CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

Diseño concurrente de un robot paralelo con eslabones flexibles

Tesis que presenta:

Héctor Cervantes Culebro

Para obtener el grado de:

Doctorado

En la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:

Dr. Carlos Alberto Cruz Villar

Ciudad de México Junio, 2018

Agradecimientos

"He tenido miles de problemas en mi vida, la mayoría de los cuales nunca sucedieron en realidad" Mark Twain.

A mis padres Humberto y María Concepción que me han brindado apoyo, cariño e ímpetu para seguir adelante en mis proyectos. Por infundir la necesidad de crecer todos los días y no claudicar ante los problemas.

A mi hermano Humberto por ser un ejemplo a seguir moldeando en gran medida mi espíritu y carácter. A mi hermana Marisol por las atenciones y el resguardo incondicional.

A mi asesor, Dr. Carlos Alberto Cruz Villar por compartir su experiencia conmigo. Así como la excelente guía del trabajo con el propósito de obtener resultados satisfactorios.

Agradezco a los Doctores Gerardo Silva Navarro, Alejandro Rodríguez Ángeles, Miguel Gabriel Villareal Cervantes, Martín Velasco Villa por aceptar ser mis sinodales y brindarme la oportunidad de aprender de ellos debido a sus comentarios y sugerencias en mi trabajo de tesis.

Al *CINVESTAV* por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado.

Al *CONACYT*, por haberme otorgado una beca para solventar mis gastos durante mis estudios de doctorado.

Resumen

El propósito de esta tesis consiste en establecer una metodología de diseño de sistemas mecatrónicos en donde los parámetros estructurales, así como los parámetros del controlador se obtienen de manera conjunta para resolver un problema multi-criterio. A esta metodología se le conoce como diseño concurrente y es aplicada a un robot paralelo planar de cinco eslabones, dos actuados y dos no actuados, en el cual los eslabones actuados se consideran rígidos y los eslabones no actuados se consideran flexibles.

El problema propuesto es minimizar el par proporcionado por los motores en los eslabones actuados, así como la magnitud del desplazamiento transversal en los eslabones no actuados del robot paralelo para el seguimiento de una trayectoria en alta velocidad. Lo anterior, se formula como un problema de optimización dinámica no-lineal multi-criterio resuelto mediante un algoritmo evolutivo sujeto a restricciones estáticas, dinámicas, condiciones iniciales y de frontera. El error en el seguimiento de la trayectoria se considera como una restricción adicional a las restricciones inherentes del sistema como por ejemplo la cadena cinemática cerrada o el máximo par que puede suministrar el motor.

Para este problema se consideran 35 variables de diseño, entre las cuales se encuentran las longitudes entre los centros de las articulaciones de revoluta del robot, los grosores de los eslabones actuados, el área de la sección transversal de los eslabones no-actuados, variables que determinan el centro y el ángulo del centro de masa de los eslabones no actuados y las ganancias del controlador PID para cada uno de los motores.

Los resultados indican que para reducir la vibración, los eslabones no-actuados deben reducir su longitud generando un aumento en la longitud de los eslabones actuados de tal manera que en conjunto puedan llegar a los puntos deseados de la trayectoria propuesta. Además, se ha observado que aumentar el ángulo al centro de masa en los eslabones actuados aumenta las vibraciones en los eslabones no actuados.

Abstract

The purpose of this thesis is to establish a mechatronic design methodology in which the structural parameters, as well as the controller parameters are jointly obtained to solve a multi-criterion problem. This methodology is known as concurrent design and is applied to a parallel five-link planar robot, for which the actuated links are rigid and the unactuated links are modeled as flexible ones.

The proposed problem is to minimize the torque provided by the motors to the links, as well as, the the magnitude of the transverse displacement in the unactuated links of the parallel robot to follow a high speed trajectory. The above is formulated as a multi-criterion nonlinear dynamic optimization problem, solved by an evolutionary algorithm subject to static and dynamic constraints, initial conditions and boundary conditions. The trajectory tracking error is considered as an additional constraint to the inherent ones, such as the closed kinematic chain or the maximum torque that the motor can supply.

For this problem, 35 design variables are considered. These variables are the lengths between the revolute joints of the robot, the thicknesses of the actuated links, the cross sectional area of the non-actuated links, as well as the geometric variables that determine the center and angle of the center of mass of the actuated links and the gains of the PID controller for both motors.

The results indicate that to reduce the vibration, the unactuated links must reduce their length by generating an increase in length of the actuated links in such a way that together they can reach the desired points of the proposed trajectory. In addition, it has been observed that increasing the angle to the center of mass in the actuated links increases the vibrations in the unactuated links.

Contenido

Lista de figuras **XI**

1. Introducción **1**
1.1. Métodos de diseño . . . 3
1.1.1. Prueba y error . . . 4
1.1.2. Aproximación mediante un atlas . . . 4
1.1.3. Espacio de los parámetros . . . 5
1.1.4. Diseño óptimo . . . 6
1.1.5. Diseño para el control . . . 6
1.1.6. Diseño concurrente de robots flexibles . . . 10
1.2. Planteamiento del problema . . . 11
1.3. Objetivo de la tesis. . . . 12
1.4. Metas . . . 12
1.5. Contribuciones del trabajo. . . . 13
1.6. Organización de la tesis . . . 13

2. Modelado **17**
2.1. Introducción . . . 17
2.1.1. Cinemática . . . 18
2.1.2. Cinética . . . 22
2.1.3. Ecuaciones diferenciales parciales . . . 27

3. Diseño concurrente de un robot rígido para una tarea de alta velocidad **31**
3.1. Introducción . . . 31
3.2. Problema de optimización . . . 33
3.2.1. Descripción del problema . . . 33
3.2.2. Función objetivo . . . 35
3.2.3. Restricciones . . . 38
3.3. Técnicas de manejo de restricciones . . . 39
3.3.1. Primer técnica de manejo de restricciones Feasibility Rules (FR) 40
3.3.2. Segunda técnica de manejo de restricciones, ε-Constrained method 41

3.3.3. Tercer técnica de manejo de restricciónes, Stochastic Ranking 42
3.4. Resultados y discusión 43
3.4.1. Comparación entre las tres técnicas de manejo de restricciones 44
3.4.2. Análisis de los resultados 52
3.5. Conclusiones 59

4. Diseño concurrente de un robot paralelo planar con eslabones flexibles 61
4.1. Introducción 61
4.2. Validación de la métodología propuesta 62
4.3. Problema de optimización 64
4.4. Descripción de plataforma experimental 66
4.4.1. Caracterización de motores 68
4.4.2. Caracterización de sensores de corriente 69
4.5. Resultados y discusión 70

5. Conclusiones y perspectivas de trabajo futuro 83
5.1. Trabajo Futuro 85

Bibliografía 87

A. 97
A.0.1. Circuitos eléctricos utilizados 97

B. 101
B.1. Cálculo de masas 101
B.2. Cálculo de longitud l_c y ángulo γ_i 102
B.3. Cálculo de inercias 103
B.4. Dibujos técnicos 104

C. 115
C.1. Análisis de Elemento Finito con ANSYS Workbench 115
C.1.1. Solución óptima A 115
C.1.2. Solución óptima B 121

D. 127
D.1. Artículos de Revista 127
D.2. Artículos de Congreso 127

Lista de figuras

1.1. Esquema de metodología recursiva [1]. 8

2.1. Robot paralelo de cinco eslabones 19
2.2. Robot paralelo de cinco eslabones con deformaciones 22

3.1. Robot paralelo con cinco eslabones 33
3.2. Representación esquemática de los eslabones $i = [1, 2]$. Vista frontal(a) y lateral (b). 34
3.3. Representación esquemática de los eslabones $j = [3, 4]$. Vista isométrica. 35
3.4. Bonferroni-Dunn post-hoc test con base en los resultados finales, la relación de progreso (PR) y los valores EVALS son obtenidos para las tres variantes DE en el experimento 1. 47
3.5. Bonferroni-Dunn post-hoc test con base en los resultados finales, la relación de progreso (PR) y los valores EVALS son obtenidos para las tres variantes DE en el experimento 2. 49
3.6. Bonferroni-Dunn post-hoc test con base en los resultados finales, la relación de progreso (PR) y los valores EVALS son obtenidos para las dos variantes DE en el experimento 3. 51
3.7. Par en ambos motores cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm 53
3.8. Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm 54
3.9. Velocidad angular deseada vs velocidad angular real, u_{max} =5 Nm en motor M_1 54
3.10. Velocidad angular deseada vs velocidad angular real, u_{max} =5 Nm en motor M_2 55
3.11. Error elevados al cuadrado en los ejes coordenados x y y, u_{max} =5 Nm 55
3.12. Error angular articular, u_{max} =5 Nm 56
3.13. Error en velocidad angular articular, u_{max} =5 Nm 56
3.14. Error en los ejes coordenados x y y, u_{max} =5 Nm 57
3.15. Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 2$ Nm 57
3.16. Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 1$ Nm 57
3.17. Par en el Motor 1 con dos límites diferentes 58
3.18. Par en el Motor 2 con dos límites diferentes 58

4.1. Par en ambos motores cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm 63
4.2. Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm 63
4.3. Errores 64
4.4. Prototipo óptimo construido 66
4.5. Caracterización de motor Bodine 1 68
4.6. Caracterización de motor Bodine 1 68
4.7. Caracterización de motor Bodine 2 68
4.8. Caracterización de motor Bodine 2 69
4.9. Caracterización de sensor de corriente motor 1 69
4.10. Caracterización de sensor de corriente motor 2 69
4.11. Soluciones no dominadas A y B seleccionadas del frente de Pareto . . 71
4.12. Trayectoria en el efector final 72
4.13. Trayectoria simulada vs deseada 73
4.14. Trayectoria deseada vs experimental 73
4.15. Posición del robot en los dos extremos de la trayectoria deseada . . . 74
4.16. Deformación simulada en Adams para la posición mostrada en 4.15 (a) 74
4.17. Perfil de par en el motor M_1 75
4.18. Perfil de par en el motor M_2 76
4.19. Deformación $\hat{w}_3$ asociada al eslabón a_3 77
4.20. Deformación $\hat{w}_4$ asociada al eslabón a_4 77
4.21. Aceleraciones angulares deseadas en los actuadores 78
4.22. Trayectoria deseada vs simulada para solución B. 79
4.23. Perfiles simulados de par para la solución B 79
4.24. Deformaciones $\hat{w}_3$ y $\hat{w}_4$ asociadas a los eslabones a_3 y a_4 respectivamente, para la solución B. 80

A.1. Diagrama eléctrico de TL494 utilizado 97
A.2. Esquemático circuito lógico 98
A.3. Esquemático etapa de potencia 99

B.1. Chumacera para fijar motor 105
B.2. Contenedor de rodamientos 106
B.3. Pieza para sujetar eslabones flexibles 107
B.4. Flecha para motor M_1 108
B.5. Flecha para motor M_2 109
B.6. Pieza soporte 110
B.7. Diseño óptimo A, eslabón a_1 111
B.8. Diseño óptimo A, eslabón a_2 112
B.9. Diseño óptimo B, eslabón a_1 113
B.10. Diseño óptimo B, eslabón a_2 114

C.1. Mallado, 14444 Nodos, 6366 Elementos 116
C.2. Modos de vibración 117
C.3. Frecuencia 2.3102 Hz 118
C.4. Frecuencia 7.1151 Hz 118

C.5. Frecuencia 16.091 Hz 119
C.6. Frecuencia 17.56 Hz 119
C.7. Frecuencia 33.028 Hz 120
C.8. Frecuencia 42.376 Hz 120
C.9. Frecuencia 47.501 Hz 121
C.10. Mallado, 12279 Nodos, 5042 Elementos 122
C.11. Modos de vibración 123
C.12. Noveno modo de acuerdo a la Fig.C.8 124
C.13. Doceavo modo de acuerdo a la Fig.C.8 124
C.14. Veinteavo modo de acuerdo a la Fig. C.8 125

Capítulo 1

Introducción

Un robot paralelo está compuesto por dos o más cadenas cinemáticas cerradas, en el cual el efector final está conectado a una base fija por al menos dos cadenas cinemáticas independientes. El trabajo teórico en mecanismos paralelos data desde 1645 realizado por Christopher Wren, después por Cauchy en 1813 y por Lebesgue en 1867. Claramente la época no estaba lista para aplicaciones prácticas de este tipo de estructura. La primera aplicación fue propuesta por Gough, la cual era una máquina para probar neumáticos, aunque las estructuras mecánicas fueron realmente puestas a la práctica en 1970 para un simulador de vuelo y hasta la fecha nuevas topologías de robots paralelos se siguen diseñando como el Exechon [2].
La contraparte de los robots paralelos, son los robots seriales más ampliamente utilizados en la industria por presentar una topología más sencilla que los robots paralelos; en realidad el desempeño que se puede esperar de un robot paralelo radica fuertemente en el tipo de estructura mecánica e incluso en mayor grado de su dimensionamiento. Los robots seriales presentan la característica de que sólo pueden estar conectados exclusivamente al eslabón anterior y al siguiente, con excepción del primer eslabón el cuál se suele fijar a un soporte y el último eslabón, cuyo extremo final queda libre. En este extremo final se suele conectar el efector final.

Los robots industriales seriales típicamente se construyen con materiales rígidos y pesados con objeto de proporcionarles rigidez estructural, de tal manera que el problema de control de sus brazos sea equivalente al problema de control de sus actuadores. Estos manipuladores presentan varios inconvenientes como altos consumos energéticos, necesidad de actuadores sobredimensionados, mayores costos de producción y baja relación entre la carga que se puede manipular y el peso en sí del robot. Todos estos inconvenientes, se pueden solventar mediante la utilización de manipuladores robóticos construidos con elementos ligeros y flexibles [3]. Lo que implica que las deformaciones estructurales ya no son despreciables al diseñar el controlador. La flexibilidad estructural de un robot puede ir más allá de reducir costos en construcción o aumentar la rapidez de sus movimientos. La flexibilidad estructural ayuda a evitar daños en estructuras circundantes a los robots, las cuales pueden entrar en colisión con su espacio de trabajo.

Si bien los robots flexibles tienen ventajas en comparación a su contraparte rígida,

se pueden mencionar una serie de desventajas que hacen de su estudio, un tema retador e interesante como es la dinámica no lineal y acoplada de los eslabones flexibles. La naturaleza distribuida de los eslabones flexibles implica un sistema de fase no mínima con infinitos grados de libertad y por estas razones controladores complicados o actuadores pizoeléctricos extra, [4], [5], [6] se han empleado para reducir las vibraciones en los eslabones. En general, se suele recurrir a aproximaciones donde el diseñador decide hasta qué modo flexible tomar, siendo los primeros modos los más importantes. El recorte de la solución hace difícil que el modelo describa fielmente al sistema generando problemas de spillover, de control y observación [7]. Para solucionar lo anteriormente mencionado se ha demostrado que el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales evita los problemas de spillover antes mencionados y proporciona resultados más precisos que los enfoques dimensionales finitos, tales como el Método de Elementos Finitos, Método de Modos Asumidos y Método de Parámetros Agrupados [8].

En el debate acerca de sí los robots paralelos son más precisos que los seriales, los robots paralelos han demostrado tener mejores propiedades de repetibilidad que su contraparte serial [9]. Además, se pueden enunciar varias ventajas de los robots paralelos sobre los robots seriales: Primero, tienen mayor precisión porque el error es promediado en lugar de acumulado. Segundo, los robots paralelos presentan menor inercia al movimiento, ya que los actuadores están fijos y, en consecuencia, son más rápidos. Tercero, sus estructuras son más fuertes porque la carga se distribuye entre más eslabones [10], presentan alta rigidez[1], destreza[2] y una mayor razón de potencia a peso. Aunque las desventajas de los robots paralelos consisten en un espacio de trabajo más pequeño y requieren un análisis más complicado de las singularidades que los robots en configuraciones seriales. Por lo tanto, los robots paralelos surgen como candidatos preferidos para tareas de alta velocidad y alta precisión.

Algunos ejemplos de robots paralelos de alta velocidad son los robots Delta y Delta 4 que debido a la poca masa de sus brazos permiten la realización de hasta 5 maniobras por segundo[3]; estos robots se pueden encontrar en ensambladores de chips y empaquetamiento de comida[4]. Asimismo, ejemplos de robots paralelos de alta precisión se pueden encontrar en máquinas herramientas como el robot Tricept que debido a su forma de tetraedro le confiere una gran rigidez utilizado para trabajos de precisión del orden de 0.05 milímetros. De la plataforma de Gough existen infinidad de tamaños, desde ejemplares de algunos milímetros hasta otros de varios metros. Algunas aplicaciones de este tipo de robot son: Orientación de antenas, telescopios y paneles solares. Aislamiento y producción de vibraciones. En cirugía para posicionamiento de microscópios e incluso de pacientes. Simuladores de vuelo para aviones y helicópteros así como simuladores de conducción de vehículos,

[1] Se define como la habilidad para resistir pequeños desplazamientos de su efector final cuando se presentan acciones de pares o fuerzas.

[2] Se define como la habilidad para realizar pequeños desplazamientos del efector final en una posición determinada del espacio de trabajo.

[3] Este tipo de robot se pueden considerar como robots paralelos flexibles debido a la alta velocidad de operación y a la ligereza de los eslabones.

[4] En la industria alimenticia se utilizan este tipo de robot debido a que se limpian de una manera fácil y rápida mediante un chorro de agua.

carretillas elevadoras, etc. En la industria para ensamblaje de componentes, para posicionamiento de piezas y utillajes, etc. [11], [12].

1.1. Métodos de diseño

Una vez que se conocen las virtudes de los robots paralelos, es menester mencionar cómo inicia el proceso de diseño y las distintas metodologías de diseño clásico. Se mostrarán las limitaciones y contras que hacen que no sean factibles para diseñar robots paralelos.

Tradicionalmente, el proceso de diseño empieza por la selección del arreglo de la estructura mecánica, a esto también se le nombra síntesis estructural[5]. Esta tradición de la ingeniería mecánica fue seguida por el diseño de robots seriales, en la cual es posible hacer para algunos casos una comparación cualitativa entre estructuras. Por ejemplo, el volumen del espacio de trabajo de un robot Cartesiano usando 3 actuadores lineales de alcance L por eslabón es aproximadamente L^3. En el caso de un robot de 3R con la mismas longitudes, su alcance es $4\pi(3L)^3/3$. En general, un robot 3R tiene un espacio de trabajo mucho más grande que uno cartesiano para un dimensionamiento parecido.

Sin embargo, para el caso de un robot paralelo el número de posibles estructuras es mucho más grande. Estos se han obtenido con base en en el número de grados de libertad que son requeridos para realizar la tarea y a partir de este punto, sintetizar la estructura correspondiente. El problema de síntesis estructural se puede abordar desde varias perspectivas como son teoría de grafos, teoría de grupos y teoría de tornillos. Actualmente, sigue siendo un problema abierto el proponer una síntesis estructural sistemática que no sólo se base en el número de grados de libertad.

Ahora bien, asumiendo que la estructura mecánica en general ha sido seleccionada, se tiene que definir el dimensionamiento apropiado del robot lo que da lugar a la síntesis dimensional [6]. Para que la tarea se cumpla de manera satisfactoria, el robot debería de tener la estructura y las dimensiones apropiadas. Un buen ejemplo que sirve para enfatizar la importancia de la síntesis dimensional de una estructura paralela, es ver los valores de rigidez mínima de una plataforma Gough en un espacio de trabajo. En ésta se muestra que un cambio en el radio de la plataforma de 10 % genera un cambio en rigidez de 700 % [13].

Además de considerar la síntesis dimensional y la síntesis estructural para lograr el desempeño deseado, la estructura del robot paralelo debe ser optimizada para una tarea asignada. Esta tarea asignada determina:

- El número de grados de libertad del manipulador.
- Las fuerzas máximas y pares en las uniones del robot debido a la geometría y masa de la carga.

[5] La síntesis estructural es encontrar todas las posibles estructuras mecánicas las cuales generan un patrón de movimiento específico de la plataforma móvil.

[6] La síntesis dimensional es determinar la dimensión apropiada de la estructura mecánica tal que los requerimientos de desempeño se satisfacen de la mejor manera posible.

- Genera restricciones de dimensionamiento en el espacio de trabajo del robot y el dimensionamiento mismo del robot.
- Influye en la rigidez del robot en aplicaciones de evaluación de vibración.
- La precisión de posicionamiento la cual está fuertemente relacionada con los sensores internos.
- Selección de las uniones pasivas.
- Las restricciones de velocidad y aceleración del efector final la cual influirá en la selección de los actuadores.
- Costo.

Las diferentes metodologías para diseñar se enuncian de la subsección 1.1.1 a la subsección 1.1.5.

1.1.1. Prueba y error

Esta primera aproximación de síntesis dimensional consiste en ir modificando, manualmente, las dimensiones del mecanismo. Después se evalúa el desempeño del nuevo mecanismo con cada modificación, mediante la ayuda de un software, hasta que se obtiene algo satisfactorio. En el caso de robots paralelos esta metodología no es muy útil, ya que el número de parámetros de diseño suele ser extenso y es muy difícil visualizar un diseño apropiado.

1.1.2. Aproximación mediante un atlas

La idea básica de un atlas es reducir el número de parámetros a dos o tres, tal que los índices de desempeño pueden ser gráficamente representados como un atlas. Después, el diseñador usa estos atlas para escoger las variables de diseño. Claramente, su uso es muy limitado porque sólo funciona si se tiene un número de variables pequeño.

Algunos ejemplos de autores que han usado este método para el diseño de robots paralelos han sido Gao [14], para el dimensionamiento de un robot paralelo planar de dos grados de libertad. Hatwal [15], dibuja curvas que muestran el valor de distintos criterios como funciones de los parámetros de diseño para un robot 6-UPS[7]. Para el robot 3-UPU[8] Badescu [16] grafica el volumen del espacio de trabajo, el promedio del inverso del número de condición[9] y el GCI[10]

[7] El número 6 indica el número de grados de libertad. UPS, por las siglas en inglés Universal-Prismatic-Spherical joint.

[8] El número 3 indica el número de grados de libertad. UPU, por las siglas en inglés Universal-Prismatic-Universal joint.

[9] Este número caracteriza la isotropía del sistema.

[10] Es una combinación de los dos índices anteriores. GCI, por las siglas en inglés de Global Condition Index.

Función de costo

Es una metodología de diseño ampliamente usada, en este método se obtiene un analísis cuantitativo en el que se comparan entre sí las diferentes alternativas para conseguir determinar una o varias soluciones válidas. A continuación se presentan los pasos a seguir en la siguiente metodología:

- Determinar los índices de desempeño relevantes (I_j)
- Asignar un peso a cada factor que refleje su importancia relativa (w_j)
- Fijar una escala a cada factor.
- Multiplicar los índices de desempeño por los pesos para cada factor y obtener un total C para cada solución explorada.
- Escoger una solución con base en el mejor valor definido por C

Lo anterior se puede resumir por la siguiente Ecuación 1.1.

$$C = \sum w_j I_j \tag{1.1}$$

Un procedimiento numérico es usado para encontrar el valor de los parámetros de diseño que minimizan C. El principal problema que presenta esta metodología es que definir el índice no es una tarea fácil y su cálculo es computacionalmente intensivo. De igual manera, al encontrar el mínimo global de un problema con restricciones es muy fácil caer en mínimos locales.

Por último, el uso de pesos entre los diferentes requerimientos, los cuales pueden no tener las mismas unidades o incluso que no presenten las mismas cantidades físicas; agrega el problema de saber que peso se debe de cambiar, si la solución no es satisfactoria. Esta metodología puede ser efectiva hasta dos grados de libertad y con un número limitado de requerimientos [17], [18].

1.1.3. Espacio de los parámetros

Encontrar una estructura óptima o apropiada consiste en determinar los puntos donde todos los requerimientos se cumplen. La búsqueda para un robot óptimo se debe de hacer dentro de un dominio acotado en el espacio de búsqueda, lo difícil del método es encontrar la región factible resultante. Para ello, se puede usar un análisis por intervalos. Zhang [19], describe con bastante detalle cómo funciona este método. Primero se define una caja compuesta por un conjunto de rangos para cada uno de los parámetros de diseño y el algoritmo posee una lista de L cajas indexadas por un entero i. Al principio del algoritmo, sólo se tiene una caja para el dominio de búsqueda $i = 1$. Una caja será válida si la anchura de los rangos de diseño de los parámetros s_j es más grande que ϵ_j, $j \in [1, m]$
1. Verificar si se satisfacen los requisitos F por la caja i de L, usando C;

- En caso afirmativo, guarde la caja como una región permitida.
- Si no, $i = i + 1$ y regresa 1.

2. Si uno de los requisitos en F no puede afirmarse, comprobar el ancho de cada intervalo en la caja.

- Si todas las anchuras son inferiores a ϵ_j, $i = i + 1$ y vaya para paso 1.
- De lo contrario, seleccione el parámetro de diseño que tiene el mayor rango en la caja, divide la caja en 2 cajas según este parámetro y guárdelas en L, entonces $i = i + 1$ y regresa 1.

El algoritmo se detiene cuando i es mayor que el número de cajas en L. Es decir, todas las cajas han sido procesadas. En el caso del trabajo de Zhang [19], es necesario otro ciclo que determine que los parámetros de diseño no se salen del espacio de trabajo.

1.1.4. Diseño óptimo

El concepto de diseño óptimo es "perfeccionar el diseño a fin de lograr la mejor manera de satisfacer la necesidad original, dentro de los medios disponibles" [20]. El diseño óptimo involucra:

- La selección de un conjunto de variables para describir las alternativas de diseño.
- La seleccion de un objetivo (criterio), expresado en términos de las variables de diseño, las cuales se buscan minimizar o maximizar.
- La determinación de un conjunto de restricciones, expresado en términos de las variables de diseño, que debe ser satisfecho por cualquier diseño aceptable.
- La determinación de un conjunto de valores para las variables de diseño, el cual minimiza (o maximiza) el objetivo, mientras se satisfacen todas las restricciones.

Trabajos que se han realizado en torno a la optimización de robots se pueden encontrar primero mencionando criterios estáticos: isotropía [21]- [22], [23], [24] manipulabilidad [25]- [26], ángulo de transmisión [27], espacio de trabajo [21], [28], [29], [30], [31], [32] y singularidad [30], [31], [33]. Segundo, en criterios dinámicos de optimización: balance [34], [35] , [36], isotropía dinámica [37], [38], índice de par [39], [40], frecuencia natural [41], [40], respuesta dinámica [42], criterios de precisión [37], [38], [39], [41], [42] y criterios de rigidez [43], [44], [45], [46].

1.1.5. Diseño para el control

El propósito de este método es determinar el diseño de toda la estructura mecánica con la finalidad de que el control se simplifique. La integración de la estructura y el controlador se pensó originalmente para la supresión de la vibración en grandes estructuras aeroespaciales [47], [48], [49], [50]. En estos trabajos, se asumen

plantas lineales, análisis mediante el Método de Elemento Finito (MEF), funciones mono-objetivo, los problemas planteados se resuelven mediante distintos métodos de programación no lineal. Después en [51], el grosor de la lámina óptima y las funciones de control en lazo cerrado óptimas se determinan con las funciones objetivo de maximizar la frecuencia fundamental y minimizar la respuesta dinámica de un laminado cruzado compuesto simétricamente. El problema está formulado como problema de optimización multi-objetivo y después se transforma a uno de pesos ponderados para obtener un sólo índice de rendimiento. En [52], [53], se aborda el diseño combinado estructura-control para optimizar la maniobrabilidad aplicada a una nave espacial considerada flexible. La nave espacial se modela lineal, elástica y no amortiguada. En [54] se presenta un enfoque integrado para determinar los niveles óptimos de hibridación y la fuerza de control de retroalimentación para laminados simétricos de capas cruzadas. Los objetivos de optimización son la maximización de la carga de pandeo biaxial y la minimización de la energía vibratoria sujeta a restricciones en el espesor y la energía de control. En [55], se aplica H_2-H_∞ como teoría de control robusta y el diseño de una estructura flexible con mínimo peso.

Con lo anterior se ha mostrado en orden cronológico la evolución de los problemas que se han resuelto mediante el diseño estructura-control principalmente aplicado en la industria aeroespacial .

Aunque inicialmente la industria espacial fue precursora del diseño estructura-control [56], este tipo de método de diseño también ha sido utilizado en el diseño de sistemas mecatrónicos. Por ejemplo, se ha aplicado para diseñar una transmisión variable continua con piñón-cremallera [57], Pendubot [58] , un robot paralelo con cinco eslabones [59], un manipulador paralelo planar actuado mediante cables [60], etc. La justificación de ello es que el diseño del mecanismo y el diseño del control no debería ser separado. Hay relaciones intrincadas entre la estructura mecánica y la dinámica del controlador. Además, la estructura mecánica no puede ser optimizada si no se considera la influencia del control. Igual funciona a la inversa, el desempeño del control el cual puede ser optimizado por métodos convencionales de diseño de controladores se puede mejorar aún más si se modifica la estructura mecánica [61]. Con esto se indica que para tener un buen desempeño de un sistema estructura-control, en el caso del presente trabajo es particularizado a robots paralelos, se necesita abordar el problema desde todas las diferentes disciplinas que involucran a la mecatrónica de manera simultánea y no serial.

La cuestión crítica en un diseño concurrente es la necesidad de un modelo dinámico apropiado de la estructura del sistema para diseñar un controlador apropiado. La fricción, el amortiguamiento estructural, ruido en sensores son cuestiones con las que siempre se tienen problemas en el modelado. El peor de los casos es que el prototipo muestre parámetros que se habían pasado desapercibidos en el modelo original. Por ello, Asada [1] incorpora algún tipo de corrección del modelo con base en el prototipo y experimentación antes de que todo el sistema sea optimizado completamente como se observa en la Fig.1.1. En este esquema, el proceso de diseño inicia con un prototipo inicial mecatrónico y su control es manipulado hasta obtener un buen desempeño. Este desempeño se compara con los requerimientos del diseñador, si las especificaciones se

cumplen, el proceso de diseño termina. De lo contrario, se modifica la estructura de acuerdo a un análisis de los datos. El control se vuelve a optimizar para la nueva estructura y se vuelve a observar el desempeño. Finalmente, el proceso termina hasta que el sistema alcanza una solución aceptable.

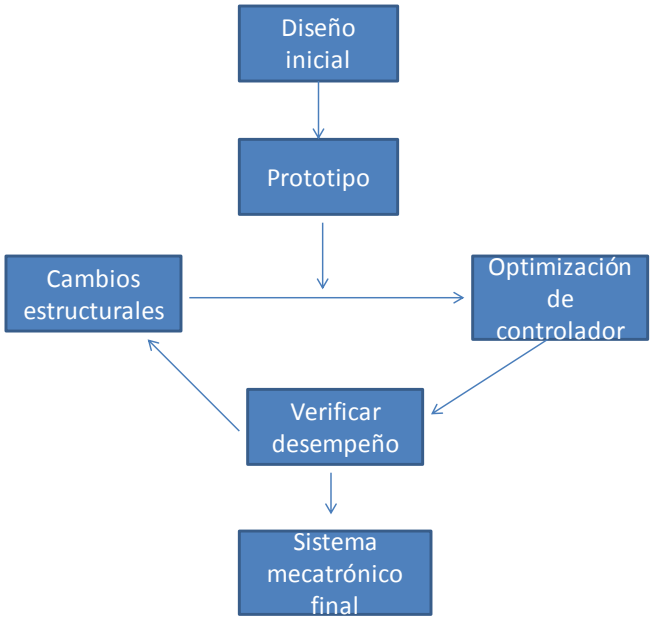


Figura 1.1: Esquema de metodología recursiva [1].

Para que esta metodología no se confunda con una de prueba y error, es necesario tener una matriz Jacobiana de sensibilidad J. La matriz de sensibilidad inicial J_0, puede obtenerse de datos experimentales o bien de un modelo matemático. El método tiene como objetivo obtener una matriz de sensibilidad J, lo más cercana posible a J_0, que minimice el error entre J y J_0. Sujeto a los pequeños cambios estructurales aplicados y al comportamiento observado. Las principales desventajas son que aún para sistemas sencillos se requiere de un gran número de iteraciones. Segundo, se tienen que hacer cambios estructurales en el prototipo y alguno de ellos podrían no ser reversibles. Otra desventaja de esta metodología es la dependencia del resultado, a la selección del prototipo inicial.

Robots flexibles

Un área de oportunidad en el tema de robots paralelos es buscar diseños mecánicos que sean más ligeros, más rápidos y precisos. De lo anterior se desprende que los

modelos rígidos no describan con fidelidad la naturaleza del problema y que las deformaciones y las vibraciones de los eslabones no sean despreciables.

Por ello, la necesidad de considerar la flexibilidad en los eslabones y la reducción de la deformación han llevado a los investigadores a reducir estos efectos desde el proceso de diseño mecánico [2]. En [62], se realiza el análisis de rigidez global ya que está directamente relacionado con la rigidez del sistema. Además, como la rigidez es dependiente de la postura, se sugiere un nuevo índice de rendimiento llamado (TCSM)[11], que expresa la relación entre el desplazamiento traslacional del efector final del robot y la fuerza aplicada sobre él [63]. Basándose en el supuesto de que los desplazamientos de cuerpo rígido no se acoplan con la deformación elástica en el cálculo, el índice de densidad de distribución de rigidez (SDD)[12] es propuesta en [64]. El índice SDD analiza la contribución de la elasticidad de cada parte a todo el manipulador. Otro enfoque de diseño considera optimizar tanto el tamaño como la topología con el fin de obtener un espacio de trabajo predeterminado y una frecuencia natural [65]. En el mismo sentido, en [66], la meta de optimización es maximizar la frecuencia natural fundamental. Se propone el valor dinámico de rigidez colineal (DynCSV)[13] para evitar configuraciones singulares y frecuencias de resonancia, esto se logra a través de la construcción de un espacio de trabajo (PKM)[14] de máquina cinemática paralela que satisface los límites de rigidez proporcionados preliminarmente. Una vez satisfechos dichos límites se calcula una barrera protectora virtual.

Trabajos adicionales donde se pueden encontrar ejemplos de robots paralelos diseñados para tareas de *pick and place* en alta velocidad se pueden encontrar en [35]. En este trabajo se presenta la dinámica y la optimización de un robot paralelo de dos grados de libertad con eslabones flexibles para operaciones de seguimiento de trayectoria en alta velocidad, las ecuaciones de movimiento se obtienen por el método de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones son transformadas a un modelo de elemento finito, donde se quiere optimizar la precisión y la velocidad del robot paralelo. Varios aspectos se deben de remarcar del artículo, primero que dentro de los parámetros de diseño sólo aparecen parámetros estructurales. Segundo, no se plantea matemáticamente una función objetivo y tampoco se menciona cómo se resuelve el problema de optimización. En [40], se propone la optimización de la síntesis dimensional para un robot de dos grados de libertad, para aplicaciones de alta velocidad de un robot paralelo con bajo peso. El modelo dinámico de la estructura flexible se desarrolla mediante el método de elementos finitos y síntesis de la subestructura de manera similar a como se propone en [67].

Otra forma de minimizar vibraciones es desde la perspectiva de control. Se puede ver que con base en el mecanismo de disipación de energía, las técnicas para reducir la vibración se pueden dividir en pasivas, semiactivas y control activo. Las configuraciones de control semiactivo y control activo son generalmente mejores que

[11] Por las siglas en inglés: Translational Compliance Submatrix
[12] Por las siglas en inglés: Stiffness Distribution Index.
[13] Por las siglas en inglés: Dynamic Collinear Stiffness Value.
[14] Por las siglas en inglés: Parallel Kinematic Machine

los pasivos en términos de desempeño, sin embargo, las configuraciones de control activas y semiactivas necesitan una entrada de energía y conllevan a los problemas de estabilidad y robustez debido al pequeño margen de estabilidad generado por los modos residuales. [68], [69].

Dos estudios específicamente dedicados a eslabones flexibles son presentados en [70] y [71]. En las primeras investigaciones, el enfoque habitual era controlar las vibraciones del eslabón a través de actuadores articulares solamente y desde entonces muchas publicaciones han abordado este tema. El trabajo de revisión sobre este tema se puede encontrar en [72]. Otro enfoque bastante diferente del control en lazo cerrado para robots con eslabones flexibles, es basarse en el uso de materiales piezoeléctricos en la construcción del eslabón. El principio subyacente es usar pares de sensores/actuadores colocados, estos están distribuidos a lo largo del eslabón flexible, para cancelar la deformación o aumentar activamente la amortiguación de las oscilaciones del eslabón [73].

Los algoritmos de control para la supresión de la vibración mediante el uso de piezoeléctricos también han sido ampliamente estudiados. En [74], se aplica la estrategia de control de retroalimentación de posición positiva (PPF)[15] al control de vibración activo de una viga en voladizo. En [75], se propone una retroalimentación modal positiva de la posicion (MPPF)[16] para controlar la vibración de una estructura flexible. Los resultados se mejoraron con un estrategia de tiempo compartido para controlar una gran cantidad de modos con un pequeño número de actuadores. En [76], se propone y evalúa un controlador de lógica difusa para la supresión de vibraciones. En [77], se aplican redes neuronales para la identificación del sistema y la supresión de vibraciones de una estructura inteligente. En la mayoría de los estudios que presentan un eslabón activo, la atención parece estar centrada en la supresión de la vibración en el eslabón flexible, en lugar de en el robot como un todo. Esto es con la excepción de [78] donde se usa un controlador (LQR)[17] tanto para el eslabón como para la articulación.

1.1.6. Diseño concurrente de robots flexibles

La motivación de este trabajo de tesis es considerar tanto la estructura mecánica como el controlador, para resolver el problema de minimización de vibraciones desde una perspectiva de diseño de estructura-control. En [79], se convierte un problema de fase no mínima a uno de fase mínima mediante el diseño de una transmisión que permite aplicar el par de actuación, en un punto predeterminado, en un brazo flexible. En [80], se analiza un robot industrial cartesiano de tres grados de libertad para operaciones de *pick and place*. El modelo dinámico se realiza para los ejes X y Y y se estudia la flexibilidad inducida por los otros dos ejes en el eslabón alineado al eje Z donde se encuentra la pinza. La pinza se considera como una masa concentrada localizada al final del eslabón flexible. En este trabajo se aborda

[15] Por las siglas en inglés: Positive Position Feedback.
[16] Por las siglas en inglés: Modal Positive Position Feedback.
[17] Por las siglas en inglés: Linear Quadratic Regulator.

el diseño concurrente del robot cartesiano como un problema bi-objetivo. La primera función objetivo es minimizar el error entre la posición de la pinza y la señal de referencia. La segunda función objetivo minimiza la fuerza máxima requerida por el controlador durante el movimiento. En este trabajo se propone primero un caso nominal donde el diámetro del eslabón flexible no se considera como variable de diseño y se optimizan sólo las ganancias de un controlador PID invariante en el tiempo. Después, se resuelve un segundo caso considerando el diámetro d del eslabón flexible y las ganancias del controlador PID invariante en el tiempo. Finalmente, se resuelve un tercer caso donde el díametro del eslabón flexible y un controlador PID con ganancias programadas se consideran como variables de diseño. En resumen, en el primer caso se tiene $\mathbf{s} = \{K_P, K_I, K_D\}$ como variables de diseño, en el segundo caso se tiene $\mathbf{s} = \{K_P, K_I, K_D, d\}$ y en el tercer caso se proponen siete variables de diseño $\mathbf{s} = \{K_{P0}, K_{P1}, K_{I0}, K_{I1}, K_{D0}, K_{D1}, d\}$. En dicho trabajo, se concluye que el uso de un diámetro d más grueso puede conducir a una configuración más sencilla del controlador sin pérdida de precisión.

El diseño de la señal de entrada se deriva en [36], para un manipulador paralelo de alta velocidad de 2-DOF (prototipo Par2 [ibíd]). Una vez obtenido el diseño de la señal de entrada, se muestran cinco estructuras mecánicas que ejemplifican la relación entre el par máximo, el error en el seguimiento de la trayectoria y la longitud de los eslabones. En el mismo sentido, en [81], la señal de entrada y el área de la sección transversal se obtienen para minimizar las deformaciones de los eslabones, así como las entradas de control en una función ponderada. Se utiliza como plataforma experimental un manipulador serial con dos eslabones flexibles montados en un vehículo móvil.

Es por estos motivos que en este trabajo se propone un método de diseño integrado para un robot paralelo, donde se pueda prescindir del uso de la solución mediante el MEF. Dado que el proceso de diseño es altamente iterativo, se tiene como finalidad reducir el costo computacional sin pérdida de precisión mediante el uso del Método de Diferencias Finitas (MDF). La solución de las ecuaciones diferenciales parciales por medio del MDF hace que se cuente con un modelo menos costoso computacionalmente que el MEF para optimizar las múltiples funciones objetivo en el diseño concurrente del robot paralelo, considerando la flexibilidad en sus eslabones.

1.2. Planteamiento del problema

El tema de esta tesis surge de la necesidad de diseñar un robot ligero de cinco eslabones para tareas de seguimiento de trayectoria en alta velocidad. El problema se origina porque el robot al realizar el seguimiento de trayectoria en alta velocidad, excita sus modos naturales de vibración y la deformación en los eslabones hace que se pierda precisión y exactitud en el efector final. Para reducir el efecto de la vibración en los eslabones, en los primeros modos de vibración, se plantea el problema de optimización dinámico no-lineal multi-criterio; el cual deberá optimizar tanto los parámetros de diseño de la estructura mecánica (p_s), como los parámetros del sistema

de control (p_c).

La primera función objetivo propuesta consiste en minimizar el par empleado en los motores. En realidad se minimiza el par al cuadrado de cada motor. Haciendo un analogía con un sistema eléctrico, donde el par es directamente proporcional a la corriente y asumiendo una resistencia constante, al reducir la corriente elevada al cuadrado indirectamente también se reduce la potencia proporcionada al sistema por los motores. Esto se busca con la finalidad de tener un ahorro de energía en la operación de seguimiento de trayectoria en alta velocidad, dado que son tareas repetitivas y se suelen hacer un número elevado de ciclos. Mediante esta primera función objetivo se pretende obtener una estructura que no esté sobredimensionada de tal manera que se requieran altos pares iniciales para romper el estado del reposo o que la acción de control sea demasiado demandante, por ejemplo cambiar repetidamente el sentido de giro de los motores, lo cual reduce la vida útil de los actuadores.

La segunda función objetivo consiste en minimizar la deformación de los eslabones flexibles para los primeros modos de vibración. La finalidad de esta segunda función objetivo consiste en obtener estructuras ligeras sin que la deformación de la estructura genere una pérdida en la precisión para la tarea deseada.

Por último, la magnitud del error en el seguimiento de la trayectoria se considera como una restricción. Esto se propone con el fin de no llegar a soluciones triviales donde los motores generen movimientos muy lentos o casi nulos tal que no exciten los modos de vibración del robot y no se cumpla con el seguimiento de la trayectoria deseada.

Llegar al compromiso entre longitudes, grosores, masas, etc. adecuados de los eslabones así como ganacias del controlador para un robot que realiza una tarea en alta velocidad justifica la necesidad de contar con un modelo que considere la flexibilidad en los eslabones desde la etapa de diseño, ya que se puede dar combinaciones en las variables de diseño donde un modelo rígido no describa el comportamiento real del sistema.

1.3. Objetivo de la tesis.

Proponer un método de diseño integrado multi-criterio para el diseño concurrente de un robot paralelo de cinco eslabones con dos eslabones flexibles. El diseño integrado multi-criterio involucra la síntesis dimensional y el control. El diseño integrado estructura-control tiene como propósito minimizar de manera simultánea las vibraciones mecánicas debido a las deformaciones y el par al cuadrado proporcionado por los motores al realizar una tarea de seguimiento de trayectoria en alta velocidad.

1.4. Metas

- Revisar el estado del arte en los temas de diseño concurrente con base en técnicas de optimización para robots paralelos flexibles.

- Analizar, desarrollar y validar las ecuaciones cinemáticas y cinéticas con eslabones flexibles que rigen el comportamiento del robot paralelo.
- Aplicar el problema de optimización dinámica multi-criterio.
- Elaborar un prototipo con base en una solución óptima no dominada.
- Integrar el prototipo mecánico con las tarjetas electrónicas y el software.
- Instrumentar y medir las variables del sistema.
- Validar el funcionamiento de la metodología propuesta.

1.5. Contribuciones del trabajo.

Al obtener el modelo del sistema se puede tener un panorama completo del funcionamiento del sistema y si se requiere hacer cambios, se sabe a priori cómo se afectará el comportamiento cuando una variable se cambia. Esto resulta en beneficios de ahorro de tiempo y dinero.

Resolver el problema de diseño concurrente de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales, sin recurrir al enfoque de elemento finito. El ahorro de tiempo de cómputo se justifica dado que el tamaño de las matrices en el caso de diferencias finitas es menor que el utilizado en elemento finito. La precisión entre los dos métodos, diferencias finitas versus elemento finito, no se ve comprometida dado que la geometría donde se emplean las diferencias finitas es uniforme.

Determinar una solución basada en los esfuerzos y las deformaciones que se obtienen de un modelo dinámico, es decir las deformaciones se determinan para todas las posiciones de la trayectoria deseada y no para una posición en particular como es en el caso de software especializado como ANSYS.

Aunque el próposito es minimizar la deformación en los primeros modos de vibración, dado que se toma el modelo dinámico de manera indirecta se toman también los modos excitados por la entrada del control.

Prescindir del uso de más actuadores, por ejemplo agregar más actuadores piezoeléctricos sobre la viga flexible y proporcionar mayor rigidez a ésta, para reducir la vibración en los eslabones flexibles mediante el diseño estructura-control apropiado.

1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo está dividido en cinco capítulos y cuatro apéndices organizados de la siguiente manera:

En el *Capítulo 2*, se presentan las bases teóricas para el modelo cinemático. Después usando la metodología de Euler-Lagrange para el modelado de eslabones rígidos y flexibles ya establecidas en la literatura, se presenta el modelo cinético para

el caso de estudio del robot paralelo de cinco eslabones. Este modelo considera los eslabones no actuados como un sistema distribuido. Finalmente, en la última sección se muestra la manera en cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales parciales; resultado de considerar a los eslabones no actuados como vigas de tipo Bernoulli.

En el *Capítulo 3*, se definen los parámetros de diseño que se utilizan tanto para la estructura mecánica como para el sistema de control. Segundo, se establece el índice de desempeño. Tercero, se muestran las restricciones del sistema. Cuarto, se describe el algoritmo de optimización. Asimismo, se muestran las tres técnicas de manejo de restricciones para el diseño estructura-control de un robot paralelo con cinco eslabones asumiendo un modelo dinámico rígido. La sección se finaliza con una comparación de cada técnica de manejo de restricciones basada en seis índices de desempeño y en la calidad de las soluciones no dominadas para tres límites de par propuestos.

En el *Capítulo 4*, se define el problema planteado en la tesis, visto como un problema de optimización dinámica no lineal, multi-criterio. Segundo, se muestran los índices de desempeño y el conflicto existente entre ellos. Finalmente, se comentan las restricciones adicionales, al caso rígido definido en el capítulo 3, para abordar el problema de flexión en el robot paralelo con cinco eslabones.

Después se describe la plataforma experimental empezando con la estructura mecánica del protipo construido. Segundo, los actuadores y sensores usados en el prototipo son descritos. Tercero, el procesamiento de señales necesarios para obtener las mediciones de posición y velocidad angular en los eslabones actuados mediante el uso de decodificadores ópticos. Asimismo se muestran la características de las galgas extensiométricas para medir las deformaciones en los eslabones flexibles. La energía consumida por cada uno de los motores será obtenida por los sensores de corriente. Se realiza la caracterización tanto de los actuadores, como de los sensores de corriente para obtener una estimación del par consumido por cada motor. Asimismo, se exponen dos soluciones no dominadas del proceso de optimización. Primero, se realiza una comparación en términos energéticos, de vibración y de precisión entre las dos soluciones. Segundo, se muestran los resultados experimentales del prototipo construido con base en la solución no dominada que presenta una menor vibración. Finalmente, se realiza una discusión de los resultados de simulación versus experimentales.

En el *Capítulo 5*, se presentan las conclusiones y perspectivas. Se muestran las conclusiones generales y áreas de oportunidad detectadas para el trabajo futuro de la tesis.

En el *Apéndice A*, se muestran los diagramas esquemáticos de la etapa lógica y la etapa de potencia desarrollados en el software Eagle para controlar a los actuadores.

En el *Apéndice B*, se exponen los cálculos de masa, centro de masa, ángulo al centro

de masa, etc., en función de los parámetros de diseño. Después, se muestran los dibujos técnicos de los eslabones de las dos soluciones no dominadas así como elementos mecánicos adicionales para la fijación de piezas del robot paralelo de cinco eslabones. En el *Apéndice C*, se exhiben las frecuencias naturales de vibración obtenidos en ANSYS para los dos casos de solución expuestos. En el *Apéndice D*, se muestran los artículos de revista y congreso realizados durante el desarrollo del presente trabajo.

Capítulo 2

Modelado

2.1. Introducción

En el modelo cinemático lo más importante es el movimiento de los cuerpos sin importar las causas que lo originan o lo mantienen. Esas causas se verán en la siguiente sección de cinética o modelado dinámico. Sin embargo, es necesario utilizar la cinemática como paso previo para obtener la dinámica del sistema.

El modelo cinemático presentado en este capítulo es obtenido para eslabones rígidos. Se hace uso de este modelo a lo largo de la tesis bajo la premisa de que las deformaciones longitudinales se desprecian y las deformaciones transversales en los eslabones flexibles son de una magnitud pequeña. La motivación para esta suposición es doble. Primero, si la deformación local es grande, lo más probable es que el material no sea adecuado para construir un manipulador robótico. Segundo, y más determinante, los materiales comunes utilizados en las aplicaciones conservan su linealidad para esfuerzos pequeños [82]. En el caso de tener una magnitud considerable de deformación se tendría que hacer uso sensores cinemáticos virtuales, los cuales son dependientes de codificadores rotatorios, galgas extensiométricas o sistemas de visión artificial [83]. Por otro lado, se tiene la opción de determinar solamente la cinemática de cuerpos flexibles por métodos de integración o algebra de cuaterniones [84]. En la primera opción para estimar la cinemática de las deflexiones se tendría que contar con un prototipo construido y la segundo opción requeriría incrementar el costo computacional. Ambas opciones no serían prácticas de implementar en un esquema de diseño concurrente.

Para obtener el modelo dinámico se utiliza una formulación Lagrangiana del modelo dinámico para sistemas manipuladores flexibles [85], donde se modelan tanto los eslabones rígidos (eslabones actuados) así como los eslabones flexibles (eslabones no actuados) del robot paralelo con cinco eslabones. Las deformaciones axiales y torsionales no se consideran en este modelo ya que se considera que las deformaciones por flexión son de mayor magnitud. Para este robot de cadena cinemática cerrada se tiene que incluir un modelo dinámico con restricciones, donde se hará uso de los multiplicadores de Lagrange para lidiar con estas restricciones.

Además debido a la naturaleza distribuida de los eslabones flexibles se verá que es necesario definir condiciones de frontera para ellos. Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales se hará uso del método de diferencias finitas como método de solución.

2.1.1. Cinemática

El robot paralelo de cinco eslabones se muestra en la Fig.2.1. El eslabón asociado a la longitud a_1 se asume rígido y está actuado por el motor M_1, de igual manera el eslabón asociado a la longitud a_2 se asume rígido y está actuado por el motor M_2. Las longitudes a_3 y a_4 están asociadas a los eslabones no actuados, los cuales se consideran flexibles. La longitud a_5 es un marco fijo y es la distancia que hay entre los ejes de los dos actuadores. La distancia asociada a los centros de masa se denota por l_{c_1} para el eslabón actuado, asociado a la longitud a_1 y por l_{c_2} para el eslabón actuado, asociado a la longitud a_2. Los desplazamientos elásticos perpendiculares, w_3 y w_4, se miden con respecto al eje longitudinal y_3 y y_4 respectivamente.

Las restricciones de cadena cinemática cerrada son resultado de proyecciones en el eje x (Ec. (2.1)) y en el eje y (Ec.(2.2)), tomando como punto de partida el origen O_x y O_y y como punto final la unión entre los eslabones asociados a las longitudes a_3 y a_4, tal como se puede apreciar en la Fig.2.2 .

$$a_1 c_{\theta_1} + a_3 c_{\theta_{13}} = a_5 + a_2 c_{\theta_2} + a_4 c_{\theta_{24}} \tag{2.1}$$

$$a_1 s_{\theta_1} + a_3 s_{\theta_{13}} = a_2 s_{\theta_2} + a_4 s_{\theta_{24}} \tag{2.2}$$

Dado que θ_1 y θ_2 son las variables de entrada de la Ec.(2.1) se propone la expresión

$$D_a = a_2 c_{\theta_2} - a_1 c_{\theta_1} + a_5 \tag{2.3}$$

De la misma manera, de la Ec.(2.2) se propone la variable

$$E_a = a_2 s_{\theta_2} - a_1 s_{\theta_1} \tag{2.4}$$

Las Ecs.(2.1)-(2.2) se pueden reescribir como

$$a_3 c_{\theta_{13}} = D_a + a_4 c_{\theta_{24}} \tag{2.5}$$

$$a_3 s_{\theta_{13}} = E_a + a_4 s_{\theta_{24}} \tag{2.6}$$

Las Ecs.(2.5) y (2.6), se elevan al cuadrado,se suman y se reacomodan dando como resultado

$$a_3^2 \left(c_{\theta_{13}}^2 + s_{\theta_{13}}^2\right) = a_4^2 \left(c_{\theta_{24}}^2 + s_{\theta_{24}}^2\right) + 2a_4 \left(D_a c_{\theta_{24}} + E_a s_{\theta_{24}}\right) + D_a^2 + E_a^2 \tag{2.7}$$

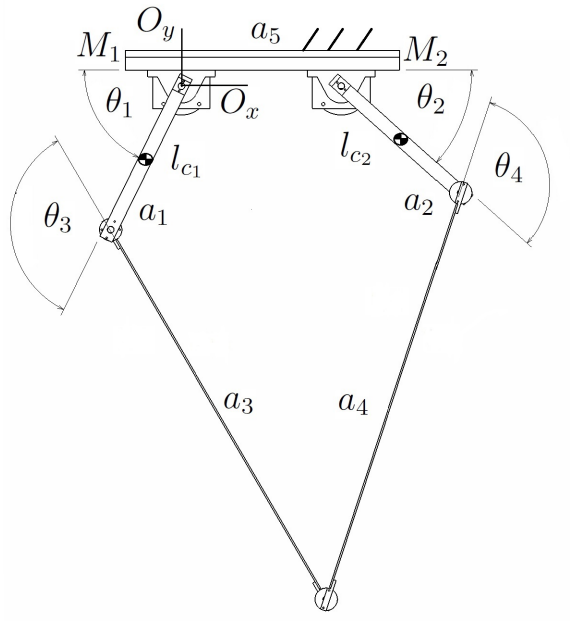


Figura 2.1: Robot paralelo de cinco eslabones

De la ecuación anterior se propone generar nuevas variables, Ecs.(2.8)-(2.10), con la finalidad de reducir el tamaño de la misma.

$$A_a = 2a_4 D_a \tag{2.8}$$

$$B_a = 2a_4 E_a \tag{2.9}$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ se puede obtener la siguiente expresión de la Ec. (2.7).

$$C_a = a_3^2 - a_4^2 - D_a^2 - E_a^2 \tag{2.10}$$

Usando las ecuaciones anteriores se puede reescribir la Ec. (2.7) de manera simplificada como

$$C_a = A_a c_{\theta_{24}} + B_a s_{\theta_{24}} \tag{2.11}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\sin\theta = \frac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1+tan^2\frac{1}{2}\theta}$ y $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+tan^2\frac{1}{2}\theta}$ en la ecuación anterior, se obtiene las posiciones de los eslabones no actuados θ_3, θ_4 en función de los eslabones actuados θ_1, θ_2 como

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{B_a}{A_a}\right) + \arctan\left(\frac{\sigma\sqrt{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}}{C_a}\right) - \theta_2 \tag{2.12}$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{E_a + a_4 s_{\theta_{24}}}{D_a + a_4 c_{\theta_{24}}}\right) - \theta_1 \tag{2.13}$$

donde
σ indica la posiciones de los eslabones no actuados en la configuración positiva o negativa. En este trabajo se considera la configuración negativa tal y como está representado en la Fig.2.2.
$s_{\theta_{24}} = \sin(\theta_2 + \theta_4)$; $c_{\theta_{24}} = \cos(\theta_2 + \theta_4)$; $c_{\theta_2} = \cos(\theta_2)$; $s_{\theta_1} = \sin(\theta_1)$

Dado que las condiciones iniciales necesarias para resolver las ecuaciones dinámicas del sistema están dadas en posición y velocidad, es necesario también obtener las velocidades $\dot{\theta}_3$, $\dot{\theta}_4$ en términos de $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$. Para ello, se propone derivar con respecto al tiempo las Ecs.(2.3), (2.4), (2.8), (2.9) y (2.10).

$$\frac{dE_a}{dt} = a_2 c_{\theta_2}\dot{\theta}_2 - a_1 c_{\theta_1}\dot{\theta}_1 \tag{2.14}$$

$$\frac{dD_a}{dt} = -a_2 s_{\theta_2}\dot{\theta}_2 + a_1 s_{\theta_1}\dot{\theta}_1 \tag{2.15}$$

$$\frac{dB_a}{dt} = 2a_4\frac{dE_a}{dt} \tag{2.16}$$

$$\frac{dA_a}{dt} = 2a_4\frac{\partial D_a}{\partial t} \tag{2.17}$$

$$\frac{dC_a}{dt} = -2D_a\frac{dD_a}{dt} - 2E_a\frac{dE_a}{dt} \tag{2.18}$$

Se hace uso de variables auxiliares para reducir las expresiones y obtener a partir de la Ec.(2.12), la velocidad $\dot{\theta}_4$. Para ello se deriva con respecto al tiempo el primer término, $\arctan\left(\frac{B_a}{A_a}\right)$, de la Ec.(2.12) como se indica.

$$a_{ux1} = \frac{\frac{dB_a}{dt}A_a - B_a\frac{dA_a}{dt}}{A_a^2} \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\arctan\left(\frac{B_a}{A_a}\right)\right) = \frac{a_{ux1}}{1 + \left(\frac{B_a}{A_a}\right)^2} \tag{2.20}$$

Derivando con respecto al tiempo el segundo término, $\arctan\left(\frac{\sigma\sqrt{A_a^2+B_a^2-C_a^2}}{C_a}\right)$, de la Ec.(2.12) se obtiene

$$a_{ux3} = \frac{\left(A_a\frac{dA_a}{dt} + B_a\frac{dB_a}{dt} - C_a\frac{dC_a}{dt}\right)C_a}{\sqrt{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}} \tag{2.21}$$

$$a_{ux4} = \left(\sqrt{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}\right)\frac{dC_a}{dt} \tag{2.22}$$

$$a_{ux5} = 1 + \frac{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}{C_a^2} \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\arctan\left(\frac{\sigma\sqrt{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}}{C_a}\right)\right) = \sigma\frac{(a_{ux3} - a_{ux4})}{a_{ux5}} \tag{2.24}$$

$$\dot{\theta}_4 = \frac{d}{dt}\left(\arctan\left(\frac{\sigma\sqrt{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}}{C_a}\right)\right) + \frac{d}{dt}\left(\arctan\left(\frac{\sigma\sqrt{A_a^2 + B_a^2 - C_a^2}}{C_a}\right)\right) - \dot{\theta}_2 \tag{2.25}$$

De igual manera, a partir de la Ec.(2.13), se requiere obtener la velocidad $\dot{\theta}_3$. Primero se reescriben los términos del numerador y del denomidador de la Ec.(2.13).

$$F_1 = E_a + a_4 s_{\theta_{24}} \tag{2.26}$$

$$G_1 = D_a + a_4 c_{\theta_{24}} \tag{2.27}$$

Estos términos se derivan con respecto al tiempo.

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{dE_a}{dt} + a_4 c_{\theta_{24}}\dot{\theta}_{24} \tag{2.28}$$

$$\frac{dG_1}{dt} = \frac{dD_a}{dt} - a_4 s_{\theta_{24}}\dot{\theta}_{24} \tag{2.29}$$

Con ayuda de las ecuaciones anteriores, la derivada con respecto al tiempo de la Ec.(2.13) se obtiene la velocidad $\dot{\theta}_3$ como

$$\dot{\theta}_3 = \left(\frac{\frac{dF_1}{dt}G_1 - \frac{dG_1}{dt}F_1}{F_1^2 + G_1^2}\right) - \dot{\theta}_1 \tag{2.30}$$

Cinemática Directa

La cinemática directa consiste en determinar cuál es la posición del efector final $[x_f, y_f]$ en el espacio cartesiano, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia $O_r = [O_x, O_y]$[1], conocidos los ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos que conforman al robot. La cinemática directa se puede calcular de la manera siguiente:

$$x_f = a_1 c_{\theta_1} + a_3 c_{\theta_{13}} = a_5 + a_2 c_{\theta_2} + a_4 c_{\theta_{24}}$$

$$y_f = a_1 s_{\theta_1} + a_3 s_{\theta_{13}} = a_2 s_{\theta_2} + a_4 s_{\theta_{24}} \tag{2.31}$$

[1]En este caso es particular a un plano.

Cinemática Inversa

La cinemática inversa consiste en encontrar los ángulos en las articulaciones tal que se logre alcanzar un punto deseado $[x_d, y_d]$ en el espacio cartesiano. La cinemática inversa se puede resolver de la manera siguiente

$$\bar{\theta}_{di} = \sigma \arccos\left(\frac{-a_{i+2}^2 + a_i^2 + ap_{ni}^2}{2a_i ap_{ni}}\right) + \arctan\left(\frac{ap_{yi}}{ap_{xi}}\right) \tag{2.32}$$

donde $i = 1, 2$, $ap_{xi} = x_d - O_{xi}$, $ap_{yi} = y_d - O_{yi}$, $ap_{ni} = \sqrt{(ap_{xi}^2 + ap_{yi}^2)}$. Los origenes se establecerán en los puntos $[O_{x1}, O_{y1}] = [0, 0]$ para el motor M_1 y $[O_{x2}, O_{y2}] = [a_5, 0]$ para el motor M_2. La velocidad deseada en el espacio articular se obtiene por la siguiente transformación:

$$\dot{\bar{\theta}}_{di} = J\dot{C} = \begin{bmatrix} \frac{c_{\theta_{13}}}{a_1 s_{\theta_3}} & \frac{s_{\theta_{13}}}{a_1 s_{\theta_3}} \\ \frac{c\theta_{24}}{a_2 s_{\theta_4}} & \frac{s_{\theta_{24}}}{a_2 s_{\theta_4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

De la Ec.(2.33) a través del determinante del Jacobiano se pueden determinar las condiciones de singularidad como se muestra en la siguiente ecuación

$$Det(J) = \frac{s\left(\theta_2 + \theta_4 - (\theta_1 + \theta_3)\right)}{a_1 a_2 s_{\theta_3} s_{\theta_4}} \tag{2.34}$$

Para evitar que el Jacobiano se indetermine o sea nulo se tiene que cumplir lo siguiente

$$\theta_2 + \theta_4 - (\theta_1 + \theta_3) \neq c\pi \wedge \theta_3 \neq c\pi \wedge \theta_4 \neq c\pi \quad \forall \ c = 0, 1, 2, ..., \infty \tag{2.35}$$

2.1.2. Cinética

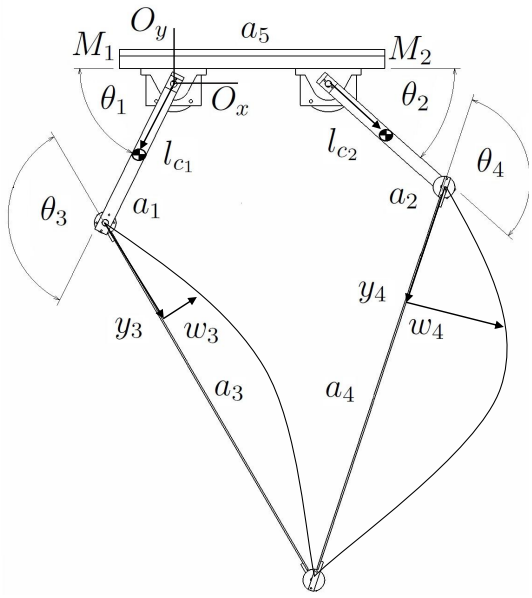


Figura 2.2: Robot paralelo de cinco eslabones con deformaciones

El vector de posición para el centro de masa del eslabón asociado a la longitud a_1 se puede expresar como

$$P_1 = R_1 D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} \\ 0 & s_{\theta_1} & c_{\theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

El vector de posición para cualquier punto en el eslabón flexible asociado a la longitud a_3 se puede expresar como

$$P_3 = \widehat{P}_1 + R_3 D_3 \tag{2.37a}$$

$$R_3 D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\theta_{13}} & -s_{\theta_{13}} \\ 0 & s_{\theta_{13}} & c_{\theta_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_3 \\ w_3(y_3, t) \end{bmatrix}, \tag{2.37b}$$

donde $\widehat{P}_1 = R_1 \widehat{D}_1$, $\widehat{D}_1 = [0, a_1, 0]$, $w_3(y_3, t)$ denota el desplazamiento elástico medido con respecto al eje longitudinal y_3 (Fig.2.2).

El vector de posición para el centro de masa del eslabón asociado a la longitud a_2 se puede expresar como

$$P_2 = R_0 D_0 + R_2 D_2 \tag{2.38a}$$

$$R_0 D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.38b}$$

$$R_2 D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} \\ 0 & s_{\theta_2} & c_{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.38c}$$

donde α sería el ángulo generado entre el origen O_x, O_y y el eje de rotación del motor M_2, para este caso particular se considera $\alpha = 0$. El vector de posición para cualquier punto en el eslabón flexible asociado a la longitud a_4 se puede expresar como

$$P_4 = \widehat{P}_2 + R_4 D_4 \tag{2.39a}$$

$$R_4 D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\theta_{24}} & -s_{\theta_{24}} \\ 0 & s_{\theta_{24}} & c_{\theta_{24}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_4 \\ w_4(y_4, t) \end{bmatrix} \tag{2.39b}$$

donde $\widehat{P}_2 = R_0 D_0 + R_2 \widehat{D}_2$, $\widehat{D}_2 = [0, a_2, 0]$, $w_4(y_4, t)$ denota el desplazamiento elástico medido con respecto al eje longitudinal y_4 (Fig.2.2). Tanto w_3 y w_4 se consideran continuas y diferenciables.

Diferenciando (2.36)-(2.39) resulta en

$$\dot{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 l_{c1} s_{\theta_1} \\ \dot{\theta}_1 l_{c1} c_{\theta_1} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\dot{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left[\dot{\theta}_1 a_1 s_{\theta_1} + (y_3 s_{\theta_{13}} + w_3(y_3,t) c_{\theta_{13}}) \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\right) + \dot{w}_3(y_3,t) s_{\theta_{13}}\right] \\ \dot{\theta}_1 a_1 c_{\theta_1} + (y_3 c_{\theta_{13}} - w_3(y_3,t) s_{\theta_{13}}) \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\right) + \dot{w}_3(y_3,t) c_{\theta_{13}} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$\dot{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_2 l_{c2} s_{\theta_2} \\ \dot{\theta}_2 l_{c2} c_{\theta_2} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\dot{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left[\dot{\theta}_2 a_2 s_{\theta_2} + (y_4 s_{\theta_{24}} + w_4(y_4,t) c_{\theta_{24}}) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4\right) + \dot{w}_4(y_4,t) s_{\theta_{24}}\right] \\ \dot{\theta}_2 a_2 c_{\theta_2} + (y_4 c_{\theta_{24}} - w_4(y_4,t) s_{\theta_{24}}) \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4\right) + \dot{w}_4(y_4,t) c_{\theta_{24}} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

La energía cinética y potencial aportada por los eslabones rígidos puede ser escrita como

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{P}_i^T \dot{P}_i) + \frac{1}{2} I_i \theta_i^2 \tag{2.44}$$

donde $i = 1, 2.$, m_i y I_i son las masas e inercias, respectivamente, de los eslabones rígidos.

$$U_i = m_i g (P_i \cdot \hat{j}) \tag{2.45}$$

donde g es la aceleración gravitatoria y $\hat{j}$ es un vector unitario

Para los eslabones flexibles, la energía cinética y potencial se puede expresar como

$$T_j = \frac{1}{2} \int_0^{a_j} \varrho_j A_j (\dot{P}_j^T \dot{P}_j) dy_j \tag{2.46}$$

$$U_j = \int_0^{a_j} \varrho_j A_j g (P_j \cdot \hat{j}) dy_j \tag{2.47}$$

donde $j = 3, 4$.
ϱ_j es la densidad del material.
A_j es el área de la sección transversal del eslabón flexible.
Debido al momento de deflexión, el término de esfuerzo se determina por

$$V_j = \int_0^{a_j} E_j I_{xj} \left[\frac{\partial^2 w(y_j,t)}{\partial y_j^2}\right]^2 dy_j \tag{2.48}$$

donde E_j es el módulo de Young e I_{xj} es el momento de inercia de área.

El Lagrangiano puede ser obtenido por la Ec.(2.49).

$$L = \sum_{\kappa=1}^{4}(T_\kappa - U_\kappa) - V_j \tag{2.49}$$

Se debería hacer notar de manera general que las restricciones deberían depender de las deformaciones elásticas. Sin embargo, debido a que las deformaciones longitudinales se desprecian y las deformaciones transversales se asumen pequeñas, las distancias a_j se asumen contantes. Por esta razón, las restricciones de cadena cinemática cerrada no dependen de las deformaciones [86]. Estas restricciones están dadas por

$$\Phi = 0 = \begin{bmatrix} a_1 c_{\theta_1} + a_3 c_{\theta_{13}} - (a_5 + a_2 c_{\theta_2} + a_4 c_{\theta_{24}}) \\ a_1 s_{\theta_1} + a_3 s_{\theta_{13}} - (a_2 s_{\theta_2} + a_4 s_{\theta_{24}}) \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

El sistema mecánico con restricciones se expresa como el Lagrangiano con restricciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\kappa}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_\kappa} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\kappa}\right)^T \lambda = \tau_\kappa \tag{2.51}$$

donde η_κ son las coordenadas generalizadas que incluyen a las de cuerpo rígido, θ_i, así como a las elásticas, w_j. λ es el vector de multiplicadores de Lagrange y τ_κ son los pares generalizados.

El sistema resultante puede ser representado en su forma matricial como

$$M(\eta)\ddot{\eta} + f(\eta, \dot{\eta}) + g\eta + G(\eta)^T\lambda + \Omega = \tau_\kappa \tag{2.52}$$

donde M es la matriz de masas e inercias para cuerpos rígidos y flexibles tal y como se expresa en la siguiente ecuación

$$M(\eta)\ddot{\eta} = \left(H_1 + \varrho_j A_j \int_0^{a_j} H_2 dy_j\right) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_j \\ \ddot{w}(y_j, t) \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

donde

$$H_1 = \begin{bmatrix} m_i l_{ci}^2 + I_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \varrho_j A_j \begin{bmatrix} a_i^2 + y_j^2 + w_j^2 + 2a_i\left(y_j c_{\theta_j} - w_j s_{\theta_j}\right) & y_j^2 + w_j^2 + a_i\left[y_j c_{\theta_j} + w_j(y_j, t) s_{\theta_j}\right] & y_j + a_i c_{\theta_j} \\ y_j^2 + w_j^2 + a_i\left[y_j c_{\theta_j} + w_j(y_j, t) s_{\theta_j}\right] & y_j^2 + w_j(y_j, t)^2 & y_j \\ y_j + a_i c_{\theta_j} & y_j & 1 \end{bmatrix}$$

donde $i = 1, 2; j = 3, 4$. De la ecuación anterior se puede observar que la matriz $M(\eta)$ es simétrica y definida positiva. La matriz de Coriolis está definida por:

$$f(\eta,\dot{\eta}) = \varrho_j A_j \begin{bmatrix} -2a_i[y_j s_{\theta_j} - w_j(y_j,t)c_{\theta_j}]\dot{\theta}_j & -a_i[y_j s_{\theta_j} - w_j(y_j,t)c_{\theta_j}]\dot{\theta}_j & 2\left(w_j(y_j,t) - a_i s_{\theta_j}\right)\left(\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_j\right) \\ a_i[-y_j s_{\theta_j} + w_j(y_j,t)c_{\theta_j}]\dot{\theta}_i & w_j(y_j,t)\dot{w}_j(y_j,t) & w_j(y_j,t)\dot{\theta}_i \\ \left(a_i s_{\theta_j} - w_j(y_j,t)\right)\dot{\theta}_i - w_j(y_j,t)\dot{\theta}_j & -w_j(y_j,t)\dot{\theta}_i - w_j(y_j,t)\dot{\theta}_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{w}(y_j,t) \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

El vector relacionado a la aceleración gravitatoria se expresa como:

$$g\eta = \begin{bmatrix} gm_i l_{ci} c_{\theta_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \varrho_j A_j g \begin{bmatrix} a_i c_{\theta_i} + [y_j c_{\theta_\upsilon} - w_j(y_j,t)s_{\theta_\upsilon}] \\ [y_j c_{\theta_\upsilon} - w_j(y_j,t)s_{\theta_\upsilon}] \\ c_{\theta_\upsilon} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

donde $\upsilon = \theta_1 + \theta_3, \theta_2 + \theta_4$.

Las restricciones de cadena cinemática cerrada se manejan mediante los multiplicadores de Lagrange, obtenida mediante la siguiente ecuación

$$G(\eta)^T \lambda = \begin{bmatrix} -a_i s_{\theta_i} & a_i c_{\theta_i} \\ -a_j s_{\theta_j} & a_j c_{\theta_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

Debido al momento de deflexión, el término de esfuerzo de cuarto orden se obtiene

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_j I_{xj} \frac{\partial^4 w_j(y_j,t)}{\partial y_j^4} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

El sistema considera las condiciones de frontera de simplemente apoyada en los extremos [87], Ecs.(2.58)-(2.59) y condiciones iniciales Ec.(2.60).

$$w_j(0,t) = 0; E_j I_{xj} \frac{\partial^2 w_j(y_j,t)}{\partial y_j^2}|_{y_j=0} = 0 \tag{2.58}$$

Condiciones similares de desplazamiento lateral y momento flexionantes iguales a cero, pueden ser escritas para el otro extremo de la viga.

$$w_j(a_j,t) = 0; E_j I_{xj} \frac{\partial^2 w_j(y_j,t)}{\partial y_j^2}|_{y_j=a_j} = 0 \tag{2.59}$$

Las condiciones iniciales pueden ser escritas para el sistema y_j como:

$$w_j(y_j,0) = \chi_j(y_j); \frac{\partial w_j(y_j,0)}{\partial t} = \iota_j(y_j) \tag{2.60}$$

$\chi_j(y_j)$ es una deformación inicial en los eslabones flexibles. $\iota_j(y_j)$ es la velocidad inicial para cada punto de y_j. Estas condiciones iniciales en deformación y velocidad se pueden considerar nulos si los efectos gravitacionales se desprecian y se parte del reposo.

El conjunto de ecuaciones dinámicas presentadas anteriormente, tiene las ventajas de que no se tienen que saber previamente las formas modales, para resolver el sistema mecánico. La segunda ventaja es que a diferencia del MEF, el modelo no está discretizado para representar la naturaleza distribuida de los eslabones no actuados; aunque la discretización del modelo es necesaria para resolver el sistema computacionalmente mediante el método de diferencias finitas. Se ha seleccionado el método de diferencias finitas porque requiere menos tiempo de cómputo[2] que el que se requeriría con el uso del MEF.

Las propiedades del modelo dinámico para robots manipuladores flexibles, las cuales se obtienen de un análisis matricial, se muestran en [88]. La mayoría de las propiedades enunciadas en este trabajo, aplican tanto para modelos rígidos como para modelos flexibles. Por ejemplo, en el caso de la matriz de inercia se demuestra que es símetrica y definida positiva para el caso rígido y flexible, sólo si las deformaciones en los eslabones flexibles son pequeñas. Esta misma premisa, de asumir deformaciones pequeñas, es utilizada para definir los límites de las normas y realizar las demostraciones de ciertas propiedades. Otra propiedad está relacionada con la pasividad de la estructura de los robots manipualdores y esta propiedad con frecuencia se utiliza como prueba en muchos esquemas de control.

Otras propiedades que surgen del análisis matricial como la controlabilidad y observabilidad, a diferencia de los sistemas lineales, en los sistemas no-lineales no hay una metodología para hacer uso de estas herramientas de análisis ya que no pueden ser aplicadas universalmente. El concepto, generalmente utilizado para la observabilidad de sistemas no-lineales, se basa en la deficiencia del sistema (o que sea inadecuadamente representado) para distinguir entre dos estados donde algún control genera efectos observables diferentes [89].

En el estudio de la controlabilidad para sistemas no-lineales, la tendencia más simple es la linealización, la cual no siempre es satisfactoria, ya que mediante la linealización un sistema no-lineal puede perder mucha información de la estructura del sistema.

2.1.3. Ecuaciones diferenciales parciales

Los sistemas distribuidos en mecánica, los cuales son modelados por ecuaciones diferenciales parciales, tienen inherentemente infinitos grados de libertad. La solución exacta en la mayoría de los casos es díficil y casi imposible de obtener en problemas reales. Por ello, es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una solución aproximada por medio de la discretización del cuerpo en un sistema finito de grados de libertad. La exactitud de los algoritmos del tipo de elemento finito (FEM, Galerkin) depende del número de elementos considerados. Es decir, una malla más refinada, la cual tiene más elementos y nodos, resulta en una mejora de la exactitud de los resultados [90], [91].

[2]En el presente trabajo el tiempo de cómputo debe ser considerado porque se requiere un alto número de evaluaciones de la función objetivo por parte del método heúristico para obtener un resultado factible. Más adelante, en el Capítulo 3, se profundiza en cómo funciona el método heurístico para realizar el proceso de optimización.

Para resolver el sistema de ecuaciones integrodiferenciales, Ec.(2.52), el dominio del espacio y el tiempo del sistema debe ser discretizado. Usualmente una malla uniforme en el espacio y el tiempo es propuesta, aunque se debe prestar atención a la condición de Courant-Friedrichs-Lewy. Ésta es una condición necesaria para la convergencia numérica de las ecuaciones diferenciales parciales. La transformación de las condiciones de frontera Ecs.(2.58)-(2.59) usando diferencias finitas es resultado de una expansión de series de Taylor como se indica en el siguiente procedimiento

$$w_j(y_j+\Delta y_j) \approx w_j(y_j)+\frac{\partial w_j}{\partial y_j}|_{y_j}\Delta y_j+\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j}\frac{\Delta y_j^2}{2!}+\frac{\partial^3 w_j}{\partial y_j^3}|_{y_j}\frac{\Delta y_j^3}{3!}+\frac{\partial^4 w_j}{\partial y_j^4}|_{y_j}\frac{\Delta y_j^4}{4!} \quad (2.61)$$

$$w_j(y_j-\Delta y_j) \approx w_j(y_j)-\frac{\partial w_j}{\partial y_j}|_{y_j}\Delta y_j+\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j}\frac{\Delta y_j^2}{2!}-\frac{\partial^3 w_j}{\partial y_j^3}|_{y_j}\frac{\Delta y_j^3}{3!}+\frac{\partial^4 w_j}{\partial y_j^4}|_{y_j}\frac{\Delta y_j^4}{4!} \quad (2.62)$$

Tomando hasta la segunda derivada y sumando la Ec.2.62 con la Ec.2.61 se obtiene

$$w_j(y_j+\Delta y_j)+w_j(y_j-\Delta y_j)=2w_j(y_j)+\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j}\Delta y_j^2 \quad (2.63)$$

o

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j}=\frac{w_j(y_j+\Delta y_j)-2w_j(y_j)+w_j(y_j-\Delta y_j)}{\Delta y_j^2} \quad (2.64)$$

Usando la condiciones de frontera de la Ec.2.58 y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$0=w_j(y_j+\Delta y_j)+w_j(y_j-\Delta y_j) \quad (2.65)$$

o en el caso discretizado por nodos, para la primera frontera cuando $y_j=0$ se tiene

$$\widehat{w}_j(n,t_s)|_{n=1}=0; \quad \widehat{w}_j(n,t_s)|_{n=0}=-\widehat{w}_j(n,t_s)|_{n=2} \quad (2.66)$$

donde $\widehat{w}_j(n,t_s)$ representa la discretización de $w_j(y_j,t)$; n representa el número de nodo en el que está dividido el eslabón flexible; t_s es el historial de la solución de la derivada parcial. Esta misma transformación puede ser aplicada al otro extremo de la viga de cada eslabón flexible expresado como

$$\widehat{w}_j(n,t_s)|_{n=n_f}=0; \quad \widehat{w}_j(n,t_s)|_{n=n_f-1}=-\widehat{w}_j(n,t_s)|_{n=n_f+1} \quad (2.67)$$

donde n_f es el número total de nodos con que se discretiza al eslabón flexible.

Para obtener el caso del término de cuarto orden espacial de la Ec.(2.57) en su forma discretizada se parte de la Ec. 2.64, usando $\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j}$ en lugar de $w_j(y_j)$ como

$$\frac{\partial^4 w_j}{\partial y_j^4}|_{y_j}=\frac{\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j+\Delta y_j}-2\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j}+\frac{\partial^2 w_j}{\partial y_j^2}|_{y_j-\Delta y_j}}{\Delta y_j^2} \quad (2.68)$$

Sustituyendo Ec.2.64 en el miembro derecho de la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial^4 w_j}{\partial y_j^4}|_{y_j} = \left\{ \frac{w_j(y_j + 2\Delta y_j) - 2w_j(y_j + \Delta y_j) + w_j(y_j)}{\Delta y_j^2} \right\} \frac{1}{\Delta y_j^2}$$
$$-2 \left\{ \frac{w_j(y_j + \Delta y_j) - 2w_j(y_j) + w_j(y_j - \Delta y_j)}{\Delta y_j^2} \right\} \frac{1}{\Delta y_j^2}$$
$$\left\{ \frac{w_j(y_j) - 2w_j(y_j - \Delta y_j) + w_j(y_j - 2\Delta y_j)}{\Delta y_j^2} \right\} \frac{1}{\Delta y_j^2} \tag{2.69}$$

Simplificando la ecuación anterior, ver [87], y descritizando para nuestro caso el término de cuarto orden de la Ec.2.57 se expresa como

$$\frac{\partial^4 w_j(y_j, t)}{\partial y^4} \approx \frac{\widehat{w}_j(n_{+2}, t_s) - 4\widehat{w}_j(n_{+1}, t_s) + 6\widehat{w}_j(n, t_s) - 4\widehat{w}_j(n_{-1}, t_s) + \widehat{w}_j(n_{-2}, t_s)}{h_{yj}^4} \tag{2.70}$$

donde h_{yj} es el paso espacial del mallado. Cuanto menor sea h_{yj} el resultado será más aproximado a la solución exacta.

Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas.

Capítulo 3

Diseño concurrente de un robot rígido para una tarea de alta velocidad

3.1. Introducción

En este capítulo, se aborda el diseño integrado estructura-control de un robot paralelo con cinco eslabones rígidos para tareas de seguimiento de trayectoria en alta velocidad. Uno de los problemas encontrados durante el desarrollo del presente trabajo es la complejidad del manejo de la restricción de par para una tarea en alta velocidad, dada una trayectoria deseada. Lo anterior, se debe a la obtención de picos de par $u(t)$ de alta magnitud, los cuales sobrepasaban los límites de par u_{max} definidos por el problema, durante el estado transitorio. El problema de manejar la restricción $u(t)$ se complica aun más en un esquema de diseño concurrente ya que se modifican los parámetros estructurales y de control simultáneamente. Si se piensa en el diseño concurrente, se espera que la ganancia proporcional en el controlador, la masa, los espesores y las longitudes de los eslabones se reduzcan como lo hace el límite de par u_{max}, ya que hay menos energía disponible para realizar la tarea y menos inercia debería ser desplazada. Las implicaciones de proponer diferentes límites de par son obtener el par mínimo con el que la tarea puede llevarse a cabo sin perder precisión de acuerdo con el diseñador. Si el diseño tiene un costo limitado, la solución podría proporcionar los motores menos costosos o incluso evitar que los motores no se sobredimensionen para una tarea. Por ello, se ha tratado este problema en [92], [57], [60], donde se hace el manejo de la restricción u_{max}. Esta restricción, u_{max}, se establece para tres límites de par[1] distintos, además de considerar restricciones adicionales geométricas y de Grashof. Los parámetros geométricos de todos los eslabones y las ganancias de control PID se ajustan para minimizar el error de seguimiento de trayectoria.

En este capítulo se muestra un análisis empírico de cómo se modifica el diseño estructura-control a medida que se reduce la restricción de par en la entrada de control para la misma tarea de alta velocidad. Asimismo en base a estos resultados, se realiza

[1] Los tres límites de par, ejemplifican tres tamaños de motor distintos. Estos límites de par se proponen espaciados en magnitud entre sí, con la finalidad de detectar un patrón en la solución del diseño concurrente.

un estudio de cómo estas diferencias en u_{max} cambian las medidas de rendimiento de tres técnicas de manejo de restricciones de segunda generación. Estas técnicas son: las Reglas de Factibilidad (FR[2]) propuestas por Deb [93], "ε-constrained method" propuesto por Takahama y Sakai [94], y Stochastic Ranking (SR) propuesto por Runarsson y Yao [95]. El rendimiento de las tres técnicas de manejo de restricciones se evalúa con respecto a la capacidad de encontrar soluciones competitivas factibles con el menor número de evaluaciones de la función objetivo y de las restricciones. Las técnicas de manejo de restricciones y las medidas de rendimiento se describirán con más detalle más adelante en este capítulo.

Como se ha mencionado anteriormente el diseño concurrente, en sistemas mecatrónicos, se ha aplicado para diseñar una transmisión variable continua con piñón-cremallera [57], Pendubot [58], un robot paralelo con cinco eslabones [59], un manipulador paralelo planar actuado mediante cables [60], etc. Los trabajos anteriores comparten una característica común: hay una restricción dinámica $u(t)$ en el par de entrada que los actuadores proporcionan al sistema, aunque en estas condiciones de trabajo en $u(t)$ son respectivamente lo siguiente: no hay límite en $u(t)$, $u(t)$ tiene un perfil bang-bang, se requiere una tarea de baja velocidad donde los transitorios son más suaves, $u(t)$ es un mínimo o un máximo constante. Aunque en la mayoría de los casos prácticos habrá un límite de par máximo que los actuadores pueden proporcionar, el perfil de par no se conoce, ya que es variable en el tiempo.

Este tipo de problema se puede resolver mediante métodos de programación matemática, aunque se pueden generar algunos inconvenientes como quedar atrapado en mínimos locales, presentar problemas de sensibilidad a las condiciones iniciales, etc. Para enfrentar estas desventajas y para obtener mejores soluciones que los métodos de programación matemática, se sugiere en [57] utilizar enfoques heurísticos como pueden ser los algoritmos evolutivos. Por esta razón, en el trabajo presente, se utiliza Evolución Diferencial (DE / rand / 1 / bin) como optimizador estocástico [96]. DE es ampliamente utilizado porque requiere de pocos parámetros de control por ser sintonizados [97], presenta un balance óptimo entre la precisión de la solución y la eficiencia computacional del algoritmo [98].

Como se indica en [99], no es una tarea fácil manejar múltiples restricciones no lineales debido a ello se han estudiado varios enfoques en la literatura. Aunque no existe un consenso estándar en la taxonomía de las técnicas de manejo de restricciones [100], [101], se puede identificar una primera generación simplificada de la siguiente manera [102]: funciones de penalización, decodificadores, operadores especiales y separación de función objetivo y restricciones. Además, cada una de estas ramas se puede subdividir en varias formas de manejo de restricciones; por ejemplo, en el caso de las funciones de penalización, es posible encontrar penalización estática, penalización dinámica, penalización por recocido, etc. En [101] se puede encontrar una referencia bien detallada sobre cómo funciona cada una de estas técnicas. Algunas desventajas de esta primera generación son la convergencia prematura, la necesidad de un ajuste cuidadoso de los parámetros y un alto costo computacional.

[2]Por sus siglas en inglés Feasibility Rules

La segunda generación de técnicas de manejo de restricciones se puede categorizar de la siguiente manera: reglas de factibilidad, método restringido ε, clasificación estocástica, conjuntos de manejo restringido, problema con múltiples objetivos (MOP)[3], nuevas funciones de penalización y novedosos operadores especiales. Los primeros cuatro enfoques se pueden considerar como nuevas técnicas de manejo de restricciones. El quinto enfoque se considera como una nueva clase de técnica de manejo de restricciones, y las dos últimas son versiones mejoradas de la generación mencionada anteriormente.

En el resto del capítulo, primero se define el problema de optimización y las restricciones. Segundo, se elabora una breve revisión de las tres técnicas de manejo de restricciones seleccionadas para ser comparadas. Tercero, se presenta la solución y la discusión del problema de optimización dados tres límites de par diferentes, así como medidas estadísticas y diferentes medidas de desempeño de las tres técnicas de manejo de restricciones. El capítulo termina con algunas conclusiones.

3.2. Problema de optimización

En la presente sección, el diseño integrado de la síntesis dimensional, el diseño de formas y el sistema de control, se establecen formalmente como un problema dinámico de optimización no lineal.

3.2.1. Descripción del problema

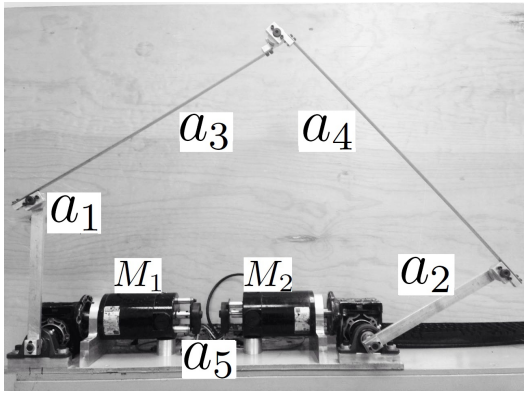


Figura 3.1: Robot paralelo con cinco eslabones

El robot paralelo de cinco barras consta de cinco eslabones rígidos conectados en sus extremos por cinco articulaciones giratorias. La notación usada es la distancia entre las articulaciones a_i e i hace referencia al eslabón en cuestión. Dos de estas articulaciones asociada a la distancia a_i; $i = 1, 2$ son activadas por un controlador PID. Estos eslabones accionados están conectados al marco fijo del robot, como se

[3]Multi-objetive Problem

muestra en la Fig. 3.1. Los eslabones no accionados están representados por el sufijo $j = 3, 4$. Para obtener el modelo cinemático y dinámico del robot, se utiliza la técnica de modelo reducido descrita por Ghorbel [103]. Las propiedades cinemáticas están determinadas por las distancias entre los centros $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ a las articulaciones giratorias. La forma geométrica de los eslabones $(i = 1, 2)$ conectados a los actuadores está determinada por los parámetros de diseño V_m =$[f_i, c_i, g_i, h_i, j_i, b_i, a_i, d_i, i_i, k_i]$ que se muestran en la Fig.3.2. La forma geométrica de los eslabones no actuados $(j = 3, 4)$ está determinada por los parámetros de diseño a_j, q_j, r_j(Ver Fig.3.3). Las variables e_i, q_j representan el grosor de los eslabones $i = 1, 2$ y $j = 3, 4$ respectivamente. La variable r_j representa el ancho del j-ésimo eslabón. Todas estas variables modifican la inercia de cada eslabón: masa (m), el centro de masa (l_{ci}) y el ángulo del centro de masa (γ_i), cuyo cálculo se detalla en [59]. Por otro lado, las ganacias del controlador PID $V_c = [Kp_i, Kd_i, Ki_i] \in R^3$ se proponen para cada actuador. El vector de variables de todo el sistema está determinado por $p = [V_m, V_c, a_j, e_i, r_j] \in R^{35}$.

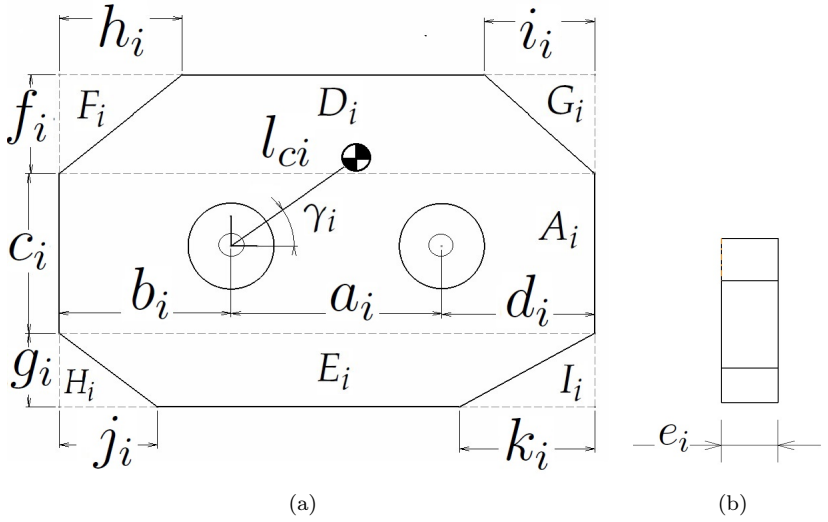


Figura 3.2: Representación esquemática de los eslabones $i = [1, 2]$. Vista frontal(a) y lateral (b).

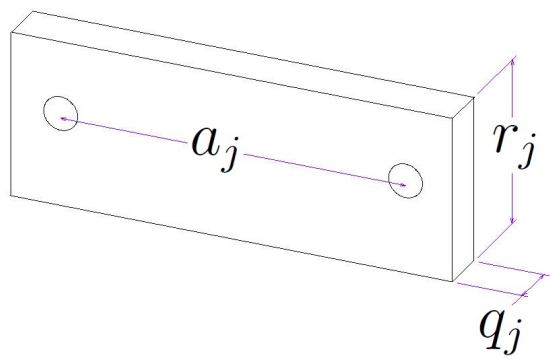


Figura 3.3: Representación esquemática de los eslabones $j = [3, 4]$. Vista isométrica.

3.2.2. Función objetivo

El problema de optimización dinámica de un solo objetivo consiste en encontrar el vector p que minimiza el error de seguimiento definido como

$$\min_{p \in R^{35}} J_{obj} = \int_0^{t_f} (e_{r1} + e_{r2})\, dt \tag{3.1}$$

donde $e_{r1} = (x_n - x_r)^2$, $e_{r2} = (y_n - y_r)^2$, t_f es el tiempo de ciclo y para este problema se considera de 0.5 s, en el caso del presente trabajo se considera alta velocidad a toda tarea que se realice un ciclo en menos de un segundo. $R = [x_r, y_r]$ es la posición deseada del efector final. $C[x_n, y_n]$ es una curva de Lissajous propuesta para la tarea de seguimiento de trayectoria en alta velocidad tal como

$$x_N = c_{ex} + s_{mi} \sin\left(2\frac{\pi t}{t_f}\right)$$

$$y_N = c_{ey} + s_m \sin\left(4\frac{\pi t}{t_f} + \left(\frac{5\pi}{8}\right)\right) \tag{3.2}$$

donde N es el número de puntos en el que está discretizada la trayectoria, $c_e = [c_{ex}, c_{ey}] = [0.4, -0.7]m$ es el centro de la figura, $s_{mi} = 0.075m$, $s_m = 0.125m$.

La posición cartesiana deseada C y la velocidad $\dot{C}$ de la trayectoria deseada se deben transformar al espacio articular $(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}})$ para que los errores en posición y en velocidad requeridos para la referencia del PID se pueden lograr. Esta transformación se puede lograr mediante la cinemática inversa descrita anteriormente Ecs.(2.32)-(2.33).

El sistema dinámico está descrito por [103], Ec. (3.3).

$$\tau = D'(\theta')\ddot{\theta} + C'\left(\theta', \dot{\theta}'\right)\dot{\theta} + \tilde{g}\left(\theta'\right)$$

$$\dot{\theta}' = \rho\left(\theta'\right)\dot{\theta} \tag{3.3}$$

donde
θ'= Es un vector de coordenadas generalizadas.
$\rho(\theta') = \psi_{\theta'}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} 0_{(n'-n)xn} \\ I_{nxn} \end{bmatrix}$
n =Representa los grados de libertad del sistema.
n' = Es la suma de las coordenadas generalizadas dependientes e independientes.
$\psi_{\theta'}^{-1}$ =Es una transformación que permite escribir las velocidades angulares de los eslabones no actuados en términos de las velocidades angulares actuadas.
$D(\theta') = \rho^T(\theta')D'(\theta')\rho(\theta') \in R^{2x2}$
$C(\theta', \dot{\theta}') = \rho^T(\theta')C'(\theta', \dot{\theta}')\rho(\theta') + \rho^T(\theta')D'(\theta')\dot{\rho}(\theta', \dot{\theta}') \in R^{2x2}$
$\tilde{g}\,(\theta') = \rho^T(\theta')g'(\theta') \in R^{2x2}$
$\dot{\rho}(\theta') = -\psi_{\theta'}^{-1}(\theta')\dot{\psi}_{\theta'}(\theta')\rho(\theta') \in R^{4x2}$
$\tau = [\tau_1, \tau_2]^T \in R^2$

$$\rho(\theta') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{a_1 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'-\theta_4'\right)}{a_3 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)} - 1 & -\frac{a_2 \sin\left(\theta_4'\right)}{a_3 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)} \\ -\frac{a_1 \sin\left(\theta_3'\right)}{a_4 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)} & -\frac{a_2 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'\right)}{a_4 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\psi}_{\theta'}(\theta') = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{11\theta'} & \dot{\psi}_{12\theta'} & \dot{\psi}_{13\theta'} & \dot{\psi}_{14\theta'} \\ \dot{\psi}_{21\theta'} & \dot{\psi}_{22\theta'} & \dot{\psi}_{23\theta'} & \dot{\psi}_{24\theta'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{\theta'}^{-1}(\theta') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{\psi}_{31\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{32\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{33\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{34\theta'}^{-1} \\ \dot{\psi}_{41\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{42\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{43\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{44\theta'}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{\theta'}^{-1}(\theta') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{\psi}_{31\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{32\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{33\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{34\theta'}^{-1} \\ \dot{\psi}_{41\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{42\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{43\theta'}^{-1} & \dot{\psi}_{44\theta'}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{31\theta'}^{-1} = \frac{\cos(\theta_2'+\theta_4')}{a_3 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)} \qquad \psi_{41\theta'}^{-1} = \frac{\cos(\theta_1'+\theta_3')}{a_4 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)}$$

$$\psi_{32\theta'}^{-1} = \frac{\sin(\theta_2'+\theta_4')}{a_3 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)} \qquad \psi_{41\theta'}^{-1} = \frac{\sin(\theta_1'+\theta_3')}{a_4 \sin\left(\theta_1'-\theta_2'+\theta_3'-\theta_4'\right)}$$

$$\psi^{-1}_{33\theta'} = \frac{a_1 \sin(\theta'_1-\theta'_2-\theta'_4)}{a_3 \sin\left(\theta'_1-\theta'_2+\theta'_3-\theta'_4\right)} - 1 \qquad \psi^{-1}_{43\theta'} = \frac{a_1 \sin(\theta'_3)}{a_4 \sin\left(\theta'_1-\theta'_2+\theta'_3-\theta'_4\right)}$$

$$\psi^{-1}_{34\theta'} = \frac{a_2 \sin(\theta'_4)}{a_3 \sin\left(\theta'_1-\theta'_2+\theta'_3-\theta'_4\right)} \qquad \psi^{-1}_{44\theta'} = \frac{a_2 \sin(\theta_1-\theta'_2+'\theta'_3)}{a_4 \sin\left(\theta'_1-\theta'_2+\theta'_3-\theta'_4\right)} - 1$$

$$\dot{\psi}_{11\theta'} = -\dot{\theta}'_1(a_1\cos(\theta'_1) + a_3\cos(\theta'_1+\theta'_3)) - \dot{\theta}'_3 a_3 \cos(\theta'_1+\theta'_3)$$
$$\dot{\psi}_{12\theta'} = \dot{\theta}'_2(a_2\cos(\theta'_2) + a_4\cos(\theta'_2+\theta'_4)) + \dot{\theta}'_4 a_4 \cos(\theta'_2+\theta'_4)$$
$$\dot{\psi}_{13\theta'} = -a_3\cos(\theta'_1+\theta'_3)(\dot{\theta}'_1+\dot{\theta}'_3)$$
$$\dot{\psi}_{14\theta'} = a_4\cos(\theta'_2+\theta'_4)(\dot{\theta}'_2+\dot{\theta}'_4)$$
$$\dot{\psi}_{21\theta'} = -a_1\sin(\theta'_1)\dot{\theta}'_1 - a_3\sin(\theta'_1+\theta'_3)(\dot{\theta}'_1+\dot{\theta}'_3)$$
$$\dot{\psi}_{22\theta'} = a_2\sin(\theta'_2)\dot{\theta}'_2 + a_4\sin(\theta'_2+\theta'_4)(\dot{\theta}'_2+\dot{\theta}'_4)$$
$$\dot{\psi}_{23\theta'} = -a_3\sin(\theta'_1+\theta'_3)(\dot{\theta}'_1+\dot{\theta}'_3)$$
$$\dot{\psi}_{24\theta'} = a_4\sin(\theta'_2+\theta'_4)(\dot{\theta}'_2+\dot{\theta}'_4)$$

$$D'(\theta') = \begin{bmatrix} D'_{11} & 0 & D'_{13} & 0 \\ 0 & D'_{22} & 0 & D'_{24} \\ D'_{31} & 0 & D'_{33} & 0 \\ 0 & D'_{42} & 0 & D'_{44} \end{bmatrix}$$

$$C'(\theta',\dot{\theta}') = \begin{bmatrix} h_1\dot{\theta}'_3 & 0 & h_1(\dot{\theta}'_1+\dot{\theta}'_3) & 0 \\ 0 & h_2\dot{\theta}'_4 & 0 & h_2(\dot{\theta}'_2+\dot{\theta}'_4) \\ -h_1\dot{\theta}'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_2\dot{\theta}'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g'(\theta') = g \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_3 a_1)\cos(\theta'_1+\gamma_1) + m_3 l_{c3}\cos(\theta'_1+\theta'_3) \\ (m_2 l_{c2} + m_4 a_2)\cos(\theta'_2+\gamma_2) + m_4 l_{c4}\cos(\theta'_2+\theta'_4) \\ m_3 l_{c3}\cos(\theta'_1+\theta'_3) \\ m_4 l_{c4}\cos(\theta'_2+\theta'_4) \end{bmatrix}$$

$$D'_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_3(a_1^2 + l_{c3}^2 + 2a_1 l_{c3}\cos(\theta'_3)) + I_1 + I_3$$
$$D'_{22} = m_2 l_{c2}^2 + m_4(a_2^2 + l_{c4}^2 + 2a_2 l_{c4}\cos(\theta'_4)) + I_2 + I_4$$
$$D'_{31} = D'_{13} = m_3(l_{c3}^2 + a_1 l_{c3}\cos(\theta'_3)) + I_3$$
$$D'_{42} = D'_{24} = m_4(l_{c4}^2 + a_2 l_{c4}\cos(\theta'_4)) + I_4$$
$$D'_{33} = m_3 l_{c3}^2 + I_3$$
$$D'_{44} = m_4 l_{c4}^2 + I_4$$
$$h_1 = -m_3 a_1 l_{c3}\sin(\theta'_3)$$
$$h_2 = -m_4 a_2 l_{c4}\sin(\theta'_4)$$

Este sistema dinámico se deriva del principio de Lagrange y de D′Alembert y una de las principales ventajas es que no requiere calcular los multiplicadores de Lagrange. El procedimiento para obtener la dinámica inversa del mecanismo de cadena cinemática cerrada consiste en:

- Transformar el mecanismo de cadena cinemática cerrada a varios mecanismos de cadena cinemática abierta.
- Calcuar los pares en las articulaciones de los mecamismos de cadena cinemática abierta para el mismo movimiento, como en el mecanismo de cadena cinemática cerrada.
- Calcular los pares en las articulaciones del mecanismo original de cadena cinemática cerrada, a partir de los pares de las articulaciones del sistema de cadena abierta tomando en cuenta las restricciones cinemáticas.

Dependiente del sistema dinámico descrito anteriormente, la entrada de control se puede calcular por

$$u_i(t) = Kp_i e_i + Ki_i \int_0^{tf} e_i dt + Kd_i \dot{e}_i \tag{3.4}$$

donde $e_i = \left(\bar{\theta}_i - \theta_i\right)$, $\dot{e}_i = \left(\dot{\bar{\theta}}_i - \dot{\theta}_i\right)$. Se supone que la posición inicial del efector final comienza desde el reposo en el punto $C = [0.4. - 0.58]$ y después de usar la Ec.(2.32), la condición inicial en el espacio articular puede ser calculado para cada solución propuesta. Resumiendo θ_1, θ_2 y θ_3, θ_4 son los ángulos correspondientes a las articulaciones actuadas y no actuadas respectivamente del robot paralelo, cuyo vector de estado actual es $x = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \int_0^{tf} e_1 dt, \int_0^{tf} e_2 dt]$.

3.2.3. Restricciones

1. Las restricciones para este problema son las condiciones de rotabilidad de **Grashof**.

$$g_c = \begin{cases} a_5 + a_1 + a_2 - a_3 - a_4 < 0 \\ a_1 + a_2 - a_3 < 0 \\ a_1 + a_2 - a_4 < 0 \\ a_3 - a_5 < 0 \\ a_4 - a_5 < 0 \\ \end{cases} \tag{3.5}$$

2. Los **límites geométricos** de los eslabones actuados, en donde se asegura que puedan ser físicamente construidos.

$$g_l = \begin{cases} h_i + i_i \leq b_i + a_i + d_i \\ h_i \leq b_i + a_i + d_i \\ j_i + k_i \leq b_i + a_i + d_i \\ j_i \leq b_i + a_i + d_i \\ \end{cases} \tag{3.6}$$

Por ejemplo en el primer término en la llave de g_l, la longitud total del eslabón está dado por la suma $b_i + a_i + d_i$, de esto se desprende que no se puedan generar longitudes mayores que la longitud total del eslabón mediante combinaciones de suma por parte de los términos h_i, i_i, j_i, k_i.

3. Los **límites de las variables**.

$$p_{min} \leq p \leq p_{max} \tag{3.7}$$

4. Finalmente, la restricción dinámica del **par máximo** (3.8) la cual es dependiente de la dinámica del sistema descrito por Ec.(3.3).

$$u_{min} \leq u_i\,(t) \leq u_{max}; \quad 0 \leq t \leq t_f \tag{3.8}$$

Se proponen tres casos de estudio, donde se varía el limite de par u_{max} a 10 Nm, 5 Nm o 2 Nm según respectivamente. Estos límites de par propuestos corresponden al rango de valores de una variedad de motores maxon como los modelos GP32C o GP42C.

En el problema de optimización dinámica descrito por las expresiones (3.1)-(3.8), hay 35 parámetros de diseño (p), 29 parámetros de diseño correspondientes al diseño de la estructura y los seis restantes corresponden al diseño del control. Además, hay 13 restricciones lineales estáticas de desigualdad dadas por G_c (3.5) y G_l (3.6), dos restricciones no lineales dinámicas de desigualdad u_{max} (3.8) y cuatro restricciones suaves no lineales dinámicas de igualdad, correspondientes al seguimiento de la trayectoria en posición y velocidad, respectivamente, ver Ec.(3.2).

Finalmente, se debe cumplir una condición adicional: $-1 < (-a_{i+2}^2 + a_i^2 + ap_{ni}^2)/(2a_i ap_{ni}) < 1$; de lo contrario, no es posible evaluar la función objetivo. Cualquier valor fuera de este rango genera valores imaginarios en la cinemática inversa, esto se debe a los límites de la función "$\arccos$" expuesta en la Ec.(2.32).

3.3. Técnicas de manejo de restricciones

Actualmente, no existe un método conocido para asegurar la solución global óptima de problemas no lineales (en su caso más general) en un tiempo polinomial, por ello se han utilizado metaheurísticas para resolver estos problemas. Algunas de las ventajas de los algoritmos evolutivos son que no requieren conocimiento previo sobre el problema a resolver, operan sobre una población que impide que la búsqueda sea óptima localmente, pueden combinarse con otras técnicas de búsqueda. Por todas las razones expuestas anteriormente, en esta tesis se utilizó Evolución Diferencial como motor de búsqueda.

Evolución Diferencial [96] (DE/rand/1/bin)[4] fue desarrollado por Storn y Price

[4]El primer término significa Evolución Diferencial por sus siglas en inglés differential evolution (DE), el segundo término indica el vector para ser perturbado (al azar en este caso). El número en el tercer término significa cuántas diferencias de vector contribuirán en la mutación diferencial (un par en este caso). El último término representa el tipo cruza utilizado (bin de binomial en esta variante).

como un algoritmo evolutivo de optimización global cuyo pseudocódigo se muestra en **Algoritmo** 1.

Las tres técnicas de manejo de restricciones, FR, "ε-constrained method", y SR se comparan entre sí, todas ellas estudiadas con Evolución Diferencial como motor de búsqueda. En este **Algoritmo** 1, g representa la generación actual, los individuos NP se crean aleatoriamente al principio, $\vec{x}_{j,g} = [x_{1,j,g}, ..., x_{n,j,g}]$ se llama en el momento de la reproducción como vector objetivo o vector padre que generará un vector de prueba o descendencia $\vec{u}_{j,g}$. La forma en que se genera la descendencia es la siguiente: los primeros dos individuos, $\vec{x}_{r_1,g}$ y $\vec{x}_{r_2,g}$, de la población inicial se toman al azar, luego se hace una diferencia entre estos dos vectores y se escala por un factor definido por el usuario $F > 0$. Después de eso, este nuevo vector se agrega a un tercer vector $\vec{x}_{r_0,g}$, llamado vector base, lo que da como resultado un vector mutante. El vector mutante y el vector objetivo se recombinan para crear un vector de prueba con base en un parámetro definido por el usuario, llamado probabilidad de cruce $0 \leq CR \leq 1$.

Algorithm 1: Evolución Diferencial

```
begin
    g = 0
    Crear una población inicial aleatoria x⃗_{j,g} ∀j, j = 1, ..., NP;
    Evaluar f(x⃗_{j,g}) ∀j, j = 1, ..., NP
    for g = 1 to MAX_GEN do
        for j = 1 to NP do
            Seleccionar aleatoriamente r_0 ≠ r_1 ≠ r_2 ≠ j
            j_rand = randint[1, n]
            for k = 1 to n do
                if rand_k[0, 1] < CR or j_rand = k then
                    u_{k,j,g+1} = x_{k,r_0,g} + F(x_{k,r_1,g} − x_{k,r_2,g})
                else
                    u_{k,j,g+1} = x_{k,j,g}
            if f(u⃗_{j,g+1}) ≤ f(x⃗_{j,g}) then
                x⃗_{j,g+1} = u⃗_{j,g+1}
            else
                x⃗_{j,g+1} = x⃗_{j,g}
        g = g + 1
```

El tamaño de NP no cambia durante el proceso de optimización. Los números enteros $\vec{x}_{r_0,g}$, $\vec{x}_{r_2,g}$ y $\vec{x}_{r_3}$ se eligen aleatoriamente en el intervalo $[0, NP-1]$ y son diferentes entre sí. F es un factor real y constante que controla la amplificación en la variación diferencial $\vec{x}_{r_1,g} - \vec{x}_{r_2,g}$.

3.3.1. Primer técnica de manejo de restricciones Feasibility Rules (FR)

Este método distingue entre soluciones factibles y no viables. Para seleccionar un individuo sobre otro, se propone las siguientes reglas:

1. Entre dos soluciones no factibles, se prefiere aquella con menor violación de

restricción (3.9).

2. Entre una solución factible y una solución no factible, se prefiere la factible.
3. Entre dos soluciones factibles, se prefiere aquella con un mejor valor de función objetivo.

Respecto a la primera regla, en este trabajo es más importante considerar la suma de magnitudes de las restricciones violadas y no el número de restricciones violadas, tal como se expresa en la siguiente ecuación.

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{m} \text{máx}(0, g_k(x)) \tag{3.9}$$

Dado que se tienen restricciones estáticas como son por ejemplo las condiciones de Grashof y también se tienen restricciones dinámicas como el par en cada instante de muestreo, las restricciones tienen que ser previamente normalizadas para poderlas sumar y no se le de más peso a una restricción por encima de otra.

3.3.2. Segunda técnica de manejo de restricciones, ε-Constrained method

Este mecanismo transforma un problema de optimización con restricciones a uno sin restricciones. El método ε-Constrained presenta dos características principales: (1) la relajación del límite por lo que la solución puede considerarse como factible (basada en la suma de las restricciones violadas); (2) un mecanismo de ordenamiento que precede a la minimización de la violación restringida sobre la optimización de la función objetivo. La forma en que funciona el método ε-Constrained se indica en Ec. (3.10), para ello es necesario conocer previamente la sumatoria de restricciones como se indica en Ec. (3.9).

$$(f_{x_1}, \phi_{x_1}) <_{\varepsilon} (f_{x_2}, \phi_{x2}) \begin{cases} f_{x_1} < f_{x_2}, \ if \ \phi_{x_1}, \phi_{x_2} \leq \varepsilon \\ f_{x_1} < f_{x_2}, \ if \ \phi_{x_1} = \phi_{x_2} \\ \phi_{x_1} < \phi_{x_2}, \ en \ otro \ caso \end{cases} \tag{3.10}$$

donde x_1 y x_2 son dos soluciones para comparar. f_{x_1}, f_{x_2} son sus valores de función objetivo y ϕ_{x_1}, ϕ_{x_2} es la magnitud de las restricciones violadas . Además, $\varepsilon > 0$ y como ε tiende a cero, las soluciones no factibles se comparan en función de la magnitud de la violación de la restricción. Por otro lado, si ε tiende a infinito, solo los valores de la función objetivo se usan para comparación. El nivel de ε se controla de acuerdo con la siguiente Ec. (3.11)

$$\varepsilon(0) = \phi_{x_\theta}$$

$$\varepsilon(t) \begin{cases} \varepsilon(0) \left(1 - \frac{t}{T_c}\right)^{cp}, \ 0 < t < T_c \\ 0, \qquad\qquad t \geq T_c \end{cases} \tag{3.11}$$

Algorithm 2: Stochastic Ranking

```
begin
    x_j = j ∀j ∈ {1, ...λ}
    for i = 1 to N do
        for j = 1 to λ − 1 do
            u = random(0, 1)
            if φ(x_j = 0) φ(x_{j+1} = 0) or u < Pf then
                if f(x_j) > f(x_{j+1}) then
                    swap(x_j, x_{j+1})
                    else if f(x_j) > f(x_{j+1}) then
                        swap(x_j, x_{j+1})
        if not swap performed then
            break
```

donde x_θ es el θ-esimo individuo. t es la iteración actual. cp es el parámetro para controlar la velocidad de reducción de tolerancia de restricción. T_c es la generación de control; una vez que el número de iteraciones excede la generación de control T_c, el valor de ε se establece en 0 para obtener soluciones con la mínima violación de restricción.

3.3.3. Tercer técnica de manejo de restricciónes, Stochastic Ranking

En esta técnica, el predominio de dos soluciones se equilibra con un factor de probabilidad Pf, que controla la frecuencia con la que se comparan las soluciones no factibles en función de la sumatoria de violación de restricción (ϕ_x) o su valor de función objetivo ($f(x)$). El valor de la función objetivo también se usa cuando dos soluciones son factibles, en cuyo caso la probabilidad de compararlas es 1, de lo contrario, es Pf. Después de eso, se usa un procedimiento de clasificación de burbuja para clasificar soluciones en la población como se muestra en **Algoritmo** 2. Cuando $Pf = 0$, la clasificación tiende a una penalización excesiva porque todas las comparaciones se basan solo en la suma de la violación de restricción. Si $Pf = 1$, la clasificación promueve una sub-penalización, todas las comparaciones se basan solo en el valor de la función objetivo. Ambos, por encima y por debajo de la penalización, son deficiencias que Stochastic Ranking evita al usar el factor de probabilidad Pf.

En **Algoritmo** 2, N es el número de barridos en la población; λ son los individuos que serán clasificados; $u(0, 1)$ es un generador aleatorio uniforme. El procedimiento se detiene cuando no ocurre ningún cambio en el orden de rango dentro de un barrido completo.

3.4. Resultados y discusión

En este trabajo, se resuelve el diseño integrado estructura-control de un robot paralelo con cinco eslabones. El algoritmo DE se utilizó para minimizar el error de seguimiento de trayectoria. El criterio de paro se estableció en 5000 iteraciones (MAX_{GEN}). Se eligió una población total de $NP = 50$ individuos, un factor de escala $F = 0.5$ y factor de cruza $CR = 0.9$ según el estudio de DE en espacios restringidos [104]. Para el vector de diseño p, los rangos de las variables de entrada se establecen en $a_1 \in [0.1, 0.5]$; $a_2 \in [0.1, 0.5]$; $a_3 \in [0.1, 1]$; $a_4 \in [0.1, 1]$; $a_5 \in [0.1, 1]$; $q_j \in [0.0015, 0.2]$; $r_j \in [0.005, 0.2]$; $b_i \in [0.02, 0.3]$; $c_i \in [0.03, 0.1]$; $d_i \in [0.015, 0.3]$; $e_i \in [0.0063, 0.0508]$; $f_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $g_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $h_i \in [10^{-4}, 0.9]$; $i_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $j_i \in [10^{-4}, 0.9]$; $k_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $Kp_i \in [10^{-2}, 100]$; $Kd_i \in [10^{-2}, 20]$; $Ki_i \in [10^{-2}, 20]$.

Estos límites se proponen en base a lo siguiente:

- Espacio donde se desea instalar el diseño obtenido.
- Límites de par del motor.
- Espacios mínimos para instalar las uniones de los eslabones.
- Masa total del diseño.
- Ganancias del control PID definidas positivas.

Todas las pruebas incluidas en este documento se completaron en una estación de trabajo Dell Precision T7600. Este equipo admite dos procesadores Intel ® Xeon ® E5-2650 Procesador (Ocho Core HT, 2.0Ghz Turbo) y 8 GB de memoria RAM.

Se realizaron diez corridas para cada una de las tres técnicas de manejo de restricciones, cuyos parámetros se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Ajuste de parámetros. Los valores son tomados del algoritmo original para cada técnica de manejo de restricción [94], [95]

Algoritmo	Parametro	Valor
Stochastic Ranking (SR)	Pf	0.45
ε-constrained	cp	0.5
	P_g	0.1
	R_g	3
	T_c	$0.2MAX_{GEN}$

Se consideran tres casos de estudio, cuando los límites son: $u_{max} = 10$ Nm, $u_{max} = 5$ Nm, y $u_{max} = 2$ Nm. Primero, se presenta la comparación entre las tres técnicas de manejo de restricciones, luego se evalúa el desempeño de las tres técnicas de manejo de restricciones con respecto a la capacidad de encontrar soluciones factibles competitivas utilizando menos evaluaciones de funciones objetivo y evaluaciones de las restricciones.

Después de eso, se muestra el vector solución de cada caso de estudio y el análisis ingenieríl de cada solución.

3.4.1. Comparación entre las tres técnicas de manejo de restricciones

Las técnicas de manejo de restricciones consideradas en este trabajo son las reglas de factibilidad [93] (FR), ε-constraint method [94] y Stochastic Ranking [95]. Por lo tanto, cada variante se denotó de la siguiente manera: DE con Reglas de Factibilidad, DE (FR); DE con ε-constrained method, DE (ε) y DE con Stochastic Ranking, DE (SR).

Para los tres casos de estudio, el óptimo global fue cero, es decir, no hay error de seguimiento. Para obtener una estimación de cuán difícil es generar soluciones factibles para cada estudio de caso, la métrica ϑ se calculó de acuerdo con la siguiente expresión en la ecuación (3.12) (como se sugiere en [100]):

$$\vartheta = |F|/|S| \tag{3.12}$$

donde $|F|$ es el número de soluciones posibles y $|S|$ es la cantidad total de soluciones generadas aleatoriamente. En este trabajo consideramos $|S| = 1{,}000{,}000$ de soluciones aleatorias. Para los tres casos de estudio $\vartheta = 0$, es decir, generar soluciones viables para resolver el problema de optimización es una tarea muy difícil.

Se llevaron a cabo tres experimentos, uno para cada uno de los casos de estudio descritos anteriormente. Para evaluar el rendimiento de las tres variantes DE en cada uno de los tres experimentos; se emplearon seis medidas de rendimiento [105]: Probabilidad de viabilidad (FP[5]), Probabilidad de convergencia (P), Promedio de evaluación de funciones ($AFES$[6]), Rendimiento exitoso (SP [7]), Evaluaciones necesarias para encontrar la primera solución factible ($EVALS$) y la relación de progreso (PR[8]), que se describen de la siguiente manera:

- FP representa el número de corridas factibles dividido por el número total de corridas independientes. Para considerar una corrida como factible, se debe encontrar al menos una solución factible. Los valores FP van de 0 a 1, donde 1 significa que todas las corridas fueron factibles.

- P se calcula con el número de corridas exitosas dividido por el número total de corridas independientes. En este caso, una corrida exitosa ocurre cuando la mejor solución factible encontrada llega a la vecindad del óptimo global factible. Para considerar una corrida exitosa, se debe cumplir la siguiente ecuación: $f(\overline{x}^*) - f(\overline{x}) \leq 1e-4$, donde $f(\overline{x}^*)$ es el óptimo global factible, el cual se define como un error de seguimiento en la trayectoria igual a cero. $f(\overline{x})$ es la mejor solución encontrada por cada variante DE en una sola ejecución. Para P, donde los valores van de 0 a 1, se prefiere un valor de 1.

[5] Por sus siglas en inglés Feasibilty Probability
[6] Por sus siglas en inglés Average number of Function Evaluations
[7] Por sus siglas en inglés Successful performance
[8] Por sus siglas en inglés Progress Ratio

- $AFES$ se calcula promediando el número de evaluaciones requeridas en cada corrida exitosa, para encontrar la primera solución exitosa. Para esta medida de rendimiento, se prefiere un valor bajo.
- SP combina las dos medidas anteriores para calcular la velocidad y la fiabilidad de un algoritmo, como se indica en la ecuación (3.13). Para esta medida, se prefiere un valor bajo.

$$SP = \frac{AFES}{P} \tag{3.13}$$

- PR mide la capacidad de mejora de un algoritmo dentro de la región factible. Para esta medida, se prefiere un valor alto. Se calcula como se muestra en la ecuación (3.14).

$$PR = \begin{cases} \left| ln\sqrt{\frac{f_{min}(G_{ff})}{f_{min}(MCN)}} \right|, & si \quad f_{min}(MCN) > 0 \\ \left| ln\sqrt{\frac{f_{min}(G_{ff})+1}{f_{min}(MCN)+1}} \right|, & si \quad f_{min}(MCN) = 0 \\ \left| ln\sqrt{\frac{f_{min}(G_{ff})+2*|f_{min}(MCN)|}{f_{min}(MCN)+2*|f_{min}(MCN)|}} \right|, & si \quad f_{min}(MCN) < 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

donde $f_{min}(G_{ff})$ es el valor de la función objetivo de la primera solución factible encontrada y $f_{min}(MCN)$ es el valor de la función objetivo de la mejor solución factible encontrada.

Para cada experimento, la validación estadística no paramétrica se utilizó el método de Bonferroni [106]. Este método se utiliza para medir el nivel de confianza simultáneo para un conjunto completo de intervalos de confianza.

Primer experimento: $u_{max} = 10\mathbf{Nm}$

Las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6 muestran en el eje de las abscisas una distancia adimensional que representa una medida de lo parecido o lo diferente del comportamiento para una determinada prueba. En el eje de las ordenadas se muestra las tres técnicas de manejo de restricciones.

Para el primer experimento, DE (ε) y DE (FR) obtuvieron el mejor resultado con respecto a la función objetivo como se muestra en la Tabla 3.2. Sin embargo, DE (ε) necesita un mayor número de evaluaciones para encontrar soluciones viables (consulte la Tabla 3.4 y la Fig.3.4(c)). Del mismo modo, el número de evaluaciones requeridas para encontrar soluciones factibles altamente competitivas fue menor cuando se utilizó DE (FR) (véanse los valores de AFES en la Tabla 3.5). En base a los resultados finales obtenidos por cada variante DE, la prueba estadística en la Fig.3.4 (a) mostró que DE (FR) y DE (ε) tienen un rendimiento competitivo similar, (DE (SR) fue superado por las otras dos variantes). Sin embargo, con respecto a la medida PR (Tabla 3.3 y Fig.3.4 (b)), la prueba estadística sugiere que DE (FR) tuvo un comportamiento

diferente con respecto a la otras dos variantes (DE (ε) y DE (SR)), es decir, DE (FR) presentó una mejor capacidad para mejorar las soluciones dentro de la región factible. Los resultados estadísticos también sugieren que las variantes DE (ε) y DE (SR) lograron una mejora bastante similar (pero no mejor que la de DE (FR)) dentro de la región factible (Ver Fig. 3.4 (b)). Además, esos valores FP y P en la Tabla 3.5 indicaron que las tres variantes eran competitivas porque todas alcanzaron la región factible y encontraron soluciones factibles cercanas al óptimo conocido global. Sin embargo, DE (FR) mostró el mejor rendimiento utilizando un menor número de evaluaciones para llegar a la solución más competitiva.

Tabla 3.2: Resultados finales de los valores estadísticos para el experimento 1. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	6.8776E-06	7.5580E-06	7.1394E-06	**7.1252E-06**	1.9401E-07
DE(ε)	6.0666E-06	7.7015E-06	7.3911E-06	7.3911E-06	4.7175E-07
DE(SR)	7.6258E-06	1.7708E-05	9.5212E-06	7.9646E-06	3.1940E-06

Tabla 3.3: Valores estadísticos de razón de mejora para el experimento 1. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	4.8672E+00	4.2301E+00	4.5137E+00	**4.5187E+00**	1.9276E-01
DE(ε)	4.3105E+00	2.1927E-01	3.5337E+00	4.2267E+00	1.4576E+00
DE(SR)	4.4896E+00	3.9743E+00	4.2309E+00	4.2175E+00	1.6802E-01

Tabla 3.4: EVALS mide los resultados estadísticos en el experimento 1. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev
DE(FR)	351	2001	1291	**1376**	4.9710E+02
DE(ε)	1301	48505	7186.4	2051	1.4643E+04
DE(SR)	951	2551	1626	1751	5.1004E+02

Tabla 3.5: Los valores de las medidas de desempeño FP, P, AFES y SP son obtenidos para cada variante DE en el experimento 1. El mejor resultado es indicado en negrita.

	FP	P	AFES	SP
DE(FR)	**1**	**1**	**8106**	**8106**
DE(ε)	**1**	**1**	11416.4	11416.4
DE(SR)	**1**	**1**	42186	42186

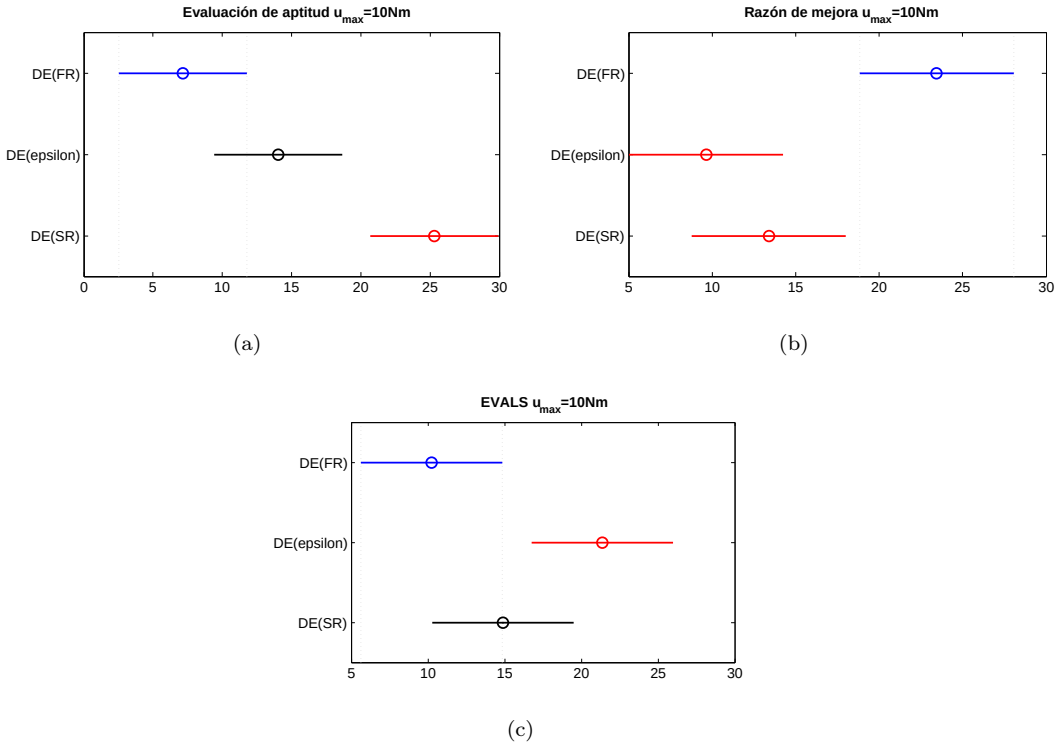


Figura 3.4: Bonferroni-Dunn post-hoc test con base en los resultados finales, la relación de progreso (PR) y los valores EVALS son obtenidos para las tres variantes DE en el experimento 1.

Segundo experimento: $u_{max} = 5$**Nm**

El segundo experimento se llevó a cabo utilizando el caso de estudio donde $u_{max} = 5$ Nm. Las Tablas 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9 incluyen los resultados estadísticos y los valores obtenidos para las medidas de desempeño utilizadas. De acuerdo con los resultados finales, DE(FR) obtuvo el mejor valor de la función objetivo y requirió menos evaluaciones para llegar a la región factible que las otras dos variantes (ver Tablas 3.6 y 3.8). La Tabla 3.7 indica que DE(FR) también mostró una capacidad de mejora de las soluciones dentro de la región factible similar a la proporcionada por DE(SR). Los resultados estadísticos confirman tal hallazgo (ver Figura 3.5 (b)). Sin embargo, como se puede ver en la Tabla 3.9, DE (FR) y DE (ε) no lograron alcanzar de forma consistente la región factible. Además, para este caso de estudio, de acuerdo con las medidas $AFES$, P y SP, DE (FR) también presentó dificultades para encontrar soluciones factibles cercanas al óptimo global. Los resultados en las Tablas 3.6 y 3.9 sugieren que cuando $|u(t)| \leq 5$ Nm, DE (SR) es la mejor alternativa para lidiar con este caso de estudio. Esta variante siempre alcanzó la región factible y obtuvo soluciones competitivas utilizando un menor número de evaluaciones con respecto a las otras dos variantes.

Tabla 3.6: Resultados finales de los valores estadísticos para el experimento 2. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	6.5006E-06	1.5700E-02	1.9686E-03	**7.0903E-06**	5.5483E-03
DE(ε)	7.3144E-06	9.3663E-06	7.7088E-06	7.5433E-06	6.3218E-07
DE(SR)	7.6335E-06	9.1972E-06	8.1551E-06	7.9977E-06	5.3272E-07

Tabla 3.7: Valores estadísticos de razón de mejora para el experimento 2. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	4.9372E+00	8.1105E-01	4.0428E+00	**4.4710E+00**	1.3212E+00
DE(ε)	4.3930E+00	1.6430E-01	2.7338E+00	3.3464E+00	1.5539E+00
DE(SR)	4.4776E+00	4.0758E+00	4.3385E+00	4.3753E+00	1.1498E-01

Tabla 3.8: EVALS mide los resultados estadísticos en el experimento 2. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	1001	3051	2076	**2201**	6.7665E+02
DE(ε)	3951	42304	11157	8051	1.2001E+04
DE(SR)	2101	2601	2411	2401	1.5239E+02

Tabla 3.9: Los valores de las medidas de desempeño FP, P, AFES y SP son obtenidos para cada variante DE en el experimento 2. El mejor resultado es indicado en negrita.

	FP	P	AFES	SP
DE(FR)	0.8	0.7	**11915.28571**	17021.83673
DE(ε)	0.9	0.9	13445.88889	14939.87654
DE(SR)	**1**	**1**	15141	**15141**

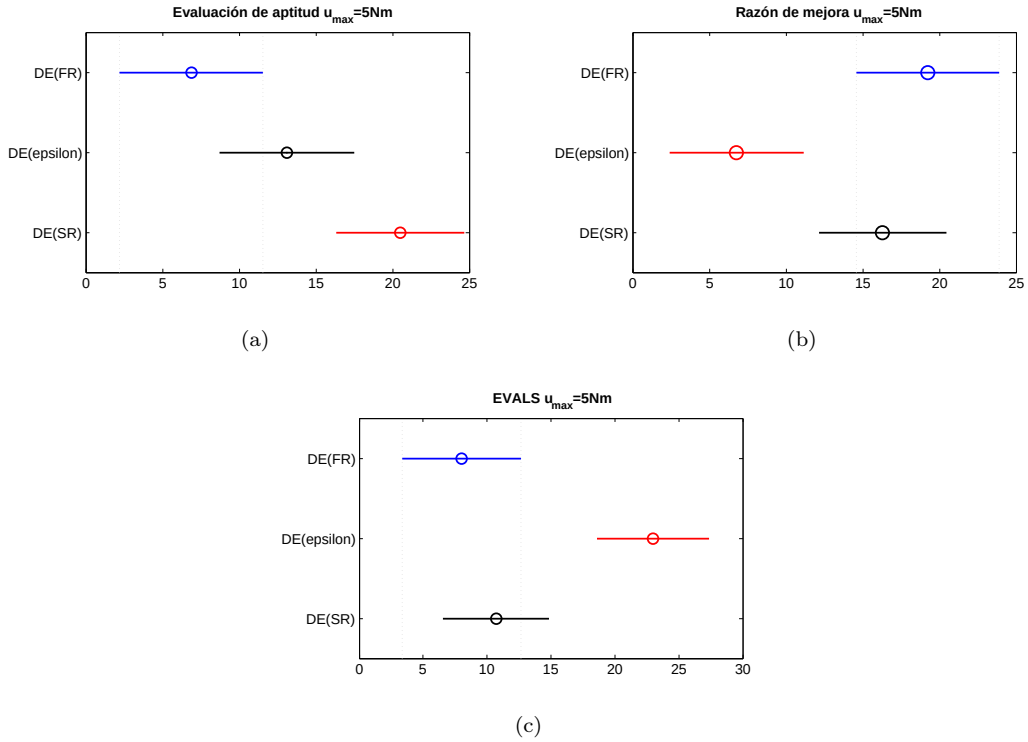


Figura 3.5: Bonferroni-Dunn post-hoc test con base en los resultados finales, la relación de progreso (PR) y los valores EVALS son obtenidos para las tres variantes DE en el experimento 2.

Tercer experimento: $u_{max} = 2$**Nm**

Finalmente, el experimento tres tiene como objetivo analizar el comportamiento de las tres variantes DE utilizando el límite $u_{max} = 2$ Nm. Para este caso de estudio, DE (ε) se descarta porque dicha variante no pudo generar soluciones factibles en ninguna corrida. Por lo tanto, la discusión se centra en las otras dos variantes DE.

DE (SR) obtuvo mejores valores de la función objetivo y presentó una mejor capacidad para mejorar las soluciones dentro de la región factible (ver Tablas 3.10 y 3.11). La prueba estadística mostró diferencias significativas entre estas dos variantes (ver Fig.3.6(a),(b) y (c)).

DE (SR) alcanzó de manera consistente la región factible y también la vecindad de la mejor solución factible conocida. Por el contrario, DE (FR) fue inconsistente en esos dos comportamientos (ver Tabla 3.13). Está claro que las soluciones factibles encontradas por DE (FR) no fueron necesariamente soluciones exitosas. Por lo tanto, la medida P indica que DE (FR) presentó dificultades para llegar a la vecindad del óptimo global. En cuanto al valor de AFES, DE (SR) fue el más competitivo, es decir, DE (SR) encontró buenas soluciones con un menor número de evaluaciones. En conclusión, para este caso de estudio, la mejor variante DE fue DE (SR). Incluso esta variante necesita más evaluaciones para llegar a la región factible y a las proximidades de la mejor solución conocida. DE (SR) obtuvo las mejores soluciones competitivas

al final del proceso de búsqueda (consulte los valores de AFES en Tabla 3.13).

Tabla 3.10: Resultados finales de los valores estadísticos para el experimento 3. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	1.2184E-05	1.6200E-02	8.5512E-03	1.0400E-02	7.6379E-03
DE(SR)	1.0125E-05	1.0866E-05	1.0338E-05	**1.0257E-05**	2.4492E-07

Tabla 3.11: Valores estadísticos de razón de mejora para el experimento 3. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Mejor	Peor	Media	Mediana	St. Dev.
DE(FR)	4.5762E+00	5.5346E-01	2.0988E+00	1.0821E+00	1.7707E+00
DE(SR)	4.3481E+00	3.9387E+00	4.2057E+00	**4.2236E+00**	1.1115E-01

Tabla 3.12: EVALS mide los resultados estadísticos en el experimento 3. El mejor resultado es indicado en negrita.

	Best	Worst	Mean	Median	St. Dev.
DE(FR)	157	3851	2670.5	**2926**	1.0892E+03
DE(SR)	2351	22753	5691.2	5691.2	6.1610E+03

Tabla 3.13: Los valores de las medidas de desempeño FP, P, AFES y SP son obtenidos para cada variante DE en el experimento 3. El mejor resultado es indicado en negrita

	FP	P	AFES	SP
DE(FR)	0.8	0.3	61117.66667	203725.5556
DE(SR)	**1**	**1**	**25466**	**25466**

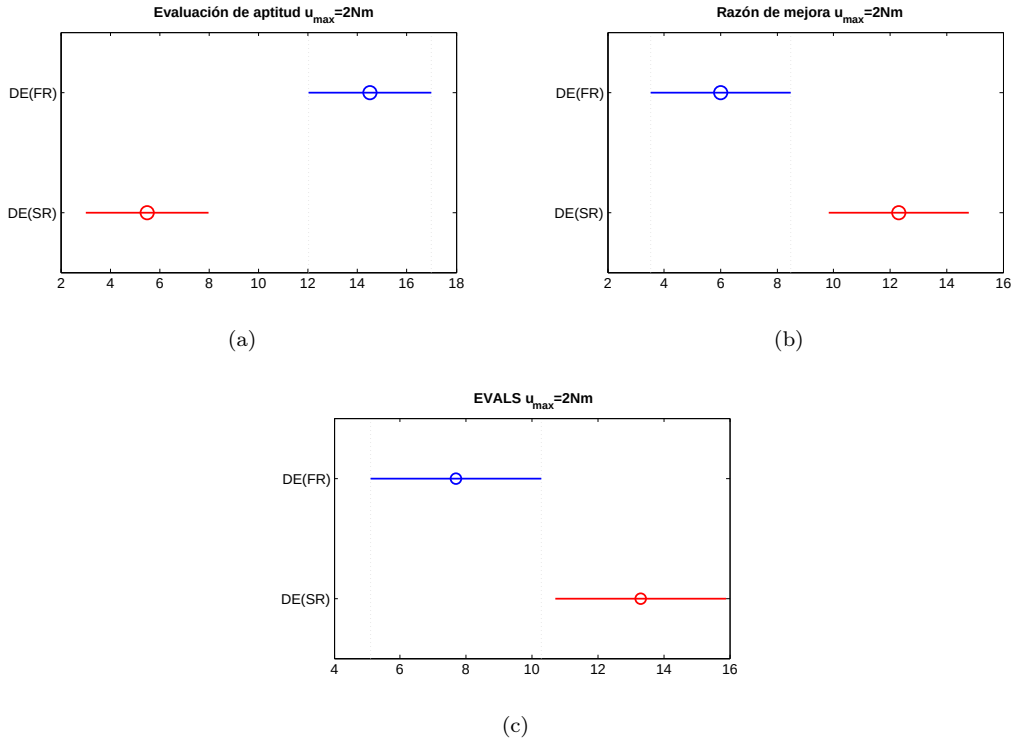


Figura 3.6: Bonferroni-Dunn post-hoc test con base en los resultados finales, la relación de progreso (PR) y los valores EVALS son obtenidos para las dos variantes DE en el experimento 3.

Tabla 3.14: Mejores resultados para cada medida de desempeño para los tres casos de estudio.

	u_{max}=10Nm	u_{max}=5Nm	u_{max}=2Nm
DE(FR)	PR=4.5187; $EVALS$=1376; FP=1; P=1; $AFES$=8106; SP=8106	PR=4.4710; $EVALS$=2201; $AFES$=11915.28571	$EVALS$=2926
DE(ε)	FP=1;P=1		
DE(SR)	FP=1;P=1	FP=1; P=1; SP=15141	PR=4.2236; FP=1; $P = 1$ $AFES$=25466; SP=25466

La Tabla 3.14 muestra el resumen de los mejores resultados numéricos de acuerdo con las seis medidas de rendimiento (FP, P, $AFES$, SP, $EVALS$, PR), que para el caso de la igualdad numérica, la medida del rendimiento se repite. Las tres técnicas de manejo de restricciones (DE (FR), DE (ε), DE (SR)) se comparan para tres límites de par diferentes (u_{max} = 10 Nm, u_{max} = 5Nm, u_{max} = 2Nm). En la Tabla 3.14, se puede ver que DE (SR) siempre es factible y exitosa ($FP = 1, P = 1$). Además, se puede observar que DE (FR) en los tres límites de par, la medida de rendimiento $EVALS$ es la mejor en los tres casos de estudio. Al analizar el historial de soluciones para cada técnica de manejo de restricción, se ha podido observar que DE (ε) y DE(FR) presentan la característica de no seguir explorando más combinaciones en las variables de diseño una vez que resuelven las restricciones. A diferencia de DE (SR) que muestra más variaciones en magnitud de los valores númericos para cada

una de las variables de diseño. Esta característica genera que pueda llegar a soluciones factibles y exitosas a medida que se reduce el límite de par por experimento.

3.4.2. Análisis de los resultados

Tabla 3.15: Cuatro vectores solución para diferentes límites de par

	Límites de par			
p	10	5	2	1
a_1	0.1370	0.1356	0.3532	0.1567
a_2	0.1522	0.1470	0.1669	0.1606
a_3	0.8194	0.8176	0.7855	0.8109
a_4	0.9158	0.9031	0.7971	0.8602
a_5	0.9857	0.9489	0.8052	0.8758
q_3	0.002	0.0015	0.0016	0.0016
r_3	0.005	0.005	0.0051	0.0051
q_4	0.0017	0.0015	0.0017	0.0015
r_4	0.005	0.0059	0.0051	0.0052
b_1	0.02	0.0681	0.0382	0.0316
c_1	0.0338	0.0317	0.0308	0.03
d_1	0.015	0.0150	0.0154	0.0161
e_1	0.0067	0.0063	0.0063	0.0063
f_1	1e-4	6e-4	1e-4	1e-4
g_1	0.0045	4e-4	0.0015	1e-4
h_1	9e-4	0.0099	0.1094	0.0973
i_1	0.0987	1e-4	0.1	1e-4
j_1	0.0046	0.0915	0.0251	0.1152
k_1	0.0668	0.0958	0.0789	0.0549
b_2	0.1386	0.0297	0.1091	0.02
c_2	0.03	0.0375	0.0301	0.0322
d_2	0.0295	0.0202	0.0171	0.015
e_2	0.0064	0.0080	0.0066	0.0075
f_2	0.0184	0.0022	0.0026	9e-4
g_2	9e-4	0.0079	0.0032	0.1
h_2	0.1227	0.0052	0.1877	0.0558
i_2	0.0885	0.0978	0.0430	0.0274
j_2	0.0498	0.1024	1e-4	7e-4
k_2	0.0335	0.0739	0.0996	0.0673
Kp_1	98.2128	100	54.5263	23.3055
Kd_1	0.1162	0.1179	0.0740	0.0435
Ki_1	17.4469	17.8622	20	7.8674
Kp_2	92.0249	90.1499	95.7736	98.5257
Kd_2	0.0898	0.0859	0.1036	0.1052
Ki_2	1.9955	0.01	4.2224	19.9798
J_{obj}	6.0666e-6	6.5e-6	1.0125e-5	2.3205e-5

En función de los resultados de las 10 corridas para cada caso de estudio (véanse Tablas 3.2, 3.6, 3.10), los vectores solución de los mejores individuos se muestran en Tabla 3.15. Se agrega un estudio de caso adicional, $u_{max} = 1$, para observar cómo se

modifica la solución al reducir, incluso más, el límite de par.

De esta Tabla 3.15, se puede ver que no hay una tendencia en todos los valores numéricos que las variables pueden tomar cuando se reduce el límite de par. Esto se debe a la diversidad de soluciones que se pueden generar en la estructura y control de manera simultánea que hacen que las restricciones no sean violadas y a lo más se pueden encontar patrones en ciertas variables y en ciertos rangos de las restricciones como a continuación se muestra. Por ejemplo, la variable a_1 es más grande cuando el límite se establece en $u_{max} = 2Nm$ que en cualquier otro caso ($u_{max} = 10Nm$, $u_{max} = 5Nm$, $u_{max} = 1Nm$). En el caso de ganancias Kp_1, Kd_1 se puede decir que estas variables están disminuyendo desde los límites $u_{max} = 5$ a $u_{max} = 1$. También se puede observar que los eslabones no actuados tienden a ser livianos y ligeros, en medida de no violar las restricciones. En todas las soluciones, la variable $b_i > d_i$ esto se interpreta como un contrapeso. Las formas geométricas pueden aparecer desde casi rectangulares a polígonos, como se puede ver si las soluciones en $u_{max} = 2$ Nm y $u_{max} = 1$ Nm se comparan desde la Tabla 3.15. La forma en que se relacionan todas las variables hace que no sea intuitivo saber hacia dónde se moverán los valores de las variables de diseño cambiando el límite de par.

Para la tarea de seguimiento de trayectoría en alta velocidad Fig.3.8, se puede ver que hay un perfil de par óptimo $u(t)$ de acuerdo con la Figura 3.7. En esta Figura 3.7 se puede observar que se requiere menos par que los límites establecidos $|u(t)| \leq 10Nm$ y $|u(t)| \leq 5Nm$. Por esta razón, se puede ver en la Tabla 3.15 que la diferencia entre la función objetivo $J_{obj}@u_{max} = 10$ Nm[9] y $J_{obj}@u_{max} = 5$ Nm es menor que $J_{obj}@u_{max} = 2$ Nm o $J_{obj}@u_{max} = 1$ Nm.

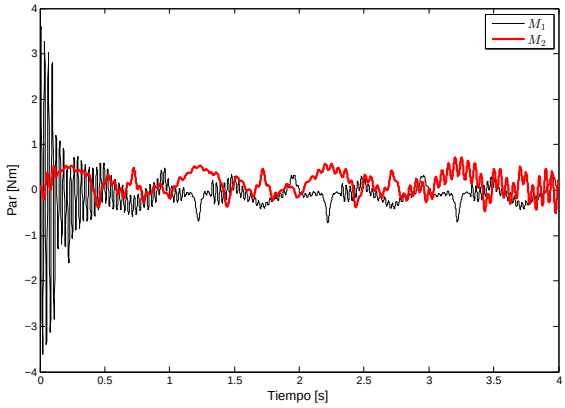


Figura 3.7: Par en ambos motores cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm

En la Fig.3.7 se puede apreciar que nunca se logra una saturación en la acción de control ($|u(t)| \leq 5$ Nm) en ninguno de los dos perfiles de par M_1, M_2. Además, el motor M_1 requiere más par que el motor M_2 durante el tiempo transitorio debido a las condiciones iniciales de posición y velocidad.

[9]La notación indica el valor de la función objetivo, J_{obj}, cuando el límite de par se establece en u_{max} =10.

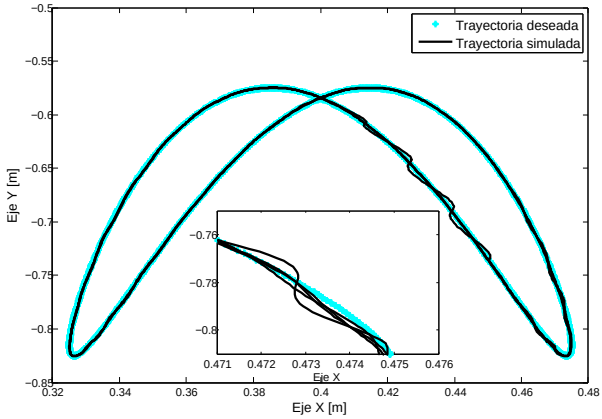


Figura 3.8: Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm

La Fig.3.8 muestra la trayectoria deseada en el espacio de tareas en comparación con la obtenida por el vector de solución que se muestra en Tabla 3.15. En esta figura, se hace un acercamiento en el área ($x_{zoom} = [0.471, 0.476]$; $y_{zoom} = [-0.81, -0.75]$) donde el efector final del robot va contra la fuerza gravitacional, con el propósito de ver el comportamiento del control cuando se requiere más par.

Se seleccionó una curva de Lissajous para la operación de seguimiento de trayectoria en alta velocidad debido a sus trayectorias suaves en posición y velocidad que pueden alcanzar los motores. Para ver las trayectorias suaves en velocidad que debe seguir cada motor, el espacio operacional se utiliza como se expresó en la Ec. (2.33).

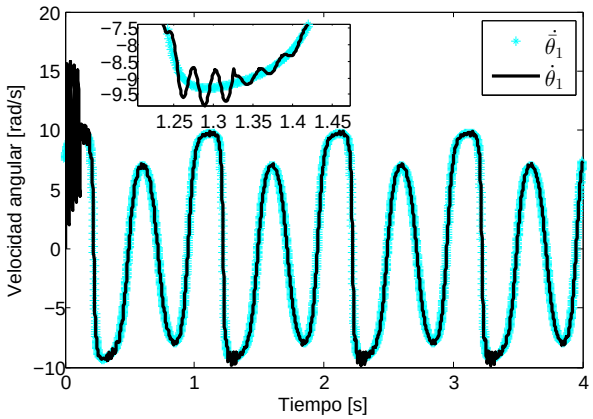


Figura 3.9: Velocidad angular deseada vs velocidad angular real, u_{max} =5 Nm en motor M_1

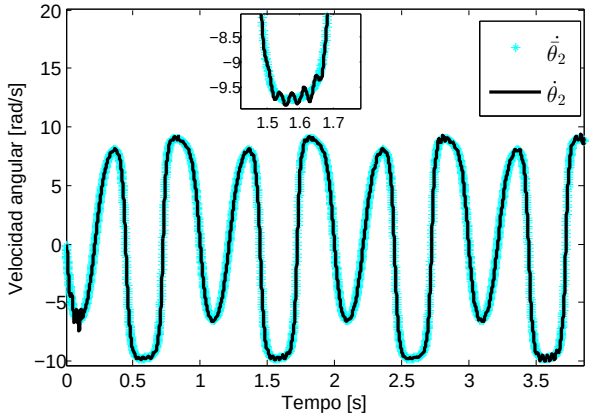


Figura 3.10: Velocidad angular deseada vs velocidad angular real, u_{max} =5 Nm en motor M_2

La velocidad angular deseada en los motores M_1 y M_2 se muestran en la Fig.3.9 y la Fig.3.10 respectivamente. Los cambios en las direcciones de rotación del motor se muestran en los cuadros con acercamiento, que ocurren con mayor frecuencia y en mayor magnitud en el motor M_1 que en el motor M_2.

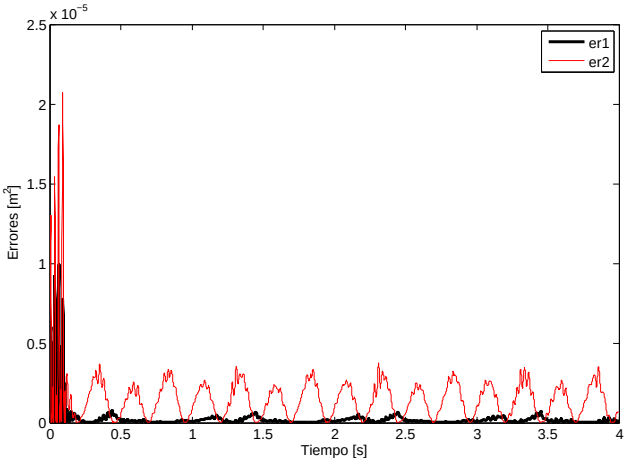


Figura 3.11: Error elevados al cuadrado en los ejes coordenados x y y, u_{max} =5 Nm

Los errores en las coordenadas cartesianas obtenidos en simulación se muestran en la Fig. 3.11, donde se observa que el seguimiento en y genera un error mayor que en x alcanzando los picos más altos en el tiempo transitorio Figs. 3.11-3.14. Estos errores indican que se requieren desplazamientos más altos en y que en x como resultado de la trayectoria propuesta. La minimización de la integral de la suma de los errores e_{r1} y e_{r2} es lo que se ha propuesto como la función objetivo, como se menciona en la Ec.(3.1). Los errores articulares tanto en posición Fig. 3.12 como en velocidad Fig. 3.13 muestra que es el motor M_1 donde se tiene mayor complicación para realizar el seguimiento de trayectoria que en el motor M_2. Además se ve puede observar que es en el seguimiento de velocidad angular Fig. 3.13 donde las magnitudes de los errores

son mas grandes que los observados en el seguimiento de posición angular Fig. 3.12. De la Fig. 3.13 se puede observar que es el transitorio del motor M_1 donde ocurren mayores velocidades angulares en magnitud y frecuencia que el motor M_2.

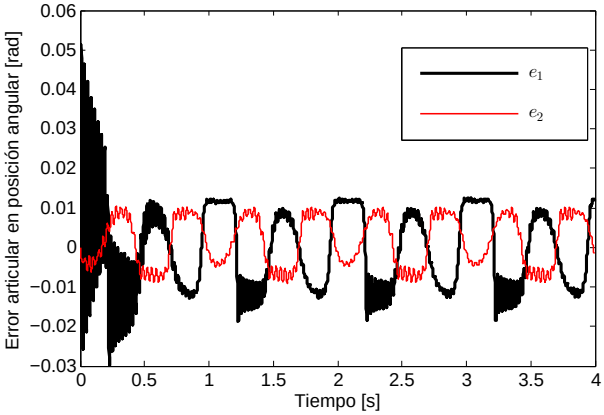


Figura 3.12: Error angular articular, u_{max} =5 Nm

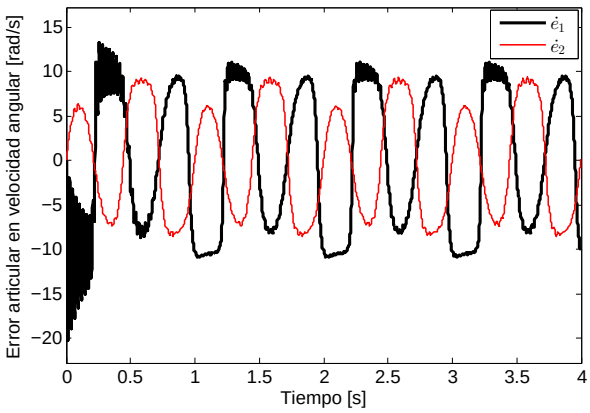


Figura 3.13: Error en velocidad angular articular, u_{max} =5 Nm

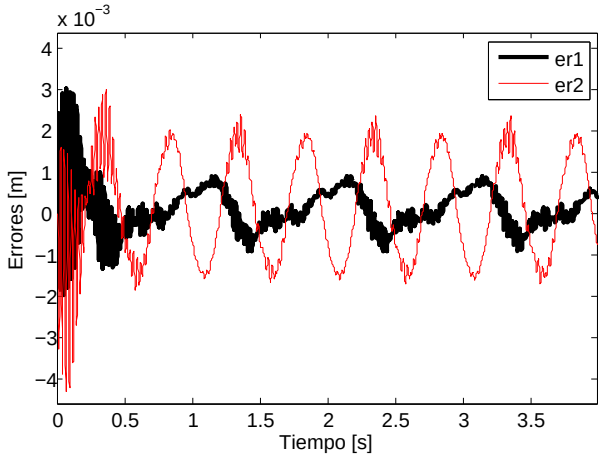


Figura 3.14: Error en los ejes coordenados x y y, u_{max} =5 Nm

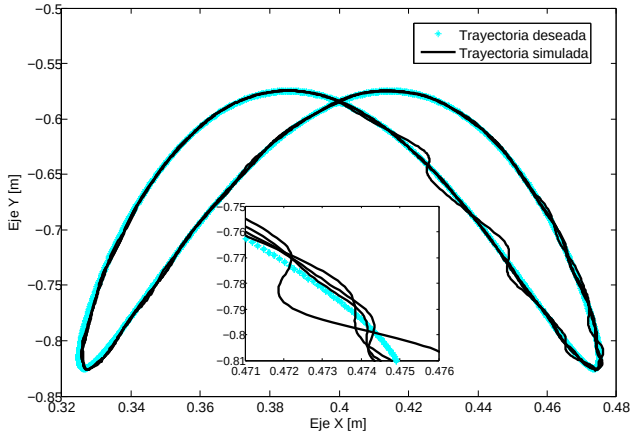


Figura 3.15: Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 2$ Nm

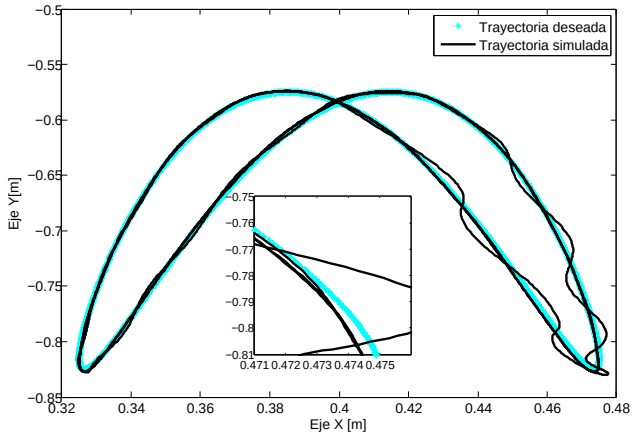


Figura 3.16: Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 1$ Nm

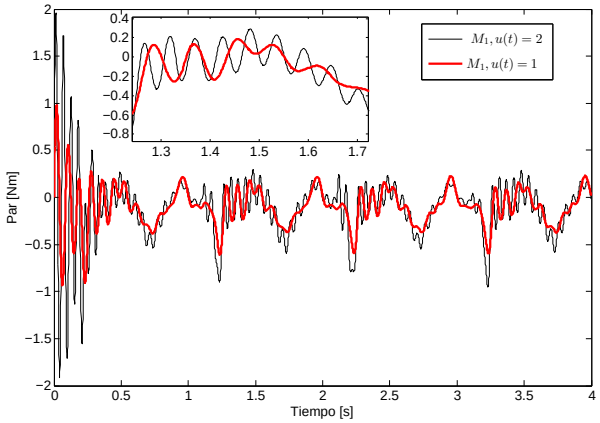


Figura 3.17: Par en el Motor 1 con dos límites diferentes

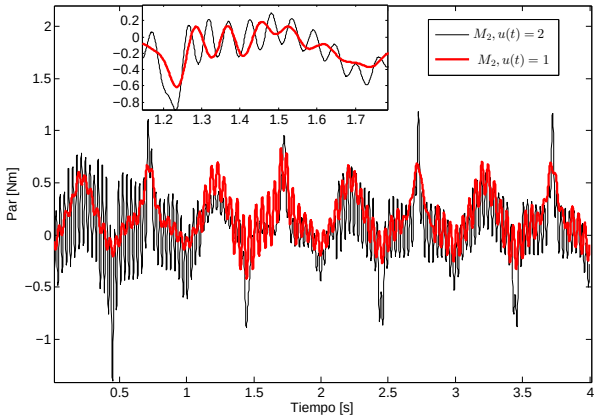


Figura 3.18: Par en el Motor 2 con dos límites diferentes

Se ha observado que se obtienen mejores resultados si los errores se proponen en el espacio cartesiano que en el espacio articular. En función de esta característica, los efectos de la disminución del par se muestran en las Figs. (3.15)-(3.16). Al comparar la misma área de operación, se puede ver cómo se pierde la precisión de seguimiento a medida que disminuye el par del motor. Esto puede deberse al hecho de que existe una limitación en la energía requerida para realizar los cambios necesarios para seguir correctamente la trayectoria, como se puede ver en los marcos ampliados de las Figs. (3.17)-(3.18). De estos cuadros ampliados se observa que las señales de los motores M_1 y M_2, cuando $|u(t)| \leq 2$ Nm, no solo tienen mayor amplitud sino también una frecuencia más alta que en el caso de $|u(t)| \leq 1$ Nm. El efecto de la frecuencia más alta necesaria en el seguimiento de la trayectoria es más notable en el motor M_2 que en el motor M_1. En todas las figuras 3.7, 3.17 y 3.18 se puede ver que se evita la saturación del par usando el enfoque de diseño estructura-control. Algunas de las ventajas de evitar la saturación serían la disminución de los esfuerzos en los elementos mecánicos, el alargamiento de la vida útil del motor, etc.

3.5. Conclusiones

En este Capítulo se usaron tres técnicas de manejo de restricciones para analizar los efectos en el diseño estructura-control de un robot paralelo con cinco eslabones para tareas de seguimiento de trayectoria en alta velocidad, en donde se proponen tres límites de par diferentes. Se ha observado que el método DE (SR) siempre obtiene soluciones factibles y exitosas para todos los límites de par propuestos. Además, a medida que el límite de par disminuye, DE (SR) presenta una mejor capacidad para mejorar las soluciones dentro de la región factible y obtiene soluciones competitivas usando un menor número de evaluaciones con respecto a las otras variantes. Por otro lado, el método DE (ε) logra resultados competitivos cuando el límite es $u_{max} = 10$ Nm y $u_{max} = 5$ Nm, pero no puede lograr ningún resultado factible en $u_{max} = 2$ Nm. Este hecho puede deberse a su falta de capacidad para mejorar las soluciones dentro de la región factible para el problema propuesto. El punto intermedio entre DE (SR) y DE (ε) es DE (FR) porque puede lograr resultados en diferentes límites de par pero no de manera consistente. Además, las implicaciones de ingeniería para resolver la restricción de tipo u_{max} son ofrecer un rango de posibilidades en la selección de motores más ligeros y más baratos mediante el uso del enfoque de diseño estructura-control.

Es necesario mencionar que los resultados mostrados en este capítulo son sensibles a la trayectoria deseada, tiempo ciclo y tarea propuesta. Las ganancias del controlador PID asi como los paramétros estructurales cambiarían si se llegase a cambiar cualquiera de los tres aspectos mencionados anteriormente. Por ejemplo si se reduce el tiempo ciclo y se toma cualquier diseño de los mostrados en este capítulo, las restricciones de par se violan y el error en el seguimiento de la trayectoria aumenta porque se requiere mayor potencia de los motores para realizar la misma tarea en menos tiempo. De la misma manera, si se cambia la trayectoria deseada, seguramente las longitudes de los eslabones cambiarían debido a la complejidad del espacio de trabajo de los robots paralelos, resultado de la restricciones de la cadena cinemática cerrada. Una manera de contrarrestar la sensibilidad al tiempo ciclo[10] es seguir un procedimiento de diseño robusto ante los cambios en el tiempo de ciclo, aunque este tipo de enfoque está fuera de los alcances y las metas de la presente tesis.

Finalmente, de los resultados mostrados en la Tabla 3.15 se puede ver que los eslabones actuados son considerablemente más cortos, aproximadamente 6 veces, que los eslabones no actuados. Además los eslabones no actuados tienden a ser tan ligeros y livianos como las restricciones se lo permiten para poder realizar la tarea en alta velocidad. De lo anterior se puede deducir que si lo eslabones actuados son cortos en comparación a los no actuados, se pueden asumir rígidos. Se debe asumir flexibilidad en los eslabones no actuados por su longitud y la esbeltez de los mismos. Con base en estos dos hallazgos, en el presente trabajo, en particular en el siguiente capítulo, se resuelve el problema multi-objetivo con eslabones actuados rígidos y eslabones no actuados flexibles. Asimismo, se justifica la necesidad de tener un modelo que pueda considerar las deformaciones en los eslabones no actuados.

[10] Cambiar el tiempo ciclo, cambia tanto el par como la velocidad de giro de los actuadores para realizar la tarea

Capítulo 4

Diseño concurrente de un robot paralelo planar con eslabones flexibles

4.1. Introducción

Parte del proceso de diseño, una vez definida la tarea como es el tipo de trayectoria, el tiempo en que se realiza la misma, las restricciones que ya se han mencionado anteriomente como son los límites de par, las restricciones de cadena cinemática,etc. En este mismo sentido los límites de las variables se pueden ver como restricciones del problema, pero proponer qué variables pueden tener impacto en la mejoría de las funciones objetivo es una libertad que depende del diseñador y que éste tiene que evaluar. Es por esta razón que en este Capítulo 4 se toma un vector solución del Capítulo 3 y se anulan todos las variables estructurales de diseño que ayudan a balancear y distribuir la masa en los eslabones rígidos. La finalidad de lo anterior es validar que las variables propuestas impactan en la mejora del seguimiento de trayectoria en alta velocidad.

El presente Capítulo continua con el plateamiento del problema de optimización. Con base en el capítulo anterior, donde se resuelve el problema mono-objetivo de seguimiento de trayectoria, es necesario considerar la deformación en los eslabones no actuados para tareas en alta velocidad. Del capítulo anterior también se puede apreciar que al considerar un modelo rígido se genera un vector solución donde los eslabones no actuados son largos y ligeros. Por esta razón es necesario tener en cuenta un modelo que considere las deformaciones en los eslabones no actuados, asimismo como los efectos vibratorios en estos eslabones, en el diseño del robot paralelo con cinco eslabones. La forma en que se valoran las vibraciones en los eslabones no actuados en este capítulo es definiéndola como una segunda función objetivo.

En el Capítulo 3 se planteó el problema para tres límites de par de distinta magnitud, en el problema planteado en este capítulo se tiene un límite de par, pero para este caso en particular no sólo nos interesa no violar la restricción sino además considerarla como una primera función objetivo con el propósito de minimizar el par cuadrado inyectado al sistema. Debido a que la corriente es directamente proporcional al par inyectado, se hace una analogía con la potencia eléctrica consumida por el

motor. En el Capítulo 3 se planteó la minimización del error en el seguimiento de la trayectoria, por el contario en este capítulo se considera como una restricción adicional. La finalidad de lo anterior es eliminar a todas aquellas soluciones que generen movimientos lentos donde la energía inyectada al sistema sea mínima y no se exciten los modos de vibración, en cuyo caso las dos funciones objetivo planteadas no entrarían en conflicto. Este panorama cambia al incluir el seguimiento de trayectoria como una restricción adicional, pues una de las formas de minimizar la deformación en los eslabones es incrementar su grosor pero si estos son demasiado gruesos se requiere de mayor inyección de energía al sistema para romper los estados de reposo y compensar la inercia en movimiento de los eslabones. Por otro lado, si los eslabones son delgados se disminuye la cantidad de energía inyectada hasta cierto punto ya que si los eslabones son demasiados delgados se pierde energía en la deformación de los eslabones antes de que estos conduzcan el movimiento. Más aún, eslabones muy delgados pueden generar oscilaciones en el efector final, las cuales tendrá que compensar el controlador con mayor inyección de energía al sistema.

Finalmente, en este capítulo no se hace una comparación entre las técnicas de manejo de restricciones porque del capítulo anterior se puede observar que *Stochastic Ranking* llega a resultados factibles y exitosos para los tres límites de par planteados en el Capítulo 3. Por esta confiabilidad, en este capítulo se utiliza dicha técnica de manejo de restricciones.

Al resolver el problema planteado en el Capítulo 3, se extrajo el siguiente conocimiento: primero que los vectores solución obtenidos consideran eslabones no actuados largos y ligeros. Al asumir un modelo rígido, no es posible determinar la deformación en estos eslabones para tareas de seguimiento de trayectoria en alta velocidad. Es por esta razón que es necesario considerar un modelo flexible para los eslabones no actuados. Segundo, se puede apreciar cómo cambiaban la calidad de las soluciones de acuerdo a la técnica de manejo de restricciones. Tercero, cómo lidiar con el problema del manejo de la restricción de par para una tarea de alta velocidad.

4.2. Validación de la métodología propuesta

Generalmente en el diseño de robots paralelos, siguiendo un procedimiento secuencial, se suele comenzar con definir la longitud de los eslabones tal que el efector final pueda alcanzar todos los puntos de la trayectoria deseada. En esta sección basado en uno de los resultados del Capítulo anterior, se muestra una comparación mediante simulación de cómo se cambia notablemente la respuesta si sólo se proponen las distancias entre centros de los eslabones, los anchos, grosores y ganancias del controlador PID. Es decir, solamente se analiza cómo es el comportamiento del robot paralelo si se considera el vector de variables p_1, donde $p_1 = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, c_i, e_i,\ q_j,\ r_j, Kp_i,\ Kd_i,\ Ki_i] \in R^{19}$.

Por ejemplo de la Tabla 3.15 se escoje la solución cuando el límite de par es de 5 Nm. Las condiciones iniciales, las restricciones y la trayectoria deseada se conservan igual a como se han definido en el Capítulo 3. Además, se anulan todos las variables

$p \notin p_1$. Es decir, las variables estructurales que impactan en la distribución de masa en los eslabones rígidos b_i, d_i, f_i, g_i, h_i, i_i, j_i, k_i se igualan a cero. Lo anterior se realiza con el próposito de ver el impacto que tienen estas variables en el seguimiento de la trayectoria en el efector final del robot. En la Fig.4.1 se muestra el par ejercido por los dos motores.

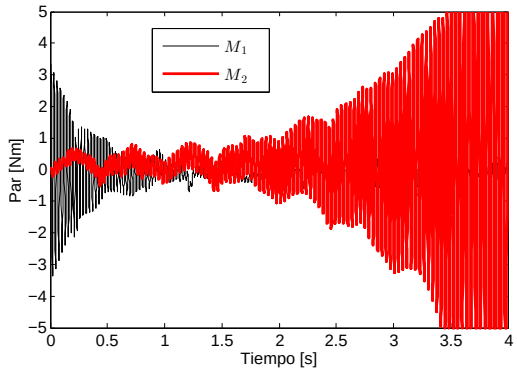


Figura 4.1: Par en ambos motores cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm

En esta figura se puede observar que el par en el motor M_2 crece en el tiempo hasta llegar a la saturación. Una situación diferente a la mostrada en la Fig.3.7, donde no ocurre saturación en el motor M_2 y las mayores magnitudes de par ocurren en el motor M_1.

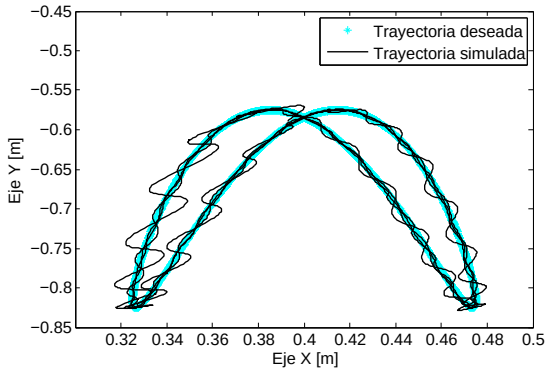


Figura 4.2: Curva de Lissajous cuyo límite es $u_{max} = 5$ Nm

En la Fig.4.2 se muestran las oscilaciones en el efector final resultado de un diferente perfil de par y la saturación del motor M_2. En esta figura el seguimiento de la trayectoria es oscilante a lo largo de toda la trayectoria y la frecuencia aumenta en los cambios de giro de los motores.

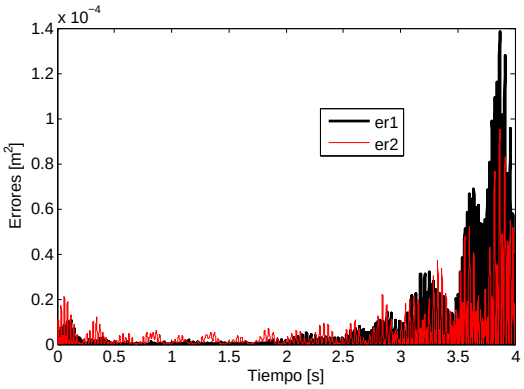


Figura 4.3: Errores

En la Fig.4.3 se muestra que los errores tienden a aumentar en los dos ejes a medida que el tiempo aumenta. Estos resultados sugieren que no se podrían realizar un correcto seguimiento de trayectoria para cualquier cantidad de ciclos. Con este ejemplo se muestra como la distribución de la masa de los eslabones puede ayudar a la no saturación de los motores y a un mejor seguimiento en la trayectoria. Además de la sensibilidad del sistema y la dificultad de éste para llegar a una correcta sintonización.

4.3. Problema de optimización

La primera función objetivo es minimizar el par cuadrado inyectado al sistema por los motores. La segunda función objetivo es minimizar la deformación en los eslabones no actuados para los primeros dos modos de vibración, donde la tarea de seguimiento de trayectoria se cumple en alta velocidad. Si los eslabones son muy gruesos se minimiza la deformación en los eslabones actuados pero se tiene un aumento de par por la cantidad de inercia por ser vencida. Si los eslabones son más ligeros existe menos masa por ser movida y los motores requieren menos par, pero la deformación en los eslabones no actuados aumenta. De lo anterior se muestra que hay un compromiso entre la ligereza de los eslabones y el par requerido para mover a todo el sistema en una tarea de alta velocidad. Debido al conflicto existente entre las dos funciones objetivo se plantea el problema multi-objetivo. Este puede ser representado de la manera siguiente:

$$\min_{p} \; J_t = \begin{cases} J_{fob1}(\eta_\kappa, p, \tau_\kappa, t) \\ \vdots \\ J_{fobn}(\eta_\kappa, p, \tau_\kappa, t) \end{cases} \tag{4.1}$$

De la Ec.(4.1) se puede apreciar que las funciones objetivo J_{fobm}, $m = 1, .., n$, presentan dependencia de los estados del sistema η_κ, las variables de diseño p, el par suministrado por los actuadores τ_κ y el tiempo t.

La solución además tiene que considerar, como se ha mostrado en el *Capítulo 2* las restricciones de cadena cinemática cerrada (2.31), la dinámica propia del sistema mecánico (2.52). Las condiciones de frontera (2.58) relacionadas a las ecuaciones en derivadas parciales de la viga, se consideran las condiciones de frontera de vigas simplemente apoyadas en los eslabones no actuados, los cuales se consideran flexibles. Estas condiciones de frontera están dadas por las uniones de revolución en los extremos de los eslabones flexibles. Además, restricciones de condiciones iniciales (2.60) que como se ha mencionado anteriormente se asume que se parte del reposo. Que la trayectoria deseada esté dentro del espacio de trabajo (3.2). Las restricciones de Grashof (3.5), las cuales aseguran la rotabilidad de los eslabones actuados. Los límites geométricos (3.6) que garantizen que los eslabones pueden ser físicamente construidos, los límites de las variables (3.7). Finalmente, la restricción dinámica del par máximo (3.8) que pueden proporcionar los motores a todo el sistema mecánico.

El problema de optimización multicriterio (4.2) consiste en encontrar p que minimice la acción de control del sistema definida por la Ec.(4.3) y la deformación de los eslabones flexibles en los primeros dos modos de vibración para, la cual está dado por Ec.(4.5)

$$\min_{P_{con}} \; J_t = \begin{cases} J_{obj1}(\eta_\kappa, p, \tau_\kappa, t) \\ J_{obj2}(\eta_\kappa, p, \tau_\kappa, t) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$J_{obj1} = \int_0^{t_f} \left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right) dt \tag{4.3}$$

El par τ_i para cada motor se obtiene mediante

$$\tau_i(t) = Kp_i e_i + Ki_i \int_0^{t_f} e_i dt + Kd_i \dot{e}_i \tag{4.4}$$

donde t_f es el tiempo de operación del experimento.

$$J_{obj2} = \sum_{e=1}^{3} \int_0^{t_f} \left(w_j(y_j, t)|_{y_j = l_e}\right)^2 dt \tag{4.5}$$

donde $l_e \in R^3$ y $l_e = \left[\frac{a_j}{3}, \frac{a_j}{2}, \frac{2a_j}{3}\right]$; $j = 3, 4$. Estos valores se proponen de acuerdo a dónde se presenta mayor deformación para los primeros modos de vibración. La función objetivo J_{obj2} representa la sumatoria de las deformaciones de los puntos l_e para cada eslabón no actuado desde el tiempo inicial $t = 0$, hasta el tiempo final t_f.

Dado que se tiene que cumplir el seguimiento de trayectoria en el efector final, se ha decidido incluirla como una restricción adicional, Ec.(4.6). Esto se propone con el fin de no llegar a soluciones triviales donde los motores generen movimientos muy lentos o casi nulos, tal que no exciten los modos de vibración del robot y no se cumpla con el seguimiento de la trayectoria deseada. La restricción en el seguimiento de trayectoria está definida por

$$g_{tray} = \int_0^{tf} \left(e_{r1} + e_{r2}\right) dt < \epsilon \tag{4.6}$$

donde $e_{r1} = (x_n - x_r)^2$, $e_{r2} = (y_n - y_r)^2$, $R = [x_r, y_r]$ es la posición cartesiana calculada en el efector final[1].

El valor de $\epsilon = 10^{-4}$ ha sido establecido con base en las simulaciones. Por ejemplo, si el valor de ϵ se fijara más pequeño, por ejemplo 10^{-10}, es posible que el motor de búsqueda tardaría más tiempo en encontrar soluciones factibles en el supuesto de encontrarlas. Por otro lado, si el valor de ϵ se aumenta, se tendría un pobre seguimiento en la trayectoria. Además, las dos funciones objetivo no entrarían en conflicto ya que la solución tendería a movimientos suaves y lentos donde no se excite ningún modo de vibración.

Las funciones objetivo pueden entrar en conflicto al generarse entradas de par en el sistema con picos en el estado transitorio de alta magnitud, tal que generen deformaciones permanentes en los eslabones flexibles o bien generen eslabones rígidos muy largos y gruesos, así como eslabones no actuados cortos tales que la vibración se reduzca pero el consumo energético aumente.

4.4. Descripción de plataforma experimental

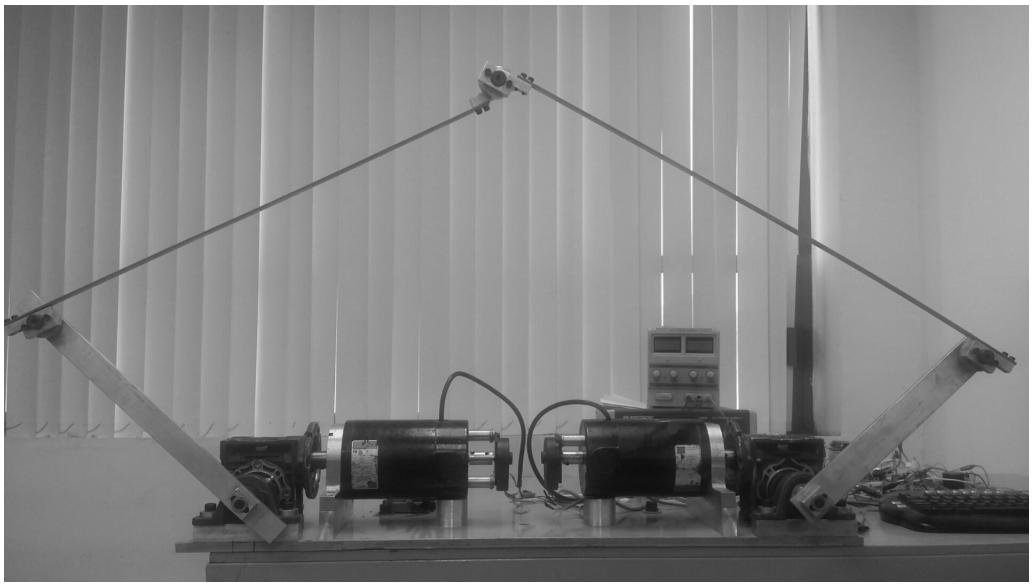


Figura 4.4: Prototipo óptimo construido

El robot paralelo de 5 eslabones, Fig.4.4, consiste de dos eslabones rígidos, dos eslabones flexibles de lámina de acero inoxidable y el eslabón fijo que se considera como la distancia que hay entre los ejes actuados. Los eslabones considerados rígidos son manufacturados en aluminio 6061-T6 de acuerdo a la opción de diseño como se muestra en el apéndice B. El eslabón fijo del robot paralelo está conformado por una

[1]Esta posición en el efector final se ve afectada por las deformaciones en los eslabones no actuados a_3 y a_4. Estas deformaciones se generan por la excitación de los modos de vibración y en la presente tesis sólo se pretende minimizar estas deformaciones para los dos primeros modos de vibración

placa de hierro y ésta a su vez está fija a una mesa de metal. La mesa de metal es lo suficientemente pesada para que el prototipo en conjunto no se mueva.

Para el prototipo se han utilizado dos motores Bodine modelo 42Y5BEPM de 90 Volts DC. La velocidad angular máxima nominal del motor es de 1725 rpm con una potencia de 1/10 Hp. Estos dos motores han sido caracterizados como se muestra en las Figs.4.5-4.8. A la salida de los motores se han acoplado dos reductores Motovario NMRV/040 con una razón de transmisión de 10:1. El uso de los reductores disminuye la sensibilidad del controlador ante pequeños cambios en la posición cuando se hace el seguimiento de la trayectoria.

Los sensores de corriente utilizados son marca pololu modelo ACS711EX con un rango de lectura de ± 15.5 A. Esta tableta ya incluye un filtro de la señal analógica entregada. Este sensor se conecta en serie entre el motor y la etapa de potencia Fig.A.3. La caracterización de los sensores se puede observar en las Figs.4.9-4.10.

En el otro extremo de cada uno de los motores han sido acoplados dos decodificadores ópticos digitales (H6MS-2048-I) de la marca US-Digital. Este decodificador óptico proporciona un total de 2048 pulsos por revolución. Estos encoders ayudan a determinar la posición angular en los actuadores y en los eslabones rígidos.

La velocidad angular se estima en base a la posición angular mediante filtrado digital en la interfaz de Simulink usando una función de transferencia de la forma $\frac{as}{s+a}$. Aunque también se puede determinar por $\dot{\theta}_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{dt}$, esta expresión presenta el inconveniente de ser una salida más ruidosa que la obtenida por el filtro digital.

Para medir la deformación en los eslabones no actuados se han utilizado dos galgas de precisión modelo CEA-06-187UW-350, ubicadas a la mitad de cada eslabón. Esta galga tiene una resistencia de 350±3 %Ω. Un factor de galga de 2.120±0.5 % @24°C, esta es una medida de la sensibilidad de la galga y es proporcional al cambio relativo de la resistencia. La sensibilidad transversal[2] es de 0.5±0.2 %. La señal de la galga se hace pasar por un puente de Wheatstone, después esta señal es amplificada a través de un amplificador operacional de instrumentación y finalmente la señal se lee como una entrada analógica.

Se ha utilizado una tarjeta de adquisición de datos sensoray 626 para la lectura de los dos decodificadores ópticos (D), de las dos galgas extensiométricas (A/D) y los dos sensores de corriente (A/D). En el caso de la salidas se manda un nivel de voltaje el cual genera un pwm con el circuito mostrado en la Fig.A.1 para cada motor. También se utiliza para cada motor una señal digital de salida para indicar el sentido de giro para cada motor y mediante el circuito lógico Fig.A.2 se crea cada una de las señales del puente H en la etapa de potencia Fig.A.3.

[2] El factor de sensibilidad transversal indica la proporción o porcentaje con que la deformación tranversal contribuye en la deformación indicada.

4.4.1. Caracterización de motores

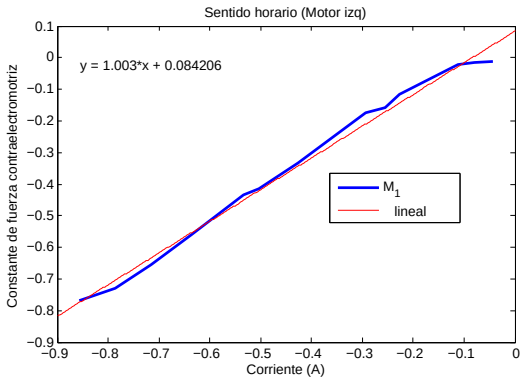


Figura 4.5: Caracterización de motor Bodine 1

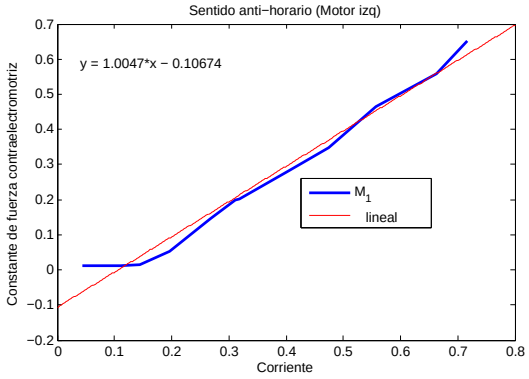


Figura 4.6: Caracterización de motor Bodine 1

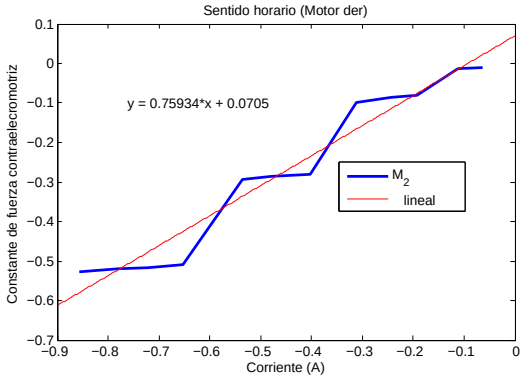


Figura 4.7: Caracterización de motor Bodine 2

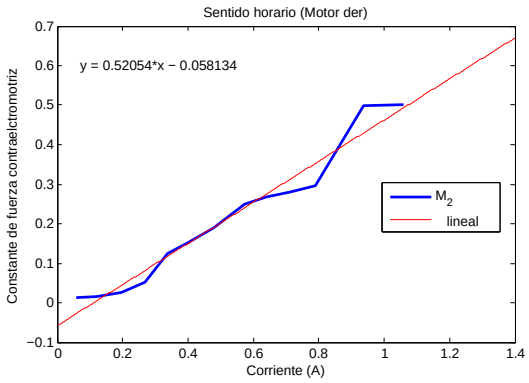


Figura 4.8: Caracterización de motor Bodine 2

4.4.2. Caracterización de sensores de corriente

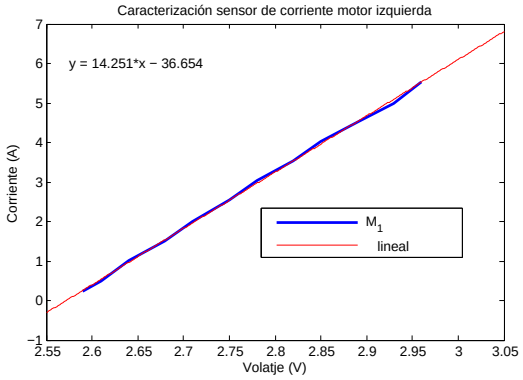


Figura 4.9: Caracterización de sensor de corriente motor 1

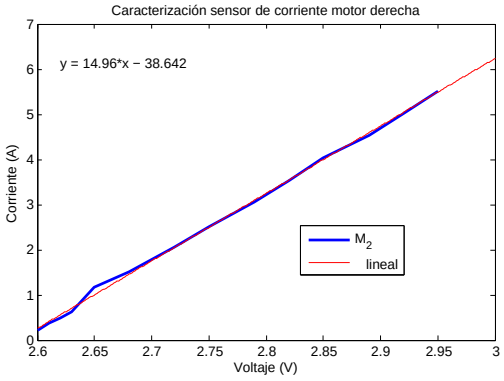


Figura 4.10: Caracterización de sensor de corriente motor 2

4.5. Resultados y discusión

En este trabajo se resuelve el diseño estructura-control de un robot paralelo de cinco eslabones mediante el uso del algoritmo DE como motor de búsqueda. El manejo de las restricciones se realiza mediante la técnica de Stochastic Ranking porque como se mostró en los resultados del Capítulo 3, esta técnica siempre llega a soluciones factibles y exitosas. Además se hace uso del MDF como herramienta para resolver la dinámica de los eslabones flexibles. El rango de las variables para el vector de diseño p se establece por $a_1 \in [0.1, 0.5]$; $a_2 \in [0.1, 0.5]$; $a_3 \in [0.1, 1]$; $a_4 \in [0.1, 1]$; $a_5 \in [0.1, 1]$; $q_j \in [0.0015, 0.2]$; $r_j \in [0.005, 0.2]$; $b_i \in [0.02, 0.3]$; $c_i \in [0.03, 0.1]$; $d_i \in [0.015, 0.3]$; $e_i \in [0.0063, 0.0508]$; $f_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $g_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $h_i \in [10^{-4}, 0.9]$; $i_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $j_i \in [10^{-4}, 0.9]$; $k_i \in [10^{-4}, 0.1]$; $Kp_i \in [10^{-2}, 100]$; $Kd_i \in [10^{-2}, 20]$; $Ki_i \in [10^{-2}, 20]$.

Los parámetros propuestos para el caso del algoritmo DE, son una población de $NP = 50$ individuos, un factor de escala $F = 0.5$, un factor de cruza $CR = 0.9$ y 5000 iteraciones (MAX_{GEN}).

En el caso de diferencias finitas, el proceso de solución comienza con una malla de 10 nodos y en las últimas 50 iteraciones se cambia a una malla más fina de 100 nodos por cada eslabón. El paso espacial se define por $h_y = a_j/nodos$ y el paso temporal se fija en $h_t = 10^{-3}$. El tiempo final de simulación es de t_f=2 s.

La estación de trabajo utilizada es la misma que la definida en el Capítulo 3. Se han realizado un total de 30 ejecuciones en el programa Matlab ® y el tiempo computacional promedio requerido es de 1209600 s para cada ejecución. Este tiempo se calculó usando la función tic toc de Matlab®. La gestión de las restricciones y los diferentes tamaños de malla en la ejecución de las 5000 iteraciones no permite referirse a un tiempo para cada evaluación. Por ejemplo, cuando se obtiene una configuración de singularidad, la evaluación dinámica del sistema se interrumpe para la trayectoria deseada, por lo que estas evaluaciones son más rápidas que las soluciones en las que no hay singularidades para la tarea deseada.

En la Fig.(4.11) se muestra el frente de Pareto después de 5000 iteraciones. La solución no dominadas A se muestra en verde, mientras que la solución no dominda B, se muestra en rojo. Estas soluciones se escogen con la finalidad de no favorecer a alguna de las funciones objetivo. Los valores númericos de estos dos vectores solución se muestran en la Tabla 4.1.

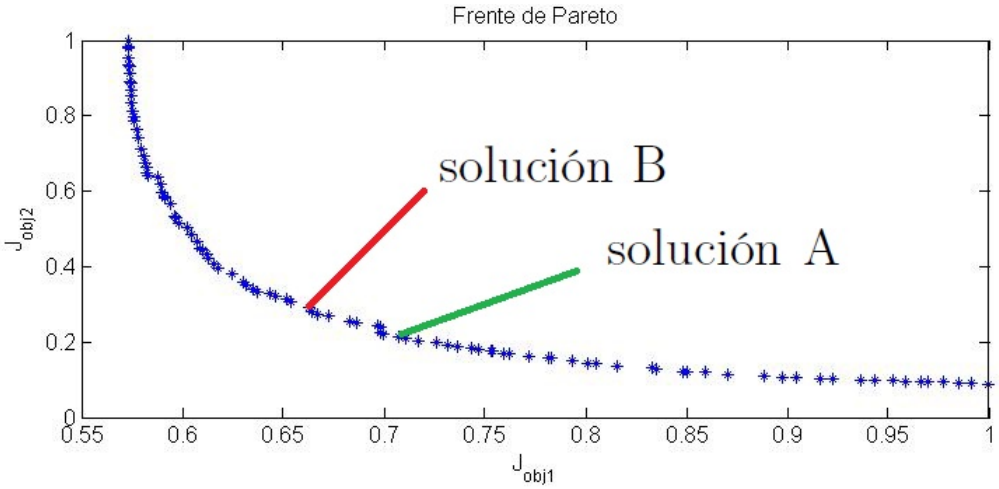


Figura 4.11: Soluciones no dominadas A y B seleccionadas del frente de Pareto

Tabla 4.1: Dos vectores solución no dominados

	Soluciones	
p	A	B
a_1	0.3286	0.1676
a_2	0.2978	0.1528
a_3	0.06441	0.803
a_4	0.6363	0.8994
a_5	0.6442	0.9655
q_3	0.003	0.0053
r_3	0.012	0.004
b_1	0.0602	0.1338
c_1	0.03	0.0306
d_1	0.0445	0.0163
e_1	0.0063	0.0066
f_1	0.0019	1e-4
g_1	0.0012	0.0024
h_1	0.0318	0.1195
i_1	0.0291	0.0908
j_1	0.1441	0.1907
k_1	0.0802	0.0599
q_4	0.003	0.0052
r_4	0.012	0.0053
b_2	0.0246	0.1104
c_2	0.0418	0.0344
d_2	0.0195	0.0187
e_2	0.0063	0.0063
f_2	1e-4	4e-4
g_2	1e-4	0.0173
h_2	0.0866	0.1453
i_2	0.0512	0.0959
j_2	0.2435	0.1731
k_2	1e-4	0.0839
Kp_1	97.1909	96.7847
Kd_1	0.2267	0.1367
Ki_1	0.01	9.8441
Kp_2	93.4887	91.1855
Kd_2	0.1867	0.1001
Ki_2	2.1209	2.9763
J_{obj1}	0.157	0.0832
J_{obj2}	0.0151	0.1694
g_{tray}	3.224e-5	5.5243e-5

El robot hace un ciclo en 0.5 s. Los límites cartesianos para la trayectoria están definidos por $X \in$ [0.325,0.475] m y $Y \in$[-0.825, -0.575] m respectivamente. Las trayectorias deseada[3], experimental y simulada se muestran en la Fig. 4.12.

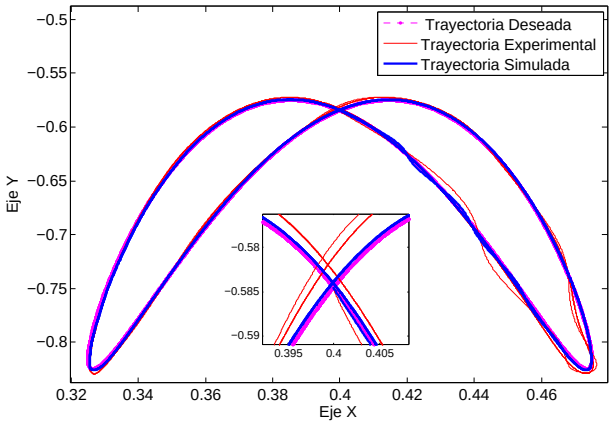


Figura 4.12: Trayectoria en el efector final

El cuadro ampliado en la Fig. 4.12 muestra el punto donde inicia y termina el ciclo. De este cuadro se puede observar que existe un corrimiento en la posición obtenida experimentalmente en el plano cartesiano de ambos ejes (X, Y). También se puede observar que el seguimiento de trayectoria se separa, tanto en la medición como en la simulación, de la señal deseada cuando ocurren los cambios de giro. Aunque la desviación entre el resultado deseado y el obtenido ocurre en las milésimas de metro[4]. Se debe recalcar que como parte de la filosofía de diseño estructura-control, se utilizan controladores de fácil implementación. Otra característica es que dada la complejidad del modelo, se necesitaría un velocidad de procesamiento alta para implementar en tiempo real controladores dependientes del modelo como podría ser par calculado.

En la Fig.4.13, en el recuadro aumentado se puede observar que entre la trayectoria deseada y la trayectoria obtenida numéricamente hay un corrimiento en el plano cartesiano y el mismo fenómeno ocurre cuando se hace una comparación entre la trayectoria deseada y la experimental como se puede apreciar en la Fig.4.14. De esta misma figura se puede observar que en el extremo inferior derecho se tiene una mayor sección de puntos donde el error entre la trayectoria deseada y la experimental es mayor que en el extremo inferior izquierdo.

[3]La trayectoria deseada fue propuesta lejos del origen, considerando las restricciones de espacio de trabajo y de las variables de longitud de los eslabones del robot, para observar precisamente el impacto de estas longitudes y las vibraciones en el diseño estructura-control

[4]De acuerdo al tipo de aplicación se puede o no considerar como un error grande. Por ejemplo para aplicaciones de tomar objetos de una banda, tener una diferencia de milímetros no hace diferencia para poder tomar un objeto y ponerlo en un contenedor. Por el contrario si la operación es de ensamblar objetos pequeños, como una grapa, un error de milímetros podría generar que la pieza no cumpla con requerimientos de calidad.

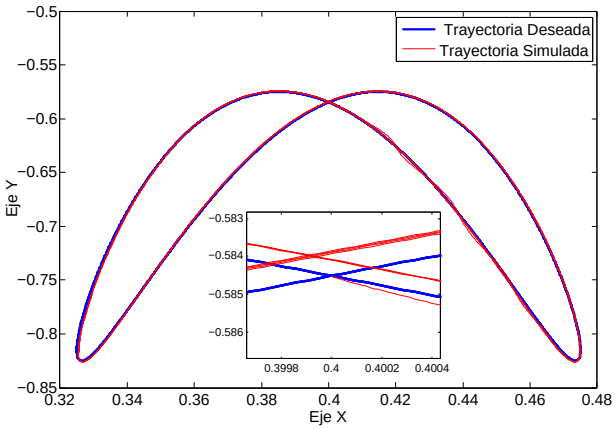


Figura 4.13: Trayectoria simulada vs deseada

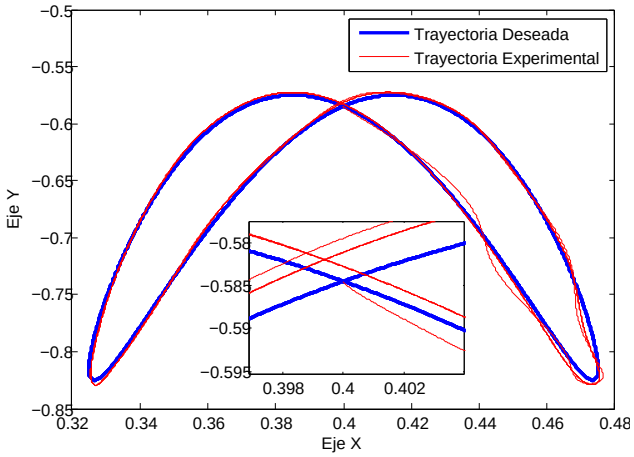
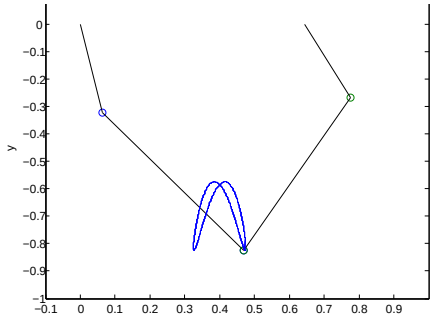
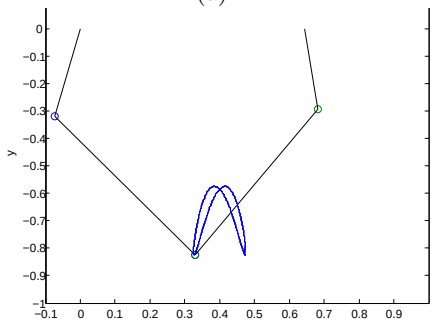


Figura 4.14: Trayectoria deseada vs experimental

Esto puede deberse a las posiciones y la manipulabilidad [107] en cada extremo, como se puede observar en las Figs. 4.15(a) y 4.15(b). En estas figuras se muestran sólo las distancias entre las articulaciones. En la Fig. 4.15(a), los eslabones asociados a las longitudes a_1 y a_3 se encuentran más extendidos cuando tratan de alcanzar el seguimiento del extremo inferior derecho, mientras que en el caso de la Fig. 4.15(b) la configuración geométrica ayuda a un mejor seguimiento y a una menor vibración. La condición de cinemática cerrada también hace que las posiciones en las que se encuentren los eslabones asociados a las longitudes a_1 y a_3 se vean perturbadas por los movimientos que generan los eslabones asociados a las longitudes a_2 y a_4. El caso de la Fig. 4.15(a), muestra que mientras los eslabones asociados a las longitudes a_1 y a_3 están en la máxima tensión, los otros dos eslabones asociados a las longitudes a_2 y a_4 se comprimen. Esta observación puede ser verificada de manera gráfica como se muestra en la Fig. 4.16.



(a)



(b)

Figura 4.15: Posición del robot en los dos extremos de la trayectoria deseada

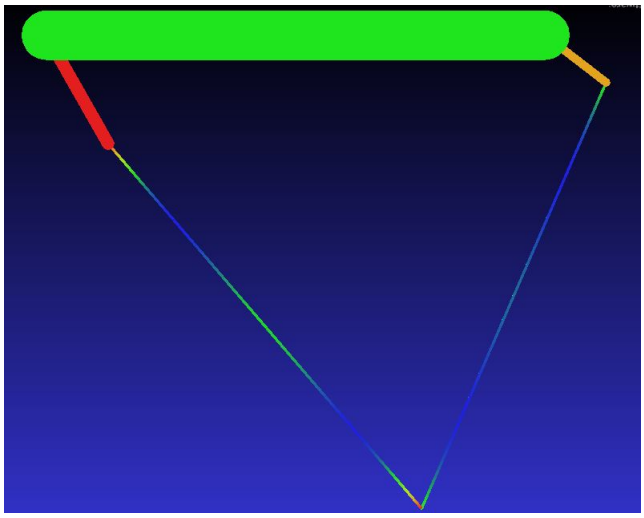


Figura 4.16: Deformación simulada en Adams para la posición mostrada en 4.15 (a)

Esta figura fue generada en el software de Simulacion de Adams versión estudiantil, en esta versión el número máximo de piezas que se pueden exportar de un CAD es de 20 piezas. Por esta razón es preferible generar la geometría de los eslabones en Adams. Para esta simulación en particular se puede observar que los puntos donde hay menor esfuerzo de Von Mises son las zonas en azul mientras que las zonas con mayor esfuerzo son las zonas en rojo. De esta figura se ve que es en las uniones

donde ocurren los mayores esfuerzos, pues son las uniones las que reaccionan ante las deformaciones de los eslabones no actuados. También se puede observar que la manera en que se distribuye el esfuerzo en el robot es alternante. Es decir, para este caso de análisis los eslabones a_1 y a_3 se encuentran los mayores esfuerzos, mientras que los eslabones a_2 y a_4 se deforman en menor medida. Esto se puede justificar porque las referencias en posición y velocidad angular que siguen los eslabones actuados no excitan los mismos modos de vibración de los eslabones no actuados. Esto se verá con más detalle en el apéndice C donde se puede apreciar que de acuerdo a la frecuencia en la que se encuentra el robot, la mayor deformación puede ocurrir en las uniones donde se encuentra el efector final, en los eslabones considerados rígidos o en mayores frecuencias en los eslabones no actuados.

Es posible que las configuraciones de posición del robot para hacer la tarea de seguimiento de trayectoria en alta velocidad puedan mejorarse si se incluye como variable de diseño el origen donde se debe ubicar el robot para realizar la tarea. Otra posible opción sería considerar una tercera función objetivo donde se considere a la manipulabilidad y verificar si hay una mejora. Con lo anterior se observa que el proceso de diseño es altamente iterativo y es dificíl considerar a priorí qué índices de desempeño tendrán mayor efecto en el diseño.

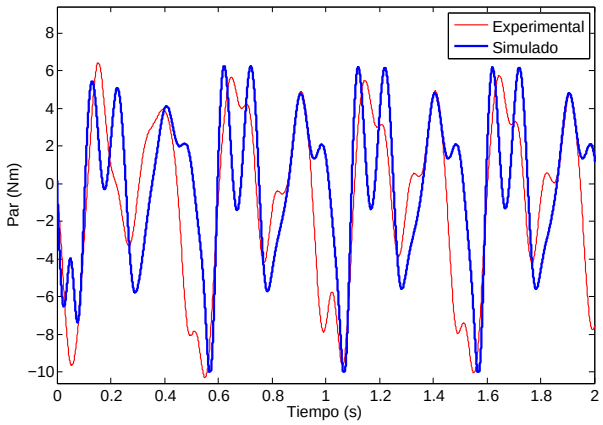


Figura 4.17: Perfil de par en el motor M_1

En la Fig. 4.17 se muestra el perfil de par obtenido para el motor M_1, en línea roja delgada, para la solución no dominada A. Este perfil está medido mediante un sensor de corriente (el cual está caracterizado como se muestra en el Apéndice A). El perfil de par simulado, línea gruesa azul, es obtenido mediante el modelo descrito en el Capítulo 2. La diferencia entre el modelo propuesto y el experimental puede deberse a dinámicas en el motor, como puede ser la fricción en el rotor, ruido en la etapa de

potencia, holgura en las piezas, etc. Prueba de lo anterior podría ser la comparación de los resultados mostrados anteriormente en el efector final Fig. 4.12 y Fig. 4.14. También se puede observar que cuando el perfil de par cambia de signo negativo a positivo el robot va contra la gravedad y viceversa. Como se ha dicho anteriormente, cada pico en la gráfica es un cambio en el sentido de giro.

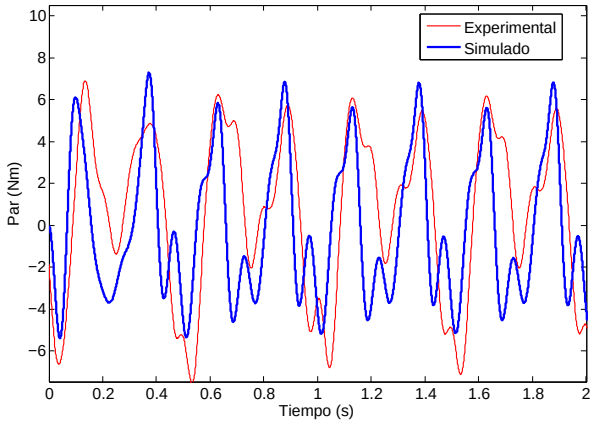


Figura 4.18: Perfil de par en el motor M_2

De la Fig. 4.18 se puede observar el perfil de par experimental y simulado para el motor M_2, para la solución no dominada A. En el perfil de par simulado ocurren movimientos de mayor frecuencia que los que ocurren en el perfil de par experimental. Esto se puede explicar porque ocurren los deplazamientos experimentales con respecto a los simulados en el eje cartesiano. En ambas Figs. 4.17 y 4.18 se puede observar como la magnitud de los picos experimentales cerca de terminar cada ciclo se van reduciendo en el tiempo, ello puede ser explicado por la ganancia del término integral en el controlador PID en el sistema.

En la Fig. 4.19 y la Fig.4.20 se pueden observar las deformaciones asociadas a los eslabones no actuados asociados a las longitudes a_3 y a_4 respectivamente, para la solución no dominada A. De estas dos figuras se puede observar que las mayores deformaciones en los eslabones no actuados se obtiene en diferentes tiempos del ciclo. Es decir, en la Fig. 4.19 la mayor deformación ocurre en el tiempo 1.673 s, en el caso de la simulación y 0.537 s en el caso experimental mientras que en el caso de la Fig. 4.20 las mayores deformaciones ocurren en un tiempo de 0.007 s y 0.488 s para el caso de la simulación y experimental respectivamente. Esto es un indicador de que la deformación para cada uno de los eslabones flexibles no actuados depende de la posición y el tiempo en que se realiza el análisis. La diferencia en los resultados se debe a que se ha filtrado la señal que proporciona la galga extensiométrica para

los primeros tres modos de vibración, esto con la finalidad de eliminar ruido en la medición.

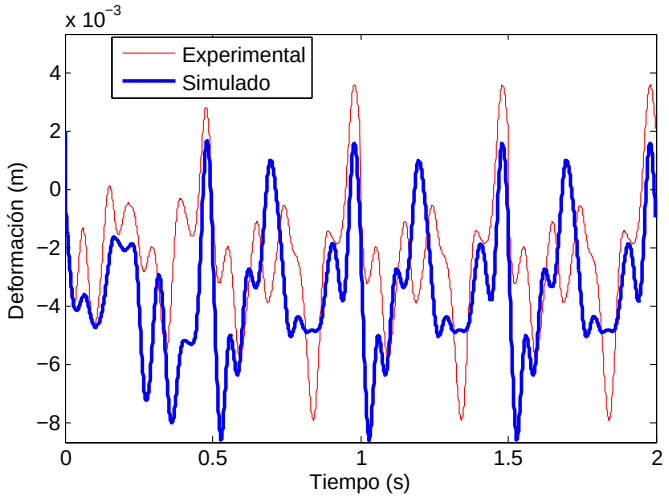


Figura 4.19: Deformación $\hat{w}_3$ asociada al eslabón a_3

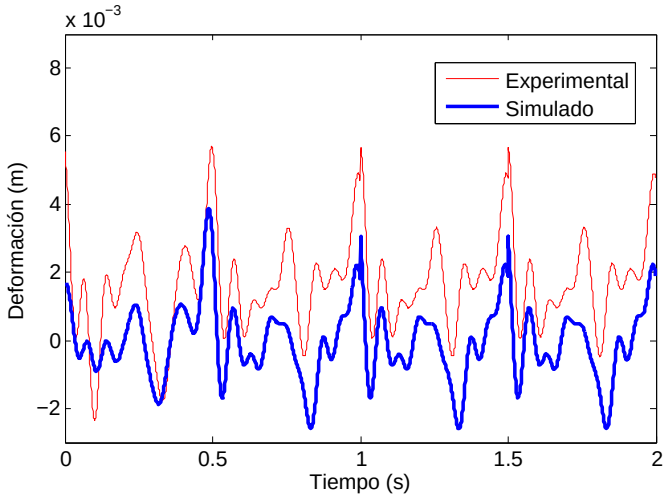


Figura 4.20: Deformación $\hat{w}_4$ asociada al eslabón a_4

En las Fig. 4.17 y Fig.4.19, se puede apreciar que las mayores deformaciones y los mayores pares son generados en el eslabón asociado a la longitud a_3. Esto se debe a que se presentan aceleraciones de mayor magnitud (ver Fig. 4.21.) en el motor

M_1 (línea gruesa azul) que en el motor M_2 (línea roja delgada) para poder hacer el seguimiento de trayectoria deseada.

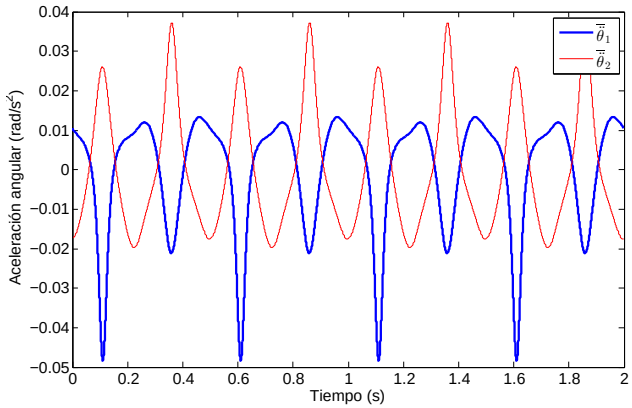


Figura 4.21: Aceleraciones angulares deseadas en los actuadores

Dentro del conjunto de soluciones no dominadas, se presenta una segunda opción de diseño B. Esta opción de diseño cambia sustancialmente en la longitud de todos los eslabones, ganancias del controlador y la forma geométrica de los eslabones actuados se tiene una distribución de contrapesos más notoria que en la solución presentada anteriormente (ver Tabla 4.1).

La forma geométrica de esta solución se puede ver en el apéndice B en la Fig. B.9 y Fig. B.10. De estas dos figuras se puede ver un efecto de balanceo y de distribución de masa más claro que en la solución A (Fig. B.7 y Fig. B.8). Si bien el par consumido por la solución no dominada B ($J_{obj1} = 0.0832$) es menor que la solución no dominada A ($J_{obj1} = 0.157$), tal como se puede observar al comparar las Figs. 4.17, 4.18 y 4.23, las deformaciones en la solución no dominada B son mayores que las mostradas en la solución no dominada A, como se puede apreciar en las Figs. 4.19, 4.20 y 4.24. De igual manera esto mismo se puede observar mediante la comparación de la segunda función objetivo de la solución A ($J_{obj2} = 0.0152$) y la solución B ($J_{obj2} = 0.1694$).

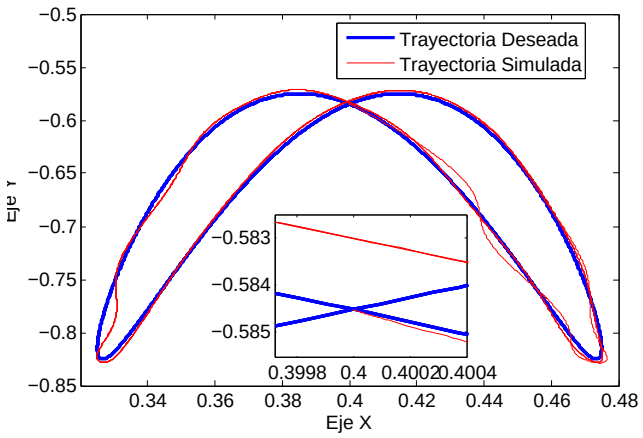


Figura 4.22: Trayectoria deseada vs simulada para solución B.

De la Fig. 4.22, se puede observar que de igual manera que en la solución A, el seguimiento de trayectoria se dificulta en las transiciones de descenso y ascenso del robot, como se aprecia en las inmediaciones a los puntos cartesianos (0.325,-0.825) y (0.475,-0.825) en la Fig. 4.22. Asimismo, en las dos soluciones se puede también apreciar que la restricción en el seguimiento de trayectoria se cumple en las dos soluciones, pero es menor en la solución A ($g_{tray} = 3.224e - 5$) en contraparte a la solución B ($g_{tray} = 5.5243e - 5$). Lo anterior se puede observar al comparar las Figs. 4.13 y 4.22.

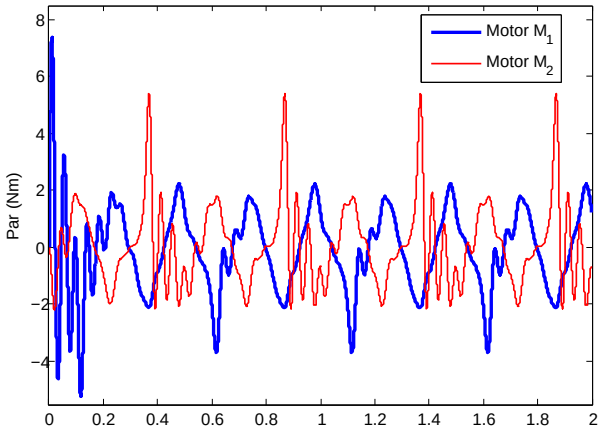


Figura 4.23: Perfiles simulados de par para la solución B

En la Fig. 4.23, se muestra el perfil de par simulado para los dos motores M_1 y M_2. En esta figura se puede apreciar que el mayor pico de par ocurre en el transitorio para el eslabón asociado a la longitud a_1 aunque en el estado estacionario los mayores picos de par ocurren en el motor M_2. Otro aspecto importante es que el motor M_2 presenta mayor frecuencia en los cambios de giro que el motor M_1. La explicación de

lo anterior surge de la geometría del eslabón a_2 y a la trayectoria deseada, puesto que el motor M_2 debe hacer más compensaciones de cambio de giro que el motor M_1.

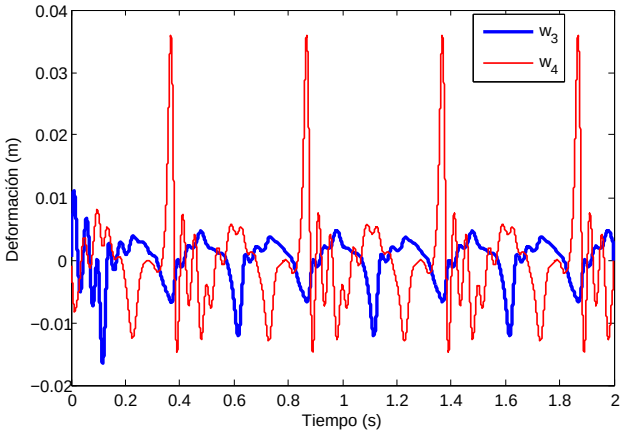


Figura 4.24: Deformaciones $\hat{w}_3$ y $\hat{w}_4$ asociadas a los eslabones a_3 y a_4 respectivamente, para la solución B.

En la Fig. 4.24 se muestra la mayor deformación $\hat{w}_3$, en línea azul gruesa, asociada al eslabón a_3. En linea roja delgada se muestra la mayor deformación $\hat{w}_4$ asociada al eslabón asociado a la longitud a_4. Al observar la Fig. 4.24 en su parte transitoria vemos que no necesariamente mayor par de energía inyectado al sistema implica mayor deformación como ocurre en el caso de la deformación $\hat{w}_3$. En el caso de la deformación $\hat{w}_4$ se puede observar que los cambios de giro generan deformaciones tres veces mayores en el eslabón a_4 que en el eslabón a_3. Estos picos en la deformación tiene relación con el hecho de frenar para después acelerar en los extremos inferiores de la trayectoria.

Es preciso mencionar que debido a las mayores deformaciones mostradas en la Fig. 4.24 así como a los resultados de los modos de vibración mostrados en el Apéndice C, Fig. C.11, se decidió no construir la segunda opción de diseño B. También se ha observado mediante los resutados de simulación realizados en ANSYS, que la segunda opción de diseño presentaría problemas de que los eslabones no actuados se saldrían del plano de trabajo. Esto se puede explicar porque la longitud de los eslabones no actuados en la opción de diseño B son más largos y delgados que los de la opción de diseño A.

Otro factor es que los mayores esfuerzos mecánicos se concentran en los eslabones no actuados que son básicamente el soporte del efector final, lo cual llevaría a pérdida de precisión en el seguimiento de la trayectoria.

El prototipo construido (solución A) presenta una minimización de la vibración en los eslabones no actuados en comparación con la solución B. Una de las posibles razones del por qué la solución A presenta menores vibraciones, se debe a que las longitudes de los eslabones no actuados son menores que los presentados para la opción B.

Una de las características de la solución B es que presenta un mejor seguimiento en la trayectoria de los eslabones actuados pero al alcanzar mayores aceleraciones que la solución A, las deformaciones en los eslabones no actuados de la solución B son mayores que los generados en la solución A. Esto genera que el error de seguimiento de la trayectoria en el efector final sea mayor en la solución propuesta B que en la solución propuesta A; aunque la solución propuesta B, presenta mejores características de balanceo lo cual le ayuda a un menor requerimiento de par por parte de los motores para llevar a cabo el seguimiento de la trayectoria.

En esta solución los eslabones actuados se acortan lo cual ocasiona que estos puedan soportar mayores momentos de par sin sufrir deformación. Por el contrario, los eslabones no actuados se hacen aproximadamente 5 veces más largos lo que genera que en la transmisión de movimiento, estos eslabones presenten una mayor deformación en todo el robot tal y como se muestra en las Figs. C.11, C.12, C.13, C.14. Al acortarse los eslabones actuados, los eslabones no actuados tienen que compensar la distancia necesaria para llevar a cabo la trayectoria deseada pero dado que la distancia se ha alargado, el eslabón se tiene que hacer más delgado para no incrementar considerablemente la masa de todo el sistema.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas de trabajo futuro

Si bien la lógica nos indica que eslabones más cortos producirán menor vibración, no es inmediato determinar los espesores, grosores, longitudes, distribución de masa de cada uno de los eslabones tales que se puede llegar a un buen consumo energético sin perder precisión. De igual manera, instintivamente se puede decir que eslabones más gruesos reducen la vibración, pero la contraparte es ralentizar a todo el sistema para romper los estados de reposo, o bien aumentar la energía necesaria para controlar la inercia de un sistema pesado.

La contraparte de lo anteriormente expuesto, es suponer que un eslabón muy ligero consume menos energía pero es una afirmación que aplicaría si este se mueve a una velocidad lo suficientemente lenta tal que no excite sus modos de vibración. Si los modos de vibración son excitados, porque la aplicación requiere determinadas velocidades y aceleraciones deseadas, entonces el controlador tiene que compensar las vibraciones mediante cambios rápidos en los sentidos de giro del motor para compensar la vibración generada por un eslabón demasiado ligero. De ahí que la tarea de determinar mediante un proceso de diseño óptimo las geometrías, masas, grosores, longitudes, ganancias del controlador, etc., sea un tarea difícil y de alto costo computacional. Más aún, como se ha visto de los resultados experimentales y de simulación, cumplir las restricciones de cadena cinemática cerrada, así como el impacto que tiene el control para cada posición del robot hace que el análisis de la deformación en los eslabones no actuados requiere de la metodología propuesta para cumplir con los objetivos planteados de satisfacer la restricción del seguimiento de trayectoria, minimizar la vibración a un mínimo consumo de par para cada uno de los motores.

Se pueden tomar caminos conservadores para minimizar la vibración de un robot, como por ejemplo minimizar la masa de un sistema dado, asi como maximizar la frecuencia natural fundamental de vibración. El problema de este enfoque es que se realiza estaticamente, con ello no se toma en cuenta la dinámica del robot como pueden ser los pares en los actuadores variantes en el tiempo al realizar el movimiento de la tarea, lo cual lleva a que no se consideren las deformaciones y esfuerzos por parte

del robot en movimiento. Más aún, dado que el robot paralelo de cinco eslabones es altamente sensible a la posición de análisis, se tendría que hacer un análisis, por ejemplo de elemento finito, para cada una de las posiciones deseadas para los distintos modos de operación, lo cual resultaría en un sinfin de gráficas por analizar. Además, para realizar dicha simulación se necesitaría conocer a priori cuál es la posición dónde se generó el mayor esfuerzo y cuánta cantidad de par necesitan los motores para llegar a dicha posición. Por ello, la necesidad de abordarlo como un problema de optimización dinámico y no como un problema de optimización estático.

Uno de los grandes retos generados al resolver el problema planteado en esta tesis fue precisamente el manejo de restricciones. Donde la restricción de par para un sistema el cual está planeado para moverse a alta velocidad puede ser fácilmente violada en la parte transitoria. Ello se puede deber principalmente a las altas ganancias necesitadas para que el sistema pueda cumplir con la restricción de seguimiento de trayectoria. Si no se establece el seguimiento de trayectoria como una restricción, se obtienen soluciones que generan movimientos suaves y lentos comparados con los deseados para el seguimiento de la trayectoria tal que no hay conflicto entre las funciones objetivo de deformación en los eslabones no actuados y el par inyectado al robot por parte de los actuadores. Otro gran reto que se observó en el Capítulo de resultados experimentales son los posibles vectores soluciones que se pueden generar y que se alejan de las hipótesis de modelado como pueden los eslabones que se salen del plano de trabajo, vigas que se tengan que agregar términos adicionales a la viga de Bernoulli para que ésta se comporte como una viga de Timoshenko, que las deformaciones en los eslabones no sean pequeñas, etc. El problema de optimización planteado en esta tesis podría ser replanteado hacia un caso más general dónde lo comentado anteriormente se considere y en dado caso partir de otras hipótesis de modelado. La otra opción es considerar las mismas hipótesis de modelado y agregar más restricciones para delimitar al problema y los posibles vectores soluciones que no cuplan con las hipótesis se desechen.

También, se ha observado mediante análisis de simulación en ANSYS que un inconveniente generado al tener eslabones no actuados muy largos y delgados es que estos empiezan a salirse del plano de trabajo, lo cual llevaría a la consiguiente pérdida de precisión en el efector final.

Finalmente, mediante resultados de simulación se verificó el comportamiento de distintas técnicas de manejo de restricciones como son: Clasificación Estocástica (SR) [95], Reglas de Factibilidad [93] (FR), "ε-constrained method" [94] de acuerdo al límite de par propuesto para resolver el problema mono-objetivo de minimizar el seguimiento de trayectoria en el efector final. De este análisis, se ha visto que para todos los límites de par propuestos Clasificación Estocástica (SR) siempre encuentra resultados factibles, mientras que las otras dos técnicas requieren un mayor número de evaluaciones o corridas para poder llegar a una solución factible.

5.1. Trabajo Futuro

Como parte de trabajo futuro se pretende hacer un modelo más general que considere soluciones que puedan salirse del plano y de cierta manera penalizarlas como soluciones no deseadas. Tambíen, en el mismo sentido de trabajar con un modelo más general se pretende agregar los efectos de carga axial y los efectos de torsión en todos los eslabones. Analizar el efecto de variar las condiciones de frontera en las uniones de los eslabones flexibles. Asimismo, agregar una tercera función objetivo para determinar qué criterios de desempeño ya sean estáticos o dinámicos ayudan a mejorar la minimización de vibraciones en el robot paralelo con cinco eslabones. Otro enfoque es usar una metodología de diseño robusta y precisamente diseñar el robot con robustez a las vibraciones en los eslabones. Uno de los retos esperados en la solución de este problema, es la solución en conjunto de las ecuaciones en derivadas parciales de los eslabones considerados flexibles y las generadas mediante la metodología robusta.

Desde la perspectiva de control, se plantea resolver el problema de vibraciones mediante modificaciones a leyes de control enfocadas a control de vibraciones, por ejemplo Extremum Seeking Control (ESC), y hacer comparaciones que permitan llegar a un buen controlador ad hoc para el diseño estructura control del robot. La finalidad es proponer un controlador fácil de implentar, como el PID, pero cuyo desempeño mejore la precisión del sistema sin comprometer la velocidad del mismo.

Otra línea de investigación originada del trabajo presentado, es hacer un análisis de la soluciones no factibles de tal manera que se pueda diseñar un operador genético que permita alcanzar la convergencia en un menor número de generaciones. En esta misma línea, se pretende abordar el problema con métodos co-evolutivos de tal manera que las soluciones que desde el punto de vista mecánico pudieron cumplir con la tarea deseada y fueron desechadas por un controlador mal sintonizado, no sean desechadas rápidamente por el mismo algoritmo, sino que en paralelo se pueda encontrar un controlador que cumpla con la minimización de los objetivos deseados. También, se han observado soluciones que violan las restricciones de Grashof, pero que dada la trayectoria de referencia pudieron cumplir con el seguimiento de ésta y fueron desechadas porque el interés era precisamente cumplir con todas las restricciones. De ahí que la exploración de soluciones no factibles sea un tema de interés para ver la evolución de una solución no factible hacia una posible solución factible.

Otra vertiente del trabajo realizado, es trabajar en aplicaciones de tiempo real para usar controladores que no requieran el uso del modelo y aún así controlar con precisión al efector final o bien el uso de modelos simplificados que permitan hacer el control del efector final sin tener pérdidas en la precisión.

Bibliografía

[1] Anton C Pil and HH Asada. Integrated structure/control design of mechatronic systems using a recursive experimental optimization method. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1(3):191–203, 1996.

[2] Jun Zhang, Yanqin Zhao, and Yan Jin. Kinetostatic-model-based stiffness analysis of exechon pkm. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 37:208–220, 2016.

[3] PK Subrahmanyan and P Seshu. Dynamics of a flexible five bar manipulator. *Computers & Structures*, 63(2):283–294, 1997.

[4] Mehrdad R Kermani, Rajnikant V Patel, and Mehrdad Moallem. Flexure control using piezostack actuators: design and implementation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 10(2):181–188, 2005.

[5] Xiaoping Zhang, Wenwei Xu, Satish S Nair, and VijaySekhar Chellaboina. Pde modeling and control of a flexible two-link manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(2):301–312, 2005.

[6] Hongjun Yang and Jinkun Liu. Distributed piezoelectric vibration control for a flexible-link manipulator based on an observer in the form of partial differential equations. *Journal of Sound and Vibration*, 363:77–96, 2016.

[7] K Lochan, BK Roy, and B Subudhi. A review on two-link flexible manipulators. *Annual Reviews in Control*, 42:346–367, 2016.

[8] Shuzhi Sam Ge, Tong Heng Lee, and G Zhu. Improving regulation of a single-link flexible manipulator with strain feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(1):179–185, 1998.

[9] Rolland-Michel Assoumou Nzue, Jean-François Brethé, Eric Vasselin, and Dimitri Lefebvre. Comparison of serial and parallel robot repeatability based on different performance criteria. *Mechanism and Machine Theory*, 61:136–155, 2013.

[10] Ingo T Pietsch, Mathias Krefft, Oliver T Becker, Carlos Cezar Bier, and Jürgen Hesselbach. How to reach the dynamic limits of parallel robots? an autonomous control approach. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2(4):369–380, 2005.

[11] Jean-Pierre Merlet. Parallel robots: Open problems. *Robotics Research*, pages 27–32, 2000.

[12] Jean-Pierre Merlet and Clement Gosselin. Parallel mechanisms and robots. *Springer Handbook of Robotics*, pages 269–285, 2008.

[13] Eric Lee, Constantinos Mavroidis, and Jean Pierre Merlet. Five precision points synthesis of spatial rrr manipulators using interval analysis. *Volume 5: 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, 2002.

[14] Feng Gao, Xinjun Liu, and William A Gruver. Performance evaluation of two-degree-of-freedom planar parallel robots. *Mechanism and Machine Theory*, 33(6):661–668, 1998.

[15] Soumya Bhattacharya, Himanshu Hatwal, and Arindam Ghosh. On the optimum design of stewart platform type parallel manipulators. *Robotica*, 13(02):133–140, 1995.

[16] Mircea Badescu and Constantinos Mavroidis. Workspace optimization of 3-legged upu and ups parallel platforms with joint constraints. *Journal of Mechanical Design*, 126(2):291–300, 2004.

[17] Tian Huang, Meng Li, Zhanxian Li, Derek G Chetwynd, and David J Whitehouse. Optimal kinematic design of 2-dof parallel manipulators with well-shaped workspace bounded by a specified conditioning index. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(3):538–543, 2004.

[18] Xin-Jun Liu, Jinsong Wang, and G Pritschow. On the optimal kinematic design of the prrrp 2-dof parallel mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 41(9):1111–1130, 2006.

[19] Xu Zhang and Hao Fang. Optimization of a 3-prs parallel manipulator based on interval analysis. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2012 10th World Congress on*, pages 2452–2456. IEEE, 2012.

[20] Panos Y. Papalambros and Douglass J. Wilde. *Principles of optimal design: modeling and computation*. Cambridge University Press, 2017.

[21] Keum-Shik Hong and Jeom-Goo Kim. Manipulability analysis of a parallel machine tool: application to optimal link length design. *Journal of Field Robotics*, 17(8):403–415, 2000.

[22] MA Laribi, L Romdhane, and S Zeghloul. Analysis and dimensional synthesis of the delta robot for a prescribed workspace. *Mechanism and Machine Theory*, 42(7):859–870, 2007.

[23] Xin-Jun Liu, Li-Ping Wang, Fugui Xie, and Ilian A Bonev. Design of a three-axis articulated tool head with parallel kinematics achieving desired motion/force transmission characteristics. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 132(2):021009, 2010.

[24] Michael Stock and Karol Miller. Optimal kinematic design of spatial parallel manipulators: application to linear delta robot. *Transactions-American Society of Mechanical Engineers Journal of Mechanical Design*, 125(2):292–301, 2003.

[25] Haidong Li, Clément M Gosselin, and Marc J Richard. Determination of the maximal singularity-free zones in the six-dimensional workspace of the general gough–stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 42(4):497–511, 2007.

[26] Yawei Yang and John F O'Brien. A sequential method for the singularity-free workspace design of a three legged parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, 45(11):1694–1706, 2010.

[27] Xin-Jun Liu, Jinsong Wang, Kun-Ku Oh, and Jongwon Kim. A new approach to the design of a delta robot with a desired workspace. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 39(2):209–225, 2004.

[28] Raffaele Di Gregorio. Determination of singularities in delta-like manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 23(1):89–96, 2004.

[29] Alexandre Lecours and Clément Gosselin. Reactionless two-degree-of-freedom planar parallel mechanism with variable payload. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2(4):041010, 2010.

[30] Gursel Alici and Bijan Shirinzadeh. Optimum dynamic balancing of planar parallel manipulators based on sensitivity analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 41(12):1520–1532, 2006.

[31] Djana Ilia and Rosario Sinatra. A novel formulation of the dynamic balancing of five-bar linkages with applications to link optimization. *Multibody System Dynamics*, 21(2):193–211, 2009.

[32] Ou Ma and Jorge Angeles. Optimum design of manipulators under dynamic isotropy conditions. In *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, pages 470–475. IEEE, 1993.

[33] Zhizhong Tong, Jingfeng He, Hongzhou Jiang, and Guangren Duan. Optimal design of a class of generalized symmetric gough–stewart parallel manipulators with dynamic isotropy and singularity-free workspace. *Robotica*, 30(02):305–314, 2012.

[34] LiMin Zhang, JiangPing Mei, XueMan Zhao, and Tian Huang. Dimensional synthesis of the delta robot using transmission angle constraints. *Robotica*, 30(03):343–349, 2012.

[35] Haihong Li, Zhiyong Yang, and Tian Huang. Dynamics and elasto-dynamics optimization of a 2-dof planar parallel pick-and-place robot with flexible links. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(2):195–204, 2009.

[36] Maira M Da Silva, Leopoldo PR De Oliveira, Olivier Brüls, Micaël Michelin, Cédric Baradat, Olivier Tempier, Jan De Caigny, Jan Swevers, Wim Desmet, and Hendrik Van Brussel. Integrating structural and input design of a 2-dof high-speed parallel manipulator: A flexible model-based approach. *Mechanism and Machine Theory*, 45(11):1509–1519, 2010.

[37] Qingsong Xu and Yangmin Li. Error analysis and optimal design of a class of translational parallel kinematic machine using particle swarm optimization. *Robotica*, 27(01):67–78, 2009.

[38] Qingsong Xu and Yangmin Li. Accuracy-based architecture optimization of a 3-dof parallel kinematic machine. In *Automation Science and Engineering, 2006. CASE'06. IEEE International Conference on*, pages 63–68. IEEE, 2006.

[39] Jeha Ryu and Jongeun Cha. Volumetric error analysis and architecture optimization for accuracy of hexaslide type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 38(3):227–240, 2003.

[40] YJ Zhao. Dynamic design theory and methodology of the high-speed and light-weight parallel robot (doctoral thesis). *Tianjin University, Tianjin City, China*, 2006.

[41] Xin-Jun Liu and Ilian A Bonev. Orientation capability, error analysis, and dimensional optimization of two articulated tool heads with parallel kinematics. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 130(1):011015, 2008.

[42] Tian Huang, Derek G Chetwynd, JP Mei, and XM Zhao. Tolerance design of a 2-dof overconstrained translational parallel robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(1):167–172, 2006.

[43] Woo-Keun Yoon, Takashi Suehiro, Yuichi Tsumaki, and Masaru Uchiyama. Stiffness analysis and design of a compact modified delta parallel mechanism. *Robotica*, 22(04):463–475, 2004.

[44] Zhen Gao, Dan Zhang, Xiaolin Hu, and Yunjian Ge. Design, analysis, and stiffness optimization of a three degree of freedom parallel manipulator. *Robotica*, 28(03):349–357, 2010.

[45] Xin-Jun Liu, Zhen-Lin Jin, and Feng Gao. Optimum design of 3-dof spherical parallel manipulators with respect to the conditioning and stiffness indices. *Mechanism and machine Theory*, 35(9):1257–1267, 2000.

[46] Zhongzhe Chi and Dan Zhang. Stiffness optimization of a novel reconfigurable parallel kinematic manipulator. *Robotica*, 30(03):433–447, 2012.

[47] V. B. Venkayya and V. A. Tischler. Frequency control and its effect on the dynamic response of flexible structures. *AIAA Journal*, 23(11):1768–1774, 1985.

[48] N. S. Khot. Structure/control optimization to improve the dynamic response of space structures. *Computational Mechanics*, 3(3):179–186, 1988.

[49] Ramana V. Grandhi. Structural and control optimization of space structures. *Computers & Structures*, 31(2):139–150, 1989.

[50] I.u. Haq, R.v. Grandhi, and R.k. Yedavalli. Robustness measures for integrated structural/control systems. *Computing Systems in Engineering*, 1(2-4):285–292, 1990.

[51] J.c. Bruch, S. Adali, J.m. Sloss, and I.s. Sadek. Optimal design and control of a cross-ply laminate for maximum frequency and minimum dynamic response. *Computers & Structures*, 37(1):87–94, 1990.

[52] J. Ling, P. Kabamba, and J. Taylor. Combined design of structures and controllers for optimal maneuverability. *Structural Optimization*, 3(4):214–230, 1991.

[53] J. Ling, P. Kabamba, and J. Taylor. Multicriterion structure/control design for optimal maneuverability and fault tolerance of flexible spacecraft. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 82(2):219–251, 1994.

[54] I.s. Sadek, J.m. Sloss, S. Adali, and J.c. Bruch. Integrated design and control of laminated hybrid plates with dynamic response and buckling objectives. *Journal of Sound and Vibration*, 163(1):57–66, 1993.

[55] N. S. Khot and H. Öz. Structural–control optimization with h_2- and h_∞–norm bounds. *Optimal Control Applications and Methods*, 18(4):297–311, 1997.

[56] Jaroslaw Sobieszczanski-Sobieski and Raphael Haftka. Multidisciplinary aerospace design optimization– survey of recent developments. *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 1997.

[57] Efrén Mezura-Montes, Edgar A Portilla-Flores, Carlos A Coello Coello, Jaime Alvarez-Gallegos, and Carlos A Cruz-Villar. An evolutionary approach to solve a novel mechatronic multiobjective optimization problem. In *Advances in Metaheuristics for Hard Optimization*, pages 329–351. Springer, 2007.

[58] Carlos A Cruz-Villar, Jaime Alvarez-Gallegos, and Miguel G Villarreal-Cervantes. Concurrent redesign of an underactuated robot manipulator. *Mechatronics*, 19(2):178–183, 2009.

[59] Miguel G Villarreal-Cervantes, Carlos A Cruz-Villar, Jaime Alvarez-Gallegos, and Edgar A Portilla-Flores. Differential evolution techniques for the structure-control design of a five-bar parallel robot. *Engineering Optimization*, 42(6):535–565, 2010.

[60] Joshua K Pickard, Juan A Carretero, and Virendrakumar C Bhavsar. Task-optimized cable-actuated planar parallel manipulator architecture and its concurrent implementation. In *High Performance Computing & Simulation (HPCS), 2014 International Conference on*, pages 178–185. IEEE, 2014.

[61] Saeed Behbahani and Clarence W de Silva. System-based and concurrent design of a smart mechatronic system using the concept of mechatronic design quotient (mdq). *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 13(1):14–21, 2008.

[62] Dan Zhang, Zhuming Bi, and Beizhi Li. Design and kinetostatic analysis of a new parallel manipulator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(4):782–791, 2009.

[63] Yingjie Guo, Huiyue Dong, and Yinglin Ke. Stiffness-oriented posture optimization in robotic machining applications. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 35:69–76, 2015.

[64] Hao Wang, Linsong Zhang, Genliang Chen, and Shunzhou Huang. Parameter optimization of heavy-load parallel manipulator by introducing stiffness distribution evaluation index. *Mechanism and Machine Theory*, 108:244–259, 2017.

[65] Guo Zhan Lum, Tat Joo Teo, Song Huat Yeo, Guilin Yang, and Metin Sitti. Structural optimization for flexure-based parallel mechanisms–towards achieving optimal dynamic and stiffness properties. *Precision Engineering*, 42:195–207, 2015.

[66] Mathias Krefft and Jürgen Hesselbach. Elastodynamic optimization of parallel kinematics. In *Automation Science and Engineering, 2005. IEEE International Conference on*, pages 357–362. IEEE, 2005.

[67] Xiaoyun Wang and James K Mills. Dynamic modeling of a flexible-link planar parallel platform using a substructuring approach. *Mechanism and Machine Theory*, 41(6):671–687, 2006.

[68] David Wagg and Simon Neild. Nonlinear vibration with control. *Bristol: Springer-Verlag*, 2009.

[69] Preumont A. Vibration control of active structures. *Berlin: Springer-Verlag*, 2011.

[70] Robert H. Cannon and Eric Schmitz. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. *The International Journal of Robotics Research*, 3(3):62–75, 1984.

[71] W.j. Book. Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulator arms via transformation matrices. *Computer Aided Design of Multivariable Technological Systems*, pages 5–17, 1983.

[72] Santosha Kumar Dwivedy and Peter Eberhard. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*, 41(7):749–777, 2006.

[73] A Benjeddou, M A Trindade, and R Ohayon. Piezoelectric actuation mechanisms for intelligent sandwich structures. *Smart Materials and Structures*, 9(3):328–335, 2000.

[74] J. L. Fanson and T. K. Caughey. Positive position feedback control for large space structures. *AIAA Journal*, 28(4):717–724, 1990.

[75] S. Poh and A. Baz. Active control of a flexible structure using a modal positive position feedback controller. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(3):273–288, 1990.

[76] Anshul Sharma, C.k. Susheel, Rajeev Kumar, and V.s. Chauhan. Fuzzy logic based active vibration controller. *Applied Mechanics and Materials*, 367:357–362, 2013.

[77] S. M. Yang and G. S. Lee. Vibration control of smart structures by using neural networks. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119(1):34, 1997.

[78] M. Moallem, M.r. Kermani, R.v. Patel, and M. Ostojic. Flexure control of a positioning system using piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(5):757–762, 2004.

[79] J.-H. Park and H. Asada. Design and control of minimum-phase flexible arms with torque transmission mechanisms. *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990.

[80] Maíra Martins Da Silva, Olivier Brüls, Wim Desmet, and Hendrik Van Brussel. Integrated structure and control design for mechatronic systems with configuration-dependent dynamics. *Mechatronics*, 19(6):1016–1025, 2009.

[81] Guaraci Bastos and Olivier Brüls. An integrated control-structure design for manipulators with flexible links. *IFAC-PapersOnLine*, 48(11):156–161, 2015.

[82] M. O. Tokhi and A. K. M. Azad. *Flexible Robot Manipulators: modelling, simulation and control.* The Institution of Engineering and Technology, 2017.

[83] Pablo Bengoa, Asier Zubizarreta, Itziar Cabanes, Aitziber Mancisidor, Charles Pinto, and Sara Mata. Virtual sensor for kinematic estimation of flexible links in parallel robots. *Sensors*, 17(9):1934, 2017.

[84] M. Geradin and A. Cardona. Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra. *Computational Mechanics*, 4(2):115–135, 1988.

[85] K. H. Low and M. Vidyasagar. A lagrangian formulation of the dynamic model for flexible manipulator systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 110(2):175, 1988.

[86] M. Karkoub and A.s. Yigit. Vibration control of a four-bar mechanism with a flexible coupler link. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):171–189, 1999.

[87] Singiresu S. Rao. *The finite element method in engineering.* Elsevier, 4th edition, 2005.

[88] Marco A. Arteaga. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 120(1):8, 1998.

[89] Ma. Pacheco. Técnicas de control basadas en pasividad aplicadas a un motor de inducción (tesis de maestría). *Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, México*, 1994.

[90] Olgierd Cecil Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos.* 1981.

[91] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures.* Prentice Hall, 2006.

[92] Hector Cervantes-Culebro, Carlos A. Cruz-Villar, Maria-Guadalupe Martinez Penaloza, and Efren Mezura-Montes. Constraint-handling techniques for the concurrent design of a five-bar parallel robot. *IEEE Access*, 5:23010–23021, 2017.

[93] Kalyanmoy Deb. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186(2):311–338, 2000.

[94] Tetsuyuki Takahama and Setsuko Sakai. Constrained optimization by the ε constrained differential evolution with an archive and gradient-based mutation. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pages 1–9. IEEE, 2010.

[95] Thomas P. Runarsson and Xin Yao. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 4(3):284–294, 2000.

[96] Rainer Storn and Kenneth Price. Differential evolution-a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359, 1997.

[97] Hasan Zorlu. Optimization of weighted myriad filters with differential evolution algorithm. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 77:1–9, 2017.

[98] Sabino Maggi. Estimating water retention characteristic parameters using differential evolution. *Computers and Geotechnics*, 86:163–172, 2017.

[99] Jouni Lampinen. A constraint handling approach for the differential evolution algorithm. In *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*, volume 2, pages 1468–1473. IEEE Computer Society Washington, DC, 2002.

[100] Zbigniew Michalewicz and Marc Schoenauer. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation*, 4(1):1–32, 1996.

[101] Carlos A Coello Coello. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(11):1245–1287, 2002.

[102] Efrén Mezura-Montes and Carlos A Coello Coello. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(4):173–194, 2011.

[103] Fathi H Ghorbel, Olivier Chételat, Ruvinda Gunawardana, and Roland Longchamp. Modeling and set point control of closed-chain mechanisms: theory and experiment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(5):801–815, 2000.

[104] Efrén Mezura-Montes, Mariana Edith Miranda-Varela, and Rubí del Carmen Gómez-Ramón. Differential evolution in constrained numerical optimization: an empirical study. *Information Sciences*, 180(22):4223–4262, 2010.

[105] Efrén Mezura-Montes and Omar Cetina-Domínguez. Empirical analysis of a modified artificial bee colony for constrained numerical optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 218(22):10943–10973, 2012.

[106] David J. Sheskin. *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures*. Chapman & Hall/CRC, 2011.

[107] Tsuneo Yoshikawa. *Foundations of robotics: analysis and control*. The MIT Press, 1990.

Apéndice A

A.0.1. Circuitos eléctricos utilizados

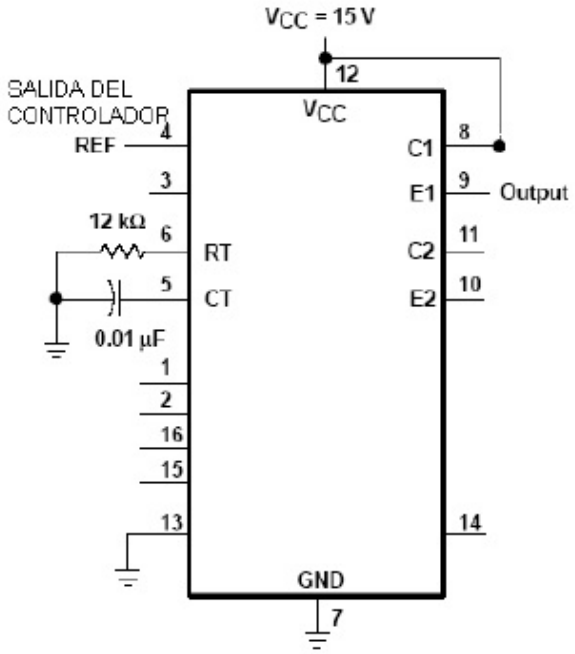


Figura A.1: Diagrama eléctrico de TL494 utilizado

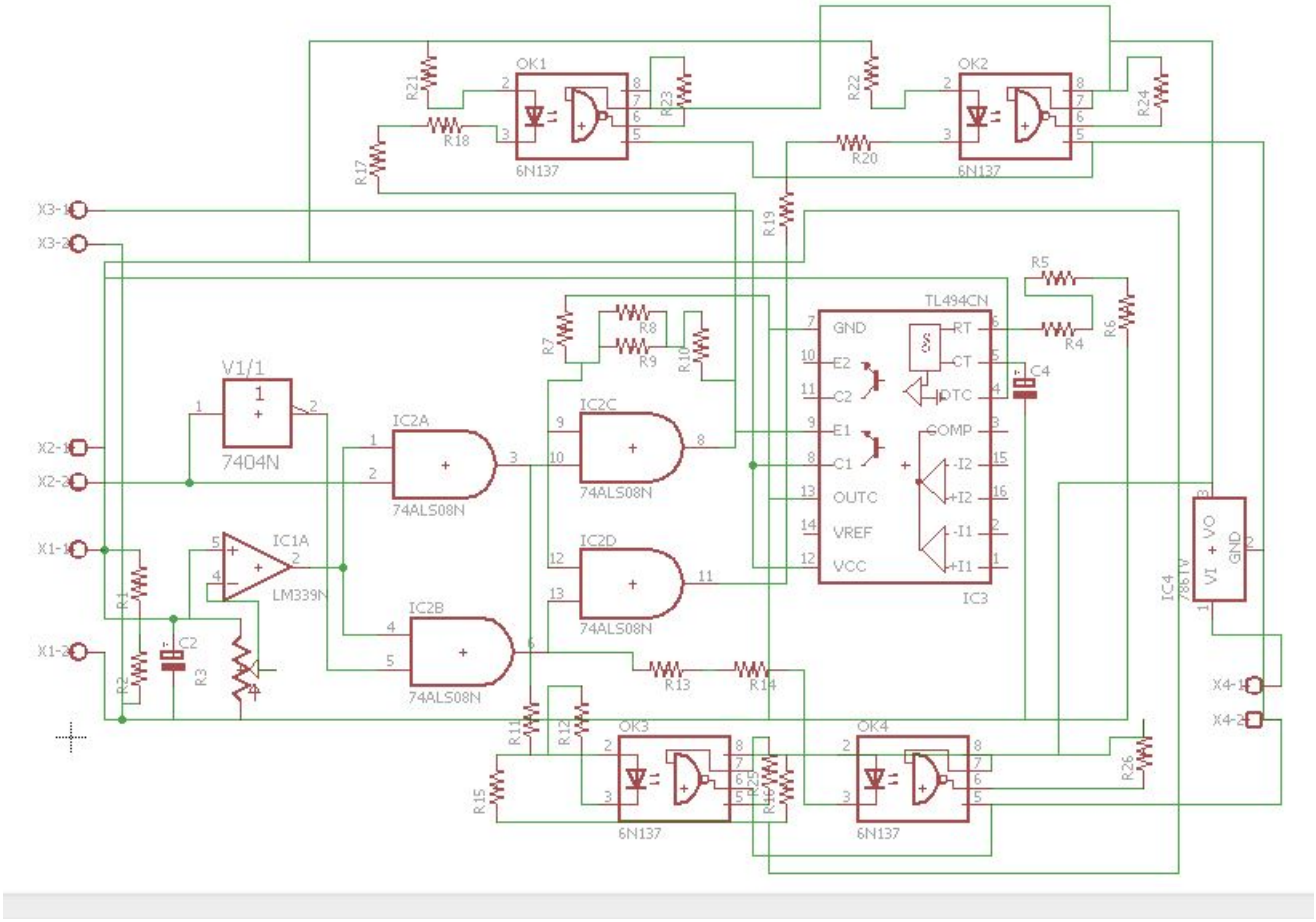


Figura A.2: Esquemático circuito lógico

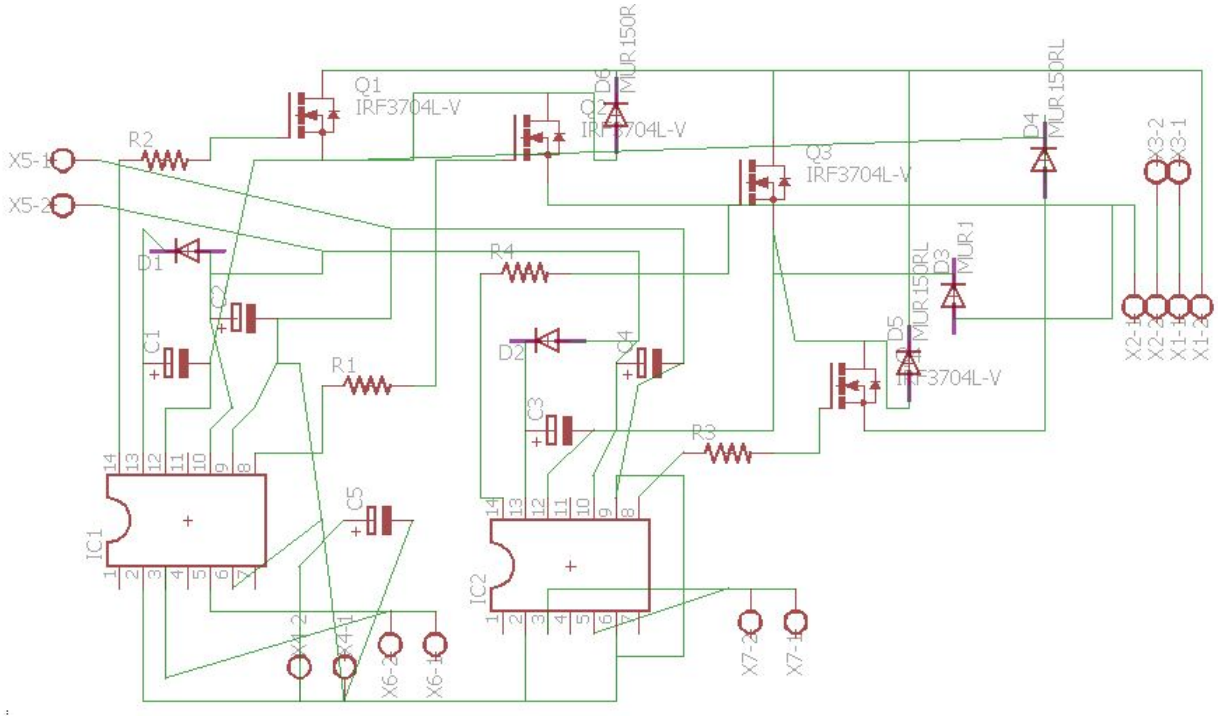


Figura A.3: Esquemático etapa de potencia

Apéndice B

Todas las unidades estan expresadas en el Sistema Internacional.

B.1. Cálculo de masas

La masa de los eslabones rígidos (actuados) se calcula como B.2

$$mt_i = ma_i - mb_i - mc_i + md_i + me_i - mf_i - mg_i - mh_i - mi_i + mj_i + mk_i \quad \text{(B.1)}$$

donde
$i = 1, 2$
$ma_i = \rho_i c_i e_i (a_i + b_i + d_i)$
$mb_i = \rho_i \pi r_{bi}^2 (e_i + wj)$
$mc_i = \rho_i \pi r_{ci}^2 (e_i + wk)$
$md_i = \rho_i \{(a_i + b_i + d_i) f_i e_i\}$
$me_i = \rho_i \{(a_i + b_i + d_i) g_i e_i\}$
$mf_i = \frac{1}{2} \rho_i h_i f_i e_i$
$mg_i = \frac{1}{2} \rho_i i_i f_i e_i$
$mh_i = \frac{1}{2} \rho_i j_i g_i e_i$
$mi_i = \frac{1}{2} \rho_i k_i g_i e_i$
$mj_i = \rho_i \pi wj rj_1^2$
$mk_i = \rho_i \pi wk rk_1^2$
ρ_i=2710$\frac{kg}{m^3}$; Densidad del aluminio

$r_{bi} = r_{ci}$=0.00635; Radios de las flechas en las uniones
$wj = wk$=0.01589; Ancho contenedor de rodamientos
$rj_1 = rk_1$=0.01955; Radio contenedor de rodamientos

La masa de los eslabones flexibles (subactuados) se calcula como

$$mt_j = \rho_j a_j q_j r_j \quad \text{(B.2)}$$

donde

$j = 3, 4$
ρ_j=7870; Densidad del acero
r_j=0.012; Ancho de la viga
q_j=0.003; Altura de la viga

B.2. Cálculo de longitud l_c y ángulo γ_i

El centro de masa de los eslabones rígidos esta dado por la coordenada $[Xcm_i, Ycm_i]$

$$Xcm_i = \frac{Xt_i}{mt_i}; \quad Ycm_i = \frac{Yt_i}{mt_i} \tag{B.3}$$

donde

$$Xt_i = xa_i ma_i - xb_i mb_i - xc_i mc_i + xd_i md_i + xe_i me_i$$
$$-xf_i mf_i - xg_i mg_i - xh_i mh_i - xi_i mi_i + xj_i mj_i + xk_i mk_i$$

$$Yt_i = ya_i ma_i - yb_i mb_i - yc_i mc_i + yd_i md_i + ye_i me_i$$
$$-yf_i mf_i - yg_i mg_i - yh_i mh_i - yi_i mi_i + yj_i mj_i + yk_i mk_i$$

$xa_i = \frac{(a_i+b_i+d_i)}{2} - b_i$
$xa_i = xd_i = xe_i$
$as_i = xb_i = xk_i$
$xc_i = 0; xj_i = 0$
$xf_i = \frac{h_i}{3} - b_i$
$xg_i = a_i + d_i - \frac{i_i}{3}$
$xh_i = \frac{j_i}{3} - b_i$
$xi_i = a_i + d_i - \frac{k_i}{3}$
$ya_i = 0$
$ya_i = yb_i = yc_i = yj_i = yk_i$
$yd_i = \frac{1}{2}(f_i + c_i)$
$ye_i = -\frac{1}{2}(g_i - c_i)$
$yf_i = \frac{c_i}{2} + f_i - \frac{f_i}{2}$
$yg_i = yf_i$
$yh_i = -\frac{c_i}{2} + g_i + \frac{g_i}{3}$
$yi_i = yh_i$

Una vez determinado $[Xcm_i, Ycm_i]$, la distancia al centro de masa se puede obtener por B.4

$$lc_i = \sqrt{Xcm_i^2 + Ycm_i^2} \tag{B.4}$$

y el ángulo al centro de masa se calcula mediante

$$\gamma_i = \arctan\left(\frac{Ycm_i}{Xcm_i}\right) \tag{B.5}$$

B.3. Cálculo de inercias

$P_{Ai} = ma_i\left\{(xa_i - XCm_i)^2 + (ya_i - YCm_i)^2\right\}$
$I_{Ai} = \frac{1}{12}ma_i\left\{(a_i + b_i + d_i)^2 + (c_i)^2\right\} + P_{Ai}$

$P_{Bi} = mb_i\left\{(xb_i - XCm_i)^2 + (yb_i - YCm_i)^2\right\}$
$I_{Bi} = \frac{1}{2}mb_i(rb_i)^2 + P_{B1}$

$P_{Ci} = mc_i\left\{(xc_i - XCm_i)^2 + (yc_i - YCm_i)^2)\right\}$
$I_{Ci} = \frac{1}{2}mc_irc_i^2 + P_{Ci}$

$P_{Di} = md_i\left\{(xd_i - XCm_i)^2 + (yd_i - YCm_i)^2\right\}$
$I_{Di} = \frac{1}{12}md_i\left\{(a_i + b_i + ds_i)^2 + (fs_i)^2\right\} + P_{Di}$

$P_{Ei} = me_i\left\{(xe_i - XCm_i)^2 + (ye_i - YCm_i)^2\right\}$
$I_{Ei} = \frac{1}{12}me_i\left\{(a1 + b1 + d1)^2 + (g1)^2\right\} + P_{Ei}$

$P_{Fi} = mf_i\left\{(xf_i - XCm_i)^2 + (yf_i - YCm_i)^2\right\}$
$I_{Fi} = \frac{1}{18}mf_i\left\{(h1)^2 + (f1)^2\right\} + P_{Fi}$

$P_{Gi} = mg_i\left\{(xg_i - XCm_i)^2 + (yg1 - YCm1)^2\right\}$
$I_{Gi} = \frac{1}{18}mg_i\left\{(i_i)^2 + (f_i)^2\right\} + P_{Gi}$

$I_{Hi} = \frac{1}{18}mh_ij_i$

$P_{Ii} = mi_i\left\{(xi_i - XCm_i)^2 + (yi_i - YCm_i)^2\right\}$
$I_{Ii} = \frac{1}{18}mi_i\left\{(k_i)^2 + (g_i)^2\right\} + P_{Ii}$

$P_{Ji} = mj_i\left\{(xj1 - XCm1)^2 + (yj1 - YCm1)^2\right\}$
$I_{Ji} = \frac{1}{2}mj_ir_{ji}^2) + P_{Ji}$
$PK_i = mk_i\left\{(xk1 - XCm1)^2 + (yk1 - YCm1)^2\right\}$
$I_{Ki} = \frac{1}{2}mk_irk_i^2 + P_{Ki}$

$I_i = I_{Ai} - I_{Bi} - I_{Ci} + I_{Di} + I_{Ei} - I_{Fi} - I_{Gi} - I_{Ii} - I_{Hi} + I_{Ji} + I_{Ki}$

B.4. Dibujos técnicos

La Fig. B.1 ayuda a fijar el motor de DC (90 volts) a la base del prototipo y ésta a su vez esta fija a la mesa de trabajo. La Fig. B.2 cumple un doble propósito, el primero es que en esta pieza se alojan los rodamientos, necesarios para reducir la fricción en los eslabones. El segundo propósito de esta pieza es sostener la Fig.B.3, cuya finalidad es poder sujetar los eslabones flexibles. La Fig. B.3 permite que se puedan sujetar diferentes eslabones flexibles (láminas de diferentes calibres). Los diámetros de las flechas (Figs. B.4-B.5) están determinadas por las chumaceras y los reductores industriales adquiridos, mientras que la longitud de estas se buscó que fueran lo más cortas para reducir espacio y la deflexión en las mismas. La Fig.B.6 ayuda a dar una mayor área de presión entre el eslabón rígido y la flecha que sostiene a este eslabón, con ellos se evita el juego entre las piezas y se reduce que el eslabón salga del plano. Las Figs.B.7 -B.8 muestran los eslabones rígidos actuados del primer prototipo construido (diseño óptimo A). Las Figs.B.9 -B.10 muestran los eslabones rígidos actuados del segundo prototipo construido (diseño óptimo B).

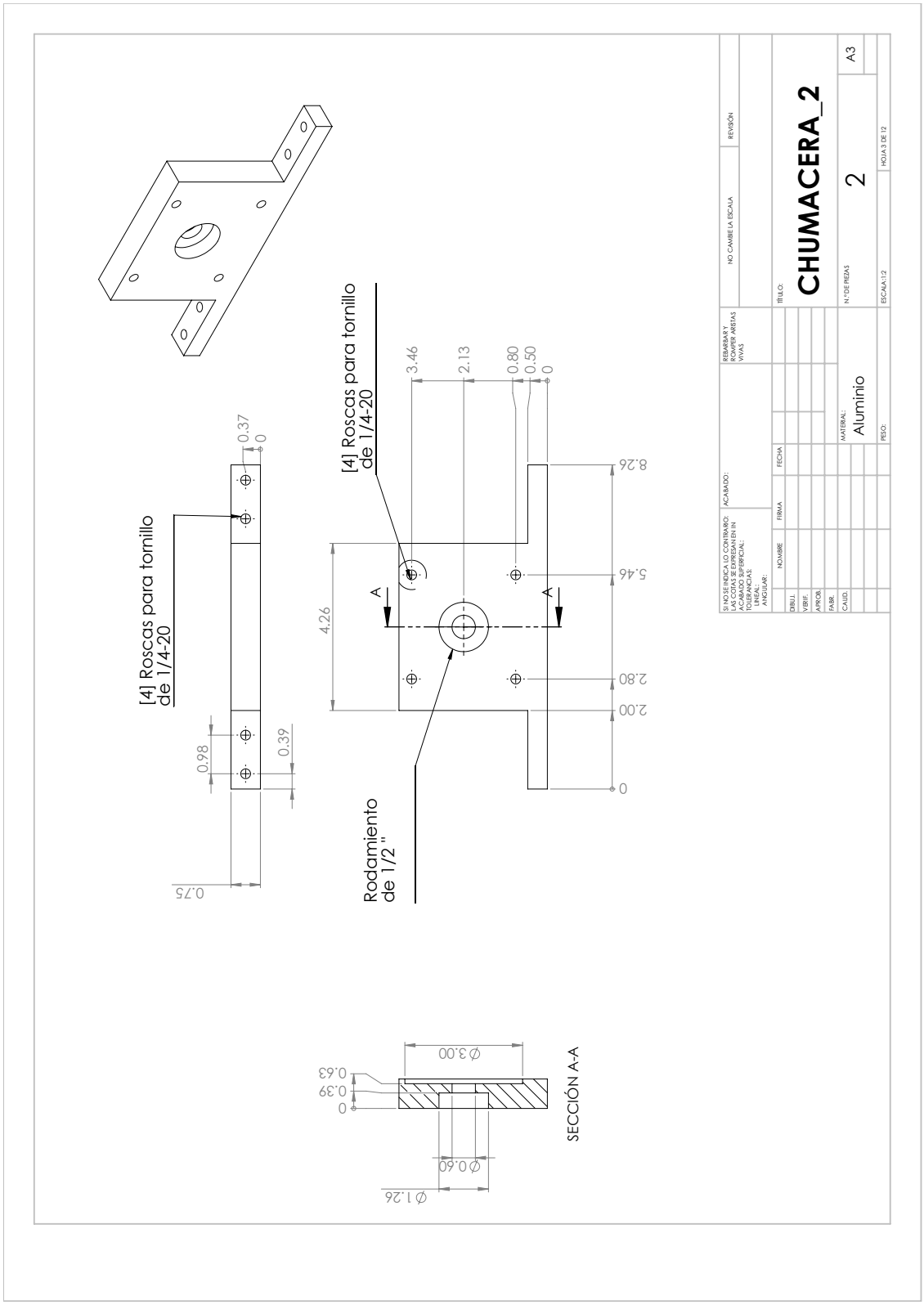


Figura B.1: Chumacera para fijar motor

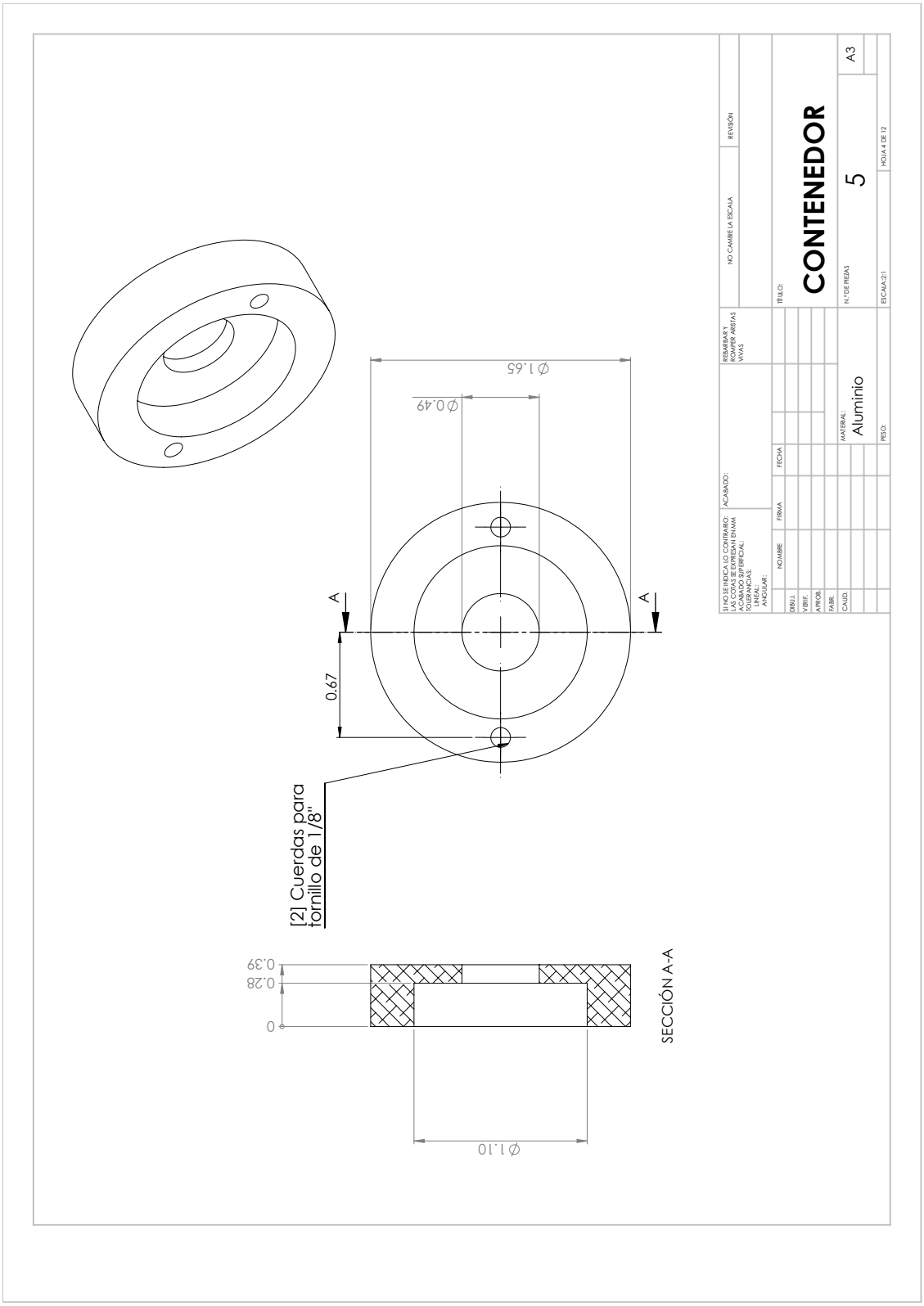


Figura B.2: Contenedor de rodamientos

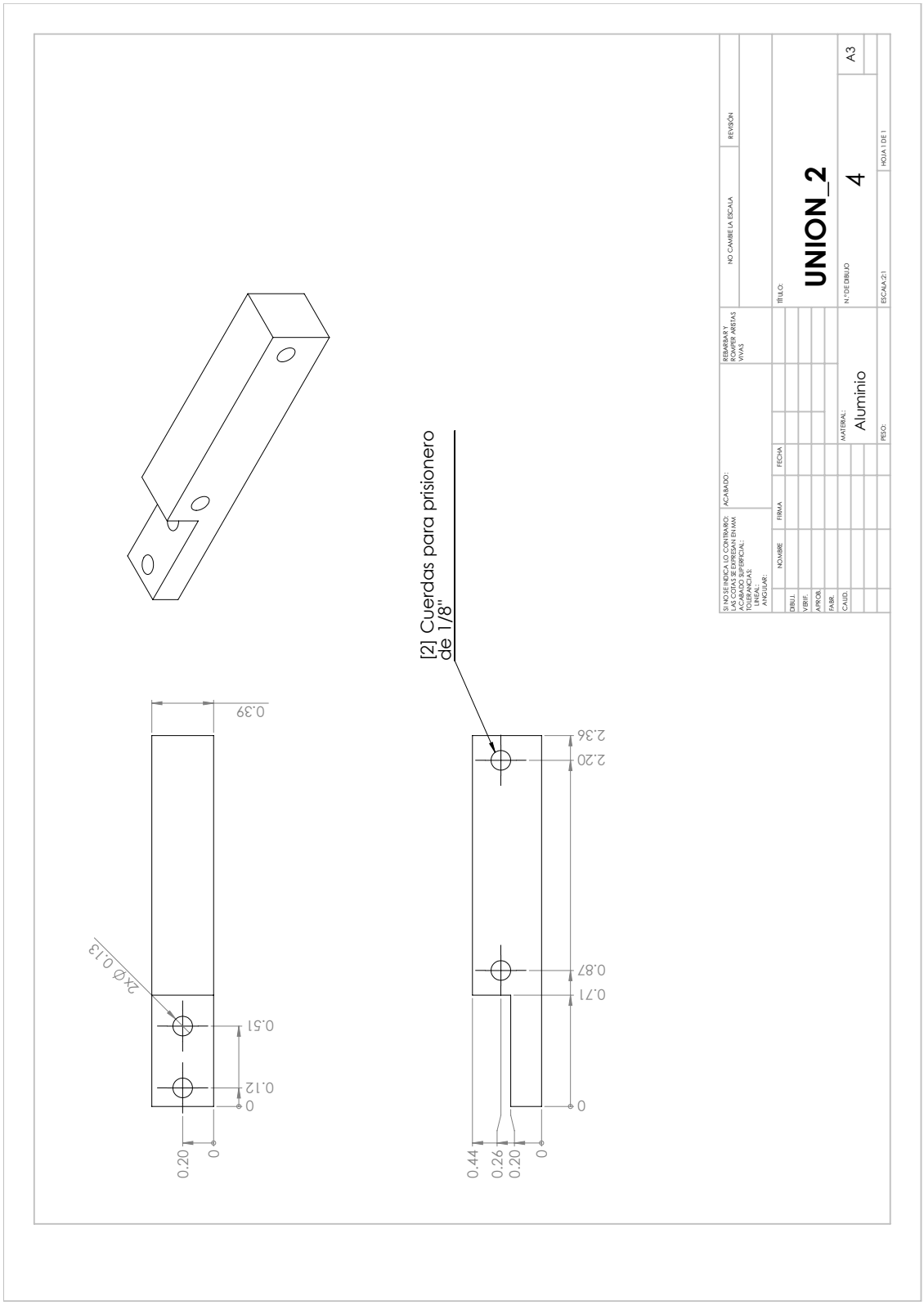


Figura B.3: Pieza para sujetar eslabones flexibles

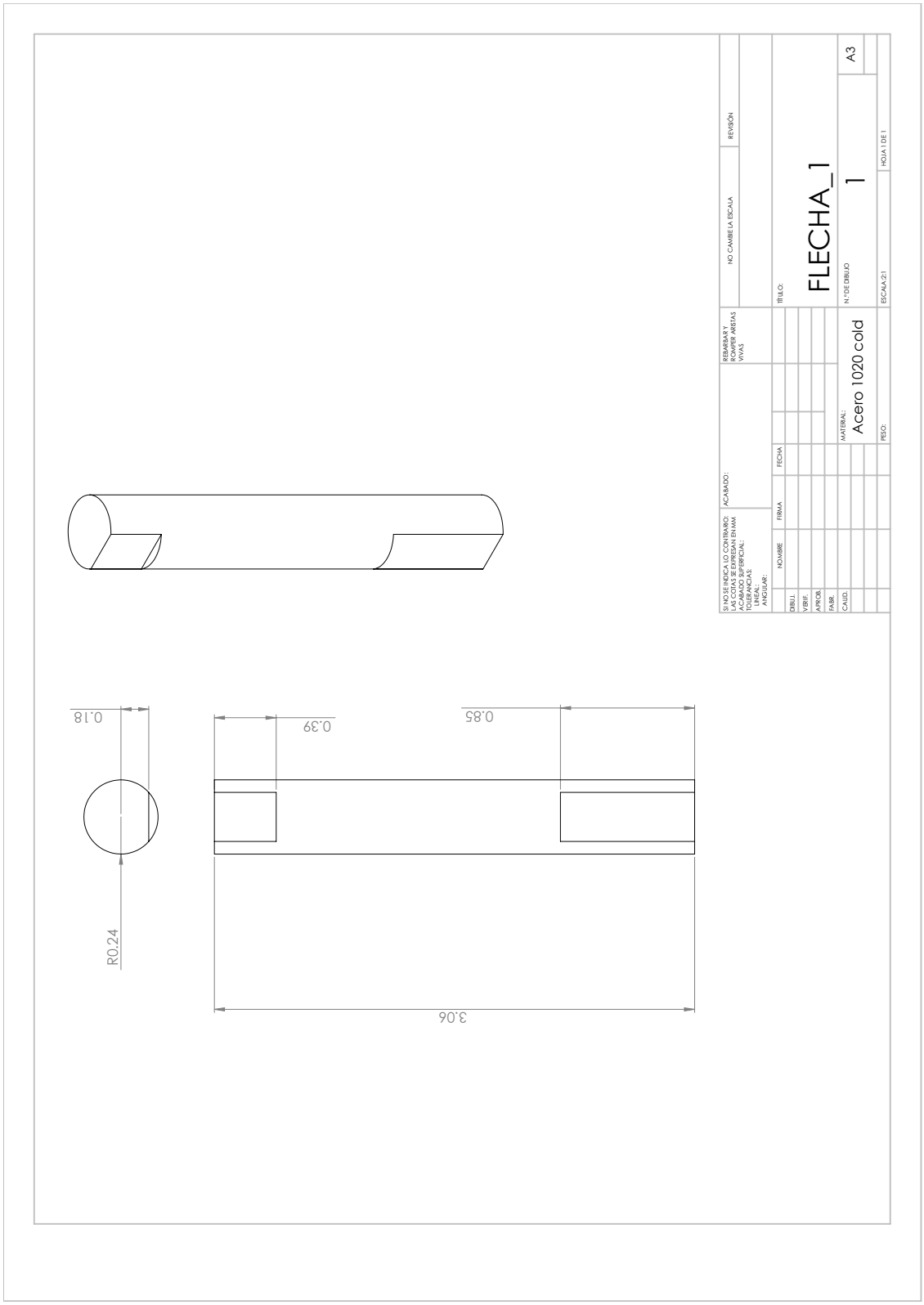


Figura B.4: Flecha para motor M_1

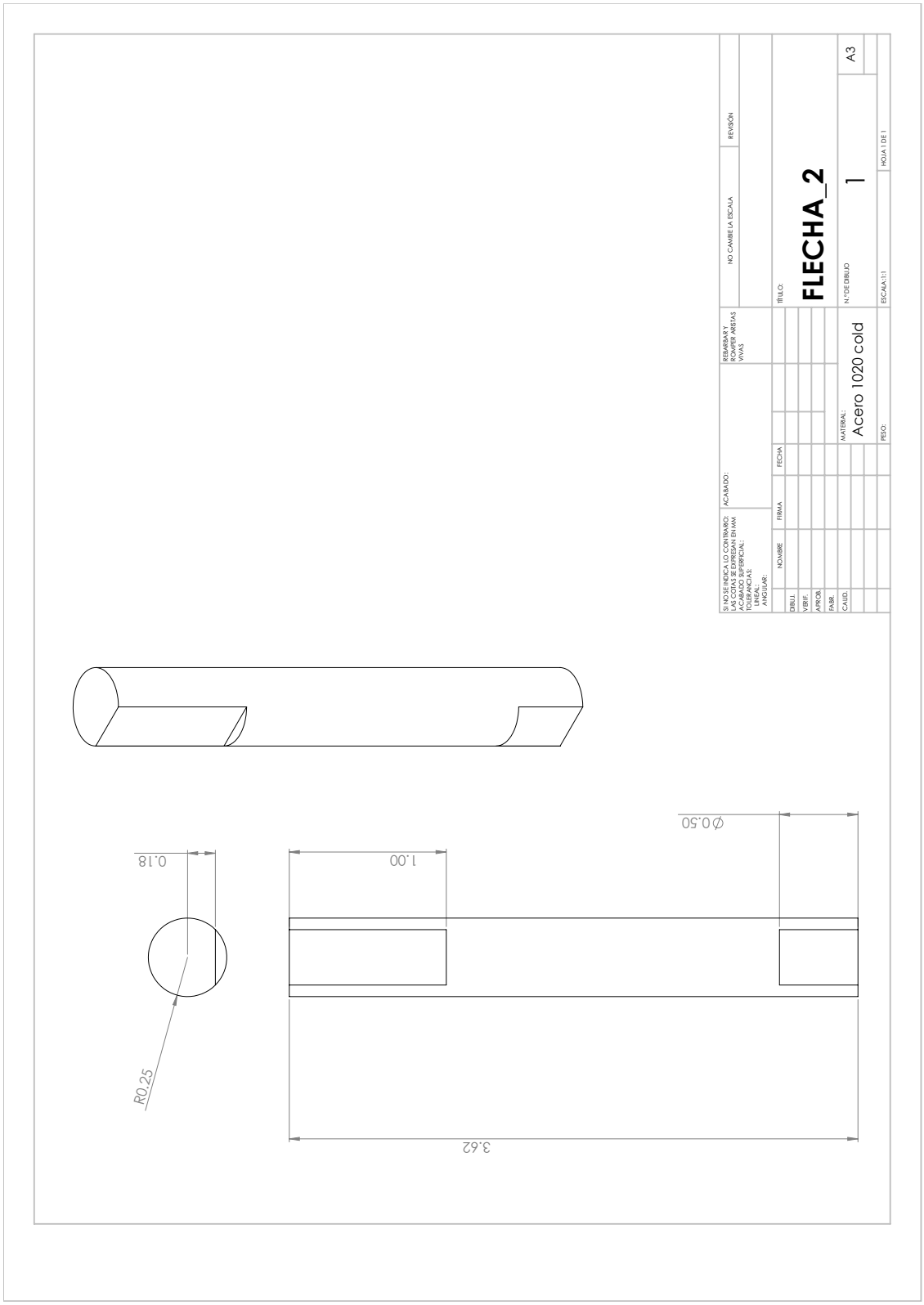


Figura B.5: Flecha para motor M_2

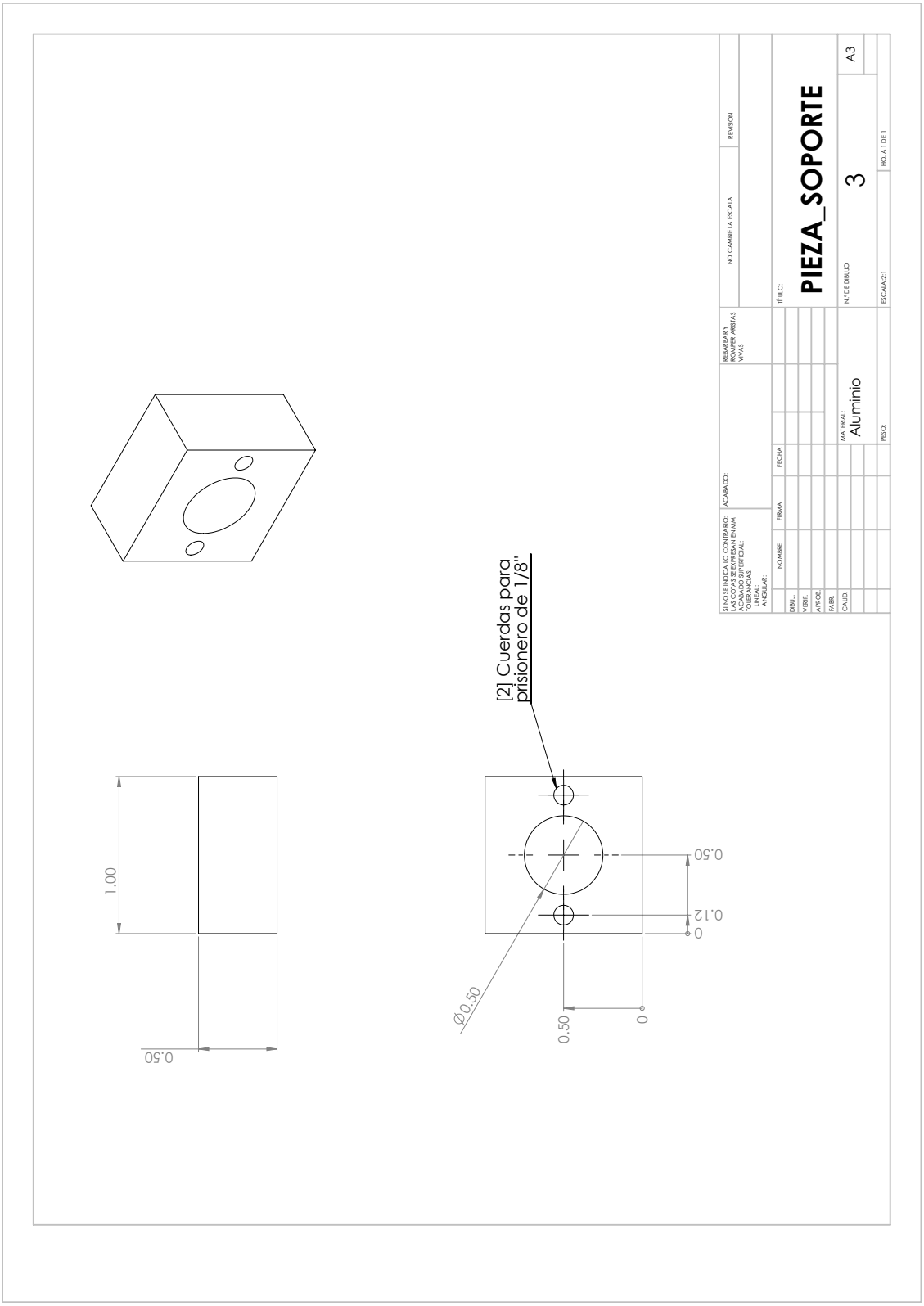


Figura B.6: Pieza soporte

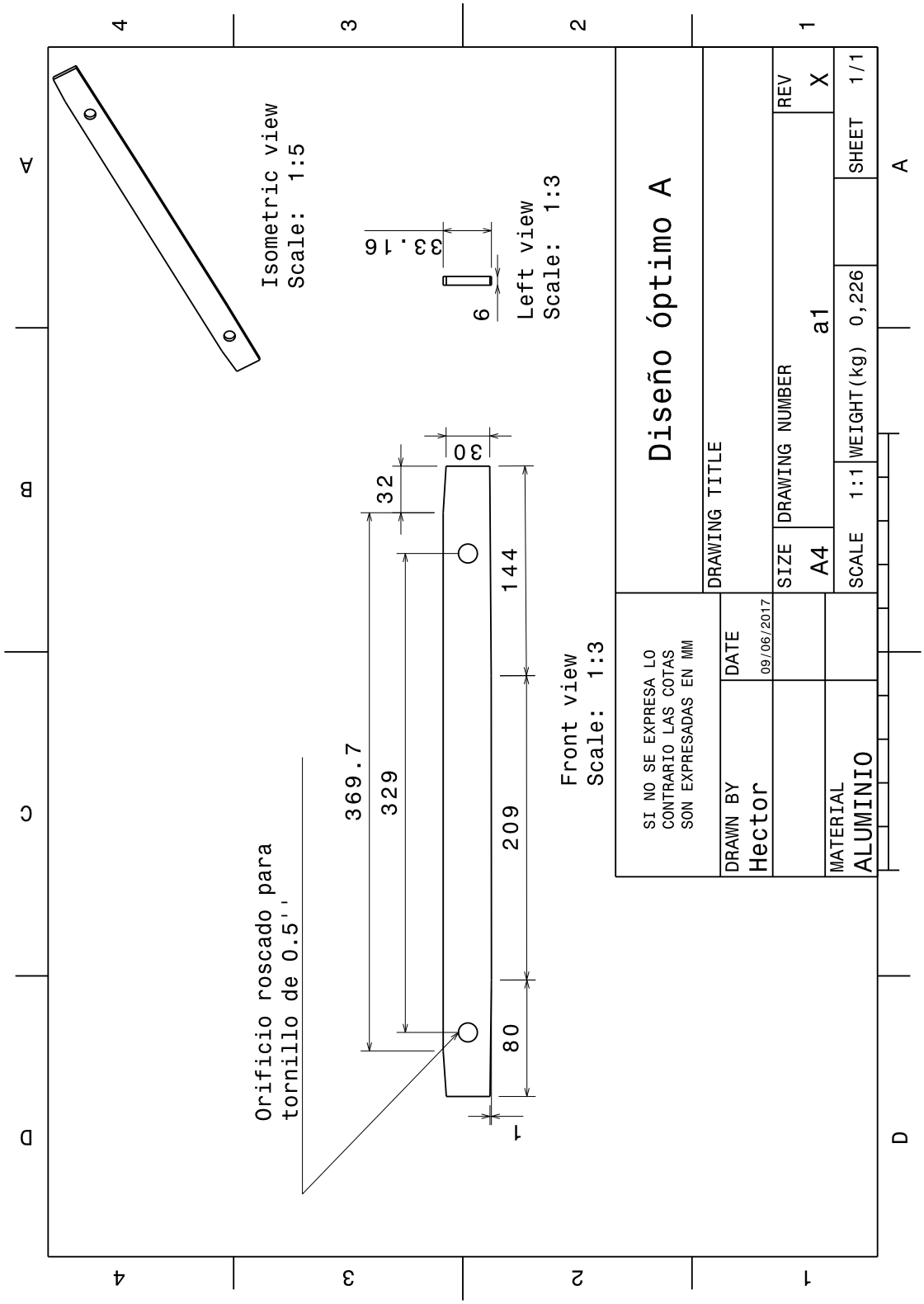


Figura B.7: Diseño óptimo A, eslabón a_1

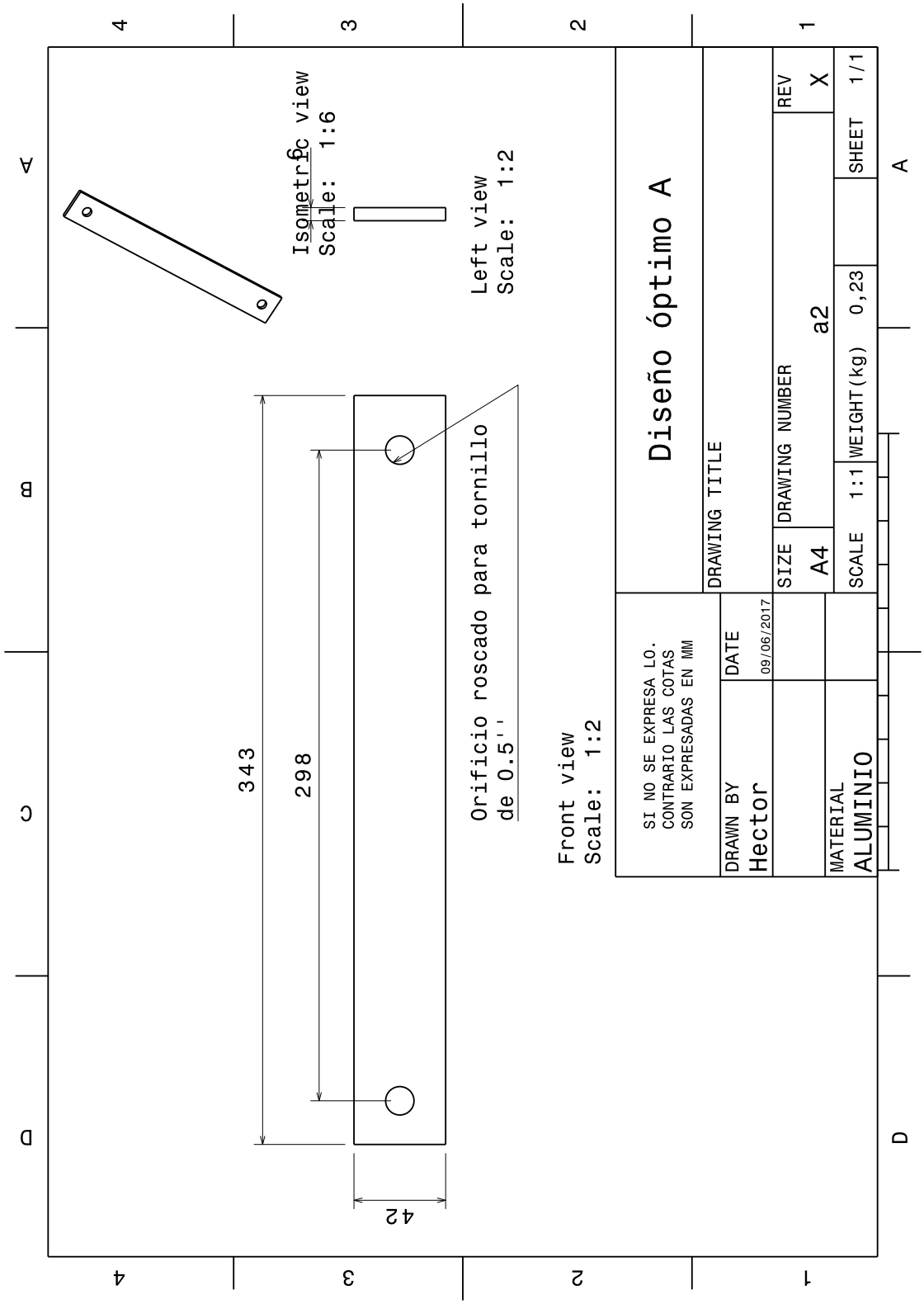


Figura B.8: Diseño óptimo A, eslabón a_2

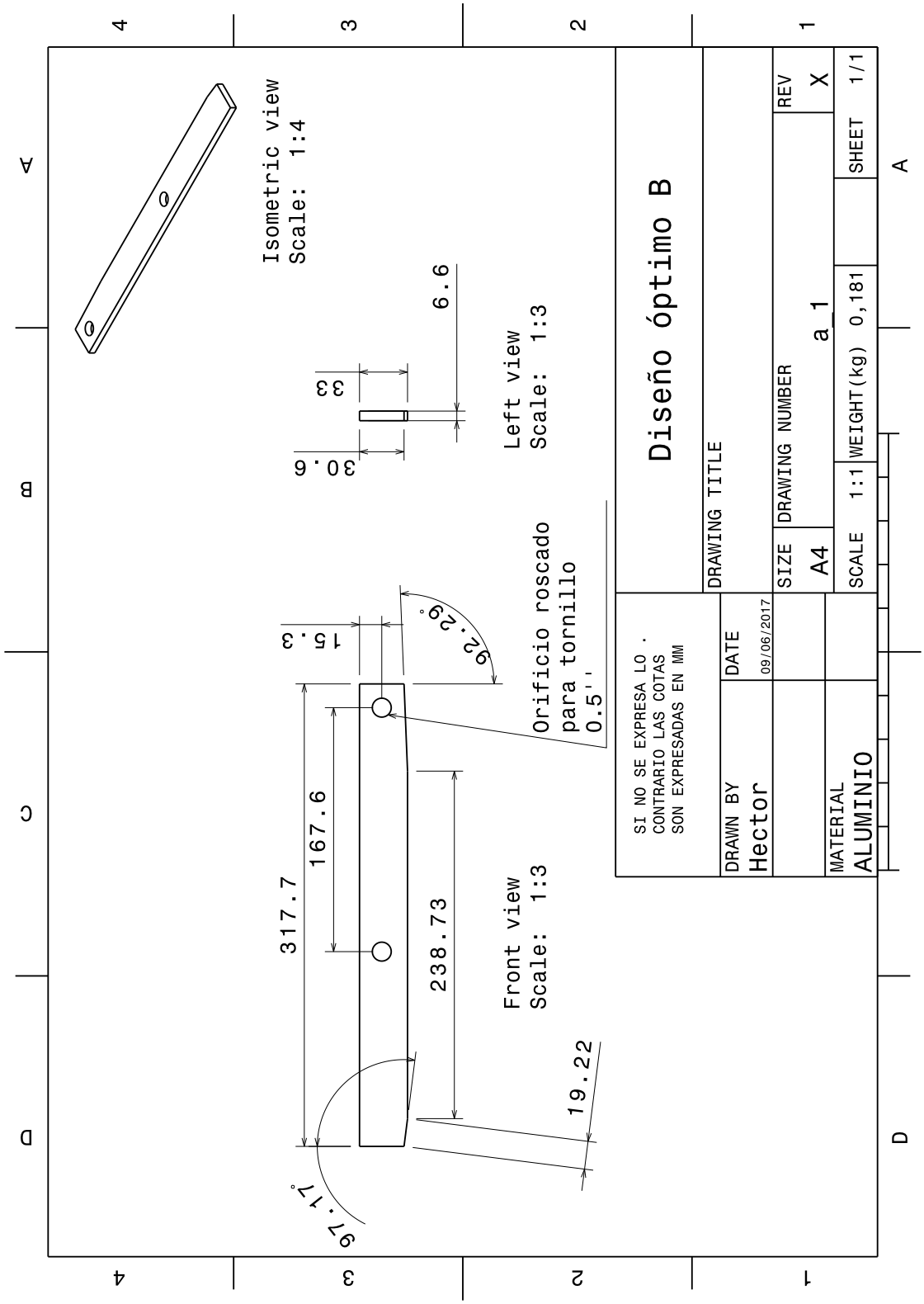


Figura B.9: Diseño óptimo B, eslabón a_1

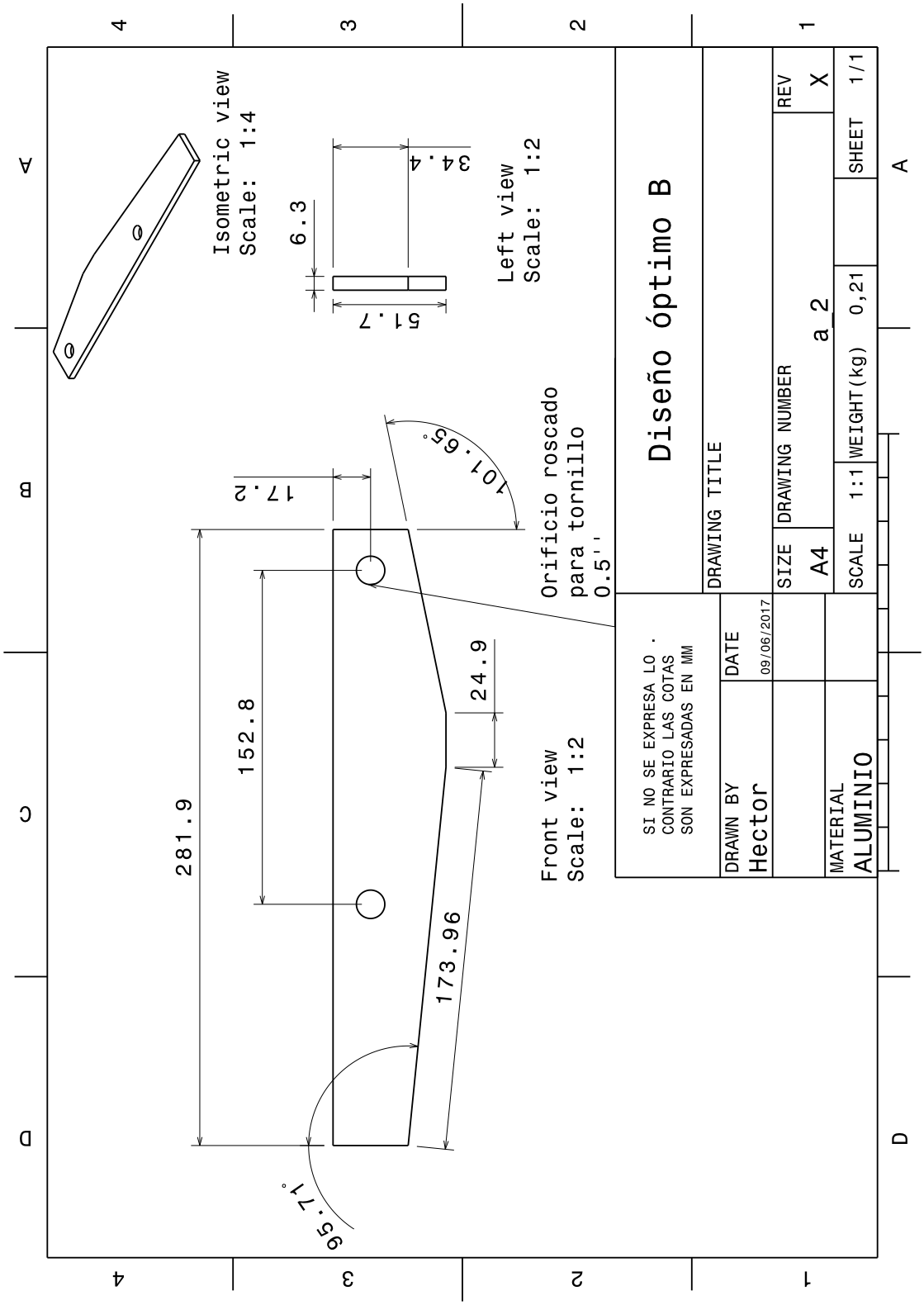


Figura B.10: Diseño óptimo B, eslabón a_2

Apéndice C

C.1. Análisis de Elemento Finito con ANSYS Workbench

En este apéndice se presenta el análisis de elemento finito con ANSYS Workbench de las dos soluciones óptimas obtenidas. Con fines computacionales se ha sustituido los motores, los reductores y las chumaceras por la barra fija del robot paralelo de cinco eslabones. Las condiciones de frontera para este análisis están dadas por las restricciones de posición dadas por el ensamblado, el cuál es importado de CATIA en formato IGS, y la barra fija se establece dentro de ANSYS con el comando *Fixed Support*. Estas restricciones de posición en el proceso de ensamblado son: coincidence (la alineación en un mismo eje de dos piezas), offset (la distancia paralela entre dos piezas), contact (el contacto que existe entre dos caras paralelas de dos piezas ensambladas) y el ángulo(el ángulo que existe entre dos caras paralelas de dos piezas por ser ensambladas).

C.1.1. Solución óptima A

En la Fig.C.1 se muestra el mallado del diseño óptimo A. El Número de nodos y elementos han sido generados automáticamente por el programa. Los materiales asignados a cada pieza han sido seleccionados de las mismas librerias de materiales de ANSYS. En el análisis modal se han calculado los 20 primeros modos de vibración tal y como se observa en la Fig.C.2. De acuerdo a los modos de vibración diferentes partes estructurales soportan un mayor esfuerzo estructural como se puede observar entre las Figs.C.3-C.9. En las primeras tres frecuencias de vibración (ver Figs.C.3-C.5) las mayores deformaciones ocurren en los eslabones rígidos. Mientras que a partir de la cuarta frecuencia, las deformaciones en los eslabones no actuados son transmitidos a los eslabones rígidos en las frecuencias de 17.56 Hz y 33.028 Hz (Figs.C.6-C.7) y conforme la frecuencia se incrementa las mayores deformaciones quedan en los eslabones no actuados, los cuales son más largos y delgados en el diseño como se puede observar en las Figs.C.8-C.9.

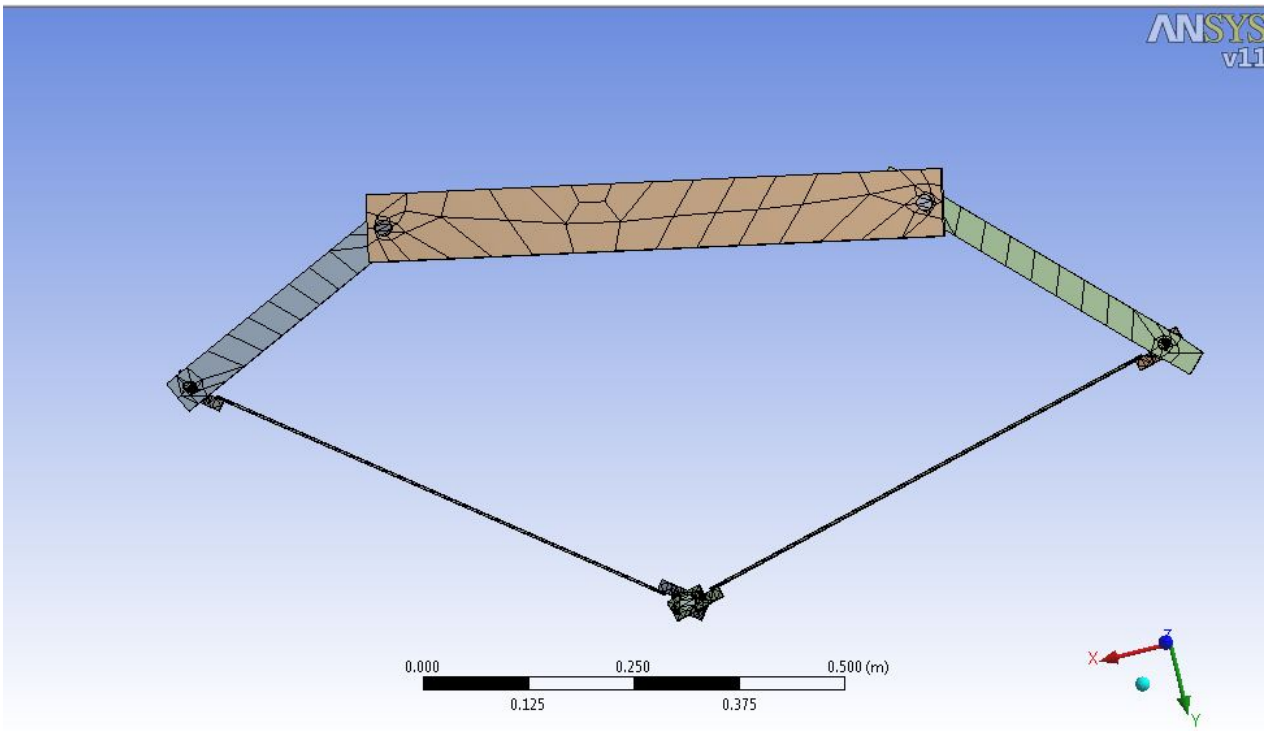


Figura C.1: Mallado, 14444 Nodos, 6366 Elementos

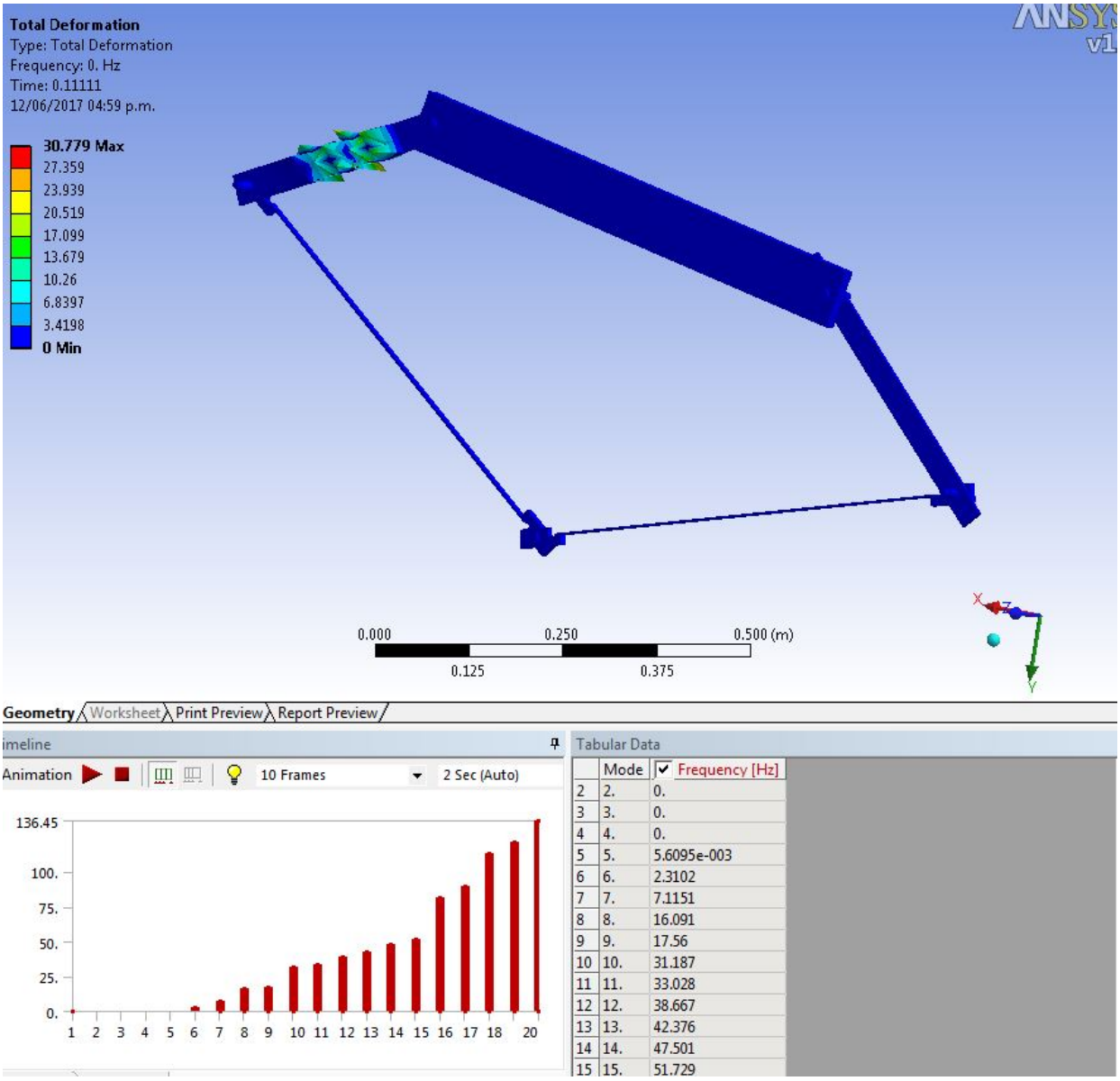


Figura C.2: Modos de vibración

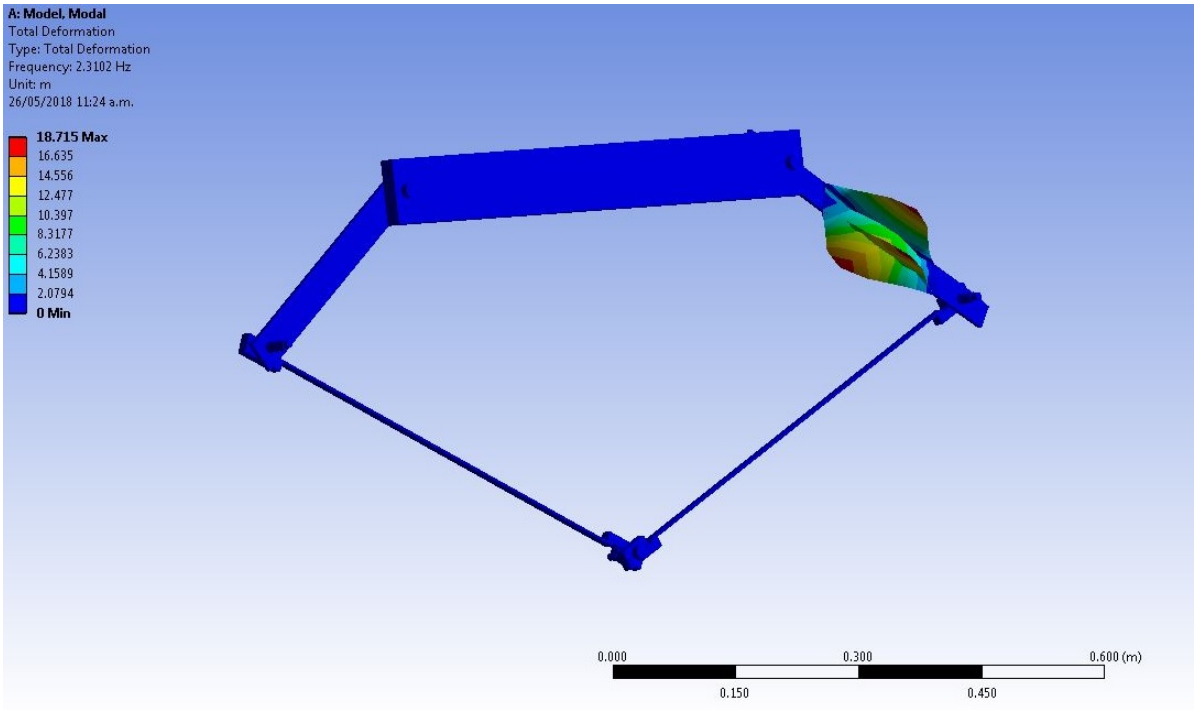


Figura C.3: Frecuencia 2.3102 Hz

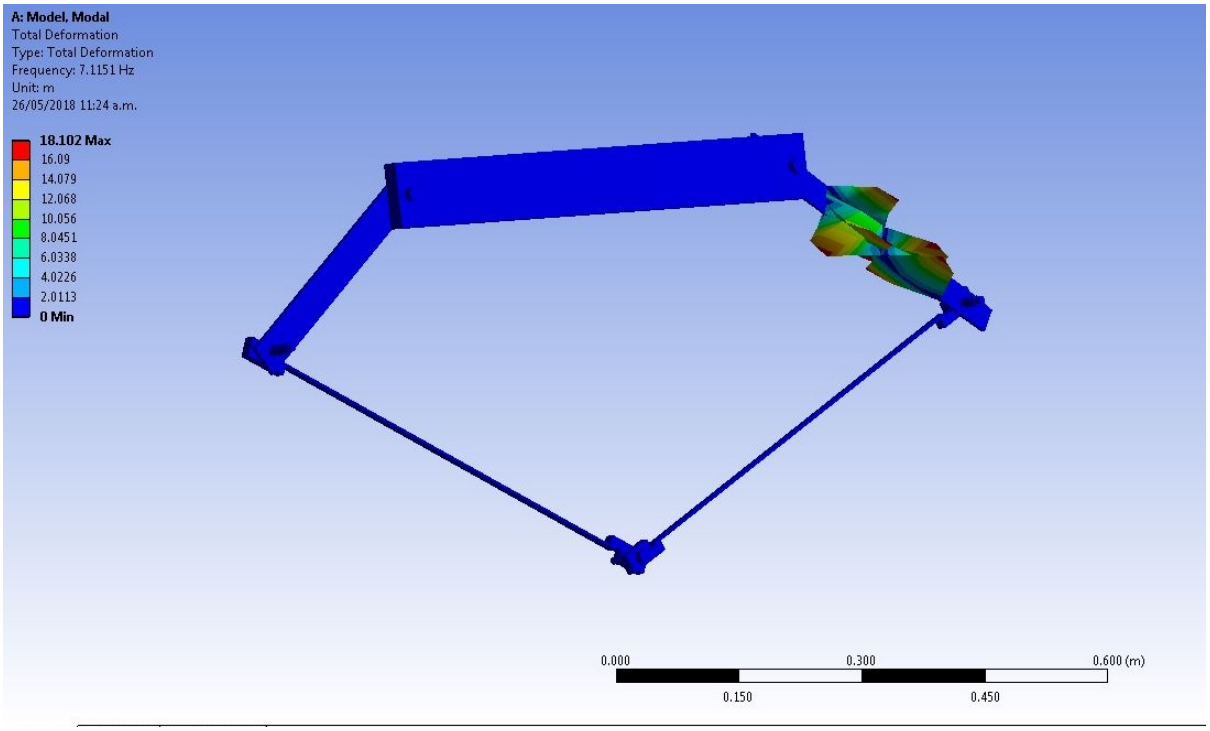


Figura C.4: Frecuencia 7.1151 Hz

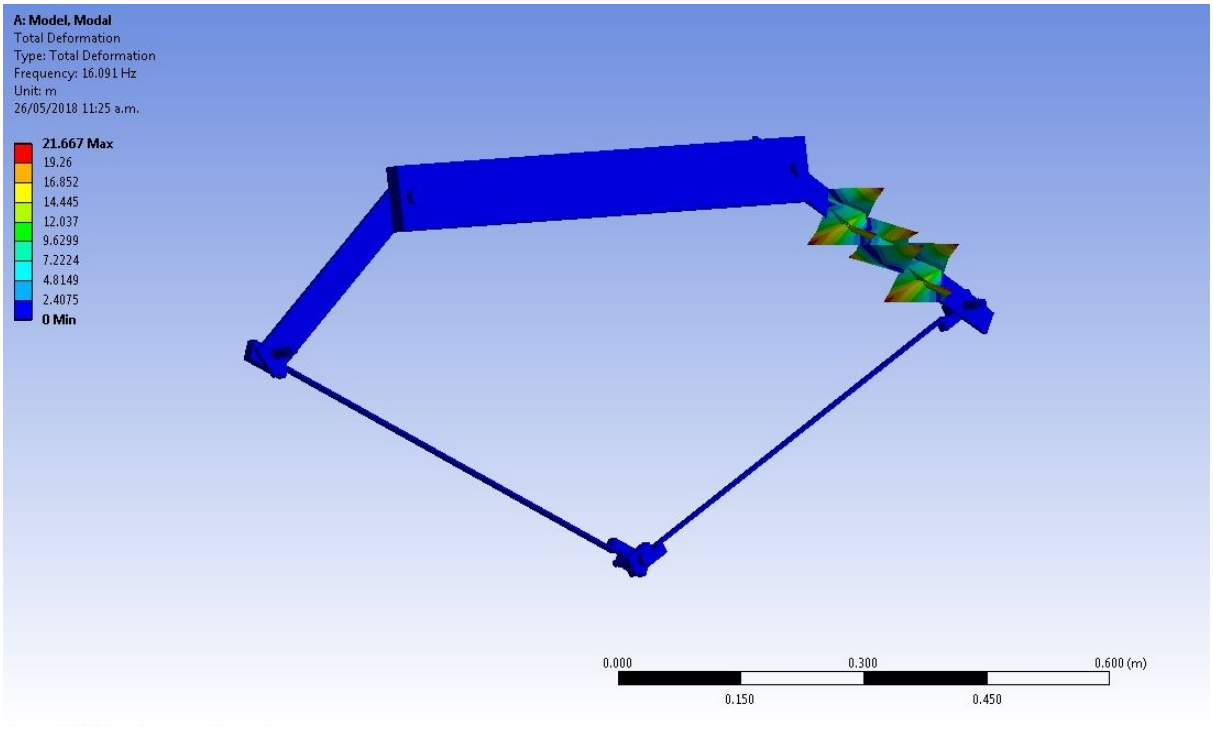


Figura C.5: Frecuencia 16.091 Hz

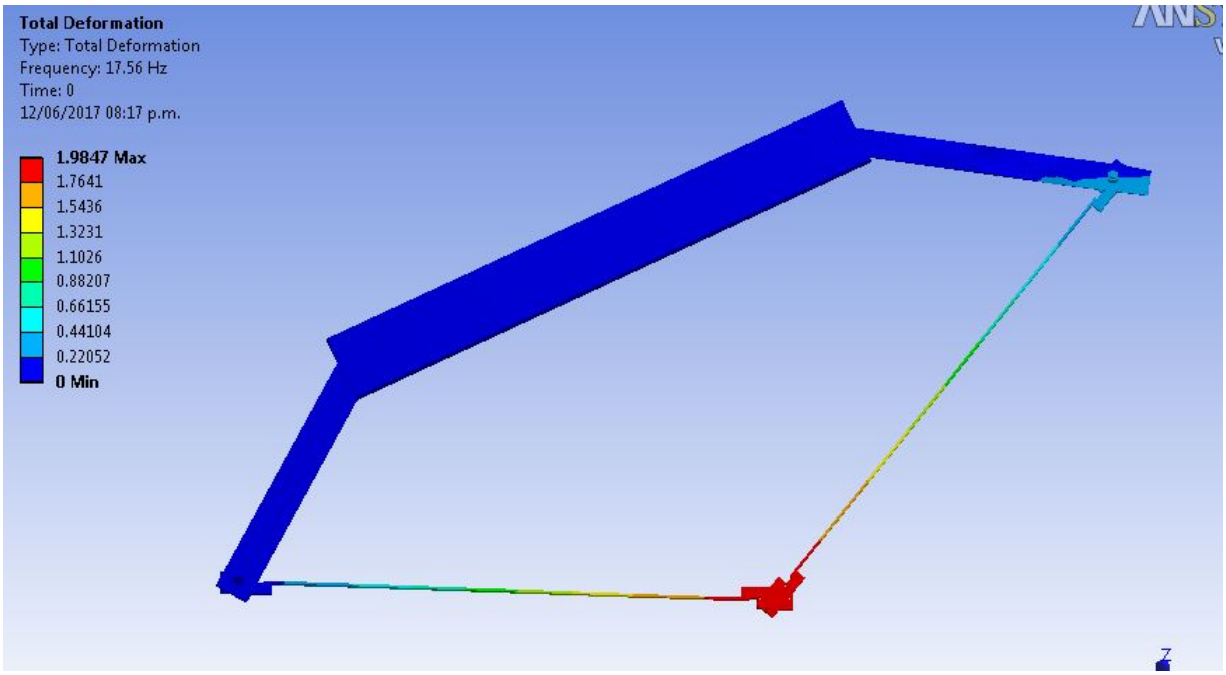


Figura C.6: Frecuencia 17.56 Hz

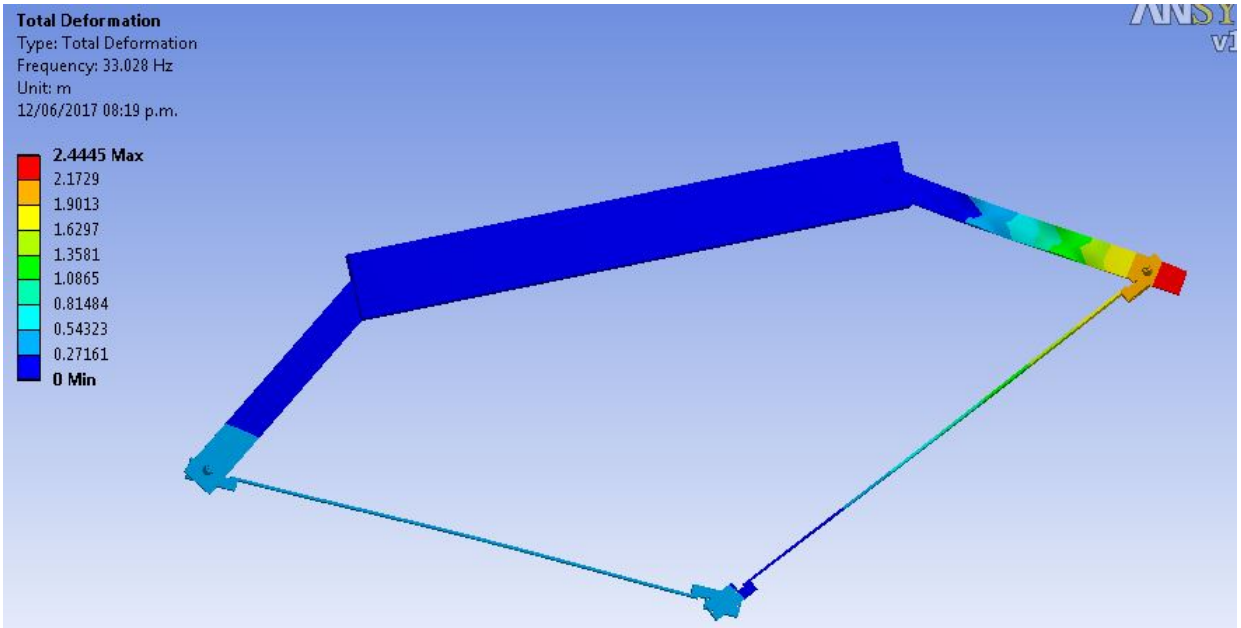


Figura C.7: Frecuencia 33.028 Hz

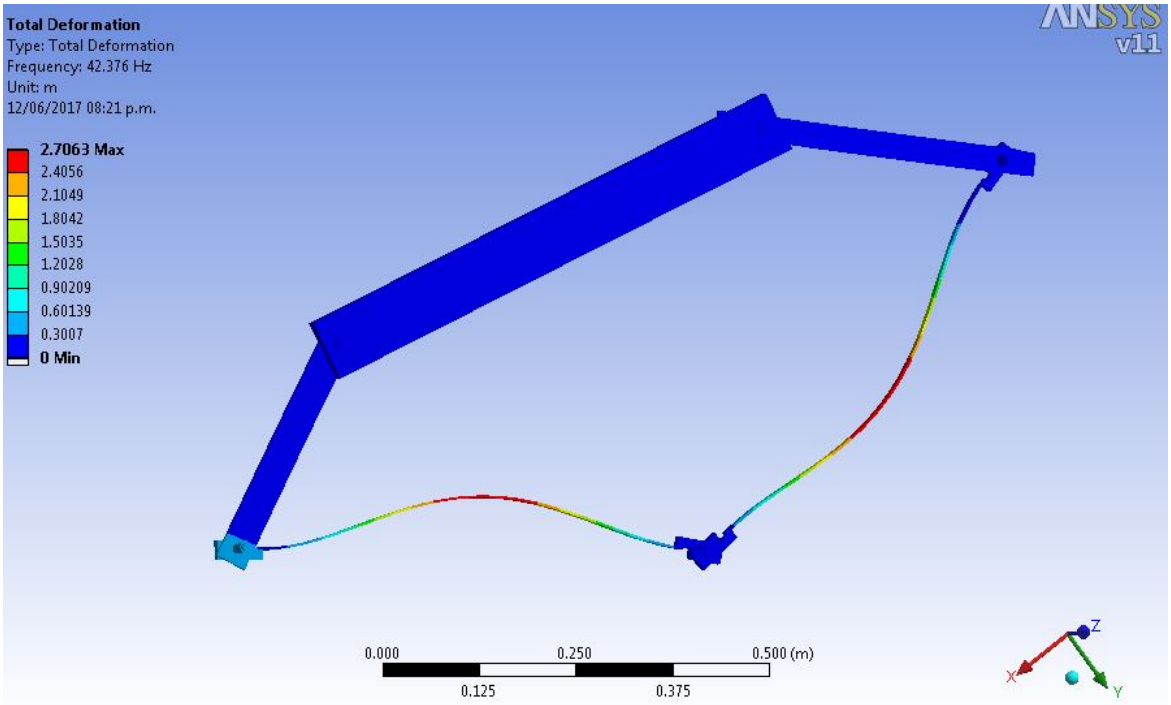


Figura C.8: Frecuencia 42.376 Hz

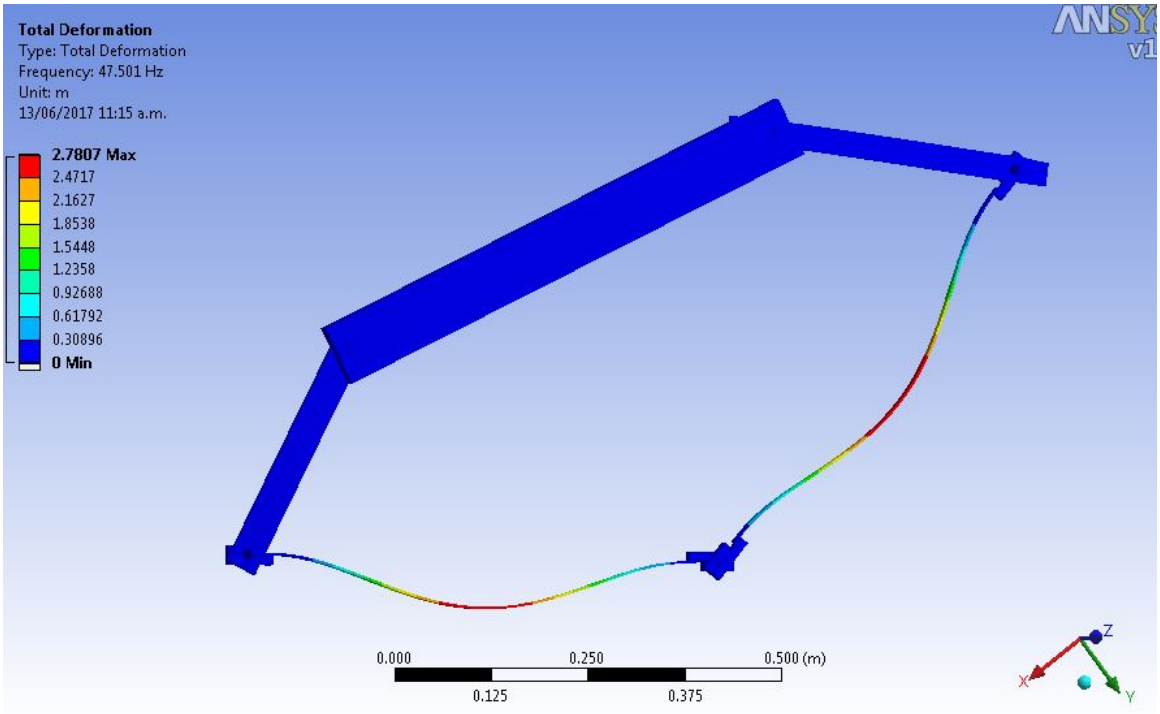


Figura C.9: Frecuencia 47.501 Hz

C.1.2. Solución óptima B

El mallado de la solución óptima B se muestra en la Fig.C.10. El análisis modal ha sido calculado para los primeros 20 modos de vibración como se muestra en la Fig.C.11. A diferencia del caso anterior los mayores esfuerzos se concentran en los eslabones no actuados a distintas frecuencias como se puede observar en las Figs.(C.10-C.14). Esto se debe a que los eslabones actuados son más cortos, anchos y de mayor espesor que los eslabones obtenidos en la solución A. Además los eslabones no actuados en la solución óptima B son más largos que los obtenidos en la solución óptima A. En este caso los resultados obtenidos sugieren que la rigidez modal es cercana a cero.

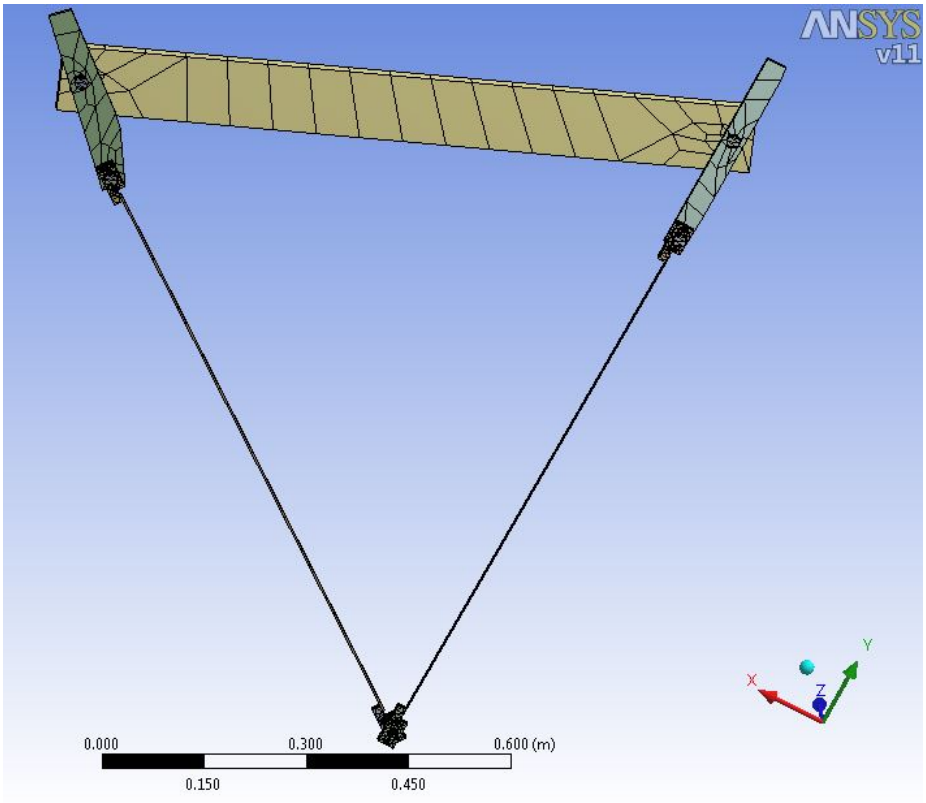


Figura C.10: Mallado, 12279 Nodos, 5042 Elementos

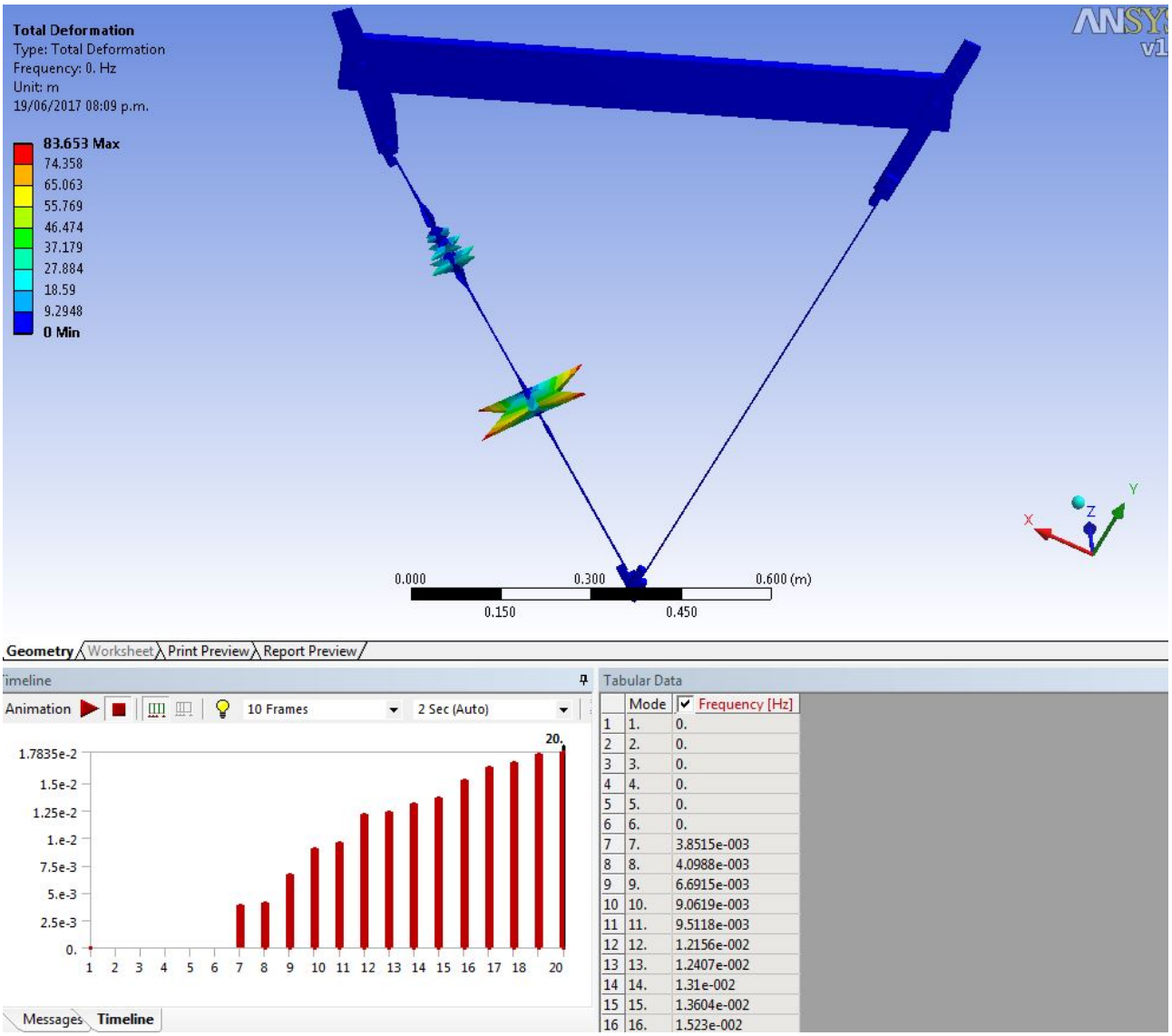


Figura C.11: Modos de vibración

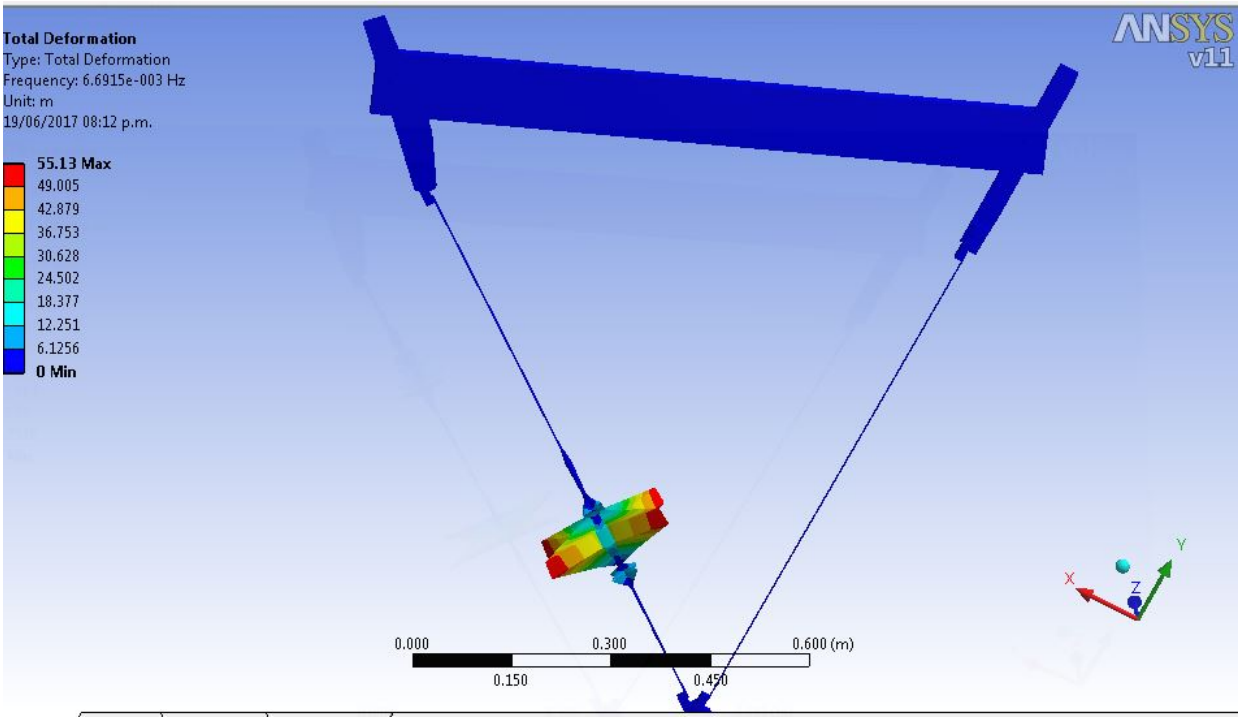


Figura C.12: Noveno modo de acuerdo a la Fig.C.8

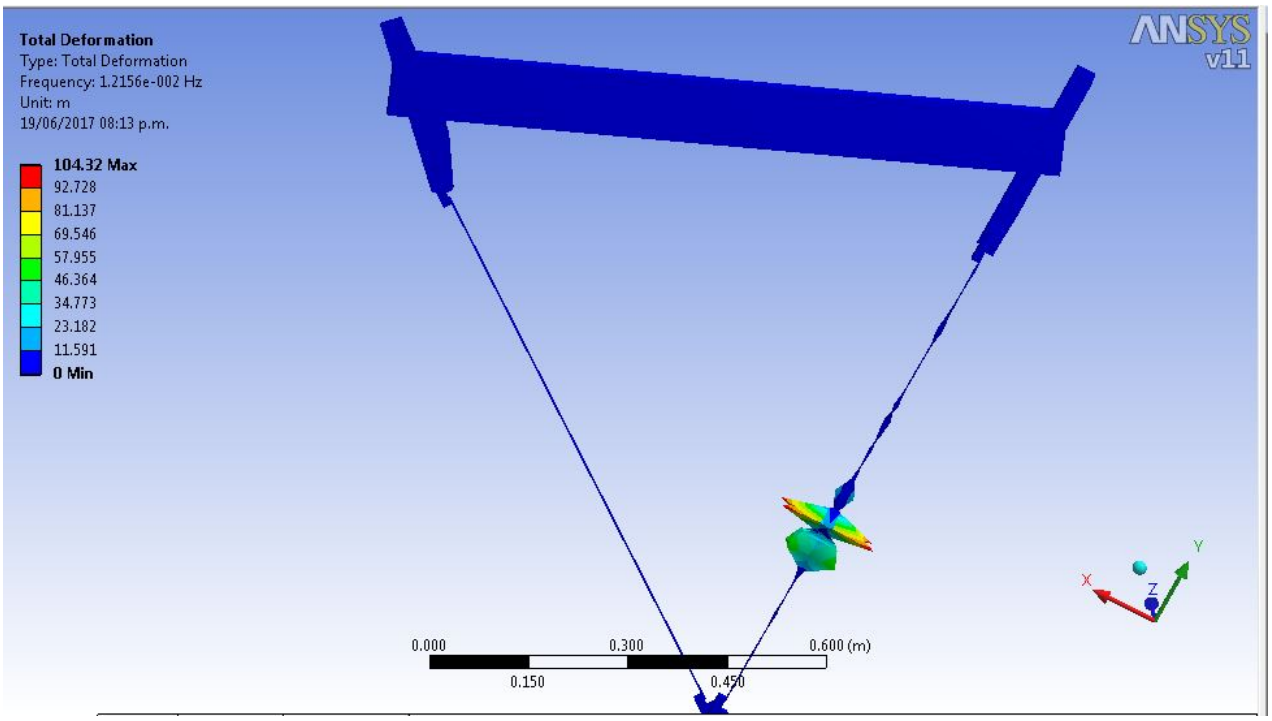


Figura C.13: Doceavo modo de acuerdo a la Fig.C.8

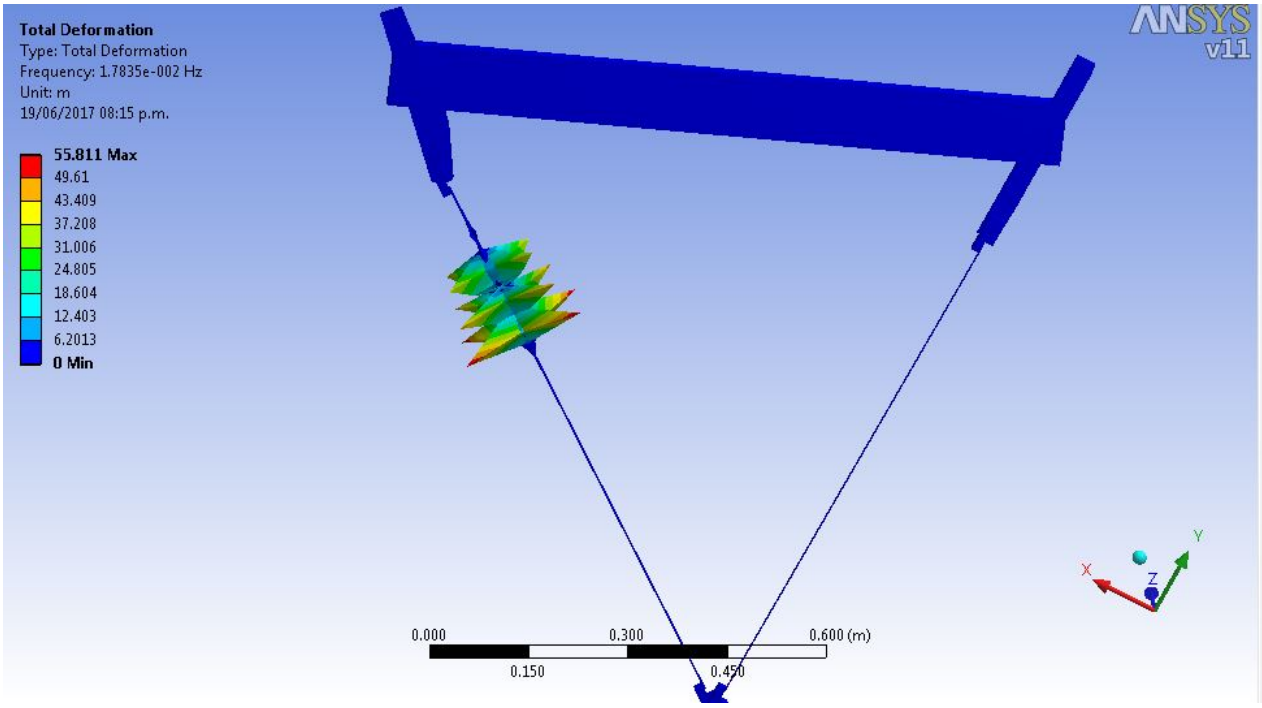


Figura C.14: Veinteavo modo de acuerdo a la Fig. C.8

Apéndice D

D.1. Artículos de Revista

2017 Héctor Cervantes-Culebro, Carlos A. Cruz-Villar,
María-Guadalupe Martinez Peñaloza, Efrén Mezura Montes
Constraint-Handling Techniques for the Concurrent Design of a Five-Bar Parallel Robot
IEEE Access, 5(1):23010–23021, 2017

2017 Héctor Cervantes-Culebro, Carlos A. Cruz-Villar,
Concurrent Design of a 2 dof Five-Bar Parallel Robot for High-Speed Tasks with rigid and flexible links
Information Technology and Control
En Revisión

2016 Héctor Cervantes-Culebro, Carlos A. Cruz-Villar,
Distributed model and experimentalvalidation of a four-bar mechanism with a flexible coupler link
Journal of Vibration Engineering and Technologies
En Revisión

D.2. Artículos de Congreso

2015 Héctor Cervantes-Culebro,
Carlos A. Cruz-Villar,
Concurrent Design of a Four-Bar Mechanism with a Flexible Link
Proceedings of the ASME 2015 International Mechanical Engineering Congress and Exposition
Houston, Texas