

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

*UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA*

Análisis de los Drenajes de Energía en Absorbedores de Vibraciones No Lineales

T E S I S

Que presenta

Ing. Leonardo Rodríguez Carbajal.

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la Especialidad de

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis:

Dr. Gerardo Silva Navarro

Ciudad de México

Febrero del 2018

Dedicatoria

A mis padres quienes me brindan su apoyo incondicional y me motivan a seguir en este camino, en buenos y malos momentos. Y porque cada día me recuerdan que las cosas más importantes en la vida son las que me hacen feliz. A mis hermanos quienes les tengo un gran cariño y afecto. Y en general a todas las personas que les tengo y me tienen estima.

Agradecimientos

A mis padres por recordarme que nada es fácil, pero que con trabajo y esfuerzo se pueden alcanzar una a una las metas planteadas.

A mi director de tesis Doctor Gerardo Silva Navarro, por su valioso apoyo, enseñanza y consejos, y por darme la oportunidad de ser su asesorado.

Al Doctor Martín Velasco Villa y Doctor Juan Fernando Peza Solís por haber aceptado formar parte del jurado, por sus correcciones y sugerencia al presente trabajo.

A mis amigos y compañeros de generación con quienes compartí incontables momentos de preocupación y desvelo, quienes me proporcionaron ayuda e intercambio de conocimiento.

A los Doctores de la sección de mecatrónica que me impartieron clases y contribuyeron a mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme otorgado una beca para poder realizar mis estudios de maestría en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., (CINVESTAV).

Resumen

Este trabajo de tesis aborda la absorción pasiva de vibraciones en sistemas no lineales. El objeto de estudio es un sistema primario, del tipo masa-resorte-amortiguador con rigidez cúbica, al cual se desea reducir las vibraciones, conectado a otro sistema secundario con las mismas características encargado de realizar la absorción. El análisis se efectúa con el método de escalas múltiples, obteniendo la respuesta aproximada en frecuencia en estado estacionario. En un principio se aborda la teoría sobre los sistemas autoparamétricos en los cuales se presentan fenómenos no lineales los cuales ofrecen beneficios en la absorción y, posteriormente, se emplea el enfoque de la transferencia de energía dirigida (TET, por sus siglas en inglés Target Energy Transfer) y los llamados drenajes no lineales de energía (NES, por sus siglas en inglés Non linear Energy Sink). Fundamentalmente, se presenta un estudio general del fenómeno de los Drenajes No Lineales de Energía y se analiza en qué condiciones un absorbedor de vibraciones del tipo no lineal cae dentro de esta clase de sistemas, particularmente cuando se trata de absorbedores de tipo autoparamétrico.

Abstract

This work deals with the passive vibration absorption on inherently non-linear systems. The object of study is a mass-spring-damper primary system, with cubic stiffness, to which the vibrations are to be reduced, connected to another secondary system with the same characteristics and acting as a nonlinear passive vibration absorber, whose role is the energy and vibration absorption. The analysis is carried out by application of multiple scales method, obtaining the approximate frequency response function. To do this, first the theory about autoparametric systems with nonlinear coupling terms are described, which offer benefits for passive vibration absorption under resonant conditions and, later, the attention is focused on the so-called Target Energy Transfer (TET) and Nonlinear Energy Sinks (NES). Fundamentally, the work describes a general study of the phenomenon related to the Nonlinear Energy Sinks, thus analyzing under what conditions a nonlinear type vibration absorber can be classified as part of this particular class of dynamical systems with particular emphasis on the autoparametric type absorbers.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Importancia de las Vibraciones No Lineales	2
1.2. Absorbedor Pasivo de Vibraciones	2
1.3. Transferencia de Energía Dirigida	3
1.4. Drenaje de Energía No Lineal	3
1.5. Antecedentes de Absorbedores	4
1.6. Antecedentes sobre Drenajes No Lineales de Energía	6
1.7. Motivación del trabajo	8
1.8. Objetivos de la tesis	9
1.8.1. Objetivo general	9
1.8.2. Objetivos específicos	9
1.8.3. Organización de la tesis	9
2. Preliminares	11
2.1. Método de escalas múltiples	11
2.2. Sistemas forzados	14
2.2.1. Excitación externa	15
2.2.2. Sistema forzado con no linealidades cúbicas débilmente amortiguado.	15
2.2.3. Resonancia primaria o principal, $\Omega \approx \omega$	16
2.3. Sistemas de múltiples grados de libertad con no linealidad cúbica	23
2.4. Absorbedor de vibración autoparamétrico	25
2.4.1. Sistemas paramétricos	25
2.4.2. Sistemas autoparamétricos	26
2.5. Transferencia de Energía Dirigida y Drenaje No Lineal de Energía	29
2.5.1. Localización de la energía en sistemas no lineales	31
3. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing	33
3.1. Sistema primario tipo Duffing con amortiguamiento viscoso	34
3.1.1. Simulación de la respuesta frecuencial aproximada del sistema tipo Duffing con amortiguamiento	36
3.1.2. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing	37

4. Descripción de la plataforma experimental	43
4.1. Obtención experimental de los parámetros modales.	45
4.1.1. Parametrización con una base móvil	45
4.1.2. Parametrización con dos bases móviles	47
4.2. Obtención experimental de la función de rigidez	49
5. Resultados experimentales	51
5.1. Sistema primario tipo Duffing	51
5.1.1. Respuesta frecuencial experimental	51
5.1.2. Análisis de la respuesta en estado estacionario.	54
5.1.3. Discusión y comentarios	65
5.2. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing	67
5.2.1. Discusión y comentarios	73
6. Conclusiones	75
6.1. Conclusiones generales	75
6.2. Conclusiones particulares	76
6.3. Trabajo futuro	77
Bibliografía	78
A. Programas de cálculo utilizados.	87

Capítulo 1

Introducción

Las vibraciones se encuentran en muchos fenómenos físicos presentes en nuestro entorno; en fenómenos naturales, sismos, el movimiento de las olas del mar, las ondas que se generan al lanzar una piedra en un charco de agua, el movimiento de la tierra; en el cuerpo humano, el bombeo de sangre, la respiración (los pulmones se expanden y comprimen), al escuchar (el tímpano del oído percibe ondas de sonido por medio de vibraciones), al hablar (la faringe produce pequeñas oscilaciones) y oscilaciones que son inducidas por el ritmo de los movimientos corporales al caminar, saltar, correr, nadar; en máquinas e instrumentos, el movimiento de ida y vuelta de los pistones de un motor, en bandas transportadoras vibratorias, en la separación y filtrado por medio de tolvas, al compactar o distribuir material de construcción con una regla vibratoria, en sillones de masaje, en cortadoras de cabello, las fluctuaciones de un puente de carretera con vehículos que pasan, el balanceo de un barco bajo la influencia de las olas del océano, las oscilaciones de una cuerda en instrumentos musicales; Ver, e.g., J. P. Den Hartog [4], C.W. De Silva [33, 34], A. D. Dimarogonas [35], C.M. Harris [36], S. Braun et al. [37].

En términos simples, una vibración es un movimiento o respuesta oscilatorio(a) de un cuerpo, objeto o sistema alrededor de un punto de equilibrio. Estas pueden ocurrir en un sistema mecánico, sistema eléctrico, y pueden representar su comportamiento dinámico natural o bien pueden ser inducidas mediante alguna fuerza de excitación. Asimismo, estas fuerzas pueden ser generadas internamente en el sistema o transmitidas por alguna fuente externa. Cuando la frecuencia de la fuerza de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, la respuesta de este alcanzará grandes amplitudes, dependiendo del amortiguamiento presente. A este fenómeno se le conoce como resonancia y constituye un fenómeno producido por la *inestabilidad* del sistema.

Todo sistema presenta una señal de vibración en la cual plasman cada una de sus características, cada componente de éste presenta su propia señal de vibración y en ella se encuentra la información de cada uno de estos, es decir, una señal de vibración capturada del sistema se compone de la suma de la vibración de cada uno de sus componentes.

Para que la oscilación ocurra, debe de existir dos elementos esenciales: un elemento de masa o inercia que almacene energía cinética y un elemento de elasticidad o resorte que almacene energía potencial; de forma general siempre existe un tercer elemento de amortiguamiento, el cual disipa energía. El elemento de elasticidad provee una fuerza de restauración que continuamente tira la masa hacia su posición de equilibrio, causando la oscilación de la masa. Por lo tanto, todo cuerpo que posee masa y elasticidad es capaz de vibrar en el momento que se le proporciona energía.

Durante las vibraciones, la energía potencial y la energía cinética se convierten una en la otra, almacenándose y liberándose de los dos elementos, respectivamente. Si el sistema se amortigua, una parte de su energía se disipa en cada ciclo de vibración y se debe proporcionar una fuente externa para que se mantenga un estado de vibración estable. Ver, e.g., B. Balachandran [17], S.S. Rao [51].

1.1. Importancia de las Vibraciones No Lineales

Las vibraciones no lineales se presentan, si cualquier componente básico de un sistema vibratorio se comporta de forma no lineal. En tal caso el principio de superposición no es válido y las técnicas de análisis son menos conocidas y difíciles de aplicar. Como los sistemas vibratorios tienden a comportarse no linealmente con amplitud de oscilación creciente (por ejemplo, sistemas en resonancia), es deseable un conocimiento de la vibración no lineal cuando se trate con sistemas vibratorios. Ver, e.g., S. S. Rao [51] y W. T. Thomson [52].

La fuente de la no linealidad suele ser generada por las propiedades de material o las propiedades geométricas presentes en los componentes del sistema. En el estudio de las oscilaciones pequeñas, un sistema no lineal puede ser tratado como uno lineal por medio de una linealización adecuada. Sin embargo, las no linealidades deben ser consideradas cuando se trata con oscilaciones grandes. Físicamente, los sistemas no lineales presentan ciertas características únicas que carecen los sistemas lineales, tales como resonancia sub-armónica y super-armónica, vibraciones excitadas de forma paramétrica, ciclos limites, oscilaciones auto-excitadas, movimiento caótico. (S. Braun et al. [37]).

1.2. Absorbedor Pasivo de Vibraciones

Una de las razones por las cuales es necesario estudiar las vibraciones mecánicas, es el verificar que estas se encuentren dentro de las normas de seguridad, con el fin de eliminar o minimizar los efectos nocivos sobre el hombre, estructuras, edificios, máquinas, instrumentación etc; garantizando un mayor rango de vida y funcionalidad.

El *absorbedor dinámico de vibraciones* (DVA, por sus siglas en inglés *Dynamic Vibration Absorber*), también llamado *amortiguador de masa sintonizado* (TMD,

por sus siglas en inglés *Tuned Mass Damper*), es un dispositivo mecánico compuesto por elementos de masa o inercia, rigidez y amortiguamiento, los cuales una vez conectados a una estructura o máquina, comúnmente denominada *sistema primario*, son capaces de absorber la energía vibratoria no deseada, en el punto de conexión. Por lo tanto, la masa principal y la masa del absorbedor anexada constituyen un sistema de dos grados de libertad, y de ahí que el sistema en conjunto tenga dos frecuencias naturales. El absorbedor de vibraciones se utiliza comúnmente en maquinaria que opera a velocidad constante, por lo que el absorbedor de vibraciones se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo sólo dentro de una pequeña banda de frecuencias de excitación. El DVA se diseña con el fin de que las frecuencias naturales del sistema resultante se alejen de la frecuencia de excitación. Ver, e.g., J. P. Den Hartog [4], S. S. Rao [51] y S. Braun et al. [37].

1.3. Transferencia de Energía Dirigida

A menudo, el proceso de intercambio de energía de vibración pasiva no lineal se describe en términos de interacción no lineal entre diferentes modos estructurales con frecuencias ya sean estrechas o separadas. Este tipo de intercambio no es posible en sistemas dinámicos lineales, ya que, en el caso de modos con frecuencias estrechamente espaciadas puede existir una interacción, dando como resultado el fenómeno de pulsación, si las frecuencias se encuentran separadas, los modos involucrados se desacoplan y no pueden pasivamente pasar energía entre ellos.

Sin embargo, en presencia de no linealidad, se produce interacciones de energía no lineales debido a las resonancias internas, incluso entre modos estructurales con frecuencias ampliamente espaciadas (J. Guckenheimer, P. J. Holmes [63]; A.H. Nayfeh, D.T. Mook [69]; A. H. Nayfeh [64]).

En general, la transferencia de energía dirigida (TET por sus siglas en inglés *Targeted Energy Transfer*) se puede realizar debido a la ruptura de la simetría como bifurcaciones de un modo no lineal o través de fenómenos de localización de energía espacial a partir de la formación modos normales no lineales localizados (NNMs por sus siglas en inglés Normal Nonlinear Modes) (King y Vakakis [76], Vakakis et al. [65], Vakakis et al. [66], Lacarbonara et al. [67], Jiang et al. [68]).

1.4. Drenaje de Energía No Lineal

Un drenaje de energía no lineal (NES por sus siglas en inglés *Nonlinear Energy Sink*) se presenta en existencia de un acoplamiento local que posee una no linealidad elemental (no linealizable¹), el cual altera significativamente la dinámica

¹No linealizable: No linealidad que al realizar su aproximación por series de Taylor, la aproximación de primer orden (termino lineal) es igual a cero.

global del sistema resultante. La razón radica en la falta de una frecuencia de resonancia preferencial del acoplamiento, lo cual, en principio, le permite acoplarse en resonancia no lineal con cualquier modo del sistema lineal, a intervalos arbitrarios de frecuencia (siempre que, por supuesto, ningún modo tenga un nodo en la vecindad del punto de unión). El escenario real de la interacción de resonancia no lineal de un solo modo o multi-modo de la unión con el sistema lineal dependerá del nivel y distribución espacial de la energía de vibración instantánea del sistema integrado. Bajo ciertas condiciones, la TET pasiva del sistema lineal al sistema acoplado se produce, es decir, un flujo de energía unidireccional e irreversible (en promedio) desde el sistema lineal al sistema acoplado, que actúa, en efecto, como un drenaje de energía no lineal (NES).

Además, en contraste con el absorbedor de vibraciones lineal clásico, cuya acción es de banda estrecha, bajo ciertas condiciones el NES puede interactuar de forma resonante con el sistema lineal de una forma de banda ancha, y participar en una cascada de captura de resonancia con un conjunto de modos estructurales sobre una amplia gama de frecuencias; Entonces, según A. F. Vakakis et al. [69] el NES, actúa en esencia, como un controlador pasivo, adaptativo, de límites de banda ancha.

1.5. Antecedentes de Absorbedores

Desde su invención por Frahm a principios del siglo XX, el DVA ha sido ampliamente utilizado para mitigar las vibraciones en varios tipos de sistemas mecánicos. Una aplicación muy conocida es el denominado amortiguador de Stockbridge, ampliamente utilizado para reducir las vibraciones inducidas por el viento en las líneas aéreas de transmisión de energía. En una aplicación de ingeniería notable, un absorbedor de 400 toneladas ha sido diseñado para Citicorp Center, un edificio de oficinas de 274 m de altura en la ciudad de Nueva York, para suprimir principalmente la contribución del primer modo de vibración en las oscilaciones inducidas por el viento. En una aplicación similar, se han instalado dos DVA de 300 toneladas en la torre *John Hancock Tower*, en Boston, Massachusetts. La dinámica de las torres de televisión es particularmente favorable para el uso de DVAs tipo péndulo, que se han aplicado, por ejemplo, a las torres de Alma-Ata y Riga, en la antigua Unión Soviética.

Debido a su relevancia tecnológica tanto en el ámbito académico como en el industrial, los DVAs siguen siendo un tema de interés permanente. Entre las nuevas aplicaciones se incluyen dispositivos para estabilizar el movimiento de balanceo del barco, mejorar la comodidad de los usuarios al caminar por puentes peatonales, atenuar las vibraciones transmitidas desde el rotor principal a la cabina de los helicópteros, y mejorar las condiciones de operación de la máquina herramienta, por citar sólo algunos ejemplos. También se han desarrollado aplicaciones militares. El uso de DVAs para reducir las fuerzas dinámicas transmitidas a una aeronave

debido a las altas tasas de fuego impuestas al movimiento del cañón puede ser mencionado como otro ejemplo. (S. Braun et al. [37]).

Los absorbedores dinámicos se han estudiado y empleado desde hace un largo tiempo, ahora se menciona de una forma sintetizada algunos estudios e investigaciones realizadas, en el área de la mecánica. El primer registro de uso del absorbedor de vibración fue descrito en un artículo por Watts [1] en 1883, de seguido de (el primer registro de patente) Hermann Frahm [2] en 1909, pero no fue hasta 1928 que Ormondroyd y Den Hartog [3] publicaron el tratamiento matemático del absorbedor dinámico pasivo de la vibración. El problema del ancho de banda fue identificado por primera vez por Roberson [5] (1952), que consideró el caso poco práctico de un resorte lineal y cúbico sin amortiguamiento. Roberson concluyó, sin embargo, que teóricamente un resorte blando produciría el efecto deseado. A este trabajo le siguió el de Pipes [6] (1953) que consideró un resorte sinusoidal hiperbólico con una característica de endurecimiento y sin amortiguamiento. Luego Arnold [7] (1955) confirmó los resultados de Roberson, pero de nuevo no consideró el amortiguamiento. Esto fue seguido por una brecha de dos décadas para el trabajo de Masri [8] (1972) y Dabrowski [9] (1975) en el que se consideró la oscilación forzada de ambas masas. Al mismo tiempo R. S. Haxton y A. D. S. Barr [39] (1972) presentaron el modelo, construcción y pruebas experimentales de un absorbedor autoparamétrico, realizando una comparación con el absorbedor lineal amortiguado y sintonizado. Anteriormente el trabajo teórico y original sobre el problema autoparamétrico clásico es el del péndulo elástico descrito por Minorsky [44] (1962) el cual se discutió en vibración libre. Miller y Gartner en 1975 [10] superaron el problema del ancho de banda mediante la introducción de un resorte neumático de rigidez variable sin amortiguamiento, mediante el cual la frecuencia natural del absorbedor podría ajustarse a una frecuencia de excitación cambiante. En 1982 [11] realizaron el estudio de un absorbedor de vibraciones dinámico empleando un diseño con resorte blando tipo Bellebille, y se mostró que por ese medio se podía duplicar el ancho de banda de supresión con respecto al que ofrece un absorbedor lineal. Para 1994 M. Cartmell and J. Lawson [19] proponen un sistema implementable, el cual consta de un absorbedor autoparamétrico pendular activo, acoplado a un sistema primario lineal masa-resorte-amortiguador. Cuatro años mas tarde S. S. Oueini, A. H. Nayfeh y J. R. Pratt [12] presentaron resultados teóricos y experimentales sobre el enfoque de implementación basado en absorción activa de vibraciones no lineales sobre estructuras flexibles. A inicio del siglo XXI, P. F. Pai, B. Rommel y M. J. Schulz [13] presentaron resultados teóricos y experimentales de absorción activa de vibraciones no lineales empleando resonancias internas de alto orden sobre un sistema tipo plato en cantiléver.

En 2008 G. Silva, B. Vazquez and L. Macias [16], presentan un absorbedor pasivo/activo tipo péndulo, el cual es acoplado a un sistema primario tipo Duffing, el control se encarga de modificar la longitud del péndulo con el fin de modificar la frecuencia interna del sistema integrado, logrando ampliar la banda de efectividad del absorbedor ante variaciones de frecuencia en la fuente de excitación

armónica. Dos años después G. Silva, H.F. Abundis, B. Vazquez [15], realizan una síntesis sobre un absorbedor pasivo/activo tipo viga en cantiléver, el mecanismo principal tipo Duffing, empleando un parche PZT como actuador el cual modifica la frecuencia interna del sistema por medio de la rigidez de la viga, la cual cambia por la deformación del parche. En el 2014 F. Beltrán, G. Silva [14] presentaron un estudio de absorbedores de vibraciones dinámicos pasivos y activos tipo masa-resorte-amortiguador sobre un sistema primario tipo Duffing, el cual tiene como objetivo el seguimiento de trayectoria.

1.6. Antecedentes sobre Drenajes No Lineales de Energía

Desde la aparición de los Drenajes No Lineales de Energía (NES, por sus siglas en inglés) a principios de este siglo han tomado un creciente interés, ya que las ventajas que ofrecen tiene un amplio campo de aplicaciones como en la aeronáutica, mecánica estructural, , maquinaria vibratoria, suspensiones de edificios y vehículos. La dificultad primordial del NES es que se requiere una no linealidad esencial (no linealizable), para el mejor desempeño.

Uno de los primeros trabajos de investigación que aborda esta estrategia fue realizada por A. F. Vakakis, O. y Gendelman en 2001, en el cual se muestra evidencia numérica de la existencia de bombeo de energía unidireccional de un sistema lineal a otro no lineal. Para 2003 A. F. Vakakis et al. [21], realizaron el estudio de una cadena de osciladores lineales periódicos, acoplada débilmente a un dispositivo esencialmente no lineal, donde gracias a la no linealidad esencial se introduce una serie de resonancias internas ($0 : \omega_m$), entre el dispositivo acoplado y cada uno de los modos que componen la cadena. No hay una frecuencia de resonancia preferencial para el dispositivo, depende de la energía y de las condiciones iniciales para que se presente alguna interacción de resonancia interna con algún modo de la cadena. El bombeo de energía solo se produce en presencia de amortiguamiento, en el caso no amortiguado solo se genera el fenómeno de golpeteo entre la cadena y el dispositivo acoplado. Aunque el bombeo de energía se realiza solo en presencia de amortiguamiento, el fenómeno del bombeo de energía depende fuertemente de la estructura topológica de los modos no lineales (NNM, por sus siglas en inglés *Nonlinear Normal Modes*) del sistema subyacente no amortiguado. En el siguiente año A. F. Vakakis et al. [22], estudiaron los fenómenos de captura de resonancia que conducen al bombeo de energía en una cadena lineal de N osciladores acoplados a dispositivos fuertemente no lineales que poseen no linealidades de rigidez cúbica esencial. En 2005 A. F. Vakakis et al. [23], estudian la dinámica de un sistema no lineal de dos grados de libertad que consiste en un oscilador lineal con marco de referencia a tierra y acoplado a una masa pequeña por medio de una rigidez esencialmente no lineal; se concluye que aunque el sistema tiene una configuración simple posee dinámicas muy complicadas y que el dispositivo acoplado

1.6. ANTECEDENTES SOBRE DRENAJES NO LINEALES DE ENERGÍA 7

tiene la capacidad de interacciones resonantes fuertes con el oscilador lineal en una amplia gama de frecuencias (captura de resonancias). Otro estudio hecho por A. F. Vakakis y F. Georgiades, [24], en el cual se obtuvieron pruebas numéricas de transferencia de energía pasiva y de banda ancha dirigida desde una viga lineal flexible con excitación de choque hasta un dispositivo con conexión local, esencialmente no lineal y ligero, que actúa, en esencia, como drenaje no lineal de energía. El dispositivo conectado absorbe la energía de choque de una manera unidireccional e irreversible y disipa esta energía localmente, sin propagarla a la viga lineal.

Ya en 2009 R. Viguie y G. Kerschen [25] realizan el estudio y sintonización de un absorbedor no lineal, con el objetivo de mitigar las vibraciones de un modo específico de una estructura primaria no lineal en una amplia gama de amplitudes de forzado. Una aplicación de ingeniería se estudia en G. Kerschen et al. [26], se describe un sistema prototipo de cuerdas de perforación NES para estabilizar un sistema de perforación en pozos de petróleo y gas, reduciendo la vibración torsional de la cuerda de perforación principal por medio de la transferencia de energía pasiva no lineal dirigida a un dispositivo ligero (NES).

Cinco años más tarde, se aborda la absorción y cosecha de energía por Z. Nili Ahmadabadi, S.E. Khadem [27], se trata el diseño de un sistema que comprende un sumidero de energía no lineal (NES) y un cosechador de energía de vibración piezoeléctrica acoplada a una viga libre bajo excitación de choque, en el cual, se reporta una disipación de hasta el 78 % de la energía.

En 2015 M. Dardel et al. [28], investigaron la robustez del NES contra cambios en la amplitud de la fuerza de excitación, concluyen que el diseño de NES para la máxima amplitud de forzado posible proporciona una gran reducción de la vibración no sólo para la fuerza diseñada, sino también para valores más bajos de amplitud de forzado. Otro trabajo para estudiar la robustez del NES es el hecho por J. Taghipour and M. Dardel [29], se realiza la comparación entre un sistema primario compuesto por un oscilador no lineal acoplado a un drenaje de energía no lineal (NES) de un grado de libertad y el mismo, sistema primario acoplado a un NES de dos grados de libertad ambos sometidos a excitación armónica externa, en el cual se determina que al aumentar los grados de libertad del NES puede causar una mayor robustez del sistema frente a cambios externos o internos.

Ye-Wei Zhang et al. [30], obtienen resultados que indican que un NES puede suprimir significativamente la vibración severa de una placa laminada compuesta con cargas de viento para protegerla de vibraciones excesivas.

Un año después 2017 N. E. Wierschem et al. [31], realiza el estudio teórico y experimental de una estructura con marco de acero de nueve pisos la cual es sometido a fuerzas de impacto (explosión), en el cual se realiza la atenuación por medio de seis NES, dos NES tiene no linealidades de vibro-impacto y las otras cuatro poseen una rigidez esencialmente no lineal. En el mismo año B. Bergeot et al. [32], se investiga la supresión pasiva de la resonancia terrestre en helicóptero por medio de un conjunto de absorbedores no lineales del tipo NES cada uno se

coloca en una cuchilla del rotor.

1.7. Motivación del trabajo

En el campo de la mecánica, se ha producido un rápido progreso en los últimos dos siglos, debido en gran medida a la capacidad de los investigadores para representar las leyes físicas en términos de ecuaciones bastante simples. En muchos casos las ecuaciones gobernantes no son tan simples, por lo tanto, se emplean ciertas suposiciones, más o menos consistentes con la situación física, para reducir las ecuaciones a tipos más fácilmente solubles. Así, el proceso de linealización se ha convertido en una parte intrínseca del análisis racional de los problemas físicos. Un análisis basado en ecuaciones linealizadas, entonces, puede ser pensado como un análisis de un problema correspondiente pero idealizado.

En muchos casos, el análisis lineal es insuficiente para describir adecuadamente el comportamiento del sistema físico. De hecho, una de las características más interesantes del estudio de problemas no lineales es la aparición de fenómenos que no están predichos por la teoría lineal. Por otro lado, ciertos fenómenos observados físicamente son inexplicables, excepto si se toman en cuenta las no linealidades presentes en el sistema.

Una de las áreas de la mecánica donde es posible encontrar dinámicas no lineales son las vibraciones mecánicas, donde bajo condiciones de resonancia aparecen fenómenos interesantes debido a que la energía en el sistema se incrementa de forma exponencial (condición de inestabilidad). Es claro que esta condición se busca evitar aun que exista fuentes de amortiguamiento que disipen la energía, ya que el sistema se dañara de forma permanente si el sistema continuo en dicha condición.

Una de las posibles soluciones a este inconveniente es el uso del DVA, la ventaja del DVA no lineal sobre el lineal es que este tiene un ancho de banda de absorción mayor y pueden diseñarse de tal forma que su tamaño sea menor, gracias a la resonancia interna la cual no se presenta en DVA lineales, el inconveniente de ambos es que es necesario que el sistema se excite a una frecuencia de operación constante.

Otra estrategia de absorción es el NES que son una variante del DVA no lineal, estos tienen ventajas considerables sobre los dos DVA lineales y no lineales, ya que estos no necesitan resonancia interna para extraer la energía del sistema, y funcionan no solo para fuerzas de excitación vibratoria con frecuencia constante, estos también lo hacen para excitaciones transitorias como las que ocurren es fenómenos de choque e impacto. El diseño y análisis de los NES representa un reto, ya que las herramientas para dicho propósito involucran cálculos complicados, debido a que los NES se basan en no linealidades elementales y una fuerte dependencia del fenómeno frecuencia-energía.

1.8. Objetivos de la tesis

1.8.1. Objetivo general

Estudiar los fenómenos de transferencia de energía, con el fin de mitigar las vibraciones no deseadas en un sistema primario, buscando dirigir estas a un sistema secundario, empleando dos estrategias, el absorbedor autoparamétrico y el drenaje no lineal de energía.

1.8.2. Objetivos específicos

- Emplear la técnica de escalas múltiples para obtener una solución no lineal aproximada de los sistemas a estudiar.
- Estudiar los fenómenos de resonancia principal en un sistema tipo Duffing de un grado de libertad.
- Estudiar los fenómenos de resonancia externa (principal) y resonancia interna en sistemas autoparamétricos.
- Determinar de forma experimental, si el sistema integrado es capaz de transferir energía de un subsistema a otro, por medio de la estrategia de absorción autoparamétrica.
- Abordar las técnicas de análisis modal no lineal.
- Determinar de forma experimental si el sistema integrado es capaz de transferir energía unidireccional del sistema primario al sistema secundario, por medio del enfoque de drenaje no lineal de energía.
- Dilucidar la relación que puede o existe entre ambas estrategias absorción pasiva de vibraciones.
- Justificar los resultados obtenidos de la aplicación con las estrategias propuestas.

1.8.3. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2, se presentan teoría preliminar en la cual se abordan conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo en los capítulos siguientes, se describe a los sistemas paramétricos y autoparamétricos, así como la técnica de escalas múltiples, con la cual se obtiene una aproximación de la respuesta del sistema primario y posteriormente el sistema integrado, se aborda el concepto de Modos normales no lineales y la localización de la energía en sistemas no lineales.

En el Capítulo 3 se determina el modelado del sistema primario y el modelo del sistema integrado por el sistema primario y el absorbedor de vibraciones autparamétrico, también se obtiene la simulación de la respuesta frecuencial aproximada de los sistemas utilizando el método de escalas múltiples.

En el Capítulo 4 se describe de forma breve la plataforma experimental empleada y la obtención de los parámetros modales de esta, en este Capítulo también se obtiene la función de rigidez de los dos resortes no lineales por medio de una aproximación polinomial de tercer grado.

En el Capítulo 5 se reporta los resultados experimentales del sistema con y sin acoplamiento del absorbedor y se realiza la discusión de los resultados obtenidos de la técnica de absorción pasiva propuesta entre los resultados en simulación y los experimentales, por último, se hacen comentarios importantes para abordar las conclusiones en el siguiente Capítulo.

En el Capítulo 6 se describen algunas conclusiones y perspectivas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

Como herramienta de análisis cuantitativo en la presente tesis se emplea el método de escalas múltiples [47]. La idea básica es tratar un problema gobernado por ecuaciones diferenciales parciales como un problema de múltiples ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto se logra considerando una solución en forma de expansiones en términos de múltiples escalas temporales independientes, en lugar de una sola variable t independiente.

2.1. Método de escalas múltiples

La idea fundamental del método de escalas múltiples consiste en considerar la expansión que representa la respuesta de un sistema dinámico como una función de múltiples variables independientes, o escalas de tiempo, en lugar de una sola variable. El método de escalas múltiples, aunque un poco más complicado, tiene sus ventajas sobre el método de Lindstedt-Poincaré, ya que puede tratar de forma conveniente con los sistemas amortiguados. Para más detalles se recomienda ver los libros de Nayfeh y Mook [47], Cartmell [20] y Tondl [56], entre otros.

Uno comienza introduciendo nuevas variables independientes de la forma

$$T_n = \epsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

De ello se deduce que las derivadas con respecto a t se convierten en expansiones en términos de los derivados parciales con respecto a la escala T_n , de acuerdo con los siguientes términos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = \mathbf{D}_0 + \epsilon \mathbf{D}_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \mathbf{D}_0^2 + 2\epsilon \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 + \epsilon^2 (\mathbf{D}_1^2 + 2\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_2) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para ilustrarlo, se considera un sistema dinámico descrito por la ecuación diferencial siguiente

$$\ddot{u} + f(u) = 0, \quad u \in R \quad (2.3)$$

donde, en general, f es una función no lineal. Es conveniente cambiar el origen a la ubicación del punto de operación, $u = u_0$, y de esta manera dejamos

$$x = u - u_0 \quad (2.4)$$

Entonces (2.3) se convierte en:

$$\ddot{x} + f(x + u_0) = 0 \quad (2.5)$$

Además, se supone que la función f puede ser expandida en una serie de potencias, y con lo que (2.5) se puede expresar como:

$$\ddot{x} + \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n = 0 \quad (2.6)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0) \quad (2.7)$$

y $f^{(n)}$ denota la n -ésima derivada con respecto al argumento. Para un punto de operación, $f(u_0) = 0$ y $f'(u_0) > 0$.

La solución describe la respuesta del sistema a una perturbación inicial. Para describir la perturbación inicial, es necesario especificar tanto la posición inicial como la velocidad inicial, s_0 y v_0 , respectivamente. Es conveniente escribir las condiciones iniciales en forma polar. Por lo tanto, se introduce una amplitud y una fase de acuerdo con

$$s_0 = a_0 \cos \beta_0, \quad v_0 = -a_0 \omega_0 \sin \beta_0 \quad (2.8)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha_1} = [f'(u_0)]^{1/2}$$

y

$$a_0 = \left[s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \beta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{s_0}{a_0} \right) = \sin^{-1} \left(-\frac{v_0}{a_0 \omega_0} \right) \quad (2.9)$$

El sistema que se rige por la ecuación obtenida de (2.6) eliminando todos los términos no lineales se denomina sistema lineal correspondiente. Desempeña un papel clave en el análisis de sistemas débilmente no lineales. Básicamente, se obtiene la respuesta del sistema no lineal perturbando la respuesta del sistema lineal correspondiente. Hay varias maneras de como efectuar dicha perturbación.

Se asume que la solución de (2.6) puede ser representada por una expansión de la forma

$$x(t; \varepsilon) = \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 x_3(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (2.10)$$

Se observa que el número de escalas temporales independientes necesarias depende del orden al que se lleve a cabo la expansión. Si la expansión se realiza a $O(\varepsilon^2)$, entonces T_0 y T_1 son necesarios. En esta sección realizamos la expansión a $O(\varepsilon^3)$ y por lo tanto necesitamos T_0 , T_1 y T_2 . Sustituyendo (2.2) y (2.10) en (2.6) e igualando los coeficientes de ε , ε^2 y ε^3 a cero, obtenemos

$$\mathbf{D}_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 x_1 - \alpha_2 x_1^2 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{D}_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 = -2\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 x_2 - \mathbf{D}_1^2 x_1 - 2\alpha_2 x_1 x_2 - \alpha_3 x_1^3 \quad (2.13)$$

Con este enfoque resulta conveniente escribir la solución de (2.11) en la forma exponencial

$$x_1 = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (2.14)$$

donde $A(T_1, T_2)$ es una función compleja y $\bar{A}(T_1, T_2)$ es el complejo conjugado de A . La ecuación que rige a A es obtenida en base al requerimiento de que x_2 y x_3 tienen que ser periódicas en la escala de tiempo T_0 .

Al sustituir (2.14) en (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = & -2i\omega_0 \mathbf{D}_1 (A \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0)) \\ & - \alpha_2 (A^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 \exp(-2i\omega_0 T_0)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para alguna solución particular de (2.15) contiene términos seculares los cuales tiene el factor $T_0 \exp(i\omega_0 T_0)$ a menos que

$$\mathbf{D}_1 A = 0$$

por lo tanto, A no debe estar en función de la escala de tiempo T_1 para que x_2 sea periódica. Con $\mathbf{D}_1 A = 0$, la solución de (2.15) es

$$x_2 = \frac{1}{3} \frac{\alpha_2 A^2}{\omega^2} \exp(2i\omega_0 T_0) - \frac{\alpha_2}{\omega_0^2} 2A\bar{A} + \frac{1}{3} \frac{\alpha_2 \bar{A}^2}{\omega^2} \exp(-2i\omega_0 T_0) \quad (2.16)$$

donde la solución de la ecuación homogénea no es necesaria.

Se sustituye x_1 y x_2 de (2.14) y (2.16) en (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 = & - \left[2i\omega_0 \mathbf{D}_2 A - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 \omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} \right] \exp(i\omega_0 T_0) \\ & - \frac{3\alpha_3 \omega_0^2 + 2\alpha_2^2}{3\omega_0^2} A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & + \left[2i\omega_0 \mathbf{D}_2 \bar{A} + \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 \omega_0^2}{3\omega_0^2} \bar{A}^2 A \right] \exp(-i\omega_0 T_0) \\ & - \frac{3\alpha_3 \omega_0^2 + 2\alpha_2^2}{3\omega_0^2} \bar{A}^3 \exp(-3i\omega_0 T_0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para eliminar los términos seculares de x_3 , se debe cumplir que

$$2i\omega_0 \mathbf{D}_2 A + \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} = 0 \quad (2.19)$$

A y \bar{A} se expresan en su forma polar y se utiliza la identidad Euler para obtener:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta) \quad (2.20)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} a \exp(-i\beta) \quad (2.21)$$

donde a y β son funciones reales de T_2 . Substituyendo (2.20) y (2.21) en (2.19)

$$\omega a' = 0 \text{ y } \omega_0 a \beta' + \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3\omega_0^2}{24\omega_0^2} a^3 = 0$$

donde la prima denota la derivada con respecto a T_2 . Lo que lleva a que a sea una constante y por lo que

$$\beta = \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} a^2 T_2 + \beta_0$$

donde β_0 es constante. Con lo que (2.20) y (2.21) están dadas por

$$A = \frac{1}{2} a \exp \left[i \left(\frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} a^2 \epsilon^2 t + \beta_0 \right) \right] \quad (2.22)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} a \exp \left[-i \left(\frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} a^2 \epsilon^2 t + \beta_0 \right) \right] \quad (2.23)$$

donde se sabe que $T_2 = \epsilon^2 t$.

Se sustituyen x_1 y x_2 de (2.14) y (2.16) en (2.10), y al considerar que (2.22) y (2.23), obtenemos

$$x = \epsilon a \cos(\omega t + \beta_0) - \frac{\epsilon^2 a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta_0) \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.24)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\alpha_1} \left[1 + \frac{9\alpha_3\alpha_1 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \epsilon^2 a^2 \right] + O(\epsilon^3) \quad (2.25)$$

2.2. Sistemas forzados

Se consideran sistemas de un grado de libertad (en adelante se referirá *grado de libertad* como GDL¹), los cuales son excitados de forma continua, se hace la diferencia entre dos tipos de excitación externa y paramétrica.

¹Grados de libertad (GDL): Es el número mínimo de coordenadas independientes requerido para determinar por completo todas las partes de un sistema en cualquier instante de tiempo [51].

2.2.1. Excitación externa

La excitación externa se presenta como un término no homogéneo en la ecuación de movimiento del sistema. Se consideran sistemas no amortiguados gobernados por

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon f(u, \dot{u}) + E \quad (2.26)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño, f es una función no lineal de u y \dot{u} , E es una fuerza aplicada externamente llamada excitación. Se hace distinción entre dos tipos de excitaciones. Para la primera, la excitación es generada por una fuente de energía que se supone que es ilimitada o tan grande que el sistema excitado tiene un efecto insignificante sobre esta. En este caso $E = E(t)$; esto quiere decir, E no es función de los estados del sistema u , \dot{u} , o \ddot{u} . A estas se les llama fuente de energía ideales. Para la segunda, la excitación de una fuente de energía que es limitada así que el sistema excitado tiene un apreciable efecto en esta. En tal caso $E = E(t, u, \dot{u}, \ddot{u})$; así que, E es una función de los estados del sistema. A estas últimas se les llama fuentes de energía no ideales. Los sistemas son clasificados como ideales o no ideales de acuerdo con la fuente de energía.

En el presente trabajo se trata con sistemas ideales y la excitación se considera como una suma de N términos armónicos, tal que

$$E(t) = \sum_{n=1}^N K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) \quad (2.27)$$

si las K_n (amplitudes), Ω_n (frecuencias), y θ_n son constantes, entonces la excitación se dice ser estacionaria. De otra forma, ésta es no estacionaria. Los métodos de perturbaciones se presentan para el análisis de sistemas no estacionarios cuando las amplitudes y frecuencias son funciones variables lentamente con el tiempo.

2.2.2. Sistema forzado con no linealidades cúbicas débilmente amortiguado.

Se considera las oscilaciones forzadas de una partícula unida a un resorte no lineal bajo la influencia de un débil amortiguamiento viscoso, la ecuación de movimiento tiene la forma

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -2\epsilon\mu\dot{u} - \epsilon\alpha u^3 + E(t) \quad (2.28)$$

donde μ es una constante positiva y α puede ser una constante positiva (*resorte duro*) o negativa (*resorte blando*). Considerando una fuerza externa estacionaria armónica:

$$E(t) = F \cos(\Omega t) \quad (2.29)$$

donde F y Ω son la amplitud y frecuencia de la fuerza de excitación.

2.2.3. Resonancia primaria o principal, $\Omega \approx \omega$

En lugar de usar la frecuencia de excitación Ω como un parámetro, introducimos un parámetro de desajuste σ el cual describe cuantitativamente las cercanías de Ω a ω . Esto tiene la ventaja de ayudar a reconocer los términos seculares en la ecuación de movimiento para u_1 y términos cercanamente seculares (*divisor pequeño*). En consecuencia, se escribe

$$\Omega = \omega + \epsilon\sigma \quad (2.30)$$

donde $\sigma = O(1)$. La teoría lineal no amortiguada, predice oscilaciones no acotadas cuando $\sigma = 0$ independientemente de cuan pequeña sea la excitación. En el sistema real estas grandes oscilaciones son limitadas por el amortiguamiento y la no linealidad. Entonces para obtener una solución aproximada uniformemente válida del sistema, necesitamos ordenar la excitación de modo que el amortiguamiento y la no linealidad aparezcan. Para cumplir el punto anterior, se establece $F = \epsilon f$. Observamos que este esquema para ordenar los términos es consistente con nuestras nociones primitivas de resonancia primaria. Es decir, anticipamos que en un sistema ligeramente amortiguado bajo una excitación de pequeña amplitud produce una respuesta de amplitud relativamente grande.

Una solución aproximada del problema puede ser obtenida por técnicas de perturbación. En este caso usaremos el método de escalas múltiples. Por lo tanto, expresamos la solución en términos de escalas de tiempo diferentes como:

$$u(t; \epsilon) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.31)$$

donde $T_0 = t$ and $T_1 = \epsilon t$. También se expresa la excitación en términos de T_0 and T_1 como:

$$E(t) = \epsilon f \cos(\omega T_0 + \sigma T_1) \quad (2.32)$$

Las sustituciones (2.31) y (2.32) en (2.28) y la igualación los coeficientes de ϵ y en ambos lados, se obtiene es siguiente sistema

$$\omega^2 u_0(T_0, T_1) + \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 u_0(T_0, T_1) = 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 u_1(T_0, T_1) + \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 u_1(T_0, T_1) = & -\alpha (u_0(T_0, T_1))^3 - 2\mu \mathbf{D}_0 u_0(T_0, T_1) \\ & + f \cos(T_0 \omega + T_1 \sigma) - 2 \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 u_0(T_0, T_1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

La solución a la ecuación (2.33) se puede representar como:

$$u_0 = A_0(T_1) e^{i\omega T_0} + \bar{A}_0(T_1) e^{-i\omega T_0} \quad (2.35)$$

donde la función $A(T_1)$ y $\bar{A}(T_1)$ se determinarán eliminando los términos seculares para u_1 . Al substituir u_0 en (2.34) y expresando $\cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ en su forma

exponencial, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\omega^2 u_1(T_0, T_1) + \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 u_1(T_0, T_1) = & \\
& - \left[3\alpha (A_0(T_1))^2 \bar{A}_0(T_1) + 2i\omega (\mu A_0(T_1) + \mathbf{D}A_0(T_1)) \right] e^{i\omega T_0} \\
& - \left[3\alpha A_0(T_1) (\bar{A}_0(T_1))^2 - 2i\omega (\mu \bar{A}_0(T_1) + \mathbf{D}\bar{A}_0(T_1)) \right] e^{-i\omega T_0} \\
& - \alpha (A_0(T_1))^3 e^{3i\omega T_0} - \alpha (\bar{A}_0(T_1))^3 e^{-3i\omega T_0} \\
& + \frac{1}{2} f (e^{i(\omega T_0 + \sigma T_1)} + e^{-i(\omega T_0 - \sigma T_1)}) \tag{2.36}
\end{aligned}$$

El término secular se elimina de la solución particular de (2.36) si se cumple la siguiente condición

$$-3\alpha (A_0(T_1))^2 \bar{A}_0(T_1) - 2i\omega \mu A_0(T_1) - 2i\omega \mathbf{D}A_0(T_1) + \frac{1}{2} f e^{i(\sigma T_1)} = 0 \tag{2.37}$$

Al cumplirse esta condición, entonces su parte compleja conjugada también se satisface. Para resolver la condición de resolución (2.37), resulta conveniente representar las funciones complejas $A_0(T_1)$ y $\bar{A}_0(T_1)$ en su forma exponencial, por lo tanto:

$$A_0(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\phi(T_1)}, \bar{A}_0(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{-i\phi(T_1)} \tag{2.38}$$

Donde $a(T_1)$ y $\phi(T_1)$ son funciones reales. De la sustitución de (2.38) en (2.37) y la división entre $\omega e^{i\phi(T_1)}$, se tiene que:

$$-\frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega} - i\mu a(T_1) - i \mathbf{D}a(T_1) + a(T_1) \mathbf{D}\phi(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f e^{-i(\sigma T_1 + \phi(T_1))}}{\omega} = 0$$

El término de la excitación se expresa en su forma trigonométrica, aplicando la identidad de Euler

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega} - i\mu a(T_1) - i \mathbf{D}a(T_1) + a(T_1) \mathbf{D}\phi(T_1) \\
& + \frac{1}{2} \frac{f [\cos(T_1 \sigma - \phi(T_1)) + i \sin(T_1 \sigma - \phi(T_1))]}{\omega}
\end{aligned}$$

Al separar la parte real e imaginaria de la ecuación anterior se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
a(T_1) \mathbf{D}\phi(T_1) = & \frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega} - \frac{1}{2} \frac{f \cos(T_1 \sigma - \phi(T_1))}{\omega} \\
\mathbf{D}a(T_1) = & -\mu a(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f \sin(T_1 \sigma - \phi(T_1))}{\omega} \tag{2.39}
\end{aligned}$$

El sistema (2.39) es un sistema no autónomo, el cual depende explícitamente de la escala temporal T_1 , sin embargo, es posible transformarlo a un sistema autónomo realizando el siguiente cambio de variable

$$\beta(T_1) = T_1 \sigma - \phi(T_1) \quad (2.40)$$

Con lo que se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} a(T_1) (\mathbf{D}\beta(T_1) - \sigma) &= \frac{3}{8} \frac{\alpha (a(T_1))^3}{\omega} - \frac{1}{2} \frac{f \cos(\beta(T_1))}{\omega} \\ \mathbf{D}a(T_1) &= -\mu a(T_1) + \frac{1}{2} \frac{f \sin(\beta(T_1))}{\omega} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ya que el caso de estudio es sistema excitado por una fuerza estacionaria, la respuesta transitoria se desvanece hasta llegar a estado estacionario, en el cual, la amplitud $a(T_1)$ y fase $\beta(T_1)$ se mantienen constantes (*invariantes en el tiempo*), por lo que $\mathbf{D}a(T_1) = \mathbf{D}\beta(T_1) = 0$, (*punto de equilibrio*).

De la condición en estado estacionario, el sistema (2.41) se convierte en el siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma a + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^3}{\omega} - \frac{1}{2} \frac{f \cos(\beta)}{\omega} \\ 0 &= -\mu a + \frac{1}{2} \frac{f \sin(\beta)}{\omega} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se coloca del lado derecho los términos trigonométricos, y se eleva al cuadrado ambas ecuaciones del sistema (2.42), para obtener:

$$\begin{aligned} \left[\left(\sigma + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega} \right) a \right]^2 &= \left(\frac{1}{2} \frac{f \cos(\beta)}{\omega} \right)^2 \\ (\mu a)^2 &= \left(\frac{1}{2} \frac{f \sin(\beta)}{\omega} \right)^2 \end{aligned}$$

Al sumar ambas ecuaciones, miembro a miembro

$$\left(\sigma + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega} \right)^2 a^2 + \mu^2 a^2 = \frac{1}{4} \frac{f^2}{\omega^2} (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta))$$

Se ocupa la identidad Pitagórica trigonométrica, para obtener:

$$\left[\left(\sigma + \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega} \right)^2 + \mu^2 \right] a^2 = \frac{1}{4} \frac{f^2}{\omega^2} \quad (2.43)$$

La ecuación implícita anterior se conoce como la ecuación de la respuesta frecuencial, ya que la amplitud de la respuesta a esta en función de la amplitud

de excitación f y el parámetro σ , el cual desajusta la frecuencia de excitación respecto a la frecuencia natural lineal del sistema.

Sustituyendo (2.38) y (2.40) en (2.35)

$$u_0 = \frac{1}{2} a (T_1) e^{i(\sigma T_1 - \beta(T_1) + \omega T_0)} + \frac{1}{2} a (T_1) e^{-i(\sigma T_1 - \beta(T_1) + \omega T_0)}$$

Se considera la respuesta en estado estacionario como:

$$u_0 = \frac{1}{2} a e^{i(\sigma T_1 + \omega T_0 - \beta)} + \frac{1}{2} a e^{-i(\sigma T_1 + \omega T_0 - \beta)}$$

De la ecuación anterior, se puede observar que tiene forma de función coseno en su representación exponencial, por lo tanto:

$$u_0(T_0, T_1) = a \cos(\sigma T_1 + \omega T_0 - \beta)$$

La solución (2.31) en estado estacionario, para la primer aproximación y en la escala temporal original, se expresa en la forma:

$$u(t; \epsilon) = a \cos((\epsilon\sigma + \omega)t - \beta) + O(\epsilon)$$

La sustitución de la relación (2.30) en la solución anterior genera que:

$$u(t; \epsilon) = a \cos(\Omega t - \beta) + O(\epsilon) \quad (2.44)$$

por lo tanto, la respuesta en estado estacionario está ajustada a la frecuencia de excitación Ω y la fase de respuesta se encuentra desfasada de la fase de excitación, generalmente, por $-\beta$. (ver Fig. 2.1)

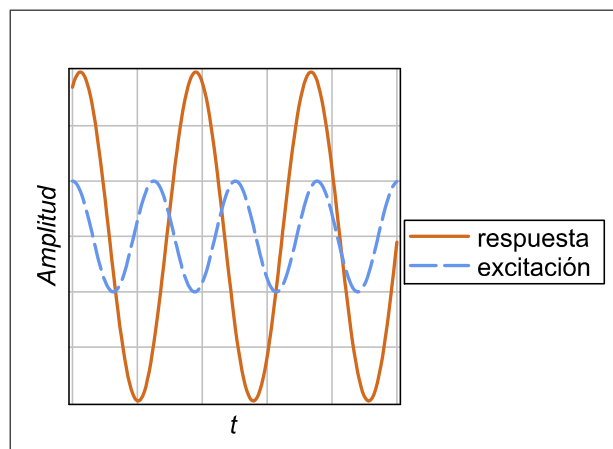


Figura 2.1: Respuesta vs Excitación (condición de resonancia).

Para realizar el estudio de la influencia los parámetros del sistema (amplitud de fuerza de excitación f , amortiguamiento μ y coeficiente de no linealidad α) sobre la respuesta en estado estacionario se utiliza la ecuación implícita de la respuesta frecuencial (2.43). Cada punto de la curva corresponde a un punto de equilibrio en un diferente plano de estado; existe un plano de estados para cada combinación de parámetros.

Al realizar la comparación del sistema lineal ($\alpha = 0$) contra el no lineal ($\alpha > 0$) se observa una gran diferencia en la curva, en la Fig. 2.2, donde se puede apreciar que en el caso no lineal existe una amplitud de respuesta multivaluada, ya que para un mismo nivel de frecuencia existen dos o tres valores diferentes de amplitud.

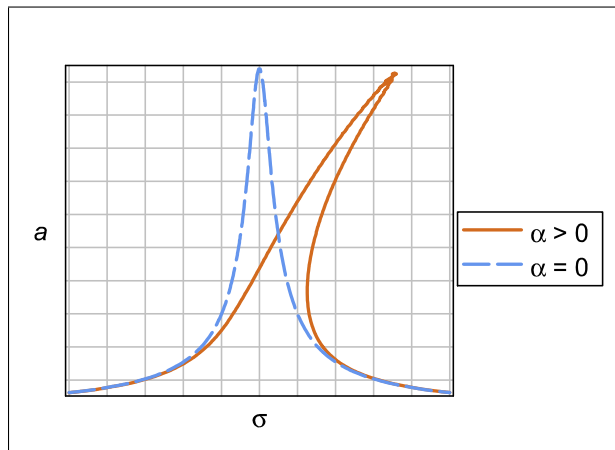


Figura 2.2: Respuesta frecuencial de un sistema lineal vs un sistema no lineal (amplitud).

De forma similar, en la Fig. 2.3 se puede apreciar que en el caso no lineal existe una fase de respuesta multivaluada, ya que para un mismo nivel de frecuencia existe dos o tres valores correspondientes de fase.

En la Fig. 2.4 se superponen las curvas de amplitud y fase de la respuesta en la cual se puede observar que amplitud y fase son correspondientes al valor del parámetro, en la parte multivaluada las condiciones iniciales son las que determinan los puntos de las curvas correspondientes.

En la Fig. 2.5 se observa el efecto del coeficiente de la no linealidad en la rigidez sobre la respuesta, para el caso de un resorte blando en el cual el coeficiente es negativo la curva de respuesta se dobla a la izquierda, en el caso de un resorte duro, la curva se dobla a la derecha. Otro efecto que se observa, a medida que la no linealidad aumenta, es que la curva presenta una curvatura más pronunciada.

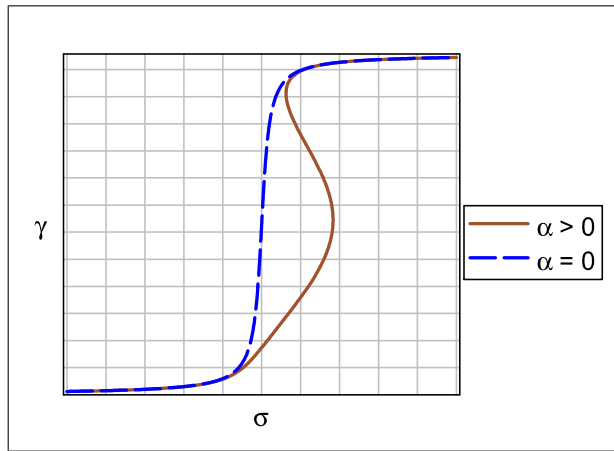


Figura 2.3: Respuesta frecuencial de un sistema lineal vs un sistema no lineal (ángulo de fase).

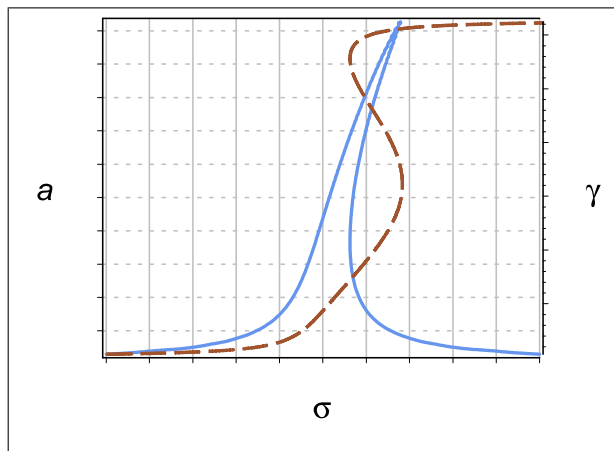


Figura 2.4: Respuesta frecuencial no lineal (estado estacionario)

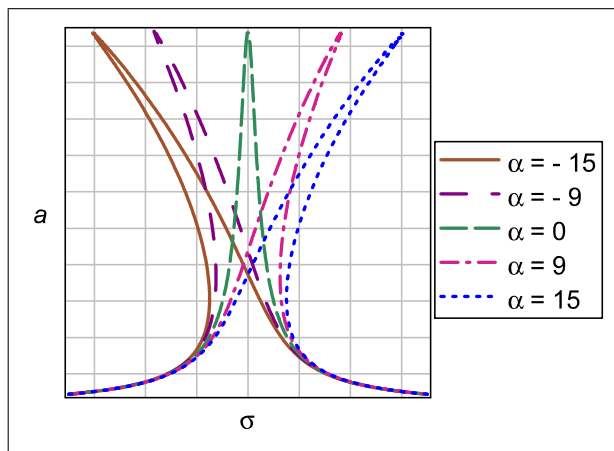


Figura 2.5: Efecto de la no linealidad.

En la Fig. 2.6 se muestra que mayor amortiguamiento reduce el efecto de la no lineal, por lo tanto, a mayor cantidad de amortiguamiento, menor es la dependencia frecuencia-energía.

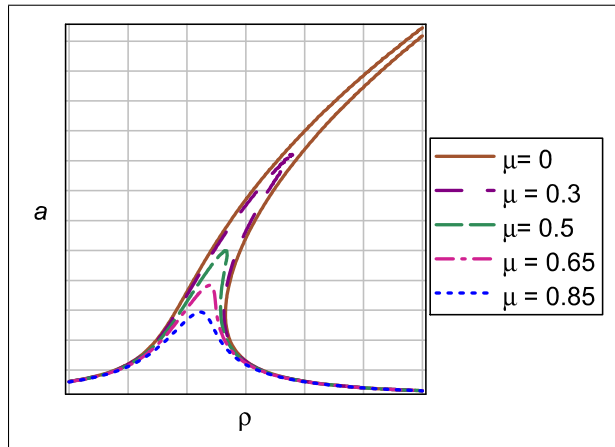


Figura 2.6: Efecto amortiguamiento

La amplitud de excitación tiene el efecto contrario al amortiguamiento, en la Fig. 2.7 se observa que mayor amplitud de excitación genera una respuesta multivaluada con un ancho de banda mayor, con lo que se puede observar la dependencia frecuencia-energía.

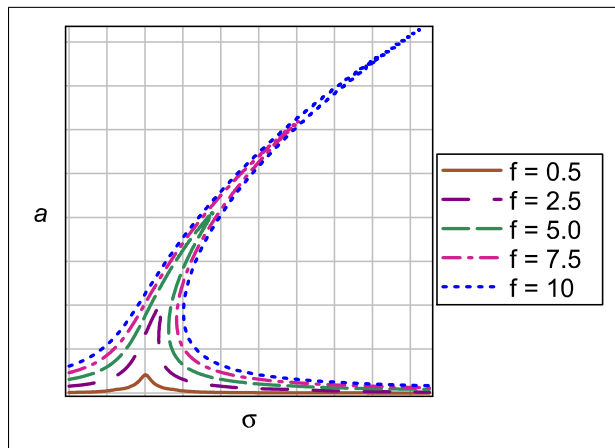


Figura 2.7: Efecto de la amplitud de excitación

La figura 2.8 muestra la dependencia entre la amplitud de excitación y la amplitud de respuesta en estado estacionario, para ciertos valores del parámetro de desajuste se presentan respuestas multivaluadas.

2.3. SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD CON NO LINEALIDAD CÚBICA

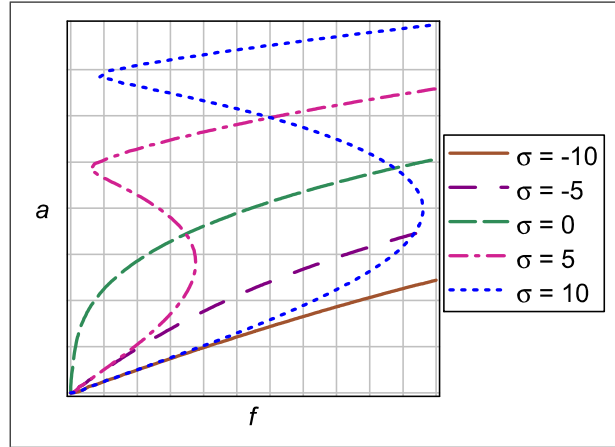


Figura 2.8: Amplitud de excitación vs amplitud de respuesta

En la Fig. 2.9 se muestra la superficie de la respuesta frecuencial en la cual resulta más fácil visualizar la dependencia de la frecuencia y amplitud de excitación con la amplitud de respuesta en estado estacionario.

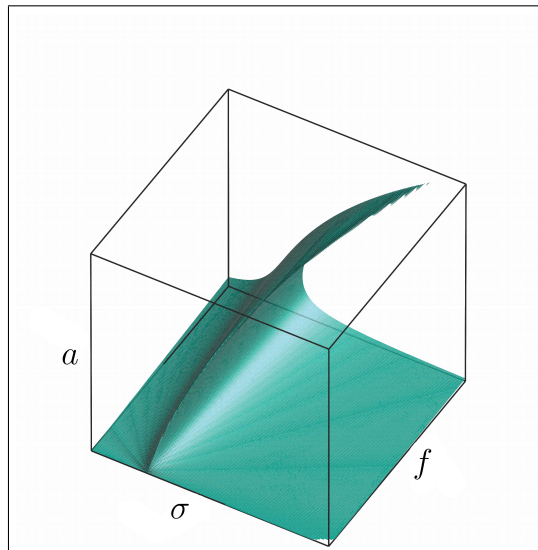


Figura 2.9: Superficie de respuesta frecuencial (estado estacionario).

2.3. Sistemas de múltiples grados de libertad con no linealidad cúbica

Los sistemas de un GDL solo tienen una frecuencia natural lineal y un solo movimiento modal, en contraste, un sistema de n múltiples grados de libertad (en

adelante se referirá *múltiples grados de libertad* como MGDL) tiene n frecuencias naturales lineales y n modos correspondientes. Denotando tales frecuencias por $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ y considerando que todas ellas son reales y diferentes de ceros. Un caso importante ocurre siempre que dos o más de estas frecuencias son conmensurables o cercanamente conmensurables,

$$\omega_2 \approx 2\omega_1, \omega_2 \approx 3\omega_1, \omega_3 \approx \omega_2 \pm \omega_1, \omega_3 \approx 2\omega_2 \pm \omega_1, \omega_4 \approx \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$$

son algunos ejemplos de relaciones cercanamente conmensurables, es decir, que existe un número real y racional, el cual establece una razón de comparación como un factor común entre las frecuencias naturales lineales involucradas.

Dependiendo del orden de la no linealidad en el sistema, estas relaciones conmensurables de frecuencia pueden causar un fuerte acoplamiento entre modos, y se dice que existe una resonancia interna. Por ejemplo, si el sistema tiene no linealidades cúbicas, para un primer orden una resonancia interna puede existir si

$$\omega_m \approx 3\omega_k, \text{ ó } \omega_q \approx 2\omega_p \pm \omega_m, \text{ ó } \omega_q \approx \omega_p \pm \omega_m \pm \omega_k$$

La respuesta libre en un sistema con resonancia interna, la energía impartida inicialmente en uno de los modos involucrados en la resonancia interna se intercambiará continuamente entre todos los modos involucrados en esa resonancia interna. Si el sistema cuenta con amortiguamiento, entonces la energía se reducirá continuamente a medida que sea intercambiada.

Si una excitación armónica externa de frecuencia Ω actúa en un sistema de MGDL, entonces adicionalmente a todas las resonancias primarias y secundarias ($p\Omega \approx q\omega_m t$, con p y q enteros) de un sistema de un GDL, podrían existir otras combinaciones de frecuencias resonantes, en la forma

$$p\Omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \dots + a_N\omega_N$$

donde p y las a_N son enteros tales que

$$p + \sum_{n=1}^N |a_n| = M$$

donde M es el orden de la no linealidad más uno y N es el número de GDL. EL tipo de combinación de resonancia el cual puede existir en un sistema depende del orden de la no linealidad del sistema. Para un sistema con no linealidad cúbica, para un primer orden la combinación resonante que puede existir, involucra ya sea dos o tres de las frecuencias naturales además de Ω . Esto es

$$\Omega \approx \omega_p \pm 2\omega_m, 2\Omega \approx \omega_p \pm \omega_m, \Omega \approx 2\omega_p \pm \omega_m, \Omega \approx \omega_p \pm \omega_m \pm \omega_k$$

2.4. Absorbedor de vibración autoparamétrico

2.4.1. Sistemas paramétricos

Las vibraciones paramétricas se refieren al movimiento oscilatorio que ocurre en un sistema mecánico o estructura como resultado de una variación de parámetros (masa, rigidez o amortiguamiento) que depende explícitamente del tiempo y comúnmente es periódica. Esta dependencia del tiempo implica la existencia de una fuente exógena de energía y, por lo tanto, una posible causa de inestabilidad.

Los sistemas paramétricos son sistemas vibratorios que poseen algún tipo de excitación externa que aparece como un término variante en el tiempo que afecta los parámetros del sistema físico como en la inercia, amortiguamiento o rigidez. Este caso difiere substancialmente del de los sistemas vibratorios forzados, donde aparece explícitamente una fuente de energía exógena que se alimenta al sistema en forma de una fuerza generalizada y el sistema responde, o no, dependiendo de la condición de resonancia (si existe) en operación. Dicho de otra forma, los problemas de vibraciones forzadas no se relacionan propiamente con la variación de parámetros del sistema como consecuencia de la aplicación de una fuerza externa. Por otra parte, un sistema excitado paraméricamente sí reflejará variación de un parámetro (e.g., una fuerza de restablecimiento de un resorte) conjuntamente con la excitación, así como una resonancia estaría excitada por una fuerza.

Los sistemas paramétricos responden cuando la frecuencia de excitación se relaciona con la(s) frecuencia(s) natural(es) por una condición de resonancia, y esto ciertamente no implica sincronización entre estas frecuencias. Esto es, se pueden producir grandes amplitudes aun cuando la frecuencia de excitación sea muy lejana a la frecuencia natural, pero si se relaciona de alguna forma como un múltiplo entero o fraccionario de la(s) frecuencia(s) natural(es).

Un ejemplo típico de sistema paramétrico se encuentra en la llamada ecuación de Mathieu-Hill:

$$\ddot{x} + (a + b \cos \Omega t)x = 0, \quad a, b \in R \quad (2.45)$$

donde x denota un desplazamiento, $\cos \Omega t$ una señal de excitación armónica y a y b parámetros constantes. Esta ecuación (2.45) representa, por ejemplo, el movimiento de un péndulo simple, cuyo soporte tiene movimiento vertical armónico y produce una función de rigidez variante en el tiempo (ver Fig. 2.10). En este caso la ecuación de movimiento para este sistema paramétrico se expresa como

$$\theta + \left[\frac{g}{L} - \frac{A\Omega^2}{L} \cos \Omega t \right] \sin \theta = 0, \quad g, L \in R \quad (2.46)$$

donde θ es el desplazamiento angular del péndulo y $u = A \cos \Omega t$ describe el desplazamiento traslacional del soporte con el pivote del péndulo. Bajo la hipótesis de ángulos pequeños en el péndulo, es decir, $\sin \theta \approx \theta$, la ecuación (2.46) se reduce a una similar a la ecuación de Mathieu-Hill (2.45).

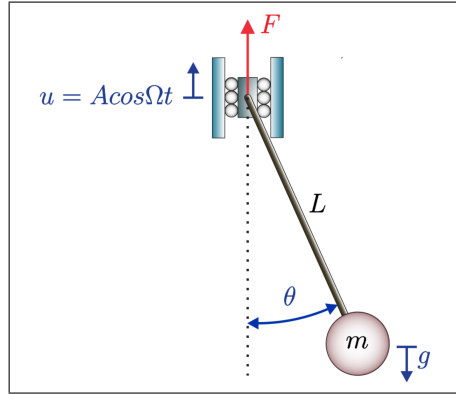


Figura 2.10: Diagrama esquemático de un péndulo simple con base móvil en dirección vertical.

Los sistemas paramétricos responden cuando la frecuencia de excitación se relaciona con la(s) frecuencia(s) natural(es) por una condición de resonancia, y esto ciertamente no implica sincronización entre estas frecuencias. Esto es, se pueden producir grandes amplitudes aun cuando la frecuencia de excitación sea muy lejana a la frecuencia natural, pero sí se relaciona de alguna forma como un múltiplo entero o fraccionario de la(s) frecuencia(s) natural(es).

2.4.2. Sistemas autoparamétricos

Los sistemas autoparamétricos difieren de los sistemas paramétricos en que hay acoplamiento interno, implicando la interacción de al menos dos modos de vibración, y desde el punto de vista matemático esto se debe a términos no lineales de acoplamiento que se presentan en las ecuaciones de movimiento.

En su forma más simple, un sistema autoparamétrico acoplado se divide en dos subsistemas, el primero representado por un oscilador forzado externamente y el segundo por un elemento excitado paraméricamente, el cual está excitado por la respuesta del subsistema primario. El término primario será usado para referirse a la parte forzada externamente y el de secundario para describir la parte excitada paraméricamente.

Un ejemplo clásico de un sistema autoparamétrico es el péndulo elástico (Fig. 2.11), que consiste en un resorte fijado en un extremo, este se elonga mientras oscila al mismo tiempo. Un fenómeno interesante se presenta cuando la razón de las frecuencias lineales en las direcciones longitudinal y transversal es de 2 : 1. En este caso, si comenzamos con una oscilación del resorte en la dirección vertical o cerca de esta, su modo normal de movimiento resulta inestable y la energía se transfiere gradualmente al movimiento de elongación. Este fenómeno de desestabilización de un modo normal es conocido como resonancia autoparamétrica.

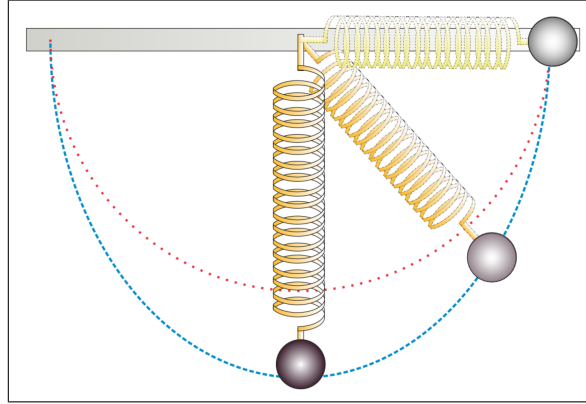


Figura 2.11: Diagrama esquemático de un péndulo elástico.

Este tipo de interacción entre dos modos ocurrirá cuando el sistema primario presente una respuesta forzada a causa de alguna excitación armónica, generando, dicha respuesta, una resonancia paramétrica principal en el sistema secundario. De tal forma que, hay dos modos interactuando en el sistema total. Esta forma de interacción autoparamétrica entre dos modos de vibración depende de que se satisfagan ciertas relaciones de frecuencia, esto es, que

$$\Omega \cong \omega_1 \quad (2.47)$$

$$\omega_1 \cong 2\omega_2 \quad (2.48)$$

donde Ω la frecuencia de excitación de la fuerza armónica externa, ω_1 es la frecuencia natural del sistema primario (paramétrica principal) y ω_2 es la frecuencia natural del sistema secundario. Es indispensable que estas dos condiciones se satisfagan para que haya transferencia de energía del sistema primario al secundario. No obstante, en ciertos sistemas se admite cierta holgura alrededor de esos puntos, proceso que se denomina sintonización.

A raíz de que el sistema primario induce al secundario al movimiento, habrá un regreso de energía al sistema primario. Esta energía de regreso modificará la respuesta del sistema primario, la cual seguirá siendo la fuente de energía del sistema secundario, hasta que el sistema total alcance el estado estable.

El requerimiento fundamental de un sistema autoparamétrico radica en el acoplamiento entre modos (dos o más modos), de tal forma que se puedan establecer relaciones entre las respuestas frecuenciales mediante las frecuencias naturales (modales) y la frecuencia de excitación externa. En general, un sistema autoparamétrico puede expresarse como

$$\ddot{x} + 2\xi_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x - \varepsilon\mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = F_0 \cos \Omega t, \quad \xi_1, \omega_1, \varepsilon, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.49)$$

$$\ddot{y} + 2\xi_2\omega_2\dot{y} + \omega_2^2y - \varepsilon\ddot{x}y = 0, \quad \xi_2, \omega_2, \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

donde el acoplamiento entre ambas ecuaciones de movimiento ocurre en los términos $\varepsilon\mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$ y $\varepsilon\ddot{x}y$. Es evidente en la ecuación (2.49) que si se fuerza a que $y(t) \equiv 0$, el acoplamiento con la ecuación (2.50) desaparece y se transforma en un sistema vibratorio lineal y forzado armónicamente. Se observa que la ecuación (2.50) es del tipo paramétrica ya que el término $\varepsilon\ddot{x}$ actúa como una función de rigidez variante y, de hecho, dependiente de la aceleración en la ecuación (2.49). El acoplamiento autoparamétrico entre ambos sistemas ocurre cuando se perturban ambos modos y se satisfacen las relaciones de frecuencia (2.47) y (2.48). Además del comportamiento autoparamétrico pueden ocurrir otros fenómenos no lineales complejos como el caos, saturación de modos, absorción modal, discontinuidades y saltos en las respuestas (M. P. Cartmell [18], A. H. Nayfeh and D. T. Mook [47]).

El trabajo teórico y original sobre resonancia autoparamétrica más conocido es probablemente el de Minorsky [44], que se enfocó en un modelo vibratorio libre. Desde el punto de vista de la ingeniería, uno de los artículos más importantes en la aplicación de estas ideas fue el realizado por R. S. Haxton and Barr [39], donde se modela, construye y prueba un absorbedor de vibraciones autoparamétrico basado en una viga flexible de acero. Ellos encontraron que ciertos parámetros geométricos referentes a la viga afectaban considerablemente el desempeño del sistema.

Los sistemas autoparamétricos de esta clase generalmente están caracterizados por acoplamientos definidos por términos no lineales de tipo cuadrático. Estos sistemas han sido analizados por Minorsky [44], Haxton and Barr [[39], Ibrahim and Barr [20], Cartmell [20], Tondl et al. [56], Nayfeh and Mook [47], Hatwal et al. [38], Roberts and Cartmell [53], etc.

En resumen, los sistemas autoparamétricos son sistemas vibratorios interesantes, que constan de al menos dos subsistemas acoplados en forma no-lineal, típicamente con términos de rigidez o amortiguamiento, con las siguientes características (Cartmell [18], Tondl et al. [56], Nayfeh and Mook [47]):

1. Un sistema primario, excitado por una fuerza externa armónica.
2. Un sistema secundario (absorbedor), acoplado al sistema primario, que satisface la llamada excitación paramétrica, es decir, un mecanismo que transfiere la energía exógena hacia el sistema secundario a través de los acoplamientos inerciales, elásticos y/o viscosos.
3. En caso de que el sistema primario se perturba exactamente o cerca de su frecuencia resonante lineal, es posible alcanzar la llamada resonancia paramétrica principal para el sistema secundario (interacción autoparamétrica), atenuando la respuesta resonante del sistema primario y constituyendo un esquema de absorción pasiva no lineal.

La interacción autoparamétrica entre dos sistemas mecánicos se puede encontrar en muchos sistemas vibratorios y maquinaria. Este fenómeno se ha estudiado ampliamente en la literatura desde el trabajo pionero de Haxton and Barr [39]. Algunos absorbedores pendulares autoparamétricos se han aplicado para la protección en tanques elevados, chimeneas, estructuras civiles como edificios y puentes sometidos a vibraciones inducidas por el viento o los sismos, etc. (Korenev and Reznikov [42]).

2.5. Transferencia de Energía Dirigida y Drenaje No Lineal de Energía

El primero en ofrecer una definición fue R.M. Rosenberg [70] quien estableció que un modo normal no lineal (NNM por sus siglas en inglés *Nonlinear Normal Mode*) de un sistema con múltiples GDL, discreto, no amortiguado como una oscilación periódica sincrónica en la que todos los puntos materiales del sistema alcanzan sus valores extremos o pasan a través de cero simultáneamente; Por lo tanto, la oscilación NNM está representada por una línea modal recta (NNM similar) o una curva modal (NNM no similar) en el espacio de configuración del sistema. Los NNM son generalmente no similares, ya que la similitud (que siempre es el caso en la teoría lineal) sólo se puede realizar cuando existen simetrías especiales (Vakakis et al., [65]). A. Lyapunov [72] demostró la existencia de n soluciones periódicas sincrónicas (NNMs) en vecindarios de equilibrios estables de sistemas hamiltonianos de n GDL sin resonancias internas, y A. Weinstein [73] y J. K. Moser [74] extendieron el resultado de Lyapunov a sistemas hamiltonianos múltiples GDL con resonancias internas. Como se describe a continuación, una característica importante que distingue los NNM de los modos lineales normales es que pueden exceder en número los grados de libertad de un oscilador; En los casos en que esto ocurre, se generan modos esencialmente no lineales (sin analogía en teoría lineal) a través de bifurcaciones NNM, rompiendo la simetría de la dinámica y dando como resultado el fenómeno de localización de energía no lineal (confinamiento de movimiento).

Los NNM similares son análogos a los modos normales lineales, en el sentido de que sus líneas modales no dependen de la energía de la oscilación libre y la separación espacio-tiempo de las ecuaciones que gobiernan el movimiento, todavía se puede realizar, sin embargo, como se mencionó anteriormente, este tipo de NNM se realiza sólo cuando se producen simetrías especiales, y no son típicos en sistemas no lineales. Más genéricos son los NNM no similares, cuyas curvas modales dependen de la energía; Esta dependencia energética impide la separación directa del espacio y del tiempo en las ecuaciones gobernantes del movimiento por medio de NNM no similares, lo que complica su cálculo analítico (ver A. F. Vakakis et al., [65]).

Según M. E. King y A. F. Vakakis, [76] se considera un NNM como una os-

oscilación periódica (no necesariamente en sincronía) de un sistema dinámico no lineal y no disipado. Esto permite extender la definición de NNM a casos de sistemas en resonancia interna, donde las interacciones modales fuertemente no lineales resultantes hacen que la oscilación libre no sea sincrónica. Visto en un contexto diferente, en ausencia de resonancia interna un NNM puede ser representado por una línea o curva modal en el espacio de configuración del sistema de modo que las relaciones funcionales estén dadas en la forma

$$y_i = \hat{y}_i(y_1), y_1 \equiv \hat{y}_1(y_1), \quad i = 1, \dots, n$$

y pueden establecerse entre las coordenadas y_j y de ahí la definición original de NNM de Rosenberg. Ninguna de tales relaciones funcionales se mantiene cuando se producen resonancias internas.

Cuando no existen resonancias, la variedad invariante NNM de un oscilador discreto de n GDL son bidimensionales, y los NNM están desacoplados entre sí. Cuando existen resonancias internas, se producen interacciones fuertemente no lineales entre los NNM que los acoplan; Esto provoca un aumento de la dimensión de la variedad invariante NNM correspondiente.

Una característica dinámica típica de sistemas no lineales es la dependencia frecuencia energía de sus oscilaciones. Como resultado las curvas modales y frecuencias de los NNM dependen de la energía total en el sistema. Por lo cual, resulta conveniente representar los NNM en una gráfica frecuencia energía. Un movimiento del NNM es representado por un punto en la gráfica, que se extrae a una frecuencia correspondiente al período mínimo del movimiento periódico y a una energía correspondiente a la energía total conservada durante el movimiento, que es la suma de las energías potencial y cinética. Una rama, representada por una línea sólida, es una familia de movimientos NNM que poseen las mismas características cualitativas.

Otra característica destacada de los sistemas no lineales es que los NNM pueden interactuar durante un movimiento general del sistema. Las interacciones modales no lineales han sido estudiadas extensamente en la literatura (ver A. H. Nayfeh [64]). Un caso de particular interés es cuando las frecuencias naturales lineales son proporcionales o casi proporcionales (ver [67],[77],[68],[76]). Por lo tanto, durante la resonancia interna puede observarse un intercambio de energía entre los diferentes modos implicados. Por ejemplo, excitando un modo de alta frecuencia puede producir una respuesta de gran amplitud en un modo de baja frecuencia.

Una tercera propiedad fundamental de los NNM es que su número puede exceder el número de GDL del sistema. Debido a las bifurcaciones de modo, no todos los NNM se pueden considerar como continuación no lineal de los modos normales de sistemas lineales (ver [65],[78],[79]), los NNM con resonancia interna son un ejemplo.

2.5.1. Localización de la energía en sistemas no lineales

Una de las características más interesantes de los NNM es que estos pueden inducir localización de modo no lineal en sistemas dinámicos, es decir, un subconjunto de NNM puede estar espacialmente localizado a subcomponentes de sistemas dinámicos. La localización del modo puede ocurrir también en sistemas lineales compuestos de múltiples subsistemas acoplados (Anderson[80], Pierre y Dowell[81], Hodges[82]), sin embargo, sólo resulta debido a la interacción entre ruptura de simetría (desorden estructural) y acoplamiento débil entre subsistemas. En los sistemas no lineales, el trastorno estructural no es un requisito previo para la localización del modo, ya que la dependencia de la frecuencia de la oscilación en la amplitud (energía) proporciona un desorden efectivo en la dinámica (Vakakis et al., [83]). , Vakakis, [84], King et al., [85], Vakakis et al., [65]).

Capítulo 3

Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing

Los absorbedores de vibraciones son dispositivos que generan fuerzas inerciales o elásticas para reducir el nivel de la respuesta producida por el efecto de vibraciones externas o internas que afectan a un sistema mecánico. En la mayoría de los casos un absorbedor consta de masas adicionales, conectadas mediante elementos elásticos (resortes) y/o amortiguadores (amortiguamiento de tipo viscoso o de material) al sistema o estructura que necesita de protección y, ocasionalmente, conectadas en forma directa sobre maquinaria rotatoria desbalanceada que genera vibraciones endógenas. Cabe señalar que la mayoría de los sistemas físicos presentan fenómenos no lineales y, en muchas aplicaciones industriales, los absorbedores dinámicos de vibración tienen que interactuar con ellos. Los términos no lineales pueden generar fenómenos interesantes en la respuesta de los sistemas forzados.

Los términos no lineales pueden ser el resultado de una característica física del sistema, como puede ser la rigidez o el amortiguamiento no lineal. Frecuentemente se ataca este problema erradicando esos términos, es decir, se linealiza el sistema y considerando solo la respuesta lineal. Sin embargo, tales simplificaciones o cancelaciones no siempre ofrecen resultados satisfactorios.

En este capítulo se analiza primeramente la respuesta del sistema tipo Duffing amortiguado y se observa el cambio que sufre su respuesta frecuencial al variar ciertos parámetros como la rigidez, amortiguamiento, o la amplitud y frecuencia de la fuerza de excitación (perturbación exógena al sistema). Posteriormente, se analiza el comportamiento del sistema tipo Duffing acoplado a un absorbedor de vibraciones tipo Duffing, con el cual se obtiene un sistema de dos grados de libertad. Se desarrolla el modelo matemático de este sistema no lineal y se obtiene una aproximación de la respuesta frecuencial utilizando el método de escalas múltiples (Nayfeh y Mook [47]).

El análisis de la respuesta frecuencial y de la amplitud en el sistema con dos grados de libertad permite observar que la fuerza armónica externa y la no linealidad, presentes en el sistema primario, no afectan directamente a éste cuando

el sistema está en resonancia, sino que el efecto de estos términos se transfiere a la respuesta del absorbedor de vibraciones tipo Duffing.

3.1. Sistema primario tipo Duffing con amortiguamiento viscoso

La formulación Euler-Lagrange es desarrollada para la obtención del modelo dinámico del sistema. En la Fig. 3.1 se representa de forma esquemática el sistema primario, compuesto por una masa m , un resorte no lineal con constantes de rigidez k_1 , k_2 , un amortiguador viscoso con constante de amortiguamiento c , con una fuerza externa generalizada $F(t)$ tipo armónica ejercida sobre la masa y coordenada generalizada x , que representa el desplazamiento absoluto de la masa.

Se obtiene las energías cinética y potencial del sistema, la primera está presente en las fuerzas inerciales debidas al movimiento de la masa restringido al movimiento horizontal y, por lo tanto, no existen fuerzas de gravedad y la segunda por la fuerza de restauración desarrollada por el resorte.

$$T = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 \quad (3.1)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_0 + x)^2 + \frac{1}{4}k_2(x_0 - x)^4 \quad (3.2)$$

Ahora se determina el Lagrangiano del sistema como:

$$L = T - V \quad (3.3)$$

$$L = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1(x_0 + x)^2 - \frac{1}{4}k_2(x_0 - x)^4 \quad (3.4)$$

A partir de este empleando la formulación de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema primario como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F(t)$$

Se considera que el sistema parte del equilibrio estático $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -k_1x - k_2x^3 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m \ddot{x} \end{aligned}$$

3.1. SISTEMA PRIMARIO TIPO DUFFING CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO 35

con lo que la ecuación de movimiento sin amortiguamiento es

$$m \ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F(t)$$

Como la fuerza externa aplicada en el sistema es de tipo armónica

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

y se considera única, por lo tanto, es la fuerza generalizada del sistema

$$m \ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F_0 \cos \Omega t$$

El amortiguamiento viscoso se introduce en la dinámica empleando la función de disipación de Rayleigh $\Delta = \frac{1}{2}c \dot{x}^2$ de la siguiente forma

$$m \ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F_0 \cos \Omega t - \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{x}}$$

$$m \ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F_0 \cos \Omega t - c \dot{x}$$

Con lo que la ecuación de movimiento del sistema primario se puede expresar de la forma

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F_0 \cos \Omega t \quad (3.5)$$

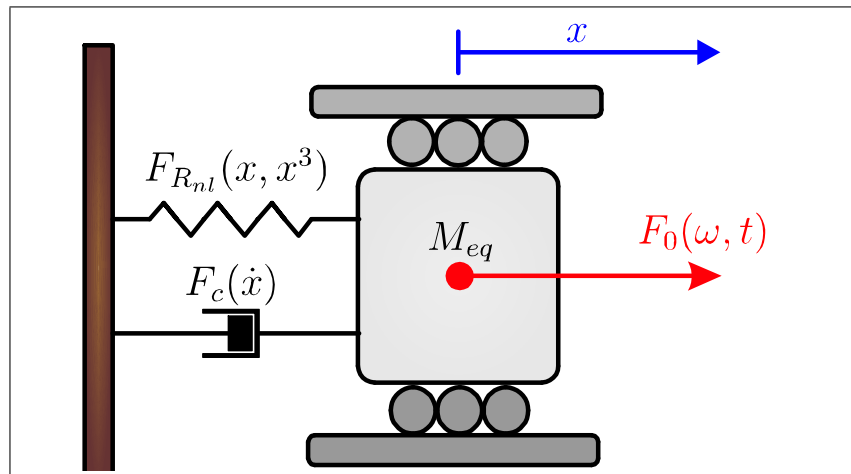


Figura 3.1: Sistema Duffing con amortiguamiento viscoso.

3.1.1. Simulación de la respuesta frecuencial aproximada del sistema tipo Duffing con amortiguamiento

Para obtener la respuesta frecuencial estacionaria bajo condición de resonancia del sistema, se normaliza el sistema (3.5) con respecto a m , o sea que

$$\ddot{x} + \frac{k_1}{m}x + \frac{k_2}{m}x^3 + \frac{c}{m}\dot{x} = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t \quad (3.6)$$

y se definen los parámetros

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \mu = 2\zeta = \frac{c}{m}, \quad \alpha = \frac{k_2}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

El sistema expresado en forma normalizada y parametrizada se expresa como

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2x + \alpha x^3 = f_0\cos\Omega t$$

Al aplicar el método de escalas múltiples se considera la respuesta en estado estacionario (2.44), definiendo $x = u$, se tiene:

$$x(t; \epsilon) = a\cos(\Omega t - \beta) + O(\epsilon)$$

donde a es la amplitud de respuesta en estado estacionario, Ω es la frecuencia de excitación, β es el ángulo de fase y $O(\epsilon)$ son los términos de mayor orden.

En la Tabla 3.1 se muestran los parámetros del sistema considerados para la simulación, la función de rigidez del resorte blando $R_1(x) = k_1x + k_2x^3$ y la masa equivalente de la base móvil $m_p = 0,493kg$ se determinan en el Capítulo 4 de forma experimental, en la base se coloca una carga $m_c = 2,483kg$, de igual forma el parámetro ζ (relación de amortiguamiento) se obtiene en el Capítulo 5, el cual se determina para diferentes pruebas experimentales, el considerado aquí es el promedio de dichas pruebas.

Tabla 3.1. Parámetros físicos del sistema primario

$M_{eq} = m_p + m = 0,493\text{ kg} + 2,483\text{ kg} = 2,976\text{ kg}$	$\zeta = 0,123$
$\Omega = \omega$	$c = 2\zeta M_{eq} = 0,732\text{ N/(m/s)}$
$k_1 = 1084\text{ N/m}$	$k_2 = -9,155 \times 10^5\text{ N/m}^3$

Por lo tanto, los parámetros normalizados son

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M_{eq}}} = 19,09(\text{rad/s}), \quad \mu = 2\zeta = 0,246$$

$$\alpha = \frac{k_2}{M_{eq}} = -3,07 \times 10^5\text{ (m}^2/\text{s}^2)$$

3.1. SISTEMA PRIMARIO TIPO DUFFING CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO 37

Con lo que, la ecuación de movimiento en condición de resonancia toma la forma:

$$\ddot{x} + (19,09)^2 x + 0,246 \dot{x} + (-3,07 \times 10^5) x^3 = f_0 \cos(19,09t)$$

Se realiza la simulación de la respuesta frecuencial, aplicando el método de escalas múltiples considerando la ecuación implícita (2.43), para una amplitud de fuerza de excitación $F_0 = 4,3775 N$ con lo que la fuerza normalizada es $f_0 = 1,472 (m/s^2)$. Además se realiza otra simulación de la respuesta frecuencial en función de la fuerza de excitación normalizada, con frecuencia de excitación $\Omega = 15,708 (rad/s)$ de (2.30) se tiene que:

$$\epsilon\sigma = 15,71(rad/s) - 19,09(rad/s) = -3,38(rad/s)$$

La simulación de las respuestas frecuenciales se calcula por el programa desarrollado en MapleTM el cual se encuentra en el apéndice A. La gráfica de las respuestas en simulación se muestra en las Figs. 3.2 y 3.3 .

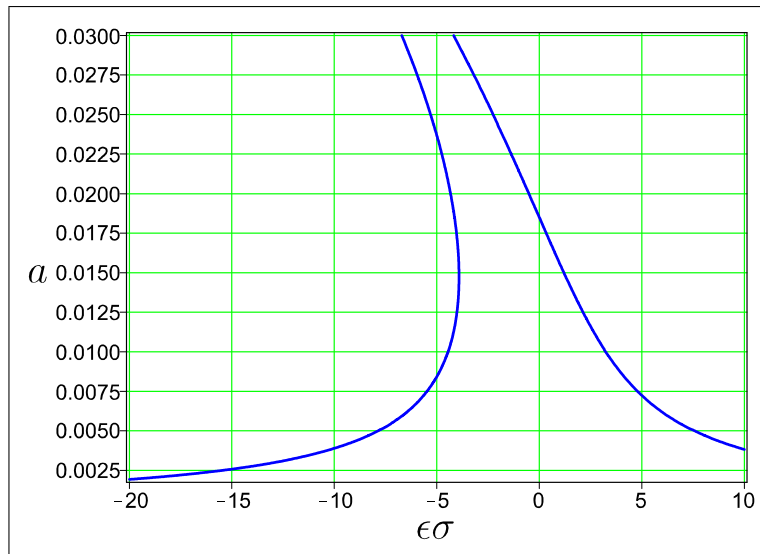


Figura 3.2: Respuesta simulada en estado estacionario (frecuencia de excitación vs amplitud de respuesta)

3.1.2. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing

El diagrama esquemático del absorbedor tipo Duffing para sistema tipo Duffing se muestra en la Fig. 3.4. Las coordenadas generalizadas son los desplazamientos

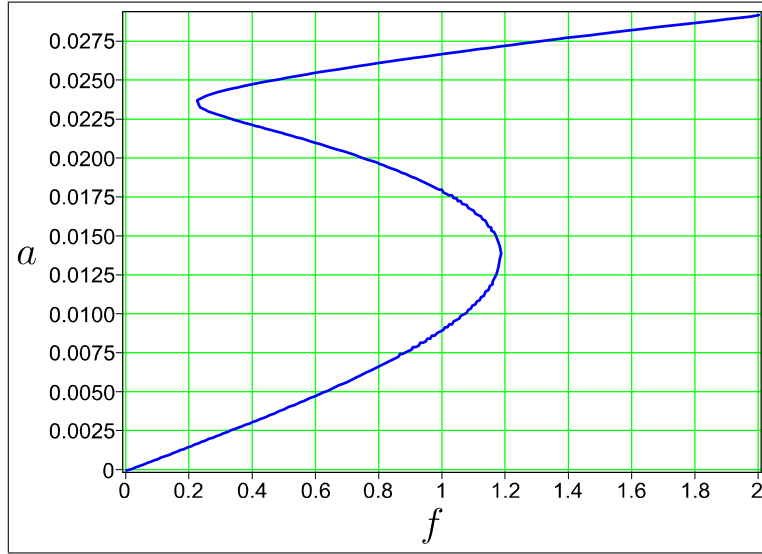


Figura 3.3: Respuesta simulada en estado estacionario (amplitud de fuerza de excitación normalizada vs amplitud de respuesta)

de ambas masas respecto de su posición de equilibrio estático, las cuales se denotan por x_1 y x_2 , respectivamente. La masa y el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema primario se representan por m_1 y c_1 , respectivamente. De forma similar, m_2 y c_2 son la masa y el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema secundario (absorbedor tipo Duffing). El sistema primario se excita por una fuerza armónica $F(t) = f_0 \cos \Omega t$ con amplitud f_0 y frecuencia de excitación Ω , la cual es cercana a la frecuencia resonante del sistema primario.

Se considera que el sistema parte del equilibrio estático $x_1(0) = x_2(0) = 0$. La energía cinética está dada por:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 \quad (3.7)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (3.8)$$

La energía potencial presente en los resortes y en ausencia de la energía potencial debida a la gravedad se expresa como:

$$V_1 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{4} k_{1\alpha} x_1^4 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{4} k_{2\alpha} (x_1 - x_2)^4$$

$$V_2 = \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4} k_{2\alpha} (x_2 - x_1)^4$$

3.1. SISTEMA PRIMARIO TIPO DUFFING CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO39

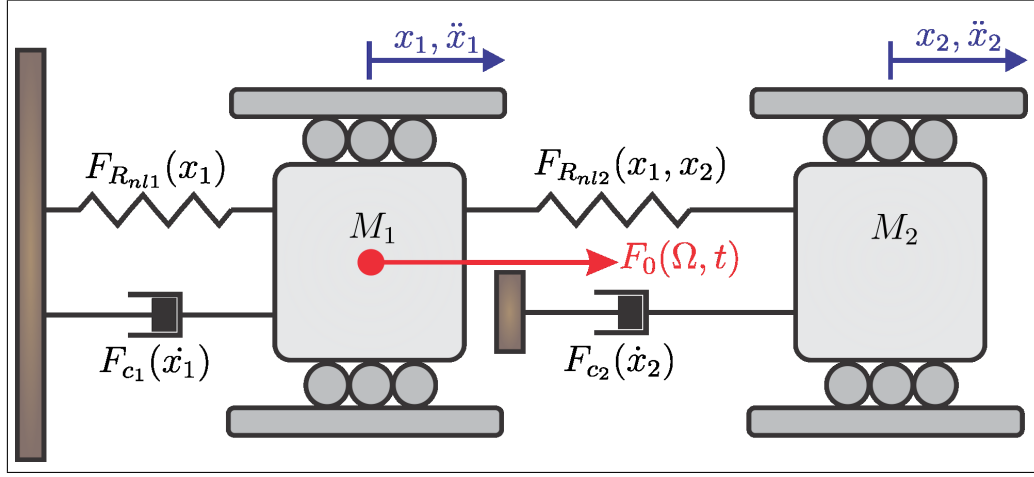


Figura 3.4: Diagrama esquemático del sistema Duffing con absorbedor tipo Duffing.

El Lagrangiano del sistema es:

$$L = T - V \quad (3.9)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{4}k_{1\alpha}x_1^4 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{4}k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^4 \quad (3.10)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{4}k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^4 \quad (3.11)$$

A partir de este, se hace uso de la formulación de Euler-Lagrange, con lo que se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F(t)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = -k_1x_1 - k_{1\alpha}x_1^3 - k_2(x_1 - x_2) - k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^3$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1) - k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^3$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2$$

El sistema de ecuaciones de movimiento sin amortiguamiento es

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1\alpha}x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) + k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^3 = F_0(\Omega, t) \quad (3.12)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^3 = 0 \quad (3.13)$$

Como la fuerza externa aplicada en el sistema es de tipo armónica $\tau = F_0(\Omega, t) = F_0 \cos \Omega t$ y es la única fuente presente, ésta se considera como la fuerza generalizada

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1\alpha}x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) + k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^3 = F_0 \cos \Omega t \quad (3.14)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^3 = 0 \quad (3.15)$$

El amortiguamiento viscoso se introduce en la dinámica empleando la función de disipación de Rayleigh $\Delta = \frac{1}{2}c \dot{x}^2$ de la siguiente forma:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1\alpha}x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) + k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^3 = F_0 \cos \Omega t - \frac{\partial \Delta_1}{\partial \dot{x}_1} \quad (3.16)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^3 = -\frac{\partial \Delta_2}{\partial \dot{x}_2} \quad (3.17)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1\alpha}x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) + k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^3 = F_0 \cos \Omega t - c_1 \dot{x}_1 \quad (3.18)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^3 = -c_2 \dot{x}_2 \quad (3.19)$$

Con lo que el sistema de ecuaciones de movimiento se expresa de la forma:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1x_1 + k_{1\alpha}x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) + k_{2\alpha}(x_1 - x_2)^3 &= F_0 \cos \Omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_{2\alpha}(x_2 - x_1)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Los resortes no lineales de ambos subsistemas tienen funciones de rigidez cúbica descrita por

$$F_{Rnl1}(x) = k_1x + k_{1\alpha}x^3$$

$$F_{Rnl2}(x) = k_2x + k_{2\alpha}x^3$$

donde k_i y $k_{i\alpha}$, $i = 1, 2$ son constantes que caracterizan los términos lineales y cúbicos de la rigidez asociada a cada uno de los resortes. Cuando $k_{i\alpha} < 0$ o $k_{i\alpha} > 0$ se tiene un resorte blando o duro, respectivamente.

El sistema no lineal de dos grados de libertad (3.20) se expande y se agrupan los términos como:

3.1. SISTEMA PRIMARIO TIPO DUFFING CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO 41

$$F_0 \cos \Omega t = m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 + (k_{1\alpha} + k_{2\alpha}) x_1^3 + 3k_{2\alpha} x_2^2 x_1 - 3k_{2\alpha} x_2 x_1^2 - k_{2\alpha} x_2^3 \quad (3.21)$$

$$0 = m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_{2\alpha} x_2^3 - 3k_{2\alpha} x_2^2 x_1 + 3k_{2\alpha} x_2 x_1^2 - k_{2\alpha} x_1^3 \quad (3.22)$$

se normaliza con respecto a las masas m_1 y m_2 , respectivamente, para obtener el sistema no lineal de la siguiente forma:

$$f_0 \cos \Omega t = \ddot{x}_1 + 2\zeta_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 x_1 + \alpha_3 x_2 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3 + \alpha_5 x_2^3 \\ 0 = \ddot{x}_2 + 2\zeta_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha_6 x_1 + \alpha_7 x_2 x_1^2 + \alpha_8 x_2^2 x_1 + \alpha_9 x_2^3 + \alpha_{10} x_1^3 \quad (3.23)$$

donde los parámetros normalizados son:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m_1}, \quad 2\zeta_1 = \frac{c_1}{m_1}, \quad 2\zeta_2 = \frac{c_2}{m_2} \\ \alpha_1 = \frac{-k_2}{m_1}, \quad \alpha_2 = \frac{3k_{2\alpha}}{m_1}, \quad \alpha_3 = \frac{-3k_{2\alpha}}{m_1}, \quad \alpha_4 = \frac{(k_{1\alpha} + k_{2\alpha})}{m_1}, \quad \alpha_5 = -\frac{k_{2\alpha}}{m_1} \\ \alpha_6 = -\frac{k_2}{m_2}, \quad \alpha_7 = \frac{3k_{2\alpha}}{m_2}, \quad \alpha_8 = -\frac{3k_{2\alpha}}{m_2}, \quad \alpha_9 = \frac{k_{2\alpha}}{m_2}, \quad \alpha_{10} = -\frac{k_{2\alpha}}{m_2}$$

además, $0 < \varepsilon < 1$ es un parámetro adimensional, el cual es útil para describir el comportamiento entre sistema primario y absorbedor pasivo, amortiguamiento viscoso, rigidez cúbica y la fuerza externa presente en el sistema no lineal. La respuesta frecuencial en estado estable del sistema se puede aproximar y analizar para propósitos de diseño utilizando métodos de perturbación. Los parámetros del absorbedor tipo Duffing (3.23), se seleccionan de tal forma que se pueda reducir la respuesta del sistema primario alrededor de $\Omega \approx \omega_1$.

Capítulo 4

Descripción de la plataforma experimental

La plataforma experimental es una planta electromecánica que describe un movimiento rectilíneo, fabricada por *Educational Control Products* (*ECP*®), modelo 210a, la cual está diseñada para aplicaciones de modelado dinámico, estudio de vibraciones e ingeniería de control (ver Fig. 4.1). Los componentes básicos del sistema electromecánico son: bloques de masas ajustables; resortes lineales; un amortiguador neumático con longitud de cámara ajustable, un motor de cd sin escobillas, 3 sensores de posición (decodificadores ópticos incrementales de alta resolución), una transmisión piñón-cremallera (transformación de movimiento rotacional a lineal), tres bases móviles (cada una descansa sobre un riel con rodamientos de bolas antifricción). Este equipo se puede configurar desde un sistema de un grado de libertad (sistema de segundo orden) hasta tres grados de libertad (sistema de sexto orden).

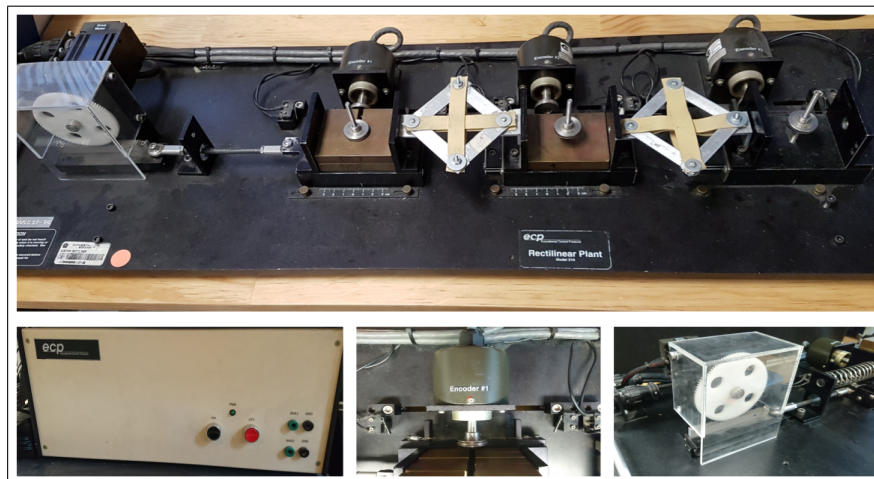


Figura 4.1: Plataforma rectilínea (*ECP*® modelo 210).

El diagrama esquemático ilustrado en la Fig. 4.2, consta de tres carros con masa, interconectados por resortes bidireccionales. La suspensión de cada masa es un tipo de rodamiento lineal de bolas antifricción con un recorrido disponible de ± 3 cm aproximadamente. El accionamiento lineal se compone de una cremallera suspendida sobre un carro antifricción y un piñón (diámetro de paso 7,62 cm) acoplados al eje del servomotor sin escobillas. Los codificadores ópticos miden las posiciones del carro de masa, también a través de un piñón y cremallera con paso de piñón con diámetro de paso igual a 2,24 cm.

Se pueden fijar resortes de distinta rigidez entre las masas y la placa base. Un amortiguador con amortiguamiento ajustable puede acoplarse a cualquiera de las masas (ver Fig.4.2). Se proporcionan escalas de medición de posición visual para cada uno de los carros para ayudar a corroborar ciertos experimentos y configuración de las escalas del sistema en el software (mm, cm, cuentas, in).

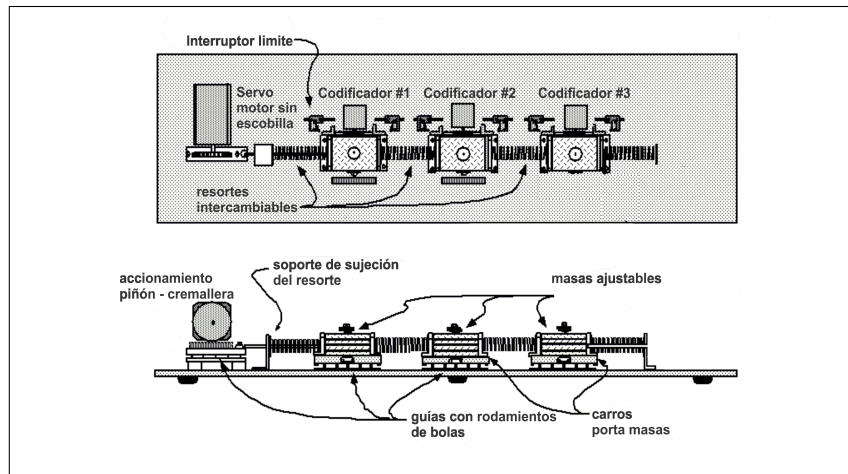


Figura 4.2: Diagrama esquemático del equipo *ECP*® modelo 210a. [86]

La unidad de control en tiempo real contiene el procesador digital de señales (DSP por sus siglas en inglés *Digital Signal Processor*) basado en el controlador en tiempo real, la interfaz servo/actuador, servoamplificador y fuentes de alimentación auxiliares. El DSP es capaz de ejecutar leyes de control con altas tasas de muestreo que permiten modelar la implementación como continua o discreta en el tiempo. El controlador también interpreta los comandos de trayectoria y soporta funciones como la adquisición de datos, la generación de trayectoria y las comprobaciones de seguridad y salud del sistema. Una matriz de puerta lógica realiza la conmutación del motor y la decodificación del pulso del decodificador. Además, cuenta con dos convertidores de digital a analógico (DACs, por sus siglas en inglés *Digital to Analog Converter*) auxiliares (opcionales), los cuales permiten la medición de señales analógicas en tiempo real. Este controlador es representativo de la implementación del control industrial moderno.

4.1. OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DE LOS PARÁMETROS MODALES.45

La interfaz de usuario se ejecuta en el programa ejecutable *ECP Executive Version 5.0. (32 bits) © 2003* en una PC bajo el sistema operativo *Windows 7© 2009*. Este programa soporta la definición de trayectoria, adquisición de datos, trazado, comandos de ejecución del sistema y otras más.

La plataforma cuenta con 4 decodificadores ópticos incrementales, tres para detectar la posición de las tres masas y uno para la conmutación del servomotor sin escobillas. Los primeros tres tienen una resolución de 4000 *pulsos/revolución* y el último tiene una resolución de 1000 *pulsos/revolución*, el cual se encuentra conectado directamente al servomotor. La fuente de luz empleada en el decodificador genera dos señales desfasadas a 90° , que son enviadas a un sistema de compuertas por dos canales, lo que permite decodificar los flancos de subida y de bajada, así como la dirección del movimiento, obteniendo una resolución de $4X$. Es decir, la resolución del decodificador de posición de masa se convierte en 16000 *cuentas/revolución*. La resolución efectiva es entonces de $16000 \text{ cuentas}/(2\pi r_p)$, donde $r_p = 1,12 \text{ cm}$ es el radio de paso del piñón del decodificador, con lo se obtiene una resolución de 2214,33 *cuentas/centímetro*.

4.1. Obtención experimental de los parámetros modales.

Con el fin de obtener la masa equivalente y la relación de amortiguamiento de la plataforma, los cuales son parámetros inherentes al sistema, siendo necesario conocerlos, para obtener una respuesta aproximada aceptable, se realizan pruebas modales, obteniendo la frecuencia natural y el amortiguamiento modal correspondientes. El análisis se fundamenta en el hecho que, al excitar un sistema por una fuerza armónica, su respuesta presenta un pico agudo en resonancia, esto quiere decir que la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

4.1.1. Parametrización con una base móvil

Para poder determinar la frecuencia natural de la plataforma experimental (una sola base móvil, que se desliza sobre rodamientos de bola), se consideran un sistema de un grado de libertad, se instala un resorte lineal con función de rigidez conocida $F_r(x) = kx = (346,87)x$, se hace una serie de experimentos con diferentes valores de carga sobre la plataforma. En la Fig. 4.3 se muestra la respuesta del sistema cuando la base esta descargada, aplicando un barrido sinusoidal, de 0,1 *Hz* a 6 *Hz* con una duración de 60 *s* y una amplitud de 0,7725 *N*.

Para obtener los parámetros modales del sistema a partir de la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés Fast Fourier Transform), se utiliza

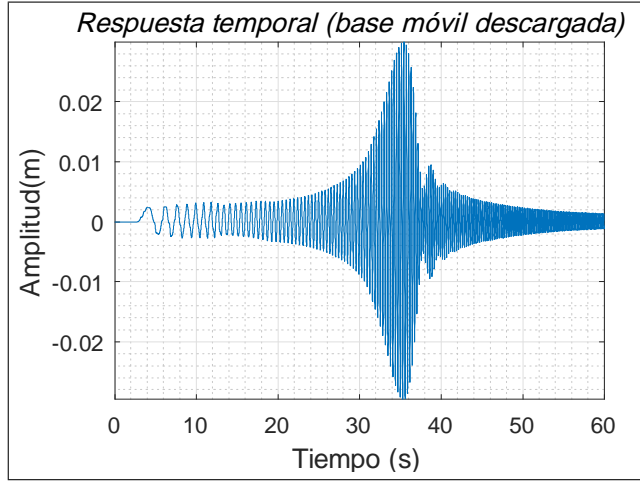


Figura 4.3: Respuesta temporal al barrido senoidal (base móvil descargada)

como analizador, el software desarrollado en [57]. La respuesta en la frecuencia obtenida del analizador se muestra en la Fig. 4.4, con la cual se obtiene que la frecuencia natural amortiguada $f_d \approx 3,6626 \text{ Hz}$, expresando en frecuencia circular $\omega_d \approx 23 \text{ rad/s}$.

Se determinan los parámetros modales utilizando la técnica *Peak Picking*, donde la relación de amortiguamiento modal está dada por

$$\zeta = \frac{\omega_d^{(2)} - \omega_d^{(1)}}{2\omega_d} \quad (4.1)$$

donde $\omega_d^{(1)}$, $\omega_d^{(2)}$, son los puntos de mediana potencia, los cuales, ambos se encuentran al lado de la frecuencia resonante ω_d , y cumplen la relación de potencia media o valor rms:

$$\left| Y(i\omega_d^{(1)}) \right| = \left| Y(i\omega_d^{(2)}) \right| = \frac{|Y(i\omega_d)|}{\sqrt{2}} = \frac{0,02983}{\sqrt{2}} = 0,0211$$

En la Fig. 4.4 se puede apreciar que $f_d^{(1)} \approx 3,55 \text{ Hz}$, $f_d^{(2)} \approx 3,77 \text{ Hz}$, por lo tanto, $\omega_d^{(1)} \approx 22,3 \text{ rad/s}$, $\omega_d^{(2)} \approx 23,7 \text{ rad/s}$. Aplicando (4.1) se obtiene que $\zeta \approx 0,03041$. Ya que la relación de amortiguamiento modal ζ es pequeña, se puede considerar la frecuencia amortiguada como la frecuencia natural del sistema $\omega_d \approx \omega_n \approx 23 \text{ rad/s}$. Conociendo la función de rigidez del resorte lineal, entonces es posible determinar la masa equivalente (M_{eq}), considerando que:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{M_{eq}} \Rightarrow M_{eq} = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{346,87}{(23)^2} \approx 0,655 \text{ kg}$$

4.1. OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DE LOS PARÁMETROS MODALES.47

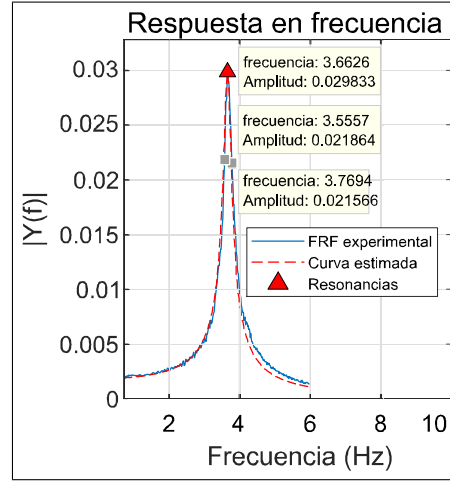


Figura 4.4: Respuesta frecuencial (base móvil descargada)

Por último, se calcula el amortiguamiento de la plataforma por medio de la relación siguiente:

$$c = 2\zeta\omega_n M_{eq} = 2 * 0,03041 * 7,3252\pi \text{ (rad/s)} * 0,655 \text{ (kg)} \approx 0,92 \text{ N/(m/s)}$$

El procedimiento anterior se repite para diferentes valores de carga (M_c) sobre la base móvil, correspondientes a $0,496 \text{ kg}$, $0,985 \text{ kg}$, $1,48 \text{ kg}$ y $1,981 \text{ kg}$, con el fin de obtener la masa de la base móvil (m_b) para diferentes valores de carga utilizando:

$$m_b = M_{eq} - M_c$$

Los resultados obtenidos se encuentran en la Tabla (4.1). La masa equivalente promedio de la base móvil es de $0,493 \text{ kg}$.

Tabla (4.1). Parametros modales para diferentes valores de carga (sistema de un grado de libertad)

$M_c \text{ (kg)}$	$f_n \text{ (Hz)}$	$\omega_n \text{ (rad/s)}$	ζ	$M_{eq} \text{ (kg)}$	$m_b \text{ (kg)}$
0	3,6626	23	0,03	0,655	0,655
0,496	2,869	18	0,0328	1,07	0,571
0,985	2,4417	15,3	0,0359	1,47	0,489
1,48	2,1518	13,5	0,0376	1,9	0,418
1,981	1,9534	12,3	0,0396	2,3	0,322

4.1.2. Parametrización con dos bases móviles

El procedimiento de la subsección anterior se repite considerando un sistema de dos grados de libertad, uno por cada base móvil con masas equivalentes M_{eq1}

y M_{eq2} . Las frecuencias naturales del sistema están dadas por:

$$\omega_1^2 = \frac{(\eta + \lambda)}{2M_{eq1}M_{eq2}} \quad (4.2)$$

$$\omega_2^2 = \frac{(\eta - \lambda)}{2M_{eq1}M_{eq2}} \quad (4.3)$$

con

$$\eta = \frac{k_1M_{eq2} + k_2M_{eq1} + k_2M_{eq2}}{2M_{eq1}M_{eq2}}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 = & (k_1M_{eq1})^2 - 2k_1k_2M_{eq1}M_{eq2} + 2k_1k_2(M_{eq2})^2 \\ & + (k_2M_{eq1})^2 + (k_2M_{eq2})^2 + 2(k_2)^2 M_{eq1}M_{eq2} \end{aligned}$$

Al despejar M_{eq2} de (4.2) y (4.3) se obtiene respectivamente:

$$M_{eq2} = \frac{k_2(-M_{eq1}\omega_1^2 + k_1)}{\omega_1^2(-M_{eq1}\omega_1^2 + k_1 + k_2)} \quad (4.4)$$

$$M_{eq2} = \frac{k_2(-M_{eq1}\omega_2^2 + k_1)}{\omega_1^2(-M_{eq1}\omega_2^2 + k_1 + k_2)} \quad (4.5)$$

Con (4.4) y (4.5) se obtiene la masa equivalente promedio \bar{M}_{eq2} . La masa en la primer base móvil es fija y tiene una carga de 1,48 kg por lo tanto la masa equivalente (M_{eq1}) es de 1,9 kg la cual se obtiene de la Tabla (4.1). Se realiza experimentos para valores de carga (M_{c2}) diferentes en la segunda base móvil correspondientes a 0 kg, 0,496 kg, 0,985 kg, 1,48 kg y 1,981 kg. Los resortes lineales utilizados tienen funciones de rigidez $k_1 = (346,8725)x$ y $k_2 = (333,1725)x$. En la Tabla (4.2) se muestran los resultados experimentales obtenidos. La masa equivalente promedio de la base móvil del segundo grado de libertad es de 0,340 kg..

Tabla (4.2). Parametros modales para diferentes valores de carga (sistema de dos grado de libertad)

M_{c2} (kg)	f_{n1} (Hz)	ζ_1	f_{n2} (Hz)	ζ_2	\bar{M}_{eq2} (kg)	m_{b2} (kg)
0	1,8693	0,0575	4,8831	0,029	0,475	0,475
0,496	1,6786	0,0646	3,9752	0,0248	0,8761	0,3861
0,985	1,5183	0,0683	3,6318	0,0267	1,292	0,311
1,48	1,3886	0,0782	3,4487	0,0267	1,742	0,267
1,981	1,2589	0,0787	3,3571	0,0283	2,2365	0,2615

4.2. Obtención experimental de la función de rigidez

Los resortes empleados en el sistema son blandos los cuales proporcionan una función de rigidez no lineal, su configuración consiste en una estructura móvil compuesta por una cadena cerrada de 4 eslabones, la cual se combinan con 4 ligas de hule natural de longitud 10 cm, ancho 1,5 cm y un espesor de 0,22 cm, las cuales se fijan a la estructura como se muestra en la Fig. 4.5.

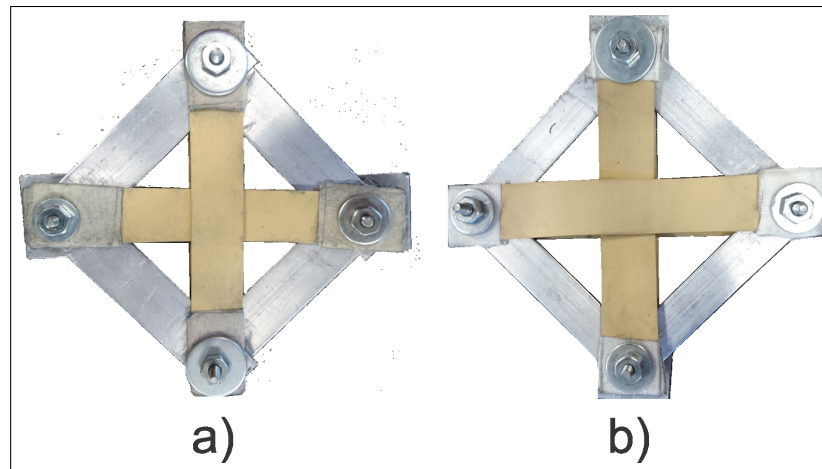


Figura 4.5: Resortes blandos a) R_{rnl1} b) R_{rnl2}

La caracterización de estos se efectúa tomando valores de carga-deformación en compresión y tensión, una vez obtenido los valores experimentales (ver Figs. 4.6 y 4.7), se ingresa a *Matlab*® y empleando la aplicación *Curve Fitting* se obtiene las funciones de rigidez siguientes

$$\begin{aligned} F_{Rnl1}(x) &= k_1x + k_{1\alpha}x^3 = (1084)x - (9,155 \times 10^5)x^3 \\ F_{Rnl2}(x) &= k_2x + k_{2\alpha}x^3 = (984,6)x - (7,421 \times 10^5)x^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

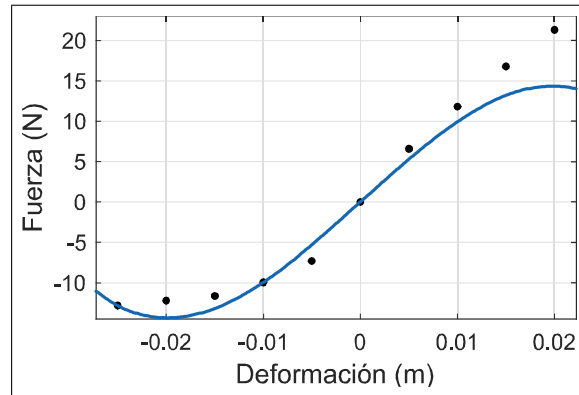


Figura 4.6: Aproximación polinomial de 3er orden ($F_{R1}(x)$)

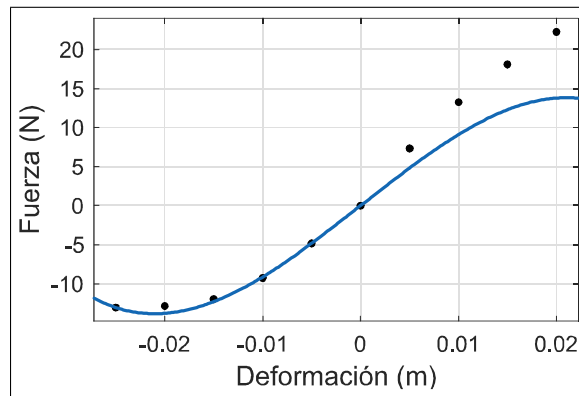


Figura 4.7: Aproximación polinomial de 3er orden ($F_{R2}(x)$)

Capítulo 5

Resultados experimentales

5.1. Sistema primario tipo Duffing

5.1.1. Respuesta frecuencial experimental

De la obtención de la función de rigidez de los resortes como objetos de estudio la cual fue realizada en el Capítulo anterior, se puede apreciar un comportamiento de resorte de tipo blando.

El primer estudio experimental sobre el sistema primario es el someter a una fuerza de excitación de barrido sinusoidal, sobre una banda de frecuencia de $1Hz$ a $5Hz$, en el cual se desarrolla una serie de pruebas variando la amplitud de excitación, con el fin de observar la presencia de un comportamiento no lineal en la función de respuesta frecuencial (FRF), es decir, al variar la amplitud de la excitación, la frecuencia de resonancia se modifica, lo cual no sucede en los sistemas lineales, con lo que se vislumbra a primera vista que el sistema tiene una dinámica no lineal.

En las Figs. 5.1 a) - 5.5 a) se muestran las respuestas temporales experimentales del sistema bajo una excitación de barrido sinusoidal con amplitud de fuerza igual a $2,3175N$, $2,8325N$, $3,8625N$ y $4,3775N$, respectivamente.

Con el objetivo de determinar las frecuencias naturales del sistema, se realiza un análisis modal lineal, el cual consiste en la obtención de la FRF de la respuesta temporal al barrido sinusoidal, obteniendo la frecuencia natural amortiguada del sistema y la relación de amortiguamiento modal. Utilizando la técnica conocida como *Peak Picking*, la cual se aplicó en el Capítulo anterior para determinar la masa equivalente de la plataforma experimental, se obtienen las FRF para varias pruebas experimentales.

En las Figs. 5.1 b) - 5.5 b) se muestran las FRF correspondientes a las respuestas, donde se puede observar la frecuencia natural amortiguada.

De las pruebas y el análisis anterior se obtiene una serie de respuestas frecuenciales, las cuales, una a una representan la respuesta de un sistema lineal,

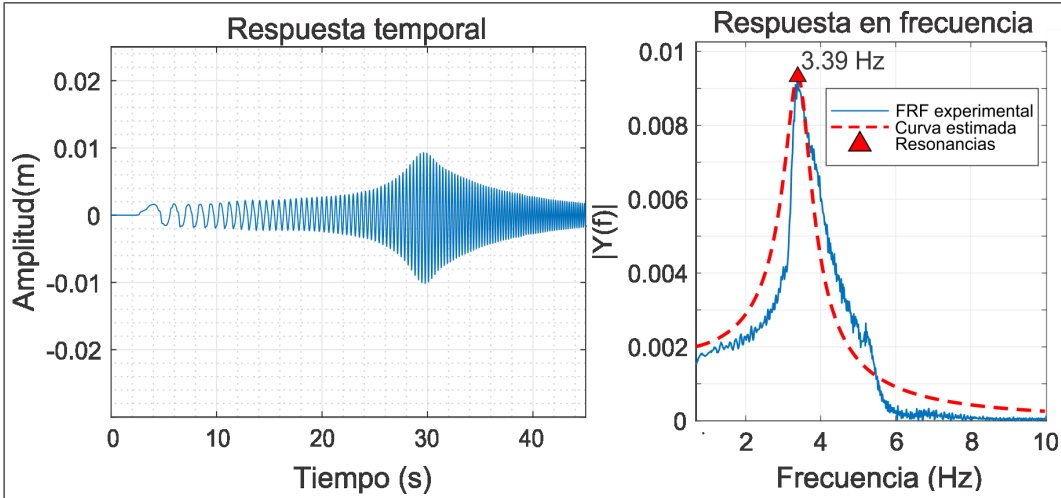


Figura 5.1: Barrido sinusoidal $F = 2,3175 \text{ N}$, $f = 0,1 \text{ Hz}$ a 5 Hz

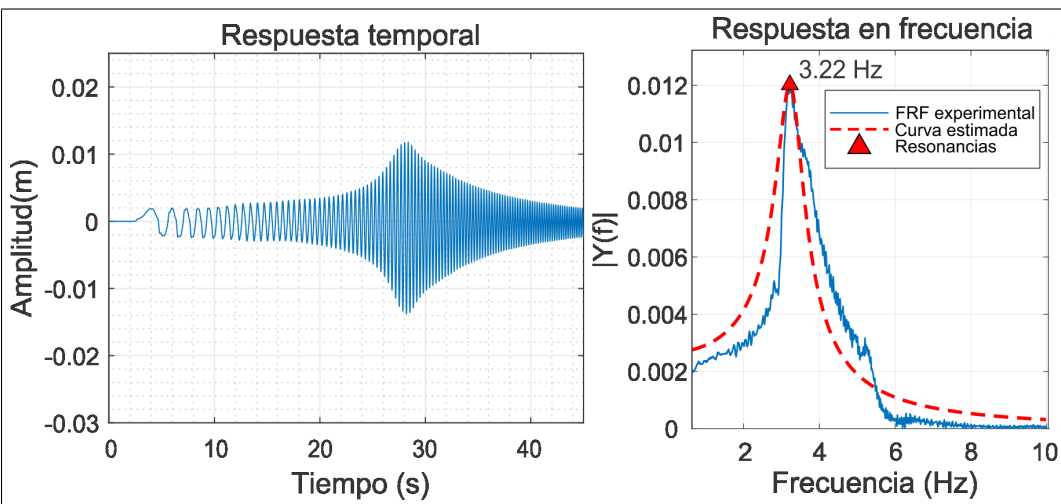


Figura 5.2: Barrido sinusoidal $F = 2,8325 \text{ N}$, $f = 0,1 \text{ Hz}$ a 5 Hz

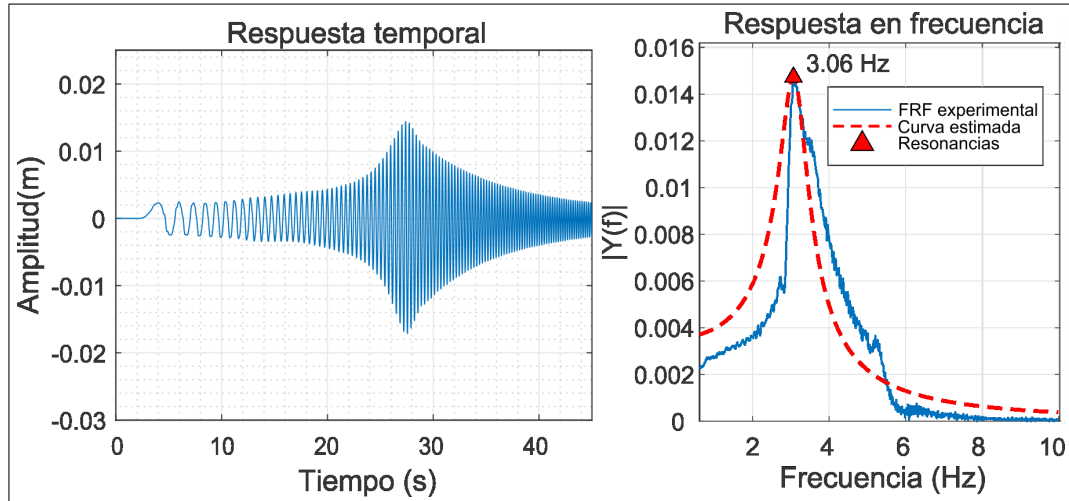


Figura 5.3: Barrido sinusoidal $F = 3,3475 \text{ N}$, $f = 0,1 \text{ Hz}$ a 5 Hz

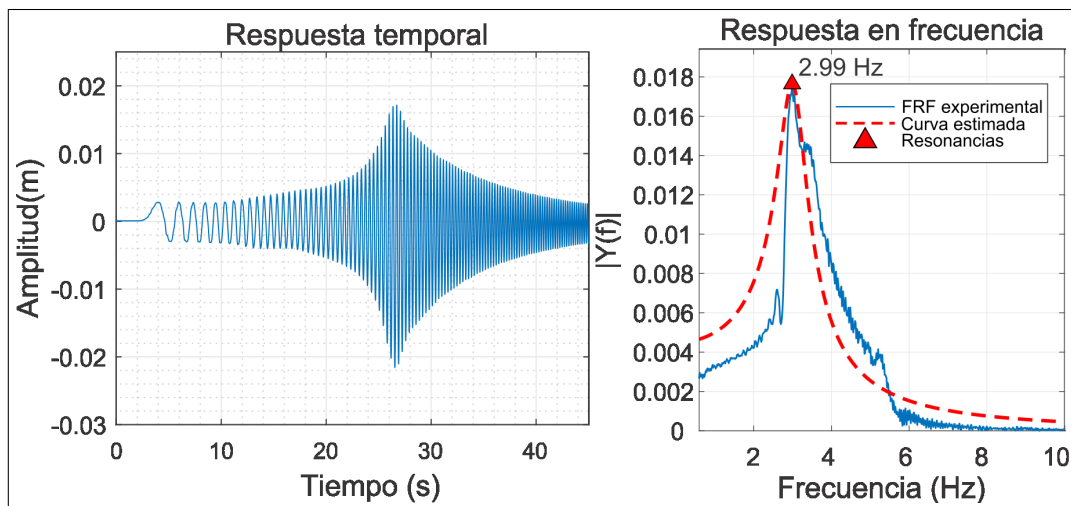


Figura 5.4: Barrido sinusoidal $F = 3,8625 \text{ N}$, $f = 0,1 \text{ Hz}$ a 5 Hz

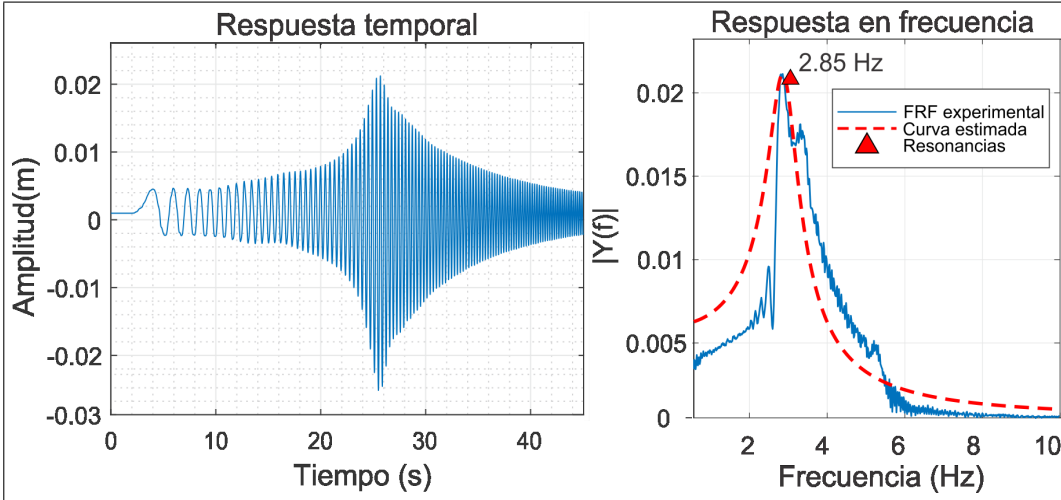


Figura 5.5: Barrido sinusoidal $F = 4,3775 \text{ N}$, $f = 0,1 \text{ Hz}$ a 5 Hz

sin embargo en conjunto reflejan el comportamiento no lineal del sistema, ya que para diferentes valores de amplitud, se produce una frecuencia natural amortiguada diferente como se muestra en la Fig. 5.6. La relación de amortiguamiento varía muy poco, en promedio tiene un valor de $\zeta = 0,123$.

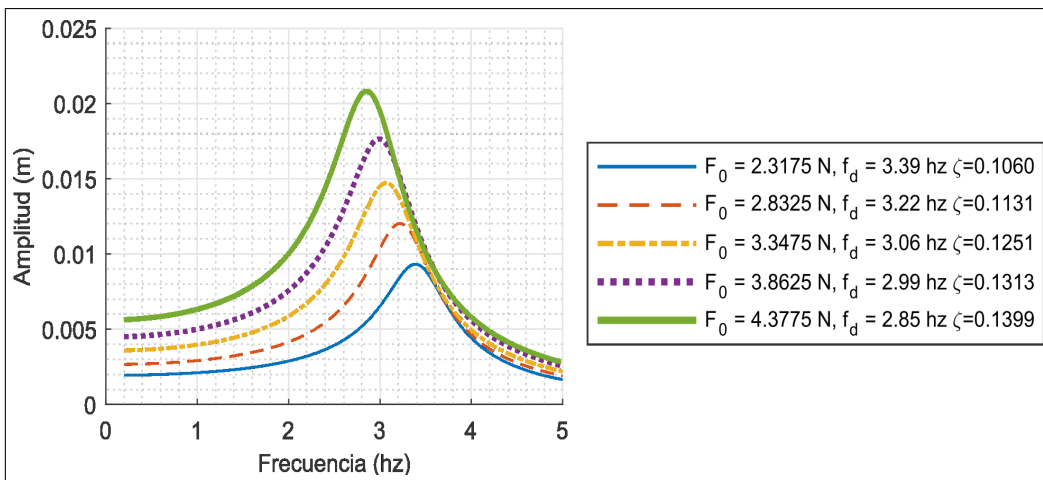


Figura 5.6: Conjunto de respuestas frecuenciales (Fuerzas de 2.3175 N a 4.3775 N, Barrido sinoidal de 1 hz a 5 hz).

5.1.2. Análisis de la respuesta en estado estacionario.

El análisis temporal experimental, se efectúa excitando al sistema con una fuerza tipo sinusoidal continua e ideal (la fuente de excitación no se ve afectada

por el sistema excitado), debido a que, en la formulación del problema se considera que la fuente de excitación es del tipo coseno, solo el ángulo de fase se desplaza $\frac{\pi}{2}$ (rad).

Se realizan dos pruebas, con el fin verificar de forma experimental los resultados obtenidos en simulación. La primera aplicando una fuerza de excitación con amplitud constante y frecuencia variable y la segunda con amplitud variable y frecuencia constante. Se busca obtener la respuesta estacionaria para determinar la amplitud en función de la frecuencia y la fuerza de excitación.

Amplitud fija y frecuencia variable

La amplitud implementada por la excitación coincide con la efectuada en el barrido sinusoidal correspondiente a la simulación obtenida en la Subsección 3.1.1 por lo tanto, $F_0 = 4,5775N$. Se realiza una serie de experimentos variando la frecuencia alrededor de la resonancia, en la búsqueda de múltiples respuestas en resonancia manteniendo una amplitud constante con frecuencias diferentes. Esto es difícil de obtener, ya que solo se presenta en la zona inestable en la que un pequeño cambio en las condiciones iniciales o parámetros del sistema, producen que el sistema se dirija a la parte estable de la respuesta produciendo el fenómeno de brinco en la amplitud del sistema.

En las Figs. 5.7 - 5.13 se muestra la respuesta experimental del sistema primario para diferentes valores de frecuencia de excitación. En la Tabla (5.1) se muestra los parámetros obtenidos experimentalmente: fuerza de excitación normalizada $f_0(m/s^2)$, frecuencia de excitación $\Omega(rad/s)$, parámetros de desajuste $\epsilon\sigma(rad/s)$, amplitud en estado estacionario a tensión $a_t(m)$, compresión $a_c(m)$ y amplitud en estado estacionario promedio $a_{prom}(m)$.

Tabla (5.1). Resultados experimentales con $F_0= 4,3775$ N y Ω variable

f_0 (m/s^2)	Ω (rad/s)	$\sigma(m/s^2)$	a_t (m)	a_c (m)	$a_{prom}(m)$
1,472	6,283	-12,810	0,003222	-0,00369	0,003456
1,472	9,424	-9,667	0,005254	-0,00452	0,004887
1,472	12,566	-6,525	0,00655	-0,006401	0,0064755
1,472	15,708	-3,384	0,0215	-0,02973	0,025615
1,472	18,850	-0,242	0,01369	-0,01626	0,014975
1,472	21,991	2,899	0,00835	-0,009744	0,009047
1,472	25,133	6,041	0,005578	-0,006343	0,0059605

En la Fig. 5.14 se muestra la comparación gráfica de la respuesta experimental contra la respuesta en simulación, ambas en estado estacionario. Dicha respuesta es función del parámetro de desajuste, el cual representa la frecuencia de excitación en las cercanías de la condición de resonancia.

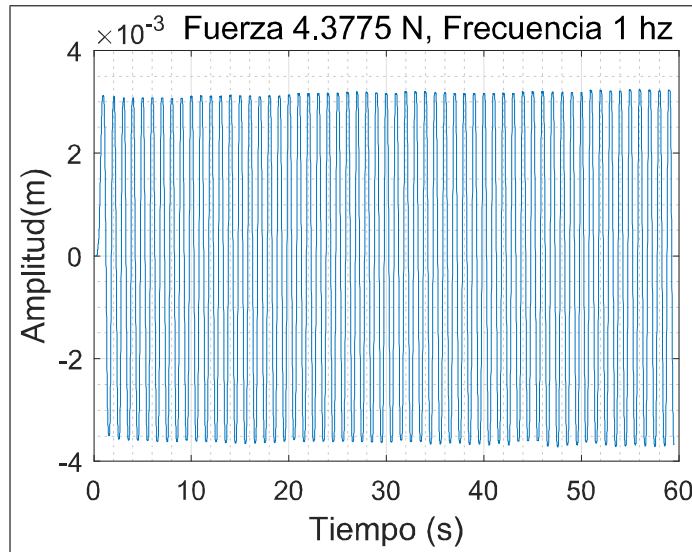


Figura 5.7: Respuesta temporal

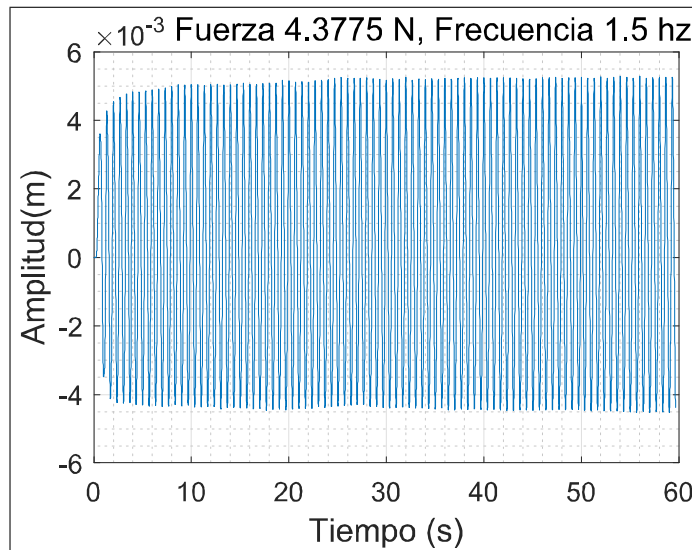


Figura 5.8: Respuesta temporal

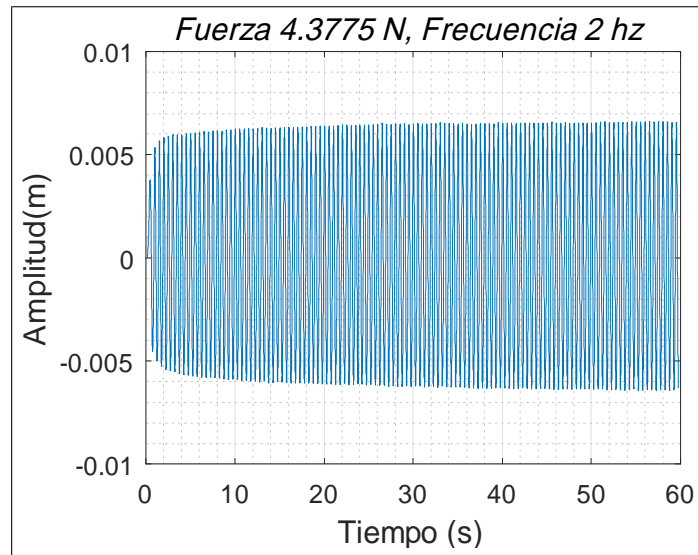


Figura 5.9: Respuesta temporal

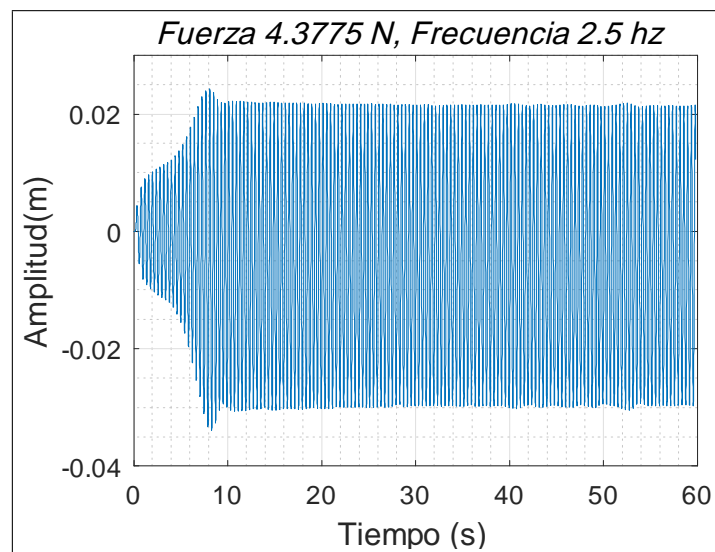


Figura 5.10: Respuesta temporal

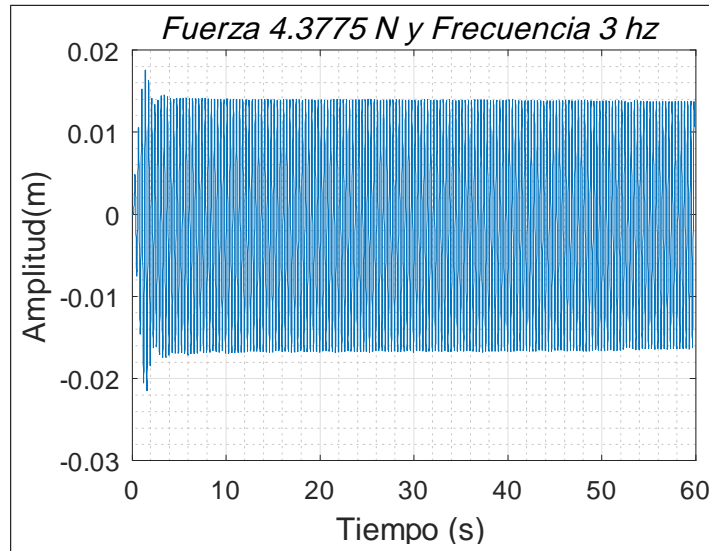


Figura 5.11: Respuesta temporal

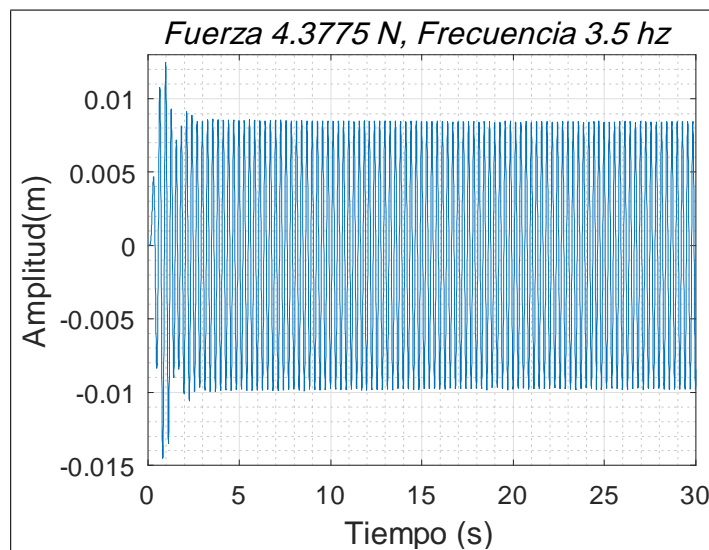


Figura 5.12: Respuesta temporal

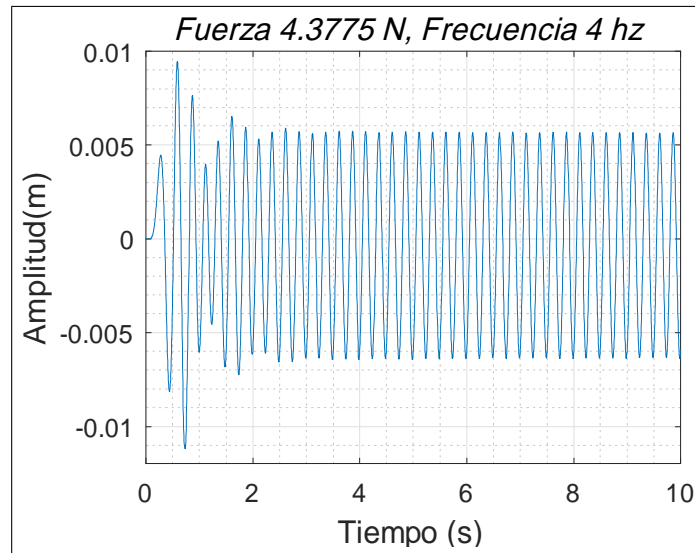
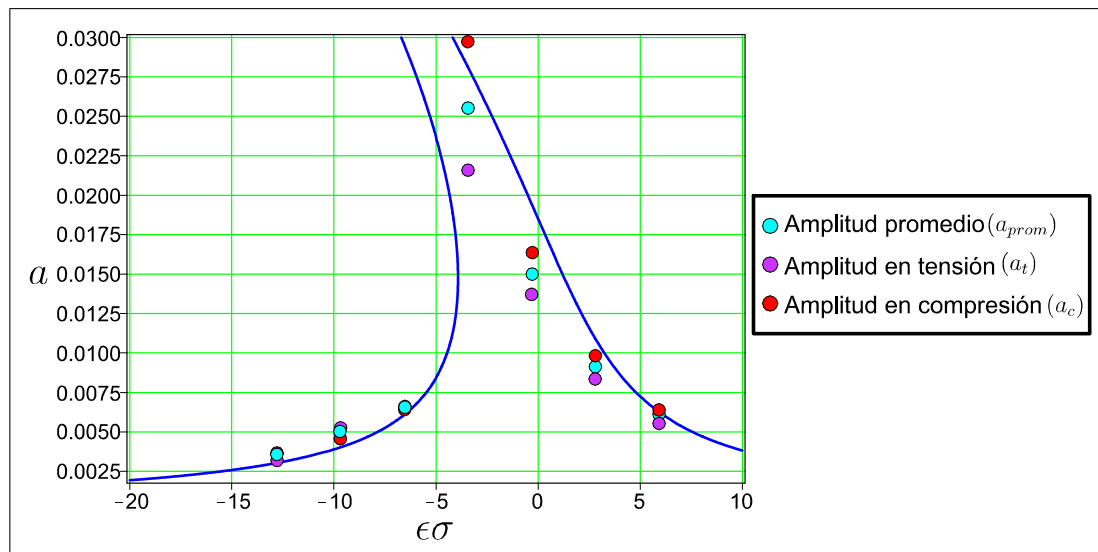


Figura 5.13: Respuesta temporal

Figura 5.14: Comparación de respuesta frecuencial $a(\epsilon\sigma)$ experimental contra respuesta en simulación para $f_0 = 1,472(m/s^2)$

Amplitud variable y frecuencia de excitación constante

La frecuencia implementada por la excitación coincide con la efectuada en el barrido sinusoidal correspondiente a la simulación obtenida en la Subsección 3.1.1, por lo tanto, $\Omega = 15,0708(rad/s)$. Se realiza una serie de experimentos variando la amplitud de fuerza, en la búsqueda de múltiples respuestas manteniendo una frecuencia constante. En las Figs. 5.15 - 5.24 se muestra la respuesta experimental del sistema primario para diferentes valores de amplitud de excitación.

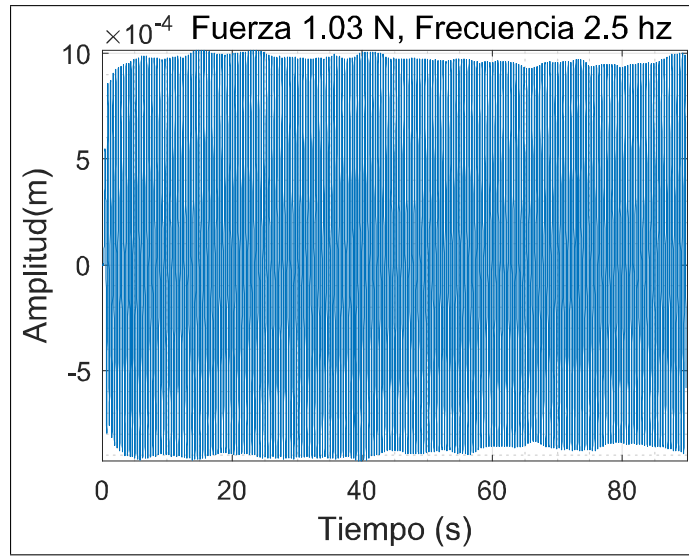


Figura 5.15: Respuesta temporal

En la Tabla (5.2) se muestra los parámetros del sistema fuerza de excitación normalizada, frecuencia de excitación $\Omega(rad/s)$, parámetros de desajuste $\epsilon\sigma(rad/s)$, fuerza de excitación normalizada $f_0(m/s^2)$, amplitud en estado estacionario a tensión $a_t(m)$, compresión $a_c(m)$ y amplitud en estado estacionario promedio $a_{prom}(m)$.

Tabla (5.2). Resultados experimentales con F_0 variable y $\Omega = 15,0708$

$\epsilon\sigma(rad/s)$	$F_0 (N)$	$f_0 (m/s^2)$	$a_t (m)$	$a_c (m)$	$a_{prom}(m)$
-3,38	1,03	0,380	0,0010	-0,0009	0,00950
-3,38	2,06	0,693	0,0032	-0,0029	0,00305
-3,38	2,575	0,866	0,0068	-0,0067	0,00675
-3,38	2,8325	0,952	0,0083	-0,0086	0,00845
-3,38	3,09	1,039	0,0085	-0,0090	0,00880
-3,38	3,3475	1,126	0,0192	-0,025	0,0221
-3,38	3,605	1,212	0,0200	-0,026	0,0230
-3,38	4,12	1,385	0,0205	-0,028	0,0243

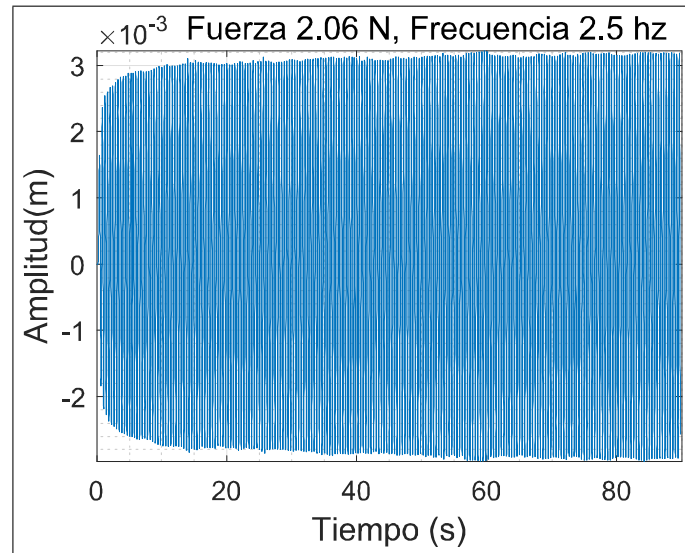


Figura 5.16: Respuesta temporal

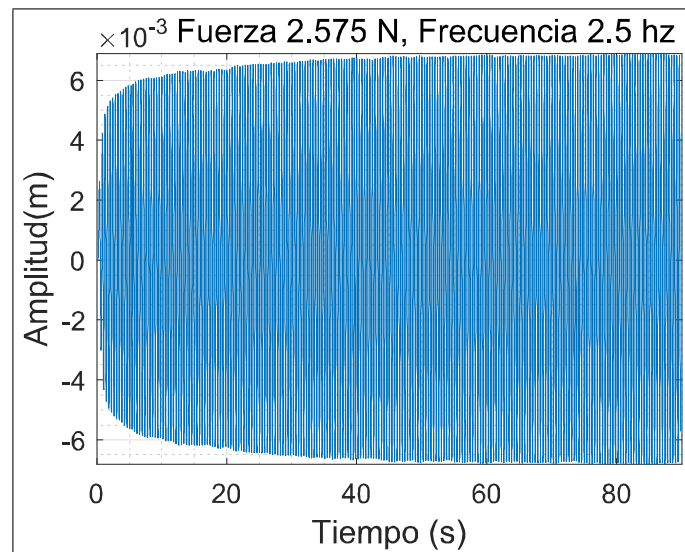


Figura 5.17: Respuesta temporal

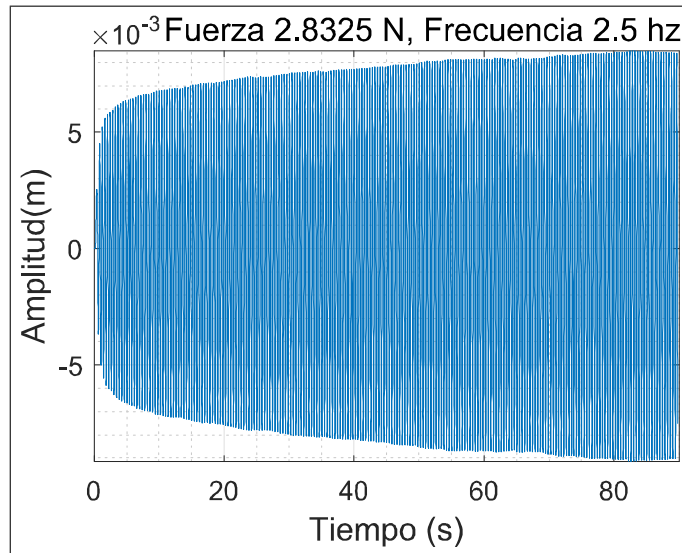


Figura 5.18: Respuesta temporal

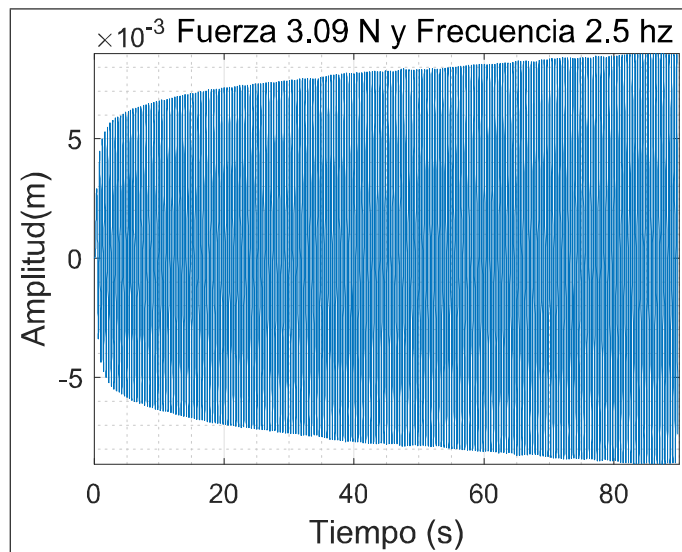


Figura 5.19: Respuesta temporal

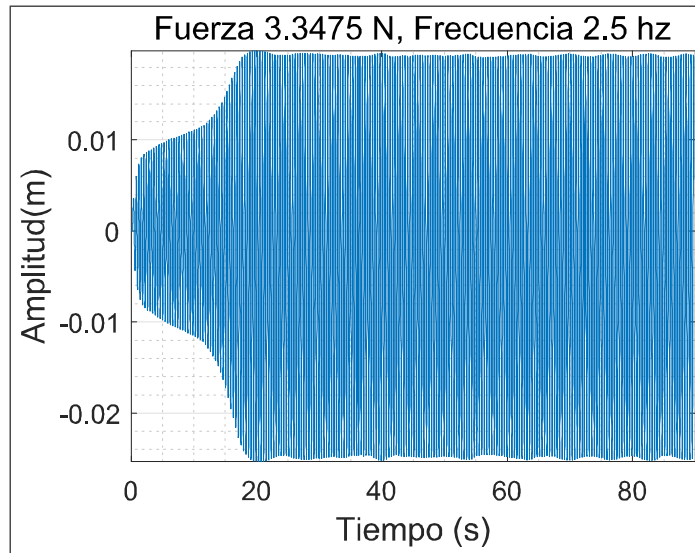


Figura 5.20: Respuesta temporal

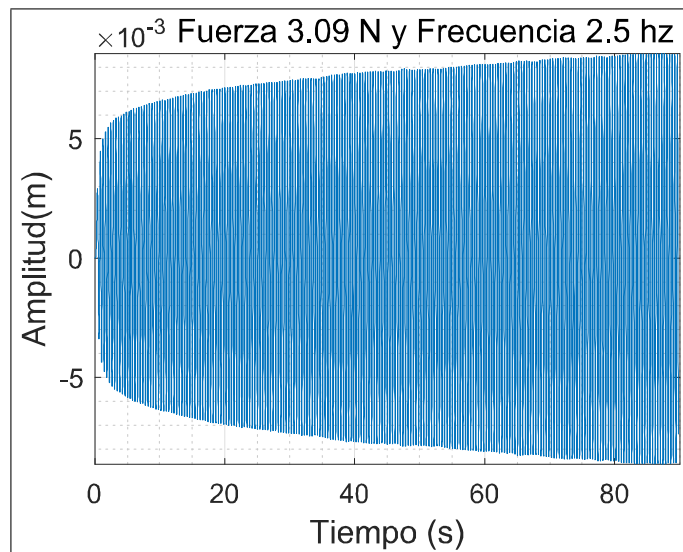


Figura 5.21: Respuesta temporal

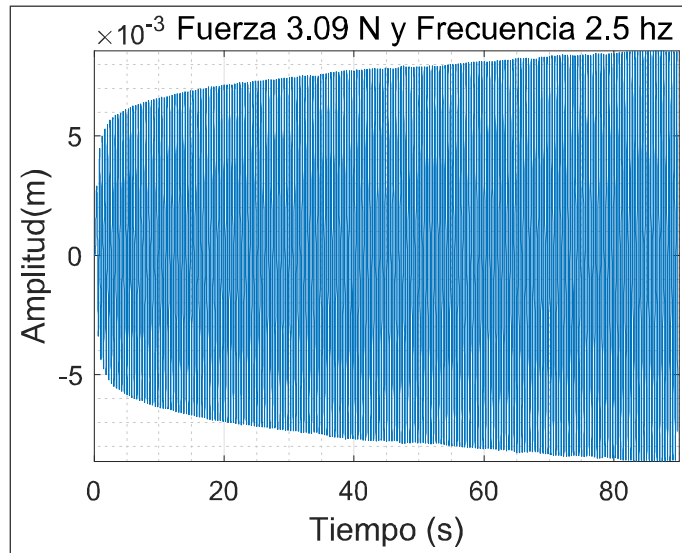


Figura 5.22: Respuesta temporal

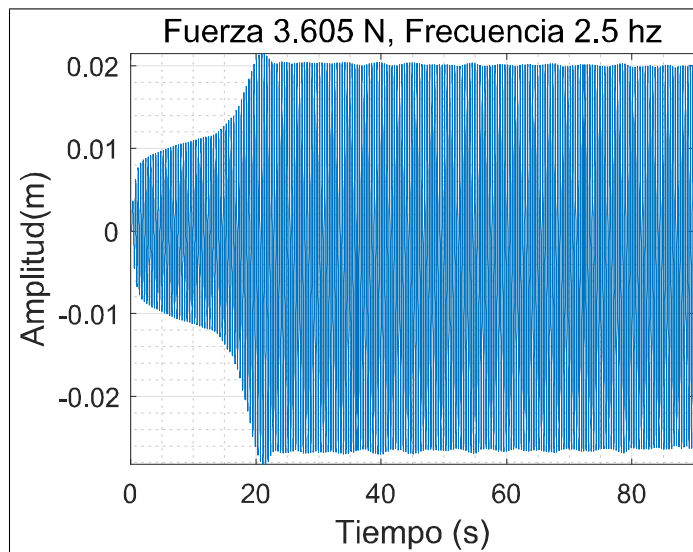


Figura 5.23: Respuesta temporal

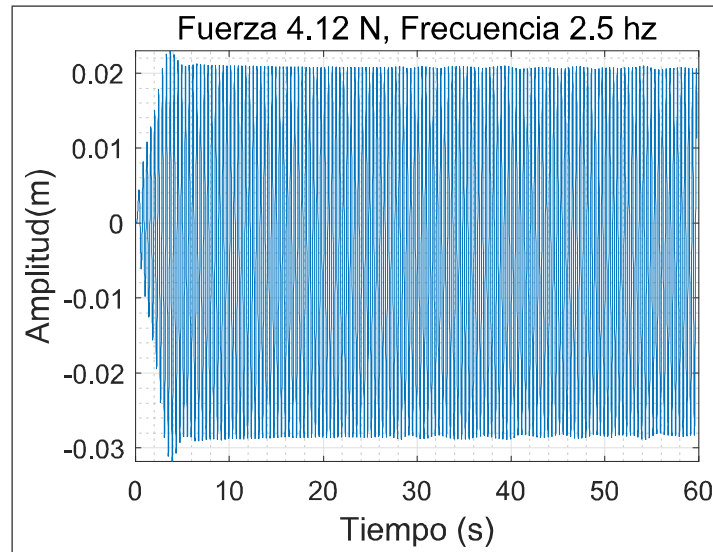


Figura 5.24: Respuesta temporal

En la Fig. 5.25 se muestra la comparación gráfica de la respuesta experimental contra la respuesta en simulación ambas en estado estacionario, en función de la amplitud de excitación normalizada respecto a la masa.

5.1.3. Discusión y comentarios

Las primeras pruebas consisten en la aplicación de una fuerza armónica sinusoidal, la cual es proporcionada por un servo motor con una transmisión tipo piñón cremallera que convierte el movimiento circular en un movimiento rectilíneo. Se colocan en el primer base móvil bloques de masa de latón de aproximadamente $0,500 \text{ kg} \pm 5 \%$. El barrido es efectuado en una banda de $0,1 \text{ Hz}$ a 14 Hz , para diferentes valores de fuerza.

La fuerza que se desea aplicar al sistema se introduce como voltaje, por lo tanto, se determina una relación fuerza-voltaje de tipo lineal, la cual es obtenida de forma experimental, empleando el método utilizado en [86], se obtiene la masa equivalente de la base móvil que se encuentra conectada al sistema de excitación, una vez determinada la masa equivalente, se aplica una excitación tipo escalón bidireccional con una duración pequeña y a un voltaje determinado, el programa donde se ejecuta la interfaz de usuario permite obtener de forma gráfica la velocidad de la respuesta del sistema, con la cual es posible determinar la aceleración desarrollada, conociendo dicha aceleración se puede determinar la fuerza aplicada, la cual se obtiene al aplicar el escalón a un voltaje deseado, finalmente es posible determinar una relación fuerza/voltaje la cual se considera que es lineal y tiene un valor de 5 (N/V) , se comprueba que la relación obtenida es correcta, ya que

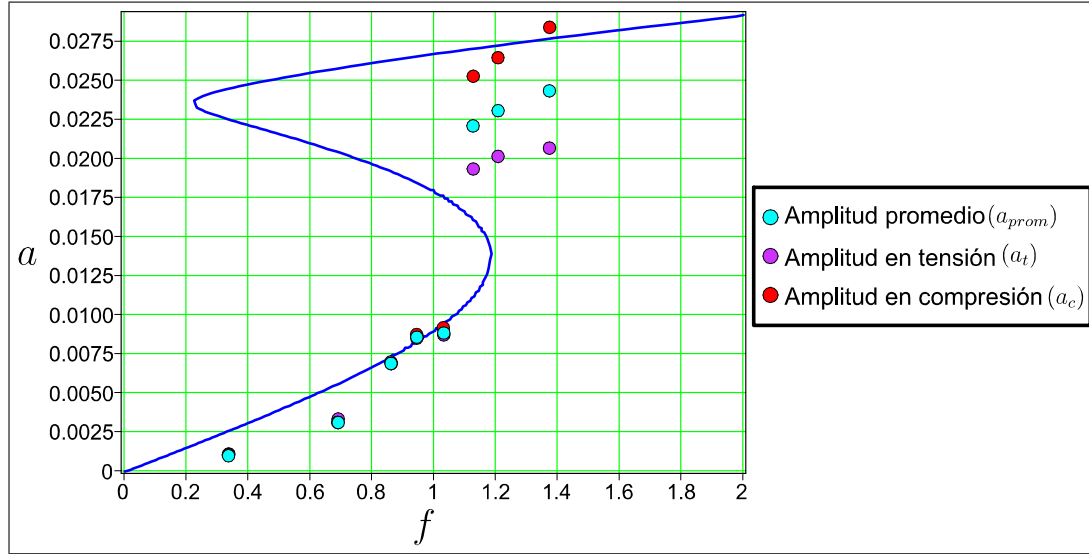


Figura 5.25: Comparación de respuesta $a(f)$ experimental contra respuesta en simulación para $\epsilon\sigma = -3,38$ (rad/s)

el manual de la plataforma determina dicha relación como el producto entre la ganancia del servo amplificador, la constante de torque del motor y el inverso del radio de paso del piñón del motor, (el valor de dichos parámetros se encuentran en el manual) obteniendo un valor de $5,3$ (N/V). Finalmente se promedia ambas relaciones y se considera una relación de $5,15$ (N/V).

Las funciones de rigidez de los resortes se aproximan como una función polinomial impar de tercer grado simétrica, de los datos experimentales se observa que el resorte a tensión se comporta de forma lineal y la no linealidad se presenta en compresión ya que para un cierto valor se requiere menor fuerza para producir una de formación igual en tensión. De lo cual se podría considerar que el resorte tiene una rigidez no simétrica, lo cual también se considera como un fenómeno no lineal.

En algunas frecuencias la respuesta temporal no llega al estado estacionario, por lo cual es posible que algunos puntos obtenidos en las gráficas de comparación no se ajusten a la simulación, ya que la respuesta simulada se considera en estado estacionario.

Una limitación que se tiene para obtener los puntos de amplitud máxima de la respuesta frecuencial es la necesidad de excitar al sistema desde una frecuencia mayor a una menor disminuyendo la poco a poco para obtener dichos valores. Lo cual no se puede lograr ya que la plataforma solo permite entregar valores de frecuencia crecientes y la cantidad de datos es limitada y por lo tanto no se puede obtener la información necesaria en un intervalo de tiempo largo.

5.2. Sistema primario tipo Duffing con absorbedor tipo Duffing

La respuesta frecuencial experimental en estado estable del sistema primario y el absorbedor se presenta en las Figs. 5.26 y 5.27. La obtención de la respuesta frecuencial se determina en base a pruebas con una fuerza de excitación sinusoidal de amplitud igual a $3,3475\text{ N}$ y una frecuencia diferente para cada una de estas en un rango de frecuencia de 2 Hz a $7,5\text{ Hz}$. La masa del sistema primario es $M_{eq1} = 2,4464\text{ kg}$ con una frecuencia natural $\omega_1 = 3,35\text{ Hz}$ y una masa equivalente del absorbedor $M_{eq2} = 0,836\text{ kg}$. En las Figs. 5.28 - 5.32 se muestran algunas de las respuestas en estado estacionario experimentales del sistema primario y el absorbedor.

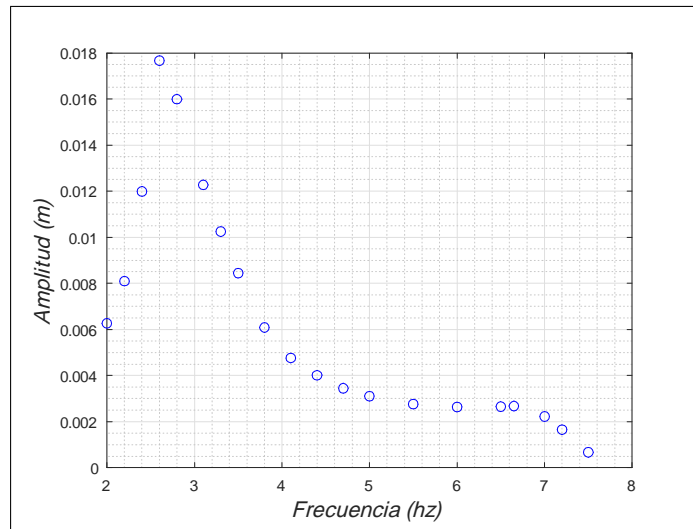


Figura 5.26: Respuesta frecuencial del absorbedor tipo Duffing

En la Fig. 5.37 se muestra la respuesta del sistema primario aplicando una fuerza de excitación igual a $3,3475\text{ N}$ con una frecuencia de excitación de $3,35\text{ Hz}$ en condición de resonancia primaria, sin acoplamiento del absorbedor y respuesta del sistema con absorbedor con la misma fuerza de excitación.

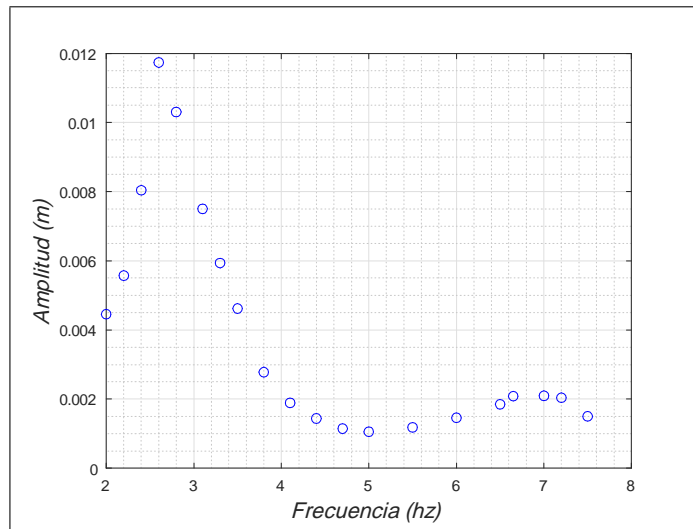


Figura 5.27: Respuesta frecuencial del sistema primario

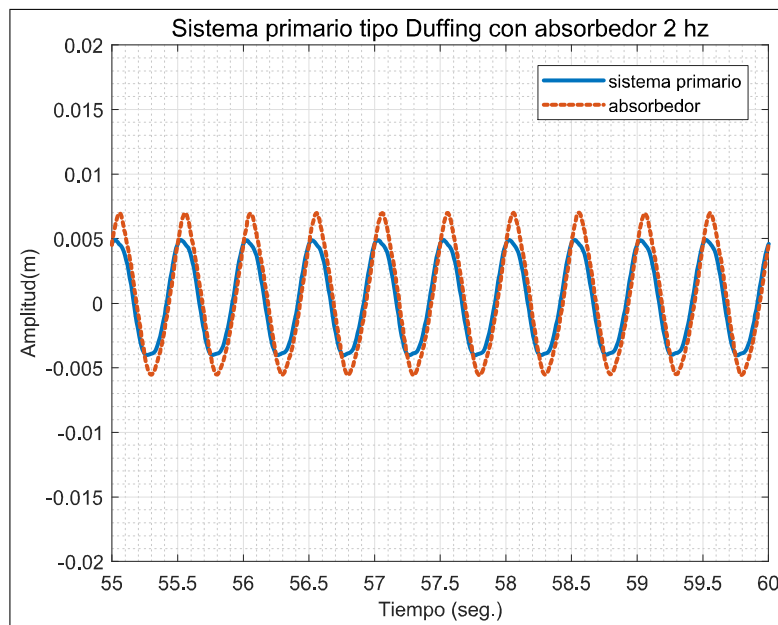


Figura 5.28: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

5.2. SISTEMA PRIMARIO TIPO DUFFING CON ABSORBEDOR TIPO DUFFING69

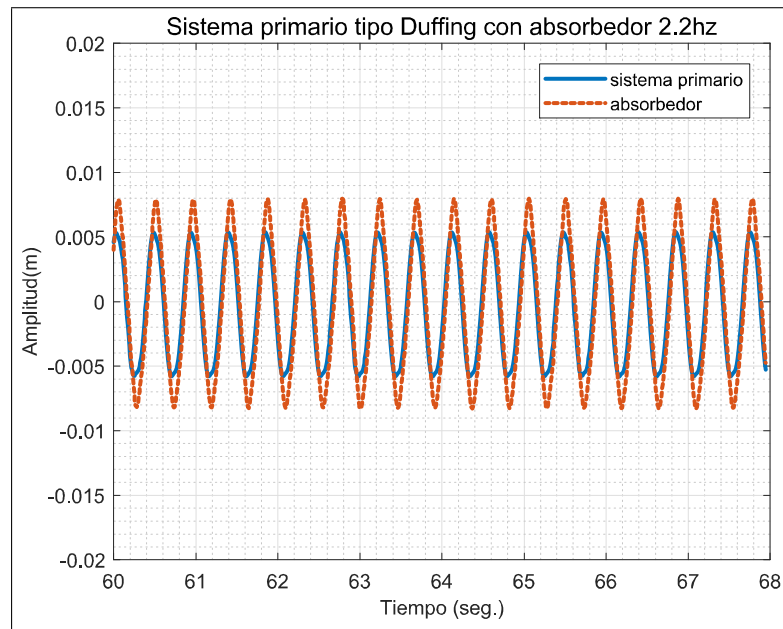


Figura 5.29: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

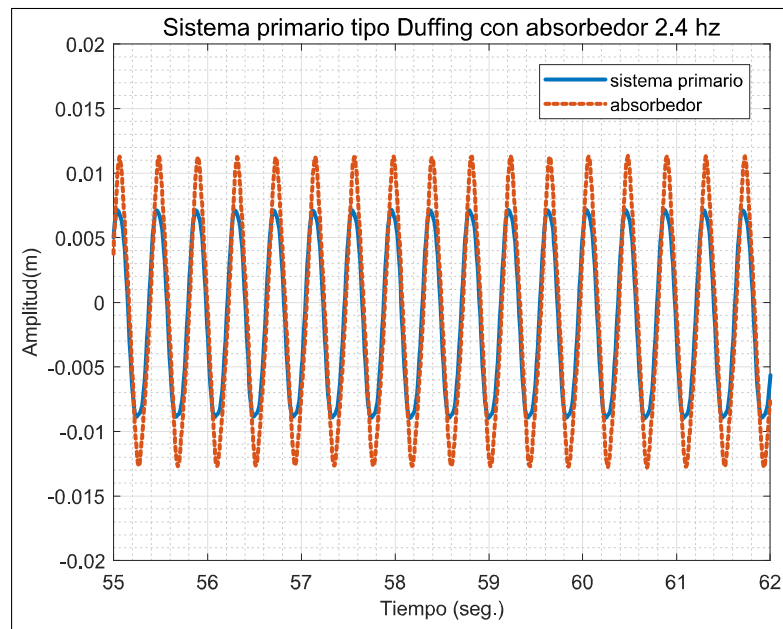


Figura 5.30: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

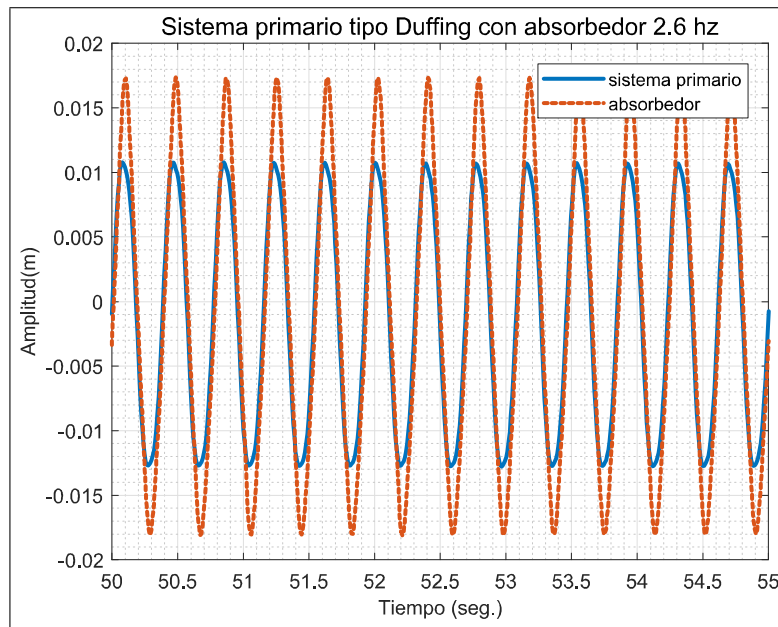


Figura 5.31: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

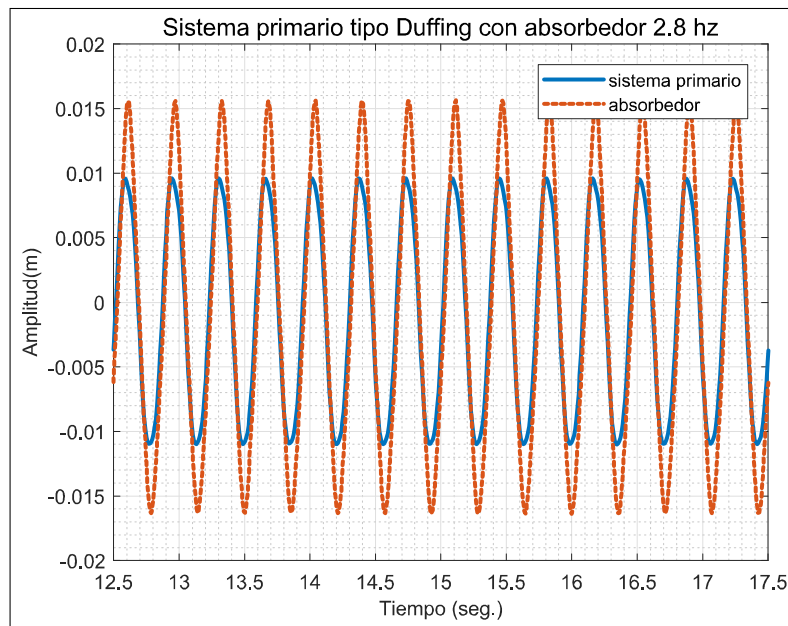


Figura 5.32: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

5.2. SISTEMA PRIMARIO TIPO DUFFING CON ABSORBEDOR TIPO DUFFING71

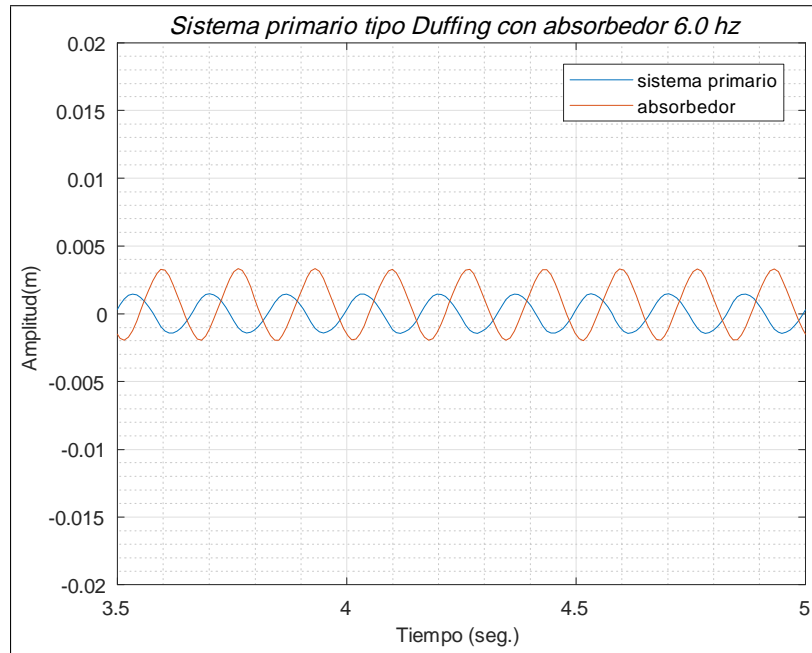


Figura 5.33: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

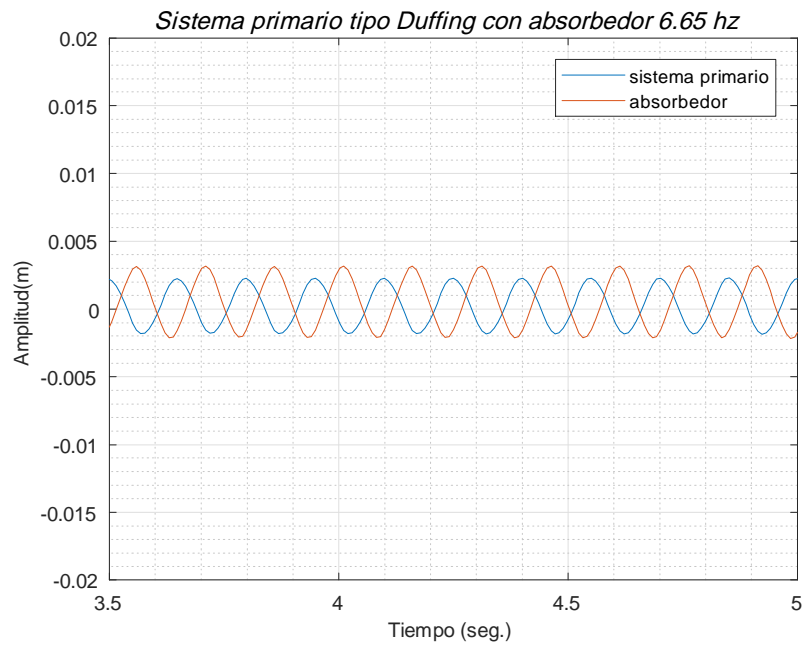


Figura 5.34: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

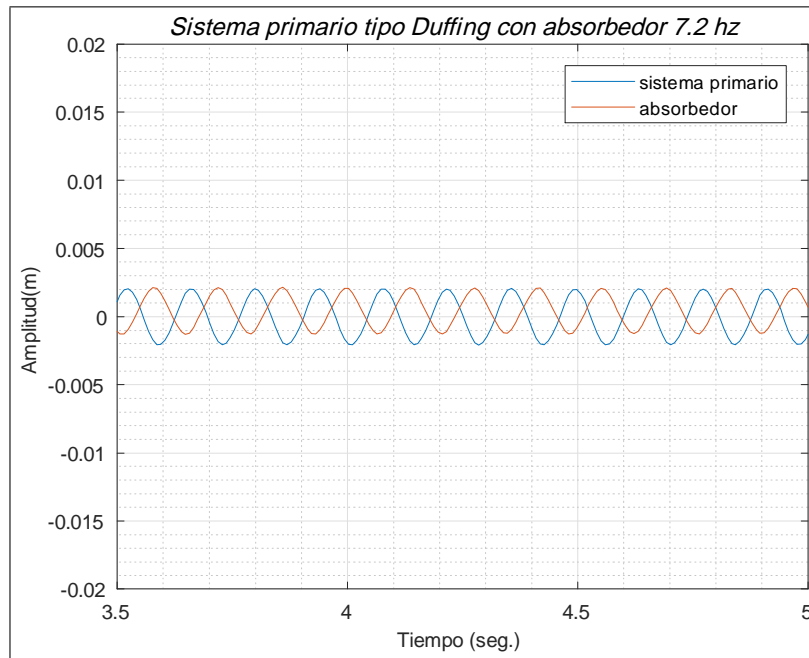


Figura 5.35: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

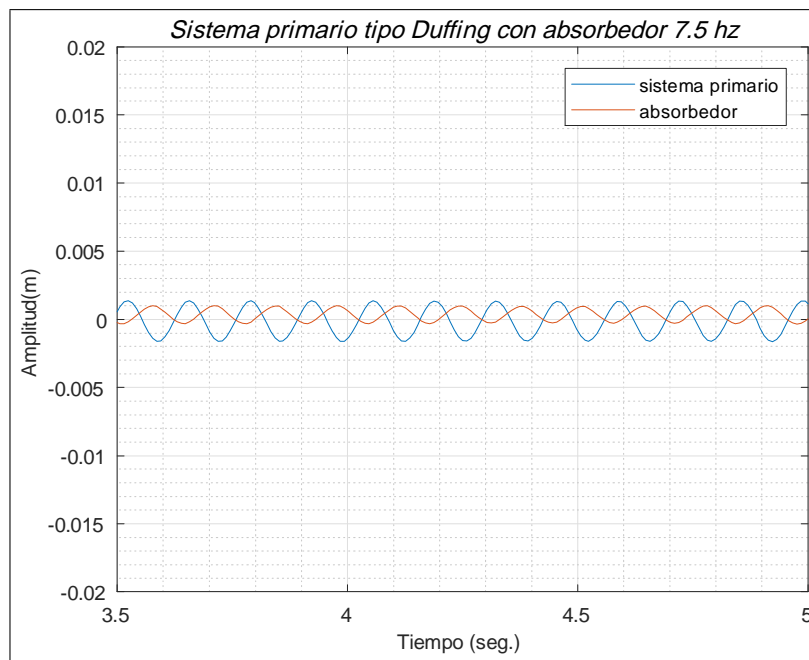


Figura 5.36: Respuesta temporal en estado estacionario de sistema con absorbedor

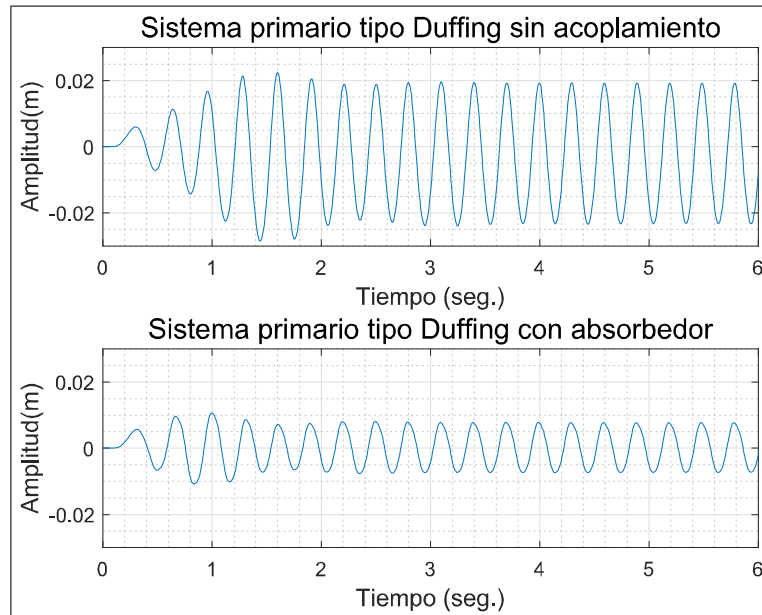


Figura 5.37: Respuesta del sistema primario con y sin absorbedor

5.2.1. Discusión y comentarios

En las respuesta experimental se puede observar que al conectar el absorbedor tipo Duffing al sistema primario se produce una reducción de la amplitud de vibración del sistema primario para una valor de frecuencia cercano a la frecuencia natural lineal, y la mayor parte de la energía se dirige al absorbedor, pero aparece otra frecuencia de resonancia natural debido a que el sistema aumenta un grado de libertad, en la primer frecuencia natural se observa un modo en fase y en la segunda un modo en contra fase. En el primer modo, se observa que las amplitudes en ambas masas son mayores con respecto al segundo modo. En el primer modo la energía es mayor en el absorbedor en comparación con la del sistema primario. En el segundo modo, la energía es mayor en el sistema primario, pero las amplitudes son mucho menores que en el primer modo, lo cual indica la presencia amortiguamiento mayor.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones generales

Los fenómenos que se presentan en sistemas no lineales son interesantes y representan un área importante de investigación en la búsqueda de aplicar los beneficios que estos pueden ofrecer en áreas de la ciencia e ingeniería. Una de las áreas de aplicación en la mecánica es la absorción de vibraciones de forma pasiva en sistemas dinámicos, esto se logra gracias a la localización de la energía (se concentra la energía en un punto de interés) eliminando los efectos no deseados y dirigiendo a otro elemento diseñado para absorber o drenar dicha energía.

La absorción se puede lograr en sistemas lineales agregando un segundo grado de libertad al sistema, con la premisa de que el sistema se encontrara excitado a una velocidad (frecuencia) constante, ya que el segundo grado de libertad se sintoniza a una frecuencia particular y la absorción es efectiva en un ancho de banda angosto de frecuencias. Una de las ventajas que presenta un absorbedor no lineal sobre el absorbedor lineal es que puede incrementar al ancho de banda de absorción.

Además, en los sistemas no lineales de varios grados de libertad es posible encontrar fenómenos sin analogía a los sistemas no lineales como son las resonancias internas, las cuales están estrechamente relacionadas con el orden la no linealidad. Los absorbedores autoparamétricos explotan este fenómeno bajo condición de resonancia externa, resonancia interna y un acoplamiento no lineal que rompa la simetría del sistema, estos generan un intercambio de energía entre los dos subsistemas debido a excitaciones paramétricas. Los acoplamientos pueden ser dinámicos o estáticos, esto quiere decir que se pueden generar por un comportamiento no lineal debido a la interacción de inercias, de amortiguamiento o de la rigidez entre subsistemas.

Los sistemas con rigidez cúbica (sistemas tipo Duffing) ofrecen la posibilidad de estudiar dichos fenómenos debido al acoplamiento estático de rigidez, ya que este proporciona una ruptura en la simetría a niveles de energía altos.

La principal razón de los fenómenos como, resonancias internas, caos, saltos

en la respuesta, bifurcaciones de Hopf entre otras, es la dependencia frecuencia-energía presente en sistemas no lineales.

Un tema que surgió a principios de este siglo son los drenajes de energía no lineales, estos consisten en sistemas con no linealidades elementales (esenciales), esto quiere decir que son sistemas que se pueden linealizar, con lo cual no existe una frecuencia natural lineal preferencial y esto permite una transferencia de energía sin necesidad de resonancias internas o desde otro punto de vista, existe una gran cantidad de resonancias internas las cuales son inconmensurables (no tiene que existir un número real racional que relacione los modos involucrados).

Además, los drenajes de energía no lineal pueden extraer energía desde el inicio de la respuesta transitoria, sin necesidad de una frecuencia de respuesta constante (respuesta en estado estacionario). De lo anterior los drenajes de energía ofrecen una gran ventaja sobre los absorbedores no lineales y lineales, al poder emplearse en sistemas excitados por fuerzas de choque e impacto.

La principal de las dificultades de los drenajes de energía no lineal radica en la necesidad de una no linealidad elemental, lo cual no es fácil de lograr.

6.2. Conclusiones particulares

En este trabajo se abordó como objeto de estudio los sistemas con rigidez cúbica, partiendo del análisis y experimentación de un sistema con un GDL y posteriormente con el fin de absorber las vibraciones se experimentó con un sistema de dos grados de libertad ambos con rigidez cúbica.

Como primer paso se aproximó la función de rigidez de los resortes no lineales empleados en el estudio, la función obtenida es una aproximación polinomial impar de tercer orden, pero esta no puede considerarse como una no linealidad esencial ya que cuenta con el termino proporcional a la deformación. De lo anterior se puede concluir que no fue posible obtener experimentalmente los fenómenos presentes en un drenaje de energía. Pero si fue posible analizar y realizar pruebas experimentales referente a un absorbedor no lineal.

Para el sistema de un grado de libertad se obtuvo la solución aproximada utilizando el método de escalas múltiples. Una vez que se determinó los parámetros de la plataforma experimental (masa equivalente, relación de amortiguamiento y la relación fuerza voltaje), se realizó la simulación de la respuesta frecuencial en estado estable del sistema y se comparó con la respuesta experimental correspondiente.

De la comparación de la respuesta frecuencial se puede observar que algunas respuestas no alcanzan el estado estacionario durante el experimento y la amplitud mantiene un incremento pequeño, este inconveniente de igual forma se observó en las pruebas con frecuencia de excitación constante para diferentes amplitudes de fuerza. Otro fenómeno no lineal que se detectó en las pruebas experimentales fue el brinco en la respuesta frecuencial. No fue posible obtener las amplitudes máximas

obtenidas en la respuesta simulada ya que es necesario un recorrido lento de la frecuencia de excitación de forma descendente.

Referente al sistema con absorbedor no lineal tipo Duffing solo se realizaron pruebas experimentales, seleccionando una amplitud de excitación fija para diferentes valores de frecuencia. Se observó una reducción en la amplitud de vibración en el sistema primario para un valor de frecuencia natural cercano a la frecuencia natural lineal, y la mayor parte de la energía se dirige al absorbedor, pero aparece otra frecuencia de resonancia natural debido a que el sistema aumenta un grado de libertad, en la frecuencia natural primera se observa un modo en fase y en la segunda un modo en contra fase. En el primer modo, se observa que las amplitudes en ambas masas son mayores con respecto al segundo modo. En el primer modo la energía es mayor en el absorbedor en comparación con la del sistema primario. En el segundo modo, la energía es mayor en el sistema primario, pero las amplitudes son mucho menores que en el primer modo, lo cual indica la presencia amortiguamiento mayor.

6.3. Trabajo futuro

- Diseño y aplicación de una estrategia de control de fuerza (control PI, control GPI, control de impedancia) sobre un generador electromagnético de vibraciones o cualquier otro dispositivo electromecánico, con el fin de aplicar fuerzas armónicas con la cual se pueda controlar la amplitud, frecuencia y fase de excitación con el fin de producir las condiciones necesaria para obtener las respuesta frecuencial no lineal calculada.
- Diseño y desarrollo de una plataforma rectilínea que permita mayor desplazamiento con el fin de aplicar mayor energía al sistema. Diseño que proporcione una mayor carga con un mayor rango de ajuste para sintonizar resonancias internas entre los modos del sistema.
- Realizar el análisis de estabilidad para el sistema primario tipo Duffing con y sin absorbedor de vibraciones con no linealidades cúbicas.
- Obtener la respuesta en simulación del sistema de dos grados de libertad por medio del método de escalas múltiples.
- Diseño de un dispositivo elástico con función de rigidez no lineal elemental para abordar de forma experimental los NES
- Investigar y validar el uso de control activo de saturación, para reducir las vibraciones sobre un sistema de interés, induciendo un comportamiento no lineal elemental en el sistema que permita realizar la absorción de energía.

- Desarrollar un algoritmo computacional que determine la solución numérica de los modos normales no lineales o en su defecto adquirir un programa dedicado al cálculo de estos.
- Estudio, investigación y validar el uso de drenajes de energía en choques e impacto.
- Investigar y validar el uso de drenajes de energía y absorbedores de vibración en conjunto con cosechadores de energía.

Bibliografía

- [1] P. Watts, On a method of reducing the rolling of ships at sea, *Transactions of the Institution of Naval Architects*, 24, 165-90, 1883.
- [2] H. Frahm, Device for damping vibrations of bodies, *U.S. Patent* No. 989958, 1909.
- [3] J. Ormondroyd and J. P. Den Hartog, The theory of the dynamic vibration absorber, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 50, A9-A22, 1928.
- [4] J.P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, NY, 1934
- [5] R. E. Roberson, Synthesis of a non-linear dynamic vibration absorber, *Journal of the Franklin Institute*, 254, 205-220, 1952.
- [6] L . A . Pipes, Analysis of a non-linear dynamic vibration absorber, *Journal of Applied Mechanics*, 20, 515-518, 1953.
- [7] F. R. Arnold, Steady-state behaviour of systems provided with non-linear dynamic vibration absorbers, *Journal of Applied Mechanics*, 22, 487-492, 1955.
- [8] S. F. Masri, Forced vibration of a class of non-linear two degree-of-freedom oscillators, *International Journal of Non-linear Mechanics*, 7, 663, 1972.
- [9] Z. Dabrowski, Effect of simultaneous action of two periodic exciting forces on a certain non-linear system with two degrees of freedom, *Prace Instytut Podstaw Budowy Maszyn Politech Warszawa*, No. 8, p. 11, 1975.
- [10] H. M. Miller and J. R. Gartner, Tunable non-linear vibration absorber, *American Society of Mechanical Engineers*, Paper No. 75-DET-9, 1975.
- [11] J. B. Hunt and J. C. Nissen, The broadband dynamic vibration absorber, *Journal of Sound and Vibration*, 83(4), 573-578, 1982.
- [12] S. S. Oueini, A. H. Nayfeh, and J. R. Pratt, A nonlinear vibration absorber for flexible structures, *Nonlinear Dynamics*, 15: 259–282, 1998.

- [13] P. F. Pai, B. Rommel y M. J. Schulz, *Journal of Sound and Vibration*, 234(5), 799-817, 2000.
- [14] F. Beltrán-Carbajal , G. Silva-Navarro, Active vibration control in Duffing mechanical systems using dynamic vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 333, 3019–3030, 2014.
- [15] G. Silva-Navarro, H.F. Abundis-Fong, B. Vázquez-González. Design of a Passive/Active Autoparametric Cantilever Beam Absorber with PZT Actuator for Duffing Systems. *Proceedings of the 2011 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE2011)*, Mérida, Yucatán, México. October 26-28, 2011.
- [16] G. Silva-Navarro, B. Vazquez-Gonzalez and L. Macias-Cundapi, An active pendulum-type vibration absorber for Duffing systems, *Proceedings of the 15th International Congress on Sound and Vibration*, 2008.
- [17] B. Balachandran, *Vibraciones*, Thomson, 2004
- [18] M.P. Cartmell, The equations of motion for a parametrically excited cantilever beam, *Journal of Sound an Vibration*, Vol. 143, No.3, pp. 395-406, 1990.
- [19] M.P. Cartmell, J. Lawson, Performance enhancement of an autoparametric vibration absorber, *Journal of Sound an Vibration*, Vol.177, No. 2, pp. 173-195, 1994.
- [20] M.P. Cartmell, *Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations*. Chapman and Hall, London, 1990.
- [21] A. F. Vakakis, L.I. Manevitchc, O. Gendelman and L. Bergman Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 264, 559–577, 2003.
- [22] Panagiotis N. Panagopoulos, Alexander F. Vakakis and Stylianos Tsakirtzis, Transient resonant interactions of finite linear chains with essentially nonlinear end attachments leading to passive energy pumping, *International Journal of Solids and Structures*, 41 6505–6528, 2004.
- [23] Young Sup Lee, Gaetan Kerschen, Alexander F. Vakakis, Panagiotis Panagopoulos, Lawrence Bergman, D. Michael McFarland, Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment, *Physica D*, 204, 41–69, 2005.
- [24] F. Georgiades and A. F. Vakakis, Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12, 643–651, 2007.

- [25] R. Viguie, G. Kerschen, Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: A tuning methodology, *Journal of Sound and Vibration*, 326, 780–793, 2009.
- [26] R. Viguie, G. Kerschen, J.-C. Golinval, D.M. McFarland, L.A. Bergmanb, A.F. Vakakis, N. van de Wouw, Using passive nonlinear targeted energy transfer to stabilize drill-string systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 148–169, 2009.
- [27] Z. Nili Ahmadabadi, S.E. Khadem, Nonlinear vibration control and energy harvesting of a beam using a nonlinear energy sink and a piezoelectric device, *Journal of Sound and Vibration*, 333, 4444–4457, 2014.
- [28] M. Parseh, M. Dardel, M. H. Ghasemi, Investigating the robustness of nonlinear energy sink in steady state dynamics of linear beams with different boundary conditions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 29, 50–71, 2015.
- [29] Javad Taghipour, Morteza Dardel, Steady state dynamics and robustness of a harmonically excited essentially nonlinear oscillator coupled with a two-DOF nonlinear energy sink, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 62-63, 164–182, 2015.
- [30] Ye-Wei Zhang, Hao Zhang, Shuai Hou, Ke-Fan Xu, Li-Qun Chen, Vibration suppression of composite laminated plate with nonlinear energy sink, *Acta Astronautica*, 123 109–115, 2016.
- [31] Nicholas E. Wierschem, Sean A. Hubbard, Jie Luo, Larry A. Fahnestock, Billie F. Spencer, Jr., D. Michael McFarland, D. Dane Quinn, Alexander F. Vakakis, Lawrence A. Bergman, Response attenuation in a large-scale structure subjected to blast excitation utilizing a system of essentially nonlinear vibration absorbers, *Journal of Sound and Vibration* 389 52–72, 2017.
- [32] B. Bergeot, S. Bellizzi and B. Cochelin, Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades, *Journal of Sound and Vibration*, 392, 41–55, 2017.
- [33] C.W. De Silva, *Vibration: Fundamentals and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2000.
- [34] C.W. De Silva, *Vibration and Shock Handbook*. Taylor & Francis, Boca Raton, FL, 2005.
- [35] A. D. Dimarogonas, *Vibration for Engineers*, Prentice Hall, 2a ed., New York, 1995.
- [36] C. M. Harris, *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill, NY, 1996

- [37] D. Ewins, S. S. Rao and S. Braun. *Encyclopedia of Vibration*, Three-Volume Set. Academic Press, 2002.
- [38] H. Hatwal, A.K. Mallik and A. Ghosh, Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system– Parts 1 and 2, *Journal of Applied Mechanics*, 50, pp. 657-662 and pp. 663-668, 1983.
- [39] R.S. Haxton, A. D. S. Barr, The autoparametric vibration absorber. *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 94, No.1, pp. 119-124, 1972.
- [40] D.J. Inman, *Vibration with Control*. John Wiley & Sons, Ltd. Academic Press, England, 2006.
- [41] J. Kevorkian and J.D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer-Verlag, NY, 1996.
- [42] B.G. Korenev and L.M. Reznikov, *Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications*. John Wiley & Sons, London, 1993.
- [43] L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, Mc Graw Hill, NY, 1986.
- [44] N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations*, Van Nostrand, Princeton, 1962.
- [45] J.A. Murdock, *Perturbations: Theory and Methods*, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1991.
- [46] A.H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc., NY, 2008.
- [47] A.H. Nayfeh and D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, NY, 1995.
- [48] R.L. Norton, *Diseño de Máquinas*. Prentice Hall, México, 1999.
- [49] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*. 4^a edición, Prentice Hall, México, 2003.
- [50] A. Preumont, *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [51] S. S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley, 3rd edition, NY, 1995.
- [52] W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, 2nd Edition, Prentice Hall, 1981.
- [53] J.W. Roberts, Random excitation of a vibratory system with autoparametric interaction, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No.1, pp. 101-116, 1980.
- [54] G. Silva-Navarro, *Notas del Curso de Mecánica Computacional*, Sección de Mecatrónica, CINVESTAV, Ciudad de México, México, 2010.

- [55] G. Silva-Navarro, L. Macias-Cundapi and B. Vazquez-Gonzalez, Design of a Passive/Active Autoparametric Pendulum Absorber for Damped Duffing Systems. In: *New Trends in Electrical Engineering, Automatic Control, Computing and Communication Science*, Edited by C.A. Coello, A. Pozniak, J.A. Moreno and V. Azhmyakov, pp. 159-175, Logos Verlag Berlin GmbH, Germany, 2010.
- [56] A. Tondl, T. Ruijgrok, F. Verhulst and R. Nabergoj, *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [57] L.G. Trujillo-Franco, *Evaluación experimental de técnicas de identificación de parámetros modales en sistemas mecánicos*. Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica), Sección de Mecatrónica, CINVESTAV, Ciudad de México, México, 2011.
- [58] B. Vázquez-Gonzalez and G. Silva-Navarro, Evaluation of the autoparametric pendulum vibration absorber for a Duffing system. *Shock and Vibration*, Vol. 15, No. 3-4, 355-368, 2008.
- [59] B. Vázquez-Gonzalez y G. Silva-Navarro, Diseño y construcción de un absorbedor de vibraciones mecánicas tipo pendular. *Revista Internacional de Información Tecnológica*, Vol. 14, No. 6, pp. 41-46, Chile, Noviembre-Diciembre, 2003.
- [60] B. Vázquez-Gonzalez and G. Silva-Navarro, The pendulum vibration absorber for the nonlinear primary Duffing system, *Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13)*, pp. 1-8, July 2-6, 2006, Vienna, Austria.
- [61] B. Vázquez-González, Atenuación de vibraciones en sistemas mecánicos utilizando absorbedores pasivos y activos. Tesis de Doctorado en Ciencias en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica (Mecatrónica), Sección de Mecatrónica, CINVESTAV, Ciudad de México, México, Noviembre 2001.
- [62] W. Zhang, R. Baskaran and K.L. Turner, Nonlinear behavior of a parametric resonance-based mass sensor, *Proceedings of IMECE2002, ASME. International Mechanical Engineering Congress & Exposition*, pp. 1-5, New Orleans, 2002.
- [63] J. Guckenheimer, P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, NY, 1983.
- [64] A. H. Nayfeh, *Nonlinear Interactions: Analytical, Computational and Experimental Methods*, Wiley Interscience, NY, 2000.

- [65] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk and A. A. Zevin, *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, Wiley Interscience, NY, 1996.
- [66] A. F. Vakakis (Ed.), *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, Kluwer Academic Publishers, 2002 [also in, Special Issue of *Nonlinear Dynamics* 25(1–3), 2001].
- [67] W. Lacarbonara, G. Rega and A. H. Nayfeh, Resonant nonlinear normal modes, Part I: Analytical treatment for structural one dimensional systems, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38, 851–872, 2003.
- [68] D. Jiang, C. Pierre and S. W. Shaw, The construction of nonlinear normal modes for systems with internal resonances, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40, 729–746, 2005.
- [69] A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, and Y. S. Lee. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, Vol. 156, Springer Science & Business Media, 2008.
- [70] R.M. Rosenberg, On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom, *Advances in Applied Mechanics* 9 (1966) 155–242.
- [71] S.W. Shaw, C. Pierre, Non-linear normal modes and invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration* 150 (1991) 170–173.
- [72] A. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1947
- [73] A. Weinstein, Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems, *Inv. Math.* 20, 47–57, 1973.
- [74] J.K. Moser, Periodic orbits near an equilibrium and a theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* 29, 727–747, 1976.
- [75] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1958.
- [76] M. E. King and A. F. Vakakis, An energy-based approach to computing resonant nonlinear normal modes, *J. Appl. Mech.* 63, 810–819, 1996.
- [77] N. Boivin, C. Pierre, S.W. Shaw, Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances, *Journal of Sound and Vibration* 182 (1995) 336–341.
- [78] A.F. Vakakis, R.H. Rand, Normal modes and global dynamics of a 2-degree-of-freedom nonlinear-system; part I: low energies, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 27 (1992) 861–874.

- [79] A.F. Vakakis, R.H. Rand, Normal modes and global dynamics of a 2-degree-of-freedom nonlinear-system; part II: high energies, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 27 (1992) 875–888.
- [80] P.W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* 109, 1492–1505, 1958
- [81] C. Pierre, E.H. Dowell, Localization of vibrations by structural irregularity, *J. Sound Vib.* 114, 549–564, 1987.
- [82] C.H. Hodges, Confinement of vibration by structural irregularity, *J. Sound Vib.* 82(3), 411–424, 1982.
- [83] A.F. Vakakis, A.H. Nayfeh, M.E. King, A multiple scales analysis of nonlinear, localized modes in a cyclic periodic system, *J. Appl. Mech.* 60, 388–397, 1993.
- [84] A. F. Vakakis, Passive spatial confinement of impulsive responses in coupled nonlinear beams, *AIAA J.* 32, 1902–1910, 1994.
- [85] M.E. King, A.F. Vakakis, Mode localization in a system of coupled flexible beams with geometric nonlinearities, *ZAMM* 75, 127–139, 1995.
- [86] Educational Control Products, *Manual for Model 210/210a: Rectilinear Dynamic System*, ECP, CA, 2004.

Apéndice A

Programas de cálculo utilizados.

restart;

▼ SISTEMA DUFFING AMORTIGUADO CON EXITACIÓN EXTERNA EN RESONANCIA PRIMARIA.

▼ MODELO DINAMICO NORMALIZADO CON RESPECTO A LA MASA. (EDO NO LINEAL)

$$duff := m \text{diff}(u(t), t^2) + c \text{diff}(u(t), t) + k1 u(t) + k2 u(t)^3 = F_0 \cos(\Omega t);$$

$$duff := \text{expand}\left(\frac{duff}{m}\right);$$

$$duff := \frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2\mu \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) + \omega^2 u(t) + \alpha u(t)^3 = f \cos(\Omega t);$$

$$\omega_ := \sqrt{\frac{k1}{m}};$$

$$\xi_ := \frac{c}{2 m \omega};$$

$$\mu_ := \xi \omega;$$

$$f_ := \frac{F_0}{m};$$

$$\alpha_ := \frac{k2}{m};$$

$$duff := \frac{d^2}{dt^2} u(t) + 2 \epsilon \mu \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) + \omega^2 u(t) + \alpha \epsilon u(t)^3 = \epsilon f \cos(\Omega t);$$

▼ SOLUCIÓN NO LINEAL, APROXIMADA POR EL METODO DE ESCALAS MULTIPLES.

$$u_ := \sum_{n=0}^2 \epsilon^n u_n(T_0, T_1, T_2);$$

▼ DEFINICIÓN DE ESCALAS MULTIPLES.

$$T_m := \epsilon^m \cdot t;$$

$$T0 := \text{subs}(m=0, T_m);$$

$$T1 := \text{subs}(m=1, T_m);$$

$$T2 := \text{subs}(m=2, T_m);$$

▼ TRANSFORMACIÓN DE DERIVADAS POR LAS ESCALAS MULTIPLES.

```

dot := simplify( ( d/dt T0 * ∂/∂T0 u(T0, T1, T2) + d/dt T1 * ∂/∂T1 u(T0, T1, T2) + d/dt T2
    * ∂/∂T2 u(T0, T1, T2) );
dot_ := expand(subs(u(T0, T1, T2) = u_, dot));
ddot := expand(subs(u(T0, T1, T2) = dot, ddot));
ddot_ := expand(subs(u(T0, T1, T2) = u_, ddot));

```

▼ **INTRODUCCIÓN DE ESCALAS MÚLTIPLES A LA DINÁMICA DEL SISTEMA (EDP NO LINEAL).**

```

duff := expand(subs(diff(u(t), t) = ddot_, diff(u(t), t) = dot_, u(t) = u_, t = T0, duff));

```

▼ **SISTEMA DE EDP NO LINEALES.**

```

e0 := ∂²/∂T₀² u₀(T₀, T₁, T₂) + ω² u₀(T₀, T₁, T₂) = 0;
e1 := ∂²/∂T₀² u₁(T₀, T₁, T₂) + ω² u₁(T₀, T₁, T₂) = -2μ ∂/∂T₀ u₀(T₀, T₁, T₂) - α u₀(T₀, T₁, T₂)³
    - 2 ∂²/∂T₁ ∂T₀ u₀(T₀, T₁, T₂) + f cos(Ω T₀);
e2 := ( ∂²/∂T₀² u₂(T₀, T₁, T₂) ) + ω² u₂(T₀, T₁, T₂) = -2 ( ∂²/∂T₁ ∂T₀ u₁(T₀, T₁, T₂) )
    - 2 ( ∂²/∂T₂ ∂T₀ u₀(T₀, T₁, T₂) ) - 3 α u₀(T₀, T₁, T₂)² u₁(T₀, T₁, T₂) - 2μ ( ( ∂/∂T₀ u₁(T₀,
    T₁, T₂) ) - ( ∂/∂T₁ u₀(T₀, T₁, T₂) ) ) - ( ∂²/∂T₁² u₀(T₀, T₁, T₂) );

```

▼ **SOLUCIÓN A LA PRIMERA ECUACIÓN DEL SISTEMA DE EDP NO LINEALES. (PRIMERA APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN).**

```

sol1 := pdsolve(e0);
sol1 := F2(T₁, T₂) cos(ω T₀);
sol1 := expand(u₀(T₀) = A0(T₁, T₂) * ( e^{iω T₀} + e^{-iω T₀} ));
u0 := A0(T₁, T₂) e^{iω T₀} + A0_(T₁, T₂) e^{-iω T₀};

```

▼ **SUSTITUCIÓN DE LA SOLUCIÓN EN LA SEGUNDA ECUACIÓN DEL SISTEMA DE EDP NO LINEALES.**

```

e1 := (subs(u₀(T₀, T₁, T₂) = u0, e1));

```

$$\epsilon l := (\text{eval}(\text{subs}(u_0(T_0, T_1, T_2) = u_0, \epsilon l)));$$

$$f \cos(\Omega T_0) = \frac{f}{2} e^{i\Omega T_0} + \frac{f}{2} e^{-i\Omega T_0};$$

$$\epsilon l := \left(\text{subs} \left(f \cos(\Omega T_0) = \frac{f}{2} e^{i\Omega T_0} + \frac{f}{2} e^{-i\Omega T_0}, \epsilon l \right) \right);$$

TERMINOS SECULARES (CONDICIÓN DE RESOLUCIÓN) DE LA SOLUCIÓN A LA SEGUNDA ECUACIÓN DEL SISTEMA EN RESONANCIA PRIMARIA.

$$\Omega = \omega + \epsilon \rho;$$

$$\epsilon l_- := \left(\text{subs}(u_1(T_0, T_1, T_2) = u_1(T_0), A_0(T_1, T_2) = A_0(T_1), A_{0-}(T_1, T_2) = A_{0-}(T_1), \Omega = \omega + \epsilon \rho, (\epsilon \rho + \omega) T_0 = \rho T_1 + \omega T_0, \epsilon l) \right);$$

$$\epsilon l_- := \text{expand}(\epsilon l_-);$$

Los terminos seculares son :

$$\begin{aligned} \text{ter_sec} := & -2 \text{I} A_0(T_1) \mu \omega - 3 \alpha A_0(T_1)^2 A_{0-}(T_1) - 2 \text{I} \left(\frac{d}{dT_1} A_0(T_1) \right) \omega + \frac{1}{2} f e^{i T_1 \rho} \\ & = 0; \end{aligned}$$

$$A_0(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}, A_{0-}(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{-i\beta(T_1)};$$

$$\begin{aligned} \text{ter_sec} := & \text{expand} \left(\text{subs} \left(A_0(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}, A_{0-}(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{-i\beta(T_1)}, \right. \right. \\ & \left. \left. \text{ter_sec} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\text{ter_sec} := \text{expand} \left(\frac{\text{ter_sec}}{\omega e^{i\beta(T_1)}} \right);$$

(1.2.7.1)

$$\begin{aligned} \text{ter_sec} := & -\text{I} a(T_1) \mu - \frac{3}{8} \frac{\alpha a(T_1)^3}{\omega} - \text{I} \left(\frac{d}{dT_1} a(T_1) \right) + a(T_1) \left(\frac{d}{dT_1} \beta(T_1) \right) \\ & + \frac{1}{2 \omega} f e^{i(T_1 \rho - \beta(T_1))} = 0; \end{aligned}$$

Al aplicar la relación Euler se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{ter_sec} := & -I a(T_I) \mu - \frac{3}{8} \frac{\alpha a(T_I)^3}{\omega} - I \left(\frac{d}{dT_I} a(T_I) \right) + a(T_I) \left(\frac{d}{dT_I} \beta(T_I) \right) \\ & + \frac{1}{2\omega} f(\cos(T_I \rho - \beta(T_I)) + I \text{sen}(T_I \rho - \beta(T_I))) = 0; \end{aligned}$$

Parte real

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{8} \frac{\alpha a(T_I)^3}{\omega} + a(T_I) \left(\frac{d}{dT_I} \beta(T_I) \right) + \frac{1}{2\omega} f \cos(T_I \rho - \beta(T_I)) = 0; \\ a(T_I) \left(\frac{d}{dT_I} \beta(T_I) \right) &= \frac{3}{8} \frac{\alpha a(T_I)^3}{\omega} - \frac{1}{2\omega} f \cos(T_I \rho - \beta(T_I)); \end{aligned}$$

Parte imaginaria

$$\begin{aligned} & -a(T_I) \mu - \left(\frac{d}{dT_I} a(T_I) \right) + \frac{1}{2\omega} f \text{sen}(T_I \rho - \beta(T_I)) = 0; \\ \left(\frac{d}{dT_I} a(T_I) \right) &= -a(T_I) \mu + \frac{1}{2\omega} f \text{sen}(T_I \rho - \beta(T_I)); \\ u0 := \text{subs} \left(A0(T_I, T_2) = \frac{1}{2} a(T_I) e^{I\beta(T_I)}, A0_{-}(T_I, T_2) = \frac{1}{2} a(T_I) e^{-I\beta(T_I)}, u0 \right); \\ u0 &:= a(T_I) \cos(\omega T_0 + \beta(T_I)); \end{aligned}$$

▼ SISTEMA AUTONOMO.

$$\begin{aligned} \text{gamma_} &:= \gamma(T_I) = \rho T_I - \beta(T_I); \\ \text{dgamma} &:= \text{diff}(\text{gamma_}, T_I); \end{aligned}$$

Al realizar la transformación

$$\begin{aligned} r1 &:= a(T_I) \left(\frac{d}{dT_I} \gamma(T_I) \right) = a(T_I) \rho - \frac{3}{8} \frac{\alpha a(T_I)^3}{\omega} + \frac{1}{2\omega} f \cos(\gamma(T_I)); \\ r2 &:= \frac{d}{dT_I} a(T_I) = -a(T_I) \mu + \frac{1}{2} \frac{f \text{sen}(\gamma(T_I))}{\omega}; \end{aligned}$$

▼ SISTEMA AUTONOMO EN ESTADO ESTABLE.

$$\begin{aligned} \text{eq_1} &:= a \rho - \frac{3}{8} \frac{\alpha a^3}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{f \cos(\gamma)}{\omega}; \\ \text{eq_2} &:= a \mu = \frac{1}{2} \frac{f \text{sen}(\gamma)}{\omega}; \end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado y sumando las ecuaciones anteriores se tiene :

$$\text{resp_frec} := \left(\rho^2 - \frac{3}{4} \frac{\sigma \alpha a^2}{\omega} - \frac{9}{64} \frac{\alpha^2 a^4}{\omega^2} + \mu^2 \right) a^2 = \left(\frac{1}{4} \frac{f^2}{\omega^2} \right);$$

$$\text{resp_frec} := \left(\left(\rho - \frac{3}{8} \frac{\alpha a^2}{\omega} \right)^2 + \mu^2 \right) a^2 = \left(\frac{f^2}{4 \omega^2} \right);$$

▼ **RESPUESTA DEL SISTEMA EN LA PRIMERA APROXIMACIÓN.**

$$u0 := \text{subs}(a(T_I) = a, \beta(T_I) = \rho T_I - \gamma, \omega = \Omega - \epsilon \rho, u0);$$

$$u0 := \text{subs}(T_0 = T0, T_I = T1, u0);$$

$$u_- := a \cos(\Omega t - \gamma);$$

$$u_- := \text{expand}\left(\text{subs}\left(a = \frac{1}{2} \frac{f \sin(\gamma)}{\omega \mu}, \Omega = \sqrt{\frac{kI}{m}}, \omega = \sqrt{\frac{kI}{m}}, \mu = \frac{c}{2m}, \gamma = 0.43383, m = 2, c = 0.4, k1 = 1, f = 5, m = 2, k1 = 1, u_- \right)\right);$$

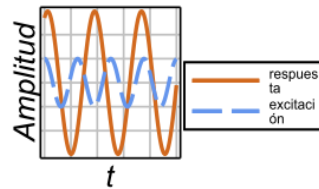
$$\mu = \text{subs}\left(\gamma = 0.43383, m = 2, c = 0.4, k1 = 1, f = 5, \frac{c}{2m}\right);$$

$$a = \text{simplify}\left(\text{subs}\left(\mu = \frac{c}{2m}, \omega = \sqrt{\frac{kI}{m}}, \gamma = 0.43383, m = 2, c = 0.4, k1 = 1, f = 5, \frac{1}{2} \frac{f \sin(\gamma)}{\omega \mu}\right)\right);$$

$$u_- := \text{simplify}(u_-);$$

$$F := \text{subs}\left(\Omega = \sqrt{\frac{kI}{m}}, m = 1, k1 = 1, f = 5, f \cos(\Omega t)\right);$$

$$\text{plot}\left([u_-, F], t = 0 \dots 25, \text{color} = [\text{"Chocolate"}, \text{"CornflowerBlue"}], \text{linestyle} = [\text{"solid"}, 3], \text{thickness} = 2, \text{axis} = [\text{gridlines} = [5, \text{color} = \text{grey}], \text{axes} = \text{boxed}, \text{grid} = [250, 250], \text{labels} = [t, \text{Amplitud}], \text{tickmarks} = [0, 0], \text{legend} = [\text{"respuesta"}, \text{"excitación"}], \text{titlefont} = [\text{"ARIAL"}, 16], \text{labelfont} = [\text{"Arial"}, 12], \text{axesfont} = [\text{"Arial"}, \text{"Arial"}, 12], \text{legendstyle} = [\text{font} = [\text{"Arial"}, 6], \text{location} = \text{right}], \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{vertical}], \text{size} = \left[\frac{350}{2}, \frac{250}{2}\right]);$$



GRAFICAS DE RESPUESTA FRECUENCIAL

```
resp_freq_1 := simplify(subs(f=5, μ=0.3, α=9, ω=4, resp_freq));
```

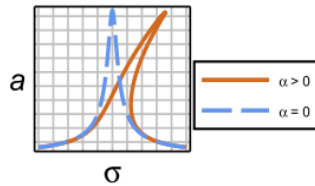
```
resp_freq_0 := simplify(subs(f=5, μ=0.3, α=0, ω=4, resp_freq));
```

$$eq1 := \left(\text{subs} \left(a = \frac{f \sin(\gamma)}{2 \omega \mu}, f=5, \mu=0.3, \alpha=9, \omega=4, eq_1 \right) \right);$$

$$eq0 := \left(\text{subs} \left(a = \frac{f \sin(\gamma)}{2 \omega \mu}, f=5, \mu=0.3, \alpha=0, \omega=4, eq_1 \right) \right);$$

with(plots):

```
implicitplot([resp_freq_1, resp_freq_0], rho=-5...5, a=0...10, color=["Chocolate",
"CornflowerBlue"], linestyle=["solid", "dash"], thickness=2, axis=[gridlines=[10,
color=grey]], axes=boxed, grid=[250, 250], labels=[σ, a], tickmarks=[0, 0],
legend=["α > 0", "α = 0"], titlefont=["ARIAL", 16], labelfont=["Arial", 12],
axesfont=["Arial", "Arial", 12], legendstyle=[font=["Arial", 6], location=right], size
=[350/2, 250/2]);
```



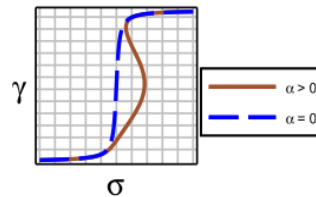
```
implicitplot([eq1, eq0], ρ=-10...10, γ=0...Pi, color=["Sienna", "blue"], linestyle
```



```

= ["solid", "dash"], thickness = 2, axis = [gridlines = [10, color = grey]], axes = boxed,
grid = [150, 150], labels = [ $\sigma$ ,  $\gamma$ ], legend = [ " $\alpha > 0$ ", " $\alpha = 0$ " ], tickmarks = [0, 0],
titlefont = ["ARIAL", 12], labelfont = ["Arial", 12], axesfont = ["Arial", "Arial", 12],
legendstyle = [ font = ["Arial", 6], location = right, size = [  $\frac{350}{2}$ ,  $\frac{250}{2}$  ] );

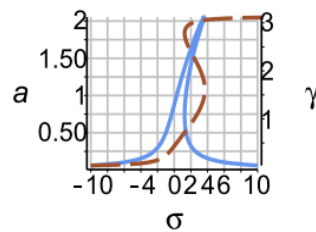
```



```

dualaxisplot( implicitplot( [ resp_freq_1 ], rho = -10 ... 10, a = 0 ... 10, color
= ["CornflowerBlue"], linestyle = [ "solid" ], thickness = 2, axes = boxed, grid = [250,
250], axis = [gridlines = [default, thickness = 0, color = grey]], labels = [ $\sigma$ , a], tickmarks
= [10, 8], labelfont = ["Arial", "Arial", 12], axesfont = ["Arial", "Arial", 10], legendstyle
= [ font = ["Arial", 12], location = right, size = [  $\frac{350}{2}$ ,  $\frac{250}{2}$  ] ), implicitplot( [ eq1 ], rho =
-10 ... 15, gamma = 0 ... Pi, color = ["Sienna"], linestyle = [ "dash" ], thickness = 2, axes = boxed,
grid = [150, 150], labels = [ $\sigma$ ,  $\gamma$ ], tickmarks = [10, 9], axis = [gridlines = [0, thickness
= 0, color = grey]], labelfont = ["Arial", "Arial", 12], axesfont = ["Arial", "Arial", 10],
legendstyle = [ font = ["Arial", 6], location = right, size = [  $\frac{350}{2}$ ,  $\frac{250}{2}$  ] ) );

```



RESPUESTA FRECUENCIAL (EFECTO NO LINEALIDAD)

```

resp_freq01 := simplify(subs(f=5, mu=0.3, alpha=-15, omega=4, resp_freq));
resp_freq02 := simplify(subs(f=5, mu=0.3, alpha=-9, omega=4, resp_freq));
resp_freq0 := simplify(subs(f=5, mu=0.3, alpha=0, omega=4, resp_freq));

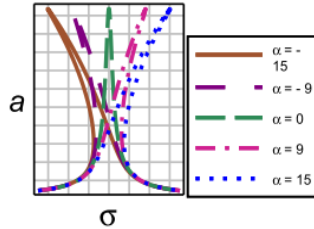
```

```

resp_freq1 := simplify(subs(f=5, μ=0.3, α=9, ω=4, resp_freq));
resp_freq2 := simplify(subs(f=5, μ=0.3, α=15, ω=4, resp_freq));

implicitplot([resp_freq01, resp_freq02, resp_freq0, resp_freq1, resp_freq2], rho=-7...7, a
=0...5, color=["Sienna", "Purple", "SeaGreen", "VioletRed", "blue"], thickness=[2,
2, 2, 2, 2], linestyle=[1, 6, 3, 4, 2], axis=[gridlines=[10, color=grey]], axes=boxed,
grid=[250, 250], labels=[σ, a], tickmarks=[0, 0], legend=["α=-15", "α=-9",
"α=0", "α=9", "α=15"], labelfont=["Arial", 12], axesfont=["Arial", "Arial", 12],
legendstyle=[font=["Arial", 6], location=right], size=[ $\frac{350}{2}$ ,  $\frac{250}{2}$ ]);

```



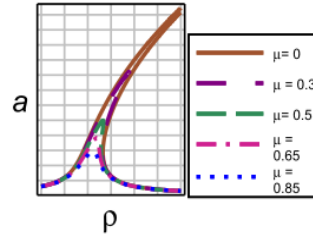
RESPUESTA FRECUENCIAL (EFECTO AMORTIGUAMIENTO)

```

resp_freq010 := simplify(subs(f=5, μ=0, α=9, ω=4, resp_freq));
resp_freq020 := simplify(subs(f=5, μ=0.3, α=9, ω=4, resp_freq));
resp_freq00 := simplify(subs(f=5, μ=0.5, α=9, ω=4, resp_freq));
resp_freq10 := simplify(subs(f=5, μ=0.65, α=9, ω=4, resp_freq));
resp_freq20 := simplify(subs(f=5, μ=0.85, α=9, ω=4, resp_freq));

implicitplot([resp_freq010, resp_freq020, resp_freq00, resp_freq10, resp_freq20], rho=-4..
.8, a=0...10, color=["Sienna", "Purple", "SeaGreen", "VioletRed", "blue"], linestyle
=[1, 6, 3, 4, 2], thickness=[2, 2, 2, 2, 2], axis=[gridlines=[10, color=grey]], axes
=boxed, grid=[250, 250], labels=[rho, a], tickmarks=[0, 0], legend=["μ=0",
"μ=0.3", "μ=0.5", "μ=0.65", "μ=0.85"], labelfont=["Arial", 12], axesfont=["Arial",
"Arial", 12], legendstyle=[font=["Arial", 6], location=right], size=[ $\frac{350}{2}$ ,  $\frac{250}{2}$ ]);

```



RESPUESTA FRECUENCIAL (EFECTO AMPLITUD DE LA FUERZA DE EXITACIÓN)

```
resp_freq01 := simplify(subs(f=0.5, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_freq02 := simplify(subs(f=2.5, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_freq0 := simplify(subs(f=5, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_freq1 := simplify(subs(f=7.5, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_freq2 := simplify(subs(f=10, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
implicitplot([resp_freq01, resp_freq02, resp_freq0, resp_freq1, resp_freq2], rho=-4..
```

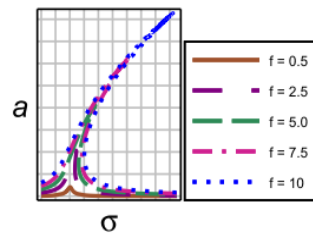
```
.15, a=0...10, color=["Sienna", "Purple", "SeaGreen", "VioletRed", "blue"], linestyle
```

```
= [1, 6, 3, 4, 2], thickness = [2, 2, 2, 2, 2], axis = [gridlines = [10, color = grey]], axes
```

```
= boxed, grid = [250, 250], labels = [sigma, a], tickmarks = [0, 0], legend = [ "f = 0.5",
```

```
"f = 2.5", "f = 5.0 ", "f = 7.5 ", "f = 10"], labelfont = ["Arial", 12], axesfont = ["Arial",
```

```
"Arial", 12], legendstyle = [font = ["Arial", 6], location = right], size = [ 350 / 2, 250 / 2 ]]);
```



AMPLITUD DE LA RESPUESTA VS AMPLITUD DE EXITACIÓN (EFECTO PARAMETRO DETUNING)

```
resp_f_a0 := simplify(subs(rho=-10, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_f_a1 := simplify(subs(rho=-5, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

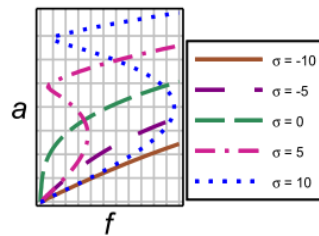
```
resp_f_a2 := simplify(subs(rho=0, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_f_a3 := simplify(subs(rho=5, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
resp_f_a4 := simplify(subs(rho=10, mu=0.3, alpha=9, omega=4, resp_freq));
```

```
implicitplot([resp_f_a0, resp_f_a1, resp_f_a2, resp_f_a3, resp_f_a4], f=0...110, a=0..
```

```
. 10, color = ["Sienna", "Purple", "SeaGreen", "VioletRed", "blue"], linestyle = [1, 6, 3,
4, 2], thickness = [2, 2, 2, 2, 2], axis = [gridlines = [10, color = grey]], axes = boxed, grid
= [150, 150], labels = [f, a], tickmarks = [0, 0], legend = [ "σ = -10", "σ = -5", "σ = 0",
"σ = 5", "σ = 10", "σ = 12"], labelfont = ["Arial", 12], axesfont = ["Arial", "Arial", 12],
legendstyle = [font = ["Arial", 6], location = right], size = [  $\frac{350}{2}$ ,  $\frac{250}{2}$  ]];
```



```
resp_freq_10 := simplify(subs(μ=0.3, α=1, ω=1, resp_freq));
implicitplot3d( [resp_freq_10], ρ=-6 ... 20, f=0 ... 4, a=0 ... 7, linestyle="solid", grid
= [150, 150, 150], axes="box", labels=[σ, f, a], tickmarks=[10, 10, 10], style
="surface", titlefont=["ARIAL", 18], labelfont=["HELVETICA", 16], axesfont
=["HELVETICA", "ROMAN", 12], orientation=[-60, 46, 0], tickmarks=[0, 0, 0],
scaling=unconstrained)
```

