



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN MECATRÓNICA

## **Control de Formación de Robots Móviles: Consideración del Modelo Dinámico**

Tesis que presenta:  
**Jesús Adolfo Delgado Báez**

Para obtener el grado de:  
**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis:  
**Dr. Martín Velasco Villa**  
**Dr. Rafael Castro Linares**

México, D.F.

Febrero, 2015.



*A mi familia...*

---

# Agradecimientos

- ♣ A Dios por ponerme en este sendero, iluminarme y darme la fuerza necesaria para no desistir.
- ♣ A mi familia por brindarme todo su amor, apoyo y comprensión para que este sueño sea cumplido. Gracias por los valores y las enseñanzas que hoy forman parte de mí.
- ♣ A mis compañeros de maestría por todos esos buenos momentos que compartimos, por siempre estar ahí cuando lo necesitaba, en especial, al Ing. Edgar Alejandro Mandujano García por su valiosa ayuda en el diseño y la construcción de los prototipos.
- ♣ A mis amigos y a todos esos seres maravillosos que me apoyaron material y emocionalmente para que este objetivo fuera cumplido. Gracias por sus risas, sus consejos, su ayuda y sus palabras de aliento.
- ♣ A los Doctores de la sección de Mecatrónica por brindarme la oportunidad de crecer intelectualmente y compartir sus conocimientos y experiencias.
- ♣ A mis asesores y sinodales por todas sus observaciones y recomendaciones para el desarrollo eficiente de esta Tesis.
- ♣ Al CINVESTAV por darme la oportunidad de formar parte de este gran centro de investigación.
- ♣ Al pueblo de México, que a través de CONACyT me brindó el soporte económico a lo largo de mis estudios de maestría.



# Resumen

En este trabajo se presenta el problema de control de formación de un conjunto finito de robots móviles omnidireccionales descritos por su modelo dinámico. El objetivo de control es lograr que cada robot mantenga su posición en la formación mientras sigue una trayectoria predefinida. Para resolver este problema se considera el esquema de control conocido como *seguimiento de camino sincronizado*. Se muestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado y se evalúa el esquema propuesto mediante simulaciones numéricas y experimentos en tiempo real.

En primera instancia se introducen algunas definiciones matemáticas y de sistemas de control necesarias para el correcto entendimiento de los algoritmos de control propuestos. Se presenta el modelo dinámico de un robot móvil omnidireccional y se mencionan algunas características de dicho sistema.

Posteriormente se presenta el diseño del controlador, basado en técnicas de Lyapunov, backstepping y sistemas no lineales en cascada que se combinan para lograr la solución del problema de control de formación. La estabilidad es demostrada formalmente por medio de un análisis clásico de Lyapunov.

Finalmente, se describe la plataforma experimental, conformada de un sistema de visión artificial, dos robots móviles omnidireccionales y un conjunto de programas para el cálculo del algoritmo de control propuesto. Como parte final del trabajo se presentan las conclusiones finales y las perspectivas para trabajo futuro.

---



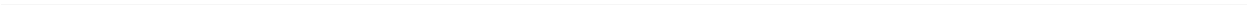
# Abstract

This thesis presents the formation problem of a finite set of omnidirectional mobile robots described by their dynamic models. The control objective is to achieve that each robot holds its position into the desired formation while follows a predefined path. To solve this problem a control scheme known as *synchronized path following* is considered. The stability of the close loop system is proved and it is evaluated by numerical simulation and real time experiments.

At first instance, some mathematical and control system definitions are introduced for the proper understanding of the control algorithms. A dynamic model of the omnidirectional robot is presented and some characteristic are described.

The design of the controller is presented and it is based on Lyapunov techniques, backstepping and nonlinear cascade systems combine to achieve the solution of the formation control. Stability is formally proved by a classic Lyapunov analysis.

Finally, the experimental platform is described and consists of an absolute localization system, two mobile robots and a software to calculate the control algorithm. Then, final conclusions and possible future work are discussed.



# Índice general

Índice de figuras	x
Índice de tablas	xii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	3
1.2.1. Control y coordinación grupal	4
1.3. Planteamiento del problema	8
1.4. Objetivos	9
1.5. Organización de la tesis	9
<b>2. Robot Móvil Omnidireccional y Preliminares Matemáticos</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción	11
2.2. Modelo Dinámico del Robot Móvil Omnidireccional	12
2.3. Preliminares Matemáticos	15
2.4. Teoría de Grafos	16
2.5. Herramientas de estabilidad	19
2.5.1. Estabilidad de Lyapunov	19
2.5.2. Estabilidad Entrada-Estado	19
2.5.3. Pasividad	20
<b>3. Diseño de Control de Formación</b>	<b>21</b>
3.1. Introducción	21
3.1.1. Configuración de formación para robots omnidireccionales	22
3.2. Diseño de Formación	24
3.2.1. Diseño <i>Backstepping</i>	26
3.3. Diseño basado en pasividad para sincronización	32
3.3.1. Sincronización y diseño de <i>seguimiento de camino</i>	32
3.3.2. Diseño pasivo para sincronización	34
<b>4. Plataforma Experimental</b>	<b>37</b>
4.1. Introducción	37
4.2. Diseño y construcción de los Robots Móviles Omnidireccionales	38
4.2.1. Estructura mecánica	38

4.2.2. Diseño y elección de los componentes y dispositivos electrónicos . . . .	39
4.3. Sistema de Visión . . . . .	45
4.3.1. Cámara <i>Flex 13</i> . . . . .	46
4.3.2. <i>OptiHub2</i> . . . . .	46
4.3.3. Marcadores Reflejantes . . . . .	47
4.4. Software . . . . .	47
4.4.1. <i>Motive</i> . . . . .	47
4.4.2. Programa de Control . . . . .	48
<b>5. Resultados Experimentales</b>	<b>51</b>
5.1. Introducción . . . . .	51
5.2. Aplicación Numérica y Práctica . . . . .	51
5.2.1. Experimento #1 . . . . .	52
5.2.2. Experimento #2 . . . . .	61
<b>6. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>69</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	69
6.2. Perspectivas . . . . .	70
<b>A. Especificaciones de los motores de corriente continua</b>	<b>71</b>
A.1. Motor EMG30 . . . . .	71
A.2. Motor maxon <i>A-max 22</i> . . . . .	71
<b>B. Especificaciones de los dispositivos electrónicos</b>	<b>73</b>
B.1. Especificaciones del servoamplificador AZB10A4 . . . . .	73
B.2. Especificaciones del servoamplificador LSC 30/2 . . . . .	74
B.3. Especificaciones Stellaris Launchpad . . . . .	75
B.4. Especificaciones Wifly RN-XV . . . . .	75
B.5. Especificaciones del Convertidor Digital-Analógico DAC7614 . . . . .	76
B.6. Especificaciones Amplificador de Instrumentación INA129 . . . . .	77
B.7. Especificaciones cámara Flex 13 . . . . .	77
B.8. Especificaciones OptiHub2 . . . . .	78
<b>C. Calibración servoamplificador LSC 30/2 para control de corriente</b>	<b>81</b>

# Índice de figuras

1.1. Formación Naval. . . . .	2
1.2. Parvadas de aves. . . . .	3
1.3. Una arquitectura de dos niveles para el control coordinado de $N$ sistemas . . . . .	6
2.1. Vista superior de la configuración del robot móvil omnidireccional . . . . .	11
2.2. Una gráfica no dirigida de cuatro agentes cuya matriz Laplaciana es (2.12). El número del agente está ilustrado en cada nodo. . . . .	18
2.3. Dos diferentes asignaciones de orientación a la gráfica de la Figura 2.2 . . . . .	18
3.1. La variable $\theta$ determina la posición en la trayectoria: por ejemplo, cuando $\theta$ es 10 o 20, el robot omnidireccional está en la posición correspondiente $y_d(\theta)$ . . . . .	22
3.2. Ejemplo de configuración de la formación para tres robots omnidireccionales. La configuración está definida por los vectores de designación $\ell_1, \dots, \ell_3$ . . . . .	23
4.1. Diagrama de bloques de la plataforma experimental. . . . .	38
4.2. Representación física de los dos robots móviles omnidireccionales . . . . .	38
4.3. Base de acrílico para el robot 2. . . . .	39
4.4. Motor utilizado en el Robot 1. . . . .	40
4.5. Motor utilizado en el Robot 2. . . . .	41
4.6. Controlador utilizado en el Robot 1. . . . .	41
4.7. Controlador utilizado en el Robot 2. . . . .	42
4.8. Wify RN-XV y Stellaris Launchpad. . . . .	43
4.9. Diagrama de bloques de la instrumentación electrónica. . . . .	44
4.10. Baterías utilizadas en el Robot 1 y en el Robot 2. . . . .	45
4.11. Flex 13 y constelación de cámaras. . . . .	46
4.12. Repetidor OptiHub2. . . . .	47
4.13. Software de captura de movimiento: Motive. . . . .	48
5.1. Gráfica inducida por la topología de comunicación . . . . .	52
5.2. Trayectoria real vs trayectoria deseada. . . . .	54
5.3. Errores en $z_{i,1}$ . . . . .	55
5.4. Velocidad en $x_i$ . . . . .	56
5.5. Velocidad en $y_i$ . . . . .	57
5.6. Velocidad en $\psi_i$ . . . . .	58
5.7. Controles Virtuales $\alpha_{i,1}$ . . . . .	59

5.8. Controles Reales $\tau_i$ .	60
5.9. Error de sincronización $\tilde{\theta}_1 = \theta_2 - \theta_1$ .	60
5.10. Trayectoria real vs trayectoria deseada.	62
5.11. Errores en $z_{i,1}$ .	63
5.12. Velocidad en $x_i$ .	64
5.13. Velocidad en $y_i$ .	65
5.14. Velocidad en $\psi_i$ .	66
5.15. Controles Virtuales $\alpha_{i,1}$ .	67
5.16. Controles Reales $\tau_i$ .	68
5.17. Error de sincronización $\tilde{\theta}_1 = \theta_2 - \theta_1$ .	68

# Índice de tablas

5.1. Parámetros de los vehículos. . . . .	52
5.2. Condiciones iniciales - Experimento #1. . . . .	53
5.3. Condiciones iniciales - Experimento #2. . . . .	61
A.1. Especificaciones motor EMG30. . . . .	71
A.2. Especificaciones motor maxon 250443. . . . .	72
B.1. Especificaciones servoamplificador AZB10A4. . . . .	73
B.2. Especificaciones servoamplificador LSC 30/2. . . . .	74
B.3. Especificaciones microcontrolador LM4F120H5QR. . . . .	75
B.4. Especificaciones módulo Wify RN-XV. . . . .	76
B.5. Especificaciones DAC7614. . . . .	76
B.6. Especificaciones INA129. . . . .	77
B.7. Especificaciones Flex 13. . . . .	77
B.8. Características del OptiHub2 . . . . .	78





# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis considera el problema de coordinación de un grupo de robots móviles omnidireccionales, esto es, controlar el movimiento de cada vehículo de tal manera que el movimiento global del grupo sea gobernado por un comportamiento deseado. Por lo tanto, el movimiento independiente es coordinado como una formación de acuerdo con el comportamiento, decidido por el diseñador. Estos problemas de control han atraído cada vez más atención durante las últimas dos décadas debido a los muchos beneficios de los vehículos distribuidos controlados como una formación. Algunas de las razones para considerar el uso de formaciones son sus características de: flexibilidad estructural, seguridad, confiabilidad gracias a la redundancia, aumento de la resolución del instrumento, ventajas tácticas, reducción de costos (varios sistemas sencillos y económicos pueden competir con un costoso sistema sofisticado), y la ubicación de recursos más rápido (un grupo de vehículos puede buscar en una área grande más rápidamente que un solo vehículo).

### 1.1. Motivación

Hace mucho tiempo, los líderes militares se dieron cuenta de los beneficios de las formaciones y desde entonces han sido usadas en tierra, mar y aire —ver Figura 1.1 para un ejemplo marino. Ejemplos de diferentes formaciones tácticas son *punta de flecha*, *cuadro de infantería*, *formación en columna*, *formación lineal*. Ejemplos de formaciones antiguas o medievales incluyen *muro de escudos*, *falanges (líneas de batalla en orden cerrado)*, y *líneas de hostigadores*. Ejemplos de formaciones tácticas aéreas son la *formación en V*, *formación escalonada*, *la formación en cuña de cuatro*, etc. Mayor seguridad y apoyo defensivo armado son parte de la motivación del uso grupal de barcos que viajan juntos, también conocidos como *convoys*, para la transportación de suministros durante la segunda guerra mundial.

Las formaciones también tienen el beneficio de la mejora en la instrumentación: el sistema de posicionamiento global (*GPS*, por sus siglas en inglés) usa 24 satélites en órbitas circulares intermedias, y las órbitas son diseñadas tal que al menos cuatro satélites estén siempre en línea de vista de casi cualquier parte de la tierra. La recepción es mejor cuando más



Figura 1.1: Formación Naval.

señales están disponibles. Además, la fuerza aérea americana esta usando cada vez más *vehículos aéreos no tripulados (UAVs, por sus siglas en inglés)* equipados con cámaras y sensores para automatizar reconocimiento, vigilancia y adquisición de objetivos y como relés de comunicación. Últimamente, se utilizan grupos de *UAVs* de tal manera que un vehículo investiga una ubicación particular, mientras que el resto asegura el área más amplia posible.

Durante la temporada de migración es común observar bandadas de pájaros volando en formaciones. La formación en  $V$ , mostrada en la Figura 1.2, usada por algunas de las aves mas grandes, como patos y gansos, reduce el gasto de energía y la demanda de potencia de vuelo. El ahorro de energía surge de los periodos largos de planeo durante los vuelos y de una reducción de la resistencia inducida. Volar en una formación también favorece comunicación y coordinación en un grupo y puede explicar porque algunas configuraciones de bandadas de pájaros son neutrales o incluso desventajosas en comparación con el vuelo solitario —ver por ejemplo [1, 2]. El ahorro de energía en la resistencia inducida ha motivado investigaciones, tal como en [3], donde teórica y experimentalmente se reducen las fuerzas de resistencia en formaciones aéreas. Este trabajo también es extensible a los vehículos marinos.

Grupos de animales tales como cardúmenes de peces, bandadas de pájaros, y manadas de ungulados tienen también otros efectos y beneficios aparte de una mayor eficiencia de la locomoción. Ecologistas y Socio-biólogos evolutivos intentan entender la coordinación de agrupamientos naturales mediante el modelado del comportamiento de agregación social de cada individuo: tal comportamiento depende de la estructura grupal, obstáculos y depredadores cercanos (detección y evasión), y localización de recursos, por nombrar algunos. Tales modelos basados en el individuo se encuentran en por ejemplo, [4–6]. Los autores de [7] desarrollaron un modelo basado en reglas del vecino mas cercano las cuales han sido usadas como una base para muchos artículos en la teoría de sistemas de control.

Temas interesantes con respecto a una acción coordinada entre los seres humanos son comportamientos en circulación, la ola mexicana, y control de pánico —considerado en [8–10], respectivamente. El *best-seller*, *The Tipping Point* [11] describe comportamientos humanos

colectivos en varias situaciones y relata epidemias sociales de como fabricantes pueden crear un producto exitoso de mercado.

Estas observaciones han motivado a los ingenieros en sistema de control a desarrollar leyes que sincronicen y gobiernen formaciones de vehículos autónomos. Aplicaciones en la literatura cubren una amplia área de operación. Robots manipuladores, robots móviles, satélites, y vehículos (aéreos y submarinos) no tripulados están entre los sistemas considerados. La referencia [12] señala que, en estas aplicaciones, restricciones de comunicación y perturbaciones ambientales plantean retos para el diseño de control. Una introducción más detallada del campo de control coordinado y problemas relacionados está dado en la siguiente sección.

Esta tesis considera el problema de control coordinado con base en el diseño de seguimiento de camino (PF - *path following, por sus siglas en Inglés*) dado en [13, 14], donde sistemas mecánicos son diseñados para seguir una trayectoria con una asignación dinámica a lo largo de ella (tiempo, velocidad o aceleración). El desarrollar un diseño individual de cada sistema en un grupo para controlar la posición a lo largo de las trayectorias ha dado como resultado la sincronización de los sistemas PF.



Figura 1.2: Parvadas de aves.

## 1.2. Antecedentes

El control coordinado implica el control de movimiento de varios objetos independientes hacia un objetivo común. Protocolos de acuerdo, algoritmos de consenso, sincronización, control cooperativo y de formación son otros términos usados para describir problemas de control similares en la literatura actual, y la cantidad de artículos de sistemas de control en estos campos son vastos. Esta sección ofrece una breve reseña de estos temas desde un punto de vista teórico de sistemas de control. Adicionalmente se discuten algunos temas y retos relacionados.

Los investigadores han sido inspirados por fenómenos naturales cuando encuentran modelos para comportamientos grupales. Los biólogos han estado trabajando en modelos para comportamientos de parvadas, cardúmenes y enjambres por un largo tiempo, y matemáticos demuestran estabilidad de estos modelos: La referencia [15] presenta una visión de

conjunto de modelos de enjambres biológicos y estudia propiedades de estabilidad de una colección de enjambres donde una función de atracción/repulsión, llamada función potencial social artificial, determina el movimiento individual. Un comportamiento grupal estable se reporta en [16, 17] para una topología fija y dinámica respectivamente usando funciones potenciales entre-agentes. En [18] se presenta un algoritmo para un grupo en presencia de múltiples obstáculos. Los modelos biológicos muestran igualdades con muchos de los modelos encontrados en la literatura de control. Sincronización total y parcial de sistemas acoplados invariantes en el tiempo han sido estudiadas en [19]. Asimismo, se muestra cómo el concepto de retroalimentación para sistemas de control acopla sistemas individuales y asintóticamente estabiliza una red de sistemas.

### 1.2.1. Control y coordinación grupal

Existe un gran número de publicaciones de leyes de retroalimentación en el campo de control cooperativo de sistemas autónomos, algunos resultados son encontrados en [20–26]. El artículo [27] conecta varios problemas de control coordinado con problemas de consenso conocidos de otros campos científicos. Mientras las aplicaciones son diferentes, algunas partes fundamentales comunes pueden ser extraídas de los muchos enfoques para el control de formación de vehículos. La investigación en el control de formación puede ser dividida en dos categorías principales: analítica y algorítmica. Los enfoques de la categoría analítica se analizan más fácilmente por herramientas matemáticas, en este grupo se incluyen los métodos líder - seguidor y los métodos de estructuras virtuales. Los enfoques que representan la categoría algorítmica tienen que ser simulados por medio de un ordenador con el fin de investigar su comportamiento emergente. Los métodos basados en el comportamiento pertenecen a esta última categoría. Cada uno de los enfoques anteriores tiene sus propias características.

#### Líder - Seguidor

En el esquema líder - seguidor [28–32], algunos vehículos son considerados como líderes, mientras el resto actúan como seguidores. Los líderes siguen trayectorias deseadas predefinidas; por otro lado, los seguidores siguen versiones transformadas de los estados de sus vecinos más cercanos de acuerdo a los esquemas dados. Uno de los primeros estudios en control de formación líder - seguidor para robots móviles es reportado en [33]. En [34] se formulan leyes de control descentralizado para el problema de congestión de carreteras usando información de la dinámica del líder y la distancia del vehículo precedente. Variaciones en este esquema incluye múltiples líderes, formaciones en cadena, y otras topologías de árbol. Este enfoque es fácil de manipular e implementar. Además, la formación puede mantenerse aún si el líder es sometido a una clase de perturbaciones. Por otro lado, este esquema tiene la ventaja en que la estabilidad interna de la formación está implícita en la estabilidad de los vehículos individuales, pero es fuertemente dependiente en el líder para lograr el objetivo de control. Excesiva dependencia en un sólo vehículo en la formación puede ser desventajoso, y la falta de retroalimentación explícita de la formación al líder puede desestabilizar la formación.

## Estructuras virtuales

El enfoque de estructuras virtuales es introducido en [35], donde la formación entera es tratada como una sola estructura virtual y actúa como un solo cuerpo rígido. La ley de control para un solo vehículo es derivada al definir la dinámica de la estructura virtual y después trasladar el movimiento de la estructura virtual al movimiento deseado para cada vehículo. En [20, 27] usan retroalimentación de la formación para prevenir que los miembros dejen la formación. En la referencia [36] cada miembro de la formación sigue un elemento virtual, mientras el movimiento de los elementos son gobernados por una función de formación que especifica la geometría deseada de la formación. Este enfoque hace que sea fácil prescribir un comportamiento coordinado para el grupo, mientras la formación es naturalmente asegurada por el esquema de control. Sin embargo, si la formación tiene que mantener exactamente la misma estructura virtual en todo el tiempo, las aplicaciones potenciales son limitadas particularmente cuando la estructura de la formación es variante en el tiempo o necesita ser frecuentemente reconfigurada. Los autores de [37] crearon una estructura virtual de embarcaciones marinas al usar una ley de control centralizado que controle la formación a lo largo de una trayectoria predefinida. Más detalles de seguimiento de camino sincronizado (SPF - *Synchronized Path Following*, por sus siglas en Inglés) son encontrados en el Capítulo 3.

## Métodos Conductuales

El enfoque conductual prescribe un conjunto de comportamientos deseados para cada miembro en el grupo, y les pesa de tal manera que el comportamiento deseable del grupo emerge sin un modelo explícito de los subsistemas o del medio ambiente. Comportamientos posibles incluyen seguimiento de trayectoria, evasión de colisiones y obstáculos y mantenimiento de la formación. Un artículo que describe el enfoque conductual para equipos de multi-robots es [38] donde comportamientos en formación son implementados con otros comportamientos de navegación que derivan en estrategias de control para la búsqueda de objetivos, evasión de colisiones y mantener la formación. En control de formación, varios objetivos necesitan ser cumplidos y desde el enfoque conductual se espera que el promedio de los (tal vez en competencia) comportamientos ponderados den una ley de control que cumpla con los objetivos de control. Este enfoque motiva una implementación descentralizada donde la retroalimentación a la formación está presente, puesto que un vehículo reacciona de acuerdo a sus vecinos.

Cuando las reglas conductuales están dadas como algoritmos, este enfoque es difícil de analizar matemáticamente: el comportamiento grupal no es explícito, y características tales como estabilidad generalmente no puede ser garantizada. Un enfoque de teoría de sistemas para el control de comportamiento puede ser encontrado en [39, 40]. Los autores usan un conjunto de funciones y técnicas de control para manipuladores robóticos redundantes dado en [41] para controlar un pelotón de vehículos autónomos. Diferentes tareas pueden ser combinadas, de acuerdo a su prioridad, con un algoritmo cinemático inverso.

## Arquitectura del sistema de control de formación

De acuerdo con Beard et al. [20], el control coordinado de sistemas independientes envuelve al menos dos capas de abstracción como se muestra en la Figura 1.3. El nivel más alto de abstracción es un mecanismo que coordina el movimiento de cada sistema para sincronizar el comportamiento grupal deseado, mientras que en el nivel más bajo los sistemas individuales son controlados para ser consistente con el mecanismo de coordinación. El controlador local puede también incorporar una ley de control para resolver un objetivo de control local, y la planificación de la trayectoria dinámica para evadir colisiones y obstáculos.

Esta implementación abarca ambos diseños de control centralizado y descentralizado. Un controlador centralizado tiene un supervisor (esquema de coordinación) en un lugar centralizado, y un control descentralizado implica que una versión local del esquema de coordinación debe ser implementado para cada sistema. Un sistema de control centralizado es dependiente de todos los estados y requiere un ancho de banda de comunicación muy grande. Para el control descentralizado los esquemas de coordinación deben de ser sincronizados, a menudo con un subconjunto de sistemas, por ejemplo, los vecinos. Una solución de bajo ancho de banda puede llevarse a cabo mediante la construcción de un observador local que estime los estados necesarios para la coordinación.

Con retroalimentación de la formación, el grupo es capaz de ajustar la velocidad general y la posición en línea, y permanecer en un estado coordinado si ocurre algo inesperado. Sin retroalimentación de formación, la arquitectura adquiere una estructura en cascada.

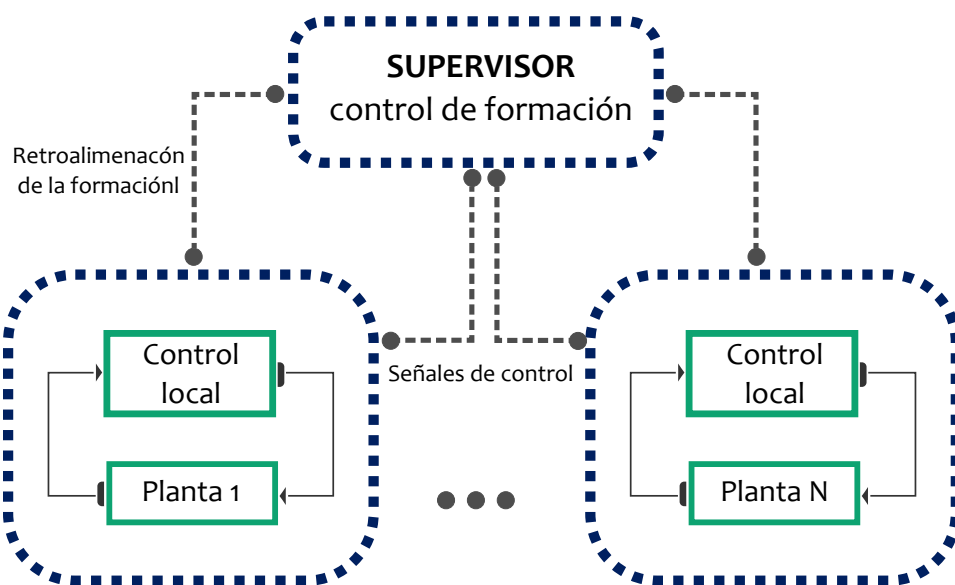


Figura 1.3: Una arquitectura de dos niveles para el control coordinado de  $N$  sistemas

## Configuración de la formación

Dependiendo de su objetivo de coordinación actual una formación puede tener muchas formas diferentes. Por ejemplo, embarcaciones marinas pueden estar en una formación lado a lado en operaciones de reabastecimiento en ruta o en una formación en  $V$  durante el traslado (para ahorrar energía). Así, sistemas de control de formación deberían de ser capaces de abarcar el cambio de configuraciones durante la operación. Además, con una topología de formación dinámica estable, a los vehículos se les permite dejar y unirse a la formación sin cambiar las propiedades de estabilidad de la formación. Esto puede ser ampliado para que las formaciones puedan dividirse y fusionarse. Topologías dinámicas son consideradas en [17, 22, 42, 43].

## Compartiendo información y comunicación

Cuando muchos sistemas van a ser coordinados, la información debe ser intercambiada con el fin de completar la tarea de control. En [44] se establece el siguiente axioma intuitivo:

**Axioma 1.** *Información compartida es una condición necesaria para coordinación.*

La cantidad de información comunicada depende de la tarea de coordinación: si dos sistemas deben sincronizar su posición, alguna información acerca del otro sistema de posición debe ser conocido. Si la meta es el movimiento coordinado (ambos, posición y velocidad), los sistemas deben también compartir información acerca de sus velocidades.

El objetivo de coordinación podría ser: montar el grupo en una configuración de posición deseada, llegar a un punto dado en un tiempo determinado, o sincronizar movimiento. Una alternativa para compartir información de posición y de velocidad durante operaciones, es considerar trayectorias sincronizadas las cuales incorporen información de no solamente la posición sino también de asignaciones de velocidad y aceleración. Así, el movimiento puede ser coordinado con una cantidad mas pequeña de información compartida debido a que una posición en la trayectoria implica asignaciones de velocidad y aceleraciones fijas. Con el fin de lograr una sincronización apropiada, las trayectorias individuales deben de estar coordinadas al comienzo de la operación.

La información debe ser intercambiada sobre un canal de comunicación. Típicamente, para un conjunto de vehículos independientes, un protocolo de comunicación se establece a través de un medio físico, por ejemplo, señales de radio, acústicas u ópticas. En [45] se estudian sistemas multiagentes con vínculos de comunicación dependientes en el tiempo; Olfati-Saber & Murray [42] investigan problemas de consenso con retardos en el tiempo. Protocolos de comunicación estándar ofrecen robustez a la pérdida de señales, retardos, etc., pero los problemas de comunicación, tales como retrasos inconsistentes, ruido, caída de señal, y posibles actualizaciones asíncronas deben tenerse en cuenta en la arquitectura de control de formación. Stojanovic [46] y Akyildiz, Pompili & Melodia [47] consideran comunicaciones subacuáticas para redes de muestreo oceánicas autónomas: debido a que las ondas electromagnéticas se propagan pobremente en el agua marina, tecnologías acústicas y sísmicas ofrecen el medio más importante de comunicación, navegación e imagenología por debajo de la superficie

marina. Comunicación acústica, sin embargo, es influenciada por ruido, pérdida de trayectoria, propagación multitrayecto, propagación Doppler, y retardos de propagación altos y variables. En ambientes con ancho de banda limitados, un diseño de control de formación con una cantidad mínima de intercambio de información es deseado.

La información puede también ser transmitida a través del ambiente: la tensión de un cable entre dos embarcaciones puede indicar si la posición relativa está cambiando, y si es así, en que dirección. En esta tesis se considerarán solamente vínculos de comunicación dedicados pero Kube & Bonabeau [48] contienen información sobre comunicación ambiental y su aplicación al control cooperativo para el lector interesado.

Aunque los datos son típicamente transmitidos en tiempo discreto, controladores y dinámicas internas pueden estar en tiempo continuo, lo cual significa que un análisis en tiempo discreto del sistema es necesario para tiempos de muestreo no suficientemente rápidos. Un diseño en tiempo discreto para SPF es presentado en [49]. Sin embargo, los diseños de esta tesis son presentados en tiempo continuo.

### 1.3. Planteamiento del problema

Este trabajo está centrado en la utilización de técnicas de control para resolver el problema de formación en un grupo de robots móviles descritos por su modelo dinámico, lo que marca una diferencia con el enfoque comúnmente utilizado en la literatura basado en el modelo cinemático de los vehículos. SPF es una estrategia de control basada en técnicas de Lyapunov, *backstepping* y sistemas en cascada que se combinan para lograr el recorrido grupal de una trayectoria deseada. Además de obtener el seguimiento de la trayectoria mencionada, se requiere que los vehículos integrantes del grupo de agentes mantengan una formación determinada.

La principal contribución de este trabajo se centra en la propuesta de un diseño sistemático para la sincronización de leyes de control cooperativas descentralizadas, las cuales están basadas en el trabajo expuesto en [13], en donde se presenta un diseño para el control de maniobras en sistemas no lineales independientes. Una de las ventajas de esta propuesta de solución para el problema de control de formación es la mínima información compartida entre los agentes en comparación con otros esquemas en donde se requiere que los vecinos compartan información de sus estados con el objetivo de mantener un acuerdo grupal.

Por medio de una plataforma experimental, se comprueba la efectividad del algoritmo de control propuesto. Dicha plataforma consta de un sistema de visión artificial para la retroalimentación de la posición y orientación absoluta de cada vehículo; un conjunto de programas computacionales para la implementación de las leyes de control y un sistema de comunicación inalámbrica para la transmisión de los cálculos de control a los robots móviles.



## 1.4. Objetivos

El objetivo principal de la tesis es proponer un diseño de control para la solución teórica y experimental del problema de formación de un grupo de robots móviles omnidireccionales, considerando su modelo dinámico.

Los objetivos particulares de este trabajo son:

- Diseño mecánico y construcción de dos robots móviles omnidireccionales.
- Diseño y elaboración de un circuito electrónico para la comunicación inalámbrica e instrumentación de cada robot móvil omnidireccional.
- Implementación del algoritmo de control en un lenguaje de programación de alto nivel.

## 1.5. Organización de la tesis

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma:

En el Capítulo 2 se presenta el modelo cinemático y dinámico del robot móvil omnidireccional y se dan algunas propiedades estructurales de dicho sistema. En este Capítulo también se describe brevemente las ventajas y desventajas de la utilización de este tipo de robot. Por último, se muestran algunos conceptos matemáticos y de control utilizados a lo largo de este trabajo.

El Capítulo 3 describe los elementos necesarios que conforman la solución del problema de control propuesto. Se plantea un diseño de control basado en técnicas *backstepping* y por último se analiza la estabilidad de la formación grupal por medio de un análisis clásico de estabilidad de Lyapunov.

La descripción de los componentes principales de la plataforma experimental utilizada se presentan en el Capítulo 4, el cual explica brevemente los subsistemas y la interacción entre ellos. Los robots usados en este proyecto han sido diseñados y construidos para tener solo restricciones holónomas.

En el Capítulo 5 se muestran y se analizan los resultados experimentales obtenidos del control y se comparan con los resultados de la simulación numérica.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones referentes al trabajo realizado, y se proporcionan algunas perspectivas para trabajos futuros.

Finalmente, en los Apéndices posteriores se muestran un conjunto de características de los componentes utilizados en la plataforma experimental.



# Capítulo 2

## Robot Móvil Omnidireccional y Preliminares Matemáticos

### 2.1. Introducción

Los robots que fueron usados en esta investigación, son robots bastante especiales. Tienen una forma triangular, con tres ruedas llamadas omnidireccionales. Estas ruedas pueden proveer fuerza en una dirección, sin dejar de tener un movimiento transversal. Esto permite al robot tener un verdadero movimiento planar, sin restricciones no holónomas. Este efecto también podría lograrse mediante otras formas (un forma cuadrada usando cuatro ruedas en lugar de tres), pero esto podría incrementar más el costo.

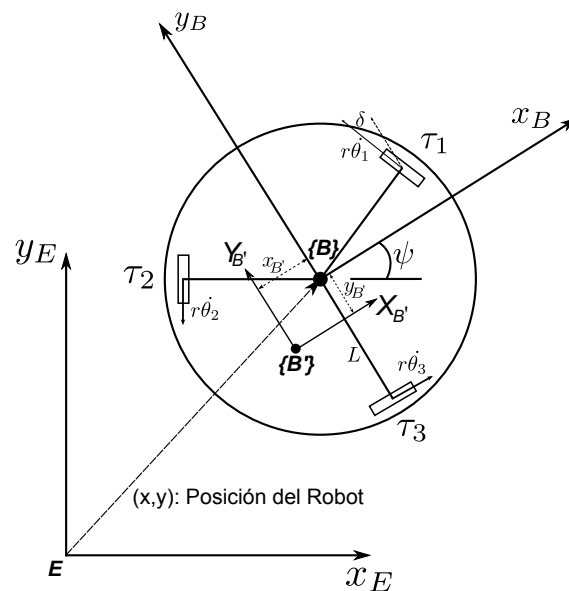


Figura 2.1: Vista superior de la configuración del robot móvil omnidireccional

## 2.2. Modelo Dinámico del Robot Móvil Omnidireccional

El modelo cinemático del robot móvil omnidireccional puede ser obtenido fácilmente al considerar las relaciones de velocidad a partir de las coordenadas fijas  $X_E - Y_E$  mostradas en la Figura 2.1, produciendo la cinemática inversa dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\delta + \psi) & \cos(\delta + \psi) & L \\ -\sin(\delta - \psi) & -\cos(\delta - \psi) & L \\ \cos\psi & \sin\psi & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  representan los desplazamientos angulares de las ruedas 1, 2 y 3 respectivamente;  $(x, y)$  representan la posición del centro del robot con respecto al eje  $X_E - Y_E$  y  $\psi$  el desplazamiento angular del robot;  $r$  es el radio de la rueda;  $\delta$  es el ángulo entre el vector de velocidad lineal de cada rueda y el eje  $y$  del marco móvil, por último  $L$  es la distancia del origen del marco de referencia móvil a cada rueda.

El modelo dinámico del robot móvil puede obtenerse a partir del formalismo de Euler-Lagrange [50]. Para tal efecto, se puede observar en la Figura 2.1, que la velocidad en cualquier punto  $B'$  (origen del marco de referencia fijo  $\{B'\}$ ), con respecto al marco de referencia  $\{X_E, Y_E\}$ , puede ser descrita por las componentes  $\dot{x}_{B'}$ ,  $\dot{y}_{B'}$  y la velocidad angular del robot denotada como  $\dot{\psi}$ . Haciendo  $\delta = 30^\circ$  y  $\psi = 0$  en la ecuación (2.1), la relación entre velocidades de las ruedas  $\dot{\theta}_i$ , para  $i = 1, 2, 3$  y las velocidades  $\dot{x}_{B'}$ ,  $\dot{y}_{B'}$ ,  $\dot{\psi}$  está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin\delta & \cos\delta & L \\ -\sin\delta & -\cos\delta & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{G'} \\ \dot{y}_{G'} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{G'} \\ \dot{y}_{G'} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \dot{x}_{G'} \\ \dot{y}_{G'} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde  $L$  es ahora la distancia del punto de contacto de cada una de las ruedas al origen  $B'$  y la matriz  $R$  es la relación entre las velocidades angulares de las ruedas y  $\dot{x}_{B'}$ ,  $\dot{y}_{B'}$ ,  $\dot{\psi}$ .

Sea  $G$  el centro de masa del robot móvil omnidireccional. Nótese que el marco  $\{B\}$  está alineado al marco de referencia  $\{B'\}$ . Por consiguiente, la velocidad del centro de masa con respecto a  $\{B'\}$  está dada por:

$$\begin{aligned} V_G &= [V_{G_x}, V_{G_y}]^T \\ &= \begin{bmatrix} \dot{x}_{B'} - \dot{\psi}y_{B'} \\ \dot{y}_{B'} + \dot{\psi}x_{B'} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $V_{Gx}$  es la velocidad  $\dot{X}_{B'}$  y  $V_{Gy}$  la velocidad  $\dot{Y}_{B'}$ .  $M_p$  e  $I_p$  son la masa total y el momento de inercia del robot, y se considera además  $I_{r_i}$  como el momento de inercia de la rueda  $i$ . Siguiendo [51, 52], la energía cinética del robot está dada por la energía rotacional de las ruedas más la energía rotacional y traslacional del cuerpo del robot. Por lo tanto, el lagrangiano del sistema es obtenido como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ M_p (V_{Gx}^2 + V_{Gy}^2) + I_p \dot{\psi}^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_{r_i} \dot{\theta}_i^2$$

Considerando que las restricciones cinemáticas (2.1) son satisfechas para todo  $t$ , despreciando la fricción y los efectos de deslizamiento entre las ruedas y la superficie de trabajo, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la forma,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = F_j, \quad j = 1, \dots, 6.$$

donde,  $F_j$  es el conjunto de fuerzas generalizadas y  $q_j$  el conjunto de coordenadas generalizadas  $(X_{B'}, Y_{B'}, \psi, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ .

Las fuerzas generalizadas correspondientes a  $\theta_i$ , están dadas por  $\tau_i - F_i r$ , para  $i = 1, 2, 3$ , donde  $\tau_i$  son las entradas de torque aplicado a cada una de las ruedas y  $F_i r$  son las fuerzas de tracción. Para obtener las fuerzas generalizadas en las coordenadas  $X_E, Y_E, \psi$  se tiene que escribir  $F_i$  actuando en la llanta a lo largo de dos grados de libertad. Esto se puede realizar con la matriz de transformación  $R^T$  de la ecuación (2.2), de esta forma las 6 fuerzas generalizadas son definidas como,

$$F = \left\{ r R^T [F_1, F_2, F_3]^T, \tau_1 - r F_1, \tau_2 - r F_2, \tau_3 - r F_3 \right\}$$

Haciendo coincidir los dos marcos de referencia  $\{B\}$  y  $\{B'\}$  de la Figura 2.1 se observa que  $\dot{x}_{G'} = \dot{x}_m$ ,  $\dot{y}_{G'} = \dot{y}_m$  además  $x_{G'} = 0$  y  $y_{G'} = 0$ . Tomando las consideraciones antes expuestas y desarrollando las ecuaciones Euler-Lagrange, se produce el sistema dado en (2.4) y (2.5),

$$\begin{bmatrix} M_p & 0 & 0 \\ 0 & M_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ \ddot{\psi}_m \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -M_p & 0 \\ M_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\psi}_m \end{bmatrix} = r R^T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} I_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Despreciando los efectos de fricción y deslizamiento entre las ruedas y la superficie, así como considerando que las inercias de cada rueda son iguales, las expresiones (2.4) y (2.5) se transforman en,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{3I_r}{2r^2} + M_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3I_r}{2r^2} + M_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p + \frac{3L^2I_r}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{y}_m \\ \dot{\psi}_m \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -M_p & 0 \\ M_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \psi_m \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin\delta & -\sin\delta & 1 \\ \cos\delta & -\cos\delta & 0 \\ L & L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

es decir

$$D_a \ddot{\eta}_m + C_a(\dot{\eta}_m) \dot{\eta}_m = B_a \tau \tag{2.7}$$

con

$$\begin{aligned}
 D_a &= \begin{bmatrix} \frac{3I_r}{2r^2} + M_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3I_r}{2r^2} + M_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p + \frac{3L^2I_r}{r^2} \end{bmatrix} \\
 C_a(\dot{\eta}_m) &= \begin{bmatrix} 0 & -M_p & 0 \\ M_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_a &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin\delta & -\sin\delta & 1 \\ \cos\delta & -\cos\delta & 0 \\ L & L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde  $D$  es la matriz de inercia del sistema;  $C(\dot{\eta}_m)$  es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas y  $B$  representa la relación entre las entradas de control  $\tau$  con el sistema físico,  $\eta_m = [x_m, y_m, \psi_m]^T \in \mathbb{R}^3$  son los estados del sistema. El modelo (2.6) está expresado en coordenadas de referencia móvil, por lo que para transformarlo a la referencia inercial considere la transformación,

$$\dot{\eta}_m = T \dot{\eta}$$

donde,

$$T = T(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

A partir del sistema (2.7) se obtiene,

$$D_a T \ddot{\eta} + [D_a \dot{T} + C_a(\dot{\eta}) T] \dot{\eta} = B_a \tau. \tag{2.9}$$

Es fácil verificar que en este último caso; la matriz de inercia obtenida  $D_a T$  no es simétrica definida positiva. Con el fin de simplificar la representación anterior considere ahora la premultiplicación de la ecuación (2.9) por la inversa de la transformación (2.8), produciéndose,

$$T^{-1} D_a T \ddot{\eta} + \left[ T^{-1} D_a \dot{T} + T^{-1} C_a (\dot{\eta}) T \right] \dot{\eta} = T^{-1} B_a \tau.$$

Así, por simplicidad, este modelo se expresa en la forma,

$$D \ddot{\eta} + C(\dot{\eta}) \dot{\eta} = B \tau \quad (2.10)$$

con

$$D = \begin{bmatrix} M_p + \frac{3I_r}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & M_p + \frac{3I_r}{2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & I_p + \frac{3I_r L^2}{r^2} \end{bmatrix}$$

$$C(\dot{\eta}) = \frac{3I_r}{2r^2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\delta + \psi) & -\sin(\delta - \psi) & \cos\delta \\ \cos(\delta + \psi) & -\cos(\delta - \psi) & \sin\delta \\ L & L & L \end{bmatrix}.$$

## 2.3. Preliminares Matemáticos

Esta sección introduce la notación y algunas de las definiciones usadas a lo largo de esta tesis.

- Las derivadas en el tiempo de una función  $x(t)$  son denotadas  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$ . Un superíndice con una variable argumento denota diferenciación parcial con respecto a ese argumento, es decir,  $\alpha^t(x, \theta, t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ ,  $\alpha^{x^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$ , etc.
- Una función  $f : X \rightarrow Y$  es de clase  $C^r$ , escrito  $f \in C^r$ , si  $f^{x^k}(x)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, r\}$  es definida y continua para todo  $x \in X$ . Además,  $f$  es continua si  $f \in C^0$ , continuamente diferenciable si  $f \in C^1$ , y  $f$  es suave si  $f \in C^\infty$ .
- Una función  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es de clase  $\mathcal{K}$  si es continua, estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Es de clase  $\mathcal{K}_\infty$  si es de clase  $\mathcal{K}$  y además  $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = \infty$ . Una función  $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es de clase  $\mathcal{KL}$ , si por cada  $s$  fijo, la función  $\beta(r, s)$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  con respecto a  $r$ , por cada  $r$  fijo, la función  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .
- Hagamos denotar  $\mathcal{L}_p$  al conjunto de funciones continuas a trozos  $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  siendo  $p$ -integrable en  $[0, \infty)$ , esto es,

$$\mathcal{L}_p = \left\{ y(t) : \int_0^\infty |y(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

- La norma vectorial Euclidiana es  $|x| := \sqrt{(x^T x)}$ , y la norma  $\mathcal{L}_p$  de  $x(t)$  es,

$$|x|_{\mathcal{L}_p} = \left( \int_0^\infty |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

y en el limite  $|x|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} |u(t)|$ . Cuando sea conveniente  $|(x, y, z)|$  indica la norma del vector  $[x^T, y^T, z^T]^T$ .

- La distancia al conjunto  $\mathcal{M}$  es  $|x|_{\mathcal{M}} := \inf_{y \in \mathcal{M}} |x - y|$ , y la norma-2 inducida de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es,

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}.$$

- Para una matriz  $P = P^T > 0$ , denotamos  $\lambda_{\min}(P)$  y  $\lambda_{\max}(P)$  como el mínimo y máximo eigenvalor de  $P$ , respectivamente.

## 2.4. Teoría de Grafos

Una breve introducción a la terminología y definiciones de la teoría algebraica de grafos es dada aquí. Ver [53] para un tratamiento adecuado de las propiedades algebraicas de los grafos.

- Una gráfica  $\mathcal{G}$  consiste de un conjunto de nodos  $\mathcal{V}$  y un conjunto de aristas  $\mathcal{E}$  donde una arista es una pareja no ordenada de distintos nodos de  $\mathcal{V}$ .
- Si  $(x, y) \in \mathcal{V}$ , entonces  $x$  e  $y$  son adyacentes o vecinos.
- Un gráfica es completa si cada par de nodos son vecinos.
- Un ciclo es una gráfica conectada donde cada nodo tiene exactamente dos vecinos.
- Una trayectoria desde  $x$  a  $y$  es una secuencia de distintos nodos (empezando con  $x$ , terminando con  $y$ ) tal que nodos consecutivos son adyacentes.
- Si hay una trayectoria entre dos nodos de una gráfica  $\mathcal{G}$ , entonces  $\mathcal{G}$  es conectada.

En esta tesis se asignará una orientación a la gráfica al considerar uno de los nodos como el extremo positivo de la arista. Para un grupo de  $n$  miembros (nodos) con  $p$  aristas, entonces la matriz de incidencia  $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es definida como,



$$d_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{Si el } i - \text{ésimo nodo es el extremo positivo de la } k - \text{ésima arista} \\ -1 & \text{Si el } i - \text{ésimo nodo es el extremo negativo de la } k - \text{ésima arista} \\ 0 & \text{Si el } i - \text{ésimo nodo no está conectado a la } k - \text{ésima arista.} \end{cases} \quad (2.11)$$

**Propiedad 1.** De la expresión (2.11) podemos obtener una matriz de incidencia  $D$  correspondiente a una orientación particular asignada a una gráfica no dirigida  $\mathcal{G}$ . Independientemente de cómo asignamos la orientación a  $\mathcal{G}$ , la matriz de incidencia resultante tiene las siguientes propiedades:

1. El rango de la matriz  $D$  es a lo máximo  $N - 1$  y el rango de  $D$  es  $N - 1$  si y solo si la gráfica  $\mathcal{G}$  es conectada.
2. Las columnas de  $D$  son linealmente independiente cuando no existen círculos en la gráfica. Entiéndase por círculo, una trayectoria dirigida tal que el nodo inicial y el nodo final de la trayectoria son los mismos, como en el caso de la trayectoria  $\{2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2\}$  de la gráfica de la Figura 2.2.
3. Si la gráfica  $\mathcal{G}$  es conectada, el único espacio nulo de  $D^T$  es expandido por  $\mathbf{1}_N$ . Donde,  $\mathbf{1}_N$  denota un vector de dimensión  $N \times 1$  con cada entrada de valor 1.
4. La matriz Laplaciana  $L$  de la gráfica de  $\mathcal{G}$  satisface,

$$L = DD^T.$$

**Ejemplo 1.** Verificaremos la última propiedad al considerar la gráfica  $\mathcal{G}$  en la Figura 2.2, la cual tiene la siguiente matriz Laplaciana,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Para mostrar que la elección de  $D$  no afecta a  $L$ , designamos diferentes orientaciones a  $\mathcal{G}$  como se muestra en la Figura 2.3, y obtenemos las dos matrices de incidencia siguientes,

$$D_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad D_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Un simple cálculo muestra que  $L = D_a D_a^T = D_b D_b^T$ . Así que, la elección de la asignación de la orientación de la gráfica no afecta la matriz Laplaciana.

En nuestro caso, se asume que la gráfica  $\mathcal{G}$  es conectada, es decir, un lazo de comunicación existe entre cada dos nodos distintos de  $\mathcal{G}$ .

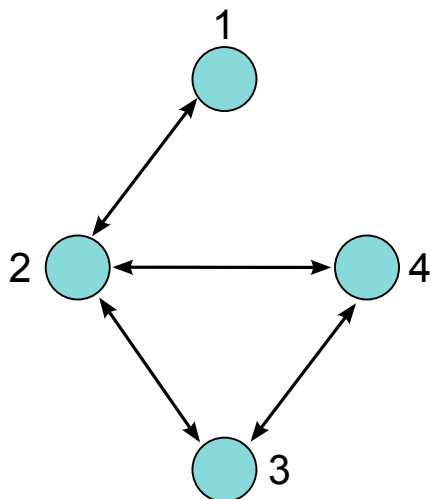


Figura 2.2: Una gráfica no dirigida de cuatro agentes cuya matriz Laplaciana es (2.12). El número del agente está ilustrado en cada nodo.

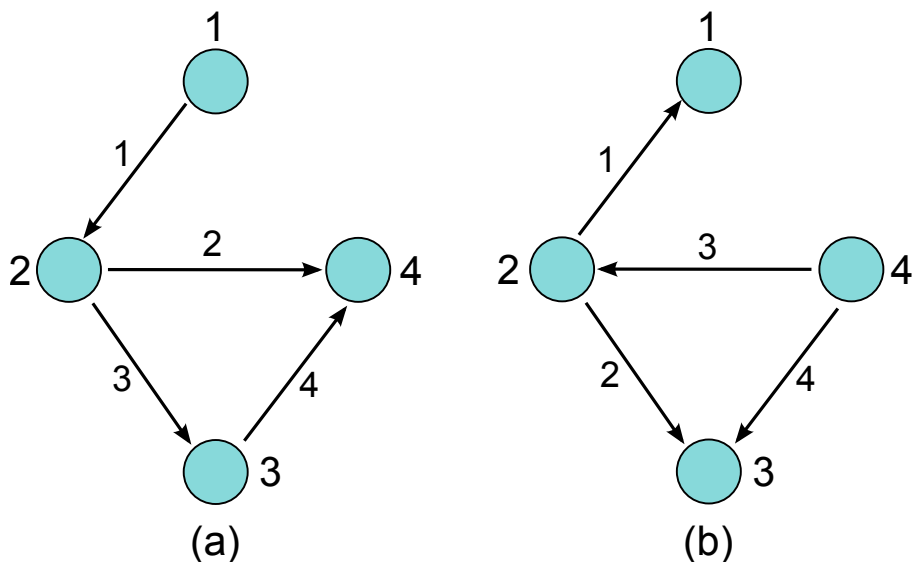


Figura 2.3: Dos diferentes asignaciones de orientación a la gráfica de la Figura 2.2

La matriz Laplaciana de  $\mathcal{G}$  es definida como  $L(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G})D(\mathcal{G})^T$  y es independiente de la orientación dada. Una propiedad interesante de  $L(\mathcal{G})$  es que siempre es simétrica y semi-definida positiva. La multiplicidad algebraica de su eigenvalor cero es igual al número de componentes conectados en  $\mathcal{G}$ . Otro interesante hecho es que el segundo eigenvalor más pequeño de  $L(\mathcal{G})$ , conocido como la conectividad algebraica, es positivo si y solo si  $\mathcal{G}$  es conectada.

## 2.5. Herramientas de estabilidad

El requisito principal para los sistemas de control es la propiedad de estabilidad. Ahora se dará un breve repaso de algunos conceptos de estabilidad tomados de Khalil [54].

### 2.5.1. Estabilidad de Lyapunov

Considere el sistema sin entrada de control,

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

- Un punto de equilibrio del sistema (2.14) es Globalmente Uniformemente Asintoticamente Estable (UGAS, por sus siglas en inglés) si existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que,  $\forall x_o \in \mathbb{R}^n$ , la solución de  $x(t, x_o)$  satisface,

$$|x(t, x_o)| \leq \beta(|x_o|, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.15)$$

- Un punto de equilibrio del sistema (2.14) es Globalmente Uniformemente Exponencialmente Estable (UGES, por sus siglas en inglés) si existen números reales estrictamente positivos  $k > 0$  y  $\lambda > 0$  tal que,  $\forall x_o \in \mathbb{R}^n$ , la solución de  $x(t, x_o)$  satisface,

$$|x(t, x_o)| \leq k |x_o| e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

### 2.5.2. Estabilidad Entrada-Estado

Considere el siguiente sistema con entrada  $u(t)$ ,

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^p. \quad (2.16)$$

- El sistema (2.16) se dice que es estable entrada-estado (ISS, por sus siglas en inglés) si existen funciones  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\rho \in \mathcal{K}$  tal que para cualquier estado inicial  $x_0$  y cualquier entrada acotada  $u(t)$ , la solución de  $x(t)$  existe para todo  $t \geq 0$  y satisface,

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \rho \left( \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| \right)$$

cuando la entrada desaparece, el origen es UGAS.

- Alternativamente: para  $d \in \mathcal{L}_\infty$ , se define,

$$|d|_a = \limsup_{t \rightarrow \infty} |d(t)|.$$

Entonces, el sistema (2.16) es ISS si existen funciones  $\gamma_0(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$ , tal que, para cualquier entrada  $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty^m$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la respuesta de  $x(t)$  en el estado inicial  $x(0) = x_0$  satisface,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{L}_\infty} &\leq \gamma_0(|x_0|) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}) \\ \|x\|_a &\leq \gamma(\|u\|_a). \end{aligned}$$

### 2.5.3. Pasividad

Considere el siguiente sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  denota los estados del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  es la entrada de control e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  representa la salida del sistema.

- El sistema dinámico (2.17) es pasivo si existe una función de almacenamiento continuamente diferenciable  $V(x) \geq 0$  tal que,

$$\dot{V} \leq -W(x) + u^T y$$

para alguna función semidefinida positiva  $W(x)$ . El sistema (2.17) es estrictamente pasivo si  $W(x)$  es definida positiva.

- Una no linealidad estática  $y = h(u)$  es pasiva si, para todo  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$u^T y = u^T h(u) \leq 0 \tag{2.18}$$

y estrictamente pasiva si (2.18) se mantiene con desigualdad estricta  $\forall u \neq 0$ .

- El sistema (2.17) es observable estado - cero si ninguna solución de  $\dot{x} = f(x, 0)$  puede permanecer idénticamente en el subconjunto  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, 0) = 0\}$ , mas que la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ .

# Capítulo 3

## Diseño de Control de Formación

### 3.1. Introducción

Controlar la posición de un objeto es un problema de control interesante y ha sido el tema de muchos trabajos de investigación. Las aplicaciones van desde el control de las cabezas de lectura de discos duros hasta robots manipuladores. Cuando el objetivo es ser colocado en una ubicación fija, el problema de control es a menudo denominado como *regulación*, y una forma para mover un objeto a través de una curva podría ser regularlo a lo largo de una secuencia de puntos. Otra solución es construir una trayectoria y diseñar una ley de control que obligue al objeto a seguirla. Este enfoque es llamado seguimiento de camino (PF - *Path Following, en Inglés*) y el objeto sigue la trayectoria en vez de ser estabilizado en cada punto. A continuación se definen brevemente los elementos que conforman el problema de PF. Una introducción detallada para este esquema de control se describe en [13, 14].

**Definición 1.** *Una trayectoria parametrizada es una curva geométrica,*

$$\eta_d := \{\eta \in \mathbb{R}^m : \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \eta = \eta_d(\theta)\}$$

*donde  $\eta_d$  es continuamente parametrizada por la variable de trayectoria  $\theta$ .*

Para una trayectoria  $\eta_d(\theta)$  parametrizada por  $\theta$ , la asignación  $\theta = \theta_1$  significa que el objeto debe estar en la ubicación dada por  $\eta_d(\theta_1)$  — ver Figura 3.1. Después que la trayectoria es construida, el problema de velocidad y aceleración a lo largo de la trayectoria permanece sin resolver. En seguimiento de trayectoria, la trayectoria deseada es parametrizada por el tiempo  $t$ , es decir,  $\theta(t) = t$ , y la velocidad a lo largo de la trayectoria es entonces simplemente la derivada en el tiempo  $\dot{\eta}_d(t)$ . Así, existe una asignación implícita de velocidad (y aceleración) en esquemas de seguimiento de trayectoria.

PF separa la asignación de velocidad al introducir una ley de actualización para  $\theta$  y forzar a la velocidad de trayectoria  $\dot{\theta}$ , a seguir una asignación de velocidad  $v(t)$ . El problema de PF (como es tratado en este trabajo) se define en [13], donde el seguimiento de trayectoria es

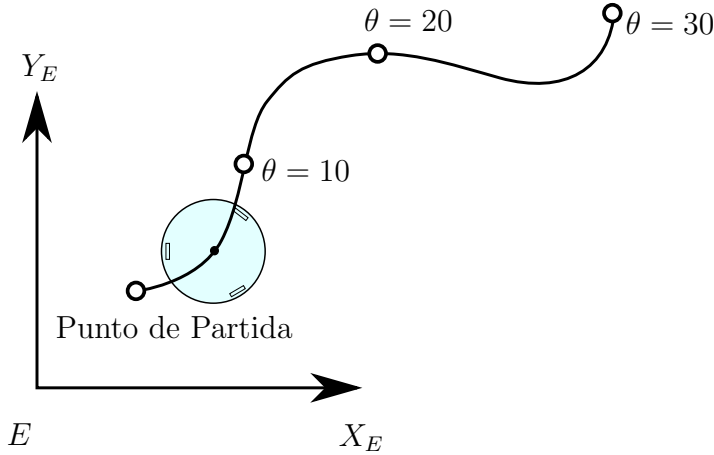


Figura 3.1: La variable  $\theta$  determina la posición en la trayectoria: por ejemplo, cuando  $\theta$  es 10 o 20, el robot omnidireccional está en la posición correspondiente  $y_d(\theta)$ .

denominado como la *tarea geométrica* y las asignaciones de tiempo, velocidad o aceleración son definidas como *tareas dinámicas*.

**Definición 2. El problema de PF.** *Diseñar un controlador que resuelva dos tareas,*

1. **La tarea geométrica:** *para cualquier función continua  $\theta(t)$ , forzar la salida  $\eta$  a converger a una trayectoria deseada  $\eta_d$ .*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta(t) - \eta_d(\theta(t))| = 0.$$

2. **La tarea dinámica:** *forzar la velocidad de trayectoria  $\dot{\theta}$  a converger a una asignación de velocidad deseada  $v(t)$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\theta}(t) - v(t)| = 0$$

### 3.1.1. Configuración de formación para robots omnidireccionales

Una formación de  $N$  robots omnidireccionales puede formarse al considerar  $N$  trayectorias individuales. En este Capítulo, se generaliza la configuración de una trayectoria  $\eta_d$  para  $N$  trayectorias al introducir un Punto de Referencia en Formación (PRF) y crear un conjunto de  $N$  vectores de designación  $l_i$ , relativos al PRF. Se hace al PRF el origen de un marco de trayectoria móvil  $\{T\}$ , y se denota al marco inercial como  $\{E\}$ . La trayectoria deseada para el PRF es  $\eta_d(\theta)$ , y el robot móvil omnidireccional  $i$  seguirá entonces la trayectoria deseada individual,

$$\eta_{di}(\theta_i) = \eta_d(\theta) + R(\theta_i)l_i \quad (3.1)$$

donde  $R(\theta_i)$  es una matriz de rotación desde  $\{T\}$  a  $\{E\}$ . Para un robot omnidireccional la salida es  $\eta = [x, y, \psi]^T$  donde  $(x, y)$  es la posición y  $\psi$  es el ángulo de orientación. La

trayectoria deseada para cada robot omnidireccional está entonces dada por,

$$\eta_{di}(\theta_i) = [x_{id}(\theta_i), y_{id}(\theta_i), \psi_{id}(\theta_i)]^T.$$

Las trayectorias son parametrizadas de tal manera que, cuando las variables de trayectoria sean sincronizadas, los robots móviles estarán en sus posiciones deseadas relativas a los demás — ver Figura 3.2. El vector tangente a lo largo de la trayectoria es escogido como el eje  $X$  del marco móvil  $\{T\}$ , esto es  $T(\theta_i) = \left[ \frac{\partial x_d(\theta_i)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial y_d(\theta_i)}{\partial \theta_i} \right]^T$ . El ángulo de orientación deseado es entonces calculado como el ángulo del vector tangente en el marco fijo  $\{E\}$ ,

$$\psi_d(\theta_i) = \arctan2\left(\frac{T_y(\theta_i)}{T_x(\theta_i)}\right) = \arctan2\left(\frac{\frac{\partial y_d(\theta_i)}{\partial \theta_i}}{\frac{\partial x_d(\theta_i)}{\partial \theta_i}}\right)$$

donde  $x_d(\theta_i)$  y  $y_d(\theta_i)$  son al menos tres veces diferenciables con respecto a  $\theta_i$ , y  $\arctan2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \langle -\pi, \pi \rangle$ . La matriz de rotación  $R(\theta_i) = R(\psi_d(\theta_i))$  para los vehículos está dada por,

$$R(\psi_d(\theta_i)) := \begin{bmatrix} \cos\psi_d(\theta_i) & -\sin\psi_d(\theta_i) & 0 \\ \sin\psi_d(\theta_i) & \cos\psi_d(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El rango de aplicaciones puede ser extendido al considerar trayectorias con formas diferentes.

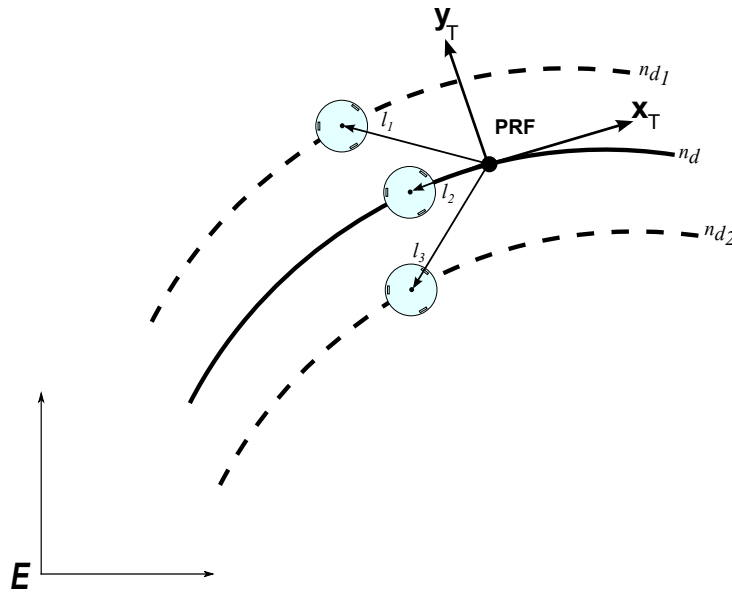


Figura 3.2: Ejemplo de configuración de la formación para tres robots omnidireccionales. La configuración está definida por los vectores de designación  $\ell_1, \dots, \ell_3$

## 3.2. Diseño de Formación

Considérese el modelo dinámico de cada robot omnidireccional  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dado por (2.10), el cual tiene la forma,

$$D_{a_i} \ddot{\eta}_i + C_{a_i}(\dot{\eta}_i) \dot{\eta}_i = B_{a_i}(\eta_i) \tau_i \quad (3.2)$$

donde, el vector de posición en el marco inercial  $\{E\}$  está dado por  $\eta_i = [x_i, y_i, \psi_i]^T$ , siendo  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de posición en el marco inercial  $\{E\}$  y  $\psi_i$  el ángulo de orientación del robot móvil.  $\tau_i \in \mathbb{R}^3$  son las fuerzas y momentos de control generalizados en el marco de referencia móvil  $\{B\}$ . Además,

$$\begin{aligned} D_{a_i} &= \begin{bmatrix} M_p + \frac{3I_r}{2r^2} & & \\ & M_p + \frac{3I_r}{2r^2} & \\ & & I_p + \frac{3L^2 I_r}{r^2} \end{bmatrix} \\ C_{a_i}(\dot{\eta}_i) &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi}_i \frac{3I_r}{2r^2} & 0 \\ -\dot{\psi}_i \frac{3I_r}{2r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_{a_i} &= \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\delta+\psi)}{\frac{L}{r}} & -\frac{\sin(\delta-\psi)}{\frac{L}{r}} & \frac{\cos(\psi)}{\frac{L}{r}} \\ \frac{\cos(\delta+\psi)}{\frac{L}{r}} & -\frac{\cos(\delta-\psi)}{\frac{L}{r}} & \frac{\sin(\psi)}{\frac{L}{r}} \\ \frac{L}{r} & \frac{L}{r} & \frac{L}{r} \end{bmatrix}, \quad \delta = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

El modelo (3.2) puede reescribirse de la siguiente manera,

$$\dot{\eta}_i = R_i v_i \quad (3.3a)$$

$$M_i \dot{v}_i + C_i(v_i) v_i = B_i \tau_i \quad (3.3b)$$

donde  $v_i = [v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidad en el marco de referencia móvil  $\{B\}$ .

Las matrices del modelo  $M_i$  y  $C_i$  denotan la matriz de inercia y coriolis, respectivamente, mientras que  $\tau_i \in \mathbb{R}^3$  son las fuerzas y momentos de control generalizados en el marco de referencia móvil. La matriz  $R_i \in SO(3)$  es una matriz de rotación del marco móvil con respecto al marco inercial; dado  $\psi_i$ ,  $R_i$  puede escribirse como,

$$R_i = R_i(\psi_i) = \begin{pmatrix} \cos\psi_i & -\sin\psi_i & 0 \\ \sin\psi_i & \cos\psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Recuérdese que  $R_i$  satisface  $R_i^T R_i = I_3$ , y que,

$$\dot{R}_i = R_i S \dot{\psi}_i = \dot{\psi}_i S R_i \quad (3.5)$$



donde,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Ademas,

$$M_i = \begin{bmatrix} M_p + \frac{3I_r}{2r^2} & & \\ & M_p + \frac{3I_r}{2r^2} & \\ & & I_p + \frac{3L^2I_r}{r^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$C_i(v_i) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}_i M_p & 0 \\ \dot{\psi}_i M_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\delta}{r} & -\frac{\sin\delta}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{\cos\delta}{r} & -\frac{\cos\delta}{r} & 0 \\ \frac{L}{r} & \frac{L}{r} & \frac{L}{r} \end{bmatrix}, \quad \delta = \frac{\pi}{6}. \quad (3.9)$$

El objetivo de control es resolver el problema de SPF para un grupo de  $N$  robots móviles omnidireccionales, cada uno con un modelo de la forma (3.3). Es decir, los sistemas PF deben ser sincronizados tal que converjan y permanezcan en sus posiciones deseadas en la formación. Al construir las trayectorias con un PRF se resuelve este problema al sincronizar las variables de trayectoria. De esta manera, el objetivo de control es resumido en la siguiente definición.

**Definición 3. El problema SPF.** *Dada una formación con  $N$  miembros. Entonces, para las trayectorias deseadas  $\eta_{di}(\theta)$ , diseñar un controlador que resuelva las dos tareas siguientes:*

- **La tarea geométrica:** *para cualquier función continua  $\theta(t)$ , forzar la salida  $\eta_i$  a converger a una trayectoria deseada  $\eta_{di}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta_i(t) - \eta_{di}(\theta(t))| = 0. \quad (3.10)$$

- **La tarea dinámica:** *forzar la velocidad de trayectoria  $\dot{\theta}$  a converger a una asignación de velocidad deseada  $v(t)$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\theta}_i(t) - v(t)| = 0 \quad (3.11)$$

*y forzar a las variables de trayectoria a converger,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta_i(t) - \theta_j(t)| = 0, \quad i, j \in [1, \dots, N], i \neq j.$$

En este diseño de control, la sincronización es lograda cuando se cumple el limite anterior junto con la tarea geométrica y dinámica.

Las trayectorias y las asignaciones de velocidad para los robots individuales son  $\eta_{di}(\theta_i)$  y  $v(t)$ , respectivamente. A lo largo de esta tesis, se asume que la trayectoria y la asignación de

velocidad  $\eta_{di}$ ,  $v(t)$  y sus derivadas parciales, están uniformemente acotadas. Esto se establece formalmente por medio de la siguiente suposición.

**Suposición 1.** *Lo siguiente se mantiene:*

1. Para una trayectoria  $\eta_d(\theta) \in \mathcal{C}^n$  existe  $K < \infty$  tal que  $|\eta_d^{\theta^i}(\theta)| \leq K \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .
2. Para  $v(t) \in \mathcal{C}^{n-1}$  existe  $L < \infty$  tal que  $|v^{t^j}(t)| \leq L \quad \forall (\theta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Se diseñara un control PF individual para cada vehículo usando la técnica *backstepping* recursivo en 2 pasos. La primera parte del diseño de control resuelve la tarea geométrica y sigue como base el diseño recursivo dado en [13]. La tarea dinámica es resuelta al encontrar una ley de control que satisfaga (3.11) y sincronice las variables de trayectoria.

### 3.2.1. Diseño *Backstepping*

Defínanse las variables de error como:

$$z_{i,1} = \eta_i - \eta_{di}(\theta_i) = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \psi_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{id} \\ y_{id} \\ \psi_{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i,1x} \\ z_{i,1y} \\ z_{i,1\psi} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$z_{i,2} = v_i - \alpha_{i,1} \quad (3.13)$$

$$\omega_i = v(t) - \dot{\theta}_i \quad (3.14)$$

donde  $v_i = [v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidad en el marco de referencia móvil  $\{B\}$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}$ , es la velocidad de referencia.  $\omega_i, \dot{\theta}_i \in \mathbb{R}$  es el control de sincronización y la velocidad de la variable de trayectoria, respectivamente. Por otro lado,  $z_{i,1} \in \mathbb{R}^3$  es el error de seguimiento en posición de la trayectoria deseada del agente  $i$  y  $\alpha_{i,1} \in \mathbb{R}^3$  el control virtual que será determinado a continuación, tal que  $z_{i,2} = v_i - \alpha_{i,1} \in \mathbb{R}^3$  tiende asintóticamente a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Paso 1.** *Tomando la derivada de (3.12) con respecto del tiempo, tenemos,*

$$\dot{z}_{i,1} = \dot{\eta}_i - \frac{\partial \eta_{di}(\theta_i)}{\partial \theta_i} \frac{d\theta_i}{dt} = \dot{\eta}_i - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i. \quad (3.15)$$

*Sustituyendo (3.3a) en (3.15), obtenemos,*

$$\dot{z}_{i,1} = R_i v_i - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i. \quad (3.16)$$

*Despejando  $v_i$  de (3.13) y sustituyendo en (3.16), se tiene,*

$$\dot{z}_{i,1} = R_i (\alpha_{i,1} + z_{i,2}) - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i. \quad (3.17)$$

Considérese la siguiente función cuadrática,

$$V_{i,1} = z_{i,1}^T P_{i,1} z_{i,1} \quad (3.18)$$

donde  $P_{i,1} = P_{i,1}^T > 0$ , y tomando su derivada temporal,

$$\dot{V}_{i,1} = \dot{z}_{i,1}^T P_{i,1} z_{i,1} + z_{i,1}^T P_{i,1} \dot{z}_{i,1}.$$

Sustituyendo (3.17) en  $\dot{V}_{i,1}$ , se tiene que  $\dot{V}_{i,1}$  toma la forma

$$\dot{V}_{i,1} = \left[ (R_i [z_{i,2} + \alpha_{i,1}])^T - \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right)^T \right] P_{i,1} z_{i,1} + z_{i,1}^T P_{i,1} \left( R_i [z_{i,2} + \alpha_{i,1}] - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right). \quad (3.19)$$

Defínase ahora el control virtual  $\alpha_{i,1}$  como,

$$\alpha_{i,1} = R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) \quad (3.20)$$

donde  $A_{i,1}$  es escogida como una matriz tipo Hurwitz, tal que junto con la matriz  $P_{i,1} = P_{i,1}^T > 0$ , sean solución de la ecuación de Lyapunov,

$$P_{i,1} A_{i,1} + A_{i,1}^T P_{i,1} = -I_3$$

donde  $I_3$  es la matriz identidad de orden 3.

Sustituir (3.20) en (3.19), conduce a

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{i,1} &= \left[ \left( \left[ R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) + z_{i,2} \right]^T R_i^T \right) - \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right)^T \right] P_{i,1} z_{i,1} \\
 &\quad + z_{i,1}^T P_{i,1} \left( R_i \left[ R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) + z_{i,2} \right] - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right) \\
 &= \left[ \left( \left[ \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right)^T R_i + z_{i,2}^T \right] R_i^T \right) - \left( \dot{\theta}_i^T \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)^T \right] P_{i,1} z_{i,1} \\
 &\quad + z_{i,1}^T P_{i,1} \left( R_i \left[ R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) + z_{i,2} \right] - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right) \\
 &= \left[ \left( \left[ \left( z_{i,1}^T A_{i,1}^T + v(t)^T \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)^T R_i + z_{i,2}^T \right] R_i^T \right) - \left( \dot{\theta}_i^T \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)^T \right] P_{i,1} z_{i,1} \\
 &\quad + z_{i,1}^T P_{i,1} \left( R_i \left[ R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) + z_{i,2} \right] - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right),
 \end{aligned}$$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{i,1} &= z_{i,1}^T [A_{i,1}^T P_{i,1} + P_{i,1} A_{i,1}] z_{i,1} + v(t)^T \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} P_{i,1} z_{i,1} + z_{i,2}^T R_i^T P_{i,1} z_{i,1} - \dot{\theta}_i^T \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} P_{i,1} z_{i,1} \\
 &\quad + z_{i,1}^T P_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) + z_{i,1}^T P_{i,1} R_i z_{i,2} - z_{i,1}^T P_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $A_{i,1}^T P_{i,1} + P_{i,1} A_{i,1} = -I_3$  y que  $P_{i,1} = P_{i,1}^T > 0$ ,  $\dot{V}_{i,1}$  toma la forma

$$\dot{V}_{i,1} = -z_{i,1}^T z_{i,1} + 2z_{i,1}^T P_{i,1} R_i z_{i,2} + 2z_{i,1}^T P_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \omega_i. \quad (3.21)$$

**Paso 2.** Obtención de  $\tau_i$ . Considere la derivada de  $\alpha_{i,1}$  en (3.20),

$$\dot{\alpha}_{i,1} = R_i^T \left[ A_{i,1} \dot{z}_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) + \frac{d \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)}{dt} v(t) \right] + \frac{d [R_i^T]}{dt} \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right)$$

Sustituyendo (3.15) en la ecuación anterior, tenemos,

$$\dot{\alpha}_{i,1} = R_i^T \left[ A_{i,1} \left( \dot{\eta}_i - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right) + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) + \frac{d \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)}{dt} v(t) \right] + \frac{d [R_i^T]}{dt} \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right).$$

Considerando que  $\dot{\eta}_i = R_i v_i$ , y como  $\alpha_{i,1} = R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right)$ , entonces,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{i,1} &= R_i^T \left[ A_{i,1} \left( R_i v_i - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right) + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) + \frac{d \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)}{dt} v(t) \right] + \dot{R}_i^T [R_i \alpha_{i,1}] \\ &= R_i^T A_{i,1} R_i v_i + R_i^T \left[ -A_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) + \frac{d \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right)}{dt} v(t) \right] + \dot{R}_i^T R_i \alpha_{i,1}.\end{aligned}$$

Por otra parte, como  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \right) = \frac{\partial^2 \eta_{di}}{\partial \theta_i^2} \dot{\theta}_i$ , se tiene entonces que  $\dot{\alpha}_{i,1}$  toma la forma

$$\dot{\alpha}_{i,1} = R_i^T A_{i,1} R_i v_i + R_i^T \left[ -A_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) + \frac{\partial^2 \eta_{di}}{\partial \theta_i^2} v(t) \dot{\theta}_i \right] + \dot{R}_i^T R_i \alpha_{i,1}.$$

Al agrupar en la expresión anterior todos los términos que no contienen  $\dot{\theta}_i$ ,  $\dot{\alpha}_{i,1}$  puede escribirse como

$$\dot{\alpha}_{i,1} = \sigma_{i,1} + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma_{i,1} &= \dot{R}_i^T (\psi_i) R_i (\psi_i) \alpha_{i,1} + R_i^T (\psi_i) A_{i,1} R_i (\psi_i) v_i + R_i^T (\psi_i) \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) \\ &= \dot{R}_i^T (\psi_i) R_i (\psi_i) \alpha_{i,1} + R_i^T (\psi_i) \left[ A_{i,1} R_i (\psi_i) v_i + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{v}(t) \right].\end{aligned} \quad (3.23)$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \left[ R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) \right]}{\partial \theta_i} \\ &= \frac{\partial \left[ R_i^T \left( A_{i,1} (\eta_i - \eta_{di}(\theta_i)) + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) \right]}{\partial \theta_i} \\ &= R_i^T \left( -A_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial^2 \eta_{di}}{\partial \theta_i^2} v(t) \right).\end{aligned}$$

Ahora consideramos la siguiente función cuadrática:

$$V_{i,2} = z_{i,2}^T P_{i,2} z_{i,2}$$

donde  $P_{i,2} = P_{i,2}^T > 0$ , junto con la función candidata de Lyapunov  $V = V_{i,1} + V_{i,2}$ . La derivada en el tiempo de  $V$  está dada por,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_{i,1} + \dot{V}_{i,2} = \dot{V}_{i,1} + \dot{z}_{i,2}^T P_{i,2} z_{i,2} + z_{i,2}^T P_{i,2} \dot{z}_{i,2} \\ &= \dot{V}_{i,1} + (\dot{v}_i^T - \dot{\alpha}_{i,1}^T) P_{i,2} z_{i,2} + z_{i,2}^T P_{i,2} (\dot{v}_i - \dot{\alpha}_{i,1}).\end{aligned}$$

A partir de (3.3) y (3.22), podemos describir  $\dot{V}$  como,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_{i,1} + \left( \left[ (B_i \tau_i)^T - v_i^T C_i^T \right] (M_i^{-1})^T - \sigma_{i,1}^T - \dot{\theta}_i^T \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \right)^T P_{i,2} z_{i,2} \\ &\quad + z_{i,2}^T P_{i,2} \left( M_i^{-1} (B_i \tau_i - C_i v_i) - \sigma_{i,1} - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Se escoge entonces a  $\tau_i$  como,

$$\tau_i = B_i^{-1} \left[ C_i (v_i) v_i + M_i \left( A_{i,2} z_{i,2} + \sigma_{i,1} + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} v(t) - P_{i,2}^{-1} R_i^T P_{i,1} z_{i,1} \right) \right] \quad (3.25)$$

donde  $A_{i,2}$  es escogida como una matriz tipo Hurwitz, tal que para una matriz  $P_{i,2} = P_{i,2}^T > 0$ , son solución de la ecuación de Lyapunov,

$$P_{i,2} A_{i,2} + A_{i,2}^T P_{i,2} = -I_3$$

donde  $I_3$  es la matriz identidad de orden 3.

Sustituyendo (3.25) en (3.24), tenemos,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_{i,1} + v_i^T C_i^T (M^{-1})^T P_{i,2} z_{i,2} + z_{i,2}^T A_{i,2}^T P_{i,2} z_{i,2} + v(t)^T \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} P_{i,2} z_{i,2} \\ &\quad - z_{i,1}^T P_{i,1}^T R_i z_{i,2} - v_i^T C_i^T (M^{-1})^T P_{i,2} z_{i,2} - \sigma_{i,1}^T P_{i,2} z_{i,2} - \dot{\theta}_i^T \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} P_{i,2} z_{i,2} \\ &\quad + z_{i,2}^T P_{i,2} M^{-1} C_i v_i + z_{i,2}^T P_{i,2} \left( A_{i,2} z_{i,2} + \sigma_{i,1} + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} v(t) - P_{i,2}^{-1} R_i^T P_{i,1} z_{i,1} \right) \\ &\quad - z_{i,2}^T P_{i,2} M^{-1} C_i v_i - z_{i,2}^T P_{i,2} \sigma_{i,1} - z_{i,2}^T P_{i,2} \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i.\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora (3.21) y simplificando la expresión anterior, tenemos,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -z_{i,1}^T z_{i,1} + 2z_{i,1}^T P_{i,1} R_i z_{i,2} + 2z_{i,1}^T P_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \omega_i \\
 &\quad - z_{i,2}^T z_{i,2} + 2z_{i,2}^T P_{i,2} \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} v(t) - 2z_{i,1}^T P_{i,1} R_i z_{i,2} - 2\dot{\theta}_i^T \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} P_{i,2} z_{i,2} \\
 &= -z_{i,1}^T z_{i,1} - z_{i,2}^T z_{i,2} + 2 \left( z_{i,1}^T P_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} + z_{i,2}^T P_{i,2} \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \right) \omega_i
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

La ecuación (3.25) define la parte estática de las leyes de control y resuelve la tarea geométrica del problema de PF. La parte dinámica será resuelta al diseñar una ley de actualización  $\omega_i$  con el fin de eliminar o hacer no positivo el termino  $2 \left( z_{i,1}^T P_{i,1} \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} + z_{i,2}^T P_{i,2} \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \right) \omega_i$  de la ecuación (3.26).

Para el problema de formación, sin embargo, es necesario asegurar sincronización de las variables de trayectoria  $\theta_i$ , así como satisfacer las asignaciones de velocidad.

Para una representación mas clara, se escribirá el sistema en lazo cerrado en las coordenadas  $(z_{i,1}, z_{i,2})$ . Del procedimiento anterior se tiene que,

$$\dot{z}_{i,1} = R_i (\alpha_{i,1} + z_{i,2}) - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i$$

La cual, al sustituir (3.20), toma la forma,

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{i,1} &= R_i \left( R_i^T \left( A_{i,1} z_{i,1} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) \right) + z_{i,2} \right) - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \\
 &= A_{i,1} z_{i,1} + R_i z_{i,2} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} v(t) - \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \\
 &= A_{i,1} z_{i,1} + R_i z_{i,2} + \frac{\partial \eta_{di}}{\partial \theta_i} \omega_i
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ahora, derivando (3.13) con respecto al tiempo, se tiene que,

$$\dot{z}_{i,2} = \dot{v}_i - \dot{\alpha}_{i,1}$$

Al sustituir  $\dot{v}_i = M_i^{-1} (B_i \tau_i - C_i v_i)$  (de la ecuación (3.3.b)) y la ecuación (3.22), tenemos,

$$\dot{z}_{i,2} = M_i^{-1} (B_i \tau_i - C_i v_i) - \sigma_{i,1} - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i.$$

Por último, sustituyendo  $\tau_i$  dado en (3.25), se tiene que  $\dot{z}_{i,2}$  toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_{i,2} &= M_i^{-1}C_i(v_i)v_i + \left( A_{i,2}z_{i,2} + \sigma_{i,1} + \frac{\partial\alpha_{i,1}}{\partial\theta_i}v(t) - P_{i,2}^{-1}R_i^T P_{i,1}z_{i,1} \right) \\ &\quad - M_i^{-1}C_i(v_i)v_i - \sigma_{i,1} + \frac{\partial\alpha_{i,1}}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i \\ &= -P_{i,2}^{-1}R_i^T P_{i,1}z_{i,1} + A_{i,2}z_{i,2} + \frac{\partial\alpha_{i,1}}{\partial\theta_i}\omega_i.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Expresando (3.27) y (3.28) vectorialmente, es posible obtener la representación,

$$\dot{z}_i = F_i(\eta_i)z_i - g_i(t, \eta_i, \theta_i)\omega_i\tag{3.29}$$

$$\dot{\theta}_i = v(t) - \omega_i\tag{3.30}$$

donde  $z_i = [z_{i,1} = \eta_i - \eta_{di}(\theta), z_{i,2} = v_i - \alpha_{i,1}]^T$ .

Con

$$F_i = \begin{pmatrix} A_{i,1} & R_i(\psi_i) \\ -P_{i,2}^{-1}R_i^T(\psi_i)P_{i,1} & A_{i,2} \end{pmatrix}, g_i = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\eta_{di}}{\partial\theta_i} \\ -\frac{\partial\alpha_{i,1}}{\partial\theta_i} \end{pmatrix}$$

y  $\omega_i = \omega_i(\eta_i, \theta_i, t)$  será determinado en la siguiente sección.

### 3.3. Diseño basado en pasividad para sincronización

En esta sección, se explota la flexibilidad del esquema de control PF con dos objetivos separados para sincronizar las variables de trayectoria de un grupo de sistemas. En particular, hacemos uso de una estrategia basada en pasividad para el control de formación propuesta en [43]. Esta estrategia nos permite obtener una amplia clase de esquemas de sincronización para una topología de comunicación general. En esta estrategia, representamos el sistema en lazo cerrado como la interconexión de un bloque dinámico para la sincronización de las variables de trayectoria y otro bloque que incorpora los sistemas PF. El resultado en este Capítulo está basado en [49]. La mayor ventaja de un enfoque pasivo es que permite al diseñador la construcción de filtros que preserven propiedades pasivas y mejoren el desempeño y la robustez del diseño.

#### 3.3.1. Sincronización y diseño de *seguimiento de camino*

Brevemente recapitulamos el diseño PF que es usado como una base en este Capítulo. Considere el sistema general,



$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f(\eta, \tau) \\ y &= h(\eta) \end{cases} \quad (3.31)$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}^n$  denota el vector de estados,  $y \in \mathbb{R}^m$  es la salida del sistema, y  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es la señal de control. Para forzar  $y$  a seguir una trayectoria factible prescrita  $y_d(\theta)$  y asignar una velocidad factible  $v(t)$  a  $\dot{\theta}$  en esta trayectoria, en [14] se estudian subclases del sistema (3.31) y se desarrollan procedimientos de diseño PF basados en linealización por retroalimentación y técnicas *backstepping*. Los diseños propuestos en [13] conducen a un sistema en lazo cerrado de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(\eta)z - g(t, \eta, \theta)\omega \\ \dot{\theta} &= v(t) - \omega \end{aligned}$$

donde  $z = [z_1 = \eta - \eta_d(\theta), z_2 = v - \alpha_1]^T$  es un conjunto de nuevos parámetros que incluyen el error de seguimiento  $n - n_d$  y sus derivadas, y  $\omega$  es un término de retroalimentación que debe ser diseñado tal que la velocidad deseada  $v(t)$  sea lograda asintóticamente; esto es

$$\omega \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

La matriz  $F(\eta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y el vector  $g(t, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^n$  dependen del diseño de control, en particular,  $F(\eta)$  satisface la ecuación de Lyapunov,

$$PF(\eta) + F^T(\eta)P \leq -I, \quad \forall \eta \quad (3.33)$$

para alguna matriz  $P = P^T > 0$ . La acotación uniforme de las derivadas de trayectoria y asignaciones de velocidad implica que la función  $g(t, x, \theta)$  sea uniformemente acotada en sus argumentos.

En este Capítulo, se considerará un grupo de vehículos  $i = 1, \dots, N$  cada uno controlado por un diseño PF individual con una velocidad prescrita  $v(t)$  asignada al grupo, resultando en el sistema en lazo cerrado (ecuaciones 3.29-3.30),

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{z}_i &= F_i(\eta_i)z_i - g_i(t, \eta_i, \theta_i)\omega_i \\ \dot{\theta}_i &= v(t) - \omega_i. \end{cases} \quad (3.34)$$

El objetivo es diseñar  $\omega_i$  para sincronizar las variables de trayectoria  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  mientras se logra (3.32). El diseño de  $\omega_i$  depende de las variables del  $i$ -ésimo sistema y de los parámetros de trayectoria de sus vehículos vecinos, por lo que solo una variable escalar necesita ser transmitida desde cada agente. La topología de la comunicación entre los miembros de la formación es descrita por una gráfica  $\mathcal{G}$ . Dos miembros,  $i$  y  $j$ , son vecinos si pueden acceder al error de sincronización  $\theta_i - \theta_j$ . En este caso, los nodos  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo de  $\mathcal{G}$  son conectados por un lazo de comunicación. El flujo de información es bidireccional pero, para simplificar el

desarrollo se asigna una orientación a la gráfica al considerar uno de los nodos ser el extremo positivo del lazo de comunicación. Para un grupo de  $N$  miembros (nodos) con  $\ell$  lazos de comunicación (aristas), las entradas de la matriz de incidencia  $D \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$  se definen como en (2.11).

**Suposición 2.** *Se asume que  $\mathcal{G}$  es conectada, esto es, existe un lazo entre cada dos distintos nodos de  $\mathcal{G}$ .*

### 3.3.2. Diseño pasivo para sincronización

**Diseño sin retroalimentación del error de trayectoria.**

Un esquema para sincronizar  $\theta_i$  en (3.34) es diseñar una entrada de control  $\omega_i$  como,

$$\omega_i = \mathcal{H} \{u_i\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.35)$$

donde  $u_i$  se define como,

$$u_i = \sum_{k=1}^{\ell} d_{ik} \psi_k(\tilde{\theta}_k),$$

siendo  $\ell$  el número de lazos de comunicación y  $\mathcal{H}$  denota un bloque estático o dinámico, es decir, puede ser una ganancia constante o puede ser un filtro agregado para mejorar las propiedades de rendimiento y robustez. Además,  $\tilde{\theta}_k$  es definida de la siguiente forma,

$$\tilde{\theta}_k := \sum_{l=1}^N d_{lk} \theta_l = \begin{cases} \theta_i - \theta_j & \text{si } k \in \mathcal{L}_i^+ \\ \theta_j - \theta_i & \text{si } k \in \mathcal{L}_i^- \end{cases} \quad (3.36)$$

donde  $\mathcal{L}_i^+$  ( $\mathcal{L}_i^-$ ) denota el conjunto de lazos de comunicación para los cuales el nodo  $i$  es el extremo positivo (negativo).

A partir de la definición de la matriz de incidencia  $D$ ,  $u_i$  se puede reescribir de la siguiente manera,

$$u = D\Psi(\tilde{\theta}) = D\Psi$$

donde  $\Psi(\tilde{\theta}) = [\psi_1^T, \dots, \psi_\ell^T]^T \in \mathbb{R}^{p\ell}$ ,  $u = [u_1^T, \dots, u_N^T]^T$ .

Ahora caracterizaremos las propiedades que  $\mathcal{H}$  debe poseer para asegurar pasividad del bloque. Si  $\mathcal{H}$  es un bloque estático, se puede escribir  $\omega_i$  como,

$$\omega_i = h_i u_i \quad (3.37)$$

Entonces, el mapeo  $h_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ , es pasivo si, para todo  $u \in \mathbb{R}^p$ ,

$$u_i^T \omega_i = u_i^T h_i u_i \geq 0 \quad (3.38)$$

y estrictamente pasivo si (3.38) se mantiene con desigualdad estricta para todo  $u_i \neq 0$ .

Si  $\mathcal{H}$  es un bloque dinámico de la forma,

$$\mathcal{H}_i : \begin{cases} \dot{\xi}_i &= f_i(\xi_i, u_i) \\ \omega_i &= h_i(\xi_i, u_i) \end{cases} \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n, u_i, y_i \in \mathbb{R}^p \quad (3.39)$$

se dice ser pasivo desde  $u_i$  hasta  $\omega_i$  si existe una función de almacenamiento al menos una vez diferenciable  $S(\xi_i) \geq 0$ , con  $S(0) = 0$ , tal que

$$\dot{S}_i = \nabla S_i(\xi_i)^T f(\xi_i, u_i) \leq -W_i(\xi_i) + u_i^T \omega_i \quad (3.40)$$

para alguna función semidefinida positiva  $W_i(\xi_i)$ . Se dice que (3.39) es estrictamente pasivo desde  $u_i$  hasta  $\omega_i$  si  $W_i(\xi_i)$  es definida positiva.

La función  $\psi_k(\cdot)$  en (3.35) debe satisfacer la siguiente propiedad,

$$\psi_k(\tilde{\theta}_k) = \nabla P_k(\tilde{\theta}_k) \quad (3.41)$$

con  $P_k(\tilde{\theta}_k)$  como una función dos veces diferenciable no negativa,

$$P_k : \mathcal{G}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

definida en un conjunto abierto  $\mathcal{G}_k \subseteq \mathbb{R}^p$  donde evoluciona  $\tilde{\theta}_k$ .

Una elección adecuada de  $P_k(\tilde{\theta}_k)$  es,

$$P_k(\tilde{\theta}_k) = \frac{1}{2} |\tilde{\theta}_k|^2. \quad (3.42)$$

Con  $P_k(\tilde{\theta}_k)$  propuesta como en (3.42), es posible obtener  $\psi_k(\tilde{\theta}_k)$  en (3.41) como,

$$\psi_k(\tilde{\theta}_k) = \tilde{\theta}_k = \sum_{l=1}^N d_{lk} \theta_l. \quad (3.43)$$

De acuerdo con lo anterior, la expresión (3.43) puede ser escrita como,

$$\tilde{\theta} = D^T \theta \quad (3.44)$$

donde  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_N]^T$ .

Tomando en cuenta los desarrollos anteriores, la ecuación (3.30) puede reescribirse en términos de los errores  $\tilde{\theta}$  como,

$$\dot{\tilde{\theta}} = D^T 1_n v(t) - D^T \omega \quad (3.45)$$

donde  $1_n$  es un vector columna formado con entradas unitarias y  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$ . Considerando ahora el hecho de que, debido a la estructura particular de la matriz  $D$ , se satisface  $D^T 1_n v = 0$ , se tiene entonces que la dinámica de (3.45) está determinada por la retroalimentación  $\omega$ .

Por otro lado, se consideró  $\mathcal{H}$  como un bloque estatico de la forma (3.37). Debido a que  $\mathcal{H}$  es definida como una matriz de entradas constantes, se tiene que,

$$\omega = \mathcal{H} D \tilde{\theta}$$

con  $\mathcal{H} > 0$ . Es claro entonces que a partir de la estructura de  $D$ , la adecuada selección de  $\mathcal{H}$  asegura la convergencia de  $\tilde{\theta}$  al origen con una tasa de convergencia que puede modificarse a partir de los valores de las entradas de  $\mathcal{H}$ .

Las propiedades de convergencia de las señales de error  $z_i$  pueden ahora obtenerse como una propiedad de estabilidad entrada estado de la ecuación (3.29). Para tal efecto, considérese ahora la función candidata de Lyapunov,

$$V_{z_i} = z_i^T P_i z_i$$

donde

$$P_i = \text{diag}\{P_{i1}, P_{i2}\}$$

con  $P_{i1}, P_{i2}$  definidas anteriormente. La derivada con respecto al tiempo de  $V_{z_i}$  toma entonces la forma,

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z_i} &= [F_i(\eta_i) z_i - g_i(t, \eta_i, \theta_i) \omega_i]^T P_i z_i \\ &\quad + z_i^T P_i [F_i(\eta_i) z_i - g_i(t, \eta_i, \theta_i) \omega_i] \\ &= z_i^T [F_i^T P_i + P_i F_i] z_i - 2z_i^T P_i g_i \omega_i \end{aligned}$$

donde  $F_i^T P_i + P_i F_i = -I_6$ , con  $I_6$  una matriz identidad de dimensión  $6 \times 6$ . Se tiene entonces que,

$$\dot{V}_{z_i} = -z_i^T z_i - 2z_i^T P_i g_i \omega_i.$$

Ya que  $g_i$  es una función uniformemente acotada y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_i = 0$ , se obtiene la convergencia buscada de los errores  $z_i$ .

# Capítulo 4

## Plataforma Experimental

### 4.1. Introducción

Este Capítulo tiene como finalidad explicar de forma detallada las partes que conforman la plataforma experimental utilizada para la validación del algoritmo de control propuesto. La plataforma está dividida en los siguientes tres subsistemas:

- Robots.
- Sistema de visión.
- Software.

La presentación de cada subsistema tiene como objetivo tener un mejor entendimiento de la plataforma, sus capacidades, ventajas, debilidades y las mejoras a futuro.

La Figura 4.1, muestra en diagrama de bloques la plataforma experimental propuesta, en donde se observa a grandes rasgos, un sistema de localización, un conjunto de robots móviles omnidireccionales, una computadora de control y un vínculo de comunicación inalámbrico.

En general, podemos describir a la plataforma experimental como un sistema compuesto para detectar y proveer datos de posición y orientación de un conjunto de vehículos para el procesamiento de un algoritmo de control, llevado a cabo por medio de un sistema de cómputo, el cual posteriormente envía las señales de control a los robots, los cuales reflejan un cambio instantáneo que es nuevamente detectado por medio del sistema. Este ciclo de trabajo es repetido hasta lograr el objetivo propuesto.



Figura 4.1: Diagrama de bloques de la plataforma experimental.

## 4.2. Diseño y construcción de los Robots Móviles Omnidireccionales

Los robots móviles omnidireccionales utilizados para la validación y experimentación fueron diseñados y construidos en la Sección de Mecatrónica del Departamento de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV unidad Zacatenco. A continuación se describen los componentes que conforman cada uno de los dos robots móviles. La Figura 4.2 muestra el diseño final de los dos vehículos.

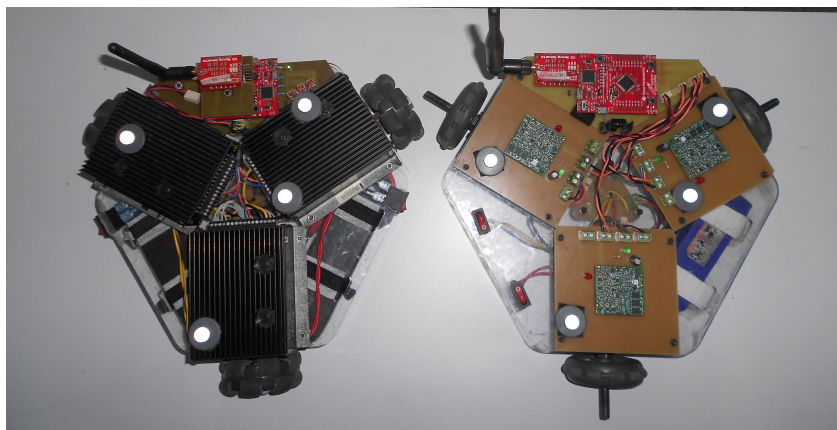


Figura 4.2: Representación física de los dos robots móviles omnidireccionales

### 4.2.1. Estructura mecánica

Debido a la demanda de parámetros del modelo dinámico de cada robot omnidireccional es necesario que la implementación física sea la más adecuada a las restricciones de los actuadores de cada uno de los robots.

Dentro de las limitaciones de diseño se buscó que cada móvil tuviera el menor tamaño y peso posible, esto con el fin de evitar que los motores sufrieran estrés mecánico. Habiendo considerado lo anterior y conociendo las características físicas de los componentes que integrarán cada una de las partes de cada robot, se propuso una base con forma de hexágono irregular —ver Figura 4.3, cuyo principal fin es servir de soporte para los elementos que conforman cada robot.

Es indispensable que el diseño sea lo más preciso posible debido a que los componentes deben ser ensamblados perfectamente con la base de cada robot móvil, para tal fin, se hizo uso del programa informático de diseño **CATIA**<sup>®</sup> desarrollado por la empresa *Dassault Systèmes*, el cual es una herramienta de diseño para la elaboración de piezas tridimensionales.

Haciendo uso de una maquina fresadora CNC (control numérico computarizado), se maquinaron las bases correspondientes a cada robot móvil omnidireccional, cabe mencionar que la base del robot 1 está construida de policarbonato, mientras, la del robot 2 fue elaborada de acrílico. Por otro lado, también se hizo uso de las herramientas y maquinarias necesarias para el diseño y la construcción de dos elementos adicionales:

- **Soportes para los motores.** Hechos de forma rectangular, tienen como objetivo el acoplo entre la base del robot y el tipo de motor de cada móvil.
- **Eje para las ruedas.** Adaptación entre el tipo de rueda omnidireccional de cada robot y el eje de los motores correspondientes. Este elemento fue construido de acero, para evitar deflexiones mecánicas en los ejes de los motores debido a fuerzas transversales.

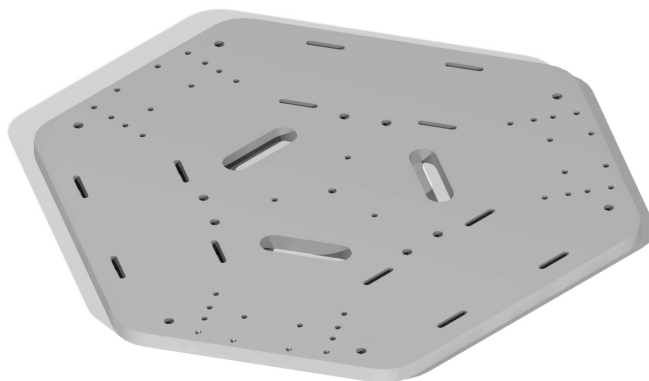


Figura 4.3: Base de acrilico para el robot 2.

#### 4.2.2. Diseño y elección de los componentes y dispositivos electrónicos

A continuación se describen los componentes electrónicos utilizados para el diseño de cada robot móvil omnidireccional. Es importante mencionar que los dos robots móviles omnidireccionales no son homogéneos en todos sus aspectos, y por tal motivo es significativo mencionar los diferentes elementos que conforman cada uno de los vehículos.

## Motor Eléctrico

Una de las diferencias principales entre los dos vehículos es la utilización de dos motores diferentes entre cada uno de ellos. A continuación se muestran y se describen las características de cada uno de los actuadores utilizados.

### Robot 1.

El diseño del robot 1 está basado en la utilización de los motores EMG30 de corriente continua con escobillas de la marca **Robot Electronics**. Este actuador trabaja a una tensión nominal de  $12V$  y consume un máximo de corriente continua de  $0.53A$  a valores nominales. Además, el alto torque de este motor es debido a una caja de engranes con una relación 30:1. Para más detalles acerca de este motor —ver Apéndice [A](#).



Figura 4.4: Motor utilizado en el Robot 1.

### Robot 2.

Este robot utiliza motores de corriente continua con escobillas de la marca **Maxon Motors** serie 250443. Este actuador trabaja con una tensión nominal de  $6V$  y consume un máximo de corriente continua de  $0.84A$  a valores nominales, por otro lado, este motor posee un reductor planetario con una razón 19:1 otorgándole por consiguiente un mayor torque y una disminución de su velocidad máxima. Para más detalles acerca de este motor —ver Apéndice [A](#).

## Etapa de potencia

Otra de las diferencias importantes entre los robots es la utilización de diferentes dispositivos de potencia, sin embargo, a pesar de las discrepancias y los diferentes modos de configuración entre estos dispositivos, es posible clasificarlos como servo-amplificadores con control interno de corriente.

### Robot 1.

El diseño del robot 1 fue basado en el controlador AZB10A4 de la compañía **Advanced Motion Controls**, el cual es un servo-amplificador extensivamente usado en sistemas de





Figura 4.5: Motor utilizado en el Robot 2.

control de movimiento. La señal de referencia para el control de corriente es  $\pm 10V$  y representa la demanda de torque del motor en una proporción dada.

En contraste con otros servo-controladores, el AZB10A4 únicamente trabaja en modo corriente y no posee dispositivos de ajuste para la calibración del mismo. Para más detalles, ver Apéndice B.

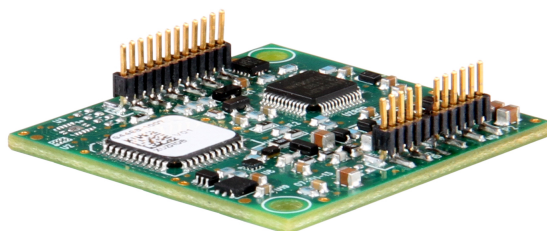


Figura 4.6: Controlador utilizado en el Robot 1.

### Robot 2.

Debido a que el servo-controlador LSC 30/2 está optimizado para los motores **Maxon**, el robot 2 fue diseñado para la utilización de este dispositivo de potencia, el cual puede proporcionar una corriente máxima de 2A. Un aspecto importante de este controlador es que la señal de referencia para el control interno de corriente debe ser una señal en modo diferencial entre  $\pm 10V$ , con lo cual el sistema es menos propenso a ruidos electromagnéticos

y caídas de voltaje. Para más especificaciones de este dispositivo, véase el Apéndice B.

De todos los modos de funcionamiento que tiene el controlador LSC 30/2, el que nos interesa es el modo corriente, el cual debe ser configurado por medio de microinterruptores.

La calibración del controlador en modo corriente se explica en el Apéndice C, en el cual se detalla la utilización de los potenciómetros de ajuste para dicha operación.



Figura 4.7: Controlador utilizado en el Robot 2.

## Diseño Electrónico

La información compartida entre la computadora de control y los robots es realizada mediante la transmisión y recepción de señales de forma inalámbrica. El esquema de la Figura 4.9 muestra los procesos que sigue la señal de control desde que sale de la computadora de control hasta llegar a los motores de cada vehículo.

Como será explicado posteriormente, el algoritmo de control fue programado en C++ tomando el paradigma de programación orientada a objetos, una vez realizado el cálculo de control para los tres motores es posible contener las tres señales de control en una cadena de caracteres, misma que es enviada vía inalámbrica al receptor por medio de un vínculo de comunicación previamente configurado. Es importante mencionar que se cuenta con un punto de acceso inalámbrico el cual interconecta los dispositivos receptores de comunicación de cada vehículo, logrando con ello una red local.

El módulo de comunicación inalámbrica utilizado en cada robot es el Wifly RN-XV de la compañía **Microchip** y sigue el estándar internacional IEEE 802.11, el cual define las características de una red de área local inalámbrica (WLAN). Este módulo soporta diversos protocolos de comunicación entre los cuales se encuentra UDP, DHCP, DNS, ICMP, TCP/IP,

siendo este último el elegido para nuestros propósitos.

Una vez que el módulo Wify de cada robot recibe la cadena de caracteres, esta es transmitida por medio de una interfaz UART (Universal Asynchronous Receiver-Transmitter) a un microcontrolador de propósito general encargado de separar la cadena de caracteres en tres cadenas independientes, las cuales contienen la señal de control de cada uno de los tres motores de cada robot omnidireccional. Una vez que se tienen las tres señales de control independientes, son enviadas secuencialmente por medio de una interfaz SPI (Serial Peripheral Interface) a un Convertidor Digital-Analógico (DAC, por sus siglas en inglés) de 12 bits, el cual a su vez posee cuatro canales accesibles por medio de un demultiplexor interno. Para más detalles acerca del microcontrolador y del convertidor digital-analógico véase el Apéndice B.

Debido a que el DAC elegido tiene una salida entre  $\pm 2.5V$ , es necesario realizar una amplificación proporcional de la señal de control, para tal fin se propuso la utilización de un amplificador de instrumentación, muy utilizado para la amplificación y el acoplamiento de señales por tener una alta impedancia de entrada y un alto rechazo al modo común (CMRR, por sus siglas en inglés). Una vez amplificada la señal es posible transmitirla a las entradas diferenciales de cada uno de los respectivos controladores de cada motor, que a su vez cerrarán el lazo de control interno de corriente. Es importante mencionar que la amplificación únicamente fue usada para el robot 2, esto debido a una adecuación de señal con su controlador de potencia. Para mas detalles acerca de este dispositivo de amplificación, véase el Apéndice B.

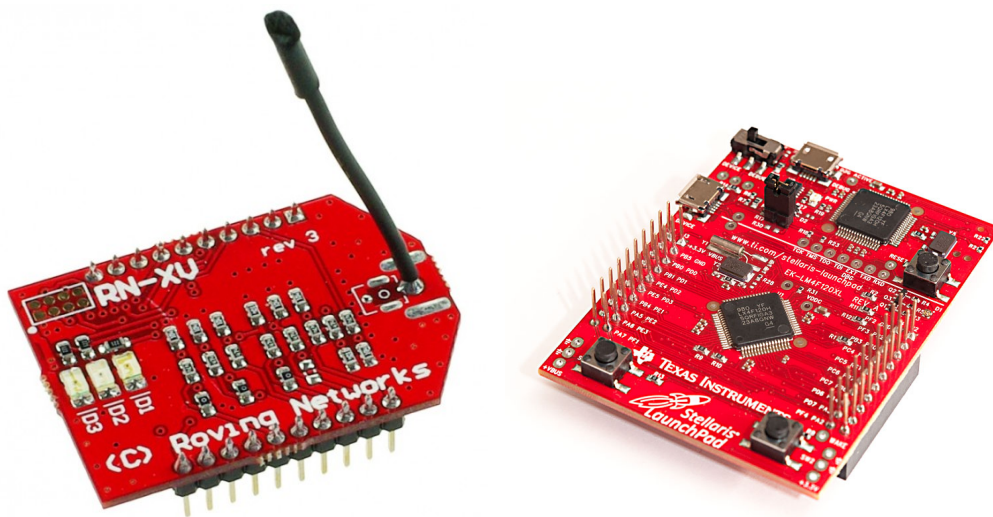


Figura 4.8: Wify RN-XV y Stellaris Launchpad.

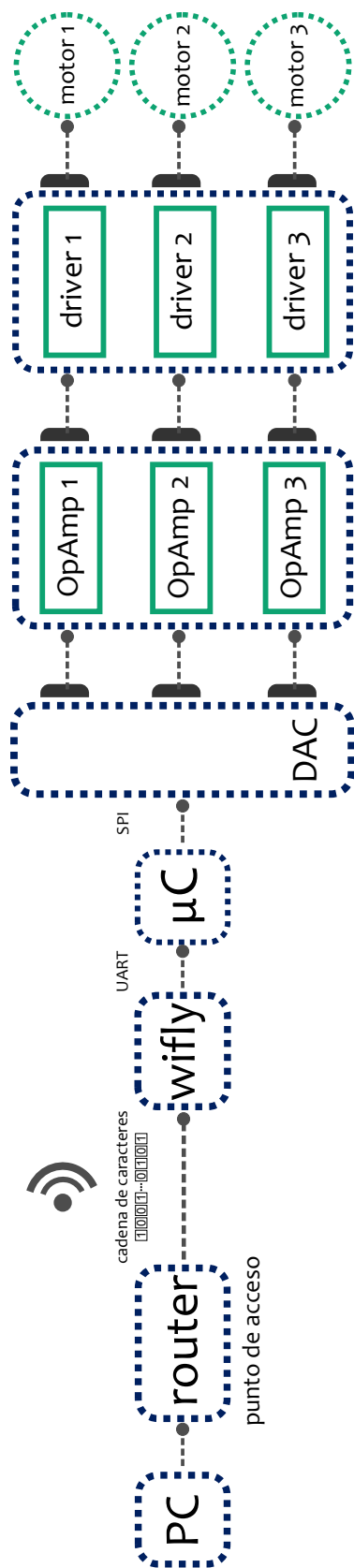


Figura 4.9: Diagrama de bloques de la instrumentación electrónica.

## Baterías

Las baterías de polímero de litio (**LiPo**) presentan actualmente las mejores características en cuanto a tamaño, peso y energía entregada. Este dispositivo es otra diferencia entre los vehículos. Cabe señalar que el robot 1 solo utilizó una batería LiPo de 11.1V de la marca **Sky LiPo** mientras que el robot 2 posee dos baterías LiPo de 7.4V de la marca **ONYX**.



Figura 4.10: Baterías utilizadas en el Robot 1 y en el Robot 2.

## 4.3. Sistema de Visión

Una de las formas más confiables de obtener la posición de un objeto es mediante cámaras dotadas de sensores ópticos infrarrojos, debido a que estos tipos de cámaras tienen menos interferencias con otras fuentes luminosas, pasando inadvertidas por los humanos. Por otro lado, los sensores ópticos infrarrojos tienen una elevada precisión y rápida respuesta aunque están limitados por el alcance de la fuente de luz. Una adecuada identificación óptica de la posición y orientación es una parte fundamental para el desarrollo de los experimentos y la generación de los algoritmos de control, por tal motivo los datos de posición y orientación deben ser obtenidos y transmitidos de la manera más precisa y rápida posible. Para lograr este objetivo se contó con el sistema de visión y sensado *Optitrack*, especializado en la obtención de captura de movimiento por medio de señales infrarrojas, desarrollado por la compañía *Natural Point*. *Optitrack* determina la posición y la orientación en un espacio tridimensional únicamente limitado por el rango de trabajo y la cantidad de dispositivos que conforman la constelación de cámaras.

El sistema de visión *Optitrack* con el cual se cuenta, está conformado de los siguientes subsistemas:

- 12 cámaras *Flex 13*.
- 2 *OptiHubs2*.
- Equipo de calibración *OptiWand*.
- Escuadra de calibración de volumen.
- Múltiples marcadores reflejantes 7/16”.

- Llave USB de licencia.
- Software *Motive*.

de los cuales, los más importantes serán descritos a continuación.

### 4.3.1. Cámara *Flex 13*

La cámara *Flex 13*, de la compañía *Natural Point*, pertenece a la gama media de un conjunto de dispositivos especializados en la captura de movimiento en tiempo real con gran resolución. La *Flex 13* ofrece esplendidas prestaciones para la captura de movimiento. La combinación de un campo de visión de  $56^\circ$  junto con una resolución de 1.3 millones de píxeles, permite a la *Flex 13* realizar seguimientos complejos de objetos. Por otro lado, la precisión que posee permite contar con un error de  $\pm 0.10mm$  en la mayoría de las aplicaciones. Una de las principales características de esta cámara es que incluye un procesador especializado para el pre-procesamiento de imágenes en tiempo real, con lo cual la cámara proporciona datos fiables y limpios al software *Motive* (de *Natural Point*), minimizando la demanda de procesamiento en la computadora de control, con lo cual es posible obtener un sistema más eficiente. La Tabla B.7 del apéndice B muestra las especificaciones de la cámara.



Figura 4.11: Flex 13 y constelación de cámaras.

### 4.3.2. *OptiHub2*

El *OptiHub2* es un concentrador multipuerto, mejor conocido como *hub*, esencial para maximizar las capacidades de cualquier sistema *Optitrack* basado en puertos USB. Ofrece una mayor y más consistente entrega de energía a un máximo de seis cámaras con el fin de mejorar el rango de seguimiento. Una de las características más importantes del *OptiHub2* es la capacidad para sincronizarse con otros *hubs* con el fin de incrementar la cantidad de cámaras en el sistema de visión. El cableado entre la cámara *Flex 13* y el *OptiHub2* tiene

una restricción de hasta 5 metros para una adecuada transmisión de datos. El apéndice B muestra las especificaciones del *OptiHub2* y la configuración usada con las cámaras *Flex 13*.



Figura 4.12: Repetidor OptiHub2.

### 4.3.3. Marcadores Reflejantes

Con el objetivo de identificar los cuerpos rígidos a sensar (Robots Móviles Omnidireccionales), la plataforma experimental utiliza un conjunto de marcadores reflejantes de señales infrarrojas configurados en patrones geométricos irregulares. Cada patrón geométrico debe de ser único con el fin de obtener una identificación de la posición y la orientación individual de cada robot en cuestión. La Figura 4.2 muestra los dos patrones geométricos utilizados en los Robots Omnidireccionales. Cada una de las configuraciones mostradas forma un cuerpo rígido en el software *Motive*, mismo que calcula su centroide para posteriormente calcular la posición y la orientación de cada robot independientemente. Por último, los marcadores tienen una medida de  $7/16''$  lo que implica que pueden ser detectados a una distancia de aproximadamente 8.53 metros con una cámara *Flex 13*.

## 4.4. Software

### 4.4.1. *Motive*

*Motive* es un software creado por *Natural Point* que sirve como una interfaz de control y recepción de datos por parte del sistema *Optitrack*. La interfaz está diseñada para realizar configuraciones principalmente para sensado de cuerpos rígidos, sensado facial y sensado de cuerpos variables, sin embargo, para los propósitos de control de formación se utilizarán únicamente las herramientas incluidas en *Motive: Tracker* para el sensado de cuerpos rígidos. Por otro lado, la principal característica de *Motive* es servir como intermediario entre el sistema de visión *Optitrack* y el programa de control de formación por medio de un servidor VRPN incorporado en el software *Motive* y que por defecto esta escuchando en el puerto 3803 y un cliente VRPN que será desarrollado y configurado en el programa para el control de formación realizado en C++. Más información es encontrada en [55].

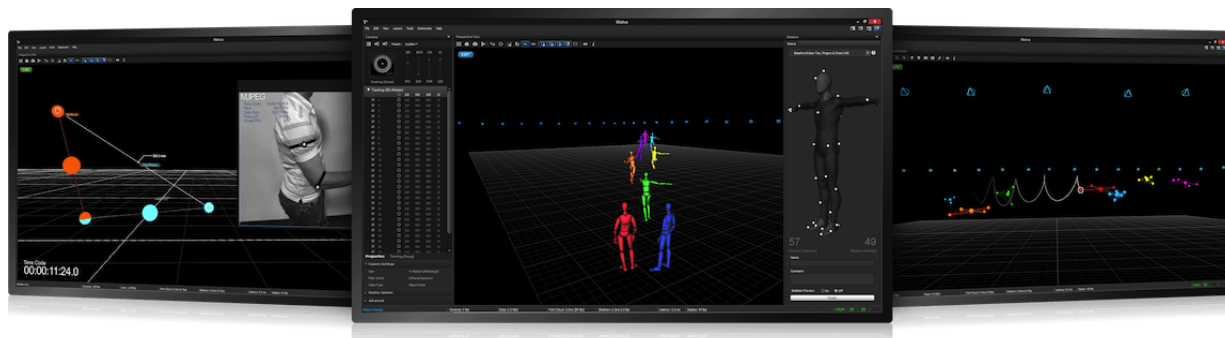


Figura 4.13: Software de captura de movimiento: Motive.

#### 4.4.2. Programa de Control

El algoritmo de control propuesto en el Capítulo 3 requiere de un periodo de muestreo rápido y constante, por tal motivo, se optó por la utilización del lenguaje de programación orientado a objetos C++, debido a que la reutilización de código por medio de clases es indispensable. Por otro lado, se usaron librerías optimizadas para el manejo de temporizadores, resolución de ecuaciones diferenciales y de cálculos vectoriales y matriciales. A continuación se detalla brevemente las capacidades de estas librerías.

##### Librería *Boost*

*Boost* es un conjunto de librerías de software libre preparadas para extender las capacidades del lenguaje de programación C++. La licencia *Boost* permite que sea utilizada en cualquier tipo de proyectos, ya sean comerciales o no. Una de las principales características de esta librería es su adaptación con las librerías estándar de C++, con lo cual se reducen los posibles errores de incompatibilidades que pudieran existir. Su diseño e implementación permiten que sea utilizada en un amplio rango de aplicaciones y en diversos sistemas operativos. Por otro lado, es importante mencionar que diez de las librerías *Boost* fueron incluidas en el nuevo estándar C++11, con lo que se prueba su eficacia y calidad. Actualmente *Boost* está conformada por más de 130 librerías individuales, incluidas las librerías de álgebra lineal, multihilos, resolución de ecuaciones diferenciales, punteros inteligentes, sockets, grafos, temporizadores, arreglos multidimensionales, puertos seriales, entre muchas otras. Para el propósito de control fueron utilizadas dos librerías de *Boost*, una para la resolución de ecuaciones diferenciales (*Odeint*) y otra para realizar un temporizador que garantizara un tiempo de muestreo de 10ms durante cada ciclo de iteración (*Chrono*).





### Librería *Eigen*

*Eigen* es una librería de alto nivel de C++ para álgebra lineal, operaciones matriciales y vectoriales, soluciones numéricas y algoritmos relacionados. *Eigen* es una librería código abierto con licencia MPL2 desde la versión 3.1.1. *Eigen* a menudo se caracteriza por su elegante API, capacidades de definir matrices fijas y dinámicas, y métodos para la solución de sistemas con matrices densas y dispersas. Para lograr un alto rendimiento, *Eigen* utiliza vectorización explícita del conjunto de instrucciones de los procesadores SSE 2/3/4, ARM NEON y Altivec, por mencionar algunos.



# Capítulo 5

## Resultados Experimentales

### 5.1. Introducción

Los resultados que serán presentadas a continuación muestran el comportamiento de la ley de control para el caso de simulaciones numéricas y los experimentos realizados en la plataforma experimental. Se hace una comparación entre los resultados logrados en la simulación y los obtenidos en tiempo real con el fin de analizar desde una forma más objetiva las diferencias entre la abstracción de un modelo matemático para la realización de simulaciones numéricas y la utilización de sistemas físicos donde las dinámicas que no fueron modeladas juegan un papel muy importante en la validación del algoritmo de control propuesto, debido a que actúan como perturbaciones al sistema y no es posible eliminar estas no linealidades. Sin embargo, como se verá a continuación el control propuesto cumple con su propósito, y lleva a los errores involucrados al origen.

### 5.2. Aplicación Numérica y Práctica

La evaluación experimental del controlador se realizó en la plataforma experimental descrita en el Capítulo 4, por otro lado, el algoritmo de control propuesto fue comparado por medio de una simulación numérica a través del software Simulink<sup>®</sup> integrado en MATLAB<sup>®</sup>, en el cual se introdujeron los mismos parámetros de diseño conforme fue realizado cada experimento. Los parámetros del modelo dinámico de cada uno de los robots se enlistan en la Tabla 5.1.

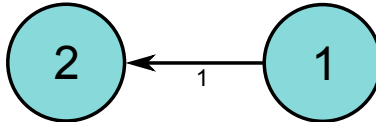


Figura 5.1: Gráfica inducida por la topología de comunicación

<i>Parámetro</i>	<b>Robot 1</b>	<b>Robot 2</b>
$M_p$	1.676 kg	2.626 kg
$I_r$	0.0009 kg · m <sup>2</sup>	0.0009 kg · m <sup>2</sup>
$I_p$	0.35 kg · m <sup>2</sup>	0.35 kg · m <sup>2</sup>
$L$	0.148 m	0.151 m
$r$	0.0349 m	0.0349 m
$\delta$	$\pi/6$ rad	$\pi/6$ rad

Tabla 5.1: Parámetros de los vehículos.

### 5.2.1. Experimento #1

Como primer experimento se consideró un grupo de dos vehículos siguiendo trayectorias circulares. La trayectoria deseada para el PRF está dada por,

$$\eta_d(\theta) = \begin{pmatrix} x_d(\theta) \\ y_d(\theta) \\ \psi_d(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos\left(\frac{2\pi\theta}{30}\right) \\ R \sin\left(\frac{2\pi\theta}{30}\right) \\ -\frac{2}{5}\theta \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

donde  $R = 0.8$ . Al sustituir cada uno de los vehículos su propia variable de trayectoria  $\theta_i$  en la ecuación (3.1), es posible obtener la trayectoria deseada para cada uno de los agentes, de la siguiente forma,

$$\eta_{di}(\theta_i) = \eta_d(\theta) + R(\theta_i) l_i$$

donde los vectores de designación son  $l_1 = [0, -0.2, 0]$  y  $l_2 = [0, -0.6, 0]$ . Los parámetros del controlador son:  $A_{1,1} = \text{diag}(-0.031, -0.026, -0.05)$ ,  $A_{1,2} = \text{diag}(-2.8, -2.9, -2.0)$ ,  $A_{2,1} = \text{diag}(-0.112, -0.112, -0.2)$ ,  $A_{2,2} = \text{diag}(-2.8, -2.8, -2.0)$ ,  $P_{1,1} = \text{diag}(16.071, 18.965, 10.0)$ ,  $P_{1,2} = \text{diag}(0.178, 0.172, 0.25)$ ,  $P_{2,1} = \text{diag}(4.464, 4.464, 2.5)$ ,  $P_{2,2} = \text{diag}(0.178, 0.178, 0.25)$ ,  $v(t) = 0.22$ . La topología de la información está dada por  $D = [-1, 1]^T$  —ver Figura 5.1. Además, la información proporcionada por los vectores de designación harán que el centroide del robot 1 deba estar a una distancia de 0.4 m del centroide del robot 2 al llegar al acuerdo grupal. Las condiciones iniciales de las variables de trayectoria son:  $\theta_1(0) = 1$ ,  $\theta_2(0) = 2$ .

Por otro lado, en la Tabla 5.2 se muestran las condiciones iniciales de posición, orientación y velocidad en este experimento para los dos robot móviles omnidireccionales.

	<i>Condiciones iniciales (posición y orientación)</i>			<i>Condiciones iniciales (velocidades)</i>		
<b>Robot 1</b>	$x_1(0)$ 0.1416 m	$y_1(0)$ 0.0266 m	$\psi_1(0)$ -0.6812 rad	$\dot{x}_1(0)$ 0 m/s	$\dot{y}_1(0)$ 0 m/s	$\dot{\psi}_1(0)$ 0 m/s
<b>Robot 2</b>	$x_2(0)$ 1.1182 m	$y_2(0)$ -0.2184 m	$\psi_2(0)$ -1.7049 rad	$\dot{x}_2(0)$ 0 m/s	$\dot{y}_2(0)$ 0 m/s	$\dot{\psi}_2(0)$ 0 m/s

Tabla 5.2: Condiciones iniciales - Experimento #1.

El experimento tanto en simulación como en tiempo real tiene una duración de aproximadamente 42 segundos, dentro de los cuales los robots convergen desde sus condiciones iniciales a sus trayectorias deseadas en un tiempo máximo aproximado de 5 segundos.

El objetivo del experimento es verificar la propiedad de sincronización del controlador propuesto. Solo las variables de trayectoria  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son necesarias para asegurar sincronización, por lo tanto, solo dos señales son comunicadas entre los sistemas independientes de control durante el experimento. La gráfica de posición resultante es mostrada en la Figura 5.2. La gráfica muestra como los dos vehículos convergen a sus trayectorias deseadas. Este mismo resultado puede observarse en las gráficas de la Figura 5.3, donde se muestra como los errores de posición  $z_{i,1_x} = x_i - x_{id}$ ,  $z_{i,1_y} = y_i - y_{id}$  convergen al origen, también es posible observar como el error de orientación en  $z_{i,1_\psi} = \psi_i - \psi_{id}$  converge de la misma manera. Las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 corresponden a los perfiles de velocidad en  $x_i$ ,  $y_i$  y  $\psi_i$ , respectivamente. Nótese la similitud de los perfiles con las velocidades deseadas, por lo cual es posible deducir la convergencia de estos estados. Es importante mencionar que para lograr retroalimentación de la velocidad se utilizó un método de diferenciación numérica. En la Figura 5.7 se exponen los controles virtuales derivados del algoritmo de control basado en *backstepping*, es posible observar la afinidad existente entre la simulación y el resultado del experimento en tiempo real, en ambos casos, los controles virtuales son suaves y acotados. Una de las diferencias más grandes entre los resultados de simulación y los experimentales se puede observar en la Figura 5.8, donde se muestran los torques de control reales, en ambos casos acotados pero de magnitudes distintas, esto por el hecho de no haber considerado las fuerzas de fricción existentes en cada uno de los robots móviles, así como, las dinámicas no modeladas y las perturbaciones externas. Por último, la Figura 5.9 demuestra la convergencia del error de sincronización en un tiempo máximo aproximado de 5 segundos, haciendo que  $\omega_i$  tienda a cero y por consiguiente  $\dot{\theta}_i$  sea igual a  $v(t)$ . Después que la sincronización ha ocurrido, los vehículos se mueven paralelos entre sí.

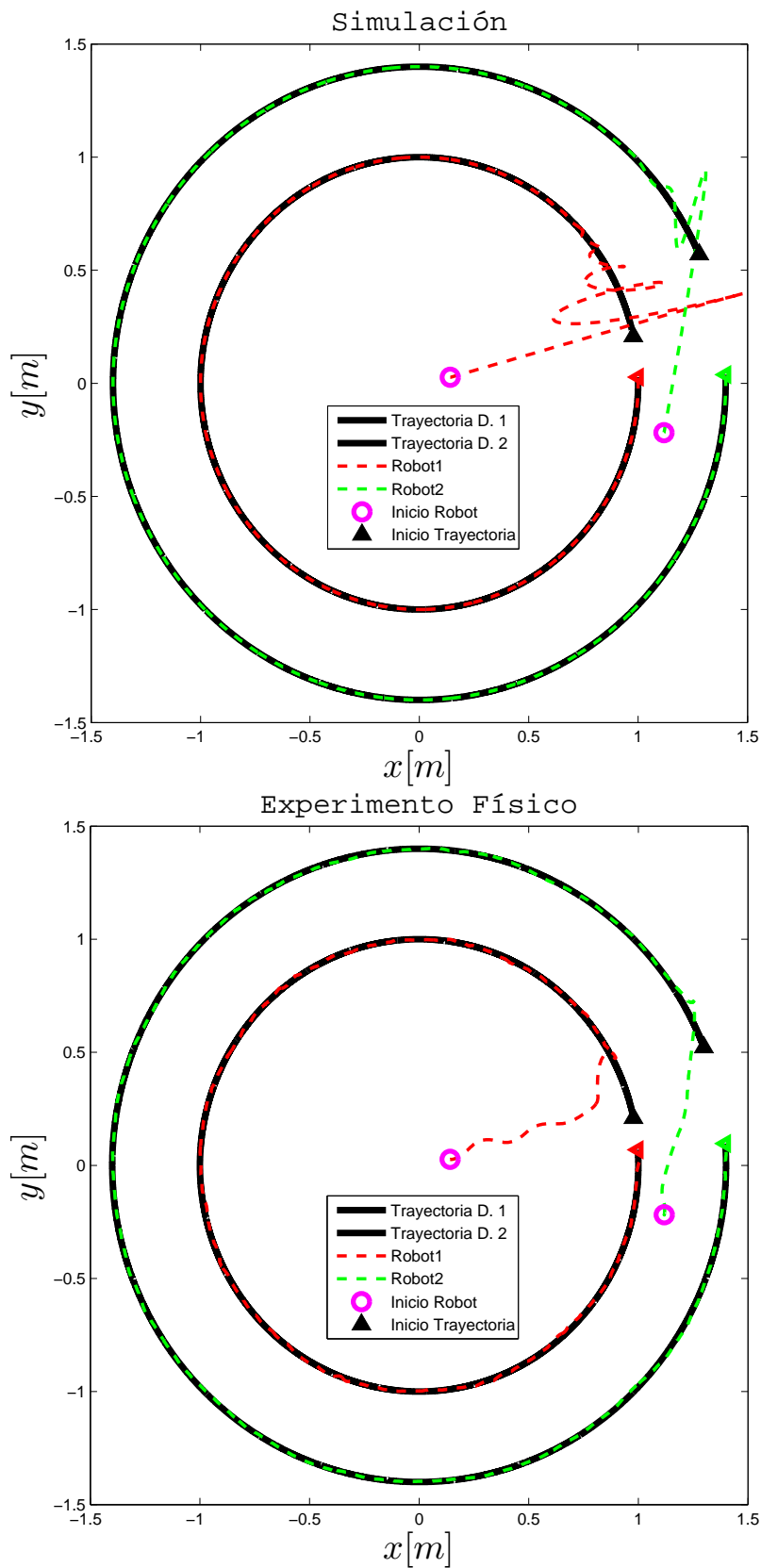
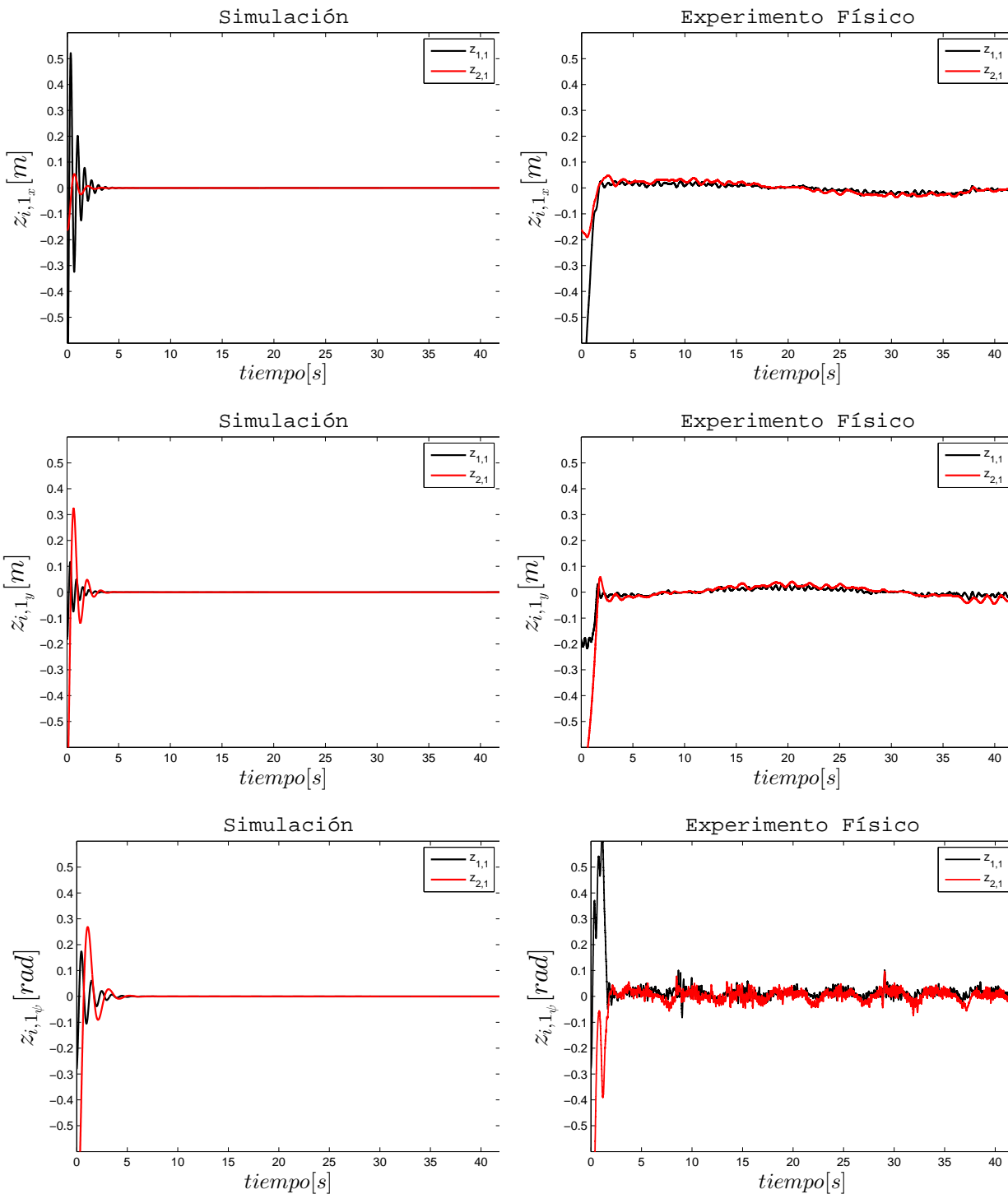


Figura 5.2: Trayectoria real vs trayectoria deseada.

Figura 5.3: Errores en  $z_{i,1}$ .

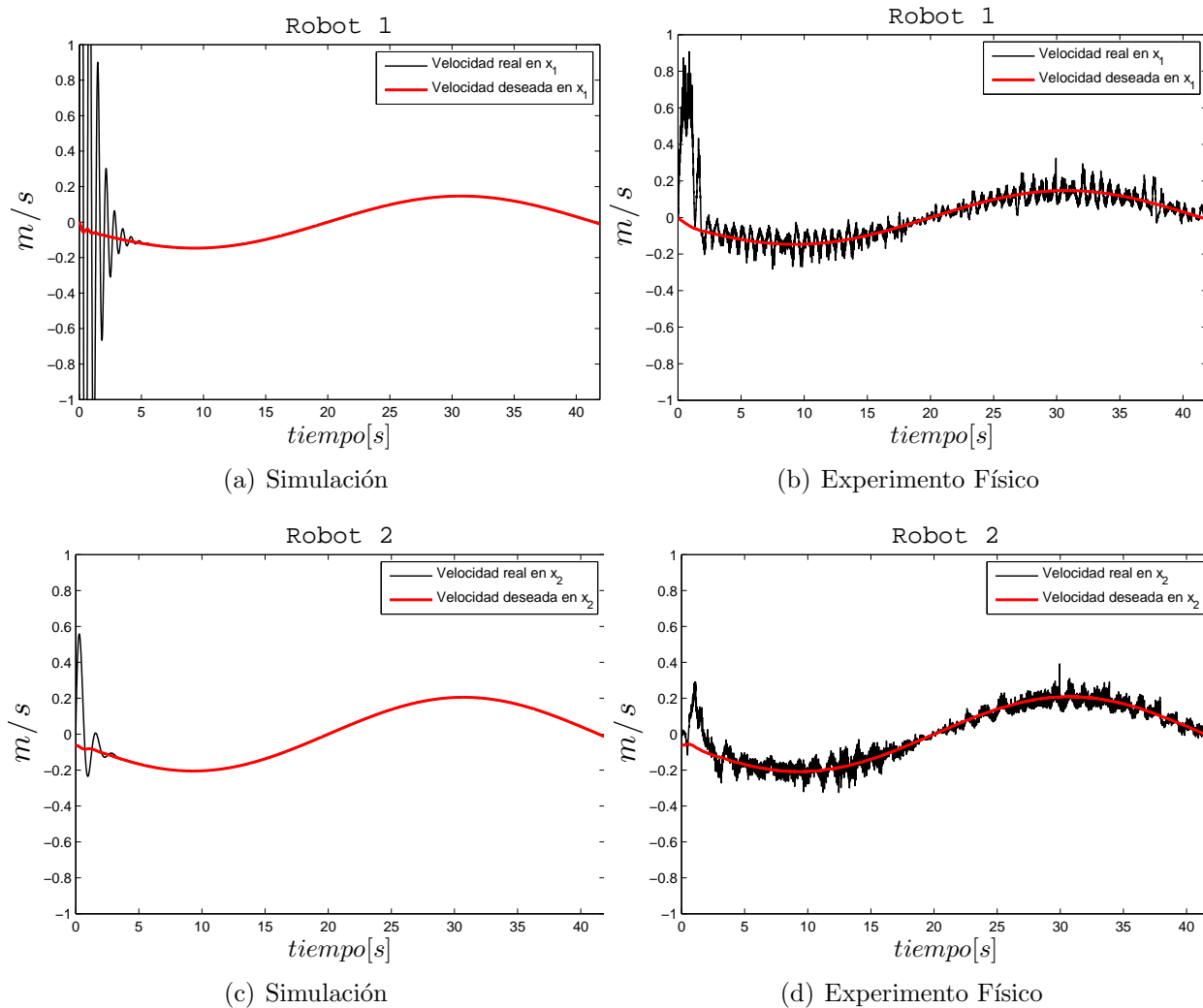
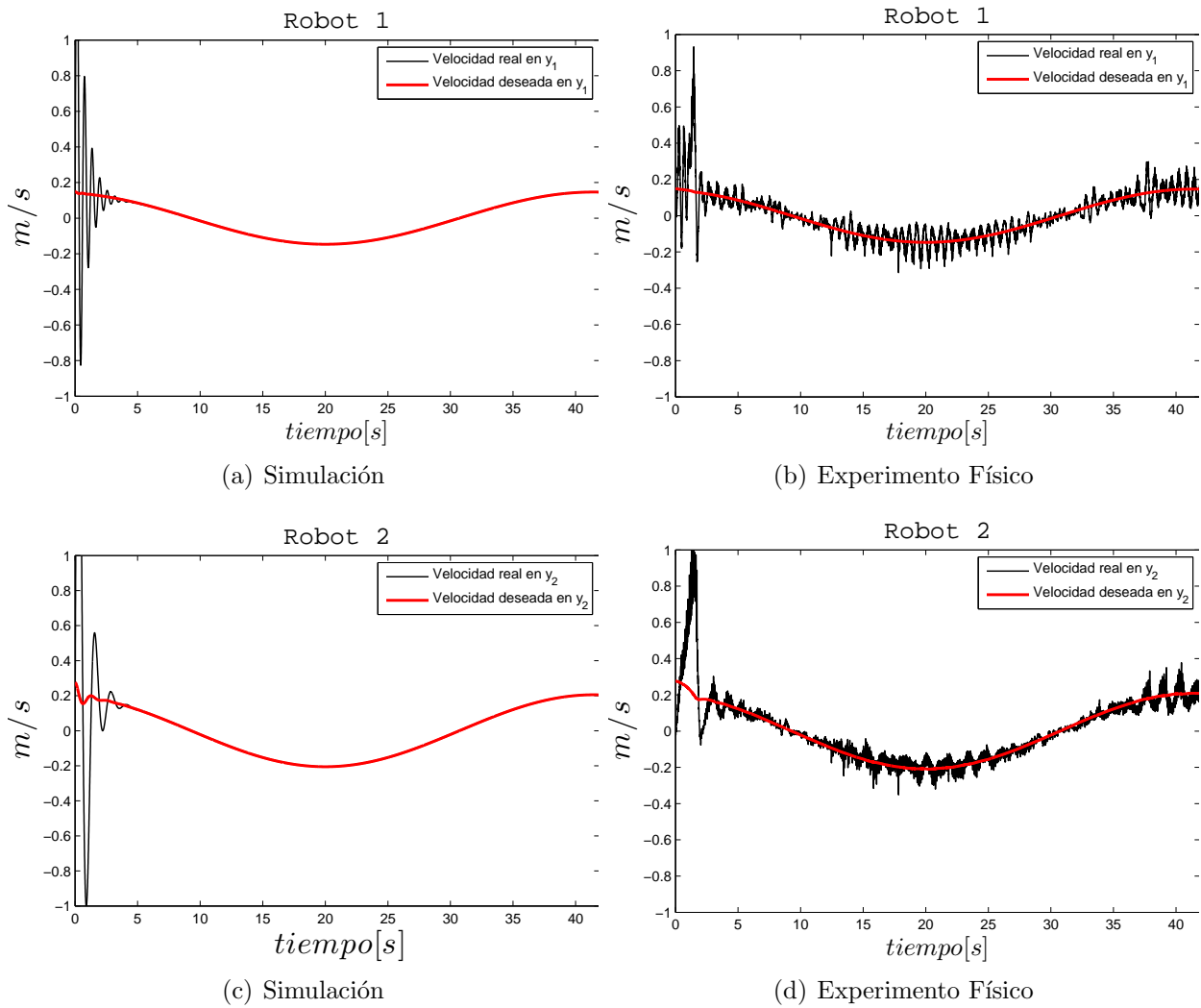


Figura 5.4: Velocidad en  $x_i$ .



Figura 5.5: Velocidad en  $y_i$ .

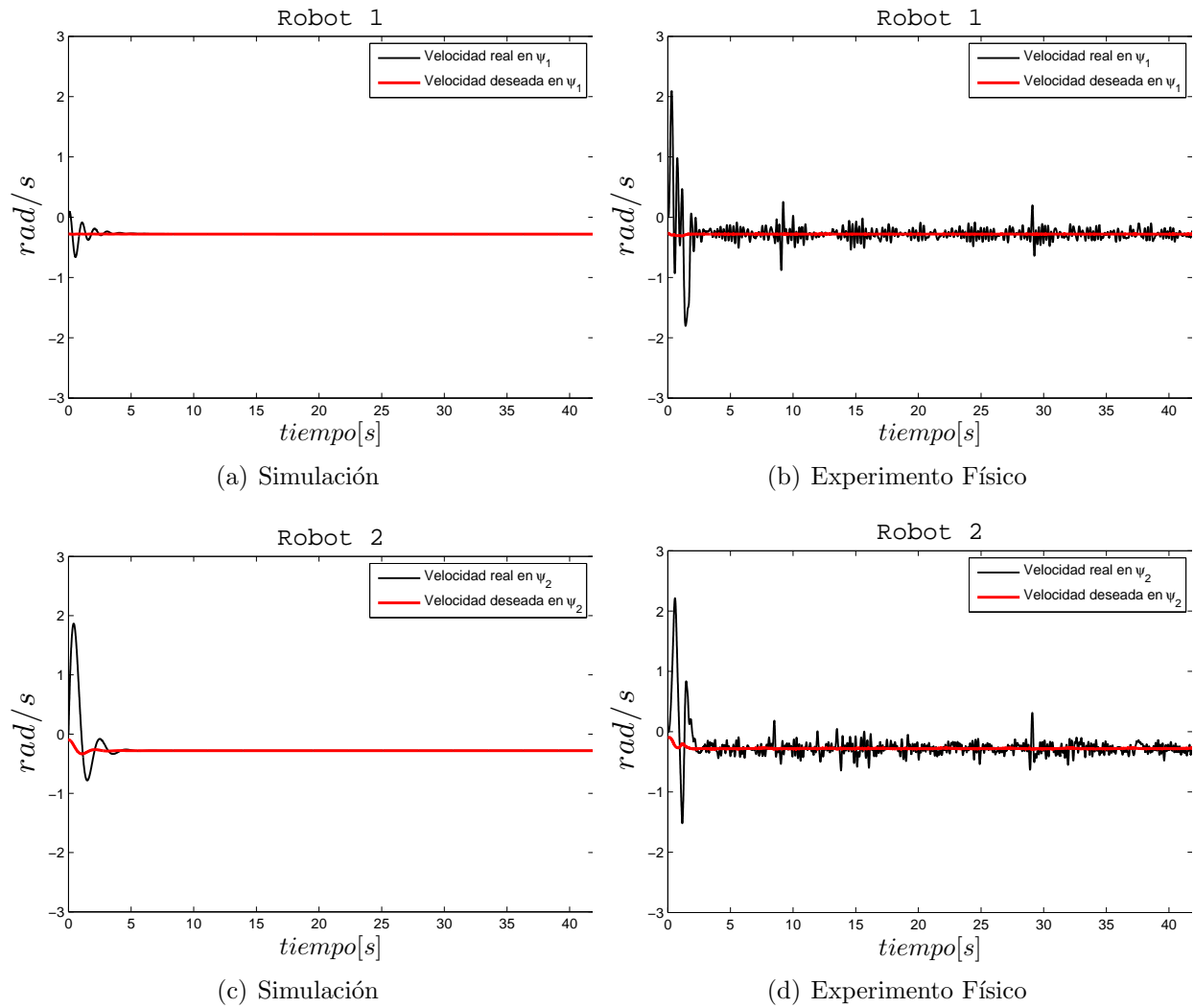
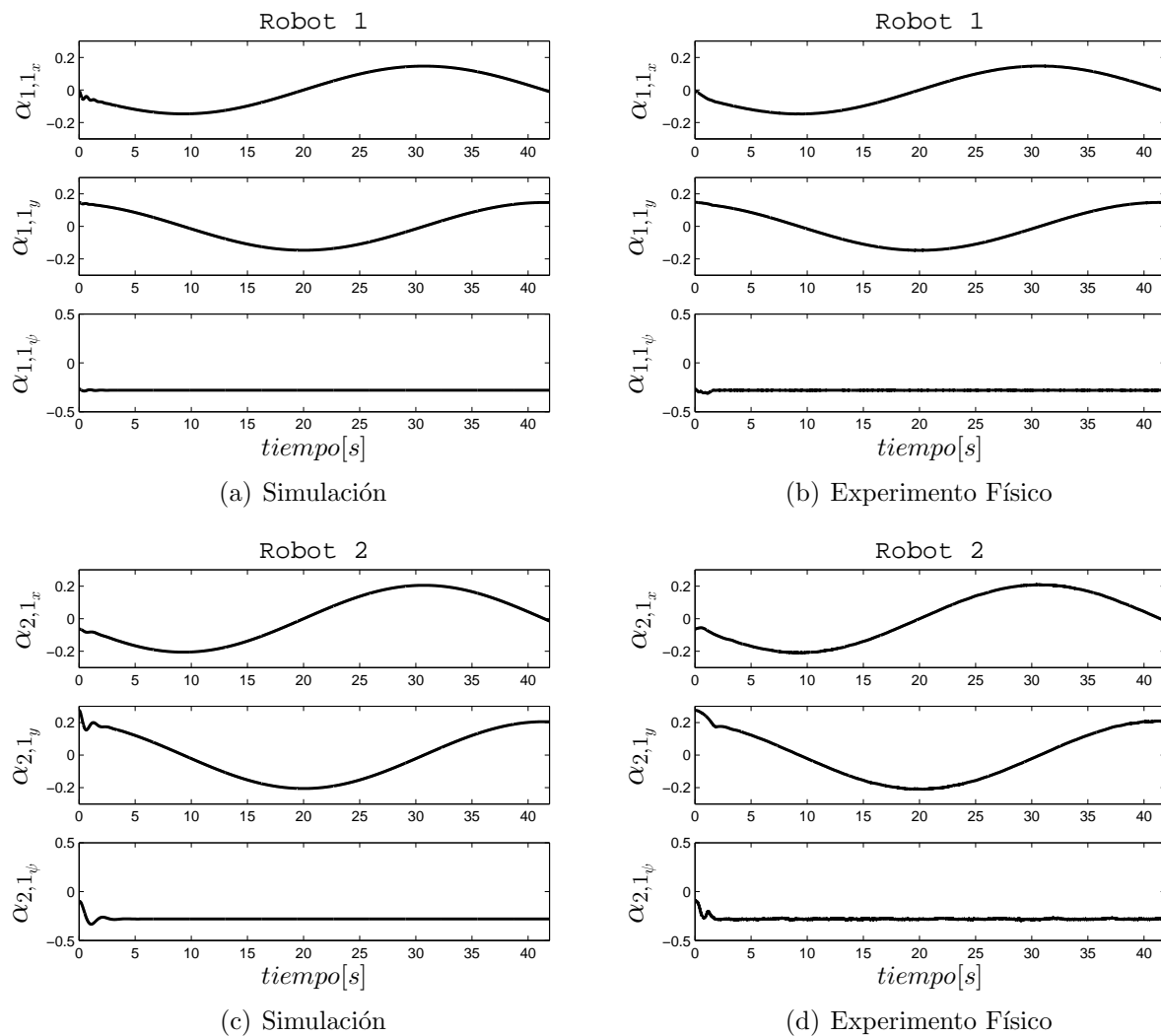


Figura 5.6: Velocidad en  $\psi_i$ .

Figura 5.7: Controles Virtuales  $\alpha_{i,1}$ .

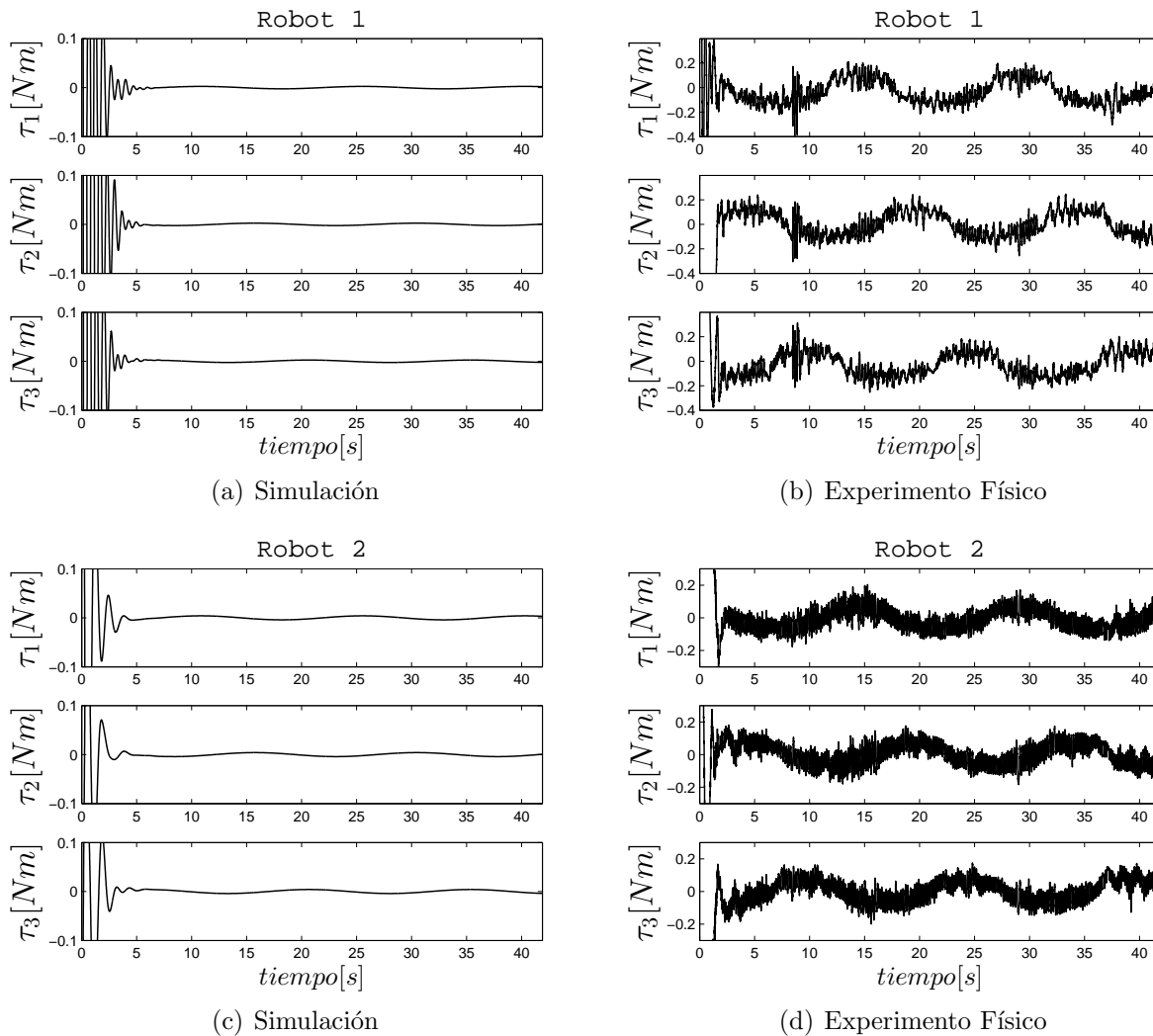


Figura 5.8: Controles Reales  $\tau_i$ .

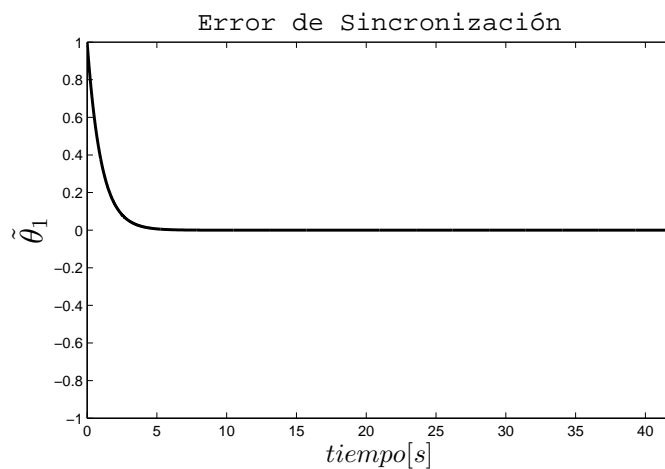


Figura 5.9: Error de sincronización  $\tilde{\theta}_1 = \theta_2 - \theta_1$ .

### 5.2.2. Experimento #2

El segundo experimento considera nuevamente un grupo de dos vehículos, esta vez siguiendo trayectorias tipo flor de tres pétalos. La trayectoria deseada para el PRF está dada por,

$$\eta_d(\theta) = \begin{pmatrix} x_d(\theta) \\ y_d(\theta) \\ \psi_d(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos\left(\frac{\pi\theta}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi\theta}{15}\right) \\ R \cos\left(\frac{\pi\theta}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi\theta}{15}\right) \\ -0.4\theta \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

donde  $R = 1.0$ . En esta prueba, los vectores de designación fueron definidos como  $l_1 = [0, 0, 0]$  y  $l_2 = [0, -0.4, 0]$ , lo cual significa que el PRF coincide con el robot 1. Por otro lado, los parámetros  $A_{i,1}$ ,  $A_{i,2}$ ,  $P_{i,1}$  y  $P_{i,2}$  del controlador son los mismo que para el experimento #1. En este experimento, la asignación de velocidad  $v(t) = 0.1572$  y las condiciones iniciales de las variables de trayectoria son:  $\theta_1(0) = 1$ ,  $\theta_2(0) = 2$ , del mismo modo que en el experimento #1, la Tabla 5.3 muestra las condiciones iniciales de posición, orientación y velocidad para los dos robot móviles omnidireccionales.

	<i>Condiciones iniciales (posición y orientación)</i>			<i>Condiciones iniciales (velocidades)</i>		
<b>Robot 1</b>	$x_1(0)$ 0.0869 m	$y_1(0)$ 0.0066 m	$\psi_1(0)$ -0.4656 rad	$\dot{x}_1(0)$ 0 m/s	$\dot{y}_1(0)$ 0 m/s	$\dot{\psi}_1(0)$ 0 m/s
<b>Robot 2</b>	$x_2(0)$ 1.0156 m	$y_2(0)$ -0.4323 m	$\psi_2(0)$ 0.1642 rad	$\dot{x}_2(0)$ 0 m/s	$\dot{y}_2(0)$ 0 m/s	$\dot{\psi}_2(0)$ 0 m/s

Tabla 5.3: Condiciones iniciales - Experimento #2.

Al igual que en el experimento #1, la duración total de la prueba es de aproximadamente 42 segundos.

La Figura 5.10 muestra el comportamiento del robot en el plano. Los errores de posición  $z_{i,1_x}$ ,  $z_{i,1_y}$  y de orientación  $z_{i,1_\psi}$  se exhiben en la Figura 5.11, donde se observa como convergen al origen. Las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14 corresponden a los perfiles de velocidad en  $x_i$ ,  $y_i$  y  $\psi_i$ , respectivamente. En la Figura 5.15 se pueden observar los controles virtuales suaves y acotados. La Figura 5.16 muestra los torques de control reales, acotados tanto en simulación como en tiempo real pero con magnitudes diferentes, debido a no haber considerado las fuerzas de fricción existentes entre las ruedas y la superficie de contacto, así como, las dinámicas no modeladas y las perturbaciones externas. Por último, en la Figura 5.17 se observa la convergencia del error de sincronización en un máximo aproximado de 5 segundos, dando como resultado la solución del problema de formación.

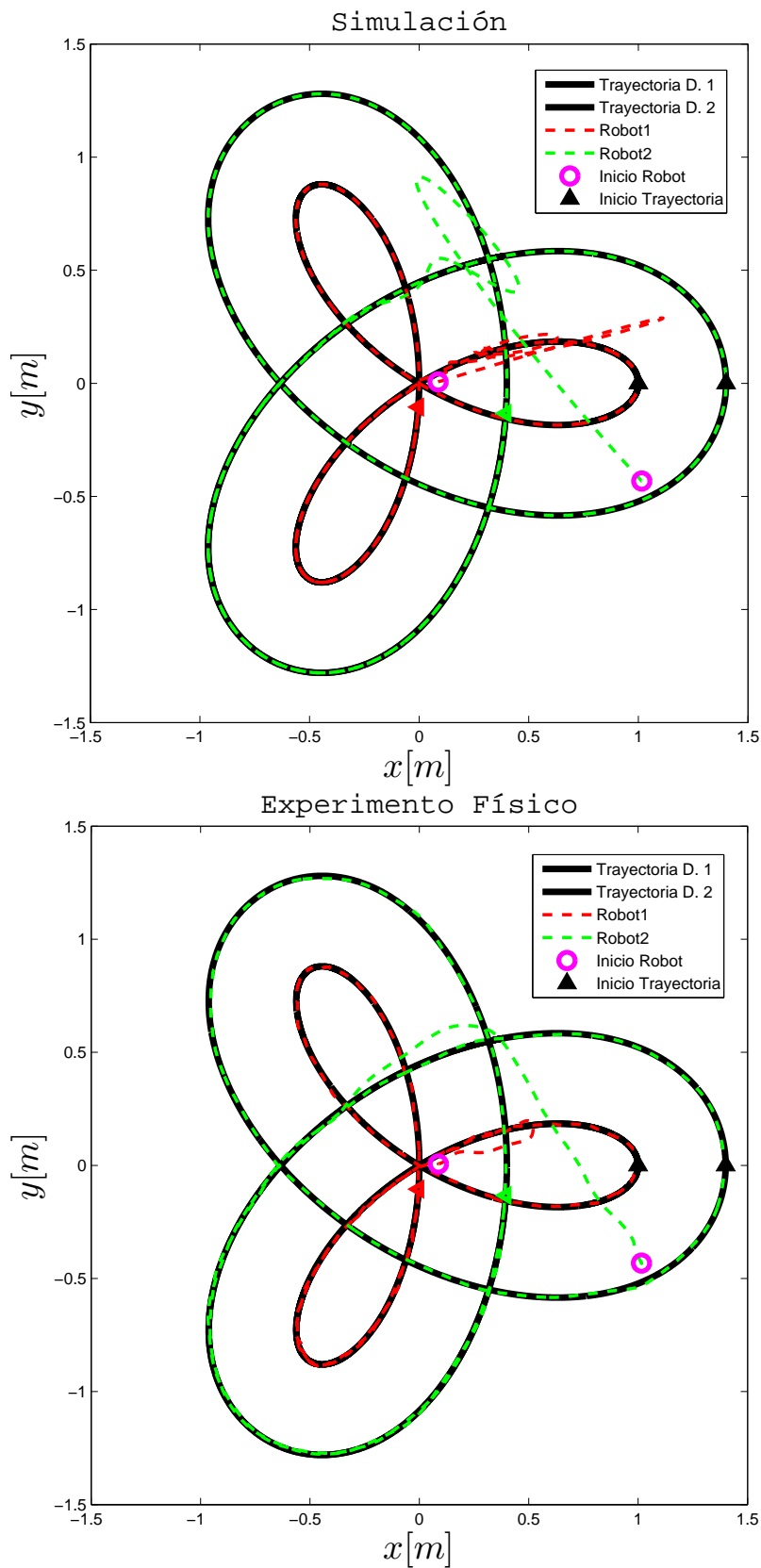
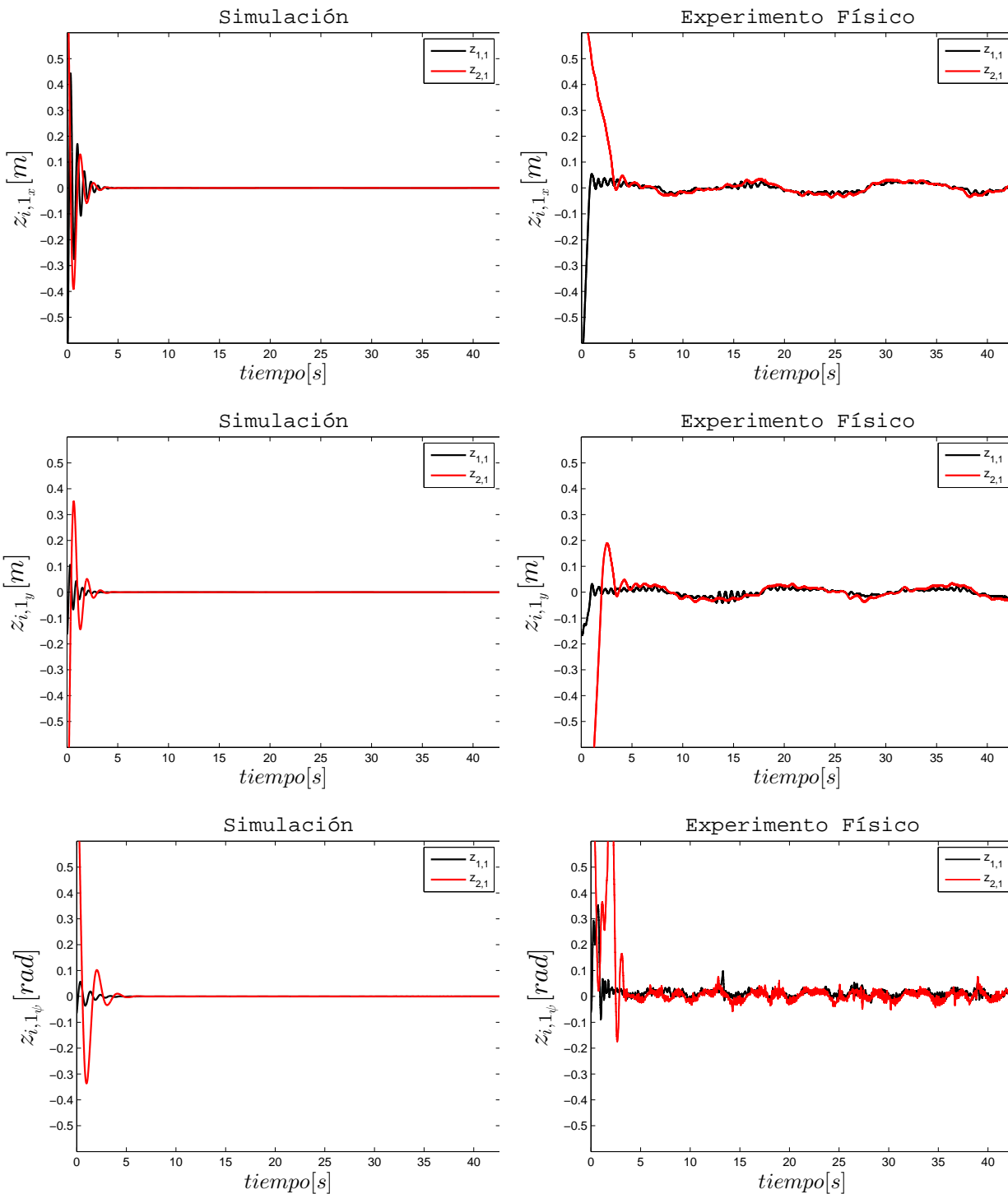


Figura 5.10: Trayectoria real vs trayectoria deseada.

Figura 5.11: Errores en  $z_{i,1}$ .

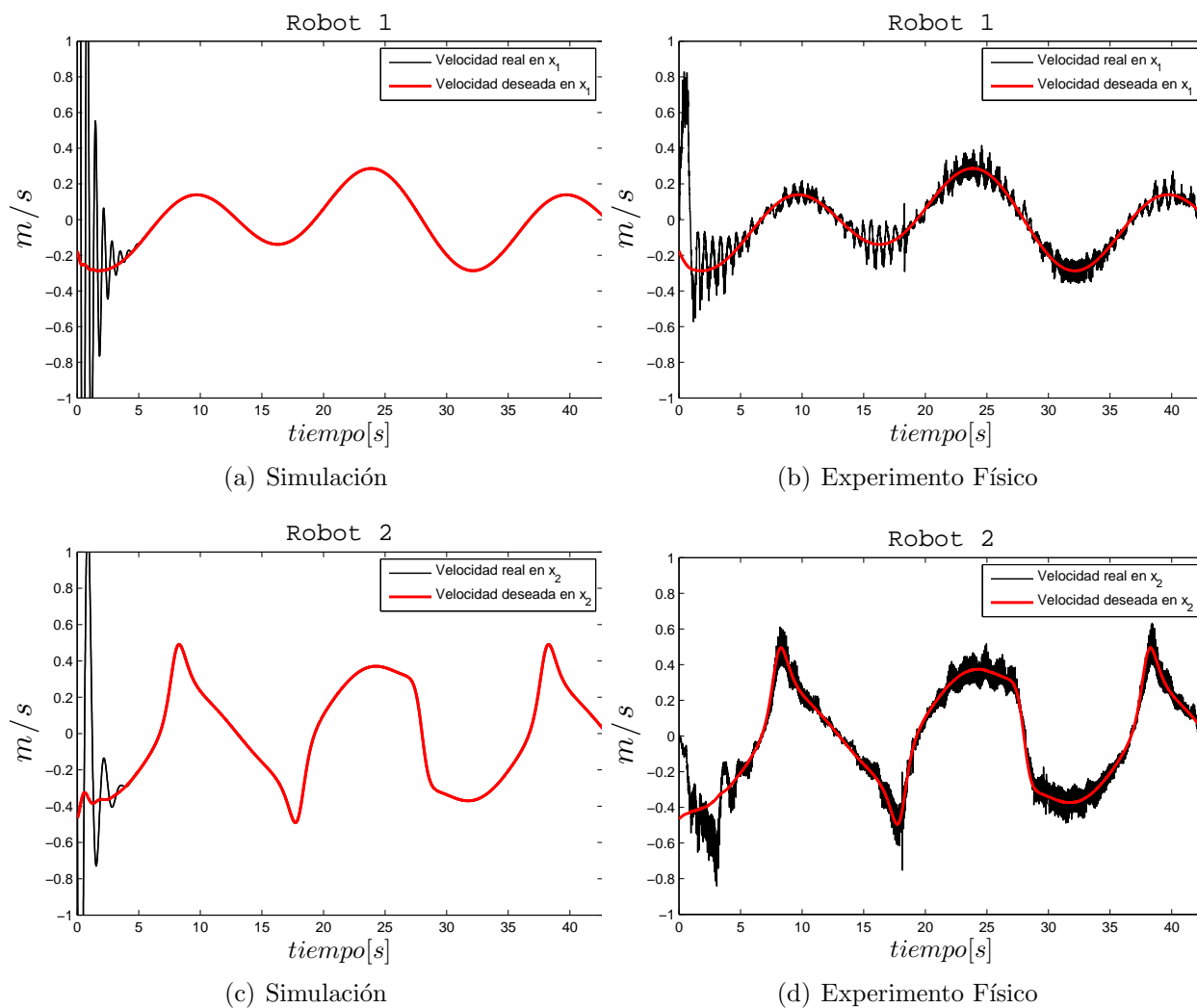
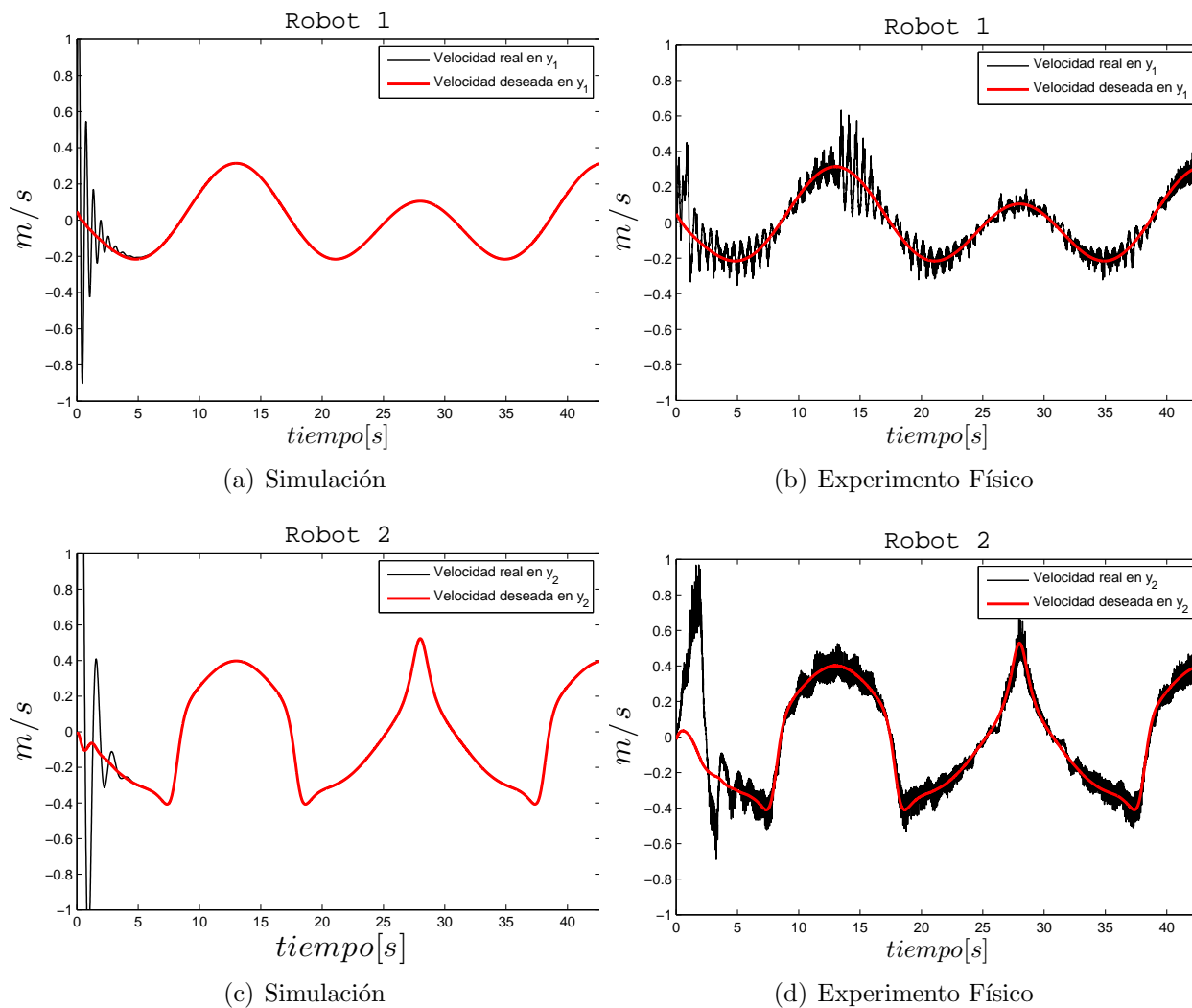


Figura 5.12: Velocidad en  $x_i$ .



Figura 5.13: Velocidad en  $y_i$ .

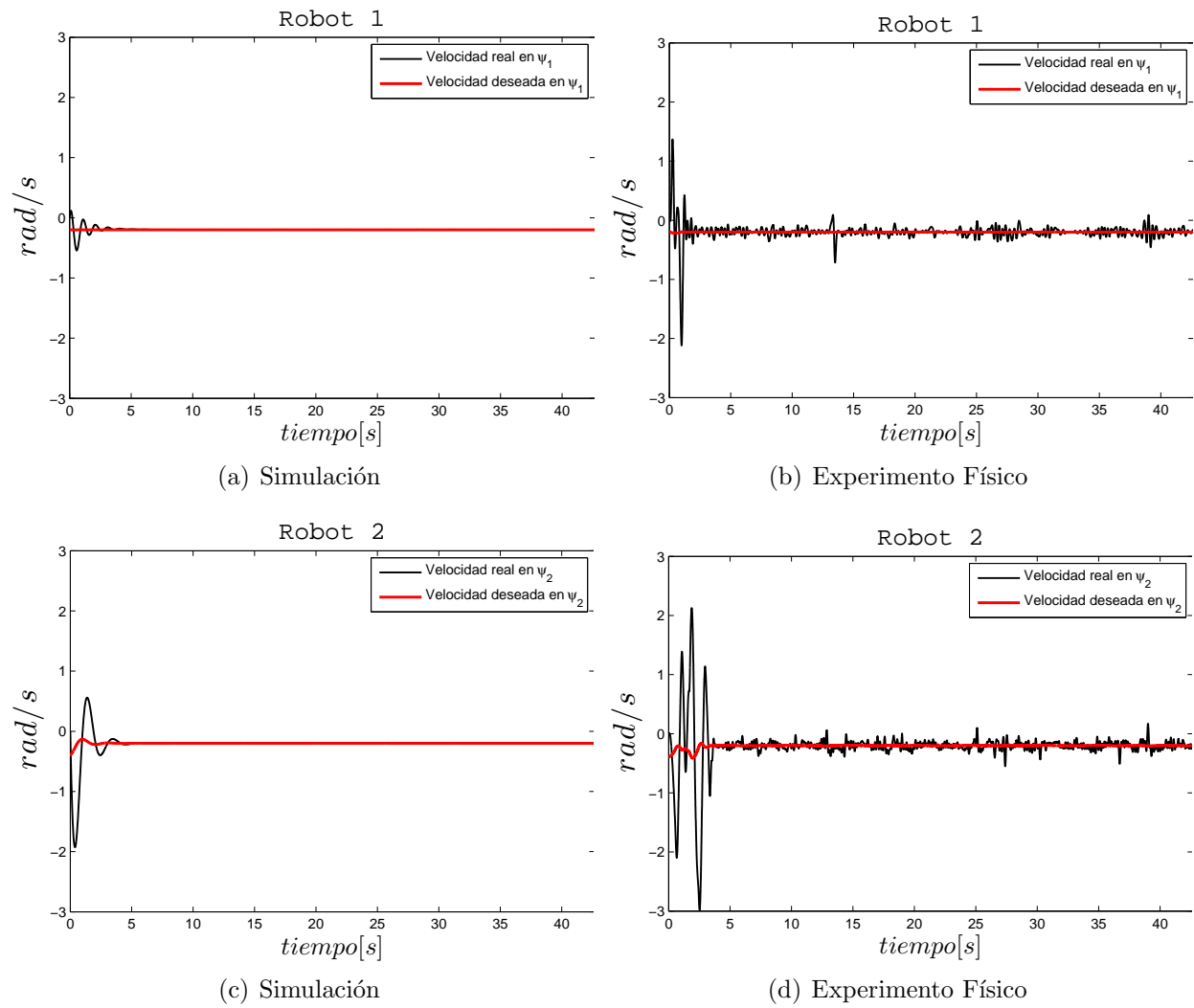
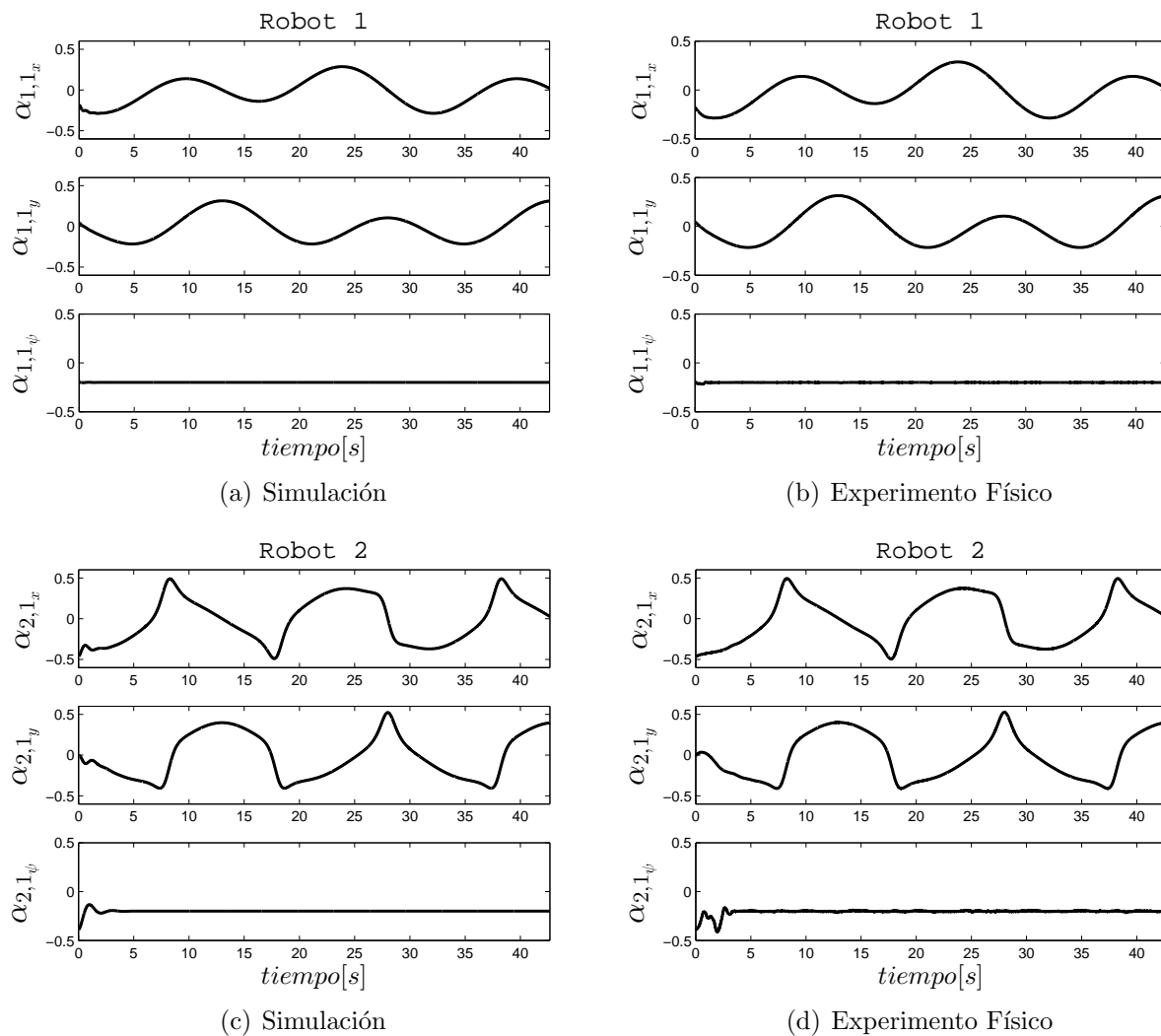


Figura 5.14: Velocidad en  $\psi_i$ .

Figura 5.15: Controles Virtuales  $\alpha_{i,1}$ .

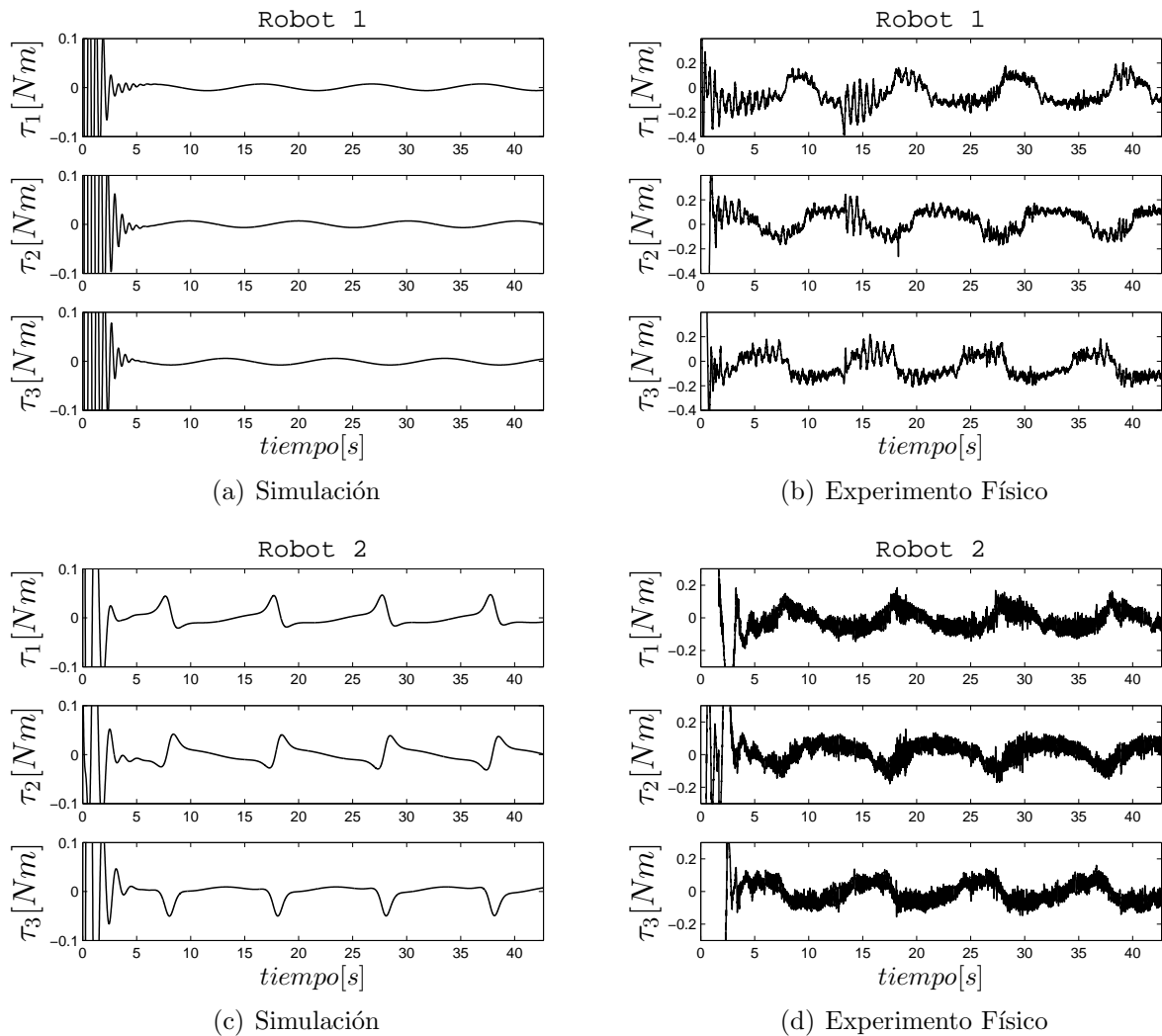


Figura 5.16: Controles Reales  $\tau_i$ .

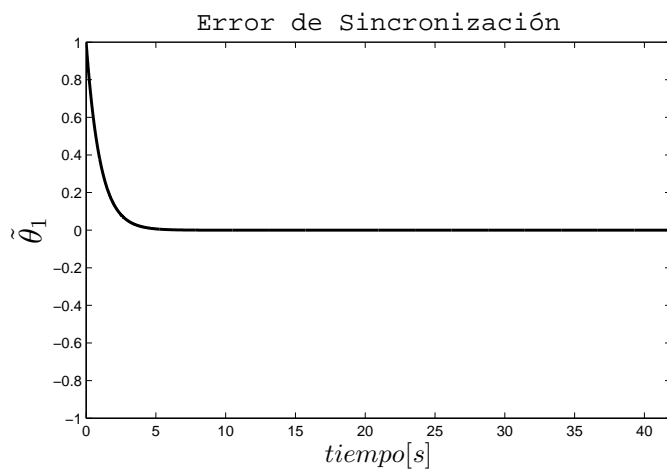


Figura 5.17: Error de sincronización  $\tilde{\theta}_1 = \theta_2 - \theta_1$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones y perspectivas

### 6.1. Conclusiones

Esta tesis ha considerado el control coordinado de un grupo de robots móviles omnidireccionales descritos por medio de su modelo dinámico, con lo cual se muestra como el objetivo de sincronización puede ser alcanzado obteniendo una adecuada convergencia de los errores de seguimiento y sincronización involucrados.

Se usaron propiedades de pasividad para diseñar un esquema de control de formación donde sistemas PF son sincronizados usando una estructura de comunicación bidireccional.

La estrategia de control fue evaluada mediante experimentos en simulación y posteriormente se realizaron pruebas en una plataforma experimental, en la cual se comprobó la efectividad del algoritmo de control. Tanto en simulaciones como en experimentos en tiempo real, los errores involucrados convergen a cero de manera asintótica en un corto periodo de tiempo. Por lo tanto, es posible decir, que los resultados obtenidos fueron satisfactorios.

Uno de las ventajas más importantes de este tipo de esquemas, es tener un control local e individual para cada agente, con lo cual, no es necesario compartir grandes cantidades de información. En este caso, solamente una variable es transmitida de un vecino a otro. Por otro lado, todos los agentes siguen su propia trayectoria deseada, haciendo con esto un control lo más descentralizado posible, en vez de seguir versiones transformadas de los estados, como en el esquema líder-seguidor, por mencionar alguno.

Una de las virtudes de controlar sistemas basados en modelos dinámicos es el ahorro de energía en la ejecución, así como el poder hacer seguimiento de trayectorias más rápidas y complejas, en contraste con los controles basados en modelos cinemáticos donde estos propósitos son muy difíciles de lograr debido a que no se toman en cuenta las dinámicas del sistema.

Uno de los aspectos más importantes en este trabajo, es la falta de consideración de las fuerzas de fricción existentes, sin embargo, se pudo verificar el correcto funcionamiento del controlador, así como la robustez que se tiene ante estas incertidumbres, perturbaciones

existentes y errores de medición. Cabe mencionar que los pequeños errores existentes se deben en gran medida a las fuerzas de fricción no modeladas, así como, al uso de métodos aproximados de diferenciación numérica.

El control coordinado sigue siendo un campo de investigación en rápido desarrollo. Las investigaciones futuras deberían facilitar la aplicación de los resultados teóricos a ser verificados experimentalmente. Un paso importante es hacer frente a estos temas y matemáticamente garantizar que un grupo de sistemas, sujetos a una amplia gama de problemas prácticos, puedan cooperar para resolver un problema que está fuera del alcance de un solo sistema. Por otro lado, la tolerancia a fallas también debe ser considerada para mejorar la robustez.

## 6.2. Perspectivas

Como trabajo futuro se plantean los siguientes puntos:

- La realización de un control embebido para cada agente involucrado, dotando a los vehículos de *encoders* y sistemas de visión independientes para el cálculo de la posición y la velocidad.
- Incluir la evasión de obstáculos.
- Experimentar con más vehículos o incluir otro tipo de robot para la realización de control de formación para sistemas heterogéneos.
- Llevar estas leyes de control propuestas a sistemas cooperativos industriales.
- Incluir parte de las dinámicas no modeladas en el sistema o proponer un control robusto insensible a algunas incertidumbres particulares.
- Modelar la fricción entre las ruedas y la superficie de contacto.
- La inclusión de un bloque dinámico en vez de uno estático en la parte de sincronización para la implementación de filtros y así mejorar el rendimiento y la robustez de cada sistema.

# Apéndice A

## Especificaciones de los motores de corriente continua

### A.1. Motor EMG30

El EMG30 (motor, encoder, caja de reducción 30:1) es un motor de 12V totalmente equipado con encoders y una caja de engranes con reducción 30:1. Es ideal para aplicaciones robóticas pequeñas o medianas, suministrando una efectiva tracción y retroalimentación para el usuario. También incluye un capacitor supresor de ruido a través del embobinado del motor.

<i>Especificación</i>	
Voltaje nominal	12V
Torque nominal	1.5kg/cm
Velocidad nominal	170rpm
Corriente nominal	530mA
Velocidad sin carga	216rpm
Corriente sin carga	150mA
Corriente de paro	2.5A
Potencia nominal	4.22W

Tabla A.1: Especificaciones motor EMG30.

### A.2. Motor maxon *A-max 22*

Los motores A-max de maxon constituye una innovadora gama de motores de corriente continua de excelente calidad, equipados con potentes imanes permanentes de AlNiCo. El

“Alma” del motor es el bobinado maxon, carente de hierro y probado millones de veces. Esto supone una tecnología punta para motores compactos, potentes y de baja inercia.

<b><i>Especificación</i></b>	
Voltaje nominal	6V
Velocidad sin carga	9250rpm
Corriente sin carga	83.2mA
Velocidad nominal	5550rpm
Torque nominal	5.82mNm
Corriente nominal	1.06A
Corriente de paro	2.73A
Eficiencia	65 %

Tabla A.2: Especificaciones motor maxon 250443.



# Apéndice B

## Especificaciones de los dispositivos electrónicos

### B.1. Especificaciones del servoamplificador AZB10A4

El servoamplificador AZB10A4 está diseñado para controlar motores de corriente continua con y sin escobillas a una alta frecuencia de conmutación. El AZB10A4 está totalmente protegido contra sobretensiones, bajas tensiones, sobrecorrientes, sobrecalentamientos, y cortos circuitos. Una salida digital indica el estado de operación. El servoamplificador interactúa con controladores que tienen una salida de  $\pm 10V$ .

<i>Especificación</i>	
Rango del voltaje de alimentación	$10 - 36 V_{dc}$
Corriente de salida máxima continua	$5A$
Potencia de salida máxima continua	$171W$
Mínima inductancia de carga	$100\mu H$
Frecuencia de conmutación	$40kHz$
Fuentes de referencia	$\pm 10V$ analógicos
Métodos de conmutación	Trapezoidal
Modos de operación	Corriente
Motores soportados	Trifásicos y monofásicos

Tabla B.1: Especificaciones servoamplificador AZB10A4.

## B.2. Especificaciones del servoamplificador LSC 30/2

El LSC 30/2 es un servoamplificador lineal de 4 cuadrantes para el control de motores de corriente continua de imanes permanentes hasta  $50W$ . Dispone de los siguientes modos de funcionamiento:

- Control de velocidad IxR.
- Regulador de voltaje.
- Control de velocidad con encoder.
- Control de velocidad con tacodinamo.
- Control de par o corriente.

El modo de funcionamiento requerido es fácilmente de seleccionar usando un microinterruptor.

Hay también diferentes modos de elegir el tipo de señal de control de entrada:

- $\pm 10V$  para conectar a un sistema superior, como por ejemplo un controlador de posición.
- El LSC suministra voltajes auxiliares de  $\pm 3.9V$  para utilizar un potenciómetro externo.
- Adecuado para un ajuste fijo de la velocidad usando un potenciómetro interno.

Su amplio rango de voltaje de entrada,  $12 - 30V_{dc}$ , hace al LSC muy versátil y puede usarse con diferentes fuentes de alimentación.

<i><b>Especificación</b></i>	
Tensión de alimentación	$12 - 30 V_{dc}$
Máximo voltaje de salida	$25V$
Máxima corriente de salida	$2A$
Máxima potencia de salida	$50W$
Señal de control	Configurable: $\pm 10V$ o $\pm 3.9V$
Modos de operación	Velocidad, Corriente
Motores soportados	monofásicos (con escobillas)
Peso	$360g$

Tabla B.2: Especificaciones servoamplificador LSC 30/2.

## B.3. Especificaciones Stellaris Launchpad

La placa de desarrollo *Stellaris*<sup>®</sup> *Launchpad LM4F120* es una plataforma de evaluación de bajo costo para microcontroladores basados en ARM<sup>®</sup> Cortex-M4F. El diseño de la *Stellaris*<sup>®</sup> *Launchpad* destaca el uso del dispositivo USB 2.0 del microcontrolador LM4F120H5QR y el modulo de hibernación. La *Stellaris*<sup>®</sup> *Launchpad* también cuenta con botones programables por el usuario y un LED RGB para aplicaciones personalizadas.

### ***Microcontrolador LM4F120H5QR***

---

80MHz
256KB Flash
32KB RAM
2KB EEPROM
2x12 canales de ADCs de 12 bits
16x canales PWM
24x Temporizadores/Captura/Comparación/PWMs
3x comparadores analogicos
4x SPI/SSI, 4x I2C, 8x UART
USB Host/Device/OTG
2x CAN
Modo hibernación de baja potencia.
43x pines GPIO

---

Tabla B.3: Especificaciones microcontrolador LM4F120H5QR.

## B.4. Especificaciones Wifly RN-XV

El módulo RN-XV de Roving Networks es una solución Wi-Fi certificada, especialmente diseñada para clientes que quieren migrar sus redes actuales con arquitectura 802.15.4 a una plataforma estándar TCP/IP sin tener que rediseñar su hardware actual. El módulo RN-XV está basado en el módulo Wi-Fi RN-171 que incorpora un radio con protocolo 802.11 b/g con procesador de 32bits, stack TCP/IP, reloj de tiempo real, acelerador criptográfico, unidad de manejo de energía y una unidad de manejo de sensores analógicos.

El módulo ya viene precargado con el firmware de Roving-Networks para simplificar la integración y minimizar el tiempo de desarrollo para su aplicación. En la configuración más simple el hardware solo requiere 4 conexiones (PWR, TX, RX y GND) para crear una conexión inalámbrica de datos.

***Wifly RN-XV***

---

Basado en el *footprint* XBee 802.15.4  
 Ultra baja potencia: modo *standby*  $4\mu A$ , modo activo  $38mA$   
 Protocolos TCP/IP, DHCP, UDP, DNS, ARP, ICMP, cliente HTTP, cliente FTP y TCP.  
 Potencia de transmisión considerable:  $0dBm$  a  $12dBm$   
 Interfaz de hardware: TTL UART  
 Velocidad de datos de hasta  $464Kbps$  sobre el bus UART  
 Soporta redes Adhoc  
 8 pines digitales E/S de proposito general  
 3 entradas para sensores analógicos  
 Antena de cable

---

Tabla B.4: Especificaciones módulo Wifly RN-XV.

## B.5. Especificaciones del Convertidor Digital-Analógico DAC7614

El DAC7614 es un convertidor analogico-digital cuádruple. de entrada serial, de 12 bits de resolución y salida de voltaje. El dispositivo puede ser alimentado con una fuente de  $+5V$  o por una fuente dual de  $+5V$  y  $-5V$ .

***DAC7614***

---

Voltaje de alimentación bipolar:  $\pm 5V$   
 4 canales  
 Entrada serial SPI  
 12 bits de resolución  
 Arquitectura R-2R  
 Operación unipolar o bipolar  
 Tiempo de establecimiento:  $10\mu s$   
 Reset de usuario seleccionable a media escala o escala cero

---

Tabla B.5: Especificaciones DAC7614.

## B.6. Especificaciones Amplificador de Instrumentación INA129

El INA129 es un amplificador de instrumentación de propósito general de bajo consumo de potencia, el cual ofrece una excelente precisión. Una sola resistencia externa establece cualquier ganancia desde 1 a 10000.

### *INA 129*

---

Bajo voltaje de offset: $50\mu V$ máximo
Bajo drift de voltaje: $0.5\mu V/^{\circ}C$
Baja corriente de polarización de entrada: $5nA$ máximo
CMRR: $120dB$
Ancho de banda a $G = 100$ (Min): $200kHz$
Amplio rango de voltaje de alimentación: $\pm 2.25V$ a $\pm 18V$
Alta impedancia de entrada: $10G\Omega$

---

Tabla B.6: Especificaciones INA129.

## B.7. Especificaciones cámara Flex 13

### *Flex 13*

---

Resolución: $1280 \times 1024$
Frames: 120 FPS
Lente FOV: $42^{\circ}$ , $56^{\circ}$
Latencia: 8.33ms
No. LEDs: 28
Tamaño Pixel: $4.8\mu m \times 4.8\mu m$

---

Tabla B.7: Especificaciones Flex 13.

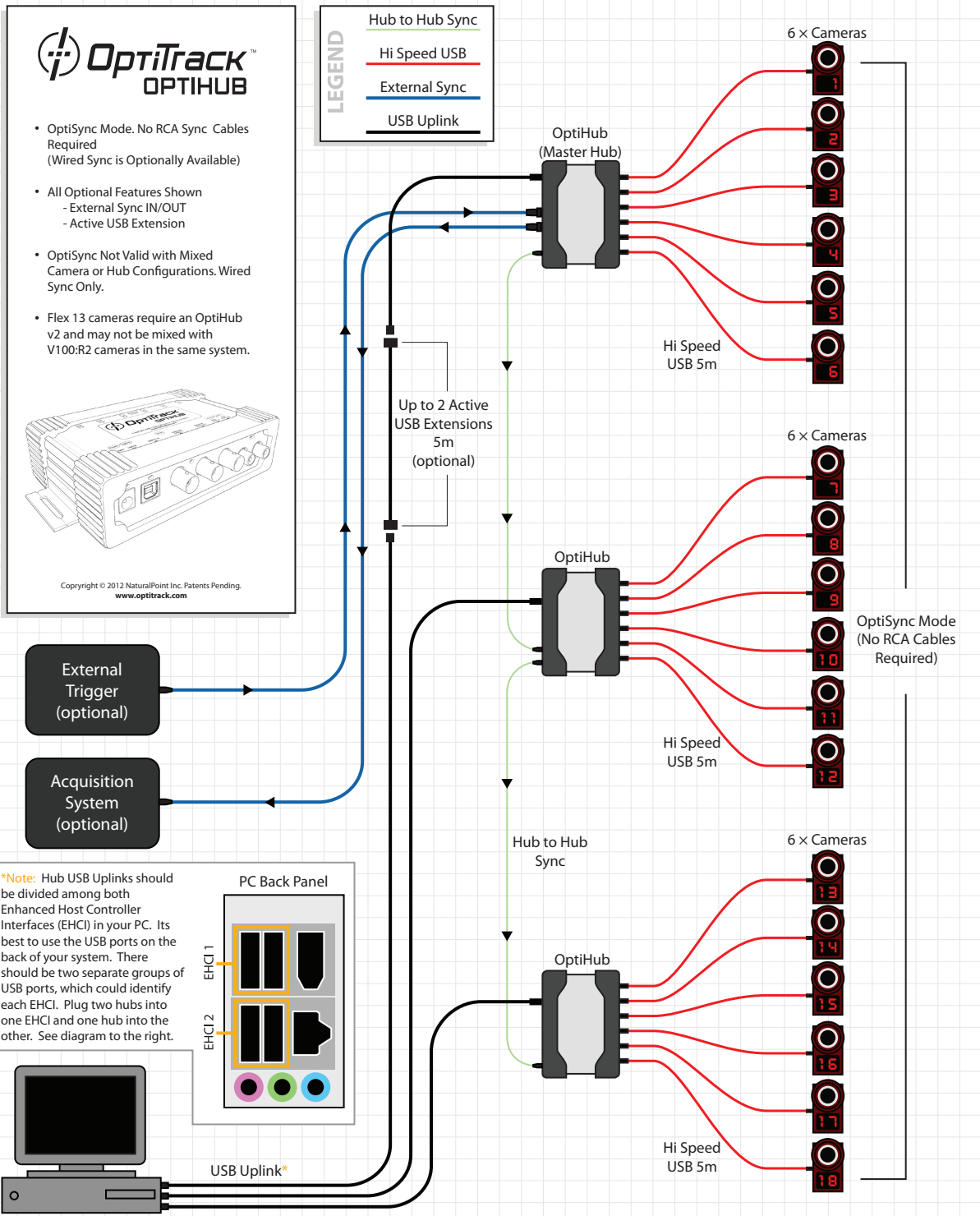
## B.8. Especificaciones OptiHub2

<b>Especificaciones Técnicas</b>	
<b>Velocidades y tipo USB</b>	USB 2.0: 48Mbit/s, 12Mbit/s y 1.5Mbit/s
<b>Puertos USB</b>	1 puerto de salida y 6 puertos de entrada
<b>Energía</b>	Entradas: 12V @ 3.8A, Salidas: 5.0W (1000mA@5V) máxima por puerto.
<b>Recursos de sincronización de entrada</b>	Generador interno, salidas en cascada, entrada externa digital y programa disparador de la PC por vía USB.
<b>Indicadores LED</b>	Energía, estado del puerto de entrada, estado de los puertos de salida y actividad de sincronización.
<b>Salidas de sincronización externa</b>	LV-TTL salida digital
<b>Tipos de salida externa sincronizada</b>	Pulso por exposición, paso por entrada, grabación activa por nivel de salida y grabación activa por cuadro de pulso.
<b>Retraso externo de sincronización de entrada</b>	0 – 65ms
<b>Velocidad interna del generador de disparo</b>	8 – 100Hz

Tabla B.8: Características del OptiHub2

En la siguiente Figura se muestra la configuración realizada entre los OptiHub2 y las cámaras Flex 13.

**OptiHub Setup with 18 V100:R2 or Flex 13 Cameras** SCREEN OPTIMIZED **OPTISYNC**







## Apéndice C

# Calibración servoamplificador LSC 30/2 para control de corriente

1. Ajuste el potenciómetro **P4**  $I_{max}$  para fijar el límite de corriente deseado. La corriente máxima se puede ajustar de manera lineal desde 0 a 2A con el potenciómetro **P4**. *Importante:* El valor límite  $I_{max}$  debe estar por debajo del valor de la corriente nominal (máx. corriente en continuo) del motor.
2. Aplique 0V como señal de control y haga el ajuste de cero con el potenciómetro **P3** **Offset**. *Importante:* El microinterruptor 9 debe estar en la posición  $\llcorner$  ON  $\downarrow$   $\lrcorner$  para el ajuste del offset.

Nota 1: Posición del microinterruptor 10 para:

$\llcorner$  ON  $\downarrow$   $\lrcorner$ : rango  $-3.9 \dots + 3.9V$  aprox. equivale a  $-2 \dots + 2A$  de corriente en el motor.

$\llcorner$  OFF  $\uparrow$   $\lrcorner$ : rango  $-10 \dots + 10V$  aprox. equivale a  $-2 \dots + 2A$  de corriente en el motor.

Nota 2:

En modo de corriente, los potenciómetros **P1** $n_{max}$ , **P2**  $I \times R$  y **P5** gain no están activos.



# Bibliografía

- [1] Badgerow., J.P. y F. R. Hansworth.: *Energy savings through formation flight? A re-examination of the vee Formation*. Journal of Teoretical Biology, 93:41–52, 1981.
- [2] Weimerskirch., H., J. Martin., Y. Clerquin., P. Alexandre. y S. Jiraskova: *Energy saving in flight Formation*. Nature, 413:697–698, 2001.
- [3] Hoerner, S.F.: *Fluid Dynamic Drag: Practical Information on Aerodynamic Drag and Hydrodynamic Resistance*. Published by the Author, 1958.
- [4] Partridge., B. L.: *The structure and function of fish schools*. Scientific American., páginas 90–99, 1982.
- [5] Okubo, A.: *Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks, and herds*. Advances in Biophysics., 22:1–94, 1986.
- [6] Grunbaum., D., S. Viscido. y J. K. Parrish.: *Extracting interactive control algorithms from group dynamics of schooling fish*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 2005.
- [7] Vicsek., T., A. Czirok., E. Ben-Jacob., I. Cohen. y O. Shochet.: *Novel type of phase transmission in a system of self-driven particles*. Physical Review Letters, 75(6):1226–1229, 1995.
- [8] Dirk., H. y B. A. Huberman.: *Coherent moving states in highway traffic*. Nature, 396:738–740, 1998.
- [9] Farkas., I., D. Helbing. y T. Vicsek.: *Mexican waves in an excitable medium*. Nature, 419:131–132, 2002.
- [10] Helbing., D., I. Farkas. y T. Vicsek: *Simulating dynamical features of scape panic*. Nature, 407:487–490, 2000.
- [11] Gladwell., M.: *The Tipping Point: How Little Things Can Make a Big Difference*. Little, Brown., 2000.
- [12] Schoenwald., D. A.: *AUVs: In space, air, water, and on the ground*. IEEE Control Systems Magazine., 20(6):15–18, 2000.
- [13] Skjetne., R., T. I. Fossen. y P.V. Kokotovic.: *Robust Output Maneuvering for a Class of Nonlinear Systems*. Automatica, 40(3):373–383, 2004.

- [14] Skjetne., R., T.I. Fossen. y P.V. Kokotovic.: *Adaptive maneuvering with experiments for a model ship in a marine control laboratory*. Automatica, 41(2):289–298, 2005.
- [15] Gazi., V. y K. M. Passino.: *Stability analysis of social foraging swarms*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics., 34(1):539–557, 2004.
- [16] Tanner., H.G., A. Jadbabaie. y G. J. Pappas.: *Stable flocking of mobile agents part i: Fixed topology*. in Proc. 42rd IEEE Conf. Decision & Control, páginas 2010–2015, 2003a.
- [17] Tanner., H.G., G.J. Jadbabaie. y G.J. Pappas.: *Stable Flocking of mobile agents, part ii: Dynamic topology*. in Proc. 42rd IEEE Conf. Decision & Control, páginas 2016–2021, 2003b.
- [18] Olfati-Saber., R.: *Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory*. IEEE Transactions on Automatic Control, 51(3):401–420, 2006.
- [19] Pogromsky., A., G. Santoboni. y H. Nijmeijer.: *Partial Synchronization: From symmetry towards stability*. Physica D Nonlinear Phenomena., 172:65–87, 2002.
- [20] R.W. Beard., J. Lawton. y F.Y. Hadaeh.: *A coordination architecture for spacecraft formation control*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 9(6):777–790, 2001.
- [21] Nijmeijer., H. y Rodriguez-Angeles.: *Synchronization of Mechanical Systems*. Series on Nonlinear Science, 46, 2003.
- [22] Fax., J. A. y R. M. Murray.: *Information flow and cooperative control of vehicle formation*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(9):1465–1476, 2004.
- [23] Spry., S. y J.K. Hedrick.: *Formation control using generalized coordinates*. in Proc. 43rd IEEE Conf. Decision & Control, páginas 2441–2446, 2004.
- [24] Ogren., P., E. Fiorelli. y N. E. Leonard.: *Cooperative Control of Mobile sensor network: adaptive gradient climbing in a distributed environment*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(8), 2004.
- [25] D. B. Kingston., R. Wei & R.W. Beard: *Consensus algorithms are input-to-state*. in Proc. 2005 American Control Conference, 2005.
- [26] Kumar., V., N. Leonard. y A. S. Morse.: *Cooperative Control*, volumen 309. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 3rd edición, 2005.
- [27] Ren., W., R. W. Beard. y E. M. Atkins. (editores): *A survey of consensus problems in multi-agent coordination.*, Portland, OR, USA, 2005.
- [28] M. Chueh, Y. L. W. Au Yeung, K. P.C. Lei y S. S. Joshi: *Following Controller for Autonomous Mobile Robots Using Behavioral Cues*. IEEE Trans. Ind. Electron., 2008.
- [29] J.P. Desai, J. Ostrowski y V. Kumar: *Controlling Formation of Multiple Mobile Robots*. Proc. Robot. Autom. Conf., 1998.
- [30] Mesbahi, M. y F.Y. Hadaegh: *Formation Flying Control of Multiple Spacecraft via Graphs*. J. Guid. Control Dyn., 2001.

- 
- [31] K. Morioka, J. H. Lee y H. Hashimoto: *Human-following mobile robot in a distributed intelligent sensor network*. IEEE Trans. Ind. Electron., 2004.
- [32] Wang., P. y F. Y. Hadaegh.: *Coordination and control of multiple microspacecraft moving in formation*. Journal of the Astronautical Sciences, 44(3):315–355, 1996.
- [33] Wang, P.K.C.: *Formation strategies for multiple autonomous mobile robot moving in formation*. J. Robot. Syst., 1991.
- [34] Sheikholeslam., S. y C. A. Desoer.: *Control of interconnected nonlinear dynamical systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 37:806–810, 1992.
- [35] Lewis, M. A. y K. H. Tan: *High Precision Formation Control of Mobile Robots Using Virtual Structures*. Auton. Robots., 1997.
- [36] Egerstedt., M. y X. Hu.: *Formation constrained multi-agent control*. IEEE Transactions on Robotics and Automation., 17(6):947–951, 2001.
- [37] R. Skjetne, S. Moi. y T.I. Fossen: *Nonlinear Formation Control of Marine Craft*. in 41st IEEE Conf. Decision and Control, páginas 1699–1704, 2002.
- [38] Balch, T. y R. C. Arkin: *Behavior-based formation control for multirobot teams*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 14(6):926–939, 1998.
- [39] Stilwell., D. J. y B.E. Bishop.: *Redundant manipulator techniques for a path planning and control of a platoon of autonomous vehicles*. in Proc. 41st IEEE Conf. Decision & Control, páginas 2093–2098, 2002.
- [40] Antonelli., G. y S. Chiaverini.: *Fault tolerant kinematic control of platoons of autonomous robots*. in Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation, páginas 3313–3318, 2004.
- [41] Siciliano., B. y J. J. E. Slotine.: *A general framework for managing multiple tasks in highly redundant robotic system*. in 5th Int. Conference on Advanced Robotics, páginas 1211–1216, 1991.
- [42] Olfati-Saber., R. y R. Murray.: *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays*. IEEE Transactions on Automatic Control., 49(9):1520–1533, 2004.
- [43] Arcaç, M.: *Passivity as a Design Tool for Group Coordination*. IEEE Transactions on Automatic Control., 52:1380–1390, 2007.
- [44] Ren., W., R.W. Beard y T.W. McLain.: *Coordination variables and Consensus building in multiple vehicle Systems.*, volumen 309. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag., 2005.
- [45] Moreau, L.: *Stability of multi-agent Systems with time-dependent communication links*. IEEE Transactions on Automatic Control., 50(2):619–682, 2005.
- [46] Stojanovic., M.: *Vehicles underwater communication*. Encyclopedia of Telecommunications, 2003.

- [47] Akyildiz., I.F., D. Pompili. y T. Melodia.: *Underwater acoustic sensor networks: research challenges*. Ad Hoc Networks, 3(3):257–279, 2005.
- [48] Kube., C.R. y E. Bonabeau.: *Cooperative transport by ants and robots*. Robotics and Autonomous Systems., 30:85–101, 2000.
- [49] I.F. Ihle, M. Arcaç, T.I. Fossen: *Passivity-based designs for synchronized path-following*. Automatica, 43:1508–1518, 2007.
- [50] R. M. Balakrishna, A. Ghosal: *Modelling of slip for wheeled mobile robots*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 11:126–132, 1995.
- [51] Canudas., C., B. Siciliano., G. Bastin., B. Brogliato., G. Campion., B. DAndrea-Novel., A. De Luca., W. Khalil., R. Lozano., R. Ortega., C. Samson. y P. Tomei.: *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, 1996.
- [52] G. Campion, G. Bastin, B. DAndrea Novel: *Structural properties and clasification of kinematics and dynamics models of wheeled mobile robots*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 12:47–61, 1996.
- [53] Godsil., C. D. y G.F. Royle.: *Algebraic Graph Theory*, volumen 207. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 2001.
- [54] Hassan, Khalil M. (editor): *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3rd edición, 2002.
- [55] Zuniga, Oscar Martinez: *Sincronizacion de Robots Moviles Tipo (2,0) en Tiempo Discreto*. Tesis de maestria. CINVESTAV., 2013.