1.6	Tarjeta controladora AZB10A4 marca Advaced Motion Control.	77
A.1.7	Tarjeta de Texas Instruments modelo EK-TM4C123GXL.	77
A.1.8	Módulo WiFly RN-171 marca Roving.	77
A.2.1	Cámaras FLEX 13 de OptiTrack.	78
A.2.2	Interface visual del software Motive:Tracker.	78



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Generalidades

Un robot móvil puede definirse como un vehículo capaz de moverse autónomamente por medio de sus actuadores controlados por una computadora destinada para el procesamiento de datos, y la robótica móvil se puede definir como la parte de la robótica encargada de su estudio, modelado, caracterización y control. Los robots móviles se clasifican de acuerdo a su tipo de locomoción, que puede ser mediante patas, orugas o ruedas.

El modelo matemático de un robot móvil cuya locomoción es mediante ruedas es no lineal y pertenece a la clase de sistemas denominados no holónomos, que se caracterizan por satisfacer restricciones no integrables en las velocidades [1].

En el caso de robots móviles con ruedas, existen dos tipos de ruedas, las ruedas convencionales y las ruedas omnidireccionales. En ambos casos se tiene un solo punto de contacto entre la rueda y el plano de desplazamiento. Las ruedas convencionales se dividen en ruedas fijas y ruedas orientables, el ángulo de orientación del plano de las ruedas fijas es constante respecto al cuerpo del robot y el ángulo de orientación del plano de las ruedas orientables es variable. Para una rueda convencional, el contacto entre la rueda y el suelo debe satisfacer las condiciones de sólo rodamiento (pure rolling) y la condición de no deslizamiento (non-slipping) sobre el suelo [2], es decir, que la rueda no patinará sobre el suelo y tampoco se moverá en la dirección de su eje de rotación. Para la rueda omnidireccional, ésta podrá moverse en cualquier dirección sin necesidad de reorientarse, pero no patinará sobre el suelo.

Existen sólo cinco tipos de robots móviles, correspondiendo al número y tipo de grados de libertad, que dependen directamente del tipo y del número de ruedas que lo componen. Se tienen sólo dos tipos de grados de libertad, el grado de movilidad ( $\delta_m$ ) y el grado de direccionalidad ( $\delta_s$ ). El grado de movilidad es igual al número de grados de libertad que pueden ser directamente manipulados por medio de las ruedas actuadas del robot, sin reorientar las ruedas direccionales. El grado de direccionalidad es igual al número

de grados de libertad accesibles mediante las ruedas direccionables actuadas. El grado de maniobrabilidad ( $\delta_M$ ) de un robot móvil es igual a la suma de su grado de movilidad y su grado de direccionabilidad. Un robot móvil viable que se mueve sobre un plano debe tener como mínimo dos grados de libertad y como máximo tres [2], es decir,  $2 < \delta_M < 3$ . Un solo grado de libertad en el robot sólo le permitirá moverse en un círculo o sobre una línea recta ( $\delta_m = 1, \delta_s = 0$ ) o bien no tendría propulsión y solo podríamos controlar la orientación de sus ruedas convencionales ( $\delta_m = 0, \delta_s = 1$ ). El tipo de robot móvil está dado por el par  $(\delta_m, \delta_s)$ .

Por otro lado, en los últimos años el problema de la manipulación de robots móviles para trasladar productos ha sido de gran interés en la industria, ya sea que se desee trasladar materia prima, un producto terminado o algún material peligroso, debido a esto, se han diseñado robots móviles con ruedas como los mencionados al inicio de esta sección, utilizados para transportar objetos y se han propuesto esquemas de manipulación de objetos como la manipulación por agarre, manipulación casi-estática y manipulación dinámica [6]. En la manipulación casi-estática el objeto no está sujeto de ninguna manera al robot móvil que lo transporta, solamente lo carga sobre si mismo durante todo el recorrido de transporte, la geometría del objeto y la geometría del robot son muy importantes para la sujeción. Se asume que el movimiento es lento para poder despreciar las fuerzas inerciales del objeto de transporte y se asume también que el objeto siempre está en contacto con la superficie del robot móvil que lo transporta. Por otra parte, en la manipulación dinámica, el objeto transportado puede no estar en contacto con el robot móvil que lo transporta durante periodos de tiempo del recorrido. Entonces, si el objeto transportado pierde contacto con el robot móvil, la manipulación no es casi-estática [6].

## 1.2. Antecedentes

Un esquema de control muy útil para controlar el movimiento de los robots móviles transportadores han sido los algoritmos de control por modos deslizantes. Ya sea que se pretenda tener un seguimiento robusto de trayectoria o resolver el problema de regulación, los algoritmos de control por modos deslizantes son ampliamente aplicables a la mayoría de los robots móviles, debido a que este esquema de control es aplicable a sistemas lineales y no lineales. También este esquema de control es robusto, es decir, que puede eliminar los efectos en las salidas del sistema causados por las incertidumbres paramétricas del modelo matemático con el que se este trabajando o causados por alguna perturbación externa.

Los modos deslizantes han sido estudiados desde hace varios años, en [4] se muestra el diseño de un controlador por modos deslizantes de primer orden para sistemas no lineales con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) variantes en el tiempo. En ese trabajo el control por modos deslizantes provee un procedimiento directo de sintonización para obtener la respuesta deseada del sistema, además que se utilizan las técnicas de norma matricial para sintonizar los parámetros de control. Se propone una superficie deslizante

de primer orden, la cual es una ecuación diferencial de primer orden donde se involucra la superficie deslizante de orden cero  $s$  y su primera derivada  $\dot{s}$ . Al considerar la razón de cambio de la superficie deslizante de orden cero  $\dot{s}$ , produce que la salida del controlador sea más suave. La integral de la dinámica de  $s$  garantiza que el valor de  $s$  en estado estable sea cero, además de asegurar que el error en estado estable sea cero. Para asegurar un buen seguimiento de trayectoria, la función de conmutación es sustituida por una función más suave, una función de saturación no discontinua, con la cual se elimina el castaño no deseado. Para verificar el desempeño del controlador se realizan simulaciones numéricas del llenado de dos tanques de agua conectados entre sí. Los resultados en simulación muestran un buen seguimiento de trayectoria y errores de seguimiento muy cercanos a cero.

En [7] se aborda el problema de seguimiento de trayectoria para un robot móvil tipo silla de ruedas utilizando el modelo dinámico con perturbaciones acotadas tales como fricción viscosa en las ruedas, dinámicas no modeladas de las ruedas castor entre otras. También se consideran posibles errores en los parámetros de masa, la distancia entre las ruedas y el momento de inercia del robot respecto al eje Z. El controlador fue diseñado utilizando solamente las posiciones y velocidades angulares, se utiliza también un modelo ultra global o modelo simplificado a partir de consideraciones de planicidad de las salidas del controlador, es decir, que las salidas no se relacionan con otras salidas. Utilizando este modelo simplificado se reduce la complejidad en la estimación de los estados y la tarea de control por retroalimentación de salida, debido a las incertidumbres variables en el tiempo tales como los efectos combinados de las incertidumbres no lineales de la dependencia entre estados y las perturbaciones externas en las entradas, mismas que son consideradas en el modelo entrada-salida plana del sistema. Simultáneamente se utiliza un observador lineal de alta ganancia u observador Integral Proporcional Generalizado (GPI por sus siglas en inglés) para tener una estimación aproximada de estados y estimación aproximada de las perturbaciones externas. El controlador por retroalimentación combina el modelo ultra global y el observador GPI para construir un esquema de control con rechazo activo de perturbaciones. En los resultados mostrados en simulación se observa que se tiene un buen seguimiento de trayectoria y robustez por parte del controlador, en el sentido que se eliminan los efectos en las salidas causados por las incertidumbres en el modelo y perturbaciones externas.

En [8] se presenta un controlador por par calculado, el cual utiliza un controlador auxiliar mediante la técnica de backstepping implementado al modelo dinámico de un robot móvil tipo unicycle con una distribución de masa no uniforme. Se muestra la manera de obtener dicho modelo dinámico y la forma de eliminar las restricciones no holónomas en el modelo dinámico. Se muestran resultados en simulación y se observa que el robot móvil es capaz de seguir una línea recta entre otras curvas cerradas como una curva de Lissajous. Se observa que se tiene un compromiso entre la posición y la orientación deseada del móvil, es decir, si el error de seguimiento disminuye entonces el error en la orientación aumenta. El controlador no asegura estabilidad asintótica del sistema.

En [12] se trata el problema de seguimiento robusto de trayectoria para sistemas no lineales MIMO con incertidumbres en el modelo y perturbaciones externas representadas por modelos entrada-salida. Se abordan los esquemas de control híbridos de seguimiento de trayectoria robusto-adaptativo los cuales están basados en una combinación de la teoría de seguimiento de trayectoria  $H^\infty$ , algoritmos de control VSS y control difuso, y son desarrollados de tal forma que todos los estados y señales están acotadas y el control de seguimiento de trayectoria  $H^\infty$  es garantizado. Se muestra que el desempeño del seguimiento de trayectoria del control adaptativo-difuso mejora bastante con la ayuda de los algoritmos de control robustos como VSS y  $H^\infty$ . El diseño de control de seguimiento de trayectoria  $H^\infty$  puede ser extendido para tratar con incertidumbres en los sistemas no lineales gracias a aproximadores difuso adaptativos. Se muestran resultados en simulación donde se utiliza el modelo de un sistema masa resorte amortiguador. El desempeño del controlador es bueno, en el sentido que se obtiene un error de seguimiento cercano a cero, aunque la respuesta del sistema es un poco lenta.

### 1.3. Planteamiento del problema

El problema de seguimiento robusto de trayectorias es abordado en este trabajo. Se desea que un robot móvil tipo (2,0) siga una trayectoria mientras transporta un objeto sobre sí mismo sin ningún tipo de sujeción, sólo existe la fricción de la superficie de contacto entre el robot móvil y el objeto que transporta. El objeto transportado puede deslizarse sobre la superficie de contacto, pero no puede perder contacto con ella en ningún momento del recorrido.

### 1.4. Contribución del trabajo desarrollado

La principal contribución de este trabajo es implementar y evaluar las leyes de control por modos deslizantes tanto de orden cero como de primer orden para la solución al problema de seguimiento robusto de trayectorias para un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme en la manipulación de objetos de manera casi-estática.

### 1.5. Trabajo desarrollado

Esta sección está dedicada a presentar un breve resumen en orden cronológico del trabajo desarrollado para la realización de esta tesis.

Se estudiaron las características principales del robot móvil tipo (2,0) debido a que los experimentos se realizaron en uno de esta clase. Luego, se obtuvo el modelo dinámico más cercano al robot móvil tipo (2,0) con masa no uniformemente distribuida.

Posteriormente se diseñaron las leyes de control robusto por modos deslizantes tanto de primer orden como de orden cero, las cuales son capaces de lograr que el robot móvil siga una trayectoria deseada a pesar de la existencia de incertidumbres paramétricas en el modelo dinámico o de perturbaciones externas no contempladas. Ambas leyes de control se evaluaron con herramientas numéricas.

Las leyes de control robusto se evaluaron utilizando una plataforma experimental que consta de un sistema de sensado por visión utilizando las cámaras Flex 13 de Optitrack, una computadora designada para ejecutar la ley de control y un robot móvil tipo (2,0) de arquitectura abierta. El funcionamiento de las partes de la plataforma experimental se trata en el apéndice A.

Por último, se compararon y analizaron tanto los resultados obtenidos en simulación como los resultados experimentales para obtener conclusiones.

## 1.6. Objetivo

### 1.6.1. Objetivo general

Implementar, diseñar y evaluar técnicas de control robusto en un robot móvil tipo (2,0) de arquitectura abierta con distribución de masa no uniforme, utilizando el modelo dinámico en el seguimiento de trayectoria para la manipulación de objetos de manera casi-estática.

### 1.6.2. Objetivos particulares

- Obtención del modelo dinámico para el robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme.
- Diseño y evaluación de las leyes de control por modos deslizantes tanto de primer orden como de orden cero utilizando el modelo dinámico.
- Seguimiento de trayectoria del punto medio del eje de las ruedas del robot móvil.
- Simulaciones numéricas y análisis de los errores de seguimiento.
- Ejecución y validación de las leyes de control en el prototipo experimental.

## 1.7. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis tiene la siguiente estructura:

En el capítulo 2 se presenta la manera de obtener el modelo cinemático y dinámico del robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme. Se presenta también el análisis de estabilidad de la dinámica interna.

El capítulo 3 se enfoca en el diseño de los controladores por modos deslizantes de primer orden y de orden cero. Se presentan los resultados en simulación del desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata, una curva de Lissajous y la trayectoria óptima de transporte. Se dan conclusiones de los resultados obtenidos en simulación numérica.

El capítulo 4 se presentan y analizan los resultados experimentales del desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata, una curva de Lissajous y la trayectoria óptima de transporte. Se dan conclusiones de los resultados experimentales.

Una serie de conclusiones sobre la tesis desarrollada, así como algunas sugerencias para el trabajo futuro se muestran en el Capítulo 5.

Finalmente el apéndice A se enfoca en la explicación de la plataforma experimental implementada para la validación de las leyes de control. El apéndice B muestra el artículo presentado en el Congreso Nacional de Control Automático 2015, referente a este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Modelado de un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme

Esta sección está dedicada en obtener el modelo cinemático y dinámico del robot móvil tipo (2,0) considerando que la distribución de su masa no es simétrica y se analizará la estabilidad de la dinámica interna del modelo.

### 2.1. Coordenadas de postura del robot móvil

En este trabajo se asume que el robot móvil se mueve en un plano horizontal y que sus ruedas son no deformables, además se supone también que las ruedas están perfectamente en posición vertical, rotan alrededor de su eje horizontal y la orientación del plano de cada rueda está fijo respecto al cuerpo del robot móvil.

La posición del robot móvil en el plano se muestra en la figura 2.1.1. El marco base de referencia inercial arbitrario  $a$  está fijo en el plano de movimiento, mientras que el marco  $m$  está adjunto al robot móvil. Las coordenadas de postura del robot móvil están definidas como

$$q = [ x_0 \quad y_0 \quad \theta ]^T,$$

donde  $x_0$ ,  $y_0$  y  $\theta$  son la posición en  $x$ ,  $y$  y el ángulo de orientación del móvil respecto al eje de coordenadas fijo, respectivamente.

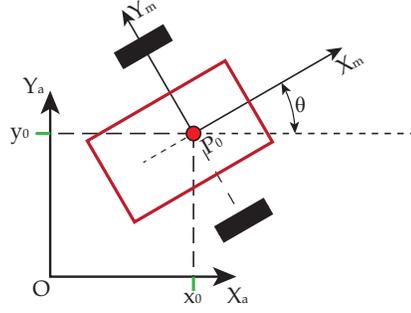


Figura 2.1.1: Coordenadas de postura del robot móvil.

## 2.2. Modelo cinemático de un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme

La figura 2.2.1 muestra un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme, donde  $P_0$  es el punto medio entre las ruedas y está sobre el eje de simetría del robot móvil,  $l$  es la mitad de la distancia entre las ruedas,  $d$  es la distancia del punto  $P_0$  al centro de masa ( $P_{cm}$ ),  $r$  es el radio de cada rueda,  $\gamma$  es el ángulo de inclinación del centro de masa respecto al eje de simetría.  $v$  y  $w$  son la velocidad lineal y angular del robot móvil, respectivamente; mientras que  $w_l$  y  $w_r$  son las velocidades angulares de la rueda izquierda y derecha, respectivamente.

Las ecuaciones que relacionan las velocidades de las ruedas con la velocidad lineal y angular del robot móvil están dadas por (vea la figura 2.2.1)

$$w = \frac{r(-w_l + w_r)}{2l},$$

$$v = \frac{r(w_l + w_r)}{2},$$

que pueden ser escritas de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 & r/2 \\ -r/2l & r/2l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ w_r \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Considere primero un robot móvil tipo (2,0) con masa uniformemente distribuida, entonces la relación entre la velocidad lineal y angular del robot móvil y el movimiento del mismo en el plano está descrito por (vea la figura 2.2.2)

$$\dot{x}_0 = v \cos(\theta),$$

$$\dot{y}_0 = v \sin(\theta),$$

$$\dot{\theta} = w.$$

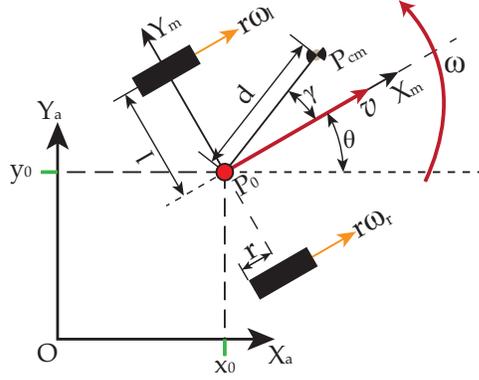


Figura 2.2.1: Velocidad lineal y angular del robot móvil con masa no uniformemente distribuida.

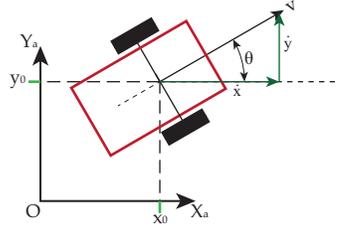


Figura 2.2.2: Componentes de la velocidad lineal del robot móvil con masa uniformemente distribuida.

El modelo cinemático de postura del robot tipo (2,0) con masa uniformemente distribuida está dado por [2]

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta, \quad (2.2.2)$$

donde  $\dot{q}$  es la derivada del vector de coordenadas de postura y  $\eta = [v \ w]^T$  son las entradas de control relacionadas a las velocidades.

Rescribiendo la ecuación (2.2.1) en (2.2.2) se obtiene la relación entre las velocidades de las ruedas y la velocidad de desplazamiento del robot móvil dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ w_r \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, para obtener la velocidad del centro de masa ( $P_{cm}$ ) se emplea la siguiente ecuación [2]:

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v} + \vec{w} \times \vec{d} \quad (2.2.3)$$

donde  $\times$  es el producto cruz de vectores y

$$\vec{v} = [ v \cos(\theta) \quad v \operatorname{sen}(\theta) \quad 0 ]^T, \quad (2.2.4)$$

$$\vec{w} = [ 0 \quad 0 \quad w ]^T, \quad (2.2.5)$$

$$\vec{d} = [ d \cos(\theta + \gamma) \quad d \operatorname{sen}(\theta + \gamma) \quad 0 ]^T. \quad (2.2.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.4), (2.2.5) y (2.2.6) en (2.2.3) se tiene que

$$\vec{v}_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{cm} \\ \dot{y}_{cm} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) - d \operatorname{sen}(\theta + \gamma) w \\ v \operatorname{sen}(\theta) + d \cos(\theta + \gamma) w \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2.7)$$

El modelo cinemático del robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme está dado por [2]

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad (2.2.8)$$

con

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \operatorname{sen}(\theta + \gamma) \\ \operatorname{sen}(\theta) & d \cos(\theta + \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.9)$$

El modelo cinemático será utilizado para obtener el modelo dinámico del mismo robot móvil.

## 2.3. Modelo dinámico de un robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme

Usando la formulación de Lagrange, el modelo dinámico del robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme está descrito por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - a_{1i} \lambda, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3.1)$$

donde  $q_1, q_2$  y  $q_3$  son las componentes del vector de postura,  $K$  es la energía cinética del robot móvil,  $Q_i$  son las fuerzas de entrada al sistema,  $a_{1i}$  son los elementos de la matriz de

restricciones no holónomas ( $A_r$ ) y  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange. La energía cinética del robot móvil está dada por

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{cm}^T\vec{v}_{cm} + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2, \quad (2.3.2)$$

donde  $m$  e  $I_z$  son la masa y el momento de inercia del robot móvil respecto al eje Z, respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.4) en (2.3.2) se obtiene

$$K = \frac{1}{2}m[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + d^2\dot{\theta}^2 - 2d\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{x}_0\dot{\theta} + 2d\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{y}_0\dot{\theta}] + \frac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2,$$

se procede a calcular el lado izquierdo de la ecuación (2.3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_0} &= m\dot{x}_0 - md\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{\theta} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_0} &= m\dot{y}_0 + md\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{\theta} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} &= (md^2 + I_z)\dot{\theta} - md\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{x}_0 + md\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{y}_0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_0} \right) &= m\ddot{x}_0 - md\text{sen}(\theta + \gamma)\ddot{\theta} - md\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_0} \right) &= m\ddot{y}_0 + md\text{cos}(\theta + \gamma)\ddot{\theta} - md\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (md^2 + I_z)\ddot{\theta} - md\text{sen}(\theta + \gamma)\ddot{x}_0 + md\text{cos}(\theta + \gamma)\ddot{y}_0 \\ &\quad - md\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{\theta}\dot{x}_0 - md\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{\theta}\dot{y}_0 \\ \frac{\partial K}{\partial x_0} &= 0 \\ \frac{\partial K}{\partial y_0} &= 0 \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} &= -md\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{x}_0\dot{\theta} - md\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{y}_0\dot{\theta} \end{aligned}$$

Ahora se calcula el lado derecho de la ecuación (2.3.1). En la figura 2.3.1 se muestran los pares generados por las ruedas y las fuerzas aplicadas al sistema.  $\tau_l$  y  $\tau_r$  son los pares izquierdo y derecho, respectivamente, generados por los actuadores en las ruedas y se pueden escribir en forma matricial como

$$Q_{x_0} = \frac{\tau_l}{r}\text{cos}(\theta) + \frac{\tau_r}{r}\text{cos}(\theta)$$

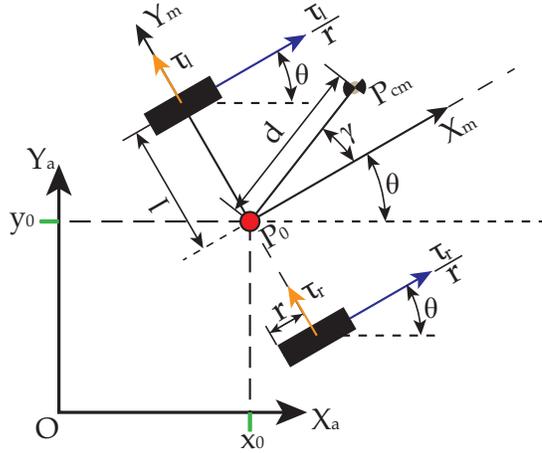


Figura 2.3.1: Fuerzas aplicadas al robot móvil.

$$Q_{y_0} = \frac{\tau_l}{r} \text{sen}(\theta) + \frac{\tau_r}{r} \text{sen}(\theta)$$

$$Q_{\theta} = -\frac{\tau_l}{r} l + \frac{\tau_r}{r} l$$

Haciendo las simplificaciones necesarias de la ecuación (2.3.1) se obtiene el modelo dinámico del robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - A_r^T(q)\lambda, \quad (2.3.3)$$

con

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & -md\text{sen}(\theta + \gamma) \\ 0 & m & md\text{cos}(\theta + \gamma) \\ -md\text{sen}(\theta + \gamma) & md\text{cos}(\theta + \gamma) & md^2 + I_z \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -md\text{cos}(\theta + \gamma)\dot{\theta} \\ 0 & 0 & -md\text{sen}(\theta + \gamma)\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta) & \text{cos}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -l & l \end{bmatrix},$$

$$\tau = [\tau_l \quad \tau_r]^T.$$

La matriz de restricciones no holónomas está dada por [2]

$$A_r = [\text{sen}(\theta) \quad \text{cos}(\theta) \quad d\text{cos}(\gamma)].$$

Es posible encontrar una matriz  $S(q)$  tal que sus columnas se encuentren en el espacio nulo de  $A_r(q)$  [5], de modo que

$$S^T(q)A_r^T(q) = 0.$$

Al derivar la ecuación (2.2.8) se tiene

$$\ddot{q} = S\dot{\eta} + \dot{S}\eta, \quad (2.3.4)$$

sustituyendo (2.2.8) y (2.3.4) en (2.3.3) y pre multiplicando por  $S^T$  se obtiene

$$S^T [M(S\dot{\eta} + \dot{S}\eta) + C(S\eta) = B\tau - A_r^T \lambda].$$

De manera que el modelo dinámico del robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme está dado por

$$\bar{M}\dot{\eta} + \bar{C}\eta = \bar{B}\tau, \quad (2.3.5)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{M} &= S^T M S = \begin{bmatrix} m & -2md\text{sen}(\gamma) \\ -2md\text{sen}(\gamma) & 4md^2 + I_z \end{bmatrix}, \\ \bar{C} &= S^T M \dot{S} + S^T C S = \begin{bmatrix} 0 & -2md\text{cos}(\gamma)\dot{\theta} \\ 2md\text{cos}(\gamma)\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B} &= S^T B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -d\text{sin}(\gamma) - l & -d\text{sen}(\gamma) + l \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\bar{M}$  es una matriz simétrica definida positiva,  $\bar{C}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis y  $\bar{B}$  es la matriz de transformación de los pares de entrada.

Considerando que el modelo dinámico tiene incertidumbres paramétricas contenidas en las matrices  $\bar{C}$  y  $\bar{B}$ , además de un vector de incertidumbres que depende de  $\bar{M}$  y  $\dot{\eta}$ , entonces se tiene un nuevo modelo dinámico con incertidumbres del robot móvil dado por

$$\bar{M}\dot{\eta} + \Delta_1 + (\bar{C} + \Delta\bar{C})\eta = (\bar{B} + \Delta\bar{B})\tau, \quad (2.3.6)$$

donde  $\Delta\bar{C}, \Delta\bar{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\Delta_1(\bar{M}, \dot{\eta}) \in \mathbb{R}^2$ .

Al utilizar una retroalimentación de estados de la forma

$$\tau = \bar{B}^{-1}(q)[\bar{M}(q)u + \bar{C}(q, \dot{q})\eta], \quad (2.3.7)$$

donde  $u = [u_1 \ u_2]^T$  son nuevas entradas de control, se obtiene el modelo dinámico con incertidumbres paramétricas dado por

$$\bar{M}\dot{\eta} + \Delta_1 + \Delta_2 = (\bar{M} + \Delta\bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{M})u \quad (2.3.8)$$

donde  $\Delta_2 = \Delta\bar{C}\eta - \Delta\bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{C}\eta$ .

Entonces

$$\dot{\eta} = u + \bar{M}^{-1}\Delta\bar{B}\bar{B}^{-1}\bar{M}u - \bar{M}^{-1}[\Delta_1 + \Delta_2] \quad (2.3.9)$$

Se puede tener una representación en variables de estado del sistema dado por la ecuación (2.3.8), al definir el vector de estados como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Utilizando la ecuación (2.3.9), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + \bar{M}^{-1} \Delta \bar{B} \bar{B}^{-1} \bar{M} u - \bar{M}^{-1} [\Delta_1 + \Delta_2] \\ S\eta \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} S\eta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{M}^{-1} [\Delta_1 + \Delta_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}^{-1} \Delta \bar{B} \bar{B}^{-1} \bar{M} u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La representación en variables de estado del sistema dado por (2.3.8) toma entonces la forma

$$\dot{x} = f(x) + g_1 u_1 + g_2 u_2 + \Delta f(x) + \Delta G(x) u \quad (2.3.10)$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_4 \cos(x_3) - dx_5 \operatorname{sen}(x_3 + \gamma) \\ x_4 \operatorname{sen}(x_3) + dx_5 \cos(x_3 + \gamma) \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, u = [\dot{v} \ \dot{w}]^T,$$

$$y = [y_1 \ y_2]^T = [h_1(x) \ h_2(x)]^T = [x_1 \ x_2]^T,$$

$$\Delta f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{M}^{-1} [\Delta_1 + \Delta_2] \end{bmatrix},$$

$$\Delta G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}^{-1} \Delta \bar{B} \bar{B}^{-1} \bar{M} \end{bmatrix} = [\Delta g_1(x) \ \Delta g_2(x)] \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$$

donde  $\Delta g_1(x)$  y  $\Delta g_2(x)$  son la columna 1 y 2 de la matriz  $\Delta G(x)$ , respectivamente.

Se supone que las incertidumbres del sistema están acotadas, es decir,

$$|\Delta f_i| \leq \alpha_i, |\Delta g_{ij}| \leq \beta_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij} \geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, n, j = 1, 2.$$

## 2.4. Análisis de estabilidad de la dinámica interna

En esta sección se mostrará la estabilidad de la dinámica interna para el sistema descrito por (2.3.10).

El sistema escrito por (2.3.10) tiene dos entradas y dos salidas, se puede entonces verificar que

$$\begin{aligned} L_{g_j} L_f^k h_i(x) &= 0, \text{ para } j = 1, 2; i = 1, 2; k = 0, \\ L_{\Delta g_j} L_f^k h_i(x) &= 0, \text{ para } j = 1, 2; i = 1, 2; k = 0. \end{aligned}$$

$L_a b(x)$  denota la derivada de Lie de la función  $b(x)$  a lo largo del vector  $a(x)$ . La matriz de desacoplamiento está dada por

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f h_1(x) & L_{g_2} L_f h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x_3) & -d \operatorname{sen}(x_3 + \gamma) \\ \operatorname{sen}(x_3) & d \operatorname{cos}(x_3 + \gamma) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \det(A) &= d[\cos(x_3)\cos(x_3 + \gamma) + \operatorname{sen}(x_3)\operatorname{sen}(x_3 + \gamma)] \\ &= d \operatorname{cos}(\gamma). \end{aligned}$$

$A(x)$  es no singular cuando  $\operatorname{cos}(\gamma) \neq 0$  y  $d \neq 0$ . Estas condiciones se satisfacen al suponer que el objeto transportado permanece en la parte delantera del robot móvil, es decir, el ángulo  $\gamma \neq \pi/2$  y que el centro de masa del robot móvil no está en el punto medio entre las ruedas, es decir,  $d \neq 0$ . Si el centro de masa del robot móvil estuviera sobre el eje de rotación de las ruedas, probablemente el robot móvil volcaría. Entonces de acuerdo a [9] el sistema (2.3.10) tiene un vector de grado relativo  $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$ .

La matriz  $\Delta A(x)$  está dada por

$$\Delta A(x) = \begin{bmatrix} L_{\Delta g_1} L_f h_1(x) & L_{\Delta g_2} L_f h_1(x) \\ L_{\Delta g_1} L_f h_2(x) & L_{\Delta g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix},$$

el vector  $b(x)$  está dado por

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 x_5 \operatorname{sen}(x_3) - d x_5^2 \operatorname{cos}(x_3 + \gamma) \\ x_4 x_5 \operatorname{cos}(x_3) - d x_5^2 \operatorname{sen}(x_3 + \gamma) \end{bmatrix},$$

el vector  $\Delta b(x)$  está dado por

$$\Delta b(x) = \begin{bmatrix} L_{\Delta f} L_f h_1(x) \\ L_{\Delta f} L_f h_2(x) \end{bmatrix}.$$

De manera que se puede hacer la asignación

$$\ddot{y} = b + \Delta b + (A + \Delta A)u \quad (2.4.1)$$

Se propone un control dado por

$$u = A^{-1}(v_{aux} - b) \quad (2.4.2)$$

donde  $v_{aux}$  es un control auxiliar que se definirá posteriormente, sustituyendo (2.4.2) en (2.4.1) se obtiene

$$\ddot{y} = v_{aux} + \Delta b + \Delta A A^{-1}(v_{aux} - b) \quad (2.4.3)$$

Por otra parte, para analizar la estabilidad de la dinámica interna del sistema dado por (2.3.10), se hace un cambio de coordenadas dado por

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ L_f h_1(x) \\ h_2(x) \\ L_f h_2(x) \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \cos(x_3) - dx_5 \sin(x_3 + \gamma) \\ x_2(x) \\ x_4 \sin(x_3) + dx_5 \cos(x_3 + \gamma) \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Para encontrar la función  $\psi_1(x)$  se debe satisfacer [9]

$$L_{g1}\psi_1 = 0 \text{ y } L_{g2}\psi_1 = 0.$$

Se tiene que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_5} = 0.$$

Entonces  $\psi_1(x)$  no depende de  $x_4$  ni de  $x_5$ , se propone  $\psi_1(x) = x_3$ . El determinante de la matriz jacobiana de  $\Phi(x)$  está dado por

$$\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = -d[\cos(x_3)\cos(x_3 + \gamma) + \sin(x_3)\sin(x_3 + \gamma)] = -d\cos(\gamma) \neq 0$$

cuando  $d \neq 0$  y  $\cos(\gamma) \neq 0$ . Se puede verificar que existe un difeomorfismo para  $\Phi(x)$ .

Es posible escribir  $\dot{\psi}_1(x)$  en términos de  $z$ , de la ecuación (2.4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1, z_3 = x_2, z_5 = x_3, \dot{z}_5 = x_5, \\ z_2 &= x_4 \cos(x_3) - dx_5 \sin(x_3 + \gamma), \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

$$z_4 = x_4 \sin(x_3) + dx_5 \cos(x_3 + \gamma), \quad (2.4.6)$$

despejando  $x_4$  de (2.4.5) y sustituyendo en (2.4.6) se obtiene la dinámica interna dada por

$$\dot{z}_5 = \dot{\psi}_1 = \frac{z_4 - z_2 \tan(z_5)}{d[\sin(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]} \quad (2.4.7)$$

De manera que la forma normal del sistema (2.3.10) con cambio de coordenadas está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ v_1 \\ z_4 \\ v_2 \\ \frac{z_4 - z_2 \tan(z_5)}{d[\sin(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]} \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

con

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1(x) + \Delta b_1(x) + [a_{11}(x) + \Delta a_{11}(x)]u_1 + [a_{12}(x) + \Delta a_{12}(x)]u_2 \\ v_2 &= b_2(x) + \Delta b_2(x) + [a_{21}(x) + \Delta a_{21}(x)]u_1 + [a_{22}(x) + \Delta a_{22}(x)]u_2 \end{aligned}$$

Rescribiendo el sistema dado por (2.4.8) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_5 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z_5) + \phi(z_5, \xi) \\ z_2 \\ v_1 \\ z_4 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.9)$$

con  $\xi = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$ ,  $f(z_5) = 0$ ,

$$\phi(z_5, \xi) = \frac{-z_2 \tan(z_5) + z_4}{d[\sin(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]}.$$

La función  $\phi(z_5, \xi)$  tiene un crecimiento lineal en  $z_5$ , si existen 2 funciones  $\gamma_1(\cdot)$  y  $\gamma_2(\cdot)$  tipo  $\kappa$ , diferenciables en  $\xi = 0$ , tal que

$$|\phi(z_5, \xi)| \leq \gamma_1(\|\xi\|)|z_5| + \gamma_2(\|\xi\|). \quad (2.4.10)$$

Entonces se tiene que

$$|\phi(z_5, \xi)| = \left| \frac{-z_2 \tan(z_5) + z_4}{d[\text{sen}(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]} \right| \leq \|\phi_m\| \|\xi\|$$

donde

$$\phi_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\tan(z_5)}{d[\text{sen}(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]} & 0 & \frac{1}{d[\text{sen}(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]} \end{bmatrix}$$

Se realizó una simulación numérica del robot móvil en el seguimiento de una lemniscata con un ángulo de inclinación del centro de masa,  $\gamma = 0.5$  rad, para verificar que  $\|\phi_m\|$ ,  $\|\xi\|$  y  $|\phi(z_5, \xi)|$  permanecen acotadas durante todo el seguimiento. Entonces  $\|\phi_m\|$  está acotado, como se muestra en la figura 2.4.1 y  $\|\xi\|$  está acotado, como se muestra en la figura 2.4.2, por tanto,  $\|\phi_m\| \|\xi\|$  también está acotado, entonces la restricción de crecimiento dada por (2.4.10) se satisface como se muestra en la figura 2.4.3, es decir,

$$\left| \frac{-z_2 \tan(z_5) + z_4}{d[\text{sen}(z_5 + \gamma) \tan(z_5) + \cos(z_5 + \gamma)]} \right| \leq \|\phi_m\| \|\xi\| \leq \gamma_1(\|\xi\|) |z_5| + \gamma_2(\|\xi\|),$$

$$\forall z_5 \mid -\pi/2 < z_5 < \pi/2.$$

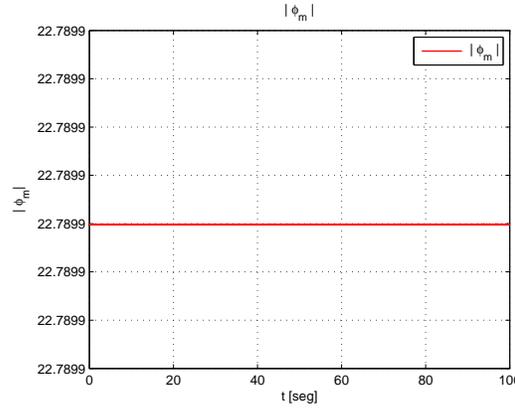
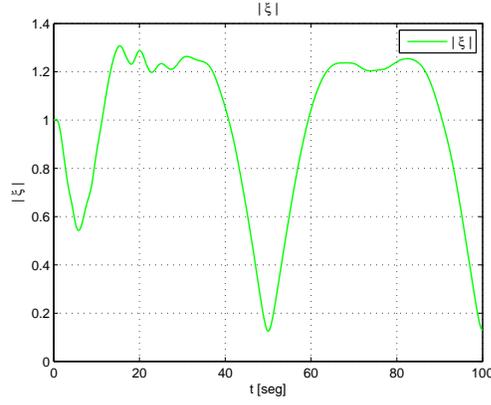
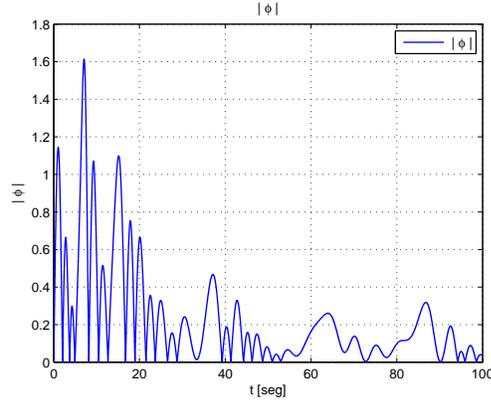


Figura 2.4.1:  $\|\phi_m\|$ .

Además, si existe una función semi definida positiva no acotada  $W(z_5)$  y una constante positiva  $c$  tal que

1.  $L_f W(z_5) \leq 0$ ,
2.  $\left\| \frac{\partial W(z_5)}{\partial z_5} \right\| |z_5| \leq cW(z_5)$ ,


 Figura 2.4.2:  $\|\xi\|$ .

 Figura 2.4.3:  $|\phi(z_5, \xi)|$ .

entonces la retroalimentación  $v_u = [v_1 \ v_2]^T$  garantiza que la solución del sistema dado por (2.4.9) está acotada.

Entonces, sea  $W(z_5) = \frac{1}{2}z_5^2$ , se tiene que

$$L_f W(z_5) = \frac{\partial W(z_5)}{\partial z_5} f = 0 \leq 0,$$

$$\left\| \frac{\partial W(z_5)}{\partial z_5} \right\| \|z_5\| = \|z_5\| \|z_5\| = z_5^2 \leq \frac{c}{2} z_5^2,$$

con  $c \geq 2$ .

De manera que al utilizar una retroalimentación dada por  $v_u = [v_1 \ v_2]^T$ , la solución de (2.4.9) está acotada.



# Capítulo 3

## Controlador por Modos Deslizantes

En esta sección se diseñan los algoritmos de control por modos deslizantes tanto de primer orden como de orden cero para el robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme.

### 3.1. Diseño del controlador por Modos Deslizantes de Orden Cero

Para conseguir una acción de control por modos deslizantes es necesario definir una restricción en función de los estados (superficie deslizante), cuya derivada contenga alguna componente de la señal de control, es decir, que el grado relativo de la superficie deslizante sea 1. Si dicha superficie deslizante es satisfecha, entonces el comportamiento del sistema es el comportamiento deseado.

Debido a que el sistema descrito por la ecuación (2.3.10) es un sistema no lineal con dos entradas-dos salidas, entonces se tienen dos superficies deslizantes y como la matriz de desacoplamiento  $A(x)$  es no singular, entonces el sistema está desacoplado y las superficies deslizantes se pueden tratar por separado. Se definen los errores de seguimiento como

$$e_1 = (y_{d1} - y_1), e_2 = (y_{d2} - y_2),$$

donde  $y_{d1}$  y  $y_{d2}$  son las salidas deseadas. Se definen los vectores y matrices siguientes:

$$e = [ e_1 \ e_2 ]^T, \quad y = [ y_1 \ y_2 ]^T, \quad y_d = [ y_{d1} \ y_{d2} ]^T,$$

$$s = [ s_1 \ s_2 ]^T, \quad \text{sgn}(s) = [ \text{sgn}(s_1) \ \text{sgn}(s_2) ]^T,$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{21} \end{bmatrix}, \quad k_0 = \begin{bmatrix} k_{10} & 0 \\ 0 & k_{20} \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} & 0 \\ 0 & z_{20} \end{bmatrix},$$

donde  $e$  es el vector de error de seguimiento,  $s$  es el vector de superficies deslizantes,  $sgn(s)$  es el vector de funciones signo para las superficies deslizantes y  $k_{11}, k_{21}, k_{10}, k_{20}, z_{10}, z_{20}$  son constantes positivas.

Las superficies deslizantes de orden cero se definen como [11]

$$s_1(x) = \dot{e}_1 + k_{c1}e_1 = 0, \quad s_2(x) = \dot{e}_2 + k_{c2}e_2 = 0,$$

donde  $k_{c1}$  y  $k_{c2}$  son constantes positivas.

Escribiendo en forma matricial la superficie deslizante de orden cero se tiene entonces

$$s(x) = \dot{e} + k_c e = 0 \quad (3.1.1)$$

donde  $k_c = \begin{bmatrix} k_{c1} & 0 \\ 0 & k_{c2} \end{bmatrix}$ .

Al derivar la ecuación (3.1.1), se tiene que

$$\dot{s} = \ddot{y}_d - \ddot{y} + CE, \quad (3.1.2)$$

con  $CE = k_c \dot{e}$ .

Sustituyendo la ecuación (2.4.3) en (3.1.2) se obtiene

$$\dot{s} = \ddot{y}_d - v_{aux} - \Delta b - \Delta AA^{-1}(v_{aux} - b) + CE. \quad (3.1.3)$$

Considérese la función candidata de Lyapunov dada por [11]

$$V = \frac{1}{2} s^T s. \quad (3.1.4)$$

Al derivar (3.1.4) se debe satisfacer la condición de atractividad dada por

$$\dot{V} = s^T \dot{s} < 0, \quad (3.1.5)$$

sustituyendo (3.1.3) en (3.1.5) se tiene que

$$s^T [\ddot{y}_d - v_{aux} - \Delta b - \Delta AA^{-1}(v_{aux} - b) + CE] < 0, \quad (3.1.6)$$

se define entonces el control auxiliar  $v_{aux}$  como

$$v_{aux} = \hat{v} + W sgn(s), \quad (3.1.7)$$

donde  $\hat{v} = \ddot{y}_d + CE$ ,  $W$  es una constante positiva.

Sustituyendo (3.1.7) en (3.1.6) se tiene

$$\dot{V} = s^T [-W sgn(s) - \Delta b - \Delta AA^{-1}(v_{aux} - b)] < 0$$

$$\dot{V} = s^T [-W \operatorname{sgn}(s) - \Delta A A^{-1} W \operatorname{sgn}(s) - \Delta A A^{-1} (\hat{v} - b) - \Delta b] < 0 \quad (3.1.8)$$

Notese que  $s^T \operatorname{sgn}(s) \geq \|s\|$ , por consecuencia,  $-W s^T \operatorname{sgn}(s) \leq -W \|s\|$ , entonces (3.1.8) se puede escribir

$$\dot{V} \leq \|s\| [-W + W \|\Delta A A^{-1} \operatorname{sgn}(s)\| + \|\Delta A A^{-1} (\hat{v} - b)\| + \|\Delta b\|] < 0.$$

Para ajustar la razón de cambio de  $\dot{V}$  se propone

$$-W + W \|\Delta A A^{-1} \operatorname{sgn}(s)\| + \|\Delta A A^{-1} (\hat{v} - b)\| + \|\Delta b\| < -\mu,$$

donde  $\mu > 0$ , entonces se tiene que

$$W \geq \frac{\|\Delta A A^{-1} (\hat{v} - b)\| + \|\Delta b\| + \mu}{1 - \|\Delta A A^{-1} \operatorname{sgn}(s)\|}, \quad (3.1.9)$$

asumiendo que  $\|\Delta A A^{-1} \operatorname{sgn}(s)\| < 1$ .

Cuando (3.1.9) se satisface, la condición de atractividad dada por (3.1.5) también se satisface. En el caso que no existen incertidumbres en el sistema, es decir,  $\Delta b = 0$  y  $\Delta A = 0$ , al sustituir (3.1.7) en (3.1.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T [-W \operatorname{sgn}(s)] < 0 \\ \dot{V} &= -W[|s_1| + |s_2|] < 0. \end{aligned}$$

Con el análisis anterior se demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Al sustituir (3.1.7) en (2.4.2) se obtiene finalmente el control

$$u = A^{-1} [\ddot{y}_d + k_c \dot{e} + W \operatorname{sgn}(s) - b]$$

La función  $\operatorname{sgn}(s)$  puede sustituirse por una función que sea más suave, una función de saturación definida como

$$\operatorname{sat}(s) = \begin{cases} 1, & s > \varepsilon \\ (1/\varepsilon)s, & -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon \\ -1, & s < -\varepsilon \end{cases}$$

con  $\varepsilon > 0$ .

### 3.1.1. Control equivalente de orden cero ( $u_{eq}$ )

El control equivalente se tiene cuando se está sobre la superficie deslizante, es decir,

$$s = \dot{e} + k_c e = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + k_c \dot{e} = 0 \\ \dot{s} &= \ddot{y}_d - v_{aux-eq} + k_c \dot{e} = 0 \\ v_{aux-eq} &= \ddot{y}_d + k_c \dot{e} \end{aligned}$$

Finalmente, al utilizar la ecuación (2.4.2) se obtiene el control equivalente

$$u_{eq} = A^{-1} [\ddot{y}_d + k_c \dot{e} - b]$$

## 3.2. Diseño del controlador por Modos Deslizantes de Primer Orden

En el caso de una ley de control por modos deslizantes de primer orden, la superficie deslizante es una ecuación diferencial de primer orden, en la cuál se involucra la superficie deslizante  $s$  y su primera derivada [4]. Se propone una superficie deslizante de primer orden escrita en forma matricial dada por

$$\dot{s} + z_0 s = \dot{e} + k_1 e + k_0 \int e = 0. \quad (3.2.1)$$

Al derivar la ecuación (3.2.1), se tiene que

$$\ddot{s} + z_0 \dot{s} = \ddot{y}_d - \ddot{y} + CE, \quad (3.2.2)$$

con  $CE = k_1 \dot{e} + k_0 e$ .

Sustituyendo la ecuación (2.4.3) en (3.2.2) se obtiene

$$\ddot{s} = \ddot{y}_d - v_{aux} - \Delta b - \Delta A A^{-1}(v_{aux} - b) + CE - z_0 \dot{s}. \quad (3.2.3)$$

Considérese la función candidata de Lyapunov dada por [11]

$$V = \frac{1}{2}(\dot{s}^T \dot{s} + s^T \Omega s), \quad (3.2.4)$$

donde  $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix}$ ,  $\Omega_1 > 0$ ,  $\Omega_2 > 0$  son constantes reales. Al derivar (3.2.4) se debe satisfacer la condición de atractividad dada por

$$\dot{V} = \dot{s}^T(\ddot{s} + \Omega s) < 0, \quad (3.2.5)$$

sustituyendo (3.2.3) en (3.2.5) se tiene que

$$\dot{s}^T[\ddot{y}_d - v_{aux} - \Delta b - \Delta A A^{-1}(v_{aux} - b) + CE - z_0 \dot{s} + \Omega s] < 0, \quad (3.2.6)$$

se define entonces el control auxiliar  $v_{aux}$  como

$$v_{aux} = \hat{v} + W \operatorname{sgn}(\dot{s}), \quad (3.2.7)$$

donde  $\hat{v} = \ddot{y}_d + CE - z_0 \dot{s} + \Omega s$ ,  $W$  es una constante positiva.

Sustituyendo (3.2.7) en (3.2.6) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{s}^T[-W \operatorname{sgn}(\dot{s}) - \Delta b - \Delta A A^{-1}(v_{aux} - b)] < 0 \\ \dot{V} &= \dot{s}^T[-W \operatorname{sgn}(\dot{s}) - \Delta A A^{-1} W \operatorname{sgn}(\dot{s}) - \Delta A A^{-1}(\hat{v} - b) - \Delta b] < 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Se sabe que  $\dot{s}^T sgn(\dot{s}) \geq \|\dot{s}\|$ , por consecuencia,  $-W\dot{s}^T sgn(\dot{s}) \leq -W\|\dot{s}\|$ , entonces (3.2.8) se puede escribir

$$\dot{V} \leq \|\dot{s}\| [-W + W \|\Delta AA^{-1} sgn(\dot{s})\| + \|\Delta AA^{-1}(\hat{v} - b)\| + \|\Delta b\|] < 0.$$

Para ajustar la razón de cambio de  $\dot{V}$  se propone

$$-W + W \|\Delta AA^{-1} sgn(\dot{s})\| + \|\Delta AA^{-1}(\hat{v} - b)\| + \|\Delta b\| < -\mu,$$

donde  $\mu > 0$ , entonces se tiene que

$$W \geq \frac{\|\Delta AA^{-1}(\hat{v} - b)\| + \|\Delta b\| + \mu}{1 - \|\Delta AA^{-1} sgn(\dot{s})\|}, \quad (3.2.9)$$

asumiendo que  $\|\Delta AA^{-1} sgn(\dot{s})\| < 1$ .

Cuando (3.2.9) se satisface, la condición de atractividad dada por (3.2.5) también se satisface. En el caso que no existen incertidumbres en el sistema, es decir,  $\Delta b = 0$  y  $\Delta A = 0$ , al sustituir (3.2.7) en (3.2.6) se tiene que

$$\dot{V} = \dot{s}^T [-W sgn(\dot{s})] < 0$$

$$\dot{V} = -W[|\dot{s}_1| + |\dot{s}_2|] < 0.$$

Con el análisis anterior se demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Al sustituir (3.2.7) en (2.4.2) se obtiene finalmente el control

$$u = A^{-1}[\ddot{y}_d + k_1 \dot{e} + k_0 e - z_0 \dot{s} + \Omega s + W sgn(\dot{s}) - b]$$

La función  $sgn(\dot{s})$  puede sustituirse por una función que sea más suave, una función de saturación definida como

$$sat(\dot{s}) = \begin{cases} 1, & \dot{s} > \varepsilon \\ (1/\varepsilon)\dot{s}, & -\varepsilon \leq \dot{s} \leq \varepsilon \\ -1, & \dot{s} < -\varepsilon \end{cases}$$

con  $\varepsilon > 0$ .

### 3.2.1. Control equivalente de primer orden ( $u_{eq}$ )

El control equivalente se tiene cuando se está sobre la superficie deslizante de primer orden, es decir,

$$\dot{s} + z_0 s = \dot{e} + k_1 e + k_0 \int e = 0$$

Entonces,

$$\ddot{s} + z_0\dot{s} = \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0e = 0$$

$$\ddot{s} + z_0\dot{s} = \ddot{y}_d - v_{aux-eq} + k_1\dot{e} + k_0e = 0$$

$$v_{aux-eq} = \ddot{y}_d + k_1\dot{e} + k_0e$$

Finalmente, al utilizar la ecuación (2.4.2) se obtiene el control equivalente

$$u_{eq} = A^{-1} [\ddot{y}_d + k_1\dot{e} + k_0e - b]$$

### 3.3. Simulación numérica de ambos controladores

En esta sección se muestran los resultados en simulación numérica del desempeño del controlador por modos deslizantes de primer orden (MD1) y el desempeño del controlador por modos deslizantes de orden cero (MD0) en el seguimiento de tres trayectorias sin la presencia de perturbaciones externas para el robot móvil tipo (2,0) con distribución de masa no uniforme. En todas las simulaciones se utilizan los mismos parámetros físicos del robot móvil, los cuales son  $d = 0.05$  m,  $r = 0.05$  m,  $l = 0.14$  m,  $I_z = 0.014$   $kgm^2$ ,  $\gamma = 0$  rad,  $m = 2.8$  kg.

Las trayectorias a seguir son: Lemniscata, curva de Lissajous y la trayectoria óptima entre dos puntos.

Los parámetros de la lemniscata son:

$$\begin{aligned} x_d &= 1.2\text{sen}(2\pi t/60) \text{ m} \\ y_d &= 0.8\text{sen}(4\pi t/60) \text{ m} \end{aligned}$$

Los parámetros de la curva de Lissajous son:

$$\begin{aligned} x_d &= 1.25\text{sen}(4\pi t/130) \text{ m} \\ y_d &= \text{cos}(6\pi t/130) \text{ m} \end{aligned}$$

Los parámetros de la trayectoria óptima entre dos puntos son:

$$\begin{aligned} x_d &= -0.0014 + 0.1023t + 0.02694t^2 - 0.00462t^3 + 0.00033t^4 - 0.0000086t^5 \text{ m} \\ y_d &= 0.00516 - 0.01852t + 0.02731t^2 - 0.00104t^3 \text{ m} \end{aligned}$$

El tiempo está expresado en segundos.

### 3.3.1. Simulación 1: Seguimiento de una lemniscata

Las gráficas 3.3.1-3.3.5 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata. Las posiciones iniciales del robot móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 1$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total de la simulación es 100 segundos. Los parámetros de sintonización del controlador MD1 son  $k_{11} = k_{21} = 0.6$ ,  $k_{10} = k_{20} = 0.2$ , los ceros de la superficie deslizante de primer orden son  $z_{10} = z_{20} = 0.2$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.75$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros de sintonización del controlador MD0 son  $k_{c1} = k_{c2} = 0.35$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ .

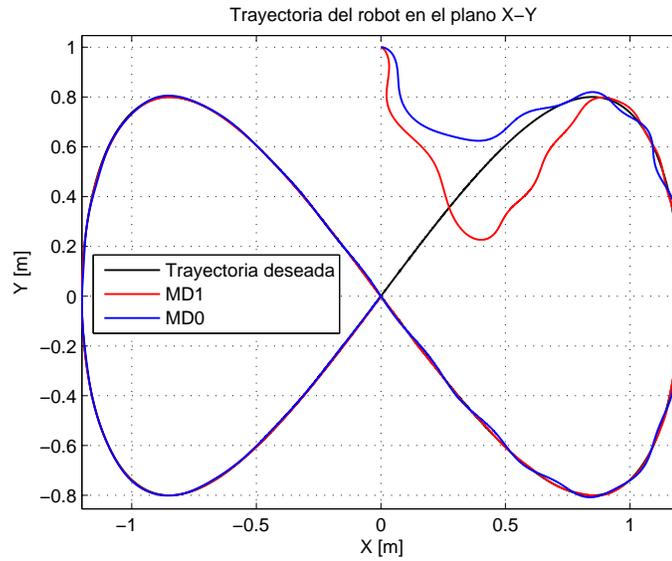


Figura 3.3.1: Seguimiento de una lemniscata.

En la figura 3.3.1 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una lemniscata. En la figura 3.3.2 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores y en la figura 3.3.3 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores. En la figura 3.3.4 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 3.3.5 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño del controlador MD1 y también se muestra la función  $s$  correspondiente al desempeño del controlador MD0.

#### Análisis de los resultados en simulación del seguimiento de una lemniscata

En la figura 3.3.1 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano

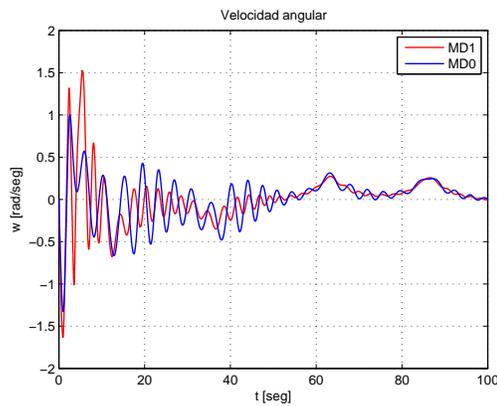


Figura 3.3.2: Velocidad angular [Lemniscata].

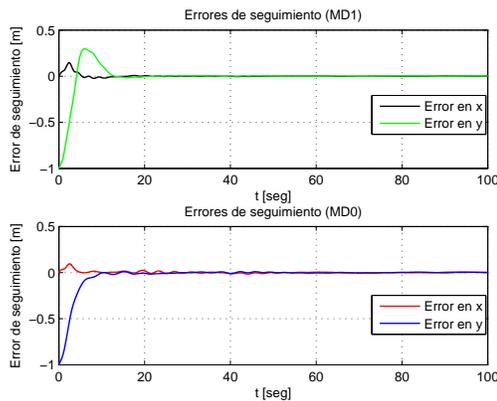


Figura 3.3.3: Errores de seguimiento [Lemniscata].

cartesiano al implementar el controlador MD0. Se puede observar que al inicio del seguimiento de trayectoria, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1, pero al implementar el controlador MD0 se tienen más oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria, en comparación con el desempeño del controlador MD1.

En la figura 3.3.2 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil al inicio del seguimiento de trayectoria es mayor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0, pero después de aproximadamente 10 segundos, la velocidad angular al implementar el controlador MD1 es menor que la velocidad angular al implementar el controlador MD0.

En la figura 3.3.3 se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de

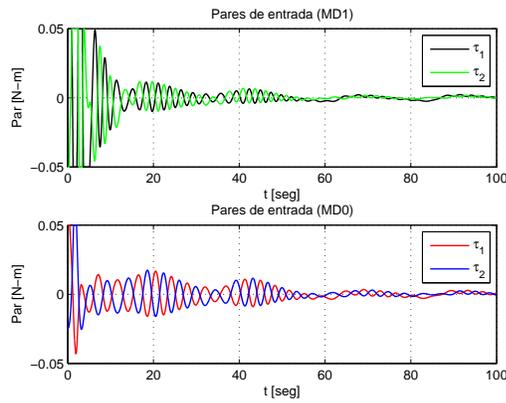


Figura 3.3.4: Pares de entrada [Lemniscata].

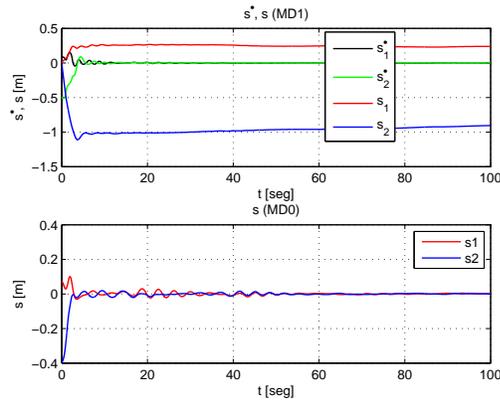


Figura 3.3.5: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Lemniscata].

seguimiento son cero y los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están oscilando alrededor de 0. En la figura 3.3.4 se observa que después de 15 segundos, los pares generados por el controlador MD1 son menores que los pares generados por el controlador MD0.

En la figura 3.3.5 se observa que la función  $\dot{s}$  obtenida al implementar el controlador MD1 oscilan alrededor de cero, la primer componente de la función  $s$  que se mantiene acotada y la segunda componente de la función  $s$  converge muy lentamente a 0, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01$  muy pequeños. Mientras que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 3.3.2. Simulación 2: Seguimiento de una curva de Lissajous

Las gráficas 3.3.6-3.3.10 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una curva de Lissajous. Las posiciones iniciales del robot móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total de la simulación es 130 segundos. Los parámetros de sintonización del controlador MD1 son  $k_{11} = k_{21} = 0.6$ ,  $k_{10} = k_{20} = 0.2$ , los ceros de la superficie deslizante de primer orden son  $z_{10} = z_{20} = 0.2$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.75$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros de sintonización del controlador MD0 son  $k_{c1} = k_{c2} = 0.5$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.7$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ .

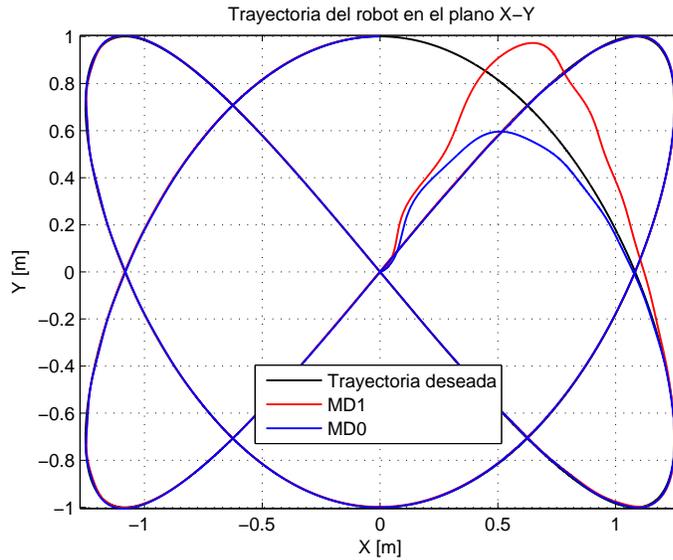


Figura 3.3.6: Seguimiento de una curva de Lissajous.

En la figura 3.3.6 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una curva de Lissajous. En la figura 3.3.7 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores y en la figura 3.3.8 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores. En la figura 3.3.9 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 3.3.10 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño del controlador MD1 y también se muestra la función  $s$  correspondiente al desempeño del controlador MD0.

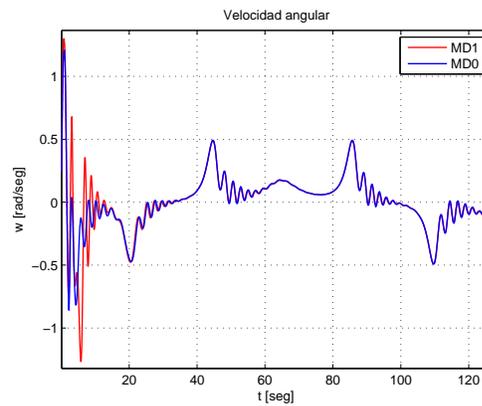


Figura 3.3.7: Velocidad angular [Curva de Lissajous].

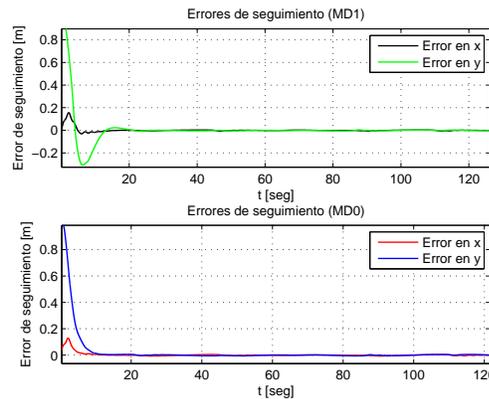


Figura 3.3.8: Errores de seguimiento [Curva de Lissajous].

### Análisis de los resultados en simulación del seguimiento de una curva de Lissajous

En la figura 3.3.6 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1. Se puede observar que al inicio del seguimiento de trayectoria, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1.

En la figura 3.3.7 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil al inicio del seguimiento de trayectoria es mayor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0, pero después de aproximadamente 15 segundos, la velocidad angular al implementar el controlador MD1 es menor que la velocidad angular al implementar el controlador MD0.

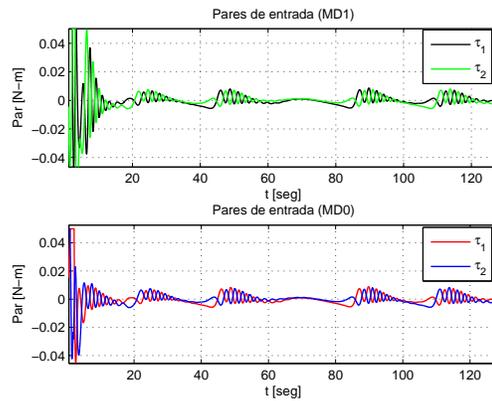


Figura 3.3.9: Pares de entrada [Curva de Lissajous].

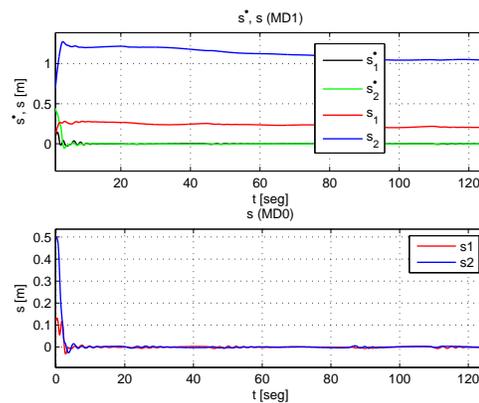


Figura 3.3.10: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Curva de Lissajous].

En la figura 3.3.8 se observa que al implementar el controlador MD1, se tiene un sobre impulso en el error de seguimiento en el eje  $y$ , después de 20 segundos del inicio del seguimiento, los errores de seguimiento oscilan alrededor de 0. Mientras que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 convergen y se mantienen oscilando alrededor de 0.

En la figura 3.3.9 se observa que al inicio del seguimiento, los pares generados por el controlador MD1 son mayores que los pares generados por el controlador MD0. Después de 15 segundos del seguimiento, los pares generados por ambos controladores son casi iguales.

En la figura 3.3.10 se observa que la función  $\dot{s}$  obtenida al implementar el controlador MD1 oscila alrededor de cero, mientras que la segunda componente de la función  $s$  con-

verge muy lentamente a 0 y la primer componente de la función  $s$  se mantiene acotada, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01$  muy pequeños. Mientras que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 3.3.3. Simulación 3: Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos

Las gráficas 3.3.11-3.3.15 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos. Las posiciones iniciales del robot móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total de la simulación es 10 segundos. Los parámetros de sintonización del controlador MD1 son  $k_{11} = k_{21} = 2.2$ ,  $k_{10} = k_{20} = 0.2$ , los ceros de la superficie deslizante de primer orden son  $z_{10} = z_{20} = 0.1$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.2$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros de sintonización del controlador MD0 son  $k_{c1} = k_{c2} = 1.7$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.3$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ .

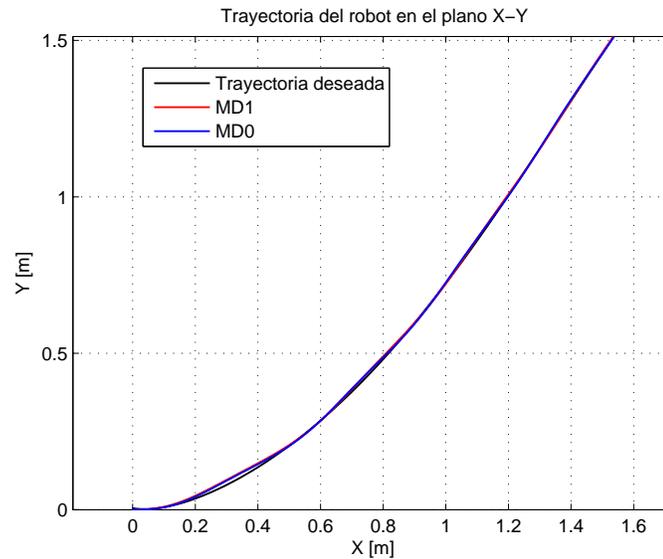


Figura 3.3.11: Seguimiento de la trayectoria óptima.

En la figura 3.3.11 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos. En la figura 3.3.12 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores y en la figura 3.3.13 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores.

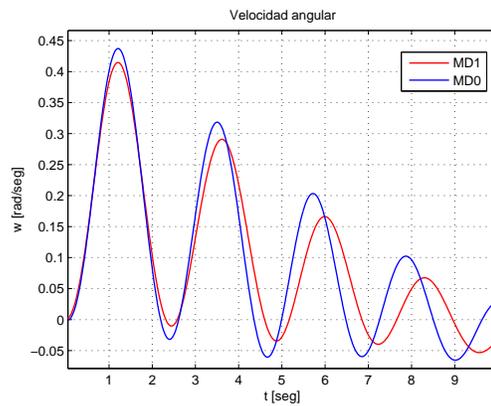


Figura 3.3.12: Velocidad angular [Trayectoria óptima].

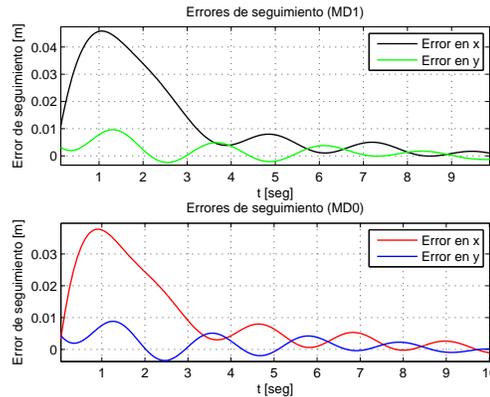


Figura 3.3.13: Errores de seguimiento [Trayectoria óptima].

En la figura 3.3.14 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 3.3.15 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño del controlador MD1 y también se muestra la función  $s$  correspondiente al desempeño del controlador MD0.

### Análisis de los resultados en simulación del seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos

En la figura 3.3.11 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar ambos controladores es casi igual. En la figura 3.3.12 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil es menor que la velocidad angular del robot móvil al implementar el controlador MD0. En la figura 3.3.13 se observa que los errores de seguimiento al implementar ambos controladores son casi iguales. En la figura 3.3.14 se observa los pares generados por ambos controladores son

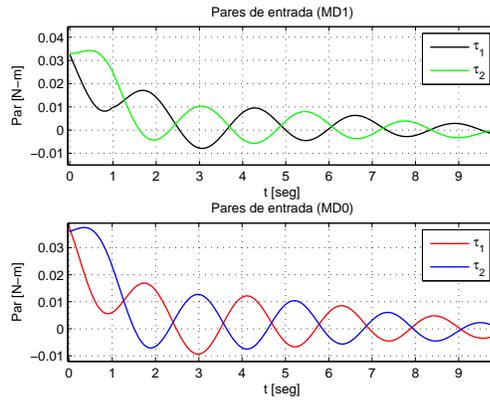


Figura 3.3.14: Pares de entrada [Trayectoria óptima].

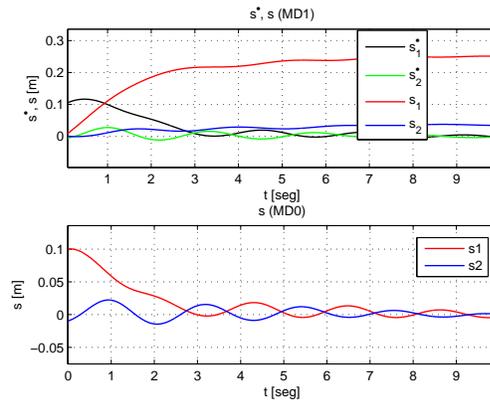


Figura 3.3.15: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Trayectoria óptima].

iguales.

En la figura 3.3.15 se observa que la función  $\dot{s}$  obtenida al implementar el controlador MD1 oscila alrededor de cero, mientras que las componentes de la función  $s$  se mantiene acotadas, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.01$  muy pequeños. Mientras que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 3.3.4. Conclusiones de los resultados en simulación numérica

El desempeño en el plano cartesiano del robot móvil al implementar ambos controladores es casi igual y los errores de seguimiento al implementar ambos controladores es aceptable, a diferencia de la velocidad angular del robot móvil obtenida al implementar

ambos controladores. En promedio la velocidad angular del robot móvil obtenida al implementar el controlador MD1 es menor que la obtenida al implementar el controlador MD0, por lo tanto, se recomienda implementar un controlador por modos deslizantes de primer orden para la transportación de objetos de manera casi-estática por medio de un robot móvil.

# Capítulo 4

## Resultados experimentales

En este capítulo se muestran los resultados de los 4 experimentos realizados implementando dos controladores por modos deslizantes de primer orden y otro de orden cero en el seguimiento de trayectorias. MD1 corresponde al controlador por modos deslizantes de primer orden y MD0 corresponde al controlador por modos deslizantes de orden cero. En todos los experimentos se utiliza el mismo robot móvil con los siguientes parámetros físicos:  $d = 0.05$  m,  $r = 0.05$  m,  $l = 0.14$  m,  $I_z = 0.014$   $kgm^2$ ,  $\gamma = 0$  rad,  $m = 2.8$  kg. Los parámetros de las tres trayectorias deseadas son los mismos que los utilizados en las simulaciones numéricas. En todos los experimentos se especifica el error promedio obtenido al implementar cada controlador. El error promedio se calcula al promediar el valor absoluto del error respecto del tiempo para los ejes x e y.

### 4.1. Experimento 1: Seguimiento de trayectorias sin transportar ningún objeto

El experimento 1 consiste en que el robot móvil siga tres trayectorias sin transportar ningún objeto y sin que exista la presencia de perturbaciones externas durante el seguimiento. Las trayectorias a seguir son: una lemniscata, una curva de Lissajous y la trayectoria óptima entre dos puntos.

#### 4.1.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 1

Las gráficas 4.1.1-4.1.5 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata para el experimento 1. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 1$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 80 segundos. Los parámetros de sintonización del controlador MD1 son  $k_{11} = k_{21} = 1$ ,  $k_{10} = k_{20} = 1.8$ , los ceros de la superficie deslizante de primer orden son  $z_{10} = z_{20} = 0.3$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.001$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros de sintonización del controlador MD0 son  $k_{c1} = k_{c2} = 1.3$ , el

factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ .

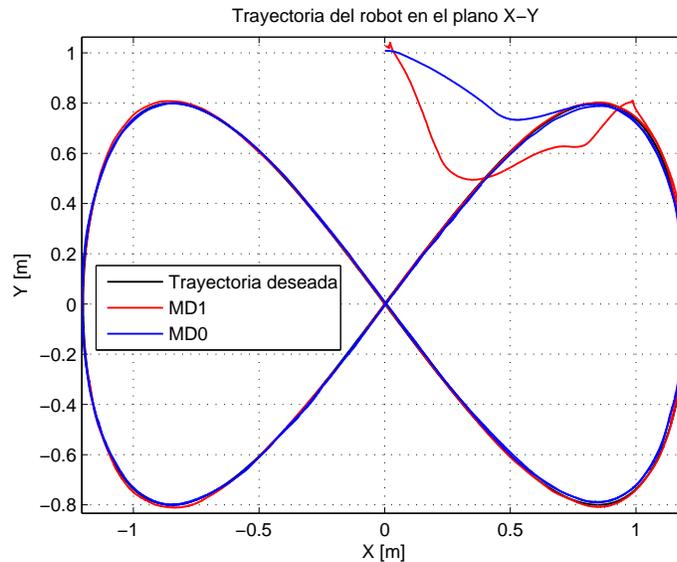


Figura 4.1.1: Seguimiento de una lemniscata, experimento 1.

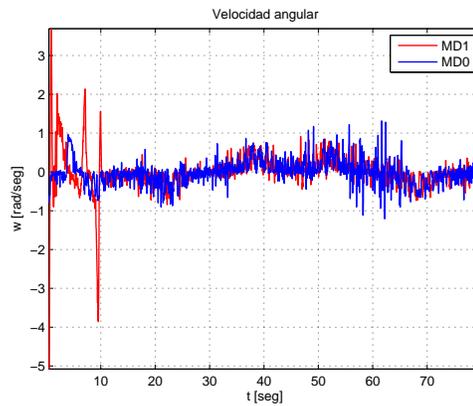


Figura 4.1.2: Velocidad angular [Lemniscata, experimento 1].

En la figura 4.1.1 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una lemniscata. En la figura 4.1.2 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores y en la figura 4.1.3 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores. En la figura 4.1.4 se muestran los pares generados por ambos controladores que son aplicados a los actuadores de cada robot móvil. En la figura 4.1.5 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes

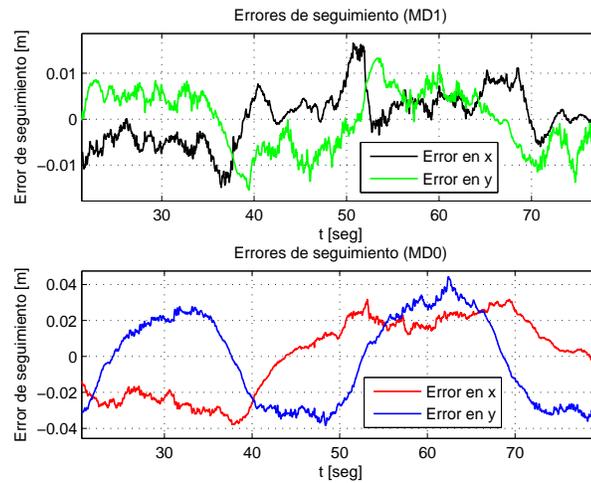


Figura 4.1.3: Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 1].

al desempeño del controlador MD1 y también se muestra la función  $s$  correspondiente al desempeño del controlador MD0.

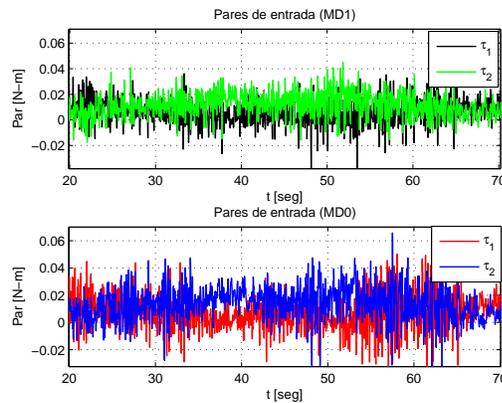


Figura 4.1.4: Pares de entrada [Lemniscata, experimento 1].

#### 4.1.2. Análisis de los resultados del experimento 1 en el seguimiento de una lemniscata

En la figura 4.1.1 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1. Se puede observar que al inicio del se-

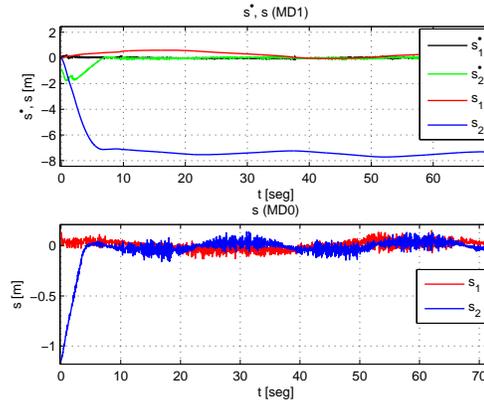


Figura 4.1.5: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Lemniscata, experimento 1].

guimiento de trayectoria, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1, pero al implementar el controlador MD0 se tienen más oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria, en comparación con el desempeño del controlador MD1.

En la figura 4.1.2 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil al inicio del seguimiento de trayectoria es mayor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0, pero después de aproximadamente 12 segundos, la velocidad angular al implementar el controlador MD1 es menor que la velocidad angular al implementar el controlador MD0.

En la figura 4.1.3, después de los primeros 20 segundos del seguimiento de la trayectoria, se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento están acotados en una banda de  $\pm 1.5$  cm y los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados en una banda de  $\pm 4$  cm. Cabe mencionar que el desempeño en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño en el plano cartesiano del controlador MD1, pero los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 son mayores que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD1. El error promedio al implementar el controlador MD1 es 6.1mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 18.2mm, lo que comprueba la efectividad de uno respecto del otro.

En la figura 4.1.4 se observa que los pares generados por el controlador MD1 son menores que los pares generados por el controlador MD0.

En la figura 4.1.5 se observa que las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD1 oscilan alrededor de cero, excepto la segunda componente de la función  $s$  que se mantiene acotada, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_2 = 0.001$

muy pequeño. Mientras que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 4.1.3. Seguimiento de una curva de Lissajous para el experimento 1

Las gráficas 4.1.6-4.1.10 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una curva de Lissajous para el experimento 1. El tiempo total del experimento es 140 segundos. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. Los parámetros de sintonización del controlador MD1 son  $k_{11} = k_{21} = 1$ ,  $k_{10} = k_{20} = 1.8$ , los ceros de la superficie deslizante de primer orden son  $z_{10} = z_{20} = 0.2$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.001$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros de sintonización del controlador MD0 son  $k_{c1} = k_{c2} = 1.3$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ .

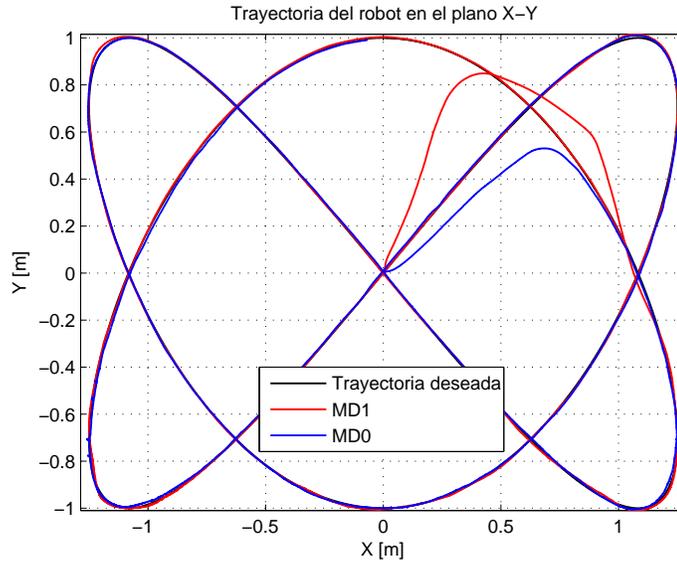


Figura 4.1.6: Seguimiento de una curva de Lissajous, experimento 1.

En la figura 4.1.6 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una curva de Lissajous. En la figura 4.1.7 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores. En la figura 4.1.8 se muestran los errores de seguimiento correspondientes al desempeño de ambos controladores. En la figura 4.1.9 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.1.10 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño

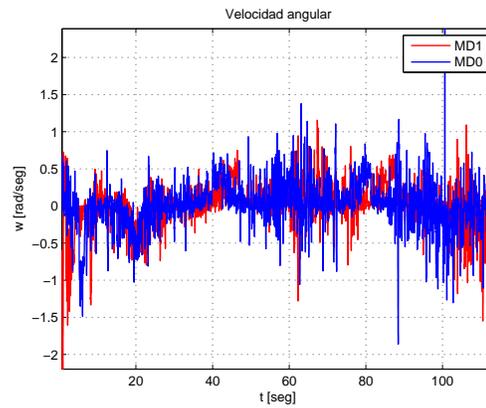


Figura 4.1.7: Velocidad angular [Curva de Lissajous, experimento 1].

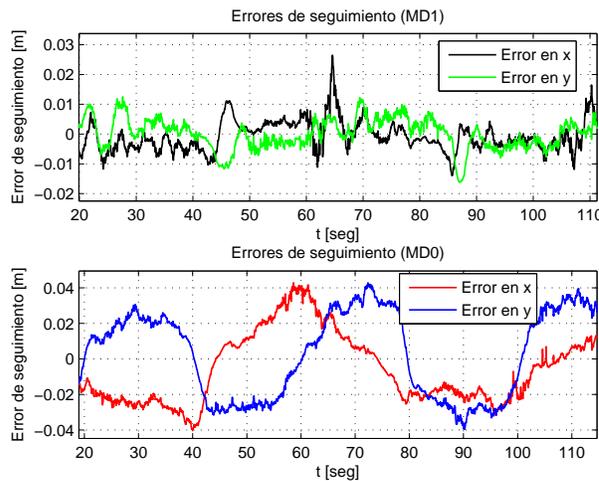


Figura 4.1.8: Errores de seguimiento [Curva de Lissajous, experimento 1].

de ambos controladores.

#### 4.1.4. Análisis de los resultados del experimento 1 en el seguimiento de una curva de Lissajous

En la figura 4.1.6 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0. Es evidente que al inicio del seguimiento de trayectoria, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1, pero al implementar el controlador

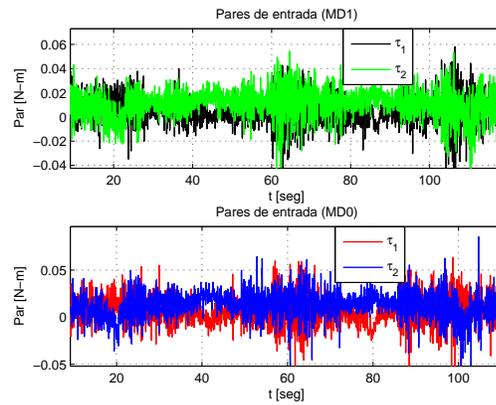


Figura 4.1.9: Pares de entrada [Curva de Lissajous, experimento 1].

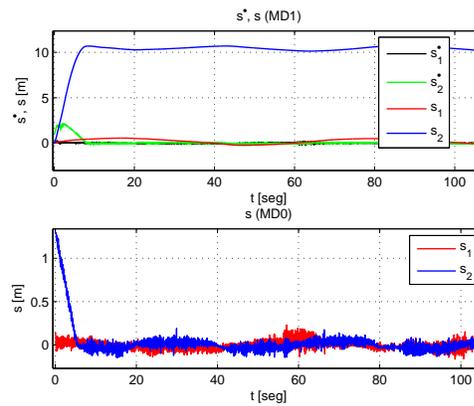


Figura 4.1.10: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Curva de Lissajous, experimento 1].

MD0 se tienen más oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria, en comparación con el desempeño del controlador MD1.

En la figura 4.1.7 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil al inicio del seguimiento de trayectoria es mayor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0, pero después de aproximadamente 10 segundos, la velocidad angular al implementar el controlador MD1 es menor que la velocidad angular al implementar el controlador MD0.

En la figura 4.1.8, después de los primeros 20 segundos del seguimiento de trayectoria, se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento están acotados en una banda de  $\pm 1.5$  cm y los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados en una banda de  $\pm 4$  cm. El error promedio al implementar el

controlador MD1 es 4.5mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 17.7mm, lo que comprueba la efectividad de uno respecto del otro.

Los pares generados por el controlador MD1 son menores que los pares generados por el controlador MD0 como se muestra en la figura 4.1.9.

En la figura 4.1.10 se observa que las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD1 oscilan alrededor de cero, excepto la segunda componente de la función  $s$  que se mantiene acotada, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_2 = 0.001$  muy pequeño. Por otro lado, las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

#### 4.1.5. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 1

Las gráficas 4.1.11-4.1.15 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 1. El tiempo total del experimento es 11 segundos. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. Los parámetros de sintonización del controlador MD1 son:  $k_{11} = k_{21} = 1$ ,  $k_{10} = k_{20} = 1.5$ , los ceros de la superficie deslizante de primer orden son  $z_{10} = z_{20} = 0.2$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.001$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros de sintonización del controlador MD0 son:  $k_{c1} = k_{c2} = 2$ , el factor de discontinuidad es  $W = 0.35$ , la pendiente de la función de saturación es  $1/\varepsilon = 10$ .

En la figura 4.1.11 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos. En la figura 4.1.12 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos y en la figura 4.1.13 se muestran los errores de seguimiento al implementar ambos controladores. En la figura 4.1.14 se muestran los pares generados por ambos controladores que son aplicados a los actuadores de cada robot móvil. En la figura 4.1.15 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño del controlador MD1 y la función  $s$  correspondiente al desempeño del controlador MD0.

#### 4.1.6. Análisis de los resultados del experimento 1 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos

En la figura 4.1.11 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1. La velocidad angular del robot móvil al implementar el controlador MD1 es menor que la velocidad angular del robot móvil im-

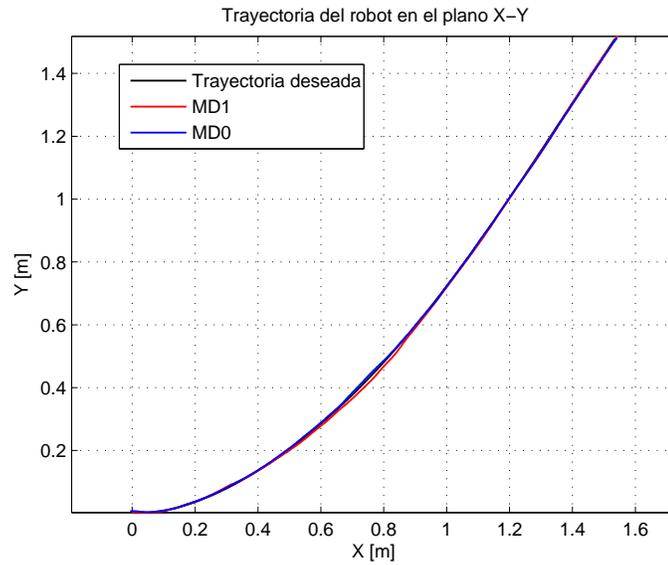


Figura 4.1.11: Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 1.

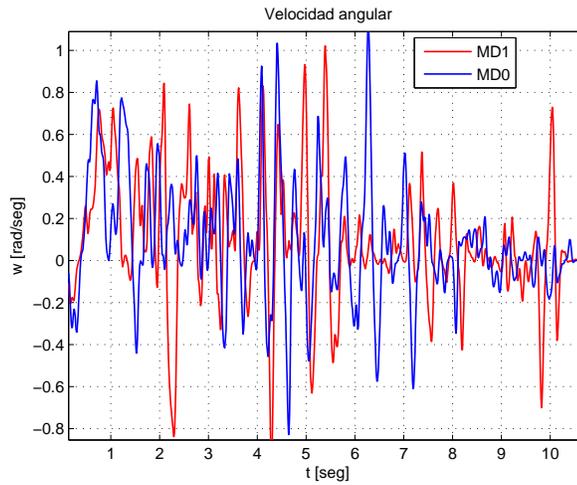


Figura 4.1.12: Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 1].

plementando el controlador MD0 como se muestra en la figura 4.1.12.

En la figura 4.1.13 se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento están acotados por arriba por 1.52 cm y los errores en estado estacionario son aproximadamente  $-5.2$  mm. Mientras que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados por arriba por 2.2 cm. El error en estado estacionario en el eje  $x$  es muy cercano a 0 mm y el error en estado estacionario en el eje  $y$  es apro-

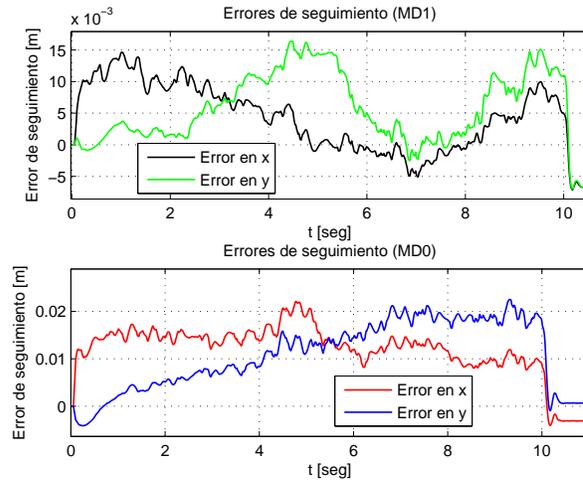


Figura 4.1.13: Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 1].

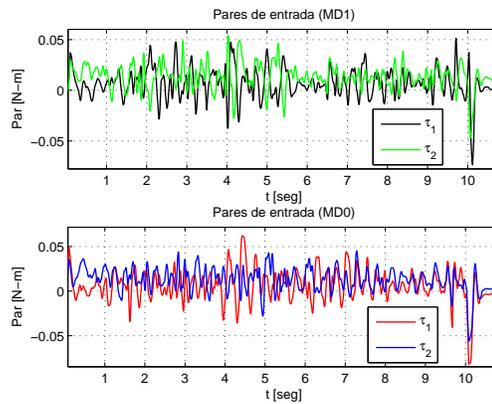


Figura 4.1.14: Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 1].

ximadamente  $-4$  mm. El error promedio al implementar el controlador MD1 es  $5.6$  mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es  $11.6$  mm, como se observa en las graficas anteriores. Los pares generados por el controlador MD1 son casi iguales en magnitud que los pares generados por el controlador MD0 como se muestra en la figura 4.1.14.

En la figura 4.1.15 se observa que al implementar el controlador MD1, la función  $\dot{s}$  oscila alrededor de cero, mientras que la función  $s$ , durante los 10 segundos del seguimiento de la trayectoria no alcanza a estabilizarse, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  muy pequeños. Por otro lado, las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

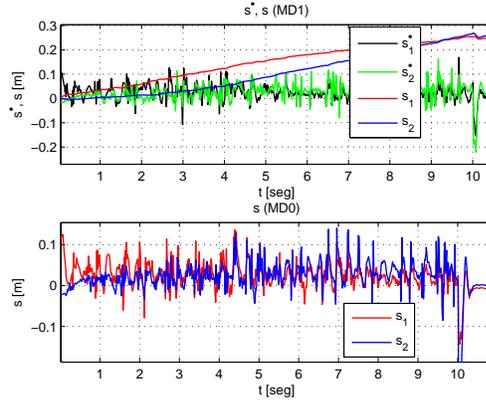


Figura 4.1.15: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Trayectoria óptima, experimento 1].

## 4.2. Experimento 2: Seguimiento de trayectorias transportando un objeto sin fricción entre las superficies de contacto

El experimento 2 consiste en que el robot móvil siga dos trayectorias mientras transporta un objeto de 350g de masa. La fricción entre las superficies de contacto del robot móvil y el objeto transportado es mínima, debido a que se colocaron rodamientos esféricos entre dichas superficies. No existen perturbaciones externas durante el seguimiento. Las dos trayectorias a seguir para este experimento son: una lemniscata y la trayectoria óptima entre dos puntos. Los parámetros de sintonización de ambos controladores son exactamente los mismos que en el experimento 1 para cada trayectoria deseada.

### 4.2.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 2

Las gráficas 4.2.1-4.2.6 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata. El objeto transportado se colocó aproximadamente en el centro de la parte trasera del robot móvil.  $d$  es la distancia entre el punto medio entre las ruedas y el centro del objeto transportado. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 1$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 120 segundos.

En la figura 4.2.1 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una lemniscata para realizar el experimento 2. En la figura 4.2.2 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores. En la figura 4.2.3 se muestran las magnitudes de  $d$  correspondientes al desempeño de ambos controladores. En la figura 4.2.4 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores. En la figura 4.2.5 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.2.6 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes

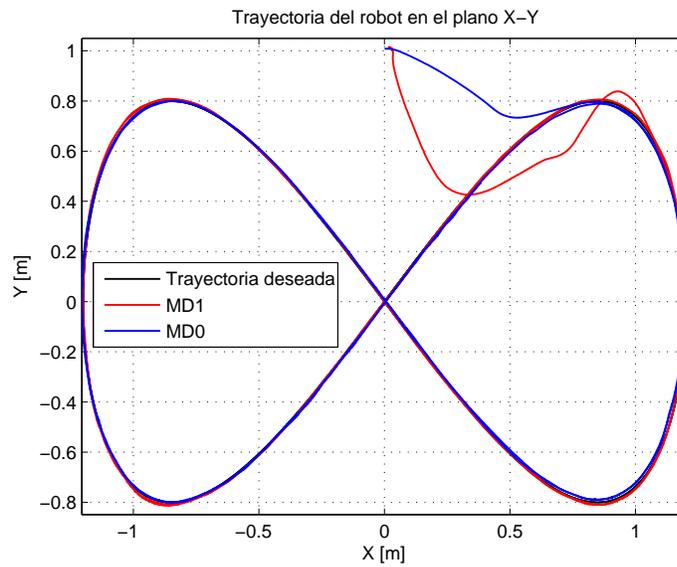


Figura 4.2.1: Seguimiento de una lemniscata, experimento 2.

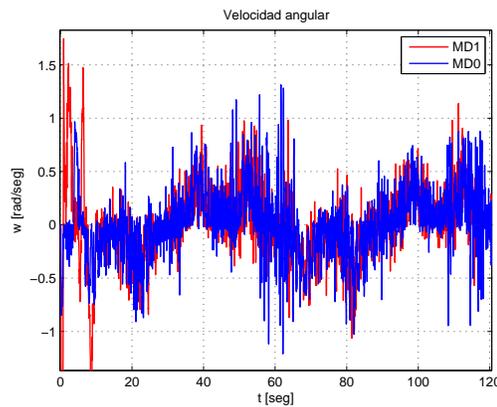


Figura 4.2.2: Velocidad angular [Lemniscata, experimento 2].

al desempeño de ambos controladores.

#### 4.2.2. Análisis de los resultados del experimento 2 en el seguimiento de una lemniscata

En la figura 4.2.1 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1. Se puede observar que al inicio del se-

## 4.2. EXPERIMENTO 2: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS TRANSPORTANDO UN OBJETO SIN FRICCIÓN ENTRE LAS SUPERFICIES DE CONTACTO

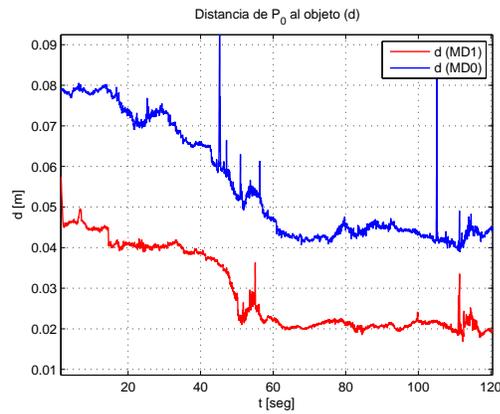


Figura 4.2.3: Distancia de  $P_0$  al objeto [Lemniscata, experimento 2].

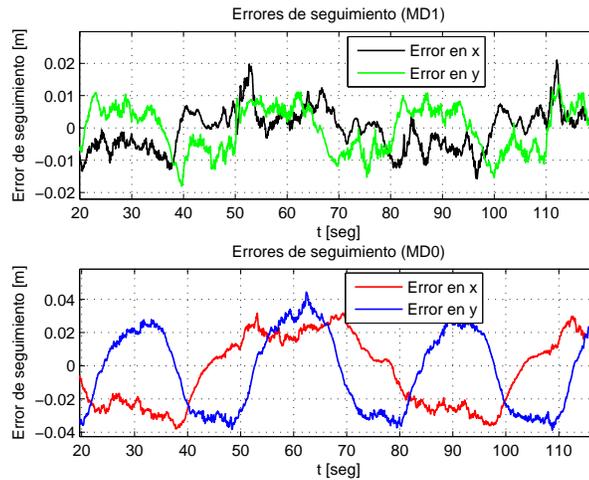


Figura 4.2.4: Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 2].

guimiento de trayectoria, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1, pero al implementar el controlador MD0 se tienen más oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria, en comparación con el desempeño del controlador MD1.

En la figura 4.2.2 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil al inicio del seguimiento de trayectoria es mayor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0, pero después de aproximadamente 10 segundos, la velocidad angular al implementar el controlador MD1 es menor que la velocidad angular al implementar el controlador MD0.

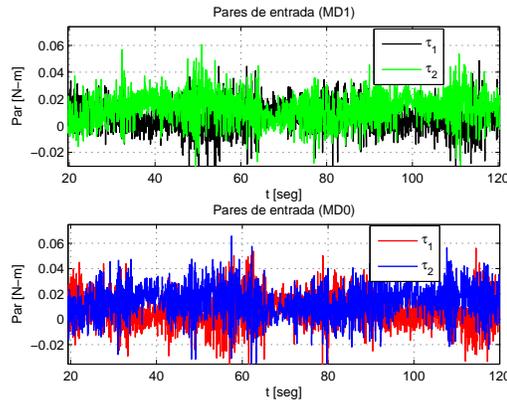


Figura 4.2.5: Pares de entrada [Lemniscata, experimento 2].

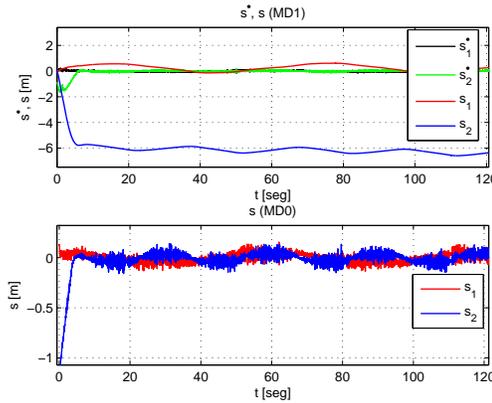


Figura 4.2.6: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Lemniscata, experimento 2].

En la figura 4.2.3 se observa que al implementar el controlador MD1,  $d$  inicial es aprox. 4.5cm y  $d$  final es aprox. 2cm, por tanto, el cambio en  $d$  es aproximadamente 2.5 cm. También se observa que al implementar el controlador MD0,  $d$  inicial es aprox. 8cm y  $d$  final es aprox. 4.5cm, por tanto, el cambio en  $d$  es aproximadamente 3.5cm.

En la figura 4.2.4, después de los primeros 20 segundos del seguimiento de la trayectoria, se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento están acotados en una banda de  $\pm 2$  cm y los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados en una banda de  $\pm 4$  cm. El error promedio al implementar el controlador MD1 es 5.8 mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 18.7 mm. Cabe mencionar que el desempeño en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1, pero los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0

son mayores que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD1. Los pares generados por el controlador MD1, en promedio son menores que los pares generados por el controlador MD0, como se muestra en la figura 4.2.5.

En la figura 4.2.6 se observa que las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD1 oscilan alrededor de cero, excepto la segunda componente de la función  $s$  que se mantiene acotada, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_2 = 0.001$  muy pequeño. Se observa también que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 4.2.3. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 2

Las gráficas 4.2.7-4.2.12 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 2. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 11 segundos.

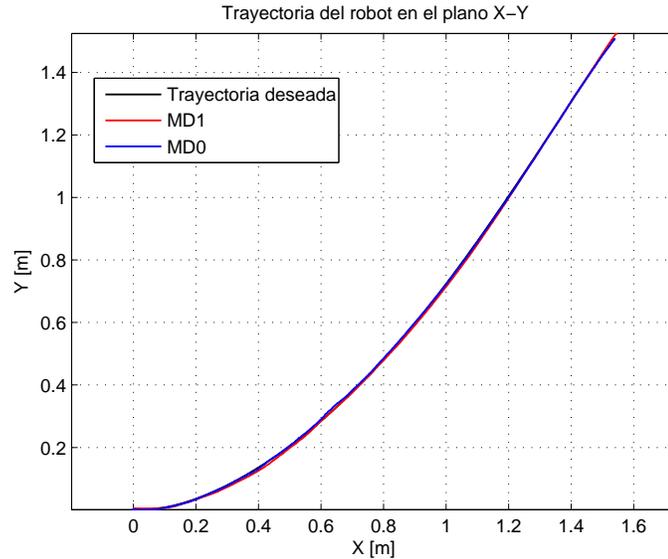


Figura 4.2.7: Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 2.

En la figura 4.2.7 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 2. En la figura 4.2.8 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores. En la figura 4.2.9 se muestran las magnitudes de  $d$  al

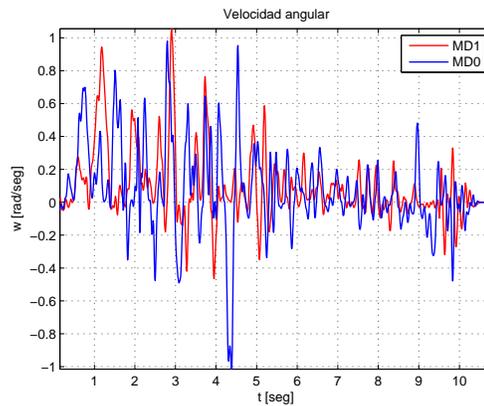


Figura 4.2.8: Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 2].

implementar ambos controladores. En la figura 4.2.10 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores. En la figura 4.2.11 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.2.12 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño de ambos controladores.

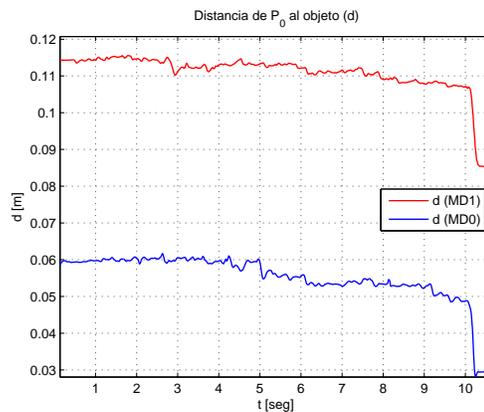


Figura 4.2.9: Distancia de  $P_0$  al objeto [Trayectoria óptima, experimento 2].

#### 4.2.4. Análisis de los resultados del experimento 2 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos

En la figura 4.2.7 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1.

4.2. EXPERIMENTO 2: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS TRANSPORTANDO UN OBJETO SIN FRICCIÓN ENTRE LAS SUPERFICIES DE CONTACTO

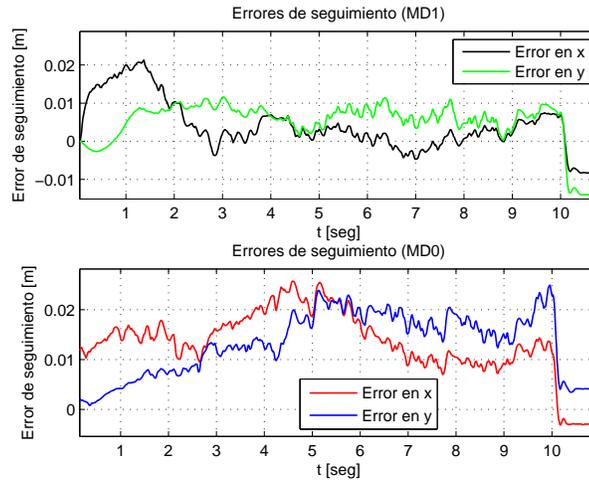


Figura 4.2.10: Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 2].

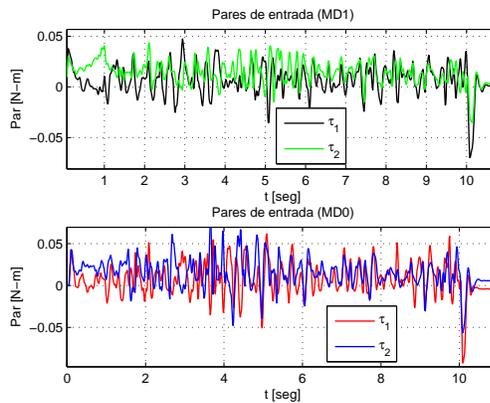


Figura 4.2.11: Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 2].

En la figura 4.2.8 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil es menor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0.

En la figura 4.2.9 se observa que al implementar el controlador MD1,  $d$  inicial es aprox. 11.5cm y  $d$  final es aprox. 8.6 cm, por tanto, el cambio en  $d$  es aproximadamente 2.9 cm. También se observa que al implementar el controlador MD0,  $d$  inicial es aprox. 6 cm y  $d$  final es aprox. 3 cm, por tanto, el cambio en  $d$  es aproximadamente 3 cm.

En la figura 4.2.10 se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de

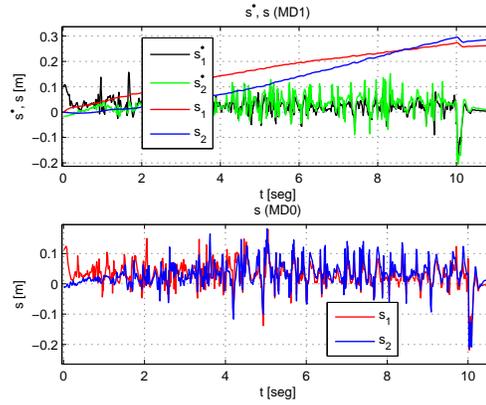


Figura 4.2.12: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Trayectoria óptima, experimento 2].

seguimiento están acotados por arriba por 2 cm y los errores en estado estacionario son aproximadamente  $-1$ cm. Mientras que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados por arriba por 2.6 cm. El error en estado estacionario en el eje  $x$  es aprox. 5 mm y el error en estado estacionario en el eje  $y$  es aproximadamente  $-4$  mm. El error promedio al implementar el controlador MD1 es 5.7 mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 12.8 mm. Los pares generados por el controlador MD1 son menores que los pares generados por el controlador MD0, como se muestra en la figura 4.2.11.

En la figura 4.2.12 se observa que al implementar el controlador MD1, la función  $\dot{s}$  oscila alrededor de cero, mientras que la función  $s$ , durante los 10 segundos del seguimiento de la trayectoria no alcanza a estabilizarse, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.001$  muy pequeños. Por otro lado, las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 4.3. Experimento 3: Seguimiento de trayectorias transportando un objeto de masa considerable comparado con la masa del robot móvil

El experimento 3 consiste en que el robot móvil siga dos trayectorias mientras transporta un objeto de 1.25kg de masa. No existe la presencia de perturbaciones externas durante el seguimiento. El objeto transportado se colocó en la parte trasera izquierda del robot móvil, aproximadamente a  $160^\circ$  respecto al eje de simetría del robot. Las trayectorias a seguir para este experimento son: una lemniscata y la trayectoria óptima entre dos puntos. Los parámetros de sintonización de ambos controladores son exactamente los mismos que en el experimento 1 para cada trayectoria deseada.

### 4.3.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 3

Las gráficas 4.3.1-4.3.6 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata para el experimento 3. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 1$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 120 segundos.

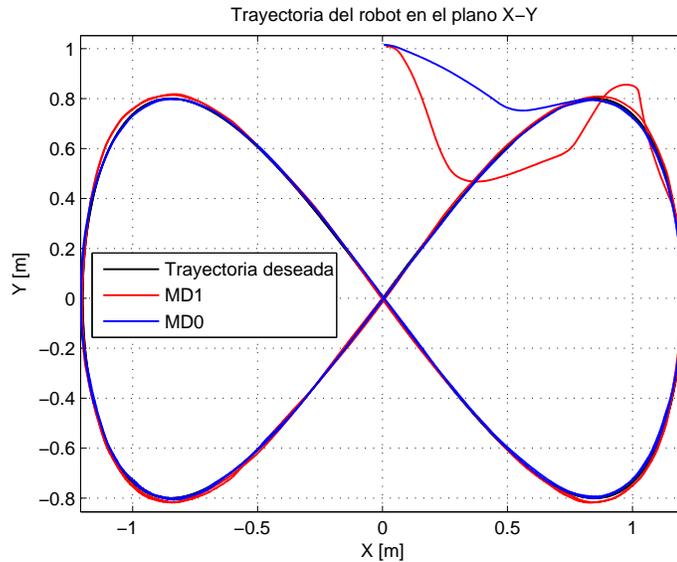


Figura 4.3.1: Seguimiento de una lemniscata, experimento 3.

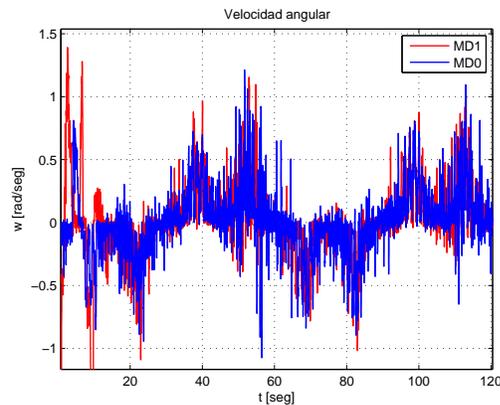


Figura 4.3.2: Velocidad angular [Lemniscata, experimento 3].

En la figura 4.3.1 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una lemniscata para realizar el experimento 3. En la

figura 4.3.2 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil al implementar ambos controladores. En la figura 4.3.3 se muestran las magnitudes de  $d$  correspondientes al implementar ambos controladores. En la figura 4.3.4 se muestran los errores de seguimiento de ambos controladores. En la figura 4.3.5 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.3.6 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño de cada controlador.

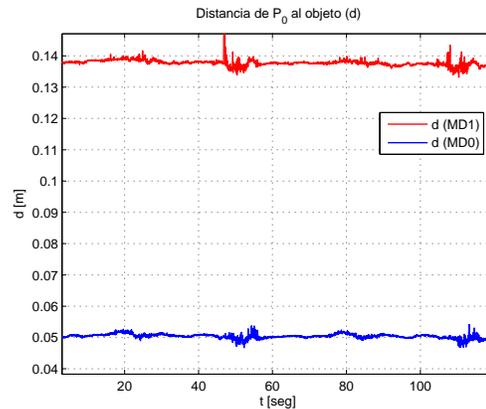


Figura 4.3.3: Distancia de  $P_0$  al objeto [Lemniscata, experimento 3].

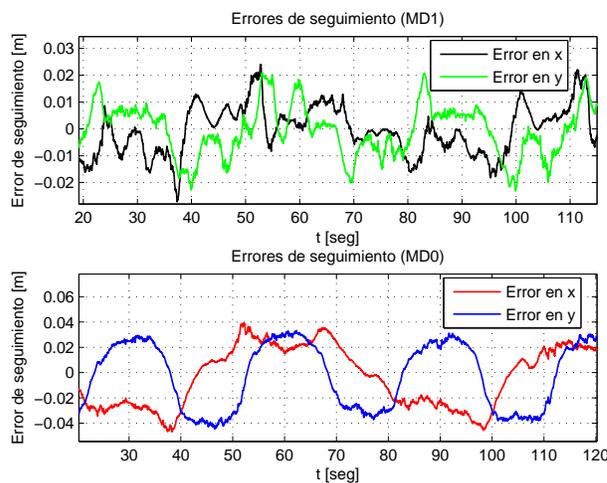


Figura 4.3.4: Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 3].

4.3. EXPERIMENTO 3: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS TRANSPORTANDO UN OBJETO DE MASA CONSIDERABLE COMPARADO CON LA MASA DEL ROBOT MÓVIL

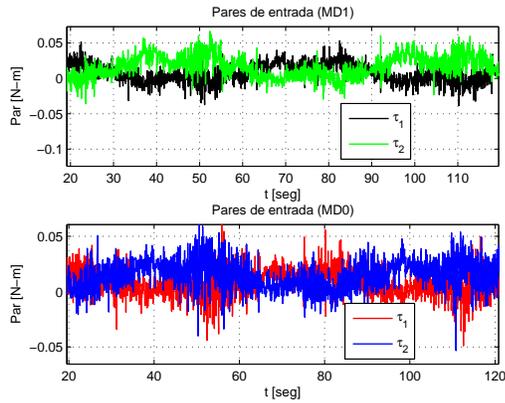


Figura 4.3.5: Pares de entrada [Lemniscata, experimento 3].

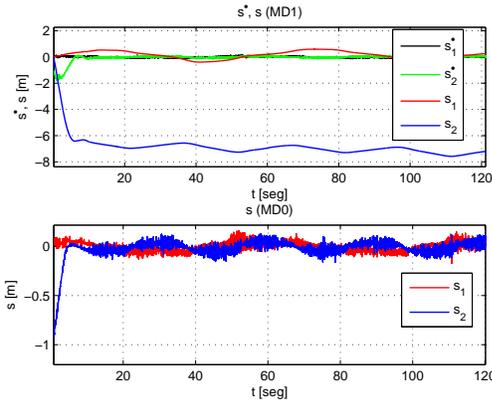


Figura 4.3.6: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Lemniscata, experimento 3].

### 4.3.2. Análisis de los resultados del experimento 3 en el seguimiento de una lemniscata

En la figura 4.3.1 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1. Se puede observar que al inicio del seguimiento de trayectoria, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1, pero al implementar el controlador MD0 se tienen más oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria, en comparación con el desempeño del controlador MD1.

En la figura 4.3.2 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil al inicio del seguimiento de trayectoria es mayor que la velocidad

angular del robot móvil implementando el controlador MD0. Después de aproximadamente 16 segundos, la velocidad angular al implementar el controlador MD1 en promedio es igual que la velocidad angular al implementar el controlador MD0.

En la figura 4.2.3 se observa que al implementar ambos controladores, la distancia  $d$  se mantiene constante en ambos casos.

En la figura 4.3.4, después de los primeros 20 segundos del seguimiento de la trayectoria, se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento están acotados por arriba por 2.1 cm y acotados por abajo por  $-2.4$  cm. Los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados en una banda de  $\pm 4.1$  cm. El error promedio al implementar el controlador MD1 es 7.5 mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 21.2 mm. Cabe mencionar que el desempeño en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño en el plano cartesiano del controlador MD1, pero los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 son mayores que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD1. Los pares generados por el controlador MD1, en promedio son iguales que los pares generados por el controlador MD0 como se muestra en la figura 4.3.5.

En la figura 4.3.6 se observa que las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD1 oscilan alrededor de cero, excepto la segunda componente de la función  $s$  que se mantiene acotada, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_2 = 0.001$  muy pequeño. Por otra parte, se observa que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 4.3.3. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 3

Las gráficas 4.3.7-4.3.12 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 3. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 11 segundos.

En la figura 4.3.7 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para realizar el experimento 3. En la figura 4.3.8 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil correspondientes al implementar cada controlador. En la figura 4.3.9 se muestran las magnitudes  $d$  correspondientes al implementar cada controlador. En la figura 4.3.10 se muestran los errores de seguimiento al implementar cada controlador. En la figura 4.3.11 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.3.12 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño de cada controlador.

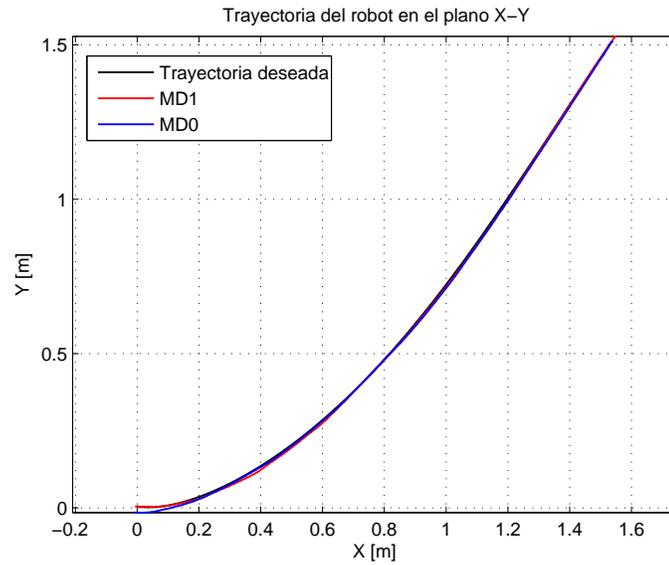


Figura 4.3.7: Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 3.

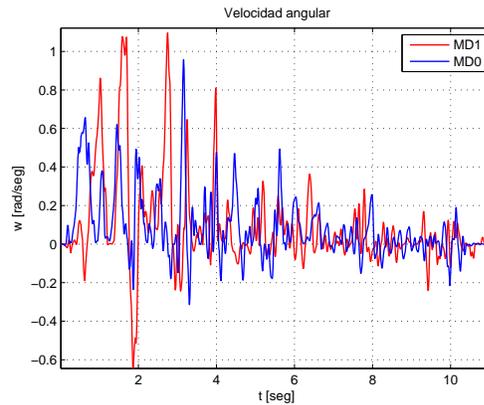


Figura 4.3.8: Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 3].

#### 4.3.4. Análisis de los resultados del experimento 3 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos

En la figura 4.3.7 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD1. En la figura 4.3.8 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil en promedio es igual que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0.

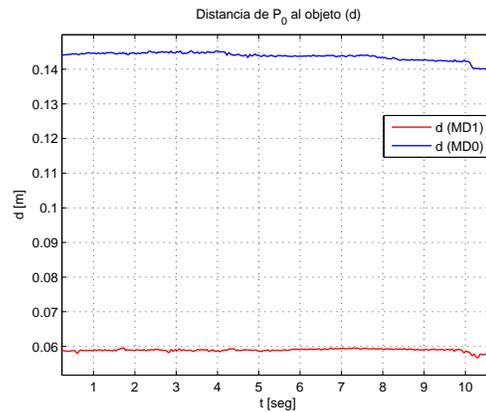


Figura 4.3.9: Distancia de  $P_0$  al objeto [Trayectoria óptima, experimento 3].

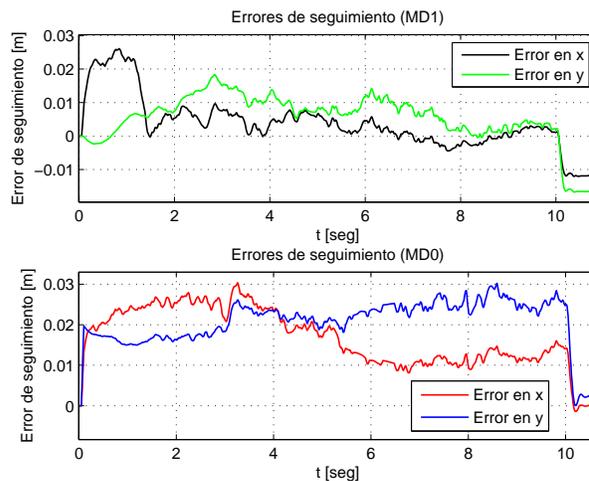


Figura 4.3.10: Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 3].

En la figura 4.3.9 se observa que al implementar el controlador MD1,  $d$  inicial es aprox. 5.9cm y  $d$  final es aprox. 5.7 cm, por tanto, el cambio en  $d$  es aproximadamente 2 mm. También se observa que al implementar el controlador MD0,  $d$  inicial es aprox. 14.4 cm y  $d$  final es aprox. 14 cm, por tanto, el cambio en  $d$  es aproximadamente 4 mm.

En la figura 4.3.10 se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento están acotados por arriba por 2.5 cm, el error en estado estacionario en el eje  $x$  es  $-1$  cm y el error en estado estacionario en el eje  $y$  es aproximadamente  $-1.5$  cm. Mientras que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados por arriba por 3 cm, el error en estado estacionario en el eje  $x$  es 0 mm y el error en estado estacionario en el eje  $y$  es aproximadamente 2 mm. El error promedio al implementar el

4.3. EXPERIMENTO 3: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS TRANSPORTANDO UN OBJETO DE MASA CONSIDERABLE COMPARADO CON LA MASA DEL ROBOT MÓVIL

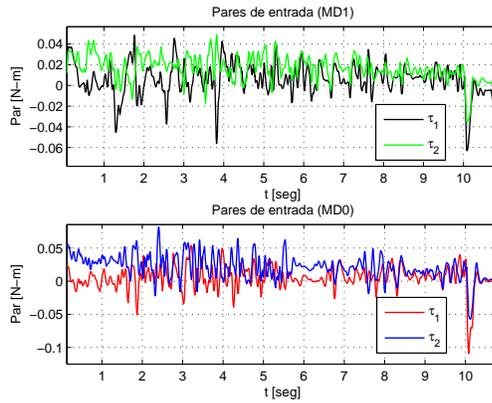


Figura 4.3.11: Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 3].

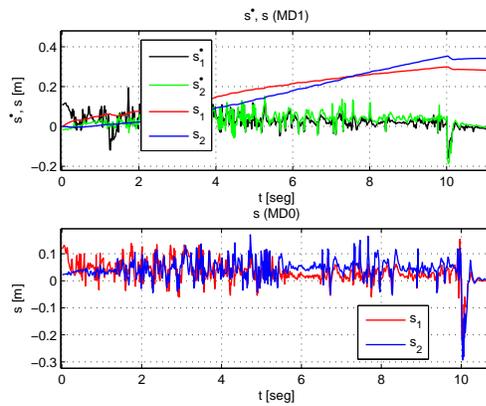


Figura 4.3.12: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Trayectoria óptima, experimento 3].

controlador MD1 es 6.5 mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 14.9 mm. Los pares generados por el controlador MD1 son menores que los pares generados por el controlador MD0, como se muestra en la figura 4.3.11.

En la figura 4.3.12 se observa que al implementar el controlador MD1, la función  $\dot{s}$  oscila alrededor de cero, mientras que la función  $s$ , durante los 10 segundos del seguimiento de la trayectoria no alcanza a estabilizarse, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.001$  muy pequeños. Por otro lado, las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

## 4.4. Experimento 4: Seguimiento de trayectorias con perturbación externa sin transportar objeto

El experimento 4 consiste en que el robot móvil siga dos trayectorias sin transportar ningún objeto. En el seguimiento de trayectoria se aplican dos perturbaciones externas, las cuales consisten en empujar el robot móvil durante 1 segundo y por ende se alteran repentinamente las variables  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\theta$ ,  $v$  y  $w$  del robot móvil. Las trayectorias a seguir son: una lemniscata y la trayectoria óptima entre dos puntos. Los parámetros de sintonización de ambos controladores son exactamente los mismos que en el experimento 1 para cada trayectoria.

### 4.4.1. Seguimiento de una lemniscata para el experimento 4

Las gráficas 4.4.1-4.4.5 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata para el experimento 4. Las perturbaciones externas se aplican aproximadamente a los 18 y 48 segundos del recorrido. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 1$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 120 segundos.

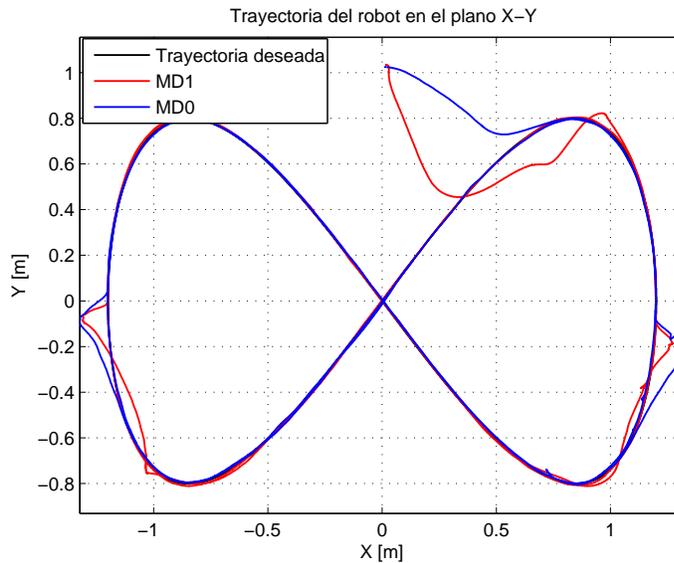


Figura 4.4.1: Seguimiento de una lemniscata, experimento 4.

En la figura 4.4.1 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir una lemniscata para realizar el experimento 4. En la figura 4.4.2 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil correspondientes al implementar cada controlador. En la figura 4.4.3 se muestran los errores de seguimiento de

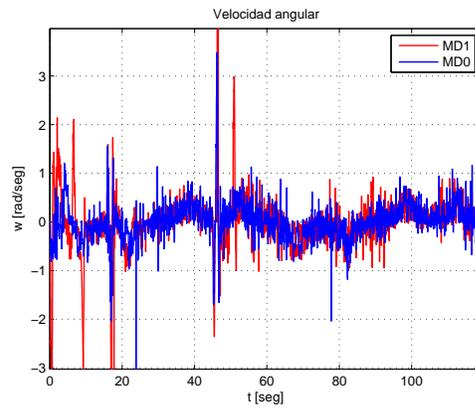


Figura 4.4.2: Velocidad angular [Lemniscata, experimento 4].

ambos controladores. En la figura 4.4.4 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.4.5 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño de cada controlador.

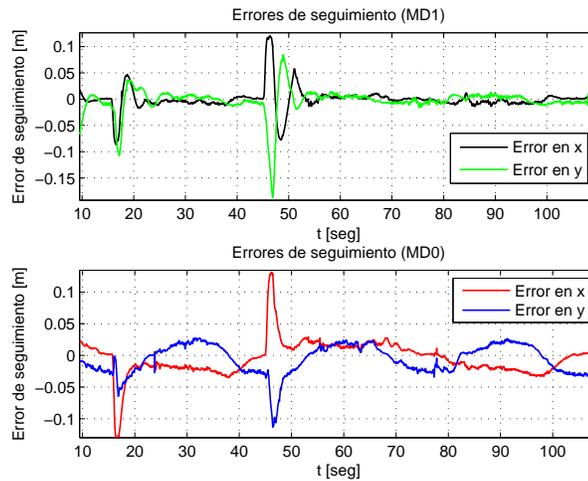


Figura 4.4.3: Errores de seguimiento [Lemniscata, experimento 4].

#### 4.4.2. Análisis de los resultados del experimento 4 en el seguimiento de una lemniscata

En la figura 4.4.1 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil en el plano

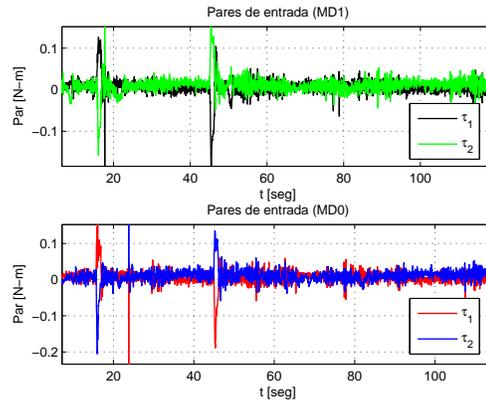


Figura 4.4.4: Pares de entrada [Lemniscata, experimento 4].

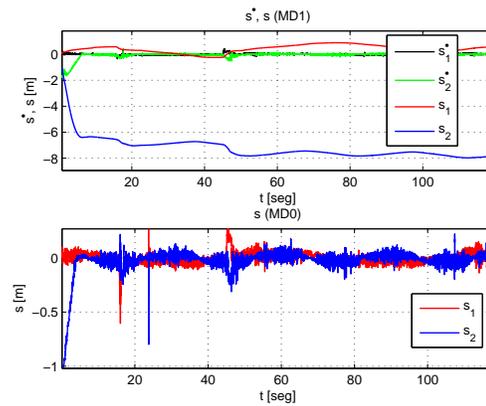


Figura 4.4.5: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Lemniscata, experimento 4].

cartesiano al implementar el controlador MD1. Se puede observar que al inicio del seguimiento de trayectoria y después de aplicarse la perturbación externa, implementando el controlador MD0 se tiene un sobre impulso menor que el sobre impulso al implementar el controlador MD1.

En la figura 4.4.2 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil es mayor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0.

En la figura 4.4.3 se observa que al implementar el controlador MD1, los errores de seguimiento son menores que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0. El error promedio al implementar el controlador MD1 es 10.3 mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 16.7 mm. Los pares generados por

el controlador MD1, en promedio son iguales que los pares generados por el controlador MD0, como se muestra en la figura 4.4.4.

En la figura 4.4.5 se observa que las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD1 oscilan alrededor de cero, excepto la segunda componente de la función  $s$  que no se mantuvo acotada, esto se debe a la sintonización del controlador, al elegir  $\Omega_2 = 0.001$  muy pequeño. Por otra parte, se observa que las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

### 4.4.3. Seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 4

Las gráficas 4.4.6-4.4.10 corresponden al desempeño de ambos controladores al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 4. La perturbación externa se aplica aproximadamente a los 5 segundos del recorrido. Las posiciones iniciales del móvil para ambos controladores son  $x = 0$  m,  $y = 0$  m,  $\theta = 0$  rad. El tiempo total del experimento es 11 segundos.

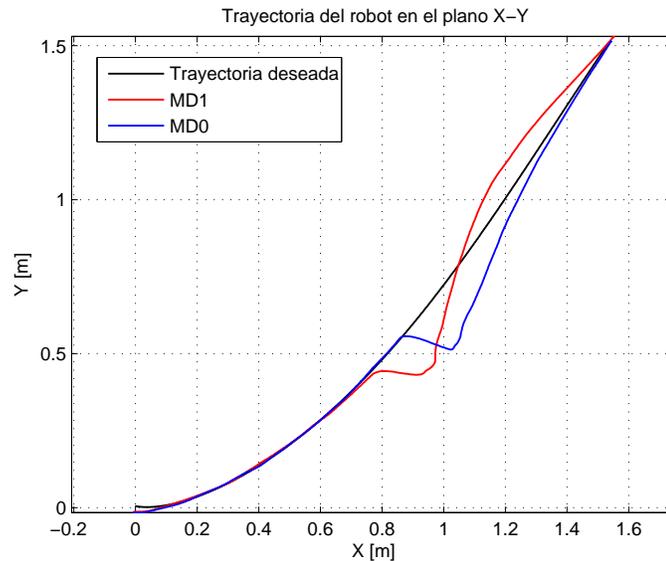


Figura 4.4.6: Seguimiento de la trayectoria óptima, experimento 4.

En la figura 4.4.6 se muestra el desempeño en el plano cartesiano de los controladores por modos deslizantes al seguir la trayectoria óptima entre dos puntos para el experimento 4. En la figura 4.4.7 se muestran las velocidades angulares de cada robot móvil correspondientes al desempeño de cada controlador. En la figura 4.4.8 se muestran los errores de

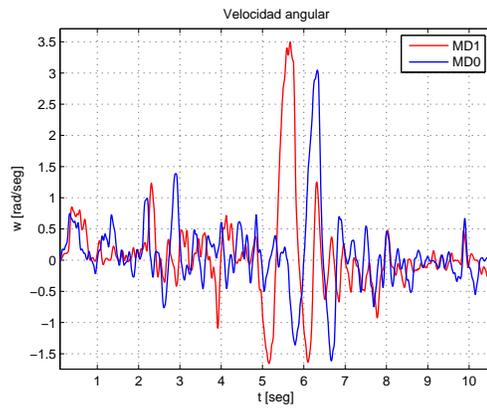


Figura 4.4.7: Velocidad angular [Trayectoria óptima, experimento 4].

seguimiento de ambos controladores. En la figura 4.4.9 se muestran los pares generados por ambos controladores. En la figura 4.4.10 se muestran las funciones  $\dot{s}$  y  $s$  correspondientes al desempeño de cada controlador.

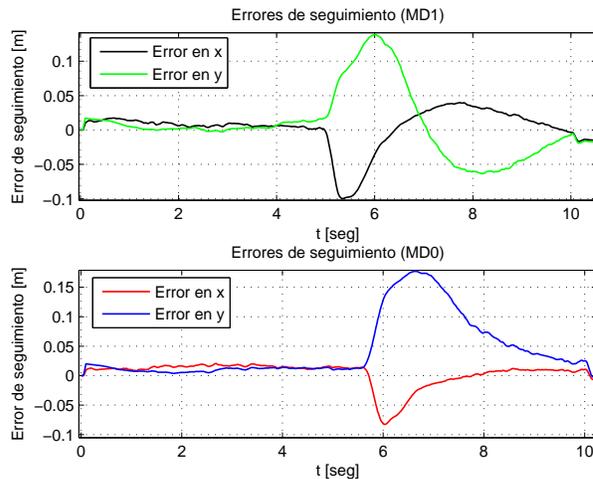


Figura 4.4.8: Errores de seguimiento [Trayectoria óptima, experimento 4].

#### 4.4.4. Análisis de los resultados del experimento 4 en el seguimiento de la trayectoria óptima entre dos puntos

En la figura 4.4.6 se observa que el desempeño del robot móvil en el plano cartesiano al implementar el controlador MD0 es mejor que el desempeño del robot móvil al implemen-

#### 4.4. EXPERIMENTO 4: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS CON PERTURBACIÓN EXTERNA SIN TRANSPORTAR OBJETO

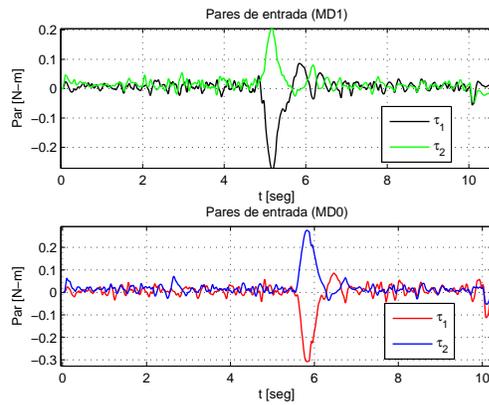


Figura 4.4.9: Pares de entrada [Trayectoria óptima, experimento 4].

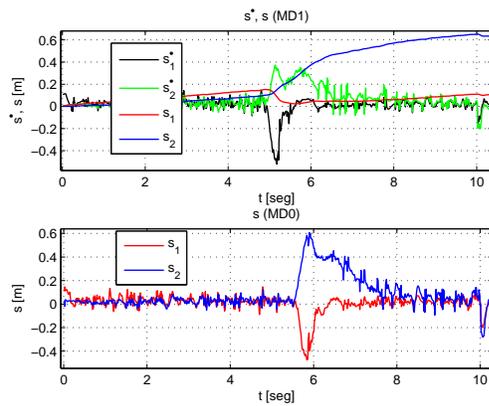


Figura 4.4.10: Funciones  $\dot{s}$  y  $s$  [Trayectoria óptima, experimento 4].

tar el controlador MD1. En la figura 4.4.7 se observa que al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil en promedio es menor que la velocidad angular del robot móvil implementando el controlador MD0.

En la figura 4.4.8 se observa que los errores de seguimiento al implementar ambos controladores son muy iguales entre si. Al implementar el controlador MD1, los errores en estado estacionario son 2 cm, mientras que al implementar el controlador MD0, los errores en estado estacionario son 0 cm. El error promedio al implementar el controlador MD1 es 19.3 mm, mientras que el error promedio al implementar el controlador MD0 es 15.7 mm. Los pares generados por el controlador MD1 son iguales que los pares generados por el controlador MD0, como se muestra en la figura 4.4.9.

En la figura 4.4.10 se observa que al implementar el controlador MD1, la función  $\dot{s}$

oscila alrededor de cero, mientras que la función  $s$  no alcanza a estabilizarse durante aproximadamente 5 segundos después de aplicarse la perturbación externa, esto se debe a la sintonización del controlador. Por otro lado, las dos componentes de la función  $s$  obtenidas al implementar el controlador MD0 se mantienen oscilando alrededor de cero.

## 4.5. Conclusiones de los resultados experimentales

El desempeño en el plano cartesiano del robot móvil al implementar el controlador MD1 es mejor que el desempeño en el plano cartesiano del robot móvil al implementar el controlador MD0, aunque se tiene un sobre impulso mayor al inicio del seguimiento al implementar el controlador MD1, durante el resto del seguimiento de trayectoria se tienen menos oscilaciones al implementar el controlador MD1. Es evidente que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD1 son menores que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0. En promedio los pares generados por el controlador MD1 son menores que los generados por el controlador MD0 y en promedio la velocidad angular del robot móvil obtenida al implementar el controlador MD1 es menor que la obtenida al implementar el controlador MD0, por lo tanto, se recomienda implementar un controlador por modos deslizantes de primer orden para la transportación de objetos de manera casi-estática por medio de un robot móvil.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se presentan conclusiones generales de este trabajo de tesis y se sugiere el trabajo futuro a desarrollar.

### 5.1. Conclusiones

Gracias a los experimentos realizados se comprueba la efectividad de los controladores, se concluye que ambos controladores son robustos en el sentido que pueden eliminar los efectos en las salidas del sistema causados por perturbaciones externas o por incertidumbres no modeladas.

Para ambos controladores se observó que si no se sintonizan adecuadamente, se obtiene un error de seguimiento constante. Dicho error constante también puede ser ocasionado por la diferencia en los parámetros del sistema programados en el controlador y los parámetros reales del prototipo experimental. La principal desventaja de estos controladores es que no se tiene control directo de la posición angular del robot móvil, con lo cual se presentan oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria.

Por otra parte, el desempeño en el plano cartesiano de ambos controladores es muy similar y aceptable. Al implementar el controlador MD1, al inicio del seguimiento de trayectoria se tiene un sobre impulso mayor que al implementar el controlador MD0, pero el resto del seguimiento, al implementar el controlador MD1, la velocidad angular del robot móvil, en promedio, es menor que la velocidad angular del robot móvil al implementar el controlador MD0. Los pares generados por el controlador MD1, en promedio, son menores que los pares generados por el controlador MD0. Los errores de seguimiento al implementar el controlador MD1 están acotados en una banda de  $\pm 1.5$  cm, mientras que los errores de seguimiento al implementar el controlador MD0 están acotados en una banda de  $\pm 4$  cm. Es evidente que el desempeño del controlador MD1 es mejor que el desempeño del controlador MD0, por lo tanto, implementar un control por modos deslizantes de orden cero no es suficiente para resolver el problema planteado, debido a que se tienen más osci-

laciones durante en el seguimiento de trayectoria y esto provoca que el objeto transportado se mueva mucho sobre el robot móvil.

Al utilizar un controlador MD1, se deben sintonizar más constantes, esto hace más difícil de implementar en un prototipo real y se puede causar que el sistema se desestabilice.

## 5.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro se sugiere lo siguiente:

- Diseñar el controlador por modos deslizantes de primer orden que contemple la posición angular del robot móvil, para eliminar las oscilaciones del móvil durante el seguimiento de trayectoria.
- Cambiar los actuadores por unos de mayor calidad, en el sentido que generen un par de aproximadamente 0.6 Nm a una velocidad de 120 rpm sin mucha reducción mecánica.

# Bibliografía

- [1] A. Alvarez-Aguirre, “Compensación de retardos de tiempo en robótica móvil”, *Tesis de maestría*, CINVESTAV, Unidad Zacatento, 2006.
- [2] C. Canudas, B. Siciliano, G. Bastin, B. Brogliato, G. Campion, B. D’Andrea-Novell, A. De Luca, W. Khalil, R. Lozano, R. Ortega, C. Samson, y P. Tomei., *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London, 1996.
- [3] Campion, G., Bastin, G., D’ Andréa-Novle, B., “Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No.1, pp 47-62, 1996.
- [4] Elmali Hakan y Olgac Nejat, “Robust Output tracking Control of Nonlinear MIMO System via Sliding Mode Technique”, *Automatica*. Vol. 27, No. 5, pp. 853-858. Printed in Great Britain, 1991.
- [5] Fierro, R. y Lewis, F., “Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics”, *34th Conference on Decision and Control*, pp. 3805-3810, 1995.
- [6] Hossein Barghijand, Adel Akbarimajd y Jafar Keighobadi, “Quasi-Static Object Manipulation by Mobile Robot-Optimal Motion Planning Using GA”, *11th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 2011.
- [7] J. A. Chocoteco, R. Morales, V. Feliu y H. Sira-Ramírez, “Robust output feedback control for the trajectory tracking of robotic wheelchairs”, *Robotica*, Vol. 33, pp. 41-59, 2015.
- [8] R. García-Saldívar, J. Álvarez-Gallegos, R. Castro-Linares, “Modelado Dinámico y Control de un Robot Móvil con Distribución de Masa No Uniforme”, *Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA*, pp. 457-462, 2014.
- [9] Isidori, A., *Nonlinear Control Systems*. 2a. edición, Springer-Verlag, 1989.
- [10] Krzysztof Kozłowski, *Robot Motion and Control*. Springer, 2006.
- [11] Vadim I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.

- [12] Yeong-Chan Chang, “Robust tracking control for nonlinear MIMO systems via fuzzy approaches”, *Automatica*, Vol. 36, pp. 1535-1545, 2000.
- [13] O. Martínez-Zuñiga, “Sincronización de robots móviles tipo (2,0) en tiempo discreto”, *Tesis de maestría*, CINVESTAV, Unidad Zacatenco, 2013.
- [14] V. Muñoz, A. Ollero, M. Prado, y A. Simón, “Mobile robot trajectory planning with dynamic and kinematic constraints”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1994.
- [15] R. M. Rosenberg, “Analytical Dynamics of Discrete Systems”. New York: Plenum Press, 1977.
- [16] J. C. Alexander y J. H. Maddocks, “Bounds on the friction-dominated motion of a pushed object”, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 12, no. 3, 1993.
- [17] A. M. Bloch, “Stabilizability of nonholonomic control systems”, *Automatica*, Vol. 28, no. 2, 1992.
- [18] J.-P. Laumond, S. Sekhavat, y F. Lamiroux, *Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots*. Springer-Verlag, 1998.
- [19] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, y C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 3er ed. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006.
- [20] H. Goldstein, C. P. Poole y J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3er ed. Addison- Wesley, 2001.
- [21] D. Keymeulen y J. Decuyper, “The fluid dynamics applied to mobile robot motion: the stream field method”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1994.
- [22] C. Canudas, H. Khenouf, C. Samson, y O. J. Sordalen, *Nonlinear Control Design for Mobile Robots*. Recent Trends in Mobile Robots, 1993.
- [23] (2015). [Online]. Available: <https://www.naturalpoint.com/optitrack/>

# Apéndice A

## Plataforma experimental

Esta sección está dedicada a explicar el funcionamiento de las partes que componen la plataforma experimental utilizada para la evaluar las leyes de control robusto.

La plataforma experimental se compone por las siguientes partes:

1. Prototipo experimental: Robot móvil tipo (2,0) de arquitectura abierta.
2. Computadora para la ejecución de la ley de control utilizando el software *Microsoft Visual C++ 2010 Express*.
3. Sensado por visión mediante cámaras FLEX de Optitrack.

El funcionamiento de la plataforma experimental consiste en obtener la posición real del robot móvil mediante un arreglo de 12 cámaras FLEX de Optitrack (vea la sección A.2), las cuales están conectadas a dos Hub que se comunican con la computadora por medio del protocolo de comunicación USB para obtener las coordenadas en los ejes  $X$ ,  $Y$  y el ángulo de orientación del robot móvil respecto a un eje de coordenadas fijo. La computadora recibe las posiciones reales del robot móvil para ejecutar la ley control y generar las salidas de dicho control para enviarlas al robot móvil (vea la sección A.1) por medio de una conexión WiFi (vea la sección A.1). El flujo de datos de la plataforma experimental se muestra en la figura A.1.2.

### A.1. Descripción de los componentes del robot móvil tipo (2,0) de arquitectura abierta

El prototipo experimental fue construido por el M.C. Rubén García Saldívar. Este prototipo se compone de un robot móvil tipo (2,0) construido totalmente de aluminio (vea la figura A.1.1). Cuenta con dos baterías de LiPo, una batería marca ElectriFly con capacidad de 3350mA a una salida de voltaje de 11.1V para alimentar los actuadores, la segunda batería es de marca Duratrax con capacidad de 2A a una salida de voltaje de 7.4V para

alimentar los circuitos eléctricos y electrónicos (vea la figura A.1.3). En la parte delantera está equipado con dos ruedas de plástico de 10 cm de diámetro y 4 mm de diámetro para su eje, una rueda omnidireccional para proporcionarle un punto de apoyo en la parte trasera (vea la figura A.1.4), además de dos motorreductores eléctricos con tren de engranes de metal marca Pololu que proporcionan los pares de empuje (vea la figura A.1.5). Algunas características eléctricas y mecánicas de los motorreductores se abordan en la sección A.1.1.

El dispositivo que recibe e interpreta los datos provenientes de la PC es una tarjeta de Texas Instruments modelo EK-TM4C123GXL, la cual contiene el microcontrolador TM4C123GH6PM Cortex-M4 (vea la figura A.1.7) que se comunica con el convertidor digital-analógico (DAC7614) para transformar los datos digitales a voltajes analógicos y de esta manera poder hacer uso de las tarjetas controladoras de los motorreductores (vea la figura A.1.6). Las tarjetas controladoras utilizadas son las AZB10A4 marca Advaced Motion Control que controlan el flujo de corriente en cada motorreductor para asegurar que los pares aplicados al robot móvil sean los mismos pares calculados previamente por el controlador en la PC. Por último, la manera en que el robot móvil se comunica con la computadora es por medio de un módulo WiFly RN-171 marca Roving (vea la figura A.1.8), el cual nos permite crear una conexión WiFi. Para mayor información acerca del prototipo experimental consulte el capítulo 3 de [8].



Figura A.1.1: Prototipo experimental: Robot móvil tipo (2,0).

### A.1.1. Motorreductor marca Pololu

El motorreductor utilizado para construir el prototipo experimental cuenta con las siguientes características (vea la figura A.1.5):

- Par de salida de 1.2 Nm.
- Voltaje de alimentación de 12V.
- Corriente nominal de 300mA.

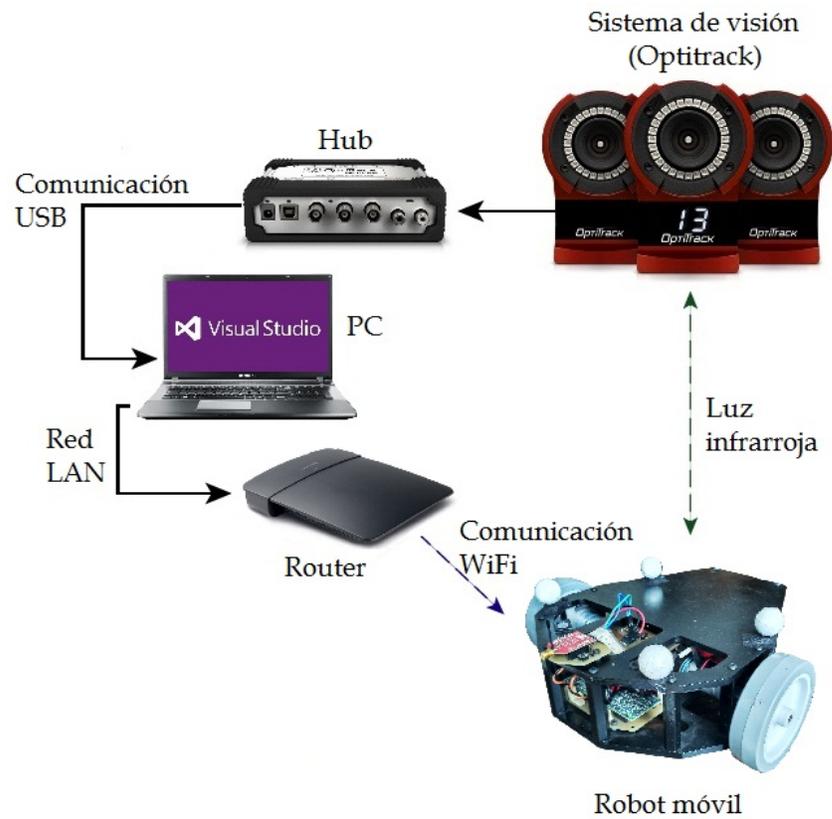


Figura A.1.2: Flujo de datos de la plataforma experimental.

- Velocidad máxima de 200 rpm.

Otras características de este motorreductor pueden ser consultadas en: [Robodacta.com](http://Robodacta.com) con el código de artículo: 1444.



Figura A.1.3: Baterías LiPo usadas en el robot móvil.



Figura A.1.4: Rueda omnidireccional.

## A.2. Sensado por visión utilizando el software Motive: Tracker de OptiTrack

El sistema de visión OptiTrack consta de 12 cámaras FLEX 13 (vea la figura A.2.1) que emiten luz infrarroja y cuentan con receptores infrarrojos para detectar la posición en el espacio de trabajo del objeto que refleja dicha luz infrarroja. El objeto reflejante es un marcador esférico reflejante de luz infrarroja (Motion Capture Maker de OptiTrack) o en su defecto, puede ser cualquier objeto que refleje la luz infrarroja como una esfera de metal cubierta con cinta reflejante. Un cuerpo sólido se conforma de por lo menos tres marcadores preferentemente distribuidos de manera asimétrica sobre el objeto que se desea sensor y mediante el software Motive: Tracker es posible obtener el centroide y los 6 grados de libertad en el espacio de trabajo de dicho cuerpo sólido, es decir, es posible obtener las coordenadas cartesianas en los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y los tres ángulos de orientación del cuerpo sólido. Estas coordenadas son mandadas a la computadora mediante un servidor VRPN utilizando el puerto local 3803. Para mayor información acerca de la comunicación mediante un servidor VRPN, consulte el capítulo 3 de [13].

El espacio de trabajo que las cámaras pueden sensor es aproximadamente una área de  $4\text{m} \times 4\text{m}$ , con un error de sensado de una décima de milímetro por cada marcador. En la figura A.2.2 se muestra la interface visual del software Motive: Tracker. El software Motive: Tracker es gratuito (disponible en: <http://www.optitrack.com/products/motive/tracker/>).



Figura A.1.5: Motorreductor marca Pololu.



Figura A.1.6: Tarjeta controladora AZB10A4 marca Advanced Motion Control.

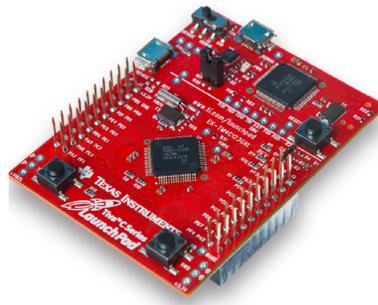


Figura A.1.7: Tarjeta de Texas Instruments modelo EK-TM4C123GXL.

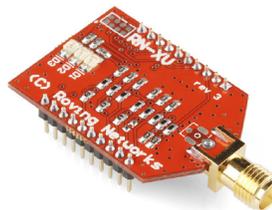


Figura A.1.8: Módulo WiFly RN-171 marca Roving.



Figura A.2.1: Cámaras FLEX 13 de OptiTrack.

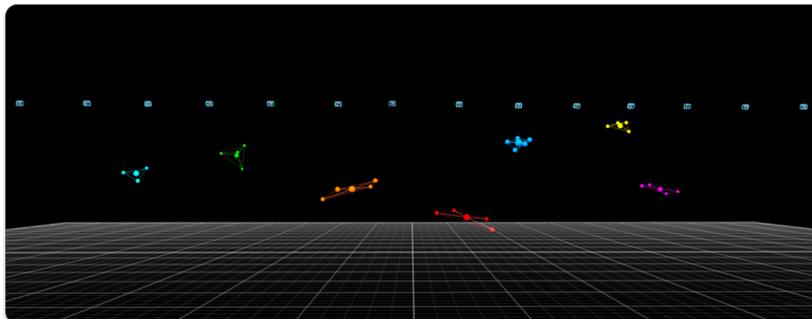


Figura A.2.2: Interface visual del software Motive:Tracker.

# Apéndice B

## Artículo

# Seguimiento Robusto de Trayectorias en la Transportación de Objetos por un Robot móvil<sup>\*</sup>

A. Arteaga-Escamilla R. Castro-Linares J. Álvarez-Gallegos

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto  
Politécnico Nacional

*e-mail: {carteagae,rcaastro,jalvarez}@cinvestav.mx*

---

Resumen: En este trabajo se presenta el seguimiento robusto de trayectorias vía modos deslizantes tanto de primer orden como de orden cero para un robot móvil tipo unicycle con distribución de masa no uniforme. Se muestran resultados en simulación para comparar el desempeño de ambos controladores.

*Palabras Clave:* Seguimiento robusto de trayectorias, Robot móvil, Modos deslizantes.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años el problema de la manipulación de robots móviles para trasladar productos ha sido de gran interés en la industria, por ejemplo para transportar materia prima, un producto terminado o algún material peligroso. En Chocoteco et al. (1958) se muestra el uso de modelos ultra globales y observadores Proporcional Integral Generalizados (GPI) en problemas de seguimiento de trayectoria con rechazo de perturbaciones activas para una silla de ruedas utilizando el modelo dinámico con incertidumbres paramétricas. Mientras que en García et al. (2014) se muestra el seguimiento de trayectoria de un unicycle con distribución de masa no uniforme. Un esquema de control muy útil para controlar el movimiento de los robots móviles transportadores ha sido el algoritmo de control por modos deslizantes; ya sea que se pretenda tener un seguimiento robusto de trayectoria o resolver el problema de regulación, el algoritmo de control por modos deslizantes es ampliamente aplicable a la mayoría de los robots móviles. Por otro lado, los modos deslizantes han sido estudiados desde hace varios años. En particular en Elmali et al. (1991) se propone el algoritmo de control por modos deslizantes de primer orden, donde la superficie deslizante es una ecuación diferencial de primer orden, la cual se aplica a sistemas no lineales con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) para resolver el problema de seguimiento robusto de trayectorias.

En este artículo se estudia el problema de seguimiento robusto de trayectorias de un unicycle con distribución de masa no uniforme utilizando su modelo dinámico. Se propone una ley de control por modos deslizantes de orden cero o de primer orden. Ambas leyes de control son robustas debido a que pueden eliminar los efectos en la salida del sistema causados por incertidumbres paramétricas en el modelo o por perturbaciones externas. La principal contribución de este artículo es la propuesta de las leyes de control antes mencionadas para la solución al problema

de seguimiento robusto de trayectorias por un robot móvil tipo unicycle con distribución de masa no uniforme.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, se obtiene el modelo dinámico y cinemático del robot móvil tipo unicycle con distribución de masa no uniforme y su representación en variables de estado. En la Sección 3, se realiza el diseño de los controladores por modos deslizantes de primer orden y de orden cero. En la Sección 4, se presentan los resultados en simulación para verificar el desempeño de ambos controladores. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 5.

## 2. MODELO DE UN UNICICLO CON DISTRIBUCIÓN DE MASA NO UNIFORME

### 2.1 Coordenadas de postura del unicycle

En este trabajo se asume que el robot móvil se mueve en un plano horizontal y que sus ruedas son indeformables. Además, se supone también que las ruedas están perfectamente en posición vertical, rotan alrededor de su eje horizontal y la orientación del plano de cada rueda está fijo respecto al cuerpo del robot. La posición del robot en el plano se muestra en la Fig. 1. El marco base de referencia inercial arbitrario  $a$  está fijo en el plano de movimiento, mientras que el marco  $m$  está adjunto al robot móvil. Las coordenadas de postura del robot móvil están definidas como

$$q = [x_0 \ y_0 \ \theta]^T,$$

donde  $x_0$ ,  $y_0$  y  $\theta$  son la posición en  $x$ ,  $y$  y el ángulo de orientación del móvil respecto al eje de coordenadas fijo, respectivamente.

### 2.2 Modelo cinemático de un robot móvil tipo unicycle con distribución de masa no uniforme

La figura 2 muestra el robot unicycle con distribución de masa no uniforme, donde  $P_0$  es el punto medio entre las ruedas y está sobre el eje de simetría del móvil,  $l$  es la

---

<sup>\*</sup> El primer autor es becario de CONACyT, México.

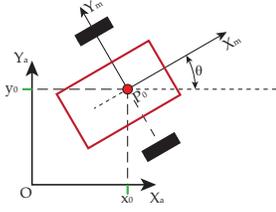


Figura 1. Coordenadas de postura del robot móvil.

mitad de la distancia entre las ruedas,  $d$  es la distancia del punto  $P_0$  al centro de masa,  $P_{cm}$ .  $r$  es el radio de cada rueda y  $\gamma$  es el ángulo de inclinación del centro de masa respecto al eje de simetría.  $v$  y  $w$  son la velocidad lineal y angular del móvil, respectivamente; mientras que  $w_l$  y  $w_r$  son las velocidades angulares de la rueda izquierda y derecha, respectivamente. En este trabajo se considera que la distancia  $d$  y el ángulo de inclinación  $\gamma$  son constantes.

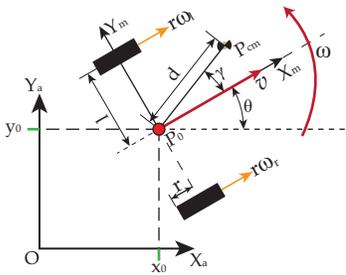


Figura 2. Velocidad lineal y angular del robot móvil.

Para obtener la velocidad del centro de masa  $P_{cm}$ , se emplea la siguiente ecuación (véase la figura 2) Canudas et al. (1996):

$$v_{cm} = v + w \times d \quad (1)$$

donde  $\times$  es el producto cruz de vectores y

$$v = [v \cos \theta \quad v \sin \theta \quad 0]^T, \quad (2)$$

$$w = [0 \quad 0 \quad w]^T, \quad (3)$$

$$d = [d \cos(\theta + \gamma) \quad d \sin(\theta + \gamma) \quad 0]^T. \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (3) y (4) en (1), se tiene que

$$v_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{cm} \\ \dot{y}_{cm} \\ \dot{z}_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta - d \sin(\theta + \gamma) w \\ v \sin \theta + d \cos(\theta + \gamma) w \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Por otro lado, el modelo cinemático del robot móvil tipo unicyclo con distribución de masa no uniforme está dado por (Canudas et al. (1996))

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad (6)$$

con

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin(\theta + \gamma) \\ \sin \theta & d \cos(\theta + \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

donde  $\dot{q}$  es la derivada del vector de coordenadas de postura y  $\eta = [v \quad w]^T$  son las entradas de control relacionadas a las velocidades. El modelo cinemático (6) se utiliza para obtener el modelo dinámico del robot móvil.

### 2.3 Modelo dinámico de un robot móvil tipo unicyclo con distribución de masa no uniforme

Usando la formulación de Lagrange, el modelo dinámico del unicyclo está descrito por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - a_{1i} \lambda, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

siendo  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  las componentes del vector de postura.  $K$  es la energía cinética,  $Q_i$  son los pares de entrada al sistema,  $a_{1i}$  son los elementos de la matriz de restricciones no holónomas y  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange. La energía cinética del robot está dada por

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^T v_{cm} + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2, \quad (9)$$

donde  $m$  e  $I_z$  son la masa y el momento de inercia del robot móvil respecto al eje  $Z$ , respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (2) en (9) se obtiene

$$K = \frac{1}{2} m [\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + d^2 \dot{\theta}^2 - 2d \sin(\theta + \gamma) \dot{x}_0 \dot{\theta} + 2d \cos(\theta + \gamma) \dot{y}_0 \dot{\theta}] + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

En la figura 3 se muestran los pares generados por las ruedas y las fuerzas aplicadas al sistema.  $\tau_l$  y  $\tau_r$  son los pares izquierdo y derecho, respectivamente, generados por los actuadores en las ruedas y se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{aligned} Q_{x0} &= \frac{\tau_l}{r} \cos \theta + \frac{\tau_r}{r} \cos \theta \\ Q_{y0} &= \frac{\tau_l}{r} \sin \theta + \frac{\tau_r}{r} \sin \theta \\ Q_{\theta} &= -\frac{\tau_l}{r} l + \frac{\tau_r}{r} l \end{aligned}$$

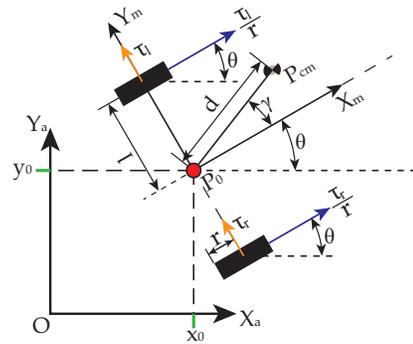


Figura 3. Fuerzas aplicadas al robot móvil.

Haciendo los cálculos correspondientes de la ecuación (8), se obtiene el modelo dinámico del robot móvil tipo unicyclo con distribución de masa no uniforme dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - A_r^T(q)\lambda \quad (10)$$

donde  $A_r$  es la matriz de restricciones no holónomas dada por (García et al. (2014)):

$$A_r = [-\sin \theta \quad \cos \theta \quad -d \cos \gamma]$$

Por otro lado, la matriz  $S(q)$  dada por (7) es tal que sus columnas se encuentran en el espacio nulo de  $A_r(q)$  como se muestra en García et al. (2014), de tal modo que

$$S^T(q)A_r^T = 0.$$

A partir de (6) se tiene que

$$\ddot{q} = S\dot{\eta} + \dot{S}\eta. \quad (11)$$

Sustituyendo (6) y (11) en (10) y pre multiplicando por  $S^T$  se obtiene

$$S^T[M(S\dot{\eta} + \dot{S}\eta) + C(S\eta)] = B\tau - A_r^T\lambda.$$

De manera que el modelo dinámico está dado por

$$\bar{M}\dot{\eta} + \bar{C}\eta = \bar{B}\tau, \quad (12)$$

con

$$\bar{M} = S^TMS = \begin{bmatrix} m & -2md\text{sen}(\gamma) \\ -2md\text{sen}(\gamma) & 4md^2 + I_z \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = S^TMS + S^TCS,$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2md\text{cos}(\gamma)\dot{\theta} \\ 2md\text{cos}(\gamma)\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = S^TB = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -d\text{sen}(\gamma) - l & -d\text{sen}(\gamma) + l \end{bmatrix},$$

$$\tau = [\tau_l \ \tau_r]^T.$$

Se puede tener una representación en variables de estado del sistema dado por la ecuación (12), al definir el vector de estados como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Utilizando la ecuación (6), se tiene que

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, de la ecuación (12) se obtiene

$$\dot{\eta} = \bar{M}^{-1}[-\bar{C}\eta + \bar{B}\tau].$$

El sistema no lineal (12) puede entonces escribirse como

$$\dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)\tau, \quad (13)$$

donde

$$\bar{f}(x) = \begin{bmatrix} S\eta \\ -\bar{M}^{-1}\bar{C}\eta \end{bmatrix},$$

$$\bar{g}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}^{-1}\bar{B} \end{bmatrix}.$$

Al utilizar una retroalimentación de estados de la forma

$$\tau = \bar{B}^{-1}(q)[\bar{M}(q)u + \bar{C}(q, \dot{q})\eta],$$

se obtiene el modelo dinámico de postura del robot móvil tipo unicycle mostrado en la figura 3 dado por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S(q)\eta \\ \dot{\eta} &= u \end{aligned}$$

donde

$$u = [u_1 \ u_2]^T = [\dot{v} \ \dot{w}]^T,$$

son nuevas entradas de control (la aceleración lineal y angular). La representación del sistema en variables de estado toma entonces la forma

$$\dot{x} = f(x) + g_1u_1 + g_2u_2 \quad (14)$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_4\text{cos}(x_3) - dx_5\text{sen}(x_3 + \gamma) \\ x_4\text{sen}(x_3) + dx_5\text{cos}(x_3 + \gamma) \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = [y_1 \ y_2]^T = [h_1(x) \ h_2(x)]^T = [x_1 \ x_2]^T$$

$$g_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \ g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

El sistema (14) tiene dos entradas y dos salidas y se puede verificar que

$$L_{g_j}L_f^k h_i(x) = 0, \text{ para } j = 1, 2; i = 1, 2; k = 0, 1,$$

donde  $L_a b(x)$  denota la derivada de Lie de la función  $b(x)$  a lo largo del vector  $a(x)$ . La matriz de desacoplamiento está dada por

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f h_1(x) & L_{g_2}L_f h_1(x) \\ L_{g_1}L_f h_2(x) & L_{g_2}L_f h_2(x) \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \text{cos}(x_3) & -d\text{sen}(x_3 + \gamma) \\ \text{sen}(x_3) & d\text{cos}(x_3 + \gamma) \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \det(A) &= d[\text{cos}(x_3)\text{cos}(x_3 + \gamma) + \text{sen}(x_3)\text{sen}(x_3 + \gamma)] \\ &= d\text{cos}(\gamma). \end{aligned}$$

$A(x)$  es no singular cuando  $\text{cos}(\gamma) \neq 0$  y  $d \neq 0$ . Estas condiciones se satisfacen al suponer que el objeto transportado permanece en la parte delantera del robot móvil, es decir, el ángulo  $\gamma \neq \pi/2$  o que el centro de masa del robot móvil no está en el punto medio entre las ruedas, es decir,  $d \neq 0$ . Si el centro de masa del robot móvil estuviera sobre el eje de rotación de las ruedas, probablemente el robot móvil volcaría. Entonces de acuerdo a Isidori (1989) el sistema (14) tiene un vector de grado relativo  $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$ . De esta manera se puede hacer la asignación

$$\ddot{y} = b + Au = v_{aux}, \quad (15)$$

donde  $v_{aux}$  es un control auxiliar que se definirá posteriormente y el vector  $b(x)$  está dado por

$$\begin{aligned} b(x) &= \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_4x_5\text{sen}(x_3) - dx_5^2\text{cos}(x_3 + \gamma) \\ x_4x_5\text{cos}(x_3) - dx_5^2\text{sen}(x_3 + \gamma) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3. CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES

Para conseguir una acción de control por modos deslizantes es necesario definir una ecuación en función de los estados (superficie deslizante), cuya derivada contenga alguna componente de la señal de control, es decir, que el grado relativo de la superficie deslizante sea 1.

En el caso de un control por modos deslizantes de orden cero, la superficie deslizante es una ecuación algebraica, en la cuál no se involucra ninguna derivada de dicha superficie deslizante (Elmali et al. (1991)).

Debido a que el sistema descrito por la ecuación (14) es un sistema no lineal con dos entradas-dos salidas, entonces se tienen dos superficies deslizantes y como la matriz de desacoplamiento  $A(x)$  es no singular, entonces el sistema está desacoplado y las superficies deslizantes se pueden tratar por separado. Se definen los errores de seguimiento como

$$e_1 = (y_{d1} - y_1), e_2 = (y_{d2} - y_2),$$

donde  $y_{d1}$  y  $y_{d2}$  son las salidas deseadas. Se definen entonces los vectores y matrices siguientes:

$$e = [e_1 \ e_2]^T, \quad y = [y_1 \ y_2]^T, \quad y_d = [y_{d1} \ y_{d2}]^T$$

$$s = [s_1 \ s_2]^T, \quad \text{sgn}(s) = [\text{sgn}(s_1) \ \text{sgn}(s_2)]^T$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{21} \end{bmatrix}, \quad k_0 = \begin{bmatrix} k_{10} & 0 \\ 0 & k_{20} \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} & 0 \\ 0 & z_{20} \end{bmatrix},$$

donde  $e$  es el vector de error de seguimiento,  $s$  es el vector de superficies deslizantes,  $\text{sgn}(s)$  es el vector de funciones signo para las superficies deslizantes y  $k_{11}, k_{21}, k_{10}, k_{20}, z_{10}, z_{20}$  son constantes reales positivas.

Las superficies deslizantes de orden cero se definen como (Utkin (1992))

$$s_1(x) = \dot{e}_1 + k_{c1}e_1 = 0, \quad s_2(x) = \dot{e}_2 + k_{c2}e_2 = 0,$$

donde  $k_{c1}$  y  $k_{c2}$  son constantes reales positivas.

El vector  $s$  se puede escribir como

$$s(x) = \dot{e} + k_c e = 0 \quad (16)$$

donde  $k_c = \begin{bmatrix} k_{c1} & 0 \\ 0 & k_{c2} \end{bmatrix}$ .

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov (Utkin (1992)):

$$V = \frac{1}{2}(s^T s), \quad (17)$$

al derivar (17) se debe satisfacer que

$$\dot{V} = s^T \dot{s} < 0. \quad (18)$$

Derivando (16) y sustituyendola en (18) se tiene que

$$\dot{V} = s^T (\ddot{e} + k_c \dot{e}) = s^T (\ddot{y}_d - v_{aux} + k_c \dot{e}) < 0, \quad (19)$$

definiendo el control auxiliar  $v_{aux}$  como

$$v_{aux} = \ddot{y}_d + k_c \dot{e} + W \text{sgn}(s), \quad (20)$$

y sustituyendolo en (19), finalmente se obtiene

$$\dot{V} = s^T [-W \text{sgn}(s)] = -W[|s_1| + |s_2|] < 0,$$

el análisis anterior demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Al utilizar la ecuación (15) se obtiene el control

$$u = A^{-1}[v_{aux} - b] = A^{-1}[\ddot{y}_d + k_c \dot{e} + W \text{sgn}(s) - b].$$

A diferencia del control por modos deslizantes de orden cero, en el caso de un control por modos deslizantes de primer orden, la superficie deslizante no es una ecuación algebraica, sino una ecuación diferencial de primer orden

(Elmali et al. (1991)), en la cuál se involucra la superficie deslizante  $s$  y su primera derivada  $\dot{s}$ . Se propone entonces una superficie deslizante de primer orden dada por

$$\dot{s} + z_0 s = \dot{e} + k_1 e + k_0 \int e = 0. \quad (21)$$

Al derivar la ecuación (21) con respecto al tiempo, se tiene que

$$\ddot{s} + z_0 \dot{s} = \ddot{y}_d - \ddot{y} + k_1 \dot{e} + k_0 e, \quad (22)$$

y sustituyendo la ecuación (15) en (22) se obtiene

$$\ddot{s} = \ddot{y}_d - v_{aux} + k_1 \dot{e} + k_0 e - z_0 \dot{s}. \quad (23)$$

Al considerar la siguiente función candidata de Lyapunov (Elmali et al. (1991)):

$$V = \frac{1}{2}(\dot{s}^T \dot{s} + s^T \Omega s), \quad (24)$$

donde  $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix}$ ,  $\Omega_1 > 0$ ,  $\Omega_2 > 0$  son constantes reales, se tiene que para garantizar que  $s$  y  $\dot{s}$  sean atractivas se debe satisfacer

$$\dot{V} = \dot{s}^T (\ddot{s} + \Omega s) < 0. \quad (25)$$

Sustituyendo (23) en (25) se tiene que

$$\dot{s}^T (\ddot{y}_d - v_{aux} + k_1 \dot{e} + k_0 e - z_0 \dot{s} + \Omega s) < 0, \quad (26)$$

se define entonces el control auxiliar  $v_{aux}$  como

$$v_{aux} = \ddot{y}_d + k_1 \dot{e} + k_0 e - z_0 \dot{s} + \Omega s + W \text{sgn}(\dot{s}), \quad (27)$$

donde  $W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$ ,  $W_1 > 0$ ,  $W_2 > 0$  son constantes reales, y sustituyendo (27) en (26) se tiene que

$$\dot{V} = \dot{s}^T [-W \text{sgn}(\dot{s})] < 0$$

$$\dot{V} = -W[|\dot{s}_1| + |\dot{s}_2|] < 0.$$

Con el análisis anterior se demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Al utilizar la ecuación (15) se obtiene finalmente el control

$$u = A^{-1}[v_{aux} - b]$$

$$u = A^{-1}[\ddot{y}_d + k_1 \dot{e} + k_0 e - z_0 \dot{s} + \Omega s + W \text{sgn}(\dot{s}) - b]$$

Las funciones  $\text{sgn}(\dot{s})$  y  $\text{sgn}(s)$  se sustituirán por una función que sea más suave, una función de saturación definida como

$$\text{sat}(\dot{s}) = \begin{cases} 1, & \dot{s} > \varepsilon \\ (1/\varepsilon)\dot{s}, & -\varepsilon \leq \dot{s} \leq \varepsilon \\ -1, & \dot{s} < -\varepsilon \end{cases}$$

#### 4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Las siguientes simulaciones numéricas se realizaron para un robot móvil tipo unicycle con distribución de masa no uniforme. Como se menciona al principio de este trabajo, se supone que la posición del centro de masa del móvil no está variando. El tiempo total de simulación es 50 segundos cuando la trayectoria deseada es un círculo y 100 segundos cuando la trayectoria deseada es una lemniscata. En ambas simulaciones, a los 30 segundos se aplica una perturbación externa durante 1 segundo en los estados  $y$  y  $w$ . Los parámetros del robot móvil son  $d = 0,1\text{m}$ ,  $r = 0,065\text{m}$ ,  $l = 0,13\text{m}$ ,  $I_z = 0,08\text{kgm}^2$ ,  $\gamma = 0,15$  rad, cuya masa considerando un objeto transportado es  $m = 5,25$  kg.

Las posiciones iniciales del móvil son  $x = 0\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$ ,  $\theta = 0\text{ rad}$  cuando la trayectoria deseada es un círculo y las posiciones iniciales del móvil son  $x = 0\text{m}$ ,  $y = 0,5\text{m}$ ,  $\theta = 0\text{ rad}$  cuando la trayectoria deseada es una lemniscata. Las constantes de proporcionalidad son  $k_{11} = k_{21} = 0,8$ ,  $k_{10} = k_{20} = 0,3$ , los coeficientes de proporción son  $k_{c1} = k_{c2} = 1,4$ , los ceros de la superficie deslizante de segundo orden son  $z_{10} = z_{20} = 0,3$ , los factores de proporcionalidad son  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,001$ , los factores de discontinuidad son  $W_1 = W_2 = 0,2$ , la pendiente de la función de saturación en ambos controladores es  $1/\varepsilon = 10$ . Los parámetros del círculo son  $x_d = \text{sen}(2\pi t/50)$ ,  $y_d = \text{cos}(2\pi t/50)$ ; los parámetros de la lemniscata son  $x_d = 1,6\text{sen}(2\pi t/100)$ ,  $y_d = 0,8\text{sen}(4\pi t/100)$ . A fin de tener una simulación más acorde con el valor experimental, los pares aplicados al sistema en ambas simulaciones se acotaron a  $0.1\text{ Nm}$ .

En la figura 4 se observa el desempeño del control por modos deslizantes de primer orden (HOSM) y del control por modos deslizantes de orden cero (SM) en el seguimiento de un círculo. En la figura 5 se muestran las velocidades angulares generadas al utilizar ambos controladores. En la figura 6 se muestran los errores de seguimiento utilizando el control (HOSM) y en la figura 7 se muestran los errores de seguimiento utilizando el control (SM).

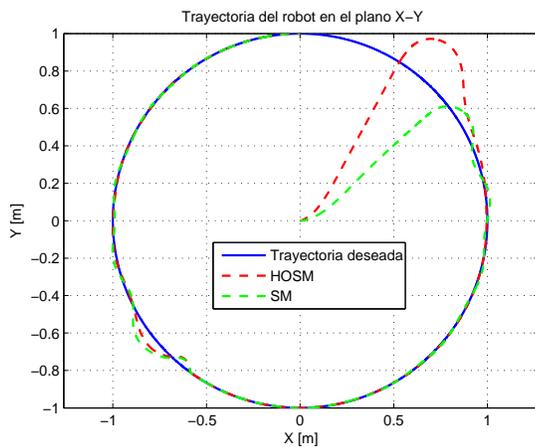


Figura 4. Trayectoria en el plano.

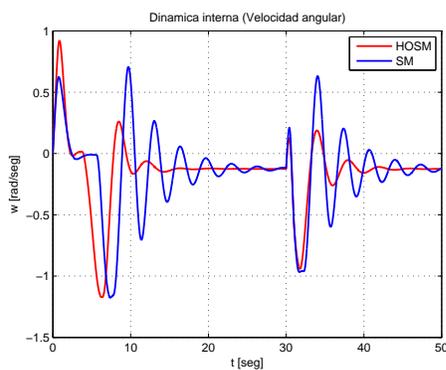


Figura 5. Velocidad angular (Círculo).

En la figura 8 se observa el desempeño de ambos controladores al seguir una lemniscata. En la figura 9 se muestra la comparación de la velocidad angular del robot móvil al utilizar ambos controladores. En la figura 10 se observan

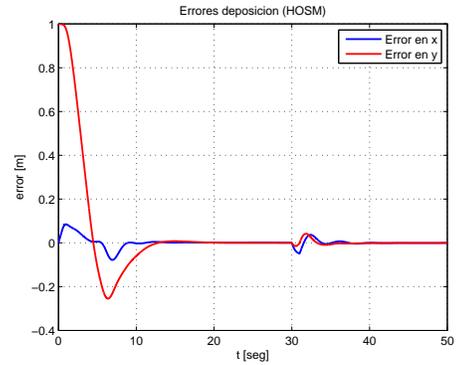


Figura 6. Errores de seguimiento (HOSM).

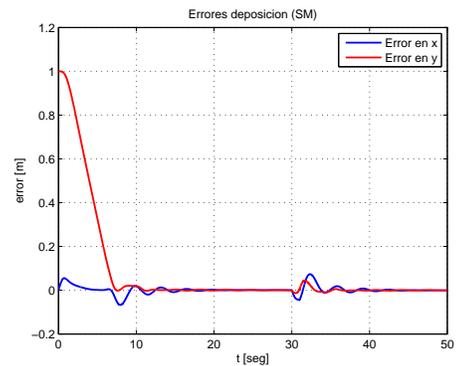


Figura 7. Errores de seguimiento (SM).

los errores de seguimiento al utilizar el control (HOSM) y en la figura 11 los errores de seguimiento al utilizar el control (SM).

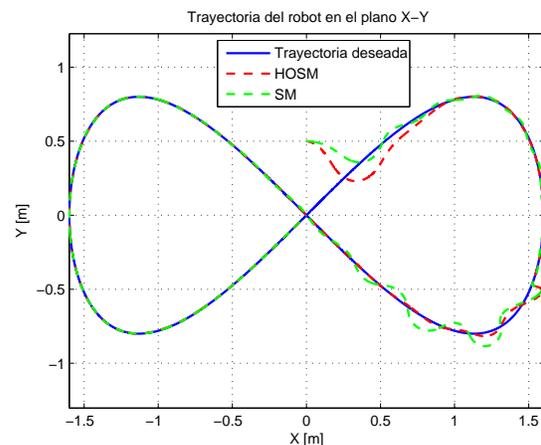


Figura 8. Trayectoria en el plano.

#### 4.1 Análisis de los resultados

En la figura 4 se observa que utilizando el control (HOSM) se tiene un sobre impulso grande al inicio del recorrido, pero no oscila tanto cuando se está cerca de la trayectoria ni durante el seguimiento de la misma, también se alcanza más rápido la trayectoria deseada después de que se introduce una perturbación, a diferencia del desempeño del control (SM) que oscila bastante al iniciar el seguimiento y después de aplicada la perturbación externa. En ambos

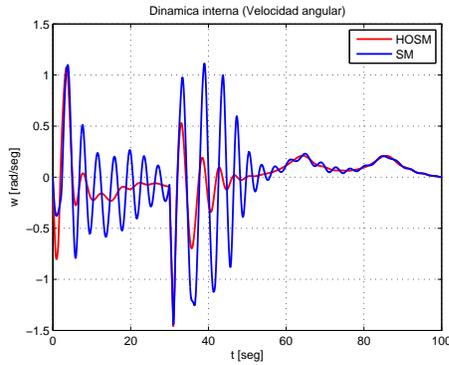


Figura 9. Velocidad angular (Lemniscata).

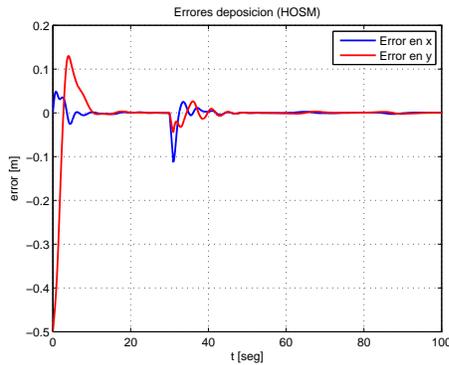


Figura 10. Errores de seguimiento (HOSM).

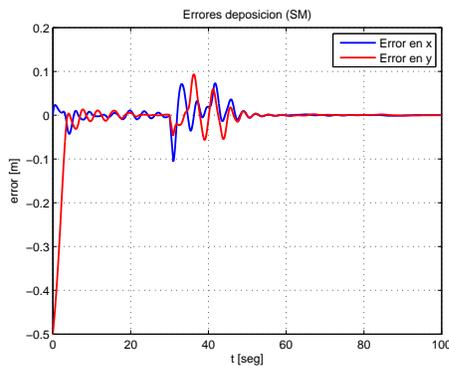


Figura 11. Errores de seguimiento (SM).

casos se comprueba la robustez de los controladores. En la figura 5 se observa que utilizando el control (HOSM) la velocidad angular del robot móvil está acotada y es menor que la velocidad angular del robot móvil al aplicar el control (SM). En la figura 6 se observa que utilizando el control (HOSM) los errores de seguimiento son casi cero, los errores de seguimiento al utilizar el control (SM) también son cercanos a cero como se muestran en la figura 7.

En la figura 8 se observa que utilizando el control (HOSM) se consigue un mejor seguimiento de trayectoria que al utilizar un control (SM) donde se tiene más oscilaciones durante el seguimiento de trayectoria. En ambos controladores se observa la robustez de éstos al regresar a la trayectoria deseada después de que se aplicó una perturbación externa. En la figura 9 se observa que al utilizar

el control (HOSM), la velocidad angular del robot móvil está acotada y oscila mucho menos que al utilizar el control (SM). En la figura 10 se observa que utilizando el control (HOSM) los errores de seguimiento son un poco menores que los errores de seguimiento al utilizar el control (SM) como se muestran en la figura 11.

## 5. CONCLUSIONES

Utilizar un control por modos deslizantes de orden cero no es suficiente para resolver el problema planteado, debido a que se tienen más oscilaciones durante en el seguimiento de trayectoria y esto causará que el objeto transportado se mueva mucho sobre el unicycle. El desempeño del controlador por modos deslizantes de primer orden es mejor que el desempeño del controlador por modos deslizantes de orden cero en el sentido que al utilizar el primer controlador no se tienen oscilaciones tan grandes durante el recorrido, por otra parte, se tienen más constantes que sintonizar y esto hace más difícil de implementar en un prototipo real.

## REFERENCIAS

- Campion, G., Bastin, G., D' Andréa-Novle, B. (1996). Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 1, pp 47-62.
- Canudas, C., Khennouf, H., Samson, C., y Sordalen, O.J. (1996). Nonlinear Control Design for Mobile Robots. Recent Trends in Mobile Robots, world scientific edition.
- Elmali Hakan, Olgac Nejat (1991). Robust Output tracking Control of Nonlinear MIMO System via Sliding Mode Technique. Automatica, Vol. 27, No. 5, pp. 853-858. Printed in Great Britain.
- Fierro, R. y Lewis, F. (1995). Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. 34th Conference on Decision and Control, 3805-3810.
- Hossein Barghijand, Adel Akbarimajd, Jafar Keighobadi (2011). Quasi-Static Object Manipulation by Mobile Robot-Optimal Motion Planning Using GA. 11th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications, pp 202-207.
- Isidori, A. (1989). Nonlinear Control Systems. 2a. edición, Springer-Verlag.
- J. A. Chocoteco, R. Morales, V. Feliu and H. Sira-Ramírez (2015). Robust output feedback control for the trajectory tracking of robotic wheelchairs. Robotica, 33, pp 41-59.
- R. García-Saldivar, J. Álvarez-Gallegos, R. Castro-Linares (2014). Modelado Dinámico y Control de un Robot Móvil con Distribución de Masa No Uniforme. Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA, pp 457-462.
- Krzysztof Kozłowski (2006). Robot Motion and Control. Springer.
- Utkin, V. (1992). Sliding Modes in Control Optimization. Springer-Verlag.