



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Coordinación de Movimiento con No Colisión  
para Sistemas Multi-agente**

Tesis que presenta:  
**M. en C. Jesús Santiaguillo Salinas**

Para obtener el grado de:  
**Doctor en Ciencias**

En la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

Director de la Tesis:  
**Dr. Eduardo Aranda Bricaire**



# Agradecimientos

**A Dios y a la Virgen de Guadalupe:** *Por permitirme realizar mis estudios de doctorado en el CINVESTAV, con lo que se logra otro sueño más en mi vida. Agradezco por todo lo bueno que me han dado, por estar bien y tener una buena salud. Por la protección y cuidado que me brindan y darme las fuerzas y capacidades necesarias para enfrentar todos los retos de la vida y salir adelante de las adversidades que se presenten.*

**A mis padres Jesús y Minerba:** *Por confiar en mí y contar siempre con su apoyo y comprensión. Gracias por darme siempre lo mejor de ustedes y preocuparse por mí, por ver que este bien y no me falte nada. Por todos los esfuerzos y sacrificios que hacen para que pueda salir adelante. Espero seguir dando lo mejor y hacer que se sientan orgullosos.*

**A mi familia, mi esposa Graciela y mi hijo Jesús:** *Por ser la razón que me motiva a salir adelante y por hacerme una mejor persona. Por su amor, apoyo, comprensión y confianza. Espero darles lo mejor de mí y ser un buen esposo y padre. Gracias por todo, los quiero y los amo.*

**Al Dr. Eduardo Aranda:** *Por volverme a dar la oportunidad de trabajar con él y seguir confiando en mí para el desarrollo de este proyecto de tesis doctoral. Por sus consejos, su apoyo y sus críticas para lograr la culminación de este trabajo.*

**Al Dr. Cesar Cruz:** *Por darme la oportunidad de poder realizar una estancia corta en el CICESE y prestarnos su plataforma experimental para poder realizar pruebas en tiempo real de algunas estrategias de control diseñadas en este trabajo.*

**A los miembros del jurado:** *Por sus valiosos comentarios y aportaciones a este trabajo de tesis.*

**A los doctores de la sección de mecatrónica:** *Por confiar en mí y darme la oportunidad de llevar a cabo mis estudios de doctorado en la sección de mecatrónica. Por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo.*

**A mis compañeros del CINVESTAV:** *Por los buenos momentos que pasamos juntos y por las experiencias vividas durante estos años. Gracias por brindarme su amistad y por aprender cosas valiosas de ustedes.*

**Al CONACYT:** *Por su apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado a través de la beca número 243226 con número de registro 368365.*



# Resumen

El presente trabajo se enfoca al diseño de estrategias de control descentralizadas para lograr la coordinación de movimiento en los sistemas multi-agentes. Los sistemas multi-agente estudiados en este trabajo están compuestos por robots móviles terrestres o por robots móviles aéreos, particularmente, robots móviles de tracción diferencial y helicópteros de 4 rotores.

Los principales problemas a tratar para el caso de robots móviles terrestres son el problema de confinamiento y la evasión de colisiones. El problema de confinamiento consiste en que un grupo de agentes llamado líderes, realice el seguimiento de una trayectoria preestablecida logrando una formación deseada, mientras que otro grupo de agentes llamado seguidores, converge al área delimitada por los líderes. Las formaciones deseadas pueden ser estáticas o variantes en el tiempo. Se presentan casos particulares donde la interacción entre los líderes se representa por gráficas de formación de cadena abierta con líder y centrada en el líder, llegando a una generalización donde se consideran gráficas de formación arbitrarias. Se estudia la evasión de colisiones entre los agentes dentro del problema de formación, avance en formación y confinamiento. Para lograr la evasión de colisiones se utilizan campos vectoriales repulsivos del tipo foco inestable.

Para el caso de robots móviles aéreos, los problemas a tratar son el seguimiento de trayectorias y el vuelo en formación. Se considera un helicóptero de 4 rotores comercial AR.Drone 2.0, fabricado por la empresa francesa Parrot. Se proponen 3 estrategias de control para el seguimiento de trayectorias. La primera consiste en un control tipo PD utilizando un modelo simple del AR.Drone obtenido de aproximaciones de primer orden de los modelos dinámico y cinemático de un helicóptero de 4 rotores convencional. La segunda, es una estrategia de control diseñada con la técnica de backstepping utilizando un modelo completo del AR.Drone, obtenido a partir del modelo dinámico de un helicóptero de 4 rotores convencional y del modelado de la dinámica interna del AR.Drone. Se realiza una aproximación de primer orden del modelo completo del AR.Drone considerando una altura y un ángulo de guiñada constantes. La tercera estrategia es una variante de la segunda, considerando ahora una altura y un ángulo de guiñada variables, por lo que la técnica de backstepping se extiende para lidiar con sistemas variantes en el tiempo. Ya que experimentalmente, las mediciones de las velocidades longitudinales y rotacionales del AR.Drone presentan ruidos y en algunas ocasiones son erróneas, en las estrategias de control diseñadas por backstepping, se emplean observadores de estados para estimar dichas velocidades. Para el control de vuelo en formación se consideran helicópteros de 4 rotores convencionales utilizando una gráfica de formación centrada en el líder. La formación es variante en el tiempo, con lo que se logra el vuelo en formación con orientación al ángulo de guiñada del líder.



# Abstract

This work is focused on the design of control strategies for the motion coordination in multi-agent systems. The multi-agent systems studied in this work are composed of ground mobile robot or aerial mobile robots. In particular, differential-drive mobile robots and quadrotor helicopters.

The main problems to be addressed in the case of ground mobile robots are the containment problem and the collision avoidance. The containment problem consist in that a group of agents called leaders, track a predetermined trajectory by performing a desired formation, while another group of agents called followers, converges to the area delimited by the leaders during the tracking. The desired formations can be static or time-varying. Particular cases are presented where the interactions between leaders are representing by open chain with leader and leader-centered formation graphs, reaching a generalization where arbitrary formation graphs are considered. Collision avoidance between agents is studied within the formation, formation tracking and containment problem. In order to avoid collision, repulsive vector fields of the unstable focus type are used.

In the case of aerial mobile robots, the problems to be addressed are the trajectory tracking and formation flight. It is considered a commercial quadrotor helicopter AR.Drone 2.0, manufactured by the French company Parrot. Three control strategies for trajectory tracking are proposed. The first consist of a PD-type control using a simple AR.Drone model obtained from first order approximations of the dynamical and kinematic model of a conventional quadrotor helicopter. The second is a control strategy designed with backstepping technique using a completed AR.Drone model obtained from the dynamical model of a conventional quadrotor helicopter and the modelling of the internal dynamics of the AR.Drone. A first order approximation of the completed AR.Drone model is performed considering constant height and yaw angle. The third strategy is a variant of the second, considering now a variable height and yaw angle, so the backstepping technique extends to deal with time-varying systems. Since experimentally, the longitudinal and rotational velocities of the Ar.Drone present noises and sometime are erroneous, state observers are used in the control strategies designed by backstepping to estimate these velocities. For the formation flight control, conventional quadrotor helicopter are considered using a leader-centered formation graph to represent the interactions between helicopters. The desired formation is time-varying, so the formation flight is achieved with orientation to the yaw angle of the leader.



# Contenido

<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas multi-agente . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Justificación . . . . .	6
1.5. Aportaciones . . . . .	7
1.6. Organización de la tesis . . . . .	8
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo cinemático de robots móviles de tracción diferencial . . . . .	9
2.2. Modelo dinámico del helicóptero de 4 rotores AR.Drone 2.0 . . . . .	10
2.2.1. Modelo dinámico de un helicóptero de 4 rotores convencional . . . . .	10
2.2.2. Modelo simple del AR.Drone 2.0 . . . . .	12
2.2.3. Modelo completo del AR.Drone 2.0 . . . . .	12
2.3. Teoría algebraica de grafos . . . . .	13
2.4. Misceláneos matemáticos . . . . .	15
<b>3. Estrategias de control para robots móviles de tracción diferencial</b>	<b>17</b>
3.1. Problema de confinamiento con seguimiento en formación estática . . . . .	18
3.2. Problema de confinamiento con seguimiento en formación variante en el tiempo . . . . .	22
<b>4. Evasión de colisiones para robots móviles de tracción diferencial</b>	<b>33</b>
4.1. Formación con evasión de colisiones . . . . .	34
4.2. Seguimiento en formación variante en el tiempo con evasión de colisiones . . . . .	36
4.3. Confinamiento con seguimiento en formación variante en el tiempo con evasión de colisiones . . . . .	46
4.4. Evasión de colisiones en forma grupal sin perder la formación . . . . .	51

<b>5. Estrategias de control para helicópteros de 4 rotores</b>	<b>57</b>
5.1. Control de seguimiento de trayectorias . . . . .	57
5.2. Control por backstepping para el seguimiento de trayectorias utilizando observadores de estado . . . . .	61
5.3. Control de vuelo en formación orientado al ángulo de guiñada del líder	74
<b>6. Experimentación</b>	<b>85</b>
6.1. Plataforma experimental . . . . .	85
6.1.1. Sistema de visión - Optitrack . . . . .	85
6.1.2. Robots móviles terrestres - AmigoBot, Khepera III . . . . .	85
6.1.3. Robots móviles aéreos - AR.Drone 2.0 . . . . .	87
6.1.4. Integración de la plataforma . . . . .	88
6.2. Experimentos realizados . . . . .	88
6.2.1. Confinamiento con seguimiento en formación estática . . . . .	88
6.2.2. Confinamiento con seguimiento en formación variante en el tiempo	90
6.2.3. Formación con evasión de colisiones . . . . .	91
6.2.4. Seguimiento de trayectorias con un AR.Drone 2.0 . . . . .	96
6.2.5. Vuelo en formación para el caso particular del AR.Drone 2.0. .	103
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>109</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	109
7.2. Trabajo Futuro . . . . .	110
<b>Bibliografía</b>	<b>112</b>
<b>A. Artículos Publicados</b>	<b>119</b>
A.1. Artículos de revistas de prestigio internacional, con arbitraje estricto	119
A.2. Artículos de revistas especializadas, con arbitraje . . . . .	119
A.3. Artículos en memorias de congresos internacionales, con arbitraje . .	120
A.4. Artículos en memorias de congresos locales, con arbitraje . . . . .	121
A.5. Capítulos de libros especializados . . . . .	122

# Lista de figuras

2.1. Modelo Cinemático de Robots Móviles de Tracción Diferencial. . . . .	9
2.2. Esquema del helicóptero de 4 rotores. . . . .	11
2.3. Gráfica directa centrada en el líder. . . . .	14
2.4. Gráfica directa de cadena abierta con líder. . . . .	14
3.1. Gráfica de formación. . . . .	21
3.2. Movimiento en el plano de los agentes. . . . .	22
3.3. Errores de los agentes del sistema. . . . .	23
3.4. Señales de control de los agentes del sistema. . . . .	23
3.5. Gráfica de formación para la simulación. . . . .	25
3.6. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	26
3.7. Errores de los agentes del sistema. . . . .	27
3.8. Señales de control de los agentes del sistema. . . . .	27
3.9. Gráfica de formación para la simulación. . . . .	29
3.10. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	30
3.11. Errores de los agentes del sistema. . . . .	30
3.12. Señales de control de los agentes del sistema. . . . .	31
4.1. Plano de fase del campo vectorial repulsivo $\beta_{ij}$ . . . . .	34
4.2. Gráfica de formación para la simulación. . . . .	36
4.3. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	37
4.4. Distancias entre los agentes. . . . .	37
4.5. Errores de los agentes del sistema. . . . .	38
4.6. Señales de control de los agentes del sistema. . . . .	38
4.7. Gráfica de Formación para la simulación. . . . .	44
4.8. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	45
4.9. Errores de los agentes del sistema. . . . .	45
4.10. Distancias entre los agentes del sistema. . . . .	46
4.11. Gráfica de formación para la simulación. . . . .	48
4.12. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	49
4.13. Errores de los agentes del sistema. . . . .	50
4.14. Controles de los agentes del sistema. . . . .	50
4.15. Distancias entre los agentes del sistema. . . . .	51

4.16. Movimiento en el plano de los agentes. . . . .	55
4.17. Errores de posición de los agentes. . . . .	56
4.18. Distancias entre los agentes y el obstáculo. . . . .	56
5.1. Movimientos del AR.Drone en el espacio. . . . .	60
5.2. Errores del AR.Drone. . . . .	61
5.3. Movimientos del AR.Drone en el espacio. . . . .	70
5.4. Errores del AR.Drone. . . . .	70
5.5. Movimientos del AR.Drone en el espacio. . . . .	75
5.6. Trayectoria del ángulo de guiñada del AR.Drone 2.0 . . . . .	75
5.7. Errores del AR.Drone. . . . .	76
5.8. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	81
5.9. Formación de los agentes durante la simulación. . . . .	82
5.10. Errores de los agentes del sistema. . . . .	83
6.1. Cámaras OptiTrack modelo Flex 13. . . . .	85
6.2. Robot móvil modelo AmigoBot. . . . .	86
6.3. Robot móvil modelo Khepera III. . . . .	86
6.4. Helicóptero de cuatro rotores modelo AR.Drone 2.0. . . . .	87
6.5. Plataforma experimental. . . . .	88
6.6. Gráfica de formación para el experimento. . . . .	89
6.7. Movimiento en el plano de los agentes. . . . .	89
6.8. Errores de los agentes del sistema. . . . .	90
6.9. Señales de control de los agentes del sistema. . . . .	90
6.10. Gráfica de formación para el experimento. . . . .	91
6.11. Trayectoria de los agentes en el plano. . . . .	92
6.12. Errores de los agentes del sistema. . . . .	92
6.13. Señales de control. . . . .	93
6.14. Gráfica de formación para el experimento. . . . .	93
6.15. Movimiento de los agentes en el plano. . . . .	94
6.16. Errores de los agentes del sistema. . . . .	95
6.17. Distancias entre los agentes. . . . .	96
6.18. Entradas de control. . . . .	97
6.19. Movimientos del AR.Drone en el espacio. . . . .	98
6.20. Errores del AR.Drone. . . . .	98
6.21. Movimiento en el espacio del AR.Drone 2.0 . . . . .	99
6.22. Errores del AR.Drone 2.0 . . . . .	100
6.23. Movimiento en el espacio del AR.Drone 2.0 . . . . .	100
6.24. Errores del AR.Drone 2.0 . . . . .	101
6.25. Movimiento del AR.Drone en el espacio tridimensional. . . . .	102
6.26. Trayectoria del ángulo de guiñada del AR.Drone 2.0 . . . . .	102
6.27. Errores del AR.Drone 2.0 . . . . .	103
6.28. Trayectorias de los agentes en el plano. . . . .	106
6.29. Errores de posición de los agentes. . . . .	106

---

6.30. Errores de orientación de los agentes. . . . .	107
--	-----

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se da una introducción a los sistemas multi-agente, se explica lo que son y como están conformados, se mencionan sus aplicaciones potenciales y las principales áreas de investigación. Se presentan algunos trabajos relacionados con el problema de confinamiento y la evasión de obstáculos para sistemas multi-agente conformados por robots móviles terrestres. También, algunos trabajos relacionados con el control de helicópteros de 4 rotores y en particular, del Ar.Drone 2.0, así como también algunos trabajos relacionados a los sistemas multi-agente conformados por helicópteros de 4 rotores. Se plantean los objetivos de este trabajo, se da la justificación y se presentan los respectivos aportes. Finalmente, se muestra la organización de la tesis.

### 1.1. Sistemas multi-agente

Un agente es un ente que tiene la capacidad de percibir el ambiente en el que se desempeña mediante sensores y tiene la facultad de interactuar con el mismo, realizando una acción o produciendo un efecto a través de actuadores. Dependiendo del contexto, un agente puede ser una persona, un proceso, un robot móvil, etc. Puede ser completamente o al menos parcialmente autónomo, con la posibilidad de comunicarse con otros agentes.

Un sistema multi-agente consiste de un conjunto de varios agentes que interactúan, cooperan, aprenden y se coordinan entre si, con la finalidad de realizar tareas complejas que resultan difíciles o tal vez imposibles de resolver por agentes individuales. El estudio de los sistemas multi-agente ha recibido gran interés, ya que con estos sistemas se tiene mayor tolerancia a fallas y se logra mayor eficiencia en comparación con agentes que trabajan de forma individual [65]. Además, construir y usar varios agentes simples resulta más sencillo, económico y flexible [12].

Las aplicaciones potenciales de los sistemas multi-agente incluyen combate, vigilancia, sistemas de reconocimiento, misiones de búsqueda y rescate, manejo de materiales peligrosos, transporte de carga, coordinación de movimiento entre muchas otras [4, 12]. En la coordinación de movimiento, la tarea a realizar es la navegación de forma estratégica de los agentes, donde la idea principal es mantener a cada agente

en el campo de visión de algún otro agente vecino, guardando una posición relativa respecto a él. Entre algunas de las principales áreas de investigación de los sistemas multi-agente dentro de la coordinación de movimiento se encuentran el control de consenso, formación, avance en formación ó marcha, alineación axial, asignación de roles y tareas [65], así como el problema de confinamiento [66]. Otra área de investigación que ha tomado mucho interés es la evasión de colisiones, ya que los agentes corren el riesgo de colisionar ya sea entre ellos o con algún obstáculo al tratar de alcanzar su posición deseada.

Un sistema multi-agente puede ser homogéneo o heterogéneo. Los sistemas multi-agentes homogéneos están formados por agentes que tienen capacidades idénticas, mientras que en los heterogéneos al menos un agente presenta capacidades distintas a los demás agentes. Los trabajos sobre sistemas multi-agentes están desarrollados para robots móviles que pueden ser vehículos terrestres no tripulados (UGV), tales como robots omnidireccionales, unicyclos ó de tracción diferencial y tipo carro, vehículos aéreos no tripulados (UAV), como aviones y helicópteros, y vehículos marinos no tripulados (UMV), como robots tipo barco y submarinos. La mayoría de los trabajos dedicados a los sistemas multi-agente están enfocados al uso de UGV's, principalmente a robots móviles de tracción diferencial. En años recientes, los investigadores han puesto especial atención a los sistemas multi-agente formados por UAV's, en particular, en helicópteros de 4 rotores.

En el presente trabajo de tesis se estudiará la coordinación de movimiento para sistemas multi-agente, donde los agentes que forman parte del sistema son robots móviles terrestres o aéreos, en particular, robots de tracción diferencial y helicópteros de 4 rotores.

## 1.2. Estado del arte

En años recientes, el estudio de la coordinación de movimiento en los sistemas multi-agente ha recibido gran interés por sus extensas aplicaciones. Dos de las principales áreas de investigación en la coordinación de movimiento son el control de formación, donde el objetivo es que un conjunto de agentes realice un patrón geométrico deseado definido por vectores de posición relativa, y el control de avance en formación, donde el objetivo es realizar el seguimiento de una trayectoria preestablecida mientras los agentes mantienen una formación deseada. En particular, uno de los problemas en la coordinación de movimiento que ha llamado la atención de los investigadores es el problema de confinamiento. Este problema consiste en que un grupo de agentes móviles denominados seguidores, converja hacia el interior de un patrón geométrico predeterminado, formado por otro grupo de agentes móviles llamados líderes [41].

De acuerdo a [11, 26, 41], el problema de confinamiento se puede dividir en 2 casos:

- Confinamiento estático. Una vez alcanzado el patrón geométrico deseado, los agentes líderes permanecen estáticos (sin movimiento) y los agentes seguidores

se encuentran dentro del área sin movimiento determinada por los líderes. Este caso es útil cuando un grupo de agentes aseguran una zona para remover material peligroso y no deben salir de dicha zona, ya que se pueden contaminar sus alrededores [41].

- Confinamiento dinámico. Los agentes líderes logran un patrón geométrico deseado al mismo tiempo que siguen una trayectoria predeterminada y los agentes seguidores convergen al área variante en el tiempo determinada por los líderes. Un ejemplo de esta situación podría ser la navegación de un grupo de agentes, cuando sólo un subconjunto de ellos (líderes), tiene la capacidad de detectar obstáculos, mientras que el resto (seguidores), no tiene tal capacidad. Para los seguidores, una manera de navegar de forma segura es mantenerse dentro del área variante en el tiempo formada por los líderes [48].

En [9, 18, 74] se estudia el caso de confinamiento estático. [9, 74] consideran líderes estáticos desde el inicio, es decir, los agentes líderes son colocados en posiciones iniciales de tal manera que dichas posiciones formen un patrón geométrico deseado; mientras que en [18] se considera el control de formación en los líderes; es decir, a partir de cualquier posición inicial los líderes alcanzan un patrón geométrico y una vez logrado, permanecen estáticos. El confinamiento dinámico se presenta en [41, 48, 71]. En estos trabajos, a cada líder se le asigna una trayectoria por separado, pero de tal manera que formen un patrón geométrico al cual deben converger los seguidores. En [11] se estudian ambos casos, confinamiento estático y dinámico. En [15, 22], se presenta el problema de confinamiento dinámico tomando en cuenta un comportamiento tipo swarm<sup>1</sup> en los agentes, utilizando un enfoque de funciones potenciales para dicho comportamiento. En los trabajos [22, 21] se aborda el problema de confinamiento considerando retardos de tiempo usando gráficas de comunicación directa. Finalmente, [49] presenta el problema de confinamiento tanto en caso continuo como en discreto.

Tanto en el caso de avance en formación como en el de confinamiento dinámico, las formaciones pueden permanecer constantes o variar con respecto al tiempo. El control de formación variante en el tiempo es un problema complejo dentro de la coordinación de movimiento y ha sido estudiado en los trabajos [6, 32, 60, 67]. Una formación variante en el tiempo está compuesta de una formación estática predefinida, la cuál es transformada por una matriz de rotación que depende de la orientación de un específico robot líder. Esta formación variante en el tiempo permite a un grupo de agentes comportarse como un cuerpo rígido, el cuál puede ser trasladado y rotado en el plano.

Un aspecto presente en todas las áreas dentro de la coordinación de movimiento y que en muchos trabajos no se toma en consideración es la posible colisión entre los agentes al intentar alcanzar una posición deseada en una formación o durante el seguimiento de una trayectoria. En la literatura, se pueden encontrar diversos métodos para predecir y evitar colisiones. En [14] se presenta un enfoque para predecir colisiones basado en el cono de colisión, y se adoptan tres estrategias para la evasión de

---

<sup>1</sup>Preferimos utilizar el anglicismo swarm, ya que hay varias acepciones en español, e.g. enjambre, manada, parvada, etc.

colisiones: cambios de las velocidades, cambios de dirección y cambios en velocidades y dirección. En [64] se presenta un mecanismo de evasión de colisiones bajo un modo de control central, que actúa como un coordinador que trabaja de forma independiente y con un nivel superior a las estrategias para la coordinación, y resuelve los posibles riesgos de colisión entre los agentes (tipo control de tráfico). En [19, 20, 16] se utilizan funciones de navegación y funciones potenciales artificiales (atractivas y repulsivas) para evitar colisiones entre los agentes. Por último, en [37, 38, 50, 73] se emplean campos vectoriales discontinuos para el control de formación evitando colisiones. La mayoría de los trabajos reportados en la literatura presentan el problema de colisión para el caso de dos agentes puntuales o representados como objetos esféricos.

En años recientes, los vehículos aéreos no tripulados (UAVs) se han vuelto muy populares, tanto en aplicaciones civiles como en investigación, ya que son aeronaves que no tienen piloto a bordo y pueden realizar vuelo autónomo a partir de trayectorias pre-programadas. Esto les permite realizar tareas de exploración, reconocimiento y transporte de objetos que representen un riesgo elevado para los tripulantes. Entre los diversos tipos de UAVs, el helicóptero de 4 rotores ha ganado mayor importancia, principalmente dentro de la comunidad científica. Este vehículo aéreo tiene una configuración en particular, que consta de 4 rotores colocados en las puntas de una estructura en forma de cruz.

El gran interés en la utilización de los helicópteros de 4 rotores viene del hecho de que son fáciles de controlar comparados con otros vehículos aéreos y por sus capacidades de realizar maniobras agresivas Mellinger et al. (2012), navegar de forma autónoma en ambientes estructurados y no estructurados [2, 5], realizar tareas de forma cooperativa para la manipulación y transporte de objetos [56]. Las principales ventajas de los helicópteros de 4 rotores son el despegue y aterrizaje en forma vertical y poder realizar vuelo estacionario (hover), por lo que se pueden utilizar en áreas muy reducidas. La gran desventaja de este tipo de UAV es su tiempo de vuelo, por lo que no pueden realizar vuelos de gran duración.

En la literatura se pueden encontrar algunos trabajos que abordan el diseño y la validación experimental de estrategias de control para helicópteros de 4 rotores. [31] muestra un control de estabilización de orientación para lograr un vuelo estacionario. [13] propone un control basado en el análisis de Lyapunov para realizar despegue, vuelo estacionario y aterrizaje de manera autónoma. [53] presenta un control no lineal que asegura el seguimiento de trayectorias y [23] un sistema de navegación implementado en ROS.

En [58] se muestra una revisión de algunas técnicas de control y aplicaciones de los sistemas multi-agente usando helicópteros de 4 rotores. Entre las técnicas de control se mencionan el control de formación, la planeación de trayectorias y la evasión de colisiones; las aplicaciones incluidas son la navegación en interiores y el guiado visual. [3] presenta un control de planeación de trayectorias aplicado a operaciones de búsqueda y rescate. Algunos trabajos relacionados con el control de formación con helicópteros de 4 rotores se pueden encontrar en la literatura. Por ejemplo, [61] y [62] presentan el diseño de un control robusto. [30] propone leyes de control basadas en funciones potenciales saturaciones anidadas, mientras que [34] desarrolla un control no

lineal basado en saturaciones separadas. [1] diseña un control por modos deslizantes y [27] presenta un control de formación basado en una linealización por retroalimentación de entrada-salida. Finalmente, [55] y [54] estudian el problema de generación de trayectorias. [55] proporciona un controlador que permite maniobras agresivas y [54] presenta la evasión de colisiones para un grupo heterogéneo de helicópteros de 4 rotores.

El AR.Drone 2.0 es un helicóptero de 4 rotores comercial fabricado por la empresa francesa Parrot. El AR.Drone ha sido elegido como plataforma experimental por muchos investigadores debido a su bajo costo y al gran número de sensores con los que cuenta. En la literatura es posible encontrar algunos trabajos referentes al modelado y control del AR.Drone. [72] presenta un esquema líder-seguidor, donde el líder es un AR.Drone controlado desde una aplicación para iPad realizando vuelo de forma autónoma utilizando la odometría visual con la que cuenta. En [40] se calcula la posición del AR.Drone con respecto a un punto utilizando marcadores para la localización empleando ROS. [43] y [42] presentan el control de un AR.Drone modificado, al cual se le agregó un microcontrolador con el que se realiza el sensado y el cálculo del control desde la aeronave, realizando vuelo autónomo sin necesidad de controlarlo remotamente. En [24], se identifica el modelo del AR.Drone de forma experimental y posteriormente se hace pasivo mediante una ganancia no lineal. En [35] se presenta un proceso para la identificación del modelo del AR.Drone, además, se propone un control de tipo path following para controlar su posición. Aunque el AR.Drone es de arquitectura cerrada, en [7] se habla sobre su arquitectura interna. Sin embargo, el valor de los parámetros utilizados está restringido sólo para los desarrolladores.

Es común el uso de filtros y observadores, debido al ruido presente en las mediciones a partir de sensores y que en algunos casos no es posible conocer algún estado del sistema. En [57], se presenta una linealización por retroalimentación y un observador lineal para el control de un helicóptero de 4 rotores. En [70], se utilizan observadores no lineales aumentados para estimar las velocidades e incertidumbres de un helicóptero de 4 rotores cuando se conoce su posición. Para el caso de un AR.Drone, se puede encontrar en [69] el uso de un filtro de Kalman para estimar los estados, a partir de la combinación de datos inerciales y visuales.

### 1.3. Objetivos

A continuación se presenta el objetivo general de este trabajo:

Desarrollar estrategias de control descentralizadas para lograr la coordinación de movimiento evitando colisiones en sistemas multi-agente. En particular, dichas estrategias estarán enfocadas a resolver una versión variante en el tiempo del problema de confinamiento para robots de tracción diferencial y vuelo en formación variante en el tiempo para helicópteros de 4 rotores. Dichas estrategias de control serán validadas a través de simulaciones numéricas y de forma experimental.

Para lograr el objetivo general, se han planteado los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar estrategias de control para lograr el confinamiento en sistemas multi-agente
- Incorporar vectores de posición variantes en el tiempo para el control de confinamiento
- Estudiar y diseñar estrategias de no colisión empleando campos vectoriales discontinuos
- Implementar estrategias de no colisión para el caso de formación y avance en formación
- Modificar las estrategias de control de confinamiento incorporando las estrategias de no colisión
- Diseñar estrategias de control para la coordinación de movimiento para helicópteros de 4 rotores
- Verificar los resultados teóricos con simulaciones numéricas
- Integración de la plataforma experimental
- Validar las estrategias de control en la plataforma experimental

#### 1.4. Justificación

La justificación y originalidad de esta propuesta de tesis esta basada en lo siguiente:

- En los trabajos existentes que estudian el confinamiento dinámico, se consideran trayectorias individuales para cada líder, definiendo cada trayectoria de tal manera que, durante el seguimiento, las posiciones de los líderes formen un patrón geométrico. Sin embargo, no existen trabajos donde se considere el control de marcha en los líderes, es decir, el avance en formación, lo cuál estaría más apegado a una aplicación real.
- Continuando con el punto anterior, no existen trabajos reportados en la literatura que reporten un control de marcha con formaciones variantes en el tiempo. En nuestro caso, pretendemos que la formación realizada por los líderes se oriente de acuerdo al ángulo de marcha de un líder principal.
- Se pretende generalizar los resultados obtenidos para cualquier tipo de gráfica de formación para los líderes y no sólo para gráficas directas ya sea de cadena abierta con líder o centrada en el líder, que ya han sido reportados en [33, 60, 67] i.e. configuración tipo trailer y orientación al ángulo de marcha del líder.

- Existen pocos trabajos enfocados al estudio del problema de confinamiento que consideren el problema de colisión entre los agentes seguidores al encontrarse dentro del área determinada por los líderes. Además, en la mayoría de los trabajos sobre el problema de colisión, cuando se presentan equilibrios no deseados, no se realiza un análisis formal que garantice que no se cae dentro de esos equilibrios. A partir de esto, se plantea el uso de campos vectoriales discontinuos para la evasión de colisiones entre los agentes seguidores, con el fin de evitar equilibrios no deseados.
- En los trabajos reportados en la literatura sobre el problema de colisión sólo se aborda el caso de agentes modelados por un integrador. En este trabajo se abordará el caso de agentes modelados con dos integradores.
- A diferencia de los trabajos encontrados en la literatura donde se toman en cuenta sistemas multi-agente homogéneos, es decir, agentes idénticos o muy similares, en este trabajo de tesis se considerará un sistema multi-agente heterogéneo, es decir, agentes con capacidades distintas. Utilizaremos un sistema multi-agente conformado por agentes que serán vehículos terrestres y vehículos aéreos.

## 1.5. Aportaciones

Las aportaciones de este trabajo son las siguientes:

- Implementación del problema de confinamiento con líderes dinámicos usando avance en formación, tanto para formaciones estáticas como variantes en el tiempo, evitando colisiones entre los agentes.
- Estudio del caso general de gráficas de formación empleadas en el problema de confinamiento para modelar la topología de interacción entre los agentes. En este caso, la interacción entre los agentes es representada por gráficas de formación arbitrarias, sin considerar alguna en particular.
- Formaciones variantes en el tiempo que permiten el seguimiento de trayectorias con formaciones orientadas al ángulo de dirección de un robot líder, así como también, permitiendo cambios en las dimensiones físicas de dichas formaciones. Esto a través de transformaciones usando matrices de rotación y escalamiento.
- Diseño de estrategias de evasión de colisiones basadas en campos vectoriales repulsivos. Estas estrategias se diseñan primeramente para el control de formación, extendiéndolas al control de avance en formación y confinamiento. Cabe mencionar que para la evasión de colisiones, las estrategias de control de coordinación de movimiento se modifican, usando una versión acotada de dichas estrategias basadas en la utilización de la función tangente hiperbólico, agregando un campo vectorial repulsivo.
- Diseño de una estrategia de control para el avance en formación con evasión de obstáculos. En este caso se emplea una gráfica de formación centrada en un líder,

donde el líder es un agente virtual y se ubica en el centroide de la formación, permitiendo la evasión de obstáculos sin perder la formación deseada, emulando el comportamiento de un cuerpo rígido.

- Obtención de un modelo dinámico completo para el AR.Drone 2.0 a partir del modelo dinámico de un helicóptero de 4 rotores convencional y del modelado de la dinámica interna del AR.Drone 2.0.
- Diseño de estrategias de control para el seguimiento de trayectorias para un AR.Drone 2.0 utilizando la técnica de Backstepping, empleando observadores de estado para estimar las velocidades longitudinales y angulares del AR.Drone.
- Diseño de estrategias de control para lograr el vuelo en formación variante en el tiempo para sistemas multi-agente conformados por helicópteros de 4 rotores. Las formaciones variantes en el tiempo permiten el seguimiento de trayectorias con formaciones orientadas al ángulo de guiñada de un robot líder.

## 1.6. Organización de la tesis

En el capítulo 2 se presentan el modelo cinemático de robots móviles de tracción diferencial y el modelo dinámico completo para el helicóptero de 4 rotores AR.Drone 2.0 de parrot. Se introducen la teoría algebraica de grafos y se dan algunas preliminares matemáticas necesarias para el diseño de las estrategias de control, así como también se presenta la notación utilizada a través de este trabajo.

Las estrategias de control para la coordinación de movimiento para sistemas multi-agente con robots móviles de tracción diferencial se muestran en el capítulo 3. En particular, para el caso del problema de confinamiento, tanto para formaciones estáticas, como para formaciones dinámicas.

En el capítulo 4 se plantea el uso de estrategias de control para la coordinación de movimiento utilizando campos vectoriales discontinuos para lograr la evasión de colisiones. Se presentan estrategias de no colisión para el control de formación, avance en formación variante en el tiempo y confinamiento con avance en formación variante en el tiempo. También se presenta el caso de evasión de colisiones de manera grupal.

Las estrategias de control para helicópteros de 4 rotores son diseñadas en el capítulo 5. Se muestran estrategias para el seguimiento de trayectorias y el uso de observadores de estados para estimar las velocidad del AR.Drone 2.0. También se muestra el control de vuelo en formación orientado al ángulo de guiñada de un robot líder.

En el capítulo 6 se explica la plataforma experimental utilizada y se presentan los resultados experimentales obtenidos en dicha plataforma.

Por último, en el capítulo 7 se muestran algunas conclusiones y el trabajo futuro a realizar.

## Capítulo 2

# Marco teórico

Este capítulo presenta el modelo cinemático de robots móviles de tracción diferencial, un modelo simple para el Ar.Drone 2.0 y un modelo completo para el mismo, el cuál es obtenido a partir del modelo dinámico de un helicóptero de 4 rotores convencional y del modelado de la dinámica interna del AR.Drone. Se muestran conceptos básicos sobre la teoría algebraica de gráficos, como las gráficas de formación y el Laplaciano. Finalmente, se presentan algunos conceptos matemáticos que son necesarios para desarrollar la teoría de este trabajo.

### 2.1. Modelo cinemático de robots móviles de tracción diferencial

Sea  $N = \{R_1, \dots, R_n\}$  un conjunto de robots móviles de tracción diferencial que se desplazan en el plano con coordenadas  $\xi_i = [x_i, y_i]^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Cada robot tiene un modelo cinemático de acuerdo a la Figura 2.1 dado por

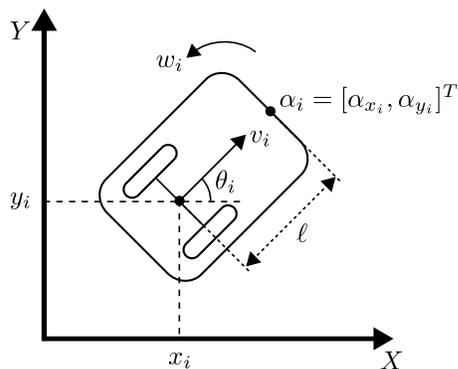


Figura 2.1: Modelo Cinemático de Robots Móviles de Tracción Diferencial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

con  $v_i$  la velocidad longitudinal del punto medio del eje de las ruedas del  $i$ -ésimo robot,  $w_i$  la velocidad angular y  $\theta_i$  el ángulo de orientación con respecto al eje  $X$ . Es bien conocido que sistemas como el (2.1), no se pueden estabilizar con leyes de control continuas e invariantes en el tiempo [8]. Además, si la posición  $\xi_i$  es tomada como salida del sistema (2.1), la llamada matriz de desacoplamiento es singular. Por esta razón, con el fin de evitar singularidades en la ley de control, es común estudiar la cinemática de un punto  $\alpha_i$  fuera del eje de las ruedas [36]. Las coordenadas del punto  $\alpha_i$  están dadas por

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_{xi} \\ \alpha_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + \ell \cos \theta_i \\ y_i + \ell \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde  $\ell$  es la distancia de  $\xi_i$  al punto  $\alpha_i$ . La cinemática del punto  $\alpha_i$  está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{xi} \\ \dot{\alpha}_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\ell \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \ell \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i(\theta_i) \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde  $A_i(\theta_i)$  es la matriz de desacoplamiento para cada robot  $R_i$ . Como se puede observar, la matriz de desacoplamiento es no singular ya que  $\det(A_i(\theta_i)) = \ell \neq 0$ .

## 2.2. Modelo dinámico del helicóptero de 4 rotores AR.Drone 2.0

### 2.2.1. Modelo dinámico de un helicóptero de 4 rotores convencional

La cinemática de un cuerpo rígido que se mueve en el espacio muestra la relación entre las velocidades de traslación y rotación entre el marco del cuerpo y el marco inercial.

De la Figura 2.2, la posición y rotación del helicóptero de 4 rotores con respecto al marco inercial están dados por  $\xi = [x, y, z]^T$  y  $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$ , respectivamente. Las velocidades lineales del helicóptero en el marco del cuerpo están dadas por  $V = [u, v, w]^T$  y  $\Omega = [p, q, r]^T$  representan las velocidades angulares. La relación entre las velocidades en el marco inercial y las velocidades lineales en el marco del cuerpo está dada por

$$\dot{\xi} = R_b^e V \quad (2.4)$$

donde

$$R_b^e = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

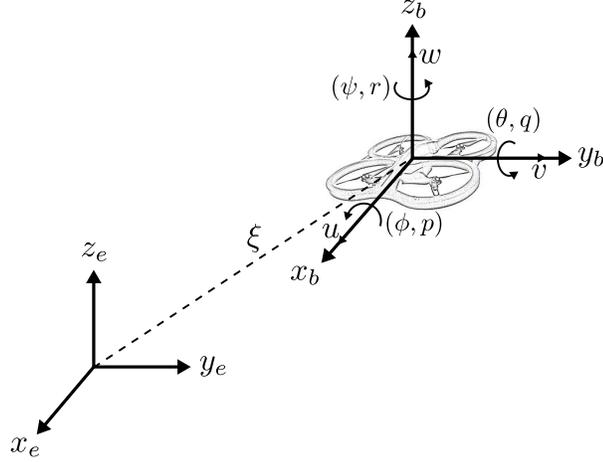


Figura 2.2: Esquema del helicóptero de 4 rotores.

con  $c\phi = \cos \phi$ ,  $s\phi = \sin \phi$ ,  $c\theta = \cos \theta$ ,  $s\theta = \sin \theta$ ,  $c\psi = \cos \psi$  y  $s\psi = \sin \psi$ . Las velocidades de los ángulos de orientación en el marco inercial y las velocidades angulares en el marco del cuerpo están relacionadas por

$$\Omega = W_\eta \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\eta} \quad (2.6)$$

Invirtiendo (2.6) obtenemos

$$\dot{\eta} = W_\eta^{-1} \Omega = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -\sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \Omega \quad (2.7)$$

La dinámica representa la evolución de un sistema sujeto a fuerzas y pares externos. Existen varios enfoques para obtener el modelo dinámico de un helicóptero de 4 rotores entre los que se encuentran el enfoque de Newton-Euler, Euler-Lagrange y el de los Cuaterniones. Utilizando el enfoque de Euler-Lagrange y basados en [29], el modelo dinámico del helicóptero de 4 rotores está dado por

$$m\ddot{\xi} = R_b^e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau} \quad (2.9)$$

con  $m$  la masa del helicóptero,  $g$  la constante de gravedad,  $F$  el empuje principal y  $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_\phi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\psi]^T$  torques auxiliares definidos por

$$\tilde{\tau} = \mathbb{J}^{-1} (\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}) \quad (2.10)$$

donde  $\mathbb{J}$  es la matriz de inercia,  $C(\eta, \dot{\eta})$  es el termino de Coriolis y  $\tau$  son los pares generados por los rotores del helicóptero.

### 2.2.2. Modelo simple del AR.Drone 2.0

El AR.Drone 2.0 recibe como entradas de control los ángulos de alabeo y cabeceo ( $\phi$  y  $\theta$ ), con lo que se logra el movimiento del AR.Drone en el plano  $XY$ , la velocidad  $w$  con lo que se logra el desplazamiento en el eje  $Z$  y la velocidad  $r$  con lo que se logra la rotación sobre el eje  $Z$  ( $\psi$ ). A partir de lo anterior, se propone el siguiente modelo obtenido de aproximaciones de primer orden de (2.4), (2.7) y (2.8)

$$\ddot{x} = g(\phi \sin \psi + \theta \cos \psi) \quad (2.11a)$$

$$\ddot{y} = g(-\phi \cos \psi + \theta \sin \psi) \quad (2.11b)$$

$$\dot{z} = w \quad (2.11c)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (2.11d)$$

### 2.2.3. Modelo completo del AR.Drone 2.0

El AR Drone 2.0 cuenta con un controlador interno que se encarga de posicionarlo en cualquier ángulo solicitado por el usuario. Para modelar la dinámica interna del AR.Drone se proponen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\ddot{z} = -a_1 \dot{z} + a_3 u_z \quad (2.12a)$$

$$\ddot{\phi} = -b_1 \dot{\phi} - b_2 \phi + b_3 u_\phi \quad (2.12b)$$

$$\ddot{\theta} = -c_1 \dot{\theta} - c_2 \theta + c_3 u_\theta \quad (2.12c)$$

$$\ddot{\psi} = -d_1 \dot{\psi} + d_3 u_\psi \quad (2.12d)$$

donde los parámetros  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $d_1$  y  $d_3$  se calculan a partir de un análisis experimental mediante mínimos cuadrados utilizando el software matemático MATLAB, por el cuál se obtuvieron 4 funciones de transferencia, las cuales relacionan las entradas de control del AR.Drone con las variables de estado  $z, \phi, \theta$ , y  $\psi$ , dadas por

$$\frac{Z(s)}{U_z(s)} = \frac{a_3}{s^2 + a_1 s} = \frac{3.384}{s^2 + 3.613s} \quad (2.13a)$$

$$\frac{\Phi(s)}{U_\phi(s)} = \frac{b_3}{s^2 + b_1 s + b_2} = \frac{-67.3}{s^2 + 6.542s + 25.5} \quad (2.13b)$$

$$\frac{\Theta(s)}{U_\theta(s)} = \frac{c_3}{s^2 + c_1 s + c_2} = \frac{60.4}{s^2 + 4.302s + 28.24} \quad (2.13c)$$

$$\frac{\Psi(s)}{U_\psi(s)} = \frac{d_3}{s^2 + d_1 s} = \frac{3.828}{s^2 + 4.225s} \quad (2.13d)$$

Ahora que hemos modelado el controlador interno del AR Drone 2.0, podemos tener un modelo completo a partir de las ecuaciones (2.8) y (2.12a)-(2.12d) dado por

$$\ddot{x} = (-a_1\dot{z} + a_3u_z + g) \left( \tan(\theta) \cos(\psi) + \frac{\tan(\phi)}{\cos(\theta)} \sin(\psi) \right) \quad (2.14a)$$

$$\ddot{y} = (-a_1\dot{z} + a_3u_z + g) \left( \tan(\theta) \sin(\psi) - \frac{\tan(\phi)}{\cos(\theta)} \cos(\psi) \right) \quad (2.14b)$$

$$\ddot{z} = -a_1\dot{z} + a_3u_z \quad (2.14c)$$

$$\ddot{\phi} = -b_1\dot{\phi} - b_2\phi + b_3u_\phi \quad (2.14d)$$

$$\ddot{\theta} = -c_1\dot{\theta} - c_2\theta + c_3u_\theta \quad (2.14e)$$

$$\ddot{\psi} = -d_1\dot{\psi} + d_3u_\psi \quad (2.14f)$$

donde  $u_z$ ,  $u_\phi$ ,  $u_\theta$  y  $u_\psi$  son las entradas de control del AR.Drone.

### 2.3. Teoría algebraica de gráfos

**Definición 2.1** (*Gráfica de Formación*). Sea  $N = \{R_1, \dots, R_n\}$  un conjunto de agentes móviles y  $N_i$  el subconjunto de agentes que tienen un flujo de información hacia el  $i$ -ésimo agente. Una gráfica de formación  $G = \{V, E, C\}$  está formada por

- Un conjunto de vértices  $V = \{R_1, \dots, R_n\}$  que corresponden a los  $n$  agentes del sistema.
- Un conjunto de aristas  $E = \{(R_j R_i) \in V \times V \mid R_j \in N_i\}$  con  $i \neq j$  donde cada arista representa un flujo de información que va del agente  $R_j$  al agente  $R_i$ .
- Un conjunto de etiquetas  $C = \{c_{ji} = R_i - R_j\}$  con  $(R_j R_i) \in E$ ,  $c_{ji} \in \mathbb{R}^n$  con  $n = 2$  para agentes terrestres y  $n = 3$  para agentes aéreos,  $\forall i \neq j, R_j \in N_i$ , es decir,  $c_{ji}$  es un vector que especifica la posición relativa deseada entre el agente  $R_j$  con respecto al agente  $R_i$ .

Una gráfica de formación bien definida debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Ser conexa.
- Si existen aristas  $R_j R_{m_1}, R_{m_1} R_{m_2}, \dots, R_{m_r} R_j \in E$ , entonces se debe satisfacer

$$c_{jm_1} + c_{m_1 m_2} + c_{m_2 m_3} + \dots + c_{m_r j} = 0$$

En particular, si  $c_{ji}, c_{ij} \in C$  con  $i \neq j$ , entonces  $c_{ji} = -c_{ij}$ .

Una gráfica de formación  $G$  en la cual el agente  $i$  interactúa sólo con el agente  $n$  que actúa como líder, responsable de guiar a los demás agentes del sistema, es llamada gráfica directa centrada en el líder (ver Figura 2.3). En este caso en particular,  $N_i = \{R_n\}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  y  $N_n = \emptyset$ .

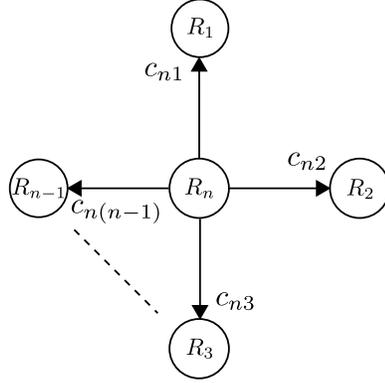


Figura 2.3: Gráfica directa centrada en el líder.

Una gráfica de formación  $G$  en la cual el agente  $i$  sólo interactúa con el agente  $i+1$  y el  $n$ -ésimo agente se desempeña como líder, se conoce como una gráfica directa de cadena abierta con líder (ver Figura 2.4). En este caso en particular,  $N_i = \{R_{i+1}\}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  y  $N_n = \emptyset$ .

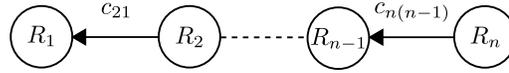


Figura 2.4: Gráfica directa de cadena abierta con líder.

**Definición 2.2** (Laplaciano). Dada una gráfica de formación  $G$ , el Laplaciano asociado con  $G$  está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \Delta - \mathcal{A}_d \quad (2.15)$$

donde  $\Delta$  es la matriz de grados definida como

$$\Delta = \text{diag} \{g_1, \dots, g_n\} \quad (2.16)$$

donde  $g_i$  es el número de aristas que se dirigen al vértice  $R_i$ , i.e.  $g_i = \text{card}(N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y  $\mathcal{A}_d$  es la matriz de adyacencia de  $G$  definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (R_j, R_i) \in E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.17)$$

donde  $R_i, R_j \in V$ .

**Definición 2.3** (*Caminos y Ciclos*). Dada una gráfica de formación  $G$ , existe un camino en dicha gráfica si entre los vértices  $R_i$  y  $R_j$  hay una secuencia de aristas  $R_i R_{m_1}, R_{m_1} R_{m_2}, \dots, R_{m_r} R_j$  con  $i \neq j$ . Llamamos ciclo a un camino que inicie y termine en el mismo vértice.

Para más detalles acerca de las gráficas de formación, el Laplaciano y sus propiedades, el lector es referido a [17, 25, 47].

## 2.4. Misceláneos matemáticos

**Definición 2.4** [39, 63] Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisface  $a_{ij} \leq 0$  con  $i \neq j$  y  $a_{ii} > 0$  para cada  $i$ . La matriz  $A$  es llamada una  $M$ -matriz si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes

- $A = \eta I - M$  para alguna matriz  $M$  no negativa y alguna  $\eta > \rho(M)$ , donde  $\rho(M)$  es el radio espectral de  $M$ .
- La parte real de cada eigenvalor de  $A$  es positiva.
- Todos los menores principales de  $A$  son positivos.
- $A^{-1}$  existe y  $A^{-1} \geq 0$ .

**Definición 2.5** [68] El casco convexo de un conjunto  $Z = \{z_1, \dots, z_p\} \subset \mathbb{R}^n$ , denotado por  $\text{co}(Z)$ , se define como

$$\text{co}(Z) = \left\{ \sum_{j=1}^p \mu_j z_j \mid \mu_j \in \mathbb{R}, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^p \mu_j = 1 \right\}$$

**Definición 2.6** Dado un punto  $z_q = [x, y]^T$  y un conjunto  $Z = \{z_1, \dots, z_p\}$ , la distancia entre  $z_q$  y  $\text{co}(Z)$  es definida por  $\text{dist}(z_q, \text{co}(Z)) = \inf(\text{dist}(z_q, z), z \in Z)$ .

**Definición 2.7** Dado un vector  $z = [z_1, \dots, z_p]^T$ , definimos

$$\tanh(z) = [\tanh(z_1), \dots, \tanh(z_p)]^T$$

.

**Definición 2.8** Dada una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  eigenvalores, entonces su radio espectral  $\rho(X)$  se define como  $\rho(X) = \text{máx}\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ .

**Proposición 2.1** Sea  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz triangular a bloques

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

con  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  y  $C \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ . Entonces, los eigenvalores de la matriz  $H$  son los eigenvalores de las submatrices  $A$  y  $C$

**Proposición 2.2** [28] *Considere el sistema dinámico  $\dot{x} = Ax$  con  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Hurwitz. Entonces el sistema normalizado  $\dot{x} = AD(x)x$  con  $D(x) = \text{diag} \{1/\|x_1\|, \dots, 1/\|x_n\|\}$  es estable con convergencia en tiempo finito.*

## Capítulo 3

# Estrategias de control para robots móviles de tracción diferencial

En este capítulo se aborda el diseño de estrategias de control para lograr el confinamiento con avance en formación para sistemas multi-agente con robots móviles de tracción diferencial, tanto para formaciones estáticas como para formaciones variantes en el tiempo. Se presentan casos particulares con gráficas de formación de cadena abierta con líder y centrada en el líder, mostrando una generalización para cualquier gráfica de formación arbitraria.

Antes de comenzar con el diseño de las estrategias de control, se presenta la notación utilizada en este capítulo.

Sea  $N = \{R_1, \dots, R_n\}$  un conjunto de agentes que se mueven en el plano con posiciones  $\alpha_i = [\alpha_{x_i}, \alpha_{y_i}]^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El conjunto  $N$ , está formado por dos subconjuntos disjuntos, de tal forma que  $N = N_F \cup N_L$ , donde  $N_F = \{R_1, \dots, R_{n_F}\}$ , con  $n_F$  agentes, es el subconjunto de agentes seguidores, con posiciones  $\alpha_F = [\alpha_1, \dots, \alpha_{n_F}]^T$  y  $N_L = \{R_{n_F+1}, \dots, R_n\}$ , con  $n_L$  agentes, es el subconjunto de agentes líderes con posiciones  $\alpha_L = [\alpha_{n_F+1}, \dots, \alpha_n]^T$ .

Dado un subconjunto de agentes líderes  $N_L$ , el agente  $R_n$  será el líder principal, encargado de seguir una trayectoria deseada de navegación; los  $n_L - 1$  agentes restantes serán líderes secundarios, encargados de realizar una formación deseada con respecto al líder principal.

Sea  $\mathcal{L}(G)$  el Laplaciano de una gráfica de formación  $G = \{V, E, C\}$ .  $\mathcal{L}(G)$  se particiona en bloques correspondientes a los subconjuntos de líderes y seguidores de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{FF} & \mathcal{L}_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & \mathcal{L}_{LL} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathcal{L}_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$  y  $\mathcal{L}_{FL} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_L}$  representan, respectivamente, el Laplaciano de una subgráfica de  $G$  donde sólo interactúan seguidores y donde interactúan seguidores y líderes, con los vectores  $c_{ji} = 0$ ;  $\mathcal{L}_{LL} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$  representa el Laplaciano de una subgráfica de  $G$  donde sólo interactúan líderes.

### 3.1. Problema de confinamiento con seguimiento en formación estática

Para esta sección se considerará una subgráfica donde sólo interactúan líderes dada por la gráfica de formación de cadena abierta con líder de la Figura 2.4 y se asumirá la siguiente

**Hipótesis 3.1** *Para cada agente seguidor, debe de existir una comunicación ya sea de forma directa o indirecta, con al menos un agente líder. Es decir, para todo  $R_j \in N_F$  existen aristas  $R_i R_{m_1}, R_{m_1} R_{m_2}, \dots, R_{m_r} R_j \in E$  con  $R_i \in N_L$ .*

Sea  $m(t) = [m_p(t), m_q(t)]^T$  una trayectoria de navegación preestablecida continuamente diferenciable. El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que se logre

- Seguimiento asintótico de la trayectoria por el agente líder principal, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$$

- Una formación deseada por parte de los agentes líderes secundarios con respecto al líder principal, i.e para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t) - c_{(i+1)i}) = 0$$

- Convergencia de los agentes seguidores al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_i(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0, \quad i = 1, \dots, n_F$$

Para el problema de confinamiento con avance en formación estática, proponemos una ley de control para los líderes y seguidores, basada en el algoritmo fundamental de consenso [65], definida por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m (\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)) \quad (3.1a)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f (\alpha_i - \alpha_{i+1} - c_{(i+1)i}) + \dot{m}(t)), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1 \quad (3.1b)$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix} = A_j^{-1}(\theta_j) (-k_c (\alpha_j - \alpha_j^*) + \dot{m}(t)), \quad j = 1, \dots, n_F \quad (3.1c)$$

con  $A_i^{-1}(\theta_i)$  la inversa de la matriz de desacoplamiento,  $m(t)$  la trayectoria de navegación,  $\dot{m}(t)$  la velocidad de navegación,  $c_{(i+1)i}$  el vector de posición relativa deseada entre los agentes líderes secundarios,  $k_m$ ,  $k_f$  y  $k_c$  las ganancias de control y  $\alpha_j^* = \frac{1}{g_j} \sum_{k \in N_j} \alpha_k$ ,  $j = 1, \dots, n_F$ . Como se puede observar, en la estrategia de control presentada, se realiza una prealimentación de la velocidad de marcha en los agentes.

**Teorema 3.1** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (3.1a)-(3.1c). Suponga que  $k_m, k_f, k_c > 0$  y que la subgráfica de los líderes es la gráfica de cadena abierta con líder de la Figura 2.4. Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(3.1a)-(3.1c)*

1. *El agente líder principal  $R_n$  converge a la trayectoria deseada de navegación, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$ , al mismo tiempo que los agentes líderes secundarios convergen a la formación deseada, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t) - c_{(i+1)i}) = 0$  para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$ .*
2. *Los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_j(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0$  para  $j = n_1, \dots, n_F$ .*

**Demostración.** El sistema en lazo cerrado (2.3)-(3.1a)-(3.1c) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_F \\ \dot{\alpha}_L \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & A_{LL} \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_F \\ c_L \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde  $\alpha_F = [\alpha_1, \dots, \alpha_{n_F}]^T$ ,  $\alpha_L = [\alpha_{n_F+1}, \dots, \alpha_n]^T$ ,  $\otimes$  denota el producto Kronecker,  $I_2$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ ,  $c_F = [\dot{m}(t), \dots, \dot{m}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_F}$ ,  $c_L = [k_f c_{(i+1)i} + \dot{m}(t), \dots, k_m m(t) + \dot{m}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_L}$  con  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$ ,  $A_{FF} = -k_c \Lambda \mathcal{L}_{FF}$ ,  $A_{FL} = -k_c \Lambda \mathcal{L}_{FL}$  y  $A_{LL} = -k_f \mathcal{L}_{LL} - k_m \Gamma$  con  $\Lambda = \text{diag} \left\{ \frac{1}{g_1}, \dots, \frac{1}{g_{n_F}} \right\}$ ,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

y  $\mathcal{L}_{LL}$  el Laplaciano de la gráfica de cadena abierta de los líderes dada por

$$\mathcal{L}_{LL} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

Definimos los errores del agente principal, los agentes líderes secundarios y los agentes seguidores como

$$\begin{aligned} e_n &= (\alpha_n - m(t)) \\ e_i &= (\alpha_i - \alpha_{(i+1)} - c_{(i+1)i}), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1 \\ e_i &= (\alpha_j - \alpha_j^*), \quad i = 1, \dots, n_F \end{aligned} \quad (3.3)$$

Reescribiendo (3.3) de forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} e_F \\ e_L \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{FF} & \mathcal{L}_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & P_{LL} \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{c}_F \\ \tilde{c}_L \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $\tilde{c}_F = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n_F}$ ,  $\tilde{c}_L = [c_{(i+1)i}, \dots, m(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_F}$  con  $i = n_F+1, \dots, n-1$  y  $P_{LL} = \mathcal{L}_{LL} + \Gamma$ .

La dinámica del error resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_F \\ \dot{e}_L \end{bmatrix} = (B \otimes I_2) \begin{bmatrix} e_F \\ e_L \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

con

$$B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & B_{LL} \end{bmatrix}$$

donde  $e_F = [e_1, \dots, e_{n_F}]^T$ ,  $e_L = [e_{n_F+1}, \dots, e_n]^T$ ,  $B_{FF} = A_{FF}$  y  $B_{FL}$  similar a  $A_{FL}$ , con la diferencia de que se reemplaza  $k_c$  por  $k_f$  en las columnas de los líderes secundarios y por  $k_m$  en la columna del líder principal y

$$B_{LL} = \begin{bmatrix} -k_f & k_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_f & k_f & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_f & k_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_m \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

Se puede ver que la velocidad de navegación no afecta a los errores del sistema. La matriz  $B$  es triangular superior por bloques y de acuerdo a la Proposición 2.1, sus eigenvalores coinciden con los eigenvalores de los bloques que se encuentran en la diagonal principal, en este caso  $B_{FF}$  y  $B_{LL}$ .

Dado que  $B_{FF} = -k_c \mathcal{L}_{FF}$ , los eigenvalores de  $B_{FF}$  serán los eigenvalores de  $\mathcal{L}_{FF}$  multiplicados por  $-k_c$ . Definiendo  $\eta = \max_{i=1, \dots, n_F} ((\mathcal{L}_{FF})_{ii})$  [39], podemos reescribir a  $\mathcal{L}_{FF}$  como

$$\mathcal{L}_{FF} = \eta I_{FF_{n_F \times n_F}} - M_{FF_{n_F \times n_F}}$$

donde  $M_{FF_{n_F \times n_F}}$  es una matriz no negativa y de acuerdo a la Hipótesis 3.1, se cumple que  $\rho(M_{FF_{n_F \times n_F}}) < \eta$ . Por lo tanto  $\mathcal{L}_{FF}$  es una  $M$ -matriz, la cual es no singular y todos sus eigenvalores tienen parte real positiva. A partir de lo anterior, se tiene que  $B_{FF}$  es una matriz definida negativa.

La matriz  $B_{LL}$  es triangular superior, por lo que sus eigenvalores coinciden con los elementos de la diagonal principal. Ya que todos los elementos de la diagonal principal de  $B_{LL}$  son negativos, entonces  $B_{LL}$  es una matriz definida negativa.

Por lo tanto, la matriz  $B$  tiene todos sus eigenvalores negativos y los errores del sistema convergen exponencialmente a cero.

Para el inciso 1. Despejando la posición de los agentes líderes  $\alpha_L(t)$  de la ecuación (3.4) tenemos

$$\alpha_L(t) = P_{LL}^{-1} e_L(t) + P_{LL}^{-1} \tilde{c}_L$$

Ya que  $e_L(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $\alpha_L(t) \rightarrow P_{LL}^{-1} \tilde{c}_L$ . Por lo que

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &\rightarrow \sum_{k=n_F+1}^{n-1} c_{(k+1)k} + m(t) \\ \alpha_n(t) &\rightarrow m(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

conforme  $t \rightarrow \infty$ , llegando al resultado deseado.

Para el inciso 2. Despejando la posición de los agentes seguidores  $\alpha_F(t)$  de la ecuación (3.4) tenemos

$$\alpha_F(t) = \mathcal{L}_{FF}^{-1} e_F(t) - \mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL} \alpha_L(t)$$

Ya que  $e_F(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $\alpha_F(t) \rightarrow -\mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL} \alpha_L(t)$ , con  $\alpha_L(t)$  definida en (3.6). Haciendo un análisis similar a [10] para las posiciones de los seguidores, vemos que  $\mathcal{L}_{FF}$  es una  $M$ -matriz, por lo que  $\mathcal{L}_{FF}^{-1}$  existe y  $\mathcal{L}_{FF}^{-1} \geq 0$  y dado que  $\mathcal{L}_{FL} \leq 0$  entonces  $-\mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL} \geq 0$ . Ya que la sumatoria de los elementos de cada renglón del Laplaciano  $\mathcal{L}(G)$  es cero, tenemos que la sumatoria de los elementos de cada renglón de  $-\mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL}$  es 1 y de acuerdo a la Definición 2.5, cuando  $t \rightarrow \infty$ , las posiciones de los seguidores se encuentran dentro del casco convexo formado por los líderes. ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos en una simulación numérica utilizando la estrategia de control dada por (3.1a)-(3.1c). Para la simulación se consideran 6 robots móviles de tracción diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se encuentra a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en la simulación se muestra en la Figura 3.1.

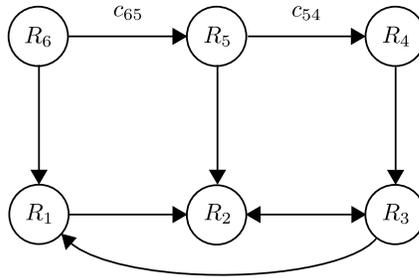


Figura 3.1: Gráfica de formación.

El Laplaciano de la gráfica de formación está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Los parámetros utilizados en la simulación son  $k_m, k_f, k_c = 1$ . La trayectoria deseada de navegación es una senoide con amplitud de 2 m y un periodo de 50 s. Los vectores de posición deseada entre los líderes están dados por  $c_{65} = [-1.6 \sin(\frac{\pi}{3}), -1.6 \cos(\frac{\pi}{3})]$  y  $c_{54} = [0, 1.6]$ .

La Figura 3.2 muestra el movimiento de los agentes en el plano. Las posiciones iniciales de los agentes están indicadas con una “x” y las posiciones en los tiempos  $t = 15, 30, 45$  y  $60$  s se representan con un círculo “o”. Se observa como el agente líder principal sigue la trayectoria deseada mientras que los líderes secundarios alcanzan la formación. Además, los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes.

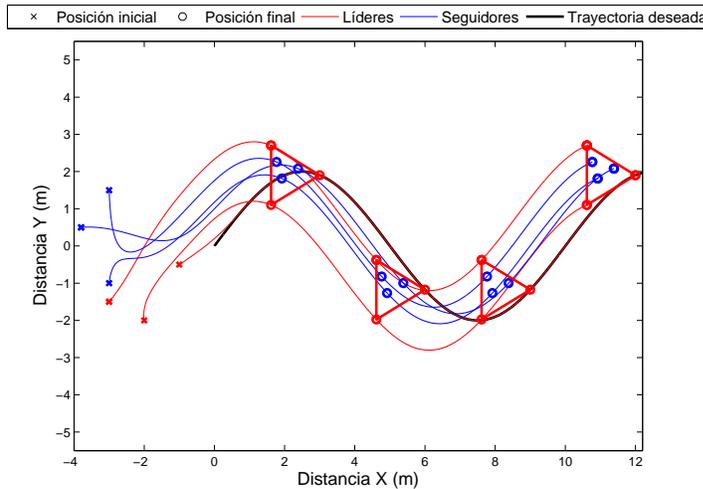


Figura 3.2: Movimiento en el plano de los agentes.

Las Figuras 3.3(a) y 3.3(b), presentan los errores de los agentes seguidores y líderes, respectivamente. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas para lograr el confinamiento con avance en formación estática se muestran en las Figuras 3.4(a) y 3.4(b).

### 3.2. Problema de confinamiento con seguimiento en formación variante en el tiempo

En esta sección se presenta una versión variante en el tiempo del problema de confinamiento. Se abordará un primer caso donde la subgráfica donde sólo interactúan líderes es la gráfica de formación centrada en el líder de la Figura 2.3, y un segundo caso donde la subgráfica donde sólo interactúan líderes es cualquier gráfica de formación en general.

Para mantener una formación por parte de los agentes seguidores orientada a la dirección del agente líder mientras se está en movimiento, usaremos un vector de posición variante en el tiempo dado por

$$C_{ji}(t) = R(\theta_n) c_{ji} \quad (3.7)$$

donde  $c_{ji}$  es un vector de posición correspondiente a la formación deseada estática y

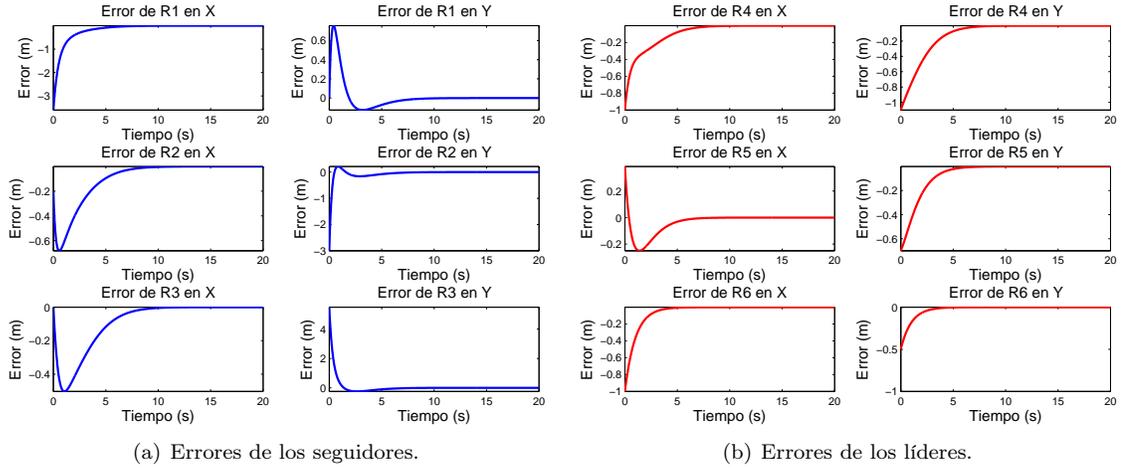


Figura 3.3: Errores de los agentes del sistema.

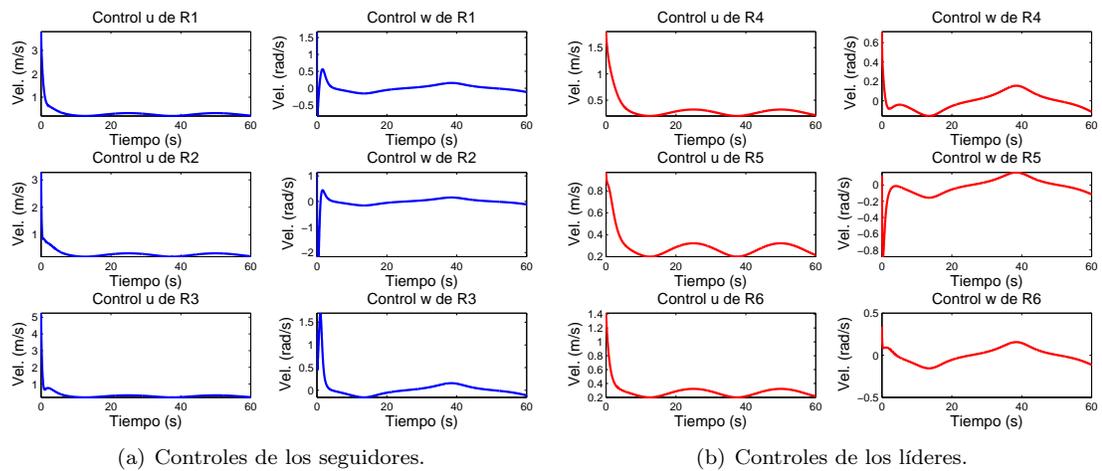


Figura 3.4: Señales de control de los agentes del sistema.

$R(\theta_n)$  es una matriz de rotación dada por

$$R(\theta_n) = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La derivada de (3.7) está dada por

$$\dot{C}_{ji}(t) = \dot{R}(\theta_n) c_{ji} \quad (3.9)$$

donde

$$\dot{R}(\theta_n) = \begin{bmatrix} -\sin \theta_n & -\cos \theta_n \\ \cos \theta_n & -\sin \theta_n \end{bmatrix} w_n \quad (3.10)$$

Para el primer caso, con una gráfica de formación centrada en el líder, se asumirá la Hipótesis 3.1. El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que se logre

- Seguimiento asintótico de una trayectoria preestablecida por parte del agente líder principal, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$$

- Una formación deseada variante en el tiempo por parte de los agentes líderes secundarios con respecto al agente líder principal, i.e. para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_n(t) - C_{ni}(t)) = 0$$

- Convergencia de los agentes seguidores al casco convexo formado por los líderes, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_i(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0, \quad i = 1, \dots, n_F$$

Para el problema de confinamiento con avance en formación variante en el tiempo, proponemos una ley de control para los líderes y seguidores dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m (\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)) \quad (3.11a)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) \left( -k_f (\alpha_i - \alpha_n - C_{ni}(t)) + \dot{\alpha}_n + \dot{C}_{ni}(t) \right), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1 \quad (3.11b)$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix} = A_j^{-1}(\theta_j) (-k_c (\alpha_j - \alpha_j^*) + \dot{\alpha}_j^*), \quad j = 1, \dots, n_F \quad (3.11c)$$

con  $A_i^{-1}(\theta_i)$  la inversa de la matriz de desacoplamiento,  $m(t)$  la trayectoria de navegación,  $\dot{m}(t)$  la velocidad de navegación,  $C_{ni}(t)$  el vector de posición variante en el tiempo,  $k_m$ ,  $k_f$  y  $k_c$  las ganancias de control y  $\alpha_j^* = \frac{1}{g_j} \sum_{k \in N_j} \alpha_k$ ,  $j = 1, \dots, n_F$ . A diferencia del confinamiento con vectores de posición estáticos, donde se utiliza la velocidad de marcha ( $\dot{m}(t)$ ), en esta ley de control de confinamiento con vectores de posición variantes en el tiempo, se utiliza la velocidad de los agentes ( $\dot{\alpha}_j$ ).

**Teorema 3.2** *Considere el sistema (2.3) y las leyes de control (3.11a)-(3.11c). Suponga que  $k_m, k_f, k_c > 0$  y que la subgráfica de los líderes es la gráfica de formación centrada en el líder de la Figura 2.3. Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(3.11a)-(3.11c)*

1. *El agente líder principal  $R_n$  converge a la trayectoria deseada de navegación, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$ , a la vez que los líderes secundarios logran una la formación deseada variante en el tiempo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_n(t) - C_{ni}(t)) = 0$  para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$ .*
2. *Los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_j(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0$  para  $j = n_1, \dots, n_F$ .*

**Demostración.** Para la demostración de este teorema se lleva a cabo un procedimiento similar al realizado en la demostración del Teorema 3.2. ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica utilizando la estrategia de control dada por (3.11a)-(3.11c). Para la simulación se consideran 6 robots móviles de tracción diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se localiza a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en la simulación se muestra en la Figura 3.5.

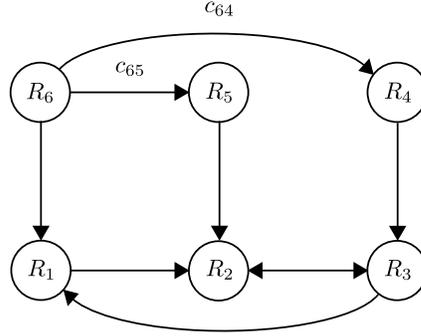


Figura 3.5: Gráfica de formación para la simulación.

El Laplaciano de la gráfica de formación está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Los parámetros usados en la simulación son  $k_m, k_f, k_c = 1$ . La trayectoria deseada de navegación es una Lemniscata de Geronno dada por

$$m(t) = \left[ 3 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 1.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]$$

con un periodo de  $T = 50$  s. Los vectores de posición estática están dados por  $c_{65} = [-0.8 \sin(\pi/3), -0.8 \cos(\pi/3)]$  y  $c_{64} = [-0.8 \sin(\pi/3), 0.8 \cos(\pi/3)]$ .

La Figura 3.6 muestra el movimiento de los agentes en el plano. La posición inicial de los agentes están indicadas con una "x" y las posiciones en los tiempos  $t = 1.2, 15, 30, 45$  y  $60$  s están representadas con un círculo "o". Se observa como el agente líder principal sigue la trayectoria deseada mientras que los agentes líderes secundarios logran una formación variante en el tiempo. Además, los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes.

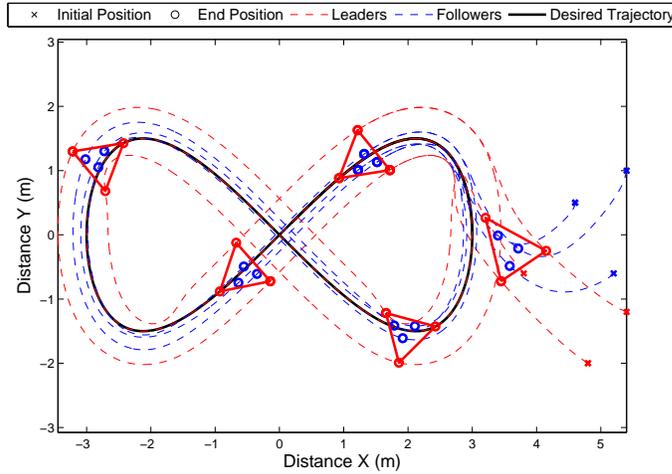


Figura 3.6: Trayectorias de los agentes en el plano.

Las Figuras 3.7(a) y 3.7(b), muestran los errores de los agentes seguidores y líderes, respectivamente. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas para lograr el confinamiento con avance en formación variante en el tiempo se muestran en las Figuras 3.8(a) y 3.8(b).

Para el segundo caso, la generalización con gráficas de formación arbitrarias, se asumirá la Hipótesis 3.1 y la siguiente

**Hipótesis 3.2** *Para cada agente líder secundario, debe de existir una comunicación ya sea de forma directa o indirecta, con el agente líder principal; i.e., para todo  $R_i \in N_L, i = n_F + 1, \dots, n - 1$  existen aristas  $R_n R_{m_1}, R_{m_1} R_{m_2}, \dots, R_{m_r} R_i \in E$ .*

La posición relativa deseada del  $i$ -ésimo líder secundario dentro de la formación

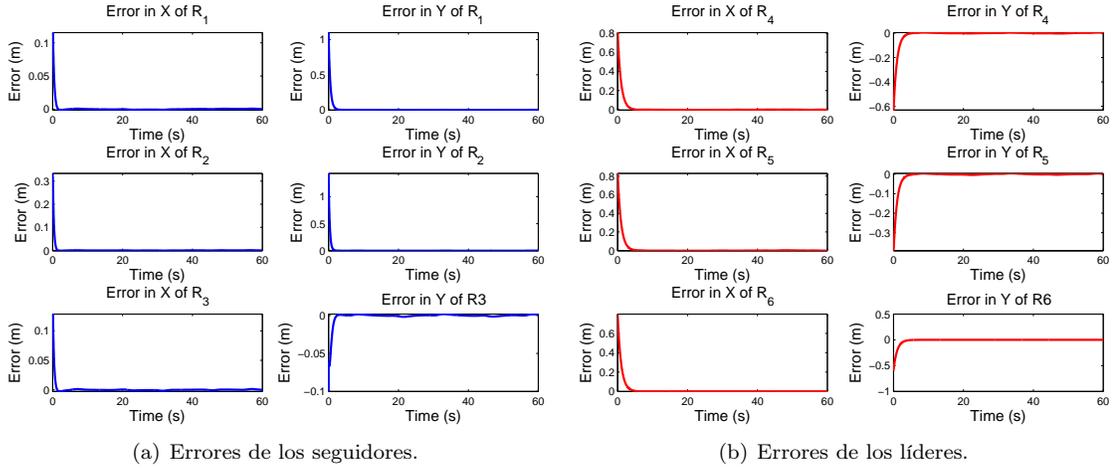


Figura 3.7: Errores de los agentes del sistema.

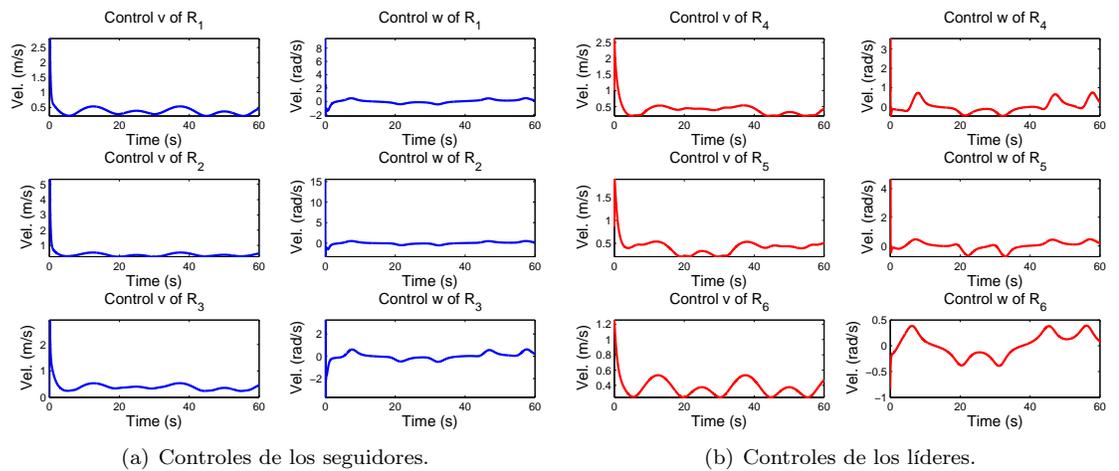


Figura 3.8: Señales de control de los agentes del sistema.

variante en el tiempo esta dada por

$$\alpha_i^*(t) = \frac{1}{g_i} \sum_{k \in N_i} (\alpha_k(t) + C_{ki}(t)), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1,$$

donde  $C_{ki}(t)$  es el vector de posición variante en el tiempo.

El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que se logre

- Seguimiento asintótico de una trayectoria preestablecida por parte del agente líder principal, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$$

- Una formación deseada variante en el tiempo por parte de los agentes líderes secundarios con respecto al agente líder principal, i.e. para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0$$

- Convergencia de los agentes seguidores al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_i(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0, \quad i = 1, \dots, n_F$$

Proponemos una ley de control para lograr el confinamiento con avance en formación variante en el tiempo dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m (\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)) \quad (3.12a)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f (\alpha_i - \alpha_i^*) + \dot{\alpha}_i^*), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1 \quad (3.12b)$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix} = A_j^{-1}(\theta_j) (-k_c (\alpha_j - \alpha_j^*) + \dot{\alpha}_j^*), \quad j = 1, \dots, n_F \quad (3.12c)$$

con  $A_i^{-1}(\theta_i)$  la inversa de la matriz de desacoplamiento,  $m(t)$  la trayectoria de navegación,  $\dot{m}(t)$  la velocidad de navegación,  $C_{ni}(t)$  el vector de posición variante en el tiempo,  $k_m$ ,  $k_f$  y  $k_c$  las ganancias de control y  $\alpha_j^* = \frac{1}{g_j} \sum_{k \in N_j} \alpha_k$ ,  $j = 1, \dots, n_F$ .

**Teorema 3.3** *Considere el sistema (2.3) y las leyes de control (3.12a) y (3.12c). Suponga que  $k_m, k_f, k_c > 0$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado definido por (2.3), (3.12a)-(3.12c) se tiene que*

1. *El agente líder principal  $R_n$  converge a la trayectoria deseada de navegación, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$ , mientras que los agentes líderes secundarios convergen a la formación deseada variante en el tiempo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0$ , para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$ .*
2. *Los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_j(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0$ , para  $j = n_1, \dots, n_F$ .*

**Demostración.** Para la demostración de este teorema se realiza un procedimiento similar al presentado en la demostración del teorema . ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica usando la estrategia de control dada por (3.12a)-(3.12c). Para la simulación, se consideran 6 robots móviles de tracción diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se localiza a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en la simulación se muestra en la Figura 3.9.

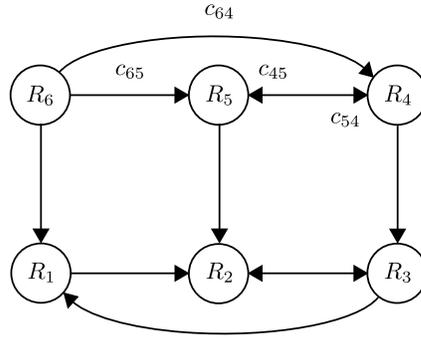


Figura 3.9: Gráfica de formación para la simulación.

El Laplaciano de la gráfica de formación está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Los parámetros usados en la simulación son  $k_m, k_f, k_c = 1$ . La trayectoria deseada de navegación es una curva de Lissajous dada por

$$m(t) = [3 \sin(\omega_x t + \delta), 1.5 \sin(\omega_y)]$$

donde  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_x = \frac{2\pi}{T}$  y  $\omega_y = \frac{6\pi}{T}$  con un periodo de  $T = 50$  s. Los vectores de posición estática están dados por  $c_{65} = [-0.8 \sin(\pi/3), -0.8 \cos(\pi/3)]$ ,  $c_{64} = [-0.8 \sin(\pi/3), 0.8 \cos(\pi/3)]$ ,  $c_{54} = [0, 0.8]$  y  $c_{45} = [0, -0.8]$ .

La Figura 3.10 muestra el movimiento de los agentes en el plano. La posición inicial de los agentes está indicada con una "x" y las posiciones en los tiempos  $t = 0.8, 12, 24, 36$  y  $48$  s están representadas con un círculo "o". Se observa como el líder principal sigue la trayectoria deseada de navegación mientras que los líderes secundarios alcanzan una formación variante en el tiempo. Además, los seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes.

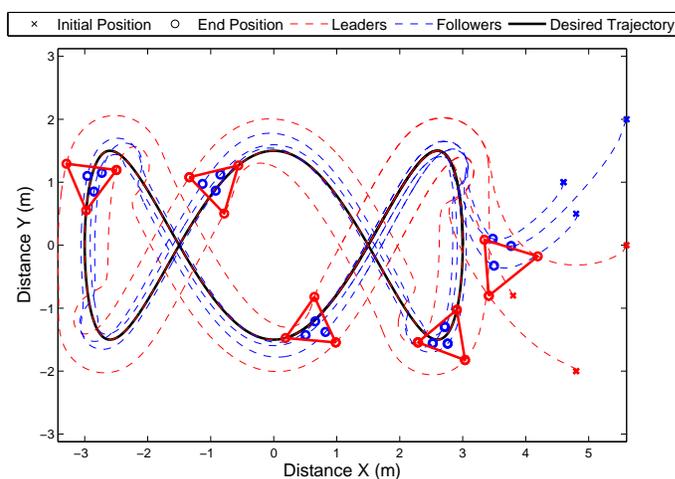


Figura 3.10: Trayectorias de los agentes en el plano.

Las Figuras 3.11(a) y 3.11(b), muestran los errores de los seguidores y líderes, respectivamente. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas para lograr el confinamiento con avance en formación variante en el tiempo se muestran en las Figuras 3.12(a) y 3.12(b).

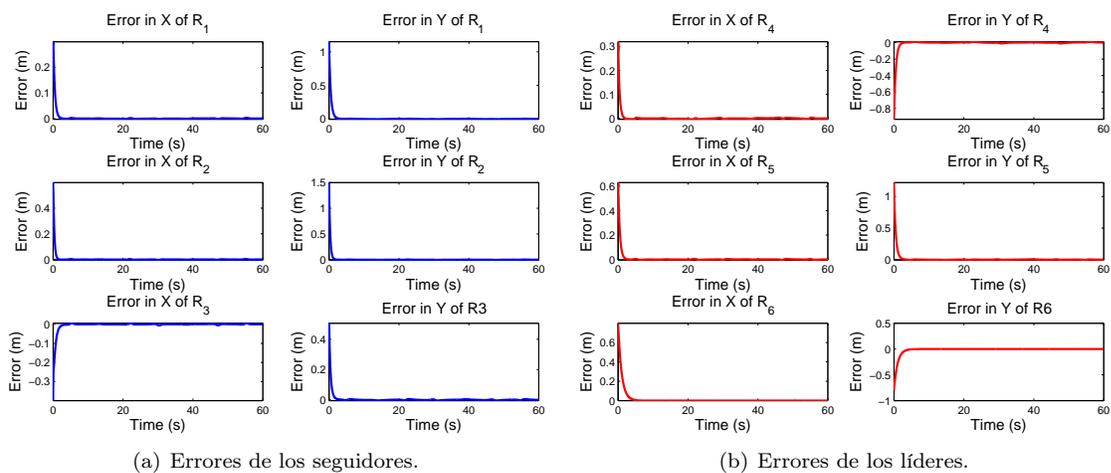


Figura 3.11: Errores de los agentes del sistema.

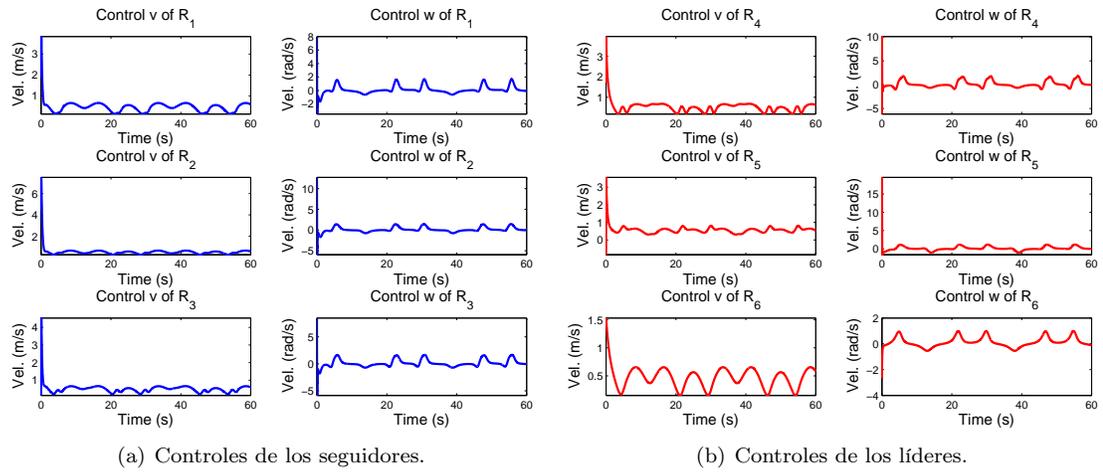


Figura 3.12: Señales de control de los agentes del sistema.



## Capítulo 4

# Evasión de colisiones para robots móviles de tracción diferencial

En este capítulo se presentan estrategias de control para lograr la coordinación de movimiento en sistemas multi-agente con evasión de colisiones. Se presentan el problema de formación, avance en formación variante en el tiempo y confinamiento con avance en formación variante en el tiempo. Para el problema de formación con evasión de colisiones se presenta un diseño en el cual se realiza una normalización en el control agregando un campo vectorial repulsivo; en este caso se consideran gráficas de formación compuestas por ciclos. Posteriormente, para el problema de avance en formación y confinamiento con avance en formación, se rediseña la estrategia, utilizando ahora controles acotados por la función tangente hiperbólico agregando de igual forma un campo vectorial repulsivo y considerando la velocidad de avance. Por último, se presenta el caso de evasión de colisiones de manera grupal, lo que permite que el sistema multi-agente imite el comportamiento de un cuerpo rígido.

Sea  $N = \{R_1, \dots, R_n\}$  un conjunto de agentes de primer orden que se mueven en el plano. La distancia entre dos agentes está dada por  $\|\xi_i - \xi_j\|$ ,  $\forall i, j \in N$ ,  $i \neq j$ . Entonces los agentes  $R_j$  que están en peligro de colisión con el agente  $R_i$  pertenecen al conjunto

$$M_i = \{R_j \in N \mid \|\xi_i - \xi_j\| \leq d\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

donde  $d$  es la mínima distancia permitida entre los agentes. Con el fin de evitar colisiones entre los agentes, proponemos campos vectoriales repulsivos dados por

$$\beta_i = \epsilon \sum_{j \in M_i} \delta_{ij} \begin{bmatrix} (x_i - x_j) - (y_i - y_j) \\ (x_i - x_j) + (y_i - y_j) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde  $\epsilon > 0$  y el parámetro  $\delta_{ij}$  está dado de la siguiente manera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \|\xi_i - \xi_j\| \leq d \\ 0, & \text{si } \|\xi_i - \xi_j\| > d \end{cases} \quad (4.3)$$

Los campos vectoriales repulsivos se proponen de tal manera que exista un foco inestable que gira en sentido antihorario, tal y como se muestra en la Figura 4.1, centrado en la posición de los otros agentes con los que se está en riesgo de colisión.

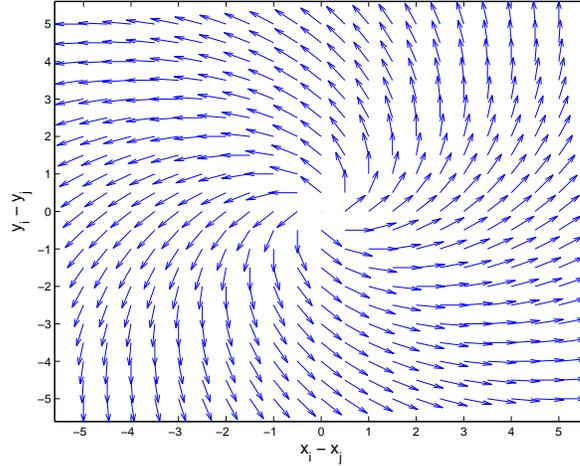


Figura 4.1: Plano de fase del campo vectorial repulsivo  $\beta_{ij}$ .

Para las estrategias de control diseñadas en este capítulo, tomaremos en cuenta las siguientes suposiciones

**Suposición 4.1** *Las condiciones iniciales de todos los agentes satisfacen  $\|\alpha_i(0) - \alpha_j(0)\| \geq d, \forall i, j \in N, \text{ con } i \neq j$ . Es decir, no existe riesgo de colisión entre ningún agente en  $t = 0$ .*

**Suposición 4.2** *El  $i$ -ésimo agente, además de conocer las posiciones de los agentes del conjunto  $N_i$ , puede detectar la presencia de cualquier otro agente que se encuentre dentro de un círculo de radio  $d$ .*

Así mismo, hay que considerar la siguiente

**Observación 4.1** *Debe quedar claro que la distancia mínima permitida entre los agentes  $d$  debe ser menor que la mínima distancia entre los agentes dentro de una formación deseada, i. e.  $d < \min\{\|C_{ij}\|\}$*

#### 4.1. Formación con evasión de colisiones

El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que

- Los agentes logren una formación deseada, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0$$

- Se logre la evasión de colisiones entre los agentes; además, para todo tiempo  $t$  los agentes permanecen a una distancia mayor o igual a una distancia mínima predefinida  $d$  entre ellos, i.e.

$$\| \alpha_i(t) - \alpha_j(t) \| \geq d, \forall t \geq 0, i \neq j$$

Una ley de control para lograr una formación deseada está dada por

$$\gamma_i = -k e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

donde  $e_i = \alpha_i - \alpha_i^*$  con  $\alpha_i^* = \frac{1}{g_i} \sum_{k \in N_i} (\alpha_k + c_{ki})$  la posición deseada del  $i$ -ésimo agente y  $k > 0$  la ganancia de control. Para el caso de robots móviles de tracción diferencial tendríamos

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

Consideremos una versión normalizada de (4.4) para tratar con un sistema donde todos los agentes se mueven a la misma velocidad, dada por

$$\gamma_i = \begin{cases} -\mu \frac{e_i}{\|e_i\|}, & e_i \neq 0 \\ 0, & e_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

donde  $\mu$  es la velocidad constante de todos los agentes.

**Teorema 4.1** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.5) con  $\gamma_i$  dada por (4.6) y una gráfica de formación conectada compuesta en su totalidad por la superposición de diferentes ciclos. Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.5) se tiene convergencia de los agentes a la formación deseada en tiempo finito.*

**Demostración.** La demostración de este teorema se encuentra detallada en [28]. ■

Para lograr la formación con evasión de colisiones entre los agentes, proponemos una ley de control dada por

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (\gamma_i + \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

con  $\gamma_i$  dada por (4.6) y  $\beta_i$  el campo vectorial repulsivo definido en (4.2).

**Teorema 4.2** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.7) con (4.6) y (4.2). Considere también una gráfica de formación conectada compuesta en su totalidad por la superposición de diferentes ciclos. Suponga que existe riesgo de colisión entre  $n$  agentes al instante de tiempo  $t$  y  $\epsilon > 6(\mu/d)$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.7) los agentes alcanzan su posición deseada en tiempo finito y permanecen a una distancia mayor o igual que a una distancia mínima predefinida  $d$  entre ellos para todo  $t \geq 0$ .*

**Demostración.** Para la demostración de este teorema se realiza inducción matemática, demostrando primero los casos de colisión entre dos agentes y entre tres agentes, aplicando inducción para llegar a la solución general de  $n$  agentes. Esta demostración en forma detallada se encuentra en [28]. Cabe mencionar que, geoméricamente, el peor caso ocurre cuando un agente está rodeado por otros 6 agentes y además, el valor de  $\epsilon > 6(\mu/d)$  es muy conservador, por lo que es posible que con  $\epsilon$  menor, se logre la evasión de colisiones. ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica usando la estrategia de control dada por (4.7). Para la simulación, se consideran 3 robots móviles de tracción diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se localiza a 0.045 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en la simulación se muestra en la Figura 4.2.

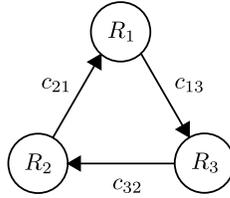


Figura 4.2: Gráfica de formación para la simulación.

Los parámetros usados en la simulación son  $d = 0.2$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\epsilon = \mu/d$ . Los vectores de posición están dados por  $c_{32} = [-0.3, 0]$ ,  $c_{21} = [0.3 \cos(\pi/3), 0.3 \sin(\pi/3)]$  y  $c_{13} = [0.3 \sin(\pi/6), -0.3 \cos(\pi/6)]$ . La formación deseada es un triángulo equilátero de lado igual a 0.3 m. Los agentes se colocaron en posiciones iniciales de tal manera que en las trayectorias hacia sus posiciones deseadas existan colisiones entre ellos.

La Figura 4.3 muestra el movimiento de los agentes en el plano. Se observa como los agentes logran la formación deseada evitando colisiones. Se puede ver el efecto de los campos vectoriales repulsivos al modificarse las trayectorias de los agentes para evitar las colisiones. En la Figura 4.4 se muestran las distancias entre los agentes, se puede notar que la distancia mínima entre los agentes siempre es mayor o igual que la distancia predefinida  $d = 0.2$ .

La Figura 4.5 muestra los errores de posición de los agentes. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas para lograr la formación con evasión de colisiones se muestran en la Figura 4.6.

## 4.2. Seguimiento en formación variante en el tiempo con evasión de colisiones

Para el seguimiento en formación variante en el tiempo usaremos un esquema líder-seguidores, donde el agente  $R_n$  es el líder, responsable del seguimiento de trayectoria y

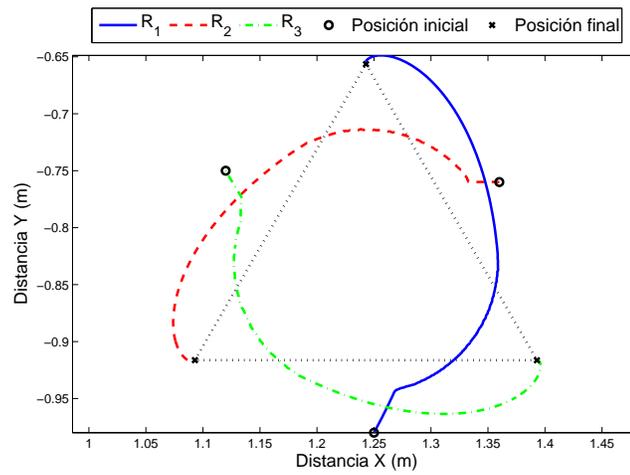


Figura 4.3: Trayectorias de los agentes en el plano.

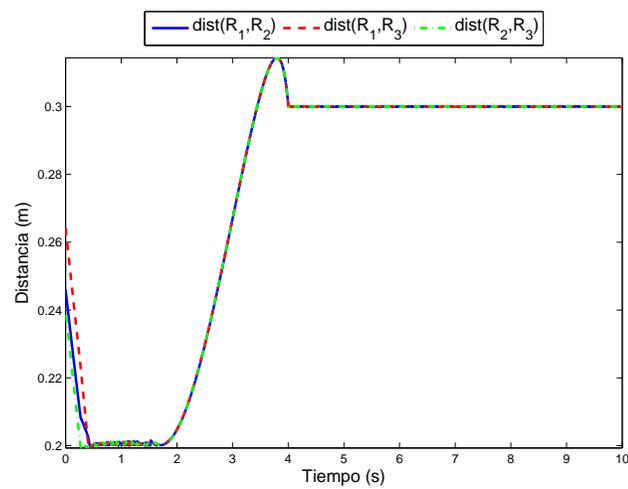


Figura 4.4: Distancias entre los agentes.

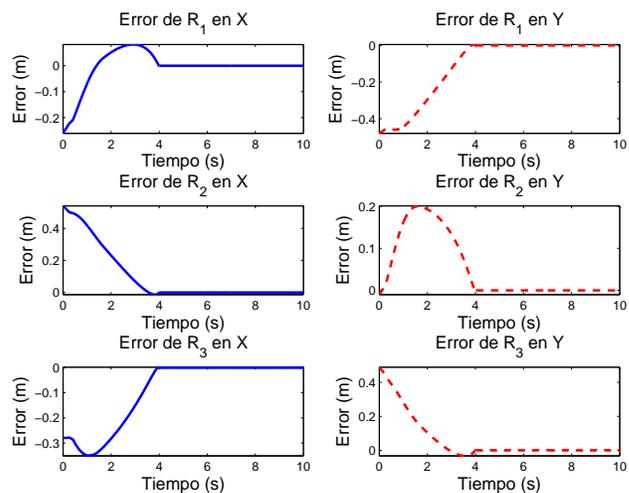


Figura 4.5: Errores de los agentes del sistema.

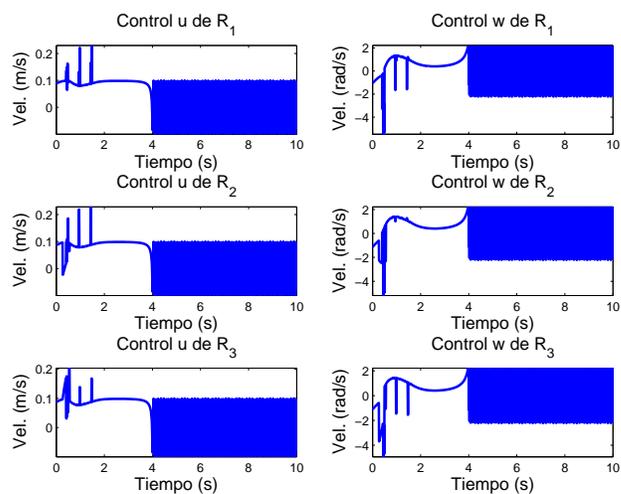


Figura 4.6: Señales de control de los agentes del sistema.

los otros  $n-1$  agentes restantes serán seguidores, encargados de realizar una formación variante en el tiempo con respecto al líder. En este caso, además de orientarse a la dirección del líder, la formación podrá ser reescalada utilizando un factor que varía con el tiempo; por lo que el vector de posición variante en el tiempo (3.7) se modifica de la siguiente manera

$$C_{ji}(t) = \delta(t)R(\theta_n)c_{ji} \quad (4.8)$$

donde  $\delta(t)$  es el factor de reescalamiento. La derivada de (4.8) está dada por

$$\dot{C}_{ji}(t) = \dot{\delta}(t)R(\theta_n)c_{ji} + \delta(t)\dot{R}(\theta_n)c_{ji} \quad (4.9)$$

En esta sección, asumiremos la siguiente

**Hipótesis 4.1** *Para cada agente seguidor, debe de existir una comunicación ya sea de forma directa o indirecta, con el agente líder. Es decir, para todo  $R_i, i = 1, \dots, n-1$  existen aristas  $R_nR_{m_1}, R_{m_1}R_{m_2}, \dots, R_{m_r}R_i \in E$ .*

Sea  $m(t) = [m_p(t), m_q(t)]^T$  una trayectoria de navegación preestablecida continuamente diferenciable, donde  $\|\dot{m}(t)\| \leq \eta_m, \forall t \geq 0$ . La posición relativa deseada del  $i$ -ésimo seguidor en la formación deseada variante en el tiempo está dada por

$$\alpha_i^*(t) = \frac{1}{g_i} \sum_{k \in N_i} (\alpha_k(t) + C_{ki}(t)), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

donde  $C_{ki}$  es el vector de posición variante en el tiempo entre los agentes  $R_i$  y  $R_j$ . La derivada de  $C_{ji}(t)$  satisface  $\|\dot{C}_{ji}(t)\| \leq \eta_c, \forall t \geq 0$ .

El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que se logre

- Seguimiento asintótico de una trayectoria por el agente líder, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0.$$

- Una formación variante en el tiempo por los agentes seguidores, i.e. para  $i = 1, \dots, n-1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0.$$

- La evasión de colisiones entre los agentes; esto es, que todos los agentes del sistema permanezcan a una distancia mayor o igual a una distancia mínima predefinida  $d$  entre ellos, i.e.

$$\|\alpha_i(t) - \alpha_j(t)\| \geq d, \quad i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \forall t \geq 0.$$

Para lograr el avance en formación variante en el tiempo proponemos una ley de control acotada definida por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)) \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f \tanh(\alpha_i - \alpha_i^*) + \dot{\alpha}_i^*), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.11)$$

donde  $A_i^{-1}(\theta_i)$  es la inversa de la matriz de desacoplamiento,  $m(t)$  es la trayectoria deseada,  $\dot{m}(t)$  es la velocidad de avance,  $k_m$  y  $k_f$  son las ganancias de control.

El primer resultado principal en esta sección es el siguiente

**Teorema 4.3** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.10)-(4.11). Suponga que  $k_m, k_f > 0$ . Entonces en el sistema en lazo cerrado (2.3), (4.10)-(4.11), se tiene que el agente líder  $R_n$  converge a la trayectoria deseada de navegación, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$ , mientras que los seguidores logran la formación deseada variante en el tiempo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ .*

**Demostración.** El sistema en lazo cerrado (2.3), (4.10)-(4.11) está dado por

$$\dot{\alpha} = (A \otimes I_2)^{-1} [-(K \otimes I_2) \tanh((A \otimes I_2)\alpha - C) + M] \quad (4.12)$$

donde  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ ,  $K = \text{diag} \{k_f, \dots, k_f, k_m\}$ ,  $\otimes$  denota el producto Kronecker,  $I_2$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ ,

$$C = \left[ \frac{1}{g_1} \sum_{j \in N_1} C_{ji}(t), \dots, \frac{1}{g_{n-1}} \sum_{j \in N_{n-1}} C_{ji}(t), m(t) \right]^T,$$

$$M = \left[ \frac{1}{g_1} \sum_{j \in N_1} \dot{C}_{ji}(t), \dots, \frac{1}{g_{n-1}} \sum_{j \in N_{n-1}} \dot{C}_{ji}(t), \dot{m}(t) \right]^T,$$

$A = \Lambda \mathcal{L}(G) + \Gamma$ , donde  $\mathcal{L}(G)$  es el Laplaciano de la gráfica de formación  $G$ ,  $\Lambda = \text{diag} \left\{ \frac{1}{g_1}, \dots, \frac{1}{g_{n-1}}, 0 \right\}$  y

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

En este punto, tenemos que mostrar que  $(A \otimes I_2)$  es invertible. De las propiedades del producto Kronecker tenemos  $(A \otimes I_2)^{-1} = A^{-1} \otimes I_2^{-1}$ . Ya que  $I_2$  es la matriz identidad, entonces  $I_2^{-1}$  existe y nos enfocaremos ahora en la matriz  $A = (\Lambda \mathcal{L}(G)) + \Gamma$ . De las propiedades del Laplaciano sabemos que la matriz  $\Lambda \mathcal{L}(G)$  es semidefinida positiva y singular, es decir, no tiene inversa. Esto ya que el vector de unos  $X = [1, \dots, 1]^T$  es solución del sistema  $\Lambda \mathcal{L}(G)X = 0$ . Al sumarle la matriz  $\Gamma$  a la matriz  $\Lambda \mathcal{L}(G)$ , la matriz resultante  $A$  resulta no singular y definida positiva, ya que tomando en consideración la Hipótesis 4.1 el sistema  $\Lambda \mathcal{L}(G)X = 0$  tiene como única solución  $X = [0, \dots, 0]^T$ .

Definimos los errores del sistema como

$$e_n = \alpha_n - m(t) \quad (4.13)$$

$$e_i = \alpha_i - \alpha_i^*, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.14)$$

Los errores del sistema en forma matricial están dados por

$$e = (A \otimes I_2) \alpha - C \quad (4.15)$$

donde  $e = [e_1, \dots, e_n]^T$ . La dinámica del error resulta

$$\dot{e} = -(K \otimes I_2) \tanh(e) \quad (4.16)$$

Proponemos una función candidata de Lyapunov dada por

$$V = \frac{1}{2} e^T (K \otimes I_2)^{-1} e \quad (4.17)$$

y evaluando su derivada con respecto al tiempo a través de las trayectorias del sistema tenemos

$$\dot{V} = e^T (K \otimes I_2)^{-1} (K \otimes I_2) \tanh(e) = -e^T \tanh(e) < 0, \forall e \text{ with } e \neq 0 \quad (4.18)$$

por lo que los errores convergen asintóticamente a cero.  $\blacksquare$

Modificando la ley de control anterior (4.10)-(4.11) agregando el campo vectorial repulsivo (4.2) tenemos finalmente la estrategia para lograr el avance en formación variante en el tiempo con evasión de colisiones dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t) + \beta_n) \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f \tanh(\alpha_i - \alpha_i^*) + \dot{\alpha}_i^* + \beta_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.20)$$

Para analizar la posición relativa entre los agentes  $R_j$  y  $R_i$ , definimos las variables  $p_{ji} = \alpha_{xi} - \alpha_{xj}$  y  $q_{ji} = \alpha_{yi} - \alpha_{yj}$ ,  $j, i = 1, \dots, n$ ,  $j \neq i$  las cuales corresponden a las distancias horizontal y vertical entre los agentes. En el plano  $p_{ji} - q_{ji}$ , identificamos al origen como el punto donde ocurre una colisión entre los agentes  $R_j$  y  $R_i$  y el círculo de radio  $d$ , centrado en el origen, como la región de influencia entre los dos agentes. Fuera del círculo, sólo actúa el control de avance en formación variante en el tiempo mientras que dentro del círculo el campo vectorial repulsivo aparece.

Para presentar el segundo resultado principal de esta sección, necesitamos establecer el siguiente Lema Técnico.

**Lema 4.1** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.10)-(4.11) junto con las definiciones  $k^* = \max(k_f, k_m)$  y  $\eta^* = \max(\eta_m, \eta_c)$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.10)-(4.11) las velocidades de los agentes están acotadas por  $\hat{\eta} = \sqrt{\rho((A^{-1})^T(A^{-1}))} (k^* \sqrt{2n} + \eta^* \sqrt{n})$ .*

**Demostración.** Tomando la norma del sistema (4.12) tenemos

$$\begin{aligned} \|\dot{\alpha}\| &\leq \| (A \otimes I_2)^{-1} [-(K \otimes I_2) \tanh((A \otimes I_2)\alpha - C) + M] \| \\ &\leq \| (A \otimes I_2)^{-1} \| \| -(K \otimes I_2) \| \| \tanh((A \otimes I_2)\alpha - C) \| + \| M \| \end{aligned}$$

donde  $\| \tanh((A \otimes I_2)\alpha - C) \| \leq \sqrt{2n}$ ,  $\| M \| \leq \eta^* \sqrt{n}$ , con  $\| -(K \otimes I_2) \| = \rho((K \otimes I_2)^T(K \otimes I_2))$  y  $\| (A \otimes I_2)^{-1} \| = \sqrt{\rho([(A \otimes I_2)^{-1}]^T[(A \otimes I_2)^{-1}])}$ , pero ya que  $I_2$  es la matriz identidad con dos eigenvalores 1 y de las propiedades del espectro

del producto Kronecker tenemos  $\| -(K \otimes I_2) \| = \rho(K^T K) = \max(k_f, k_m) = k^*$  y  $\| (A \otimes I_2)^{-1} \| = \sqrt{\rho([(A)^{-1}]^T [(A)^{-1}])}$ . Finalmente, tenemos

$$\| \dot{\alpha} \| \leq \sqrt{\rho((A^{-1})^T (A^{-1}))} (k^* \sqrt{2n} + \eta^* \sqrt{n}) = \hat{\eta}. \quad (4.21)$$

Esto concluye la demostración.  $\blacksquare$

Ahora, podemos presentar el segundo resultado principal. Primero, consideramos el caso cuando sólo dos agentes están en riesgo de colisión. A partir de este caso simple, exponemos una serie de teoremas que conducen al caso general.

**Teorema 4.4** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.19)-(4.20). Suponga que existe riesgo de colisión entre dos agentes al instante de tiempo  $t$  y el parámetro  $\epsilon$  satisface  $\epsilon > \frac{\hat{\eta}}{d}$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.19)-(4.20) los agentes tiende asintóticamente a sus posiciones deseadas y permanecen entre ellos a una distancia mayor o igual a  $d$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Demostración.** Mostraremos que los agentes  $R_r$  y  $R_s$  evaden la colisión y permanecen a una mínima distancia entre ellos. Definimos una superficie dada por

$$\sigma_{rs} = p_{rs}^2 + q_{rs}^2 - d^2 = 0 \quad (4.22)$$

Para determinar el comportamiento bajo la acción del campo vectorial repulsivo usaremos la función definida positiva

$$V = \frac{1}{2} \sigma_{rs}^2 \quad (4.23)$$

cuya derivada está dada por  $\dot{V} = \sigma_{rs} \dot{\sigma}_{rs}$ . La derivada de (4.22) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rs} &= 2 \begin{bmatrix} p_{rs} & q_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{rs} \\ \dot{q}_{rs} \end{bmatrix} \\ &= -2 \begin{bmatrix} p_{rs} & q_{rs} \end{bmatrix} ((-k_s \tanh(\alpha_s - \alpha_s^*) + \dot{\alpha}_s^*) \\ &\quad - (-k_r \tanh(\alpha_r - \alpha_r^*) + \dot{\alpha}_r^*)) + 4\epsilon(p_{rs}^2 + q_{rs}^2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por lo tanto,  $\dot{V} \leq 0$  se logra si  $\sigma_{rs} \dot{\sigma}_{rs} \leq 0$ . Cuando existe riesgo de colisión,  $(p_{rs}, q_{rs})$  se encuentra en la región interior de  $\sigma_{rs} = 0$ , es decir  $\sigma_{rs} \leq 0$ , entonces el análisis se reduce a mostrar que  $\dot{\sigma}_{rs} \geq 0$ . Esto significa que el campo vectorial resultante dentro del círculo apunta hacia afuera, es decir, a la región libre de colisión. Utilizando la definición del producto vectorial

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rs} &= 4\sqrt{p_{rs}^2 + q_{rs}^2} \hat{\eta} \cos \theta_{rs} + 4\epsilon(p_{rs}^2 + q_{rs}^2) \\ &\geq -4\sqrt{p_{rs}^2 + q_{rs}^2} \hat{\eta} + 4\epsilon(p_{rs}^2 + q_{rs}^2) > 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Resolviendo para  $\epsilon$  tenemos que, si  $\epsilon > \hat{\eta}/d$  entonces  $\dot{\sigma}_{rs} > 0$ . Esto implica que los agentes  $R_r$  y  $R_s$  se alejan uno de otro hasta alcanzar una distancia  $d$ . Ya que

$\| \alpha_s(0) - \alpha_r(0) \| \geq d$ , entonces los agentes no sólo evaden la colisión sino que también satisfacen  $\| \alpha_s(t) - \alpha_r(t) \| \geq d$  para todo tiempo  $t$ . ■

Ahora, consideramos el caso cuando tres agentes están en riesgo de colisión, esto es, el agente  $R_r$  está en riesgo de colisión contra los agentes  $R_{s1}$  y  $R_{s2}$ .

**Teorema 4.5** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.19)-(4.20). Suponga que existe riesgo de colisión entre tres agentes y que el parámetro  $\epsilon$  satisface  $\epsilon > 2(\hat{\eta}/d)$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.19)-(4.20) los agentes convergen asintóticamente a sus posiciones deseadas y permanecen entre ellos a una distancia mayor o igual a  $d$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Demostración.** Definimos una superficie compuesta de dos componentes dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rs1} \\ \sigma_{rs2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{rs1}^2 + q_{rs1}^2 - d^2 \\ p_{rs2}^2 + q_{rs2}^2 - d^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.26)$$

Usaremos la función definida positiva

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (4.27)$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma_{rs1} \dot{\sigma}_{rs1} + \sigma_{rs2} \dot{\sigma}_{rs2} \leq \sigma^* (\dot{\sigma}_{rs1} + \dot{\sigma}_{rs2}) \quad (4.28)$$

donde  $\sigma^* = \max\{\sigma_{rs1}, \sigma_{rs2}\}$ . Evaluando  $\dot{V}$  considerando que las trayectorias se encuentran en la región interna de  $\sigma = 0$ , es decir,  $\sigma_{rs1}, \sigma_{rs2} < 0$  entonces el análisis se reduce a mostrar que  $\dot{\sigma}_{rs1} + \dot{\sigma}_{rs2} > 0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rs1} + \dot{\sigma}_{rs2} &= 2 \begin{bmatrix} p_{rs1} & q_{rs1} \end{bmatrix} ((-k_{s1} \tanh(\alpha_{s1} - \alpha_{s1}^*) + \dot{\alpha}_{s1}^*) \\ &\quad - (-k_r \tanh(\alpha_r - \alpha_r^*) + \dot{\alpha}_r^*)) + 4\epsilon(p_{rs1}^2 + q_{rs1}^2) \\ &+ 2 \begin{bmatrix} p_{rs2} & q_{rs2} \end{bmatrix} ((-k_{s2} \tanh(\alpha_{s2} - \alpha_{s2}^*) + \dot{\alpha}_{s2}^*) \\ &\quad - (-k_r \tanh(\alpha_r - \alpha_r^*) + \dot{\alpha}_r^*)) + 4\epsilon(p_{rs2}^2 + q_{rs2}^2) \\ &+ 4\epsilon \begin{bmatrix} p_{rs1} & q_{rs1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{rs2} \\ q_{rs2} \end{bmatrix} \\ &\geq -4\sqrt{p_{rs1}^2 + q_{rs1}^2} \hat{\eta} + 4\epsilon(p_{rs1}^2 + q_{rs1}^2) - 4\sqrt{p_{rs2}^2 + q_{rs2}^2} \hat{\eta} + 4\epsilon(p_{rs2}^2 + q_{rs2}^2) \\ &+ 4\epsilon \sqrt{p_{rs1}^2 + q_{rs1}^2} \sqrt{p_{rs2}^2 + q_{rs2}^2} \cos \theta_{rs1,rs2} > 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

En este escenario, los agentes  $R_{s1}$  y  $R_{s2}$  pueden ser colocados en cualquier punto de la circunferencia de radio  $d$  alrededor del agente  $R_r$ , considerando que, del Teorema 4.4, ellos deben permanecer a una distancia mayor o igual a  $d$  uno del otro. El peor caso ocurre cuando los agentes  $R_{s1}$  y  $R_{s2}$  están uniformemente distribuidos sobre la circunferencia de radio  $d$ . Así,  $\cos \theta_{rs1,rs2} = -1$  y resolviendo para  $\epsilon$  tenemos que, si  $\epsilon > 2(\hat{\eta}/d)$  entonces  $\dot{\sigma}_{rs1} + \dot{\sigma}_{rs2} > 0$ . Esto implica que los agentes  $R_{s1}$ ,  $R_{s2}$  y  $R_r$  evaden la colisión entre ellos. ■

Geoméricamente, el caso más general ocurre cuando el agente  $R_r$ -th está rodeado por seis agentes, i.e. siete agentes están en riesgo de colisión.

**Teorema 4.6** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.19)-(4.20). Suponga que existe riesgo de colisión entre  $n \geq 3$  agentes y el parámetro  $\epsilon$  satisface  $\epsilon > 2(\hat{\eta}/d)$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.19)-(4.20) los agentes convergen asintóticamente a su posición deseada y permanecen a una distancia entre ellos mayor o igual a  $d$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Demostración.** Seguimos un procedimiento similar al presentado en la demostración del Teorema 4.5, considerando una superficie con  $n - 1$  componentes y mostrando que, si  $\sigma_{rs1} + \dots + \dot{\sigma}_{r(n-1)} > 0$ , entonces  $\dot{V} < 0$ , tomando en consideración que el peor caso se presenta cuando los  $n - 1$  agentes están uniformemente distribuidos sobre la circunferencia de radio  $d$  alrededor del agente  $R_r$ , por lo que los agentes evitan la colisión entre ellos. ■

Los resultados de una simulación numérica usando la ley de control dada por (4.19)-(4.20) se muestran a continuación. Para la simulación, consideramos 5 robots móviles de tracción diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se encuentra a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en la simulación se muestra en la Figura 4.7.

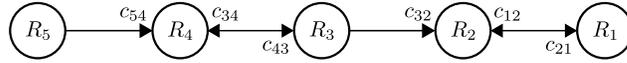


Figura 4.7: Gráfica de Formación para la simulación.

Las ganancias de control usadas en la simulación son  $k_m = 2$  y  $k_f = 3$ . La trayectoria deseada de navegación es un cuadrifolium dado por

$$m(t) = [4 \sin(2\omega t) \cos(\omega t), 4 \sin(2\omega t) \sin(\omega t)],$$

donde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  con un periodo de  $T = 80$  s. Los vectores de posición estática están dados por  $c_{12} = [0, 0.6]$ ,  $c_{21} = [0, -0.6]$ ,  $c_{32} = [-0.6 \cos(\frac{18\pi}{180}), -0.6 \sin(\frac{18\pi}{180})]$ ,  $c_{34} = [0, -0.97]$ ,  $c_{43} = [0, 0.97]$  y  $c_{54} = [-0.6 \cos(\frac{54\pi}{180}), -0.6 \sin(\frac{54\pi}{180})]$ . El factor de escalamiento está dado por

$$\mu(t) = 1 + 0.2 \sin(\omega t).$$

La distancia mínima permitida entre los agentes es  $d = 0.3$  m y el parámetro  $\epsilon$  se estableció en  $\epsilon = 1.2(2(\hat{\eta}/d))$ , para asegurar que la condición de distancia mínima no sea violada.

La Figura 4.8 muestra el movimiento de los agentes en el plano. Las posiciones iniciales de los agentes se indican con una “x” y las posiciones en distintos instantes de tiempo se representan con un círculo “o”. Se observa como el agente líder sigue la trayectoria deseada mientras que los agentes seguidores alcanzan una formación variante en el tiempo con respecto al líder. Además, el requerimiento de distancia mínima se satisface.

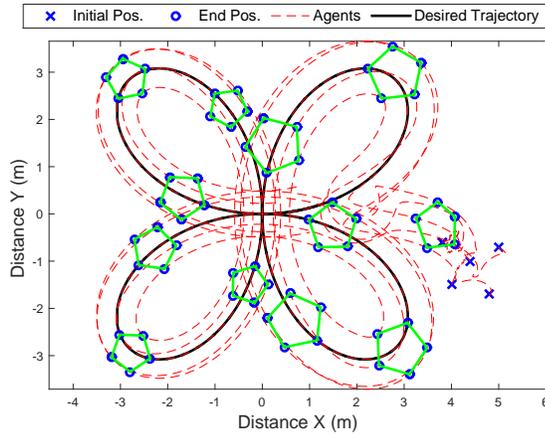
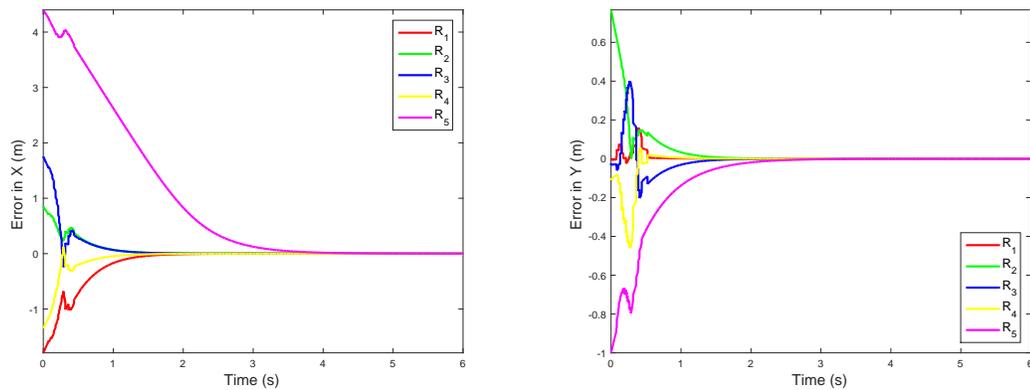


Figura 4.8: Trayectorias de los agentes en el plano.

Las Figuras 4.9(a) y 4.9(b) muestran los errores de los agentes en los ejes  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Dichos errores convergen a cero.



(a) Errores en el eje  $X$ .

(b) Errores en el eje  $Y$ .

Figura 4.9: Errores de los agentes del sistema.

La Figura 4.10(a) muestra todas las posibles distancias entre los agentes. Las distancias entre cualquier par de agentes siempre es mayor o igual a la distancia mínima predefinida  $d = 0.3$ . Para apreciar mejor la gráfica de la Figura 4.10(a), un acercamiento a las distancias entre los agentes que están en riesgo de colisión se presenta en la Figura 4.10(b).

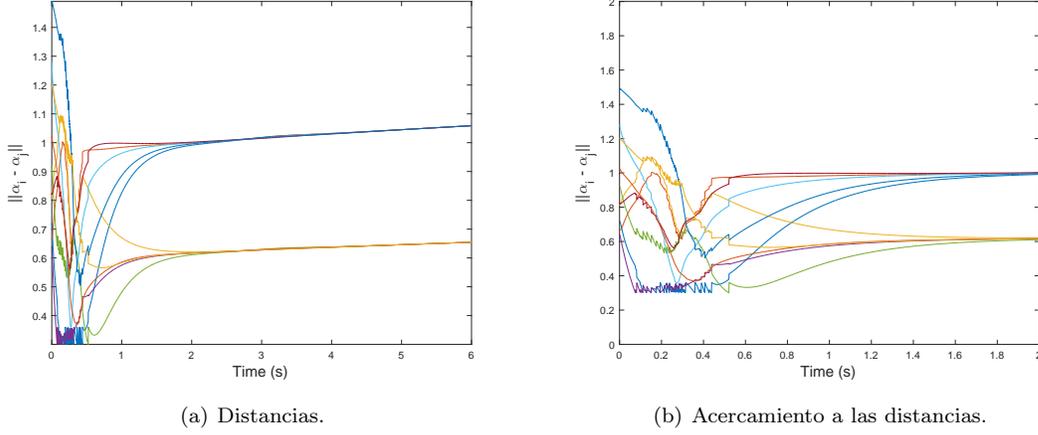


Figura 4.10: Distancias entre los agentes del sistema.

### 4.3. Confinamiento con seguimiento en formación variante en el tiempo con evasión de colisiones

En esta sección se asumirán las Hipótesis 3.1 y 3.2 y se considerarán las definiciones y toda la teoría presentada en la Sección 3.2.

El objetivo es diseñar una estrategia de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que se logre

- Seguimiento asintótico de una trayectoria preestablecida por parte del agente líder principal Asymptotic, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0.$$

- Una formación variante en el tiempo por parte de los agentes líderes secundarios con respecto al líder principal, i.e. para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t)) = 0$$

- Convergencia de los agentes seguidores al casco convexo formado por los líderes, i.e. para  $i = 1, \dots, n_F$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_i(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0$$

- Evasión de colisión entre todos los agentes, es decir, que todos los agentes del sistema permanezcan a una distancia mayor o igual a una distancia mínima predefinida  $d$  entre ellos, i.e.

$$\|\alpha_r(t) - \alpha_s(t)\| \geq d, \quad r, s = 1, \dots, n, \forall t \geq 0.$$

Para el problema de confinamiento con avance en formación variante en el tiempo utilizamos una ley de control acotada basada en (3.12a)-(3.12c) dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)) \quad (4.30a)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f \tanh(\alpha_i - \alpha_i^*) + \dot{\alpha}_i^*), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1 \quad (4.30b)$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix} = A_j^{-1}(\theta_j) (-k_c \tanh(\alpha_j - \alpha_j^*) + \dot{\alpha}_j^*), \quad j = 1, \dots, n_F \quad (4.30c)$$

El primer resultado principal en esta sección es el siguiente

**Teorema 4.7** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.30a)-(4.30c). Suponga que  $k_m, k_f, k_c > 0$ . Entonces en el sistema en lazo cerrado definido por (2.3), (4.30a)-(4.30c), se tiene que:*

1. *El agente líder principal  $R_n$  converge a la trayectoria deseada de navegación, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$ , mientras que los agentes líderes secundarios convergen a la formación deseada, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_i^*(t) - c_{(i+1)i}) = 0$  para  $i = n_F + 1, \dots, n - 1$ .*
2. *Los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_j(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0$  para  $j = n_1, \dots, n_F$ .*

**Demostración.** Para el inciso 1. La demostración tiene un procedimiento similar al realizado en la demostración del Teorema 4.3.

Para el inciso 2. Los errores del sistema en forma matricial están dados por

$$\begin{bmatrix} e_F \\ e_L \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} P_{FF} & P_{FL} \\ 0 & P_{LL} \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}_L \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

donde  $e_F = [e_1^T, \dots, e_{n_F}^T]^T$ ,  $e_L = [e_{n_F+1}^T, \dots, e_n^T]^T$ ,  $\alpha_F = [\alpha_1^T, \dots, \alpha_{n_F}^T]^T$ ,  $\alpha_L = [\alpha_{n_F+1}^T, \dots, \alpha_n^T]^T$ ,

$$\tilde{C}_L = \left[ \frac{1}{g_{n_F+1}} \sum_{k \in N_{n_F+1}} C_{ki}^T(t), \dots, \frac{1}{g_{n-1}} \sum_{k \in N_{n-1}} C_{ki}^T(t), m^T(t) \right]^T,$$

$$P_{FF} = \left[ \frac{1}{g_1} \mathcal{L}_{FF_1}^T, \dots, \frac{1}{g_{n_F}} \mathcal{L}_{FF_{n_F}}^T \right]^T,$$

$$P_{FL} = \left[ \frac{1}{g_1} \mathcal{L}_{FL_1}^T, \dots, \frac{1}{g_{n_F}} \mathcal{L}_{FL_{n_F}}^T \right]^T,$$

$$P_{LL} = \left[ \frac{1}{g_{n_F+1}} \mathcal{L}_{LL_1}^T, \dots, \frac{1}{g_{n-1}} \mathcal{L}_{LL_{n-1}}^T, \left( \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n_L} \right)^T \right]^T,$$

donde  $\mathcal{L}_{FF_i}$ ,  $\mathcal{L}_{FL_i}$  y  $\mathcal{L}_{LL_i}$  son el  $i$ -3simo rengl3n de las submatrices  $\mathcal{L}_{FF}$ ,  $\mathcal{L}_{FL}$  y  $\mathcal{L}_{LL}$ , respectivamente.

A partir de este punto se realiza un procedimiento similar al presentado en la demostraci3n del inciso 2 del Teorema 3.2. ■

Modificando la ley de control anterior (4.30a)-(4.30c) agregando el campo vectorial repulsivo (4.2) tenemos finalmente la estrategia para lograr el confinamiento con avance en formaci3n variante en el tiempo con evasi3n de colisiones dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t) + \beta_n) \quad (4.32a)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f \tanh(\alpha_i - \alpha_i^*) + \dot{\alpha}_i^* + \beta_i), \quad i = n_F + 1, \dots, n - 1 \quad (4.32b)$$

$$\begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix} = A_j^{-1}(\theta_j) (-k_c \tanh(\alpha_j - \alpha_j^*) + \dot{\alpha}_j^* + \beta_j), \quad j = 1, \dots, n_F \quad (4.32c)$$

El segundo resultado principal en esta secci3n es muy similar al segundo presentado en la secci3n anterior, el cu3l consiste en una serie de 3 teoremas, considerando el caso m3s simple, cuando existe riesgo de colisi3n entre 2 agentes, luego el caso cuando hay riesgo de colisi3n entre 3 agentes y por 3ltimo, el caso general.

A continuaci3n se muestran los resultados de una simulaci3n num3rica usando la ley de control (4.32a)-(4.32c). Para la simulaci3n consideramos 8 robots m3viles de tracci3n diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se localiza a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gr3fica de formaci3n empleada en la simulaci3n se muestra en la Figura 4.11.

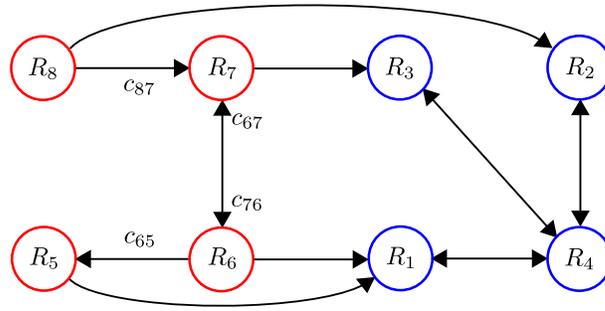


Figura 4.11: Gr3fica de formaci3n para la simulaci3n.

Los par3metros utilizados en la simulaci3n son  $k_m = 1, k_f = k_c = 2$ . La trayectoria deseada de navegaci3n es una curva de Lissajous dada por

$$m(t) = \left[ 4.5 \sin \left( \omega_x t + \frac{\pi}{2} \right), 1.5 \sin(\omega_y) \right]^T,$$

donde  $\omega_x = \frac{2\pi}{T}$  y  $\omega_y = \frac{6\pi}{T}$  con un periodo de  $T = 80$  s. Los vectores de posici3n est3tica son  $c_{87} = [-1.2, -0.6]^T$ ,  $c_{76} = [0, 1.2]^T$ ,  $c_{67} = [0, -1.2]^T$  and  $c_{65} = [-0.6, -0.6]^T$ . El

factor de escalamiento está dado por

$$\mu(t) = 1 + 0.2 \sin(\omega_x t).$$

La distancia mínima permitida entre los agentes es  $d = 0.2$  m y el parámetro  $\epsilon$  se estableció en  $\epsilon = 2.2(\hat{\eta}/d)$ ,  $k = 1, \dots, n$  para asegurar que la condición de distancia mínima no sea violada.

La Figura 4.12 muestra el movimiento de los agentes en el plano. Las posiciones iniciales de los agentes están indicadas con una "x" las posiciones en los tiempos  $t = 0.38, 12, 22, 32, 42, 52, 62$  y  $72$  s se representan con un círculo "o". Se observa como el agente líder principal sigue la trayectoria deseada de navegación, mientras que los agentes líderes secundarios logran una formación variante en el tiempo con respecto al líder principal y los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes. Además, no hay colisiones entre los agentes.

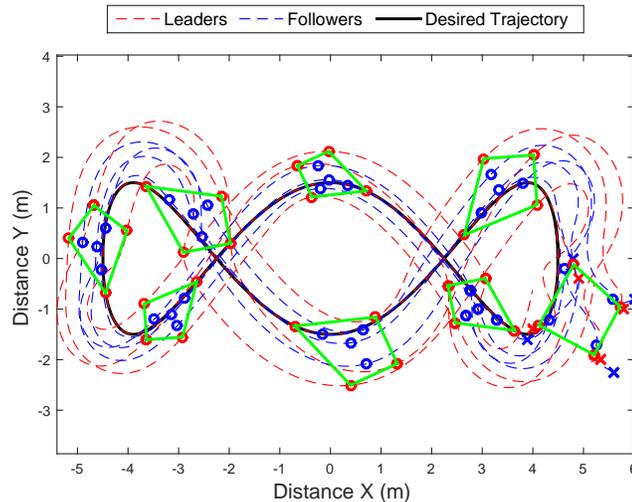


Figura 4.12: Trayectorias de los agentes en el plano.

Las Figuras 4.13(a) y 4.13(b) muestran los errores de los seguidores y líderes, respectivamente. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas se presentan en las Figuras 4.14(a) y 4.14(b).

La Figura 4.15(a) muestra todas las distancias posibles entre los agentes. Las distancias entre cualquier par de agentes siempre es mayor o igual a la distancia mínima predefinida  $d = 0.2$ . Para una mejor apreciación de la Figura 4.15(a), un acercamiento a las distancias entre los agentes que están en riesgo de colisión se presenta en la Figura 4.15(b).

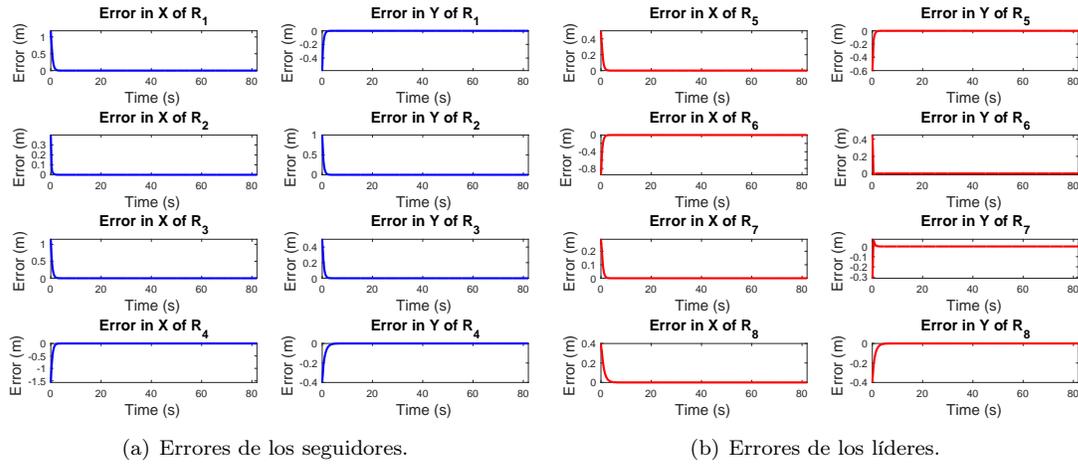


Figura 4.13: Errores de los agentes del sistema.

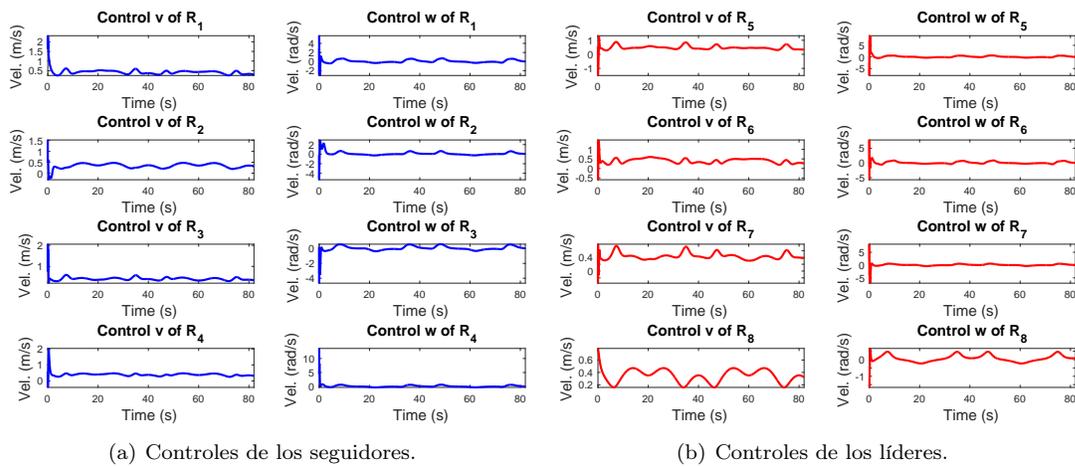


Figura 4.14: Controles de los agentes del sistema.

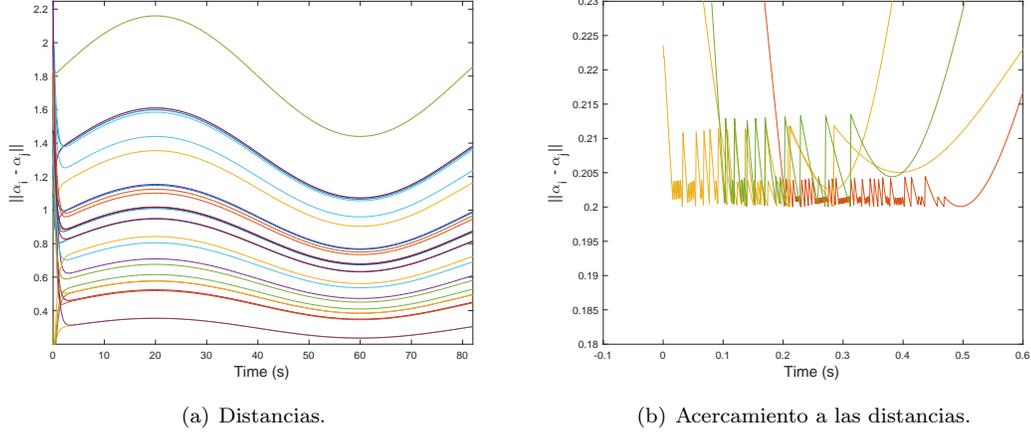


Figura 4.15: Distancias entre los agentes del sistema.

#### 4.4. Evasión de colisiones en forma grupal sin perder la formación

En esta sección se estudia el problema de evasión de obstáculos en el control de avance en formación estática. Para ello se utiliza una estrategia líder-seguidores, empleando una gráfica de formación directa centra en el líder como la que se muestra en la Figura 2.3. En este caso, el líder es un agente virtual y se ubica en el centroide del patrón geométrico deseado para los agentes seguidores. La evasión de obstáculos se realiza a través de un campo vectorial repulsivo tipo foco inestable que se agrega al control de seguimiento de trayectorias en el líder virtual. Se pretende lograr la evasión de los obstáculos sin perder la formación deseada, emulando el comportamiento de un cuerpo rígido.

Sea  $m(t) = [m_x(t), m_y(t)]^T$  una trayectoria de marcha preestablecida y continuamente diferenciable, donde  $\|\dot{m}(t)\| \leq \eta_m, \forall t \geq 0$ . Sean  $\xi_{o_j} = [x_{o_j}, y_{o_j}]^T$  con  $j = 1, \dots, m$ , las posiciones de los obstáculos. El objetivo es diseñar una estrategia de control descentralizada  $[v_i, w_i]^T = f_i(\alpha_i, N_i), i = 1, \dots, n - 1, u_n = f_n(\alpha_n, m(t))$  tal que se logre

- El seguimiento asintótico de una trayectoria deseada por parte del agente líder virtual, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$$

- Una formación deseada por parte de los agentes seguidores con respecto al líder virtual, i.e. para  $i = 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_n(t) - c_{ni}) = 0$$

- La evasión de obstáculos por parte de todos los agentes del sistema; esto es, que para todo tiempo  $t$ , todos los agentes del sistema permanezcan a una distancia

mayor o igual a una distancia mínima predefinida  $d_o$  de los obstáculos, i.e. para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$

$$\|\alpha_i(t) - \xi_{o_j}\| \geq d_o, \quad \forall t \geq 0$$

Para el problema de avance en formación estática proponemos una ley de control acotada dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)) \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) (-k_f \tanh(\alpha_i - \alpha_n - c_{ni}) + \dot{\alpha}_n), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.34)$$

donde  $c_{ni}$  es el vector de posición relativa deseada entre el agente líder virtual y el  $i$ -ésimo agente,  $\dot{m}(t)$  es la velocidad de avance,  $\dot{\alpha}_n$  es la velocidad del líder virtual,  $k_m$  y  $k_f$  son las ganancias de control.

**Teorema 4.8** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.33)-(4.34). Suponga que  $k_m, k_f > 0$ . Entonces en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.33)-(4.34) el agente líder virtual converge a la trayectoria deseada de navegación, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$ , mientras que los agentes seguidores logran una formación deseada con respecto al líder virtual, i.e. para  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_n(t) - c_{ni}) = 0$ .*

**Demostración.** Los errores del sistema en forma matricial están dados por

$$e = A\alpha + C \quad (4.35)$$

donde  $e = [e_1, \dots, e_{n-1}, e_n]$ ,  $C = [c_{n1}, \dots, c_{n(n-1)}, m(t)]^T$  y  $A = \mathcal{L}(G) + \Gamma$ , con

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

La dinámica del error resulta

$$\dot{e} = -(K \otimes I_2) \tanh(e) \quad (4.36)$$

con  $K = \text{diag}(\mu_f, \dots, \mu_f, \mu_m) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\otimes$  denota el producto Kronecker y  $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz identidad.

Proponemos una función candidata de Lyapunov dada por

$$V = \frac{1}{2} e^T (K \otimes I_2)^{-1} e \quad (4.37)$$

calculando la derivada de (4.17) tenemos

$$\dot{V} = -e^T (K \otimes I_2)^{-1} (K \otimes I_2) \tanh(e) = -e^T \tanh(e) < 0 \quad (4.38)$$

por lo que los errores convergen asintóticamente a cero. ■

Sea  $N_o = \{Ob_1, \dots, Ob_m\}$  un conjunto de obst3culos fijos. La distancia entre el punto  $\alpha_n$  del l3der virtual y cada uno de los obst3culos est3 dada por  $\|\alpha_n - \xi_{o_j}\|$ . Entonces los obst3culos  $Ob_j$  que est3n en riesgo de colisi3n con la formaci3n deseada pertenecen al conjunto

$$Mo_n = \{Ob_j \in N_o \mid \|\alpha_n - \xi_{o_j}\| \leq d_{o_n}\}, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.39)$$

donde  $d_{o_n}$  es la m3nima distancia permitida entre el l3der virtual y los obst3culos. Con el fin de evitar colisiones con obst3culos, proponemos campos vectoriales repulsivos dados por

$$\beta_{o_n} = \epsilon_o \sum_{j \in M_n} \delta_{o_{nj}} \begin{bmatrix} (\alpha_{xn} - x_{o_j}) - (\alpha_{yn} - y_{o_j}) \\ (\alpha_{xn} - x_{o_j}) + (\alpha_{yn} - y_{o_j}) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

donde  $\epsilon_o > 0$  y el par3metro  $\delta_{o_{nj}}$  est3 dado de la siguiente manera

$$\delta_{o_{nj}} = \begin{cases} 1, & \text{si } \|\alpha_n - \xi_j\| \leq d_{o_n} \\ 0, & \text{si } \|\alpha_n - \xi_j\| > d_{o_n} \end{cases} \quad (4.41)$$

Los campos vectoriales repulsivos se proponen de tal manera que exista un foco inestable que gira en sentido antihorario centrado en la posici3n de los obst3culos con los que se est3 en riesgo de colisi3n.

**Observaci3n 4.2** *Cabe mencionar que la distancia m3xima deseada entre los agentes seguidores con respecto al l3der virtual  $\max\{\|c_{ni}\|\}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , debe ser menor a la distancia m3nima permitida entre el l3der virtual y los obst3culos  $d_{o_n}$ . De este modo, tenemos que la distancia m3nima permitida entre el l3der virtual y los obst3culos debe ser  $d_{o_n} = d_o + \max\{\|c_{ni}\|\}$ .*

Adem3s, hacemos las siguientes suposiciones:

**Suposici3n 4.3** *Los agentes seguidores  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  conocen la posici3n del agente l3der virtual  $R_n$  para todo tiempo  $t$ , pero no conocen las posiciones de los obst3culos; s3lo el agente l3der virtual puede detectar la presencia de los obst3culos.*

**Suposici3n 4.4** *La condici3n inicial del agente l3der virtual satisface  $\|\alpha_n(0) - \xi_{o_j}(0)\| > d_{o_n}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Tambi3n se supone que los agentes seguidores no est3n en riesgo de colisi3n con alg3n obst3culo antes de lograr la formaci3n deseada con respecto al l3der virtual y tampoco hay riesgo de colisi3n entre ellos.*

Finalmente, la ley de control con evasi3n de obst3culos para el agente l3der virtual est3 dada por

$$\begin{bmatrix} v_n \\ w_n \end{bmatrix} = A_n^{-1}(\theta_n) (-k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t) + \beta_n) \quad (4.42)$$

Para analizar la distancia relativa entre el l3der virtual y alg3n obst3culo, definiremos las variables  $p_{jn} = \alpha_{xn} - x_{o_j}$  y  $q_{jn} = \alpha_{yn} - y_{o_j}$ . En el plano  $p_{jn} - q_{jn}$ , identificaremos

al origen como el punto donde ocurre una colisión entre el líder virtual y el  $j$ -ésimo obstáculo y un círculo de radio  $d_{on}$  centrado en el origen. Fuera del círculo sólo actúa la ley de control para el seguimiento de trayectoria mientras que dentro del círculo aparece el campo vectorial repulsivo.

**Teorema 4.9** *Considere el sistema (2.3) y la ley de control (4.42). Suponga que hay riesgo de colisión con un obstáculo al instante  $t$  y que  $\epsilon_o > (k_m\sqrt{2} + \eta_m)/d_{on}$ . Entonces en el sistema en lazo cerrado (2.3)-(4.42) el agente líder virtual converge a la trayectoria deseada de marcha y además permanece durante todo  $t \geq 0$  a una distancia mayor o igual a  $d_{on}$ ; lo que implica que todos los agentes del sistema permanezcan a una distancia mayor o igual a una distancia mínima  $d_o$  del obstáculo, i.e.  $\|\alpha_i(t) - \xi_o\| \geq d_o, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1$ .*

**Demostración.** Se desea mostrar que el líder virtual  $R_n$  logra evadir al obstáculo  $Ob_j$  y permanece a una distancia mínima de él. Definimos una superficie dada por

$$\sigma_{jn} = p_{jn}^2 + q_{jn}^2 - d_n^2 = 0 \quad (4.43)$$

Al existir riesgo de colisión,  $p_{jn}$  y  $q_{jn}$  se encuentran dentro del círculo  $\sigma_{jn} < 0$ . Para determinar el comportamiento bajo la acción del campo vectorial repulsivo, se calcula la derivada con respecto al tiempo de (4.43) y se evalúa a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado. La dinámica de  $p_{jn}$  y  $q_{jn}$  es

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{jn} \\ \dot{q}_{jn} \end{bmatrix} = -k_m \tanh(\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t) + \epsilon_o \begin{bmatrix} p_{jn} - q_{jn} \\ p_{jn} + q_{jn} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{jn} &= 2 \begin{bmatrix} p_{jn} & q_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{jn} \\ \dot{q}_{jn} \end{bmatrix} \\ &= -2k_m \begin{bmatrix} p_{jn} & q_{jn} \end{bmatrix} \tanh(\alpha_n - m(t)) \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} p_{jn} & q_{jn} \end{bmatrix} \dot{m}(t) + 2\epsilon_o(p_{jn}^2 + q_{jn}^2) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Es necesario mostrar que  $\dot{\sigma}_{jn}$ , en la región interna es positivo, esto significa que el campo vectorial resultante dentro del círculo apunta hacia el exterior, es decir, hacia la región libre de colisiones. Se puede acotar (4.45) por

$$\dot{\sigma}_{jn} > -2k_m d_{on} \sqrt{2} - 2d_{on} \eta_m + 2\epsilon_o d_{on}^2 \quad (4.46)$$

donde  $\eta_m$  es la cota de la velocidad de la trayectoria. Por lo tanto, si  $\epsilon_o > (k_m\sqrt{2} + \eta_m)/d_{on}$  entonces  $\dot{\sigma}_{jn} > 0$ . Con esto se logra que el líder virtual evada el obstáculo y permanezca a una distancia mayor ó igual a  $d_{on}$  del mismo. ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos en una simulación numérica utilizando las leyes de control (4.42)-(4.34). Para la simulación se consideran 4 robots móviles de tracción diferencial, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se encuentra a una distancia de 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. Uno de los robots es el líder virtual y los 3 robots restantes son seguidores.

Los parámetros utilizados en la simulación son  $k_m = 1$ ,  $k_f = 2$ . La trayectoria deseada de marcha es una Lemniscata de Geronno dada por

$$m(t) = \left[ 1.5 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0.75 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]$$

con un periodo de  $T = 60$  s y una cota de velocidad dada por  $\eta_m = 0.2221$ . Los vectores de posición deseada son  $c_{41} = [-0.2\text{sen}(\pi/6), 0.2 \cos(\pi/6)]$ ,  $c_{42} = [-0.2\text{sen}(\pi/6), -0.2 \cos(\pi/6)]$  y  $c_{43} = [0.2, 0]$ . La distancia mínima entre los agentes seguidores y el obstáculo es de  $d_o = 0.2$  m, por lo que la distancia mínima entre el líder virtual y el obstáculo resulta  $d_{o_n} = d_o + \max\{\|c_{41}\|, \|c_{42}\|, \|c_{43}\|\} = 0.4$  m y  $\epsilon_o = 2(k_m\sqrt{2} + \eta_m)/d_{o_n} = 8.181567$ .

La Figura 4.16 muestra el movimiento de los agentes en el plano. El obstáculo se encuentra en el origen y se puede observar como se logra el seguimiento de trayectoria sin perder la formación evadiendo dicho obstáculo.

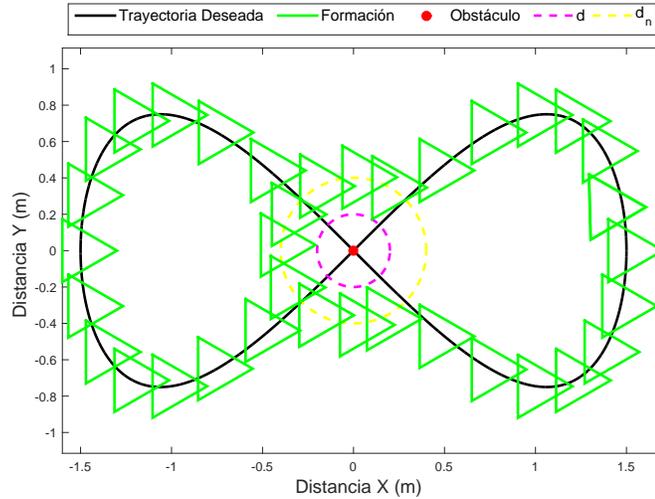


Figura 4.16: Movimiento en el plano de los agentes.

La Figura 4.17 presenta los errores de posición de los agentes. El líder virtual presenta un error en el seguimiento de trayectoria al momento de evadir el obstáculo, mientras que los seguidores logran mantener la formación deseada con respecto al líder.

En la Figura 4.18 se muestran las distancias entre todos los agentes y el obstáculo. El líder virtual permanece a una distancia mayor o igual a la distancia mínima entre él y el obstáculo  $d_{o_n}$  y los seguidores a una distancia  $d_o$ .

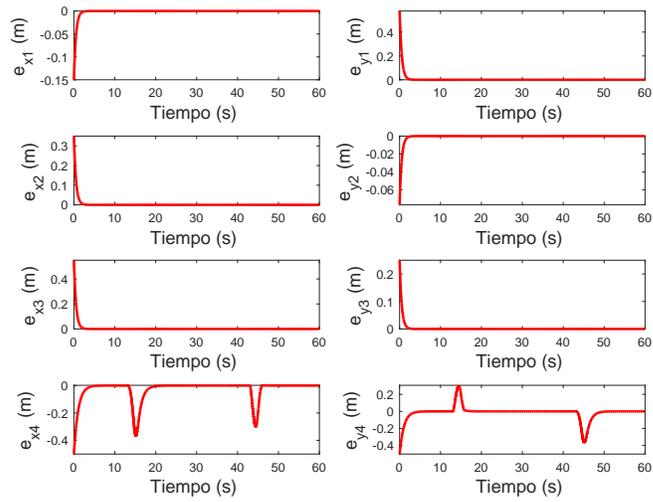


Figura 4.17: Errores de posición de los agentes.

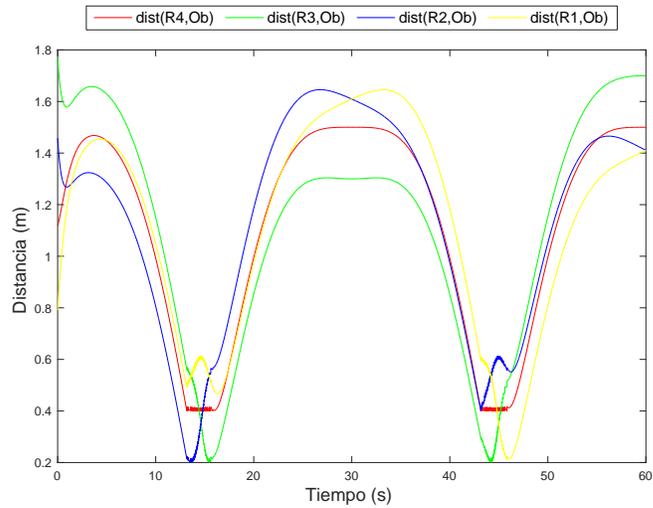


Figura 4.18: Distancias entre los agentes y el obstáculo.

## Capítulo 5

# Estrategias de control para helicópteros de 4 rotores

Esta sección presenta el diseño de estrategias de control para la coordinación de movimiento de helicópteros de 4 rotores, en particular, para un helicóptero de 4 rotores comercial AR.Drone 2.0 fabricado por la empresa francesa Parrot. Se presenta un control para el seguimiento de trayectorias. Se muestra una primera aproximación utilizando el modelo simple del AR.Drone. Posteriormente, se presenta un control de seguimiento de trayectorias diseñado con la técnica de Backstepping y utilizando el modelo completo del AR.Drone. Se añade además a ésta última, el uso de observadores de estado para estimar las velocidades de traslación y rotación; esto debido a la presencia de ruido en las mediciones obtenidas de los sensores y que para el caso de la velocidad de traslación en el eje  $Z$  no se pueden obtener mediciones y que la velocidad de rotación sobre el mismo eje presenta errores. Finalmente, se presenta un control de vuelo en formación con orientación al ángulo de guiñada de un líder para helicópteros de 4 rotores convencionales.

### 5.1. Control de seguimiento de trayectorias

Para el diseño de la estrategia de control, se considera el modelo simple del AR.Drone dado por (2.11a)-(2.11d). Reescribimos (2.11a)-(2.11b) como

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = gA(\psi) \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Definiendo variables de control auxiliares  $u = [u_{x,y}]^T$  es posible establecer una estrategia para controlar la posición en el plano  $XY$  dada por

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} \sin \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{g}A^{-1}(\psi) \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Sea  $\xi_{xy} = [x, y]^T$ . El sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.2) produce

$$\ddot{\xi}_{xy} = u \quad (5.3)$$

Sea  $m(t) = [m_x(t), m_y(t)]^T$  una trayectoria preestablecida en el plano  $XY$  la cual se supone dos veces continuamente diferenciable,  $m_z(t)$  una altura deseada y  $\psi_d$  un ángulo de guiñada deseado. El objetivo de este trabajo es diseñar una estrategia de control  $[u, w, r]^T = f_i(\xi_{xy}, \dot{\xi}_{xy}, z, \psi)$  para un AR.Drone 2.0 tal que

- Se logre el seguimiento asintótico de una trayectoria preestablecida, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_{xy}(t) - m(t)) = 0.$$

- Se alcance un ángulo de orientación deseado en guiñada, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\psi(t) - \psi_d(t)) = 0.$$

Proponemos una ley de control tipo PD para el desplazamiento del AR.Drone en el plano  $XY$  dada por

$$u = -k_d(\dot{\xi}_{xy} - \dot{m}(t)) - k_p(\xi_{xy} - m(t)) + \ddot{m}(t) \quad (5.4)$$

con  $k_d = \text{diag}\{k_{dx}, k_{dy}\}$  y  $k_p = \text{diag}\{k_{px}, k_{py}\}$  ganancias de control. Para controlar el desplazamiento en  $Z$  y la rotación en guiñada proponemos

$$\dot{z} = -k_{pz}(z - m_z(t)) + \dot{m}_z(t) \quad (5.5)$$

$$\dot{\psi} = -k_{p\psi}(\psi - \psi_d(t)) + \dot{\psi}_d(t) \quad (5.6)$$

donde  $k_{pz}$ ,  $k_{p\psi}$  son ganancias de control.

**Teorema 5.1** *Considere el sistema (5.3) y la ley de control (5.4). Suponga que  $k_{px}, k_{dx} > 0$  y  $k_{py}, k_{dy} > 0$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (5.3)-(5.4), el AR.Drone 2.0 converge localmente a la trayectoria deseada en el plano  $XY$ , i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_{xy}(t) - m(t)) = 0$ .*

**Demostración.** El sistema en lazo cerrado (5.3)-(5.4) produce

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + C(t) \quad (5.7)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -k_{dx} & 0 \\ 0 & -k_{dy} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -k_{px} & 0 \\ 0 & -k_{py} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} \ddot{m}_x(t) + k_{dx}\dot{m}_x(t) + k_{px}m_x(t) \\ \ddot{m}_y(t) + k_{dy}\dot{m}_y(t) + k_{py}m_y(t) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Definimos los errores del sistema en el plano  $XY$  como

$$e_x = x - m_x(t), \quad (5.10)$$

$$e_y = y - m_y(t). \quad (5.11)$$

En forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_x(t) \\ m_y(t) \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

La dinámica del error en el plano  $XY$  está dada por

$$\begin{bmatrix} \ddot{e}_x \\ \ddot{e}_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Definiendo

$$\lambda = [e_x, \dot{e}_x, e_y, \dot{e}_y]^T \quad (5.14)$$

podemos reescribir la dinámica del error como

$$\dot{\lambda} = M\lambda \quad (5.15)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

con

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{px} & -k_{dx} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{py} & -k_{dy} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

La matriz  $M$  es diagonal a bloques, por lo que el análisis se reduce al estudio de las matrices  $N_1$  y  $N_2$  que son matrices de 2 dimensiones. De esta forma, para cada ley de control con  $k_{px}, k_{dx} > 0$  y  $k_{py}, k_{dy} > 0$  la dinámica en el plano  $XY$  es localmente asintóticamente estable. ■

**Teorema 5.2** *Considere el sistema (2.11c)-(2.11d) y la ley de control (5.5)-(5.6). Suponga que  $k_{pz}, k_{p\psi} > 0$ . Entonces, en el sistema en lazo cerrado (2.11c)-(2.11d)-(5.5)-(5.6), el AR.Drone 2.0 converge localmente a la trayectoria deseada en el eje  $Z$ , i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - m_z(t)) = 0$  y a la orientación deseada de guiñada, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\psi(t) - \psi_d(t)) = 0$ .*

**Demostración.** El sistema en lazo cerrado (2.11c)-(2.11d)-(5.5)-(5.6) produce

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} z \\ \psi \end{bmatrix} + E(t) \quad (5.18)$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} -k_{pz} & 0 \\ 0 & -k_{p\psi} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \dot{m}_z(t) + k_{pz}m_z(t) \\ \dot{\psi}_d(t) + k_{p\psi}\psi_d(t) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Definimos los errores del sistema como

$$e_z = z - m_z(t) \quad (5.20)$$

$$e_\psi = \psi - \psi_d(t) \quad (5.21)$$

en forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} e_z \\ e_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_z(t) \\ \psi_d(t) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

La dinámica del error resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_z \\ \dot{e}_\psi \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} e_z \\ e_\psi \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Claramente, la matriz  $D$  es Hurwitz y los errores convergen localmente asintóticamente a cero. ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica utilizando las leyes de control (5.4), (5.5) y (5.6). Los parámetros usados en los experimentos son  $k_{dx} = k_{px} = k_{dy} = k_{py} = 1.5$ ,  $k_{pz} = 2$  y  $k_{p\psi} = 6$ . La trayectoria deseada en el plano  $XY$  es una Lemniscata de Geronon dada por

$$m(t) = \left[ 2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]^T,$$

con un periodo de  $T = 60$  s. Se tienen una altura y un ángulo de guiñada constantes, donde la altura deseada es  $m_z = 1.2$  m y el ángulo de guiñada deseado  $\psi_d = 45^\circ$ . La Figura 5.1 muestra el movimiento del AR.Drone en el espacio. Las Figuras 5.2(a) 5.2(b) muestran los errores de posición y orientación, respectivamente.

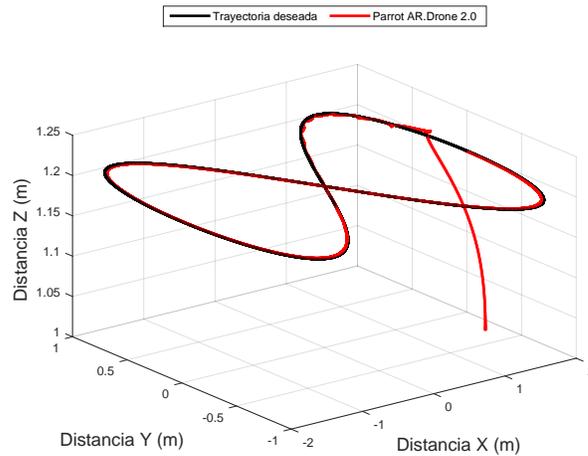


Figura 5.1: Movimientos del AR.Drone en el espacio.

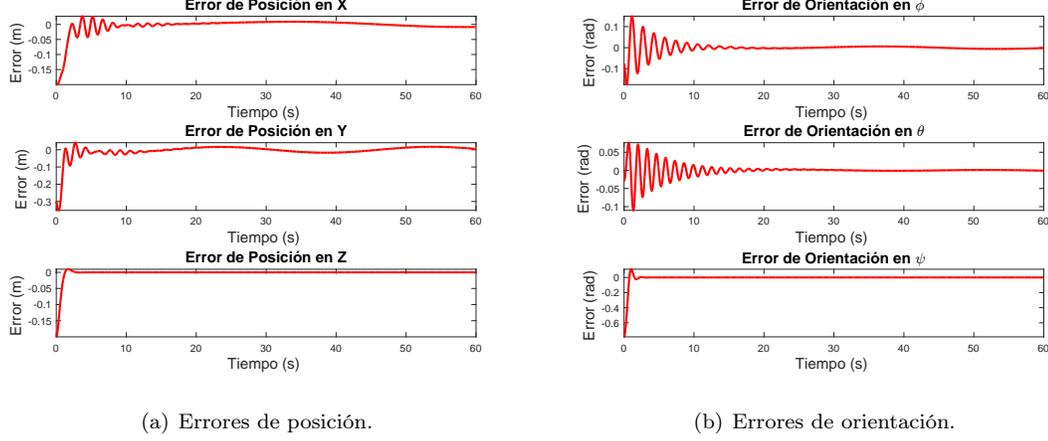


Figura 5.2: Errores del AR.Drone.

## 5.2. Control por backstepping para el seguimiento de trayectorias utilizando observadores de estado

En esta sección utilizaremos la técnica de *Backstepping* [44, 45, 46] para el diseño de la ley de control de movimiento en el plano  $XY$ . El Backstepping es una técnica de diseño de leyes de control, desarrollada por Petar V. Kokotovic, que se utiliza para una clase especial de sistemas dinámicos no lineales que están contruidos por subsistemas anidados originados de un subsistema irreducible, el cual puede ser estabilizado por algún método conocido. El proceso de diseño inicia con el subsistema irreducible que se puede estabilizar y “regresar” a través de los subsistemas anidados diseñando controladores que estabilicen progresivamente cada subsistema, terminando el proceso cuando se alcanza el último control externo.

Definimos los estados para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  como

$$\xi_1 = [x \quad y]^T \quad (5.24a)$$

$$\xi_2 = [\dot{x} \quad \dot{y}]^T \quad (5.24b)$$

$$\eta_1 = [\theta \quad \phi]^T \quad (5.24c)$$

$$\eta_2 = [\dot{\theta} \quad \dot{\phi}]^T \quad (5.24d)$$

Haciendo una aproximación de primer orden para (2.14a)-(2.14b) y suponiendo una altura y un ángulo de guiñada constantes, la dinámica de los estados resulta

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5.25a)$$

$$\dot{\xi}_2 = gA(\psi)\eta_1 \quad (5.25b)$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \quad (5.25c)$$

$$\dot{\eta}_2 = -\beta_1\eta_2 - \beta_2\eta_1 + \beta_3u_\eta \quad (5.25d)$$

donde  $u_\eta = [u_\theta \quad u_\phi]^T$ ,

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix},$$

es una matriz de rotación que depende del ángulo de guiñada,

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad y \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

son matrices constantes que contienen los términos obtenidos en el modelado por funciones de transferencia del AR.Drone 2.0. Tomando  $u_\eta = \beta_3^{-1} [\beta_1 \eta_2 + \beta_2 \eta_1 + v_\eta]$  el sistema (5.25a)-(5.25d) se reduce a

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \tag{5.26a}$$

$$\dot{\xi}_2 = gA(\psi)\eta_1 \tag{5.26b}$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \tag{5.26c}$$

$$\dot{\eta}_2 = v_\eta \tag{5.26d}$$

Definimos los errores del sistema como

$$e_{\xi 1} = \xi_1 - \xi_1^d \tag{5.27a}$$

$$e_{\xi 2} = \xi_2 - \dot{\xi}_1^d \tag{5.27b}$$

$$e_{\eta 1} = \eta_1 - \eta_1^d \tag{5.27c}$$

$$e_{\eta 2} = \eta_2 - \dot{\eta}_1^d \tag{5.27d}$$

donde  $\xi_1^d$  son las posiciones deseadas para AR.Drone 2.0 en el plano  $XY$ ,  $\eta_1^d$  son las orientaciones deseadas para AR.Drone 2.0, es decir, los ángulos deseados en alabeo y cabeceo. La dinámica del error en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\psi$  resulta

$$\dot{e}_{\xi 1} = e_{\xi 2} \tag{5.28a}$$

$$\dot{e}_{\xi 2} = gA(\psi)e_{\eta 1} \tag{5.28b}$$

$$\dot{e}_{\eta 1} = e_{\eta 2} \tag{5.28c}$$

$$\dot{e}_{\eta 2} = v_\eta - \ddot{\eta}_1^d \tag{5.28d}$$

Reescribiendo la dinámica del error y tomando  $v_\eta = \ddot{\eta}_1^d + w_\eta$  tenemos

$$\dot{e}_\xi = A_\xi e_\xi + B_\xi e_{\eta 1} \tag{5.29a}$$

$$\dot{e}_{\eta 1} = e_{\eta 2} \tag{5.29b}$$

$$\dot{e}_{\eta 2} = w_\eta \tag{5.29c}$$

donde  $e_\xi = [e_{\xi 1} \quad e_{\xi 2}]^T$ ,

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B_\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(\psi) \end{bmatrix}$$

con  $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz identidad.

Para comenzar el proceso de diseño por Backstepping, consideramos el subsistema (5.29a), donde  $e_{\eta 1}$  se toma como entrada. Proponemos una ley de control  $e_{\eta 1} = \alpha_1(e_\xi)$  dada por

$$e_{\eta 1} = \alpha_1(e_\xi) = \frac{1}{g} A^{-1}(\psi) [-k_p e_{\xi 1} - k_d e_{\xi 2}] \quad (5.30)$$

donde  $k_p, k_d > 0$  son las ganancias de control. El subsistema en lazo cerrado (5.29a)-(5.39) produce

$$\dot{e}_\xi = H e_\xi \quad (5.31)$$

con

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix} \otimes I_2$$

donde  $\otimes$  denota el producto Kronecker. Se tiene la siguiente función de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} e_\xi^T P e_\xi \quad (5.32)$$

donde la matriz  $P$  tiene la forma

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \otimes I_2 \quad (5.33)$$

y se satisface

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2} e_\xi^T (PH + H^T P) e_\xi \leq -\frac{1}{2} e_\xi^T Q e_\xi \quad (5.34)$$

por lo que el subsistema en lazo cerrado (5.29a)-(5.39) es asintóticamente estable. Para el primer paso de backstepping, hacemos un cambio de variables

$$y_2 = e_{\eta 1} - \alpha_1(e_\xi) \quad (5.35)$$

que resulta en

$$\dot{e}_\xi = [A_\xi e_\xi + B_\xi \alpha_1(e_\xi)] + B_\xi y_2 \quad (5.36a)$$

$$\dot{y}_2 = u_1 \quad (5.36b)$$

donde  $e_{\eta 2} = \dot{\alpha}_1(e_\xi) + u_1$ . Usando

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} y_2^T y_2 \quad (5.37)$$

como función candidata de Lyapunov, obtenemos

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2} e_\xi^T Q e_\xi + y_2^T g A^{-1}(\psi) [b e_{\xi 1} + c e_{\xi 2}] + y_2^T u_1 \quad (5.38)$$

Eligiendo

$$u_1 = -g A^{-1}(\psi) [b e_{\xi 1} + c e_{\xi 2}] - k_1 y_2 \quad (5.39)$$

con  $k_1 > 0$  la ganancia de control, produce

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2}e_\xi^T Q e_\xi - y_2^T k_1 y_2 \quad (5.40)$$

con lo que el subsistema (5.36a)-(5.36b)-(5.39) es asintóticamente estable. Sustituyendo  $u_1$ ,  $\dot{\alpha}_1(e_\xi)$  y  $y_2$  en el control  $e_{\eta 2} = \alpha_2(e_\xi, e_{\eta 1})$  tenemos

$$\begin{aligned} e_{\eta 2} = \alpha_2(e_\xi, e_{\xi 1}) = & -\frac{k_p}{g} A^{-1}(\psi) e_{\xi 2} - k_d e_{\eta 1} \\ & - g A^{-1}(\psi) [b e_{\xi 1} + c e_{\xi 2}] - k_1 (e_{\eta 1} - \alpha_1(e_\xi)) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Después de un paso de backstepping, sabemos que el subsistema (5.29a)-(5.29b) reescrito como

$$\dot{e}_\xi^+ = A_\xi^+ e_{xi}^+ + B_\xi^+ e_{\eta 2} \quad (5.42)$$

donde  $e_\xi^+ = [e_\xi \quad e_{\eta 1}]^T$ ,

$$A_\xi^+ = \begin{bmatrix} A_\xi & B_\xi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_\xi^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

tomando a  $e_{\eta 2}$  como entrada, puede ser estabilizado por la ley de control (5.41). Para el segundo paso de backstepping, hacemos otro cambio de variables

$$y_3 = e_{\eta 2} - \alpha_2(e_\xi, e_{\eta 1}) \quad (5.43)$$

que resulta en

$$\dot{e}_\xi^+ = [A_\xi^+ e_\xi^+ + B_\xi^+ \alpha_2(e_\xi, e_{\eta 1})] + B_\xi^+ y_3 \quad (5.44a)$$

$$\dot{y}_3 = u_2 \quad (5.44b)$$

donde  $w_\eta = \dot{\alpha}_2(e_\xi, e_{\eta 1}) + u_2$ . Usando

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} y_3^T y_3 \quad (5.45)$$

como función candidata de Lyapunov, obtenemos

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{1}{2} e_\xi^T Q e_\xi - y_2^T k_1 y_2 + y_3^T y_2 + y_3^T u_2 \quad (5.46)$$

Eligiendo

$$u_2 = -y_2 - k_2 y_3 \quad (5.47)$$

con  $k_2 > 0$  la ganancia de control, produce

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{1}{2} e_\xi^T Q e_\xi - y_2^T k_1 y_2 - y_3^T k_2 y_3 \quad (5.48)$$

con lo que el subsistema (5.44a)-(5.44b)-(5.47) es asintóticamente estable. Sustituyendo  $u_2$ ,  $\dot{\alpha}_2(e_\xi, e_{\eta_1})$  y  $y_3$  en el control  $w_\eta$  tenemos

$$\begin{aligned} w_\eta = & -\frac{(bg^2 + k_1k_p)}{g}A^{-1}(\psi)e_{\xi_2} - (k_p + k_1k_d + cg^2)e_{\eta_1} \\ & - (k_1 + k_d)e_{\eta_2} - (e_{\eta_1} - \alpha_1(e_\xi)) - k_2(e_{\eta_2} - \alpha_2(e_\xi, e_{\eta_1})) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Después de dos pasos de backstepping y haciendo las sustituciones respectivas, tenemos que la ley de control para el movimiento en el plano del AR.Drone 2.0 está dada por

$$\begin{aligned} u_\eta = & \beta_3^{-1} [\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1 + \ddot{\eta}_1^d \\ & - \frac{1}{g}A^{-1}(\psi) [(k_p + k_2bg^2 + k_2k_1k_p)(\xi_1 - \xi_1^d) \\ & + (bg^2 + k_1k_p + k_d + k_2k_p + k_2cg^2 + k_2k_1k_d)(\xi_2 - \xi_2^d)] \\ & - (k_p + k_1k_d + cg^2 + I + k_2k_d + k_2k_1)(\eta_1 - \eta_1^d) \\ & - (k_2 + k_1 + k_d)(\eta_2 - \eta_2^d)] \end{aligned} \quad (5.50)$$

**Proposición 5.1** *Considere el subsistema (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e) y la ley de control (5.50). Entonces en el sistema en lazo cerrado (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e)-(5.50) el AR.Drone converge localmente asintóticamente a la trayectoria deseada en el plano XY, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_1(t) - \xi_1^d(t)) = 0$ , y a los ángulos deseados de orientación de alabeo y cabeceo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_1(t) - \eta_1^d(t)) = 0$ .*

**Demostración.** El procedimiento de diseño con la técnica de backstepping asegura convergencia asintótica del sistema en lazo cerrado (5.25a)-(5.25d)-(5.50), donde (5.25a)-(5.25d) es una aproximación de primer orden de (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e). Por lo tanto, se garantiza convergencia local asintótica para el sistema en lazo cerrado (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e)-(5.50). ■

Para controlar la posición en altura y el ángulo de guiñada en el AR.Drone, proponemos las siguientes leyes de control

$$u_z = \frac{1}{a_3} [a_1z_2 - k_{pz}(z_1 - z_1^d) - k_{dz}(z_2 - \dot{z}_1^d) + \ddot{z}_1^d] \quad (5.51)$$

$$u_\psi = \frac{1}{d_3} [d_1\psi_2 - k_{p\psi}(\psi_1 - \psi_1^d) - k_{d\psi}(\psi_2 - \dot{\psi}_1^d) + \ddot{\psi}_1^d] \quad (5.52)$$

donde  $z_1 = z$ ,  $z_2 = \dot{z}$  y  $\psi_1 = \psi$ ,  $\psi_2 = \dot{\psi}$  son los estados para la dinámica en  $Z$  y en  $\psi$ , respectivamente,  $a_1$ ,  $a_3$  y  $d_1$ ,  $d_3$  son las constantes de las funciones de transferencia para la dinámica en  $Z$  y en  $\psi$ , respectivamente,  $k_{pz}$ ,  $k_{dz}$ ,  $k_{p\psi}$  y  $k_{d\psi}$  son las ganancias de control,  $z_1^d$  es la posición deseada sobre el eje  $Z$  y  $\psi_1^d$  es el ángulo deseado de guiñada.

Generalmente, es necesario conocer el estado del sistema para resolver la mayoría de los problemas de la teoría de control. Sin embargo, en la literatura de helicópteros de 4 rotores, en muchos casos prácticos el estado del sistema no puede ser medido

directamente por lo que se utilizan observadores. El observador de Luenberger es un algoritmo que permite reconstruir el estado de un sistema dinámico a partir de las mediciones de la entrada y la salida del mismo. Si un sistema es observable, es posible reconstruir completamente el estado del sistema con mediciones de su salida mediante el uso de un observador. En muchos casos prácticos el vector de estados observado es utilizado en la retroalimentación del estado para generar el control deseado. El procedimiento de diseño de observadores presentado en esta sección está basado en [59].

Reescribimos el subsistema para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  (5.25a)-(5.25d) de la forma

$$\dot{x}_{\xi\eta} = A_{\xi\eta}x_{\xi\eta} + B_{\xi\eta}u_{\eta} \quad (5.53a)$$

$$y_{\xi\eta} = C_{\xi\eta}x_{\xi\eta} \quad (5.53b)$$

donde  $x_{\xi\eta} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \eta_1 \ \eta_2]^T$ ,

$$A_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gA(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad B_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

y

$$C_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificamos que el subsistema para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  sea observable. La matriz de observabilidad está dada por

$$\mathcal{O}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} C_{\xi\eta} \\ C_{\xi\eta}A_{\xi\eta} \\ C_{\xi\eta}A_{\xi\eta}^2 \\ \vdots \\ C_{\xi\eta}A_{\xi\eta}^7 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

haciendo el desarrollo y obteniendo el rango de la matriz a través del software matemático MATLAB, obtenemos que el rango de la matriz de observabilidad es  $\text{rank}(\mathcal{O}_{\xi\eta}) = 8$ , es decir, es de rango completo por columnas y por lo tanto el subsistema para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  es observable. Proponemos el siguiente observador de Luenberger para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$

$$\dot{\hat{x}}_{\xi\eta} = A_{\xi\eta}\hat{x}_{\xi\eta} + B_{\xi\eta}u_{\eta} + L_{\xi\eta}(y_{\xi\eta} - \hat{y}_{\xi\eta}) \quad (5.55a)$$

$$\hat{y}_{\xi\eta} = C_{\xi\eta}\hat{x}_{\xi\eta} \quad (5.55b)$$

donde  $\hat{x}_{\xi\eta} = [\hat{\xi}_1 \ \hat{\xi}_2 \ \hat{\eta}_1 \ \hat{\eta}_2]^T$  son los estados observados y  $L_{\xi\eta}$  es una matriz de ganancias del observador.

**Proposición 5.2** *Considere el subsistema (5.53a)-(5.53b) y el observador (5.55a)-(5.55b). Entonces existe  $L_{\xi\eta}$  tal que el sistema (5.55a)-(5.55b) es un observador para el subsistema (5.53a)-(5.53b), i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi\eta}(t) - \hat{x}_{\xi\eta}(t)) = 0$ .*

**Demostración.** Definimos el error de observación como

$$\tilde{x}_{\xi\eta} = x_{\xi\eta} - \hat{x}_{\xi\eta} \quad (5.56)$$

La dinámica del error de observación resulta

$$\dot{\tilde{x}}_{\xi\eta} = (A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}) \tilde{x}_{\xi\eta} \quad (5.57)$$

y ya que el par  $(C_{\xi\eta}, A_{\xi\eta})$  es observable, se puede escoger  $L_{\xi\eta}$  tal que  $A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}$  es Hurwitz y los errores de observación converjan a cero asintóticamente. ■

**Observación 5.1** *Cabe mencionar que se tiene un observador local para la dinámica en  $X, Y, \theta$  y  $\phi$ , ya que esta basado en la aproximación de primer orden y considerando altura y ángulo de guiñada constantes.*

**Observación 5.2** *Para el caso de la dinámica en  $Z$  y  $\psi$ , se realiza un procedimiento similar al presentado en esta sección para el diseño de los observadores.*

Modificamos la ley de control (5.50) utilizando las velocidades longitudinales y rotacionales estimadas  $\hat{\xi}_2$  y  $\hat{\eta}_2$ , respectivamente, obtenidas a partir del observador (5.55a) con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} u_\eta = & \beta_3^{-1} [\beta_1 \hat{\eta}_2 + \beta_2 \eta_1 + \ddot{\eta}_1^d \\ & - \frac{1}{g} A^{-1}(\psi) [(k_p + k_2 b g^2 + k_2 k_1 k_p)(\xi_1 - \xi_1^d) \\ & + (b g^2 + k_1 k_p + k_d + k_2 k_p + k_2 c g^2 + k_2 k_1 k_d)(\hat{\xi}_2 - \dot{\xi}_1^d)] \\ & - (k_p + k_1 k_d + c g^2 + I + k_2 k_d + k_2 k_1)(\eta_1 - \eta_1^d) \\ & - (k_2 + k_1 + k_d)(\hat{\eta}_2 - \dot{\eta}_1^d)] \end{aligned} \quad (5.58)$$

**Proposición 5.3** *Considere el subsistema (5.53a), el observador (5.55a) y la ley de control (5.58). Las matrices  $H_{\xi\eta}$  y  $A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}$  son Hurwitz. Entonces en el sistema en lazo cerrado (5.53a)-(5.55a)-(5.58), los errores de seguimiento y de observación para la dinámica en  $X, Y, \theta$  y  $\phi$  convergen a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi\eta}(t) - x_{\xi\eta}^d(t)) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi\eta}(t) - \hat{x}_{\xi\eta}(t)) = 0$ .*

**Demostración.** Primeramente, identificamos a la matriz  $H_{\xi\eta}$ , a partir de los errores de seguimiento (5.27a)-(5.27d). Para ello, tenemos que la dinámica del error para  $X, Y, \theta$  y  $\phi$  en lazo cerrado con la ley de control diseñada por backstepping (5.50) resulta

$$\dot{e}_{\xi\eta} = H_{\xi\eta} e_{\xi\eta} \quad (5.59)$$

donde  $e_{\xi\eta} = [ e_{\xi1} \ e_{\xi2} \ e_{\eta1} \ e_{\eta2} ]^T$  y

$$H_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gA(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{K_1}{g}A^{-1}(\psi) & -\frac{K_2}{g}A^{-1}(\psi) & -K_3 & -K_4 \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} K_1 &= (k_p + k_2bg^2 + k_2k_1k_p) \\ K_2 &= (bg^2 + k_1k_p + k_d + k_2k_p + k_2cg^2 + k_2k_1k_d) \\ K_3 &= (k_p + k_1k_d + cg^2 + I + k_2k_d + k_2k_1) \\ K_4 &= (k_2 + k_1 + k_d) \end{aligned}$$

y a partir del procedimiento de diseño de backstepping, se sabe que la matriz  $H_{\xi\eta}$  es Hurwitz. Definimos los errores de seguimiento para el observador como

$$\hat{e}_{\xi1} = \hat{\xi}_1 - \xi_1^d \quad (5.60a)$$

$$\hat{e}_{\xi2} = \hat{\xi}_2 - \dot{\xi}_1^d \quad (5.60b)$$

$$\hat{e}_{\eta1} = \hat{\eta}_1 - \eta_1^d \quad (5.60c)$$

$$\hat{e}_{\eta2} = \hat{\eta}_2 - \dot{\eta}_1^d \quad (5.60d)$$

La dinámica del error de seguimiento considerando ahora (5.58) resulta

$$\dot{e}_{\xi\eta} = H_{\xi\eta1}e_{\xi\eta} + H_{\xi\eta2}\hat{e}_{\xi\eta} \quad (5.61)$$

donde

$$H_{\xi\eta1} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gA(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ -\frac{K_1}{g}A^{-1}(\psi) & 0 & -K_3I_2 & -\beta_1 \end{bmatrix}$$

y

$$H_{\xi\eta2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_2}{g}A^{-1}(\psi) & 0 & \beta_1 - K_4I_2 \end{bmatrix}$$

y la dinámica del error de seguimiento para el observador

$$\dot{\hat{e}}_{\xi\eta} = G_{\xi\eta1}e_{\xi\eta} + G_{\xi\eta2}\hat{e}_{\xi\eta} + L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}(e_{\xi\eta} - \hat{e}_{\xi\eta}) \quad (5.62)$$

donde

$$G_{\xi\eta1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{g}A^{-1}(\psi) & 0 & \beta_2 - K_3I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$G_{\xi\eta 2} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gA(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & -\frac{K_2}{g}A^{-1}(\psi) & -\beta_2 & -K_4I_2 \end{bmatrix}$$

Para estudiar el sistema completo, organizamos las ecuaciones para  $\dot{e}_{\xi\eta}$  y  $\dot{\hat{e}}_{\xi\eta}$  en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\xi\eta} \\ \dot{\hat{e}}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\xi\eta 1} & H_{\xi\eta 2} \\ G_{\xi\eta 1} + L_{\xi\eta}C_{\xi\eta} & G_{\xi\eta 2} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\xi\eta} \\ \hat{e}_{\xi\eta} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Definimos el siguiente cambio de variables

$$\begin{bmatrix} e_{\xi\eta} \\ \tilde{e}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_8 & 0 \\ I_8 & -I_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\xi\eta} \\ \hat{e}_{\xi\eta} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

con  $I_8 \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  la matriz identidad y donde es posible notar que  $\tilde{e}_{\xi\eta} = e_{\xi\eta} - \hat{e}_{\xi\eta} = \tilde{x}_{\xi\eta}$ , con lo que obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\xi\eta} \\ \dot{\tilde{e}}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\xi\eta 1} + H_{\xi\eta 2} & -H_{\xi\eta 2} \\ 0 & (H_{\xi\eta 1} - G_{\xi\eta 1}) - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\xi\eta} \\ \tilde{e}_{\xi\eta} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

y ya que  $H_{\xi\eta 1} + H_{\xi\eta 2} = H_{\xi\eta}$  y  $H_{\xi\eta 1} - G_{\xi\eta 1} = A_{\xi\eta}$  finalmente tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\xi\eta} \\ \dot{\tilde{e}}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\xi\eta} & -H_{\xi\eta 2} \\ 0 & A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\xi\eta} \\ \tilde{e}_{\xi\eta} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

La matriz del sistema (5.66) es triangular superior por bloques, por lo que sus eigenvalores coinciden con los eigenvalores de los bloques que se encuentran en la diagonal principal, en este caso  $H_{\xi\eta}$  y  $A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}$ . Ya que las matrices  $H_{\xi\eta}$  y  $A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}$  son Hurwitz, entonces tanto el sistema controlado como el observador son estables, por lo que el sistema completo también es asintóticamente estable, y tanto los errores de seguimiento como los errores de observación convergen a cero. ■

Para  $Z$  y  $\psi$ , modificamos las leyes de control (5.51)-(5.52) utilizando velocidades observadas, obteniendo

$$u_z = \frac{1}{a_3} [a_1 \hat{z}_2 - k_{pz} (z_1 - z_1^d) - k_{dz} (\hat{z}_2 - \dot{z}_1^d) + \ddot{z}_1^d] \quad (5.67)$$

$$u_\psi = \frac{1}{d_3} [d_1 \hat{\psi}_2 - k_{p\psi} (\psi_1 - \psi_1^d) - k_{d\psi} (\hat{\psi}_2 - \dot{\psi}_1^d) + \ddot{\psi}_1^d] \quad (5.68)$$

**Observación 5.3** Para el caso de la dinámica en  $Z$  y  $\psi$ , se realiza un procedimiento similar al presentado en esta sección para el análisis del control con observador.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica utilizando las leyes de control (5.58), (5.67) y (5.68). La trayectoria deseada en el plano  $XY$  es una Lemniscata de Geronno dada por

$$m(t) = \left[ \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right), 0.5 \sin \left( \frac{4\pi t}{T} \right) \right]^T,$$

con un periodo de  $T = 60$  s. La altura deseada es  $m_z = 1.3$  m y el ángulo de guiñada deseado  $\psi_d = 45^\circ$ . La Figura 5.3 muestra el movimiento del AR.Drone en el espacio. Las Figuras 5.4(a) 5.4(b) muestran los errores de posición y orientación, respectivamente.

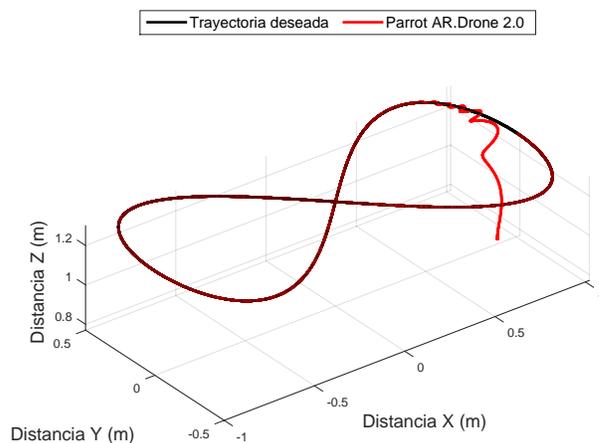
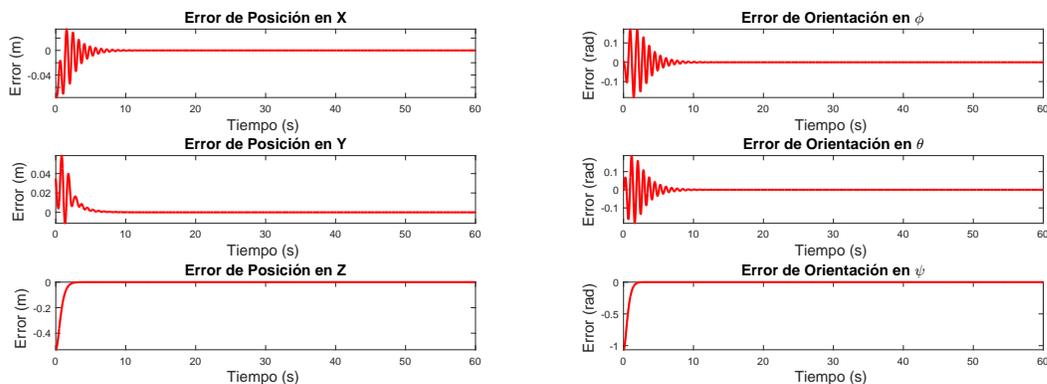


Figura 5.3: Movimientos del AR.Drone en el espacio.



(a) Errores de posición.

(b) Errores de orientación.

Figura 5.4: Errores del AR.Drone.

**Backstepping variante en el tiempo basado en observadores de estados.** Para el diseño de la estrategia de control por backstepping para el seguimiento de trayectorias del

AR.Drone en el plano  $XY$ , se hizo una aproximación de primer orden para (2.14a)-(2.14b) y se supuso una altura y un ángulo de guiñada constantes. Considerando ahora una altura y un ángulo de guiñada variables, usaremos una extensión de la técnica clásica de backstepping para lidiar con sistemas variantes en el tiempo, a la cual nos referimos como backstepping variante en el tiempo [52].

Los estados para dinámica  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  están dados por (5.24a)-(5.24d). La dinámica de los estados resulta

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5.69a)$$

$$\dot{\xi}_2 = g_z(t)A(\psi)\eta_1 \quad (5.69b)$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \quad (5.69c)$$

$$\dot{\eta}_2 = -\beta_1\eta_2 - \beta_2\eta_1 + \beta_3u_\eta \quad (5.69d)$$

donde  $u_\eta = [u_\theta, u_\phi]^T$ ,  $g_z(t) = -a_1z_2 + a_3u_z - g$ ,

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

es la matriz de desacoplamiento para la dinámica en el plano  $XY$ ,

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad y \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

son matrices constantes que contienen los términos obtenidos en el modelado por funciones de transferencia del AR.Drone 2.0. Tomando  $u_\eta = \beta_3^{-1}[\beta_1\eta_2 + \beta_2\eta_1 + v_\eta]$  el sistema (5.69a)-(5.69d) se reduce a

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5.70a)$$

$$\dot{\xi}_2 = g_z(t)A(\psi)\eta_1 \quad (5.70b)$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \quad (5.70c)$$

$$\dot{\eta}_2 = v_\eta \quad (5.70d)$$

Los errores del sistema están dados por (5.27a)-(5.27d). La dinámica del error en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\psi$  resulta

$$\dot{e}_{\xi 1} = e_{\xi 2} \quad (5.71a)$$

$$\dot{e}_{\xi 2} = g_z(t)A(\psi)e_{\eta 1} \quad (5.71b)$$

$$\dot{e}_{\eta 1} = e_{\eta 2} \quad (5.71c)$$

$$\dot{e}_{\eta 2} = v_\eta - \ddot{\eta}_1^d \quad (5.71d)$$

Reescribiendo la dinámica del error y tomando  $v_\eta = \ddot{\eta}_1^d + w_\eta$  tenemos

$$\dot{e}_\xi = A_\xi e_\xi + B_\xi(t)e_{\eta 1} \quad (5.72a)$$

$$\dot{e}_{\eta 1} = e_{\eta 2} \quad (5.72b)$$

$$\dot{e}_{\eta 2} = w_\eta \quad (5.72c)$$

where  $e_\xi = [e_{\xi 1}, e_{\xi 2}]^T$ ,

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B_\xi(t) = g_z(t) \begin{bmatrix} 0 \\ A(\psi_1) \end{bmatrix}$$

con  $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz identidad. A partir de este punto, aplicamos dos pasos del algoritmo de backstepping, considerando que además de derivar con respecto a los estados, también hay que derivar con respecto a las variables que dependen del tiempo  $z$  y  $\psi$ , llegando a la siguiente ley de control

$$u_\eta = \beta_3^{-1} [\beta_1 \eta_2 + \beta_2 \eta_1 + \ddot{\eta}_1^d - K_1 e_{\xi 1} - K_2 e_{\xi 2} - K_3 e_{\eta 1} - K_4 e_{\eta 2}] \quad (5.73)$$

con

$$\begin{aligned} K_1 &= g_z(t)^{-1} A^{-1}(\psi_1) (k_p + k_2 b g_z^2(t) + k_2 k_1 k_p) + g_z^{-1}(t) \dot{A}^{-1}(\psi_1) (k_2 k_p + b g_z^2(t) + k_1 k_p) \\ &\quad + \dot{g}_z^{-1}(t) A^{-1}(\psi_1) (k_2 k_p + b g_z^2(t) + k_1 k_p) + (g_z^{-1}(t) \ddot{A}^{-1}(\psi_1) + \ddot{g}_z^{-1}(t) A^{-1}(\psi_1)) (k_p) \\ &\quad + \dot{g}_z^{-1}(t) \dot{A}^{-1}(\psi_1) (2k_p) \\ K_2 &= g_z^{-1}(t) A^{-1}(\psi_1) (b g_z^2(t) + k_1 k_p + k_d + k_2 k_p + k_2 c g_z^2(t) + k_2 k_1 k_d) \\ &\quad + g_z^{-1}(t) \dot{A}^{-1}(\psi_1) (k_2 k_d + c g_z^2(t) + k_1 k_d + 2k_p) \\ &\quad + \dot{g}_z^{-1}(t) A^{-1}(\psi_1) (k_2 k_d + c g_z^2(t) + k_1 k_d + 2k_p) \\ &\quad + (g_z^{-1}(t) \ddot{A}^{-1}(\psi_1) + \ddot{g}_z^{-1}(t) A^{-1}(\psi_1)) (k_d) + \dot{g}_z^{-1}(t) \dot{A}^{-1}(\psi_1) (2k_d) \\ K_3 &= (k_p + k_1 k_d + c g_z^2(t) + I + k_2 k_d + k_2 k_1 + 2k_d \dot{A}^{-1} A^{-1} + \dot{g}_z^{-1}(t) g_z(t)) \\ K_4 &= (k_2 + k_1 + k_d) \end{aligned}$$

**Proposición 5.4** *Considere el subsistema (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e) y la ley de control (5.73). Entonces en el sistema en lazo cerrado (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e)-(5.73) el AR.Drone converge localmente asintóticamente a la trayectoria deseada en el plano XY, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_1(t) - \xi_1^d(t)) = 0$ , y a los ángulos deseados de orientación de alabeo y cabeceo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_1(t) - \eta_1^d(t)) = 0$ .*

**Demostración.** La demostración es similar a la presentada en la Proposición 5.4. ■

Para el diseño del observador de estados, reescribimos el subsistema (5.69a)-(5.69d) en la forma

$$\dot{x}_{\xi\eta} = A_{\xi\eta}(t) x_{\xi\eta} + B_{\xi\eta} u_\eta \quad (5.74a)$$

$$y_{\xi\eta} = C_{\xi\eta} x_{\xi\eta} \quad (5.74b)$$

donde  $x_{\xi\eta} = [\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2]^T$ ,

$$A_{\xi\eta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_z(t) A(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad B_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

y

$$C_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificamos que la dinámica para el subsistema  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  sea observable. La matriz de observabilidad del sistema variante en el tiempo (5.74a)-(5.74b) está dada por

$$\mathcal{O}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

donde

$$N_0(t) = C_{\xi\eta}$$

$$N_m(t) = N_{m-1}(t)A_{\xi\eta}(t) + \frac{\partial}{\partial t}N_{m-1}(t), m = 1, \dots, n-1$$

Se puede verificar que  $\text{rank}(\mathcal{O}_{\xi\eta}) = 8$ . Entonces, proponemos el siguiente observador de Luenberger para las dinámicas en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$

$$\dot{\hat{x}}_{\xi\eta} = A_{\xi\eta}(t)\hat{x}_{\xi\eta} + B_{\xi\eta}u_\eta + L_{\xi\eta}(y_{\xi\eta} - \hat{y}_{\xi\eta}) \quad (5.76a)$$

$$\hat{y}_{\xi\eta} = C_{\xi\eta}\hat{x}_{\xi\eta} \quad (5.76b)$$

donde  $\hat{x}_{\xi\eta} = [\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2]^T$  son los estados observados y  $L_{\xi\eta}$  es la matriz de ganancias del observador.

**Proposición 5.5** *Considere el subsistema (5.74a)-(5.74b) y el observador (5.76a)-(5.76b). Entonces existe  $L_{\xi\eta}$  tal que el sistema (5.76a)-(5.76b) es un observador para el subsistema (5.74a)-(5.74b), i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi\eta}(t) - \hat{x}_{\xi\eta}(t)) = 0$ .*

**Demostración.** Para la demostración se sigue un procedimiento similar al presentado en la demostración de la Proposición 5.2. ■

Modificamos la ley de control (5.73) usando las velocidades estimadas longitudinales y rotacionales  $\hat{\xi}_2$  y  $\hat{\eta}_2$ , respectivamente, obtenidas del observador (5.76a). Esto produce

$$u_\eta = \beta_3^{-1} \left[ \beta_1 \hat{\eta}_2 + \beta_2 \eta_1 + \ddot{\eta}_1^d - K_1 e_{\xi_1} - K_2 (\hat{\xi}_2 - \dot{\xi}_1^d) - K_3 e_{\eta_1} - K_4 (\hat{\eta}_2 - \dot{\eta}_1^d) \right] \quad (5.77)$$

Identificamos a la matriz  $H_{\xi\eta}(t)$  de los errores de seguimiento (5.27a)-(5.27d). Para hacer esto, tenemos que la dinámica del error para  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  en lazo cerrado con la ley de control diseñada por backstepping variante en el tiempo (5.73) resulta

$$\dot{e}_{\xi\eta} = H_{\xi\eta}(t)e_{\xi\eta} \quad (5.78)$$

donde  $e_{\xi\eta} = [e_{\xi 1}, e_{\xi 2}, e_{\eta 1}, e_{\eta 2}]^T$  y

$$H_{\xi\eta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_z(t)A(\psi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -K_1 & -K_2 & -K_3 & -K_4 \end{bmatrix}.$$

**Proposición 5.6** *Considere el subsistema (5.74a), el observador (5.76a) y la ley de control (5.77). Las matrices  $H_{\xi\eta}(t)$  y  $A_{\xi\eta}(t) - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}$  son Hurwitz. Entonces en el sistema en lazo cerrado (5.74a)-(5.76a)-(5.77), los errores de seguimiento y de observación para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  convergen a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi\eta}(t) - x_{\xi\eta}^d(t)) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi\eta}(t) - \hat{x}_{\xi\eta}(t)) = 0$ .*

**Demostración.** Para la demostración se sigue un procedimiento similar al presentado en la demostración de la Proposición 5.3. ■

A continuación se presentan los resultados obtenidos de una simulación numérica utilizando las leyes de control (5.77), (5.67) y (5.68). La trayectoria deseada en el plano  $XY$  es una Lemniscata de Geronon dada por

$$m(t) = \left[ \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]^T,$$

la trayectoria deseada en el eje  $Z$  está dada por

$$z^d(t) = 1.3 + 0.3 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{3\pi}{2}\right)$$

y la trayectoria deseada en el ángulo de guiñada dada por

$$\psi^d(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad (5.79)$$

con un periodo de  $T = 60$  s. La Figura 5.5 muestra el movimiento del AR.Drone en el espacio y la Figura 5.6 la trayectoria del ángulo de guiñada. Las Figuras 5.7(a) 5.7(b) muestran los errores de posición y orientación, respectivamente.

### 5.3. Control de vuelo en formación orientado al ángulo de guiñada del líder

Esta sección se enfoca al diseño de una estrategia de control para lograr el vuelo en formación orientado al ángulo de guiñada de un líder para helicópteros de 4 rotores convencionales, utilizando la gráfica de formación centrada en el líder de la Figura 2.3.

Para mantener una formación por parte de los agentes seguidores orientada al ángulo de guiñada del agente líder mientras se está volando, usaremos un vector de posición variante en el tiempo dado por

$$C_{ji}(t) = R(\psi_n)c_{ji} \quad (5.80)$$

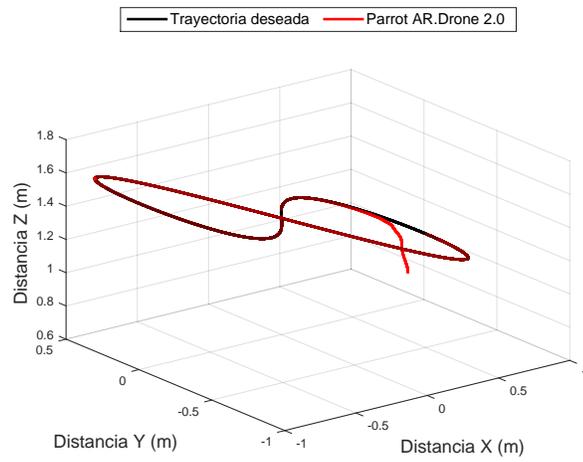


Figura 5.5: Movimientos del AR.Drone en el espacio.

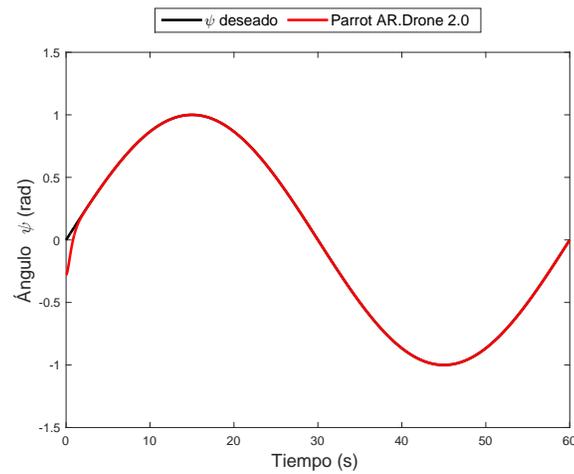
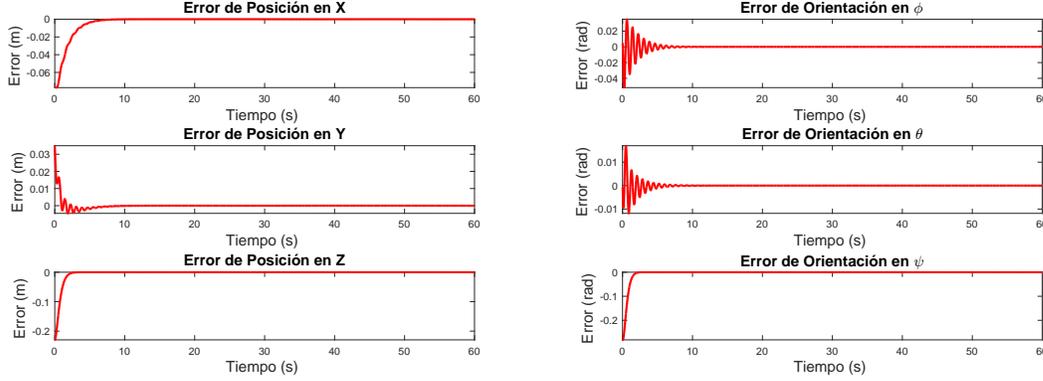


Figura 5.6: Trayectoria del ángulo de guiñada del AR.Drone 2.0



(a) Errores de posición.

(b) Errores de orientación.

Figura 5.7: Errores del AR.Drone.

donde  $c_{ji}$  es un vector de posición estática que se obtiene del patrón geométrico deseado y  $R(\psi_n)$  es una matriz de rotación dada por

$$R(\psi_n) = \begin{bmatrix} \cos \psi_n & -\sin \psi_n & 0 \\ \sin \psi_n & \cos \psi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

La primera y segunda derivada del vector de posición variante en el tiempo están dadas por

$$\dot{C}_{ji}(t) = \dot{R}(\psi_n)c_{ji} \quad (5.82)$$

$$\ddot{C}_{ji}(t) = \ddot{R}(\psi_n)c_{ji} \quad (5.83)$$

donde

$$\dot{R}(\psi_n) = \begin{bmatrix} -\sin \psi_n & -\cos \psi_n & 0 \\ \cos \psi_n & -\sin \psi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_n \quad (5.84)$$

y

$$\ddot{R}(\psi_n) = \begin{bmatrix} -\sin \psi_n & -\cos \psi_n & 0 \\ \cos \psi_n & -\sin \psi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{\psi}_n + \begin{bmatrix} -\cos \psi_n & \sin \psi_n & 0 \\ -\sin \psi_n & -\cos \psi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi}_n^2 \quad (5.85)$$

son la primera y segunda derivada de la matriz de rotación, respectivamente.

Para el diseño de la estrategia de control hacemos una aproximación de primer orden de (2.8), como en [51] dada por

$$\ddot{\xi}_i = g \begin{pmatrix} \sin \psi_{i_d} & \cos \psi_{i_d} & 0 \\ -\cos \psi_{i_d} & \sin \psi_{i_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{mg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{i_d} \\ \theta_{i_d} \\ F_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

Definiendo variables auxiliares de control  $u_i = [u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}]^T$  es posible establecer una estrategia para controlar la posición  $\xi_i$  dada por

$$\begin{pmatrix} \phi_{i_d} \\ \theta_{i_d} \\ F_i \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \sin \psi_{i_d} & -\cos \psi_{i_d} & 0 \\ \cos \psi_{i_d} & \sin \psi_{i_d} & 0 \\ 0 & 0 & mg \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \right] \quad (5.87)$$

El sistema en lazo cerrado (5.86)-(5.87) produce

$$\ddot{\xi}_i = u_i \quad (5.88)$$

Sea  $m(t) = [m_x(t), m_y(t), m_z(t)]^T$  una trayectoria de vuelo preestablecida. El objetivo es diseñar una ley de control descentralizada  $u_i = f_i(\xi_i, \dot{\xi}_i, N_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tal que se logre

- Seguimiento asintótico de una trayectoria preestablecida por el agente líder, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_n(t) - m(t)) = 0$$

- Una formación deseada variante en el tiempo por los agentes seguidores con respecto al líder, i.e. para  $i = 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_i(t) - \xi_n(t) - C_{ni}(t)) = 0$$

La ley de control  $u_i$  resultará en las orientaciones deseadas  $\phi_{i_d}$  y  $\theta_{i_d}$  dadas en (5.87), las cuales serán proporcionadas como entradas al control de orientación.

Para el seguimiento de trayectoria, proponemos una ley de control auxiliar para el agente líder definida por

$$u_n = -K_{nD\xi} (\dot{\xi}_n - \dot{m}(t)) - K_{nP\xi} (\xi_n - m(t)) + \ddot{m}(t) \quad (5.89)$$

donde  $m(t)$  es la trayectoria deseada,  $\dot{m}(t)$  es la velocidad deseada,  $\ddot{m}(t)$  es la aceleración deseada,

$$K_{nD\xi} = \begin{bmatrix} k_{n_{dx}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{n_{dy}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{n_{dz}} \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

y

$$K_{nP\xi} = \begin{bmatrix} k_{n_{px}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{n_{py}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{n_{pz}} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

son las ganancias de control. Para el control de orientación del líder proponemos

$$\tilde{\tau}_n = -K_{nD\eta} (\dot{\eta}_n - \dot{\eta}_{n_d}) - K_{nP\eta} (\eta_n - \eta_{n_d}) + \ddot{\eta}_{n_d} \quad (5.92)$$

donde  $\eta_{n_d} = [\phi_{n_d}, \theta_{n_d}, \psi_{n_d}]^T$  con  $\phi_{n_d}$  y  $\theta_{n_d}$  definidas en (5.87) y  $\psi_{n_d} = \arctan\left(\frac{\dot{m}_y}{\dot{m}_x}\right)$ ,

$$K_{n_{D\eta}} = \begin{bmatrix} k_{n_d\phi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{n_d\theta} & 0 \\ 0 & 0 & k_{n_d\psi} \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

y

$$K_{n_{P\eta}} = \begin{bmatrix} k_{n_p\phi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{n_p\theta} & 0 \\ 0 & 0 & k_{n_p\psi} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

son las ganancias de control.

Para la formación variante en el tiempo, proponemos una ley de control auxiliar para los seguidores dada por

$$u_i = -K_{i_{D\xi}} (\dot{\xi}_i - \dot{\xi}_n - \dot{C}_{ni}(t)) - K_{i_{P\xi}} (\xi_i - \xi_n - C_{ni}(t)) + \ddot{\xi}_n + \ddot{C}_{ni}(t), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.95)$$

donde

$$K_{i_{D\xi}} = \begin{bmatrix} k_{i_{dx}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{i_{dy}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{i_{dz}} \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

y

$$K_{i_{P\xi}} = \begin{bmatrix} k_{i_{px}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{i_{py}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{i_{pz}} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

son las ganancias de control. Para el control de orientación de los seguidores proponemos

$$\tilde{\tau}_i = -K_{i_{D\eta}} (\dot{\eta}_i - \dot{\eta}_{i_d}) - K_{i_{P\eta}} (\eta_i - \eta_{i_d}) + \ddot{\eta}_{i_d}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.98)$$

donde

$$K_{i_{D\eta}} = \begin{bmatrix} k_{i_{d\phi}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{i_{d\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{i_{d\psi}} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

y

$$K_{i_{P\eta}} = \begin{bmatrix} k_{i_{p\phi}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{i_{p\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & k_{i_{p\psi}} \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

son las ganancias de control y  $\psi_{i_d} = \psi_n$ .

**Teorema 5.3** *Considere el sistema (5.88) y las leyes de control (5.89)-(5.98). Suponga que  $K_{nD\xi}, K_{nP\xi} > 0$  y  $K_{iD\xi}, K_{iP\xi} > 0$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ , y que la gráfica de formación usada es la gráfica de formación centrada en el líder de la Figura 2.3. Entonces, en el sistema en lazo cerrado (5.88)-(5.89)-(5.98), el líder  $R_n$  converge localmente a la trayectoria deseada, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_n(t) - m(t)) = 0$ , mientras que los seguidores  $R_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  convergen a la formación deseada variante en el tiempo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_i(t) - \xi_n(t) - C_{ni}(t)) = 0$ .*

**Demostración.** El sistema en lazo cerrado (5.88)-(5.89)-(5.98) está dado por

$$\ddot{\xi} = A\dot{\xi} + B\xi + C \quad (5.101)$$

donde  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ ,

$$A = -K_{D\xi} \left( \left( \mathcal{L}(G) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \otimes I_3 \right) \quad (5.102)$$

$$B = -K_{P\xi} \left( \left( \mathcal{L}(G) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \otimes I_3 \right) \quad (5.103)$$

con

$$K_{D\xi} = \begin{bmatrix} K_{1D\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{2D\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{nD\xi} \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

$$K_{P\xi} = \begin{bmatrix} K_{1P\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{2P\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{nP\xi} \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

y

$$C = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_n + \ddot{C}_{n1}(t) + K_{1D\xi} \dot{C}_{n1}(t) + K_{1P\xi} C_{n1}(t) \\ \ddot{\xi}_n + \ddot{C}_{n2}(t) + K_{2D\xi} \dot{C}_{n2}(t) + K_{2P\xi} C_{n2}(t) \\ \vdots \\ \ddot{m}(t) + K_{nD\xi} \dot{m}(t) + K_{nP\xi} m(t) \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

Definimos los errores del sistema como

$$e_n = \xi_n - m(t) \quad (5.107)$$

$$e_i = \xi_i - \xi_n - C_{ni}(t) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.108)$$

en forma matricial tenemos

$$e = P\xi - \tilde{C} \quad (5.109)$$

donde  $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$ ,  $\tilde{C} = [C_{n1}(t), C_{n2}(t), \dots, m(t)]^T$  y

$$P = \left( \mathcal{L}(G) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \otimes I_3 \quad (5.110)$$

La dinámica de las coordenadas del error está dada por

$$\ddot{e} = Q\dot{e} + Se \quad (5.111)$$

con

$$Q = \begin{bmatrix} -K_{1D\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -K_{2D\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -K_{nD\xi} \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

$$S = \begin{bmatrix} -K_{1P\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -K_{2P\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -K_{nP\xi} \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

Definiendo

$$L = [e_{1x}, \dot{e}_{1x}, e_{1y}, \dot{e}_{1y}, e_{1z}, \dot{e}_{1z}, \dots, e_{nx}, \dot{e}_{nx}, e_{ny}, \dot{e}_{ny}, e_{nz}, \dot{e}_{nz}]^T \quad (5.114)$$

podemos reescribir la dinámica del error como

$$\dot{L} = ML \quad (5.115)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1z} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N_{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_{nz} \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

con

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{i_pj} & -k_{i_dj} \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = x, y, z$ . La matriz  $M$  es diagonal a bloques, por lo que el análisis se reduce al estudio de las submatrices  $N_{ij}$ , las cuales son matrices de 2 dimensiones. Así, para cada ley de control con  $k_{i_pj}, k_{i_dj} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = x, y, z$  la dinámica total es localmente asintóticamente estable. ■

Debemos recordar que éste es un resultado local, ya que depende de una aproximación de primer orden. Los resultados obtenidos de una simulación numérica usando la estrategia de control dada por (5.89)-(5.92) y (5.95)-(5.98) se muestran a continuación. Para la simulación, se consideran 3 helicópteros de 4 rotores.

Los parámetros usados en la simulación son  $k_{i_{dx}}, k_{i_{dy}}, k_{i_{dz}} = 1$ ,  $k_{i_{px}}, k_{i_{py}}, k_{i_{pz}} = 1$ ,  $k_{i_{d\phi}}, k_{i_{d\theta}}, k_{i_{d\psi}} = 3$ ,  $k_{i_{p\phi}}, k_{i_{p\theta}}, k_{i_{p\psi}} = 2$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $m = 0.42$  Kg y  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. La trayectoria deseada es una Lemniscata de Geronon en el plano  $XY$  con una altura constante de 1.5 m dada por

$$m(t) = \left[ 3 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 1.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right), 1.5 \right]$$

con un periodo de  $T = 50$  s. Los vectores de posición estática están dados por  $c_{32} = [-1.4 \sin(\pi/4), -1.4 \cos(\pi/4), 0]$  y  $c_{31} = [-1.4 \sin(\pi/4), 1.4 \cos(\pi/4), 0]$ .

La Figura 5.8 muestra las trayectorias de los agentes en el espacio. Las posiciones iniciales de los agentes se indican con un círculo “o” y las finales con una “x”.

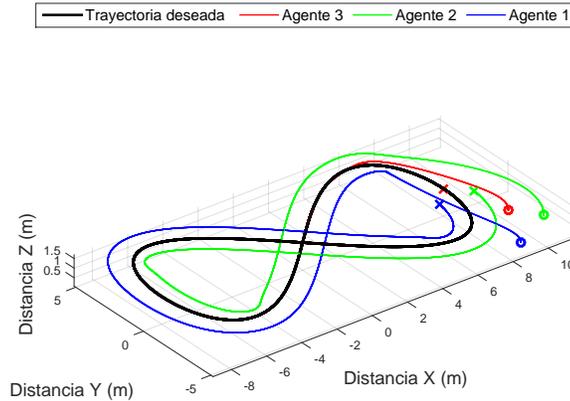


Figura 5.8: Trayectorias de los agentes en el plano.

La Figura 5.9 muestra la formación variante en el tiempo de los agentes durante la simulación. Las posiciones de los agentes están marcadas cada 4 s. Se observa como el líder sigue la trayectoria deseada mientras que los seguidores logran una formación variante en el tiempo.

Las Figuras 5.10(a), 5.10(b) y 5.10(c) muestran los errores de posición y orientación de los agentes. Tales errores convergen a cero.

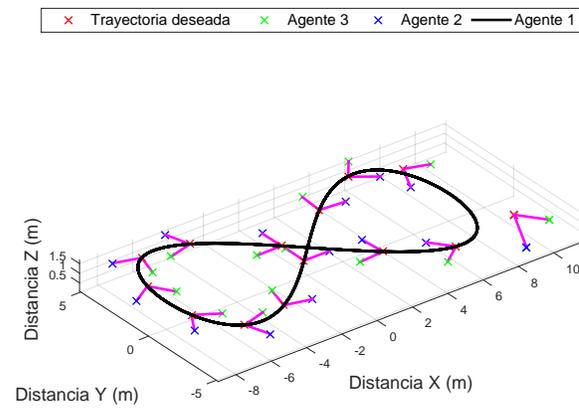
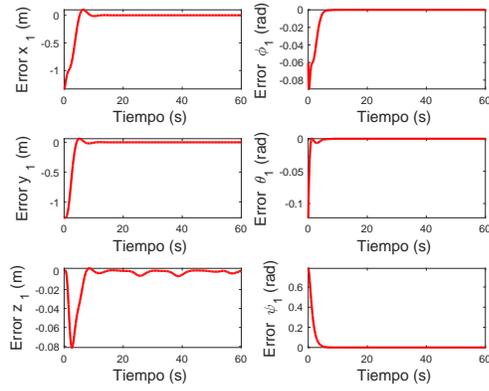
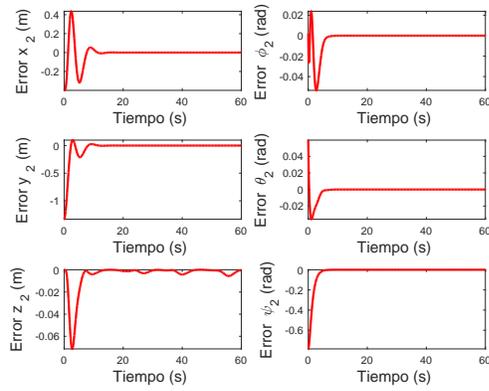


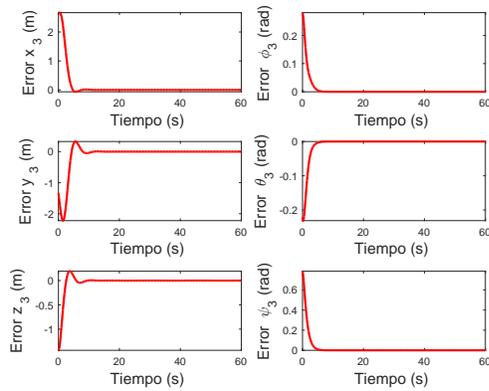
Figura 5.9: Formación de los agentes durante la simulación.



(a) Errores del agente 1.



(b) Errores del agente 2.



(c) Errores del agente 3.

Figura 5.10: Errores de los agentes del sistema.



## Capítulo 6

# Experimentación

### 6.1. Plataforma experimental

#### 6.1.1. Sistema de visión - Optitrack

La plataforma experimental cuenta con un sistema de visión con el que se obtienen la posición y orientación de cada agente. El sistema de visión está formado por 12 cámaras marca OptiTrack modelo Flex 13 (Figura 6.1).



Figura 6.1: Cámaras OptiTrack modelo Flex 13.

Las cámaras Flex 13 tienen un cuerpo de policarbonato de 53.8 mm x 81 mm x 42.4 mm y un peso de 187 g.; cuentan con conexión USB 2.0 y un sensor de imagen de 6.144 mm x 4.9152 mm, con un tamaño de pixel de 4.8  $\mu\text{m}$  x 4.8  $\mu\text{m}$ .

Las cámaras Flex 13 cuentan con un lente de 5.5 mm, con un campo de visión de 56° horizontal y 46° vertical. Tienen una resolución de 1280 x 1024 (1.3 Mp) y una frecuencia de imagen de 30 a 120 Hz. ajustable.

Las cámaras son compatibles con el software Motive:Tracker diseñado para el rastreo de objetos en 6 DOF con alta precisión y procesamiento en tiempo real.

#### 6.1.2. Robots móviles terrestres - AmigoBot, Khepera III

La plataforma experimental cuenta con 5 robots móviles tipo unicycle elaborados por MobileRobots Inc. modelo AmigoBot (Figura 6.2).

El AmigoBot está formado por un cuerpo de policarbonato, un chasis de aluminio y llantas de caucho; tiene dimensiones de 33 cm x 28 cm x 15 cm, un peso de 3.6 kg



Figura 6.2: Robot móvil modelo AmigoBot.

y puede soportar una carga máxima de 1 kg.; cuenta con una batería recargable de 12 V a 2.1 Ah con una duración de 3 hrs. y un tiempo de carga de 4 hrs.

El AmigoBot tiene 8 sonares (1 por lado, 4 al frente y 2 atrás) y encoders en cada motor de las ruedas de 124 pulsos/mm de desplazamiento. Las velocidades máximas del AmigoBot son de 1 m/s en traslación y 100°/s en rotación.

El AmigoBot cuenta con un microprocesador Renesas SH2-7144 a 44 MHz, un sistema operativo llamado AmigoSH con 16 KB de memoria RAM y 128 KB de memoria FLASH en el chip. Además, está equipado con un convertidor Wireless Ethernet-Serial, para la comunicación a través de una red local inalámbrica basada en el protocolo TCP/IP.

También incluye el software necesario para su manejo. Entre este software se encuentra ARIA, que ofrece un framework para la comunicación y control de los robots que además es multi-plataforma, ya que se puede utilizar tanto en sistemas operativos Windows como Linux.

Adicionalmente a los Amigobots, en una visita realizada al CICESE donde se realizaron pruebas experimentales de las estrategias de control para lograr el confinamiento, se utilizaron los robots Khepera III fabricados por K-Team, Figura 6.3.



Figura 6.3: Robot móvil modelo Khepera III.

Los Khepera III son robots móviles de tracción diferencial compactos y de fácil uso, con la posibilidad mejorar sus especificaciones agregando módulos a través de un bus de expansión. Cuentan con un DsPIC 30F5011 a 60 MHz con 4 KB de memoria RAM y 66 KB en memoria Flash, que puede ser expandido agregando el módulo Korebot II que cuenta con un procesador Arm a 600 MHz con 128 MB de memoria RAM y 32 MB de memoria Flash.

Las dimensiones del Khepera III son de 13 cm de diámetro y 7 cm de alto, con un peso de 0.69 kg. Cuenta con una batería extraíble recargable de litio-polímero a

1.35 Ah con una duración de 8 hrs. El Khepera III tiene 5 sonares y 10 infrarojos y cuenta con 2 servo motores de CC con encoders incrementales de 22 pulsos/mm de desplazamiento. La velocidad máxima del Khepera III es de 0.5 m/s. Además, se puede comunicar a través de una red local inalámbrica basada en el protocolo TCP/IP usando el módulo Korebot con una tarjeta WiFi.

### 6.1.3. Robots móviles aéreos - AR.Drone 2.0

La plataforma experimental cuenta también con 3 helicópteros de cuatro rotores fabricados por Parrot modelo AR.Drone 2.0 (Figura 6.4).



Figura 6.4: Helicóptero de cuatro rotores modelo AR.Drone 2.0.

El AR.Drone 2.0 cuenta con una estructura con tubos de fibra de carbono, con piezas de plástico nylon con 30 % de fibra de vidrio, 2 cascos de protección de polipropileno expandido, un casco para exteriores y otro para interiores, nanorevestimiento que repele líquidos, así como espuma para aislar el centro inercial de las vibraciones producidas por los motores.

Los sensores con los que cuenta el AR.Drone 2.0 son:

- Giroscopio de 3 ejes con precisión de  $2000^\circ/\text{seg}$
- Acelerómetro de 3 ejes con precisión de  $\pm 50 \text{ mg}$
- Magnetómetro de 3 ejes con precisión de  $6^\circ$
- Sensor de presión con una precisión de  $\pm 10 \text{ Pa}$
- Sensor de ultrasonido para medir la posición vertical

El AR.Drone 2.0 cuenta con un procesador ARM Cortex A8 de 32 bits a 1 GHz con DSP de video TMS320DMC64x a 800 MHz, un sistema operativo Linux 2.6.32, 1 GHz de memoria RAM DDR2 a 200 MHz, un puerto USB 2.0 de alta velocidad para extensiones y grabación, conexión inalámbrica Wi-Fi b,g,n y una cámara HD de 720 p a 30 fps. Tiene 4 motores inrunner sin escobillas de 28,500 RPM y 14.5 W con controladores con CPU AVR de 8 MIPS.

El AR.Drone 2.0 puede ser operado a través de un dispositivo Apple (iPod, iPhone o iPad), un dispositivo con SO Android e incluso desde una PC (Windows o Linux) o una Mac.

### 6.1.4. Integración de la plataforma

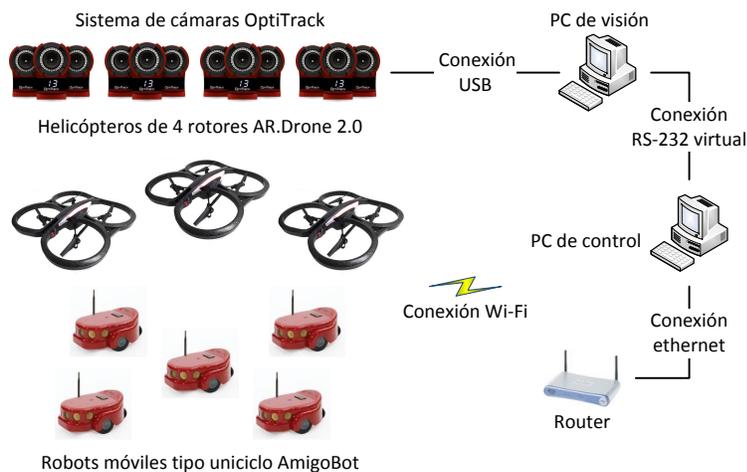


Figura 6.5: Plataforma experimental.

La Figura 6.5 muestra un esquema de la plataforma experimental. El sistema de visión se encargará de la localización de los robots (posición y orientación), esta información es enviada a una computadora con el software Motive:Tracker a través de una conexión USB. Una vez teniendo la posición y orientación en el software Motive:Tracker, se utiliza una transmisión en tiempo real VRPN para enviar los datos ya sea a un programa en la misma computadora o a uno en otra computadora para realizar los cálculos de las leyes de control. Las leyes de control son enviadas a los robots mediante una conexión Wi-Fi.

Teóricamente, las leyes de control diseñadas son descentralizadas, ya que los agentes no tienen un conocimiento global del objetivo a lograr, conociendo sólo las posiciones y velocidades de un subconjunto de agentes del sistema. Experimentalmente, estas leyes de control serán calculadas en una sola computadora.

## 6.2. Experimentos realizados

### 6.2.1. Confinamiento con seguimiento en formación estática

A continuación se presentan los resultados obtenidos de un experimento utilizando la estrategia de control dada por (3.1a)-(3.1c). En el experimento se consideran 4 robots móviles de tracción diferencial Khepera III, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se encuentra a 0.066 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en el experimento se muestra en la Figura 6.6.

Los parámetros utilizados en la simulación son  $k_m = 1, k_f, k_c = 2$ . La trayectoria

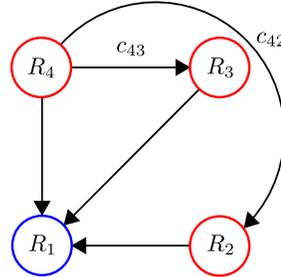


Figura 6.6: Gráfica de formación para el experimento.

deseada de navegación es una Lemniscata de Geronno dada por

$$m(t) = \left[ 0.4 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0.2 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]$$

con un periodo de  $T = 60$  s. Los vectores de posición deseada entre los líderes están dados por  $c_{43} = [-\sin(\frac{\pi}{3}), -\cos(\frac{\pi}{3})]$  y  $c_{42} = [-\sin(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{3})]$ .

La Figura 6.7 muestra el movimiento de los agentes en el plano. Las posiciones de los agentes en los tiempos  $t = 0.6, 16.5$  y  $38$  s se representan con un círculo "o". Se observa como el agente líder principal sigue la trayectoria deseada mientras que los líderes secundarios alcanzan la formación. Además, el agente seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes.

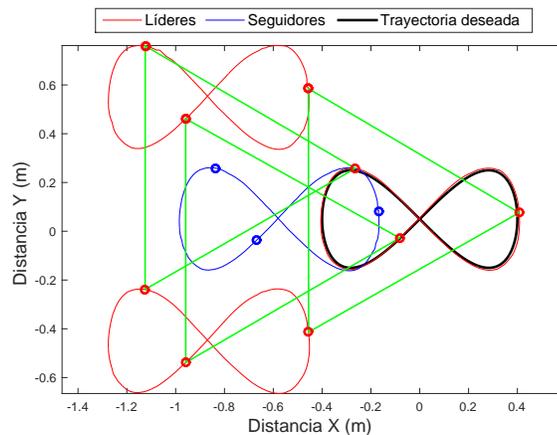
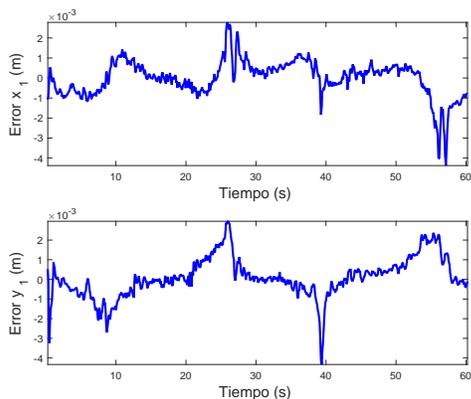


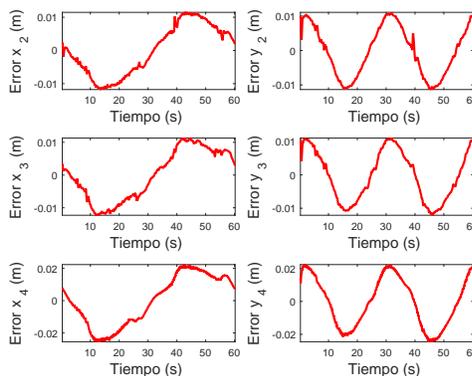
Figura 6.7: Movimiento en el plano de los agentes.

Las Figuras 6.8(a) y 6.8(b), presentan los errores del agente seguidor y los líderes,

respectivamente. Las señales de control requeridas para lograr el confinamiento con avance en formación estática se muestran en las Figuras 6.9(a) y 6.9(b).

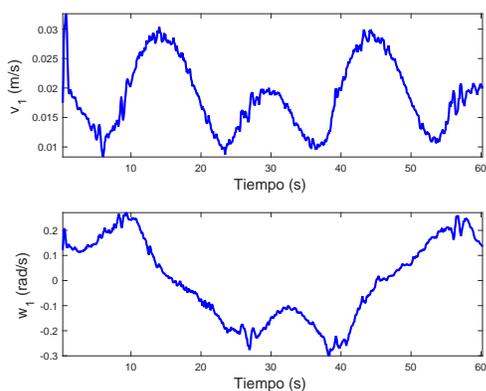


(a) Errores del seguidor.

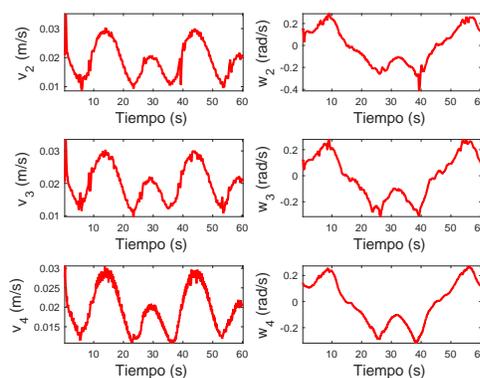


(b) Errores de los líderes.

Figura 6.8: Errores de los agentes del sistema.



(a) Velocidades del seguidor.



(b) Velocidades de los líderes.

Figura 6.9: Señales de control de los agentes del sistema.

### 6.2.2. Confinamiento con seguimiento en formación variante en el tiempo

A continuación se presentan los resultados obtenidos de un experimento en tiempo real usando la estrategia de control dada por (3.12a)-(3.12c). Se consideran 4 robots móviles de tracción diferencial AmigoBots, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se localiza a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en el experimento se muestra en la Figura 6.10.

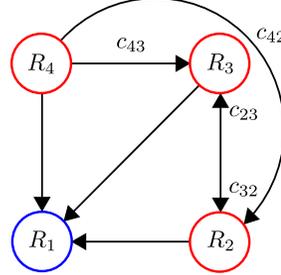


Figura 6.10: Gráfica de formación para el experimento.

Los parámetros usados en la simulación son  $k_m = 1$ ,  $k_f = 2$ ,  $k_c = 3$ . La trayectoria deseada de navegación es una curva de Geronó dada por

$$m(t) = \left[ \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]^T,$$

con un periodo de  $T = 60$  s. Los vectores de posición estática están dados por  $c_{43} = [-1.2 \sin(\frac{\pi}{3}), -1.2 \cos(\frac{\pi}{3})]^T$ ,  $c_{42} = [-1.2 \sin(\frac{\pi}{3}), 1.2 \cos(\frac{\pi}{3})]^T$ ,  $c_{32} = [0, 1.2]^T$  and  $c_{23} = [0, -1.2]^T$ .

La Figura 6.11 muestra una comparación entre una simulación numérica y el experimento en tiempo real del movimiento de los agentes en el plano. Los resultados de la simulación se indican con líneas punteadas y los experimentales con líneas sólidas. Las posiciones iniciales de los agentes se indican con una “x” y las posiciones en los tiempos  $t = 0.1, 15, 29, 43$  y  $57$  s están representadas con un círculo “o”. Como se puede observar, los resultados de la simulación y los experimentales son muy similares. El líder principal sigue la trayectoria deseada, los líderes secundarios logran la formación variante en el tiempo y los seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes.

Las Figuras 6.12(a) y 6.12(b) muestran los errores del seguidor y los líderes, respectivamente, tanto de la simulación como del experimento. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas para lograr el confinamiento con avance en formación variante en el tiempo se muestran en las Figuras 6.13(a) y 6.13(b).

### 6.2.3. Formación con evasión de colisiones

En el caso experimental para la formación con evasión de colisiones utilizando la ley de control (4.7), cuando el agente  $R_i$  está cerca del punto de equilibrio, el control de formación  $\gamma_i$  dado por (4.6) induce el llamado fenómeno de chattering, el cuál es altamente indeseable. Para eliminar los efectos del chattering proponemos cambiar a un control proporcional en una pequeña vecindad de radio  $\rho$ , cercana al punto de

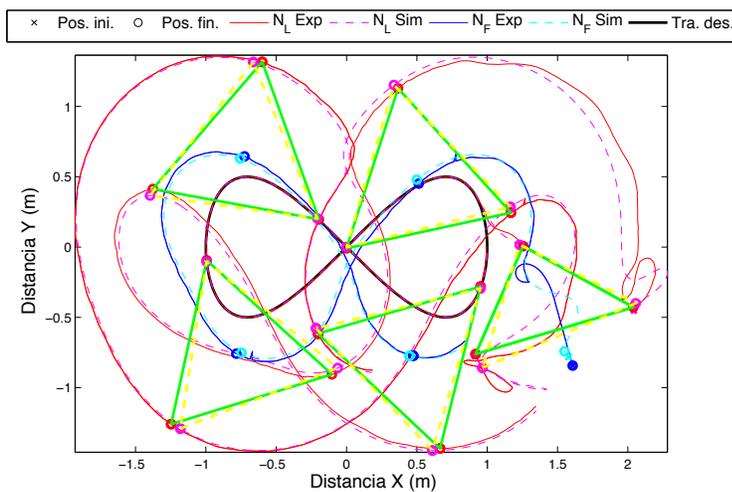
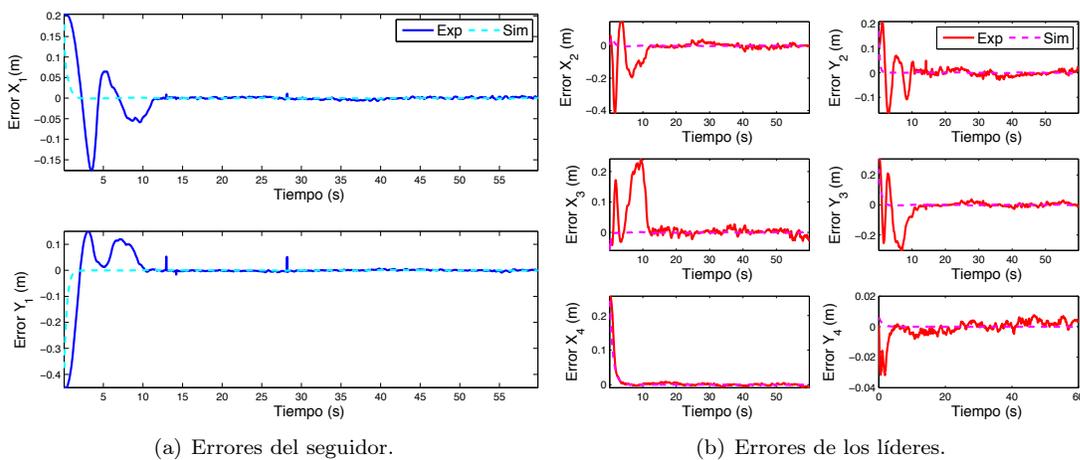


Figura 6.11: Trayectoria de los agentes en el plano.



(a) Errores del seguidor.

(b) Errores de los líderes.

Figura 6.12: Errores de los agentes del sistema.

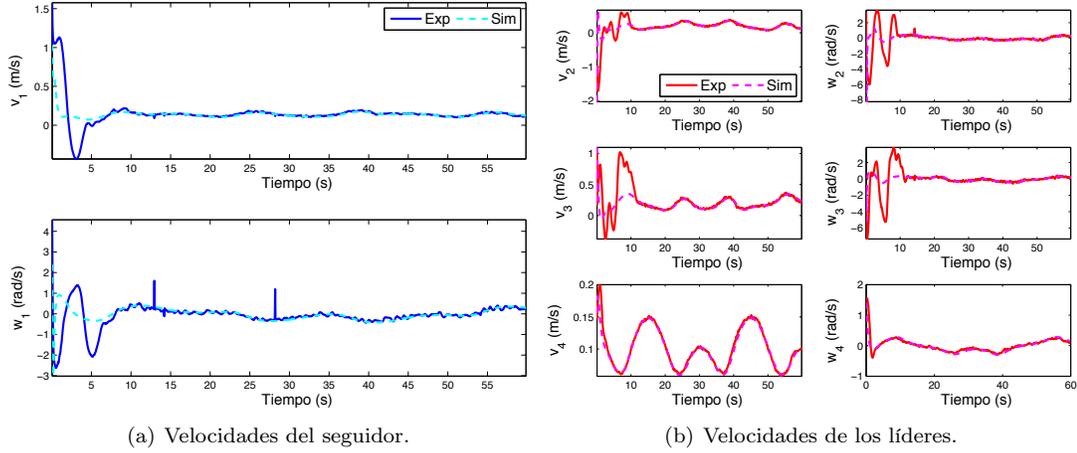


Figura 6.13: Señales de control.

equilibrio. Por lo tanto la ley de control está dada por

$$\gamma_i = \begin{cases} -\mu \frac{e_i}{\|e_i\|}, & \text{if } \|e_i\| > \rho \\ -\frac{\mu}{\rho} e_i, & \text{if } \|e_i\| \leq \rho \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

La relación  $\mu/\rho$  nos ayuda a evitar un cambio abrupto en la ley de control cuando cambiamos del control normalizado al proporcional. El valor  $\rho$  se escogió de tal manera que los efectos del chattering sean suavizados. En nuestro caso, probamos diferentes valores hasta obtener un resultado satisfactorio.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de un experimento utilizando la estrategia de control dada por (4.7) junto con el control de formación (6.1) y el campo vectorial repulsivo (4.2). Para el experimento, se consideran 4 robots móviles de tracción diferencial AmigoBots, donde el punto  $\alpha_i$  a controlar se localiza a 0.15 m delante del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en el experimento se muestra en la Figura 6.14.

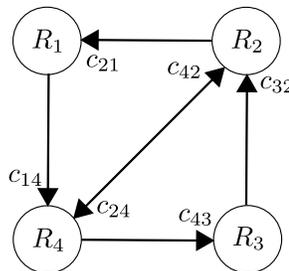


Figura 6.14: Gráfica de formación para el experimento.

Los vectores de posición están dados por  $c_{21} = [-1, 0]^T$ ,  $c_{14} = [0, -1]$ ,  $c_{24} = [-1, -1]^T$ ,  $c_{42} = [1, 1]^T$ ,  $c_{32} = [0, 1]^T$  and  $c_{43} = [1, 0]^T$ . La velocidad constante cuando no existe riesgo de colisión es  $\mu = 0.1 \text{ m/s}$ , la distancia mínima permitida es  $d = 0.6 \text{ m}$ ,  $\rho = 0.05 \text{ m}$  y el parámetro  $\epsilon$  se estableció a  $\epsilon > 2(\mu/d) = 1/3$ . En este caso, el valor teórico de  $\epsilon$  debe ser  $\epsilon > 3(\mu/d) = 1/2$ . A pesar de que el valor de  $\epsilon$  usado en el experimento es menor que el valor teórico, el experimento fue exitoso porque un robot sólo puede estar en peligro de colisión a lo más con dos robots simultáneamente.

La Figura 6.15 muestra una comparación entre una simulación numérica y un experimento en tiempo real de las trayectorias de los agentes en el plano. Como se puede observar, las respuestas de la simulación y el experimento son similares, pero exhiben algunas diferencias. Estas se pueden explicar por varias razones entre las que se encuentran: los resultados teóricos son válidos para sistemas de primer orden, mientras que los robots reales son modelados por ecuaciones diferenciales de segundo orden. También, el modelo cinemático empleado no toma en consideración efectos dinámicos como la masa, inercia, etc. A pesar de estas diferencias, el sistema multi-agente converge a la formación deseada.

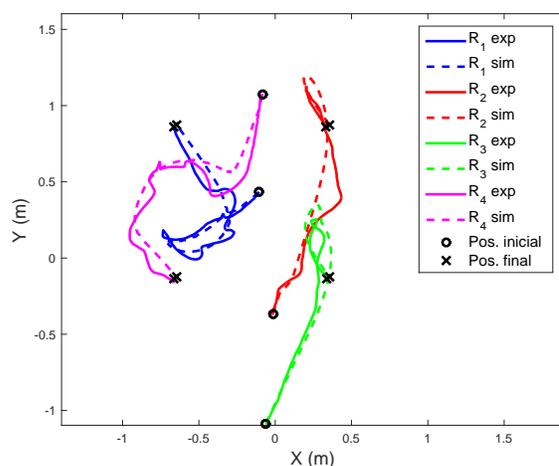


Figura 6.15: Movimiento de los agentes en el plano.

La Figura 6.16 muestra los errores de posición de la simulación y el experimento, los cuales convergen a cero permitiendo a los agentes alcanzar la formación deseada.

En la Figura 6.17 todas las posibles distancias entre los agentes son mostradas. Véase que las distancias entre los agentes en el experimento es menor que la distancia mínima  $d$ . Esto se explica debido algunas dinámicas que no son tomadas en consideración en el modelo.

Finalmente, la Figura 6.18 muestra las entradas de control para lograr la formación deseada. Una vez que los agentes alcanzan dicha formación, las velocidades longitudinales y angulares convergen a cero.

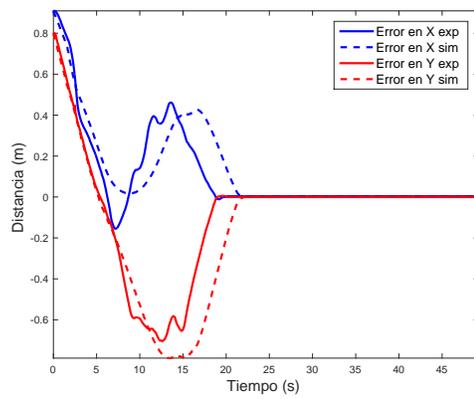
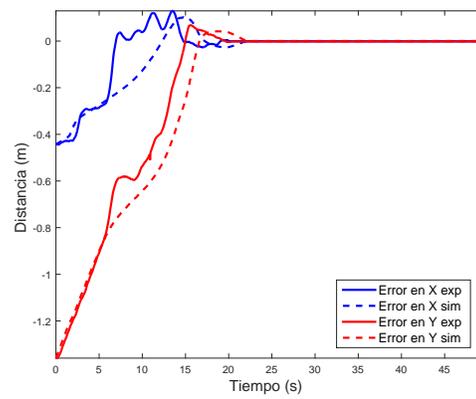
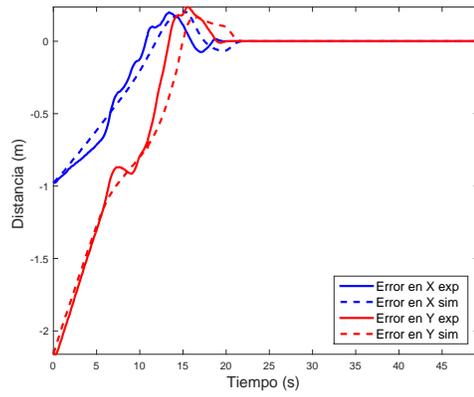
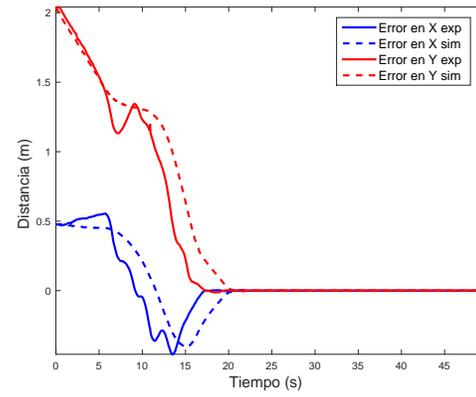
(a) Errores de  $R_1$ .(b) Errores de  $R_2$ .(c) Errores de  $R_3$ .(d) Errores de  $R_4$ .

Figura 6.16: Errores de los agentes del sistema.

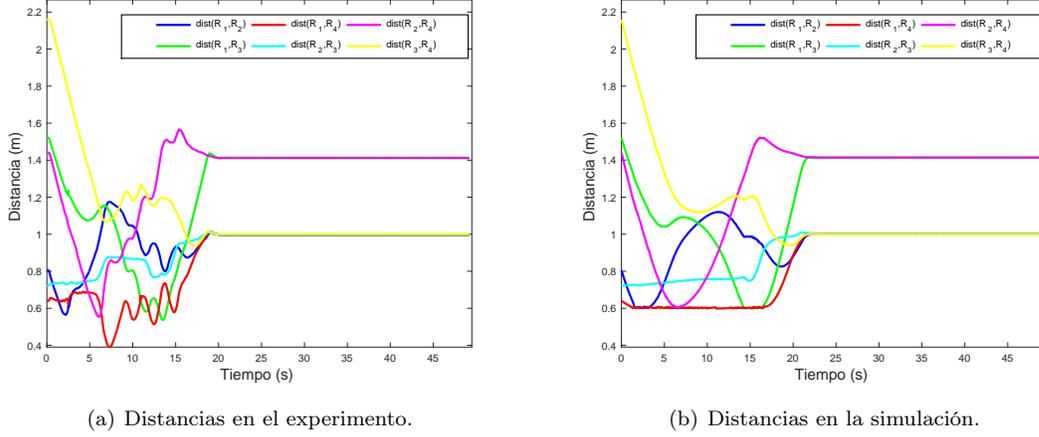


Figura 6.17: Distancias entre los agentes.

#### 6.2.4. Seguimiento de trayectorias con un AR.Drone 2.0

A continuación se presentan los resultados experimentales obtenidos con las estrategias de control diseñadas en este trabajo para el seguimiento de trayectorias de un AR.Drone 2.0. Se presentan los resultados del control tipo PD usando el modelo simple del AR.Drone. Posteriormente, se muestran los resultados del control por backstepping y backstepping variante en el tiempo basado en observadores de estados usando una aproximación de primer orden del modelo completo del AR.Drone. Ya que los experimentos se realizan en un espacio cerrado, se utiliza el casco de protección para interiores del AR.Drone 2.0, con el cual el helicóptero tiene un peso de 0.42 kg.

Cabe señalar que, para el despegue y aterrizaje del AR.Drone, se utilizaron las rutinas implementadas en la aeronave. También hay que mencionar que las señales de control fueron escalas a un rango de  $[-1, 1]$ , ya que estos son los valores de entrada que recibe el AR.Drone, donde  $\pm 1$  son los valores máximos y mínimos tanto para los ángulos de alabeo y cabeceo (en radianes), como para las velocidades lineal (en mm/s) y rotacional (en rad/s) en  $Z$ . Estos valores se especifican en un archivo donde se configuran los parámetros del AR.Drone.

**Control tipo PD.** Se presentan los resultados obtenidos experimentalmente utilizando las leyes de control (5.4), (5.5) y (5.6). Se realiza un experimento donde un AR.Drone 2.0 debe seguir una trayectoria preestablecida manteniendo un cierto ángulo de guiñada constante. Los parámetros usados en los experimentos son  $k_{dx} = k_{px} = k_{dy} = k_{py} = k_{pz} = 2$  y  $k_{p\psi} = 6$ . La trayectoria deseada en el plano  $XY$  es una Lemniscata de Geronon dada por

$$m(t) = \left[ 0.7 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0.35 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]^T$$

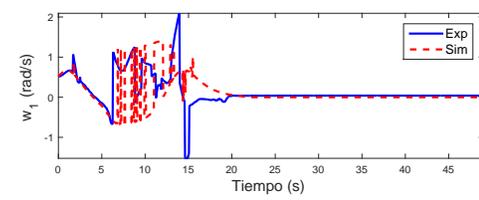
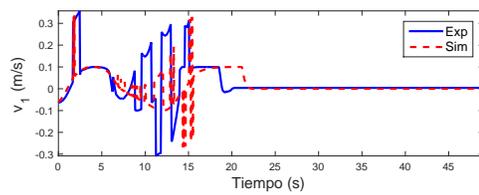
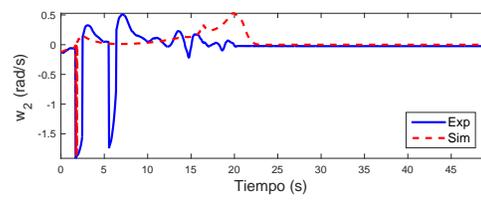
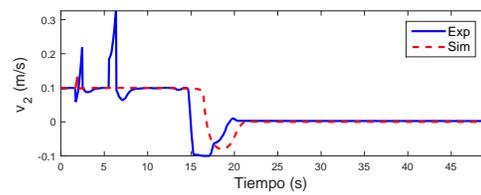
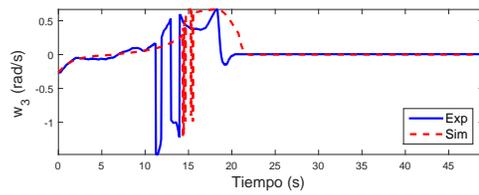
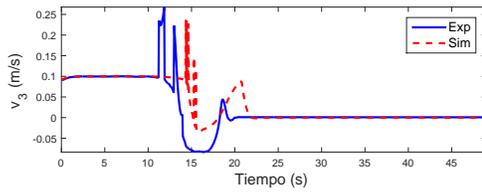
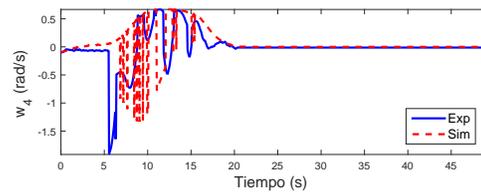
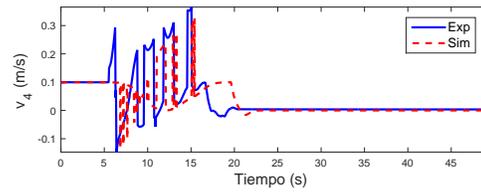
(a) Velocidades de  $R_1$ .(b) Velocidades de  $R_2$ .(c) Velocidades de  $R_3$ .(d) Velocidades de  $R_4$ .

Figura 6.18: Entradas de control.

con un periodo de  $T = 30$  s. La altura deseada es de 1 m y el ángulo de guiñada deseado de  $45^\circ$ . La Figura 6.19 muestra el movimiento del AR.Drone en el espacio. Las Figuras 6.20(a) y 6.20(b) muestran los errores de posición y orientación, respectivamente.

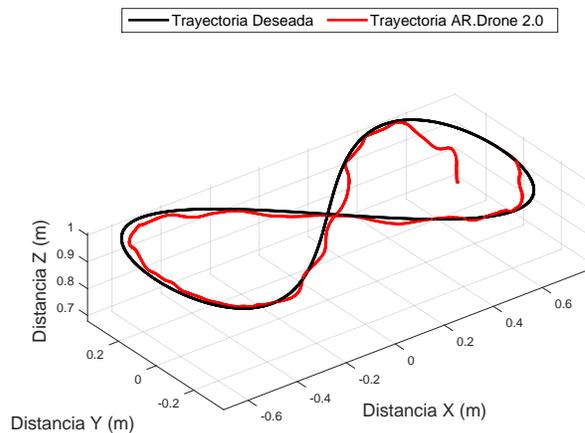
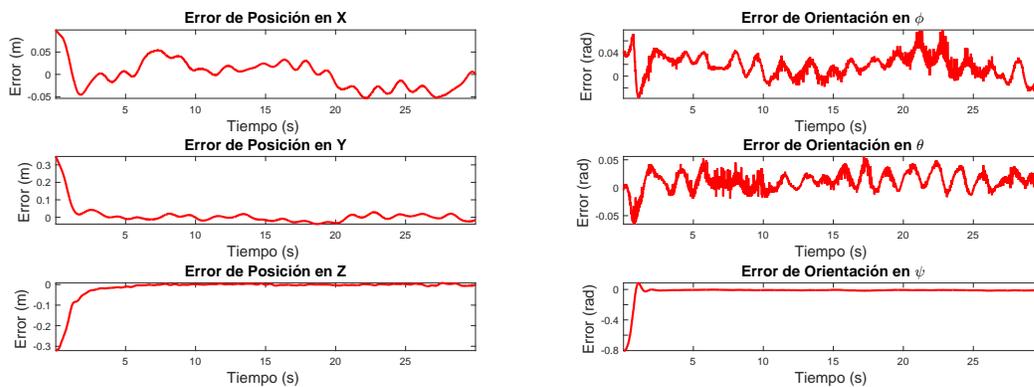


Figura 6.19: Movimientos del AR.Drone en el espacio.



(a) Errores de posición.

(b) Errores de orientación.

Figura 6.20: Errores del AR.Drone.

**Control por backstepping basado en observadores de estado.** Se presentan los experimentos realizados con las leyes de control (5.58),(5.67) y (5.68). Para justificar el

uso de los observadores de estado para estimar las velocidades longitudinales y rotacionales, presentamos un experimento utilizando las velocidades longitudinales y rotacionales en los ejes  $X$  y  $Y$ , obtenidas a partir de los sensores con los que cuenta el AR.Drone 2.0. Para las velocidades longitudinales y rotacionales en el eje  $Z$ , se utilizan los observadores diseñados en este trabajo; ya que no es posible obtener la velocidad longitudinal en  $Z$  por un error en el firmware del AR.Drone 2.0 y el sensor para la obtención de la velocidad rotacional en  $Z$  presenta un comportamiento erróneo.

La trayectoria deseada en el plano  $XY$  es una Lemniscata de Geronno dada por

$$\xi_1^d(t) = \begin{bmatrix} 1.0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ 0.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

con un periodo de  $T = 60$  s. Se tienen una altura y un ángulo de guiñada constantes, donde la altura deseada es de  $z^d = 1$  m y el ángulo de guiñada deseado es de  $\psi^d = 0^\circ$ . La Figura 6.21 muestra el movimiento del AR.Drone 2.0 en el espacio.

Las Figuras 6.22(a) y 6.22(b) presentan los errores de posición y orientación del AR.Drone 2.0, respectivamente.

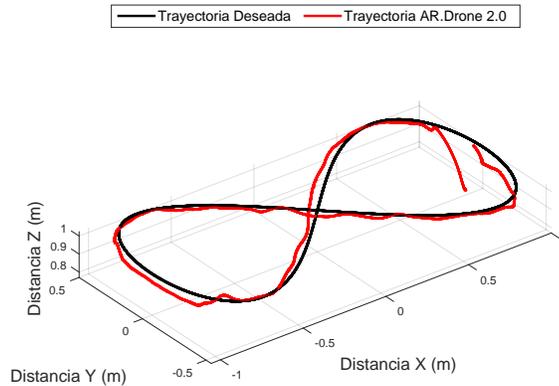


Figura 6.21: Movimiento en el espacio del AR.Drone 2.0

Ahora se presenta un experimento utilizando las velocidades longitudinales y rotacionales en los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  obtenidas a partir de los observadores diseñados en el presente trabajo. La trayectoria deseada en el plano  $XY$ , la altura deseada y el ángulo de guiñada deseado son los mismos que los utilizados en el experimento anterior. La Figura 6.23 muestra el movimiento del AR.Drone 2.0 en el espacio.

Las Figuras 6.24(a) y 6.24(b) presentan los errores de posición y orientación del AR.Drone 2.0, respectivamente.

Haciendo una comparación entre los dos experimentos presentados, en el primero utilizando las velocidades obtenidas a partir de los sensores del AR.Drone 2.0 y en

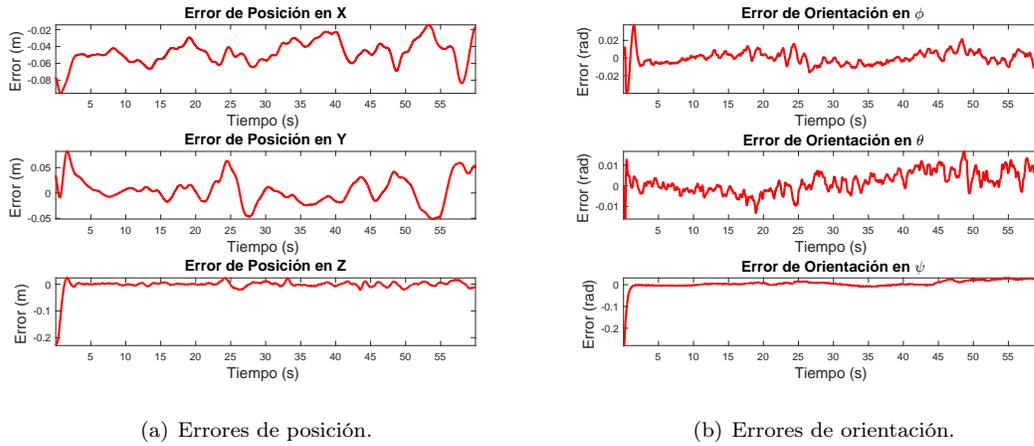


Figura 6.22: Errores del AR.Drone 2.0

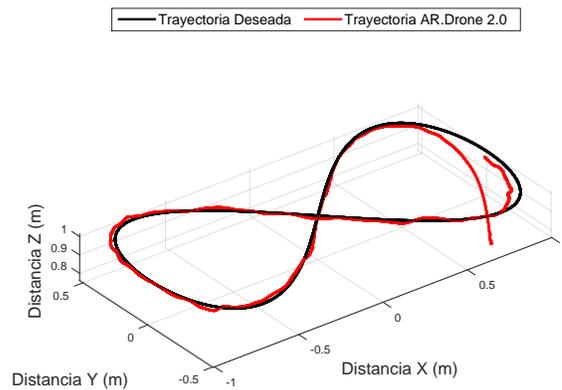


Figura 6.23: Movimiento en el espacio del AR.Drone 2.0

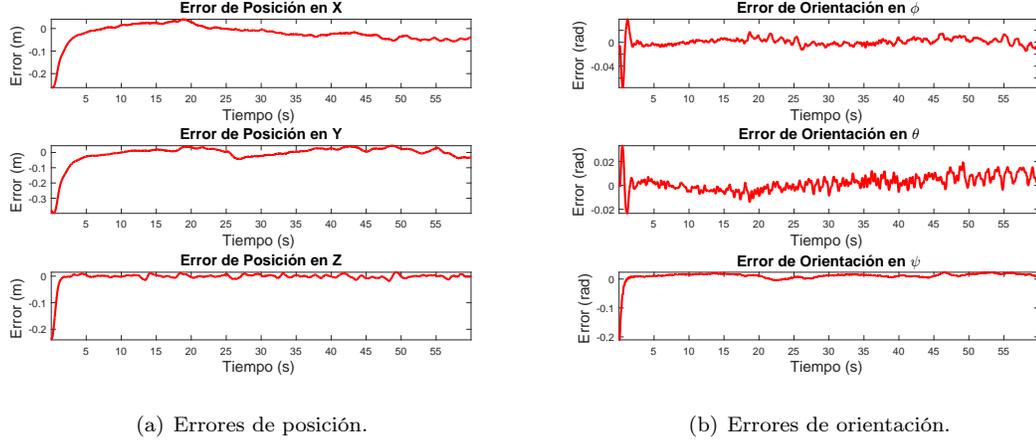


Figura 6.24: Errores del AR.Drone 2.0

el segundo las velocidades estimadas por los observadores, se puede apreciar que se tiene un mejor desempeño de la estrategia de control cuando se utilizan las velocidades estimadas a partir de los observadores, ya que los errores tanto de posición y orientación son menores, teniendo un mejor seguimiento de trayectoria.

**Control por backstepping variante en el tiempo basado en observadores de estado.** Se presentan los resultados experimentales obtenidos con las leyes de control (5.77), (5.67) y (5.68). La trayectoria deseada en el plano  $XY$  es un cuadrifolium dado por

$$\xi_1^d(t) = \left[ 1.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right), 1.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T_1}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right) \right]^T,$$

la trayectoria deseada en el eje  $Z$  está dada por

$$z^d(t) = 1.0 + 0.4 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1} + \frac{3\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{4\pi t}{T_1} + \frac{3\pi}{2}\right)$$

con un periodo de  $T_1 = 120$  s y la trayectoria deseada en el ángulo de guiñada dada por

$$\psi^d(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right), \quad (6.2)$$

con un periodo de  $T_2 = 60$  s. La Figura 6.25 muestra el movimiento del the AR.Drone en el espacio tridimensional y la Figura 6.26 la trayectoria del ángulo de guiñada. Las Figuras 6.27(a) y 6.27(b) presentan los errores de posición y orientación, respectivamente.

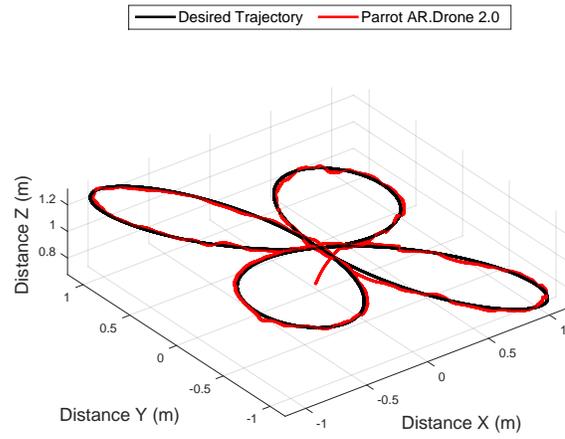


Figura 6.25: Movimiento del AR.Drone en el espacio tridimensional.

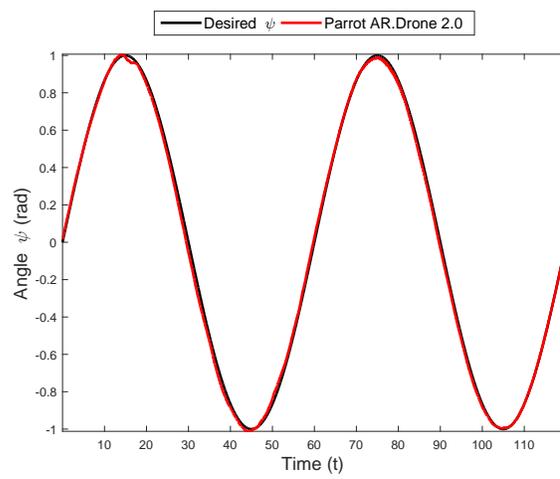
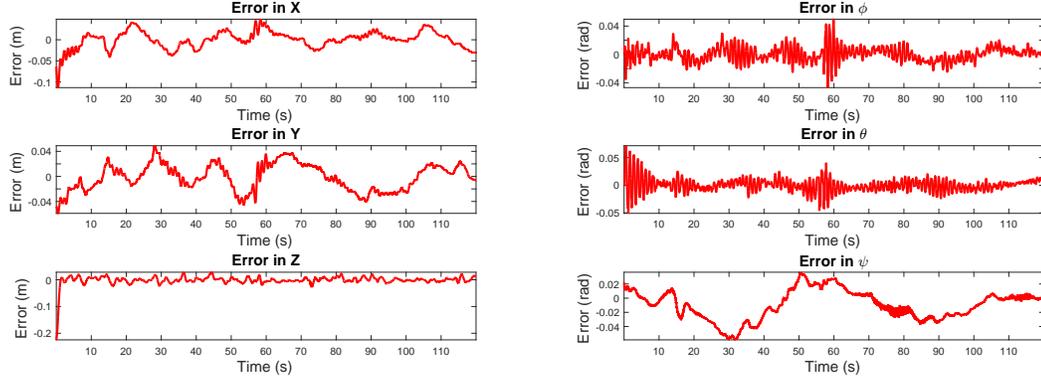


Figura 6.26: Trayectoria del ángulo de guiñada del AR.Drone 2.0



(a) Errores de posición.

(b) Errores de orientación.

Figura 6.27: Errores del AR.Drone 2.0

### 6.2.5. Vuelo en formación para el caso particular del AR.Drone 2.0.

Para el diseño de la estrategia de control de vuelo en formación con orientación al ángulo de guiñada del líder para el caso donde los agentes del sistema son específicamente helicópteros de 4 rotores AR.Drone 2.0, se utilizará la ley de control diseñada mediante backstepping variante en el tiempo dada por (5.73). Se consideran altura y ángulo de guiñada constantes e iguales para todos los agentes. Las posiciones y ángulos deseados del líder están dados a partir de la trayectoria deseada  $m(t)$ , mientras que las posiciones y ángulos deseados de los seguidores están dados por

$$\xi_i^d = \xi_n + C_{ni}(t) \quad (6.3a)$$

$$\eta_i^d = \eta_n + \ddot{C}_{ni}(t) \quad (6.3b)$$

con  $i = 1, \dots, n - 1$ . La ley de control resulta

$$u_{i\eta} = \beta_3^{-1} [\beta_1 \eta_{i2} + \beta_2 \eta_{i1} + \ddot{\eta}_{i1}^d - K_1 e_{\xi_{i1}} - K_2 e_{\xi_{i2}} - K_3 e_{\eta_{i1}} - K_4 e_{\eta_{i2}}], \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.4)$$

**Proposición 6.1** *Considere el subsistema (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e) y la ley de control (6.4). Entonces en el sistema en lazo cerrado (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e)-(6.4) el líder converge localmente asintóticamente a la trayectoria deseada en el plano XY, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_{n1}(t) - \xi_{n1}^d(t)) = 0$  y a los ángulos deseados de orientación de alabeo y cabeceo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_{n1}(t) - \eta_{n1}^d(t)) = 0$ , mientras que los seguidores convergen localmente asintóticamente a la formación deseada con respecto al líder, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_{i1}(t) - \xi_{n1}(t) - C_{ni}(t)) = 0$  y a los ángulos deseados de orientación de alabeo y cabeceo, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_{i1}(t) - \eta_{n1}(t) - \ddot{C}_{ni}(t)) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ .*

**Demostración.** La dinámica del error para  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  en lazo cerrado con la ley

de control (6.4) resulta

$$\dot{e}_{\xi\eta} = H_{\xi\eta}(t)e_{\xi\eta} \quad (6.5)$$

donde  $e_{\xi\eta} = [e_{\xi\eta_1}, \dots, e_{\xi\eta_m}]^T$  con  $e_{\xi\eta_i} = [e_{\xi_{i1}}, e_{\xi_{i2}}, e_{\eta_{i1}}, e_{\eta_{i2}}]^T$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $H_{\xi\eta}(t) = \text{diag} \{H_{\xi\eta_i}(t)\}$  con

$$H_{\xi\eta_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{z_i}(t)A_i(\psi_{i1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ -K_1 & -K_2 & -K_3 & -K_4 \end{bmatrix}.$$

Ya que la matriz  $H_{\xi\eta}(t)$  es diagonal a bloques, entonces el análisis se reduce al estudio de las submatrices  $H_{\xi\eta_i}(t)$ . A partir del procedimiento de diseño con la técnica de backstepping se sabe que las submatrices  $H_{\xi\eta_i}(t)$  son Hurwitz, por lo que la matriz  $H_{\xi\eta}(t)$  también es Hurwitz, asegurando convergencia local asintótica para cada agente en el sistema en lazo cerrado (2.14a)-(2.14b)-(2.14d)-(2.14e)-(6.4). ■

El sistema de  $n$  agentes en forma matricial está dado por

$$\dot{x}_{\xi\eta} = A_{\xi\eta}(t)x_{\xi\eta} + B_{\xi\eta}u_{\eta} \quad (6.6a)$$

$$y_{\xi\eta} = C_{\xi\eta}x_{\xi\eta} \quad (6.6b)$$

donde  $x_{\xi\eta} = [x_{\xi\eta_1}, \dots, x_{\xi\eta_m}]^T$  con  $x_{\xi\eta_i} = [\xi_{i1}, \xi_{i2}, \eta_{i1}, \eta_{i2}]^T$ ,  $i = 1, \dots, n$  son los estados del sistema,  $A_{\xi\eta}(t) = \text{diag} \{A_{\xi\eta_i}(t)\}$  con

$$A_{\xi\eta_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{z_i}(t)A_i(\psi_{i1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix},$$

$B_{\xi\eta} = [B_{\xi\eta_1}, \dots, B_{\xi\eta_m}]^T$  con  $B_{\xi\eta_i} = [0, 0, 0, \beta_3]^T$  y  $C_{\xi\eta} = \text{diag} \{C_{\xi\eta_i}\}$  con

$$C_{\xi\eta_i} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Proponemos el siguiente observador de Luenberger

$$\dot{\hat{x}}_{\xi\eta} = A_{\xi\eta}(t)\hat{x}_{\xi\eta} + B_{\xi\eta}u_{\eta} + L_{\xi\eta}(y_{\xi\eta} - \hat{y}_{\xi\eta}) \quad (6.7a)$$

$$\hat{y}_{\xi\eta} = C_{\xi\eta}\hat{x}_{\xi\eta} \quad (6.7b)$$

donde  $\hat{x}_{\xi\eta} = [\hat{x}_{\xi\eta_1}, \dots, \hat{x}_{\xi\eta_m}]^T$  con  $\hat{x}_{\xi\eta_i} = [\hat{\xi}_{i1}, \hat{\xi}_{i2}, \hat{\eta}_{i1}, \hat{\eta}_{i2}]^T$ ,  $i = 1, \dots, n$  son los estados observados y  $L_{\xi\eta}$  es la matriz de ganancias del observador.

Se puede ver que la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_{\xi\eta}$  es de rango completo, por lo que el par  $(C_{\xi\eta}, A_{\xi\eta})$  es observable y se puede escoger  $L_{\xi\eta}$  tal que  $A_{\xi\eta} - L_{\xi\eta}C_{\xi\eta}$  es Hurwitz y los errores de observación converjan a cero asintóticamente.

Modificamos la ley de control (6.4) usando las velocidades estimadas longitudinales y rotacionales  $\hat{\xi}_{i2}$  y  $\hat{\eta}_{i2}$ , respectivamente, obtenidas del observador (6.7a). Esto produce

$$u_\eta = \beta_3^{-1} \left[ \beta_1 \hat{\eta}_{i2} + \beta_2 \eta_{i1} + \ddot{\eta}_{i1}^d - K_1 e_{\xi_{i1}} - K_2 (\hat{\xi}_{i2} - \xi_{i1}^d) - K_3 e_{\eta_{i1}} - K_4 (\hat{\eta}_{i2} - \dot{\eta}_{i1}^d) \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (6.8)$$

**Proposición 6.2** *Considere el subsistema (6.6a), el observador (6.7a) y la ley de control (6.8). Las matrices  $H_{\xi_\eta}(t)$  y  $A_{\xi_\eta}(t) - L_{\xi_\eta} C_{\xi_\eta}$  son Hurwitz. Entonces en el sistema en lazo cerrado (6.6a)-(6.7a)-(6.8), los errores de seguimiento y de observación para la dinámica en  $X$ ,  $Y$ ,  $\theta$  y  $\phi$  convergen a cero, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi_\eta}(t) - x_{\xi_\eta}^d(t)) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{\xi_\eta}(t) - \hat{x}_{\xi_\eta}(t)) = 0$ .*

**Demostración.** Para la demostración se sigue un procedimiento similar al presentado en la demostración de la Proposición 5.3 pero considerando ahora el caso de  $n$  agentes. ■

A continuación se presentan los resultados experimentales obtenidos utilizando la estrategia de control (6.8) y el observador (6.7a). Para el experimento, debido al espacio de trabajo con el que se cuenta, sólo se consideran 2 helicópteros de 4 rotores AR.Drone 2.0 con una formación estática, considerando la gráfica de formación centrada en el líder de la Figura 2.3. La trayectoria deseada es una Lemniscata de Geronon en el plano  $XY$  dada por

$$m(t) = \left[ \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), 0.5 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]$$

con un periodo de  $T = 60$  s, con altura y ángulo guiñada constantes de  $z = 1$  m y  $\psi = 45^\circ$ , respectivamente, para ambos agentes. El vector de posición estática entre el líder y el seguidor está dado por  $c_{21} = [0, -1]$ .

La Figura 6.28 muestra las trayectorias de los agentes en el espacio. Las Figuras 6.29(a) y 6.29(b) muestran los errores de posición del líder y seguidor, respectivamente. Los errores de orientación para el líder y el seguidor se muestran en las Figuras 6.30(a) y 6.30(b), respectivamente.

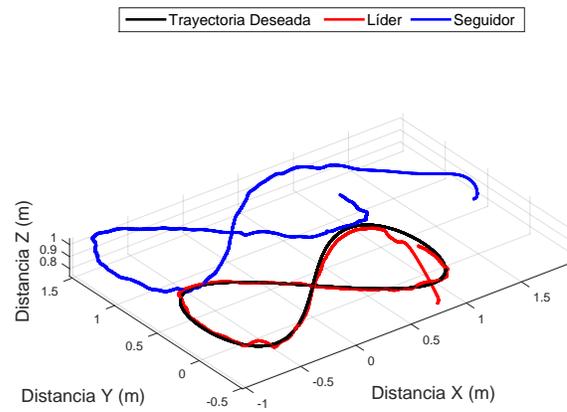
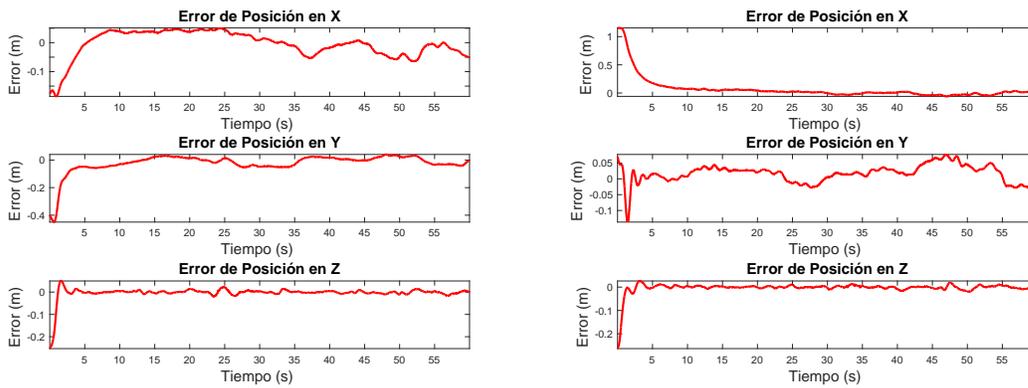


Figura 6.28: Trayectorias de los agentes en el plano.



(a) Errores del líder.

(b) Errores del seguidor.

Figura 6.29: Errores de posición de los agentes.

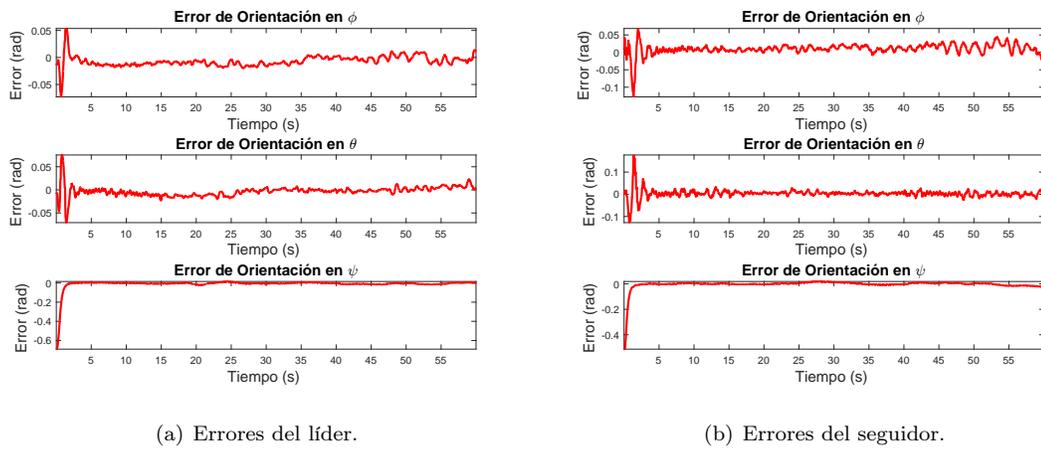


Figura 6.30: Errores de orientación de los agentes.



## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo futuro

### 7.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentan estrategias de control descentralizadas para lograr la coordinación de movimiento con no colisión en sistemas multi-agente. Para el caso de robots móviles terrestres:

- Se proponen estrategias de control para lograr el confinamiento con avance en formación estática y confinamiento con avance en formación variante en el tiempo. Primero se consideran casos particulares utilizando gráficas de formación de cadena abierta con líder y centrada en el líder, para posteriormente presentar una generalización en la que se considera cualquier gráfica de formación arbitraria. Para el caso de confinamiento con avance en formación estática, se hace una prealimentación de la velocidad de marcha en la ley de control. Para el caso de confinamiento con avance en formación variante en el tiempo, se realiza una prealimentación de las velocidades de los agentes en la ley de control.
- Se proponen estrategias de control para lograr la coordinación de movimiento con no colisión. Se presentan un control normalizado para lograr formación y controles acotados para realizar avance en formación variante en el tiempo y confinamiento con avance en formación variante en el tiempo. Dichas leyes de control se complementan con un campo vectorial repulsivo tipo foco inestable con lo que se garantiza que los agentes evadirán colisiones entre ellos y además, permanecerán a una distancia mayor o igual a una distancia mínima preestablecida. También se propone una estrategia de control para lograr la evasión de obstáculos en el problema de avance en formación estática, que permite la evasión de colisiones manteniendo la formación por parte de los agentes, es decir, se logra un comportamiento similar al de un cuerpo rígido.

Como se puede observar en las simulaciones numéricas y en los casos experimentales presentados de las estrategias de control diseñadas en este trabajo para robots móviles terrestres, se logran los objetivos propuestos. Los resultados son presentados para un punto frontal fuera del eje de las ruedas de robots móviles de tracción diferencial. Para robots móviles aéreos:

- Se proponen estrategias de control para lograr el seguimiento de trayectorias para helicópteros de 4 rotores, en particular, para el AR.Drone 2.0. Se presenta un control tipo pd usando un modelo simple del AR.Drone y otro control diseñado con la técnica de backstepping y basada en el uso de observadores para estimar las velocidades longitudinales y rotacionales, empleando para ello un modelo completo del AR.Drone.
- Se propone una estrategia de control para lograr vuelo en formación variante en el tiempo para sistemas multi-agentes conformados por helicópteros de 4 rotores. Se utiliza una gráfica de formación centrada en el líder y en este caso, la formación se orienta a la dirección del ángulo de guiñada del líder.

Como se puede observar en las simulaciones numéricas y en los casos experimentales presentados de las estrategias de control diseñadas en este trabajo para robots móviles aéreos, se logran los objetivos propuestos. El error presente en los resultados experimentales del control de helicópteros de 4 rotores AR.Drone 2.0 puede considerarse aceptable debido a que se despreciaron los efectos no lineales que se presentan debido al desbalanceo y deformaciones en las hélices, ejes y engranes del AR.Drone. Así mismo, se despreciaron las turbulencias generadas por las hélices y otros efectos aerodinámicos, e.g. el efecto suelo. Cabe recordar que los resultados obtenidos para el control del Ar.Drone son locales, ya que para el diseño de la estrategia de control y de los observadores, se utilizó una aproximación de primer orden del modelo completo del AR.Drone.

## 7.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se propone lo siguiente:

- En el problema de evasión de obstáculos, considerar obstáculos en movimiento, así como la posible colisión con varios obstáculos al mismo tiempo.
- Incluir en una misma estrategia de evasión de colisiones tanto el problema de colisiones entre los agentes del sistema como el problema de colisiones con posibles obstáculos en el control para la coordinación de movimiento para sistemas multi-agente.
- Debido a las diferencias que se pueden observar entre los resultados experimentales y de simulación numérica en la evasión de colisiones en el control de formación, a causa de dinámicas no modeladas, nos motiva a extender este trabajo considerando robots móviles de tracción diferencial de segundo orden.
- Se pretende realizar más experimentos considerando formaciones variantes en el tiempo donde se incluya el factor de escalamiento junto con la estrategia de evasión de colisiones.
- Diseñar un control para el rechazo de perturbaciones aerodinámicas en el control de helicópteros de 4 rotores.

- Agregar campos vectoriales repulsivos al control de helicópteros de 4 rotores para lograr la evasión de colisiones.
- Realizar experimentos de las estrategias de control de vuelo en formación variante en el tiempo.
- Se plantea la utilización del modelo completo del AR.Drone, para el cual se diseñará una estrategia de control no lineal y se emplearán observadores no lineales para estimar las velocidades longitudinales y rotacionales, con lo que se pretende mejorar el desempeño y obtener resultados más generales.



# Bibliografía

- [1] R. Abbas and Q. Wu. Formation tracking for multiple quadrotor based on sliding mode and fixed communication topology. *5th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics*, 2013.
- [2] M. Achtelik, A. Bachrach, and R. He. Stereo vision and laser odometry for autonomous helicopters in gps-denied indoor environments. *SPIE Unmanned Systems Technology XI*, 7332, 2009.
- [3] H.A.F. Almurib, Nathan, P.T., and T.N. Kumar. Control and path planning of quadrotor aerial vehicles for search and rescue. *SICE Annual Conference*, Tokyo, Japan 2011.
- [4] T. Arai, E. Pagello, and E. Parker. Guest editorial advances in multirobot systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18:655 – 661, October 2002.
- [5] M. Blondschi, S. Weiss, D. Scaramuzza, and R. Siegwart. Vision based mav navigation in unknown and unstructured environments. *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 21 – 28, 2010.
- [6] L. Briñon-Arranz, A. Seuret, and C. Canudas-de Wit. Cooperative control design for time-varying formations of multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(8):2283 – 2288, 2014.
- [7] P. J. Bristeau, F. Callou, D. Vissière, and N. Petit. The navigation and control technology inside the ar.drone micro uav. *18th IFAC World Congress*, 2011.
- [8] R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. S. Millman, R. W. Brockett, and H. J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 181 – 191. Boston, Massachusetts, USA, 1983.
- [9] Y. Cai, H. Liu, and G. Xie. Finite-time containment control for multi-agent systems with single-integrator dynamics. *Proc. of the 31st Chinese Control Conference*, pages 6433 – 6438, July 2012.
- [10] Y. Cai, H. Liu, and G. Xie. Finite-time containment control for multi-agent systems with single-integrator dynamics. *Proc. of the 31st Chinese Control Conference*, pages 6433–6438, 2012.

- [11] Y. Cao and W. Ren. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph. *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pages 3014 – 3019, December 2009.
- [12] Y. U. Cao, A. S. Fukunaga, and A. B. Kahng. Cooperative mobile robotics: antecedents and directions. *Autonomous Robots*, 4:226 – 234, 1997.
- [13] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul. Stabilization of a mini-rotorcraft having four rotors. *Proc. of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 3:2693–2698, 2004.
- [14] A. Chakravarthy and D. Ghose. Obstacle avoidance in a dynamic environment: a collision cone approach. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 28:562 – 574, September 1998.
- [15] F. Chen, W. Ren, and Z. Lin. Multi-agent coordination with cohesion, dispersion, and containment control. *American Control Conference*, pages 4756 – 4761, 2010.
- [16] M. C. De Gennaro and A. Jadbabaie. Formation control for a cooperative multi-agent system using decentralized navigation functions. *American Control Conference*, 2006.
- [17] J.P. Desai. A graph theoretic approach for modeling mobile robot team formations. *Journal of Robotic Systems*, 19(11):511 – 525, 2002.
- [18] D. V. Dimarogonas, M. Egerstedt, and K. J. Kyriakopoulos. A leader-based containment control strategy for multiple unicycles. *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and control*, pages 5968 – 5973, December 2006.
- [19] D. V. Dimarogonas and K. J. Kyriakopoulos. Distributed cooperative control and collision avoidance for multiple kinematics agents. *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and control*, pages 721 – 726, 2006.
- [20] D. V. Dimarogonas, S. G. Loizou, K. J. Kyriakopoulos, and M. M. Zavlanos. A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents. *Automatica*, 42:229 – 243, 2006.
- [21] X. Dong, Q. Li, Z. Ren, and Y. Zhong. Formation-containment control for high-order linear time-invariant multi-agent systems with time delays. *Journal of the Franklin Institute*, 352:3564 – 3584, 2015.
- [22] X. Dong, J. Xi, Z. Shi, and Y. Zhong. Containment analysis and design for high-order linear time-invariant singular swarm systems with time delays. *Proc. of the 31st Chinese Control Conference*, pages 6296 – 6302, 2012.
- [23] I. Dryanovski, R.G. Valenti, and J. Xiao. An open-source navigation system for micro aerial vehicles. *Autonomous Robots*, 34(3):177–188, Springer, US 2013.

- [24] P. Falcón, A. Barreiro, and M. D. Cacho. Modeling of parrot ardrone and passivity-based reset control. *9th Asian Control Conference (ASCC)*, pages 1 – 6, 2013.
- [25] J.A. Fax and R.M Murray. Graph laplacians and stabilization of vehicle formations. *15th IFAC World Congress*, 15, 2002.
- [26] G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt, A. Buffa, and M. Ji. *Laplacian sheep: a hybrid, stop-go policy for leader-based containment control*, pages 212 – 226. Springer Verlag, 2006.
- [27] R. Fierro, C. Belta, J.P. Desai, and V. Kumar. On controlling aircraft formations. *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 2:1065–1070, Orlando, Florida, USA 2001.
- [28] J.F. Flores-Resendiz, E. Aranda-Bricaire, J. González-Sierra, and J. Santiaguillo-Salinas. Finite-time formation control without collisions for multiagent systems with communication graphs composed of cyclic paths. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015:17 pages, 2015.
- [29] L.R. García, A.E. Dzul, R. Lozano, and C. Pégard. *Quad rotorcraft control. Vision-based hovering and navigation*. Advances in Industrial Control. Springer, London, 2013.
- [30] L. García-Delgado, A. Dzul, V. Santibáñez, and M. Llama. Quad-rotors formation based on potential functions with obstacle avoidance. *IET Control Theory and Applications*, 6(12):1787–1802, 2012.
- [31] I. González, S. Salazar, J. Torres, R. Lozano, and H. Romero. Real-time attitude stabilization of a mini-uav quad-rotor using motor speed feedback. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 70(1-4):93–106, Springer, Netherlands 2013.
- [32] J. González-Sierra and E. Aranda-Bricaire. Design of a virtual mechanism for trajectory tracking of convoys of mobile robots. *10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 364 – 368, 2013.
- [33] J. González-Sierra, E. Aranda-Bricaire, and E.G. Hernández-Martínez. Trajectory tracking strategies with singularities avoidance for groups of unicycle-type robots. *18th IFAC World Congress*, 18:5926–5931, 2011.
- [34] J.A. Guerrero, P. Castillo, S. Salazar, and R. Lozano. Mini rotorcraft flight formation control using bounded inputs. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 65(1-4):175–186, Springer, Netherlands 2012.
- [35] A. Hernandez, C. Copot, R. De keyser, T. Vlas, and I. Nascu. Identification and path following control of an ar.drone quadrotor. *17th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pages 583 – 588, 2013.

- [36] E.G. Hernández-Martínez. *Estrategias de control para sistemas multiagentes*. PhD thesis, Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, México, 2009.
- [37] E.G. Hernández-Martínez and E. Aranda-Bricaire. Multi-agent formation control with collision avoidance based on discontinuous vector fields. *35th Annual Conference of the IEEE industrial electronics society*, pages 2283 – 2288, 2009.
- [38] E.G. Hernández-Martínez and E. Aranda-Bricaire. Collision avoidance in formation control using discontinuous vector fields. *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, 2013.
- [39] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis (Online publication)*. Cambridge University Press, 2011.
- [40] L. Jayatilleke and N. Zhang. Landmark-based localization for unmanned aerial vehicles. *2013 IEEE International Systems Conference (SysCon)*, pages 448–451, 2013.
- [41] M. Ji, G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt, and A. Buffa. Containment control in mobile networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(8):1972 – 1975, September 2008.
- [42] J. Jiménez-Lugo, A. Masselli, and A. Zell. Following a quadrotor with another quadrotor using onboard vision. *2013 European Conference on Mobile Robots (ECMR)*, pages 26–31, 2013.
- [43] J. Jiménez-Lugo and A. Zell. Framework for autonomous onboard navigation with the ar.drone. *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 575–583, 2013.
- [44] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [45] P. V Kokotovic. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3):7 – 17, 1992.
- [46] M. Krstic, P. V. Kokotovic, and I. Kanellakopoulos. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [47] Caughman J. Lafferriere, G. and A Williams. Graph theoretic methods in the stability of vehicle formations. *American Control Conference*, 4:3729 – 3734, 2004.
- [48] J. Li, W. Ren, and S. Xu. Distributed containment control with multiple dynamic leaders for double-integrator dynamics using only position measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6):1553 – 1559, 2012.
- [49] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and L. Xie. Distributed containment control of linear multi-agent systems with multiple leaders and reduced-order controllers. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 771 – 776, 2011.

- [50] S. G. Loizou, H. G. Tannert, V. Kumar, and K. J. Kyriakopoulos. Closed loop navigation for mobile agents in dynamic environments. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3769 – 3774, 2003.
- [51] R. Mahony, V. Kumar, and P. Corke. Multirotor aerial vehicles: modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(3):20–32, September 2012.
- [52] M. Malisoff and F. Mazenc. *Constructions of Strict Lyapunov Functions*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2009.
- [53] D. Mellinger and V. Kumar. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2520–2525, 2011.
- [54] D. Mellinger, A. Kushleyev, and V. Kumar. Mixed-integer quadratic program trajectory generation for heterogeneous quadrotor teams. *Proc. of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 477–483, May 2012.
- [55] D. Mellinger, N. Michael, and V. Kumar. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *International Journal of Robotics Research*, 2012.
- [56] N. Michael, J. Fink, and V. Kumar. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. *Proc. of Robotics: Science and Systems*, 2010.
- [57] A. Mokhtari, N. K. M’Sirdi, K. Meghriche, and K. Belaidi. Feedback linearization and linear observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle. *Advanced Robotics*, 20(1):71 – 91, 2012.
- [58] P.T. Nathan, H.A.F. Almurib, and T.N. Kumar. A review of autonomous multi-agent quad-rotor control techniques and applications. *4th International Conference on Mechatronics ICOM 2011*, Kuala Lumpur, Malaysia 2011.
- [59] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 2010.
- [60] G.R. Peñaloza-Mendoza, D.E. Hernández-Mendoza, and E. Aranda-Bricaire. Time-varying formation control for multi-agent systems applied to n-trailer configuration. *8th International Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 2011.
- [61] U. Pilz, A.P. Popov, and H. Werner. Robust controller design for formation flight of quad-rotor helicopters. *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, P.R. China 2009.
- [62] U. Pilz and H. Werner. Local controller synthesis for multi-agent systems subject to time-varying communication delays. *49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA 2010.

- [63] G.D. Poole. Generalized m-matrices and applications. *Mathematics of Computation*, 29(131):903–910, 1975.
- [64] H. Qianwei, M. Hongxu, and Z. Hui. Collision-avoidance mechanism of multi agent system. *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing*, pages 1036 – 1040, October 2003.
- [65] W. Ren and R. W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control Theory and Applications*. Springer London, 2008.
- [66] W. Ren and Y. Cao. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2011.
- [67] F. Rendón-Benitez, J. Santiaguillo-Salinas, J. González-Sierra, and E. Aranda-Bricaire. Control de marcha de sistemas multi-agente con orientación al ángulo de marcha del líder. *XV Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA)*, 2012.
- [68] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton University Press, 1997.
- [69] Santos-Brandão A. Vago-Santana, L., M. Sarcinelli-Filho, and R. Carelli. A trajectory tracking and 3d positioning concontrol for the ar.drone quadrotor. *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 756 – 767, 2014.
- [70] X. Wang and B. Shirinzadeh. Nonlinear augmented observer design and application to quadrotor aircraft. *Nonlinear Dynamics*, 80(3):1463 – 1481, 2015.
- [71] G. Wen, Z. Duan, Y. Zhang, and G. Chen. Distributed containment control of uncertain linear multi-agent systems. *Proc. of the 10th World Congress on Intelligent control and automation*, pages 869 – 874, July 2012.
- [72] K.E. Wenzel, A. Masselli, and A. Zell. Visual tracking and following of a quadcopter by another quadcopter. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 4993–4998, 2012.
- [73] J. Yao, R. Ordoez, and V. Gazi. Swarm tracking using artificial potentials and sliding mode control. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4670 – 4675, 2006.
- [74] Y. Zhao, Z. Duan, G. Wen, and Y. Zhang. Distributed finite-time containment control for second-order multi-agent systems. *Proc. of the 31st Chinese Control Conference*, pages 6202 – 6207, July 2012.

# Apéndice A

## Artículos Publicados

A continuación se presentan los productos de investigación obtenidos a partir del desarrollo del presente trabajo de tesis y de colaboraciones con colegas de la misma área de investigación. Dichos productos abarcan artículos de revista de prestigio internacional con arbitraje estricto, artículos de revistas especializadas con arbitraje, artículos en memorias de congresos internacionales y locales.

### **A.1. Artículos de revistas de prestigio internacional, con arbitraje estricto**

- J. González-Sierra, E. Aranda-Bricaire, D.E. Hernández-Mendoza, J. Santiaguillo-Salinas. Emulation of n-trailer systems through differentially driven multi-agent systems: continuous and discrete-time approaches. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 75(1), pp. 129-146. Springer Netherlands, 2014. ISSN 0921-0296, DOI: 10.1007/s10846-013-0002-9.
- J. F. Flores-Resendiz, E. Aranda-Bricaire, J. González-Sierra, and J. Santiaguillo-Salinas. Finite-Time Formation Control without Collisions for Multiagent Systems with Communication Graphs Composed of Cyclic Paths. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, Article ID 948086, 17 pages. Hindawi, 2015. DOI: 10.1155/2015/948086.
- J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda Bricaire. Containment Problem with Time-varying Formation and Collision Avoidance for Multi-agent Systems. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 14(3), pp. 1-13. SAGE, 2017. ISSN 1729-8814, DOI: 10.1177/1729881417703929.

### **A.2. Artículos de revistas especializadas, con arbitraje**

- J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Time-varying containment control for multi-agent robot systems with general formation graphs. *AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications*, vol. 2(3), pp 79-84, 2014. ISSN: 2007-7114.

- J. González-Sierra, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Reducción de los efectos de sobreviraje para un tráiler virtual. *AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications*, vol. 2(3), pp 73-78, 2014. ISSN: 2007-7114.
- J. Santiaguillo-Salinas, J. González-Sierra and E. Aranda Bricaire. Evasión de obstáculos en el control de marcha para sistemas multi-agente. *AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications*, vol. 4(3), pp 75-80, 2016. ISSN: 2007-7114.
- J. González-Sierra, J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda Bricaire. Individual obstacle avoidance for groups of mobile robots in formation tracking. *AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications*, vol. 4(3), pp 63-68, 2016. ISSN: 2007-7114.

### **A.3. Artículos en memorias de congresos internacionales, con arbitraje**

- J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Time-varying containment problem for multi-agent systems. 10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2013), México D.F., México, Septiembre 30-Octubre 4, 2013.
- J. González-Sierra, E. Aranda-Bricaire, H. Rodríguez-Cortés, J. Santiaguillo-Salinas. Trajectory Tracking for a Group of Unicycle-Type Robots Using an Attitude Observer. 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Vol. 9, Part 1: 676-681, Toulouse, France, 2013.
- J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Leader-oriented formation flight control for multi-agent systems. XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2014), pp. 935-940, Cancún, Quintana Roo, México, Octubre 14-17, 2014.
- J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Seguimiento de trayectorias para un helicóptero de 4 rotores AR.Drone 2.0 utilizando ROS. XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2014), pp. 606-611, Cancún, Quintana Roo, México, Octubre 14-17, 2014.
- J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire. A Time-varying Version of the Containment Problem for Multi-agent Systems using General Formation Graphs. 2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA) part of 2016 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC 2016), Buenos Aires, Argentina, pp 513-518, 2016.
- J. Santiaguillo-Salinas, M.A. Rosaldo-Serrano and E. Aranda-Bricaire. Control de Seguimiento de Trayectorias para un AR.Drone 2.0 Utilizando Observadores de Estados. XVII Latin American Conference on Automatic Control (CLCA 2016), Medellín, Colombia, pp 542-547, 2016.

- M. A. Rosaldo-Serrano, J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire. Observer-Based Time-Varying Backstepping Control for a Quadrotor Multi-Agent System. The 2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS 2017), Miami, Florida, USA, Junio 13-16, 2017.
- J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire. Time-varying Formation Tracking with Collision Avoidance for Multi-agent Systems. IFAC 2017 World Congress, Toulouse, France, Julio 9-14, 2017.
- M. A. Rosaldo-Serrano, J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire. Observer-Based Time-Varying Backstepping Control for Parrot's AR.Drone 2.0. IFAC 2017 World Congress, Toulouse, France, Julio 9-14, 2017.

#### A.4. Artículos en memorias de congresos locales, con arbitraje

- J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Time-varying containment control for multi-agent robot systems with general formation graphs. Memorias del XV Congreso Mexicano de Robótica (COMRob 2013), pp. 269-274, Manzanillo, Colima, México, Octubre 1-4, 2013.
- J. González-Sierra, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Reducción de los efectos de sobreviraje para un tráiler virtual. Memorias del XV Congreso Mexicano de Robótica (COMRob 2013), pp. 229-234. Manzanillo, Colima, Mexico, Octubre 1-4, 2013.
- J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Control de marcha y confinamiento para sistemas multi-agente. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático (CNCA 2013), pp. 747-752, Ensenada, Baja California, México, Octubre 16-18, 2013.
- J. González-Sierra, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire. Emulación de estructuras mecánicas mediante sistemas multi-agente. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático (CNCA 2013), pp. 348-353, Ensenada, Baja California, Mexico, Octubre 16-18, 2013.
- J. Santiaguillo-Salinas, J. González-Sierra, E. Aranda-Bricaire, Evasión de obstáculos en el control de marcha para sistemas multi-agente, Memorias del XVII Congreso Mexicano de Robótica, Los Cabos, Baja California Sur, México, Noviembre 11-13, 2015. (Nominado al premio Rafael Kelly).
- J. González-Sierra, J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda Bricaire, Individual Obstacle Avoidance for Groups of Mobile Robots in Formation Tracking, Memorias del XVII Congreso Mexicano de Robótica, Los Cabos, Baja California Sur, México, Noviembre 11-13, 2015.
- M.A. Rosaldo-Serrano, J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire, Modelado y control mediante backstepping de un AR.Drone 2.0, XVIII Congreso Mexicano

de Robótica (COMRob), Mazatlán, Sinaloa, México, pp 296-301, 2016. (Nominado al premio Rafael Kelly).

- J. González-Sierra, J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire, Reciprocal collision avoidance for a group of second order agents, XVIII Congreso Mexicano de Robótica (COMRob), Mazatlán, Sinaloa, México, pp 273-278, 2016. (Ganador del premio Rafael Kelly).

### A.5. Capítulos de libros especializados

- J. Santiaguillo-Salinas and E. Aranda-Bricaire. Motion Coordination with Collision Avoidance for Multi-agent Systems, in Multiagent Systems. INTECH Open Science. (Aceptado, por publicarse).