CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SEDE SUR

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

LA RELACIÓN DIALÉCTICA ENTRE EL DOCENTE Y LAS PROPUESTAS DIDÁCTICAS. UN CASO EN TORNO A LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES Y LA PROPORCIONALIDAD EN SECUNDARIA

Tesis que presenta

Aldo Escamilla Jardon

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de
Investigaciones Educativas

Director de la Tesis:
Dr. David Francisco Block Sevilla

Ciudad de México, México — Febrero, 2019

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

A mis padres Martha y Manuel

A mi hermana Marisela

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, a mi hermana y a mi abue, por el cobijo que siempre me han brindado. Gracias por todo su amor y aliento, fueron fundamentales en este camino.

A David Block, por aceptar llevarme en su barco y permitirme aprender tanto. Por su dedicación, esfuerzo y mirada siempre fina, crítica y aguda. Gracias por tanto.

A Apolo Castañeda, por su acompañamiento, lectura fina y calidez que enriqueció este trabajo.

A Hugo Balbuena, por la lectura y comentarios que enriquecieron mi trabajo.

A Antonia Campos Castro, por su apoyo incondicional, cariño y aliento, gracias por todo.

A Saúl Almeraya, por su amistad y apoyo en este trayecto.

A Irma Fuenlabrada, Irma Saiz y Grecia Galvez, que en esa fugaz, pero excepcional visita aceptaron conocer este trabajo y enriquecerlo.

Al seminario de didáctica de las matemáticas, por su cobijo, mirada aguda, cálida y reflexiva: Margarita Ramírez, Laura Reséndiz, Apolo Castañeda, Alejandra Ávalos, Tatiana Mendoza, Javier Zariñán, Ligia Ramírez, Evelyn Caballero y Juan José Sosa.

A todos mis maestros del DIE, por su entrega y por la formación tan sólida y rigurosa que me brindaron, gracias por todo.

A Alejandra Ávalos Rogel, por el apoyo y motivación desde antes de iniciar este trayecto.

A mis compañeros y amigos de la generación 2016-2018, por compartir su experiencia y amistad en este camino que recorrimos juntos.

A mis grandes hermanos: Juan Carlos Gómez Palacios, Juan José Sosa e Iván Auli Silva, gracias por su amistad, el apoyo en los momentos difíciles y la camaradería.

A Juan Gómez, Luis Gamba, Oscar Guandique, Arturo Salinas, Felix Lugo, Naty Cerecedo, Obis Bolaños, Alejandro Rangel y Juan Moscosa. Gracias por su amistad y apoyo.

A Iván Tonatiuh López, por su participación y apoyo incondicional en este trabajo.

A todos, gracias.

Resumen

Esta investigación aborda la relación de un profesor de matemáticas de secundaria, de la Ciudad de México, con una propuesta didáctica que presenta algunos elementos innovadores, en particular, la intención de favorecer el aprendizaje de la multiplicación de fracciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad. El estudio pretende realizar un aporte a la comprensión de los procesos de apropiación de los profesores ante propuestas didácticas alternativas (Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D., 2007; Robert, 2007; Sensevy, 2011). Este trabajo puede caracterizarse como un estudio de ingeniería didáctica de segunda generación (Perrin- Glorian, 2011). El estudio plantea dos problemas de investigación, el primero se refiere a la problemática curricular y epistemológica que existe en didáctica sobre las fracciones, en particular, la multiplicación y su relación con las técnicas de proporcionalidad (Brousseau, 1981., Block, 2001). El segundo, alude al análisis de la práctica docente bajo las dimensiones cognitiva, personal e institucional (Robert, 2007., Roditi, 2003). Asimismo, se intenta enriquecer este análisis recurriendo a algunos aportes de los estudios realizados desde la perspectiva sociocultural (Mercado y Rockwell, 1988., Mercado, 2002).

Abstract

This study researches the relationship of a high school math teacher, from Mexico City, with a didactic proposal which presents some innovative elements such as the intention of favoring learning of multiplication of fractions within the framework of the proportional relationships. The study aims to contribute to the understanding of teachers' appropriation processes of alternative didactic proposals (Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D., 2007, Robert, 2007, Sensevy, 2011). This study can be characterized as a second-generation didactic engineering study (Perrin-Glorian, 2011). The study raises two research problems, the first one refers to the curricular and epistemological problems present in didactics about fractions, in particular, multiplication and its relation with proportionality techniques (Brousseau, 1981., Block, 2001). The second refers to teaching practice analysis under cognitive, personal and institutional dimensions (Robert, 2007., Roditi, 2003). Likewise, this analysis is enriched by resorting to some contributions from sociocultural studies perspective (Mercado y Rockwell, 1988., Mercado, 2002).

INTRODUCCIÓN

1. Antecedentes y propósitos

En los estudios de didáctica de las matemáticas, prácticamente desde su origen, existe una preocupación sobre la reproductibilidad de las ingenierías didácticas que se realizan en la investigación. Las formas de implementar las situaciones no responden necesariamente a los objetivos planteados por los investigadores:

> Hay una distancia entre lo deseable para la enseñanza y lo que sucede en realidad. ¿es necesario recriminar a los docentes? Es necesario cambiar de paradigma: estudiar las condiciones que pesan a los profesores y sus márgenes de maniobra, en una perspectiva ecológica que integra las demandas del cuerpo social, de la institución, de los alumnos (Bolon, 1996, p. 15).

Años más tarde, Perrin-Glorian desarrolló una línea de investigación que denominó Ingeniería Didáctica de Desarrollo (IDD) o de segunda generación, la cual, enfoca la problemática del docente cuando implementa secuencias didácticas que son producto de la investigación didáctica. Esta línea pretende ser también un insumo para la enseñanza. En palabras de Artigue, uno de los retos actuales e importantes en la educación matemática es que “existe mucha producción en la investigación, pero poca influencia en los sistemas educativos, tenemos una responsabilidad social” (Artigue, octubre de 2018).

Actualmente, el estudio de la práctica de los profesores constituye una línea importante de investigación en didáctica. Se han realizado diversos estudios (Block, et al., 2007, Margolinas, 2009., Perrin-Glorian, 2011., Robert, 2007., Roditi, 2003, Ríos, 2016., Sensevy, 2011, etc.), que abordan desde distintos enfoques la participación e influencia del profesor en la puesta en marcha de ingenierías didácticas. Estas investigaciones, dan cuenta de una relación dialéctica entre el docente y las propuestas, y destacan varios de los elementos que intervienen en esta relación.

En el presente estudio, pretendo aportar en la dirección antes señalada: analizo la relación de un docente de matemáticas de secundaria con una propuesta, portadora de ciertas innovaciones para la enseñanza de la multiplicación de fracciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad. La propuesta, además, otorga un lugar central a la resolución de problemas como medio para el desarrollo de nociones de los alumnos.

Con ello, me interesa aportar al conocimiento de los procesos que viven los profesores al relacionarse con propuestas didácticas fundamentadas en la investigación en didáctica. Asimismo, pretendo contribuir al conocimiento del funcionamiento de dichas situaciones en el aula.

2. Las partes de la tesis.

A continuación, describiré grosso modo, los capítulos que constituyen este trabajo, con la finalidad de ofrecer al lector un panorama de su contenido:

En el primer capítulo de la tesis, documentaré los referentes teóricos que constituyen mis herramientas principales de análisis. Estos son, por una parte, la problemática curricular y epistemológica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación de fracciones desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de la didáctica francesa, la cual ubico principalmente en los trabajos de Brousseau (1980, 1981, 1983, 2007), de Block (2001, 2008) y además algunos aportes de otras escuelas (Freudenthal, 1983., Rouche, 1998). Por otra parte, sobre la apropiación de las propuestas didácticas por los docentes, recupero referentes tanto desde la didáctica (Block, et al., 2007., Perrin-Glorian, 2011., Robert, 2007., Roditi, 2003) como de estudios sobre la práctica docente desde la perspectiva sociocultural (Mercado, 2002).

En el segundo capítulo abordaré las ocho situaciones que constituyen la propuesta que se experimentó en este trabajo de investigación. Para cada situación, consideré tres aspectos. El análisis a priori, en el cual destaco los propósitos, comentarios previos y algunos procedimientos esperados por parte de los alumnos. En segundo lugar, el análisis a posteriori del referente empírico con apoyo de videograbaciones de clase, notas de campo y entrevistas con el docente. Finalmente, agregué comentarios finales para cada situación, en los cuales menciono puntos relevantes organizados en tres apartados: la situación, los alumnos y la gestión, esta última, enfocada en la relación del profesor con cada lección y las distintas transformaciones que hizo en función de sus concepciones, creencias, perspectiva didáctica, etc.

Por último, en el capítulo tercero destaco, de manera sucinta, los hallazgos del estudio y desarrollo una reflexión sobre ellos. La experiencia muestra que existió una distancia amplia entre los objetivos planteados en la propuesta y lo que sucedió en el aula, debido a una serie de modificaciones que el profesor imprimió en la propuesta, sobreponiendo en ocasiones la aplicación de algoritmos ante el sentido que subyacen éstos.

CAPÍTULO 1. TEORÍAS DE REFERENCIA, OBJETO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA.

1.1. La multiplicación de fracciones: marco epistémico de referencia.

En este capítulo, abordaré la problemática curricular y epistemológica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación de fracciones desde la didáctica francesa, principalmente los trabajos de Brousseau (2004), Block (2008) y aportes de otras escuelas (Freudenthal, 1983, Rouche, 1998).

1.1.1 Nociones de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Esta investigación se apoya en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Brousseau (2007) en Francia en la década de los 70'. En la TSD, se estudian las condiciones (situaciones) que determinan los conocimientos matemáticos y que los propician. En su seno, la enseñanza "refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes "(Douady, 1995, p.64).

Uno de los conceptos centrales es el de situación didáctica:

> Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender, esto es reconstruir algún conocimiento (Godino, 2007, p. 19).

En la TSD, el sistema didáctico compuesto por el alumno, maestro y conocimiento se complementa con el medio (milieu). Esta última noción, es uno de los aportes más importantes de esta teoría: "el medio es el objeto de la interacción de los alumnos, es la tarea específica que deben llevar a cabo y las condiciones en que deben realizarla" (Block, 2001, p.19). Es decir, el medio se refiere al problema con el cual van a interactuar los estudiantes.

Otro de los aportes más importantes de la TSD es la noción de contrato didáctico, la cual refiere a "las condiciones sobre las normas necesarias para el trabajo de los alumnos en el problema" (Sadovsky, 2004). Es decir, la manera en que se trabaja un problema en la clase de matemáticas. Se trata de las expectativas mutuas entre el profesor y los alumnos, sobre todo, lo que ellos suponen que él espera de ellos.

A continuación, precisaré algunos conceptos de la TSD que son básicos y que utilizo para el análisis de las situaciones en mi trabajo: situación, situación fundamental, situación adidáctica y situación didáctica[1].

- La situación didáctica es un "entorno del alumno manipulado por el docente" (Brousseau, 2007, p.17) con fines de aprendizaje para el estudiante.
- Las situaciones fundamentales, son aquellas que reunen una serie mínima de situaciones que contemplan todas las nociones necesarias para la génesis de un conocimiento.
- Las situaciones adidácticas proponen problemas que los alumnos, en principio, pueden resolver con sus propios medios. Frecuentemente suponen una ruptura de contrato. En estas situaciones, se busca que los conocimientos anteriores de los alumnos, generalmente limitados o erróneos (eventualmente producto de obstáculos[2]) sean insuficientes para resolver el problema, y entonces, el estudiante se vea en la necesidad de buscar otras alternativas que el mismo problema devuelve.

Aunque en algún momento se interpretó que el profesor no intervendría de manera directa en las situaciones adidácticas; estudios posteriores (Sadovsky, 2004., Sensevy, 2011) muestran que la intervención del docente es necesaria:

> Las situaciones adidácticas no funcionan sin intervención del profesor. Lejos de ello, en la adidacticidad, el trabajo del profesor es decisivo. Si las evidencias deben construirse contra el contrato actual, es necesario que el profesor dé a los alumnos el medio para hacerlo (Sensevy, 2011, p. 340).

La situación adidáctica forma parte de la situación didáctica, en la que hay momentos previos y posteriores al momento adidáctico y de intervención del profesor.

Otros dos conceptos importantes que aparecerán con frecuencia en mi estudio son la devolución y la institucionalización. El concepto de devolución es una acción por la cual "el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o de un problema" (Brousseau, 2007, p. 87). En este proceso de devolución, me cuestiono sobre la acción docente y sobre la adidacticidad de una situación, es decir,

[1] Para el estudio y diseño de las situaciones didácticas existe una clasificación en situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 2007).
[2] Más adelante, precisaré algunos detalles sobre el concepto de obstáculo.

¿qué características tendría que ofrecer el problema para propiciar en el alumno este aprendizaje? ¿es suficiente con ello? ¿hasta qué punto influye el docente? ¿En qué medida están en consonancia el diseño del problema y las acciones del docente frente a la situación? Regresaré sobre estas preguntas a lo largo del análisis de mi referente empírico, y al final del estudio.

En los programas de estudio recientes (SEP, 2011) los contenidos referentes a fracciones y proporcionalidad presentan indicios de vinculación, pero en mi óptica aún aparecen lejanos, lo cual, da lugar a *dificultades*[3] para la construcción de la noción de multiplicación por racionales y, para el tránsito de la proporcionalidad en el marco aritmético al de las funciones que se comienzan a estudiar en la escuela secundaria[4].

En cuanto a la institucionalización, es "una actividad reflexiva sobre los conocimientos que contribuye a culminar la situación de aprendizaje, esta tendrá éxito si los alumnos toman consciencia de sus conocimientos" (Comin, 2003, p. 69). Es un momento crucial en la situación, en el cual, el profesor tiene la responsabilidad de oficializar los conocimientos subyacentes a la situación que los alumnos vivieron. Asimismo, "es una herramienta que permite verificar la evolución de la situación, gestionando el espacio de acción de los estudiantes" (Comin, 2003, p. 71).

1.1.2 La mutiplicación de fracciones. Análisis didáctico preliminar del contenido

Me interesa estudiar las transformaciones que realizó un docente a una propuesta didáctica que tiene el potencial didáctico de la integración de dos nociones: multiplicación de fracciones y proporcionalidad.

La pertinencia de favorecer el aprendizaje de las fracciones en el marco de la proporcionalidad ha sido destacada por varios investigadores (Brousseau, 1981, Block, 2008, Comin, 2003). Se considera que la adquisición "de aspectos fundamentales de

[3] En el trabajo realizado por Comin (2003) sobre la enseñanza de la proporcionalidad, destaca que en la enseñanza básica el estudio de las magnitudes es base para distintos contenidos y señala "que en la organización escolar francesa actual, los conocimientos sobre proporcionalidad no alimentan correctamente el estudio algebraico de relaciones funcionales que se hace en la secundaria. El tránsito del marco aritmético de la proporcionalidad al marco algebraico lineal requiere de una adaptación del modelo proporcional" (Comin, 2003, p.41).

[4] Bolea, Bosch y Gascón (2001) estudiaron la transposición didáctica en las organizaciones matemáticas de la proporcionalidad en la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) española, y destacaron que existe un problema curricular en el cual pervive la organización clásica de la proporcionalidad (Teoría de las razones y proporciones) y una fuerte tendencia a evitar la manipulación algebraica, provocando un aislamiento de la proporcionalidad en este nivel y con problemas posteriores.

número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad, a la vez que la resolución de problemas de proporcionalidad puede requerir de la aplicación de herramientas aritméticas, en particular del cálculo con fracciones y decimales" (Vergnaud,1988, p.156). Asimismo, se destaca que "la proporcionalidad entre magnitudes permite establecer una relación dialéctica entre las nociones de función, de variable y de número" (Comin, 2003, p. 48).

Por otra parte, Brousseau (1981) desarrolló una magna experiencia de ingeniería didáctica: *Racionales y decimales en la escolaridad obligatoria*, en la que las fracciones, tanto en su papel de medidas como de operadores[5] se construyen en el marco de situaciones de proporcionalidad. En la misma línea, Block (2008) desarrolló varios trabajos sobre el tránsito de la noción de razón a la noción de fracción tanto en su papel de medidas como de operadores: "la enseñanza de los números racionales podría verse enriquecida al considerarse conocimientos que los alumnos han desarrollado, y podrían desarrollar sobre las razones de números naturales" (Block, 2008, p.33)

Estos estudios sustentan la propuesta de varios investigadores de enseñar la multiplicación de fracciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad. Sin embargo, en el currículo y en las prácticas de enseñanza, tal integración[6] no es todavía lo usual (Block, 2008). En el estudio de Block y Ramírez (2009) sobre el papel de la noción de razón y su vínculo con la fracción en la escuela primaria sostienen que:

> La larga historia de la noción de proporcionalidad, su paso por varias épocas e instituciones, aunado al hecho de no pertenecer ya al corpus de saberes matemáticos actuales, origina, por una parte, la carencia de un marco claro que sirva de referencia para los maestros y los diseñadores de materiales curriculares y, por la otra, permite esperar cierta heterogeneidad en las prácticas concretas de la enseñanza (Block y Ramírez, 2009, p. 87).

Así mismo, la variedad de definiciones reitera las dificultades que pueden surgir cuando no existen acuerdos generales. Así, por ejemplo, para algunos autores los términos "razón, fracción, tasa y cociente son prácticamente sinónimos, otros no distinguen entre razón, tasa y fracción pero sí distinguen a éstos del término cociente (…) otros no diferencian entre fracción y cociente pero sí los distinguen de los términos razón y tasa (…)" (Alatorre, 2004, p. 6).

---

[5] Aquí conviene definir al operador fracción como "toda operación compuesta de una división en partes iguales y de una multiplicación, sin importar el orden que se adopte" (Rouche, 1998, p.33).

[6] El análisis de algunos libros de texto me permitió constatar que ambos contenidos (proporcionalidad y fracciones) se mantienen distantes en las lecciones.

En el siguiente apartado, profundizo en algunos elementos sobre el aprendizaje y la enseñanza de la mutiplicación de fracciones, principalmente desde la TSD con el trabajo de Brousseau (1981): *Racionales y decimales en la escolaridad obligatoria*. Asimismo, recupero nociones importantes del trabajo de la Fenomenología didáctica de las fracciones (Freudenthal, 1983).

Construcción del sentido para multiplicar por un decimal

Multiplicar por una fracción: ¿aumenta o reduce?

En su investigación sobre la enseñanza de los decimales en Francia en los años 60 y 70, Brousseau planteó que algunas problemáticas para la enseñanza y el aprendizaje se debieron "a las deficiencias de las concepciones didácticas en uso y de sus bases epistemológicas" (Brousseau, 1981, p.39).

En la escuela primaria, la multiplicación con naturales N se asocia al aumento de cantidades en una magnitud. En el nivel secundaria, los alumnos comienzan con el estudio de los racionales, y sus referentes más cercanos son los aprendizajes de la primaria. Eso lleva a que las operaciones entre los decimales tienda a heredar de manera cuasi inconsciente propiedades de las operaciones aprendidas en los naturales por los niños (Brousseau, 1981).

Brousseau desarrolló una secuencia experimental para la enseñanza de los decimales y las fracciones: *Racionales y decimales en la escolaridad obligatoria*, con una fuerte articulación con situaciones de proporcionalidad a lo largo de la cual se favorece la construcción de una concepción nueva de multiplicación con respecto del conocimiento que los alumnos traen de la primaria. Diseñó distintas situaciones-problema que tienen por objetivo la construcción de los racionales con apoyo de las razones.

En particular, la secuencia que se inicia con la situación adidáctica del rompecabezas (puzzle) [7] , la cual da lugar a un proceso de construcción del sentido de multiplicar por una fracción $\frac{a}{b}$ con la aplicación lineal $1 \rightarrow \frac{a}{b}$. Me detendré un momento en la

[7] Incluyo un breve análisis de esta situación pues en la propuesta didáctica implementada en esta investigación, ese error apareció varias veces: "el modelo aditivo es un obstáculo resistente a la puesta en evidencia del modelo multiplicativo y debe poder serle opuesto en situaciones abiertas" (Brousseau, 1981, p.61).

situación del rompecabezas, la cual es clave en el proceso de resignificación de la multiplicación.

En la experiencia que describió Brousseau (1981), los alumnos debían hacer reproducciones de varias figuras respetando la siguiente regla: El segmento que mide 4cm deberá medir 7cm en la reproducción. En los equipos de esa experiencia, los alumnos sumaron 3cm al segmento que medía 4cm para obtener 7cm, e hicieron lo mismo para obtener las demás medidas. El error aditivo emergió cuando construyeron las figuras con material recortable y se enfrentaron a que no embonaban.

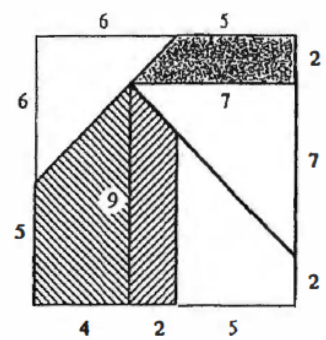


Figura 1. Rompecabezas (Brousseau, 1981, p.70).

Los equipos relizaron varios intentos, pues la mayoría de los alumnos "piensan que es necesario sumar 3 centímetros a todas las dimensiones. Los resultados son evidentes. Discusiones, diagnosticos, los líderes acusan a sus compañeros de no haber tenido cuidado. No es el modelo, son las acciones las que se ponen en duda" (Brousseau, 1981, p.70). El desconcierto es tan fuerte, que los alumnos vivieron una ruptura del contrato pues el error aditivo se evidenció. Cabe señalar, que está situación es amplia e incluye varias fases que no explicaré en este trabajo.

Esta situación, tiene como objetivo franquear[8] un obstáculo didáctico[9] epistemológico: el error aditivo.

[8] Para Brousseau, el franqueamiento del obstáculo implica una "reestructuración de los modelos de acción, del lenguaje y del sistema de pruebas" (Brousseau, 1983, p.77).

[9] Existe una clasificación de obstáculos en función de su origen: **Epistemológicos.** Son obstáculos que se relacionan con la construcción del conocimiento en un sentido diacrónico. Son obstáculos que se han presentado a lo largo de la historia de la construcción del conocimiento.
Didácticos. Se refieren a los que produce el sistema de enseñanza como sus prácticas y metodologías.

> Un obstáculo se manifiesta por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar, son reproducibles, persistentes. En un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones (Brousseau, 1983, p.70).

En la experimentación de la situación del rompecabezas, los estudiantes vivieron distintos procesos en los cuales se enfrentaron a la ruptura del contrato, eso desencadenó una serie de reacciones que el docente debía atender sosteniendo la fase adidáctica[10], es decir, sin manifestar de manera explícita lo que se debía hacer. Esa ruptura propiciará el aprendizaje en el estudiante, pues se enfrenta a que sus conocimientos no son suficientes, es decir, no alcanzan para lograr el objetivo, la amplificación de la figura:

> El aprendizaje es una adaptación del alumno a una situación problema nueva. Las dificultades que se encuentra son fundamentales para provocar esa adaptación. La nueva concepción aparece porque es una solución a esas dificultades. Es una reequilibración del sistema de respuestas del alumno (Brousseau, 1981, p.51).

En esta situación adidáctica, se espera que sea la misma situación que evidencie la ruptura del contrato. No obstante, el trabajo del docente es esencial "si las evidencias deben construirse contra el contrato actual, es necesario que el profesor otorgue a los alumnos los medios para hacerlo" (Sensevy, 2011, p. 340). En la situación adidáctica, el docente no se mantiene ajeno, más bien, se requiere de su acción profesoral pues "lo esencial consiste en dos hechos. Sin la acción profesoral los alumnos no podrían avanzar. Con la acción profesoral, ellos avanzan, es decir, encuentran la ignorancia" (Sensevy, 2011, p.341). Lo que significa, que el modelo aditivo que aplicaron no funciona.

El encuentro con la ignorancia, en esta experiencia, alude al proceso de ruptura del contrato:

> Antes de cualquier cosa, los alumnos deben encontrarse con su ignorancia, con la resistencia del medio. Quiero decir, que deben reconocer que sus conocimientos matemáticos actuales, fundados en la adición no les permiten producir la amplificación pertinente (Sensevy, 2011, p.338).

Ontogénicos. Se producen internamente en el estudiante, pueden ser de origen neurofisiológico y tienden a ser limitantes propias que el alumno posee ante problemas a los que no se encuentra conceptualmente preparado.

[10] Es esencial, que el profesor pueda en lo previsto dar a sus estudiantes el hábito de aceptar buscar sus soluciones de la situación y no de interpretar los indicios que él pudiera darles. El maestro requerirá de neutralidad cognitiva para sostener a los alumnos en la parte afectiva sin interrumpir los procesos psicológicos y sociales que deben llevarse a cabo (Brousseau, 1981, p.72).

En el trabajo de Sensevy (2011), el rol del profesor toma gran importancia, no sólo en las situaciones de institucionalización, sino en todas las fases, incluyendo la adidacticidad.

Un problema de lenguaje: $\frac{1}{2}$ de y $\frac{1}{2}$ veces

El lenguaje toma un papel importante en las dificultades para interpretar las fracciones, una de estas problemáticas, Freudenthal la describió como *asimetría* entre la multiplicación y división de fracciones. Desde su perspectiva, destaca que es necesario diferenciar didácticamente: n-ésima parte de y n-veces.

> El operador n-ésima parte de, puede realizarse dentro del objeto y ser una parte concreta de algo. Por otro lado “n-veces” no puede ser realizado por medio del objeto dado, tenemos que utilizar otros (Freudenthal, 1983, p. 22).

Expresar $\frac{1}{3}$ **de** y $\frac{1}{3}$ **veces** de manera indiscriminada propicia problemas en la comprensión de las operaciones con fracciones y en sus distintas acepciones. En téminos de Freudenthal, incluso los libros de texto no se preocupan por mostrar dicha diferencia, de ahí que insista en que es importante concientizar la diferencia entre $\frac{m}{n}$ de y $\frac{m}{n}$ veces.

Este problema de lenguaje puede verse como una de las manifestaciones visibles de la dificultad conceptual que está en la problemática que estudio: ¿Qué significa multiplicar por fracciones? En los naturales, multiplicar por n se asocia con considerarlo $n-veces$; sin embargo, al pasar a los racionales esa idea se complica, ¿acaso puede decirse que tomar $\frac{1}{3}$ de algo es consideralo $\frac{1}{3}$ veces? Aquí entran en juego dos ideas distintas de multiplicación que deberán conciliarse.

Para esa problemática, Freudenthal (1983), en su fenomenología, sugirió algunas alternativas. Propuso repetir distintos ejemplos en los que tuviese sentido “reemplazar $\frac{m}{n}$ *de* por $\frac{m}{n}$ *veces*” principalmente de procesos cíclicos y periódicos (Freudenthal, 1983, p.39). Planteó, además, que el lenguaje cotidiano permite hacer ese salto, incluso sin importar el idioma. Por ejemplo, el diagrama circular y una recta:

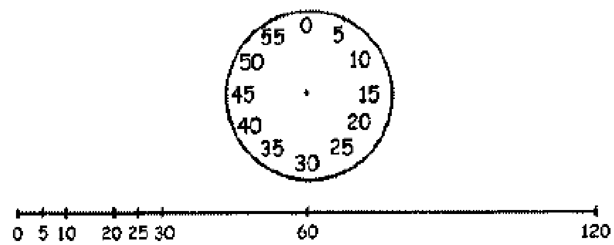


Figura 2. Diagrama circular (Freudenthal, 1983, p.39).

Con apoyo de este diagrama es posible mostrar que:

$\frac{1}{2}$ veces 60 (alrededor del reloj) = $\frac{1}{2}$ de 60 (segmento)

Lo anterior, según el autor, al hacerse de forma repetitiva favorecerá la identificación esperada de forma natural.

Por otra parte, Rouche (1998) también propuso algunas ideas que contribuyen a mostrar la relación entre "de y veces", principalmente con modelos de áreas de rectángulos, ya que el área de un rectángulo se obtiene calculando el producto de las longitudes de sus lados. Rouche (1998) muestra un ejemplo para calcular $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

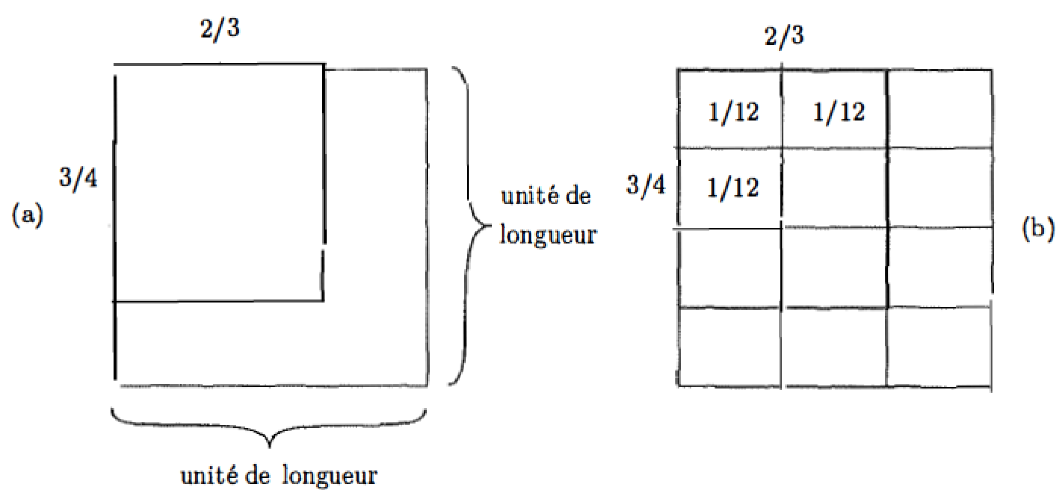


Figura 3. Ejemplo de cálculo de áreas (Rouche, 1998, p. 108).

Para el cálculo del área, sostiene "que utilizamos espontáneamente la multiplicación (escrita "x" y leída veces) porque el área del rectángulo se obtiene haciendo el producto de las medidas de sus lados. Ese ejemplo del rectángulo puede contribuir al tránsito de "de" a veces" (Rouche, 1998, p. 109). Sin embargo, señala que no es un proceso fácil para todos los estudiantes, lo que motiva a reflexionar sobre el diseño de situaciones que persiguen este objetivo.

> El pasaje de "de" a "veces" es difícil para muchas personas, especialmente en el caso donde la fracción es menor a 1. El paso no es voluntario, una de las razones es que la multiplicación aprendida de inicio en los naturales tiene el efecto de aumentar la cosa que se multiplica. Sin embargo, $\frac{2}{5}$ veces, es mutiplicar por 0.4 y el efecto es de disminuir lo que se multiplica (Rouche, 1998, p.75).

Importancia de ir más allá de la fracción como expresión de la relación parte todo

Freudenthal (1983), asegura que el enfoque utilizado para la enseñanza de las fracciones se ha limitado al estudio de la fracción[11] como "parte-todo", restringiendo otros significados y provocando problemas para su aprendizaje: "La fracción como parte de algo es de una concreción tan fascinante y convincente que uno se siente fácilmente satisfecho con este enfoque fenomenológico y olvida los otros" (Freudenthal, 1983, p. 22). En sus hallazgos, mostró que "algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas. La pobreza fenomenológica del enfoque es en parte responsable de este fallo didáctico" (Freudenthal, 1983, p. 20). Señala que es necesario una fenomenología didáctica que incorpore las diferentes interpretaciones de fracciones: fracturador, transformador, comparador, parte-todo, operador razón, número, etc.

Aunque este autor no lo hace explícito, a estas diferentes interpretaciones, sobre todo, las de trasformador y operador razón, subyace la noción de proporcionalidad. Cabe señalar que en la secuencia de Brousseau (1981), las fracciones asumen el papel de razones, cocientes, medidas y operadores multiplicativos, más no específicamente el de relaciones parte todo.

[11]"Las fracciones no son el resultado de una definición; en cambio, se descubren y se describen" (Freudenthal, 1983, p. 33).

Razones internas y externas

En el estudio de la implementación de las situaciones que realizaré, aparecen con frecuencia los términos de razones internas y externas, sobre todo, en las últimas cuatro situaciones. De ahí que convenga precisar brevemente estos conceptos:

En sus trabajos, Freudenthal (1983) distinguió las razones internas y externas. Las internas "como las formadas dentro de un sistema y a las externas, a las razones entre dos sistemas" (Freudenthal, 1983, p.9). Este investigador señaló que pueden interpretarse como:

> La razón interna es un número.
>
> La razón externa es una magnitud.

En el contexto de la proporcionalidad, parto de dos definiciones que ejemplifican el papel de las razones internas y externas en este estudio.

La primera definición es: "una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales" (Block, Mendoza y Ramírez, 2012, p.27). Los autores apuntan que se puede hablar de factores o razones internas, considerando una diferencia en cuanto que "la razón destaca la relación que guarda una cantidad respecto a otra. La razón entre 1 y 4 es la misma que entre 2 y 8. El factor en cambio, es solo un número que resulta de esa relación" (p.27).

La segunda definición se relaciona directamente con la razón externa:

> Una relación entre dos conjuntos es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente del otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante. En este caso puede sustituirse el término factor externo por razón externa (Block, Mendoza y Ramírez, 2012, p.27).

En el contexto de las escalas, por ejemplo, el factor interno aparece en la misma magnitud, mientras que la razón externa (constante) es la relación entre dos o más magnitudes.

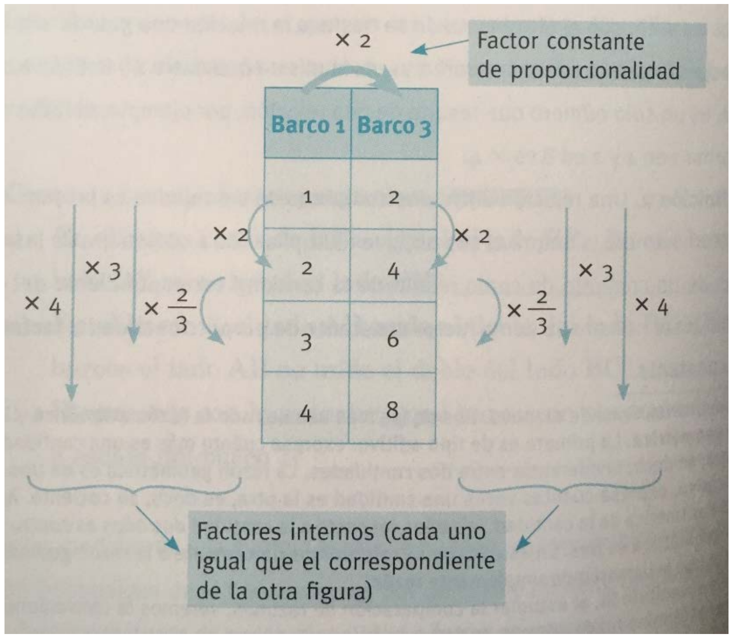


Figura 4. Dos definiciones de la proporcionalidad (Block, Mendoza y Ramírez, 2012, p.28).

La secuencia didáctica utilizada.

La secuencia didáctica que se utilizó en esta investigación, tiene como propósito favorecer el aprendizaje de la multiplicación de fracciones de manera integrada al de la proporcionalidad (razones internas, externas, valor unitario).

La secuencia didáctica consta de ocho lecciones, las primeras seis forman parte de una propuesta desarrollada en un libro de texto[12] para alumnos de primer grado de secundaria, en la que se propone el acercamiento mencionado: el estudio de la multiplicación de fracciones integrado con el de proporcionalidad. Incluye dos lecciones más que diseñé para complementar las anteriores, usando contextos relacionados con el arte. En estas últimas, busco aportar, a través del estudio de las proporciones en el cuerpo humano y las escalas una motivación adicional al trabajo de los alumnos.

En su conjunto, se concibió la construcción del algoritmo para la multiplicación de fracciones de forma paulatina, privilegiando problemas que favorecen el sentido en el seno de las relaciones de proporcionalidad.

[12] Por Block, Balbuena y García (2015). El libro de texto está vigente y autorizado por la Secretaría de Educación Pública. Es necesario mencionar que el libro incluye más lecciones que integran ambos contenidos; sin embargo, por las limitaciones de tiempo sólo recuperé seis.

A continuación, me detendré en algunas características relevantes de la secuencia:

Se inicia con el caso más sencillo, en el cual el multiplicador es un número natural N y el multiplicando una fracción $\frac{a}{b}$, después se pasa por el caso en el cual el multiplicador es fracción y el multiplicando una medida expresada con un número natural N, con el sentido ya conocido de “tomar una fracción de”. Se llega al caso en el cual ambos factores son fraccionarios, primero con el multiplicador expresando “tomar una fracción de”, y después con el sentido de operador, en el contexto de la proporcionalidad, de la escala.

Cuando los estudiantes se enfrentan a un multiplicador natural. Para ellos, resulta casi de inmediato la aplicación de la suma iterada:

$$5 * \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

¿Qué sucede cuando se plantean de manera diferente el orden de los factores?

$$\frac{3}{4} * 5 =$$

En este caso, si se plantea de manera descontextualizada los alumnos aplican la misma técnica que en el caso más sencillo. Por ello, es de suma importancia tener en cuenta la diferencia entre multiplicador y multiplicando (más allá de la conmutatividad), cuando se trabaja con magnitudes (y no en abstracto).

En esta propuesta, los números hacen referencia a medidas concretas, por lo que, si se conmuta el orden de los factores de la multiplicación, aunque el resultado es el mismo, el significado es diferente.

Ahora bien, el problema se vuelve más complejo cuando ambos factores son fraccionarios:

$$\frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

¿Qué significa multiplicar dos fracciones?[13] En la propuesta, se pretende construir el sentido a través de situaciones de proporcionalidad. Para la multiplicación de dos fracciones, la

[13]Una noción matemática está de inicio dotada de una funcionalidad interna, relativa a su consistencia con otras nociones del currículum y a problemas que puedan tratar juntas (por ejemplo, se podrá comparar la multiplicación de un racional por un entero con la multiplicación de racionales entre estos, y recuperar lo que

secuencia ofrece tres acercamientos en paralelo. Multiplicar una cantidad F por $\frac{a}{b}$ se interpreta como:

1) Tomar $\frac{a}{b}$ de F (relacionando esto al tomar $\frac{a}{b}$ veces F);

2) Encontrar la imagen de F en una relación de proporcionalidad (escala) en la que $\boldsymbol{b}$ se trasforma en $\boldsymbol{a}$. (Esto es, en la que el valor unitario es $\frac{b}{a}$ de unidad, y el operador constante es $x\ \frac{b}{a}$).

3) Aplicar sucesivamente dos operadores: $(:b)$ y $(x\ a)$.

Enseguida, presento el conjunto de situaciones con sus propósitos:

esta comparación puede aportar para comprender mejor la composición de las aplicaciones lineales). Asimismo, está caracterizada de una funcionalidad externa, relativa a la manera en la cual puede modelizar una acción en la realidad (Sensevy, 2011, p.318).

Situaciones	Objetivos
1. La mitad de un cuarto.	Establecer una técnica (algoritmo) para multiplicar una medida fraccionaria por un multiplicador natural y para dividirla entre un natural. En esta situación se considera el caso más sencillo de la multiplicación, en el cual un factor es fraccionario, el que juega el papel de multiplicando (medida que es objeto de repetición) y el otro factor es entero positivo (el multiplicador, indica las veces que se repite la medida), por lo tanto, se espera que los estudiantes utilicen la suma iterada como un recurso inicial y gradualmente construir el algoritmo.
2. Vueltas alrededor de un circuito I	Introducir un primer sentido de la multiplicación por un multiplicador fraccionario. Establecer que la técnica para aplicar un multiplicador $\frac{a}{b}$ a un natural N es la misma que la que se usa para tomar una fracción $\frac{a}{b}$ **de** N. Dividir N entre b y multiplicar por a. $\frac{a}{b} * c = (c{:}b) * a$
3. Vueltas alrededor de un circuito II	Vincular explícitamente la acción de “tomar una fracción ***de***” con la de multiplicar por una fracción. Establecer un primer acercamiento al algoritmo para multiplicar dos fracciones.
4. ¿Qué número multiplicado por 2 da 3?	Establecer que el cociente de dos números naturales a y b, es la fracción $\frac{a}{b}$ (este resultado es utilizado después en un segundo acercamiento al algoritmo). Reconocer que en una multiplicación los factores pueden ser fraccionarios.

5. Banderas a escala.	Evidenciar el error aditivo. Establecer el recurso del valor unitario fraccionario para hallar valores faltantes en una situación de proporcionalidad. Entrar al significado de la multiplicación como factor de escala. Nota: Se espera que las fracciones o decimales aparezcan en esta situación como la medida asociada a 1, y no aún como el factor de escala.
6. Más del doble pero menos del triple.	Obtener factores de escala a partir de una serie de datos en una situación de variación proporcional.
7. ¿Una buena selfie?	Obtener el factor de escala a partir de relacionar las medidas de los lados de las figuras y con apoyo de las fracciones. Aplicar el factor de escala en contextos geométricos y artísticos. Introducir la noción de razón como comparación de dos cantidades, en contextos relacionados con el arte.
8. ¿Quién es el ladrón?	Identificar la relativa invariancia de las razones entre las partes del cuerpo humano (razones internas). Resolver un problema del tipo valor faltante.

Aquí termina la presentación de mi Marco epistémico de referencia (MER) relativo al conocimiento sobre "multiplicación de fracciones", así como la caracterización de la propuesta que el docente utilizó. En lo siguiente, presentaré el marco conceptual en el que me apoyo para analizar la relación del docente con la propuesta. Como podrá verse, está integrado de aportes de distinta naturaleza.

1.2 Procesos de apropiación del docente (relación dialéctica).

Los estudios en didáctica utilizan frecuentemente como metodología la experimentación de situaciones, y más específicamente, la ingeniería didáctica (ID) (Artigue, 1995). El análisis se centra en la génesis de un contenido y en su aprendizaje. Las reflexiones se enfocan en las interacciones de los estudiantes con un medio, con lo cual responden a la necesidad de "recentrar el lugar del alumno" (Bolon, 1996, p.17).

Estos estudios enfrentan la dificultad metodológica de una exigencia de “reproductibilidad”, lo que implica, explicitar las condiciones que permitirían que una determinada secuencia de situaciones produzca resultados similares en las sucesivas aplicaciones de la misma.

Un avance fue la distinción entre dos tipos de reproductibilidad: la externa y la interna. La primera “se sitúa al nivel de las historias, va de la mano con las intervenciones del profesor, más o menos conscientes, la interna es menos fácil de identificar, se sitúa en el nivel del sentido” (Bolon, 1996, p.17).

Como he comentado, se ha detectado un fenómeno que parece generalizado: cuando los profesores utilizan en sus clases secuencias de situaciones que son producto de investigaciones en didáctica, tienden a imprimirles, involuntariamente y naturalmente, cambios, que “desvirtúan” el propósito de las mismas. Los conocimientos a que dan lugar, en caso de propiciarse, muchas veces no tienen el *sentido* previsto en el diseño original de las secuencias (Artigue, 1995; Perrin Glorian, 2011). Es decir, no ocurre la reproducción esperada.

La constatación anterior ha sido fuente de preocupación y de análisis. ¿Por qué no ocurre la reproducción esperada? Y, sobretodo, ¿debería ocurrir? ¿Es correcto esperarla? Las respuestas a estas preguntas han sido diversas, y han dado lugar a líneas de investigación amplias.

A continuación, presento estudios que me parecen relevantes derivados de la constatación de la no reproductibilidad. Estos resultados constituyen un antecedente de mi trabajo.

1.2.1 Transformar para utilizar: condición de la “apropiación”.

En esta parte, abordo la problemática de los procesos de apropiación de las propuestas didácticas, y para ello recupero referentes desde la didáctica, en particular, los estudios sobre la práctica docente de Block, et al., 2007, Robert, 2007., y Roditi (2003), y también estudios desde la perspectiva sociocultural (Mercado y Rockwell, 1988). Estos aportes constituyen mis herramientas principales de análisis.

Desde una perspectiva sociocultural, Mercado (2002) plantea que los saberes docentes se construyen en la enseñanza y son el resultado de un proceso dialógico. “Es en el trabajo diario del aula donde los maestros se apropian de los saberes que necesitan para la enseñanza" (Mercado, 2002, p.35). La utilización de propuestas didácticas también pasa por un proceso de apropiación. En las tres décadas recientes, se ha tomado conciencia, también desde la didáctica, que los profesores, para usar las propuestas didácticas que se les ofrecen, necesitan transformarlas y adaptarlas a sus necesidades, es decir, apropiarse de estas de acuerdo a su comprensión de los procesos involucrados. La transformación es un *sine qua non* de la apropiación (Block, et al., 2007), entendiendo por apropiación una reelaboración personal de la propuesta en juego, que incluye la construcción de conocimientos nuevos bajo un proceso complejo "que se da en el cruce entre la biografía individual y la historia de las prácticas sociales y educativas" (Mercado y Rockwell, 1988, p. 72).

En México, sobre todo a partir de la reforma de 1993, se han realizado varios estudios sobre los usos por los profesores de propuestas curriculares de matemáticas (Ávila, 2001, Ávila, Block, y Carvajal, 2013, Ríos, 2016). En el estudio longitudinal de la relación de los maestros con la propuesta curricular[14] de 1993 (Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D., 2007), los investigadores analizaron procesos de comprensión de profesores de primaria ante los planteamientos de ese enfoque a partir de datos obtenidos mediante la observación de sus clases y entrevistas. Algunos de los hallazgos fueron: heterogeneidad[15] en las prácticas observadas, ciertos malentendidos o simplificaciones[16] del enfoque didáctico. Finalmente, el papel importante que parece tener la comprensión del contenido matemático por los profesores en su posibilidad de transformar con éxito las propuestas, conservando su sentido original así como el papel positivo de la colaboración entre pares. En el estudio citado, se asume una premisa que se sustenta en aportes de la línea de investigación de la práctica docente, de corte etnográfico, en la cual el profesor no se limita a ejecutar las normas o propuestas que rigen su trabajo, sino que su práctica es heterogénea:

> Esta heterogeneidad, resultado entre otras cosas de la progresiva apropiación y utilización de prácticas a lo largo de la vida de cada maestro, no se da, desde luego, en un vacío: se da en determinados contextos culturales y sociales que estan también en proceso de transformación (…) Conforman a·lo largo de su vida una práctica, acumulan una experiencia específica y única, vinculada siempre a aquellos elementos concretos de los que pueden

[14] En 1993 se llevó a cabo una de las reformas educativas más importantes en México. En Matemáticas se introdujo el enfoque de resolución de problemas como fuente para el aprendizaje. En estos programas de estudio se retomaron las propuestas de la didáctica francesa, en particular de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

[15] En algunas prácticas docentes se observó una recuperación importante del enfoque para la enseñanza de las matemáticas de la propuesta de 1993, mientras que en otras se diluyó por completo.

[16] Por ejemplo, se resuelven problemas, pero como la aplicación de conocimientos previamente enseñados.

disponer, que estan presentes en las localidades en que se desenvuelve su vida y su trabajo (Mercado y Rockwell, 1988, p. 73).

1.2.2. Caracterización desde la didáctica del trabajo del profesor.

En mi estudio, asumo la necesidad del profesor de reconstruir las propuestas con las que él trabaja y me pregunto por las características que tiene la relación que establece con una propuesta en particular, portadora de ciertas innovaciones en el tratamiento de un contenido matemático específico (la multiplicación de fracciones). Me cuestiono sobre qué se retoma, qué se transforma y cómo, qué se deja de lado.

Me interesa indagar qué se infiere de ello en cuánto a la factibilidad[17] de la propuesta, en cuanto a posibles mejoras a la misma para volverla más utilizable y respecto de su contribución a la mejora de la clase. Al mismo tiempo, me propongo avanzar en la comprensión de las necesidades del profesor, de sus posibilidades y dificultades para llevar a cabo ciertos cambios, así como de sus necesidades de formación.

Con el objetivo de comprender con mayor amplitud y profundidad la toma de decisiones de los profesores al impartir su clase, en las últimas décadas se han desarrollado con fuerza ciertas líneas de investigación desde la didáctica de las matemáticas (Block, et al, 2015; Robert, 2007; Roditi, 2003; Perrin-Glorian, 2001; Margolinas, 2002; Sensevy, 2011). Haré referencia a trabajos en los que encontré puntos de apoyo para mi estudio.

Las dimensiones del trabajo del profesor, por Aline Robert

Aline Robert (2007) propone una categorización para el estudio del docente desde la perspectiva de su trabajo profesional. Distingue dos dimensiones, una relativa al aprendizaje de los alumnos y otra a la profesión docente.

La dimensión relativa al aprendizaje consiste en dos componentes: cognitiva y mediativa. La primera, se avoca al trabajo previo de preparación de la clase, como la selección de tareas y la planificación de la actividad. La dimensión mediativa se refiere al desarrollo de la clase y enfoca al profesor como mediador entre el conocimiento y los alumnos. Se centra en las decisiones que él toma durante el desarrollo de la clase; en ésta

[17] Accesibilidad, flexibilidad y comunicabilidad.

conviven subcomponentes que se dedican al estudio de las tareas que se asignan a los alumnos, como el manejo del tiempo, las ayudas que ofrece el docente, etc.

En el análisis de la práctica docente que realizo en mi estudio, la componente cognitiva –aquella que tiene relación con la planeación de la clase, la selección de las tareas– tiene una característica especial, pues la planeación del profesor parte de las situaciones que se le pidió que utilizara. Sí bien, el docente hizo una lectura personal de dichas lecciones, esto lo observo principalmente en la componente mediativa, en el análisis de las decisiones que tomó al aplicar las lecciones.

Por ello, la componente cognitiva la atenderé, sobre todo en el análisis previo de la propuesta, mientras que la mediativa será central a lo largo del análisis a posteriori de las situaciones. Cabe señalar, que las decisiones que el maestro toma en la clase tienen una componente cognitiva. Él también atiende cuestiones cognitivas de los alumnos *in situ*, pero estos términos se utlizan para enfatizar en dónde se acerca la mirada en distintos momentos. Cuando el docente hace trabajo previo, atiende posibilidades de aprendizaje de los alumnos y además tratando de prever cosas en su mediación que aún no ocurre.

Volviendo a la categorización de Robert, en cuanto a la dimensión de la profesión docente, la investigadora plantea tres componentes: institucional, personal y social. La primera vinculada directamente con la institución educativa, que incluye el currículo, los libros de texto y los materiales oficiales que deben utilizar los profesores de manera obligatoria. Asimismo, aspectos relacionados con la gestión, los horarios, el tiempo dedicado a las clases y a otras actividades escolares y/o administrativas.

La componente social alude a otros actores (colegas, alumnos, padres de familia, sociedad en general) que también tienen un impacto en las prácticas del profesor. Estos actores influyen como “voces externas” (Mercado, 2002), no sólo actores individuales, sino la influencia de instituciones, cursos y actualizaciones. En el trabajo de enseñanza de los profesores, estas voces forman parte de lo colectivo, lo histórico y lo social.

En la componente personal, recupero las representaciones del docente (Peltier, 1998), las decisiones que toma, la necesidad de confort y de los riesgos que se toman. En esta componente, me interesa reconocer algunas concepciones[18] del profesor sobre los

[18] Me refiero a su concepción sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, sobre la multiplicación de fracciones y la proporcionalidad.

objetos del estudio (conocimiento matemático, aprendizaje, enseñanza, entre otros). Así, mediante el análisis de la componente personal intentaré dar cuenta de los conocimientos didáctico matemáticos del profesor, y también de algunas creencias y concepciones referentes a la enseñanza y el aprendizaje, que podrían manifestarse en sus decisiones, procurando no perder de vista que éstas no son definitivas, más bien dinámicas y que se siguen transformando todo el tiempo.

Los incidentes

En la línea de estudios sobre el trabajo del profesor, inspirado en los trabajos de Rogalsky (2000), Roditi (2003) acuñó la categoría *incidente* como "una manifestación pública de un alumno o un grupo, en relación con la enseñanza y con una distancia negativa en relación al conjunto de respuestas correctas esperadas para la consigna o problema propuesto" (Roditi, 2003, p.12). Este investigador centró su análisis en las formas en que el docente gestionó los incidentes, bajo el supuesto de que estas formas revelan su perspectiva didáctica. El investigador codificó las respuestas del profesor ante los incidentes mediante las siguientes categorías (Roditi, 2003, p.13):

- Ignorar
- Responder
- Enriquecer
- Relanzar: Cambiar al alumno que participa, guiar al alumno, facilitar la tarea, solicitar profundizar la respuesta, responder directamente la pregunta de manera neutra.

El modo de gestión de los incidentes contribuye al análisis de las acciones del profesor ante ciertas respuestas de los estudiantes, y de esta manera, se constituye en una herramienta más para el estudio de la componente mediativa. En mi trabajo, prestaré atención de manera sistemática a este tipo de incidentes, aunque no procederé a su clasificación y estudio sistemáticos en esos términos.

1.3 El objeto de la investigación

En este estudio me propongo:

- Estudiar la relación de un profesor con una propuesta didáctica que tiene algunos elementos innovadores con respecto a la enseñanza usual: la enseñanza de la multiplicación de fracciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad (integración de dos contenidos).

- Aportar a la comprensión de los procesos de apropiación de alternativas curriculares por parte de los docentes (Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D., 2007; Robert, 2007; Sensevy, 2011).

1.3.1 Preguntas de investigación

Las preguntas de investigación son una guía que me permite reflexionar sobre mi objeto de estudio y orientar el análisis. A continuación, enlisto las preguntas que han orientado mi investigación:

¿Cuáles son algunas de las caracteristicas didácticas relevantes de la secuencia de enseñanza que se propone al profesor?

¿Qué transformaciones hace el profesor a la propuesta de enseñanza y cómo lo hace? Es decir, ¿cómo se apropia de la propuesta?

De las respuestas a estas preguntas, ¿qué puede inferirse de esa apropiación? ¿qué elementos permanecen y cuáles quedan fuera de la propuesta? ¿qué factores intervienen en las transformaciones que hace el docente?

A partir de esas transformaciones, ¿qué puede inferirse en cuánto a la factibilidad de la propuesta (accesibilidad, flexibilidad y comunicabilidad)?

1.3.2 Metodología

Acercamiento

El interés por estudiar las dificultades de los profesores al utilizar programas de enseñanza emanados de la investigación, y por encontrar formas de superarlas, motivó a Perrin-Glorian (2011) a desarrollar la línea de estudio llamada Ingeniería de Desarrollo (IDD), cuyo objetivo “es la producción de recursos para los profesores o formación docente” (p.69). Existe la preocupación, dice la investigadora, de construir situaciones viables para la enseñanza regular y “encontrar medios para mejorar la enseñanza para los alumnos” (p.61). En las IDD se reconoce que el docente es un actor fundamental que participa de manera muy activa en las situaciones a-didácticas y en los procesos de devolución (Margolinas, 2009, Perrin-Glorian, 2011, Sensevy, 2011).

De manera similar, en el presente estudio me propuse dar cuenta de la relación de un profesor con una propuesta didáctica, con vistas a determinar en qué grado y de qué manera dicha propuesta constituye una herramienta útil para el profesor, y de no ser así, para indagar los motivos.

Cabe precisar que, Perrin Glorian especifíca que las propuestas didácticas con las que ella trabaja en sus estudios de IDD, son productos de ingenierías didácticas de primera generación. En el caso de mi estudio, si bien la propuesta incorpora una forma de introducir la multiplicación de fracciones generada desde la investigación, no es en sí un producto de investigación didáctica. Es por esta razón que planteo que la metodología que utilizo es una variante de las IDD concebidas por Perrin-Glorian.

La secuencia didáctica de la propuesta, como pudo verse anteriormente, fue sometida a un análisis preliminar, en el que busqué explicitar y fundamentar las principales características epistémicas de la propuesta (específicamente, acerca del conocimiento de multiplicación de fracciones). Después, para cada situación implementada, elaboré un análisis previo destacando ciertas características de cada actividad (principalmente el propósito didáctico, pero también, a veces, la justificación de ciertos valores y los procedimientos esperados). Es decir, sometí la secuencia a un análisis preliminar similar al que se realiza en las ingenierías didácticas de investigación (de primera generación).

La escuela, el docente

La experiencia se realizó en un grupo de 35 estudiantes de primer grado de una secundaria pública[19] de la Ciudad de México[20], con la participación del docente titular de matemáticas.

El docente con quien se llevó a cabo la experiencia tiene formación de ingeniero y cuenta con aproximadamente 15 años de experiencia en secundaria y bachillerato. Si bien,

[19] La escuela es general y forma parte del programa de escuelas de jornada ampliada. El horario es de 7H30 a 15H30 y hasta ese ciclo escolar se impartían diez módulos por jornada escolar, los primeros ocho de 45 minutos y los últimos dos de 40 minutos. Asimismo, en el horario se contemplaban dos recesos, de 20 y 15 minutos respectivamente.
[20] La institución se encuentra en la zona de Lindavista al norte de la Ciudad de México.

él no conocía las lecciones que se iban a utilizar, en reiteradas ocasiones manifestó su interés por la didáctica y siempre se mostró entusiasmado y participativo durante la experiencia.

En un principio, pretendí observar a dos profesores con un perfil común en la escuelas secundarias, uno con formación normalista y el otro de origen universitario. Ninguno de los dos tenía estudios de posgrado en el área. Sin embargo, después de haber aplicado dos situaciones, la profesora normalista no pudo continuar por cuestiones de trabajo, por lo que terminé centrando el estudio en el caso del profesor cuya formación es de ingeniero. Cabe destacar que este tipo de formación, de origen universitaria, es frecuente en la configuración actual de la planta docente del nivel educativo de secundaria[21].

La información proporcionada al docente

Previamente a la realización de la experiencia, sostuve una reunión con el docente, con la finalidad de presentarle las características fundamentales de la propuesta. A lo largo del estudio, sostuve conversaciones con él, escuché sus opiniones sobre la propuesta e indagué el porqué de algunas de las decisiones que fue tomando.

A partir de mis análisis previos de las situaciones de la secuencia, elaboré “fichas pedagógicas” para el profesor, en las que explicité los propósitos de cada situación, así como comentarios de cada actividad sobre posibles procedimientos esperados (y no esperados) de los estudiantes.

Otras especifícaciones de la metodología

Las sesiones fueron videograbadas y, además, tomé notas y recuperé producciones individuales de los alumnos.

[21] “En la actualidad encontramos una recomposición de los perfiles profesionales de los maestros de secundaria, que en su mayoría ya no son los egresados de la normal superior sino profesionales sin formación pedagógica previa, y que, de acuerdo con datos oficiales, constituyen el 70 por ciento de la planta docente en el Distrito Federal” (Sandoval, 2001, p.91). Sería materia de otro estudio, con otra metodología, el indagar si hay diferencias significativas en la manera de enseñar matemáticas entre profesores normalistas y profesores universitarios, atribuibles a esa variable.

Finalmente, si bien las condiciones para la experimentación fueron en general favorables, hubo algunas dificultades. Por una parte, las condiciones de clima y ventilación[22] dificultaron algunas sesiones, principalmente las de los últimos módulos del día, en las que los alumnos mostraron dificultad para centrar su atención en la clase. Por otra parte, el que cada lección se entregara a los alumnos en fotocopias, en ocasiones dificultó el trabajo a causa de la pérdida del material o su olvido en casa. Asimismo, algunos factores de tipo institucional como la entrega de evaluaciones bimestrales o la participación en programas escolares retrasó la experimentación y causó espacios a veces cortos o largos entre una sesión y otra.

[22] La experimentación se llevó a cabo en los meses de marzo a junio de 2017. En algunas sesiones la temperatura ambiental era demasiado alta, provocando una sensación de encierro debido al espacio reducido en el aula y la poca ventilación.

CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA.

En este capítulo abordaré las ocho situaciones que constituyen la propuesta que se experimentó en este trabajo de investigación. Para cada situación, se consideraron tres apartados. El primero se refiere al análisis a priori, en el cual se destacan los propósitos, comentarios previos y algunos procedimientos esperados e inesperados por parte de los alumnos. El segundo alude al análisis a posteriori, en el cual se realizó un análisis de la experiencia con apoyo de videograbaciones de clase, notas de campo y entrevistas con el docente. Finalmente, se agregaron comentarios finales para cada situación, en los cuales se destacan puntos relevantes organizados en tres apartados: la situación, los alumnos y la gestión, esta última, centrada en la relación del profesor con cada lección y las distintas transformaciones que hizo en función de sus acciones docentes.

2.1. Situación 1[23]. La mitad de un cuarto

El propósito general de la situación es establecer una técnica para multiplicar una fracción por un número natural y dividir una fracción entre un natural.

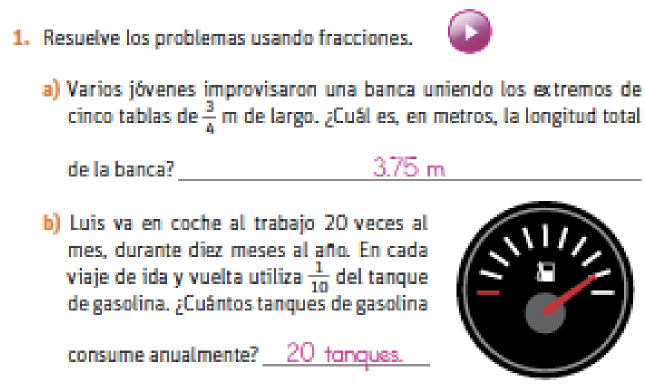
En esta situación se considera el caso más sencillo de la multiplicación, en el cual un factor es fraccionario y el otro entero positivo, por lo tanto, se espera que los estudiantes utilicen la suma iterada como un recurso inicial y gradualmente construir el algoritmo.

Actividades 1a y 1b

Propósito y comentarios previos

En estas actividades, el propósito es que los alumnos establezcan el algoritmo de la multiplicación de fracciones por un número natural N.

[23] Las situaciones completas se encuentran en el anexo.


1. Resuelve los problemas usando fracciones.

a) Varios jóvenes improvisaron una banca uniendo los extremos de cinco tablas de $\frac{3}{4}$ m de largo. ¿Cuál es, en metros, la longitud total de la banca? 3.75 m

b) Luis va en coche al trabajo 20 veces al mes, durante diez meses al año. En cada viaje de ida y vuelta utiliza $\frac{1}{10}$ del tanque de gasolina. ¿Cuántos tanques de gasolina consume anualmente? 20 tanques.

Figura 5. Actividad 1. Situación 1.

Para el primer problema (1A), se esperan dos procedimientos: El primero con sumas iteradas ($\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$). Asumo que en sexto grado de primaria se ha trabajado con sumas de fracciones con denominador común. Es posible, que algunos alumnos conviertan a fracción decimal y operen con decimales. El otro procedimiento posible (dada la tendencia a preferir trabajar con decimales) es la obtención del número decimal, (3m entre 4 =0.75m) y multiplicar por 5, lo que daría 3.75[24]

En el segundo problema (1B), dado que el multiplicador es más grande que en el anterior, se esperaría que los alumnos optaran por multiplicar 20 veces $\frac{1}{10}$ de tanque, más que sumar 20 veces $\frac{1}{10}$, o incluso, considerando los 10 meses, 200 veces $\frac{1}{10}$ que son 2 tanques por mes (valor unitario) y enseguida obtener los 20 tanques para diez meses. De acuerdo a la propuesta del texto se espera que estas resoluciones ayuden a justificar el algoritmo $n * \frac{a}{b} = \frac{n*a}{b}$

Análisis a posteriori

Problema 1A

La dinámica para ambos problemas fue en plenaria con participaciones individuales de los estudiantes, y con pocas interacciones entre ellos. El profesor intentó sostener la fase adidáctica en las actividades con la primera consigna que enunció; sin embargo, no lo logró

[24] En la ficha que se entregó al docente, aparece como resultado para la Actividad 1A= 3.75m. Es posible que este detalle haya influido en lo que esperaba el docente como respuesta, dejando en segundo plano la fracción y priorizando el decimal. Por ello considero que ese resultado no debería aparecer.

ya que los alumnos no tuvieron el tiempo necesario para pensar en formas de resolver ambos problemas.

Pr: resuélvanlo como ustedes sepan y luego lo reviso.[25]

En el primer problema, habían transcurrido apenas dos minutos, cuando dos alumnos ya tenían propuestas de solución: Enseguida los procedimientos de José María (Figura 6) y Vanessa (Figura 7) en el pizarrón:

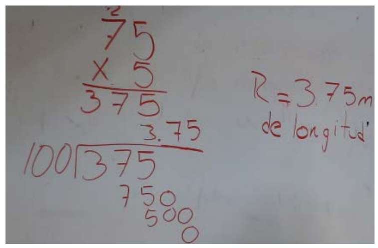


Figura 6. Procedimiento de José María en el pizarrón.

Pr: ¿Quién tiene lo mismo?
(Algunas manos levantadas)
Pr: Vanesa tiene algo parecido, pero pasa para que veamos.

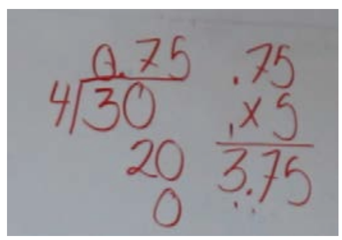


Figura 7. Procedimiento de Vanesa en el pizarrón.

El docente asumió que la mayoría de alumnos tenían el mismo procedimiento que José María (Figura 6), por lo que no se detuvo a mirar lo que hicieron todos. Sin embargo, algunos estudiantes únicamente copiaron el proceso del pizarrón. El profesor no solicitó a los alumnos la explicación de sus procedimientos para una puesta en común, más bien, interpretó los procesos y explicó ante todo el grupo validando los procedimientos y resultados.

Pr: ¿Por qué 75?
José María: tres cuartas partes son 75

[25] En la transcripción de las videograbaciones se usó la siguiente convención: Profesor (Pr), Alumnos (Als). Los nombres de los alumnos se colocaron completos la primera vez y en algunos casos se abreviaron, Jesús (Je), Silverio (Si).

Pr: Él calculó de un metro los 75 cm y luego multiplicó por 5, entonces 75 por 5 nos da 375 (escribe en el pizarrón los cm). Vamos a ponerle los cm porque si es distinta la lógica de uno a la de otro. Y luego divide entre 100 porque un metro tiene 100 cm y le da 3 metros con 75 cm (señala el resultado en el pizarrón).
Pr: Vanessa sí pensó distinto, aunque es muy parecido el procedimiento. Primero convirtió los $\frac{3}{4}$ a decimales y entonces obtiene 0.75 m (agrega los m), la unidad que nos está trabajando ella es metros y él (refiriéndose al otro ejemplo) nos está trabajando en centímetros. Luego multiplicó .75 m (agrega m en la operación) por 5 y es 3.75.

Como se puede ver, en los dos procedimientos que se hacen públicos, las fracciones se evitaron: en el primero se trabajó con enteros gracias a la conversión a centímetros. El segundo da cuenta de la tendencia que se mencionó en el análisis previo, la de obtener el decimal en vez de trabajar con las fracciones.

Ya señalé que la misma lección pudo haber propiciado esto al incluir las respuestas en decimales en el ejemplar del maestro. Más adelante, cuando ya iban a resolver la actividad 2, en la que se trata de multiplicar fracciones por enteros, el docente parece darse cuenta de que la actividad 1 debía servir para establecer el algoritmo para esa operación (fracciones por enteros) y, entonces, decidió regresar al problema (1A).

El profesor propuso a los alumnos multiplicar $\frac{3}{4}$ por 5, como si se hubiera dado cuenta de que el objetivo de la actividad era multiplicar fracciones y esperando ahora que, con esta nueva revisión, los estudiantes lo harían. De esta manera, dicha técnica fue mostrada por el docente a los alumnos, sin su justificación, pero lo realizó a partir de la conclusión y ya no fue establecida por ellos mismos. Se evidenció que varios alumnos ya conocían el algoritmo e intentaron aplicarlo. Además, el profesor obtuvo el resultado fraccionario, pero desde los decimales (convirtió 3.75 a fracción), lo que cambió el propósito de la actividad.

En el siguiente extracto de registro de clase, muestro una interacción en la cual el docente preguntó a los estudiantes sobre una técnica ya aprendida para multiplicar fracciones por un entero. Dicha técnica consiste en colocar un denominador 1 al entero para aplicar el algoritmo convencional para multiplicar fracciones (multiplicación horizontal de numeradores y denominadores). La técnica fue nombrada: “el 1 mágico” y permaneció prácticamente en toda la implementación de las situaciones.

Pr: Ahora sí, multiplicaron 3 por 5 es igual a 15 y abajo 4 por 1 es igual a 4. Y obtenemos los $\frac{15}{4}$ y más adelante si convierto a fracción mixta son 3 ¾

> Pr: Muy bien, quién me dice cómo multiplico cuando estoy utilizando fracciones. No veo sus manos, cómo multiplico cuando estoy utilizando fracciones y tengo un entero de por medio.
>
> José María: Multiplicamos solamente el numerador.
>
> Pr: Ustedes me habían dicho que yo podía hacer esto, al convertir los enteros a fracción ponía un uno abajo, creo que tú mismo lo comentaste Braulio, que se los habían dicho las maestras de la primaria.

En una entrevista posterior, el docente adjudicó ese conocimiento (del 1 mágico) al nivel educativo anterior, la primaria:

> Pr: Previamente, yo había visto que, si traían conceptos de la primaria, el 1 mágico lo mencionaron ellos porque no recuerdo, pero en el primer y segundo período. Surgió un problema del libro y venía un ejercicio donde el resultado era una fracción y había que multiplicarla por enteros y entonces por ahí un alumno dijo el 1 mágico, pero lo único que vimos fue multiplicación, división jamás (…) (I. López, comunicación personal, 27 junio 2017).

El recurso de expresar un número natural como fracción colocando en el denominador un "1 mágico", para después poder multiplicar de forma horizontal usando la técnica convencional, se constituyó en un saber institucionalizado en la clase (Perrin-Glorian y Baltar, 2016), y fue de las técnicas más utilizadas para la resolución de los problemas.

Así, en este problema, al menos en el espacio público, los alumnos no participaron en la elaboración de un algoritmo específico (para multiplicar entero por fracción), y en ese sentido, no se cumplió el propósito de la actividad de transitar de sumas reiteradas ($\frac{3}{4}$,+ $\frac{3}{4}$, +$\frac{3}{4}$,+ $\frac{3}{4}$,+ $\frac{3}{4}$,= ($\frac{3+3+3+3+3}{4}$ =$\frac{15}{4}$,) a la multiplicación ($\frac{3}{4}$ x 5 = $\frac{15}{4}$,). Los alumnos solamente presenciaron cómo se aplicó un algoritmo general (el de multiplicación por fracciones) a un caso particular. No es seguro si en su trabajo personal algunos alumnos sí recurrieron a la suma reiterada y si, para otros, el contexto del problema ayudó a entender por qué se multiplica el numerador y no el denominador.

El episodio deja ver otros aspectos del funcionamiento de la clase, y más específicamente de la relación del maestro con el texto:

1) La forma en que un dato (la respuesta en decimal a una multiplicación de fracciones, puesta en el ejemplar del maestro) puede reforzar un camino que, desde los objetivos de la lección, no se deseaba transitar.

2) Una forma que podría ser muy frecuente, en la que el profesor lee el texto y se entera de los propósitos: es al llegar a la actividad 2 en donde comprendió lo que se esperaba en la actividad 1. Es decir, el profesor no leyó con detalle toda la lección previamente, sino que parece que va conociendo las actividades justo antes de aplicarlas. Sabiendo esto, ambos incidentes podrían resolverse, probablemente, con indicaciones claras en el ejemplar del maestro.

Problema 1B

En este problema, la dinámica de trabajo fue individual y con poco trabajo autónomo de los estudiantes quienes, en todo momento, esperaban las indicaciones del docente para resolver. En ciertos momentos, el profesor procuró, sin éxito, que los alumnos buscaran algunas soluciones. Finalmente, realizó la puesta en común con un procedimiento y validó el resultado.

Enseguida, muestro la imagen de la producción de una alumna, quien acudió a la técnica conocida por el grupo. Posiblemente, los estudiantes asumieron que el propósito de este segundo problema era la aplicación de la técnica convencional ya que en el primer problema aparentemente se institucionalizó la aplicación del algoritmo.

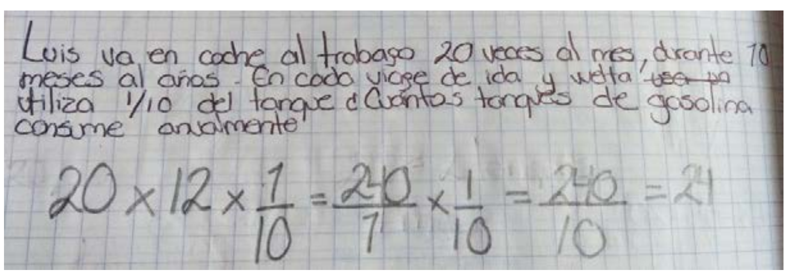


Figura 8. Procedimiento problema 1B en Cuaderno de Tonatzin.

Finalmente, el profesor leyó el recuadro de institucionalización, en el que se explica y se instituye, desde la lección, la técnica para multiplicar una fracción por un entero. El docente hizo mención que era un resumen de lo que los alumnos "habían deducido" aunque en realidad, él asumió que ese algoritmo ya era conocido por los alumnos– desde la primaria, dijo- y lo aplicaron:

> Pr: Entonces, ahí ya les están formalizando el algoritmo, ya formaliza lo que ustedes más o menos dedujeron por simple deducción.

- Analiza si en los incisos a) y b) usaste un método similar a la siguiente técnica. En caso de no ser así, aplica la técnica y verifica que obtengas los mismos resultados.

> Para multiplicar una fracción por un número entero, basta con multiplicar el numerador de la fracción por el número entero. Por ejemplo,
>
> $$\frac{3}{4}\text{ m} \times 5 = \frac{15}{4}\text{ m} = 3\frac{3}{4}\text{ m.}$$

Figura 9. Recuadro de institucionalización del algoritmo para multiplicar una fracción por un entero.

Cabe observar que en el recuadro no se hace referencia a la técnica general de multiplicar numeradores y denominadores, que fue la que se recordó en clase. Esta diferencia fue pasada por alto, seguramente porque para ese momento, la versión del texto ya no aportaba nada, su razón de ser se entiende solamente desde el objetivo de que los alumnos transitaran por sí mismos desde la suma repetida a la multiplicación.

Es posible que, aun tratadas como de repaso, las dos actividades hayan contribuido a que algunos alumnos, tanto si dominaban o no el algoritmo, asociaran la multiplicación de una fracción por un entero con la noción conocida por ellos de iteración de una cantidad, o de suma repetida, y con ello incrementaran, por poco que fuera, el sentido de dicha operación, más allá del algoritmo.

Actividad 2

2. Completa las multiplicaciones. Simplifica los resultados.

a) $3 \times \frac{1}{3} =$ ________ b) $2 \times 3\frac{1}{4} =$ ________ c) ________ $\times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

d) $5 \times \frac{4}{15} =$ ________ e) ________ $\times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$ f) ________ $\times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Figura 10. Actividad 2. Situación 1.

Propósitos y comentarios previos

Esta actividad está después del recuadro en el que se instituye el algoritmo, por lo que es de suponer que se espera, ahora sí, la multiplicación del numerador por el entero. Además, se propicia la reflexión que tres veces un tercio es el entero completo.

Análisis a posteriori

El docente propuso a los estudiantes trabajar en parejas y dio algunos minutos para la elaboración de propuestas. Para este análisis, sólo recupero los ejercicios 2A y 2C.

Ejercicio 2A: $3 * \frac{1}{3}$

Una de las parejas de trabajo escribió su propuesta en el pizarrón. Era posible que los alumnos aplicaran la suma, pero también podría ser la multiplicación del numerador por 3. Sobre todo, se podía esperar la reflexión de que tres veces un tercio es el entero completo. Sin embargo, lo que identifiqué, como en este caso, fue que los estudiantes aplicaron el algoritmo (incluso poniendo el denominador 1 al factor 3) sin apelar a otras posibilidades más vinculadas con el sentido.

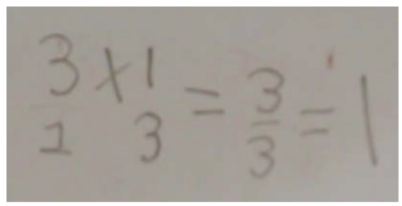


Figura 11. Producción de Regina y Jesús en el pizarrón.

Ejercicio 2C $* \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

El siguiente procedimiento es de Regina, resulta interesante que al convertir la fracción $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{6}$ se hace evidente que hay que multiplicar $\frac{1}{3}$, por 2. Sin embargo, el camino que escogen Regina y su compañero para determinar el factor faltante es largo y complicado (dividir $\frac{2}{6}$ entre $\frac{1}{6}$). Resalta que dicho camino fue muy valorado por el docente quien lo interpretó como un intento por dividir.

En el extracto, se da cuenta de lo que hizo la alumna con el ejercicio:

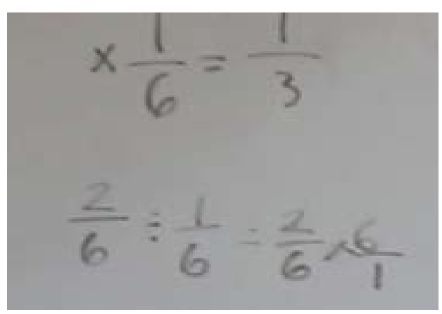


Figura 12. Producción de Regina para el ejercicio 2c en el pizarrón.

Pr: ¿Qué hiciste?
Regina: Este número lo fui haciendo más grande (señalando la fracción $\frac{1}{3}$) multiplicándolo por 2 porque está muy pequeño.

Pr: Ah, su compañera está buscando equivalencias.
Re: Multipliqué por 2 y da $\frac{2}{6}$. Y luego dividí eso entre $\frac{1}{6}$
Pr: ¿Cómo divides?
Re: Se voltea (señalando a la fracción $\frac{1}{6}$) y luego se multiplica.

No era propósito de la actividad el uso de la técnica convencional de la división entre fracciones pues en teoría todavía no estaba disponible para los estudiantes (involucra conocer el recíproco de una fracción y regresar a la multiplicación en el contexto de una división). El profesor me explicó lo siguiente sobre lo que sucedió:

> Regina es una niña a la que le dan clases particulares de matemáticas (…). Ella mencionó que "para la división se invertía" y los demás lo captaron rapidísimo, porque ningún otro alumno, ni en otro grupo, me habían hecho ese proceso. Y si me preguntas en los otros grupos vimos el zigzag y les ponía hasta con colores, pero ningún grupo hizo un señalamiento sobre ese otro procedimiento. La propuesta de Regina el grupo la acogió muy bien, les pareció muy fácil creo (…). (I. López, comunicación personal, 27 de julio 2017).

La elección de este procedimiento para hacerlo público, constituye un claro ejemplo de cómo las valoraciones del profesor determinan el acontecer de la clase y cómo, cuando dichas valoraciones son distantes de la intención del texto, este cambia. También la forma en que el profesor recuperó la participación de un alumno, es un ejemplo de lo que puede llamarse "selección oportunista de participaciones", que consiste en que, a partir de una participación que el docente considera adecuada, la valida y la institucionaliza para el grupo.

> Pr: No me importa tanto que no hayan entendido la división, eso ahorita lo vamos a tratar de deducir, pero el procedimiento sí ¿entendieron lo que hizo Regina? ¿Seguros?

Quizá sea oportuno aclarar aquí que "entender" puede tener varios sentidos. Entender un procedimiento puede significar saber qué subyace a él, qué lo justifica, o bien, solamente ver con claridad cuáles son los pasos de los que consta y aplicarlo. Es muy probable que cuando el profesor expresó "¿Entendieron?" hizo referencia al segundo sentido.

En algunas producciones individuales de los estudiantes, se aprecia su intención de aplicar el nuevo algoritmo que presentó Regina.

En la imagen siguiente, en la parte izquierda el alumno aplicó la nueva técnica (recíproco) :

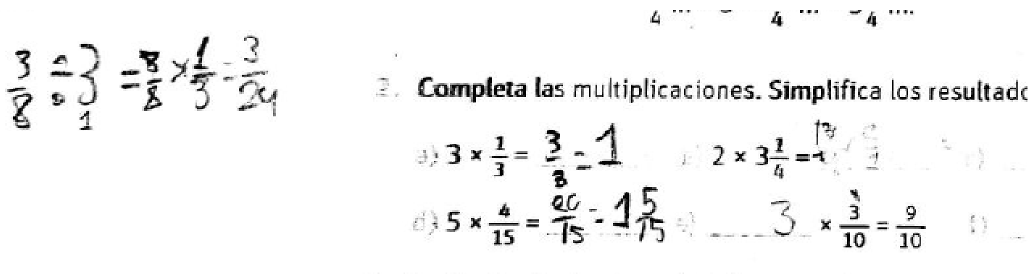
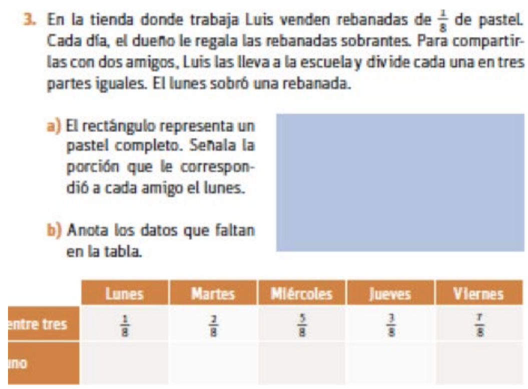


Figura 13. Producción individual de Ángel.

Actividad 3



3. En la tienda donde trabaja Luis venden rebanadas de $\frac{1}{8}$ de pastel. Cada día, el dueño le regala las rebanadas sobrantes. Para compartirlas con dos amigos, Luis las lleva a la escuela y divide cada una en tres partes iguales. El lunes sobró una rebanada.

a) El rectángulo representa un pastel completo. Señala la porción que le correspondió a cada amigo el lunes.

b) Anota los datos que faltan en la tabla.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
entre tres	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
uno					

Figura 14. Actividad 3. Situación 1.

Propósitos y comentarios previos

El propósito es establecer el algoritmo de la división de una fracción entre un natural N. Utilizando el tipo de problema “reparto equitativo y exhaustivo de una fracción de unidad”, se propicia el establecimiento de dos técnicas, una que recurre a la división del numerador y otra a la multiplicación del denominador.

Mientras que el divisor es constante (siempre se reparte entre 3 amigos) el dividendo varía (el número de rebanadas de $\frac{1}{8}$ varía, de uno en adelante). Estas cantidades se propusieron para favorecer que el resultado del reparto de una rebanada $(\frac{1}{24})$ apoye el cálculo de los otros resultados, por ejemplo: Si se reparte una rebanada a cada uno, le tocaría $\frac{1}{24}$, cuando se reparten 2 rebanadas, a cada quien le tocará 2 veces $\frac{1}{24}$[26] . En caso de no ver dichas relaciones, los alumnos disponen también del recurso del dibujo, aunque éste no es un camino sencillo.

Análisis a posteriori

<u>Actividad 3A</u>

La dinámica de trabajo fue individual con algunas interacciones entre los alumnos. Encontré propuestas interesantes: la primera imagen corresponde al cuaderno de Jesús (Figura 15), quien realizo la división prevista (equitativa y exhaustiva, en 8 y luego en 3) del rectángulo. La segunda imagen (Figura 16) muestra el procedimiento gráfico de Silverio quien explicó que éste se relaciona con los ejes de simetría y una repartición que llamó “equitativa”, lo cual en realidad no ocurre (las partes no son iguales).

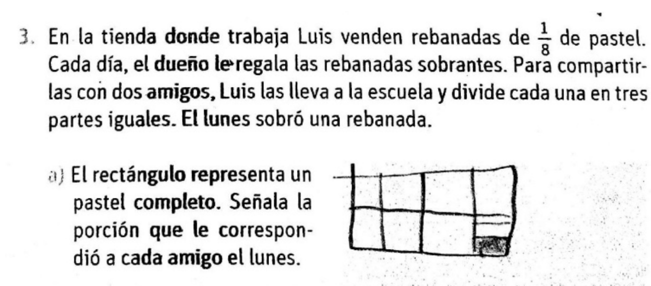


Figura 15. Procedimiento de Jesús en su cuaderno.

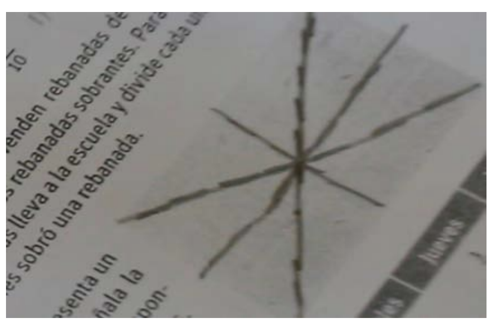


Figura 16. Procedimiento gráfico de Silverio en su cuaderno.

[26] La propiedad implícita que lo permite es la conservación de las razones internas (doble, triple, etc).

Para la resolución de la actividad, el docente dibujó un esquema (Figura 17) para representar el $\frac{1}{8}$ del total del pastel y lanzó la pregunta de cuánto es lo que quedaba de pastel para cada amigo.

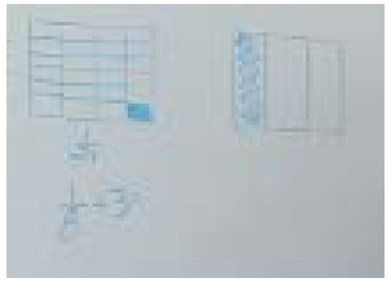


Figura 17. Esquema del profesor para representar la división del pastel.

> Pr: ¿Quién me dice la fracción que me queda de pastel?
> Je: Un entero un tercio.
> Pr: ¿Por qué?
> Je: Porque primero todo el pastel y luego lo que sobró es un tercio de lo que agarraron.

Después de esta entrada y con apoyo gráfico para el caso de una rebanada, ocurrió nuevamente lo que ya vimos en el caso de la multiplicación: Actividades que se concibieron para dar lugar a un proceso de significación de un algoritmo –el de la división de una cantidad fraccionaria entre un divisor número natural– se implementaron como aplicación de un conocimiento ya adquirido, el algoritmo general de la división. La participación de un alumno indica que, además de la técnica del recíproco mostrada por Regina, emergieron los "productos cruzados", algoritmo que los alumnos identificaron, aunque el docente manifestó que no lo habían revisado en clase.

> Pr: Yo dije que una fracción es una división implícita. Entonces si estamos dividiendo, su compañera Regina les invierte y multiplica de forma directa, ¿sí queda claro? Pero es exactamente el mismo proceso que el otro (señalando el proceso de multiplicación cruzado).

Actividad 3B

Para esta actividad, la dinámica se llevó a cabo en parejas con un breve tiempo de trabajo en equipo (5 minutos aproximadamente). Enseguida, la tabla se completó a partir de las participaciones de los estudiantes bajo la guía puntual del docente. Llamaré a esta dinámica muy frecuente: "Resolución acompañada"

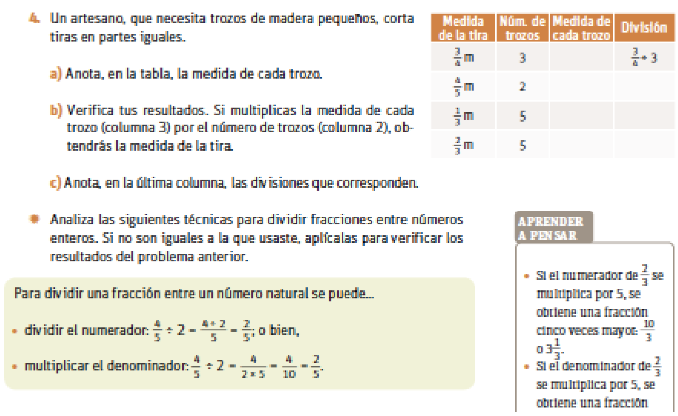
Caso martes. Fracción a repartir: $\frac{2}{8}$

Tonatzin mostró su procedimiento ante el grupo y, aunque no logró explicitarlo de forma oral, ante mi pregunta me explicó su proceder:

> Observador: ¿Qué hiciste?
> Tonatzin: Al repartir $\frac{1}{8}$ obtuvieron $\frac{1}{24}$, pues $\frac{2}{8}$ es el doble.

Como identifiqué antes, ese razonamiento es el que se buscaba propiciar en la situación, la aplicación de razones internas.

Actividad 4



4. Un artesano, que necesita trozos de madera pequeños, corta tiras en partes iguales.

a) Anota, en la tabla, la medida de cada trozo.

b) Verifica tus resultados. Si multiplicas la medida de cada trozo (columna 3) por el número de trozos (columna 2), obtendrás la medida de la tira.

c) Anota, en la última columna, las divisiones que corresponden.

Medida de la tira	Núm. de trozos	Medida de cada trozo	División
$\frac{3}{4}$ m	3		$\frac{3}{4} \div 3$
$\frac{4}{5}$ m	2		
$\frac{1}{3}$ m	5		
$\frac{2}{3}$ m	5		

- Analiza las siguientes técnicas para dividir fracciones entre números enteros. Si no son iguales a la que usaste, aplícalas para verificar los resultados del problema anterior.

Para dividir una fracción entre un número natural se puede...

- dividir el numerador: $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4 \div 2}{5} = \frac{2}{5}$; o bien,
- multiplicar el denominador: $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{2 \times 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

APRENDER A PENSAR

- Si el numerador de $\frac{2}{3}$ se multiplica por 5, se obtiene una fracción cinco veces mayor: $\frac{10}{3}$ o $3\frac{1}{3}$.
- Si el denominador de $\frac{2}{3}$ se multiplica por 5, se obtiene una fracción

Figura 18. Actividad 4. Situación 1.

Propósitos y comentarios previos

Al igual que en la actividad 3, el propósito es que los alumnos dividan una fracción entre un natural N en el contexto de partir una cantidad fraccionaria en partes iguales. Esta vez, se busca culminar la actividad con la explicitación de dos procedimientos: la división del numerador o la multiplicación del denominador.

Cabe observar algunos detalles: En la tabla, la columna en la que se debe poner el resultado está antes de la operación. Asimismo, en las instrucciones, poner la operación se pide después de poner el resultado. Esto es porque no se espera que el resultado se encuentre necesariamente a partir de aplicar la operación con algún algoritmo, pero sí se espera que, independientemente de cómo se obtuvo el resultado, se identifique la operación en juego.

Por otra parte, en las primeras dos filas, los numeradores son múltiplos del divisor, lo que permite resolver dividiendo el numerador entre el divisor ($\frac{3}{4}$ entre 3 = $\frac{1}{4}$).

En las últimas dos filas, para resolver en el nivel numérico, se necesitará multiplicar el divisor por el denominador ($\frac{1}{3}$ entre 5 =$\frac{1}{15}$), lo cual es más difícil. Finalmente, se pide que los resultados se verifiquen multiplicando los cocientes por el divisor (3), lo cual apunta también a no perder de vista el sentido de las cantidades en juego. Es previsible, sin embargo; que estos detalles, al no estar explícitos para el docente, no serán identificados.

Análisis a posteriori

La dinámica de trabajo fue individual, con la observación atenta del profesor y con ayudas directas para la resolución (Block, Ramírez, y Reséndiz, 2015), es decir, preguntas que ayudaron directamente a los alumnos, es decir, disminuyendo las condiciones de autonomía del trabajo de los estudiantes.

En una resolución pública, una alumna aplicó el algoritmo general para dividir una fracción entre otra fracción, colocando previamente el denominador 1 al número entero; en todos los casos utilizó el procedimiento del recíproco y multiplicó horizontalmente. Dicha técnica se validó a partir de una participación en una actividad anterior y fue utilizada por varios alumnos más, lo que permite ver una tendencia, por parte de varios alumnos a aplicar algoritmos, tendencia probablemente reforzada por el docente. Sin embargo, como señalaré en la siguiente actividad, pese a lo anterior, algunos alumnos si utilizaron las dos técnicas que fueron objeto de estudio.

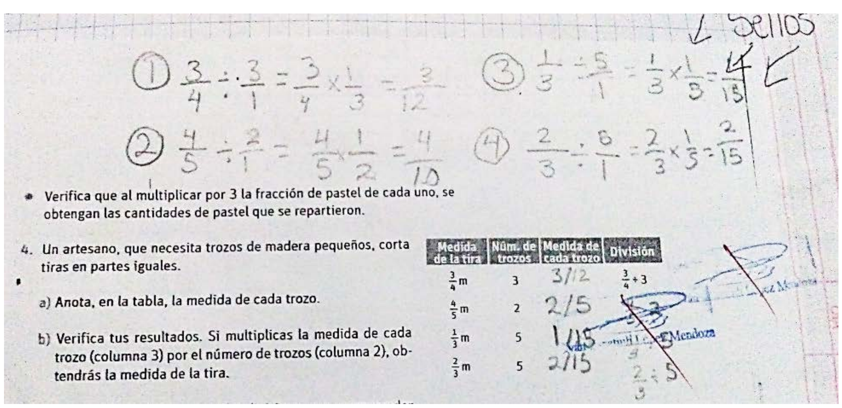
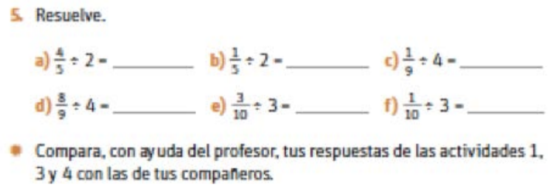


Figura 19. Producción de Tonatzin. Actividad 4. Situación 1.

Actividad 5



5. Resuelve.

a) $\frac{4}{5} \div 2 =$ ________ b) $\frac{1}{5} \div 2 =$ ________ c) $\frac{1}{9} \div 4 =$ ________

d) $\frac{8}{9} \div 4 =$ ________ e) $\frac{3}{10} \div 3 =$ ________ f) $\frac{1}{10} \div 3 =$ ________

- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 1, 3 y 4 con las de tus compañeros.

Figura 20. Actividad 5. Situación 1.

Propósitos y comentarios previos

En esta actividad, se trata de sistematizar los dos algoritmos (dividir el numerador o multiplicar el denominador) para dividir una fracción entre un natural N.

Análisis a posteriori

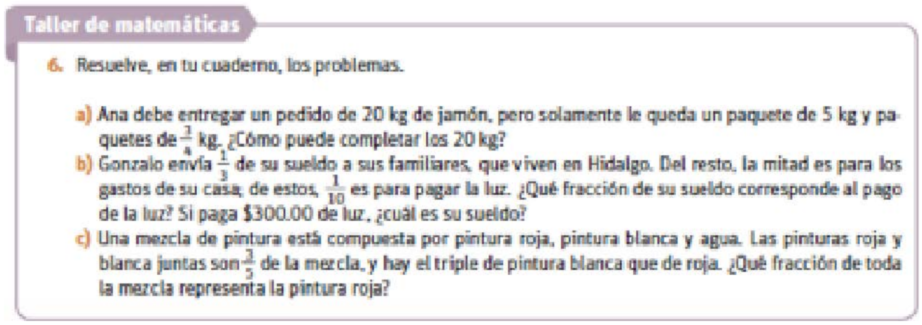
El docente decidió no aplicar esta actividad en clase y la dejó de tarea. En conversación posterior con él, expresó que la lección tenía demasiadas actividades y no daba tiempo de revisar todo en clase. De ahí que intentó economizar tiempo para invertirlo en otra actividad.

En la producción de una alumna (Figura 21), que coincide con las de otros alumnos, se aprecia (incisos a, e) que aplicó las dos técnicas para dividir que se institucionalizaron en la actividad anterior (dividir el numerador o multiplicar el denominador), no podemos estar seguros sí con más sentido, pero no hay rastros de los algoritmos convencionales. Y, entonces, este ejercicio matiza un poco lo que se vio en el anterior: No todos los alumnos tienden a aplicar el algoritmo general. Algunos parecen sí haber comprendido un poco más la posibilidad de usar los dos algoritmos más locales, y más transparentes en cuanto al sentido.

Figura 21. Producción individual. Actividad 5. Situación 2.

Es posible apreciar aquí, que los alumnos a veces establecen una relación con la propuesta didáctica contenida en el texto, de manera directa, no necesariamente mediada por lo que se vio en clase.

Taller de matemáticas


Taller de matemáticas

6. Resuelve, en tu cuaderno, los problemas.

a) Ana debe entregar un pedido de 20 kg de jamón, pero solamente le queda un paquete de 5 kg y paquetes de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cómo puede completar los 20 kg?

b) Gonzalo envía $\frac{1}{3}$ de su sueldo a sus familiares, que viven en Hidalgo. Del resto, la mitad es para los gastos de su casa; de estos, $\frac{1}{10}$ es para pagar la luz. ¿Qué fracción de su sueldo corresponde al pago de la luz? Si paga $300.00 de luz, ¿cuál es su sueldo?

c) Una mezcla de pintura está compuesta por pintura roja, pintura blanca y agua. Las pinturas roja y blanca juntas son $\frac{3}{5}$ de la mezcla, y hay el triple de pintura blanca que de roja. ¿Qué fracción de toda la mezcla representa la pintura roja?

Figura 22. Actividad 6. Situación 1.

Propósitos y comentarios previos

El propósito es que los estudiantes apliquen la multiplicación y división de fracciones con los naturales con ayuda de los algoritmos que se construyeron a lo largo de la situación. Eventualmente, los alumnos podrían utilizar representaciones gráficas para contextualizar los problemas, por ejemplo, para el inciso c.

Análisis a posteriori

La dinámica para esta actividad fue en equipos, muy diferente de todas las actividades anteriores. El profesor invirtió un tiempo considerable en la organización del grupo (10 minutos aproximadamente) y en que los estudiantes se centraran en los problemas, es decir, propiciar en alguna medida el trabajo autónomo (Brousseau, 2007).

Enseguida, analizo la puesta en común para el problema 6b. Un equipo pasó al frente y realizó un diagrama (figura 23): los estudiantes trazaron un rectángulo (total) y lo dividieron en tres partes iguales, marcando $\frac{1}{3}$ para cada parte.

A cada parte le asignaron un apartado de gastos y en el segundo (gastos de la casa), dividieron el tercio en diez partes de las cuales tomaron una para la luz. A partir de ese dibujo, una alumna del equipo escribió la división de $\frac{1}{3}$ entre 10 y, aplicando la técnica general para dividir que consiste en multiplicar por el recíproco, obtuvo $\frac{1}{30}$ (ver la figura 16). Enseguida multiplicaron 300 por 30 para obtener el sueldo total de 9000.

El uso del dibujo pareció constituir un buen apoyo: las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$ están correctamente representadas. Para dividir $\frac{1}{3}$ entre 10 utilizaron el algoritmo visto en ejercicios anteriores (multiplicar por el recíproco), que no es el objeto de estudio de esta lección, lo que muestra por un lado el fuerte impacto de la validación de un procedimiento en el grupo por el docente y, por otra parte, la fuerte tendencia de los alumnos a aplicar los algoritmos de inmediato.

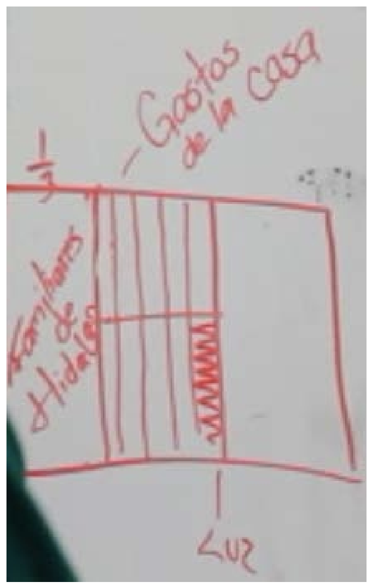


Figura 23. Diagrama para el segundo problema por un equipo. Pizarrón

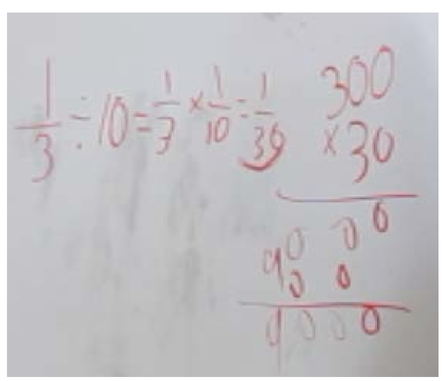


Figura 24. Procedimiento para dividir $\frac{1}{3}$ entre 10. Pizarrón.

Comentarios

La situación

En esta situación se pretendía construir los algoritmos para multiplicar y dividir una fracción con un natural N. Dicho camino se concibió de manera gradual y a través de actividades que pusieran en juego los conocimientos que los alumnos adquirieron en la escuela primaria respecto de las fracciones y de la multiplicación por naturales, y que, además, permitieran construir un conocimiento nuevo, validarlo con una puesta en común y aplicarlo.

La experimentación de la situación permite ver una distancia importante entre lo que ocurrió respecto de los objetivos planteados por los autores. En primer lugar, las actividades no se desarrollaron para construir un conocimiento nuevo (dos técnicas locales para el caso particular, sencillo, de multiplicación y división por/entre enteros), sino como aplicación de los algoritmos convencionales generales de la multiplicación y de la división de fracciones.

Surgieron elementos como "el 1 mágico", que sirve para expresar enteros como fracciones y así aplicar el algoritmo general a todos los casos por igual, haya o no enteros. Es decir, el estudio del caso particular de multiplicación en el que hay enteros se diluyó.

Para la división entre un entero ocurrió lo mismo, a veces con el apoyo del "1 mágico", los alumnos aplicaron el algoritmo de productos cruzados o multiplicaron por el inverso. La intención de dar un sentido a la multiplicación y división de fracciones por/entre enteros se debilitó con ello de forma muy importante.

Pude constatar que, si bien algunos estudiantes aplicaron los algoritmos correctamente, no todos lo hicieron, probablemente la mayoría no lo hizo. Es decir, la ocasión de reconstruir los algoritmos se justificaba ¿Qué fue lo que dificultó al docente percibir con más claridad el potencial de la lección para el grupo?

La gestión

El docente atribuyó la enseñanza del algoritmo a la escuela primaria, pero en la revisión que hice de algunos cuadernos se manifestó algo distinto: hay numerosos ejercicios algorítmicos para favorecer el aprendizaje de las técnicas.

Por lo anterior, puedo decir que la situación se reveló poco robusta (Robert, 2007) al ser utilizada por el docente, es decir, hay una distancia amplia entre los propósitos destacados en el análisis a priori y lo que ocurrió. Considerando esta distancia, el análisis deja ver que la comunicación de los propósitos de la lección en general, y de cada parte, es débil (incluso a veces lo que se le comunica obra en sentido opuesto al propósito, como cuando aparece la respuesta de un ejercicio en decimales).

La mayoría de las actividades se realizaron bajo lo que he llamado una ***resolución acompañada***, en la que el profesor siempre buscaba orientar las respuestas de sus alumnos, apoyándose en los alumnos más avanzados, con expertise (Sensevy, 2011). He llamado a esto una ***selección oportunista de participaciones*** para conducir la clase por cierto camino. Esta forma de trabajo dista también del trabajo autónomo para los alumnos. Esta dinámica es, sin embargo, coherente con la expectativa de que los alumnos apliquen un algoritmo general, pues eso es algo que varios estudiantes aún no pueden hacer por sí mismos, necesitan la guía.

Los alumnos

Además de lo ya dicho (algunos muy hábiles para aplicar los algoritmos, otros, la mayoría, probablemente no), destaca el caso de un alumno que dejó ver, en la manera de hacer su tarea, que puso en juego procedimientos esperados en la lección, distintos de la aplicación de los algoritmos. Aunque dichos procedimientos no fueron destacados y por lo tanto su impacto en la clase fue muy escaso, dejan ver que, para ese alumno, y seguramente para otros más, las actividades fueron portadoras de cierto sentido. Estos indicios muestran la posibilidad de un vínculo, ciertamente débil, de los alumnos con la propuesta, no mediada por el docente.

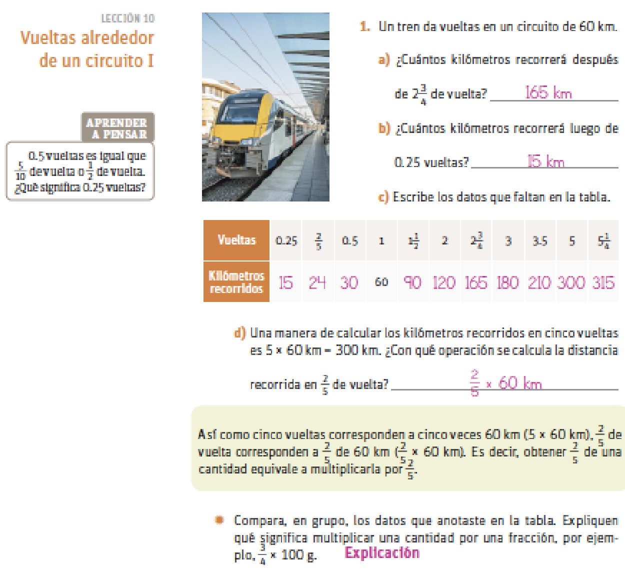
2.2. Situación 2. Vueltas alrededor de un circuito I

El propósito general de la situación es introducir un primer sentido de la multiplicación por un multiplicador fraccionario. Establecer que la técnica para aplicar un multiplicador $\frac{a}{b}$ a un natural N es la misma que la que se usa para tomar una fracción $\frac{a}{b}$ **de** N, esto es: dividir n entre b y multiplicar por a.

$$\frac{a}{b} \times n = \frac{a}{b}\ de\ n = (n \div b) \times a$$

Una problemática que subyace a esta lección y que abordé en el capítulo teórico de este estudio es la dificultad que representa dar a una fracción, el papel de "número de veces", es decir, la dificultad para aceptar que $\frac{1}{2}$ de 60 puede verse como $\frac{1}{2}$ veces 60. Este problema de lenguaje, puede considerarse como una de las manifestaciones visibles de la dificultad conceptual: ¿Qué significa multiplicar por fracciones?

Actividades 1A y 1B



LECCIÓN 10

Vueltas alrededor de un circuito I

APRENDER A PENSAR

0.5 vueltas es igual que $\frac{5}{10}$ de vuelta o $\frac{1}{2}$ de vuelta. ¿Qué significa 0.25 vueltas?

1. Un tren da vueltas en un circuito de 60 km.

a) ¿Cuántos kilómetros recorrerá después de $2\frac{3}{4}$ de vuelta? 165 km

b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá luego de 0.25 vueltas? 15 km

c) Escribe los datos que faltan en la tabla.

Vueltas	0.25	$\frac{2}{5}$	0.5	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{3}{4}$	3	3.5	5	$5\frac{1}{4}$
Kilómetros recorridos	15	24	30	60	90	120	165	180	210	300	315

d) Una manera de calcular los kilómetros recorridos en cinco vueltas es 5 × 60 km = 300 km. ¿Con qué operación se calcula la distancia recorrida en $\frac{2}{5}$ de vuelta? $\frac{2}{5} \times 60$ km

Así como cinco vueltas corresponden a cinco veces 60 km (5 × 60 km), $\frac{2}{5}$ de vuelta corresponden a $\frac{2}{5}$ de 60 km ($\frac{2}{5} \times 60$ km). Es decir, obtener $\frac{2}{5}$ de una cantidad equivale a multiplicarla por $\frac{2}{5}$.

- Compara, en grupo, los datos que anotaste en la tabla. Expliquen qué significa multiplicar una cantidad por una fracción, por ejemplo, $\frac{3}{4} \times 100$ g. Explicación

Figura 25. Actividades 1A y 1B. Situación 2.

Propósitos y comentarios previos

El propósito de esta actividad es concebir a una fracción $\frac{a}{b}$ **de,** como una multiplicación, y construir la técnica para multiplicar un multiplicador fraccionario/decimal por un multiplicando natural.

Los alumnos ya habían trabajado implícitamente la multiplicación de fracciones al aplicar fracciones **de** una cantidad en relaciones parte-todo. Ahora, se hace explícito que eso es una multiplicación.

Esta actividad propone un problema de un tren que da vueltas sobre un circuito de 60 km con la expectativa de que, al hacer jugar a operadores fraccionarios el papel de número de vueltas (un tren da $\frac{3}{4}$ de vuelta), y al alternarlos con multiplicadores naturales (un tren da 3 vueltas), los alumnos los asimilen más fácilmente como multiplicaciones[27].

Análisis a posteriori

La actividad 1 se realizó en equipos monitoreados por el docente. El profesor ofreció ayudas directas, esto es, que contienen parte importante de la solución (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015), en particular, guio la tarea (Roditi, 2003). En este caso, la más importante fue la sugerencia de apoyarse en la pregunta 1d para que los equipos entendieran la consigna del problema:

> Pr: La clave del ejercicio es fijarnos en el inciso 1d. ¿Con qué operación se calcula la distancia en cinco vueltas?
> Als: Multiplicación.
> Pr: ¿Cambiará de alguna manera la operación si ahora en lugar de calcular la distancia de cinco vueltas es $\frac{2}{5}$ de vuelta?

En esta intervención, el docente mostró que comprendió el propósito de la actividad: poner en el mismo plano la "fracción de" y el "número de veces", para dar a la primera el sentido del segundo. Sin embargo, el docente invirtió el camino planeado: en lugar de que los alumnos establecieran la manera de multiplicar por una fracción, gracias a que relacionarían dicha multiplicación con la acción, conocida por ellos, de tomar "$\frac{a}{b}$ de". En lugar de eso, al aceptar que "$\frac{a}{b}$ de" puede verse como multiplicación, el docente les invitó a aplicar el algoritmo general de la multiplicación, del cual solo conocen la mecánica (y sólo algunos alumnos), y no la justificación. Al apelar a este algoritmo general, se perdió el propósito de ir estableciéndolo poco a poco, a partir de lo que se sabía.

Una vez identificado que la "fracción de" es una multiplicación, la clase tendió a aplicar algún algoritmo conocido para hacer esa operación, y por lo tanto ya pocos resolvieron las primeras preguntas (a, b, c) con otros procedimientos (se esperaba en

---

[27] Cabe señalar que esta alternancia fue propuesta por primera vez por Freudenthal (1983).

particular la aplicación de la “fracción de”, dividiendo 60 entre el denominador y multiplicando por el numerador. De cinco resoluciones que pude identificar, cuatro tienden a aplicar un algoritmo previamente aprendido para multiplicar por fracciones o decimales, y sólo se apoyaron en la interpretación de la fracción como “partes de”.

Un equipo mostró la instaurada tendencia a utilizar decimales:

> Jesús: ¿Cómo con decimales? (Pregunta a Silverio)
>
> Silverio: Es que no me acuerdo bien (riendo). Eso lo había hecho en la primaria, pero, creo que algunos problemas había que convertir primero a decimales, no me acuerdo.
>
> Je: Pero es más difícil, ¿no?
>
> Si: Pues no me acuerdo (nervioso) pero el chiste es que se podía convertir a decimales y era más fácil y en realidad la maestra siempre lo hacía así (refiere a la docente de primaria) pero ya no me acuerdo.

Esta interacción confirma que algunos conocimientos sobre fracciones y decimales adquiridos en la escuela primaria están vagamente presentes. En ocasiones pueden constituir obstáculos de tipo didáctico (Brousseau, 1983), que dificultan la elaboración del sentido. En este caso, el recurrir a los decimales evitaría el trabajo con fracciones y, por lo tanto, la elaboración esperada.

Las producciones de otros tres equipos se presentaron en la puesta en común. Como se puede ver en la fotografía (Figura 26), el equipo 3 transformó de entrada la fracción mixta $2\frac{3}{4}$ a la fracción impropia $\frac{11}{4}$ a partir del algoritmo (4 por 2, más 3). En los equipos 2 y 4, las producciones muestran la aplicación del algoritmo convencional de la multiplicación de fracciones (multiplicar 11 por 60 y 4 por 1). La persistente presencia del “1 mágico” parece haberse constituido como parte de la memoria didáctica del grupo. En el equipo 3, se recurrió a números decimales evitando el uso de fracciones. La conversión a decimales se dio mediante la división de numerador entre denominador.

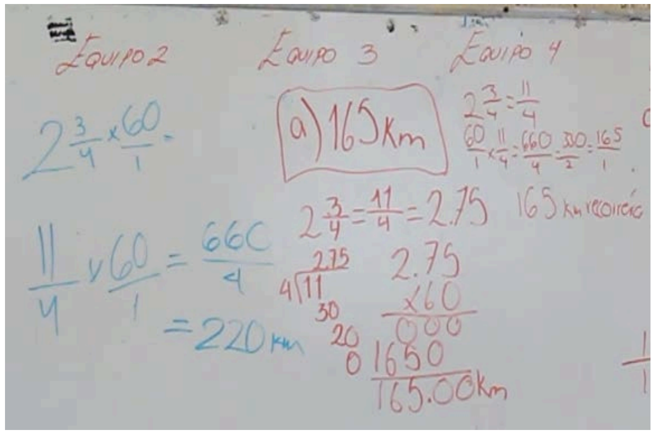


Figura 26. Producciones de los equipos. Actividad 1A. Pizarrón

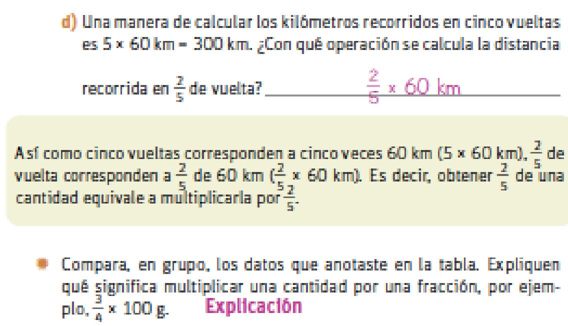
Por otra parte, en la producción individual (Figura 27) de un alumno, identifico otro camino que toma distancia de las producciones que se revisaron en la puesta en común en el grupo, pues no recurrió al algoritmo de la multiplicación. El alumno calculó primero la parte entera (de $2\frac{3}{4}$) multiplicando 60 por 2, enseguida obtuvo $\frac{3}{4}$ de 60 (60 entre 4 y 15 por 3). Este procedimiento parece derivar del significado de la fracción como partes de unidad, y corresponde a lo que se esperaba. Muestra que los procedimientos escritos en el pizarrón no necesariamente reflejan lo que hicieron todos los alumnos, sino, posiblemente a la decisión de algunos.

Figura 27. Producción individual de Jesús.

No sé si otros alumnos hicieron algo similar a este último procedimiento, pero, aunque solamente hubiera sido uno, confirma que muchas veces, los estudiantes se relacionan con la propuesta de manera diferente a lo que sucede en las puestas en común.

En resumen, el maestro sí trató de relacionar la fracción $\frac{3}{4}$ de 60 con la multiplicación $\frac{3}{4}$ * 60, justificando tal relación a través de la similitud con el caso en que el multiplicador es natural, tal como lo propone la lección. Pero lo hizo muy pronto, desde el principio invirtiendo el camino y evitando entonces la posibilidad de que los alumnos primero resolvieran desde sus conocimientos previos (en particular, con la idea de "fracción de"), y provocando que se fueran directamente hacia el algoritmo. Es decir, el profesor comprendió el sentido e intentó transmitirlo, pero dio poco espacio a la actividad personal de los alumnos. Al parecer, hay aquí un principio epistemológico del profesor, según el cual "de la regla general (el algoritmo para multiplicar fracciones) se pasa a todos los casos particulares, y no al revés", el cual explicaría que el profesor no optó por ir de los casos particulares hacia la regla general.

Actividad 1D. Institucionalización del sentido de un multiplicador fraccionario


d) Una manera de calcular los kilómetros recorridos en cinco vueltas es 5×60 km = 300 km. ¿Con qué operación se calcula la distancia recorrida en $\frac{2}{5}$ de vuelta? $\frac{2}{5} \times 60$ km

Así como cinco vueltas corresponden a cinco veces 60 km (5×60 km), $\frac{2}{5}$ de vuelta corresponden a $\frac{2}{5}$ de 60 km ($\frac{2}{5} \times 60$ km). Es decir, obtener $\frac{2}{5}$ de una cantidad equivale a multiplicarla por $\frac{2}{5}$.

- Compara, en grupo, los datos que anotaste en la tabla. Expliquen qué significa multiplicar una cantidad por una fracción, por ejemplo, $\frac{3}{4} \times 100$ g. Explicación

Figura 28. Actividad 1D. Situación 2.

En esta actividad se hace explícito el hecho de que obtener una fracción de una cantidad tiene el mismo estatuto que considerar *n veces* una cantidad, y es, por lo tanto, multiplicar. Esto debía constituir una información novedosa para los alumnos (quienes, se suponía, sabían calcular la "fracción de", pero no sabían que eso era multiplicar). En los hechos, se convirtió en la reiteración de una información que se dio por hecho desde un inicio.

El docente lanzó la pregunta al grupo: ¿Con qué operación se calcula la distancia recorrida en $\frac{2}{5}$ de vuelta?, y al no obtener respuesta inmediata solicitó la resolución de la multiplicación $\frac{2}{5}$ por 60). Enseguida se llevó a cabo una puesta en común de la cual presento el siguiente fragmento:

Pr: ¿Qué significa $\frac{3}{4}$ * 100?
Vanesa: 75 enteros.
Pr: ¿75 gramos no? Ahora que su compañera resolvió la multiplicación, alguien podrá interpretar la pregunta.
Pr: A ver Jesús, sin miedo, ¡ándale! Es que sí sabes, pero no sé por qué no quieres decirlo.
José María: Es una equivalencia, como una división.
Pr: ¿Cómo una equivalencia?
José María: Una división porque dividimos entre el denominador y el resultado lo (…) (el docente corta la participación).
Pr: Más que el procedimiento, digan qué es lo que significa.
Pr: ¿Quién me podría hacer un problema con esto?
Jesús: Una señora compra 100 gramos de arroz y nada más cocina $\frac{3}{4}$ de lo que compró.
Pr: ¡Esa es la interpretación jóvenes! Nada más que están tomando una porción de los 100 gramos, ¿queda claro?

La pregunta, ¿qué significa $\frac{3}{4}$ por 100 g?, no fue muy clara para los alumnos y los puso en situación de interpretar la intencionalidad del docente (Sadovsky, 2004; Sensevy, 2011); no obstante, tanto ellos como el profesor lograron hacer observaciones interesantes:

El alumno José María logró vincular $\frac{3}{4}$ por 100 con la división y la multiplicación. El profesor insistió en que dijeran "lo que significa", y esto probablemente quiere decir (ateniéndonos a lo que contesta un alumno que él valida), evocar una situación contextualizada en la que se use esa operación. Un alumno propuso una, y el docente destacó el sentido de "porción de". Así, al final del camino, aunque no exactamente como lo previsto, se estableció que existe una relación semántica, entre la multiplicación por una fracción y tomar una fracción de una cantidad.

Enseguida, el docente realizó la lectura del cuadro de institucionalización. Haciendo una interpretación adecuada del propósito de la lección y del recuadro, el docente explicó lo siguiente a los alumnos:

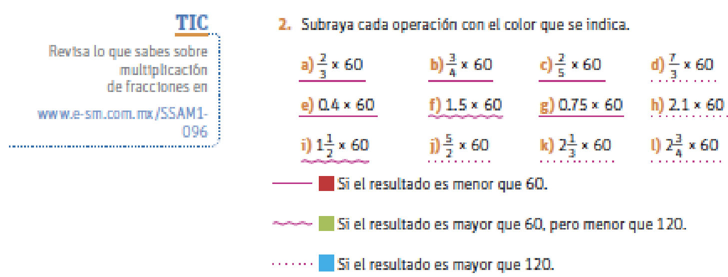
> Así como cinco vueltas corresponden a cinco veces 60 km (5 × 60 km), $\frac{2}{5}$ de vuelta corresponden a $\frac{2}{5}$ de 60 km ($\frac{2}{5}$ × 60 km). Es decir, obtener $\frac{2}{5}$ de una cantidad equivale a multiplicarla por $\frac{2}{5}$.

Figura 29. Recuadro de institucionalización. Situación 2.

Pr: Cuando les preguntaban, si yo tengo 60 km en cada vuelta y doy 5 vueltas, ustedes de inmediato responden: ¡hay que multiplicarla y obtenemos 300! (hace la multiplicación en el pizarrón) ¡Lo hacen de forma automática sin importar absolutamente nada! Pero ¿qué sucede cuando yo les digo que estos 60km sólo han recorrido $\frac{1}{3}$? piensan que la operación es otra sin visualizar que es lo mismo, es una multiplicación. Algunos si lo intuyen, otros por el simple hecho de que cambiamos a fracción piensan que se trata de otra operación y no es así.

El profesor deja ver, una vez más, que comprendió bien el propósito de lección: mostrar a los alumnos que la "fracción de" puede jugar el mismo papel que el número entero de veces, y usar eso para justificar que, entonces, "fracción de" puede ser vista como una multiplicación. Esto es un logro en la relación del profesor con la propuesta.

Actividad 2


TIC

Revisa lo que sabes sobre multiplicación de fracciones en www.e-sm.com.mx/SSAM1-096

2. Subraya cada operación con el color que se indica.

a) $\frac{2}{3} \times 60$ b) $\frac{3}{4} \times 60$ c) $\frac{2}{5} \times 60$ d) $\frac{7}{3} \times 60$

e) 0.4×60 f) 1.5×60 g) 0.75×60 h) 2.1×60

i) $1\frac{1}{2} \times 60$ j) $\frac{5}{2} \times 60$ k) $2\frac{1}{3} \times 60$ l) $2\frac{3}{4} \times 60$

Si el resultado es menor que 60.

Si el resultado es mayor que 60, pero menor que 120.

Si el resultado es mayor que 120.

Figura 30. Actividad 2. Situación 2.

Propósitos y comentarios previos

El objetivo en esta actividad es que los alumnos anticipen ciertos aspectos del tamaño de los productos sin tener que calcularlos.

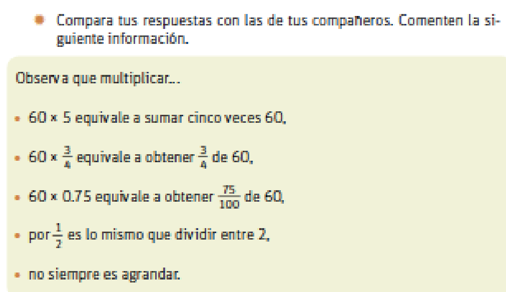
Para lograr el propósito, los estudiantes tendrían que establecer lo siguiente: si la fracción es menor que 1, el producto será menor que 60; si es mayor que 1, pero menor que 2, el producto será mayor que 60, pero menor que 120. Asimismo, se intentará hacerlos conscientes de que las multiplicaciones por fracciones pueden arrojar productos menores que los factores.

Análisis a posteriori

La dinámica de la actividad fue individual para los alumnos. El docente solicitó hacer todos los ejercicios con algoritmos en el cuaderno, cuando la idea original era que estimaran sin hacer cálculos. Esta transformación confirma que el profesor atiende con mucho interés el fortalecimiento de los algoritmos. Las producciones de los alumnos muestran que efectivamente aplicaron el algoritmo y la puesta en común se orientó a verificar resultados atenuando el propósito de la actividad: la noción de multiplicaciones que reducen no emergió.

Aparece claramente, no solamente la lectura que el profesor hizo de la actividad, desde su idea de aplicar los algoritmos, también la insuficiencia de la consigna de la actividad misma: tendría que explicitarse: “Sin hacer la multiplicación, trata de… “. Asimismo, se evidencia, una vez más, la necesidad de dar información complementaria al profesor.

Institucionalización


- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la siguiente información.

Observa que multiplicar...

- 60×5 equivale a sumar cinco veces 60,
- $60 \times \frac{3}{4}$ equivale a obtener $\frac{3}{4}$ de 60,
- 60×0.75 equivale a obtener $\frac{75}{100}$ de 60,
- por $\frac{1}{2}$ es lo mismo que dividir entre 2,
- no siempre es agrandar.

Figura 31. Recuadro de institucionalización. Situación 2.

En esta situación, los multiplicadores son fracciones, entonces se trata de interpretar la multiplicación como $\frac{3}{4}$ de 60.

Análisis a posteriori

El docente invirtió un tiempo considerable para la institucionalización (10-15 min). Al parecer, reconoció una característica importante en el marco de estas situaciones: aunque en el nivel numérico $\frac{3}{4} * 60\ y\ 60 * \frac{3}{4}$ son equivalentes gracias a la propiedad conmutativa, en el nivel de los significados o de los números concretos (referidos a magnitudes), no la hay. Las ideas implicadas en 60 veces $\frac{3}{4}$ y en $\frac{3}{4}$ de 60 son muy distintas. Enseguida muestro un extracto de la interacción con los alumnos:

> Pr: Me están diciendo, este número (señala el número 5 en la operación 60 por 5) me indica cuantas veces se repite el 60.
> Valeria: Sumar 5 veces $\frac{3}{4}$.
> Pr: No
> Ángel: sumar 60 veces $\frac{3}{4}$
> Pr: ¡Eureka! ¡Eso es jóvenes! tendríamos que sumar $\frac{3}{4}$ más $\frac{3}{4}$ más $\frac{3}{4}$, etc. ¿Cuántas veces?
> Vanesa: 60 veces.

Pr: Es cierto que el orden de los factores no altera el producto, pero en esencia no es lo mismo 60 por $\frac{3}{4}$ que $\frac{3}{4}$ por 60 aunque el resultado es exactamente el mismo.

El propósito del recuadro no era precisamente ver esta igualdad, más bien justificar que $\frac{3}{4}$ de 60, al indicar un número de veces 60, es también una multiplicación.

Comentarios

La situación

Esta situación tiene el propósito de introducir un primer sentido para el multiplicador fraccionario $\frac{a}{b} * n$ (el de tomar una fracción $\frac{a}{b}$ $de\ n$) y proponer una técnica: dividir *n* entre *b* y multiplicar por *a*. Para justificar este sentido, se trabaja en un contexto que permite alternar multiplicadores enteros y multiplicadores fraccionarios. Además, se proponen actividades que no apelan de entrada al manejo del algoritmo convencional.

La gestión

En cuanto a la relación del profesor con la situación y el objeto didáctico-matemático, el docente sí comprendió el propósito en lo general. En sus acciones (Sensevy, 2011) fue bastante claro, incluso, enfático al menos dos veces, en aclarar que, así como aplicar un número entero de veces es multiplicar, también lo es obtener una fracción de una cantidad. Incluso expresó que, aunque formalmente la división y la multiplicación implicadas en la aplicación de una fracción se pueden conmutar, en el nivel de los significados es diferente. Nuevamente, es posible que el profesor haya enriquecido su propio conocimiento pues reconoció el sentido de una actividad, e intentó destacarlo en paralelo con su interpretación[28]. Así, empieza a dar cuenta de una interpretación híbrida. Es decir, aunque el docente se encuentra en una situación no didáctica "puede transformar sus conocimientos en la interacción con el medio" (Margolinas, 2009, p.6).

En la primera actividad de la lección, no obstante, el profesor sí dio un cierto giro a la actividad propuesta, al destacar desde el principio la presencia de la multiplicación, lo

[28] La interpretación que el profesor hace de la situación se enriquece tanto de lo que él conoce sobre el tema como de lo que la situación le comunica, incluyendo las orientaciones pedagógicas que se le entregaron, las cuales describen de forma detallada los propósitos y las sugerencias para la realización de actividades. La situación constituye una "voz externa" (Mercado, 2002) con una fuerte influencia en su práctica.

que evitó que los alumnos pusieran en juego sus recursos previos para abordar el problema. Es decir, el docente no sostuvo la adidacticidad de la situación, mostró una tendencia a decir a los alumnos cómo resolver.

Los alumnos

Para los alumnos la situación implicó varias acciones:

> Calcular fracciones de 60 a partir de dividir entre el denominador y multiplicar por el numerador (No fueron muchos alumnos, pues el profesor adelantó la idea de multiplicar).
>
> Calcular números enteros de veces 60.
>
> Relacionar la "fracción de 60", con multiplicar por 60 y aplicar algoritmos para multiplicar fracciones por 60 (u otras cantidades).

Es posible que la lección, así como fue aplicada, sí haya contribuido a los conocimientos previos de los estudiantes, los cuales estaban centrados en el algoritmo: Posiblemente la lección los haya ayudado a tomar conciencia de que esa multiplicación se relaciona con la fracción de (que también conocen), y puede jugar un papel de "número de veces".

2.3.Situación 3. Vueltas a un circuito II

El multiplicador fraccionario "$\frac{a}{b}$ *de*" se aplica ahora a una medida también fraccionaria $\frac{c}{d}$. Con ello, se busca introducir un sentido de la multiplicación de dos fracciones como tomar una fracción "de" otra fracción. Además, se pretende establecer el algoritmo para multiplicar dos fracciones. Sin embargo, en el grupo que he observado, la mayoría de los alumnos conocen ya el algoritmo, o al menos, se da por hecho que lo conocen. Esto hará que necesariamente cambie el sentido de lección. Por otra parte, como se verá, el profesor manifestará dificultad para seguir la lógica de la lección, la cual se revela poco clara. Además, el docente omitió varias actividades por falta de tiempo, de ahí que en este análisis me detendré sólo en algunos aspectos.

Actividad 1

Propósitos y comentarios previos

En esta actividad los alumnos resuelven problemas en los cuales se alternan multiplicadores que son números naturales y multiplicadores fraccionarios, ambos aplicándose a una cantidad que es fraccionaria.

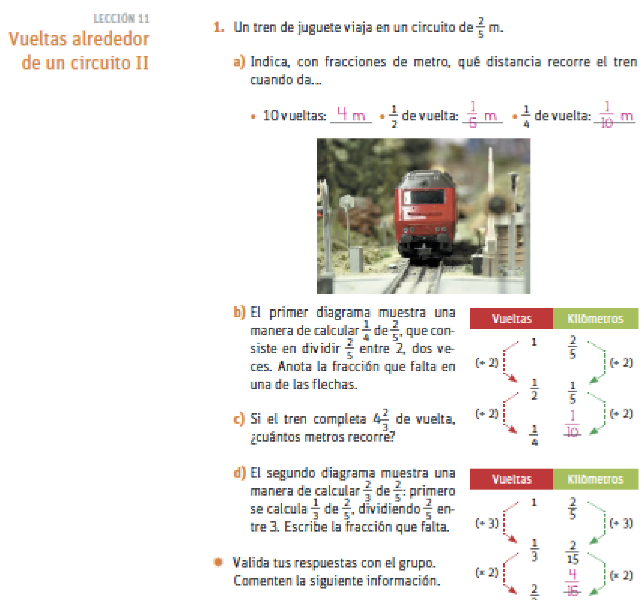


Figura 32. Actividad 1. Situación 3.

Para el inciso 1A, se prevén dos posibilidades cuando uno de los factores es natural:

10 por $\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$ por 10

En los casos de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, en donde ambos factores (multiplicador y multiplicando) son fracciones se prevé que apliquen lo aprendido en una situación anterior:

$\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$ equivale a dividir $\frac{2}{5}$ entre 2 (y $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5}$ equivale a dividir entre 4).

En el punto 1b, el esquema permite explicitar que se relacionan dos conjuntos: el de vueltas y el de kilómetros. Las divisiones entre 2 aparecen bajo la idea de “a la mitad de vueltas, le corresponde la mitad de kilómetros” Para el punto 1c se establece que para calcular la cantidad de metros que corresponden a 4 $\frac{2}{3}$ vueltas se pueden calcular lo que corresponde a 4 vueltas y sumarlo a los $\frac{2}{3}$ de vuelta.

Para calcular $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{5}$ de metro siguiendo el significado ya conocido de “$\frac{2}{3}$ de”, se propone dividir entre 3 y multiplicar por 2. Estas operaciones aparecen en el diagrama del libro como razones internas (u operadores escalares). Dan lugar a una manera de multiplicar $\frac{2}{3}$ veces $\frac{2}{5}$ metros.

Análisis a posteriori

Actividad 1A

Se presentaron momentos de confusión en el grupo respecto de cuál fotocopia debían atender[29]. El docente inició con la actividad 1A, a partir de la pregunta directa:

> Pr: ¿Qué operación debemos de realizar para saber la distancia en diez vueltas?
> Valeria: Multiplicar.
> Pr: ¿Qué vas a multiplicar Valeria?
> Valeria: $\frac{2}{5}$ por 10

Un estudiante pasó al frente para realizar la operación y emergió el algoritmo convencional para la multiplicación de fracciones utilizando el denominador 1 que se institucionalizó desde la primera situación:

[29] Las lecciones se entregaron en fotocopias, lo cual provocó que los alumnos las perdieran o se confundieran con el material.

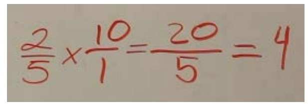


Figura 33. Procedimiento para multiplicar una fracción por un natural en el pizarrón.

La participación de este alumno, me permite ver nuevamente la tendencia a la aplicación del algoritmo. El profesor validó este procedimiento mediante una interacción que he llamado anteriormente “selección oportunista de participaciones”

Caso $\frac{1}{2}$

El docente otorgó una ayuda directa y total (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015) a los estudiantes, es decir, él resolvió la tarea (Roditi, 2003):

> Pr: Ahora, vamos con este que dice $\frac{2}{5}$ por $\frac{1}{2}$. Me dice, que multiplique $\frac{2}{5}$ por la mitad, aquí sacamos la mitad de $\frac{2}{5}$ (señala $\frac{2}{5}$= $\frac{1}{5}$+ $\frac{1}{5}$)
> ¿Cuál sería la mitad? Pues tomar $\frac{1}{5}$.

En la interacción se puede ver que el docente reconoció el propósito de la actividad. En este caso, le da a $\frac{1}{2}$ el papel de multiplicador y a $\frac{2}{5}$ el de multiplicando y evita aplicar el algoritmo, aprovechando un camino intuitivo para dividir. Sólo que él hizo todo en el pizarrón.

Caso $\frac{1}{4}$

Para el tercer caso ($\frac{1}{4}$ de vuelta), el docente retomó lo que él mismo había propuesto en el caso anterior y solicitó a los alumnos que con ayuda de la suma hicieran la multiplicación:

> Pr: ¿Quién me dice cuánto recorre en $\frac{1}{4}$ de vuelta?
> Tenemos $\frac{2}{5}$ por $\frac{1}{4}$, en forma de suma ¿quién me puede decir cómo queda en forma de suma?

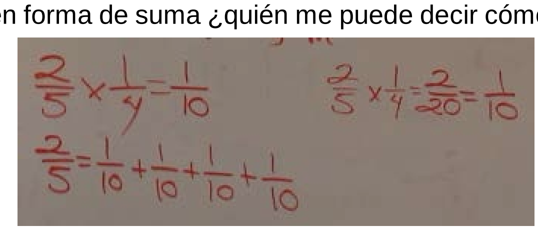


Figura 34. Procedimiento del profesor en el pizarrón.

El profesor explicitó dos procedimientos, uno con la suma iterada y el otro con el algoritmo convencional. El procedimiento “con suma iterada” resulto menos obvio, pues la fracción tiene numerador 2 y no 4, pero no resulta tan difícil convertir $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ en cuatro sumandos de $\frac{1}{10}$.

La sesión finalizó y en la siguiente clase el profesor retomó la actividad con un breve recordatorio sobre la actividad 1A e insistió en la posibilidad de pensar la multiplicación como una suma iterada, incluso solicitó nuevamente los resultados de la primera actividad y realizó las multiplicaciones, dejando ver por una parte lo que había observado en las sesiones anteriores: resolución acompañada, y que posiblemente, para él, la multiplicación vista como suma iterada tiene más sentido.

El diálogo del profesor con el texto fue, en esta actividad, de escasos puntos de encuentro, pero con varios momentos de comprensión de la propuesta. El profesor no asumió la intención de la lección, es decir, que los alumnos, usando su conocimiento de “fracción de” aplicaran una fracción a otra fracción, dividiendo y multiplicando, para *más adelante* formalizar esto como multiplicación. Más bien, el profesor aceptó por un lado al algoritmo general que propusieron algunos alumnos, con lo que se redujo la actividad a una ejercitación. Pero, además, pareció descubrir una forma alterna de dividir entre 2 y entre 4 que consiste en expresar el dividendo en dos y cuatro sumandos, lo cual no estaba realmente contemplado en la lección (aunque fue evocado por ella, el dividir $\frac{2}{5}$ entre 2, dividiendo el numerador), y mostró interés en enseñarla a los alumnos. De ahí que el profesor mostró así, una vez más, una afinidad hacia procedimientos más intuitivos que los algoritmos.

<u>Ítems 1B-1C</u>

El recurso de completar procedimientos con apoyo del diagrama no resultó del todo: ni los alumnos ni el profesor parecen haber comprendido el sentido del procedimiento en conjunto. Se centraron en completar los cuadros de forma aislada. De repetirse esta situación, debería considerarse en futuros diseños.

La intención original de las actividades es la de compartir un procedimiento, pero invitando a los alumnos a completarlo para evitar una lectura muy pasiva del ejercicio. En todo caso, dado que aplicaron el algoritmo convencional, completar dividiendo dos veces perdió un poco su sentido de ofrecer un camino alterno, con más significado:

> Pr: ¿Cómo es que ustedes resuelven la división?, aquí les dicen que dividan entre 2 ¿Y eso cómo lo hago?
> Jesús: Ponemos el 1 mágico.
> Pr: Ok, ustedes lo dijeron, yo no.
> Jesús: Luego invertimos el $\frac{2}{1}$ a $\frac{1}{2}$ y multiplicamos ($\frac{2}{5}$ por $\frac{1}{2}$)
> Pr: ¡Ah! Por un $\frac{1}{2}$, eso es lo que quería que dijeras.

El alumno José María aplicó el procedimiento propuesto por Regina en la primera situación, que implica obtener el recíproco y después multiplicar. Nuevamente se manifestó la tendencia de algunos alumnos (con voz en el grupo) hacia los algoritmos. Como ya se dijo, en el diagrama el camino planteado es otro, se trataba de obtener $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5}$ a través de divisiones sucesivas que dieran sentido a la operación.

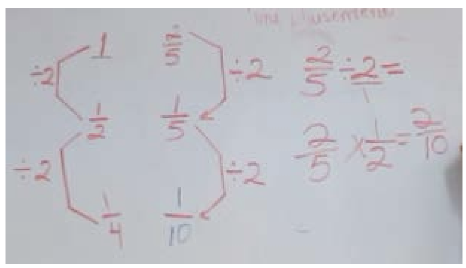


Figura 35. Procedimiento del profesor en el pizarrón. Situación 3.

<u>Ítem 1D</u>

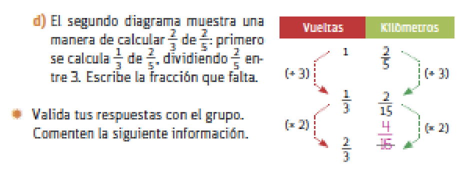


Figura 36. Actividad 1D. Situación 3.

En esta actividad el profesor pareció perderse con la información de los esquemas: tuvo que releer varias veces y, en un comentario posterior a la clase, me refirió: “de pronto el diagrama parecía confuso y poco práctico” (I. López, comunicación personal, 25 de abril de 2017). En estos esquemas, el docente no reconoció el sentido global del procedimiento: conocer una forma de calcular $\frac{2}{3}$de $\frac{2}{5}$

Pr: Este diagrama cambia, no es el mismo que el anterior en el que siempre dividíamos. En este diagrama me están preguntando cuál es el valor que va debajo de $\frac{2}{15}$. Tu sabes cuánto es ¿Santiago?
Santiago: $\frac{1}{15}$
Pr: ¿Por qué es $\frac{1}{15}$?
S: 2 por $\frac{1}{15}$ me da $\frac{1}{15}$
Pr: Por eso les dije que es distinto, tú dividiste, si fuera división si sería $\frac{1}{15}$. Pero no están dividiendo, están multiplicando. Es por 2, a ver quién me dice el resultado, tú mismo Santiago.
S: $\frac{4}{15}$
I: Exacto, ahí colocan $\frac{4}{15}$.
Creo que ya varios de ustedes están empezando a transformar mucho más rápido y están pensando de otra forma.
Bueno muy bien, creo que se está logrando lo que queríamos.

En la parte final de este extracto, cuando el docente expresó "se está logrando lo que queríamos", posiblemente, el profesor hizo alusión a que los alumnos ya manejaban con mayor facilidad los algoritmos para multiplicar y dividir fracciones.

En cuanto al recuadro de recordatorio, el profesor expresó lo siguiente:

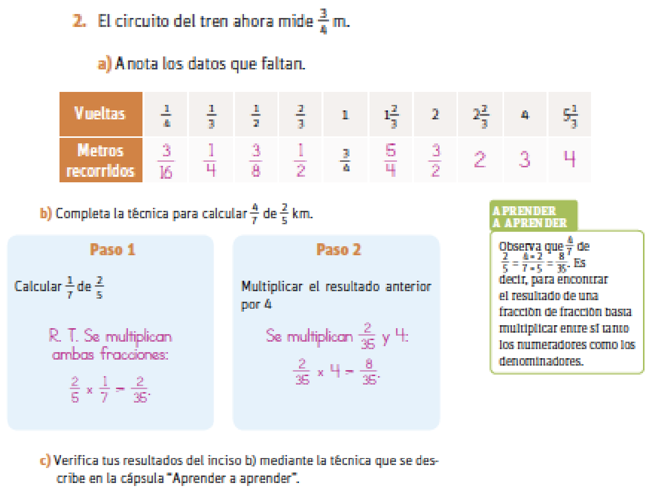
Para dividir una fracción entre un número *n* se puede dividir su numerador entre *n*, o bien, multiplicar su denominador por *n*.

Figura 37. Recuadro de recordatorio. Situación 3.

Pr: ¿Sí queda claro eso o no? Tiene que ver con lo que dijimos de la suma, n es cualquier número, y aquí n me lo están poniendo como mi denominador.

Los alumnos tuvieron problemas para comprender lo que el docente intentó comunicar pues el silencio fue general y algunos estudiantes manifestaron dudas en voz baja. Aunado a ello, el profesor relacionó en varios momentos de la sesión ambas operaciones en las fracciones, (la suma con la multiplicación), incluso realizó analogías como $\frac{3}{4}$ por 10 visto como $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ldots+\frac{3}{4}$. En ese sentido, he comentado que podría pensarse que el profesor insiste en la suma porque parece haber percibido que la actividad tiene el propósito de mostrar un sentido de la multiplicación de fracciones, y que vio en la suma repetida la vía de cubrir ese propósito.

Actividades 2A, 2B y 2C



2. El circuito del tren ahora mide $\frac{3}{4}$ m.

a) Anota los datos que faltan.

Vueltas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	4	$5\frac{1}{3}$
Metros recorridos	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4

b) Completa la técnica para calcular $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5}$ km.

Paso 1

Calcular $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$

R. T. Se multiplican ambas fracciones:

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$.

Paso 2

Multiplicar el resultado anterior por 4

Se multiplican $\frac{2}{35}$ y 4:

$\frac{2}{35} \times 4 = \frac{8}{35}$.

APRENDER A APRENDER

Observa que $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} = \frac{8}{35}$. Es decir, para encontrar el resultado de una fracción de fracción basta multiplicar entre sí tanto los numeradores como los denominadores.

c) Verifica tus resultados del inciso b) mediante la técnica que se describe en la cápsula "Aprender a aprender".

Figura 38. Actividad 2. Situación 3.

Propósitos y comentarios previos

El propósito de la actividad es que los alumnos obtengan una fracción de otra. En la actividad anterior se revisó una manera de hacerlo sin formalizar el algoritmo de la multiplicación. En esta actividad se sigue la misma línea lo cual ayudará a justificar el algoritmo. Se espera que los alumnos se acerquen por cuenta propia a una forma de multiplicar, antes de que se les enseñe el algoritmo, lo cual se haría enseguida. En caso de dificultades en alguna operación se prevé una puesta en común. Sin embargo, como he visto, el algoritmo en esta clase se da por instalado. La orientación que cobrará la clase, será probablemente la de un repaso o aplicación.

Análisis a posteriori

La actividad se llevó a cabo en parejas con el acompañamiento puntual del docente. Algunos estudiantes se dedicaron a la resolución de la tabla, otros parecían sólo copiar los resultados que sus compañeros encontraban. Mientras tanto, el profesor aprovechó para hacer la revisión de cuadernos y el conteo de sellos para la evaluación bimestral.

En el trabajo de los alumnos identifiqué dos procedimientos. La pareja de Ángel y Silverio escribieron $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{4}$, pero hicieron el procedimiento convencional de zigzag para la división, al cuestionarlos respondieron:

> Obs: ¿Cómo obtuvieron su respuesta?
> Als: Estamos multiplicando.
> Obs: ¿Por qué?
> Als: Puede ser multiplicación o división, es lo mismo ¿estamos bien?

Esta confusión expresa que, o bien no están prestando atención al contexto, pues sabrían que se trata de multiplicar. O bien, la característica de que, con fracciones, multiplicar también es dividir y viceversa, los tiene confundidos.

En la puesta en común, el docente solicitó la participación de algunos equipos al frente para comunicar sus resultados y realizar la validación. Las participaciones fueron las de los alumnos que suelen participar, que son los que tienden a usar los algoritmos. Dudas como las que observé en la pareja que comenté arriba, no se expresaron públicamente. Enseguida, muestro algunas participaciones:

<u>Caso 1 $\frac{2}{3}$</u>

En la imagen, aparece la producción de un par de alumnos en el pizarrón:

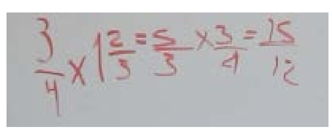


Figura 39. Producción de alumnos en el pizarrón. Actividad 2A. Situación 3.

Así, el ejercicio fortaleció la multiplicación con un algoritmo ya conocido. El docente expresó:

> Pr: ¿Alguno de los equipos o de los que están sentados lo hizo en forma de división? ¿Alguien lo hizo en forma de división?

Más abajo queda claro que se refiere al procedimiento propuesto antes en la lección. Primero $\frac{1}{3}$ de, dividiendo entre 3, y luego multiplicar. Pero la formulación de “dividiendo” es muy confusa, porque también se multiplica.

Enseguida, el profesor reorientó la actividad y expresó:

> Pr: Creo que no entendieron el recuadrito, vamos a tener que repasarlo (se refiere al diagrama 1d). Lo voy a leer nuevamente. Entonces, si yo tengo $\frac{3}{4}$ y lo tengo que multiplicar por $1\frac{2}{3}$, lo que les está planteando la hoja es lo siguiente. Están bien ustedes, cuando hacen esto (convierte la fracción mixta a impropia). Y yo les dije que quería que plantearan eso en forma de división.
> ¿Qué es lo que tengo que hacer? Tengo que dividirlo entre cuánto (señala $\frac{5}{3}$)Entre 3. Entonces divido $\frac{3}{4}$ entre 3. Porque quiero saber cuánto es $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ y ya cuando sepa cuánto es $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ lo multiplico por 5.
> ¿Ya quedó claro? ¿Seguros?
> Als: (Silencio)
> Pr: Si yo divido eso ($\frac{3}{4}$ entre 3), entonces cuánto me queda. Ya directo, mental.

El docente muestra aquí que comprendió hasta cierto punto el sentido que se propone en el diagrama 1d. Le llama "resolver dividiendo" aunque no es exactamente eso, no significa que, en conjunto, lo que se hizo sea división, sino que el factor fraccionario $*\frac{a}{b}$ se aplica por partes: primero $\frac{1}{b}$ de, y luego xa. La parte "$\frac{1}{b}$ de", es en efecto una división.

En la interacción, algunas acciones del profesor muestran intentos para dar lugar a procedimientos alternativos; sin embargo, son poco claros, y, por otra parte, varios alumnos ya están muy encaminados con el algoritmo que conocen.

Al referir "resolver por división", el profesor trasmite una idea distinta a la de multiplicar. En la situación no era objetivo institucionalizar el procedimiento 1d, y menos aún llamarlo división, se había contemplado como un paso previo al algoritmo de la multiplicación. Pero se convirtió, en esta clase, en un procedimiento más, "dividiendo".

Caso $\frac{1}{2}$

> Pr: El de $\frac{1}{2}$ quién pasa a hacerlo en forma de división.
> $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ Pasa Diana, quiero que hagas la multiplicación y en forma de división.

En este caso, el docente solicitó dos procedimientos (multiplicación y división), situación que provocó tensión en la alumna, quien pasó al frente y en todo momento esperaba las indicaciones del profesor, quien le sugirió:

Pr: Es cruzado, acuérdate (refiriéndose a la técnica convencional para dividir dos fracciones en zig zag).

La gestión del profesor consistió en guiar a la alumna (Roditi, 2003). Esta intervención del docente (y la revisión posterior de cuadernos) muestra que los estudiantes ya conocían el algoritmo convencional para la división entre dos fracciones.

Nuevamente, observo que, en el curso de la actividad, el profesor descubrió un procedimiento para multiplicar fracciones nuevo para él (quizás él sólo conocía el algoritmo general). Lo llama "multiplicar por división", lo cual resulta muy confuso. En este caso, el resultado de la interacción del docente, desde su conocimiento previo sobre la multiplicación de fracciones, con el conocimiento propuesto por el texto, no logra traducirse en una propuesta muy clara para los alumnos.

<u>Actividad 2B</u>

La actividad 2B resume la técnica presentada en los diagramas. En la sesión, el docente planteó una resolución acompañada del ejercicio que se propuso al inicio (Calcular $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5}$ km).

El profesor omitió el recuadro verde para institucionalizar y sólo se hizo mención que se estaba trabajando la multiplicación. Esta omisión es explicable desde la conceptualización del docente que supongo, a partir de lo que tendió a manifestarse: el recuadro pretende hacer explícito, e institucionalizar, un hecho que, desde el diseño de la lección se suponía implícito: obtener $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ es lo mismo que multiplicar. Sin embargo, para el profesor y varios de sus alumnos, la multiplicación estaba dada desde el principio y más bien se trató de aplicar un algoritmo (y luego un segundo algoritmo, el de multiplicar "dividiendo", que los alumnos no comprendieron). Siendo así, el contenido del recuadro verde perdía mucho de su sentido, a lo más, podía ser visto como un repaso de algo ya sabido.

Comentarios

<u>La situación y la gestión</u>

El docente enfatizo en la multiplicación de fracciones como equivalente a la suma iterada sin considerar que en esta situación ambos factores son fraccionarios y que ese procedimiento no es suficiente para multiplicar dos fracciones. En cuanto a los diagramas de las actividades 1B y 1D, el profesor refirió que se resolvían “dividiendo”. La confusión de los alumnos aumentó debido a la combinación de los términos multiplicar y dividir, tratados casi como si fueran sinónimos. Cabe señalar una dificultad didáctica ya que los diagramas del libro pretendían mostrar una manera de multiplicar para justificar el algoritmo usual.

El profesor quizá lo tenga claro, pero al decir “resolver por división” trasmitió otra idea. No era un propósito institucionalizar el procedimiento 1D, y menos aún llamarlo como de división, se había contemplado como un paso previo al algoritmo de la multiplicación. Pero se convirtió, en esta clase, en un procedimiento más, “dividiendo”.

Por otra parte, la fuerte tendencia de varios alumnos, con presencia en clase, por el uso de algoritmos, de alguna manera obstaculizó los procedimientos que se plantearon en las secciones 1C y 1C, procedimientos más simples pero que daban sentido a las operaciones. Se volvió a manifestar que es difícil para ellos cambiar la mirada ante situaciones que buscan favorecer el sentido. Cabe señalar que las secciones, de alguna manera provocaron tensión con sus procedimientos memorizados y así buscar otras alternativas.

La dinámica de resolución acompañada volvió a prevalecer en esta situación. El docente se apoyó en los alumnos más participativos, y así guio las explicaciones y la resolución de los ejercicios en el pizarrón a través de la exposición. Asimismo, las ayudas que otorgó fueron directas (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015) para facilitar las tareas (Roditi, 2003).

Puede decirse, en síntesis, que en esta lección, el diálogo del docente con el texto no fue muy fecundo. No se transmitió de manera clara el algoritmo usual para los alumnos, y tampoco se logró, aparentemente, vincular dicho algoritmo a la acción de “tomar una fracción de”, en aras de justificarlo y darle cierto sentido. Apareció además otro algoritmo, muy confuso.

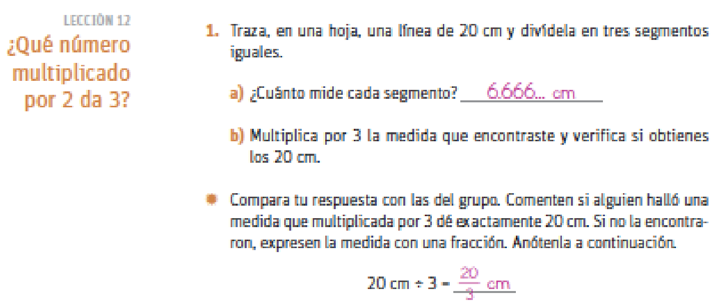
Cabe hacer la siguiente hipótesis: la lógica que subyace a la lección se revela no solo distante de la del profesor, también es frágil, en el sentido sutil, difícil de comprender de manera rápida, de una mirada. La principal dificultad ocurre cuando, para introducir un procedimiento alterno, con una supuesta participación de los alumnos, se les propone “completar” los pasos de dicho procedimiento, como es el caso de los esquemas de la actividad 1. La lógica del procedimiento es poco visible y escapa tanto para alumnos como para el docente. Puede decirse que en estos casos el texto podría tender a ser excesivamente directivo en cuanto al tipo de actividades que se propusieron.

2.4. Situación 4. ¿Qué número multiplicado por 2 da 3?

Propósitos y comentarios previos

- Se pretende que los alumnos establezcan que en el producto de dos números naturales *a* y *b*, siempre existe un número que multiplicado por *a* da *b*, es decir, la fracción $\frac{b}{a}$. Este hecho, además de ser importante en sí mismo[30], es un resultado que se necesitará un poco más adelante, en la secuencia del operador fraccionario, en un contexto de proporcionalidad[31].
- Que los alumnos reconozcan que en una multiplicación los factores pueden ser fraccionarios.
- Que, al establecer dicho resultado, los estudiantes transiten de la interpretación de la fracción como “partes de unidad” ($\frac{3}{4}$ de unidad es 3 veces $\frac{1}{4}$ de unidad) a la de cociente ($\frac{3}{4}$ de unidad es 3 entre 4).

Actividades 1A y 1B


LECCIÓN 12

¿Qué número multiplicado por 2 da 3?

1. Traza, en una hoja, una línea de 20 cm y divídela en tres segmentos iguales.

a) ¿Cuánto mide cada segmento? 6.666... cm

b) Multiplica por 3 la medida que encontraste y verifica si obtienes los 20 cm.

- Compara tu respuesta con las del grupo. Comenten si alguien halló una medida que multiplicada por 3 dé exactamente 20 cm. Si no la encontraron, expresen la medida con una fracción. Anótenla a continuación.

$20 \text{ cm} \div 3 = \frac{20}{3} \text{ cm}$

Figura 40. Actividad 1. Situación 4.

En estas actividades se espera que los alumnos reconozcan que hay divisiones cuyo cociente no se puede expresar de manera exacta con decimales (con un número finito de cifras); pero sí con fracciones.

[30] En la secundaria se suele dar por hecho que los alumnos saben que el cociente a:b es la fracción a/b. Sin embargo, esto no es obvio en lo absoluto y prácticamente nunca es enseñado (Block y Solares, 2001).
[31] Esto ocurrirá cuando, partiendo de la relación “a 4 cm le corresponden 7 cm” se requiera saber cuánto le toca a 1 cm, en fracciones, es necesario dividir 7 cm entre 4, y saber que el resultado es 7/4.

Análisis a posteriori[32]

Los alumnos trazaron un segmento de 20cm en sus cuadernos y el docente pidió que con sus propios medios intentaran dividir el segmento en tres partes iguales. Después de un par de minutos surgieron algunas propuestas. La primera, y más generalizada en el grupo, fue el conteo de cuadritos del cuaderno para hacer una comparación con la longitud del segmento. En esa etapa, el docente logró sostener la fase adidáctica de la actividad pues no expresó ayudas directas. En la interacción que muestro enseguida, el profesor coadyuvó para que los alumnos se apropiaran del problema, es decir, la devolución (Brousseau, 2007):

> Pr: Tienen que partir esa línea en tres segmentos iguales.
> Valeria: ¿Cómo que en tres segmentos?
> Pr: No sé, cada quien debe usar su propio procedimiento.
> Santiago: ¿Y si sobra uno qué hago profe?
> (Los alumnos miden el segmento, algunos miden con regla, otros usan escuadras).
> Pr: No sé, la condición es esa, esa línea la debes partir en tres partes iguales.

Otra propuesta, fue la división explícita de 20 entre 3. El profesor recuperó la propuesta y la comunicó al grupo. En la puesta en común, el alumno José María uso como referencia los cuadrados de la cuadrícula de la hoja y los comparó con el segmento trazado:

> Pr: ¿Quién me quiere decir cuánto mide cada uno de esos segmentos? Aquí está el sello (incentivo de participación).
> José María: 6.6cm
> Pr: Regina, ¿sí es correcto eso?
> Regina: sí, lo dividí.
> José María: son 40 cuadritos, y son 2 por centímetro.
> Pr: A ver, pasa.
> JM: Sólo comparé y medí con la regla.
> Pr: Pensé que lo habías hecho de otra manera y resulta que no.

Aunque varios alumnos acudieron a contar los cuadritos, la mayoría optó por la división, procedimiento esperado en el análisis a priori:

> Valeria: 20 entre 3.
> Pr: 20 entre 3, hiciste una división (El docente escribió la división en el pizarrón).
> ¿y luego?
> Valeria: Pues se pone el 6, luego punto decimal.
> Pr: ¿Algún otro procedimiento?
> Als: No, general.
> Bueno, en la pregunta que les hacen ahí, cuánto mide cada segmento.
> Als: 6.6

[32] En esta sesión, el clima fue muy caluroso. El aula tenía poca ventilación y los alumnos manifestaron su incomodidad y sensación de asfixia. El factor ambiental incidió notablemente en la experiencia con la situación. La atención de los estudiantes fue poca y la gestión de las actividades fue difícil ante el cansancio y poco entusiasmo de los alumnos.

De inmediato el docente dio lectura a la pregunta 1b que consiste en multiplicar ese número por 3 y verificar que se obtendrá el 20.

> Pr: Por lógica, si tengo tres segmentos y mi división, cuántos 6 quieren que coloquemos después del punto decimal (varios dicen que 2).
> Entonces 6.66 por 3, lógicamente cuánto me tiene que salir.
> Santiago: 20
> Pr: Vamos a ver si es así.

El docente, posiblemente tuvo la intención de desconcertar al grupo (Sensevy, 2011), pero él mismo resolvió la multiplicación en el pizarrón, quizás para ahorrar tiempo:

> Pr: Obtengo 19.98 cm ¿Qué será? ¿Quién me dice qué es lo que sucedió? ¿Qué pasó ahí? ¿Por qué nos está faltando tanto?
> Vanesa: No es una fracción… No es un entero.
> Pr: Pero no omitimos nada, ¿o sí omitimos algo?
> Als: ¡No!
> Pr: Entonces, ¿por qué hay un faltante? Nos están faltando dos centésimas. ¿Quién me dice qué pasó ahí? Vamos a continuar leyendo a ver si nos dan la respuesta.

El profesor intentó que los alumnos reconocieran que la fracción $\frac{20}{3}$ es el número exacto para representar la división del segmento. Sin embargo, sólo una alumna participó y se acercó al término fracción y entero, pero no trascendió su participación ya que no logró explicar algo más.

> Pr: ¿Qué será? ¿Quién me dice qué es lo que sucedió? ¿Qué pasó ahí? ¿Por qué nos está faltando tanto? ¿Quién me dice en forma de fracción cómo queda? La división de 20 entre 3.
> Valeria: 6 enteros…
> Pr: No, la división de 20 entre 3 en forma de fracción, eso ya lo habíamos visto.
> Valeria: 20 tercios.

Valeria propuso: “20 tercios” como el resultado de la división de 20 entre 3, lo que muestra que la estudiante conoce en cierta medida la relación que es objeto de estudio: a:b = $\frac{a}{b}$. Aunque no es usual que alumnos de primer grado tengan ese conocimiento, por algunos comentarios del docente y la revisión de los cuadernos, conjeturo que los estudiantes habían visitado este tipo de equivalencias en meses precedentes.

<u>Actividad 1B</u>

El profesor identificó bien el propósito de la actividad, que es mostrar que las fracciones permiten dar el cociente exacto, mientras que los decimales no. Antes que los alumnos hicieran la multiplicación que permitiría verificarlo, él les dejó ver la conclusión:

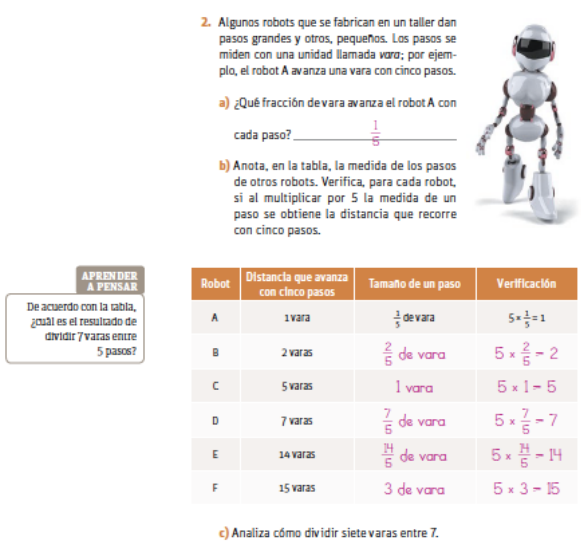
Pr: Bueno, antes de continuar con esto, ustedes se preguntan muchas veces por qué trabajan con fracciones, bueno pues una razón muy poderosa es esta (señala los $\frac{20}{3}$ del segmento de la actividad 1). Las fracciones son exactas y los decimales no son exactos, ya lo pudimos ver aquí. Una fracción contiene todo el universo, cuando yo pongo $\frac{20}{3}$ me va a incluir a los 20cm.

Enseguida, reapareció el algoritmo convencional, así como el "1 mágico" que se institucionalizó desde la primera situación:

Pr: Si yo multiplico $\frac{20}{3}$ por 3 ¿Quién me dice qué tengo que hacer?
Braulio: Pongo el 1 mágico.
Pr: ¿Luego?
Braulio: Cruzado
Pr: ¿Por qué cruzado?
Aparicio: Luego multiplico 20 por 3 y 3 por 1.
Pr: Vean la diferencia entre multiplicar fracciones y decimales. Las fracciones son exactas.

La intervención de Braulio, confirma, una vez más, que la memorización de los algoritmos de manera precoz y fuera de contexto provocan confusiones en su utilización. El alumno propuso el algoritmo "cruzado" convencional para la división de fracciones (el famoso zigzag); sin embargo, cuando el docente cuestionó por qué, el alumno evadió la pregunta y de inmediato propuso el "1 mágico" ya institucionalizado como la alternativa de primera mano. Más allá de eso, el docente mostró la intención de comunicar a sus alumnos, con cierto entusiasmo, el descubrimiento de una razón de ser las fracciones.

Actividades 2A, 2B y 2C



2. Algunos robots que se fabrican en un taller dan pasos grandes y otros, pequeños. Los pasos se miden con una unidad llamada *vara*; por ejemplo, el robot A avanza una vara con cinco pasos.

a) ¿Qué fracción de vara avanza el robot A con cada paso? $\frac{1}{5}$

b) Anota, en la tabla, la medida de los pasos de otros robots. Verifica, para cada robot, si al multiplicar por 5 la medida de un paso se obtiene la distancia que recorre con cinco pasos.

APRENDER A PENSAR

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es el resultado de dividir 7 varas entre 5 pasos?

Robot	Distancia que avanza con cinco pasos	Tamaño de un paso	Verificación
A	1 vara	$\frac{1}{5}$ de vara	$5 \times \frac{1}{5} = 1$
B	2 varas	$\frac{2}{5}$ de vara	$5 \times \frac{2}{5} = 2$
C	5 varas	1 vara	$5 \times 1 = 5$
D	7 varas	$\frac{7}{5}$ de vara	$5 \times \frac{7}{5} = 7$
E	14 varas	$\frac{14}{5}$ de vara	$5 \times \frac{14}{5} = 14$
F	15 varas	3 de vara	$5 \times 3 = 15$

c) Analiza cómo dividir siete varas entre 7.

Figura 41. Actividad 2. Situación 4.

Propósitos y comentarios previos

El propósito de esta actividad es que los alumnos encuentren el cociente $\frac{a}{b}$ de divisiones *a÷b.* Los alumnos deberían calcular el tamaño de un paso, sabiendo lo que un Robot avanza en 5 pasos, por ejemplo, el robot D avanzó 7 varas en 5 pasos, ¿Cuánto avanza en un paso? La operación que está en juego es la división 7 entre 5.

Dado que todos los robots dan 5 pasos, las distancias recorridas (en los 5 pasos) son proporcionales al tamaño de un paso. Esta relación proporcional hace posible usar el tamaño del paso del Robot que avanza una vara en 5 pasos, y que es de $\frac{1}{5}$ de vara, para calcular el tamaño del paso de los demás robots, por ejemplo, el del robot que avanza 7 varas: dado que el recorrido de 7 varas es 7 veces el de una vara, su paso es de 7 veces $\frac{1}{5}$ de vara, esto es $\frac{7}{5}$ de vara.

Análisis a posteriori

El trabajo se desarrolló en dos momentos: trabajo en equipos y puesta en común. Durante el primer momento, el docente permaneció prácticamente todo el tiempo frente a la clase, guiando las participaciones y otorgando ayudas generalmente indirectas (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015). El trabajo en equipos fue difícil, con poca participación, en parte por las condiciones climáticas extremas que vivía la ciudad en esa temporada, aunado a que era el último módulo de clase del día y los alumnos manifestaban cansancio. Para la puesta en común el maestro transcribió la tabla en el pizarrón, y la fue llenando con apoyo de los equipos. El profesor decidía la forma de verificar y los alumnos realizaban operaciones, y a veces también hacían propuestas. Esto constituye una distribución de las tareas entre el profesor y los alumnos, en la que éste último sube su posición en la topogénesis (Sensevy, 2011), es decir, asume las decisiones principales.

A continuación, presento algunas participaciones, organizadas por robot:

<u>Robot A (una unidad entre 5)</u>

> Pr: ¿Quién me dice lo de la vara y el robot? Dice: Una vara es mi entero, Un robot da cinco pasos para completar una vara.
> Aparicio: $\frac{1}{5}$

Pr: ¿Por qué $\frac{1}{5}$ Aparicio?
Ap: Porque para pasar una vara se necesitan 5 pasos.
Pr: Ajá, está bien, pero ¿qué hiciste?
Ap: Es que no me acuerdo bien.
Pr: ¿No te acuerdas bien? ¿Alguien sabe qué hizo Aparicio?
Jesús: La vara es el entero y el 5 las veces que caminó el robot.
Pr: Entonces es $\frac{1}{5}$ ¿Si está bien ese razonamiento? Sí yo sumo 5 veces $\frac{1}{5}$ ¿qué sucede?
(El docente sumó cinco veces $\frac{1}{5}$ en el pizarrón)

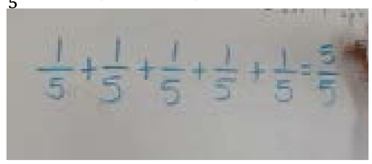


Figura 42. Producción del docente en el pizarrón.

Pr: Cada quinto es un paso, entonces si yo sumo un paso, más otro paso (refiriéndose a cada $\frac{1}{5}$), ¿qué sucede?
Jesús: Sale un entero
Pr: ¿Seguros?
Als: ¡Sí!

A diferencia de la multiplicación “5 veces $\frac{1}{5}$ de vara”, aquí lo que se tiene es una división: “1 vara entre 5” Entonces, lo que el profesor hizo con esa suma no fue resolver la división, sino verificar que el resultado es $\frac{1}{5}$

<u>Robots A y B</u>

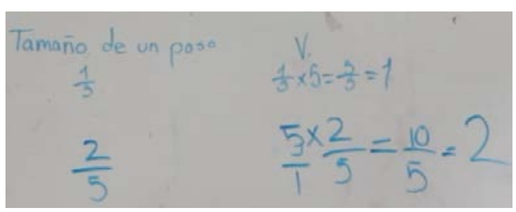


Figura 43. Producciones de un equipo para Robots A y B. Situación 4.

En ambos robots, los alumnos primero encontraron el tamaño del paso, lo que implica una división implícita. Enseguida, la alumna Vanesa realizó la multiplicación de $\frac{1}{5}$ por 5 de manera directa cambiando el orden de los factores, mientras que, en el Robot B multiplicó $\frac{2}{5}$ por 5, colocando el denominador 1 para usar el algoritmo convencional.

Por su parte, Valeria utilizó el tamaño del paso del Robot que avanza una unidad ($\frac{1}{5}$) y, para verificar, multiplicó $\frac{2}{5}$ por 5, colocando el denominador 1 para usar el algoritmo conocido.

Robot C (5 unidades entre 5)

Este ítem, que podría haberse pensado que sería el más fácil, causó dificultades. Muestro primero la discusión en un equipo, y después un fragmento de la puesta en común.

El equipo 2 (Jesús, Silverio, Regina, Diana, Berenice y Valeria) discutió sobre el Robot C, mientras Silverio decía que debían multiplicar 5 por $\frac{5}{5}$, Jesús le rebatía que era por 1, enfrascándose en esa discusión:

> Silverio: Serían cinco quintos.
> Jesús: ¿Cuál? (cara de desconcierto).
> Silverio: En la c
> Jesús: Entonces sería un entero.
> Valeria: Por eso, cinco por cinco quintos.
> Valeria: ¿Por qué un entero? (hacia Jesús)
> Jesús: Porque son cinco quintos.
> Silverio: Pero, mira, cinco quintos por cinco quintos, es ilógico. Cinco quintos por uno.

Jesús deja ver que sabe que el resultado es una vara, probablemente lo obtuvo directamente de la división de 5 varas entre 5. Silverio en cambio propuso $\frac{5}{5}$ como medida, resultado que pudo provenir de seguir aplicando el procedimiento que, por lo visto, se está generalizando, partir del valor unitario $\frac{1}{5}$: si una vara entre 5 es $\frac{1}{5}$, 5 varas entre 5 es 5 veces $\frac{1}{5}$, es decir $\frac{5}{5}$.

Jesús argumentó su respuesta de “un entero” vinculándola también a $\frac{5}{5}$, no puedo asegurar si porque también él la calculó como Silverio, o bien, simplemente mostró la equivalencia de las dos respuestas, la suya “un entero”, y la que dio Silverio “$\frac{5}{5}$”.

En el caso de Valeria, planteó la multiplicación de $\frac{5}{5}$ por 5, lo cual es más bien la verificación que los llevaría a ver que se obtienen las 5 unidades.

En la puesta en común, el profesor identificó claramente la posibilidad de resolver la división 5 entre 5 de manera inmediata, sin necesidad de aplicar el procedimiento general del valor unitario. Explícitamente apeló al “uso de la lógica”:

> Pr: Ese fue el primero en el que tuvieron complicaciones
> (Varias manos levantadas para participar)
> Pr: A ver, pase este equipo, el de 5 varas. Y aquí vamos a hacer un análisis, a veces nada más queremos mecanizar y no hace falta otra cosa más que hacer <u>uso de la lógica</u>.
> Pr: ¿todos los equipos tienen eso?
> Als: ¡Sí¡
> Pr: Es que yo observé que este fue de los que más trabajo les costó. Hubo dos equipos que sí lo hicieron muy rápido, pero los otros querían que yo a fuerza verificará que estaban bien. Sucede lo siguiente, si les están dando que en cinco pasos completa 5 varas, ¿de qué tamaño es cada paso?

Jesús: $\frac{1}{5}$
Pr: No
Berenice: un entero
Pr: Es del tamaño de una vara. A lo mejor ella lo hizo así, esto es una mecanización (completa $\frac{5}{5}$=1). Pero también aprendan a usar la lógica. Sí da 5 pasos y al dar 5 pasos avanza 5 varas, pues por lógica cada paso avanza una vara (tono de obviedad)
(Alumnos observando la explicación en silencio)

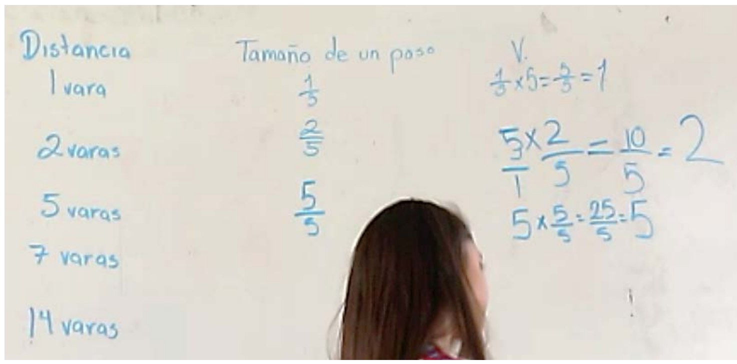


Figura 44. Producción en el pizarrón de una alumna para el Robot C.

Consistente con lo que he venido observando, cuando el profesor se da cuenta de un procedimiento alternativo al algoritmo, basado en relaciones más transparentes e intuitivas, se interesa e intenta transmitirlo a sus alumnos. ¿Por qué entonces el peso tan grande de los algoritmos en la clase? Probablemente porque estas intervenciones del profesor son más bien aisladas, y solamente son comunicadas, sin espacio para que los alumnos las utilicen.

Robot D

El equipo 1, manifestó que, para el inciso D (7 varas), hicieron lo siguiente:

Als: $\frac{7}{5}$, tomamos el denominador del primero (de $\frac{1}{5}$ de vara) y le pusimos el denominador y luego multiplicamos.

Aunque la explicación no es muy clara, es posible que hayan utilizado las relaciones esperadas en la actividad: 7 entre 5, es 7 veces $\frac{1}{5}$. Es posible que para algunos alumnos, se haya establecido que el cociente de la división a unidades entre b es $\frac{a}{b}$ de unidad, y que la razón de esto es que a entre b es a veces $\frac{1}{b}$.

A manera de resumen, identifiqué distintas funciones de la división en esta sesión:

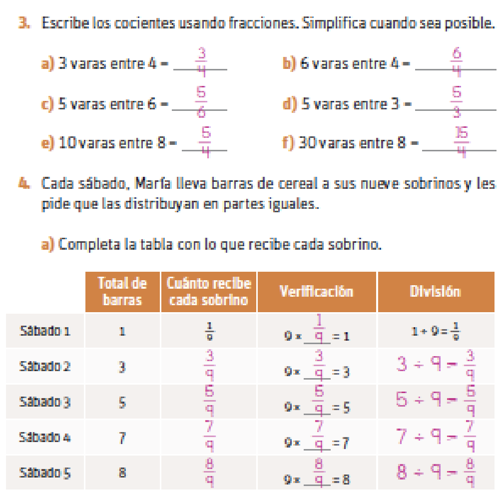
1) 7:5 es la división que corresponde al tamaño de un paso, sabiendo que 5 pasos miden 7 varas

2) 7:5 es $\frac{7}{5}$ (algoritmo) y conviene más porque es exacto

3)7:5 es 7 veces $\frac{1}{5}$ y por lo tanto es $\frac{7}{5}$ (esto era lo que se pretendía llegar).

4) 7:5 es la división que se puede hacer como parte del algoritmo para pasar a fracción mixta $1\frac{2}{5}$

Actividades 3 y 4



3. Escribe los cocientes usando fracciones. Simplifica cuando sea posible.

a) 3 varas entre 4 = $\frac{3}{4}$ b) 6 varas entre 4 = $\frac{6}{4}$

c) 5 varas entre 6 = $\frac{5}{6}$ d) 5 varas entre 3 = $\frac{5}{3}$

e) 10 varas entre 8 = $\frac{5}{4}$ f) 30 varas entre 8 = $\frac{15}{4}$

4. Cada sábado, María lleva barras de cereal a sus nueve sobrinos y les pide que las distribuyan en partes iguales.

a) Completa la tabla con lo que recibe cada sobrino.

	Total de barras	Cuánto recibe cada sobrino	Verificación	División
Sábado 1	1	$\frac{1}{9}$	$9 \times \frac{1}{9} = 1$	$1 \div 9 = \frac{1}{9}$
Sábado 2	3	$\frac{3}{9}$	$9 \times \frac{3}{9} = 3$	$3 \div 9 = \frac{3}{9}$
Sábado 3	5	$\frac{5}{9}$	$9 \times \frac{5}{9} = 5$	$5 \div 9 = \frac{5}{9}$
Sábado 4	7	$\frac{7}{9}$	$9 \times \frac{7}{9} = 7$	$7 \div 9 = \frac{7}{9}$
Sábado 5	8	$\frac{8}{9}$	$9 \times \frac{8}{9} = 8$	$8 \div 9 = \frac{8}{9}$

Figura 45. Actividades 3 y 4. Situación 4.

Propósitos y comentarios previos

En estas actividades, se pretende que los estudiantes sistematicen el procedimiento para obtener la fracción que representa el cociente de una división.

Análisis a posteriori

El profesor organizó la clase en equipos. Cabe mencionar que un número importante de estudiantes estaban distraídos por un concurso de inglés, por lo tanto, su atención en la actividad no fue óptima y la gestión para el docente fue difícil.

> Pr: Bueno, ahora tenemos 3 varas en 4 pasos, 5 varas en 6 pasos, etc.
> Hay que escribirlo en forma de cociente, no hay que dividir, y si se puede simplifiquen. ¿Sí se entiende?

La instrucción: “no hay que dividir” alude probablemente a la aplicación del algoritmo recién visto a:b = $\frac{a}{b}$, y descarta otras formas, por ejemplo, acudir a la partición de a unidades entre b (como se hizo antes), o incluso al procedimiento de dividir numerador entre denominador con cociente decimal.

Recupero la siguiente intervención de Diana con el observador:

Diana: En el inciso E, ¿se puede poner $\frac{10}{8}$? ¿cuál va arriba y cuál va abajo?

En su pregunta, Diana deja ver que, para ella, como seguramente para otros, se trata de un algoritmo arbitrario, en el sentido de que ella no recuperó la justificación del mismo, pues pudo partir de que 10: 8 es 10 veces $\frac{1}{8}$, o bien, reflexionar la posibilidad de verificar multiplicando $\frac{10}{8}$ u $\frac{8}{10}$ por 8; o incluso simplemente prever que el cociente tenía que ser mayor que la unidad. Sin embargo, parece que elige 10 como numerador porque es el primer número, una especie de nemotecnia.

Para el inciso b), en una breve puesta en común, Tonatzin pasó al frente y escribió lo siguiente:

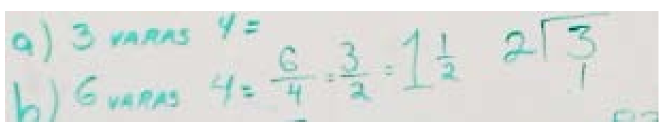


Figura 46. Procedimiento en el pizarrón de una alumna. Inciso b. Actividad 3. Situación 4.

Pr: ¿Qué hiciste Tonatzin con el $\frac{3}{2}$?
T: Ah pues de los $\frac{3}{2}$ obtuve $1\frac{1}{2}$
Pr: Tonatzin vio que es fracción impropia.

La alumna procedió a hacer la división; no obstante, titubeó sobre qué número iba dentro de la galera y preguntó al profesor, quien enunció: “eso se supone ya lo deben saber, el de arriba va adentro” En este incidente (Roditi, 2003), el docente respondió a la pregunta directamente, suponiendo que los estudiantes ya tienen ese conocimiento previo.

En el inciso c, Jesús pasó al frente y el docente lanzó a siguiente pregunta:

Pr: Sí divido 5 entre 6 ¿es una división exacta?
Als: ¡No!
Pr: ¿ya la hicieron? (El docente efectuó la división) Ya que la realizamos nos sale infinita, está es una de las razones por las que es mejor trabajar con fracciones.

El $\frac{5}{6}$ apareció como una manera de escribir el resultado de esa división. El docente aprovechó la ocasión para insistir en esta razón de ser de las fracciones, que al parecer descubrió y valora.

En resumen, en los incisos b y d, es posible apreciar que:

1) Algunos alumnos como Diana no parecen comprender porque hay una división en juego, ni cómo se justifica la técnica de a:b = $\frac{a}{b}$.

2) Los otros alumnos simplificaron y obtuvieron las fracciones (a veces las simplificaron), apelando a una función de la división, ciertamente algorítmica. El algoritmo en juego (a:b = $\frac{a}{b}$) el cual es tan sencillo, tan fácil de reproducir, que eso hace inevitable que los alumnos lo empiecen a usar muy pronto, aun habiendo comprendido o no su razón de ser.

3) Algunos alumnos más dejaron ver que tienen claro una razón de ser de que la división a unidades entre b, arroja como cociente a la fracción $\frac{a}{b}$ de unidad. La explicación o la razón de ser esta dada por la relación a:b = a veces $\frac{1}{b}$.

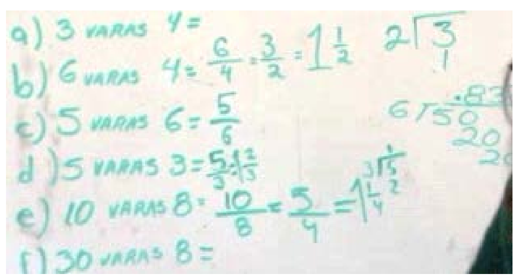
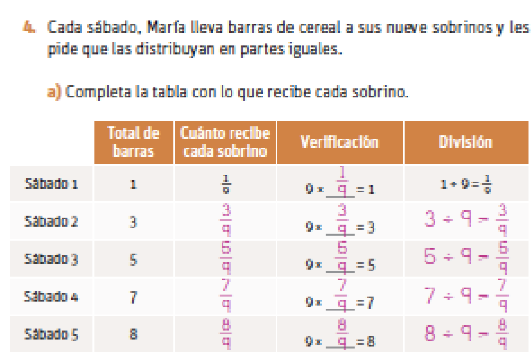


Figura 47. Procedimientos para los robots en el pizarrón. Actividad 3. Situación 4.

Actividad 4



4. Cada sábado, María lleva barras de cereal a sus nueve sobrinos y les pide que las distribuyan en partes iguales.

a) Completa la tabla con lo que recibe cada sobrino.

	Total de barras	Cuánto recibe cada sobrino	Verificación	División
Sábado 1	1	$\frac{1}{9}$	$9 \times \frac{1}{9} = 1$	$1 \div 9 = \frac{1}{9}$
Sábado 2	3	$\frac{3}{9}$	$9 \times \frac{3}{9} = 3$	$3 \div 9 = \frac{3}{9}$
Sábado 3	5	$\frac{5}{9}$	$9 \times \frac{5}{9} = 5$	$5 \div 9 = \frac{5}{9}$
Sábado 4	7	$\frac{7}{9}$	$9 \times \frac{7}{9} = 7$	$7 \div 9 = \frac{7}{9}$
Sábado 5	8	$\frac{8}{9}$	$9 \times \frac{8}{9} = 8$	$8 \div 9 = \frac{8}{9}$

Figura 48. Actividad 4. Situación 4.

El docente se mantuvo al frente del aula y solicitó la participación de los alumnos para el llenado de la tabla. En el transcurso de las participaciones, observé que varios alumnos establecieron la igualdad, aunque como se vio, no es clara su razón de ser para todos. Para algunos, constituye un algoritmo cuya justificación ignoran. Al final, se instauró el significado de la fracción como cociente a:b= $\frac{a}{b}$.

Enseguida, la producción (Figura 49) de Silverio. Se observa que aplicó un conocimiento que le permitió expresar a:b=$\frac{a}{b}$ para calcular la porción para cada sobrino. Asimismo, para la verificación, el alumno hizo las multiplicaciones sin importar el orden de los factores, cuando en este caso importaría para dar el sentido. En las multiplicaciones, en algunas filas utilizó el denominador 1, y en otros casos no fue necesario escribirlo, lo que indica una apertura al uso de otras representaciones, efectivamente equivalentes de la multiplicación (que de cualquier manera llegan al algoritmo convencional). En todos los casos, el alumno simplificó y obtuvo el resultado en forma fraccionaria o entero.

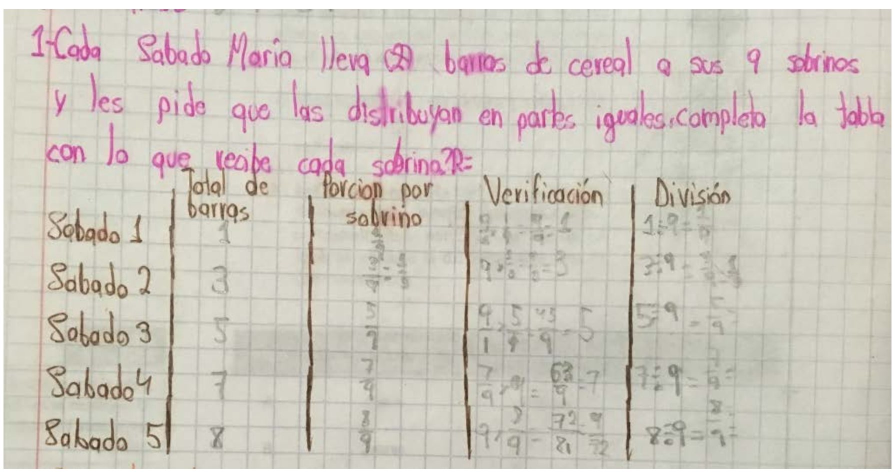


Figura 49. Producción individual del alumno Silverio. Actividad 4. Situación 4.

En la intervención del profesor, deja ver, por una parte, que intentó que los alumnos comprendieran la validación del problema, lo cual, en efecto, podría jugar un papel importante para la comprensión de las relaciones implicadas. Sin embargo, el docente fue quien respondió, sin dar lugar a la participación de sus alumnos. Esta se perfila como una práctica cotidiana del docente, en la cual al final de una interacción, plantea las preguntas y de inmediato las responde, una institucionalización.

Pr: La verificación, van a regresarse al robot para ver cómo se verifica, quién me dice cómo.
Valeria: Multiplicamos $\frac{1}{9}$ por 1.
Pr: ¿Por qué por 1?

V: Por el total de barras.
Pr: Pero por 1.
Pr: ¿ $\frac{1}{9}$ qué te está representando?, un pedacito que le toca a cada uno, ¿sí o no? ¿Cómo verificas?
Son 9 sobrinos, vamos a multiplicar $\frac{1}{9}$ por 9.

Estas informaciones breves que el docente da sobre cuestiones relevantes para el sentido muestran, por una parte, que el docente las identifica, pero por otra, que son claramente insuficientes para que los alumnos se apropien de ellas.

Comentarios

La situación

Se pretende que los estudiantes establezcan que el cociente de dos números naturales *a* y *b*, es la fracción $\frac{a}{b}$, es decir, a:b= $\frac{a}{b}$. En las cuatro actividades que se experimentaron se destacan varias funciones de la división. Aunque no se logró de manera evidente que los alumnos encontraran el cociente $\frac{a}{b}$ de divisiones *a:b* apoyándose en el cociente de la división *1:b*, sí se visibilizaron otras relaciones, por ejemplo:

Se estableció a:b= $\frac{a}{b}$. y se vinculó con problemas en los que hace falta calcular un cociente de dos enteros. Se vislumbró la ventaja de la precisión que dan las fracciones en ciertas divisiones. Fue notorio que el docente encontró en esta observación una posibilidad oportuna de mostrar a los alumnos una razón de ser de las fracciones.
Así mismo, se hizo un cruce con el procedimiento ya conocido para pasar a forma mixta una fracción, pero sin que se reflexionaran sobre qué tiene que ver 7:4 con $\frac{7}{4}$ en forma mixta.

La gestión

Se puede destacar que sí hubo momentos de trabajo de los alumnos, sobre todo en equipos. En los momentos de interacción colectiva se mantuvieron las dinámicas que ya se vislumbran como habituales: el profesor da participación a los alumnos, pero mantiene una posición topogenética alta (Sensevy, 2011), guiando de cerca las resoluciones de los alumnos ante los incidentes (Roditi, 2003), o bien facilitó la tarea con ayudas generalmente directas (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015) o respondía directamente bajo una resolución acompañada.

En cuanto a la relación del docente con la situación, destaca la comunicabilidad de la lección, es decir, la comunicación del sentido de las actividades, de su propósito subyacente. Para el docente, a veces resulto rebuscado y reconoció que tendía a omitir ciertas cosas:

> El proyecto propone actividades diferentes a las que trabajamos comúnmente, distintas alternativas para la multiplicación de fracciones que no son comunes y que muchas veces uno como maestro se salta. A veces uno se quiere saltar complicaciones y se lo salta. Además, hace pensar a los alumnos. Otra cosa, es que hay algunos ejercicios un poco rebuscados pero que les han gustado, porque los hace pensar (…) El programa deja mucho a la interpretación, es muy escueto. Se dice, uso de multiplicación y división de fracciones de manera muy general (I. López, comunicación personal, 25 de abril 2017).

De lo anterior, me pregunto ¿por qué sucede esto? ¿en qué medida el diseño de las actividades y su comunicabilidad influyen en la comprensión de ésta? En la experiencia de cuatro situaciones, resalta la poca atención que el docente ha dado a las fichas pedagógicas:

> Al principio, leía las fichas, después ya no fue necesario porque las actividades están fluidas, te van llevando de la mano (I. López, comunicación personal, 25 de abril 2017).

Lo anterior da cuenta que, para el docente, las fichas pedagógicas son simplemente una confirmación de los conocimientos matemáticos que él tiene y que las orientaciones se remitían a consejos para la organización del espacio y del tiempo. Entonces, es necesario analizar detenidamente el material de apoyo que se le entrega al profesor, resaltando el porqué de las actividades y señalando puntualmente por qué es importante esperar antes del trabajo directo con algoritmos o bien la lógica del orden de las actividades en la construcción del conocimiento.

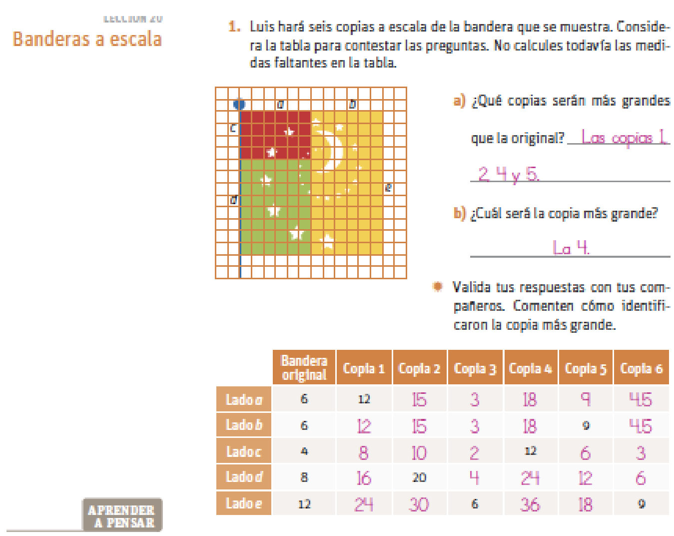
2.5. Situación 5. La bandera a escala

Propósitos y comentarios previos

En esta situación se inicia el estudio de un nuevo tipo de problemas que implican multiplicar por fracciones. Se trata de problemas de escala, en los que es necesario determinar un factor de proporcionalidad fraccionario[33]. En esta primera situación, dicho factor permanecerá implícito. Las fracciones aparecerán en el papel de medidas, aún no de operadores. Los propósitos son:

- Que los alumnos establezcan el recurso del valor unitario fraccionario para hallar valores faltantes en una situación de proporcionalidad.
- Poner en evidencia el error aditivo y descartarlo.

Actividades 1A y 1B



LECCIÓN 20

Banderas a escala

1. Luis hará seis copias a escala de la bandera que se muestra. Considera la tabla para contestar las preguntas. No calcules todavía las medidas faltantes en la tabla.

a) ¿Qué copias serán más grandes que la original? Las copias 1, 2, 4 y 5.

b) ¿Cuál será la copia más grande? La 4.

- Valida tus respuestas con tus compañeros. Comenten cómo identificaron la copia más grande.

	Bandera original	Copia 1	Copia 2	Copia 3	Copia 4	Copia 5	Copia 6
Lado *a*	6	12	15	3	18	9	4.5
Lado *b*	6	12	15	3	18	9	4.5
Lado *c*	4	8	10	2	12	6	3
Lado *d*	8	16	20	4	24	12	6
Lado *e*	12	24	30	6	36	18	9

APRENDER A PENSAR

Figura 50. Actividad 1. Situación 5.

Propósitos y comentarios previos

En esta actividad, se hace énfasis en el trabajo con razones internas, en el que las fracciones o decimales expresan medidas, no operadores. Se espera que la pertinencia del

[33] En el análisis preliminar de la problemática de la multiplicación por fracciones, señalé la diferencia importante que hay entre aplicar un factor fraccionario dado (por ejemplo, multiplicar $\frac{7}{4}$ o 1.75 por 5 cm, y determinar el factor que, por ejemplo, a 4 cm le hace corresponder 7cm. Esta segunda es claramente más compleja y es la que suele dar lugar al error aditivo.

uso de las fracciones se dé poco a poco por los estudiantes, es decir, la construcción de una nueva arista de las fracciones, en la que multiplicar también permite reducir.

Para la pregunta 1A se prevé que los estudiantes respondan que las copias más grandes que la original son: la 1, 2, 4 y 5, dado que las medidas son números enteros y con ellos sería relativamente fácil para los alumnos establecer esa relación.

En cuanto a la pregunta 1B, es probable que los estudiantes asuman que la copia más grande es la 2 ya que es la medida más grande que aparece en la tabla. De lo anterior, se espera que empiece a manifestarse el error aditivo (al considerar cuántos centímetros más tiene un lado que su homólogo, y no cuántas veces es mayor) y con ello una primera oportunidad para evidenciarlo.

Análisis a posteriori

La dinámica de la clase fue expositiva con participaciones abundantes de alumnos, regularmente los que siempre han participado en otras situaciones. En cuanto a la pregunta 1B, emergió la respuesta prevista en el AP. La alumna Vanesa propuso que la copia mayor era la 2 y su justificación la hizo a partir de la suma.

> Pr: Vanesa, pasa y explícanos ¿por qué crees que la copia 2 es de las más grandes?
> (Vanesa pasa al frente y escribe que para el lado d, la original mide 8 y la copia 2, 20)
> V: Se llevan 12 de diferencia.
> Pr: Se llevan 12 de diferencia, ¿pero eso que tiene que ver? Bueno, está bien, es un argumento. Fíjense, el argumento que da es que en la copia original mide 8 y en la copia mide 20, y dice que hay un crecimiento de 12 unidades. Ahora yo te voy a preguntar otra cosa: ¿cuántas veces cabe esta original en la copia, dos qué? (se dirige a Vanesa que sigue en el pizarrón).
> Vanesa: (…)
> Pr: ¿Alguien que le ayude con eso? (dirigiéndose al grupo).
> José María: 2.5
> Pr: ¡Claro! 2 veces y medio, lo voy a poner, así como dijeron ustedes (escribe una columna extra con el 2.5).

El error aditivo emergió inmediatamente; sin embargo, no se evidenció. El docente expresó una parte de la respuesta que él esperaba “¿cuántas veces cabe esta original en la copia, dos qué?” El alumno José María expresó 2.5.

En esta interacción se hace evidente la necesidad, para el docente, de una información básica, la que le ayudaría a dejar vivir el error unos minutos más, pues un poco más adelante, al construir las figuras, los alumnos se habrían podido dar cuenta de éste. El docente se encontró frente al error que emergió y decidió dar una ayuda hacia una estrategia correcta, que estaba prevista elaborar más adelante, lentamente.

A partir de esta participación, el docente solicitó analizar los datos de las copias 1 y 6. En el caso de la copia 1, Jacqueline propuso: “la original cabe 2 veces”. Enseguida muestro la imagen de los datos que el docente y un par de estudiantes escribieron en el pizarrón:

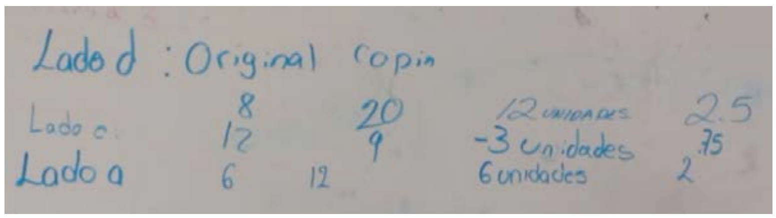


Figura 51. Tabla que hizo el docente en el pizarrón. Actividad 1. Situación 5.

En esta reorganización de los datos de la tabla, se aprecia una transformación que hizo el docente de la consigna, pues agregó dos elementos que no estaban contemplados en la tabla original: el número de unidades que creció el segmento y además el número de veces que cabe la original en la copia, es decir, la razón externa. Estos dos datos constituyen una adaptación interesante del docente, la cual, desde mi punto de vista, recupera en alguna medida el sentido de la actividad: si bien no dejó vivir el error aditivo e indujo la solución, con esos dos datos que agregó hizo evidente y contrastó dos tipos posibles de transformación, de los cuáles solamente uno es correcto. Esto es un ejemplo de una transformación que probablemente debilita, pero en todo caso no suprime el propósito de la actividad. El principal punto sutil que cambia está relacionado con la topogénesis (Sensevy, 2011), es decir, quién dice qué. En esta parte, el docente expresó que hay otra estrategia y que es la correcta.

De ahí, José María pasó al frente para la copia 6:

> JM: En el lado e, en el original son 12 y en la copia e son 9. Entonces aquí podemos ver que no aumenta, sino que disminuye, y cabe .75 veces, entonces disminuye un 25%.

El decimal 0.75 expresa las veces que 12 es 9, es decir, la razón 12 a 9. Este manejo del decimal, como razón, es complejo, resulta casi insólito que un alumno lo proponga en este momento. El alumno logró identificar el factor de escala como 0.75, e identificó el porcentaje que representa la diferencia de tamaño (3) con respecto al tamaño original (12) = 25%

El docente validó esa repuesta y abandonó hasta cierto punto las respuestas erróneas, incluso el modelo aditivo no fue explícitamente cuestionado. En esta actividad, se esperaba el error aditivo y que los estudiantes consideraran que la copia más grande estaba relacionada con los datos numéricos mayores. El profesor evitó de alguna manera estos errores, conectó de inmediato esta actividad con la obtención de razones de escala enteros y decimales.

Para ello, combinó dos recursos de la gestión: uno es que dio una información que se esperaba que establecieran los alumnos: “Ahora yo te voy a preguntar otra cosa: ¿cuántas veces cabe esta original en la copia, dos qué?”–. El otro, validar la voz al alumno que plantea de entrada la solución más adelantada posible.

Actividad 2. Llenado de la tabla

Para el llenado de la tabla la dinámica fue individual con una ayuda directa del docente en el pizarrón. La poca respuesta de los estudiantes parece que no estaba vinculada a una falta de comprensión, más bien a su disposición hacia la tarea: los alumnos parecían fatigados por el clima caluroso y la hora de la clase (medio día). Esos factores ambientales, sobre los que no se tiene control, afectaron la situación, no se logró realizar la devolución (Brousseau, 2007).

En el siguiente extracto, el docente ofreció una ayuda directa (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015) apelando a la búsqueda del factor de escala, alejándose del propósito del valor unitario:

> Pr: Vamos a ver, para la copia número 2. Nos dan el lado *d* que mide 20. Y entonces, tenemos 8 y 20, ¿Cuántas veces cabe?
> Vanesa: 2.5
> Pr: Entonces, ¿qué tengo que hacer para obtener todos los lados de la copia número 2?
> Jesús: Multiplicar por 2.5
> Pr: Y entonces si yo multiplico 6 por 2.5 tengo 15 y así sucesivamente. (El maestro termina esa columna) ¿Dudas? ¿Seguros? Calculen su proporcionalidad, perdón llenen su tabla y cuando terminen pasen a revisarse.

Es interesante que el profesor no mostró ninguna reserva con facilitar la solución, y sí con pronunciar la palabra “proporcionalidad”, que por sí misma no aportaba nada. ¿O quizás no era consciente de que él estaba resolviendo? Por otro lado, la expresión “calculen su proporcionalidad” no significa algo muy claro, aunque cabe preguntarse si es una expresión familiar entre ellos.

De lo anterior, en términos de Sensevy (2011) puedo decir que el maestro asumió poca reticencia y mucha expresión, es decir, prácticamente él resolvió la tarea sin dar oportunidad a que los estudiantes trabajaran en autonomía.

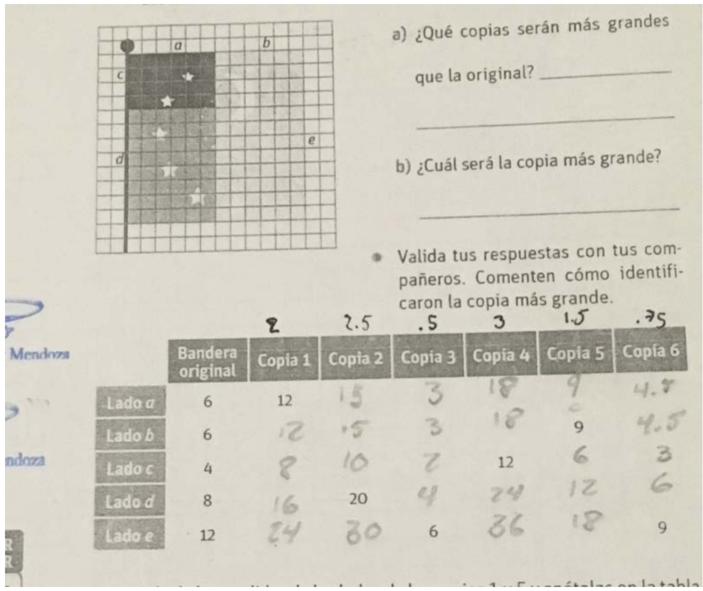
Enseguida, mostraré algunos procedimientos individuales que se videograbaron, otros que están en las producciones escritas en los cuadernos e interacciones grupales entre el docente y el grupo.

Un primer procedimiento videograbado en un equipo es una interacción entre dos estudiantes, Valeria pregunta a Jesús cómo llenar la tabla:

> Valeria: ¿todas son por 2? (refiriéndose a las medidas de la bandera original).
>
> Jesús: Depende del dato que te den en la tabla, ves la diferencia con la original (muestra la tabla).

En mi rol de observador-investigador pregunté abiertamente a Jesús la forma en que llenaba la tabla, él respondió que iba viendo las diferencias, es decir, dividía el lado de la copia entre el lado de la original y después ese valor lo utilizaba para multiplicar. Es decir, obtenía el factor de escala y lo aplicaba a las medidas. En el otro extremo de Jesús, Valeria, por su pregunta, pareció muy alejada de la comprensión de los factores en juego.

Otra producción individual, es la de José María. Él obtuvo los factores de escala o razones externas y las escribió sobre las columnas, es decir, el alumno agregó una fila a la tabla para tener como referente estos factores, en su caso siempre expresados como números decimales, las fracciones (en donde era posible) no emergieron aún.



		2	2.5	.5	3	1.5	.75
	Bandera original	Copia 1	Copia 2	Copia 3	Copia 4	Copia 5	Copia 6
Lado *a*	6	12	15	3	18	9	4.5
Lado *b*	6	12	15	3	18	9	4.5
Lado *c*	4	8	10	2	12	6	3
Lado *d*	8	16	20	4	24	12	6
Lado *e*	12	24	30	6	36	18	9

Figura 52. Producción individual de José María. Actividad 1. Situación 5.

Por otra parte, muestro la producción de Regina. Ella, para la copia 6, optó por dividir 9 entre 12 y usó el factor 0.75 para multiplicar los lados de la bandera original. En su procedimiento apeló a relacionar las medidas y aplicar la división.

Al igual que José María, Regina logró:

Darse cuenta de que necesita el operador multiplicativo que asocia 12 a 9, lo que es muy importante, si se considera que se trata de una multiplicación que reduce una figura.

Percatarse que para calcular ese operador requiere dividir 9 entre 12.

Aplicar ese operador, en calidad de operador constante a todas medidas.

Cabe señalar que Regina ha mostrado un dominio importante de los procedimientos desde la primera situación, incluso se institucionalizó una de sus propuestas. Para sus compañeros también es un referente y su opinión tiene importancia en el grupo. Enseguida, un extracto de interacción en el que Valeria pidió ayuda a Regina y se confirma el buen manejo que tiene de los procedimientos:

Valeria: ¿Cómo le hago Regina?

Regina: Divides éste (el número dado en la columna de la copia 4) entre éste (la medida en la bandera original) y lo que te salga lo multiplicas por todos estos (señala las medidas de la bandera original).

Finalmente, muestro una producción que se dio en la interacción en un equipo con el docente, en la que resaltan algunas dudas sobre el sentido de la actividad:

Als: La copia 3 está difícil.
Pr: No, no está difícil. A ver, una analogía, la copia 1 ¿creció o se hizo más chiquita?
Als: Creció
Pr: Y la copia 3, ¿creció o se hizo más chica?
Als: Pues más chica.
Pr: ¿Cuánto se hizo más chica?
(Silencio)
Pr: ¿Cómo es el 6 con respecto al 12? ¿El 6 qué parte del 12 me está representando?
Als: La mitad
Pr: ½

El profesor ofreció una ayuda indirecta (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015), una pista que resultó útil, porque ayudó a centrar la atención en la transformación sin resolverla del todo. La pregunta que lanzó después: *¿Cuánto se hizo más chica?* se podía contestar de dos maneras, aditivamente o multiplicativamente, aquí él fue reticente (Sensevy, 2011), eludió explicitar esto, pero en su pregunta final centró la atención en la relación multiplicativa.

Actividad 3

3. Dibuja, en papel cuadriculado, las copias 1 y 5 a partir de las medidas que calculaste en la actividad anterior.

a) La bandera original es un cuadrado. ¿Ocurre lo mismo en tus dos copias? R. P.

b) En la bandera original, *e* es igual a la suma de *c* y *d*. ¿Esto sucede en tus copias? R. P.

• Si tus copias 1 y 5 no cumplen con las características anteriores, averigua, en grupo, dónde está el error y corrígelo.

Figura 53. Actividad 3. Situación 5.

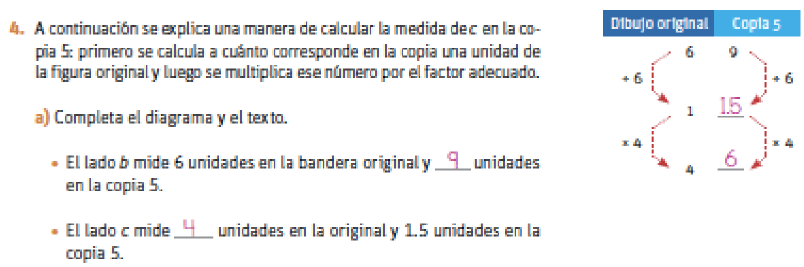
Propósitos y comentarios previos

El propósito de esta actividad es que los alumnos, al dibujar dos de las copias ampliadas, puedan apreciar que algo no funciona, en caso de que hubieran usado la estrategia aditiva, y si no, si resolvieron bien, entonces simplemente podrían constatarlo.

En esta actividad, cabe señalar que el docente omitió el trazo de las copias y la dejó como una tarea extra clase que pocos estudiantes realizaron. El apoyo geométrico habría posibilitado la ruptura del contrato (Brousseau, 2007). El que el docente no viera la pertinencia de la actividad es hasta cierto punto consecuencia de que en la anterior se institucionalizó la estrategia más adelantada posible, y el error aditivo pasó desapercibido. Sin embargo, como veremos, el error aditivo se hizo presente a lo largo de las situaciones siguientes.

En lugar de las preguntas 3A y 3B, el docente centró su atención en la pregunta: *¿Cuál es la copia más grande?* y en que los estudiantes comprendieran la técnica para obtener el factor de escala. Sin embargo, dado que los alumnos ya tenían las medidas de las copias, la comparación se volvió una tarea trivial.

Actividad 4


4. A continuación se explica una manera de calcular la medida de *c* en la copia 5: primero se calcula a cuánto corresponde en la copia una unidad de la figura original y luego se multiplica ese número por el factor adecuado.

a) Completa el diagrama y el texto.

- El lado *b* mide 6 unidades en la bandera original y 9 unidades en la copia 5.
- El lado *c* mide 4 unidades en la original y 1.5 unidades en la copia 5.

Dibujo original	Copia 5
6	9
÷ 6	÷ 6
1	1.5
× 4	× 4
4	6

Figura 54. Actividad 4. Situación 5.

Propósitos y comentarios previos

Siguiendo la ruta prevista en el texto, en esta actividad se busca introducir el valor unitario como técnica para resolver situaciones de proporcionalidad, usando las razones internas enteras. Se propone para ello un diagrama específico (una tabla de variación). El recurso del valor unitario es, en la propuesta del texto, una fase previa[34] a la introducción del operador multiplicativo. Sin embargo, la historia que ocurre es distinta: el operador ya fue

[34] En esta actividad, se presenta un diagrama que permite calcular uno de los lados de la bandera original pasando por el valor unitario. Se prevé, por ejemplo, que los alumnos apliquen el diagrama al lado ***c*** de la copia 5 pasando justamente por el recurso del valor unitario y que se vaya construyendo la noción de operador de una manera más gradual que alude más a la interpretación/sentido.

objeto de institucionalización. Veamos cómo se adapta la actividad y qué propósito acaba conformándose.

Análisis a posteriori

Entre la realización de las actividades previas a la 4 transcurrieron unos cinco días aproximadamente, más tiempo del deseable considerando que el contenido de la actividad 4 es una técnica muy específica. Esto provocó que algunos estudiantes no recordaran bien lo ya visto y que fuera difícil recuperar el hilo conductor.

El docente inició retomando el diagrama, pero no obtuvo respuesta favorable de los alumnos. Adjudicó la no comprensión a su falta de atención. En efecto, se percibió que la mayoría de los alumnos no estaba atendiendo a la lectura, al parecer no se logró hacer funcionar la memoria didáctica (Brousseau, 2007):

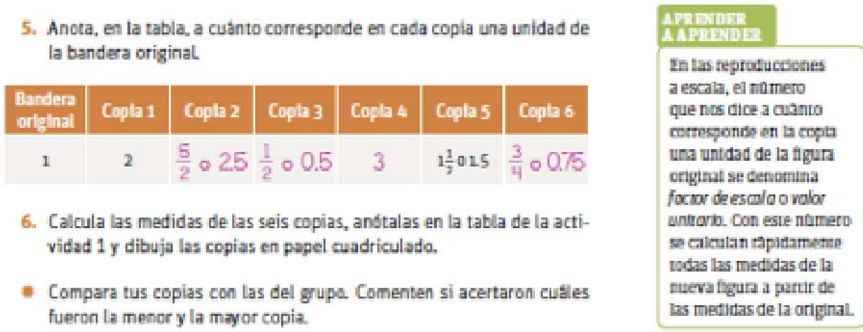
> Pr: (…) El diagrama nos está diciendo lo siguiente: Tenemos nuestro 6, luego viene una flecha que nos indica que dividen entre 6 y eso por obviedad nos da 1, luego de este lado tienen 9, aquí hay una línea que es una incógnita, abajo viene un 1, una multiplicación por 4, este número que desconocemos lo multiplicamos por 4.
> Se van a regresar a la fotocopia con las medidas de la bandera con sus medidas originales, luego la tabla. Porque si no revisamos esa información no sabemos de qué estamos hablando.
> (Los alumnos empiezan a buscar la fotocopia anterior en la cual están la tabla con las copias y la bandera original).
> Pr: ¿De qué lado estamos hablando?
> (Silencio)
> Pr: Vuelvo a leer, es la tercera vez (tono cansado).

La falta de memoria didáctica en la clase, en parte debida, al período de tiempo amplio entre esta clase y la anterior, generó cierta tensión en alumnos y docente:

> Pr: En la figura original, c vale 4. Y en la copia número 5, ¿cuánto vale c?
> (Silencio)
> Pr: Si lo tienen en la tabla o cuenten.
> Vanesa: Vale 6
> Pr: Ya saben que tengo mi original que mide 4 y la copia 5 que vale 6. A ustedes les plantean esto (diagrama), ¿quién me dice por qué? ¿cómo encuentro esas medidas?
> Pr: ¡Jóvenes, el calor los está agobiando! ¿o qué pasa?
> Als: ¡Sí!

En resumen, las condiciones en que se realizó la actividad fueron difíciles. En principio, lejos del día en que se hizo la primera parte, sin un recordatorio que hiciera funcionar la memoria didáctica y con un clima asfixiante por el calor. Las dificultades en la implementación de esta actividad también manifiesta, posiblemente, otros aspectos. Primero, que los alumnos tienen poca experiencia en el uso de la técnica del valor unitario y/o en el uso del diagrama con el que dicho recurso se presentó; y segundo, que en la actividad 4 se institucionalizó otro procedimiento.

Actividades 5 y 6



5. Anota, en la tabla, a cuánto corresponde en cada copia una unidad de la bandera original.

Bandera original	Copia 1	Copia 2	Copia 3	Copia 4	Copia 5	Copia 6
1	2	$\frac{5}{2}$ o 2.5	$\frac{1}{2}$ o 0.5	3	$1\frac{1}{2}$ o 1.5	$\frac{3}{4}$ o 0.75

6. Calcula las medidas de las seis copias, anótalas en la tabla de la actividad 1 y dibuja las copias en papel cuadriculado.

- Compara tus copias con las del grupo. Comenten si acertaron cuáles fueron la menor y la mayor copia.

APRENDER A APRENDER

En las reproducciones a escala, el número que nos dice a cuánto corresponde en la copia una unidad de la figura original se denomina *factor de escala* o *valor unitario*. Con este número se calculan rápidamente todas las medidas de la nueva figura a partir de las medidas de la original.

Figura 55. Actividades 5 y 6. Situación 5.

Propósitos y comentarios previos

El propósito es practicar la técnica del valor unitario, supuestamente establecida en la actividad anterior. Los alumnos deben calcularlo para cada una de las figuras. Sin embargo, como vimos, en esta clase no se logró establecer la técnica mencionada (VU).

Análisis a posteriori

Las actividades se realizaron en un módulo de 45 minutos. La dinámica con la que se llevó a cabo fue básicamente la misma. A través de participaciones orales, en plenaria y con la guía del profesor al frente (resolución acompañada).

Para este análisis, recupero la copia 3 y una ayuda que el docente realizó al inicio de la actividad. Estas reflejan hasta cierto punto interpretaciones del docente, que junto con las producciones de los alumnos me permiten realizar un análisis de la robustez de la situación (Robert, 2007).

<u>Copia 3</u>

En el siguiente extracto de registro, el docente cuestionó sobre cómo obtener el factor de escala para la copia 3:

> Pr: De la copia número 3, me están dando la medida del *lado e*, mide 12 y en la copia mide 6.
> ¿Se redujo o acrecentó? Mariana, ¿qué piensas?
> (Silencio)

Pr: Me parece increíble que no sepan sí de 12 a 6 se redujo o creció. ¿Cómo saco la proporción? Ya José María nos dijo.
Mariana: Divido.
Pr: ¿Qué entre qué?
Ma: 6 entre 12
Pr: ¡Ajá! ¿a cuánto toca?
(Silencio) (El docente muestra cara de desconcierto)
Tonatzin: Pero, ¿qué no está mal?
Pr: ¿Por qué?
To: ¿Qué no es al revés? (haciendo referencia a la división 6 entre 12).
Pr: No, acuérdate que se redujo. ¡Alguien más!
Jesús: Punto decimal, toca a 0.5
Pr: ¡Muy bien!

En la interacción me interesa el énfasis que hace el docente por recuperar las buenas participaciones, “Ya nos dijo José María” refleja una acción recurrente que hemos caracterizado como selección oportunista de participaciones.

Con respecto a la división, emergió un tema que podría discutirse con los alumnos: Hay dos divisiones en juego (12 entre 6 y 6 entre 12): ¿Qué significa cada cociente? ¿Cómo saber qué cociente nos interesa? El docente dio una pista para saber qué división está en juego. Para los alumnos no es tan claro quién es el divisor y quién el dividendo, en parte porque están habituados a aplicar los algoritmos sin suficientes contextos.

Finalmente, incluyo una ayuda que dio el docente para apoyar su explicación casi al inicio de la actividad. La imagen (Figura 56) consiste en un par de rectángulos en los cuales quiso mostrar que el factor de escala es 2 (C_2=2). En la parte de abajo hay otro rectángulo. El docente cuestionó a los alumnos sobre qué pasaría si el factor fuera $\frac{1}{2}$ ($C_x = \frac{1}{2}$).

En el extracto del registro siguiente, sigue quedando dicho que las ampliaciones son las que se hacen con “proporciones” que son números enteros, lo cual excluye a las fracciones mayores que uno.

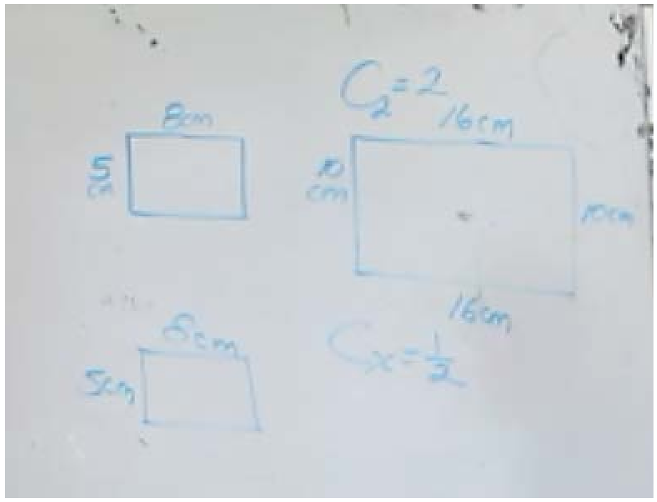


Figura 56. Producción del docente en el pizarrón.

> Pr: ¿Crece o decrece? Observen la diferencia entre una proporción entera y una proporción en forma de fracción. Pero que sea fracción propia sino ahí ya es otra cosa. Ahora vean, en la copia 2. Se regresan todos a su tabla.

Para la actividad 6, el profesor solicitó a los alumnos que dibujaran las banderas, tanto la original como las copias en centímetros o tomando cuadrados del cuaderno como unidades y que además agregaran “la proporción de cada copia”. La actividad no se realizó por falta de tiempo. El hecho de que los alumnos comprobaran que la técnica del valor unitario arroja medidas que se reflejan en figuras bien hechas, probablemente no fue considerado muy relevante por el docente, y tal vez no lo era, dado que en la clase esa técnica no emergió como la manera de evitar el error aditivo. Dicho error no apareció, y la técnica que se institucionalizó fue la del operador.

Comentarios

La situación

El propósito original era que los alumnos establecieran el recurso del valor unitario fraccionario o decimal para hallar valores faltantes en situación de proporcionalidad. Se trataba de un trabajo con razones internas, en el que las fracciones o decimales expresan medidas, no operadores.

Las condiciones de la aplicación de la segunda parte de la situación fueron difíciles. Entre otras cosas, el espacio de tiempo amplio entre la aplicación de las actividades. No obstante, se aprecia que la situación es fecunda y de una gran riqueza de relaciones desde varios puntos de vista, y que los alumnos, al menos los que participaron, pudieron beneficiarse. Se esperaría que se haya dado cierta comprensión del hecho de que puede haber “proporciones”, o factores que agrandan y otros que reducen. La convivencia de factores enteros (doble, triple) con otros no enteros seguramente ayudó a ello, así como a ir dando un estatus de multiplicación a los factores no enteros, menores que uno.

La gestión

En esta situación, la participación de un alumno (José María) reorientó los esfuerzos del docente directamente hacia el cálculo del factor de escala, ignorando los propósitos de la lección. En esa interacción con el docente, se hizo evidente la necesidad de una información básica, la que posiblemente le habría ayudado a dejar vivir el error aditivo más tiempo, pues un poco más adelante, al construir las figuras, los alumnos se habrían podido dar cuenta de este error. Sin embargo, el profesor no gestionó el error y decidió validar una estrategia correcta, que estaba previsto elaborar más adelante.

El profesor recurrió nuevamente a lo que he llamado resolución acompañada, es decir, un acompañamiento puntual y muy cercano a todas las actividades de la situación lo que no permitió prácticamente ninguna fase adidáctica de la situación, tampoco hubo intentos de un proceso de devolución. Por otra parte, a través de las interacciones dejó ver momentos, escasos y breves pero claros, en los que identificó oportunidades de apelar a la intuición.

En resumen, podría considerar este episodio como emblemático de cierto tipo de transformación del docente, en la cual, no deja vivir el error, ni da lugar a la validación y, por lo tanto, de la necesidad de contar con información básica y oportuna, es decir, no solo en el enfoque general del texto, sino en cada lección. De ahí que la comunicación del texto con el docente resalta, en tanto la necesidad de que el docente tenga muy claro desde el inicio las etapas importantes de la secuencia: del error aditivo al valor unitario (fracciones como medidas) y después al operador multiplicativo fraccionario. La interacción del docente con el texto se vuelve indispensable en el proceso de apropiación, la cual no sucede rápidamente, sino con tiempo de estudio y conocimiento de las propuestas.

Los alumnos

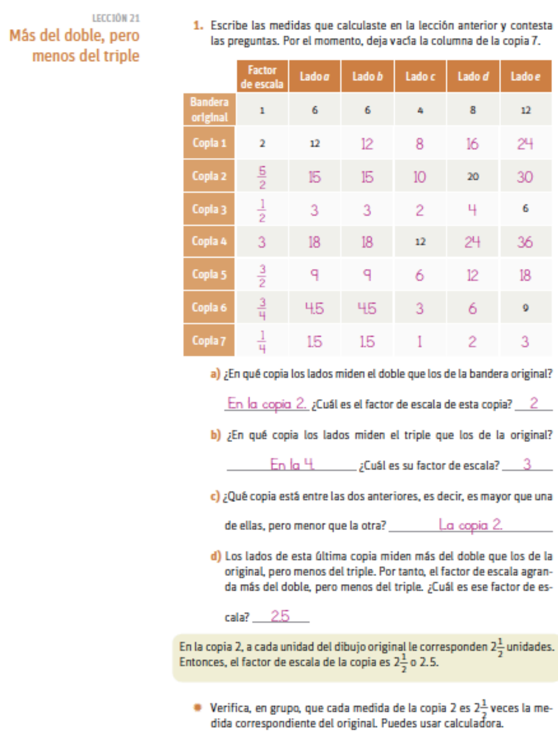
Las participaciones de los estudiantes fueron abundantes, casi siempre de los mismos alumnos, aquellos que han mostrado dominio o avances importantes en matemáticas, aunque hay participaciones escasas de otros integrantes. Se apreciaron pocos momentos de trabajo autónomo, ligados al acompañamiento cercano y directivo del docente.

2.6. Situación 6. Más del doble, pero menos del triple

En la propuesta del texto, este es el momento en el que se hace explícito el operador multiplicativo, es decir, en el que se pasa de la noción de valor unitario $1 \rightarrow \frac{a}{b}$. En la que la fracción $\frac{a}{b}$ juega como una medida al factor $x\ \frac{a}{b}$. Sin embargo, como ha venido ocurriendo, este propósito no será el que rija realmente, puesto que, en este grupo, el factor $x\ \frac{a}{b}$ se institucionalizó desde el inicio de la lección pasada. Se tratará por lo tanto de un repaso, no por ello exento de interés.

Obtener factores de escala a partir de una serie de datos en una situación de variación proporcional.

Actividad 1


LECCIÓN 21

Más del doble, pero menos del triple

1. Escribe las medidas que calculaste en la lección anterior y contesta las preguntas. Por el momento, deja vacía la columna de la copia 7.

	Factor de escala	Lado *a*	Lado *b*	Lado c	Lado *d*	Lado *e*
Bandera original	1	6	6	4	8	12
Copia 1	2	12	12	8	16	24
Copia 2	$\frac{5}{2}$	15	15	10	20	30
Copia 3	$\frac{1}{2}$	3	3	2	4	6
Copia 4	3	18	18	12	24	36
Copia 5	$\frac{3}{2}$	9	9	6	12	18
Copia 6	$\frac{3}{4}$	4.5	4.5	3	6	9
Copia 7	$\frac{1}{4}$	1.5	1.5	1	2	3

a) ¿En qué copia los lados miden el doble que los de la bandera original? En la copia 2. ¿Cuál es el factor de escala de esta copia? 2

b) ¿En qué copia los lados miden el triple que los de la original? En la 4 ¿Cuál es su factor de escala? 3

c) ¿Qué copia está entre las dos anteriores, es decir, es mayor que una de ellas, pero menor que la otra? La copia 2.

d) Los lados de esta última copia miden más del doble que los de la original, pero menos del triple. Por tanto, el factor de escala agranda más del doble, pero menos del triple. ¿Cuál es ese factor de escala? 2.5

En la copia 2, a cada unidad del dibujo original le corresponden $2\frac{1}{2}$ unidades. Entonces, el factor de escala de la copia es $2\frac{1}{2}$ o 2.5.

- Verifica, en grupo, que cada medida de la copia 2 es $2\frac{1}{2}$ veces la medida correspondiente del original. Puedes usar calculadora.

Figura 57. Actividad 1. Situación 6.

Propósitos y comentarios previos

En esta actividad, el propósito es que los alumnos reconozcan que hay factores de escala entre el doble y el triple, y que en general, existen factores que aumentan un número no entero de veces, y que pueden ser fraccionarios. Es importante que los alumnos reconozcan el factor de escala como aquel valor que les permite obtener todas las medidas de cada figura, esto es, como el número de veces que la medida de los lados de una figura arroja, las medidas de los lados de la otra. Lo novedoso para los alumnos es que ese factor puede no ser entero.

Como ya he comentado, en esta clase ya desde la situación pasada el profesor centró la atención en la obtención del factor no entero. En esta actividad, la atención se centrará en la manera de expresar dicho factor con fracciones y con decimales.

Análisis a posteriori[35]

A pesar de que en la lección anterior los estudiantes ya habían obtenido las medidas de los lados de las copias de las banderas, en ésta, el profesor solicitó calcular nuevamente todos los datos. En la situación anterior lo habían realizado sin usar el valor unitario –como se suponía, desde el texto–, pasando directamente a obtener los factores. Cabe preguntar, ¿qué interés tendría entonces rehacer todos cálculos? Quizás el docente pretendía reactivar la memoria didáctica o simplemente hacer un repaso. A final de cuentas, el tema central será si, dada una relación entre medidas $a \rightarrow b$, el factor es $x * \frac{a}{b}$ o bien $x * \frac{b}{a}$.

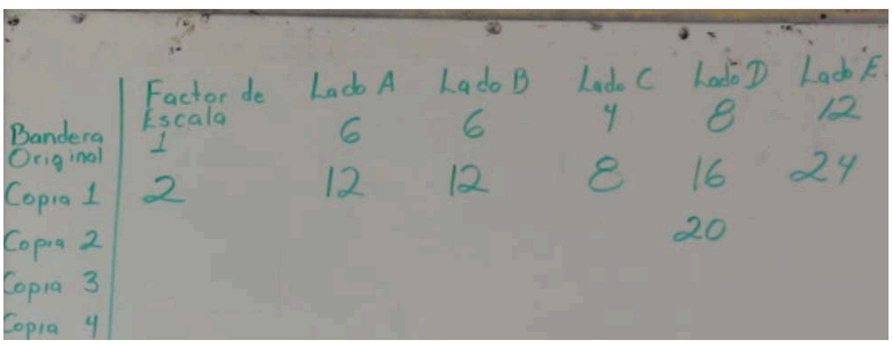


Figura 58. Tabla en el pizarrón de la actividad 1. Situación 6.

La tabla se presentó con un cambio respecto a la clase pasada, los lados y las copias invirtieron su lugar, lo que causó cierta confusión (un par de alumnos manifestaron que no eran las mismas tablas).

35 En esa sesión, como en la anterior el clima siguió siendo caluroso y se realizó en el último módulo del día, casi las 15H00. Nuevamente, estos factores dificultaron la gestión del docente y la atención de los alumnos ante la situación. Estos elementos ambientales podrían inscribirse en la componente ergonómica (Robert, 2007).

Copia 2 ($8 \rightarrow 20$)

Los alumnos mostraron dificultades para relacionar las medidas de los lados. No quedó claro por qué el factor es $\frac{20}{8}$ y no $\frac{8}{20}$. Aunque se expresaron propuestas, como la de Regina, que manifestó que era por la división, esto no fue realmente claro.

Pr: En la copia 2, en el lado b, nos dice que mide 20 ¿cómo puedo obtener el factor de escala si ya tengo un lado que mide 20 y el original? Yo ya podría obtener el factor de escala para completar mi tabla ¿Quién me dice cómo hacerlo?
Aparicio: Dividir 20 entre 8.
Pr: ¿Dividir 20 entre 8? Y por qué no como me dijeron la clase anterior, 8 entre 20.
V: Porque así queda en forma de fracción.
Pr: ¿Y eso qué? Si hay una razón, y ya lo habíamos dicho.
José María: Buscamos una proporción.
Pr: Bueno sí, ya sé que la proporción me va a dar mi **factor de escala**, pero ¿por qué no hago esto $\frac{8}{20}$ y sí $\frac{20}{8}$?
Regina: Porque es lo mismo que una división.
Pr: No, **yo quiero ver cuántas veces cabe el original en la copia, ¿no? Porque mi referente es el original, no mi referente es la copia, mi referente es el original, por eso es que es así.** Ya tengo $\frac{20}{8}$ entonces ¿qué hago? Dividimos, eso también ya lo saben. (El profesor hace la división y obtiene 2.5) Tenemos 2.5, aunque ahí no lo dice, van a poner ustedes en fracción, ¿cómo quedaría?
Regina: $\frac{5}{2}$
Pr: ¿Cómo llegaste a eso?
R: Simplificando
(Regina pasa al frente a hacer la simplificación de $\frac{20}{8}$)

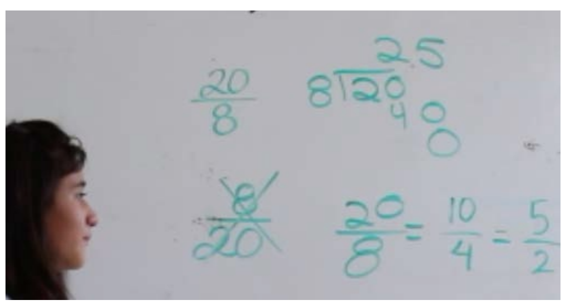


Figura 59. Producción de alumna en el pizarrón. Situación 6.

Pr: Ahora, hay que sacar las otras medidas, ¿qué hay que hacer?
José María: Multiplicar 6 por 2.5.
(El profesor anota las respuestas en el pizarrón de acuerdo a lo que dice José María)

Ante la participación de Aparicio ("Dividir 20 entre 8"), el profesor cuestionó directamente: ¿por qué no 8 entre 20? Ante la falta de respuesta, el profesor hizo alusión a: "el original como referencia" y recordó que de lo que se trataba era de ver "cuántas veces cabe" la medida original en la medida transformada (la copia).

Al parecer, esto no es suficiente para que los alumnos comprendan por qué se hace una división y, sobre todo, por qué esa división y no la inversa. Es claro entonces que el único recurso que se institucionalizó en el grupo para resolver el problema es la identificación del factor de escala, averiguando “cuántas veces cabe el original en la copia” lo cual, para los alumnos, no pareció ser claro.

Copia 3 ($12 \rightarrow 6$)

En este caso, debería ser muy fácil ver que la reducción es a la mitad, sin embargo, no lo fue. La razón, posiblemente es que no se tomó distancia para prestar atención en la relación global, sin entrar inmediatamente en los detalles técnicos: qué se divide entre qué, cómo se simplifica, etc.

> Pr: Les dicen que el *lado e* mide 6. ¿Cuánto mide mi lado original e? A ver Silverio, ¿cómo sacas el factor de proporcionalidad? (Silverio no responde)
> Pr: Tonatzin, ¿cómo saco mi factor de escala?
> T: 12 sobre 6
> Pr: A ver, simplifica, no dividas.
> T: 2
> Pr: A ver, aquí el factor de escala es de 2. ¿Seguros? ¿Es igual que en la copia 1? ¿Sí?
> José María: No porque puso los números al revés.
> Pr: ¿Cuál dijimos que iba a dividir? El original tenemos que ver, cuántas veces cabe el original en tu copia. ¿Sí recuerdas eso Tonatzin? A ver, corrígelo, qué hay que hacer.
> (Tonatzin duda y vuelve a decir que es lo mismo)
> Pr: ¿Cómo dijimos que iba? Mira, me voy a regresar. ¿Quién va arriba? (señala el numerador)
> (Tonatzin sigue en silencio)
> Pr: Aquí está tu original y mi copia (señalando la fracción $\frac{20}{8}$).
> Entonces, ¿cómo queda?
> T: $\frac{6}{12}$
> Pr: ¿Quién simplifica? Jesús
> Jesús: $\frac{3}{6}$
> Giovanni: $\frac{1}{3}$
> Pr: Revisa bien Giovanni.
> G: $\frac{1}{2}$
> Pr: Entonces, el factor de escala es $\frac{1}{2}$ y en decimal, ¿cuál es? ¿Cómo obtengo el factor de escala en decimal? Es 0.5, divido 1 entre 2.

El docente intentó expresar los factores de escala en fracciones; sin embargo, al momento de solicitar los lados faltantes de la copia, él mismo explicitó a los alumnos que tenían que multiplicar por 0.5, es decir, favoreció el factor decimal por encima del fraccionario.

De lo anterior, se empieza a vislumbrar un camino hacia un procedimiento sistemático que al parecer el docente buscó establecer: Primero, identificar las dos medidas relacionadas; enseguida, formar al factor fraccionario con la medida de referencia en el denominador y la de la copia en el numerador; y finalmente, dividir numerador entre denominador.

Copia 6 (9→12)

Para esta copia, el docente relanzó la pregunta ¿Cómo obtengo el factor de escala? Esta forma de saber cuál de las dos fracciones es la correcta, es hasta cierto punto, mecánica: la medida de la original va abajo. En términos de la gestión de los incidentes (Roditi, 2003), el profesor facilitó la tarea respondiendo, es una manera de salir de la dificultad.

> Pr: El problema es que no están poniendo atención. Hace rato, cuando empezamos (escribe $\frac{20}{8}$ y escribe que el 20 es la copia y el 8 original) Yo les dije, este es mi original (8) y está es la copia (20) y yo claramente dije que se trataba de ver cuántas veces cabía mi original en la copia. Pregunté después de eso, me lo dijeron mal. Y ahorita vuelven a hacer lo mismo, entonces no saben distinguir cuál es el original y cuál es la copia.

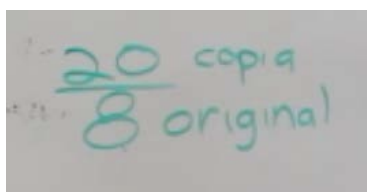


Figura 60. Producción del docente en el pizarrón.

En sus intervenciones, el docente da cuenta de su tendencia en la resolución acompañada. Estos eventos podrían ejemplificar un "contrato a la baja": en la medida en que los alumnos no entienden, no dan la respuesta esperada, el profesor lo hace más fácil, con más pistas, pero con menos comprensión.

Copia 7

El docente solicitó a los alumnos que inventaran un factor de escala distinto a los que tenían o bien alguna medida (en la lección, se tenía previsto dar este dato en la actividad siguiente pero el docente no esperó o no había leído la ficha). Una alumna propuso 3.5 y el docente le pidió la fracción, la alumna propuso $\frac{7}{2}$. A partir de ahí, bajo la resolución acompañada, algunos alumnos participaron y el docente fue completando la tabla con las medidas. Nótese que la multiplicación de la que se habló fue por 3.5, la fracción $\frac{7}{2}$ no figuró en la obtención de los lados.

Enseguida, aparece la tabla con las medidas. Nótese que, en la columna del factor de escala, aparecen las fracciones y el número decimal, este último utilizado para todos los cálculos de las medidas.

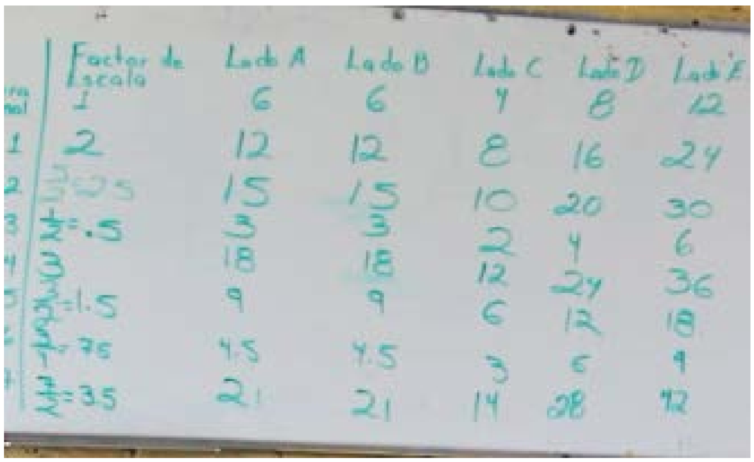
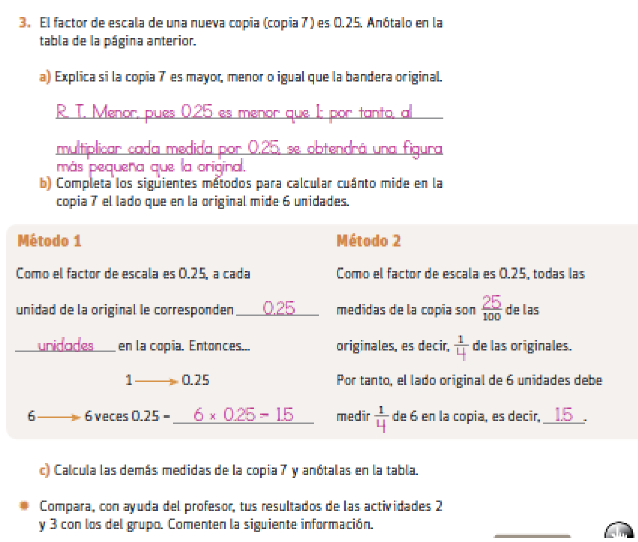


Figura 61. Tabla con las medidas que escribió el docente en el pizarrón.

Actividad 3



3. El factor de escala de una nueva copia (copia 7) es 0.25. Anótalo en la tabla de la página anterior.

a) Explica si la copia 7 es mayor, menor o igual que la bandera original.

R. T. Menor, pues 0.25 es menor que 1; por tanto, al multiplicar cada medida por 0.25 se obtendrá una figura más pequeña que la original.

b) Completa los siguientes métodos para calcular cuánto mide en la copia 7 el lado que en la original mide 6 unidades.

Método 1

Como el factor de escala es 0.25, a cada unidad de la original le corresponden 0.25 unidades en la copia. Entonces...

1 ⟶ 0.25

6 ⟶ 6 veces 0.25 = 6 × 0.25 = 1.5

Método 2

Como el factor de escala es 0.25, todas las medidas de la copia son $\frac{25}{100}$ de las originales, es decir, $\frac{1}{4}$ de las originales.

Por tanto, el lado original de 6 unidades debe medir $\frac{1}{4}$ de 6 en la copia, es decir, 1.5.

c) Calcula las demás medidas de la copia 7 y anótalas en la tabla.

- Compara, con ayuda del profesor, tus resultados de las actividades 2 y 3 con los del grupo. Comenten la siguiente información.

Figura 62. Actividad 3. Situación 6.

Propósitos y comentarios previos

En la actividad 3B se presentan dos procedimientos para obtener las medidas de la figura con el factor de escala 0.25. En el método 1 se utiliza el procedimiento del valor unitario.

En el método 2 se utiliza el factor de escala en su equivalente fraccionario “ $\frac{1}{4}$ de”. Se considera conveniente que los alumnos conozcan ambos caminos y en el recuadro se sintetizan ambos caminos.

Análisis a posteriori

Debido a que el profesor ya había solicitado a los alumnos que calcularan los datos de una copia 7 con una consigna distinta a la del texto (proponer un factor y aplicarlo), ahora solicitó al grupo que agregaran la copia 7bis con el factor 0.25. Enseguida les pidió que expresaran el 0.25 en fracción:

> Pr: Si mi factor de escala es de 0.25, en fracción ¿cómo quedaría?
> Pongan atención por favor. ¿Cómo obtengo la fracción de 0.25? ¡Ya saben hacer eso!
> (Silencio)
> (El profesor explica y coloca 0.25 = $\frac{25}{100}$)
> Pr: ¿Sí recuerdan esto (señala $\frac{25}{100}$)? ¿Quién simplifica?
> José María: $\frac{5}{20}$
> Pr: Ok, Saco quinta y tengo $\frac{5}{20}$ ¿Quién vuelve a simplificar?
> Giovanni: Es un $\frac{1}{4}$
> Pr: Pero, además, ustedes manejan perfectamente que es 0.25, es la cuarta parte de un entero.

En la interacción, el profesor recordó a los alumnos cómo convertir un decimal a fracción. Cabe destacar que, además de recordar el procedimiento convencional (pasar a fracción y simplificar), aludió a un conocimiento que debían tener: 0.25 es un cuarto[36].

Enseguida, muestro cómo se completó cada uno de los dos métodos ofrecidos por el texto.

<u>Método 1</u>

En este extracto del registro de la clase, el docente aludió al método del valor unitario de una manera clara, pero siempre guiando toda la explicación y validando él mismo las respuestas:

> Pr: A cada unidad el original, ¿le corresponden?
> Aparicio: 0.25
> Pr: ¡Sí claro!
> Pr: Ese factor de escala, ¿qué nos está indicando?, que en el original si fueran centímetros, por cada centímetro que yo tengo en la copia yo tendría 0.25cm. Si fueran metros, por cada

[36] Un conocimiento de facto que se utiliza.

metro del original, en la escala, perdón en la copia tendría 0.25m ¿Sí entendieron eso? ¿Seguros?
Als: ¡Sí!
(El docente vuelve a leer el método 1 y pide la participación para responder las preguntas)
Pr: 6 veces 0.25 es igual a, ¿Silverio?
Silverio: 1.25
Pr: ¿Seguro?
Pr: Estás pensando bien, pero te falló la operación. 6 veces 0.25, ¿cuánto te da?
Silverio: 1.5
Pr: ¡Anótenlo por favor! El método 1 es multiplicar el decimal por cada lado.

Así mismo, es una buena ilustración del paso de la noción de factor a la de valor unitario.

Método 2

Pr: Ahora, Método 2. Ahí me ponen entre 100. ¿Qué va arriba?
Als: 25
Pr: Claro, 25 sobre 100. Es decir, 1 sobre 4 (varios alumnos lo dicen); es decir, 0.25.
Pr: ¿Seguros? Por lo tanto, el lado original de 6 unidades debe medir $\frac{1}{4}$ de 6 en la copia ¿es decir?
Mariana: 1.5

En este caso, se visualiza $\frac{1}{4}$ de 6 en la copia. Algunos alumnos respondieron sin problemas a este método. Ambos métodos parecen no presentar dificultades para los alumnos que participaron. El docente retomó con ejemplos; no obstante, en mi opinión, es probable que los estudiantes requirieran trabajar otras medidas con ambos métodos, para apropiarse más fácilmente de ellos. Lo que me lleva al análisis del libro de texto.

Otras copias (Otro agregado del docente a la lección del texto)

El docente realizó una transformación más a la situación. Agregó tres copias como ejercicio para los estudiantes, las copias 8, 9 y 10. Para la copia 8 dejó el factor $\frac{7}{4}$, para la copia 9 otorgó el lado b igual a 15 (la transformación es 6 a 15) y para la copia 10 el lado d igual a 11 (la transformación es de 8 a 11). Solicitó que para las tres copias adicionales obtuvieran los factores de escala en forma de fracción y también expresados como decimales.

Cabe destacar, por otra parte, que el docente prestó atención a distintas maneras en que se puede expresar el factor no entero: implícita, como par de números naturales (6, 15), y explícita como fracción y decimal.

Esto es un indicador de cierto enriquecimiento de la noción en la clase. En cambio, también puede destacarse cierto sesgo en la actividad que el profesor planteó: preguntó directamente por los factores de escala, no por las medidas de las figuras. Ya no se trata de hacer las figuras. Con ello, convierte lo que pretendía ser una herramienta, el operador como una manera de obtener las medidas de las figuras a escala, en la única manera de obtenerlas, y en la meta del ejercicio

En la mayoría de los equipos, el trabajo lo hacía un alumno y después compartían resultados. En general, los alumnos no mostraban mucha disposición hacia el trabajo. Presento enseguida algunos procedimientos que pude observar:

El equipo de Giovanni propuso el factor de escala $\frac{15}{6}$, después simplificó a $\frac{5}{2}$, aquí permanecieron en las fracciones. En el caso de José María, en cambio, escribió directamente la división 15 entre 6 y obtuvo el decimal 2.5, no contempló expresar la fracción. Por su parte, el equipo de Tonatzin tuvo dificultades, me preguntaron: “si tengo $\frac{7}{4}$ y quiero pasarlo a decimal ¿quién va dentro y quién afuera?”

En el afán de aplicar un algoritmo conocido, los estudiantes buscaron el factor de escala decimal; no obstante, algunos estudiantes expresaron las razones con fracciones y después propusieron la división para obtener el cociente.

Enseguida, se puede ver, en el cuaderno de José María con las copias que agregó el maestro, que para el factor de escala fraccionario obtuvo el cociente ($\frac{a}{b} = a{:}b$) y que para las copias 9 y 10 sólo escribió los factores como decimales. Hay trazas de la división que realizó para obtener el 2.5 sin la fracción, pero a la derecha sí escribió $\frac{11}{8}$ y obtuvo el cociente. A la izquierda aparece la división 4 entre 7 sin realizar, indicio de que aún hay titubeos para obtener el factor de escala, es decir, en cómo relacionar los datos.

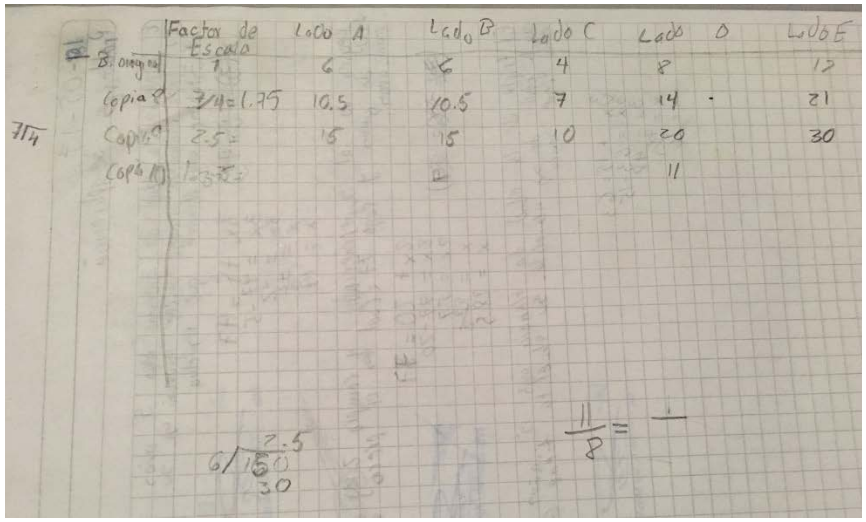
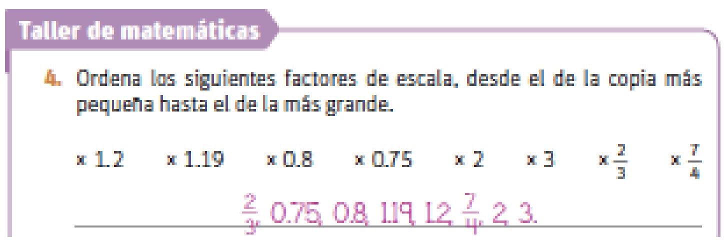


Figura 63. Producción individual de un alumno.

Actividad 4. Taller de Matemáticas



Taller de matemáticas

4. Ordena los siguientes factores de escala, desde el de la copia más pequeña hasta el de la más grande.

$\times$ 1.2 $\quad\times$ 1.19 $\quad\times$ 0.8 $\quad\times$ 0.75 $\quad\times$ 2 $\quad\times$ 3 $\quad\times \frac{2}{3}$ $\quad\times \frac{7}{4}$

$\frac{2}{3}$, 0.75, 0.8, 1.19, 1.2, $\frac{7}{4}$, 2, 3.

Figura 64. Actividad 4. Situación 6.

Propósitos y comentarios previos

En esta actividad, los alumnos deben comparar fracciones y decimales, que son supuestamente factores de escala, aunque podrían ser números. Los procedimientos posibles para comparar son diversos, cualitativos, como separar los mayores y menores que la unidad, y que $\frac{1}{2}$; y cuantitativos, como pasar todo a expresión decimal.

Análisis a posteriori

Después de algunas actividades de evaluación, el docente dio lectura al taller de matemáticas (se percibió un poco presionado por terminar las actividades).

> Pr: De todos los que están ahí, levantando su brazo ¿Cuál es el menor? ¿Qué hacemos Aparicio?
> Aparicio: Contar cada número
> Pr: Ahí tienes dos fracciones, enteros y decimales. Tonatzin sugiere cambiarlas a decimal. ¿Cómo cambias $\frac{2}{3}$ a decimal?

Tonatzin: 2 entre 3
Pr: ¿qué obtengo?

Así, el docente dio la pauta para resolver el ejercicio con un procedimiento general, el algoritmo de la división, con lo cual posiblemente se redujo el interés didáctico de la actividad.

Comentarios

La situación

La continuidad entre las situaciones 5 y 6 es el paso del valor unitario al operador. Por ejemplo, en la situación anterior, de 4 a 3 se obtuvo que a 1 le corresponde $\frac{3}{4}$ o 1 corresponde 0.75. Ahora, en esta situación, se destaca el operador constante que en la lección anterior estaba implícito: $* \frac{3}{4}$ o bien x 0.75.

La gestión

Como ya advertimos, en esta situación, el propósito cambió con respecto a la situación cinco, pues ya desde la situación pasada el profesor centró la atención en la obtención del factor no entero. En aquella situación se privilegió el decimal obtenido mediante la división, mientras que, en ésta, se buscó que expresen dicho factor con fracciones.

Además del cambio anterior, la transformación más importante que hizo el docente a la situación, fue agregar actividades para que los alumnos fortalecieran un algoritmo:

> A mí me gusta que los alumnos hagan muchos ejercicios. En esta situación vi que nos iba a sobrar tiempo, por eso les puse más (I. López, comunicación personal, 30 de mayo 2017).

En efecto, a lo largo de la situación, se pone de manifiesto que el profesor busca que se establezca un procedimiento sistemático para obtener los operadores (identificar las dos medidas relacionadas; formar al factor fraccionario y dividir numerador entre denominador).

En estos ejercicios añadidos por el docente, cabe observar también una típica inversión de medios en fines (Ríos, 2016): el estatus del operador multiplicativo debía ser, para los alumnos, de acuerdo a la lógica de la lección, un medio para lograr un fin, el obtener figuras a escala. En los ejercicios añadidos por el profesor, el operador es directamente demandado, es un fin en sí mismo, el de practicar la herramienta. En sus acciones docentes, emergió de nuevo la resolución acompañada bajo la cual el docente guio las puestas en común y validó las respuestas de los alumnos ante respuestas erróneas.

Los alumnos

Los alumnos no lograron relacionar con facilidad los datos de la bandera original con los de alguna copia, lo anterior puede deberse a varios motivos, uno es la gestión del maestro, pues a lo largo de la actividad 1, el docente intentó que los alumnos escribieran el factor de escala como una fracción. En prácticamente todas las copias, los estudiantes propusieron los factores con los datos inversos. Ante esos incidentes (Roditi, 2003), el docente facilitó la tarea respondiendo directamente: “se trata de ver cuántas veces cabía mi original en la copia”, lo cual, al parecer no terminó de ser claro para los alumnos.

2.7. Situación 7 ¿Una buena selfie?

Propósitos y comentarios previos

En esta situación, se espera que los alumnos apliquen el factor de escala (entero o fraccionario) en contextos geométricos y artísticos. En segundo lugar, se busca que obtengan el factor de escala a partir de relacionar las medidas de los lados homólogos de las figuras, y que utilicen la noción de razón al comparar dos cantidades en un contexto relacionado con el arte. Cabe precisar, que el contexto del arte en estas últimas dos situaciones[37] son un complemento, que se espera promueva una motivación adicional en el trabajo de los estudiantes. Se sigue trabajando con escalas, como en las situaciones anteriores ("Banderas a escala" y "Más del doble pero menos del triple") pero en el contexto del cuerpo humano, la fotografía, la arquitectura, y con algunas relaciones específicas de estos contextos, como la divina proporción[38].

Actividades 1a y 1b


¿Una buena selfie?

¿Tienes un álbum fotográfico en facebook o instagram? Seguramente tienes alguno con muchas de tus imágenes o selfies.

¿Qué tan cerca o tan lejos debes colocar el celular para una buena selfie?

¿Has intentado selfies grupales con la cámara frontal del cel?

Discute con tus compañeros y profesor las siguientes preguntas:

1. En la selfie del celular se aprecia una parte de la Torre Eiffel.

   1a) ¿Qué sucede con la imagen si se alejan del monumento?_________________

   1b) A simple vista, las personas parecen de tamaño semejante a la torre. ¿Por qué?

Figura 65. Actividad 1. Situación 7.

Propósitos y comentarios previos

El propósito de estas actividades es que los estudiantes reconozcan la relación entre la distancia de la cámara al objeto y el tamaño del objeto fotografiado. Para que los alumnos

[37] Las situaciones 7 y 8 no forman parte del libro de texto.
[38] Son diversos los nombres con los que se le conoce: sección áurea, sección dorada o de oro, razón divina, número de oro, etc. "Se le atribuye a Leonardo da Vinci la otra denominación con que es conocida la divina proporción: *sectio aurea,* de donde provienen los nombres de Sección de Oro, Golden Section, Goldene Schnitt, Section d`Or"(Bonell, 2000, p. 17). En el libro (VI, 3) Euclides define esta razón: "Se dice que una recta está dividida en media y extrema razón cuando la línea total es a la parte mayor como la parte mayor a la menor" (p.806). Es decir, "Dividir una recta en media y extrema razón" (Bonell, 2000, p.16).

reconozcan esta relación se apela a un conocimiento intuitivo[39], adquirido por experiencia a través de la percepción visual, al que subyace una relación proporcional inversa.

Análisis a posteriori

En esta sesión, asistieron pocos alumnos (20 aproximadamente). La dinámica se llevó a cabo en plenaria con la guía del docente y participaciones abundantes de los alumnos.

Para estas preguntas, los estudiantes hicieron referencia a dos cuestiones:

La distancia de la cámara al objeto está relacionada con el tamaño que percibían en la fotografía y el ángulo de la cámara con el que se tomó la fotografía.

1. En la selfie del celular se aprecia una parte de la Torre Eiffel.

1a) ¿Qué sucede con la imagen si se alejan del monumento?_______________

1b) A simple vista, las personas parecen de tamaño semejante a la torre. ¿Por qué?

Figura 66. Preguntas 1a y 1b. Situación 7.

Como se había previsto, los alumnos hicieron uso del razonamiento proporcional cualitativo (Behr, Lesh y Post, 1988). En el extracto del registro, Jesús expresó que la imagen se hace más grande si se aleja del monumento, lo cual generó una respuesta muy determinante del docente. El alumno se refería a que, al alejarse del monumento, la imagen entraba completamente en la pantalla, no se refería a que el monumento o la imagen captada crecieran, sólo se refería a que entrara en la pantalla.

Pr: ¿Qué sucede si se alejan del monumento?
Jesús: Se hace más grande la imagen.
Pr: A ver, no ¡no! Explícanos por qué, creo que ya te entendí lo que quieres decir.
J: Cuando alejas la cámara se hace más grande la Torre Eiffel.
Pr: ¿Pero la torre en cuanto a su tamaño?
Als: (Varios alumnos dicen que se hace más chica)
Pr: Disminuye.
Sí está bien, luego luego te entendí lo que me querías decir, pero los demás no. Vengan por su sello.

El docente solicitó de inmediato la justificación de la respuesta, esta atención a la argumentación constituye otro de los elementos de la gestión del profesor.

[39] El razonamiento proporcional "es ampliamente reconocido como una capacidad que introduce un cambio conceptual significativo de niveles de pensamiento concretos, hacia niveles formales operacionales" (Behr, Lesh y Post, 1988). Así propusieron una subdivisión, razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. El cualitativo alude a la percepción visual y al pensamiento concreto.

Actividad 2

2. Enseguida, aparece la **reproducción 1** de la Catedral de Nôtre Dame en Paris. En equipos responde las preguntas que se presentan debajo de la imagen.

2a) A partir de los datos que se presentan en la tabla y **SIN HACER CÁLCULOS** ¿qué reproducción del monumento es más grande y cuál más pequeña? **Argumenta**:

2b) En equipos completen la tabla con distintas repoducciones a escala de la catedral y respondan las preguntas **(Cuidado con las unidades en la reproducción 1).**

Lados	Monumento	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4	Rep 5
Factor de escala (k)	**1**	**1/750**		$\frac{4}{5}$		
Base (Ancho)	40m		48m			
Alto de las torres	27m			21.6m		
Altura desde el suelo hasta la base de las torres.	43m				5.16 m	
Altura total	63m	8.4cm				7.56 m

2c) Usa tu regla para **verificar** tus resultados en la **Reproducción 1.**

2d) Existen **dos** reproducciones que son del mismo tamaño ¿Cuáles son? __________

El **factor de escala** o **razón externa** es un número que te permite encontrar las medidas de una figura a escala respecto de su original o viceversa. Por ejemplo, retomando la reproducción 3 de nuestro ejercicio, el factor de escala es $\frac{4}{5}$, es decir:

$\times \frac{4}{5}$

Lados	Monumento	Rep 3
Alto de las torres	27m	21.6m

$\div \frac{4}{5}$

2e) Obtén los factores de escala que aplicados a las medidas reales del monumento, arrojan las medidas de las reproducciones y exprésalos en forma de fracción.

Reproducción 1:______ Reproducción 4: ______

Reproducción 2: ______ Reproducción 5: ______

Reproducción 3:

Figura 67. Actividad 2. Situación 7.

Propósitos y comentarios previos

En estas actividades, se espera que los alumnos obtengan los factores de escala (enteros y fraccionarios) en reproducciones con respecto a las medidas originales. Nótese que en las dos situaciones precedentes se había previsto iniciar con el valor unitario y la obtención de los factores. En ésta, también se considera que apliquen los factores de escala obtenidos para calcular las medidas de las reproducciones.

Se prevé que los estudiantes tengan dificultades con las medidas en la reproducción 1, sobre todo con las unidades, podría ser que usen metros con centímetros sin cuidar el cambio de unidades. Por otra parte, medir con la regla puede permitir que los estudiantes validen sus respuestas en esta reproducción y comprueben que el factor de escala se aplica en las fotografías.

Se prevén dificultades para obtener el factor de escala. Por ejemplo, invertir la división que se hace para determinar el factor, por ejemplo, en la reproducción 4, $\frac{5.16}{43}m$ o $\frac{43}{5.16}m$, tal como sucedió en la situación anterior. Si ese error ocurre, las dos fracciones entrarán en escena. Una forma para que los alumnos identifiquen cuál es la correcta consiste en considerar que está en juego una reducción, y que por lo tanto el factor debe ser menor que uno, pero ¿tendrán los alumnos esos conocimientos? Considerando que en la situación anterior no quedo claro para todos los alumnos esta diferencia.

Análisis a posteriori

Pregunta 2a

El docente omitió esta pregunta. En ésta, existía la posibilidad de llevar a un cabo un primer análisis cualitativo antes de entrar en la complicación de los cálculos. Se podría haber manifestado el error aditivo y con ello una oportunidad para que en la siguiente pregunta se rompiera el contrato subyacente (Brousseau, 2007) y así pasar a la obtención de los factores de escala; sin embargo, el profesor decidió ir directamente a la pregunta 2b y empezar con los cálculos para completar la tabla de las reproducciones.

Pregunta 2b

En esta pregunta, el profesor intentó que los alumnos recordaran la manera de obtener el factor de escala. En la interacción, el docente intentó que los alumnos regresaran a una situación anterior:

Pr: Reproducción 1, 1 a 750 es el factor de escala, ¿quién me recuerda cuando teníamos el factor de escala?, ¿cómo calculábamos las otras dimensiones del objeto? ¿No recuerdan?
(Silencio) ¡A ver!, vamos a recordar, se regresan a la tabla anterior (más del doble pero menos del triple) en donde hacíamos la reproducción y calculábamos el factor de escala y hacíamos una operación, como ya saben hacerlo, van a tratar de deducir qué operación fue la que se hizo para obtener esos valores.
(Varios alumnos identifican la tabla e incluso la muestran al docente desde su lugar)
Valeria: Es Multiplicar y dividir.
Pr: ¡No!
(Otros alumnos buscan las tablas anteriores y encuentran dos, la de las situaciones 5 y 6 y el docente les dice que vean la simplificada. La de más del doble y menos del triple)
Valeria: ¿No era multiplicar?
Pr: A ver, ¿qué multiplicamos?
V: El factor de escala.
Pr: El factor de escala, ¿para qué te servía? Vamos a recordar, yo tengo este rectángulo.
(el docente dibuja un rectángulo con medidas 8cm por 6cm)
Pr: Y les voy a dar el factor de escala. Mi factor de escala es el siguiente, K= 6 ¿Quién me podría dar las dimensiones?
Aparicio: Multiplicar el tamaño real por el factor

El docente contextualizó la actividad con apoyo de las lecciones anteriores, solicitó a los alumnos que dedujeran la operación con la que se obtenían los valores en una reproducción a escala; sin embargo, no recuperó directamente alguna de las actividades de las lecciones anteriores, sólo apeló a la observación. Esto se agrava por el hecho de que en las actividades anteriores hubo varios tipos de tarea, no solamente la actual (determinar un operador).

El docente lanzó dos ejemplos, en uno se aplica el factor $x6$ a las dos dimensiones de un rectángulo, y en el segundo el factor $x\ \frac{1}{3}$. Estos ejemplos se desarrollaron con la participación de algunos alumnos. La siguiente interacción corresponde al segundo ejemplo:

Pr: Ahora, tengo un factor de escala K=$\frac{1}{3}$ (lo escribe en el pizarrón) Adolfo, ¿qué hago?
(Valeria interrumpe)
Valeria: ¡Yo! $\frac{1}{3}$. por 6.
Pr: ¿Para la altura o para la base?
V: Para la altura
Pr: ¿y para la base?
(Silencio)
Pr: $\frac{1}{3}$. por 8 ¿Quién hace esas dos multiplicaciones?

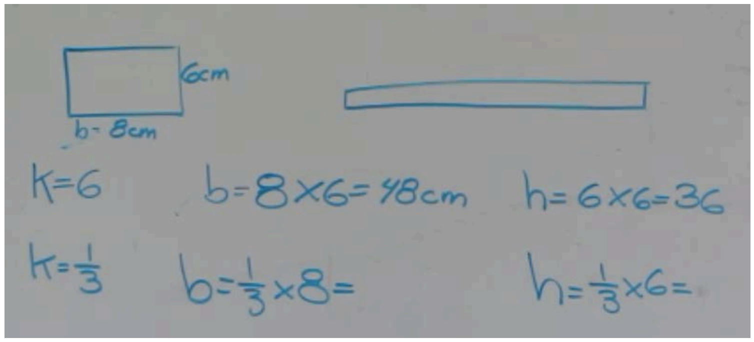


Figura 68. Producción en el pizarrón. Ejemplo del profesor

Pr: Entonces, ¿qué operación tenemos que hacer cuando tenemos que calcular alguna dimensión y nos están dando el factor de escala?
Als: multiplicación
Pr: Sea un aumento o una reducción, ¿sí o no?
Als: ¡Sí!
Hannia: $\frac{8}{3}$
Pr: ¿Hay simplificación de enteros?[40]
Als: Sí
Santiago: $2\frac{2}{3}$
Pr: ¿Se redujo o aumentó? (señalando la base del rectángulo)
Als: Aumentó
Pr: ¿Dónde está el aumento? Aquí nada más tengo dos enteros (señalando la fracción: $2\frac{2}{3}$) Y en la original tengo 8 enteros. Se redujo porque me están diciendo que el factor de escala es de : $\frac{1}{3}$ ¿No hay duda? Ahora, en la altura.
Alexa: $\frac{1}{3}$por 6 son : $\frac{6}{3}$ igual a 2
Pr: ¿Aumentó o se redujo?
Als: Se redujo.
Pr: ¿De cuánto se redujo? De 6cm a 2cm. Me están diciendo que la escala es de : $\frac{1}{3}$, la tercera parte, y la de arriba es de 6, es mayor, va a crecer. Son seis veces lo que mide (enfatizando) ¿Ya no hay dudas? Entonces, ¿qué operación tenemos que hacer cuando tenemos que calcular alguna dimensión y nos están dando el factor de escala?
Als: ¡multiplicación!
Pr: Sea un aumento o una reducción, ¿sí o no?
Als: ¡Sí!

Los alumnos, en efecto, tuvieron la experiencia de agrandar el rectángulo multiplicando sus dimensiones por 6, y reducirlo "multiplicando por $\frac{1}{3}$". Quizás algunos empezaron a aceptar la equivalencia entre multiplicar por $\frac{1}{3}$ y dividir entre 3. Por otra parte, cabe observar que en el ejemplo de los rectángulos no se trató de generar el factor, sino de

[40] Frase que puede ser confusa pues no son los enteros los que se simplifican, sino en todo caso, las fracciones, al escribirlas en forma mixta. Lo interesante es que esa falta de claridad de la oración obstaculiza, pues la frase, que por lo que parece se repite seguido para dar lugar a una rutina, ya es asociada por los alumnos (o algunos) a la conversión a notación mixta.

aplicarlo. Generarlo constituye una tarea mucho más difícil, con mayor carga conceptual, que aplicarlo.

Reproducciones a escala

Retomo únicamente la solución de dos reproducciones que ejemplifican grosso modo la dinámica general y además, muestran aspectos interesantes de las resoluciones de los alumnos y de la gestión del profesor. Se presenta la reproducción 2 que implica obtener el factor de escala y aplicarlo. La reproducción 3 en la cual se conoce el factor de escala fraccionario.

Reproducción 2 (40m →48m)

En la introducción, el docente recordó a los estudiantes las dificultades en la lección de las banderas para relacionar las medidas y obtener los factores de escala. Además, propuso una pregunta con la que también generó el ejemplo de los rectángulos:

> "¿Cómo obtengo el factor de proporcionalidad?"

Esta pregunta, en mi opinión, podría tender a constituir una frase emblemática (Sensevy, 2011), esto es, un enunciado que revive una experiencia importante o crucial en la clase y que apoyaría en la resolución de la tarea. En este caso, la pregunta probablemente no hace alusión directamente a una experiencia crucial, pero si importante, ya que a partir de este momento formó parte de las sesiones siguientes, como un medio para que los alumnos intentaran relacionar las medidas e intentaran obtener los factores de escala.

En la siguiente interacción de clase, la alumna Vanesa propuso la fracción $\frac{48}{40}$.

A partir de esa participación correcta, el docente orientó nuevamente las actividades. No es seguro que todo el grupo haya estado de acuerdo o comprendido el porqué de esa relación, pero el profesor continuó hasta que se obtuvo el factor de escala fraccionario $\frac{6}{5}$.

> Pr: Ahora, nos dicen que la reproducción 2 mide en lugar de 40m, 48 m la base. ¿Cómo obtengo el factor de proporcionalidad?
> Als: (Varias respuestas al mismo tiempo)
> Pr: Van a tener que regresarse, ¡revisen!
> Vanesa: Dividir 48 entre 40.
> Pr: ¡Sí!, hay que dividir 48 entre 40. Sí recuerdan que la vez pasada con ese factor de escala, tuvieron bastantes problemas para definir cuál era el valor superior e inferior, el numerador y el denominador. Vanesa se acordó y dice que es 48 sobre 40.

(El docente escribió la fracción $\frac{48}{40}$) ¿Quién me ayuda a simplificar?
José María: $\frac{24}{20}$, $\frac{12}{10}$.
Pr: Entonces mi factor de escala, ¿cuál es?
Aparicio: $\frac{6}{5}$
Pr: ¡Ya saben qué hacer!

Los alumnos que participaron, propusieron las medidas de los lados en fracción y el docente solicitó, cuando era el caso, que las escribieran en forma de fracciones mixtas (conviven en clase, implícitamente, los dos sentidos de la noción fraccionaria $\frac{a}{b}$: como sinónimo de dividir (a:b) y como fracción) . En los registros se aprecia el uso de calculadora y que los alumnos tenían bastante práctica en la técnica para la obtención de las fracciones mixtas. Se aprecian algunas dificultades para que los alumnos encuentren el sentido para obtener el factor de escala, pero, por otro lado, para algunos empieza a tener significado su aplicación.

Finalmente, en el cálculo de los otros lados de la reproducción, los alumnos expresaron las medidas con fracciones y el docente escribió directamente la multiplicación del entero por la fracción en el pizarrón (Figura 69). Esta decisión, parece estar orientada a fortalecer el algoritmo convencional para multiplicar fracciones por un entero.

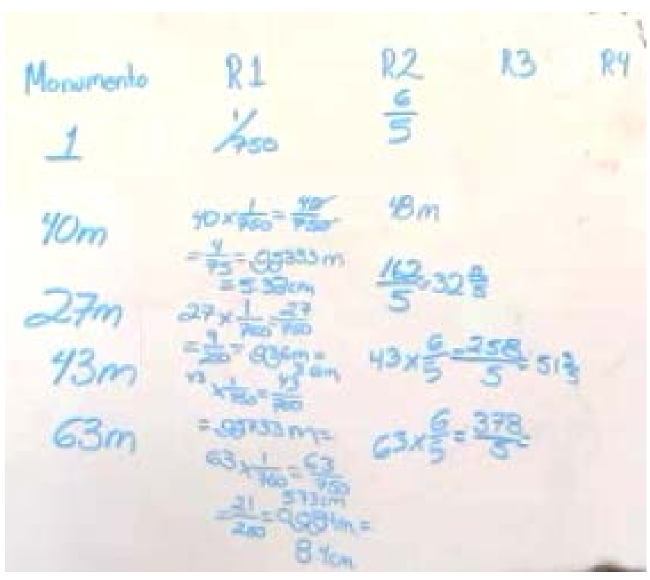


Figura 69. Producción en el pizarrón de reproducciones 1 y 2. Situación 7.

Reproducción 4 (43m → 5.16m)

En esta reproducción, una de las medidas que utilizaron en la puesta en común fue errónea. Una alumna, Vanesa, propuso 5.16 sobre 40, cuando lo correcto era 5.16 sobre 43. Ese error causó dificultades en las técnicas, el docente se percató de ello ya avanzados los resultados.

> Vanesa: Tenemos que dividir las medidas que están ahí (señala la reproducción) entre las de la original.
> Pr: Entonces, ¿qué vas a hacer?
> Vanesa: 5.16 sobre 40.
> Pr: ¿Quién me dice cuál es el resultado?
> Diana: 0.129
> Pr: ¿Y si yo quiero el factor de escala a fuerza en fracción?
> José María: 129 milésimos

El profesor expresó: *"¿y si quiero el factor de escala a fuerza en fracción?"* En esta parte, el factor ya estaba expresado con la fracción $\frac{5.16}{40}$ [41]. Resalta la insistente solicitud del docente para obtener la fracción, posiblemente porque quería recuperar uno de los propósitos de la actividad (obtener el factor entero o fraccionario). Él mismo propuso una alternativa, que se explica enseguida. La gestión del docente muestra que le interesa que los alumnos expresen los factores en fracciones y no sólo en decimales, posiblemente le preocupa que los alumnos tuvieron dificultades desde las lecciones anteriores.

Otra característica de su gestión docente, y que hemos identificado desde el inicio de la experiencia es la resolución acompañada, en la cual, ante su insistente solicitud de expresar los factores en forma de fracción expuso un procedimiento conocido como "ley del sándwich", es decir, una ayuda directa (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015).

> Pr: (…) les voy a decir qué había pensado. Poner 516 sobre 100 y luego sobre 40, porque ya habíamos visto ese tipo de divisiones. (El docente escribió 516/100/40). Si lo hago así, ¿quién nos dice cómo le hacemos para dividir? (escribe un 1 como denominador del 40). A ver, si pongo esto, ustedes lo dijeron, yo no lo dije, ley del sándwich. Yo no lo dije así, ustedes lo dijeron. Las tapas y el resultado van arriba.

[41] Cabe señalar que $\frac{5.16}{40}$no es estrictamente una fracción, tiene un numerador que no es entero. Para tener la fracción, en ese caso, se hubiera requerido, por ejemplo, multiplicar por 100 ambos términos y obtener la fracción: 516/4000.

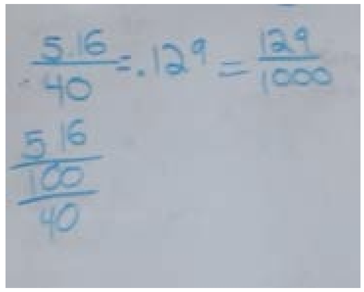
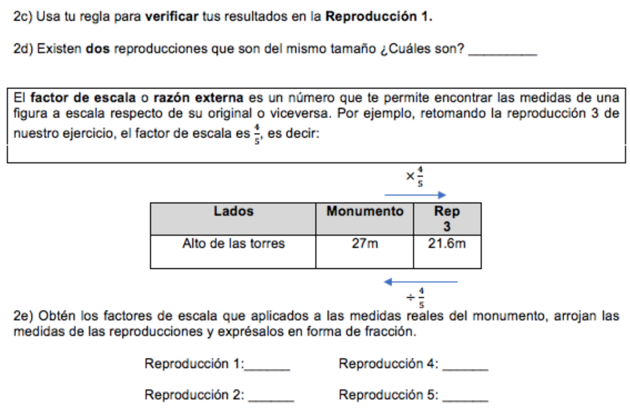


Figura 70. Ley del sándwich. Producción del docente en el pizarrón.

<u>Ítems 2C, 2D y 2E</u>



2c) Usa tu regla para **verificar** tus resultados en la **Reproducción 1.**

2d) Existen **dos** reproducciones que son del mismo tamaño ¿Cuáles son? _________

El **factor de escala** o **razón externa** es un número que te permite encontrar las medidas de una figura a escala respecto de su original o viceversa. Por ejemplo, retomando la reproducción 3 de nuestro ejercicio, el factor de escala es $\frac{4}{5}$, es decir:

$\times\frac{4}{5}$

Lados	Monumento	Rep 3
Alto de las torres	27m	21.6m

$\div\frac{4}{5}$

2e) Obtén los factores de escala que aplicados a las medidas reales del monumento, arrojan las medidas de las reproducciones y exprésalos en forma de fracción.

Reproducción 1:______ Reproducción 4: ______

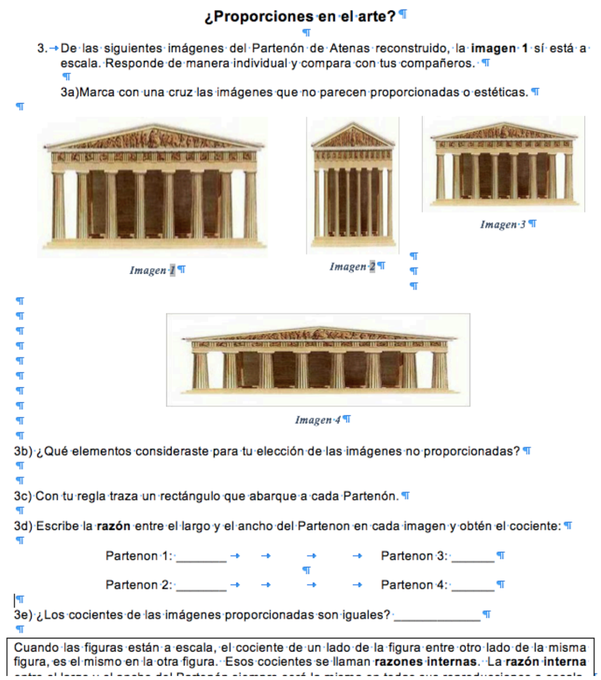
Reproducción 2: ______ Reproducción 5: ______

Figura 71. Actividades 2c, 2d y 2e. Situación 7.

Para el ítem 2C, los alumnos tenían que medir la fotografía de la impresión para comparar con la reproducción 1. Algunos alumnos no traían el material, para otros una dificultad fue utilizar el instrumento de medición. El profesor planteó preguntas para ayudar el proceso de medición, por ejemplo: *“Lo alto de las torres, ¿cuánto tiene que medir?”* Pese a las dificultades, quizás algunos alumnos lograron verificar.

En resumen, cuando llegaron a este punto, ya el profesor había validado la respuesta correcta, entonces la verificación en realidad no lo fue del todo, fue un ejercicio más que se yuxtapuso al anterior, a lo más, permitió que vieran que lo que calcularon tenía una relación con la reproducción.

Actividad 3



¿Proporciones en el arte?

3. De las siguientes imágenes del Partenón de Atenas reconstruido, la **imagen 1** sí está a escala. Responde de manera individual y compara con tus compañeros.

3a)Marca con una cruz las imágenes que no parecen proporcionadas o estéticas.

3b) ¿Qué elementos consideraste para tu elección de las imágenes no proporcionadas?

3c) Con tu regla traza un rectángulo que abarque a cada Partenón.

3d) Escribe la **razón** entre el largo y el ancho del Partenon en cada imagen y obtén el cociente:

Partenon 1: _______ Partenon 3: ______

Partenon 2: _______ Partenon 4: ______

3e) ¿Los cocientes de las imágenes proporcionadas son iguales? ____________

Cuando las figuras están a escala, el cociente de un lado de la figura entre otro lado de la misma figura, es el mismo en la otra figura. Esos cocientes se llaman **razones internas**. La **razón interna**

Figura 72. Actividad 3. Situación 7.

Propósitos y comentarios previos

En esta actividad, se pretende que los alumnos identifiquen que las razones internas se conservan en imágenes a escala. Asimismo, evidenciar el error aditivo y descartarlo. Para ello, se proponen distintas reproducciones (imágenes) del Partenón de Atenas remodelado y se solicita señalar cuáles imágenes están “proporcionadas” a partir de un modelo. Se espera, de inicio, que los estudiantes, a partir de la observación elijan adecuadamente las reproducciones. Se recupera el razonamiento proporcional cualitativo (Behr, Lesh y Post, 1988).

En las actividades precedentes, los alumnos ya vieron que, cuando hay figuras a escala, hay un factor constante de proporcionalidad que, aplicado a las medidas de una figura arroja las de la otra. Ahora habrá que atender a la otra propiedad de la escala y de la proporcionalidad: la conservación de las razones internas (si, por ejemplo, un lado mide *n* veces, lo que mide otro en una figura, esa misma relación se conserva en la otra), y esta es la propiedad requerida a ahora.

Análisis a posteriori

Pregunta 3A

En la actividad 3A, que consiste en marcar las reproducciones “en proporción” a partir de un modelo usando la observación, emergió nuevamente la resolución acompañada en la gestión del docente. Por ejemplo, en el siguiente extracto de clase, hay un diálogo entre un par de alumnos y el docente, los estudiantes manejaron vocablos como “chiquita” y el profesor buscó integrar el término proporcional:

> Pr: Ahora, la imagen 3.
> Jesús: Se ve más chaparrita.
> Pr: ¿Se ve proporcionada o no?
> J: Sí, pero en pequeño.
> Pr: Pero perdió altura, y ¿en cuánto a lo ancho?
> J: Igual
> Pr: ¿Y se ve que haya perdido en la misma proporción de ancho y alto?
> J: No
> Pr: ¿No? Y entonces, ¿por qué esta iría tachada?
> J: No, es como en escala, pero con menos.
> Pr: Es una escala menor, es la misma, pero entonces para que sea proporcional tendría que haber disminuido lo mismo de ancho y de alto.
> Vanesa: Se supone que sí.
> Pr: Sí me dices que es proporcional, quiere decir que creció en lo ancho y en lo alto en la misma proporción, sino no estaría proporcionada. Entonces, tienes razón, vayan poniéndose su sello.

Al parecer, los alumnos pusieron un tache, es decir, consideraron que la figura 3 no estaba a escala. Incluso expresaron que se veía “más chaparrita” Al parecer, las preguntas del docente indujeron a aceptar que también la otra dimensión cambió (el ancho, además de la altura) y que entonces, podría tratarse de una figura a escala. El profesor introdujo términos “crecer en la misma proporción”, lo cual en cierto momento se define como “haber disminuido lo mismo de ancho y de alto”, lo cual quizá para algunos alumnos signifique la misma diferencia.

Pregunta 3B: Nueva oportunidad de enfrentar el error aditivo

En este intento para enfrentar el error aditivo se mezclan dos preguntas: ¿qué elementos consideraste?, la cual hace referencia a la valoración a simple vista, perceptual, que hicieron los alumnos al contestar la pregunta A y la segunda: ¿Qué elementos se deben considerar, cuando se mide, para saber si hay proporcionalidad? Esta segunda pregunta apela a la conservación de las razones internas (o proporciones).

Pr: Hiram tenía una hipótesis y quiero retomarla porque me parece importante. Que, si él tiene una distancia, tiene su imagen y que mide 5cm y aquí 3cm, entonces luego me dijo que si él veía otra que aumentaba 2cm de un lado también aumentaría 2 en el otro.
¿Es proporcional? (lanza la pregunta al grupo).
Als: ¡Si!
Pr: ¿Seguros? ¿Por qué? ¿Quién explica por qué?
Tonatzin: Porque están agregando la misma cantidad a ambos lados.
Pr: Dibújenla ahí en su cuaderno, ahí a un costado, van a dibujar.

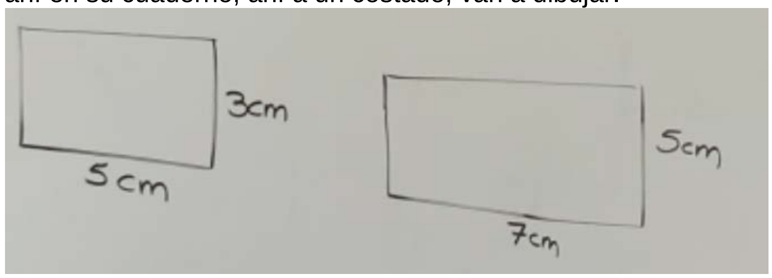
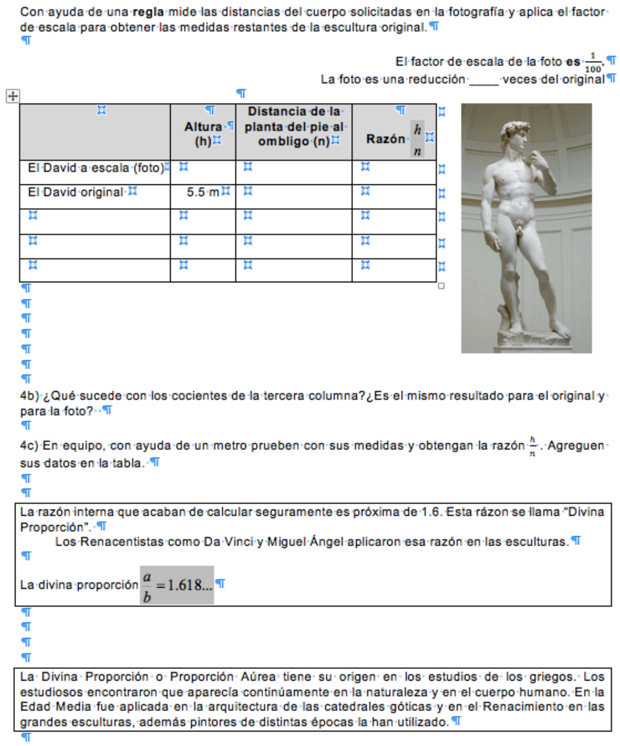


Figura 73. Contraejemplo del docente para evidenciar el error aditivo.

Pr: ¿Cuánto medían los lados de la imagen 1 del Partenón?
V: 3.5 y 6.6
Pr: ¡Ok! Entonces, van a hacer un rectángulo con esas medidas y luego van a hacer otro aumentándole 5cm a cada lado y vamos a ver si son proporcionales ¿Sí son proporcionales?
Vanesa: ¡Sí!
Pr: ¿Son proporcionales? ¡No! (riendo).
Hiram: ¡No es proporcional! (El docente omite esa participación)
Pr: ¿Quién me da la proporción de esta respecto de esta basándonos en las bases? (Refiriéndose a los rectángulos dibujados en el pizarrón) ¿Quién me da el factor de proporcionalidad de las bases? (Repite varias veces la pregunta)
Aparicio: 5 sobre 7
Pr: ¿5 sobre 7?
Pr: 7 sobre 5, entonces si divido 7 sobre 5, ¿cuánto es? (El docente hace la división en el pizarrón). Entonces, ahora si yo multiplico 3 por 1.4 para saber cuánto va a medir esta (obtienen 3 x1.4=4.2)
Pr: Esa es la medida que debe ir aquí, por eso exageré las medidas para que perdiera la proporción y vieran. No porque aquí aumente 2 (largo) aquí también va a aumentar 2 (señalando el ancho). Les recuerdo que el factor de proporcionalidad nos va a indicar y nos va a permitir calcular cuánto aumentan todas las medidas de una figura para que esta sea proporcional.

Cabe destacar el intento por parte del profesor de recurrir a un contraejemplo que evidenciara el error aditivo. El efecto del contraejemplo pudo verse debilitado por la elección del rectángulo, el cual, si se agranda mediante la suma de una constante a los lados, tendrá una deformación poco perceptible a simple vista: a final de cuentas, seguirá siendo rectángulo.

Actividad 4



Con ayuda de una **regla** mide las distancias del cuerpo solicitadas en la fotografía y aplica el factor de escala para obtener las medidas restantes de la escultura original.

El factor de escala de la foto **es** $\frac{1}{100}$.
La foto es una reducción _____ veces del original

	Altura (h)	Distancia de la planta del pie al ombligo (n)	Razón $\frac{h}{n}$
El David a escala (foto)			
El David original	5.5 m		

4b) ¿Qué sucede con los cocientes de la tercera columna?¿Es el mismo resultado para el original y para la foto?

4c) En equipo, con ayuda de un metro prueben con sus medidas y obtengan la razón $\frac{h}{n}$. Agreguen sus datos en la tabla.

La razón interna que acaban de calcular seguramente es próxima de 1.6. Esta rázon se llama "Divina Proporción".
Los Renacentistas como Da Vinci y Miguel Ángel aplicaron esa razón en las esculturas.

La divina proporción $\frac{a}{b} = 1.618...$

La Divina Proporción o Proporción Aúrea tiene su origen en los estudios de los griegos. Los estudiosos encontraron que aparecía continúamente en la naturaleza y en el cuerpo humano. En la Edad Media fue aplicada en la arquitectura de las catedrales góticas y en el Renacimiento en las grandes esculturas, además pintores de distintas épocas la han utilizado.

Figura 74. Actividad 4. Situación 7.

Propósitos y comentarios previos

El propósito es que los alumnos apliquen las nociones de razón y escala en el contexto de la escultura para calcular las medidas reales y las medidas de la fotografía.

1. Cálculo de h en foto. Dado que se conoce la escala ($\frac{1}{100}$), Calcular la altura de la foto implica aplicar $\frac{1}{100}$ a 5.5m, (se espera que se interprete como 5.5m entre 100). Si los alumnos deciden poner las medidas de la copia en cm, el resultado está dado por mismo número (5.5), no hace falta hacer operaciones, pero es poco probable que los alumnos se den cuenta.
2. Cálculo de n. Un primer punto a descubrir es que hace falta obtener la medida de n y que es necesario medir directamente en la foto. Una vez obtenido ese dato, aplicar el factor de escala inverso (el que pasa de la foto a la altura real), lo cual no implica operaciones si el paso es de cm a metros. Si no, implica inferir el operador $x100$.

La razón interna $\frac{h}{n}$ en principio no se utilizará. Es decir, su funcionalidad es baja pues los alumnos se limitarán a observar que esas razones son iguales. Al solo haber dos medidas en juego ($h \; y \; n$) solo hay una razón interna, que se conserva. Con esto, podría confundirse con la noción de constante.

Una de las actividades (4c) sugiere que los alumnos obtengan con sus propias medidas la relación: altura/distancia del pie al ombligo. Se espera que los cocientes que obtengan de sus propias medidas se aproximen entre sí lo suficiente para que puedan observarlo. El profesor podría entonces explicarles que esos cocientes tienden al número áureo.

Análisis a posteriori

Actividad 4A

Para la pregunta inicial que refiere al factor de escala de la reducción de la imagen, algunos alumnos lanzaron propuestas como 50 o 10 veces. Ante eso, el profesor, propuso preguntas para orientarlos hacia el factor de escala. En esta parte, en la mayoría de las preguntas el docente tendió a sólo preguntar qué hacer o cómo proceder. Sólo en algunos momentos sugirió frases como "¿no medirías mal?" Puede decirse que, la dialéctica expresión/reticencia, tendió aquí a la reticencia (Sensevy, 2011), es decir, el profesor no expresó mucho y sus ayudas fueron indirectas:

> Pr: La foto es una reducción de cien veces, quiere decir que por cada centímetro que hay en la fotografía hay cinco centímetros, ¿será eso verdad?
> Jesús: yo siento que es 50.
> Pr: Les están dando el factor de escala.
> Als: 100
> Pr: Pongan por favor, la foto es una reducción cien veces del original.
> (Explicación de la tabla)
> Pr: Como no tenemos más que la altura original del David, ¿qué es lo que debemos hacer para completar la tabla? Pero antes se conforman en equipos de dos a tres personas para trabajar.
> (Algunos equipos sin regla, el profesor les presta material: regla o cinta métrica)
> Pr: Bueno, me van a decir qué sugieren hacer para llenar la tabla, les están pidiendo la estatura original y la distancia de la planta del pie al ombligo (n).
> Vanesa: Primero hay que sacar n.
> Pr: ¿Cómo lo vas a sacar?
> V: Midiendo de la planta del pie al ombligo.
> Pr: ¡Mídanlo por favor!
> Als: 3.5, 3.8, 3.5
> Pr: A ver, ¿cómo están midiendo?
> (El docente se acerca a varios equipos para corroborar sus mediciones con la regla)
> Pr: 3.5

Pr: Su compañera trazó una línea de donde está el ombligo, esa es una buena estrategia, ella trazó una línea perpendicular y después medir.
Pr: El David a escala, ¿Cuánto mide?
José María: 5.5
Pr: ¿Por qué?
JM: Porque es una reducción de cien veces.
Pr: Ok, y la medida que les están dando está en metros y ¿ustedes su regla está en?
Als: centímetros
Pr: La lógica de su compañero está bastante bien aplicada, entonces no hay que hacer ninguna conversión, ni siquiera medir, es 5.5 cm, pero ni siquiera había que medir. Pongan la medida de la escala por favor. A ver, están cometiendo un error, no es un caso aislado. A ver, dice altura
(Algunos alumnos no logran seguir al docente para llenar la tabla, algunos están distraídos)

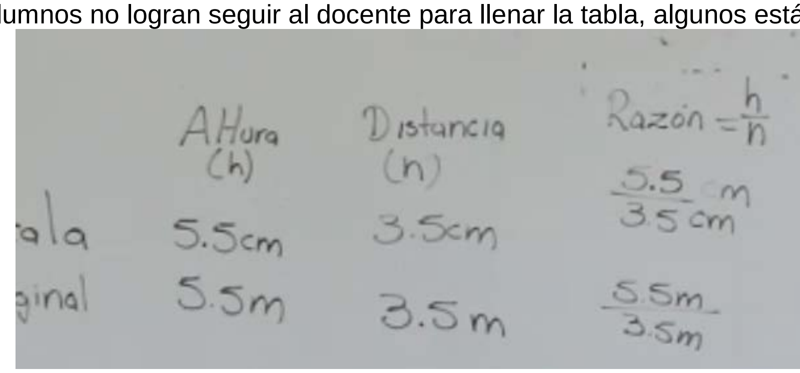


Figura 75. Razones en el pizarrón.

(El docente transcribió las medidas y las razones en el pizarrón)
Valeria: 1.52
Pr: ¿Seguros? O hasta eso voy a hacer yo (El docente hace la división en el pizarrón 5.5 entre 3.5).

En la misma actividad de la tabla, el docente propuso un ejercicio adicional: agregó una altura de 16.5 y la nombró “escala 2” (seguramente una distracción pues lo que escribió corresponde a una escala k=3). Solicitó que los alumnos obtuvieran (h), (n) y la razón (h/n) en equipos.

Pr: Tengo una escala 2, en esa escala 2, la altura es de 16.5 cm, ustedes van a tener que obtener la distancia (n) y la razón, eso lo van a hacer en equipo, y ahorita nos van a decir cómo es que lo hicieron. ¡Rápido! Tienen nada más dos minutos.

Esa tarea adicional propuesta por el docente, dio oportunidad a los alumnos de afirmar su comprensión de la noción de factor de escala (en este caso entero) y, eventualmente, de recurrir a la conservación de las razones internas. En este episodio, emergió de nuevo el error aditivo. El docente permitió que el error surgiera, pues mientras los alumnos trabajaban en equipos, Vanesa le mostró su procedimiento y el docente esperó a la puesta en común para señalar el error, lo que deja ver que el profesor en ese momento, comprendió la oportunidad de evidenciarlo, es decir, su relación con el texto muestra que para el profesor fue más clara esta necesidad.

En la puesta en común, el docente hizo alusión a lo que habían vivido en la actividad con rectángulos áureos (Actividad 3). Para esta actividad, el profesor se mostró sorprendido ante la reaparición del error:

> Vanesa: Primero quería ver cuánto había aumentado de 5.5m a 16.6 cm y me dio 11, entonces lo que hice fue sumarle 11 a 3.5 para ver cuánto había crecido.
> Pr: ¡No! Ese error lo están cometiendo desde que estábamos viendo la primera parte de razones, cuando tienes un rectángulo y aumentaba en la base 5 y por ese simple hecho también le sumaban a la altura 5, y vimos que no era proporcional. Que no era una razón eso y que por lo tanto no podía ser así.

El profesor acudió a la memoria didáctica al evocar el episodio del rectángulo que agrandaron de manera aditiva, no proporcional. Pero es probable que para varios alumnos dicha experiencia no tuviera aún el carácter de emblemática o crucial. Por eso, para algunos estudiantes, parece que el profesor actuó como si no hubiera memoria, y no pudiera más que limitarse a señalar que el error se ha repetido nuevamente.

> ¡Es como la tercera vez que cometen ese error! ¡A ver!, observen lo siguiente, antes de que ustedes tomen la decisión de cómo obtenerlo. Aquí, nosotros teníamos 5.5cm de altura y aquí tenemos 3.5cm (señalando n). A partir de ello, obtuvimos una razón, esa razón ¿cómo la obtuvimos? Dividimos el total entre esta cantidad, ¿Para qué lo hicimos, esa división? ¿para qué lo hicimos? Para ver esta cantidad (señala n), esta cantidad que está aquí, para ver cuánto representa, cuántas veces cabe en el total (señala 5.5cm).
> Y entonces se hace esta división (señala 5.5cm/3.5cm) y vimos que cabe 1.57 veces. Viéndolo de la forma aritmética más básica es eso, tenemos estamos viendo cuántas veces cabe mi distancia n en la altura total. ¿Hay dudas?
> Bueno, es todo lo que puedo agregar hasta ahorita. Tienen otro minuto, para descifrar cómo obtengo esto (…)

En su gestión del conocimiento, el profesor acudió al procedimiento de conservación de las razones internas y emergió un procedimiento que el docente recuperó en la puesta en común, Valeria dividió la altura propuesta por el docente (16.5cm) entre 5.5cm la altura del David en la fotografía, y así obtuvo que la escala era de 3, enseguida aplicó el factor, es decir, multiplicó la otra medida por 3.

Pregunta 4C (Medidas de los alumnos y razones)

En esta parte de la situación, los alumnos midieron su estatura y la distancia de su planta del pie al ombligo, para así obtener la razón $\frac{h}{n}$ y compararla con lo que hicieron en la actividad 4B. El profesor participó con los alumnos y mostró un ejemplo de cómo usar la cinta métrica, incluso él participó con sus propias medidas, lo cual es poco usual en la relación que mantiene con los alumnos, la cual se limita a preguntas y respuestas.

Después de un tiempo de trabajo en equipo, el docente recuperó las medidas de un integrante de cada equipo y construyó una pequeña tabla. Para cada integrante solicitó las medidas, la razón y el cociente, en ese momento los alumnos participaron continuamente y dieron todas las respuestas.

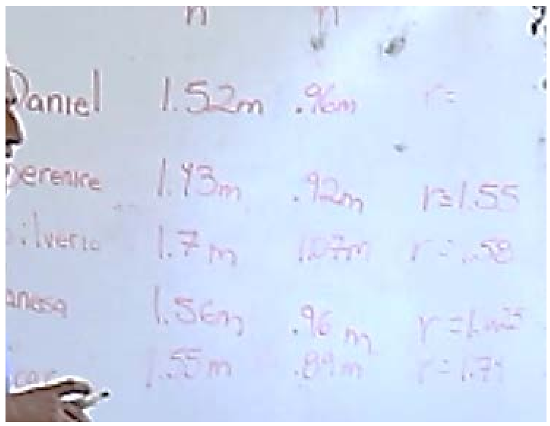


Figura 76. Razones en el pizarrón. Actividad 4. Situación 7.

Comentarios

La situación

El contexto aparentemente motivó un poco más a los alumnos. Esto fue mucho más claro en la última actividad, cuando ellos midieron partes de su cuerpo y constaron cierta constancia de la razón.

La división se expresa como fracción y al mismo tiempo se trata como fracción, puesto que se simplifica e incluso el resultado se deja en forma fraccionaria, ya no se pasa a la forma decimal. Se trata de la coexistencia de división/fracción en la secundaria, sin que nunca se haya justificado, se tratan como equivalentes, se prestan la notación y se prestan las técnicas.

La gestión

La resolución acompañada fue nuevamente la forma privilegiada de gestión, si bien hubo algunos momentos de trabajo en equipos (a veces, para cuestiones no muy problemáticas, como la de medir partes de sus cuerpos).

El docente se mostró nuevamente insistente en que los alumnos justificaran sus respuestas. Cabe destacar que, en esta ocasión, a diferencia de las anteriores, ante las incidencias (Roditi, 2003), el profesor usó el recurso del contraejemplo con la intención de ayudar a evidenciar el error aditivo. Sin embargo, no fue efectiva e incluso el profesor se mostró un poco sorprendido, como si él considerara que ese error ya no debiera ocurrir, pues ya se había explicado en otros momentos, e incluso en lecciones anteriores (ver lección de la bandera a escala).

Asimismo, insistió en las desventajas de la repetición del error, como si la reaparición del error aditivo significara un problema de los estudiantes por falta de atención. En el primer capítulo, expliqué la persistencia de esta concepción y si no hay experiencias fuertes que evocar se seguirá manifestando, pues “el modelo aditivo es un obstáculo resistente a la puesta en evidencia del modelo multiplicativo y debe poder serle opuesto en situaciones abiertas” (Brousseau, 1981, p.61). Por ende, el profesor continuará repitiendo sin memoria didáctica (Sensevy, 2011).

Ante esto, nuevamente nos encontramos con la necesidad de un texto para el docente que comunique con claridad los propósitos de la situación y los errores que seguramente aparecerán y, sobre todo, la posible naturaleza de éstos y la manera de hacerlos evidentes.

Los alumnos

Las producciones de los estudiantes muestran que obtener y aplicar un factor aún presenta dificultades. En la mayoría de los casos, los alumnos no obtuvieron los factores como fracciones sino acudieron a los decimales y los aplicaron de la misma forma. En cuanto a la conservación de las razones internas, el docente hizo intentos por visibilizarlas.

Al interactuar con sus propias medidas (h, n), los alumnos se enfrentaron a los errores de aproximación que eso implicaba. Ante eso, el docente otorgó ayudas indirectas que permitieron a los estudiantes darse cuenta de que los cocientes sí se aproximaron al número áureo.

2.8 Situación 8. ¿Quién es el ladrón?[42]

En esta situación, los propósitos son: Identificar la relativa invariancia de las razones entre las partes del cuerpo humano (razones internas) y resolver un problema del tipo valor faltante con ayuda de esas razones.

Actividad 1

¿QUIÉN ES EL LADRÓN?

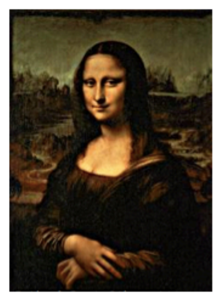
I. PRIMERA PARTE

El 21 de agosto de 1911, la *Mona Lisa* fue robada del museo del Louvre en París, Francia. El robo se convirtió en prioridad de la ciudad y se ofreció una recompensa de hasta 70,000 francos a quien la recuperara.

El famoso investigador Sherlock Holmes fue contratado para el caso, entre otros datos poseía lo siguiente:

- ✓ Una **huella de 19 cm de largo** que dejo la palma de la mano del ladrón en la pared.
- ✓ La **altura** de los trabajadores que estuvieron a cargo de la pintura la noche del robo.

Sospechosos	*Altura (cm)*
Max	*195*
Nicole	*155*
Sofía	*180*
Ana	*140*
Vicente	*171*
Rafael	*165*



Fuente: Museo de Louvre

Con esos datos resolvió el caso.

Responde:

1. ¿Quién robó la pintura? ___________________

   1b) ¿Por qué? ___________________________

SI NO LOGRARON ENCONTRAR AL LADRÓN EN ESTE MOMENTO, CONTINUÉN DE TODAS MANERAS

Figura 77. Actividad 1. Situación 8.

Propósitos y comentarios previos

El propósito de la actividad es que los estudiantes prevean o identifiquen la conservación de la relación entre el largo de la mano y la estatura del ladrón (obtener la razón interna).

[42] Cabe señalar, que en octubre de 2016 esta situación pasó por una fase de experimentación preliminar. De ese análisis, se le hicieron ajustes hasta tener la versión actual.

La actividad se diseñó como una situación adidáctica (Brousseau, 2007). Se pretende que los alumnos interactúen con el medio sin que el docente explicite[43] los conocimientos que se deben utilizar. Además, que se propicie un proceso de devolución en el cual los estudiantes se apropien del problema.

Se prevén dos posibilidades en cuanto a los procedimientos de los estudiantes:

- Que midan la longitud de su propia mano y estatura, y que obtengan la razón interna como fracción (por ejemplo $\frac{171}{19}$). Está opción la consideramos poco probable en esta fase adidáctica.

	Alumno	Ladrón
Huella	m	19
Altura	h	h'

Se calcularía la razón interna $\frac{h}{m}$ y se aplicaría a 19 para obtener h'

- Que comparen la medida de la huella que se da en el problema con la suya e intenten establecer una razón externa.

Se calcularía la razón externa $\frac{19}{m}$ (la cual es un factor constante de proporcionalidad) y se aplicaría a h para obtener h'

Esta actividad rompe con el contrato didáctico al contradecir una norma usual: que el texto del problema ofrece la información suficiente para resolverlo. Aquí se requiere que los estudiantes exploren la proporción entre las medidas (largo de la mano-altura) de personas, “sin que el docente diga previamente al alumno cuál es la respuesta exacta que espera de él” (Brousseau, 2007, p.87), y que el alumno haga uso de sus propios medios favoreciendo la interacción con los otros. El problema es complejo, por ello, para los alumnos será difícil establecer la solución en esta primera parte.

[43] En otras partes de este documento señalé que los trabajos de Sensevy (2011) muestran que el docente interviene en las fases adidácticas.

Análisis a posteriori

En esta primera parte de la situación, los estudiantes propusieron algunas alternativas de solución, dos de ellas las esperadas. La primera surgió casi de inmediato después de la lectura de la consigna. La alumna Daniela realizó una estimación de sus propias medidas y las comparó con los datos del problema, a partir de esa comparación propuso a dos sospechosos.

Esta participación deja ver que la alumna reconoció (no sabemos si de manera consciente) que se trata de una situación de variación proporcional, más precisamente, que hay una razón invariante, pero sin llegar expresar dicha razón como fracción.

> Pr: Sabemos la estatura de cada uno de los integrantes y también sabemos cuánto mide la huella sobre la pared. La huella sobre la pared mide 19cm de largo y la altura de ellos está en la tabla. En base a eso, son las únicas pistas que tienen para saber quién robó la pintura. Ya veo que su compañera está sacando conclusiones. A ver Daniela, ¿qué conclusiones estás sacando?
> Daniela: Pues estaba diciendo que estaba entre Sofía y Vicente.
> Pr: Entre Sofía y Vicente, ¿por qué?
> Daniela: (…) pues es que… de ese tamaño es mi mano.
> Pr: ¿De ese tamaño es tu mano?
> Daniela: Sí
> Pr: ¿Tú sientes eso? Bueno y en qué lo sustentas
> Daniela: ¡Ahh! Pues mi mano mide 17cm.
> Pr: Ella ya tiene un avance. A ver, van a hacer equipos de tres personas, cuatro personas.

A partir de ese momento el profesor favoreció el trabajo en grupos. Cabe aclarar que esa dinámica de trabajo había sido poco habitual en las sesiones y que los estudiantes mostraron dificultades para centrarse en el problema con distracciones y conversaciones constantes. En el trabajo en grupos, identifiqué que en un equipo los estudiantes marcaron sus palmas sobre hojas de cuadernos y midieron el largo de éstas con la regla:

> Observador: ¿Para qué marcan los contornos y miden?
> Ao: Estamos tratando de ver cuáles medidas corresponden a las de la tabla.

Nuevamente, la estrategia de comparar con sus propias medidas emergió. El docente se percató de esto y en varios equipos la sugirió (calcar el contorno de la mano en una hoja). Aunado a esa ayuda les entregó cintas métricas y reglas, acción que de alguna manera confirmó a los estudiantes que era necesario medir.

Un par de equipos no tomaron en cuenta la idea y midieron directamente sobre sus manos y estaturas con la cinta y registraron las medidas. En general, los estudiantes presentaron dificultades para medir, sobre todo, para identificar en dónde debían iniciar y terminar la medición, así como en el uso de la cinta métrica, por ende, aparecieron errores de medición.

El docente colaboró con los estudiantes en el proceso de medición, incluso se dejó medir, esa ayuda deja ver que el profesor permitió que los alumnos experimentaran sus propuestas. Hasta ese momento ningún equipo planteó otra manera para encontrar al ladrón, y el profesor se mantuvo en silencio observando el trabajo. Del trabajo de uno de los equipos surgió el procedimiento esperado, el docente pidió que lo compartieran frente al grupo.

Procedimiento esperado

Un par de alumnas pasaron al frente y escribieron una tabla con sus medidas: altura, largo de la mano y un número adicional (el cociente de su altura entre el largo de su mano), que explicaron de la siguiente forma:

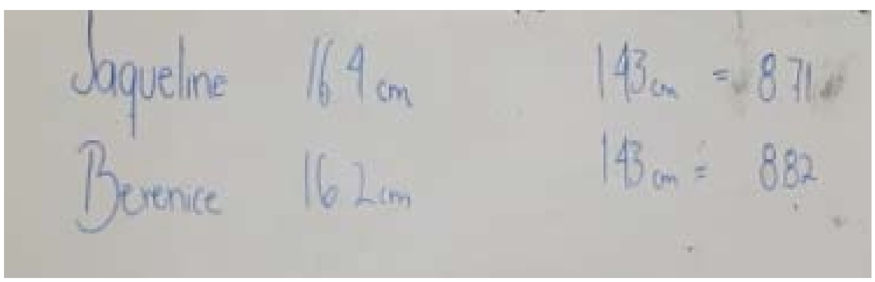


Figura 78. Producción de un equipo del procedimiento esperado en el pizarrón.

Pr: Ahora sí, las escuchamos. ¿Qué hicieron?
Jacqueline: Primero medimos nuestra mano, luego nuestra altura. Después dividimos 164 cm entre 1,43m.
Pr: ¿No al revés? 143 cm entre 16.4cm, mejor pongan todo en centímetros
Jacqueline: El resultado es 8.71 y vamos a hacer lo mismo con Berenice y da 8.82.
Pr: ¿Qué conclusión sacaron? ¿Los números se parecen?
Als: (Sí)
Pr: Sólo hay una décima de diferencia.
Berenice: Luego dividimos 8.71 entre la altura de los sospechosos.
Pr: Esa es la proporción que está diciendo Hiram. La mano cabe en el cuerpo humano, aproximadamente 8.8, según ellas. **¿Creen que esté bien?** (pregunta hacia todos). Porque ahorita ustedes lo van a ratificar cada uno con su estatura y vamos a ver si coinciden.
Y entonces, ellas sacaron la proporción de 8.8 cabe la mano en la estatura del cuerpo humano.
¿Y luego qué pasó?
Berenice: Dividimos a Max y nos dio 22.38, Nicole, 17.79, Sofía 20.68, Ana 16.07, Vicente 19.63 y de Rafael 18.94.

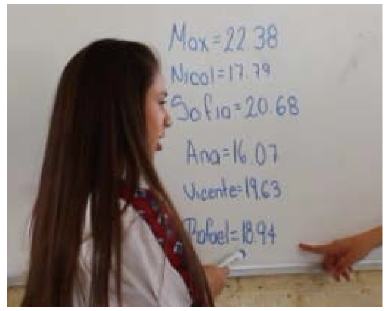


Figura 79. Obtención de las razones internas en el pizarrón.

Pr: Entonces, ¿quién se robó la pintura?
Jacqueline: Vicente
Pr: ¿Y Rafael no?
Als: Vicente se pasa un poco
Pr: Y a Rafael le faltan 6 centésimos Aquí sería Rafael según lo que hicieron ellas.
Les pregunto, **¿la proporción que obtuvieron ellas, será correcta o midieron mal?**

Las alumnas aplicaron el procedimiento correcto y poco esperado en el análisis previo. En ese equipo utilizaron sus medidas como modelo para obtener dos razones internas: 8.71 y 8.82 y después las aplicaron a las estaturas de los sospechosos del problema. Podríamos decir que nos encontrarnos aquí con un *alumno-experto* (Sensevy, 2011), el cual es capaz de aplicar las técnicas que conoce de manera eficaz ante un problema apelando al sentido.

No es fortuito que el docente haya solicitado al equipo que compartiera el procedimiento con el grupo. Primero, porque el resto de grupos se centró en la comparación de medidas (comparar sus propias medidas con las de los datos del problema) y avanzaban más despacio (factor tiempo) y segundo, porque el docente reconoció que era un mejor procedimiento (que el de medir) y decidió validarlo con el resto del grupo para que se convirtiera en el modelo para asegurar la solución.

En cuanto a la acción del docente, destaca que, durante la exposición de las alumnas, emergió la resolución acompañada. Sin embargo, no instauró de entrada ese modelo como el válido, más bien pidió justificar el procedimiento en equipos. Identificamos el esfuerzo del docente por sostener parcialmente la fase adidáctica y no guiar de manera tan directiva el proceso, pero las alumnas y el grupo en general siempre esperan su aprobación para validar.

Puesta en común con apoyo de otros equipos

El docente validó parcialmente el modelo de resolución propuesto por un equipo. En grupo, cada equipo propuso las medidas de un integrante, y en plenaria obtuvieron la razón interna (datos que el docente plasmó en el pizarrón).

En la imagen siguiente, aparecen los datos que transcribió el docente, los dos primeros son de las niñas del equipo que propuso el procedimiento adecuado. Enseguida, aparecen tres estudiantes más, miembros de distintos equipos. En la derecha aparece la razón interna para cada niño y en la parte de abajo tres de los sospechosos del problema a los cuales les aplicaron una de las razones. Se aprecian las razones y su variación que va desde 8.5 hasta 8.82 (La razón exacta que resuelve el problema es 9).

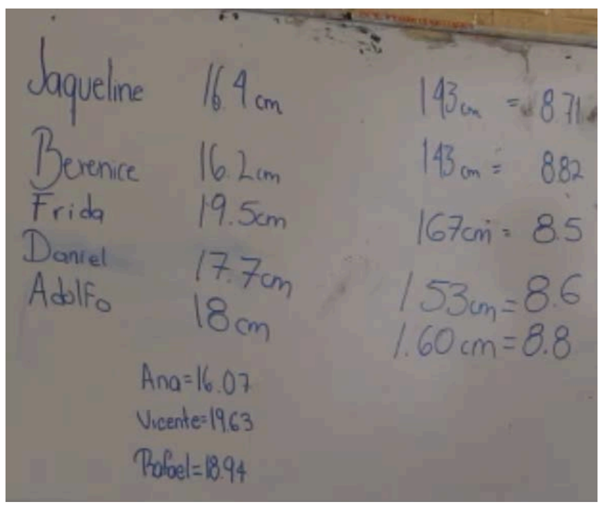


Figura 80. Datos que se obtuvieron a partir de las razones internas propuestas por el equipo.

Un reto para el docente fue la gestión de la búsqueda de ese resultado, en ningún momento les sugirió seleccionar la razón más cercana a 9, por el contrario, les pidió aplicar distintas razones para ver las variaciones de las alturas de los sospechosos (dato del problema). Los datos provenían de las medidas de los estudiantes y estos son variables, por lo tanto, el profesor no conocía las respuestas.

Las medidas y las razones se obtuvieron en ese momento, lo que requería claridad del profesor en los objetivos de la actividad. El docente invitó a los alumnos a validar el proceso con algunas preguntas sin decirles la respuesta o la razón exacta, esa forma de proceder podría inscribirse en las ayudas indirectas (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015) en donde el docente plantea ciertas preguntas o dan pistas a los alumnos sin comprometer procedimientos o resultados.

Actividad 2

II. **SEGUNDA PARTE**

El grupo de investigación observó que existía una relación sorprendente entre las medidas del cuerpo de los sospechosos. Es importante considerar que los cuerpos de las personas tienden a ser proporcionales, es decir, las relaciones entre las partes del cuerpo no varían demasiado.

2. Enseguida, se presentan las alturas de los sospechosos y un par de datos.

Sospechosos	Altura	Largo de la palma de la mano
Max	*195 cm*	21.6 cm
Nicole	*155 cm*	17.22cm
Sofía	*180 cm*	20cm
Ana	*140 cm*	15.55cm
Vicente	*171 cm*	19cm
Rafael	*165 cm*	18.3cm

2a) ¿Existirá una manera de calcular las longitudes probables de las palmas de las manos a partir de las alturas que se dan? Reflexionen en equipo, y calculen las longitudes de las palmas.

____

2b) ¿De qué forma? ______________________________

La **relación** entre la altura de una persona y el largo de su mano suele ser aproximadamente la misma entre las personas. Esta relación se puede expresar como un cociente:

$$\frac{Altura}{Largo\ de\ la\ mano} \text{ o bien } \frac{largo\ de\ la\ mano}{altura}$$

Estas relaciones también se llaman **razones** entre las partes del cuerpo humano.

2c) ¿Quién robó la pintura? Y ¿por qué? ____________Vicente______________________

Figura 81. Actividad 2. Situación 8.

Propósitos y comentarios previos

El sentido original de la actividad 2 es ayudar a los alumnos en caso de que en la primera actividad no hayan entendido el problema (se induce la idea de que hay una razón invariante). Dado que la actividad 1 sí fue resuelta de dos maneras, el sentido de esta cambia un poco. Para algunos será un repaso, una reiteración de lo ya visto. Para otros en cambio, quizá ofrece una segunda oportunidad para establecer la invariancia de las razones

En la actividad, se espera que los alumnos resuelvan un problema de valor faltante. Que anticipen que las alturas de los sospechosos son proporcionales a las medidas de las huellas y viceversa. Y que existe una razón que permite obtener la huella de la mano.

Cabe recordar, que en la actividad 1 sólo se ofrecen las alturas y la medida de la huella del ladrón, y los estudiantes se enfrentaron a un proceso de validación de resultados.

En esta segunda actividad se recuperan los datos de la primera parte y los procedimientos que los alumnos propusieron.

La introducción a la actividad se hace con un párrafo que tiene como finalidad aportar datos sobre lo que los alumnos han estado realizando, es decir, se trata de justificar el porqué de esas relaciones (altura y largo de la mano). La actividad se presenta como una tabla de variación proporcional en la cual reaparecen los datos iniciales de la situación y, además, se agregaron dos datos más: las huellas de Max y Ana. Con ello se pretende que los estudiantes encuentren al ladrón obteniendo las medidas faltantes con ayuda de la razón interna $\frac{altura}{largo\ de\ la\ mano} = 9$.

Pasamos de la primera parte en la cual las razones eran aproximadas, a una segunda parte, en la cual las medidas se obtuvieron con la razón interna 9. La presentación de la tabla plantea las siguientes posibilidades para los alumnos:

Sospechosos	**Altura**	**Largo de la palma de la mano**
Max	*195 cm*	21.6 cm
Nicole	*155 cm*	17.22cm
Sofía	*180 cm*	20cm
Ana	*140 cm*	15.55cm
Vicente	*171 cm*	19cm
Rafael	*165 cm*	18.3cm

Figura 82. Tabla de sospechosos. Actividad 2. Situación 8.

A) Obtener la razón "$\frac{altura}{largo\ de\ la\ mano} = 9$". Dicho resultado se puede obtener con las medidas de los dos sospechosos (Max y Ana). Se esperaría que los alumnos dividan entre 9 las alturas restantes para obtener las medidas faltantes. Aquí convivirían dos procesos: la obtención de la razón y su aplicación.

B) Obtener la razón $\frac{largo\ de\ la\ mano}{altura} = \frac{1}{9}$. Este procedimiento da lugar a complicaciones de cálculo porque el cociente de $\frac{1}{9}$ es un decimal infinito, es poco probable, pero podría emerger por lo que he visto en situaciones pasadas.

C) Una tercera posibilidad es que los estudiantes apliquen una regla de tres, aunque la considero poco probable porque hasta el momento no ha emergido.

Análisis a posteriori

La introducción a la actividad se hizo con la lectura y con algunas preguntas que hizo el profesor que apelan a una noción cualitativa de razón invariante:

> Pr: ¿Qué pasa si vemos a una persona con una manota demasiado grande respecto de su cuerpo?
> Ao: Decimos que está desproporcionado.
> Ao: Deforme…

<u>Trabajo en equipos:</u>

Se conformaron cuatro equipos de trabajo. Al inicio, dos de ellos propusieron dividir la altura entre el largo de la mano. Enseguida, surgió una dificultad esperada en el análisis a priori. Los estudiantes no reconocieron en un primer momento para qué debían utilizar el número obtenido, es decir, dicho número parecía carecer de sentido. De ahí que dividieron varias veces o incluso invirtieron el orden y obtuvieron la otra razón prevista: largo de la mano/altura.

> Silverio: ¿Aquí se divide? ¿no? (dirigiéndose al docente y señalando la tabla).
> Pr: No lo sé, ustedes vean.
> Hiram: Es Lógico que se divide…
> Observador: ¿Por qué es lógico?
> Hi: Yo pienso que se divide esto (la altura) entre esto (largo de la mano).
> Obs: ¿y luego?
> Je: (…)
> Jesús: Yo digo que 21.6cm entre 155cm
> (El docente se acercó al equipo para ver el trabajo)
> Hiram: 155 entre 15.40, ¿no?
> Pr: ¿Cuánto les dio?
> Als: 9.003
> Pr: ¿y eso para qué lo hicieron? ¿para qué dividieron?
> Hiram: yo, yo, para sumárselo a esto… (El profesor corta la participación para pedirles que escriban en su fotocopia su procedimiento).
> Pr: Pero escriban en su hoja, no tienen orden. ¿Para que hicieron eso?
> Santiago: Para ver cuánto cabe aquí (señala la altura).

A partir de la intervención de Santiago y con la ayuda del maestro, recuperan el sentido del cociente 9:

> (Los alumnos ven fijamente al docente, parecen esperar la aprobación)
> Pr: Se supone que ustedes quieren saber el largo de la mano y ustedes lo que hicieron fue dividir 195 entre 21.6. Quiere decir que el largo de la mano ¿cuántas veces cabe en el cuerpo?
> Silverio: Nueve
> Pr: ¿En ambos casos? (señala al siguiente ladrón) Sigan
> Silverio: La mano cabe 9 veces en el cuerpo, es lo que capté más o menos (ríe).
> Pr: A ver, multiplica 9.002 por 195
> Daniel: mmm, 195 entre 9.

<u>En otro equipo:</u>

> Jacqueline: Vamos a dividir
> Berenice: La medida de la mano y la altura. Primero vamos a sacar la medida de la mano y a dividirla entre 195 para ver si da 21.6.
> (El docente se acercó con el equipo)
> Pr: A ver, este 9.002 (señalando la razón que obtuvo el equipo). Quiere decir que la palma de la mano cabe 9.002 veces en la altura.
> Als: ¡Ahhh!
> Berenice: Entonces 140 entre 15.55

Este equipo conformado por las alumnas que mostraron el modelo esperado en la actividad 1 propusieron la misma división (altura/palma de la mano).

<u>Puesta en común</u>

En la puesta en común, un equipo pasó al frente para explicar sus procedimientos. Los alumnos dividieron las alturas entre la razón 9.02. Fue difícil para los alumnos explicar qué habían hecho con el 9.02 y cómo habían procedido.

> Pr: ¿Qué problema tuvieron? Casi todos, escuchen bien, casi todos dijeron que tenían que dividir la altura entre la palma de la mano. Eso está bien, el problema es que no sabían interpretar eso. Si yo mido 1.80 y mi palma mide 20cm, si divido 180 entre 20 me da 9, eso ¿qué significa?
>
> Hiram: Que cabe 9 veces.
>
> Pr: Que mi mano cabe 9 veces en mi altura. Cuando ya tienen dos resultados así (señalando los dos ejemplos) ya verifican que sí existe una relación entre la palma de la mano y la altura y si tuvieran un tercer dato también habría que corroborar que así sea, qué tal que aquí hay un gigantón o unas manotas.

El docente reconoció la dificultad que tuvieron los alumnos y los cuestionó sobre la otra posibilidad (palma de la mano/altura). Los alumnos obtuvieron 0,11 en todos los casos.

Por lo tanto, tenían dos razones, la razón inicial 9 y ahora 0.11. El docente preguntó abiertamente el significado de ambos valores, y un alumno logró explicarlas adecuadamente (como se aprecia en el registro siguiente en la participación de Hiram). A partir de esa buena participación (selección de participaciones), el profesor llevó a los alumnos a preguntarse cómo habrían utilizado el 0.11 e intentó validarlo con todos los datos.

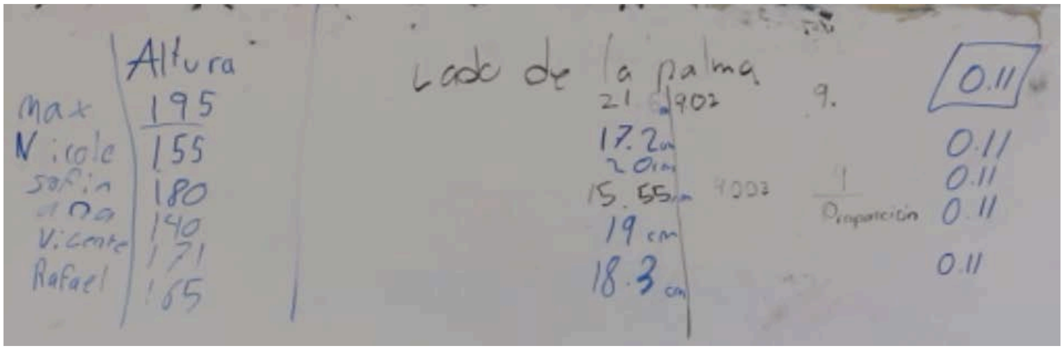


Figura 83. Obtención de las medidas del largo de las palmas.

> Pr: Me llama la atención que, sí pueden sacar la proporción, pero ya no saben qué hacer con ella, inclusive les pregunté a ustedes (dirigiéndose al equipo) si era 21.6 entre 195 o 195 entre 21.6 y corrigieron. ¿Y por qué no de la otra forma? A ver, todos van a dividir 21.6 entre 195
> Berenice: Sale 0.11
> Pr: ¿Qué significa? ¿Cuál es la interpretación en lenguaje normal?
> <u>Hiram: ¡Yo! La altura mide 0.11 veces en la palma de la mano</u>
> Pr: bueno, esa sería la interpretación, tienes una fracción 0.11 que cabe en la palma de la mano. Entonces, ¿qué harías para obtener las demás medidas?
> Hiram: Multiplicar
> Pr: ¿Multiplicar qué?
> El 0,11 me está representando la palma de la mano de la altura. Me representa 0.11 de la altura.
> Hiram: El 0,11 por la altura.
> Pr: ¡Claro! Y deben obtener exactamente lo mismo

En efecto, era previsible ya que se busca que establezcan la invariancia de la razón (y no sólo que identifiquen la razón). En el registro, cuando el profesor subraya que el significado es que la mano cabe 9 veces en la altura, de manera implícita, expresa que la razón no varía: es 9 veces siempre. En esta parte el profesor está claramente atento al sentido, incluso de las dos razones posibles.

<u>Pregunta 2b</u>

En cuanto a la pregunta 2b el docente solicitó que los alumnos escribieran en su cuaderno cómo habían obtenido los valores. Los alumnos transcribieron lo que se estuvo haciendo en equipos y que el docente trabajó en cada equipo. El proceso se institucionalizó (Brousseau, 2007).

Hiram: Sacamos la proporcionalidad y luego dividir entre la altura.

Pregunta 2c ¿Quién es el ladrón?

En esta pregunta directa, varios alumnos respondieron que el culpable era Rafael (Vicente es el culpable). A pesar de tener la tabla los alumnos no repararon en eso y el docente lo validó.

Actividad 3

III. TERCERA PARTE

3a) A continuación, se presenta una tabla de los sospechosos. Trabajo en equipo.
Copien la columna que corresponde al largo de la mano (realizado en la actividad anterior).
Completen las medidas para el **largo del brazo** de cada sospechoso.

Existe una relación entre estas partes del cuerpo (Lean el recuadro debajo de la tabla).

Sospechosos	Altura	Largo del brazo	Largo de la mano
Max	*195 cm*	64.8cm	21.6 cm
Nicole	*155 cm*	51.6cm	17.22cm
Sofía	*180 cm*	60cm	20cm
Ana	*140 cm*	46.65cm	15.55cm
Vicente	*171 cm*	57 cm	19cm
Rafael	*165 cm*	54.9cm	18.3cm

Datos curiosos
Holmes utilizó los estudios realizados por Leonardo da Vinci como ayuda para resolver el misterio.
Las proporciones en el cuerpo son armónicas. "La palma de la mano cabe tres veces en el brazo (desde la muñeca hasta el hombro) y el brazo tres veces en la altura"

3b) ¿Qué otras razones en el cuerpo podrían establecerse con los estudios de da Vinci?

Figura 84. Actividad 3. Situación 8.

Propósitos y comentarios previos

Se espera que los alumnos confirmen la conservación de las razones internas al introducir otra parte del cuerpo y que resuelvan un problema del tipo "valor faltante". En esta actividad se recuperan las medidas de las tablas de las primeras dos fases. Se agregó una columna con la medida del largo del brazo (hombro a muñeca).

En cuanto a posibles procedimientos de alumnos se prevé:

- El caso quizás más común, que los alumnos con el ejemplo dado dividan la altura entre el largo del brazo y que obtengan la razón=3. De ahí, dividirían todas las alturas entre 3.

- Que obtengan la razón: altura/largo del brazo.
- Que obtengan la razón: largo del brazo/palma de la mano o viceversa y que encuentren la razón=3. De ahí que multipliquen las medidas de las palmas de las manos por 3.

En esta tabla sólo se dio una medida, lo que podría dificultar validar la razón; (una posible debilidad de la actividad). Sin embargo, se incluyó un recuadro (Datos curiosos) con información muy explícita acerca de las razones en juego y, además, los alumnos podrían medir de nuevo sus cuerpos para validar la razón existente entre el brazo y la palma de la mano.

Para algunos alumnos, está actividad será un repaso, para otros, una tercera (y última) oportunidad de apropiarse de esta noción de razón invariante y la posibilidad que ofrece de encontrar medidas que no se conocen.

Análisis a posteriori

Al inicio de la actividad sucedió lo previsto en el análisis previo. La primera propuesta casi inmediata de los alumnos fue dividir (altura entre largo del brazo). El docente puso en duda la invariancia de la razón con un solo dato en la tabla. Preguntó a los alumnos qué hacer para justificar y al no tener respuesta inmediata, les ayudó recordando lo que habían hecho en la actividad 1 de la situación (medirse ellos mismos).

En equipos, los alumnos midieron sus brazos mientras el docente observaba. En una de las interacciones de un alumno con el docente, se deja ver el apoyo del docente a través de preguntas que no resuelven el problema, "son ayudas indirectas que permiten continuar la búsqueda" (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015, p.721).

> Hiram: Maestro ¡ya lo tenemos!
> Pr: A ver, ¿cómo?
> Hi: Dividimos (largo del brazo entre palma de la mano) y luego multiplicamos.
> Pr: Ustedes dividieron esto entre esto y les dio 3 ¿y luego qué?
> Pr: A ver no, esos valores no tienen nada que ver.
> Hi: Pero, ¿por qué? Es 3 al dividir
> Pr: y ¿cómo sabes que ese valor sirve para todos? ¿cómo lo validas? Si nada más tienes un ejemplo. ¿De dónde puedes sacar más ejemplos?
> Hi: (…)
> Pr: ¡De tu brazo, de él y del de ellas! Porque luego la constitución de las mujeres es diferente a la de los hombres.
> Pr: Su teoría es que es 3, pero sólo tienes un caso.

El docente insistió en la validación de la razón en juego. Aunque los alumnos ya tenían experiencia previa de la primera actividad, de inicio no consideraron necesario esa justificación, más bien dieron por hecho que si los datos estaban en el problema eran suficientes. De ahí, una transformación del docente en la actividad. Su insistencia en la validación propició que los estudiantes nuevamente salieran de los datos del problema y midieran sus cuerpos. Destaca que no hubo una puesta en común general. El docente validó los procedimientos y las respuestas en cada equipo.

<u>Pregunta 3b</u>

¿Qué otras razones en el cuerpo podrían establecerse con los estudios de Da Vinci?

En esa pregunta, un alumno sugirió que una relación posible sería entre la altura y los pies. El docente pidió a todos que dividieran sus estaturas entre la medida de sus pies y transcribió las razones obtenidas. Dichas razones oscilaban alrededor de 6 con una gama amplia de decimales. Nuevamente, el problema de validar una razón se hizo presente pero los alumnos de inmediato propusieron que con más ejemplos:

> Pr: ¿Cómo vamos a determinar con cuál se aproxima? Yo creo que el valor es 6.3 Pero el problema con el pie es que se ve afectado en su crecimiento por el calzado

Actividad 4

IV. CUARTA PARTE

4. Imaginen que se convierten en investigadores y que en su salón estudian el método utilizado por Holmes.

En equipos, completen la siguiente tabla:

4a) Obtengan el valor que falta para Alejandro.
4b) Llenen la tabla con sus propias medidas, obtengan los resultados y comparen.

Integrante	Altura (cm)	Largo del brazo (cm)	Largo de la mano	$\frac{Altura}{Largo\ de\ la\ mano}$
Alejandro	165 cm	55cm	18.2 cm	

4c) ¿La razón $\frac{Altura}{Largo\ de\ la\ mano}$ coincide en todos los casos? _______________

4d) ¿Cuál es el valor más grande y más pequeño? ______________________________

4e) ¿Cómo podrías justificar la variación en la razón?

Figura 85. Actividad 4. Situación 8.

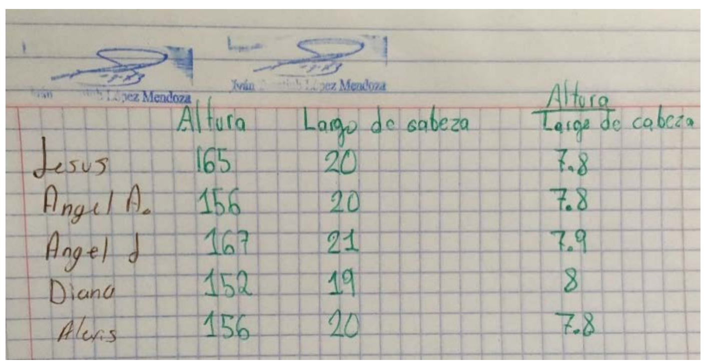
Propósitos y comentarios previos

Se pretende que los alumnos afirmen la noción de razón interna invariante entre partes del cuerpo humano. En esta actividad se recuperan algunas de las estrategias que los alumnos habrían implementado en las actividades anteriores. Los problemas de medición seguramente aparecerán.

Análisis a posteriori

En términos generales, en esta actividad se repitió lo que se hizo en las primeras actividades. Se llevó a cabo en los equipos instalados y lo que resaltó fue que en la mayoría de éstos la razón (altura/palma de la mano) se aproximó mucho a 9.

El profesor aprovechó para institucionalizar ese valor y propuso que probaran con otras partes del cuerpo. En la foto del cuaderno de Silverio (Figura 48), se aprecia una de las consignas del maestro en la cual los alumnos midieron otras partes del cuerpo e intentaron obtener una razón, en este caso (altura/largo del rostro).



	Altura	Largo de cabeza	Altura/Largo de cabeza
Jesus	165	20	7.8
Angel A.	156	20	7.8
Angel J	167	21	7.9
Diana	152	19	8
Alexis	156	20	7.8

Figura 86. Datos de un equipo y obtención de razones internas.

Comentarios

La situación

La actividad inicial que plantea el robo de la pintura causó los efectos esperados en el análisis a priori, esto es, propició un proceso de devolución en los alumnos, quizás porque se rompió el contrato y tuvieron que buscar estrategias fuera de los datos del problema.

El hecho de que el problema implicara recuperar medidas de sus cuerpos, aunado a un contexto con una meta que pudo resultarles interesante, la de identificar al ladrón a partir de un trabajo con las medidas, parece haber resultado una buena combinación de factores que redundó en una participación de los alumnos más nutrida de lo usual, y en una gestión del docente más paciente, dando mayores oportunidades al trabajo autónomo de los alumnos.

También pudo influir el hecho de que esta situación, como en la anterior, no se pretendía la construcción de conocimientos muy específicos, como en las demás situaciones, sino la *aplicación* de los conocimientos elaborados en las situaciones anteriores. Aclaro que tal aplicación no es simple, pues no estamos en presencia de problemas estereotipados que apelan a una aplicación mecánica, implica en realidad una reelaboración de las nociones.

La gestión

El docente sostuvo de manera importante la fase adidáctica de las actividades y además de manera reiterada solicitaba “sustentar” los resultados o las propuestas de los alumnos. Esta actividad podría considerarse como una norma matemática de trabajo (Sadovsky, 2004) del contrato didáctico del docente.

Respecto de la gestión del conocimiento, identifico que el docente otorgó ayudas (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015) indirectas y en algunos momentos directas en la resolución de las tareas. Resalta que en esta situación permitió que los estudiantes trabajaran solos y en equipos, los guio sin expresar las respuestas, e insistió en que los alumnos justificaran las respuestas, en particular, en que se explicara el sentido de las razones que se calcularon. En síntesis, el profesor mostró “reticencia”, en el sentido positivo, esto es, evitar dar demasiada información a los estudiantes, a la vez que apoyarlos para que reflexionen sobre lo que necesitaban en el problema (Sensevy, 2011).

Los alumnos

Respecto de las razones internas (altura/palma, brazo/mano) los alumnos las obtuvieron con cierta facilidad; no obstante, en varios momentos perdían el rumbo para aplicarlas en los problemas. Daba la impresión que ya tenían el valor de la razón, pero no sabían cómo aplicarlo, es decir, las dificultades se centraron en la conservación de la invariancia de la razón interna con la finalidad de calcular medidas.

CAPÍTULO 3. CONCLUSIONES

Parto de que las propuestas didácticas no entran al aula exactamente como se diseñaron, son transformadas por los docentes, desde sus propias concepciones de lo que son las matemáticas, de lo que deben saber los estudiantes y de cómo lo pueden aprender para poderlas usar, y así apropiárselas (Perrin Glorian, 2011), (Block, et al, 2007). Me interesó conocer, en el caso de una propuesta para la enseñanza de la multiplicación de fracciones portadora de algunas innovaciones, las transformaciones realizadas por un docente al implementarla. Me pregunté ¿Qué se transforma y qué no? ¿De qué manera? ¿Por qué motivos? ¿En qué medida permanece, en lo esencial, el sentido previsto de los conocimientos? Me interesó también identificar indicios de si la propuesta implementada resultaba adecuada para propiciar los aprendizajes previstos. A continuación, presento sintéticamente lo que encontré.

1. Las transformaciones al texto y las concepciones del profesor.

El docente, al interpretar la propuesta, no conservó su sentido global ni su intención didáctica. La transformó de manera importante, omitiendo partes, agregando otras, le asignó nuevas funciones a sus actividades (en general, la de practicar una técnica), y les asoció formas específicas de resolución (usar un algoritmo). En resumen, puede decirse que creó un texto distinto al concebido por los autores.

Por lo tanto, el propósito de elaborar un sentido para la multiplicación de fracciones en el marco de la proporcionalidad, y desarrollar los algoritmos a partir de los procedimientos menos sistemáticos de los alumnos, no se cumplió. En su lugar, prevaleció el de aplicar los algoritmos de la multiplicación y de la división a distintos problemas, algunos de proporcionalidad. Esto fue notorio en la forma de gestionar prácticamente todas las actividades.

En la entrevista final, el profesor hizo explícito que para él la propuesta se dividía en dos partes, en la primera, los alumnos aprenderían las técnicas para multiplicar fracciones, y en la segunda, los estudiantes *aplicarían* esa “herramienta” para resolver situaciones de proporcionalidad:

> Profesor: Yo casi estoy seguro que los alumnos vieron todo englobado como si fuera un solo tema. No creo que hayan visto la diferencia entre uno y otro. Ya vieron lo que es la aplicación de las fracciones en la proporcionalidad.

> Entrevistador: ¿Y crees que se logró?
>
> Pr: Sí, cuando yo menciono que sirvió nada más como una herramienta, ese creo que es el enlace. Ya vieron la aplicación de lo que son las fracciones en lo que es proporcionalidad, a lo mejor hay otros temas en los que se pueden aplicar porque sí los hay, pero para proporcionalidad su herramienta si fue la primera parte (Comunicación personal, julio 2017).

Es decir, identificó bien la presencia de un interjuego entre dos conocimientos, fracciones y proporcionalidad, pero la asumió como una de tantas aplicaciones de las fracciones. No mencionó la intención, –de los autores– de construir el algoritmo a través de las relaciones de proporcionalidad. Se vislumbran así elementos de su *epistemología espontánea* sobre la noción, en la “que utiliza todo tipo de conocimientos, métodos y creencias sobre la manera de encontrar, aprender u organizar un saber” (Brousseau, 2006, p. 2).

Robert (2007) ubica esta epistemología en la componente personal del docente. Esta autora también destaca otros factores que ayudan a explicar cierta resistencia para cambiar ciertas prácticas, y que en este caso pueden estar detrás del hecho de que el docente interprete la propuesta de cierta manera: se refiere concretamente a la necesidad de confort (es decir, de una especie de bienestar para poder desempeñar el trabajo) y a los riesgos que se toman ante otras maneras de hacer las cosas.

> E: ¿Qué agregarías a las situaciones?
>
> Pr: A veces hacían falta, sobre todo en la primera parte, más ejercicios en donde ellos pudieran poner en práctica lo aprendido, nada más, esa es la dificultad que encontré, pero bueno, esa podría ser de acuerdo a mi estilo, podría ser una visión muy de maestro clásico o de maestro a la antigua que quiere que el alumno haga ejercicios, a mí sí me gusta en lo personal, a lo mejor porque yo aprendí así.

En su respuesta, el profesor deja ver que su perspectiva didáctica está muy vinculada con el trabajo algorítmico y su aplicación en la resolución de problemas. Dicha perspectiva, la pude constatar también en los cuadernos de los estudiantes, en los que encontré una variedad muy amplia de ejercicios algorítmicos acompañados de problemas resueltos con esos procedimientos.

Resulta significativo que en las dos últimas situaciones, sobre todo en la última (el del robo de la pintura), que la participación del docente se apegara más a lo esperado, en particular, que diera un poco más lugar al trabajo autónomo de los alumnos. Podemos conjeturar que, además de las características ya señaladas de esa situación que la hicieron motivante para los alumnos (la novedad de tener que buscar datos fuera del texto, en las medidas del propio cuerpo, la trama relacionada con el robo y la meta de identificar al ladrón), una posible característica que facilitó la gestión es que se trata de una situación de *aplicación*, y no de elaboración de nuevos conocimientos. Aunque la aplicación no sea mecánica –implica en realidad una reelaboración de nociones–, es posible, que dicha función se acomode más fácilmente a la que el profesor da a los problemas:

> E: En cuánto a las últimas dos situaciones ¿Crees que cualquier maestro lo puede aplicar?
>
> Pr: Yo creo que sí tiene que ver los estudios del maestro, su bagaje que ha ido adquiriendo, ¿cómo lo ve? A mí si me había gustado más la situación de la bandera, yo no sabía qué venía adelante. Cuando me lo muestran, empiezo a ver lo de la proporción aplicada al contexto del arte. La verdad me gustó. Sin embargo, aunque me mostró otra perspectiva del tema, me pareció bien y cualquier maestro puede aplicarlo.

Es importante decir, por último, que entre los aspectos de la educación matemática valorados por el docente, pudo verse que se incluyen, además de las destrezas algorítmicas, otras capacidades, en particular, la de argumentar las respuestas y la de usar procedimientos alternos al algoritmo usual, presididos por el sentido común o la lógica, en circunstancias en las que son a todas luces más económicos que los convencionales (por ejemplo, dividir una fracción $\frac{a}{b}$ entre 2 dividiendo su numerador, o buscando la fracción que sumada dos veces arroja $\frac{a}{b}$). Estos aspectos valorados por él, dieron lugar a que identificara, comprendiera, valorara, y tratara de promover algunos de los procedimientos propiciados en la propuesta (por ejemplo, una forma de dividir fracciones distinta a la del algoritmo usual, más próxima al sentido común). Sin embargo, se trató de casos aislados, que no llegaron a modificar sustancialmente la interpretación global, pero sí imprimieron ciertas tensiones en el trabajo del docente. Dar cuenta de estas tensiones, de acuerdo con Sadovsky (2004), es una forma de entender las prácticas docentes.

Tensión entre la preeminencia de los algoritmos y la conciencia de la importancia del sentido. A lo largo de la experiencia con la secuencia, el docente mostró su interés a la importancia del sentido y a la lógica de los estudiantes ante las diversas actividades que se plantearon. No obstante, esta característica convivió con su interés hacia el conocimiento y dominio de las técnicas[44], en particular de la multiplicación de fracciones, que desde la primera situación ya era del dominio de la mayoría de estudiantes.

[44] En los programas de 1993 se impulsó el enfoque didáctico en el cual resolver problemas era fuente del aprendizaje. “En las posteriores actualizaciones a los programas, los planteamientos no fueron, en cambio, más precisos. La resolución de problemas siguió apareciendo como una actividad central, pero no así la idea de aprender matemáticas al resolver problemas” (Block, 2018, p. 296).

Tensión entre la preocupación por la argumentación y la resolución acompañada. En las diferentes situaciones, el docente acompañó el trabajo de los alumnos de manera muy directiva; no obstante, en algunos momentos favoreció el trabajo autónomo y, sobre todo, solicitó de manera recurrente la justificación de las respuestas, aunque él guiara las puestas en común.

Tensión entre el orden de la clase y el trabajo autónomo. En prácticamente todas las situaciones el docente privilegió el trabajo individual, con momentos reducidos de trabajo autónomo. Sin embargo, en algunas sesiones, favoreció el trabajo adidáctico en equipos, solicitando continuamente la justificación de sus procedimientos, lo que muestra su interés para que los alumnos reconocieran el sentido en algunas actividades.

2. La planeación, el trabajo documental, se origina la orientación.

La manera específica para dar vida a la propuesta en el salón de clase, comienza desde el trabajo documental, en el que "el profesor interactúa con un conjunto de recursos, trabajando con ellos, adaptándolos, revisándolos y reorganizándolos a lo largo de las clases, articulando estrechamente concepción y puesta en marcha" (Sensevy, 2011, p.187). Desde el momento en que el profesor interpreta, planea, imagina, y prevé interactuando con los materiales, se define en buena medida la orientación que adquirirán sus acciones en clase, es decir, anticipa sus intenciones. Sensevy (2011), plantea a manera de hipótesis que las anticipaciones de los docentes están muy relacionadas con la calidad de la enseñanza:

> La calidad de una enseñanza (…). Supone de inicio, una forma de reconocimiento por el docente en la práctica de lo que él esperaba (…) Una forma de reconocimiento de lo que se esperaba, significa en particular poder anticipar de manera pertinente en las producciones de los alumnos, en sus procesos, en las necesidades que encontrará (…) anticipar de manera pertinente sobre la lógica de su práctica. (Sensevy, 2011, p. 258).

Al respecto, resulta significativo que el profesor no consideró necesario revisar las fichas que elaboré ex profeso para comunicarle, entre otras cosas, los propósitos de cada lección y de cada actividad. Para él, las actividades son tan fluidas que sólo revisó la ficha de la primera situación:

> E: ¿te fueron de utilidad las fichas pedagógicas?
>
> Pr: Sí, inclusive cuando tú me las mandabas, las leí al principio, pero cuando empezaba a hacer la aplicación a mí me parecía que ni siquiera era necesario, que yo lo podía aplicar sin haber leído previamente, era muy fluido. Salvo que a lo mejor yo agregaba algo muy pequeño, etc. Pero me pareció de fácil aplicación (Comunicación personal, julio 2017).

El docente prescindió de las fichas porque las actividades de las situaciones le parecieron fluidas, ¿a qué se refiere con fluidas? En sus términos, de fácil aplicación. Esta consideración, aunada al hecho de en casi todas las sesiones, su acercamiento a las situaciones fue al momento de su implementación, me permite conjeturar que su experiencia en el grado y su conocimiento del contenido le otorgan una confianza muy grande en sus saberes docentes (Mercado, 2002). ¿Esta confianza funciona entonces, en ciertos casos, en detrimento de la posibilidad de recibir ciertas señales que podrían oponerse en algún aspecto a sus ideas previas, orientar un cambio? Es posible. Por otra parte, si el profesor no detecta fisuras, en su hacer, ¿por qué tendría que estar atento a esas señales?

En esta experiencia, se vio que la ausencia de una expectativa específica por parte del profesor, desde la planeación, respecto de dos hechos claves, tuvo un efecto en la gestión. La primera ausencia, fue no prever la posibilidad de que ocurriera el error aditivo, lo cual hizo que dicho error fuera ignorado en un primer momento, y, dada su persistencia, se atribuyera a la falta de atención o al poco trabajo desarrollado por los estudiantes. Por ejemplo, en la actividad del Partenón, de la situación 7, exclama:

> Pr: ¡Es como la tercera vez que cometen ese error! ¡A ver!, observen lo siguiente, antes de que ustedes tomen la decisión de cómo obtenerlo. Aquí, nosotros teníamos 5.5cm de altura y aquí tenemos 3.5cm (señalando n). A partir de ello, obtuvimos una razón, esa razón ¿cómo la obtuvimos? Dividimos el total entre esta cantidad, ¿para qué lo hicimos, esa división? ¿Para qué lo hicimos? Para ver esta cantidad (señala n), esta cantidad que está aquí, para ver cuánto representa, cuántas veces cabe en el total (señala 5.5cm).
> Y entonces se hace esta división (señala 5.5cm/3.5cm) y vimos que cabe 1.57 veces.

La segunda ausencia fue no identificar la posibilidad, y el interés, de desarrollar procedimientos alternos al algoritmo para multiplicar, lo que orientó a dar entrada inmediata a los procedimientos más avanzados, tales como el uso del operador multiplicativo decimal, y la aplicación de los algoritmos para multiplicar.

3. **Formas de imponer un punto de vista sobre las actividades del libro.**

El docente utilizó diversos recursos para reorientar el sentido de las actividades de la propuesta. Identifiqué dos muy frecuentes que llamé “resolución acompañada”, y selección oportunista de participaciones.

Resolución acompañada: Guiar al alumno. Me refiero a la conducción de manera muy directiva de la resolución de los problemas. El docente acudió a este recurso a lo largo de toda la aplicación de la secuencia. En el ejemplo que recupero enseguida (la situación

2), el profesor ofreció una guía para resolver el problema. En esta actividad se plantea el problema de un tren que da vueltas en un circuito de 60km y se pregunta ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 2 ¾ de vuelta? El docente inmediatamente expresó a los alumnos que se apoyaran en la pregunta 1d, la cual contiene la forma de resolver a la que se quiere llegar:

> Pr: La clave del ejercicio es fijarnos en el inciso 1d. ¿Con qué operación se calcula la distancia en cinco vueltas?
> Als: multiplicación
> Pr: ¿cambiará de alguna manera la operación si ahora en lugar de calcular la distancia de cinco vueltas es $\frac{2}{5}$ de vuelta?

Con ello, el profesor evitó que los alumnos aplicaran la "fracción de" y los llevó directamente a aplicar el algoritmo para multiplicar.

Selección oportunista de participaciones: el alumno *expertise*. Con este recurso, el docente tendió a permitir que se hicieran públicas únicamente ciertas respuestas de los alumnos, las que él esperaba. Esa acción reorientó algunas sesiones, en ocasiones, omitiendo procesos que coadyuvarían en la construcción de un significado importante, y en otras, alejándose del propósito de la situación y con ello, privilegiando cierta tendencia a la algoritmización de la enseñanza (Sensevy, 2011, p.324). Para ilustrarlo, recordemos un episodio de la primera actividad de la situación 5 "banderas a escala" En esa situación, se pretendía poner en evidencia el error aditivo y, después, introducir el valor unitario mediante la conservación de razones internas. Sucedió que un alumno experto obtuvo el factor de escala 2.5. El docente validó el resultado y enseguida lo institucionalizó para el grupo. Dicha acción cambió el sentido de la situación.

4. Un texto escasamente comunicativo con el docente.

Un reto en la comunicación de una propuesta didáctica radica en transmitir lo fundamental, lo que debería permanecer, considerando que el texto será necesariamente modificado y/o reelaborado a partir de la interpretación del docente (Perrin-Glorian, 2011). El reto aumenta por la necesidad de cumplir con los atributos de brevedad y claridad requeridos en los textos que serán leídos con muy poco tiempo disponible (a veces, minutos antes de iniciar la clase).

Considerando lo que ocurrió en la experiencia, y que también el profesor manifestó no sentir necesidad de leer las fichas que le preparé ex profeso (después de leer las primeras), puede concluirse que la comunicación con él fue deficiente en aspectos fundamentales: primero, en la transmisión de los propósitos didácticos de las lecciones y de ciertas actividades: ¿qué se espera y qué no?[45]; en segundo lugar, en la importancia de la reticencia (Sensevy, 2011), es decir, de no dar información antes de tiempo, porque vendría después (los algoritmos, principalmente), y en tercer lugar, en la necesidad de prever la aparición de ciertos errores, y de buscar la manera de hacerlos visibles para los alumnos (es el caso del error aditivo).

5. Los alumnos.

Identifiqué alumnos que gozan de un cierto prestigio en la clase y tienen un buen dominio de las técnicas, son los alumnos con *expertise* (Sensevy, 2011), que reorientaron varias sesiones a partir de sus participaciones validadas por el profesor. Sus intervenciones dan cuenta de una cierta tendencia a la aplicación de algoritmos. En el otro extremo, identifiqué varios alumnos que se mostraban muy distantes de la posibilidad de poner en juego los recursos esperados en clase.

Fue interesante observar, sobre todo en las resoluciones individuales expresadas en los cuadernos, que además de la relación de los alumnos con la propuesta fuertemente mediada por el profesor, ocurría otro diálogo paralelo, directo, de los alumnos con la secuencia, que se dejó ver en el uso de algunos procedimientos, distintos a los validados en clase, más intuitivos y favorecidos desde el texto. Cabe señalar, que en otras ocasiones, al contrario, los alumnos mostraron que su arraigada visión algorítmica se revelaba incluso contra los intentos esporádicos del maestro por apelar a la intuición, al sentido común.

Al final del camino, considero que si bien definitivamente no fue posible dar lugar a la construcción colectiva del conocimiento sobre multiplicación de fracciones prevista en el texto, es muy posible que, mediante los problemas re funcionalizados como de aplicación, y mediante los procedimientos de resolución alternos que lograron sobrevivir, el texto haya podido aportar, tanto a los alumnos como al docente, cierto enriquecimiento de los significados que para ellos tiene esta operación.

6. Sobre la generalización de los resultados

Es importante recordar los límites del presente estudio en cuando a su posibilidad de generalizar los resultados: analicé las clases de un solo profesor con formación de

[45] Sobre todo, cuando se plantea un ejercicio y no se espera que se resuelva de la manera acostumbrada.

ingeniero, quien implementó la propuesta en condiciones relativamente difíciles (poco tiempo para conocer la propuesta, presión del tiempo, clima poco favorable); sin embargo, el profesor tuvo disposición y motivación para participar en el estudio. En la entrevista final, expresó que se sentía a gusto con los resultados obtenidos de la aplicación de las distintas situaciones.

No pretendo de ninguna manera, por lo tanto, dar a estos resultados el carácter de tendencia general en los profesores de secundaria. Me propuse estudiar la relación de los profesores con las propuestas didácticas mediante un estudio cualitativo de casos, y encontré que, si bien hay una influencia mutua, la influencia de la perspectiva didáctica previa del profesor es determinante. Este resultado confirma los de otros estudios, en los que se analizan clases de disciplinas específicas, en particular clases de matemáticas (Rebolledo y Torres, 2019., Weiss, et al., 2019 en proceso), así como de estudios más generales sobre la práctica docente (Mercado y Rockwell, 1988, Mercado 2002), lo que permite conjeturar que se trata de una tendencia.

7. Comentario final y preguntas que se abren.

De acuerdo con Sensevy (2011), "comprender la acción de alguien, significa en particular comprender sus intenciones" (p. 188). Estos términos son importantes en este trabajo de investigación, ya que el análisis de las transformaciones que el profesor hizo a la propuesta didáctica remite a sus acciones y a su sistema de intenciones, en las cuales intervienen la planeación y el trabajo documental. Las intenciones del docente fueron revelándose con claridad, tanto en sus acciones en clase, su manera de reaccionar y gestionar los incidentes, como en sus opiniones bien articuladas en torno a una idea, –divergente de la de los autores del texto–, acerca del papel de la relación entre fracciones y proporcionalidad, y acerca de las formas de aprender matemáticas. Sin embargo, sus acciones sí respondieron a los saberes docentes (Mercado, 2002) que él ha construido y legitimado a lo largo de su experiencia docente, y que vinculó de manera natural con la propuesta que le presenté.

Para el docente, su participación en este estudio fue una oportunidad de aprendizaje, y aunque él no eligió esta propuesta, manifestó que se hizo consciente de algunas cosas y que reconoció su aporte respecto de otros libros con los cuales ha trabajado ¿Todo lo anterior, qué aprendizajes me deja? Por una parte, la confirmación de la escasa influencia que por sí solo tiene un texto en el rumbo que adopta una clase de matemáticas. Derivado de ello, y en aras de no debilitar el papel del libro de texto, se requiere de un material que acompañe al texto, o bien una versión especial para el docente en la cual se expliciten de manera clara y puntual todos los aspectos necesarios para las lecciones, sin perder de vista que las componentes de trabajo y personal de los docentes (Robert, 2007) acotan el tiempo disponible para el estudio del material que utilizan en clase.

Por otra parte, se confirma la necesidad de que los docentes del nivel de secundaria elijan el texto con el que desean apoyar su enseñanza y, sobre todo, la necesidad de trabajar intensamente en el nivel de la actualización de docentes en servicio, y también de la formación de futuros profesores. Son probablemente, los lugares propicios para identificar las debilidades de una enseñanza demasiado centrada en los algoritmos, los escenarios en los que los docentes podrían comprender con más profundidad las alternativas de enseñanza, sus aportes, complicaciones y limitaciones.

Una propuesta como la que utilicé en este estudio podría constituir, –a nivel de hipótesis–, un apoyo importante para docentes que *ya tienen,* en alguna medida*,* una visión afín a la del texto, en lo que refiere a la forma de ir desarrollando un conocimiento específico. Por supuesto, aun en ese caso, queda pendiente, la elaboración de materiales de apoyo de fácil acceso y que comuniquen eficazmente lo mínimo necesario para la implementación de las propuestas.

Hay un camino amplio por recorrer para responder numerosas preguntas que quedan abiertas respecto de las prácticas de enseñanza de las matemáticas en secundaria. Algunas de estas preguntas, que llevarían a profundizar en los resultados de mi trabajo son: ¿Es posible identificar características asociadas a aquellos profesores que se apropian con más amplitud y profundidad de propuestas de corte constructivista como la que aquí estudiamos? ¿Mediante qué tipo de estudio? ¿La formación inicial del docente sería una variable significativa?

Con respecto a la funcionalidad de las propuestas y de los libros de texto para los profesores, los resultados de este estudio me llevan a plantearme preguntas. En primer lugar, el hecho de que la gestión del docente en la última situación fue mejor en varios sentidos que en las situaciones anteriores, me lleva a cuestionarme si para un docente con poca experiencia en un enfoque didáctico que pretende la construcción de nociones a partir de la resolución de problemas, funcionaría mejor una propuesta que plantea problemas de *aplicación,* diversos, interesantes, algunas veces no rutinarios, que una como la que se usó en este estudio, más ambiciosa en cuanto a dar lugar a procesos de construcción de nociones.

Por otra parte, además de otros estudios de tipo cualitativo que permitan ver de cerca, como en el mío, la relación de los profesores con las propuestas didácticas de los libros de texto, considero que también son pertinentes estudios de tipo cuantitativo para responder a preguntas como las siguientes: ¿Con base en qué criterios eligen los profesores los libros de texto? ¿Cuánto tiempo en promedio trabajan con un mismo libro? ¿De qué maneras los utilizan (desde guiar su enseñanza, hasta sólo tareas complementarias)? ¿De qué otros materiales se apropian?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alatorre, S. (2004). *¿A, B o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional.* Tesis de doctorado, Matemática Educativa, Cinvestav. México.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En Artigue, M., Douady, R., Gómez, P. Y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp.33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (octubre de 2018). *Reunión de la Dra. Michèle Artigue con estudiantes sobre investigaciones en Francia*. Cinvestav. Departamento de Matemática Educativa. Ciudad de México.

Ávila, A. (2001). L*os profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas.* Revista perfiles educativos. 23(93). pp.59-86. Revisado el 25 de agosto, 2018. Tomado de http://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v23n93/v23n93a5.pdf

Ávila, A., Block, D. y Carvajal, A. (2013). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria (Capítulo 1). En A. Ávila, A. Carrasco, A. Gómez, Ma. Guerra, G. López y J.L. Ramírez. (Coords). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México. Matemáticas, Ciencias Naturales, Lenguaje y Lenguas y Extranjeras. 2002-201.* (pp. 35-56). México: ANUIES y COMIE.

Behr, M., Lesh, R., y Post, T. (1989). *Proportional reasoning*. En Hiebert, J. y Behr, M. Concepts and operations in the Middle Grades, 2. National Council of Teachers of Mathematics. 2 (pp.93-139). NewYork: NCTM

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Tesis de Doctorado. DIE-CINVESTAV. MÉXICO: DIE-CINVESTAV

Block, D. (2008). *Notas sobre el papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria*. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J., Romo, A (2008). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano. (pp.495-512). México: CLAME. Revisado el 12 de julio, 2015. Tomado de http://www.die.cinvestav.mx/Portals/die/SiteDocs/Investigadores/DBlock/EstudiosDidNRFD/2-3-2008elPapeldela.pdf

Block, D. (2018). *La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de México en 1993. Algunas reflexiones 25 años después.* Rutas de la Educación Matemática. (pp.293-311). México: Rutas de la Educación Matemática.

Block, D., Balbuena, H., y García, S. (2015). *Matemáticas 1. Secundaria*. Savia. México: Ediciones SM.

Block, D., Mendoza, T y Ramírez, M. (2012). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: Ediciones SM.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., y Solares, D. (2007). *La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria*. Revista Mexicana de Investigación Educativa. 12 (33). pp.731-762. Revisado el 12 de julio, 2016. Tomado de http://www.redalyc.org/pdf/140/14003313.pdf

Block, D., Ramírez, M., y Reséndiz, L. (2015). *Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado.* Revista Mexicana de Investigación Educativa. 20 (66). pp.711-735. Revisado el 12 de julio, 2016. Tomado de http://www.redalyc.org/pdf/140/14003313.pdf

Block, D., y Ramírez, M. (2009). *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares*. Revista Mexicana de Investigación Educativa. 21 (1). pp. 63-90.

Block, D., y Solares, D. (2001). *Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo*. Revista educación Matemática. 13(2). pp. 5-30.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). *La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la Proporcionalidad*. Recherches en Didactiques des Mathématiques. 21 (3). pp. 247-304.

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des Mathématiques? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège.* Université René Descartes Paris V. Thèse de doctorat. Revisado el 3 de septiembre, 2018. Tomado de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252104/document

Bonell, C. (2000). *La Divina Proporción. Las formas geométricas*. México: Alfaomega

Brousseau, G. (1980). *Problèmes de l'enseignement des décimaux*. Recherches en Didactique des Mathématiques. 1 (1). pp. 11-58.

Brousseau, G. (1981). *Problèmes de didactique des décimaux*. Recherches en Didactique des Mathématiques. 2 (3). pp. 37-127.

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemáticas.* En: Recherches en Didactiques des Mathématiques. México: CINVESTAV-DIE.

Brousseau, G. (2006). *Épistemologie et formation des professeurs*. Revisado en, agosto 2018. Tomado de http://guy-brousseau.com/1463/epistemologie-et-formation-des-professeurs-2006/

Brousseau, G. (2007). La teoría de las situaciones didácticas. En *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Comin, E. (2003). *Des grains et des souris*. France. Revisado en, noviembre 2017. Tomado de http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/72/72n5.pdf

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. En Artigue, M., Douady, R., Gómez, P. Y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp.61-97). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: Textos seleccionados. CINVESTAV-IPN. Revisado en, Noviembre 2017. Tomado de https://www.uv.es/puigl/cap5fracciones.pdf , https://www.uv.es/puigl/cap6razon.pdf

Godino, J. (2007). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Revisado en, Marzo 2007. Tomado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Margolinas, C. (2009). *Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur*: FRANCE: HAL. Revisado el 11 de marzo, 2018. Tomado de https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421848/document

Mercado, R. (2002). *El carácter dialógico de los saberes culturales en la enseñanza*. México: Fondo de Cultura Económica.

Mercado, R; y Rockwell, E. (1988). *La práctica docente y la formación de maestros*. Revista Investigación en la escuela. 4. (pp.63-78). México

Peltier, M.L. (1998). *Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza*. Revista Educación Matemática. 11(3). 5-24. Revisado el 28 de agosto, 2018. Tomado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol11-3.pdf

Perrin- Glorian, M. J. (2011). *L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants*. En Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck., F. & Wozniak., F. (coords). (2011). En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique de mathématiques. (vol.1) (pp. 57-74). France: La Pensée Sauvage.

Perrin- Glorian, M. J & Baltar, P. (2016). *L'INGENIERIE DIDACTIQUE ENTRE RECHERCHE ET RESSOURCE POUR L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION DES MAITRES. En* **I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática** 01 a 06 de novembro de 2016 Bonito - Mato Grosso do Sul – Brasil. Revisado el 10 de junio, 2018. Tomado de *http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/oficinas/CONFERÊNCIA%203%20-%20FRANCÊS.pdf*

Rebolledo, V., y Torres, R. (2019). *Estado del arte de la educación rural en México (2004-2014).* México: Universidad Iberoamericana.

Ríos, M. (2016). *La enseñanza del tratamiento de la información en preescolar. Un estudio sobre procesos de interpretación y de reconstrucción de situaciones didácticas.* Tesis de maestría. Die-Cinvestav. México.

Robert, A. (2007). *Stabilité des pratiques des enseignants de Mathématiques (second degré): Une hypothèse, des inférences en formation.* Recherches en Didactique des Mathématiques. 27 (3). pp. 271-312.

Roditi, E. (2003). *Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement*: *Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième*. Recherches en Didactique des Mathématiques. 23 (2). pp.183-216. Revisado el 1 de septiembre, 2018. Tomado de https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00349723

Rogalsky, J. (2000). *Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant*. En Actes du XXVIe colloque COPIRELEM (pp. 45-66). Limoges : IREM.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* France : Ellipses.

Sadovsky, P. (2004). Marco didáctico general. *La Teoría de Situaciones*. En Condiciones Didácticas para un Espacio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas. Informe final de Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, UBA. (Capítulo 1, Apartado 5).

Sandoval, E. (2001). *Ser maestro de secundaria en México: Condiciones de trabajo y reformas educativas*. Revista Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. No 25. pp. 83-102. Revisado el 2 de diciembre, 2018. Madrid: OEI. Tomado de https://www.researchgate.net/publication/39152864_Ser_maestro_de_secundaria_en_Mexico_condiciones_de_trabajo_y_reformas_educativas

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En Hiebert, J. y Behr, M. (1988). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. 2 (pp.141-161). NewYork: NCTM.

Weiss, E (coordinador)., Block, D., Civera, A., y Dávalos, A. (2019). *Evaluación de medio camino: estudio de las prácticas de docentes de primaria y secundaria informe final.* Documento interno en preparación para su publicación. México: DIE

ANEXOS

Situación 1. La mitad de un cuarto

LECCIÓN 9

La mitad de un cuarto

1. Resuelve los problemas usando fracciones.

a) Varios jóvenes improvisaron una banca uniendo los extremos de cinco tablas de $\frac{3}{4}$ m de largo. ¿Cuál es, en metros, la longitud total de la banca? ______________________________

b) Luis va en coche al trabajo 20 veces al mes, durante diez meses al año. En cada viaje de ida y vuelta utiliza $\frac{1}{10}$ del tanque de gasolina. ¿Cuántos tanques de gasolina consume anualmente? ______________

APRENDER A PENSAR

Si una cuerda de $\frac{3}{4}$ se corta a la mitad, ¿qué fracción de metro medirá cada parte?

- Analiza si en los incisos a) y b) usaste un método similar a la siguiente técnica. En caso de no ser así, aplica la técnica y verifica que obtengas los mismos resultados.

> Para multiplicar una fracción por un número entero, basta con multiplicar el numerador de la fracción por el número entero. Por ejemplo,
>
> $$\frac{3}{4}\text{ m} \times 5 = \frac{15}{4}\text{ m} = 3\frac{3}{4}\text{ m.}$$

2. Completa las multiplicaciones. Simplifica los resultados.

a) $3 \times \frac{1}{3} =$ ________ **b)** $2 \times 3\frac{1}{4} =$ ________ **c)** ________ $\times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

d) $5 \times \frac{4}{15} =$ ________ **e)** ________ $\times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$ **f)** ________ $\times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

3. En la tienda donde trabaja Luis venden rebanadas de $\frac{1}{8}$ de pastel. Cada día, el dueño le regala las rebanadas sobrantes. Para compartirlas con dos amigos, Luis las lleva a la escuela y divide cada una en tres partes iguales. El lunes sobró una rebanada.

a) El rectángulo representa un pastel completo. Señala la porción que le correspondió a cada amigo el lunes.

b) Anota los datos que faltan en la tabla.

APRENDER A APRENDER

Cuando se reparten $\frac{2}{8}$ entre 3, a cada quien le corresponde lo doble que si se reparte $\frac{1}{8}$ entre 3.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Fracción de pastel que Luis reparte entre tres	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
Fracción de pastel para cada uno					

- Verifica que al multiplicar por 3 la fracción de pastel de cada uno, se obtengan las cantidades de pastel que se repartieron.

4. Un artesano, que necesita trozos de madera pequeños, corta tiras en partes iguales.

   a) Anota, en la tabla, la medida de cada trozo.

   b) Verifica tus resultados. Si multiplicas la medida de cada trozo (columna 3) por el número de trozos (columna 2), obtendrás la medida de la tira.

   c) Anota, en la última columna, las divisiones que corresponden.

Medida de la tira	Núm. de trozos	Medida de cada trozo	División
$\frac{3}{4}$ m	3		$\frac{3}{4} \div 3$
$\frac{4}{5}$ m	2		
$\frac{1}{3}$ m	5		
$\frac{2}{3}$ m	5		

- Analiza las siguientes técnicas para dividir fracciones entre números enteros. Si no son iguales a la que usaste, aplícalas para verificar los resultados del problema anterior.

Para dividir una fracción entre un número natural se puede...

- dividir el numerador: $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4 \div 2}{5} = \frac{2}{5}$; o bien,
- multiplicar el denominador: $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{2 \times 5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

5. Resuelve.

   a) $\frac{4}{5} \div 2 =$ ________ b) $\frac{1}{5} \div 2 =$ ________ c) $\frac{1}{9} \div 4 =$ ________

   d) $\frac{8}{9} \div 4 =$ ________ e) $\frac{3}{10} \div 3 =$ ________ f) $\frac{1}{10} \div 3 =$ ________

- Compara, con ayuda del profesor, tus respuestas de las actividades 1, 3 y 4 con las de tus compañeros.

APRENDER A PENSAR

- Si el numerador de $\frac{2}{3}$ se multiplica por 5, se obtiene una fracción cinco veces mayor: $\frac{10}{3}$ o $3\frac{1}{3}$.
- Si el denominador de $\frac{2}{3}$ se multiplica por 5, se obtiene una fracción cinco veces menor: $\frac{2}{15}$.
- Si tanto el numerador como el denominador de $\frac{2}{3}$ se multiplican por 5, ¿qué se obtiene?

Taller de matemáticas

6. Resuelve, en tu cuaderno, los problemas.

   a) Ana debe entregar un pedido de 20 kg de jamón, pero solamente le queda un paquete de 5 kg y paquetes de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Cómo puede completar los 20 kg?
   b) Gonzalo envía $\frac{1}{3}$ de su sueldo a sus familiares, que viven en Hidalgo. Del resto, la mitad es para los gastos de su casa; de estos, $\frac{1}{10}$ es para pagar la luz. ¿Qué fracción de su sueldo corresponde al pago de la luz? Si paga $300.00 de luz, ¿cuál es su sueldo?
   c) Una mezcla de pintura está compuesta por pintura roja, pintura blanca y agua. Las pinturas roja y blanca juntas son $\frac{3}{5}$ de la mezcla, y hay el triple de pintura blanca que de roja. ¿Qué fracción de toda la mezcla representa la pintura roja?

Situación 2. Vueltas alrededor de un circuito I

LECCIÓN 10

Vueltas alrededor de un circuito I

APRENDER A PENSAR

0.5 vueltas es igual que $\frac{5}{10}$ de vuelta o $\frac{1}{2}$ de vuelta. ¿Qué significa 0.25 vueltas?

1. Un tren da vueltas en un circuito de 60 km.

a) ¿Cuántos kilómetros recorrerá después de $2\frac{3}{4}$ de vuelta? 165 km

b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá luego de 0.25 vueltas? 15 km

c) Escribe los datos que faltan en la tabla.

Vueltas	0.25	$\frac{2}{5}$	0.5	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{3}{4}$	3	3.5	5	$5\frac{1}{4}$
Kilómetros recorridos	15	24	30	60	90	120	165	180	210	300	315

d) Una manera de calcular los kilómetros recorridos en cinco vueltas es 5 × 60 km = 300 km. ¿Con qué operación se calcula la distancia recorrida en $\frac{2}{5}$ de vuelta? $\frac{2}{5}$ × 60 km

Así como cinco vueltas corresponden a cinco veces 60 km (5 × 60 km), $\frac{2}{5}$ de vuelta corresponden a $\frac{2}{5}$ de 60 km ($\frac{2}{5}$ × 60 km). Es decir, obtener $\frac{2}{5}$ de una cantidad equivale a multiplicarla por $\frac{2}{5}$.

- Compara, en grupo, los datos que anotaste en la tabla. Expliquen qué significa multiplicar una cantidad por una fracción, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ × 100 g. **Explicación**

TIC

Revisa lo que sabes sobre multiplicación de fracciones en www.e-sm.com.mx/SSAM1-096

2. Subraya cada operación con el color que se indica.

a) $\frac{2}{3} \times 60$ **b)** $\frac{3}{4} \times 60$ **c)** $\frac{2}{5} \times 60$ **d)** $\frac{7}{3} \times 60$

e) 0.4 × 60 **f)** 1.5 × 60 **g)** 0.75 × 60 **h)** 2.1 × 60

i) $1\frac{1}{2} \times 60$ **j)** $\frac{5}{2} \times 60$ **k)** $2\frac{1}{3} \times 60$ **l)** $2\frac{3}{4} \times 60$

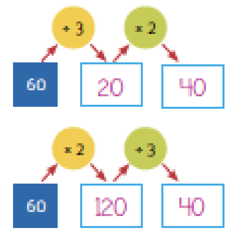
Si el resultado es menor que 60.

Si el resultado es mayor que 60, pero menor que 120.

Si el resultado es mayor que 120.

3. Una manera de obtener el resultado de $\frac{2}{3} \times 60$ es mediante el cálculo de $\frac{1}{3}$ de 60: se divide 60 entre 3 y luego se multiplica el resultado por 2.

- ¿Se obtiene el mismo resultado si se invierte el orden de esas operaciones, es decir, si primero se multiplica por 2 y luego se divide entre 3?
- Haz la prueba y anota los resultados en el esquema.



4. Haz lo que se indica con las multiplicaciones de la actividad 2.

   a) Resuelve de las dos maneras las multiplicaciones del primer renglón, del inciso a) al d). Verifica que se obtiene el mismo resultado.

   b) Resuelve las multiplicaciones del segundo renglón. Recuerda que multiplicar por 0.4 y por $\frac{4}{10}$ es lo mismo.

   c) Resuelve las multiplicaciones del tercer renglón. Recuerda que para multiplicar 60 por $2\frac{1}{3}$, se puede multiplicar 60 por 2, después 60 por $\frac{1}{3}$ y, finalmente, sumar ambos resultados.

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la siguiente información.

Observa que multiplicar...

- 60×5 equivale a sumar cinco veces 60,
- $60 \times \frac{3}{4}$ equivale a obtener $\frac{3}{4}$ de 60,
- 60×0.75 equivale a obtener $\frac{75}{100}$ de 60,
- por $\frac{1}{2}$ es lo mismo que dividir entre 2,
- no siempre es agrandar.

APRENDER A PENSAR

¿Que operación es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{3}$?

Taller de matemáticas

5. Escribe el número que falta. Si el número no es entero, usa fracciones.

a) 5 $\times 60 = 300$	b) 2 $\times 60 = 120$	c) 1 $\times 60 = 60$
d) $\frac{1}{2}$ $\times 60 = 30$	e) $\frac{1}{3}$ $\times 60 = 20$	f) $\frac{1}{6}$ $\times 60 = 10$
g) $\frac{2}{3}$ $\times 60 = 40$	h) $\frac{1}{10}$ $\times 60 = 6$	i) $\frac{1}{60}$ $\times 60 = 1$

Situación 3. Vueltas alrededor de un circuito II

LECCIÓN 11

Vueltas alrededor de un circuito II

1. Un tren de juguete viaja en un circuito de $\frac{2}{5}$ m.

a) Indica, con fracciones de metro, qué distancia recorre el tren cuando da…

- 10 vueltas: 4 m
- $\frac{1}{2}$ de vuelta: $\frac{1}{5}$ m
- $\frac{1}{4}$ de vuelta: $\frac{1}{10}$ m

b) El primer diagrama muestra una manera de calcular $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{5}$, que consiste en dividir $\frac{2}{5}$ entre 2, dos veces. Anota la fracción que falta en una de las flechas.

	Vueltas	Kilómetros	
	1	$\frac{2}{5}$	
(÷ 2)			(÷ 2)
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	
(÷ 2)			(÷ 2)
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	

c) Si el tren completa $4\frac{2}{3}$ de vuelta, ¿cuántos metros recorre?

d) El segundo diagrama muestra una manera de calcular $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{5}$: primero se calcula $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$, dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 3. Escribe la fracción que falta.

	Vueltas	Kilómetros	
	1	$\frac{2}{5}$	
(÷ 3)			(÷ 3)
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	
(× 2)			(× 2)
	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	

- Valida tus respuestas con el grupo. Comenten la siguiente información.

Para dividir una fracción entre un número *n* se puede dividir su numerador entre *n*, o bien, multiplicar su denominador por *n*.

2. El circuito del tren ahora mide $\frac{3}{4}$ m.

a) Anota los datos que faltan.

Vueltas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	4	$5\frac{1}{3}$
Metros recorridos	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4

b) Completa la técnica para calcular $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5}$ km.

Paso 1	**Paso 2**
Calcular $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$ R. T. Se multiplican ambas fracciones: $\frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$.	Multiplicar el resultado anterior por 4 Se multiplican $\frac{2}{35}$ y 4: $\frac{2}{35} \times 4 = \frac{8}{35}$.

c) Verifica tus resultados del inciso b) mediante la técnica que se describe en la cápsula "Aprender a aprender".

- Comenta, con el grupo, la siguiente información.

Para calcular a cuánto equivalen cinco vueltas de 60 km, se multiplica:

$$5 \times 60 \text{ km} = 300 \text{ km}.$$

Para calcular a cuánto equivalen $\frac{2}{3}$ de vuelta, de $\frac{3}{4}$ m cada una, también se multiplica:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ m}.$$

Es decir, obtener una fracción de fracción también es multiplicar.

Taller de matemáticas

3. Resuelve y simplifica.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} =$ $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} =$ $\frac{1}{10}$

d) $\frac{5}{12} \times \frac{2}{5} =$ $\frac{1}{60}$ **e)** $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{1}{20}$ **f)** $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} =$ 1

g) $\frac{3}{10} \times \frac{10}{3} =$ 1 **h)** $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} =$ 1 **i)** $\frac{5}{13} \times \frac{13}{5} =$ 1

- Compara, con ayuda del profesor, tus resultados con los del grupo. Resuelvan las siguientes multiplicaciones de fracciones mixtas.

a) $2\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} =$ $\frac{4}{3}$ **b)** $5\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{6} =$ $\frac{299}{24}$

APRENDER A APRENDER

Observa que $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} = \frac{8}{35}$. Es decir, para encontrar el resultado de una fracción de fracción basta multiplicar entre sí tanto los numeradores como los denominadores.

APRENDER A PENSAR

Si se multiplican dos fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, es decir, en las que el denominador de una de ellas es el numerador de la otra y viceversa, el resultado siempre es 1. ¿Por qué?

Situación 4. ¿Qué número multiplicado por 2 da 3?

LECCIÓN 12

¿Qué número multiplicado por 2 da 3?

1. Traza, en una hoja, una línea de 20 cm y divídela en tres segmentos iguales.

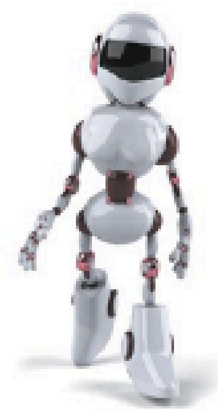
a) ¿Cuánto mide cada segmento? 6.666... cm

b) Multiplica por 3 la medida que encontraste y verifica si obtienes los 20 cm.

- Compara tu respuesta con las del grupo. Comenten si alguien halló una medida que multiplicada por 3 dé exactamente 20 cm. Si no la encontraron, expresen la medida con una fracción. Anótenla a continuación.

$$20 \text{ cm} \div 3 = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

2. Algunos robots que se fabrican en un taller dan pasos grandes y otros, pequeños. Los pasos se miden con una unidad llamada *vara*; por ejemplo, el robot A avanza una vara con cinco pasos.



a) ¿Qué fracción de vara avanza el robot A con cada paso? $\frac{1}{5}$

b) Anota, en la tabla, la medida de los pasos de otros robots. Verifica, para cada robot, si al multiplicar por 5 la medida de un paso se obtiene la distancia que recorre con cinco pasos.

APRENDER A PENSAR

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es el resultado de dividir 7 varas entre 5 pasos?

Robot	Distancia que avanza con cinco pasos	Tamaño de un paso	Verificación
A	1 vara	$\frac{1}{5}$ de vara	$5 \times \frac{1}{5} = 1$
B	2 varas	$\frac{2}{5}$ de vara	$5 \times \frac{2}{5} = 2$
C	5 varas	1 vara	$5 \times 1 = 5$
D	7 varas	$\frac{7}{5}$ de vara	$5 \times \frac{7}{5} = 7$
E	14 varas	$\frac{14}{5}$ de vara	$5 \times \frac{14}{5} = 14$
F	15 varas	3 de vara	$5 \times 3 = 15$

c) Analiza cómo dividir siete varas entre 7.

- El resultado de dividir una vara entre 5 es $\frac{1}{5}$ de vara.
- Si en lugar de dividir una vara entre 5, se dividen siete varas entre 5, el resultado será siete veces mayor; es decir, siete veces $\frac{1}{5}$ de vara.
- Por lo tanto, el resultado de dividir siete varas entre 5 es igual a $\frac{7}{5}$ de vara o $\frac{12}{5}$.

3. Escribe los cocientes usando fracciones. Simplifica cuando sea posible.

a) 3 varas entre 4 = $\frac{3}{4}$ b) 6 varas entre 4 = $\frac{6}{4}$

c) 5 varas entre 6 = $\frac{5}{6}$ d) 5 varas entre 3 = $\frac{5}{3}$

e) 10 varas entre 8 = $\frac{5}{4}$ f) 30 varas entre 8 = $\frac{15}{4}$

4. Cada sábado, María lleva barras de cereal a sus nueve sobrinos y les pide que las distribuyan en partes iguales.

a) Completa la tabla con lo que recibe cada sobrino.

	Total de barras	Cuánto recibe cada sobrino	Verificación	División
Sábado 1	1	$\frac{1}{9}$	$9 \times \frac{1}{9} = 1$	$1 \div 9 = \frac{1}{9}$
Sábado 2	3	$\frac{3}{9}$	$9 \times \frac{3}{9} = 3$	$3 \div 9 = \frac{3}{9}$
Sábado 3	5	$\frac{5}{9}$	$9 \times \frac{5}{9} = 5$	$5 \div 9 = \frac{5}{9}$
Sábado 4	7	$\frac{7}{9}$	$9 \times \frac{7}{9} = 7$	$7 \div 9 = \frac{7}{9}$
Sábado 5	8	$\frac{8}{9}$	$9 \times \frac{8}{9} = 8$	$8 \div 9 = \frac{8}{9}$

Taller de matemáticas

5. Resuelve usando fracciones.

a) $2 \times \frac{1}{2} = 1$ b) $5 \times \frac{2}{5} = 2$ c) $3 \times \frac{2}{3} = 2$ d) $4 \times \frac{1}{4} = 1$

e) $1 \div 7 = \frac{1}{7}$ f) $5 \div 7 = \frac{5}{7}$ g) $2 \div 5 = \frac{2}{4}$ h) $3 \div 4 = \frac{3}{4}$

6. Resuelve con números decimales. Puedes usar calculadora.

a) $2 \times 0.5 = 1$ b) $5 \times 0.4 = 2$ c) $3 \times 0.\overline{6} = 2$ d) $4 \times 0.25 = 1$

e) $1 \div 7 = 0.14$ f) $5 \div 7 = 0.71$ g) $2 \div 5 = 0.4$ h) $3 \div 4 = 0.75$

APRENDER A PENSAR

Dados dos números diferentes de 0, ¿siempre existe un tercer número que multiplicado por uno de los dos da el otro? Por ejemplo, ¿qué número multiplicado por 2 es igual a 3?, ¿y cuál multiplicado por 3 da 2?

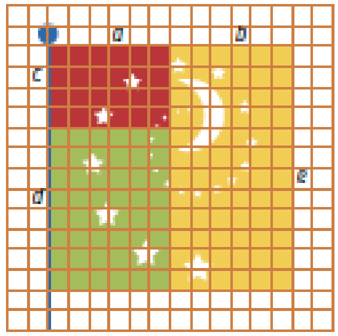
El resultado de dividir m unidades entre n es la fracción $\frac{m}{n}$ de unidad.

Situación 5. Banderas a escala

LECCIÓN 20

Banderas a escala

1. Luis hará seis copias a escala de la bandera que se muestra. Considera la tabla para contestar las preguntas. No calcules todavía las medidas faltantes en la tabla.



a) ¿Qué copias serán más grandes que la original? Las copias 1, 2, 4 y 5.

b) ¿Cuál será la copia más grande? La 4.

- Valida tus respuestas con tus compañeros. Comenten cómo identificaron la copia más grande.

	Bandera original	Copia 1	Copia 2	Copia 3	Copia 4	Copia 5	Copia 6
Lado *a*	6	12	15	3	18	9	45
Lado *b*	6	12	15	3	18	9	45
Lado *c*	4	8	10	2	12	6	3
Lado *d*	8	16	20	4	24	12	6
Lado *e*	12	24	30	6	36	18	9

APRENDER A PENSAR

El lado *b* de la copia 5 mide 3 unidades más que el lado *b* de la bandera original (9 contra 6). ¿Esto significa que las medidas de la copia 5 se obtienen sumando 3 a las de la original?

2. Calcula las medidas de los lados de las copias 1 y 5 y anótalas en la tabla.

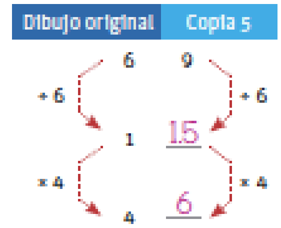
3. Dibuja, en papel cuadriculado, las copias 1 y 5 a partir de las medidas que calculaste en la actividad anterior.

a) La bandera original es un cuadrado. ¿Ocurre lo mismo en tus dos copias? R. P.

b) En la bandera original, *e* es igual a la suma de *c* y *d*. ¿Esto sucede en tus copias? R. P.

- Si tus copias 1 y 5 no cumplen con las características anteriores, averigua, en grupo, dónde está el error y corrígelo.

4. A continuación se explica una manera de calcular la medida de *c* en la copia 5: primero se calcula a cuánto corresponde en la copia una unidad de la figura original y luego se multiplica ese número por el factor adecuado.



a) Completa el diagrama y el texto.

- El lado *b* mide 6 unidades en la bandera original y 9 unidades en la copia 5.
- El lado *c* mide 4 unidades en la original y 1.5 unidades en la copia 5.

5. Anota, en la tabla, a cuánto corresponde en cada copia una unidad de la bandera original.

Bandera original	Copia 1	Copia 2	Copia 3	Copia 4	Copia 5	Copia 6
1	2	$\frac{5}{2}$ o 2.5	$\frac{1}{2}$ o 0.5	3	$1\frac{1}{2}$ o 1.5	$\frac{3}{4}$ o 0.75

6. Calcula las medidas de las seis copias, anótalas en la tabla de la actividad 1 y dibuja las copias en papel cuadriculado.

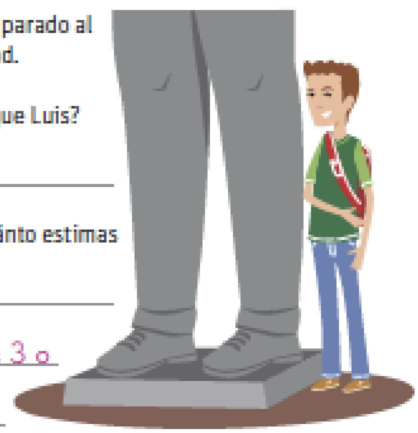
- Compara tus copias con las del grupo. Comenten si acertaron cuáles fueron la menor y la mayor copia.

APRENDER A APRENDER

En las reproducciones a escala, el número que nos dice a cuánto corresponde en la copia una unidad de la figura original se denomina *factor de escala* o *valor unitario*. Con este número se calculan rápidamente todas las medidas de la nueva figura a partir de las medidas de la original.

Taller de matemáticas

7. Los amigos de Luis le tomaron una fotografía mientras estaba parado al pie de la estatua de un importante personaje de su comunidad.



a) Aproximadamente, ¿cuántas veces es más alta la estatua que Luis?

R. T. Entre 3 o 4 veces más alta.

b) Si Luis tiene 13 años de edad y es de estatura normal, ¿cuánto estimas que puede medir? R. P.

c) ¿Cuál es la altura aproximada de la estatua? R. P. (Entre 3 o 4 veces la estatura del inciso anterior).

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Expliquen cómo hicieron sus estimaciones. **Explicación**

Situación 6. Más del doble, pero menos del triple

LECCIÓN 21

Más del doble, pero menos del triple

1. Escribe las medidas que calculaste en la lección anterior y contesta las preguntas. Por el momento, deja vacía la columna de la copia 7.

	Factor de escala	Lado *a*	Lado *b*	Lado *c*	Lado *d*	Lado *e*
Bandera original	1	6	6	4	8	12
Copia 1	2	12	12	8	16	24
Copia 2	$\frac{5}{2}$	15	15	10	20	30
Copia 3	$\frac{1}{2}$	3	3	2	4	6
Copia 4	3	18	18	12	24	36
Copia 5	$\frac{3}{2}$	9	9	6	12	18
Copia 6	$\frac{3}{4}$	4.5	4.5	3	6	9
Copia 7	$\frac{1}{4}$	1.5	1.5	1	2	3

a) ¿En qué copia los lados miden el doble que los de la bandera original?

En la copia 2. ¿Cuál es el factor de escala de esta copia? 2

b) ¿En qué copia los lados miden el triple que los de la original?

En la 4 ¿Cuál es su factor de escala? 3

c) ¿Qué copia está entre las dos anteriores, es decir, es mayor que una de ellas, pero menor que la otra? La copia 2.

d) Los lados de esta última copia miden más del doble que los de la original, pero menos del triple. Por tanto, el factor de escala agranda más del doble, pero menos del triple. ¿Cuál es ese factor de escala? 2.5

En la copia 2, a cada unidad del dibujo original le corresponden $2\frac{1}{2}$ unidades. Entonces, el factor de escala de la copia es $2\frac{1}{2}$ o 2.5.

- Verifica, en grupo, que cada medida de la copia 2 es $2\frac{1}{2}$ veces la medida correspondiente del original. Puedes usar calculadora.

2. Anota, en la tabla de la página anterior, los factores de escala de las copias 1 a 6.

3. El factor de escala de una nueva copia (copia 7) es 0.25. Anótalo en la tabla de la página anterior.

a) Explica si la copia 7 es mayor, menor o igual que la bandera original.

R. T. Menor, pues 0.25 es menor que 1; por tanto, al multiplicar cada medida por 0.25, se obtendrá una figura más pequeña que la original.

b) Completa los siguientes métodos para calcular cuánto mide en la copia 7 el lado que en la original mide 6 unidades.

Método 1

Como el factor de escala es 0.25, a cada unidad de la original le corresponden 0.25 unidades en la copia. Entonces...

$1 \longrightarrow 0.25$

$6 \longrightarrow$ 6 veces 0.25 = $6 \times 0.25 = 1.5$

Método 2

Como el factor de escala es 0.25, todas las medidas de la copia son $\frac{25}{100}$ de las originales, es decir, $\frac{1}{4}$ de las originales.

Por tanto, el lado original de 6 unidades debe medir $\frac{1}{4}$ de 6 en la copia, es decir, 1.5.

c) Calcula las demás medidas de la copia 7 y anótalas en la tabla.

- Compara, con ayuda del profesor, tus resultados de las actividades 2 y 3 con los del grupo. Comenten la siguiente información.

Si un factor de escala es, por ejemplo, $\frac{7}{4}$, entonces...

- a cada unidad de la figura original le corresponden $\frac{7}{4}$ de unidad en la copia;
- cualquier medida de la copia equivale a $\frac{7}{4}$ de la medida original.

Taller de matemáticas

4. Ordena los siguientes factores de escala, desde el de la copia más pequeña hasta el de la más grande.

$\times 1.2$ $\quad \times 1.19$ $\quad \times 0.8$ $\quad \times 0.75$ $\quad \times 2$ $\quad \times 3$ $\quad \times \frac{2}{3}$ $\quad \times \frac{7}{4}$

$\frac{2}{3}$, 0.75, 0.8, 1.19, 1.2, $\frac{7}{4}$, 2, 3.

APRENDER A PENSAR

¿Cuánto calculas que mide el pescado?

Situación 7. ¿Una buena selfie?

¿Tienes un álbum fotográfico en facebook o instagram? Seguramente tienes alguno con muchas de tus imágenes o selfies.

¿Qué tan cerca o tan lejos debes colocar el celular para una buena selfie?

¿Has intentado selfies grupales con la cámara frontal del cel?

Discute con tus compañeros y profesor las siguientes preguntas:

1. En la selfie del celular se aprecia una parte de la Torre Eiffel.
   1a) ¿Qué sucede con la imagen si se alejan del monumento?_________________

   1b) A simple vista, las personas parecen de tamaño semejante a la torre. ¿Por qué?

2. Enseguida, aparece la **reproducción 1**de la Catedral de Nôtre Dame en Paris. En equipos responde las preguntas que se presentan debajo de la imagen.

2a) A partir de los datos que se presentan en la tabla y **SIN HACER CÁLCULOS** ¿qué reproducción del monumento es más grande y cuál más pequeña? **Argumenta**:

2b) En equipos completen la tabla con distintas repoducciones a escala de la catedral y respondan las preguntas **(Cuidado con las unidades en la reproducción 1).**

Lados	**Monumento**	**Rep 1**	**Rep 2**	**Rep 3**	**Rep 4**	**Rep 5**
Factor de escala (k)	**1**	**1/750**		$\frac{4}{5}$		
Base (Ancho)	40m		48m			
Alto de las torres	27m			21.6m		
Altura desde el suelo hasta la base de las torres.	43m				5.16 m	
Altura total	63m	8.4cm				7.56 m

2c) Usa tu regla para **verificar** tus resultados en la **Reproducción 1.**

2d) Existen **dos** reproducciones que son del mismo tamaño ¿Cuáles son? __________

El **factor de escala** o **razón externa** es un número que te permite encontrar las medidas de una figura a escala respecto de su original o viceversa. Por ejemplo, retomando la reproducción 3 de nuestro ejercicio, el factor de escala es $\frac{4}{5}$, es decir:

$\times \frac{4}{5}$

Lados	**Monumento**	**Rep 3**
Alto de las torres	27m	21.6m

$\div \frac{4}{5}$

2e) Obtén los factores de escala que aplicados a las medidas reales del monumento, arrojan las medidas de las reproducciones y exprésalos en forma de fracción.

Reproducción 1:______ Reproducción 4: ______

Reproducción 2: ______ Reproducción 5: ______

Reproducción 3: ______

Las escalas se aplican en la fotografía, en la elaboración de maquetas para el diseño arquitectónico y en los mapas como el GPS. Cuando dos o más figuras poseen la misma forma pero distinto tamaño se llaman **Figuras semejantes.**

¿Proporciones en el arte?

3. De las siguientes imágenes del Partenón de Atenas reconstruido, la **imagen 1** sí está a escala. Responde de manera individual y compara con tus compañeros.

3a)Marca con una cruz las imágenes que no parecen proporcionadas o estéticas.

Imagen 1

Imagen 2

Imagen 3

Imagen 4

3b) ¿Qué elementos consideraste para tu elección de las imágenes no proporcionadas?

3c) Con tu regla traza un rectángulo que abarque a cada Partenón.

3d) Escribe la **razón** entre el largo y el ancho del Partenon en cada imagen y obtén el cociente:

Partenon 1: _______ Partenon 3: ______

Partenon 2: _______ Partenon 4: ______

3e) ¿Los cocientes de las imágenes proporcionadas son iguales? ____________

Cuando las figuras están a escala, el cociente de un lado de la figura entre otro lado de la misma figura, es el mismo en la otra figura. Esos cocientes se llaman **razones internas**. La **razón interna** entre el largo y el ancho del Partenón siempre será la misma en todas sus reproducciones a escala.

4. El David es la escultura más famosa del Renacimiento y su autor es: ____________

4a) En equipos, completen la tabla.

Con ayuda de una **regla** mide las distancias del cuerpo solicitadas en la fotografía y aplica el factor de escala para obtener las medidas restantes de la escultura original.

El factor de escala de la foto **es** $\frac{1}{100}$.

La foto es una reducción ____ veces del original

	Altura (h)	Distancia de la planta del pie al ombligo (n)	Razón $\frac{h}{n}$
El David a escala (foto)			
El David original	5.5 m		

4b) ¿Qué sucede con los cocientes de la tercera columna?¿Es el mismo resultado para el original y para la foto?

4c) En equipo, con ayuda de un metro prueben con sus medidas y obtengan la razón $\frac{h}{n}$. Agreguen sus datos en la tabla.

La razón interna que acaban de calcular seguramente es próxima de 1.6. Esta rázon se llama "Divina Proporción".

Los Renacentistas como Da Vinci y Miguel Ángel aplicaron esa razón en las esculturas.

La divina proporción $\frac{a}{b} = 1.618...$

La Divina Proporción o Proporción Aúrea tiene su origen en los estudios de los griegos. Los estudiosos encontraron que aparecía continúamente en la naturaleza y en el cuerpo humano. En la Edad Media fue aplicada en la arquitectura de las catedrales góticas y en el Renacimiento en las grandes esculturas, además pintores de distintas épocas la han utilizado.

Situación 8

¿QUIÉN ES EL LADRÓN?

I. PRIMERA PARTE

El 21 de agosto de 1911, la *Mona Lisa* fue robada del museo del Louvre en París, Francia. El robo se convirtió en prioridad de la ciudad y se ofreció una recompensa de hasta 70,000 francos a quien la recuperara.

El famoso investigador Sherlock Holmes fue contratado para el caso, entre otros datos poseía lo siguiente:

- ✓ Una **huella de 19 cm de largo** que dejo la palma de la mano del ladrón en la pared.
- ✓ La **altura** de los trabajadores que estuvieron a cargo de la pintura la noche del robo.

Sospechosos	***Altura (cm)***
Max	*195*
Nicole	*155*
Sofía	*180*
Ana	*140*
Vicente	*171*
Rafael	*165*

Fuente: Museo de Louvre

Con esos datos resolvió el caso.

Responde:

1. ¿Quién robó la pintura? ____________________

   1b) ¿Por qué? ____________________________

SI NO LOGRARON ENCONTRAR AL LADRÓN EN ESTE MOMENTO, CONTINUÉN DE TODAS MANERAS

II. SEGUNDA PARTE

El grupo de investigación observó que existía una relación sorprendente entre las medidas del cuerpo de los sospechosos. Es importante considerar que los cuerpos de las personas tienden a ser proporcionales, es decir, las relaciones entre las partes del cuerpo no varían demasiado.

2. Enseguida, se presentan las alturas de los sospechosos y un par de datos.

Sospechosos	Altura	Largo de la palma de la mano
Max	*195 cm*	21.6 cm
Nicole	*155 cm*	17.22cm
Sofía	*180 cm*	20cm
Ana	*140 cm*	15.55cm
Vicente	*171 cm*	19cm
Rafael	*165 cm*	18.3cm

2a) ¿Existirá una manera de calcular las longitudes probables de las palmas de las manos a partir de las alturas que se dan? Reflexionen en equipo, y calculen las longitudes de las palmas.

____

2b) ¿De qué forma? ____

La **relación** entre la altura de una persona y el largo de su mano suele ser aproximadamente la misma entre las personas. Esta relación se puede expresar como un cociente:

$$\frac{Altura}{Largo\ de\ la\ mano} \textbf{ o bien } \frac{largo\ de\ la\ mano}{altura}$$

Estas relaciones también se llaman **razones** entre las partes del cuerpo humano.

2c) ¿Quién robó la pintura? Y ¿por qué? _______________Vicente______________________________

III. TERCERA PARTE

3a) A continuación, se presenta una tabla de los sospechosos. Trabajo en equipo. Copien la columna que corresponde al largo de la mano (realizado en la actividad anterior). Completen las medidas para el **largo del brazo** de cada sospechoso.

Existe una relación entre estas partes del cuerpo (Lean el recuadro debajo de la tabla).

Sospechosos	Altura	Largo del brazo	Largo de la mano
Max	*195 cm*	64.8cm	21.6 cm
Nicole	*155 cm*	51.6cm	17.22cm
Sofía	*180 cm*	60cm	20cm
Ana	*140 cm*	46.65cm	15.55cm
Vicente	*171 cm*	57 cm	19cm
Rafael	*165 cm*	54.9cm	18.3cm

Datos curiosos

Holmes utilizó los estudios realizados por Leonardo da Vinci como ayuda para resolver el misterio.

Las proporciones en el cuerpo son armónicas. "La palma de la mano cabe tres veces en el brazo (desde la

3b) ¿Qué otras razones en el cuerpo podrían establecerse con los estudios de da Vinci?

IV. CUARTA PARTE

4. Imaginen que se convierten en investigadores y que en su salón estudian el método utilizado por Holmes.

   En equipos, completen la siguiente tabla:

   4a) Obtengan el valor que falta para Alejandro.
   4b) Llenen la tabla con sus propias medidas, obtengan los resultados y comparen.

Integrante	Altura (cm)	Largo del brazo (cm)	Largo de la mano	$\frac{Altura}{Largo\ de\ la\ mano}$
Alejandro	165 cm	55cm	18.2 cm	

4c) ¿La razón $\frac{\boldsymbol{Altura}}{\boldsymbol{Largo\ de\ la\ mano}}$ coincide en todos los casos? _______________

4d) ¿Cuál es el valor más grande y más pequeño? ______________________________
4e) ¿Cómo podrías justificar la variación en la razón?

____

____