



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Control para despegue y aterrizaje de un cuatrirotor
en presencia de momentos y fuerzas externos.**

Tesis que presenta:

Ing. Yarai Elizabeth Tlatelpa Osorio

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias

En la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:

Dr. Hugo Rodríguez Cortés

Dr. Rafael Castro Linares

A mis padres y hermanas.

Agradecimientos:

A mis padres, Martina Osorio y Oscar Tlatelpa por todo el apoyo incondicional brindado.

A mis hermanas Fernanda y Stephanie por las porras y darme motivos.

A mis amigos de la Sección de Mecatrónica, Isaías, José Juan. Por ayudarme siempre y compartir conocimiento.

A Rolando Cortés, gracias.

A la Sección de Mecatrónica del Cinvestav por la formación profesional y personal.

A mis asesores de Tesis, el Dr. Hugo Rodríguez Cortés y el Dr. Rafael Castro Linares que me guiaron en el desarrollo de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por haberme otorgado el sustento económico para realizar mis estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta un controlador no lineal para la dinámica traslacional de un cuatrirotor, así como un controlador no lineal para su dinámica rotacional, este último se expresa en el espacio de configuración de la orientación del cuatrirotor $SO(3)$. La estrategia de control propuesta compensa activamente fuerzas y momentos externos mediante el uso de un estimador basado en la técnica de Inmersión e Invarianza.

Adicionalmente a las fuerzas externas, el estimador propuesto reconstruye su primera y segunda derivada. La reconstrucción de estas señales es necesaria debido a la naturaleza subactuada de la dinámica traslacional. La reconstrucción de las derivadas temporales de los momentos externos no es necesaria, ya que la dinámica rotacional es completamente actuada.

Realizando una aproximación lineal de la dinámica en lazo cerrado, se presenta en esta tesis, un análisis de estabilidad local del sistema.

Se evalúa el funcionamiento del controlador propuesto, realizando una serie de vuelos experimentales.

Abstract

In this thesis, a nonlinear controller for the translational dynamics of a quadrotor is presented, as well as a nonlinear controller for its rotational dynamics, the latter in the configuration space of the quadrotor attitude $SO(3)$. The proposed control strategy, actively compensates external forces and moments through the use of an estimator based on the Immersion and Invariance technique.

In addition to the external forces, the proposed estimator also reconstructs its first and second time derivative. The reconstruction of these signals is necessary because of the underactuated nature of the translational dynamics. The reconstruction of the time derivatives of the external moments is not necessary, since the rotational dynamics is completely actuated.

By performing a linear approximation of the closed loop dynamics of the quadrotor, we present in this thesis, a local stability analysis of the system.

The evaluation of the proposed controllers is performed with the aid of a series of experimental flights.

Contenido

Agradecimientos	II
Contenido	IX
Lista de figuras	XI
Lista de figuras	XI
1. Introducción	1
1.1. VANT	1
1.2. Estado del arte	3
1.3. Planteamiento del problema	6
1.4. Objetivos	6
1.5. Organización de la tesis.	7
2. Modelado y control	9
2.1. Modelo del cuatrirotor	9
2.1.1. Dinámica rotacional	11
2.1.2. Dinámica traslacional	15
2.2. Estimador de fuerzas y momentos externos	16
2.2.1. Dinámica del error de estimación	18
2.3. Control de posición	22
2.4. Control de orientación	24
2.5. Análisis de estabilidad	27

3. Resultados Experimentales	37
3.1. Plataforma de experimentación	37
3.1.1. Estructura mecánica del cuatrirotor.	39
3.1.2. Implementación	42
3.2. Experimentos	42
3.2.1. Sin perturbaciones	43
3.2.2. Con perturbaciones	44
4. Conclusiones	53
4.1. Trabajo futuro	54
A. Propiedades del mapeo $\hat{\cdot}$	55
Bibliografía	57

Lista de figuras

1.1. El Amazon PrimeAir completando su primer entrega con vuelo autónomo.	1
1.2. Volantex Ranger 757-4, un VANT de ala fija.	2
1.3. El Trimble ZX5, hexacóptero utilizado para mapeo y vigilancia aérea, un VANT de ala rotativa.	3
1.4. Parrot AR.Drone 2.0	3
1.5. DJI Phantom 3.	4
1.6. Simulaciones de [1] en donde los cilindros representan la región de interferencia aerodinámica.	5
2.1. Cuatrirotor.	10
2.2. Diagrama de control.	27
3.1. Plataforma experimental.	38
3.2. Sistema embebido a bordo de un cuatrirotor.	38
3.3. Cuatrirotor utilizado para la experimentación.	39
3.4. Trayectoria seguida por el cuatrirotor.	43
3.5. Componentes de las fuerzas externas estimadas δ_T sin perturbación.	44
3.6. Entradas de control sin perturbación. T_T (superior izquierda), L (superior derecha), M (inferior izquierda) and N (inferior derecha).	45
3.7. Trayectoria seguida por el cuatrirotor bajo la presencia de un cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.	46

3.8. Componentes de las fuerzas externas estimadas δ_T bajo la presencia de un cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.	47
3.9. Entradas se control. T_T (superior izquierdo), L (superior derecho), M (inferior izquierdo) and N (inferior derecho). Bajo la presencia de un cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.	48
3.10. Experimento con la presencia del cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.	49
3.11. Errores de traslación.	50
3.12. Errores rotacionales.	51

Capítulo 1

Introducción

1.1. VANT

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT), cada día están más presentes en la vida diaria, por lo tanto el estudio de la robótica aérea se ha extendido y madurando considerablemente. Las nuevas aplicaciones conciernen principalmente a la interacción entre varios vehículos aéreos, así como con su ambiente para prestar servicios a sus operadores (1.1).



Figura 1.1: El Amazon PrimeAir completando su primer entrega con vuelo autónomo.

Esto implica que dos o más vehículos aéreos vuelen muy próximos entre sí para realizar trabajo cooperativo [2], [3], para manipular objetos, incluso algunos llegan a

tener brazos robóticos integrados a su estructura para la manipulación de objetos [4], [5], [6].

Podemos encontrar principalmente dos tipos de VANT, los de ala fija (1.2) y los de ala rotativa (1.3). Cada uno de estos tipos de VANT tiene sus respectivas ventajas y desventajas. Por ejemplo los de ala fija pueden alcanzar distancias más largas y cubrir mayor área de vuelo que los de ala rotativa, sin embargo el área de despegue y aterrizaje de un vehículo de ala rotativa es mucho menor, y su maniobrabilidad es significativamente mayor.



Figura 1.2: Volantex Ranger 757-4, un VANT de ala fija.

Dentro de los VANT de ala rotativa se encuentran los multirrotores, los cuales cuentan con más de dos alas rotativas. Estos vehículos se han vuelto muy comerciales para realizar desde tareas muy sencillas de entretenimiento como tomar imágenes y video, hasta tareas más complicadas como rescate, mapeo, vigilancia, entrega de mercancía, etc. Cabe destacar que la combinación de este tipo de vehículos aéreos no tripulados con técnicas de visión por computadora es la que da pie a muchas de las aplicaciones antes mencionadas [7].

El cuatrorotor es un VANT multirotor, y como su nombre lo indica, cuenta con cuatro rotores montados en los extremos de una estructura en forma de cruz. Esta es la configuración de multirotor más sencilla, con respecto al modelado matemático y control, y ya que es un robot móvil omnidireccional, es ampliamente usado como



Figura 1.3: El Trimble ZX5, hexacóptero utilizado para mapeo y vigilancia aérea, un VANT de ala rotativa.

plataforma de experimentación.

Comercialmente existen cuatrirotores fabricados en diferentes materiales y con propósitos variados, algunos ejemplos de cuatrirotores comerciales se presentan en las Figuras 1.4 y 1.5.



Figura 1.4: Parrot AR.Drone 2.0

1.2. Estado del arte

Las nuevas aplicaciones para la robótica móvil implican que el vehículo aéreo vuele en un ambiente no estructurado y turbulento [8]. Es por esto que controladores de



Figura 1.5: DJI Phantom 3.

alto rendimiento y robustez son esenciales.

El desarrollo de un controlador con robustez sobre cualquier tipo de dinámicas no modeladas y perturbaciones es prácticamente una tarea imposible, así que en este trabajo nos concentramos en un tipo particular de perturbaciones externas que serán descritas en la sección 2.2.1.

El modelo del cuatrirotor considerando o no perturbaciones en el sistema, puede y ha sido controlado a través de diversos algoritmos de control, los cuales varían desde el clásico Proporcional-Integral-Derivativo lineal y no lineal (PID) o un Proporcional-Derivativo (PD), hasta esquemas más complejos como backstepping o modos deslizantes [9].

Muchos trabajos de investigación con cuatrirotores, hoy en día, están enfocados a las nuevas aplicaciones, por lo tanto, a lidiar con las perturbaciones externas al modelo dinámico del sistema debidas al ambiente o a las exigencias de la tarea que realiza el vehículo aéreo.

En la literatura podemos encontrar dos aproximaciones para abordar el problema de perturbaciones en los vehículos aéreos.

La primer aproximación, modela de forma precisa las perturbaciones, por ejemplo,

considera que los efectos aerodinámicos dependen de la velocidad del vehículo aéreo [10], por lo tanto las perturbaciones dependen de los estados del vehículo. La estimación de las perturbaciones dependientes de los estados del sistema, es en general una tarea difícil, ya que el proceso de estimación depende de la forma en que los parámetros desconocidos pueden ser parametrizados con respecto de los estados del sistema.

Existen trabajos en los que se abandona la idea de compensar los efectos de las perturbaciones, por ejemplo las perturbaciones aerodinámicas. Sin embargo, sí requieren la interacción de dos o más vehículos aéreos, mediante experimentación se obtiene el área de trabajo de cada vehículo (1.6) y la máxima aproximación entre ellos para evitar la interferencia aerodinámica [1].

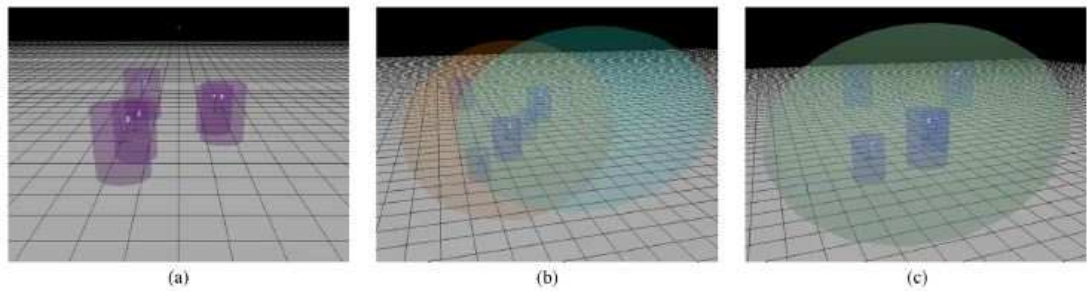


Figura 1.6: Simulaciones de [1] en donde los cilindros representan la región de interferencia aerodinámica.

La segunda aproximación considera a las perturbaciones como señales externas, posiblemente variantes en el tiempo [11]. Asumiendo que todos los estados del sistema están disponibles y que el modelo dinámico es conocido, el procedimiento de estimación de las perturbaciones puede ser sistematizado. Para sistemas subactuados, en lo que se debe poner atención es en la propagación adecuada de las derivadas temporales de los errores de estimación.

En esta tesis se sigue la segunda aproximación, se considera que las perturbaciones son señales externas sin dependencia en el estado del cuatrirotor. Específicamente fuerzas y momentos externos con dependencia únicamente del tiempo. Los trabajos en [12] y [13] están relacionados con los resultados de esta tesis, las diferencias son las siguientes, en [12] las dinámicas de los errores de estimación son afectadas por la primera y

segunda derivada temporal de las fuerzas y momentos externos (ecuación (36) de [12]), en el presente trabajo los errores de estimación son afectados únicamente por la tercera derivada temporal de las fuerzas externas y la segunda derivada temporal de los momentos externos, respectivamente. Por otro lado, el trabajo en [13] considera únicamente fuerzas y momentos externos constantes en el tiempo.

1.3. Planteamiento del problema

El estimador de momentos y fuerzas externas que se proponga, adicionalmente, a la reconstrucción de las fuerzas externas, también deberá reconstruir su primera y segunda derivada temporal. Estas señales serán necesarias, debido a la naturaleza subactuada de la dinámica traslacional del cuatrorotor, para propagar la acción de control de la dinámica traslacional a la dinámica rotacional. Por otro lado, ya que la dinámica rotacional es completamente actuada, el estimador solamente deberá reconstruir los momentos externos, y no es necesario reconstruir sus derivadas temporales.

Es necesario proponer un controlador no lineal para la dinámica rotacional en el espacio de configuración de la orientación del cuatrorotor, así como hacer uso de las señales reconstruidas para compensar activamente los efectos de las perturbaciones en la dinámica traslacional y rotacional.

La realización de vuelos experimentales es necesaria para probar el desempeño de estimadores y controladores.

1.4. Objetivos

A continuación se listan los objetivos de esta Tesis.

- Estimar una clase de fuerzas y momentos externos variantes en el tiempo que actúan sobre un cuatrorotor.
- Desarrollar una estrategia de control capaz de compensar de forma activa a las fuerzas y los momentos externos variantes en el tiempo, que están presentes en

la dinámica de un cuatrirotor.

- Validar experimentalmente el desempeño de los estimadores y controladores desarrollados.

1.5. Organización de la tesis.

La organización de esta tesis es como sigue. Al inicio del segundo capítulo se muestra el modelo del cuatrirotor desarrollado en [14], en el mismo capítulo se muestra el desarrollo de los estimadores de momentos y fuerzas externas, así como el desarrollo del esquema de control, tanto para la dinámica rotacional como para la dinámica traslacional. El final del Capítulo 3 se describe la dinámica en lazo cerrado con una aproximación lineal, y se dan las bases para mostrar la estabilidad local del sistema. En el Capítulo 4 se muestran resultados experimentales que validan el desempeño de estimadores y controladores. Finalmente, el Capítulo 5 se presentan conclusiones y propuestas para trabajos a futuro a partir de las mismas conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Modelado y control

En este capítulo se describe el modelo del cuatrirotor a partir de [14] .

También se muestra, el diseño de una estrategia de control basada en un estimador de fuerzas y momentos externos al sistema.

2.1. Modelo del cuatrirotor

En la técnica de Quasi Euler-Lagrange seguida en [14], se considera que el cuatrirotor es un cuerpo rígido. En la Figura 2.1 se muestra la estructura mecánica del cuatrirotor en el espacio. Se pueden observar dos marcos de referencia, el inercial $Ox_e y_e z_e$ que está fijo a la Tierra y el marco de referencia cuerpo $Ox_b y_b z_b$ que está fijo al centro de masa del cuatrirotor.

El marco de referencia inercial está orientado según la convención aeronáutica Norte-Este-Abajo, mientras que el marco de referencia cuerpo está orientado de tal forma que el eje x_b apunte al frente del cuatrirotor y el eje z_b apunte hacia abajo del cuatrirotor. La posición del centro de masa del cuatrirotor con respecto del marco de referencia inercial se representa por el vector $X = [x \quad y \quad z]^T$.

Por otro lado, la orientación del marco de referencia fijo al cuerpo del cuatrirotor con respecto del marco de referencia inercial está definido por la matriz de rotación R . La matriz de rotación, usando la secuencia de rotación Z-Y-X expresada en ángulos

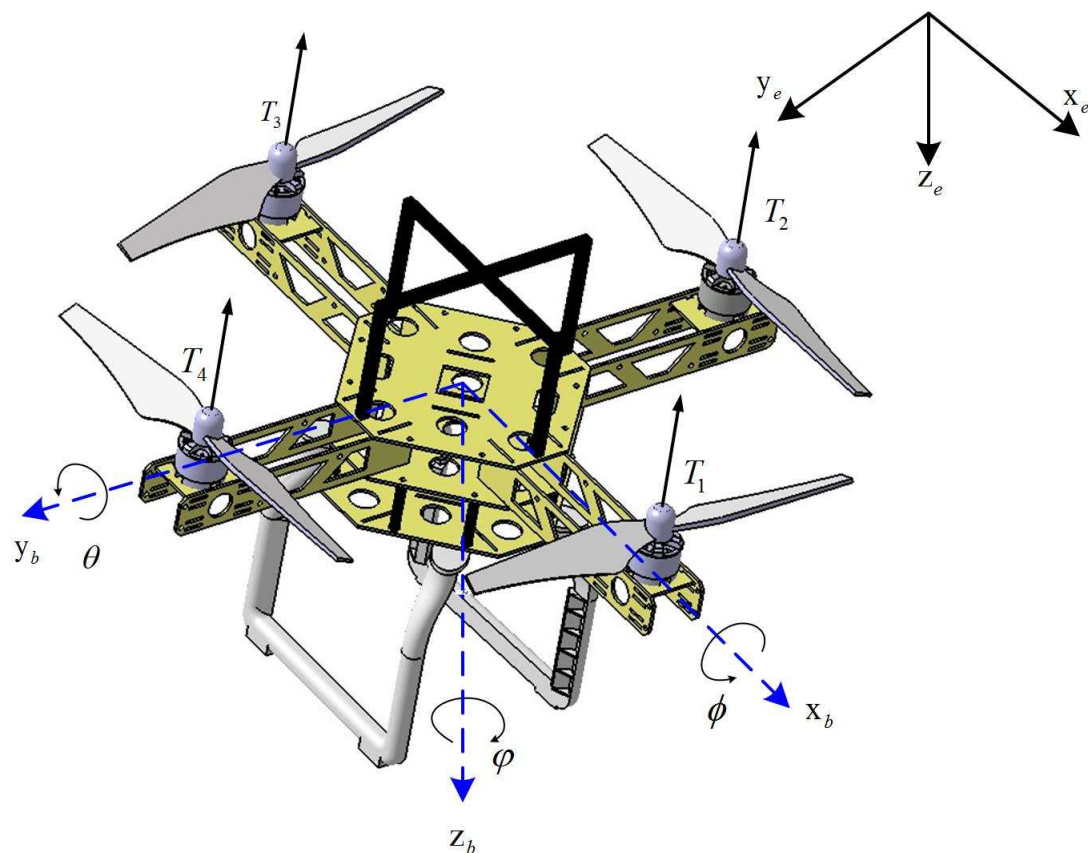


Figura 2.1: Cuadricóptero.

de Euler es [15]

$$R(\Phi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ c_\theta s_\psi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Siendo las matrices de rotación al rededor de cada eje

$$R_{x\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad R_{y\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad R_{z\psi} = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En donde $\Phi = [\phi \ \theta \ \psi]^\top$ y ψ , θ y ϕ representan respectivamente los ángulos de Euler guiñada, cabeceo y alabeo. Se utiliza la siguiente notación $s_\phi = \sin \phi$, $c_\phi = \cos \phi$, $s_\theta = \sin \theta$, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\psi = \sin \psi$, $c_\psi = \cos \psi$.

Sobre el cuatrirotor actúan las fuerzas debidas al campo gravitatorio de la Tierra $F_g = mge_3^e$ y las debidas al empuje producido por los rotores $F_T = -T_T e_3^b$. En donde

$$T_T = \sum_{i=1}^4 T_i$$

con T_i el empuje debido a cada rotor y e_3^e y e_3^b son dos vectores unitarios que apuntan, correspondientemente, en dirección del eje z_e del marco de referencia inercial y del eje z_b del marco de referencia fijo al cuerpo, m es la masa del vehículo y g es la constante de aceleración gravitacional de la Tierra.

Idealmente, si los empujes generados por los motores son iguales entre si y con $F_T = F_g$, se producirá un vuelo estacionario del cuatrirotor y al producir una diferencia de empuje en los motores del cuatrirotor, se generan momentos mecánicos al rededor de los ejes del marco de referencia fijo cuerpo, es decir x_b , y_b y z_b .

2.1.1. Dinámica rotacional

La dinámica rotacional del cuatrirotor es completamente actuada, ya que se pueden generar pares alrededor de los tres ejes del marco de referencia cuerpo directamente mediante diferencias en los empujes T_i dados por los rotores.

Al producir una diferencia entre el empuje T_2 y el empuje T_4 siendo mayor el primero, se genera un momento mecánico positivo L al rededor del eje x_b , mientras que para generar un momento mecánico positivo M al rededor del eje y_b la diferencia debe producirse entre T_1 y T_3 , aumentando al primero y reduciendo al segundo.

Al rotar los motores del cuatrirotor, cada uno de ellos produce el efecto de par o momento contra-rotativo Q_i que es proporcional a la velocidad de giro al cuadrado de los mismos, en el cuatrirotor. Dos actuadores giran en un sentido y los otros dos giran en sentido contrario, con lo que se puede generar momento al rededor del eje z_b en ambos sentidos. Para generar un momento mecánico positivo N alrededor del

eje z_b se aumenta el momento contra-rotativo Q_2 y Q_4 y se reducen los momentos contra-rotativos Q_1 y Q_3 .

Lo anterior se puede expresar mediante el vector de momentos mecánicos M_e como sigue

$$M_e = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_2 - T_4)l \\ (T_1 - T_3)l \\ -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \end{bmatrix}$$

en donde l es la distancia entre el eje de cada rotor y el centro de masa del cuatrirotor, T_i y Q_i son los empujes y pares contra-rotativos generados por cada motor y que están en función de la velocidad angular ω_i de los mismos de la siguiente forma

$$T_i = C_{T_i} \pi \bar{r}_i^4 \rho \omega_i^2$$

$$Q_i = C_{Q_i} \pi \bar{r}_i^5 \rho \omega_i^2$$

Aquí, C_{T_i} es el coeficiente de empuje propio de cada hélice, C_{Q_i} es el coeficiente aerodinámico de momento reactivo, \bar{r}_i es el radio de la hélice y ρ es la densidad del aire.

De las dos ecuaciones se despeja ω_i^2 , y se considera $\rho = 1 \frac{Kg}{m^3}$ para la Ciudad de México. A partir de la consideración anterior se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{Q_i}{C_{Q_i} \bar{r}_i} = \frac{T_i}{C_{T_i}} \quad (2.2)$$

Finalmente, se expresa el par reactivo Q_i en función de los empujes T_i

$$Q_i = \frac{C_{Q_i} \bar{r}_i}{C_{T_i}} T_i$$

Así, tenemos una relación entre el empuje total T_T y el vector de momentos M_e

$$\begin{bmatrix} T_T \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 0 & -l \\ l & 0 & -l & 0 \\ -k_T \bar{r}_i & k_T \bar{r}_i & -k_T \bar{r}_i & k_T \bar{r}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

en donde $k_T = \frac{C_{Q_i}}{C_{T_i}}$. Por lo tanto los empujes T_i se pueden despejar de (2.3)

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2l} & -\frac{1}{4k_T \bar{r}_i} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2l} & 0 & \frac{1}{4k_T \bar{r}_i} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{4k_T \bar{r}_i} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2l} & 0 & \frac{1}{4k_T \bar{r}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_T \\ M_e \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Siguiendo el método de Quasi Euler-Lagrange presentado en [14] se puede escribir el modelo para la dinámica rotacional del vehículo aéreo de la siguiente forma

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times J\Omega = M_e + \delta_M(t) \quad (2.5)$$

donde J es la matriz de inercia del vehículo aéreo y Ω es el vector de velocidades angulares $\Omega = [p \ q \ r]$ expresado en el sistema coordenado fijo al cuerpo del cuatrirotor. Este vector de velocidades angulares Ω está relacionado con las derivadas de los ángulos de guiñada, cabeceo y alabeo por la siguiente expresión

$$\Omega = W(\Phi)\dot{\Phi}$$

donde

$$W(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

El término δ_M , es un vector $\delta_M = [\delta_{M_p} \ \delta_{M_q} \ \delta_{M_r}]^\top$ de momentos externos introducidos al sistema. Se considera que estos momentos externos actúan sobre cada uno de los ejes del cuatrirotor y que son variantes en el tiempo.

Otra forma de representar la dinámica rotacional en (2.5) se muestra enseguida

$$J\dot{\Omega} = -\hat{\Omega}J(\Omega) + M_e + \delta_M(t) \quad (2.6)$$

donde el mapeo $\hat{\cdot}$ se define como $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ siendo $\mathfrak{so}(3)$ el álgebra de Lie de $SO(3)$

Entonces $\hat{\Omega}$ es la matriz anti simétrica correspondiente al vector Ω definida como sigue.

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Para definir la orientación de un cuerpo rígido, como lo es el del cuatrirotor, basta con conocer un vector en \mathbb{R}^3 y un ángulo de rotación en \mathbb{R} (teorema de Euler). Para expresar estos cuatro parámetros existen diferentes representaciones como lo son ángulos de Euler, cuaterniones y las matrices de rotación. Las matrices de rotación, de entre las diferentes representaciones, son una representación de la orientación global y única [16], características importantes a considerar durante el diseño de estrategias de control.

La cinemática rotacional del cuatrirotor, representada en matrices de rotación está dada por la siguiente ecuación [17].

$$\dot{R} = \hat{\Omega}R \quad (2.7)$$

Se puede decir que el espacio de configuración de la orientación del cuatrirotor es el grupo de Lie:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | R^T R = I_3, \det(R) = 1\}$$

donde I_3 es una matriz de identidad de 3×3 .

2.1.2. Dinámica traslacional

La posición del cuatrirotor no es completamente actuada ya que no se puede controlar directamente con los actuadores como sucede con la orientación. La ecuación de la dinámica que describe el desplazamiento del cuatrirotor en el espacio, utilizando la misma técnica de Quasi euler-Lagrange es la siguiente.

$$m\dot{V}_b + m\Omega \times V_b - R(\Phi)^\top mge_3^e = -T_T e_3^b + \delta_T \quad (2.8)$$

En donde V_b y \dot{V}_b son respectivamente la velocidad y la aceleración del cuatrirotor en el marco de referencia fijo al cuerpo del vehículo. Así como en la dinámica rotacional aparece el término δ_M , en la dinámica traslacional aparece el término δ_T el cual es un vector $\delta_T = [\delta_{T_x} \quad \delta_{T_y} \quad \delta_{T_z}]^\top$ de fuerzas externas desconocidas y variantes en el tiempo.

Podemos expresar el desplazamiento del cuatrirotor en el marco de referencia inercial utilizando la siguiente ecuación que relaciona la velocidad del vehículo en el marco de referencia cuerpo y el marco de referencia inercial.

$$V_b = R(\Phi)^\top \dot{X}$$

Siendo \dot{X} la velocidad del cuatrirotor en el marco de referencia inercial. Al sustituir esta relación en la ecuación (2.8), tenemos la dinámica de traslación expresada en el marco de referencia inercial.

$$m\ddot{X} = mge_3^b - T_T R(\Phi)^\top e_3^b + \delta_T(t) \quad (2.9)$$

En donde $\ddot{X} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}]$ es el vector de aceleración del cuatrirotor expresado en el marco de referencia inercial.

Resumiendo, las ecuaciones de movimiento del cuatrirotor son: (2.6), (2.7) y (2.9).

$$\begin{aligned}
J\dot{\Omega} &= -\hat{\Omega}J\Omega + M_e + \delta_M(t) \\
\dot{R} &= \hat{\Omega}R \\
m\ddot{X} &= mge_3^b - T_T R(\Phi)e_3^b + \delta_T(t)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Los espacios de configuración de cada una de las variables son

$$\begin{aligned}
\Omega, \dot{\Omega} &\in \mathbb{R}^3 \\
M_e &\in \mathbb{R}^3 \\
X, \dot{X}, \ddot{X} &\in \mathbb{R}^3 \\
\delta_M, \delta_T &\in \mathbb{R}^3 \\
R &\in SO(3)
\end{aligned}$$

2.2. Estimador de fuerzas y momentos externos

En el diseño del estimador de fuerzas y momentos externos, se considera la siguiente suposición

Suposición 1 *La perturbación por fuerzas externas, su tercera derivada temporal y la primera derivada temporal de los momentos externos están acotadas por constantes pequeñas positivas κ_0 , κ_1 y κ_2 , esto es*

$$\|\delta_T(t)\| \leq \kappa_0, \quad \|\delta_T(t)^{(3)}\| \leq \kappa_1, \quad \|\dot{\delta}_M(t)\| \leq \kappa_2$$

con $\|\cdot\|$ la norma Euclidianas.

Durante el procedimiento de diseño de los controladores de orientación y posición, será más clara la necesidad de tener una tercera derivada de las fuerzas externas que sea acotada así como de una primera derivada de los momentos externos que también sea acotada. Esta suposición es fundamental para probar que los errores de estimación son por lo menos acotados.

Físicamente esto implica que la rapidez de cambio de los momentos externos considerados es acotada, lo que es equivalente a que las componentes frecuenciales de dicha

perturbación aproximada en series de Fourier, también deberán estar acotadas por una frecuencia máxima proporcional a κ [18].

En el caso de las fuerzas externas la restricción es más fuerte, ya que ahora se considera acotada a la rapidez de cambio de la segunda derivada, lo que equivale a que las componentes frecuenciales de la perturbación aproximada en series de Fourier, deberán estar acotadas por una frecuencia máxima, la cual será menor que en el caso de los momentos externos.

Por ejemplo, una perturbación que no cumple con la suposición 1 es un impulso, ya que su derivada no está definida, otro ejemplo puede ser una perturbación $\frac{\sin[(\kappa+\epsilon)t]}{(\kappa+\epsilon)^2}$ cuya tercera derivada es $-(\kappa + \epsilon) \cos[(\kappa + \epsilon)t]$ cuya norma Euclídeana es mayor que κ .

Para comenzar con el diseño, reescribimos el modelo dinámico de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= f_1(\zeta_1, Re_3^b, T_T) + \delta_T \\ \dot{\zeta}_2 &= f_2(\Omega, M_e) + \delta_M\end{aligned}\tag{2.11}$$

Definiendo $\zeta_1 = m\dot{X}$, $\zeta_2 = J\Omega$, así como

$$\begin{aligned}f_1 &= mge_3^b - T_T r_3(\Phi) \\ f_2 &= -\Omega \times J\Omega + M_e\end{aligned}\tag{2.12}$$

Siendo $r_3(\Phi)$ la tercera columna de la matriz de rotación R

$$r_3(\Phi) = \begin{bmatrix} c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

Siguiendo la técnica de Inmersión (en el sistema) e Invarianza (de la variedad) (I&I) se definen la dinámica objetivo para el error de estimación de fuerzas externas [19].

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_1 &= \delta_T - \eta_1 + \beta_1(\zeta_1) \\
\tilde{\delta}_2 &= \dot{\delta}_T - \eta_2 + \beta_2(\zeta_1) \\
\tilde{\delta}_3 &= \ddot{\delta}_T - \eta_3 + \beta_3(\zeta_1)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Y el error de estimación de momentos externos

$$\tilde{\delta}_4 = \delta_M - \eta_4 + \beta_4(\zeta_2)$$

donde η_i , $i = 1, 2, 3, 4$ son los estados del estimador y $\beta_i(\zeta_1)$, $i = 1, 2, 3$, $\beta_4(\zeta_2)$ son funciones a definir durante el diseño de la dinámica del estimador mostrada a continuación. Antes de desarrollar la dinámica del error de estimación, se nota que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Implica que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_1 - \beta_1(\zeta_1)) &= \delta_T \\
\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_2 - \beta_2(\zeta_1)) &= \dot{\delta}_T \\
\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_3 - \beta_3(\zeta_1)) &= \ddot{\delta}_T \\
\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_4 - \beta_4(\zeta_2)) &= \delta_M
\end{aligned}$$

Entonces las señales $\eta_i - \beta_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ son la reconstrucción estimada de las fuerzas externas y sus dos primeras derivadas parciales y los momentos externos en $t \rightarrow 0$.

2.2.1. Dinámica del error de estimación

El diseño de la dinámica del error del estimador es un proceso iterativo, para comenzar se detalla el proceso para la dinámica del primer estado del error de estimación, donde la derivada temporal de $\tilde{\delta}_1$ está dada por

$$\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_T - \dot{\eta}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1} \dot{\zeta}_1$$

Luego, sustituyendo $\dot{\delta}_T$ de (2.11) y $\dot{\zeta}_1$ de (2.12) se obtiene

$$\dot{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 + \eta_2 - \beta_2(\zeta_1) - \dot{\eta}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1} [f_1 + \tilde{\delta}_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \quad (2.14)$$

Aquí se define la dinámica del estado η_1 del estimador, en términos de las señales disponibles del sistema. En este caso $\dot{\eta}_1$ está dada por

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 - \beta_2(\zeta_1) - \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1} [f_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \quad (2.15)$$

Sustituyendo la dinámica (2.15) en $\dot{\delta}_1$ (2.14) se obtiene

$$\dot{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 - \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1} \tilde{\delta}_1$$

Ahora se repite el procedimiento anterior para el resto de los errores de estimación en conjunto como sigue, sean las derivadas de los errores de estimación

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \dot{\delta}_T - \dot{\eta}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1} (\dot{\zeta}_1) \\ \dot{\delta}_2 &= \ddot{\delta}_T - \dot{\eta}_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_1} (\dot{\zeta}_1) \\ \dot{\delta}_3 &= \delta_T^{(3)} - \dot{\eta}_3 + \frac{\partial \beta_3}{\partial \zeta_1} (\dot{\zeta}_1) \\ \dot{\delta}_4 &= \dot{\delta}_M - \dot{\eta}_4 + \frac{\partial \beta_4}{\partial \zeta_2} (\dot{\zeta}_2) \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{\zeta}_1$ y $\dot{\zeta}_2$ de (2.11)

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_1 &= \dot{\delta}_T - \dot{\eta}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1}(f_1 + \delta_T) \\
\dot{\delta}_2 &= \ddot{\delta}_T - \dot{\eta}_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_1}(f_1 + \delta_T) \\
\dot{\delta}_3 &= \delta_T^{(3)} - \dot{\eta}_3 + \frac{\partial \beta_3}{\partial \zeta_1}(f_1 + \delta_T) \\
\dot{\delta}_4 &= \dot{\delta}_M - \dot{\eta}_4 + \frac{\partial \beta_4}{\partial \zeta_2}(f_2 + \delta_M)
\end{aligned}$$

Al reescribir tomando de (2.13) a δ_T , $\dot{\delta}_T$, $\ddot{\delta}_T$ y δ_M

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_1 &= \tilde{\delta}_2 + \eta_2 - \beta_2(\zeta_1) - \dot{\eta}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1}[f_1 + \tilde{\delta}_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \\
\dot{\delta}_2 &= \tilde{\delta}_3 + \eta_3 - \beta_2(\zeta_1) - \dot{\eta}_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_1}[f_1 + \tilde{\delta}_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \\
\dot{\delta}_3 &= \delta_T^{(3)} - \dot{\eta}_3 + \frac{\partial \beta_3}{\partial \zeta_1}[f_1 + \tilde{\delta}_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \\
\dot{\delta}_4 &= \dot{\delta}_M - \dot{\eta}_4 + \frac{\partial \beta_4}{\partial \zeta_2}[f_2 + \tilde{\delta}_4 + \eta_4 - \beta_4(\zeta_2)]
\end{aligned}$$

Ahora, tal como se hizo para $\tilde{\delta}_1$ la dinámica de los estados del error de estimación se define como sigue

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= \eta_2 - \beta_2(\zeta_1) + \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1}[f_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \\
\dot{\eta}_2 &= \eta_3 - \beta_3(\zeta_1) + \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_1}[f_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \\
\dot{\eta}_3 &= \frac{\partial \beta_3}{\partial \zeta_1}[f_1 + \eta_1 - \beta_1(\zeta_1)] \\
\dot{\eta}_4 &= \frac{\partial \beta_4}{\partial \zeta_2}[f_2 + \eta_4 - \beta_4(\zeta_2)]
\end{aligned}$$

Se selecciona a $\beta_i(\zeta_1)$, $i = 1, 2, 3$ de tal modo que

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_1} = \Gamma_1, \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_1} = \Gamma_2, \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial \zeta_1} = \Gamma_3, \quad \frac{\partial \beta_4}{\partial \zeta_1} = \Gamma_4 \quad (2.16)$$

Con Γ_i , $i = 1, 2, 3$ matrices definidas positivas.

Sustituyendo los estados del error de estimación y las definiciones en (2.16) en la dinámica del error (lazo cerrado), tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\delta}}_1 &= \tilde{\delta}_2 + \Gamma_1 \tilde{\delta}_1 \\ \dot{\tilde{\delta}}_2 &= \tilde{\delta}_3 + \Gamma_2 \tilde{\delta}_1 \\ \dot{\tilde{\delta}}_3 &= \delta_T^{(3)} + \Gamma_3 \tilde{\delta}_1 \\ \dot{\tilde{\delta}}_4 &= \delta_M + \Gamma_4 \tilde{\delta}_4\end{aligned}$$

Se procede a la obtención de la segunda derivada temporal de $\tilde{\delta}_1$ y en ella se sustituyen los términos obtenidos anteriormente y se tiene

$$\ddot{\tilde{\delta}}_1 = \tilde{\delta}_3 + \Gamma_2 \dot{\tilde{\delta}}_1 + \Gamma_1 \dot{\tilde{\delta}}_1$$

Y finalmente, para el cálculo de la tercera derivada temporal de $\tilde{\delta}_1$, de igual forma que para $\ddot{\tilde{\delta}}_1$ sustituyendo los términos necesarios se obtiene

$$\tilde{\delta}_1^{(3)} = \delta_T^{(3)} + \Gamma_3 \tilde{\delta}_1 + \Gamma_2 \dot{\tilde{\delta}}_1 + \Gamma_1 \ddot{\tilde{\delta}}_1$$

Acomodando términos, tenemos finalmente la dinámica del error de estimación de fuerzas externas

$$\tilde{\delta}_1^{(3)} - \Gamma_1 \ddot{\tilde{\delta}}_1 - \Gamma_2 \dot{\tilde{\delta}}_1 - \Gamma_3 \tilde{\delta}_1 = \delta_T^{(3)} \quad (2.17)$$

La dinámica del estimador de momentos externos se obtiene siguiendo los mismos pasos para la obtención de la dinámica de error de estimación de fuerzas externas.

$$\dot{\tilde{\delta}}_4 - \Gamma_4 \tilde{\delta}_4 = \delta_M \quad (2.18)$$

Bajo la Suposición 1 y seleccionando adecuadamente las matrices definidas positivas de (2.16), se garantiza la convergencia a una vecindad de cero del error de estimación de fuerzas y momentos externos.

2.3. Control de posición

La dinámica del cuadrirotor tiene cuatro entradas (T_i), pero seis grados de libertad. Las salidas del sistema son las tres dimensiones de la posición y el ángulo de guiñada. El siguiente desarrollo está basado en los resultados de [7] y [13]

Para comenzar, se define el error de seguimiento de trayectoria como

$$\tilde{X} = X - X_d$$

donde X_d es la posición espacial deseada.

$$X_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix}$$

La segunda derivada del error de seguimiento de trayectoria es

$$\ddot{\tilde{X}} = ge_3^b - \frac{T_T}{m} r_3(\Phi) + \frac{\delta_T(t)}{m} - \ddot{X}_d \quad (2.19)$$

Esta ecuación tiene tres grados de libertad X y una sola entrada de control T_T . En la literatura [20] esta entrada controla directamente la dinámica vertical, mientras que la dinámica cartesiana se controla modificando el vector de orientación $r_3(\Phi)$. Por lo que se introducirá un control virtual r_{3d} de la siguiente forma [7].

Primero reescribimos el término $T_T r_3$ multiplicándolo por uno

$$T_T r_3 = \frac{T_T}{r_{3d}^\top r_3} [(r_{3d}^\top r_3) r_3]$$

Ahora, sumando y restando el siguiente término al lado derecho de la ecuación (2.19)

$$\frac{1}{m} \frac{T_T}{r_{3d}^\top r_3} r_{3d}$$

Se obtiene

$$\ddot{\tilde{X}} = ge_3^e + \frac{\delta_T(t)}{m} - \ddot{X}_d - \frac{1}{m} \frac{T_T}{r_{3d}^\top r_3} r_{3d} - \frac{1}{m} \Theta$$

en donde el término Θ es

$$\Theta = \frac{T_T}{r_{3d}^\top r_3} [(r_{3d}^\top r_3) r_3 - r_{3d}]$$

Ahora, definiendo T_T y r_{3d} como sigue

$$\begin{aligned} T_T &= u^\top r_3 \\ r_{3d} &= \frac{u}{\|u\|} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Siendo u la nueva entrada de control, resulta que la dinámica de error de seguimiento está dada por

$$\ddot{\tilde{X}} = ge_3^e + \frac{\delta_T(t)}{m} - \ddot{X}_d - \frac{u}{m} - \frac{1}{m} \Theta$$

El objetivo de control puede alcanzarse con

$$u = m \left(K_P \tilde{X} + K_D \dot{\tilde{X}} + ge_3^e - \ddot{X}_d \right) + (\eta_1 - \beta_1) \tag{2.21}$$

Y como consecuencia tenemos

$$\ddot{\tilde{X}} = -K_P \tilde{X} - K_D \dot{\tilde{X}} + \frac{\tilde{\delta}_1}{m} - \frac{1}{m} \Theta$$

Siendo K_P y K_D matrices de ganancias definidas positivas.

Se observa que el control u propuesto, tiene una singularidad en la condición $u = 0$. Sin el estimador de fuerzas y momentos externos, esta condición de singularidad puede ocurrir cuando la aceleración deseada para el cuatrirotor es igual al vector de gravedad. Y en este caso, con el uso del estimador de fuerzas y momentos externos, esta condición puede ocurrir bajo una combinación especial de condiciones iniciales

del cuatrirrotor, la dinámica del estimador y las ganancias tanto del estimador como del controlador. Esta singularidad, es evitada mediante cómputo, estableciendo el valor mínimo de u diferente de cero.

2.4. Control de orientación

Mediante el controlador de la dinámica traslacional se define la orientación deseada de z_b a través de la definición de r_{3d} , lo siguiente es definir la matriz de rotación deseada.

$$R_d = \begin{bmatrix} r_{1d} & r_{2d} & r_{3d} \end{bmatrix}$$

Para ello, se tiene que especificar ya sea r_{1d} o r_{2d} . Las cuatro variables de la dinámica rotacional del cuatrirrotor que pueden ser controladas son, el ángulo de guiñada que es la rotación al rededor del eje z_e , el ángulo de cabeceo que es la rotación al rededor del eje y_e y el ángulo de alabeo que es la rotación al rededor del eje x_e . Definiendo un ángulo de guiñada deseado ψ_d es posible definir una orientación deseada para el eje x_b expresado como

$$\bar{r}_{1d} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_d) \\ \sin(\psi_d) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se debe asegurar que los vectores columna que componen la matriz de rotación deseada R_d sean perpendiculares, entonces, la columna r_{2d} se obtiene como sigue

$$r_{2d} = \frac{r_{3d} \times \bar{r}_{1d}}{|r_{3d} \times \bar{r}_{1d}|} \quad (2.22)$$

Finalmente se obtiene la columna r_{1d}

$$r_{1d} = \frac{r_{2d} \times r_{3d}}{|r_{2d} \times r_{3d}|} \quad (2.23)$$

La señal de control M_e (momento de control) será seleccionada en función de la matriz de rotación deseada obtenida. Para esto es necesario definir el error de orientación.

El error de orientación es el que mide la distancia entre la matriz de rotación deseada R_d y la actual matriz de rotación R . Una posible definición de esta distancia puede construirse a través de la función de navegación introducida en [20] [21], la cual, es definida en términos de

$$E = R_d^\top R \quad (2.24)$$

como

$$\Psi(E) = \frac{1}{2} \text{traza} [I_3 - E]$$

$$\text{donde } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta función de navegación es localmente definida positiva en $R = R_d$, en la región donde el ángulo de rotación entre R y R_d es menor que 180° [22].

El error de orientación toma la siguiente forma [22]

$$e_R = \frac{1}{2} \text{grad} [\Psi(E)] = \frac{1}{2} (E - E^\top)^\vee$$

Siendo $\cdot^\vee : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es el mapeo inverso de $\hat{\cdot}$. Por lo tanto

$$e_R = \frac{1}{2} (R_d^\top R - R^\top R_d)^\vee \quad (2.25)$$

Dadas dos trayectorias (R, Ω) y (R_d, Ω_d) la diferencia entre las velocidades puede ser definida como

$$\tilde{\Omega} = \Omega - R^\top R_d \Omega_d = \Omega - E^\top \Omega_d$$

con

$$\Omega_d = (R_d^\top \dot{R}_d)^\vee \quad (2.26)$$

Finalmente se tiene

$$\begin{aligned}\dot{E} &= E\hat{\dot{\Omega}} \\ \hat{\dot{\Omega}} &= J^{-1}[-\hat{\Omega}J\Omega + M_e + \delta_m] - E^\top \dot{\Omega}_d + \hat{\Omega}E^\top \Omega_d\end{aligned}\tag{2.27}$$

Antes de definir la entrada de control M_e es necesario analizar cómo se propaga el error de estimación a través de la dinámica rotacional.

Primero se observa que la matriz de rotación deseada R_d depende de la señal de control u definida en (2.21) por el término r_{3d} . A su vez, la entrada de control u depende del error de estimación de las fuerzas externas $\tilde{\delta}_T$ y de la fuerza externa δ_T que es desconocida, reacomodando los términos de (2.13) tenemos

$$\eta_1 - \beta_1 = \delta_T - \tilde{\delta}_T$$

Siguiendo con el análisis de propagación del error, tenemos que Ω_d , definida en (2.26) depende del término $\dot{\tilde{\delta}}_T$, re acomodando términos de (2.13) tenemos

$$\eta_2 - \beta_1 = \dot{\delta}_T - \dot{\tilde{\delta}}_T$$

Y finalmente, la primer derivada con respecto del tiempo de la velocidad angular deseada $\dot{\Omega}_d$ depende del término $\ddot{\tilde{\delta}}_T$ y de igual forma, re acomodando los términos de (2.13) tenemos

$$\eta_3 - \beta_3 = \ddot{\delta}_T - \ddot{\tilde{\delta}}_T$$

Al realizar este análisis, es posible saber si se cuenta con las señales necesarias para cerrar el lazo de control de rotación. Ya que el estimador propuesto es capaz de reproducir la primera y la segunda derivada con respecto del tiempo de las fuerzas externas estimadas, se asegura que se cuenta con las señales necesarias disponibles. Entonces se define la entrada de control M_e de la siguiente forma

$$M_e = \hat{\Omega}J\Omega - \eta_4 + \beta_4 + J \left[E^\top \dot{\Omega}_d - \hat{\Omega}E^\top \Omega_d - K_{P_R} e_R - K_{D_R} \tilde{\Omega} \right] \quad (2.28)$$

con K_{P_R} and K_{D_R} matrices de ganancias definidas positivas.

El diagrama de la Figura (2.2) muestra la estructura de control tanto de posición como de orientación en lazo cerrado.

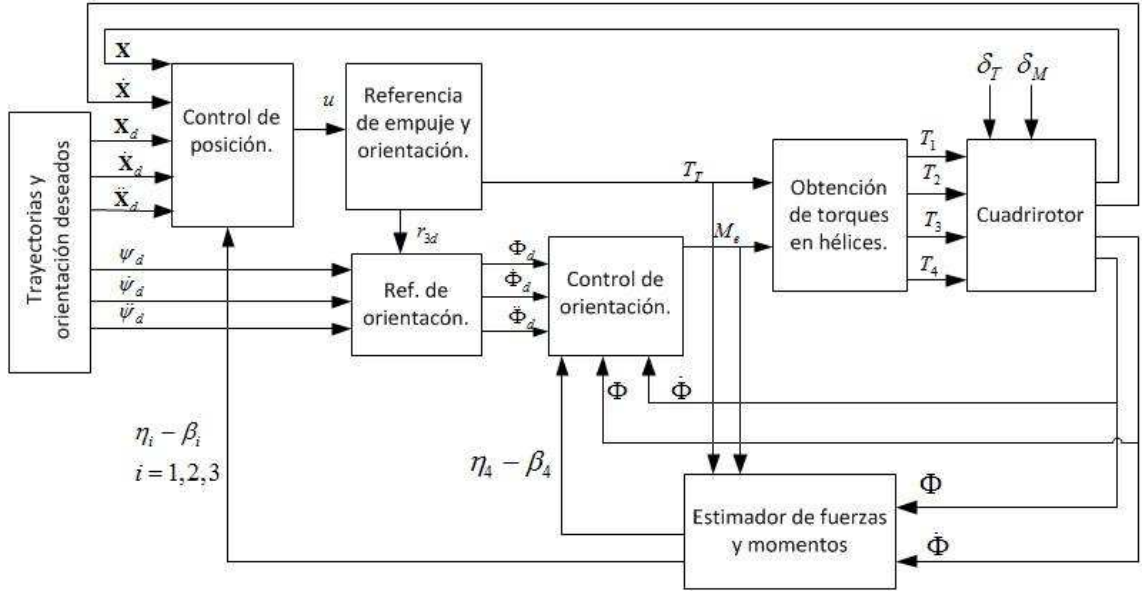


Figura 2.2: Diagrama de control.

Es posible observar que el estimador de fuerzas y momentos externos depende de las señales de control T_T y M_e , así como de la posición y velocidad angular del cuadrirotor Φ y $\dot{\Phi}$ respectivamente; Las señales de control están dadas por (2.3) mientras que la posición y velocidad angular, se obtienen del cuadrirotor mediante el uso de una unidad de referencia de orientación y rumbo (AHRS) a bordo del vehículo aéreo.

2.5. Análisis de estabilidad

La dinámica del cuadrirotor (2.10) en lazo cerrado con la ley de control (2.20) y (2.28) y los estimadores de perturbaciones (2.17) y (2.18) queda descrita por las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{X}}_1 &= \tilde{X}_2 \\
\dot{\tilde{X}}_2 &= -K_P \tilde{X}_1 - K_D \tilde{X}_2 - \frac{1}{m} \frac{T_T}{r_{3d}^\top r_3} [(r_{3d}^\top r_3) r_3 - r_{3d}] + \frac{1}{m} \chi_1 \\
\dot{e}_R &= \frac{1}{2} (\text{traza} [E^\top] I - E^\top) \tilde{\Omega} \\
J \dot{\tilde{\Omega}} &= -K_{PR} e_R - K_{DR} \tilde{\Omega} + \tilde{\delta}_4 \\
\dot{\chi} &= A_\chi \chi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \delta_T^{(3)} \\
\dot{\tilde{\delta}}_4 &= -\Gamma_4 \tilde{\delta}_4 + \dot{\delta}_M
\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde $\tilde{X}_1 = \tilde{X}$ de la sección 2.3, $\chi_1 = \tilde{\delta}_1$, $\chi_2 = \dot{\tilde{\delta}}_1$ y $\chi_3 = \ddot{\tilde{\delta}}_1$

$$A_\chi = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -\Gamma_3 & -\Gamma_2 & -\Gamma_1 \end{bmatrix}$$

Al suponer que el cuatrirotor no realiza maniobras agresivas, se considera que los movimientos angulares son pequeños, por lo tanto, la matriz de rotación R y la matriz de rotación deseada R_d pueden aproximarse en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\Delta R = I + \widehat{\Delta \Phi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\psi & \Delta\theta \\ \Delta\psi & 0 & -\Delta\phi \\ -\Delta\theta & \Delta\phi & 0 \end{bmatrix} \\
\Delta R_d = I + \widehat{\Delta \Phi}_d &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\psi_d & \Delta\theta_d \\ \Delta\psi_d & 0 & -\Delta\phi_d \\ -\Delta\theta_d & \Delta\phi_d & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

De (2.30) se puede obtener a E para ángulos pequeños denotada como ΔE .

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta R_d^\top \Delta R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\tilde{\psi} & \Delta\tilde{\theta} \\ \Delta\tilde{\psi} & 0 & -\Delta\tilde{\phi} \\ -\Delta\tilde{\theta} & \Delta\tilde{\phi} & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta E &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\tilde{\psi} & \Delta\tilde{\theta} \\ \Delta\tilde{\psi} & 1 & -\Delta\tilde{\phi} \\ -\Delta\tilde{\theta} & \Delta\tilde{\phi} & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.31)$$

La ecuación $e_R = \frac{1}{2}(E - E^\top)^\vee$ se puede reescribir para ángulos pequeños como Δe_R , usando (2.31)

$$\Delta e_R = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\phi} \\ \Delta\tilde{\theta} \\ \Delta\tilde{\psi} \end{bmatrix}\quad (2.32)$$

Ahora, al reescribir el tercer término del lado derecho de la igualdad de \dot{X}_2 en (2.29), para ángulos pequeños se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta\Theta &= \frac{T_T}{e_3^\top \Delta R_d^\top \Delta R e_3} [(e_3^\top \Delta R_d^\top \Delta R e_3) \Delta R e_3 - \Delta R_d e_3] \\ \Delta\Theta &= \frac{T_T}{e_3^\top \Delta E e_3} [(e_3^\top \Delta E e_3) \Delta R e_3 - \Delta R_d e_3]\end{aligned}\quad (2.33)$$

donde

$$e_3^\top \Delta E e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\tilde{\psi} & \Delta\tilde{\theta} \\ \Delta\tilde{\psi} & 1 & -\Delta\tilde{\phi} \\ -\Delta\tilde{\theta} & \Delta\tilde{\phi} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\theta} \\ -\Delta\tilde{\phi} \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Entonces, reescribiendo (2.33) y sustituyendo T_T de (2.20), para ángulos pequeños, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta\Theta &= u^\top \Delta R e_3 [\Delta R e_3 - \Delta R_d e_3] \\ \Delta\Theta &= (u_x \Delta\theta - u_y \Delta\phi + u_z) \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\theta} \\ -\Delta\tilde{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.34)$$

donde

$$\Delta\theta = \Delta\tilde{\theta} + \Delta\theta_d$$

$$\Delta\phi = \Delta\tilde{\phi} + \Delta\phi_d$$

Con lo anterior, se reescribe a (2.34) como

$$\Delta\Theta = \left(u_x(\Delta\tilde{\theta} + \Delta\theta_d) - u_y(\Delta\tilde{\phi} + \Delta\phi_d) + u_z \right) \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\theta} \\ -\Delta\tilde{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}\quad (2.35)$$

Sustituyendo (2.35) en $\dot{\tilde{X}}_2$ de (2.29) se obtiene

$$\dot{\tilde{X}}_2 = -K_P \tilde{X}_1 - K_D \tilde{X}_2 - \frac{1}{m} \left(u_x(\Delta\tilde{\theta} + \Delta\theta_d) - u_y(\Delta\tilde{\phi} + \Delta\phi_d) + u_z \right) \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\theta} \\ -\Delta\tilde{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\chi_1}{m}\quad (2.36)$$

Al considerar que $\Delta\tilde{\theta}\Delta\tilde{\phi} \approx 0$ y $\Delta\tilde{\theta}^2 = \Delta\tilde{\phi}^2 \approx 0$ se tiene

$$\dot{\tilde{X}}_2 = -K_P \tilde{X}_1 - K_D \tilde{X}_2 - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\theta} u_z \\ -\Delta\tilde{\phi} u_z \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\chi_1}{m}$$

La ecuación anterior puede reescribirse como

$$\dot{\tilde{X}}_2 = -K_P \tilde{X}_1 - K_D \tilde{X}_2 - \frac{u_z}{m} \mu \Delta e_R + \frac{\chi_1}{m}\quad (2.37)$$

donde

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y con

$$u_z = m(e_3^\top K_P e_3 e_3^\top \tilde{X}_1 + e_3^\top K_D e_3 e_3^\top \tilde{X}_2 + g - \ddot{z}_d) + (e_3^\top \delta_T - e_3^\top \chi_1)$$

Es importante observar que la dinámica vertical no esta acoplada a la dinámica rotacional del vehículo.

Finalmente con (2.37), (2.32) y (2.29) se puede reescribir el sistema en lazo cerrado, para ángulos pequeños, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}_1 &= \tilde{X}_2 \\ \dot{\tilde{X}}_2 &= -K_P \tilde{X}_1 - K_D \tilde{X}_2 - \frac{u_z}{m} \mu \Delta e_R + \frac{\chi_1}{m} \\ \Delta \dot{e}_R &= \frac{1}{2} (2I - \Delta \widehat{e}_R) \tilde{\Omega} \\ \dot{\tilde{\Omega}} &= J^{-1} \left[-K_{PR} \Delta e_R - K_{DR} \tilde{\Omega} + \tilde{\delta}_4 \right] \\ \dot{\chi} &= A_\chi \chi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \delta_T^{(3)} \\ \dot{\tilde{\delta}}_4 &= -\Gamma_4 \tilde{\delta}_4 + \dot{\delta}_M \end{aligned} \tag{2.38}$$

Ahora, se asume también que las velocidades angulares son pequeñas, y se reescribe (2.38) en sistemas separados como sigue.

La dinámica en lazo cerrado, para ángulos pequeños, de la traslación en el plano Cartesiano $x_e y_e$ está dada por

$$\Delta \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I^2 \\ -K_P^2 & -K_D^2 \end{bmatrix} \Delta X - \frac{u_z}{m} \bar{\mu} \Delta e_R + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \chi_1 \tag{2.39}$$

donde

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K_P^2 = \begin{bmatrix} K_{P_x} & 0 \\ 0 & K_{P_y} \end{bmatrix}, K_D^2 = \begin{bmatrix} K_{D_x} & 0 \\ 0 & K_{D_y} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta X = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{21} \\ X_{22} \end{bmatrix}$$

La dinámica vertical queda como

$$\Delta \dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_{P_z} & -K_{D_z} \end{bmatrix} \Delta Z + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_{13} \quad (2.40)$$

con $\Delta Z = [X_{13} \ X_{23}]^\top$.

Las siguientes ecuaciones describen a la dinámica de rotación en lazo cerrado y las dinámicas de los errores de estimación de perturbaciones externas.

$$\Delta \dot{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -J^{-1}K_{PR} & -J^{-1}K_{DR} \end{bmatrix} \Delta \Phi + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} J^{-1} \tilde{\delta}_4 \quad (2.41)$$

$$\dot{\chi} = A_\chi \chi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \delta_T^{(3)} \quad (2.42)$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_4 = -\Gamma_4 \tilde{\delta}_4 + \dot{\delta}_M \quad (2.43)$$

Para una selección adecuada de las ganancias $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$, el sistema nominal de (2.42)

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -\Gamma_3 & -\Gamma_2 & -\Gamma_1 \end{bmatrix} \chi \quad (2.44)$$

es globalmente exponencialmente estable. Por lo tanto, existe una función de Lyapunov de la forma

$$V_\chi = \chi^\top P_\chi \chi$$

con P_χ una matriz simétrica definida positiva, cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (2.44) es

$$\dot{V}_\chi = -\chi^\top \chi$$

Por otro lado, el sistema perturbado (2.42) es últimamente acotado y puede emplearse el Lema 9.2 de [23]. La cota última para χ puede determinarse como sigue. La derivada temporal de V_χ a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (2.42) es

$$\dot{V}_\chi = -\chi^\top \chi + 2P_\chi \chi b$$

con

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \delta_T^{(3)}$$

Al utilizar la Suposición 1, \dot{V}_χ puede acotarse por arriba como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V}_\chi &\leq -\chi^\top \chi + \|2P_\chi \chi\| \kappa_1 \leq -\|\chi\|^2 + 2\lambda_M(P_\chi)\kappa_1 \|\chi\| + \sigma_1 \|\chi\|^2 - \sigma_1 \|\chi\|^2 \\ &\leq -(1 - \sigma_1) \|\chi\|^2, \quad \forall \|\chi\| \geq \frac{2\lambda_M(P_\chi)\kappa_1}{\sigma_1} \end{aligned}$$

con $0 < \sigma_1 < 1$ y $\lambda_M(P_\chi)$ el valor propio más grande de P_χ . Finalmente, del Lema 9.2 de [23] se tiene que

$$\|\chi\| \leq \frac{2\lambda_M(P_\chi)\kappa_1}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \quad (2.45)$$

con $\lambda_m(P_\Phi)$ el valor propio más pequeño de P_Φ

Un análisis similar permite concluir que $\tilde{\delta}_4$ es últimamente acotado. La cota última de $\tilde{\delta}_4$ se obtiene como sigue. Considere la siguiente función de Lyapunov para el sistema (2.43)

$$V_{\delta_4} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}_4^\top \tilde{\delta}_4$$

su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (2.43) es

$$\dot{V}_{\delta_4} = -\tilde{\delta}_4^\top \dot{\tilde{\delta}}_4 + \tilde{\delta}_4^\top \dot{\delta}_M$$

Por lo tanto, \dot{V}_{δ_4} puede acotarse por arriba como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\delta_4} &\leq -\lambda_m(\Gamma_4) \|\tilde{\delta}_4\|^2 + \lambda_M(\Gamma_4) \|\tilde{\delta}_4\| \kappa_2 \\ &\leq -(\lambda_m(\Gamma_4) - \sigma_2) \|\tilde{\delta}_4\|^2, \quad \forall \|\tilde{\delta}_4\| > \frac{\lambda_M(\Gamma_4) \kappa_2}{\sigma_2} \end{aligned}$$

con $\lambda_m(\Gamma_4)$ el valor propio mas pequeño de Γ_4 y $0 < \sigma_2 < 1$.

Del análisis anterior se concluye que $\tilde{\delta}_4$ es últimamente acotado, por lo tanto, nuevamente del Lema 9.2 de [23],

$$\|\tilde{\delta}_4\| \leq \frac{\lambda_M(\Gamma_4) \kappa_2}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}} \quad (2.46)$$

Ahora, con la adecuada selección de las ganancias K_{PR} y K_{DR} , el sistema (2.41) sin perturbaciones es exponencialmente estable. De tal forma que existe una función de Lyapunov

$$V_\Phi = \Delta\Phi^\top P_\Phi \Delta\Phi$$

con P_Φ una matriz simétrica positiva definida.

Para el sistema (2.41) se tiene que la derivada temporal de V_Φ es

$$\dot{V}_\Phi = -\Delta\Phi^\top \Delta\Phi + 2\Delta\Phi^\top P_\Phi \tilde{\delta}_4 \leq -\|\Delta\Phi\|^2 + 2\|\Delta\Phi\| \lambda_M(P_\Phi) \|\tilde{\delta}_4\|$$

Al considerar (2.46) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_\Phi &\leq -\|\Delta\Phi\|^2 + 2\lambda_M(P_\Phi) \frac{\lambda_M(\Gamma_4) \kappa_2}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}} \|\Delta\Phi\| \\ &\leq -(1 - \sigma_3) \|\Delta\Phi\|, \quad \forall \|\Delta\Phi\| \geq 2\lambda_M(P_\Phi) \frac{\lambda_M(\Gamma_4) \kappa_2}{\sigma_2 \sigma_3} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}}, \quad 0 < \sigma_4 < 1 \end{aligned}$$

De tal forma que la cota última para $\Delta\Phi$ es

$$\|\Delta\Phi\| \leq 2\lambda_M(P_\Phi) \frac{\lambda_M(\Gamma_4) \kappa_2}{\sigma_2 \sigma_3} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \quad (2.47)$$

Puede realizarse un análisis similar para la dinámica vertical. La dinámica vertical sin perturbación es exponencialmente estable. Por lo tanto, existe una función de Lyapunov cuadrática

$$V_Z = \Delta Z^\top P_Z \Delta Z$$

tal que

$$\dot{V}_Z = -\Delta Z^\top \Delta Z$$

Para el sistema perturbado se tiene

$$\dot{V}_Z = -\Delta Z^\top \Delta Z + \frac{2}{m} \Delta Z^\top P_Z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_{13}$$

Por lo tanto, al considerar (2.45) se puede escribir

$$\begin{aligned} \dot{V}_Z &\leq -\|\Delta Z\|^2 + \frac{2\lambda_M(P_Z)}{m} \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \|\Delta Z\| \\ &\leq -(1 - \sigma_4)\|\Delta Z\|^2, \quad \forall \|\Delta Z\| \geq \frac{2\lambda_M(P_Z)}{m} \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1\sigma_4} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}}, \quad 0 < \sigma_3 < 1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|\Delta Z\| \leq \frac{2\lambda_M(P_Z)}{m} \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1\sigma_4} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_Z)}{\lambda_m(P_Z)}} \quad (2.48)$$

Finalmente, la dinámica en el plano Cartesiano (2.39) puede analizarse en términos de las cotas últimas de los estados de la dinámica rotacional, vertical y de los errores de estimación (2.47), (2.48), (2.45), respectivamente. Con la adecuada selección de K_P^2 y K_D^2 , la dinámica Cartesiana sin perturbaciones es exponencialmente estable por lo tanto existe

$$V_X = \Delta X^\top P_X \Delta X$$

con P_X una matriz simétrica definida positiva, tal que

$$\dot{V}_X = -\Delta X^\top \Delta X$$

La derivada con respecto al tiempo de V_X , a lo largo de las trayectorias de (2.39) es

$$\dot{V}_X = -\Delta X^\top \Delta X - 2\Delta X^\top P_X \left[\frac{u_z}{m} \bar{\mu} \Delta e_R - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \chi_1 \right]$$

Al considerar (2.48) y (2.45), se tiene

$$|u_z| \leq m \left[\max(K_{P_z}, K_{D_z}) \frac{2\lambda_M(P_Z)}{m} \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1\sigma_4} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_Z)}{\lambda_m(P_Z)}} + g + |\ddot{z}_d| \right] + \|\delta_T\| + \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}}$$

del tal forma que

$$\dot{V}_X \leq -\|\Delta X\|^2 + \frac{2\lambda_M(P_X)}{m} \left(|u_z| 2\lambda_M(P_\Phi) \frac{\lambda_M(\Gamma_4)\kappa_2}{\sigma_2\sigma_3} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} + \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \right) \|\Delta X\|$$

Al utilizar los mismos argumentos de los análisis anteriores se puede concluir que

$$\begin{aligned} \dot{V}_X &\leq -(1 - \sigma_5)\|\Delta X\|^2 \\ \forall \|\Delta X\| &\geq \frac{2\lambda_M(P_X)}{\sigma_5 m} \left(|u_z| 2\lambda_M(P_\Phi) \frac{\lambda_M(\Gamma_4)\kappa_2}{\sigma_2\sigma_3} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} + \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \right) \end{aligned}$$

con $0 < \sigma_5 < 1$. Por lo tanto, ΔX está acotado últimamente como sigue

$$\begin{aligned} \|\Delta X\| &\leq \frac{2\lambda_M(P_X)}{\sigma_5 m} \left(|u_z| 2\lambda_M(P_\Phi) \frac{\lambda_M(\Gamma_4)\kappa_2}{\sigma_2\sigma_3} \sqrt{\frac{\lambda_M(\Gamma_4)}{\lambda_m(\Gamma_4)}} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} + \frac{2\lambda_M(P_X)\kappa_1}{\sigma_1} \sqrt{\frac{\lambda_M(P_\Phi)}{\lambda_m(P_\Phi)}} \right) \sqrt{\frac{\lambda_M(P_X)}{\lambda_m(P_X)}} \end{aligned}$$

Del análisis anterior es posible concluir que todos los estados están últimamente acotados. Las cotas últimas dependen de la magnitud de las fuerzas y momentos externos y de las ganancias de los estimadores y de control de cada uno de los lazos. El análisis anterior es local, dado que se utiliza una aproximación lineal de la dinámica en lazo cerrado.

Capítulo 3

Resultados Experimentales

En este Capítulo se muestran resultados de experimentos realizados para probar el desempeño de la estrategia de control desarrollada en esta tesis. El sistema completo para llevar a cabo dichos experimentos se describe a continuación.

3.1. Plataforma de experimentación

El diagrama de la Figura 3.1 describe la plataforma de experimentación. La plataforma cuenta con un sistema de visión Optitrak, el cual nos proporciona la posición del cuatrirotor y su ángulo de guiñada, esta información es enviada vía USB a una computadora con el software Motive. Motive estima la posición del cuatrirotor y la envía por WiFi al cuatrirotor mediante una aplicación de Visual C++ y el uso de un enrutador inalámbrico.

El cuatrirotor tiene un sistema de control embebido basado en un Procesador Digital de Señales (DSP) (Figura 3.2). El cuatrirotor lleva a bordo un módulo Wi-Fly que recibe la información de posición desde la computadora y mediante un protocolo de comunicación UART es enviada al DSP. El DSP procesa los datos de la posición y guiñada y calcula los controles de posición. El cálculo del algoritmo de control de orientación se realiza a partir de los datos de velocidad y posición angular enviados por la unidad de referencia de orientación y rumbo al DSP.

Una vez calculados los controles de orientación y posición en el DSP, se calcula el

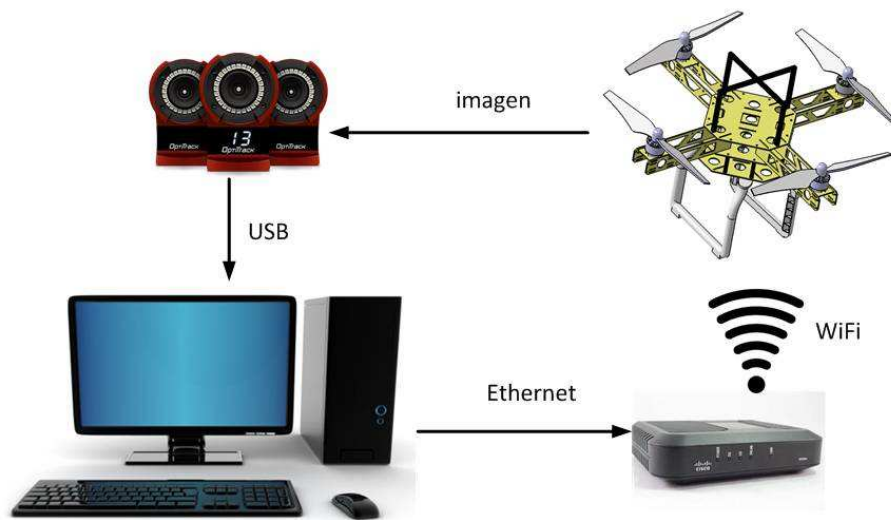


Figura 3.1: Plataforma experimental.

empuje necesario en cada rotor y se traducen estos empujes a señales PWM que se envían a cada controlador electrónico de velocidad (ESC) de los actuadores.

Un segundo módulo WiFly a bordo del cuatrirotor se utiliza para realizar telemetría. Estos datos se envían al enrutador inalámbrico, se procesan y se almacenan en la computadora mediante una aplicación en Visual C++ para ser graficados y analizados posteriormente.

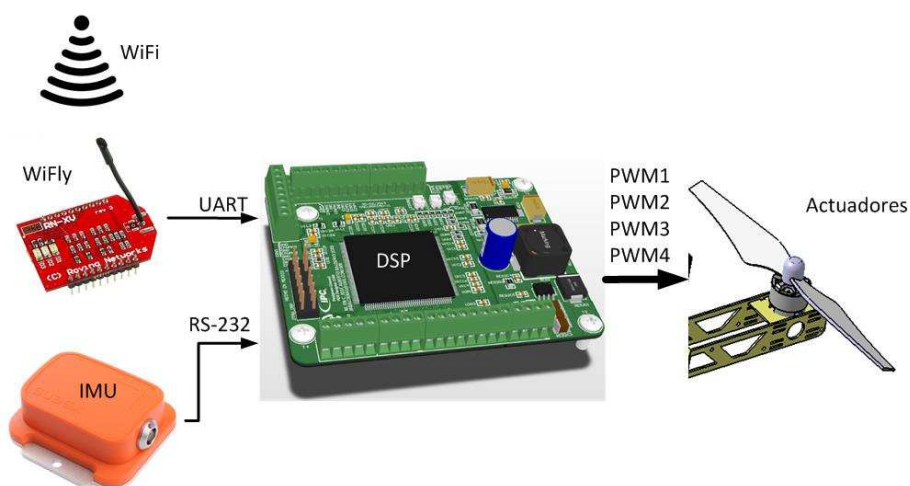


Figura 3.2: Sistema embebido a bordo de un cuatrirotor.

3.1.1. Estructura mecánica del cuatrirotor.

La estructura del cuatrirotor elegida para llevar a cabo la implementación de la ley de control desarrollada en esta tesis es una modificación de la estructura del Feiyu Tech X4 y puede observarse en la Figura 3.3.

Las modificaciones se realizaron para ubicar el centro de masa lo más cercano posible del centro geométrico del cuatrirotor.

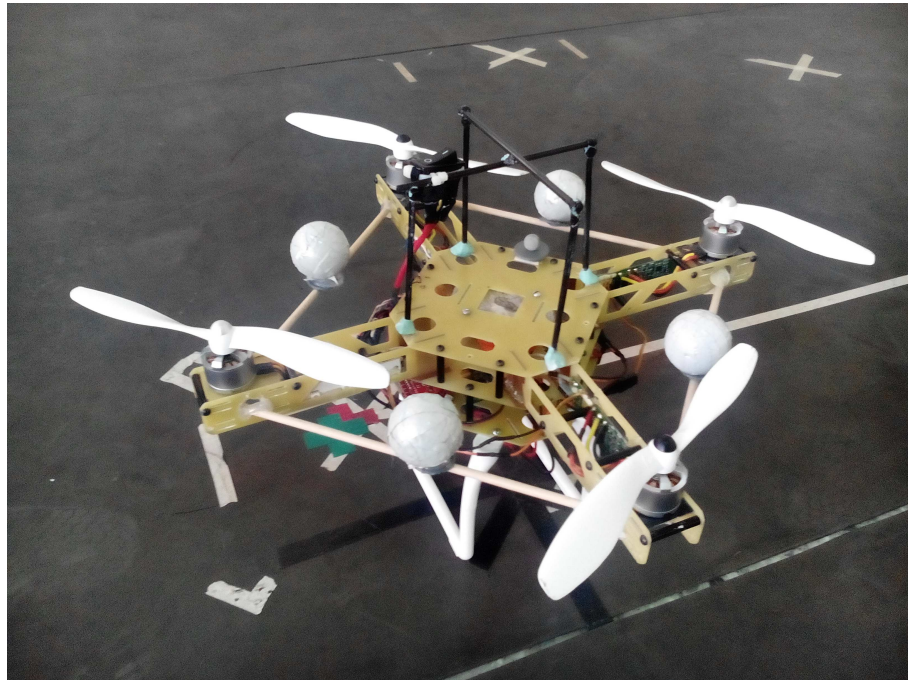


Figura 3.3: Cuatrirotor utilizado para la experimentación.

El marco o estructura del cuatrirotor se manufacturó en la Sección de Mecatrónica con una máquina CNC en baquelita. Los motores sin escobillas, sus controladores y las hélices del cuatrirotor son los del Phantom 1 de DJI. La siguiente tabla muestra los parámetros del cuatrirotor, los parámetros de la matriz de inercia se obtienen por medio de CATIA, mientras que ρ es el valor de la densidad del aire para la Ciudad de México, consideración necesaria para la igualdad (2.2).

Parámetro	Valor
m (kg)	1.4
ℓ (m)	0.15
g (m/s ²)	9.81
ρ (kg/m ³)	1
I_{xx} (kg m ²)	0.04352
I_{yy} (kg m ²)	0.04352
I_{zz} (kg m ²)	0.06777

Tabla Parámetros del cuatrirotor

La siguiente tabla resume los componentes electrónicos a bordo del cuatrirotor, así como los componentes electrónicos de un segundo cuatrirotor denominado cuatrirotor "dummy", el cual se emplea en un experimento descrito en la sección 3.2.

Componente	Proveedor Modelo	Características
AHRS cuatrirotor	XSENSE MTi	Entrega posición y velocidad angular Protocolo de comunicación serial RS-232 Alimentación con 5V de corriente directa Frecuencia de trabajo 120Hz
AHRS cuatrirotor dummy	LORD MicroS-train 3DM-GX4-25	Entrega posición y velocidad angular Protocolo de comunicación serial RS-232 Alimentación con 5V de corriente directa Frecuencia de trabajo 1Hz a 1000 Hz
ESC cuatrirotor	DJI	Referencia en forma de PWM 30Hz 450Hz Alimentación con 11.1V 14.8V Corriente máxima 20A
ESC cuatrirotor dummy	T-MOTOR AIR	Referencia en forma de PWM 600Hz Alimentación con 11.1V 14.8V Corriente máxima 30A
Módulo WiFi	Roving Networks WiFly RN171-XV	Genera una interface entre una comunicación WiFi y un dispositivo con comunicación UART
DSP	Texas Instruments TMS320F28335	Velocidad de operación hasta 150MIPS Alimentación con 1.3V-3.3V CPU 32bits arquitectura Harvard RAM 4Mbytes ROM 128Kbytes 6 módulos PWM de alta resolución 3 Puertos seriales 2 ADC de 12 bits con 8 canales por módulo Interrupciones 58 casos Lenguaje de programación C y C++

Tabla Componentes de los cuatrirotores usados para los experimentos

3.1.2. Implementación

Debido a los requerimientos de respuesta del sistema, la implementación debe realizarse en tiempo real. La arquitectura de tiempo real utilizada está basada en el modelo de Giotto [24] que ha sido implementado en [25] para el control de un cuatrirotor.

La sintonización de las ganancias para los controles de orientación y posición, así como las del estimador de fuerzas y momentos externos se realizó siguiendo la metodología presentada en [13]. La siguiente tabla resume los valores de las ganancias del controlador y del estimador.

Parámetro	Valor
K_P	diag {5.0, 5.0, 5.5}
K_D	diag {7.5, 7.5, 7.5}
K_{P_R}	diag {0.5, 0.5, 1.3}
K_{D_R}	diag {0.145, 0.2, 0.22}
Γ_1	diag {0.06249, 0.06249, 0.03125}
Γ_2	diag {0.3125, 0.3125, 0.2712}
Γ_3	diag {0.75, 0.75, 0.375}
Γ_4	diag {0.15, 0.15, 0.15}

Tabla Ganancias del controlador y del estimador

3.2. Experimentos

Para realizar los experimentos se utilizan dos cuatrirotores, con la misma instrumentación descrita en las secciones previas. En esta Tesis se reportan dos experimentos para ilustrar el desempeño del estimador y la estrategia de control, en el primero se realiza un vuelo de punto a punto del cuatrirotor sin presencia evidente de perturbaciones. En el segundo experimento, uno de los cuatrirotores se utiliza como fuente generadora de perturbaciones y lo llamaremos cuatrirotor dummy. Los motores del cuatrirotor dummy giran a la velocidad necesaria para levantar su peso.

3.2.1. Sin perturbaciones

En este primer experimento sin perturbaciones no se utiliza el cuatrirotor dummy, se realiza para obtener datos del desempeño la estrategia de control más el estimador de fuerzas y momentos externos, cuando no está en presencia de perturbaciones evidentes.

La Figura 3.4 muestra la trayectoria del cuatrirotor seguida durante este experimento. El cuatrirotor despegue en el punto S , cerca de las coordenadas $[0, 0, 0]$, luego se mantiene en vuelo suspendido a $0.7m$ de altura, luego, el cuatrirotor desciende a $0.5m$ y alcanza el punto E manteniendo la misma altura, posteriormente aterriza en el punto E . La distancia entre el punto S y el punto E es de $1m$.

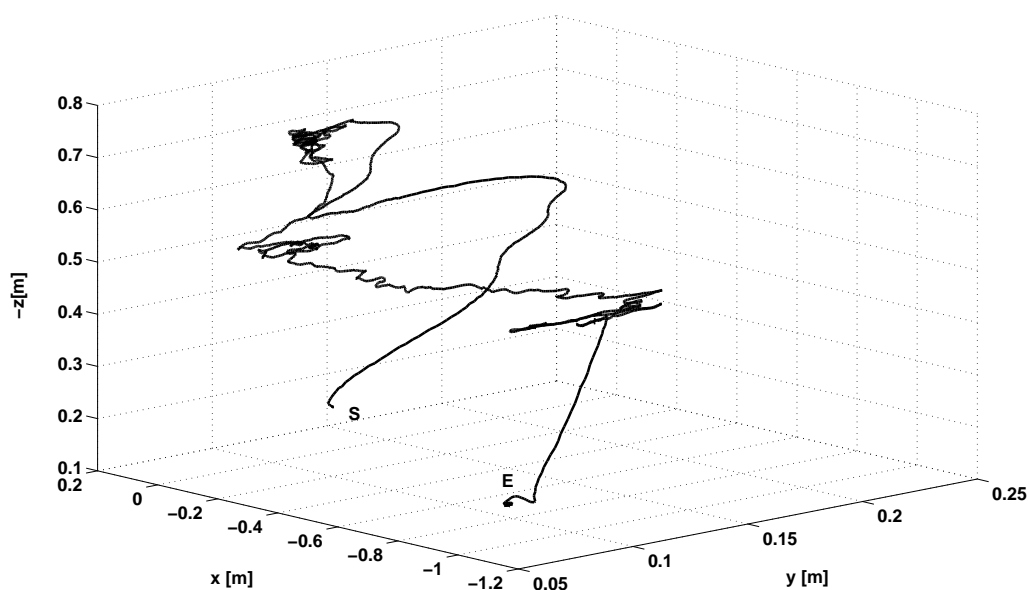


Figura 3.4: Trayectoria seguida por el cuatrirotor.

La Figura 3.5 muestra la evolución temporal de cada componente de las fuerzas externas estimadas, a notarse la lentitud de los transitorios de las gráficas, que permite inferir que existe una cota finita κ_1 , la cota de la norma de la tercer derivada de las fuerzas externas. Finalmente, para este experimento, se muestran en la Figura 3.6 las entradas de control, a notarse que todas ellas están acotadas sin llegar a los tope de

saturación de los actuadores.

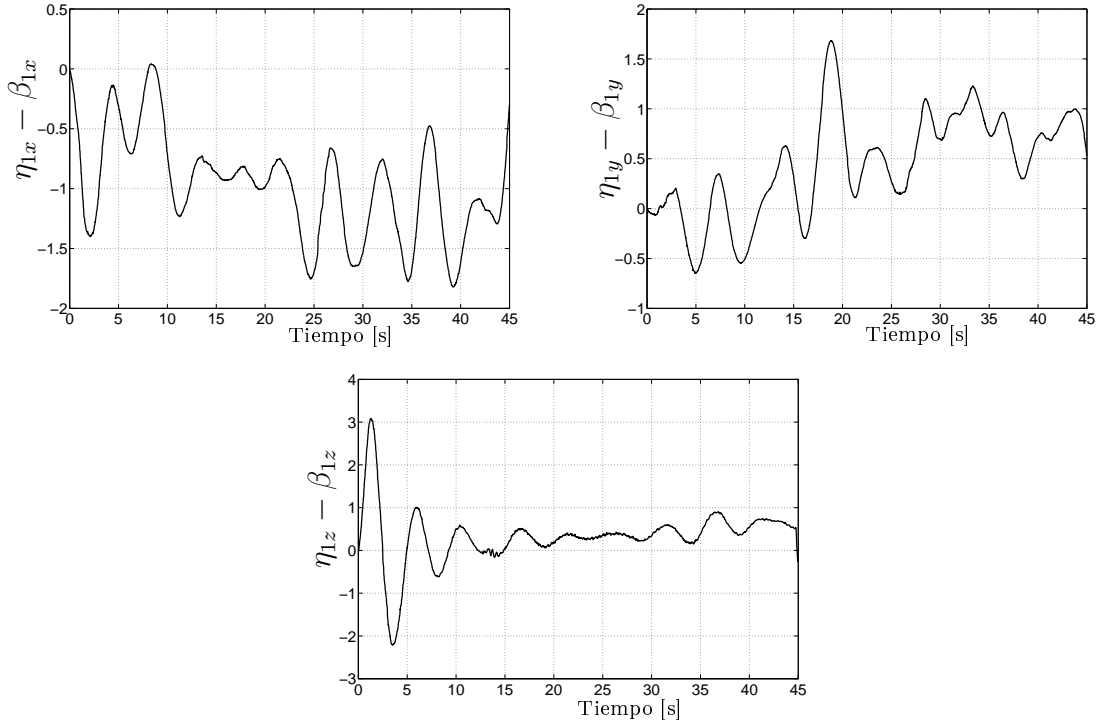


Figura 3.5: Componentes de las fuerzas externas estimadas δ_T sin perturbación.

3.2.2. Con perturbaciones

Durante este segundo experimento se encienden los motores del cuatrirotor dummy y se coloca a $1m$ del punto S sobre el eje y_e en las coordenadas $[0, -1, -0.5]$ (3.10). La trayectoria de vuelo seguida es la misma que en el experimento sin perturbación. La Figura 3.7 muestra la trayectoria seguida en este experimento, se puede notar que los desplazamientos en el eje y_e son mayores que en el experimento previo.

La Figura 3.8 muestra la evolución de las fuerzas externas estimadas cuando el cuatrirotor dummy perturba la dinámica del cuatrirotor. Al comparar la tercer componente de la Figura 3.5 con la tercer componente de la Figura 3.8 se puede observar que las variaciones en la señal del estimador son más pequeñas cuando el cuatrirotor dummy está encendido, sin embargo, la magnitud es más grande.

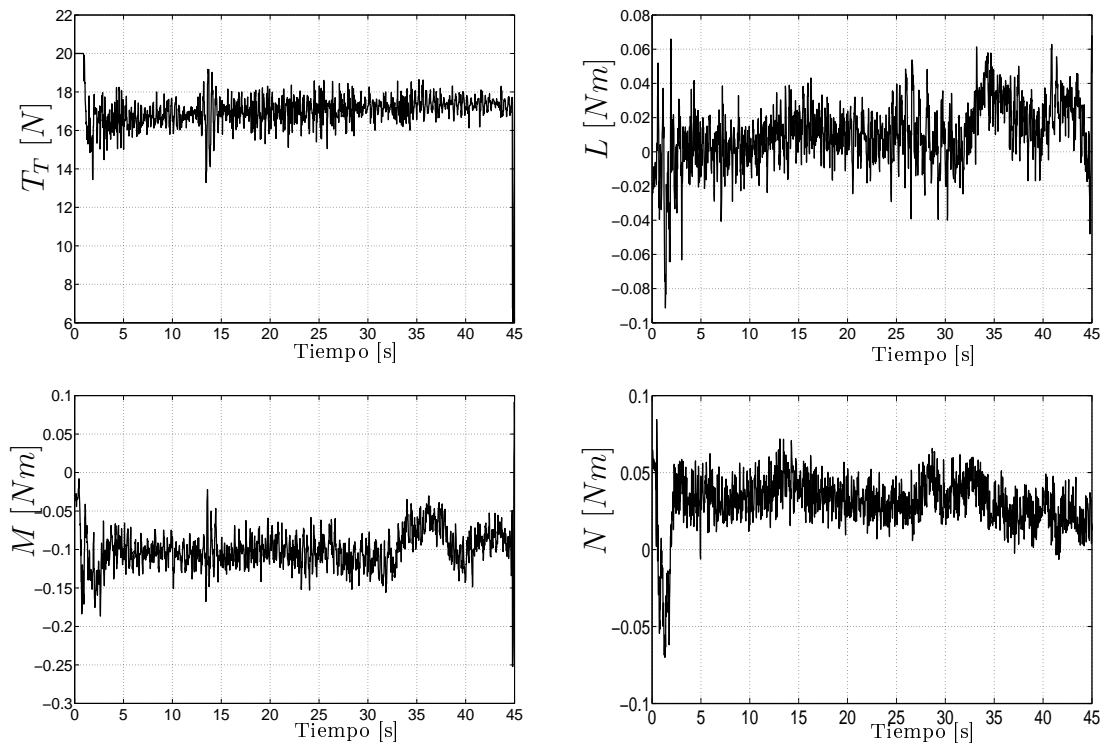


Figura 3.6: Entradas de control sin perturbación. T_T (superior izquierda), L (superior derecha), M (inferior izquierda) and N (inferior derecha).

La Figura 3.9 muestra las entradas de control con perturbación presente. Se puede apreciar que los momentos de control tienen una magnitud mayor que en el experimento previo.

Debido a limitaciones con el ancho de banda de los datos que es posible monitorear, se ha repetido el segundo experimento para obtener los errores de seguimiento tanto para la dinámica traslacional como para la dinámica rotacional, idealmente en las mismas condiciones. Las Figuras 3.11 y 3.12 muestran, respectivamente, la evolución en el tiempo de dichas señales de error, las cuales se encuentran en la vecindad de cero.

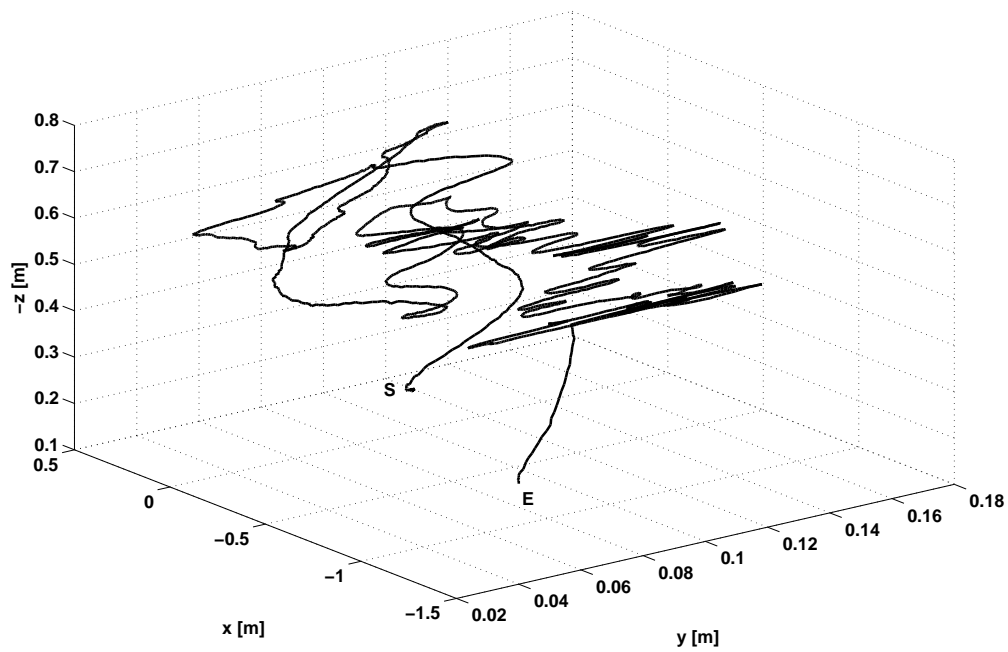


Figura 3.7: Trayectoria seguida por el cuatrirotor bajo la presencia de un cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.

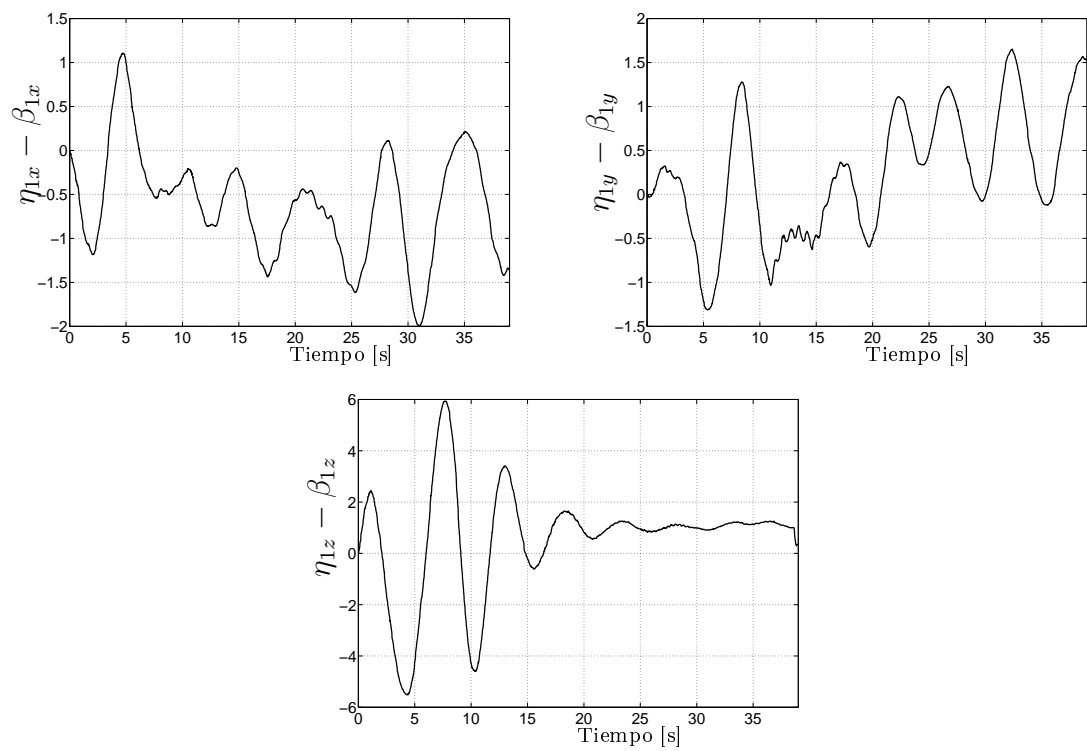


Figura 3.8: Componentes de las fuerzas externas estimadas δ_T bajo la presencia de un cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.

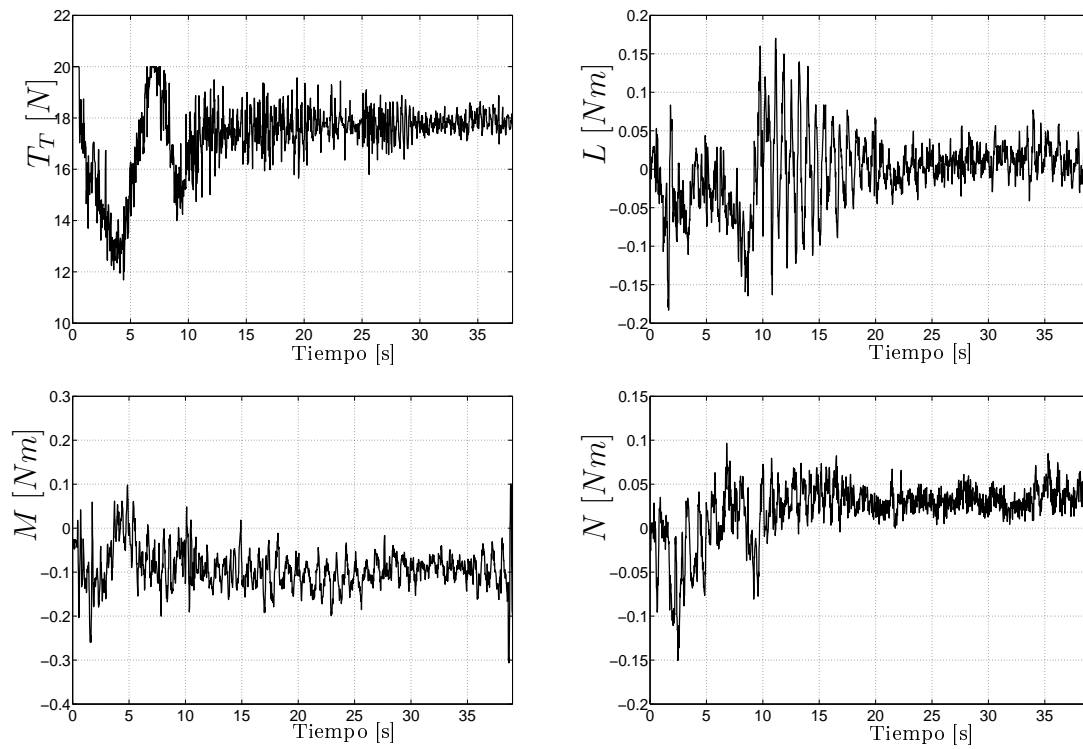


Figura 3.9: Entradas se control. T_T (superior izquierdo), L (superior derecho), M (inferior izquierdo) and N (inferior derecho). Bajo la presencia de un cuatrorotor dummy con sus rotores encendidos.

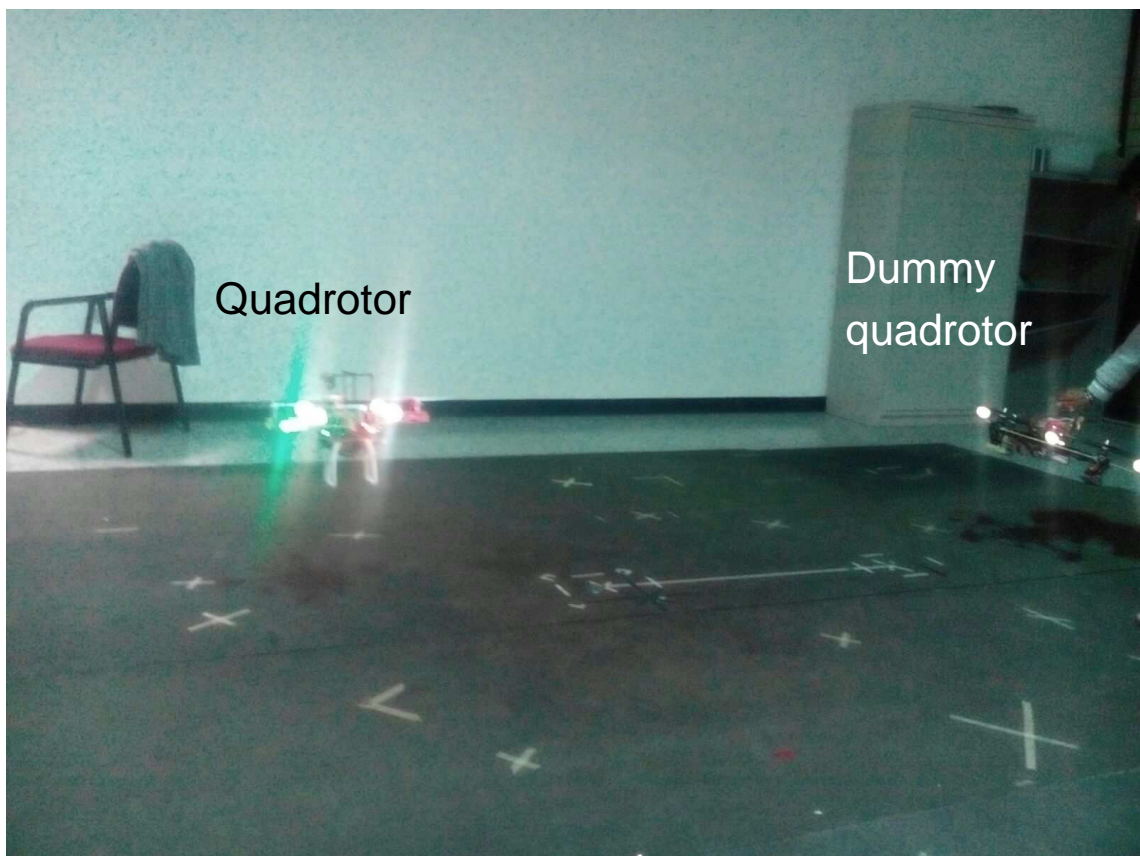
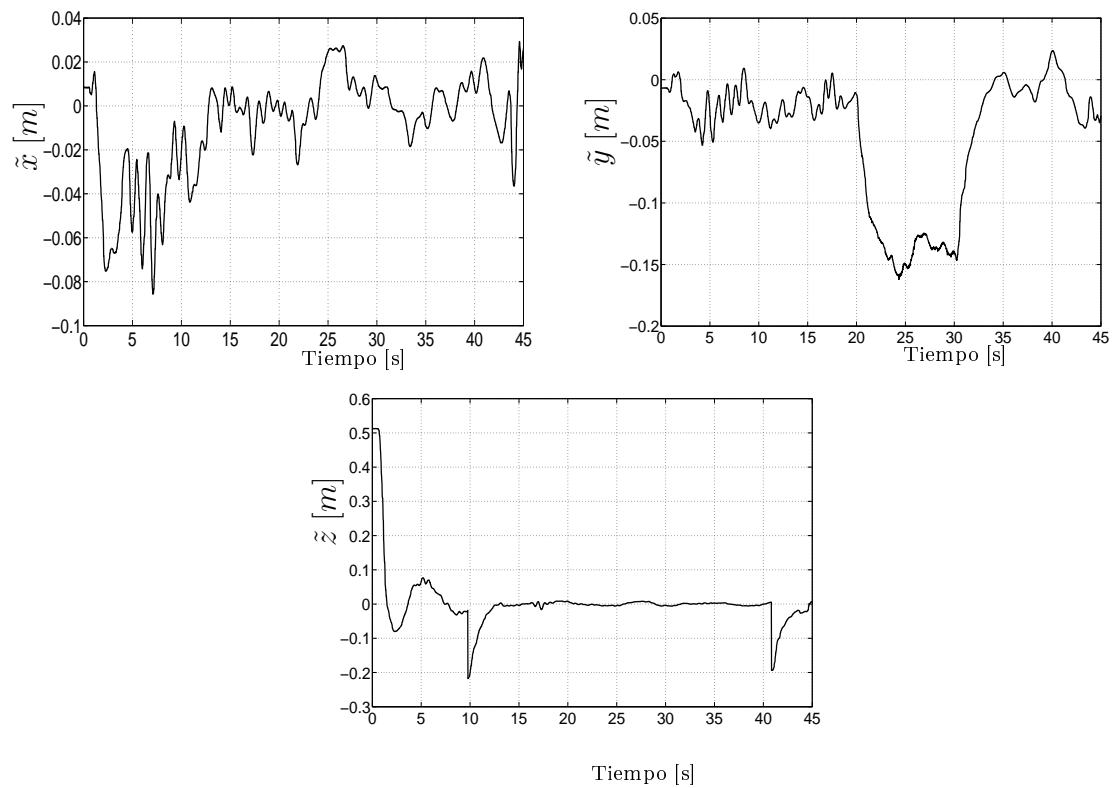


Figura 3.10: Experimento con la presencia del cuatrirotor dummy con sus rotores encendidos.



Tiempo [s]
Figura 3.11: Errores de traslación.

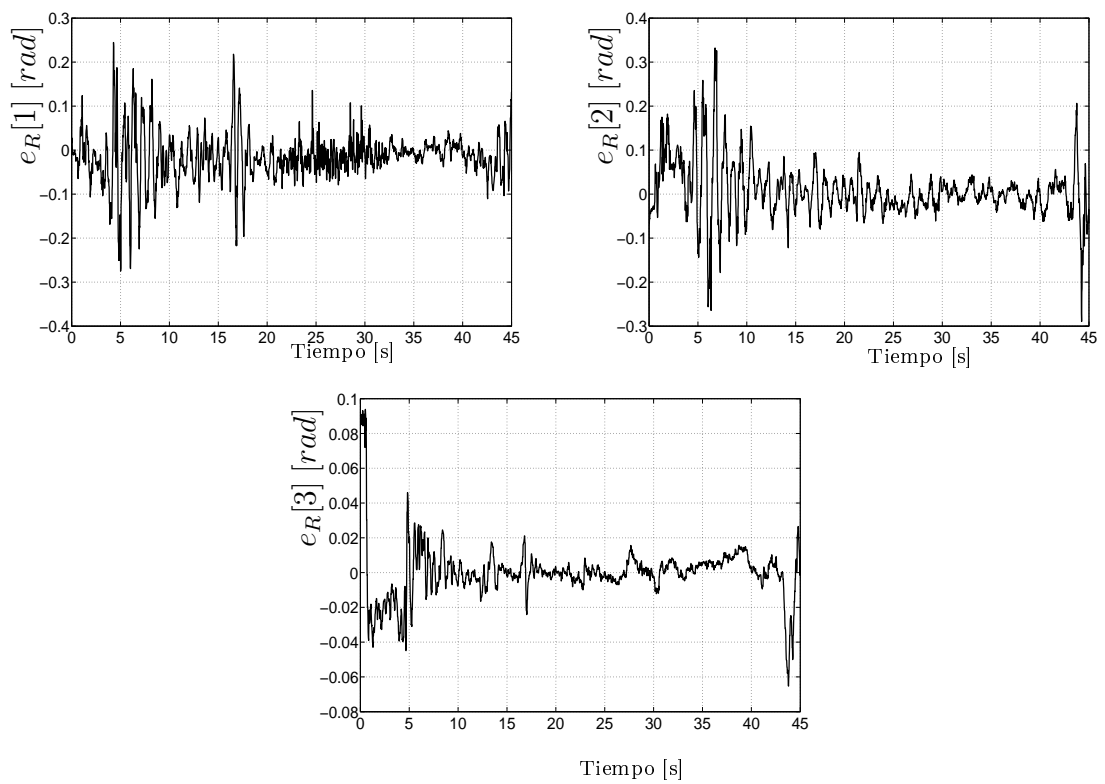


Figura 3.12: Errores rotacionales.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta Tesis se ha desarrollado un controlador no lineal que compensa activamente perturbaciones externas, específicamente momentos y fuerzas externas variantes en el tiempo, mediante el uso de un estimador para cada una de estas perturbaciones, además se ha implementado el esquema de control y estimación de perturbaciones externas en una plataforma experimental con un cuatrirotor verificando un desempeño satisfactorio. Para lo anterior, se han aplicado los conocimientos de todas las ramas de la ingeniería que la mecatrónica implica.

El controlador para la dinámica traslacional es un proporcional derivativo (PD) no lineal, y al ser acoplado a un controlador para la dinámica rotacional, en el espacio de configuración de la orientación del cuatrirotor, $SO(3)$, se evitan las singularidades que se presentan más comúnmente en este tipo de sistemas (desenrollado y representación ambigua de la orientación).

En la sección de mecatrónica del CINVESTAV ya se ha realizado anteriormente la implementación del controlador en el espacio $SO(3)$ para la orientación de un cuatrirotor [7], así como la de un estimador pero para perturbaciones constantes [13], en esta tesis se hacen variaciones para combinar los resultados satisfactorios obtenidos con el controlador en el espacio $SO(3)$ y esta vez, tomando en cuenta perturbaciones variantes en el tiempo.

En la implementación experimental, el acceso a los estados del sistema es de gran

importancia, ya que estas señales son necesarias para propagar las derivadas temporales del error de estimación reconstruidas por el estimador de fuerzas y momentos externos por la dinámica del vehículo aéreo.

Una de las principales motivaciones para contar con estimadores de perturbaciones externas y cancelarlas mediante leyes de control diseñadas para ello, es que cuando se realizan vuelos con más de un cuatrorotor, el desempeño se ha visto claramente deteriorado. Con este controlador, más estimador, se alcanzó a volar con un cuatrorotor *dummy* a menos de un metro de distancia de rotor a rotor, lo cual es un avance con respecto a pruebas anteriores realizadas en la sección.

No obstante, el desempeño del controlador, depende de forma considerable del estado de carga de la batería. Esta desventaja afecta el procedimiento de sintonización de ganancias del controlador y del estimador de perturbaciones.

4.1. Trabajo futuro

Las siguientes propuestas, están dadas en base a los resultados obtenidos, y utilidades que se le pueden dar a dichos resultados.

- Probar el desempeño de los estimadores de momentos y fuerzas externos variantes en el tiempo de esta tesis combinados con técnicas de control diferentes a las presentadas en esta tesis.
- Realizar la instrumentación y actualización de software necesarios para probar los estimadores aquí presentados más una ley de control, de forma experimental en exteriores.
- Planificar tareas de navegación en conjunto con dos o más cuatrorotores con un fin en específico, como manipulación de objetos en el entorno, vigilancia, etc.
- Realizar la instrumentación necesaria para monitorear el estado de la batería del cuatrorotor usado para experimentación y con esto evitar accidentes y que afecte los resultados experimentales al probar estrategias de control.

Apéndice A

Propiedades del mapeo $\hat{\cdot}$

El mapeo $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ se define tal que $\hat{x}y = x \times y$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^3$. Esto identifica el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ con \mathbb{R}^3 usando el producto cruz en \mathbb{R}^3 . La inversa del mapeo $\hat{\cdot}$ se denomina como el mapeo $\cdot^\vee : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Algunas otras propiedades son listadas a continuación.

$$\begin{aligned}\hat{x}y &= x \times y = -y \times x = -\hat{y}x, \\ \frac{1}{2}\text{traza} [\hat{x}\hat{y}] &= x^\top y, \\ \text{traza} [A\hat{x}] &= \frac{1}{2}\text{traza} [\hat{x}(A - A^\top)] = -x^\top (A - A^\top)^\vee, \\ \hat{x}A + A^\top \hat{x} &= (\{\text{traza}[A]I_{3 \times 3} - A\}x)^\wedge, \\ R\hat{x}R^\top &= (Rx)^\wedge\end{aligned}$$

Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y $R \in SO(3)$.

Bibliografía

- [1] V. Michael, Nathan Kumar. Control of ensembles of aerial robots. *Proceedings of the IEEE*, 99:1587 – 1602, 2011.
- [2] Xiwang Dong, Yan Zhou, Zhang Ren, and Yisheng Zhong. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies. *Control Engineering Practice*, 46:26–36, 2016.
- [3] Juan A Vargas-Jacob, José J Corona-Sánchez, and H Rodríguez-Cortés. Experimental implementation of a leader-follower strategy for quadrotors using a distributed architecture. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pages 1–18, 2016.
- [4] Suseong Kim, Seungwon Choi, and H Jin Kim. Aerial manipulation using a quadrotor with a two dof robotic arm. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 4990–4995. IEEE, 2013.
- [5] Syohei Shimahara, Robert Ladig, Leewiwatwong Suphachart, Shinichi Hirai, and Kazuhiro Shimonomura. Aerial manipulation for the workspace above the airframe. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1453–1458. IEEE, 2015.
- [6] Riccardo Spica, Antonio Franchi, Giuseppe Oriolo, Heinrich H Bühlhoff, and Paolo Robuffo Giordano. Aerial grasping of a moving target with a quadrotor uav. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 4985–4992. IEEE, 2012.

- [7] Marco Augusto Vásquez Beltran. Seguimiento de una referencia visual en un plano con un cuatrorotor. Master's thesis, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2015.
- [8] Jinglin Luo, Longfei Zhu, and Guirong Yan. Novel quadrotor forward-flight model based on wake interference. *AIAA Journal*, 53(12):3522–3533, 2015.
- [9] Kimon P Valavanis and George J Vachtsevanos. *Handbook of unmanned aerial vehicles*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2014.
- [10] Bin Xu, Xiyuan Huang, Danwei Wang, and Fuchun Sun. Dynamic surface control of constrained hypersonic flight models with parameter estimation and actuator compensation. *Asian Journal of Control*, 16(1):162–174, 2014.
- [11] J. Han. From pid to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(3):900–906, March 2009.
- [12] Fabio Ruggiero, Jonathan Cacace, Hamid Sadeghian, and Vincenzo Lippiello. Passivity-based control of {VToL} {UAVs} with a momentum-based estimator of external wrench and unmodeled dynamics. *Robotics and Autonomous Systems*, 72:139 – 151, 2015.
- [13] Julio Rogelio Guadarrama Olvera. Técnicas avanzadas de control para seguimiento de trayectorias de un vehículo aéreo de cuatro rotores. Master's thesis, Centro de investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2013.
- [14] José Juan Corona Sánchez. Control en el plano del vehículo aéreo de ala rotativa impulsado por cuatro rotores. Master's thesis, CINVESTAV, 2013.
- [15] Brian L Stevens, Frank L Lewis, and Eric N Johnson. *Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*. John Wiley & Sons, 2015.

- [16] Nalin A Chaturvedi, Amit K Sanyal, and N Harris McClamroch. Rigid-body attitude control. *IEEE Control Systems*, 31(3):30–51, 2011.
- [17] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*, volume 3. wiley New York, 2006.
- [18] BP Lathi. *Introducción a la Teoría de Comunicaciones*. 2001.
- [19] Alessandro Astolfi and Romeo Ortega. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(4):590–606, 2003.
- [20] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N Harris McClamroch. Nonlinear robust tracking control of a quadrotor uav on se (3). *Asian Journal of Control*, 15(2):391–408, 2013.
- [21] Daniel E Koditschek. The application of total energy as a lyapunov function for mechanical control systems. *Contemporary mathematics*, 97:131, 1989.
- [22] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N. Harris Mcclamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on se(3) for extreme maneuverability. In *Proc. IFAC World Congress*, 2010.
- [23] Hassan K Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [24] Thomas A Henzinger, Benjamin Horowitz, and Christoph Meyer Kirsch. Giotto: A time-triggered language for embedded programming. In *International Workshop on Embedded Software*, pages 166–184. Springer, 2001.
- [25] J.Rogelio Guadarrama-Olvera, José J. Corona-Sánchez, and H. Rodríguez-Cortés. Hard real-time implementation of a nonlinear controller for the quadrotor helicopter. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 73(1-4):81–97, 2014.
- [26] Richard Von Mises. *Theory of flight*. Courier Corporation, 1959.