CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SEDE SUR

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

"Cálculo mental en segundo grado de primaria. Estudio de situaciones didácticas y de su implementación en el aula"

Tesis que presenta

Jessica Evelyn Caballero Valenzuela

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

En la especialidad de

Investigaciones Educativas

Director de la Tesis:
Dr. David Francisco Block Sevilla

Ciudad de México, México OCTUBRE, 2018

Para la elaboración de esta tesis se contó con el apoyo de una beca del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

A g r a d e c i m i e n t o s

A David Block por mostrarme otra manera de aprender matemáticas desde aquel Verano de la Investigación. Durante la maestría, tu apoyo, dedicación y paciencia hicieron posible la culminación de esta tesis. Gracias por enseñarme *a mirar* las clases de una manera más flexible y por tus lecturas minuciosas a las distintas versiones de cada análisis. Gracias por caminar y perderte conmigo en este complejo, pero apasionante camino por el cálculo mental, y por enseñarme que el proceso de hacer una tesis –de aprender– nunca termina, pero hay tiempos que se deben cumplir.

A la maestra Ana y a los 29 alumnos, en aquel entonces, de segundo grado. Este trabajo no habría sido posible sin la valiosa participación de todos ellos. Nuevamente agradezco a David Block por su acompañamiento en todas las observaciones de clase, y a Laura Reséndiz por su apoyo en la videograbación de las sesiones.

A Grecia Gálvez, Irma Saiz e Irma Fuenlabrada, por la lectura que hicieron a este trabajo y por sus agudas observaciones. Me hicieron ver que aún queda mucho camino por andar.

A los profesores del DIE, cada seminario fue una oportunidad para pensar un mismo tema desde muchos ángulos distintos. A María de Ibarrola, quien, sin saberlo, me animó a seguir. A Apolo Castañeda, quien también leyó y comentó mi tesis.

A Irma Saiz (de nuevo) y a Cecilia Parra, por su cálido recibimiento en Argentina, y por las reuniones de trabajo, en las que el tiempo no alcanzaba para todo lo que había que revisar. A Patricia Sadovsky y Edith Gorostegui, por los breves y significativos encuentros.

A los integrantes del Seminario de Didáctica de las Matemáticas: David, Margarita, Ligia, Tatiana, Juanjo, Aldo, Apolo, Javier, Laura y Alejandra, por la oportunidad de aprender en colectivo.

A todo el personal administrativo del DIE. En especial, a Lupita Rodríguez, Rosa María Martínez, Renny Saavedra, Irán Benítez, Rodolfo Sánchez, Gerardo Morales, José A. Díaz, Andrés Rosete y Socorro Miranda. También a los amables vigilantes del DIE.

A todos mis compañeros de maestría, de quienes guardo buenos recuerdos. Gracias por el tiempo compartido para estudiar, chismear y pasear. En especial: A Javier, Víctor, Adriana, Edgar, Paola.

Otras personas que aún a la distancia estuvieron cerca de mí:

A mis padres Laura y Sergio, y a mis hermanos Sergio y Mario, a quienes extrañé durante todo este tiempo. Gracias por apoyarme en mis decisiones laberínticas.

A Margarita, por su amistad y sus consejos académicos.

A mis amigas chihuahuenses. A Mariana, por las largas llamadas telefónicas y por los atinados consejos; a Nayery, por las palabras de ánimo, y a Dulce, por estar siempre al pendiente de mis visitas al norte.

RESUMEN

En esta tesis pretendo contribuir a documentar y a analizar procesos de enseñanza y de aprendizaje de procedimientos de suma bajo el enfoque del cálculo mental, mediante la aplicación –en un grupo escolar– de un conjunto de situaciones didácticas que fueron elegidas y adaptadas con esta perspectiva.
El estudio busca conocer las relaciones entre las características de las situaciones y los procedimientos implementados por los alumnos, así como la relación que la maestra establece con las situaciones propuestas.
La pregunta principal de investigación es: ¿Cuáles son las condiciones didácticas que favorecen el desarrollo de procedimientos de cálculo mental para sumar? La metodología incluyó la implementación, en un grupo de segundo grado de primaria, de un conjunto de situaciones didácticas previamente seleccionadas y presentadas a la maestra de grupo. El estudio se realizó en el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Palabras clave: Cálculo mental, operaciones aditivas, práctica docente.

ABSTRACT

In the present thesis my aim is to document and analyze sum procedures and their teaching and learning process focused in mental calculations. My study was modeled and implemented in a focus group (being an elementary school group) in which I presented various teaching situations, all of them carefully selected and adapted to fit my purpose.
This study intends to obtain knowledge about the relationship between the specific characteristics of each situation, and the different procedures implemented by the students to solve them. Furthermore, I pay special attention to the teacher´s role, their relationship and responses to the proposed situations.
The main question that guided my research was, which are the educational conditions that favor the learning of sums by mental calculations procedures? The applied methodology included the selection, adaptation and implementation of the specific situations in a second grade classroom in an Elementary School with the teacher´s previous knowledge and acceptance. The study was executed following the Theory of the didactical situations framework.

Key words: mental calculations, sum operations, teaching practice.

Prefacio

"En nuestra vida con los números hoy en día, podemos tomar tiempo y rechazar el estrés de las antiguas preguntas a quemarropa del tipo "¿siete por nueve?". Es esta pregunta la que le hizo, hace poco, un periodista en la tele al presidente de la Corte de Cuentas francesa. El presidente se situó espontáneamente en el modelo "antiguo", en el que se debe contestar de inmediato y dijo: "setenta y seis", lo que es absurdo por ser setenta y seis mayor que siete por diez. He aquí un diálogo que he imaginado entre este periodista de antaño y otro presidente, quiero decir un presidente de cuentas después del cambio civilizacional, que, como se verá a continuación, tiene con los números una relación no vacía y no dogmática:

Periodista: - ¿Siete por nueve?

Presidente: - Siete por nueve… ¡no me acuerdo! Siete por diez, setenta…

Periodista: - Conteste por favor.

Presidente: - Permítame que me tome un momento. Entonces… siete por nueve es setenta menos siete, es decir, sesenta y tres

Periodista: -Eso es.

Presidente: - También es igual a siete veces tres por tres, a saber, veintiuno por tres, sesenta y tres. Recuerdo que siete por ocho es cincuenta y seis, entonces siete por nueve es cincuenta y seis más siete, o sea cincuenta y seis más seis, es decir sesenta y dos, más uno, sesenta y tres. También siete por nueve es igual a ocho menos uno por ocho más uno, es decir, ocho al cuadrado menos uno, o sea sesenta y cuatro menos uno, o sea sesenta y tres. Bueno. También es igual a nueve por nueve, o sea ochenta y uno, menos dos veces nueve, o sea dieciocho. Entonces es igual a ochenta y uno menos veinte más dos, o sea sesenta y uno más dos, sesenta y tres. Bien, he aquí mi respuesta: sesenta y tres. Bueno es lo que creo.

(…)

Periodista: - ¡Tarda usted mucho en reaccionar!

Presidente: - No estoy reaccionando, señor, estoy buscando. Intento comprobar lo que pretende usted. Y para eso necesitamos tiempo.

Periodista: - Puede ser…

Presidente: - La matemática merece respeto. Y también la gente merece respeto. No somos máquinas. Y tampoco ¡somos brujos!

Periodista: - ¿Qué quiere decir?

Presidente: - Bien, la gente merece ser respetada. En particular en su relación con las matemáticas. ¿Usted qué opina?

Periodista: -Puede ser.

En este diálogo se ve una muestra pequeña de lo que me gustaría llamar "matemática lenta", lenta y razonada, y segura. Quien quiera un resultado rápido puede usar una calculadora".

Chevallard, Y., (2014). Fragmento recuperado por Irma Saiz. Congreso llevado a cabo en Córdoba, Argentina.

ÍNDICE

Introducción

Desde hace ya varios años, el cálculo mental ha vuelto a ser valorado en la enseñanza escolar, desde los primeros grados de la primaria. Varios factores confluyen en ello: por una parte, el hecho de que la enseñanza de los algoritmos convencionales de las operaciones, a la que tantas horas se dedicaban (y todavía se dedican), ha probado contribuir poco a desarrollar la capacidad de resolver problemas, utilizándolos, y poco también a incrementar la comprensión del funcionamiento de los números y sus relaciones. Aunado a ello, la presencia casi universal de las calculadoras ha aminorado notoriamente la necesidad de hacer cuentas precisas a mano, necesidad que era el principal sustento de dichos algoritmos.

Por otra parte, y de la mano con lo anterior, en el último cuarto de siglo ha ido cobrando fuerza en muchos países, incluido el nuestro, un enfoque para la enseñanza de las matemáticas que prioriza el desarrollo de capacidades como la de aprender matemáticas *haciendo matemáticas*, esto es, desarrollando herramientas (conocimientos, procedimientos) al resolver determinados problemas. Se valora no solamente la capacidad de ejecutar técnicas, sino la de crearlas, comprenderlas, adaptarlas flexiblemente a la resolución de problemas diversos. Es en este contexto donde se revalora actualmente una forma de cálculo mental, llamado también cálculo reflexivo, en la cual, para calcular, se desarrollan procedimientos diversos, personales, situados, en el sentido de adaptados a cada caso particular, fincados en un uso intensivo de las propiedades del sistema de numeración decimal y de las operaciones. Se atribuyen a este tipo de cálculo importantes beneficios, no solamente para calcular y estimar resultados aproximados, también para comprender mejor el funcionamiento de los números y sus relaciones, esto es, para desarrollar esa capacidad que ha expresado tan claramente Chevallard en el fragmento anterior, o también, lo que se ha llamado, de manera un poco vaga, “sentido numérico”. No sobra precisar que no se trata de aquel cálculo mental de los concursos de velocidad, muy publicitado por los medios. Ni tampoco se trata sólo del aprendizaje memorístico de resultados. No es ni la velocidad, ni la capacidad de operar con grandes números lo que interesa (de nuevo, ya hay calculadoras para eso).

En nuestros programas oficiales de primaria, al menos desde las adaptaciones curriculares del 2011, se ha vuelto a conceder un espacio explícito y amplio a este tema, indicando incluso los aprendizajes que pueden esperarse a lo largo de los distintos grados escolares.

En el marco de este interés por el cálculo mental reflexivo, se han desarrollado, en varios países, propuestas didácticas para apoyar su enseñanza en la escuela, y también, algunos estudios que investigan distintos aspectos de los procesos de aprendizaje. El presente trabajo se inscribe en esa dirección: busca contribuir al estudio de situaciones didácticas que favorezcan el desarrollo de procedimientos de cálculo mental y, principalmente, al estudio de su implementación en el aula. Grosso modo, el estudio consiste en el análisis de la implementación por una maestra de segundo grado, de algunas situaciones didácticas que fueron tomadas y adaptadas de un material didáctico afin al enfoque didáctico mencionado. Espero poder mostrar a lo largo del trabajo que la apropiación por una docente del enfoque didáctico del cálculo mental reflexivo, mencionado hasta ahora a grandes rasgos, implica dificultades considerables, y requiere de aprendizajes y apoyos específicos.

En el primer capítulo, presento los antecedentes de mi estudio y caracterizo la noción de cálculo mental reflexivo que orienta mi trabajo. Asimismo, presento la metodología del estudio. En el capítulo dos analizo la implementación en el aula de cuatro situaciones didácticas de tipo lúdico (juegos), destinadas a reforzar el repertorio básico de los alumnos. En el capítulo tres analizo la implementación de tres situaciones didácticas enfocadas en la resolución de sumas aisladas, con apoyo de papel y lápiz. Finalmente, presento un apartado de conclusiones.

Capítulo 1

Consideraciones sobre la enseñanza del cálculo mental en la escuela primaria

Este capítulo consta de tres partes principales. En la primera, sitúo la problemática de la enseñanza del cálculo mental en la escuela primaria desde la perspectiva de la evolución curricular, considerando los aportes de la investigación sobre el tema.

Posteriormente, en una segunda parte, presento las consideraciones sobre la naturaleza y la función del cálculo mental que fundamentan las situaciones didácticas estudiadas. Enseguida, presento grosso modo la secuencia de situaciones.

Finalmente, en una tercera parte, expongo la perspectiva teórica desde la cual realizo el estudio, a saber, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Ello me permitirá precisar el objeto de estudio y plantear las preguntas de investigación. Al terminar esta parte, preciso los aspectos relevantes de la metodología de la investigación.

1.1 Cambios en la enseñanza de las operaciones aritméticas a lo largo de las reformas curriculares

A lo largo de las reformas curriculares que se han sucedido desde los programas escolares de finales de los años 50 del siglo pasado, y posiblemente desde antes (Block y Álvarez, 1999; Block et al., 2007), se ha ido modificando, en alguna medida sutil, lo que se considera necesario enseñar respecto de las operaciones aritméticas básicas, así como la manera de enseñarlo. Estas modificaciones han concernido sobre todo a la centralidad de las técnicas operatorias convencionales, la cual se ha ido perdiendo al emerger otros aspectos, tales como el de los significados de las operaciones[1], lo que también ha afectado la manera en que se propone enseñar dichas técnicas.

No obstante, hasta hace muy poco, las técnicas mismas no habían sido objeto de discusión: en la escuela se siguieron planteando los algoritmos convencionales, es decir, aquellos que operan con las cifras de mismo orden de cada número, esto es, con las cifras

[1] La separación tajante entre técnicas y significados también es cuestionable puesto que un proceso de construcción de técnicas puede dar lugar también a la construcción de significados (Butlen, 2007).

situadas en una misma columna (unidades, decenas, centenas, etc.). A continuación, me referiré a algunos aspectos del proceso de cambios en la enseñanza de las técnicas convencionales para sumar y restar, esto es, de los algoritmos[2] de la suma y de la resta.

1.1.1 La importancia de entender el porqué

Como sabemos, los algoritmos de la suma y de la resta de los números naturales, se sustentan en propiedades del sistema decimal de numeración. Sin embargo, como todo algoritmo, su uso no requiere del conocimiento explícito de dichas propiedades. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 17 \\ \underline{+\ \ 8} \\ 25 \end{array}$$

Se pueden sumar 7 y 8 unidades, anotar un 5 como cifra de unidades del resultado, y agregar un uno a las decenas, sin necesidad de saber por qué se hace eso, es decir, sin necesidad de saber que el 1 en la segunda columna representa las decenas. La meta de un algoritmo es, a final de cuentas, ser utilizado siguiendo una rutina de pasos bien definida, sin tener que tomar decisiones en el transcurso: "los algoritmos tienen la ventaja de poder aplicarse mecánicamente sin reflexionar a cada paso" (Parra, 1994, p. 223)[3]. Pero la cuestión se complica en el ámbito escolar, pues ahí la finalidad práctica de disponer de una forma de resolver una operación coexiste con la de brindar una formación matemática al estudiante, y se subordina a ella.

En los materiales curriculares de los años 60, la enseñanza de la numeración y de los algoritmos se realizaba con el apoyo de la estructura decimal del dinero (Álvarez y Block, 1999), pero la relación de los algoritmos con el sistema de numeración decimal (SND), esto es, la justificación de los algoritmos, se mantenía implícita. En los años 70, en cambio, cobró mayor importancia explicar a los alumnos los conceptos matemáticos subyacentes, en su acepción más general posible: el SND se convirtió en objeto de estudio,

---

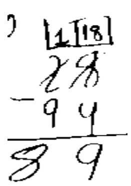
[2] Bouvier (citado en Castro Martínez, 1989) señala que un algoritmo consiste en una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos (Ver en Parra, 1994, p. 222).

[3] Para más claridad y fuerza del argumento, podríamos agregar: ¿a quién le preocupa, cuando se calcula con una calculadora, no comprender el funcionamiento de ésta?

junto con las nociones de agrupamiento en determinadas bases, así también la noción de valor posicional (SEP, 1970). La influencia de esta reforma siguió vigente en las propuestas curriculares que la sucedieron, especialmente en la del 93. En ésta última, se introdujo un repertorio amplio de situaciones didácticas y de materiales (juego del cajero, fichas de colores que representaban unidades de distinto orden, objetos agrupados en base 10, por ejemplo) que se gestaron durante los años anteriores, sobre todo en el ámbito de la investigación, y que buscaban hacer más accesible el propósito de la reforma de los años 70: que los alumnos comprendieran los principios del SND y a partir de ellos pudieran reconstruir los algoritmos por columnas, o al menos comprender lo que subyace a ellos. Es decir, al propósito de los años 70 de que los alumnos aplicaran los algoritmos de la suma y de la resta, se agregó el de la comprensión, e incluso el de la reconstrucción.

1.1.2 La noción de valor posicional, ¿una noción demasiado compleja?

La imagen muestra una resta realizada por una niña de segundo grado:



La alumna explica que no se puede quitar 9 a 8, por lo que el 8 le pide 1 al 2 y se convierte en 18. Luego dice: "esto ya no es", señalando el ocho, pone una línea diagonal y escribe 18 en el cuadrito que dibujó arriba. También marca el 2 y escribe 1 en el cuadrito superior. Después continua: "a 18 le quitas 9 (piensa un rato), serían 9". Prosigue con las decenas: "A 1 le quitas 9… no se puede". Le pregunto: "Entonces, ¿cómo le haces?". Me responde: "Pues a 9 le quito 1" (anota el resultado) y lo lee: "89" (Tomado del sondeo preliminar el 15 de diciembre de 2014).

El ejemplo anterior ilustra una situación frecuente en la escuela: los alumnos modifican alguno de los pasos del algoritmo convencional. Como ya he mencionado, en los años 70 se consideró que una de las razones de tales dificultades (si no la principal) radicaba en que dichos algoritmos tendían a ser memorizados sin que mediara la justificación de sus pasos. Esta explicación sigue vigente hasta nuestros días, aunque, a casi medio siglo de haberse iniciado el proyecto pedagógico de justificar los algoritmos, se vislumbran otras causas posibles. Lerner, Sadovsky y Wolman (1994) señalan que tales dificultades evidencian una comprensión inacabada de las técnicas algorítmicas, y muestran también ciertas dificultades de comprensión del sistema de numeración decimal. En efecto, investigaciones realizadas en los últimos 20 años han puesto de manifiesto que la comprensión de la noción de *valor posicional* (o relativo) es compleja para los niños de primer y segundo grado. Es difícil para ellos comprender, por ejemplo, que una cifra como el 2 en 325 tiene dos valores, uno absoluto, "2", que remite a la cantidad de decenas, y otro relativo o posicional: "20" que remite a unidades simples (Kamii, 1985; Lerner, 2005). También se ha mostrado que, en consecuencia, los alumnos no tienen claras las transformaciones que hacen al sumar o restar (llevo uno, desagrupo, pido prestado, etc.). En parte por ello, acaban memorizando los pasos del algoritmo convencional sin que se cumpla el viejo propósito de la comprensión (Lerner, 2005). Estos hallazgos, aunados a factores que veremos enseguida, han vuelto a poner sobre la mesa la posible conveniencia de aplazar el momento de enseñar, y justificar, los algoritmos convencionales por columnas.

1.1.3 El impacto de la calculadora

El cuestionamiento a la enseñanza temprana de los algoritmos se ha visto reforzado, muy probablemente, por el hecho de que su principal razón de ser, la posibilidad de hacer cuentas de números grandes, a mano, con eficiencia y rapidez, ha tendido a desaparecer debido a la presencia casi universal de las calculadoras. El desarrollo de esta tecnología ha contribuido a quitar una enorme presión que pesaba sobre los objetivos de la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria, permitiendo –y exigiendo a la vez– una redefinición de estos objetivos hacia aspectos semánticos de la operatoria (resolución de problemas con distinta estructura, exploración de propiedades, entre otros aspectos). Se trata ahora de:

> reconocer las situaciones en las que estas operaciones son útiles, saber escoger atinadamente el procedimiento más sencillo para resolver una suma o una resta, dependiendo de las cantidades involucradas, poder dar resultados aproximados y saber aplicar ciertas propiedades de la suma y de la resta para facilitar los cálculos (Block et al., 1995, p. 65).

Este proceso de redefinición de objetivos escolares de la aritmética ha sido, naturalmente, lento, máxime cuando el foco de los cambios, a saber, los algoritmos, constituyen un conocimiento consagrado en el curriculo de primaria durante años.

1.1.4 El cálculo mental en el currículo actual y en las prácticas en el aula

A partir de los programas de matemáticas de primaria del 2011, el cálculo mental ha recuperado un lugar[4] predominante: no solamente aparece el contenido "cálculo mental" en todos los grados, hay también una especificación del tipo de cálculos que se espera que los alumnos puedan hacer. Así, por ejemplo, en segundo grado y como parte del tema "Problemas aditivos" del bloque 1 (SEP, 2011, p. 86) se propone lo siguiente:

> PROBLEMAS ADITIVOS
> - Resolución de problemas que involucren distintos significados de la adición y la sustracción (avanzar, comparar o retroceder).
> - Construcción de un repertorio de resultados de sumas y restas que facilite el cálculo mental (descomposiciones aditivas de los números, complementos a 10, etcétera).

En el Plan y Programas 2017 titulado "Aprendizajes Clave para la Educación Integral", se dio continuidad al trabajo con el cálculo mental por grado, pero ahora aparece como uno de los propósitos para la Educación Primaria: "1. Utilizar de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales" (SEP, 2017, p. 226). Además se incluyen orientaciones didácticas que ofrecen ideas al docente de cómo trabajar el contenido. A continuación se muestra un ejemplo del libro de segundo grado (SEP, 2017, p. 245).

> El cálculo mental es una práctica que debe realizarse permanentemente, pues el desarrollo de esta habilidad permite agilizar los cálculos e identificar un resultado incorrecto. En este se sugiere trabajar los siguientes tipos, además de los que se enuncian en el recuadro.
> - Número mayor a 10 menos un dígito, con resultado múltiplo de 10, como en 56 – 6 = 50, 37 – 7 = 30,...
> - Sumas de la forma $a + b = 100$, como en 75 + 25 = 100; 32 + 68 = 100...
> - Sumas de la forma: $100 + a =$ ____ . Por ejemplo: 100 + 20, 100 + 45...
> - Restas de la forma: $100 - a =$ ____ con a múltiplo de 10: 100 – 30 = ____

[4] Antes de los programas del 2011, el lugar del cálculo mental había disminuido. En el programa de los años 70 se priorizó, en la enseñanza, la fundamentación del algoritmo convencional, más no el desarrollo de otros procedimientos. En el programa del 93 se hacía mención del cálculo mental, pero ni los programas ni los libros de texto incluían secuencias.

No obstante, en contraste con lo que se informa acerca de otros aspectos de la operatoria, es muy poco lo que se precisa acerca de cómo llevar a cabo la enseñanza de este tipo de cálculo. Lo anterior puede ser una de las razones por las que, en la práctica del aula, lo que se encuentra con frecuencia son rutinas que siguen muy de cerca el siguiente patrón: El profesor dice operaciones en voz alta (por lo general 10), los alumnos calculan el resultado mentalmente y lo anotan en su cuaderno; luego, proceden a corregir[5]. Frecuentemente los alumnos intercambian el cuaderno y el profesor va pidiendo a algunos que por turnos digan los resultados (INEE, 2017).

Así, el cálculo mental se enseña con un énfasis en la obtención casi instantánea del resultado de la operación, pero sin una progresión visible en la que se den condiciones para construir y difundir estrategias a partir de repertorios de resultados memorizados poco a poco, y en la que se considere la idiosincrasia de cada estudiante. Tal como se vio en los ejemplos del prefacio: hay diversas maneras de calcular 7 por 9 y el enfoque del cálculo mental reflexionado abre la posibilidad de que cada alumno elija el sendero que más le acomode para llegar al mismo resultado.

La presente tesis busca contribuir a suplir estas carencias por medio de un estudio de las condiciones didácticas que pueden favorecer el desarrollo de una modalidad de cálculo mental, en segundo grado de primaria.

1.2 Hacia el desarrollo de formas alternativas para sumar y restar

Desde hace aproximadamente 20 años, se ha revalorado el papel del cálculo mental en la escuela bajo una nueva perspectiva –aún incipiente– que caracteriza al cálculo mental como reflexivo, flexible y particularizante (Conne, 1987; Parra, 1994; Ortega y Ortíz, 2006; Butlen, 2007). La importancia de esta modalidad de cálculo es que pone en juego las propiedades del sistema de numeración decimal (SND) y de las operaciones, es decir,

[5] La maestra que participó en este estudio solía realizar actividades con un estilo similar al descrito, como parte de un proyecto institucional llamado la *Ruta de mejora*. Este tenía como propósito realizar diariamente "actividades para iniciar bien el día" en las áreas de español y de matemáticas; en el caso de esta última, se realizaban cálculos mentales.

enriquece lo que varios autores llaman el *sentido numérico*[6] (Wolman, 1999; García, 2014).

Esta valoración va de la mano con la disminución de la presión por enseñar tempranamente los algoritmos a los niños y con una concepción del aprendizaje de las matemáticas que prioriza la actividad matemática de los alumnos, actividad que se vincula con la comprensión, con la toma de decisiones y con el desarrollo de procesos, además de la obtención de los resultados correctos. Como ya he mencionado, dicha situación, favorable a los procedimientos alternativos a los algoritmos, también es deudora del uso en la escuela de calculadoras.

A continuación, ampliaré esta primera caracterización de la naturaleza del cálculo mental reflexivo y de su función.

1.2.1 Caracterización del cálculo mental reflexivo

Distintos autores (Parra, 1994; Gálvez, 2011; Askew y Ebbut, 2000; Butlen, 2007) señalan varias características comunes al cálculo mental, las cuales nos permiten definirlo. De acuerdo con Parra (1994):

> Por cálculo mental entendemos un conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo prestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados. Estos procedimientos se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal (SND) y de las operaciones aritméticas (p. 222).

Por otra parte, Conne (1987) destaca una característica general que revela el propósito mismo del cálculo mental, a saber, que este tipo de cálculo permite operar con los números de manera que se simplifiquen y faciliten los cálculos, así una operación aparece segmentada en varios subcálculos más sencillos y comprensibles para el sujeto: "el cálculo reflexionado consiste en un tratamiento simbólico que reemplaza una operación de cálculo por otra operación, o por una secuencia de operaciones más simples, pero equivalentes" (Conne, 1987, 128, 2-11).

Gálvez et al. (2011) también subrayan el carácter particularizante y flexible del cálculo mental:

[6] Tomo la definición "Habilidad y propensión para el uso de los números y las operaciones en formas flexibles para hacer juicios cuantitativos y para desarrollar estrategias eficientes con los números y los métodos cuantitativos" (Mcintosh, Reys y Reys, 1997. Cit. Por García, 2014, p. 58).

> apropiarse de las estrategias del CM implica utilizar de manera flexible y oportunista las propiedades del sistema de numeración y de las operaciones aritméticas para sustituir un cálculo que se propone en una situación dada por otro equivalente, pero más sencillo. Así, se desarrollan estrategias no convencionales "situadas", en el sentido que consideran la situación numérica donde se plantea el cálculo a realizar (p. 11).

Es importante destacar también que "la otra operación o secuencia de operaciones" se llevan a cabo no con las cifras que componen a cada número, como en los algoritmos convencionales, sino con los números considerados globalmente, esto es, no se opera con el valor absoluto de las cifras sino con su valor relativo.

En resumen, defino al cálculo mental como reflexivo (versus automático), flexible (versus predeterminado) y particularizante (versus general). Estas características ponen de manifiesto que cada operación representa un problema en sí mismo debido a los números que están en juego y a las variadas formas en que éstos se podrían manipular; por ello, cada sujeto enfrentará el problema de manera no necesariamente igual a la de los demás, desde sus conocimientos -disponibles o en elaboración-, los cuales le permitirán tomar decisiones que propicien el desarrollo de diversos procedimientos, la capacidad de estimar resultados, de descartar errores grandes y de escoger el camino más sencillo y pertinente según sus propios conocimientos.

Con el paso del tiempo, se espera que el sujeto adquiera un conjunto de estrategias que le permitan, frente a una operación dada, desarrollar un procedimiento que le resulte adecuado.

Precisaré también que en este trabajo no me referiré al cálculo mental como un complemento del cálculo algorítmico (como lo es, por ejemplo, la práctica de 10 minutos diarios de cálculo mental que es frecuente hoy en día en las escuelas), sino como una alternativa para el estudio de las operaciones, previa y paralela al estudio de los algoritmos de la primaria. Este es el sentido que se asume también en las principales fuentes consultadas, tanto en las propuestas didácticas (Parra y Saiz, 2013; QCA, 1999) como en las investigaciones (Butlen, 2007).

1.2.2 La suma y la resta: una función esencial de los números

Con respecto a la relación de la noción de número con la de suma y resta. González y Weinstein dicen lo siguiente:

> Una función esencial de los números es justamente la de calcular, esto es, la de permitir anticipar el resultado de trasformaciones sobre las cantidades. Es la posibilidad que dan los números de anticipar resultados en situaciones no visibles, no presentes, aún no realizadas, pero sobre las cuales se posee cierta información. Esta función implica comprender que una cantidad puede resultar de la composición de varias cantidades y que se puede operar sobre números para prever el resultado de una transformación de la cardinalidad (González y Weinstein, 1998, p. 45).

Parto de que el conocimiento de la suma como cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos lo tienen los alumnos de segundo grado en una medida suficiente para abordar las situaciones e ir perfeccionando las técnicas para sumar. Pero hace falta una consideración más: en las situaciones de cálculo reflexivo se trabaja frecuentemente con operaciones descontextualizadas en las que, por lo tanto, no está implicado un trabajo de modelización (de una situación no matemática, con conocimientos matemáticos), sino un trabajo en el modelo matemático mismo: se trata de perfeccionar técnicas para sumar y restar, movilizando propiedades de dichas operaciones y del SND. Por lo tanto, otro supuesto de partida es que el conocimiento antes mencionado (la suma como cardinal de la unión de dos conjuntos) permite a los alumnos trabajar a partir de una consigna que se da en el nivel numérico, sin referencias a magnitudes concretas. Se parte de que ellos tienen la posibilidad de concretizar esos números y la relación entre ellos, en caso de necesitarlo (con marcas en el papel, con los dedos, etc.). A la vez, considero, con las autoras citadas en el párrafo anterior, que el trabajo con situaciones de suma, centrado en las técnicas, contribuye a reforzar el conocimiento sobre el número mismo.

Con respecto a la resta precisaré que, si bien no forma parte de este estudio como operación independiente de la suma, sí aparece de manera implícita en las sumas en las que lo que se desconoce es un sumando (las famosas sumas “con hueco”, por ejemplo: ¿Qué número sumado a 4 da 11?), dando lugar así a una extensión y profundización del trabajo con la suma misma.

1.2.3 El cálculo reflexivo y el SND: nociones vinculadas que se retroalimentan

Las operaciones aditivas de números naturales se construyen a la par y en interrelación con la noción de número y de sistema de numeración decimal (SND). Wolman (s/f, p. 5) señala: “[…] la relación existente entre notación numérica y operaciones aritméticas constituye una instancia privilegiada para profundizar en la comprensión del sistema de numeración decimal”. Lo anterior es posible porque: “Los procedimientos numéricos que los niños utilizan para resolverlas ponen en juego el conocimiento que ellos están construyendo acerca del SN, facilitando de esta manera el establecimiento de los vínculos que existen entre éste y sus procedimientos de resolución” (Wolman, 2010, p. 4). En el mismo sentido, Lerner, Sadovsky y Wolman (1994, pp. 162-163) afirman:

> Cuando los chicos se enfrentan a situaciones problemáticas, generan –además de estrategias propias para resolverlas– procedimientos originales para encontrar los resultados de las operaciones involucradas, procedimientos que están vinculados a la organización del sistema de numeración decimal.

1.2.4 ¿Cómo se construyen los procedimientos?

Hasta aquí hemos visto algunas de las principales características del cálculo mental reflexivo que han sido destacadas por varios investigadores del tema. Ahora, me centraré en las consideraciones que algunos de estos mismos investigadores hacen respecto del aprendizaje y de la enseñanza de este tipo de cálculo.

Dos grandes tipos de conocimientos: repertorio y estrategias

Los estudiosos de la didáctica del cálculo mental (Butlen, 2007; Saiz y Parra, 2007; Askew y Ebbutt, 2000; Ortega y Ortiz, 2002) coinciden en distinguir dos grandes tipos de conocimientos que los alumnos deben ir desarrollando paralelamente: por una parte, un repertorio de cálculos memorizados que serán a su vez los insumos del otro tipo de conocimiento: las estrategias[7] de cálculo mental para simplificar los cálculos. Al respecto señalan Askew y Ebutt (2000):

> There are two aspects to mental calculations: knowing by heart, and being able to calculate quickly. By Year 3, children should know by heart number bonds to 10, including doubles, and be very familiar with number bonds to 20. That´s all they need to recall instantly. To calculate quickly and efficiently they need to know how to use these facts, how the number system works, and how to derive new facts from the ones they know. Knowing by heart is the easiest bit: short bouts of daily practice will achieve this. The main work is in helping children to understand the logic and order behind numbers, and to develop strategies of manoeuvring them in their heads (Askew y Ebutt, 2000, p. 16).

---

[7] Llamaremos “procedimiento” al camino seguido por un alumno para llegar a un resultado, no importa si dicho camino es consciente o no, sistemático o no. Usaremos el término de “estrategia” para referirnos a procedimientos relativamente sistemáticos, y estables (se utilizan más de una vez) que permiten simplificar los cálculos a quien los utiliza. Un alumno denota disponer de una estrategia cuando la utiliza más de una vez, adaptándola a los nuevos números en juego.

El repertorio

Por otro lado, para construir el repertorio aditivo es necesario implementar actividades rutinarias (pueden ser lúdicas, como veremos) en las que, a través de la repetición de cálculos, la identificación de propiedades de las operaciones y regularidades de la numeración se vayan memorizando un conjunto de operaciones básicas, por ejemplo, la suma de dígitos. Hay relativo consenso entre los estudiosos de cuáles son estos cálculos básicos. A título de ejemplo, puede verse, en la figura 1, una propuesta realizada por Irma Saiz (tomada de Parra, 1994, p. 240):

1° Ciclo: Contenidos de Matemática. Cálculo Mental (Provincia. de Corrientes) Distribución de contenidos realizada por la licenciada Irma Sáiz para el programa de matemática		
1° grado	2° grado	3° grado
Sumas de la forma: a + b = 10 Restas de la forma: 10 - a = b Restas de la forma: a - b = 1 Sumas de la forma: a + a = con a ≤ 10 Complementos a 10: a + ...= 10 Sumas de la forma: 10+a=...; 20 + a=... Sumas de la forma: a + b = 100 con a y b múltiplos de 10 (Ej: 20 + 80 = 100) Complementos de 100: a +... = 100 con a múltiplo de 10 (Ej: 70 + ... = 100) Escrituras equivalentes: 34 = 30 + 4 9 = 5 + 6 - 2 34 = 10 + 24 9 = 4 + 5 34 = 10 + 10+ 10 + 4 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 34 = 40 - 6 9 = 10 - 1 etc. Propiedades conmutativa y asociativa	Restas de la forma: a - b = 10 Sumas de la forma: 100 + a= Restas de la forma: 100 - a = con a múltiplos de 10 (Ej: 100 - 30 =...) Complementos a 100: a +...= 100 (Ej: 28 +...= 100) Sumas de la forma: a + b = 100 (Ej: 75+25=100; 32+68=100) Dobles y mitades Escrituras equivalentes: 147 = 50 + 50 + 47 147 = 100 + 47 147 = 40 + 60 + 30 + 17 147 = 200 - 50 - 3 Distancia entre dos números (Ej.: distancia entre 50 y 76) Escalas ascendentes y descendentes del 2, 5 y 10.	Escalas ascendentes y descendentes del 10, 20, ...100, 200... Encuadramiento de números entre decenas, centenas, etcétera. (Ej.: 20 < 28 < 30 140 < 145 <150 100 < 145 < 200) Restas de la forma: a - b = 1; a - b = 10; a - b = 100; etcétera. Escrituras equivalentes: (Ej.: 1359 = 500 + 500 + 300 + 59 = 1000 + 300 + 50 + 9 = 2000 - 200 - 40 - 1) Sumas y restas con medidas de tipo: años, día, mes, semana, hora, 1/4 h, etc. Multiplicaciones de la forma axb con a<10 Divisiones y multiplicaciones especiales: x2: ÷ 2; x4 (multiplicar dos veces por 2); x8 (multiplicar tres veces x2); ÷ 4 (dividir dos veces por 2); x5: ÷ 5: etcétera. Dobles y mitades. Triples y tercios. Propiedades conmutativa y asociativa.

Figura 1

Los resultados básicos del repertorio son la base para resolver operaciones más difíciles por medio de estrategias de cálculo que se desarrollan poco a poco. Así, Ortega y Ortiz (2006, p. 100) señalan:

> El cálculo mental que realiza cada individuo, así como su manera de llegar a la resolución, depende del dominio de una serie de cálculos elementales que podemos señalar como básicos, y que son los que van a marcar la estrategia de resolución. A estos cálculos los denominamos actividades básicas de cálculo mental, y cada individuo consciente o inconscientemente, tenderá a hacer uso de aquel procedimiento o estrategia, cuyos componentes básicos domina mejor o cree que con ellos obtiene mejores resultados.

Las estrategias de cálculo mental

La idea fundamental que subyace a cualquier estrategia es la de sustituir un cálculo difícil por otro cálculo, o serie de cálculos, que sean equivalentes (que lleven al mismo resultado), pero más sencillos de llevar a cabo. Descomponer y componer números, aprovechar las propiedades asociativa y conmutativa de la suma son elementos básicos de la mayoría de las estrategias. En la revisión de los aportes sobre el tema encontramos que la especificación de las estrategias varía un poco de acuerdo a los autores, por ejemplo, en el documento The National Numeracy Strategy (QCA, 1999), se proponen las siguientes:

- Contar hacia adelante o hacia atrás

    6 + 7, conteo de uno en uno desde el seis (o desde el siete)

    27 + 50, conteo de diez en diez a partir del 27.

- Reordenar los sumandos

    7 + 12 = 12 + 7=

- Descomponer (i). Completar para tener múltiplos de diez y de 100

    17 + 14 = 10 + 7 + 10 + 4 = 31, o también: 10 + 10 + 7 + 4 = 31

- Descomponer (ii). ompletando la decena: Es necesario saber la decena que va antes o después, reconocer, por ejemplo, que el 43 llega al 50 si le sumo 7 ó que el 43 llega al 40 si le resto 3.

    8 + 3 = 8 + 2 + 1= 11

- Descomponer (iii) compensando, útil para sumar o restar números cercanos a múltiplos de 10, especialmente los números que terminan en 1 o 2, y en 8 o 9.

    44 + 9 = 44 + 10 - 1= 53

- Descomponer (iv). Usar los dobles cercanos

    13 + 14 = 13 + 13 + 1 = 27

En este material se distingue entre relaciones del repertorio básico (lo que tienen que saber de memoria) y estrategias y mentales (los procedimientos que deben poder desarrollar para hacer los cálculos). Ambas dimensiones se van enriqueciendo año con año a lo largo de la primaria.

1.2.5 La escritura y las puestas en común

De acuerdo con Wolman (2002), la escritura tiene varias funciones: más que solamente permitir evocar el proceso y comunicarlo a los demás, resulta importante para la actividad cognitiva del sujeto. En un sentido privado, la escritura numérica permite exteriorizar y objetivar el modo de pensar. Permite que los alumnos piensen sobre sus propios conocimientos, y contribuye al proceso de ayudarlos a tomar conciencia de los procedimientos que ponen en juego e incluso puede servir como un medio de control del procedimiento desplegado. Askew (2004) dice algo similar: "el anotar algo, como una especie de registro informal de lo que se está haciendo mentalmente, ayuda a desarrollar mejor los métodos mentales (…) se les incentiva a hacer un registro escrito para que muestren cómo han llegado a saber, con seguridad (…)" (p. 24.). Asimismo, la escritura se revela como un medio para que los alumnos recuerden sus propias formulaciones, es una forma de "guardar las marcas de lo realizado y evocarlo en otros momentos sin modificaciones ni olvidos" (Wolman, p. 91).

Una pregunta que surge entonces es: considerando que, en el cálculo mental, a diferencia de los algoritmos convencionales, la escritura no forma parte inherente del procedimiento, ¿cómo lograr que los alumnos sientan la necesidad de escribir sus cálculos, que la escritura sea vista como un apoyo para resolver y controlar sus cálculos, y que no escriban solamente por satisfacer una exigencia vista como arbitraria? Wolman dice al respecto:

> En ese sentido la enseñanza de la escritura de los cálculos no es una imposición externa, que puede no tener significado, sino un medio de representación aritmética que coincide con lo desplegado cognitivamente por los alumnos como medio de resolución y brinda la oportunidad de ir aprendiendo la representación convencional (Wolman, 2002, p. 93).

La investigadora abunda sobre la función de la escritura durante las puestas en común, y recíprocamente, deja ver la función de la puesta en común como marco que da sentido a escribir:

- En los momentos de las puestas en común, la escritura funciona como un apoyo para la comunicación: permite trabajar sobre los procedimientos mismos. Facilita regresar a mirar las anotaciones para analizarlas y comparar los distintos procedimientos con base en las diferentes maneras de representación del proceso seguido.

- La escritura, como se ve, permite hacer pública una parte del proceso de resolución, y ofrece, por tanto, la posibilidad de que todos los demás puedan acceder a ésta.
- Mediante la escritura, la docente puede traducir aquello que los alumnos plasmaron, sea claro o no, su ayuda ofrece la posibilidad de que circule en el aula. Su intervención: "apunta a tender un puente entre lo que los alumnos están pensando y la representación convencional" (Wolman, 2002, p. 93).

Anticipé, al igual que Wolman, que los niños no realizarían anotaciones desde el principio, para esto se precisa de cierta intervención docente. De hecho, se reconoce que el docente mismo puede aportar a veces explicitaciones escritas para dar mayor visibilidad a un procedimiento. Wolman, al igual que Askew (2004), señalan la posibilidad de "convertir las escrituras aritméticas en objetos de enseñanza" (p. 93). Por ello, ve necesario que los alumnos escriban sus procedimientos y que los docentes "ofrezcan el modelo de la escritura aritmética en correspondencia con lo expresado por ellos (los alumnos)." (Wolman, 2002, p. 93). Una forma que contribuye a esto dice, es que los alumnos interpreten las producciones de sus compañeros, que traten de entender el procedimiento de éstos.

Así, pienso también que la explicitación escrita se puede pensar como parte del binomio conocimiento/saber: el conocimiento es una construcción personal (en ese sentido entraría la escritura privada del niño), pero al hacerla pública (gracias a las puestas en común) se abona a que dicho conocimiento pueda convertirse en un saber, en términos de que "el saber es una elaboración cultural y es propio del saber el ser explícito" (Wolman, 2002, p. 18).

Cabe señalar, no obstante, un riesgo, señalado por Butlen, 2007 (y por Saiz en una comunicación personal), de que la explicitación escrita pueda convertirse en una forma de algoritmizar un procedimiento y, me imagino, obstaculizar la emergencia de otros procedimientos.

Por otra parte, la importancia de las puestas en común, más allá de ser un espacio privilegiado para funcionalizar la escritura de procedimientos, también radica en la posibilidad que tiene la maestra de organizar, de poner el foco en algo que ella considere importante, de retomar alguna idea dicha en una clase anterior, es decir, de hilar los conocimientos que surjan, incluso de nombrarlos, de decidir cuáles enfatizar, retomar o incluso abandonar. Como dice Wolman (2002, p. 136):

> El maestro interviene para organizar la participación de los alumnos, para que puedan volver sobre sus propias acciones y producciones, describirlas, justificarlas, comparar distintos desarrollos, reconocer los límites de los conocimientos que antes habían empleado, llegar a reconocer su procedimiento como diferente de otros utilizados por sus compañeros y considerar en qué aspecto lo es aunque obtengan el mismo resultado. Comprender los procedimientos de sus compañeros y los conocimientos numéricos involucrados en ellos amplia el campo de las posibilidades de todos.

En el mismo sentido, pero desde el punto de vista de los alumnos, Saiz (1995, p. 1) dice al respecto:

> El desarrollo de este momento (la puesta en común) obliga a los alumnos, por un lado a volver sobre sus procesos, sobre sus propias acciones, a describirlas y a defenderlas y a tomar conciencia de los recursos de los que dispone, de su pertinencia y de su validez; pero también a tratar de comprender los procesos de los demás, de sus argumentos y si es posible, de apropiarse de los procedimientos de sus compañeros, ampliando el campo de sus posibilidades.

Como puede apreciarse, la comunicación de procedimientos, de ideas para mejorarlos, en el seno del grupo, puede ser tan importante como la creación misma de los procedimientos. Volveré sobre esta cuestión en al apartado siguiente, desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

A continuación, preciso la perspectiva teórica y metodológica desde la cual concibo y analizo los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, en particular, del cálculo mental.

1.3 Perspectiva teórica y metodológica del estudio

En este apartado doy cuenta de los conceptos centrales de la teoría sobre la comunicación del saber matemático, la cual orienta mi trabajo, a saber, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Justificaré la elección de dicha teoría para mi estudio e iré acotando, cuando sea pertinente, la forma en que aplico dichos conceptos al caso de la enseñanza del cálculo mental. Posteriormente, presento las preguntas de investigación y, finalmente, las características metodológicas de la investigación.

1.3.1 Orientación teórica, conceptos básicos

La TSD constituye un marco de referencia que me ha parecido el más adecuado para desarrollar el presente estudio por dos razones: por una parte, ofrece herramientas teóricas que dan cuenta de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de nociones matemáticas, a partir de su cristalización en "situaciones didácticas", concebidas como un modelo de interacciones entre el alumno, un medio y un saber (Brousseau, 2007). Por otra parte, porque las actividades de cálculo reflexivo que se estudian aquí se orientan por un presupuesto básico sobre el aprendizaje de las matemáticas, asumido en la TSD, a saber: el carácter fundamental de las interacciones del alumno con un medio que le presenta dificultades, resistencias, y propicia la construcción de conocimientos en tanto herramientas que ayudan a superar esas dificultades. En lo que sigue, presento algunos conceptos de la TSD que son importantes en mi estudio, destacando las formas específicas que asumen en éste, pero sin pretender ser exhaustiva pues volveré a ello más adelante, en los momentos en que tales conceptos hacen falta y se utilizan al abordar el caso específico del cálculo reflexivo en las situaciones de los capítulos 2 y 3.

La noción de medio (*milieu*), más precisamente de "medio antagónico" (Brousseau, 2007; Fregona y Baguena, 2011), entendida como la problemática con la que el sujeto interactúa con cierto fin, es fundamental. El medio antagónico está constituido por el problema al que se enfrenta el alumno, incluyendo los materiales concretos que se utilizan para plantearlo, y también por los otros sujetos que participan con sus roles específicos, cuando los hay. Por ejemplo, en los juegos en parejas, el segundo jugador muchas veces forma parte del medio del primero. En las situaciones de cálculo reflexivo, la problemática que plantea el medio es frecuentemente una operación aritmética cuyo resultado debe hallarse.

En mi trabajo, busco aportar conocimientos relativos tanto al *medio* con el que el alumno interactúa –la secuencia de problemas, la retroalimentación de los pares y del maestro–, como a las características del *medio* con el que el maestro interactúa, esto es, la organización del *medio*[8] del alumno: consignas, organización del trabajo, ayudas, gestión de las puestas en común.

Cabe precisar también desde ahora una característica del medio sobre la que volveré varias veces: el medio puede ser distinto para cada uno de los alumnos, pues la problemática que el sujeto vive depende de sus propios conocimientos (Perrin-Glorian (2009); Sensevy (1996).

Saberes y conocimientos; enculturación y adaptación. La TSD introduce una distinción fundamental entre saberes y conocimientos: los conocimientos que los alumnos ponen en juego pueden estar implícitos en sus procedimientos, a diferencia de los saberes culturales, los cuales son explícitos, compartidos, avalados por una comunidad. Un alumno de cuatro años, por ejemplo, puede ser capaz de traer la cantidad exacta de pinceles que se necesitan para que cada vaso tenga su propio pincel, usando sus dedos como colección intermedia, sin saber aún que esa colección constituye una representación de la cantidad y es, por lo tanto, una forma de "número" (Ramírez y Block, 2006). El número constituye un saber cultural, mientras que aquello que el alumno movilizó, es un conocimiento de número, implícito (Conne, Brousseau, en Block, 2001). En el proceso de enseñar y aprender matemáticas, conocimientos y saberes coexisten de maneras diversas: el enseñante parte de un saber y organiza una situación que lo implique. Al resolver la situación, el alumno, idealmente, en un primer momento pondrá en juego conocimientos implícitos ligados a ese saber. En un segundo momento tomará conciencia de esos conocimientos, para que después, con ayuda del docente, los pueda vincular con los saberes culturales. Este último momento corresponde a lo que se ha llamado "institucionalización" de conocimientos, de la que hablaré poco más adelante. Por ahora, quiero destacar los dos procesos que Brousseau identifica en la enseñanza: uno de tipo cognitivo, el aprendizaje por adaptación a un medio, y el otro de tipo social, la "enculturación", esto es, la adquisición de saberes producidos en la cultura:

---

[8] Sobre la noción de medio del alumno y medio del maestro ver Perrin-Glorian (s/f), Fregona y Baguena, 2011.

> Desde esta perspectiva, la enseñanza se convierte en una actividad que no puede sino conciliar dos procesos, uno de enculturación y el otro de adaptación independiente" (Brousseau, 2000, en Block, 2001).

Cabe preguntar ahora: ¿cuáles son los saberes en juego en los procesos del cálculo reflexivo? El cálculo reflexivo está constituido por un conjunto de estrategias que pueden combinarse de distintas maneras para producir, cada vez, procedimientos específicos. Partimos, efectivamente, de que los alumnos pueden poner en juego procedimientos de cálculo diversos, los cuáles pueden ser implícitos y más o menos precarios. Mediante la práctica y mediante distintas acciones de enseñanza, se espera que sus procedimientos se vuelvan eficientes, y también explícitos, sin perder su característica esencial de flexibilidad. Puede decirse que, en esta medida, se vuelven "saberes", saberes "procedimentales" si se desea ser más preciso para distinguirlos de otros, por ejemplo, los saberes relativos a nociones (Coll y Solé, 1989). Hay que precisar también que aquello que se explicita suele ser parcial: solamente algunos de los componentes del procedimiento, no necesariamente todos, ni tampoco, al menos no en la enseñanza primaria, las propiedades matemáticas que subyacen.

A partir de estas categorías, en la TSD se plantea otra distinción importante en los procesos de aprendizaje y enseñanza escolar: la devolución y la institucionalización.

La devolución da cuenta del proceso mediante el cual el docente logra que el alumno se haga cargo del problema, asumiendo toda la responsabilidad de sus acciones, es decir, con autonomía del docente. Bien cabe destacar que se trata de un proceso y no de un acto instantáneo, que depende de la existencia de una situación que lo haga posible (ver más adelante la noción de "adidáctica") y de una forma de relación del maestro con los alumnos, de un "contrato didáctico", en el que el docente propicie que el alumno sepa que lo que se espera de él es que actúe con autonomía, sin esperar indicaciones del profesor.

> Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir como el que propone los conocimientos que quiere propiciar. El alumno sabe bien que el problema fue escogido para ayudarlo a adquirir un nuevo conocimiento, pero debe saber también que ese conocimiento está completamente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin apelar a razones didácticas. No solamente puede, sino debe, ya que no habrá adquirido verdaderamente ese conocimiento sino hasta que sea capaz de

> utilizarlo por sí mismo en las situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza (Brousseau, 1998, p. 59).

La institucionalización da cuenta del momento (por lo general, varios momentos) en el que el docente contribuye a vincular los conocimientos implícitos con los saberes culturales. Ayuda a identificar, entre lo que se ha hecho, aquello que debe destacarse, nombrarse, vincularse con otras nociones. En palabras de Brousseau:

> Escoger ciertas preguntas entre las que ya se saben resolver, ubicarlas en el corazón de una problemática que confiere a las respuestas un estatuto de saber más o menos importante, vincularlas a otras preguntas, a otros saberes, constituye a final de cuentas lo esencial de la actividad científica. Este trabajo cultural e histórico difiere totalmente del que podría dejarse a cargo del alumno, le corresponde al maestro, no es el resultado de una adaptación del alumno (Brousseau, 1998, p. 77).

La noción de situación adidáctica. Para que un proceso de devolución tenga lugar, es decir, para que el alumno asuma la responsabilidad de la resolución de la tarea con autonomía de su maestro, es necesaria una situación "adidáctica". Estas situaciones se caracterizan por plantear un reto, una meta a alcanzar, que impliquen al conocimiento en cuestión en calidad de herramienta (en este caso, las herramientas son procedimientos de cálculo), pero que puedan abordarse sin disponer aún de ese conocimiento; asimismo, devuelven al alumno información sobre sus decisiones, esto es, retroalimentan sus acciones, de manera que él pueda valorar en qué grado se acercó o no a la meta; finalmente, presentan variables que permiten complejizarlas de manera que se propicie la evolución de los procedimientos de resolución (Wolman, 2002). Se trata de situaciones que buscan hacer posibles aprendizajes de nociones o procedimientos nuevos para el alumno, a diferencia de aquellas en las que se espera la aplicación de conocimientos ya adquiridos. Estas situaciones, por lo general, constituyen momentos al interior de secuencias didácticas amplias, en las que hay otros momentos propiamente didácticos, esto es, en los que el profesor enseña directamente ciertos aspectos (institucionalización).

Procesos de acción, formulación y validación

En el proceso de construir un conocimiento matemático, la TSD distingue momentos en los que la función del conocimiento cambia (Brousseau, 2007): momentos de **acción**, en los que el sujeto implicado en la resolución de un problema desarrolla conocimientos implícitos (un modelo implícito, dice Brousseau) para resolverlo; momentos de

formulación, en los que se hacen explícitos aspectos del conocimiento, y donde, a veces, se crea un lenguaje específico para dar cuenta de las nociones; momentos de **validación**, en los que ya no se trata de resolver, sino de probar a uno mismo y a otros la validez de ciertos procedimientos, de argumentar; y finalmente, momentos de **institucionalización**, que ya he comentado anteriormente.

Así, aprender un conocimiento matemático no significa solamente resolver un problema, implica también ser capaz de formularlo, de argumentar por qué la resolución producida es válida, de vincularlo con otros saberes culturales. Estos distintos tipos de relación con el conocimiento se pueden propiciar con situaciones didácticas específicas (situaciones de acción, de formulación, etc.) que buscan hacer necesaria la relación con el conocimiento en juego (por ejemplo, que la formulación cumpla con un fin específico). Si bien no en todos los procesos se identifican estos momentos, ni en el orden en que fueron expuestos, estas categorías son muy útiles para identificarlos y para analizarlos.

Cabe hacer ahora algunas precisiones relativas a las situaciones de cálculo reflexivo. Con respecto a la formulación de conocimientos, se trata de poner palabras, orales primero, escritas después, a aquello que se hizo mentalmente para calcular. Como se verá a lo largo de este trabajo, tomar conciencia de lo que se pensó, y comunicarlo con palabras son procesos que resultan difíciles para los niños, y que se van aprendiendo poco a poco. Con frecuencia, como veremos, lo que hacen ante la petición de explicitar, es construir una historia distinta a la que vivieron.

Sobre la validación es preciso aclarar que, debido a que se trata de cálculos descontextualizados, en general la retroalimentación del medio no es empírica, es decir, los alumnos no obtienen información inmediata del medio, acerca de sus resultados. Por ello se propician otros tipos de validación, que la misma TSD ha documentado ya (Brousseau, 2007, Block, 1991): la validación semántica, que se obtiene mediante argumentos basados en propiedades ya avaladas por los demás (por ejemplo, se puede argumentar que 25 - 13 no puede ser 32, pues el resultado debe ser menor que el minuendo)[9] y la validación sintáctica, que es la que se obtiene cotejando los pasos seguidos con las reglas establecidas (se revisa si se siguieron los pasos de una técnica ya avalada, uno por uno, sería el caso de los algoritmos). Además, está la validación social, que es la que proporciona el aval o la reprobación de un resultado por los otros, los compañeros o el maestro. Esta forma de validación tiene la desventaja de no proporcionar razones, pero es a la vez la que se adecua mejor en situaciones como los juegos, en las que la dinámica no favorece detenerse mucho tiempo en la revisión de resultados. Es cuando hay desacuerdos, y que éstos se explicitan, que dicha validación semántica o sintáctica pueden entrar en juego. Una forma de apuntalar los procesos de validación en las actividades de cálculo mental es mediante el uso de la calculadora para verificar. La calculadora tampoco aporta "razones" de por qué un resultado es correcto o incorrecto, solamente lo señala proporcionando un resultado, presumiblemente correcto (si no hubo errores en el tecleo), pero tiene la no desdeñable ventaja de ser independiente de la validación del docente. Finalmente, en algunas situaciones, pocas, se da lugar a una validación de tipo empírico, por ejemplo, cuando se trata de averiguar a partir de ciertos datos, cuál es un número anotado en una tarjeta que ha permanecido oculta, y los alumnos pueden comprobar al final si su anticipación es correcta viendo la tarjeta (lo veremos en el juego de "Saludos").

El cálculo reflexivo, ¿se enseña o se desarrolla espontáneamente? Haré ahora una precisión con respecto a la forma específica en que asumo la noción fundamental de *medio*, y más ampliamente, de aprendizaje a través de las interacciones con éste, en el estudio de situaciones de cálculo reflexivo. Como vimos, en la TSD se postula que, en un proceso de aprendizaje de una noción, es necesario un medio con el que el sujeto interactúe, un medio "adverso", antagonista, que presente dificultades y propicie el desarrollo de conocimientos implícitos. Pero también se da un lugar a la aportación tanto de los compañeros, en los procesos de formulación y validación, como del docente. Este último como portador de un saber cultural. El caso de la enseñanza del cálculo reflexivo

[9] La validación semántica supone, con más fuerza que las otras, que aquél a quien se intenta convencer, comprende las relaciones y propiedades que se movilizan en la argumentación. Por supuesto, esto no siempre ocurre así (ver Block, 1991).

no es, me parece, distinto al de otras nociones de matemáticas, pero sí requiere enfatizar la importancia de los aportes de los demás, y en particular del docente. Como se verá en el desarrollo de este estudio, con frecuencia ocurre que son pocos los alumnos que ponen en juego, por sí mismos, un recurso que se quiere propiciar, e incluso a veces no se identifica ninguno. En estos casos, una parte importante del grupo, o todo el grupo, recibe una propuesta de otros, eventualmente del docente. Esto no significa que los alumnos se limiten a "recibir información", más bien se trata de que conozcan una alternativa propuesta por otros en circunstancias en la que ellos ya enfrentaron el problema e identificaron una necesidad. Perrin-Glorian (2009, p. 70) dice al respecto:

> ...la presencia de un *milieu* potencialmente adidáctico es importante, *no solamente para la investigación que hace el alumno sino también para las intervenciones del profesor* en una fase didáctica: la ayuda que él aporte a los alumnos puede entonces no surgir de su sola autoridad; el profesor puede recurrir a los conocimientos que pueden movilizar los alumnos para activar las partes del *milieu* que ellos no han movilizado espontáneamente, que no es lo mismo que suministrar directamente la solución.

Por lo anterior, la respuesta que propongo para la pregunta con la que abrí este apartado[10] es que se deben propiciar "ambas cosas a la vez", o más precisamente, ampliando la significación de "enseñanza", diré: el cálculo reflexivo se enseña siguiendo dos estrategias fundamentales: planteando situaciones que favorezcan su desarrollo de manera relativamente autónoma, y también, generando condiciones para que el alumno reciba información oportuna de los compañeros y del docente[11].

1.4 Preguntas de investigación

Con esta tesis busco aportar al conocimiento de las condiciones didácticas que favorecen el desarrollo de procedimientos de cálculo reflexivo en alumnos de segundo grado de primaria en el aula. Este propósito me lleva a distinguir dos grupos de objetivos y de

[10] Reconozco que la pregunta no está bien planteada en el fondo, pues construir también supone una enseñanza, aquella que dispuso del medio que hace posible la construcción. No obstante, permite comunicar rápidamente una dicotomía.

[11] Podría contra argumentarse que está documentado que adultos no escolarizados desarrollan importantes habilidades de cálculo mental sin enseñanza previa expresa (Ferreiro, et al, 1983; Ávila, 2005; Block y Dávila, 1993). Cabe señalar aquí únicamente que los adultos desarrollaron sus procedimientos a través de un largo tiempo de interacciones con diversas problemáticas. Se espera que nuestros alumnos de primaria, quienes no siempre enfrentan fuera de la escuela una gran variedad de problemáticas que los lleven a calcular, puedan desarrollar habilidades de cálculo mental en mucho menos tiempo.

preguntas, las relacionadas directamente con las características de las situaciones, a la luz de las interacciones de los alumnos con éstas, y, por otro lado, las relacionadas con la mediación de la docente.

Con respecto a la secuencia didáctica, intento responder las siguientes preguntas:

1) ¿Qué características debe tener una *secuencia didáctica* (¿qué fases? ¿con qué objetivos?) para favorecer la apropiación de las estrategias principales de cálculo reflexivo, las cuales ya se han detectado en otros estudios (y que detallaré en el apartado siguiente), por los alumnos de segundo grado de primaria?
2) ¿Qué características pueden tener las situaciones que integrarían dicha secuencia para favorecer el desarrollo de procedimientos de cálculo en tanto medios de acción implícitos de resolución? ¿Cómo favorecer su explicitación (la escritura) y comunicación? ¿Cómo dar lugar a la retroalimentación de los resultados? ¿De qué manera integrar aportes del docente de manera que se articulen lo mejor posible con los procedimientos de los alumnos?

Con respecto a la mediación de la docente:

3) Considerando que la docente necesariamente imprimirá modificaciones a la secuencia propuesta[12], analizaré en qué medida las modificaciones conservan o no los propósitos de las situaciones, qué información de la que se le proporcionó resultó importante para ese propósito, y cuál, en cambio, faltó.
4) Dar cuenta de en qué medida las intervenciones docentes podrían contribuir a producir progresos en los niños (sobre todo de quienes continúan utilizando procedimientos poco avanzados), y en caso de respuesta negativa, indagar las causas.

Considerando que, como dice Wolman (2002), los procedimientos que pueden desplegar los alumnos para resolver las operaciones son variados, por lo cual se presentan simultáneamente diferencias notorias en un mismo grupo de alumnos, esto supone

[12] Está ampliamente documentado y analizado el hecho de que los profesores necesitan trasformar las propuestas didácticas para poder hacer uso de ellas. Ver, por ejemplo: Block et al. (2007); Sadovsky et al., 2015.

también responsabilizarse por el progreso de todos. Esto supone un trabajo docente complejo del que también daré cuenta.

1.5 Características metodológicas específicas

Modalidad metodológica: Producción de una experiencia didáctica en aula

Este estudio, pensado como un proyecto de enseñanza que incluye la producción misma de la implementación en el aula, toma como referencia a la metodología de la ingeniería didáctica, característica de las investigaciones que se hacen en el marco de la TSD. Tal como señala Wolman (2002, p. 18): "se trata de dar importancia a la realización didáctica como práctica de la investigación", lo cual supone priorizar la concepción, puesta en práctica y análisis de secuencias de enseñanza. Artigue (1995) señala que las realizaciones didácticas permiten atender y atrapar la complejidad del sistema de enseñanza que no puede ser aprehendida a través de otras metodologías, externas a las empleadas en clase.

Por lo anterior, considero adecuada esta modalidad metodológica para los siguientes propósitos: 1) Identificar y adaptar un conjunto de actividades de cálculo mental adecuadas para segundo grado de primaria, que respondan a la conceptualización de cálculo reflexivo que me interesa explorar; 2) Estudiar la puesta en práctica de dicha selección llevada a cabo por una profesora de segundo grado con experiencia docente, aunque sin experiencia específica en la enseñanza de las matemáticas bajo el enfoque que nos proponemos estudiar.

Así, la realización de este estudio consta de las siguientes tareas específicas:

1. Desarrollar un análisis preliminar para identificar la problemática del aprendizaje del cálculo reflexivo de acuerdo a los aportes de la investigación reciente sobre el tema. Este análisis incluye también una revisión de la evolución del cálculo reflexivo en el currículo.
2. Conformar un conjunto de situaciones didácticas idóneas para ser estudiadas experimentalmente en un grupo de segundo grado. Esto incluye hacer un análisis previo de cada situación, especificando sus propósitos didácticos, así como las características del medio con el que los alumnos interactuarán.

También incluye especificar la información que se considera necesaria compartir con la docente a cargo de las sesiones.

3. Realizar la implementación de las situaciones en el aula a la luz de los análisis previos. La atención se centra en las interacciones de los alumnos con el medio y en las interacciones de la docente con las de los alumnos con el medio, como lo detallo enseguida.
4. En mi trabajo fue cobrando importancia el papel de la maestra (qué información necesitaba tener, qué se dejó implícito y qué aspectos tuvo que resolver ella misma), la figura de la maestra puede verse desde la perspectiva de los alumnos (pues ella moldea el medio de interacción de ellos) y desde la problemática que ella enfrentó, esto es, desde el *medio* con el que ella interactuó, lo que supone un análisis de su desempeño, a la luz de los retos y dificultades que enfrentó.

No sobra aclarar que este estudio no constituye una ingeniería didáctica clásica, como las que se realizan en el seno de la TSD, y esto principalmente porque no desarrollé un conjunto de situaciones a partir de un análisis epistemológico amplio del contenido matemático, sino que adapté situaciones existentes, tomadas de una propuesta de enseñanza, que consideré afín al enfoque de cálculo mental que me interesa estudiar.

Las situaciones didácticas elegidas y adaptadas

La mayoría de las situaciones que integran la secuencia didáctica fueron seleccionadas y adaptadas de una propuesta realizada por Irma Saiz y Cecilia Parra, específicamente de los libros de texto *Hacer Matemática* de segundo grado en dos de sus ediciones, 2013 y 1998. También revisamos otro libro de las mismas autoras titulado *Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio*, del que tomamos dos juegos. Posteriormente adaptamos las lecciones en formato de ficha para la maestra y hoja de trabajo para los alumnos.

La secuencia didáctica implementada abarcó las operaciones de suma y resta, pero debido a la necesidad de ajustarme a los tiempos institucionales, en esta tesis daré cuenta únicamente del trabajo realizado con una parte de las situaciones de suma.

El conjunto de situaciones de suma está organizado en torno a dos grandes propósitos didácticos: 1) **Construcción de un repertorio básico**, que incluye juegos de cálculo mental, en los que se realizaba lo siguiente: comunicación de la consigna, interacciones en equipo, resolución de hoja de trabajo, a veces puesta en común; 2) **Desarrollo de procedimientos diversos flexibles** que se apoyaran en dicho repertorio mediante descomposiciones de los números, esto a través de la resolución de cálculos descontextualizados, en las que había momentos de trabajo individual, y escritura; trabajo en parejas; puesta en común.

Estas situaciones, me parece, propician que los alumnos resuelvan de manera autónoma problemas de suma, a veces presentados por medio de juegos o en forma de cálculos descontextualizados. Posterior a la resolución de cálculos escritos se les solicita que escriban sus procedimientos, y después se propone que reflexionen sobre los distintos procedimientos guiados por su maestra.

Cabe señalar que al comenzar la experimentación se alentó a los niños a calcular mentalmente, sin haberles enseñado previamente estrategias o técnicas bajo esta modalidad de cálculo. La dinámica intentaba favorecer la exploración y asunción de la responsabilidad personal de buscar diversos caminos para resolver los problemas que se les planteaban. Para el momento en que se inició la secuencia, los alumnos ya tenían bastante conocimiento del algoritmo de suma, con números de dos dígitos más números de uno o dos dígitos. También tenían muy afianzado el procedimiento de sobreconteo de uno en uno con apoyo en los dedos. Con el algoritmo de resta iban menos adelantados. Anticipamos que al plantear problemas a partir de juegos y con números más grandes (que superaran la decena) se permitiría que exploraran otros procedimientos, más allá del conteo de uno en uno.

El trabajo empírico

a) El grupo escolar y la docente

La implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo con un grupo de segundo grado, conformado por 29 alumnos, 13 niñas y 16 niños, de entre 7 y 8 años, en una escuela primaria pública de clase media de la Ciudad de México. Las sesiones fueron conducidas por una maestra con más de 25 años de experiencia frente a grupo, pero sin experiencia previa con el enfoque del cálculo mental reflexivo.

b) La observación de las clases y la recolección de datos de las clases

La experimentación tuvo una duración de tres meses, de marzo a junio del 2015, con un total de 20 situaciones que se desarrollaron en 24 sesiones, debido a que algunas observaciones de clase se extendieron más de lo planeado. Los observadores acudíamos principalmente los lunes y miércoles de 8:30 a 10:00 de la mañana, aproximadamente. Cada sesión fue filmada, en un plano general cuando la maestra daba la consigna y de manera más personalizada a algunos alumnos, a fin de observar sus procedimientos; o bien, a algunos equipos durante los juegos. Además de la filmación, dos observadores tomaron notas de lo que podían registrar a simple vista o bien, preguntando directamente a los alumnos. Además, se recuperaron las hojas de trabajo de los alumnos para analizarlas con mayor detalle en momentos extraclase.

c) La comunicación con la maestra: las fichas y las sesiones de los lunes

De manera simultánea mantuvimos reuniones semanales con la maestra, con una duración de 60 minutos, a fin de comentar lo ocurrido en la sesión de ese día y presentarle la situación siguiente, con la idea de comentarla y hacer los cambios pertinentes en función de sus conocimientos sobre el grupo.

Las fichas para la maestra contenían los propósitos de la situación, las actividades para los alumnos, acompañadas de información respecto a la consigna, reglas del juego, aclaraciones de las actividades, posibles procedimientos y algunas indicaciones para las puestas en común.

d) La selección de las situaciones y el análisis de datos

Los datos recabados en el trabajo de campo (22 sesiones de clase de 50 minutos) excedieron mi posibilidad de transcribirlos y de analizarlos en los tiempos disponibles, por lo que tuve que, para la realización de la tesis, hacer una drástica selección de situaciones a analizar. Se decidió optar por las siguientes siete situaciones: Descarto 10, Saludos, Armar números redondos y Descarto 100; así también: Sumas que ayudan a sumar, Descomponer números y Pensar los cálculos. Los criterios para la selección fueron: 1) Centrarnos en las situaciones de suma; 2) Mostrar la progresión, desde el trabajo con el repertorio hasta la resolución de cálculos, tanto en dinámica de juego como en el trabajo individual o parejas.

Las situaciones fueron analizadas en distintos niveles y momentos. Se realizó una transcripción de la clase filmada, después se realizó un primer análisis que se enriqueció con las notas de clase y las producciones de los alumnos. Enseguida se realizó un segundo análisis que jerarquizaba temas y se apoyaba en la teoría.

Capítulo 2
Situaciones didácticas para el desarrollo del cálculo mental reflexivo en segundo grado de primaria. Juegos

Como vimos en el capítulo uno, el propósito central de esta investigación es profundizar en el conocimiento de las condiciones necesarias para dar lugar al desarrollo de habilidades de cálculo mental en la escuela primaria. Esto dio lugar a tres propósitos más específicos: 1) Analizar la relación entre las características de las situaciones y los procedimientos utilizados por los alumnos; 2) Discernir el papel de la docente en la gestión de las situaciones; 3) Reflexionar sobre algunos efectos de las interacciones sociales a partir de lo que propicia o no la situación misma.

En este trabajo presento el análisis de siete situaciones didácticas implementadas en un grupo de segundo grado de primaria. Las situaciones fueron seleccionadas y adaptadas a partir de tres propósitos didácticos:

1) Favorecer el aprendizaje del repertorio aditivo mediante situaciones lúdicas.
2) Propiciar el desarrollo de procedimientos de cálculo mental en el marco de situaciones didácticas.
3) Hacer evolucionar los procedimientos de cálculo mediante la explicitación, la comparación y la reflexión durante las puestas en común.

El análisis de las situaciones lo subdividí en dos partes. En este capítulo presento la primera parte, a saber, cuatro situaciones didácticas con juegos de cálculo mental para favorecer el repertorio básico. En el capítulo 3 presento la segunda parte, la cual se centra en tres situaciones didácticas con cálculos descontextualizados que buscan favorecer el desarrollo y explicitación de procedimientos de cálculo mental. El análisis de las situaciones en conjunto me permitió vislumbrar la manera en que se entretejen ambas cuestiones.

Para cada situación presento un análisis previo, que incluye el propósito didáctico específico de la situación, las características de los problemas (a veces variables didácticas) que apuntalan a dicho propósito específico, así como los principales procedimientos y dificultades que pude avizorar. Enseguida se presenta el análisis a posteriori, en el que me centré en: 1) el papel de la maestra en el funcionamiento de las situaciones mismas, principalmente en la comunicación de la consigna, en las ayudas brindadas, y en la gestión de la puesta en común, a fin de comprender mejor las producciones de los alumnos; 2) algunos efectos de las interacciones sociales entre los alumnos, sobre sus condiciones para aprender (sobre su medio) y, 3) el vínculo entre las características de las situaciones y los conocimientos revelados por los alumnos, desde sus procedimientos, errores y dificultades.

2.1 ¿Por qué juegos de cálculo mental?

Las situaciones adidácticas descritas en el capítulo anterior, suelen tener características de un juego: hay una meta a alcanzar, un conjunto de reglas a seguir, la posibilidad de saber si se llegó o no a la meta. En las situaciones adidácticas, además, se movilizan y desarrollan conocimientos o destrezas específicas relativas a conocimientos que interesa que los alumnos aprendan. Estas características puedan dar a una situación adidáctica un gran parecido con los juegos, incluso en la forma de involucrarse, en la entrega de los jugadores, en la intensidad de las interacciones entre ellos, en la intensidad del placer, o también de la frustración, de llegar o no a la meta.

No obstante lo anterior, no toda situación adidáctica tiene que tener necesariamente la dinámica de un juego[13]. Para precisar lo que entiendo por "dinámica de un juego" destacaré algunas características (Block, 1996):

- Por lo general se juega entre varios, y suele haber un ganador;
- Las jugadas son rápidas (un tiempo largo aminoraría el dinamismo);
- La retroalimentación del medio es casi inmediata. Los jugadores pueden saber inequívocamente si ganaron o no;
- En algunos juegos, interviene el azar (por ejemplo, en los juegos en los que se reparten cartas, a un jugador le puede tocar un "mejor juego" que a otro), sin que ello impida que, para ganar se requiera del conocimiento en cuestión.

Estas características distinguen claramente las cuatro situaciones que veremos en este capítulo de las que veremos después (en el capítulo 3). El hecho de que las situaciones exijan jugadas rápidas las hace aptas sobre todo para la puesta en obra y la utilización del

[13] Así como tampoco todo juego con intención didáctica es necesariamente una situación adidáctica.

repertorio, y de estrategias básicas, más no para el desarrollo de estrategias de cálculo más elaboradas. Cómo veremos en los análisis, estas características potencian la actividad, pero también, en ciertas circunstancias, la pueden frenar.

Más allá de esta distinción entre las situaciones con modalidad de juego de las que no la tienen, todas se pueden considerar como una variante particular de situaciones adidácticas, principalmente por lo siguiente: pretenden plantear un reto a los alumnos cuya superación implica el desarrollo de determinado conocimiento (en este caso, procedimientos de cálculo), a la vez que pueden ser abordadas sin ese conocimiento.

Para complementar las situaciones de juegos, se retomó de Saiz y Parra (2013), la organización de una actividad posterior, en la que los alumnos pudieran abordan por escrito los mismos tipos de cálculos implicados en el juego, pero sin la competencia y la presión de tiempo.

Un comentario sobre los procedimientos y su evolución. Como en toda situación adidáctica, en un principio, los procedimientos que los alumnos ponen en marcha pueden ser muy elementales, lo importante es que sean suficientes para iniciar la búsqueda, para comprender el sentido del problema. No obstante, se espera que el sentido del juego y el conocimiento del alumno se transformen conforme avancen en el juego mismo. Los procedimientos cuya construcción se propicia de esta manera, constituyen procesos de matematización, es decir, de creación y utilización de modelos matemáticos para prever algún resultado en un fenómeno no necesariamente matemático (Block, 2001). En los juegos que vamos a presentar más adelante, el modelo matemático es la operación misma. Si, por ejemplo, un alumno ve dos números sin aparente relación, él tiene que construir la relación entre ellos: “el número de mi compañero más algo debe dar el total que escuché”, y para averiguar ese número necesita tener algún recurso disponible, ese recurso es un pequeño modelo matemático, la suma.

Un comentario sobre las interacciones entre los alumnos en el seno de los equipos. Este aspecto, las interacciones sociales entre los alumnos, reveló tener una influencia importante en el desarrollo de los juegos, por lo que le dedicaré un espacio en el análisis de cada situación, y un breve comentario en esta introducción.

Los alumnos –en función de ciertas características personales y también de las características de los otros jugadores del equipo– pueden vivir, al jugar, experiencias muy distintas unas de las otras. La mirada al interior de los equipos dio lugar a preguntas como las siguientes: ¿cómo se relacionan los alumnos al momento de jugar? ¿Qué dificultades se les presentan? ¿Qué tipo de ayudas se ofrecen? ¿Cómo favorecen o afectan las dinámicas de los equipos al juego implementado?

Aunque las condiciones didácticas fueran similares –esto es, la manera en que se comunicó la consigna, las ayudas ofrecidas por la docente, la historia común de un grupo escolar en el seno de una clase de matemáticas–, intentaré mostrar que, al interior de los equipos se observan diferentes experiencias –de hecho, casi juegos distintos– que incluso a veces me hacen cuestionar si el conocimiento que se despliega de la situación sea el mismo para todos los alumnos.

Pienso que, si bien el propósito y las características de una situación didáctica condicionan, en parte, el tipo de interacciones de un alumno -genérico- frente a cierto medio también ocurre que el conocimiento que emerge en la clase está mediado por los diferentes roles que asumen los alumnos al enfrentar el problema, a saber, posicionarse como buenos o malos en la materia, y en las interacciones con los otros (Mendoza, 2007). Lo anterior afecta directamente a la seguridad de un alumno para equivocarse, para perder, para reutilizar lo dicho por otros.

Considero que este aspecto merece ser estudiado sobre todo en el caso de los alumnos que tienen más dificultades en su desempeño en el área de matemáticas, pues el trabajo intelectual del individuo no es insensible al clima que se genera en el equipo (amable, tenso) o a las burlas, etc.

Breve reseña de los juegos que analizaremos. Para tener un mejor panorama de las situaciones, presento un breve resumen de cada una para luego dar paso a los análisis por situación.

<u>Situación 1: Descarto 10</u>

El objetivo de esta situación es que los alumnos conozcan los pares de números que sumados dan diez y sean capaces de determinar el complemento de los dígitos a 10.

Situación 2: Saludos

El objetivo de la situación es que los alumnos practiquen sumas de complemento con resultados hasta 20.

Situación 3: Formar números redondos

El objetivo de la situación es que los alumnos aprendan a identificar los dos números redondos que encuadran a un número dado, y a calcular rápidamente las diferencias, en ambos casos.

Situación 4: Descarto 100

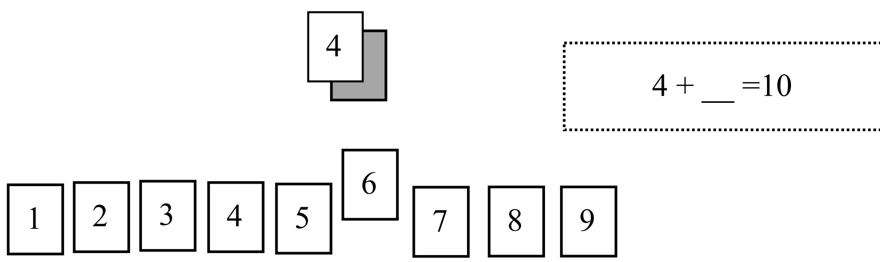
El objetivo de esta situación es que los alumnos conozcan los pares de números que sumados dan cien y sean capaces de determinar el complemento de las decenas a 100, apoyándose, posiblemente, en las sumas de complemento a 10.

2.2 Situación 1: “Descarto 10”

2.2.1 Análisis previo

Descripción y propósito

“Descarto 10” se juega en parejas, cada integrante recibe un mazo de cartas con los números del 1 al 9, y dos mazos más con esos mismos números que deben revolver y apilar con los números hacia abajo para formar el mazo común. El juego se desarrolla por turnos, uno de los jugadores toma una carta del mazo común y se la muestra al compañero, éste último debe buscar entre sus cartas cuál, sumada a la carta que le muestran, forma 10. Si la suma es correcta se queda con ambas cartas y las descarta a un lado; pero si no logra formar el par, la carta tomada del mazo común debe regresarse y ponerse hasta el fondo. Gana el juego el primero que haya formado los pares de todas sus cartas, es decir, el que se haya quedado sin cartas.



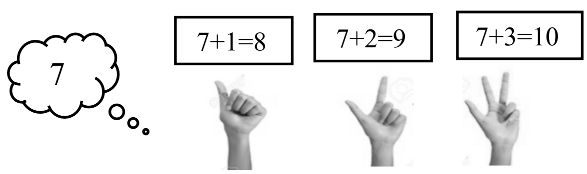
El propósito didáctico es “conocer los pares de números que sumados dan 10 y ser capaz de establecer el complemento de los dígitos a 10” (Saiz y Parra, p. 78). Así, para los alumnos en el rol de jugadores esta situación consiste en determinar el valor de un sumando desconocido sabiendo el valor del otro sumando y del total, esto es, resolver sumas con hueco: a +__= c.

Conocimientos y procedimientos que implica el juego

Para poder jugar se requiere que la suma de números sin contexto cobre significado para los alumnos, es decir, que estén en condiciones de establecer una representación concreta de una relación aditiva entre dos números abstractos. Se espera que, a partir de ese conocimiento básico, al jugar, puedan dar sentido a la operación inversa que plantea el juego, es decir, se espera que sepan que conociendo uno de los sumandos y el resultado, es posible encontrar el sumando faltante.

El trabajo que implica representarse la operación correctamente va de la mano con tener algún procedimiento para hallar dicho sumando, por más elemental que sea, hasta llegar a otros más avanzados. Algunos procedimientos de resolución que se pueden anticipar son:

1) Doble conteo, eventualmente con apoyo de los dedos. Se hace sobreconteo a partir de un número dado (se guarda en la mente) y se va sumando hasta llegar a diez. Cada dedo levantado indica lo que se fue sumando y tras concluir el sobreconteo, la cantidad de dedos levantados es el sumando inicialmente desconocido.



2) Resultados memorizados. Por ejemplo, para 5+__=10, probablemente se apoyen de que 5+5=10; lo mismo con 9+1.
3) Resultados memorizados y completar lo que falta. Por ejemplo, en: 4+__=10, ayuda saber de memoria que 4+4=8 para después pensar en 8+2 =10. Se requiere que conserven en la mente lo que fueron sumando a 4+(4+2) =10.
4) Aprovechar la conmutatividad. Por ejemplo, sabiendo que 8+2=10, pueden resolver más fácilmente 2+__=10.
5) Es posible que algunos alumnos, a veces, en lugar de calcular el número que le falta al que les muestran, para llegar a 10, busquen cuál de los que ellos tienen, sumado con ese número da 10. Así, en lugar de calcular un sumando faltante, realizan sumas directamente. En este caso, podrían también estimar para escoger la tarjeta más probable, para descartar las más improbables (por ejemplo, en el 3+__=10, podrían considerar que el 3 es un número pequeño y sumarlo con el 5, así: 3+5, tras calcular se darían cuenta de que el sumando buscado debe ser mayor.

Es previsible que cuando el sumando conocido sea cercano a la decena, como en 9+__=10, 8+__=10 y 7+__=10, será más fácil de calcular el sumando desconocido con apoyo del doble conteo. En cambio, con números que están alejados de la decena, podría resultar más difícil calcular el otro sumando apoyándose en el doble conteo: 2+__=10, 3+__=10, 4+__=10 y 6+__=10. Tras haber enfrentado los cálculos en repetidas ocasiones, se espera que vayan memorizando los resultados. También es posible que, a partir de cierto momento, la propiedad conmutativa les ayude.

Importancia de los complementos a 10

Los complementos a diez son una parte importante del repertorio básico porque, además de que al practicarlos se refuerza la memorización de la suma de dígitos, constituyen un conocimiento que es requerido en la estrategia “Completar decenas” (ya explicada en el capítulo 1) , por ejemplo, para resolver 27 + 8 así: (27 + 3) + 5, es útil saber que el complemento de 27 para 30 es 3, y este conocimiento a su vez, utiliza el hecho de que 3 es el complemento a 10 de 7.

2.2.2 Análisis posterior

Centraré el análisis posterior de esta sesión en los siguientes aspectos: 1) Con respecto al desempeño de los alumnos: a) el proceso de devolución, que consiste en asumir la responsabilidad del juego, lo cual se manifiesta en el descubrimiento por parte de los alumnos de que el número buscado se puede averiguar calculando, y no “adivinando”; b) el hecho de que en cada equipo ocurrió una historia distinta, con repercusiones en la situación que a final de cuentas juegan, es decir, el hecho de que no todos juegan el mismo juego; 2) Con respecto a la docente, las dificultades y logros en la compleja gestión de los distintos momentos de la clase.

Descripción de las clases. La situación se llevó a cabo en dos sesiones. La primera clase se realizó en condiciones no muy favorables, debido a que faltaron mazos de cartas y no todos los alumnos pudieron jugar. Aún así, la maestra decidió explicar las instrucciones con apoyo de una pareja de alumnos que participaron en un juego simulado, y que fueron observados por el resto del grupo con cierto entusiasmo. Para este análisis tomaremos principalmente lo que ocurrió en la segunda sesión, porque en ésta sí jugaron todos los alumnos.

Con respecto a la consigna, la docente no tuvo dificultades para comunicar las instrucciones. Le resultó muy útil simular rápidamente un juego con apoyo de otra pareja de alumnos. Al principio, la mayoría de los alumnos se apoyaron en el sobreconteo, pero con el transcurso del tiempo se notó un avance en la rapidez para decir la respuesta, por esto intuimos que fueron memorizando algunos resultados. Lo anterior es un indicador, entre otros, de que la situación cumplió el propósito esperado.

2.2.2.1 El proceso de comunicación de la consigna

Para este apartado me apoyaré en la primera clase. En este juego la comunicación de la consigna no resultó tan compleja de comunicar. A continuación, destacaré los siguientes aspectos: 1) las instrucciones y reglas que la maestra necesitó explicitar, adaptar, o incluso añadir; 2) la forma de transmitir la consigna escenificando juegos en los que la maestra participó, lo que permitió explicar con claridad la parte medular de la consigna; 3) lo que se transmitió y lo que no, acerca de la validación.

Las instrucciones que se adaptan o añaden

Mediante la ejemplificación de un juego la maestra pretendió mostrar la dinámica: el manejo de las cartas, el rol de cada alumno. Asimismo, durante este juego, ella adaptó algunas de las instrucciones y añadió otras.

1) Indicó que se jugaba en parejas y pidió que cada jugador se sentara en uno de los extremos de la mesa[14].
2) Señaló que cada pareja recibiría dos mazos del 1 al 9, que se revolverían y apilarían al centro. La maestra llamó a ese mazo "comodín[15]". Además, cada jugador tendría un mazo de cartas del 1 al 9." La organización de los mazos

[14] En este juego, a diferencia de otros que veremos después, no importa que los jugadores queden cerca o lejos porque no requieren proteger sus cartas de la vista del otro.
[15] Normalmente, en los juegos de cartas, ese nombre es para la carta a la que se puede dar cualquier valor. Aquí no hubo confusión, pues los niños posiblemente no sabían eso.

resultó difícil para los alumnos, la maestra tuvo que repetir varias veces las instrucciones y pasar a ayudarles a sus respectivos lugares.

3) A manera de consejo recomendó a los jugadores: acomodar sus propias cartas en forma de abanico o bien, distribuidas sobre la mesa con los números hacia arriba.
4) Señaló que las cartas ganadas se apilarían a un lado.
5) Explicó que, de no formar el par, se regresaría la carta al mazo común y se pondría al fondo.
6) Finalmente, la maestra añadió un requisito más que no estaba previsto: no usar los dedos para contar. Como veremos, si bien se puede aspirar a que, a raíz del trabajo con cálculo mental, el conteo apoyado en los dedos deje de ser necesario, prohibir su uso de entrada no es conveniente.

Claridad en la parte medular de la consigna

El reto de la situación es que los alumnos averigüen el número que sumado a otro da diez, esto es, hallar el complemento a diez de un número dado. El reto para la maestra es comunicar lo más claramente la consigna del juego, sin decirles cómo deben hacer el cálculo.

En la primera sesión, la maestra explicó la parte medular de la consigna de la siguiente manera:

> M: ¿Qué vamos a hacer? Melissa va a sacar una carta (señala el mazo común) y se la va a mostrar a Brandon, entonces Brandon tiene que buscar entre sus cartas cuál le da (escribe 10 en el pizarrón), con cuál puede llegar… ¿a qué número?
> Aos: (a coro) Dieeeez

En este caso, la maestra explicó la instrucción sin un ejemplo concreto, pero en la segunda sesión comunicó de manera más general:

> M: (a todos) Uno de los jugadores va a sacar una carta de este mazo. Sácala, Astrid, por favor. Se la va a enseñar a Luis. Luis tiene que buscar dentro de sus cartas una carta que *sumando*, en este caso cuatro, que le salió a Astrid, le dé diez. (A Luis) ¿Hay alguna de tus cartas que sumando a cuatro dé diez?
> (Luis elige la carta del 6)
> M: (afirmando con la cabeza) Luis nos enseñó esta, (a todos) ¿seis más cuatro me da diez? (mostrando ambas cartas)
> Aos: (algunos) Sííí
> M: Sí, perfecto. Luis se queda con estas cartas y ya las deja ahí (apiladas, a un lado)

Considero que, el hecho de que la maestra haya usado la palabra “sumando”, no debe interpretarse como que ella da una pista que reduce el problema (es decir, no es un efecto Topaze[16]), pues el objetivo del juego no es que los alumnos establezcan qué operación está implicada sino, solamente, que desarrollen formas de calcular los complementos y los vayan memorizando. La operación suma es el contexto mismo, por así decir, en el que se plantea el problema.

La validación: lo que se transmite y lo que no

La acción de validar por parte de los alumnos es un componente de la consiga que quedó implícita. Como se verá, dicha acción quedó mediada por la docente, quien, tras finalizar cada jugada del ejemplo, preguntaba al resto del grupo si la suma de ambos números daba diez. La suma apareció ahora como recurso para verificar el cálculo del sumando desconocido: “¿seis más cuatro me da diez?”.

Pude reconocer dos tipos de intervención, en los que se propicia la validación social:

1) Validación previa. La maestra hizo extensivo el problema (búsqueda del sumando faltante) a todo el grupo.

> (Melissa muestra la carta del 6 y Brandon comienza a buscar en sus cartas).
> (…)
> M: (Toma la carta de Melissa y la muestra a los alumnos espectadores) Esta es la carta que sacó Melissa, no digan…
> (Los Aos murmuran como si ya supieran cuál es el número y después de unos segundos Brandon desliza una de sus cartas; la maestra la toma y muestra el 6 y el 4).
> (A los alumnos) ¿Está correcto?
> Aos: ¡Sííí!

2) Validación posterior. La maestra hace extensivo el problema en forma de una suma directa a todo el grupo. Para esto, ella ya había validado previamente e invertido el orden de los números para que resultara más fácil sumarlos:

> (La M muestra las dos cartas: 3 y 7).
> M: Muy bien, ¿siete más tres?
> Aos: (a coro) ¡Diez!.

[16] El efecto Topaze es una “pérdida de significación producida en el proceso de comunicación del saber” (Ávila, 2001, p. 12). Muestra la impotencia del docente quien propone distintas ayudas que empobrecen el esfuerzo y conocimiento del alumno hasta que requiera del mínimo esfuerzo para el alumno (Brousseau y Warfield, 1999).

El segundo tipo de intervención fue el que más se repitió. Me pareció adecuado que la maestra durante algunas jugadas ayudara a validar, pero también creo que hubiera sido conveniente aclarar que dicho rol correspondía al jugador B (el que no calculaba en ese turno). Probablemente ella lo hizo así para incluir al resto del grupo, de no hacerlo los hubiera dejado en un rol muy pasivo, meramente de espectadores.

Errores que no se lograron aprovechar

En una de las jugadas, una alumna no se dio cuenta de que tenía la carta que le permitía formar diez. La maestra ofreció una ayuda muy dirigida:

> (La niña le dice en voz baja a la M que no tiene la carta).
> M: (a Melissa) *¿Segura?* (quita el 3 a Brandon y se lo muestra más de cerca a Melissa).
> M: *Quiero llegar a 10*
> (Melissa ve sus cartas, luego le da el 7 a la M. La M muestra ambas cartas).
> M: (sonríe) ¿siete más tres?
> Aos: ¡Diez!

En otra jugada, Fernando mostró a su compañera la carta del tres y Yunery eligió el ocho. La maestra preguntó al grupo: "M: Ocho más tres, diez. ¿Correcto?", varios alumnos respondieron a coro que no. La maestra aseveró con un: "Incorrecto", y regresó cada carta al mazo correspondiente. Considerando que en este juego prácticamente no hubo errores, pienso que hubiera sido bueno aprovechar esta oportunidad para 1) destacar la necesidad de que los jugadores detecten los errores y 2) mostrar al error como algo positivo, de lo que también se puede aprender.

2.2.2.2 Diversidad de interacciones a partir de un mismo juego

Como lo anticipé en el capítulo 1, analizaré aquí cierta diversidad de interacciones que ocurren en el seno de los diferentes equipos, y que de alguna manera imprimen características al medio que los alumnos enfrentan.

Episodio uno: Compartir la responsabilidad del juego

En la pareja de Camila y Tonatiuh se observó una competencia amistosa durante el juego. Por un lado, Tonatiuh asimiló algunas indicaciones de la consigna bastante rápido y, como se ve en uno de los intercambios logró comunicar la parte medular del problema a su compañera:

> (Tonatiuh le muestra la carta del 2 a Camila, quien está algo distraída).
> Tonatiuh: **¡Camila! Debe de ser diez, ¿eh? ¿Dos más qué…?**
> (Camila mira sus cartas).

Otras instrucciones que le comunicó a su compañera eran necesarias para poder jugar, tales como: los turnos, la acción de tomar una carta del mazo común y mostrarla al otro jugador para que pudiera empezar a calcular:

> Tonatiuh: (a Camila) Ah, te toca. Me la tienes que enseñar a mí… (señalándole) comodín (Camila estaba un poco distraída).

Pese a la seguridad de este alumno para conducir el juego, en una de las ocasiones hubo una indicación que le resultó confusa: después de calcular y elegir la carta que consideró correcta, el jugador la entregó a su compañera para que la validara, es en ese instante que el alumno pregunta quién se las queda: "¿a ti o a mí?", Camila le responde que él se la queda.

En general podemos ver que las intervenciones de ambos alumnos permitieron regular la dinámica del juego para que fluyera mejor. En varias ocasiones se ayudaban al momento de calcular, por ejemplo, si alguno de los dos se tardaba en elegir la carta el otro le decía: "ya sé cuál es", dando así cierta seguridad de que la carta estaba disponible, y de no percatarse se daban "oportunidad" de corregir el error.

Episodio dos: ¿Cómo sé si gané o perdí?

La validación tiene dos razones de peso: 1) Para el contrincante, el interés de verificar si el par de cartas es correcto parece algo bastante natural, puesto que hay una competencia en juego: quizás el otro se haya equivocado y no pueda ganar las tarjetas. 2) Para el jugador que calculó, la verificación del otro puede confirmar su acierto o poner en evidencia su error. En ambos casos, dicha acción ofrece información importante.

Al momento de comunicar la consigna, la maestra asumió el rol de verificar los resultados de cada jugada (a veces haciendo partícipes a los alumnos espectadores), pero no dijo de manera explícita que esa era tarea del alumno contrincante. No obstante, en una de las parejas observadas pudimos ver que dicha necesidad surgió espontáneamente. Tonatiuh empezó a verificar los resultados dados por su compañera bajo dos modalidades: 1) Durante la jugada: Tonatiuh le mostró a Camila el número seis y mientras ella calculaba él decidió hacer lo mismo, al coincidir sus respuestas le entregó rápidamente la carta del cuatro. 2) Posterior a la jugada: Tonatiuh le mostró la carta del dos a Camila, quien calculó que con el ocho formaba la decena. Tonatiuh viendo ambas cartas decidió sumarlas como 8+2, tras validar que efectivamente sumaban diez se las entregó a la niña.

No obstante, cuando intercambiaban los roles, Tonatiuh no pareció precisar de la verificación de su compañera, incluso la apuraba diciéndole: "Sí es", debido, quizás, a la seguridad de su propio procedimiento de doble conteo. Podemos ver que este alumno necesitaba verificar los cálculos de su compañera, pero no entendía que su compañera hiciera lo mismo con los resultados dados por él. En otro de los juegos de Tonatiuh, pero esta vez con Carlos, nuevamente el alumno no mostró sus cartas y fue Carlos, no pudiendo verificar, quien le preguntó: "¿Si estuvo correcta?", Tonatiuh repitió su procedimiento de doble conteo para que no quedara duda.

En el juego de otra pareja se muestra una validación errónea, es decir, la jugadora no calculó correctamente y pensó que el resultado de su compañero estaba equivocado y por un momento se resistió a entregarle la carta. Luis debía resolver 4+__=10, eligió la carta del 6 y extendió la mano en espera de su tarjeta. Astrid, inclinándose hacia atrás, le dijo que "no". La maestra intervino:

> M: A ver, (juntando las cartas) ¿cuánto es esto?
> Astrid: (piensa unos segundos) A ver… ah no, sí.

Episodio tres: Hasta para hacer trampa hay que tener conocimientos

En algunos equipos y en algunas circunstancias es posible que ciertas cuestiones emocionales perturben el desarrollo del juego. En la siguiente pareja identificamos a una alumna que realiza acciones que no están autorizadas para tener ventaja sobre el otro, es decir, "hace trampa". En principio, Carlos y Fernanda H., no mostraron dificultades para entender la dinámica del juego y aparentemente ambos calculaban de manera ágil.

A lo largo de varias jugadas, Fernanda había permanecido invicta y en cada oportunidad que podía le informaba a la maestra que había ganado, tras lo cual la maestra le sonreía o le daba una palmadita en la espalda. En uno de los últimos juegos, Carlos mencionó con tono animado que esta podría ser su oportunidad de ganar tras percatarse de que le quedaban pocas cartas por descartar. Ante ello, la niña se mostró más competitiva: realizó distintas acciones, en un principio dudosas, pero que después revelaron la intención de hacer trampa: revisaba el mazo común para averiguar qué carta seguía, luego revisaba su mazo y si no formaba par, revolvía el mazo hasta poner al frente una carta que le conviniera. Carlos no se daba cuenta de esto y así fue la cómo alumna logró ganar varias jugadas más. Hasta cierto momento en el que Carlos se mostró más desconfiado empezó a fijarse más en cómo revolvía el mazo la niña. Fernanda parecía demasiado interesada en ganar, por lo que no solamente recurrió a hacer trampa, también se enojaba cuando no lo lograba y su compañero ganaba (hasta el punto de aventarle la carta). En cierto momento, Carlos pidió a la maestra que observara el juego, mientras que Fernanda buscó la aprobación de ella.

> Carlos: Maestra, ¿ahorita nos puede ver jugar?
> Fernanda: Maestra, otra vez le gané a Carlos.
> M: Oh, no puede ser, Carlitos. ¿Qué pasó con usted?
> Carlos: (mirando sus cartas) No sé…

La siguiente ronda de esta pareja inició mal. Fernanda se puso más controladora, quería organizar los mazos. Pese a que Carlos ya había ordenado el suyo, le arrebató el mazo y le fue aventando una a una las cartas, pero Carlos se enojó y comenzó a aventarle las cartas de regreso. Seguramente por la actitud de la niña, con quien llevaba jugando y perdiendo al menos unos treinta minutos. Cabe observar que para que las trampas salieran bien, Fernanda tenía que prever cuáles eran los complementos de sus cartas, es decir, tenía que hacer los mismos cálculos que implicaba el juego.

Así, las interacciones que vivieron algunos alumnos en el seno de sus equipos fueron sensiblemente distintas. Mientras unos contaron con un clima favorable para aprender a jugar, rectificar jugadas, otros vivieron la experiencia de necesitar ganar a como diera lugar (por alguna razón), o como una afrenta del compañero al no permitirlo.

2.2.2.3 Procedimientos de los alumnos

Las condiciones de la situación misma —a saber, un juego que demanda rapidez, procedimientos mentales que no se explicitan, de los que sólo se conoce el resultado final— me permitieron identificar apenas algunos indicios de procedimientos de los niños. Para unos diez alumnos la situación no pareció implicar dificultad, en esos casos sólo pude ver jugadas muy rápidas en las que daban resultados casi instantáneos. Puede decirse que en estos casos el juego favoreció solamente un repaso de sumas ya prácticamente memorizadas. En cambio, hubo otros alumnos (al menos ocho) para quienes la situación representó un reto mayor. A lo largo de los diferentes juegos, estos alumnos pudieron entender la consigna, desplegar recursos para calcular, verificar resultados y, poco a poco, ir memorizando sumas.

Entre los procedimientos que identifiqué, como era de esperar, el más utilizado y visible fue el cálculo del complemento aditivo mediante el doble conteo, a partir del número dado por la tarjeta, la mayoría con apoyo de los dedos, aunque algunos parecían hacerlo mentalmente (sobre todo cuando la diferencia era pequeña: 8+__=10). Algunos alumnos dejaron ver más dificultades, pero tras repetir varias veces las jugadas fueron agilizando los cálculos.

A continuación, describo con más detalle dos de los procedimientos observados.

a) Procedimiento de sobreconteo con apoyo de dedos: ¿prohibición prematura?

Tonatiuh debía determinar el número que sumado a 3 da 10, para esto se apoyó en el sobreconteo empezando a partir del 3 (lo dice en voz alta pero no levanta ningún dedo), después dice 4 (levanta el primer dedo), 5 (segundo dedo), 6 (tercer dedo) y continua hasta llegar a 10 (7 dedos levantados). Para poder usar este recurso se requiere poner en juego varias condiciones: el conteo se inicia con el número dado (en este caso 3), pero ese no se cuenta y es hasta el siguiente que se empieza a contar y controlar con los dedos. El procedimiento consiste en un doble conteo: por un lado, seguir la serie numérica desde el 3 hasta el diez y, por otro lado, contar el número de unidades sumadas (es el número de dedos levantados) pues ese indica el resultado buscado.

Resultó sorprendente la agilidad con que varios de los alumnos manejan este recurso, en ningún caso se observó que obtuvieran un resultado erróneo. No obstante, una variante del recurso, el uso de los dedos fue restringido por la maestra en varias ocasiones, por lo que los alumnos recurrían a ocultar sus manos por debajo de las bancas o bien, a mover de manera casi imperceptible sus dedos sobre la banca. Se podía incluso reconocer que algunos alumnos hacían sobreconteo mental, por quedarse estáticos durante algunos segundos, sin parpadear, como si al hacerlo perdieran la cuenta. Observé también que, si bien, al momento de calcular los niños ocultaban sus dedos, al verificar, la mano era mostrada al compañero como signo irrefutable.

Lo anterior me lleva a considerar que posiblemente no conviene prohibir la utilización de los dedos para evitar que algunos niños se queden varados, sin alternativa para calcular. Se podría, en cambio, animarlos a dejarlo poco a poco, al favorecer el uso de procedimientos de cálculo mental.

Enseguida, mostraré otro ejemplo, interesante no sólo por mostrar claramente la dificultad del niño, sino por las ayudas que recibe de su compañera de juego y de la maestra. La ayuda ofrecida por la maestra deja ver que tomó decisiones *in situ,* al calor del momento, en función de la demanda del alumno, de su experiencia docente y de los conocimientos matemáticos y comprensión de la situación didáctica. En esta primera intervención, trata de encaminar al alumno en dificultad mediante un procedimiento de ensayo y error (o aproximaciones sucesivas).

> (Yunery le muestra la carta del uno, Oliver mira sus cartas: 7, 6, 1, 2, 8, 4, 5)
> M: Oliver, ¿este (1) más que número te da diez?
> (…)
> Oliver:(responde en voz baja, no se escucha)
> M: ¿Siete? ¿siete más uno cuánto te da?
> O: (No se escucha la respuesta del niño, probablemente dice 8)
> M: No me sirve. ¿Qué número más uno te da nueve?
> O: (le entrega la carta del ocho a la M)
> M: Ocho. (Mostrándole las dos cartas a Oliver) ¿Ocho más uno?
> O: Nueve
> M: Entonces no. ¿Qué número más uno te da diez?
> Oliver: (mueve nerviosamente una rodilla y mira sus cartas)
> M: A lo mejor no está aquí (el número) pero tú dime, ¿cuál es?
> Y: Nueveee (lo dice casi sin sonido, moviendo los labios)
> M: ¿Cuánto necesito para que aumentándole uno me dé diez?
> (Oliver no responde nada)
> M: A ver, dame diez deditos
> (Oliver extiende sus dos manos)
> M: Ese es el objetivo que yo quiero (10). Ya tengo uno (mostrándole la carta del 1), quítale uno
> (Oliver dobla un dedito)
> M: ¿Cuántos me faltan?
> Oliver: Nueve
> M: (afirma) Entonces, ¿tienes aquí el nueve? (señalando las cartas del niño)
> (Oliver niega con la cabeza)

En otra jugada Oliver vuelve a atorarse, dejando ver que la ayuda ofrecida por la maestra aún no es interiorizada por él. Finalmente, logró elegir el número correcto, pero con ayuda de su compañera, o quizás adivinando.

(Yunery le muestra la carta del 3. Oliver mira sus cartas y toma la del 6).
M: A ver, Oliver, ¿cuánto es seis más tres?
(Yunery levanta seis deditos y uno a uno extiende otros tres. Oliver no responde. Yunery enfática le muestra nueve deditos).
M: ¿Cuánto es seis más tres?
(Yunery nuevamente le intenta ayudar: primero le muestra seis deditos extendidos y después levanta otros tres)
Oliver: Nueve
M: No me sirve (…) Acuérdate, quiero yo llegar a diez, diez, diez. ¿Cómo llego?
(Oliver no dice nada)
M: Sí puedes. A ver, ¿cuál número?
(Oliver toma la carta del 7, la maestra afirma con la cabeza y toma ambas cartas)
M: (mostrándole las cartas) ¿Cuánto es siete más tres?
Oliver: Diez
M: Entonces, ya tienes tu diez, ¿sale?

b) Aprovechar la conmutatividad

La propiedad de la conmutatividad funge como un recurso que facilita los cálculos, los economiza. Es más fácil sumar a partir del número mayor y agregar lo demás. El recurso implícito de esta propiedad durante la resolución de algunos cálculos fue muy visible por el uso de dedos. Muestro enseguida algunos ejemplos.

En la primera jugada, Braulio calculó: 1+__=10 y en la segunda jugada a Fernanda H., le tocó calcular: 9+__=10. Braulio comentó: "es lo mismo".

Luis calculó con cierta dificultad 4+__=10. En la siguiente jugada le tocó: 6+__=10, y de manera bastante rápida la resolvió. Supongo que aprovechó la conmutatividad, sabiendo que 6 y 4, sin importar el orden, dan 10.

También observamos que en los momentos de validación algunos niños solían verificar empezando por el número mayor. Por ejemplo, Tonatiuh, al momento de validar: 2+8=10, inició sumando a partir del 8.

c) Sumas ya memorizadas

Fue notorio que algunos pares de tarjetas resultaron muy fáciles para algunos alumnos, suponemos que ya las sabían de memoria. Algunas como 5+5, 9+1, eran conocidas para la mayoría y otras fueron probablemente memorizadas a lo largo del juego.

2.2.2.4 Comentario general

En general, puede decirse que el juego funcionó bien, incluso considerando que hay una disparidad importante entre las diferentes parejas que jugaron: algunos alumnos ya sabían de memoria la mayoría de las sumas, otros sabían algunas y avanzaron en la memorización de las demás. Finalmente, para otros más, como Oliver, el primer reto importante fue comprender de qué trata el juego exactamente (qué hay que hacer, cuándo se gana). Me pareció destacable que varios niños no asumieron una competencia, y lejos de eso, se ayudaron de distintas formas.

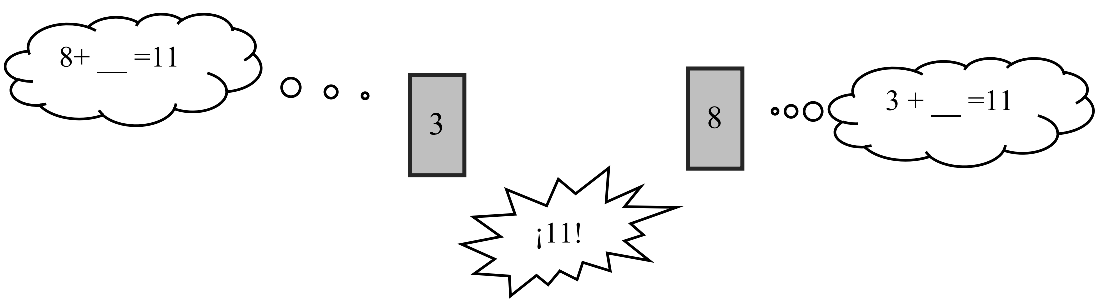
Cerraré este comentario destacando dos aspectos del juego de distinta naturaleza que resultaron confusos o problemáticos y que podrían mejorarse. Por una parte, el que alumnos acumularan las cartas con las que formaban decenas, en lugar de descartarlas, distrajo tiempo pues contaban varias veces las cartas para ver quien llevaba más. Por otra parte, considero que se dejó jugar demasiado tiempo (una hora) sin rotar parejas: algunos niños manifestaron cansancio. Probablemente sería más conveniente repetir el juego en distintas ocasiones, en lapsos más breves.

2.3 Situación 2: “Saludos”

2.2.3 Análisis previo

2.3.1.1 Descripción

“Saludos” se juega en equipos de tres, dos en el rol de jugadores y uno como secretario (los roles se van rotando). Cada jugador recibe un mazo de cartas del 1 al 10, que debe revolver y apilar con los números hacia abajo. El juego inicia cuando los jugadores toman la carta superior de sus respectivos mazos y, sin verla, la pegan a su pecho, de manera que el contrincante y el secretario puedan verla. El secretario, al ver los números de ambas cartas, los suma y anuncia el resultado en voz alta. De esta manera, sabiendo el total y el número del contrincante, cada jugador debe averiguar el número de su propia carta. Gana el que responda primero y de manera correcta. Se juegan varias rondas.



Finalmente, se pide a los alumnos resolver de manera individual una hoja te trabajo con dos actividades vinculadas al juego.

2.3.1.2 Propósito de la situación

Esta situación consiste en averiguar el valor de un sumando conociendo el valor del otro sumando y del total, esto es, resolver “sumas con hueco”: a+__=c ó __+b=c. Aún sin saberlo los alumnos transitarán a otro sentido de la resta: agregar lo que falta también es restar, pero los alumnos difícilmente se percatarán de ello y seguramente resolverán este tipo de cálculos pensando: tengo “a”, ¿cuánto me falta para tener “c”?, y por medio del doble conteo mental o con apoyo de dedos, hallarán el valor faltante.

Así, considero que esta situación es útil para favorecer la estrategia de sumar algo al número menor para llegar al más grande (búsqueda del complemento). Según los números en juego, pueden empezar a surgir algunos procedimientos, más allá del conteo de uno en uno. De esta manera, se estarán ejercitando y afianzando recursos de suma para resolver cálculos que apuntan a la resta. Se espera que agilicen procedimientos mentales para resolver diferencias entre números pequeños apoyándose en la suma.

Puede preverse que hallar los números que dan cierto resultado al ser sumados a 1, 2, 3 ó 10, resultará más fácil para la mayoría de los alumnos que hallar los que sumados a 4, 5, 6, 7, 8 ó 9 dan cierto resultado (interviene aquí, como en otros juegos, un factor azar). De esta manera, los alumnos practicarán sumas sencillas a nivel mental, lo cual abonará a la memorización del repertorio básico, pero también se verán enfrentados a sumas de las que no disponen el resultado y para las que deberán desarrollar algún procedimiento, por ejemplo:

Cálculo	*Recurso*
3+__=4	Dígito+1
3+__=5	Doble -1
3+__=6	Dobles
3+__=7	Doble +1
3+__=8	Doble +2
3+__=9	Complemento a 10 -1
3+__=10	Complemento a 10
3+__=11	Complemento a 10 +1
3+__=12	Si 3+10 es 13, entonces 3+9=12
3+__=13	Dígito+10

Por otra parte, si algún alumno se percata de que puede restar, se enfrentará a restas de dígito menos dígito, pero también de bidígito menos un dígito, lo que le implicará conteo regresivo u otro procedimiento.

¿Qué dificultades implica el juego según los roles?

A continuación, describo con mayor precisión distintas dificultades que enfrentan los alumnos según el rol que ocupen.

La principal dificultad para los jugadores es, evidentemente, comprender la trama de relaciones en juego: el número que el secretario dice es la suma de dos números; uno de esos números está visible, debo averiguar el otro número: el que no puedo ver, pero puedo calcular. Se requiere un dominio de la suma suficiente para comprender esta variante de la misma. Además, puede ser conveniente que ya tengan memorizadas algunas sumas de dígitos (hay que tener en cuenta, además, que la dificultad se incrementa debido a la presión de decir el resultado lo más rápido posible).

Mientras los alumnos logran comprender la trama de relaciones, es de esperar que tiendan a adivinar más que a calcular o, como de hecho ocurrió, a intentar ver de reojo su carta. Es decir, el proceso de “devolución” (Brousseau, 1998) en el cual los alumnos se dan cuenta de que tienen lo necesario para averiguar el número escondido, puede tomar algo de tiempo.

Con respecto al secretario, no se prevén más dificultades que la de sumar dígitos. Es necesario que el desempeño en esta tarea sea bueno, pues de lo contrario afectaría al juego desde dos puntos: 1) la agilidad del juego, pues los jugadores no pueden empezar a calcular hasta que el secretario les dice el resultado de la suma y 2) Si el secretario dice un resultado incorrecto afectará el cálculo que hagan los jugadores y sus posibilidades de ganar.

2.3.1.3 La validación

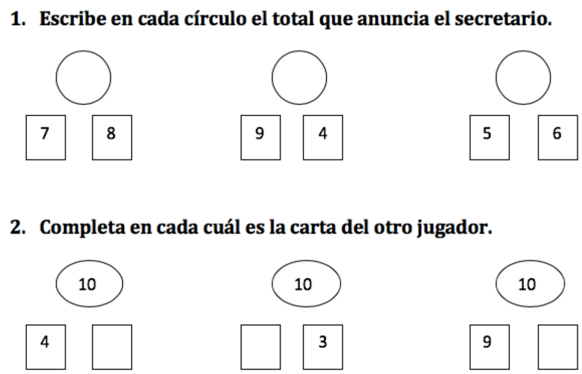
El juego ofrece dos formas de validación:

1) Una primera validación empírica es mediada por el secretario (la más utilizada en el juego). El secretario señala quién ganó (él puede ver si el resultado dicho coincide con la carta y también mide la rapidez de la respuesta).
2) Una segunda validación, ocurre de manera empírica cuando los jugadores corroboran (ya sea que hayan ganado o perdido) si el número que dijeron coincide con el de su tarjeta. Dicha validación funcionará bien solamente si el secretario calculó correctamente o si los alumnos hacen la suma directa a posteriori (ahora que ya pueden ver ambas cartas).

¿Y quién valida la suma calculada por el secretario? No está previsto que haya errores en esta acción, sin embargo, de ocurrir, tendrían que ser los jugadores quienes lo notaran y protestaran (validación social). Esto ocurriría, sin embargo, solamente cuando ellos estuvieran muy seguros de su respuesta.

Segunda actividad: Resolver hoja de trabajo

Enseguida se propone que los alumnos resuelvan de manera individual una hoja de trabajo que incluye dos actividades en las que tienen que hacer cálculos bajo dos formas: a+b=__ y a+__=c, es decir, se propicia que de manera escrita continúen practicando sumas de dígitos y de números faltantes en sumas, como lo hicieron en los distintos roles del juego (secretario o jugador).



Esta actividad, según las autoras de la Propuesta, podría permitir que los alumnos puedan "constituir un sentido posible de la escritura de la suma con un término desconocido <<7+…=15>>" (Parra y Saiz, 2007, p. 78). Se trata de pasar a la escritura la idea de "veo un siete, ¿cuánto me falta para el quince?".

2.3.2 Análisis posterior

Descripción de la clase. La consigna fue transmitida con bastante claridad por la maestra mediante un par de juegos simulados con dos equipos. Posteriormente, los alumnos resolvieron individualmente la actividad complementaria, con lápiz y papel y la revisaron de manera grupal, con la participación de algunos alumnos que comentaron sus procedimientos. En términos generales, puede decirse que la actividad funcionó como se esperaba, si bien ocurrieron dificultades de distinta naturaleza de las que hablaré más adelante.

2.3.2.1 El proceso de comunicación de la consigna

La primera parte de la comunicación de la consigna se hizo simulando varios juegos con apoyo de una trina. La maestra explicó cómo se organizarían físicamente: "*vamos a imaginar que tengo a mis dos jugadores* (llama a Astrid y a Luis) *y que se van a poner uno frente al otro* (los acomoda) *y va a haber aquí un tercero que es el secretario* (ella se sitúa en medio)". Enseguida explicó otras instrucciones referentes al manejo de los mazos y en cuanto los roles de los jugadores. A continuación, se dará cuenta de tres aspectos con mayor detalle.

Precisar la meta del juego

Comprender de qué trata el juego no fue inmediato para varios alumnos. En los primeros intentos de comunicar la consigna, la maestra hizo notar que es importante prestar atención al resultado dicho por el secretario y al número del otro jugador, ya que en relación a ellos se puede determinar el número propio. En los diálogos siguientes podemos notar intervenciones distintas en las que la maestra intenta ayudar a los alumnos, sin decirles explícitamente qué operación usar.

Primera ayuda:

> M: Rápidamente, si yo digo veinte y tú (Luis) estás viendo que ella tiene diez (Astrid), ¿qué carta tendrás tú para que yo haya dicho veinte?

La maestra intentó que el alumno se fijara en el resultado dicho por el secretario (20), o sea el número mayor; después señaló el número visible del otro jugador (10) y finalmente resaltó que faltaba conocer un número (el propio): 20 - 10 = ¿? Hay aquí un esfuerzo para que los alumnos vinculen los números en juego.

Segunda ayuda:

Posiblemente la maestra percibió que la instrucción resultaba complicada de entender y por eso, cambió la manera de comunicarla a Luis (en comparación de lo que dijo en la primera jugada):

> M: *¿Ella qué número tiene?*
> Luis: Diez

M: *¿Tú qué número tendrás que le dio diecisiete?*
(…)
Luis: Siete

Tercera ayuda:

M: (…) (A Astrid) Tú no puedes decir siete (la tarjeta de Luis) porque tú estás viendo el siete de él, entonces, ¿tú qué número tendrás? *Si la suma es diecisiete y él tiene siete, ¿tú qué ficha tendrás en tu mano?*
Astrid: Diez

Así, un primer paso fue ayudar a vincular los números en juego: veo un 10 y sé que el total es 17, ¿qué número tengo yo? Los alumnos podrían pensar, entonces, en el número "x" que sumado a A da C (A + X= C) o en la resta: C - A= B. Además, como vimos, la maestra *mantuvo la incertidumbre* de los alumnos, pues aún con la ayuda que les dio, ellos siguieron enfrentando el problema: averiguar el número de su propia carta, es decir, hallar la relación entre los números y pensar cuál operación o procedimiento usar. Por otra parte, no habría que suponer que la participación del resto de los alumnos como espectadores fue suficiente para que entendieran totalmente el juego, aunque estuvieron atentos la mayor parte del tiempo. La situación se volvió problema para ellos hasta que empezaron a jugar propiamente.

M: ¿Ya le van entendiendo más?
Aos: (a coro) Sííí
M: ¿Sí?
Fernando: (comenta en voz alta) Es como… si… este… uno diga diez y el otro diga siete
M: Ajá

De mirar de reojo a calcular: medios distintos

La maestra pidió a otros tres alumnos que le ayudaran a realizar otro juego simulado. En la primera jugada de Joy, Fernando y Yunery (secretaria), la maestra rápidamente se dio cuenta de que Fernando había visto su carta de reojo y descalificó la jugada:

M: Ah no, porque él ya lo vio (el número), hizo así (lo imita). No sirvió (regresa la carta al mazo)
(…)
M: (A Fernando) No tienes tú que ver. Es el objetivo del juego.
(Fernando asiente).

En varias jugadas posteriores se observó que al seguir la indicación de tomar una carta y colocarla a la altura del pecho, tanto Joy como Fernando veían los números de sus cartas, ya no a reojo sino a trasluz (incluso volteaban el número cuando estaba al revés). La maestra ya no se percató tan fácilmente de esto y de esta manera, llevaron a cabo varias jugadas más, lo que redujo varias jugadas a una competencia de rapidez verbal.

> Fernando (6) y Joy (5)
> Yunery: ¡Once!
> Joy: (rápidamente) ¡Cinco!
> (Se hizo visible que Joy vio su carta a trasluz, porque enderezó el número que estaba al revés)
> Fernando: (un segundo después) ¡Seis!
> M: Ganó él porque dijo el número de su ficha que él no había visto. Entonces él (Joy) se lleva las fichas
> (…)
> M: (A Fernando) Te volvió a ganar. Estás correcto, pero es el que lo dice más rápido".

¿En qué medida el hecho de no entender qué hacer (qué operación o qué procedimiento usar) aunado a que el mismo papel se traslucía, favorecieron los intentos de mirar la carta propia, transgrediendo la regla del juego? ¿Cómo lograr que el deseo de ganar no impida a los alumnos a responsabilizarse más en el juego, y aceptar el problema? El hecho de que la maestra invalide una jugada, ¿qué información pudo darles a los alumnos?

Una condición necesaria para jugar es que el alumno comprenda que no requiere adivinar o ver de reojo, sino calcular, es decir, necesita comprender que el número puede ser determinado con recursos matemáticos que él tiene a la mano.

La maestra hizo una pausa y dio una nueva indicación:

> M: Ahora una modificación, cuando digan saludos no se queda aquí (la carta) porque ahí yo puedo ver que es uno y hasta le volteo (gira la carta)
> (…)
> M: Entonces, para no hacer trampa voy a hacer saludos (levanta la carta y la pega al pecho). Aquí pegado, ¿sale? Y así no veo y tampoco se vale, Fer, que le haga así, ¿eh? (ver de reojo hacía abajo)

A partir de esta modificación, como veremos, se reintrodujo el medio original. Poco a poco más alumnos asumieron el reto de calcular. Veamos, por ejemplo, la pareja de Fernando y Joy. En una de las jugadas ocurrió lo siguiente:

> Joy (10) y Fernando (6)
> Yunery: Dieciséis

Joy: (tras pocos segundos) Diez
(M asintió)
(Joy miró su tarjeta durante unos segundos)

En esta jugada, Fernando no alcanzó a responder nada (no desprenderse de la acción anterior le hizo perder varios segundos que Joy sí aprovechó para calcular). En esta jugada y subsecuentes podemos ver un cambio en Joy, de mirar sus cartas a trasluz pasó a darse cuenta de que podía calcular. El proceso de Fernando, en cambio, fue más lento, pero tras pocas jugadas (y las amonestaciones de la maestra) también empezó a calcular y ganó algunas jugadas (sobre todo cuando estaban en juego números muy pequeños).

La validación: responsabilidad compartida

La validación como responsabilidad que deben asumir los alumnos fue difícil de comunicar y delegar para la maestra. Como ya expliqué, en cada jugada se esperan dos tipos de validación a partir del resultado calculado por los jugadores, 1) Validación social en la que el secretario(a) señala al ganador de la jugada bajo dos criterios, que la respuesta coincida con el número de la tarjeta del jugador y la rapidez, quien responde primero gana; 2) Validación empírica, el propio jugador revisa su tarjeta para averiguar o confirmar el número correcto. Sin embargo, como veremos a continuación, durante la transmisión de la consigna, la maestra asumió el papel de validar las respuestas de los alumnos en sus diferentes roles:

Fernando (7) y Joy (7)
Fernando y Joy: ¡Saludos!
(Yunery le dice la respuesta a M, voz inaudible)
M: *Nooo, a ver di bien la suma*
(Yunery piensa durante varios segundos)
Ao: Catorce
Joy: Siete
(La M asiente. Fernando le pregunta cuál fue el total)
M: (a Fernando) Catorce
Fernando: Cuatro
(M hace un gesto de extrañeza y Yunery le sonríe mientras niega con la cabeza)
M: (a Yunery) Tienes que sumar bien, porque si no a ellos los confundes

En el fragmento anterior encontramos dos momentos de validación orquestados por la docente. El primero es cuando valida la suma realizada por la secretaria: Yunery manifestó dificultades para sumar correctamente (ya comenté que esto no se esperaba, uno de los requerimientos para jugar era que los alumnos dominaran en cierto grado la suma de dígitos) y, al no estar suficientemente segura de su resultado, antes de anunciarlo en voz alta a sus compañeros, esperaba que lo validara la maestra. Haber dejado pasar el error habría sido, posiblemente, útil, puesto que al finalizar la jugada ambos alumnos habrían dicho resultados erróneos lo que los habría llevado a revisar sus tarjetas y la maestra podría haber dicho: ¿cuál es el total de la suma? Al darse cuenta de que la secretaria había dado un resultado erróneo, se hubiera podido hacer una especie de retroalimentación de la jugada.

La segunda validación hecha por la maestra fue del número dicho por cada jugador. En el caso de Joy, quien dijo su número correctamente, la maestra hizo un gesto de aprobación. Pero en el caso de Fernando, ante una respuesta muy alejada de la esperada, hizo un gesto de sorpresa. La maestra omitió aclarar que esta acción correspondía a la secretaria y que dicha validación se completaba cuando el alumno revisara su propia tarjeta. El momento de validación empírica es importante. Hubiera sido interesante que tras señalar a Joy como ganador, la maestra pidiera a ambos niños que se mostraran sus cartas. Considero que la validación hecha por el secretario se complementa con la validación empírica pues probablemente cada tipo de validación pueda tener un impacto en el niño, al menos en este momento en el que está confrontando sus procedimientos exitosos o no con el resultado de su carta.

2.3.2.2 Diversidad de interacciones a partir de un mismo juego

Como ya comenté en la introducción, no todos los niños jugaron el mismo juego. En el caso del presente, esto fue especialmente evidente.

Episodio uno: ¿Juegos distintos?
En la trina de Yunery, Braulio y Fernanda M (secretaria) sucedió lo siguiente:

> Yunery (6) y Braulio (1)
> Yunery y Braulio: ¡Saludos!
> (Yunery mira hacía abajo. Braulio la observa)
> Braulio: (en tono de reproche) ¡Es que tú ves tu carta!
> (Yunery no dice nada y mientras tanto Fernanda está ocupada sumando ambos números)
> Fernanda (secretaria): ¡Siete! ¡Siete!
> Yunery: (rápido) Nueve
> Braulio: (poco después) Uno
> (Fernanda señala a Braulio)
> Braulio (brincando): ¡Yupi!

(Yunery sigue pensando y no entrega la carta, Braulio extiende su mano)
Yunery: (en tono de reclamo) ¡Yo gané!
Braulio: ¡Tú dijiste nueve!
(Fernanda le quita la carta a Yunery y se la muestra: 6. Yunery ya no dice nada).

En el fragmento anterior podemos observar que cada alumno se enfrenta al problema de una manera distinta. Desde el rol de secretaria, a Fernanda M., le corresponde, en primer lugar, hacer una suma directa: 6+1=7. Además, debe llevar a cabo varias acciones: sincronizar el momento de tomar la carta diciendo: 1, 2, 3; anunciar el resultado en voz alta, estar atenta a quién responda primero y de manera correcta para señalarlo como ganador. Aquí enfrenta el problema de validar y ayudar al medio en la retroacción: Yunery no acepta que perdió y Fernanda debe intervenir mostrándole la tarjeta. Sin embargo, estar pendiente durante la jugada de que los jugadores no vieran de reojo sus cartas no fue asumido por ella como algo más que debía hacer.

En esta jugada (y posteriores) se pudo observar que Yunery encontró una alternativa para averiguar rápidamente el número de su carta: ver de reojo. Así, podemos decir que *su* problema consistió en encontrar una manera –que no incluía el cálculo– de decir el número antes que el otro jugador. No obstante, en el fragmento anterior vemos que algo falla: si el total fue siete, ¿cómo pudo decir nueve? Nosotros sabemos que un sumando no puede ser mayor que el total, pero Yunery, confiando en su *estrategia,* y tal vez porque aun no comprendía la relación implicada en el juego, no se dio cuenta que había visto el número al revés y perdió. Este hecho nos deja suponer que "hacer trampa" también requiere poner en juego conocimientos que permitan controlar si un resultado es válido o no.

En cambio, para Braulio *su* problema fue calcular su propio número. En la jugada anterior (y posteriores) observamos que él sí tomaba en cuenta el resultado anunciado por la secretaria y el de la otra jugadora para determinar su propio número. En el caso anterior, él veía un 6 y escuchó que el resultado era siete, seguramente en los segundos que tardó para responder logró vincular los números: "¿cuánto le falta al 6 para llegar al 7? ¡Uno!" Este es el conocimiento que se espera en el juego: relacionar dos números para determinar la incógnita. Sin embargo, en la última jugada notamos un cambio en las acciones de Braulio: mira a trasluz su carta. A continuación, ahondaré más en este hecho.

Episodio dos: ¿Jugar para ganar o jugar para aprender?

La competencia es el motor del juego, genera la necesidad de responder más rápido que el otro: gana el que responde más rápido. ¿Cómo afecta esto al desempeño de los alumnos en el juego? Como vimos, Yunery desde el principio recurrió a una estrategia que le permitió ganar la mayoría de las jugadas, no sabemos si la alumna estaba consciente de que hacía trampa, pero sí considero que el mismo reto de la situación fue tan grande que le impidió entrar al juego[17]. Además, podemos ver que la motivación de ganar pesó más que jugar bien, es decir, el intentar hacerlo sin temor a equivocarse, a probar distintos procedimientos, a aprender con el esfuerzo que eso implica.

En la última jugada Braulio se percató de que su carta se transparentaba y aprovechó la ventaja que esto le suponía. En ese momento, su rostro se relajó y pareció estar más seguro (ya no había incertidumbre, ya sabía cuál es su número). Vemos que se invierte el rol: Ahora Braulio ganó la jugada -pese a que la secretaria dio mal el total-. Tras ese cambio, el rol de la secretaria perdió importancia para él y se centró en decir el número más rápido que Yunery. Tras ganar la jugada festejó igual que cuando ganó por primera vez (cuando sí había calculado).

Quisiera destacar el cambio de este alumno, quien previamente había calculado en todas las jugadas, pero eso no le garantizó ganar decir el resultado correcto en todas las ocasiones (ganó solamente una vez porque Yunery vio el número al revés). Me parece necesario señalar una diferencia entre jugar para aprender un conocimiento nuevo y jugar para ganar (en un sentido simbólico). Ganar tiene un peso importante (y necesario) para los alumnos que juegan, ellos no están preocupados por lo que puedan aprender de la situación, ellos juegan para ganar. ¿Y qué implica jugar? competir con otro, intentar ganarle, buscar estrategias para ser más rápido en responder, cuidar que el otro no haga trampa (o hacer trampa discretamente). Entonces, ¿qué pudo pensar este alumno al perder en sucesivas jugadas? A lo largo del juego se observa cierta desilusión al perder una jugada por segundos de diferencia, sorpresa al ver que la otra jugadora responde muy rápido, e

[17] En este estudio, por *entrar al juego* me referiré al momento en que los alumnos comienzan a pensar y a probar sus ideas al resolver los cálculos, puede decirse también, retomando el concepto de devolución (Brousseau, 1998), que es el momento en el que aceptan la responsabilidad de sus jugadas, en el que empiezan a jugar con autonomía.

incluso la acción de aventarle la carta a la ganadora podría reflejar enojo moderado. Braulio no se da cuenta de que a pesar de no ganar las jugadas está aprendiendo más que Yunery.

Episodio tres: Compartir la responsabilidad sobre el juego

En la trina de Luis, Joy y Astrid (secretaria), se observa una dinámica agradable de juego. La secretaria por un lado se muestra más conciliadora ante ciertos incidentes y los jugadores, aunque risueños, están atentos a lo que va pasando:

> Luis (1) y Joy (6)
> Luis y Joy: ¡Saludos!
> Astrid: Siete
> Joy: (más rápido) Seis
> Luis: (emocionado) Uno
> (Astrid extiende su mano y Luis le entrega la carta)
> Joy: Fue un empate
> (Astrid extiende su mano a Joy, pero éste no le entrega la carta)
> Luis: ¡Fue un empate!
> (Astrid mira a Luis unos segundos y le regresa su carta)
> Joy: Entonces la regresamos al mazo (la carta)
> Astrid: (sonriente) A ver, está bien, devuélvanlas (al mazo)
> (Los jugadores revuelven su mazo)
> Joy: (A Luis) *Sin ver, sin ver* (mientras revuelve su mazo)

En el fragmento anterior podemos notar que ante una situación de empate (no prevista en la consigna) los jugadores manifestaron desacuerdo ante la decisión de la secretaria; ella, tomando en cuenta a ambos jugadores, decidió descartar dicha jugada e indicó que cada uno regresara la carta al mazo y revolviera las cartas. Aquí la cuestión de rapidez también define quién gana o no, pero el rol no está conferido a la secretaria, sino que es algo que regulan los tres alumnos sin que esto afecte el propósito del juego.

Destacaré otro episodio de responsabilidad compartida de este mismo evento. La actuación de Joy inició desde su participación en la ejemplificación de la consigna, donde pudimos ver que él veía su número a trasluz. Sin embargo, al parecer al darse cuenta de que podía calcular su propio número aceptó el reto y, por ende, su responsabilidad en el juego. Quizás influyó el hecho de que fuera bastante ágil para calcular. Ahora, en el fragmento anterior, vemos que Joy le dice a Luis: “sin ver, sin ver”; lo cual denota un interés de Joy por hacer que Luis comparta la responsabilidad del juego. No sé si para Luis fue clara la intención de Joy, pero al mismo tiempo vemos que Luis no pareció intentar hacer trampa; supongo que esta trina logró disfrutar el juego, y sin sentir demasiada competencia.

Episodio cuatro: ¿sólo los rápidos deben ganar?

La rapidez necesaria para el dinamismo del juego también generó efectos adversos. Mostraré dos ejemplos:

Fernanda H., tuvo dificultades para entrar al juego, probablemente porque le tocó jugar con dos compañeros muy ágiles para hacer los cálculos. Aunado a que probablemente no logró entender la consigna del juego. Noté que en varias ocasiones intentó ver de reojo, hasta que fue descubierta por el secretario, quien la acusó con la maestra de hacer trampa. A partir de ese momento la niña lloró a lo largo de varias jugadas.

> Fernando: Maestra, Fernanda le hace así (jala la carta y antes de pegarla a su pecho la ve de reojo) y luego dice nueve.
> M: Ah no, así no (toma la tarjeta y la vuelve a poner en el mazo). Hazlo bien, ¿Sale? (Fernanda comienza a llorar, pero M no se percata y se va).

¿Qué pudo sentir esta niña tras perder continuamente? Seguramente frustración por no saber el "secreto" que sí conocía Ademar, y después enojo tras ser evidenciada frente a la maestra. Probablemente, al igual que Yunery, esta alumna aún no entendía cómo relacionar los números; aunado a que la dinámica de la trina no le permitió ensayar un procedimiento para calcular. Esta trina conformada por un jugador que respondía demasiado rápido frente a una jugadora menos ágil, sin tiempo de pensar, de formular algo...

En otra trina observamos una diferencia importante en la agilidad para calcular entre los jugadores, por ejemplo, Carlos calculaba muy rápido y Oliver no alcanzaba siquiera a esbozar una respuesta, perdió en todas las jugadas. Al notar esto, el observador interrumpió el juego para explicar la consigna a Oliver, y realizó una jugada de ejemplo más lenta, en la cual Oliver logró decir su número (con cierta dificultad y con apoyo en dedos).

La prontitud con la que responden algunos alumnos se convierte en un obstáculo involuntario que impide a los otros la posibilidad de entrar al juego. Pensamos que algunas consideraciones podrían ser: repetir el juego varias veces para que se familiaricen con él y así realmente los ayude a practicar y memorizar. También hay que considerar formar equipos de niveles cercanos, pues de lo contrario, los menos ágiles van a perder siempre. A veces puede ser que estos alumnos simplemente necesiten más tiempo, sin tener la presión de velocidad que puede inducir el otro jugador cuando es más hábil.

Episodio cinco: ¿Cómo sé si gané o perdí?

Como ya comenté en el análisis previo, para los jugadores la validación es una forma de retroacción del medio sobre su acción. Pero la retroacción es solamente sobre el resultado, (correcto o incorrecto, o también, cercano, o alejado), y no directamente sobre el procedimiento. Frente a un resultado incorrecto, el jugador puede o no reflexionar sobre lo que originó el error, pero, en este caso, el componente de rapidez deja pocas posibilidades para esta reflexión.

> Ademar (8) y Fernando (9)
> Fernanda H: Diecisiete
> Fernando: Siete
> M: ¿Cuánto?
> (Fernanda le repite el total)
> Ademar: ¡Ocho!
> M: Bien
> Fernando: Siete
> (M valida respuesta de Ademar y le entrega la carta de Fernando, quien se queda pensativo)
> M: (a Fernando) Dijo diecisiete
> Fernando: ¡Por eso!

Vemos que Fernando no se mostró convencido, incluso miró su tarjeta unos segundos, antes de pasársela a Ademar. La retroacción del medio no le dio información alguna de por qué su respuesta era incorrecta, siendo que él estaba seguro de que era correcta.

2.3.2.3 Comentario: la ambivalencia de la competencia y la rapidez

La competencia y la rapidez, a la vez que son un estímulo importante en la actividad, juegan también en contra de la posibilidad de aprender, por las limitaciones que imponen para la reflexión, y también, por las dinámicas estresantes a que pueden dar lugar cuando ocurre que un alumno pierde siempre en un equipo.

Estas dificultades pueden compensarse en cierta medida mediante diversas acciones: para generar un espacio para la reflexión sobre procedimientos, con la actividad posterior que los alumnos realizan individualmente y eventualmente la puesta en común. Para aminorar las vivencias de estrés excesivo, rotando a los equipos con frecuencia y limitando el tiempo de juego.

Quisiera agregar aquí un comentario sobre los intentos de varios alumnos de "hacer trampa". Más allá del deseo de ganar que a veces se sobrepone al placer de jugar, me parece que dicha acción puede expresar una forma de defensa contra el malestar causado por no saber cómo jugar o no poder hacerlo con suficiente rapidez. Así, la trampa realizada por algunos alumnos adquiere un matiz de mecanismo de supervivencia en el grupo, de defensa ante el peligro de poner en evidencia la ignorancia. Haziel, uno de los alumnos del grupo, comento: "También hay que aprender a perder" y eso es algo que requiere de tiempo y de crear un clima donde el error sea valorado.

Estas reflexiones dejan ver que ciertos juegos, en tanto situaciones didácticas, tienen ventajas y también desventajas considerables.

2.3.2.4 Procedimientos de los alumnos durante el juego

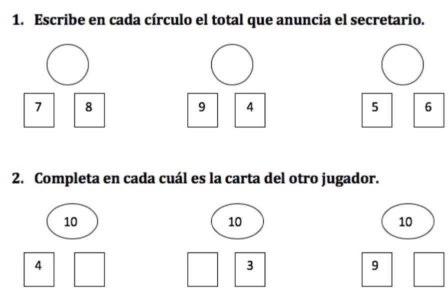
Desempeño general durante el juego

En el rol de secretario, los alumnos mostraron no tener memorizados la mayoría de los resultados, por lo que tardaban algunos segundos en calcular y anunciar el resultado a los jugadores. No obstante, los alumnos observados tuvieron pocas dificultades (Astrid, Braulio, Fernanda). En un solo caso (Fernando) observé que el alumno contaba con los dedos.

En el rol de jugadores, en cambio, los alumnos sí manifestaron mayor dificultad para llegar a un resultado. El desempeño fue, como era de esperar, heterogéneo, pero todos prácticamente lograron hacer anticipaciones. Por ejemplo, Braulio, en el papel de secretario no mostró dificultad para hacer las sumas, pero en el rol de jugador tardaba bastante más calcular. Luis solía calcular rápido, aunque por azar le tocaron cálculos más sencillos (por ejemplo: 6+__=7, 9+__=11). En dos ocasiones, por esa misma rapidez, se confundió ($\underline{5}$+__=8, $\underline{8}$+__=10) y dijo en voz alta el número de la carta de su contrincante (5 y 8, respectivamente), al instante, entre risas, se dio cuenta de su error. Joy calculó bastante bien y rápido en todas las jugadas (2+__=11, 1+__=7, 3+__=8, 2+__=10), no intentó ver de reojo las cartas y aceptó de buen agrado las dos veces en que hubo un empate. Fernanda M, igual que Ademar, se mostró bastante rápida en el rol de jugadora (aunque no sé qué tanto miró de reojo su carta). En cambio, Yunery, y Fernanda H., de manera más evidente mostraron que veían de reojo.

El procedimiento de doble conteo fue el más utilizado. A veces se pudo observar que los alumnos recitaban en voz baja a partir del número de su compañero hasta llegar al total anunciado por el secretario. En algunos casos, tras un rato de haber jugado, algunos alumnos memorizaron resultados y esto hacía que respondieran más rápido.

Actividad posterior al juego



En la actividad que se les puso después del juego, donde el trabajo fue individual, más pausado, pude observar un poco mejor los procedimientos de algunos alumnos. En esta actividad, confirmé la preeminencia del doble conteo con apoyo en dedos, con más o menos habilidad y rapidez. Identifiqué a un solo alumno, Oliver, quien siguió mostrando dificultad para comprender la relación de complemento aditivo: sumó ambos números en los tres ítems, como sumas directas. Gracias a la explicación que dio la maestra en el pizarrón, rectificó únicamente el tercer ítem correctamente (9+__=10), pero no sé si solamente copió el resultado.

En el otro extremo del desempeño, Joy hizo explícito incluso que él identifica la resta: “ya me acostumbré con la mente” y agregó: “si me sé el total le puedo restar el número final para saber el total”. Kenay explicó algo similar durante la puesta en común.

En el análisis de la puesta en común podremos profundizar un poco más en los procedimientos usados por los alumnos, sobre todo, en la problemática de su explicitación.

2.3.2.5 Puesta en común: ¿Qué significa construir/producir conocimientos?

Después de la actividad individual con lápiz y papel, se organizó una puesta en común con el propósito de difundir y analizar los distintos recursos que los alumnos pusieron en juego, sobre todo la estrategia general de sumar al chico para llegar al grande (sobreconteo). Durante esta fase emergen varias problemáticas relevantes que analizaré a continuación: 1) la dificultad para explicitar el procedimiento de complemento aditivo; 2) la institucionalización prematura de la operación de resta.

La dificultad para explicitar el procedimiento de complemento aditivo

> **M: ¿Cómo le hiciste, Carlitos, para descubrir la carta faltante, la que tú tenías? ¿Me platicas?**
> (Carlos no responde y varios niños levantan la mano, pero la M no les da la palabra).
> M: Aquí lo que me está diciendo (…) Ven, Mía (la niña se acerca y la M le entrega una carta) Mía y yo tenemos una carta, ¿sí? Y dijimos: ¡Saludos! Y nuestro secretario nos dijo…
> Obs: ¡Diez!
> (La M mira a Mía esperando que diga el número de su carta)
> Mía: Seis
> M: Muy bien (mirando al grupo). Ella… porque, porque yo ya tengo mi cuatro (señala el ítem 1, segundo ejercicio de la HT, anotado en el pizarrón) ¿y qué me faltó?
> Aos: (varios) Seis
> M: ¿Estuvo correcto?
> Aos: (varios) Sí
> **M: Sí. Mía, ¿cómo le hiciste? (…) Para que yo, que tengo aquí mi carta del cuatro… ¿cómo supiste que la tuya era ésta? (señala la tarjeta del 6).**
> **Mía: Sumando**
> M: ¿Qué sumaste?
> Mía: Cuatro más seis
> **M: Sumando cuatro más seis, pero… ¡tú no sabías que era cuatro más seis!**
> (Mía niega con la cabeza).
> M: ¡Por eso!
> **Ricardo: Le sumas cuatro al diez y te da seis**
> M: No, si yo le sumo el cuatro al diez me da catorce.

Una dificultad en el cálculo mental concierne al momento de explicitación de procedimientos: una cosa es resolver un cálculo y otra poner en palabras lo que se pensó. El cuestionamiento que la maestra hizo al primer alumno, Carlos, apela a una respuesta general (una síntesis de lo vivido en el juego y en el ejercicio) pero el alumno no responde nada y quizás la maestra interpreta su silencio como una señal de que no entendió lo que ella le preguntó, quizás esto hizo que desistiera en su cuestionamiento. Enseguida propuso escenificar una jugada con Mia, quizás con la intención de retomar el problema en el contexto del juego; no obstante, queda la duda de la conveniencia de utilizar los mismos números (ya habían resuelto ese ítem): el problema ya no era tal para la alumna, si bien lo que parece interesarle a la maestra es que ella reconstruya y explicite lo que pensó al resolver dicho cálculo.

Mía anuncia el número de su carta (6) y la maestra procede a repetir la pregunta del inicio: *¿cómo le hiciste?* La niña, en voz baja, respondió: "sumando", la maestra en un intento por indagar más le preguntó qué había sumado y la niña respondió: "cuatro más seis", la maestra rechazó esta respuesta porque: "tú no sabías que era cuatro más seis". Probablemente Mía intentó expresar con su respuesta que ella buscó el número que sumando a cuatro le diera diez, pero la maestra no pareció estar muy consciente en el momento mismo de esa dificultad, o tal vez sí, pero presiona para obtener una respuesta distinta.

La participación de Ricardo deja ver que él siguió el diálogo entre la maestra y Mía y, dado que la maestra no validó la idea de sumar cuatro y seis, porque el seis era el número desconocido, el alumno propuso una vinculación distinta de los números en juego: diez más cuatro. La maestra nuevamente invalidó tal respuesta porque el resultado era catorce.

Podemos ver que ambos alumnos logran, a nivel de la acción, resolver los cálculos propuestos, pero no ocurre lo mismo a nivel de la formulación. Explicitar requiere formular en palabras (o escritura numérica) lo que se pensó, es una especie de volver (reconstruir) sobre los pasos que se siguieron al resolver un cálculo. Es un trabajo metacognitivo, no se trata de volver a resolver el cálculo sino a repensarlo en términos de formulación. Los niños no tienen experiencia en este tipo de trabajo, ni tampoco tienen el léxico de repertorios o procedimientos posibles. Los niños saben que sumaron "algo" pero no están acostumbrados a pensar en una suma del tipo complemento aditivo (esquemas conscientes de acción); tampoco logran expresar las sumas que ensayaron previamente.

Además, recordemos, que el juego planteaba un problema que los alumnos resolvieron poniendo en juego sus conocimientos previos, pero también apuntalaba a construir un nuevo conocimiento (sumarle al chico para llegar al grande, restar). A nivel de la formulación los niños podrían intuir que algo hacen con los números (¿sumar?) pero esto no implica que logren representarse una suma con hueco o la idea de "x" número sumando a "z" da diez.

Así, los alumnos enfrentan dos problemas de distinta naturaleza: resolver un cálculo y explicitarlo, cuando aún no logran identificar la búsqueda del complemento aditivo como un procedimiento con pleno derecho, distinto de la suma directa, o todavía más, cuando no logran ver aún que está implicada la operación resta. La maestra presionó para obtener una explicación que, por lo que se vio, los alumnos no estaban en condiciones de dar. En esta ocasión, hubiera sido tal vez mejor que ella interpretara y explicara el procedimiento (buscar el número que sumado a …).

¿Hay un procedimiento esperado?

> Kenay pide la palabra.
> M: A ver, Kenay. Gracias, Mía. (A Kenay) **¿Cómo le hiciste tú para saber que aquí me faltaba mi carta seis?**
> **Kenay: Le resté**
> **M: Ah, muy bien. Kenay le restó. ¿Qué restaste?**
> **Kenay: Diez menos cuatro**
> M: Ohh, **¡muy interesante!** Entonces tú a diez (señala el 10 del pizarrón), al total, le restaste cuatro para saber cuánto le faltaba al cuatro para llegar al diez. **Muy bien.**

El fragmento anterior muestra que Kenay identificó la pertinencia de la resta[18], y la maestra rápidamente validó dicho procedimiento, incluso con cierto entusiasmo. Sin embargo, probablemente esto no es algo que los demás alumnos ya estén en posición de entender. Emerge el hecho de que se trata de una decisión delicada: ¿cuándo es preciso ignorar una participación y cuándo hay que difundir la idea de manera accesible para todos?

Es posible que la maestra haya asumido que el propósito de la actividad era identificar la idea de restar con la estructura del problema de suma con hueco (¿nos faltó una mejor comunicación?).

[18] Como ya dijimos, la presencia explícita de la operación resta no es evidente. Para ver una resta aquí hay que hacer un cálculo relacional (Vergnaud, 1991): dado que el número que busco, sumado a A debe dar C, entonces es C menos A. Además, aunque se logre ver la resta, quitar un número de otro en general sigue siendo más difícil que sumar a uno para llegar a otro.

Institucionalización prematura

Posiblemente lo anterior influyó en que la maestra, en su siguiente intervención, continuara tratando de afianzar el procedimiento de restar, bajo la forma de quitar. Los siguientes dos alumnos que participaron también dijeron que habían restado.

> M: (continua) ¿cómo le hiciste tú, Astrid, para resolver la dos? ¿Cómo le hiciste, mi amor? Aquí ya supimos que faltaba un seis (en el ítem 1). Ahora tú, aquí el secretario nos dijo 10. Tú tienes una carta que es esta (7) y yo tengo una carta que es esta (3), ¿cómo le hacemos?
> (Astrid no responde y la M le pide que pase al pizarrón. La M le entrega una tarjeta a Astrid (7) y ella toma otra (3)
> M: Nuestro secretario Luis… ¿Nos dices nuestra suma? (resultado)
> Luis: Diez
> M: ***Yo tengo este tres, ¿qué número nos falta?***
> (Varios niños levantan la mano, pero la M les dice que Astrid es la que tiene que responder).
> Astrid: (piensa) Siete
> M: ¡Siete, muy bien! ¿Cómo le hiciste para saber que ahí va la ficha siete?
> (No se escucha la respuesta de Astrid)
> M: ***¿Le quitas tres? ¿A qué le quitas tres?***
> Astrid: A diez
> M: A diez. ***Astrid le quitó tres que ya tenía para saber cuánto le faltaba para tener diez***… Gracias Astrid.

No es inmediato pasar de la ecuación tres más cuánto me da diez a diez menos tres, como ya vimos, la alumna tuvo que hacer un cálculo relacional: "hay un número que con 3 me da 10 si yo a 10 le quito el 3 obtendré dicho número".

> M: Ademar, ¿Cómo descubres qué número falta aquí? (señala el tercer ítem).
> (Tampoco se escucha lo que dice Ademar)
> M: ***¡Oh, muy bien! Él también le restó nueve*** (al diez) y ¿cuánto te resultó? (le da el marcador a Ademar).
> Ademar: Uno (lo escribe)
> M: ¿Está correcto?
> Aos: Sííí
> **M: *¿Sí? O sea, que si yo me sé el total… a mi carta que falta le puedo restar la cantidad de mi carta que yo alcanzo a ver para descubrir el número faltante. Muy bien, ¿sencillo?***
> Aos: Sííí
> M: ¿Sí? ¿Ahí vamos? ¿Lo vamos entendiendo? ¿Quién en el ejercicio dos obtuvo esos resultados?
> (Muchos niños levantan la mano, otros dicen yooo)
> M: ¿Yo o manita arriba? Ándale, ¡muy bien, qué listos!

No podemos saber con certeza si Astrid y Ademar restaron o si sus respuestas se derivan de la validación hecha por la maestra a la operación dicha por Kenay. Es decir, cuando Mía dijo que había *sumado* la maestra la cuestionó bastante, en cambio cuando Kenay dijo que había restado muy rápido la maestra aprobó la operación. Así, al decir que “restaron” no necesitan explicitar el procedimiento, de hecho, la maestra es quien lo hace. En el caso de Ademar, vemos que para resolver 9+__=10, él comenta que restó: 10-9, pero en este caso en particular, nos parece más evidente pensar: 9+1=10.

Considerando a la mayoría del grupo cuyo primer reto fue comprender la relación implicada y poner en juego el doble conteo, puede decirse que fue hasta cierto punto lamentable que en la puesta en común solamente se lograra explicitar, difundir y valorar la idea de resta.

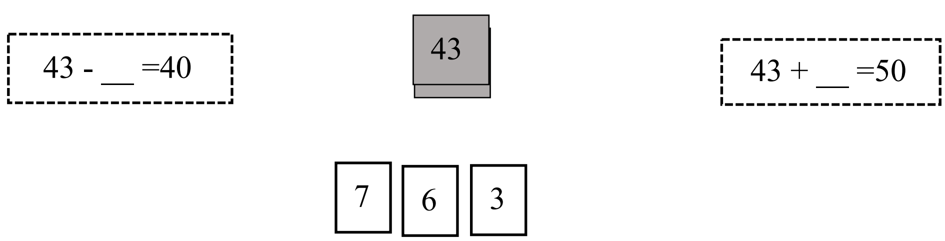
¿Qué dificultades implicó para la maestra gestionar la puesta en común? ¿qué dificultades conlleva para los alumnos explicitar oralmente lo que hicieron? ¿por qué es necesario explicitar? Un objetivo general es que los niños vayan adquiriendo la habilidad de explicar lo que pensaron, lo cual no es algo espontáneo. ¿Cómo instalar la necesidad de explicitar por motivos ajenos a decirle a la maestra? ¿Qué se pudo haber tomado en cuenta para mejorar dicho momento?

2.4 Situación 3: “Armar números redondos”

2.4.1 Análisis previo

Descripción. El juego de “Armar números redondos” consiste en que cada jugador tome una tarjeta con un número no redondo y averigüe si alguna de sus tres cartas (con dígitos del uno al nueve) sumada o restada a dicho número le ayuda a formar un número redondo. Cuando forman un número redondo, lo separan junto con el dígito que los llevó a formarlo. Gana el que se deshace primero de sus tres tarjetas.

Se planteó que los alumnos contestaran individualmente una hoja de trabajo con tres actividades: a) Resolver jugadas de un juego simulado, b) Encontrar el número de unidades que sumado o restado a un número no redondo que se da, arrojara un número redondo dado y, c) Escribir entre qué números redondos se encontraba un número de dos cifras.



Propósitos de la situación En el juego están implicadas dos tareas: identificar las decenas que encuadran al número dado, lo que implica un conocimiento del SND (escrito y oral), y calcular cuánto hay que agregar o quitar al número para llegar a una de las decenas que lo enmarcan. Si bien la actividad implica movilizar procedimientos para restar, la resta en tanto operación puede permanecer implícita: para identificar el número redondo inferior (#RI) basta con saber que éste se forma con la cifra de las decenas agregándole un cero; si es oralmente, basta con saber que la primera parte del nombre del número lo indica. La cantidad de unidades que es necesario restar al número dado para obtener el #RI se infiere directamente de la cifra de las unidades o, si es oralmente, está dada por la segunda parte del nombre del número (por ejemplo, en 38, hay que quitar 8 para tener 30). No hace falta calcular. Pero, si no sabe esto último, y sí se identificó el #RI, entonces sí habría que restar, por ejemplo, contando para atrás: 38, 37, 36… 30. Para identificar el número redondo superior (#RS), es necesario conocer la escala de las decenas y para saber cuánto sumar al número dado se necesita saber completar decenas, lo que supone sumar (por ejemplo, contando de uno en uno) mientras se memorizan los completos a los múltiplos de diez.

Es posible hacer algunas conjeturas sobre la dificultad relativa de los distintos números. En números que están cerca de la decena inferior, tales como 21 o 32, la operación podría resultar fácil de calcular mediante el procedimiento de conteo regresivo: 21-1=20, 32-2=30. Sin embargo, si optan por calcular el complemento aditivo (lo cual es probable), la operación resultaría difícil pues el número queda lejos de la decena superior: 32+__=40, pero sería fácil con los números que están cerca de la decena superior, como 49+__=50 ó 68+__=70.

Así, los conocimientos mínimos que se requieren para poder jugar son: saber qué es un número redondo (múltiplo de diez) e identificar entre qué decenas se encuentra un número de dos cifras (encuadrar). Se espera que el juego favorezca: Identificar de manera automática la cantidad de unidades que hay que quitar a un número no redondo para obtener el número redondo inferior (#RI), e identificar de manera rápida el complemento a la decena superior (#RS).

Cabe recordar, para cerrar este apartado de análisis previo, que los números redondos juegan un importante papel en el conocimiento de la serie numérica, y en el desarrollo de estrategias de cálculo mental.

Las actividades individuales, después del juego

La primera actividad presenta un juego simulado cuya finalidad es que los alumnos tengan otra oportunidad de resolver, sin presión de los compañeros y con mayor tiempo para que reflexionen sobre aquello que hicieron en el juego. En esta partida simulada ya no se dejan al azar los números a resolver, sino que se seleccionaron aquellos que enriquecerán más el momento de la puesta en común.

1. Los chicos de segundo jugaron varias veces a armar números redondos. En cada cuadro aparecen las tarjetas que les tocaron durante el juego.

- Encierra el número (o los números) que te ayuden a armar un número redondo.

Número	Tarjetas del 1 al 9
43	4 7 3
89	1 4 5
65	3 6 5

Número	Tarjetas del 1 al 9
16	3 9 6
72	8 2 5
77	6 4 8

- Compara tus respuestas con tus compañeros.

En la segunda actividad se presentan cuatro sumas y dos restas con hueco. Con ello, se introduce una representación más convencional del tipo de operaciones que enfrentaron en el juego.

2. Escribe cuánto hay que sumar o restar para llegar a un número redondo.

32 + _______ = 40　　73 + _______ = 80　　95 - _______ = 90

69 - _______ = 60　　81 + _______ = 90　　66 + _______ = 70

La tercera actividad permite que practiquen nuevamente cómo encuadrar un número dado entre dos números redondos, esta acción fue importante en el juego y al presentarla por escrito permite que los alumnos dispongan de otra oportunidad para reflexionar sobre esto.

3. Escribe los números redondos entre los que se encuentra cada número.

_______ 57 ________　　_______ 85 ________

_______ 34 ________　　_______ 76 ________

2.4.2 Análisis posterior

Descripción de la clase A manera de introducción, la maestra comentó que el juego trataría de números redondos y les explicó que estos números eran aquellos que terminaban en cero, es decir, las decenas. Enseguida, la maestra dio la consigna del juego a lo largo de varias instrucciones y decidió ejemplificarlas con ayuda de una trina. Ya en el momento de jugar, se puso de manifiesto que a algunos les costó trabajo recordar las instrucciones por lo que la maestra tuvo que repetir algunas de manera particular. Conforme avanzó el tiempo los alumnos lograron jugar de manera más fluida. La actividad los mantuvo atentos y, aparentemente, divertidos. Finalmente, de manera individual los alumnos resolvieron las tres actividades de la hoja de trabajo que se revisaron grupalmente.

2.4.2.1 La consigna dada por la maestra: el inicio de la devolución

La consigna que dio la maestra antes y durante el juego tuvo que ser modificada, ejemplificada, en un sentido positivo, con el fin de hacerla comprensible para los alumnos. No se previeron -en el análisis previo-, de manera suficiente, las dificultades para transmitirla. Se pueden distinguir varios momentos.

Primer momento. La maestra explicó la consigna del juego antes de que los alumnos manipularan el material. Esto la llevó a enunciar cinco instrucciones de organización del material para poder jugar, las cuales si bien son sencillas, resultan confusas porque implican manipular distintos mazos de tarjetas y, al mismo tiempo, hacer numerosas acciones: “revolver”, “repartir” “*poner* hacia abajo”.

Segundo momento. La maestra pareció anticipar que podría resultar difícil para los alumnos retener todas las instrucciones y quizás por esa razón les dijo: “Ahorita se los estoy platicando, pero vamos a hacer un ejemplo para que me lo entiendan bien”. La maestra decidió plantear entonces, en calidad de ejemplo, un ítem de un ejercicio que venía en la hoja de trabajo (ítem 3). Con dicho ejercicio quedaron ejemplificadas y, con ello hasta cierto punto, explicadas las cuestiones básicas requeridas para poder jugar: qué es “el número redondo que va antes y el que va después”:

M: (continúa) Si yo tengo la carta diecisiete y vamos a suponer que las cartas que salieron de las tres que tengo… tengo que observar, de mis tres cartas (3, 1 y 6), si me sirven para que el diecisiete se convierta en un número redondo, ya sea que le sume o le reste (escribe en el pizarrón…)

$\boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{6}$

___ 17 ____

M: A ver, ¿cómo? ¿Cuál es la decena que va antes del diecisiete?
Aos: El diez
M: Diez. ¿Cuál es la decena…
Aos: (interrumpen) Veinte.

$\boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{6}$

10 20

___ 17 ____

En este momento de la clase vemos que la maestra decidió mostrar una resolución a título de ejemplo. ¿Puede decirse entonces que la maestra decidió "enseñar" lo que se esperaba que los alumnos construyeran como medio de resolución? Nos parece que no. El conocimiento implicado "cualquier número no redondo está dentro de un intervalo de números redondos", no es el medio de resolución que los alumnos tendrán que desarrollar o construir con el juego, sino un conocimiento que *deben tener* de entrada para poder jugar. El propósito del juego es afirmar ese conocimiento que puede ser endeble (sé que existen los #R pero no cuáles son), y sobre todo, desarrollar formas rápidas de obtenerlo. En cambio, el ejemplo de una resolución concreta probablemente sí ayudó significativamente a aclarar a los niños de qué trata el juego.

Tercer momento. La maestra formó los equipos bajo el criterio de cercanía (vecinos), repartió los mazos y dijo las instrucciones del juego.

Cuarto momento. Probablemente porque percibió que la consigna del juego no había quedado clara para todos, la maestra decidió dar un nuevo ejemplo con ayuda de un equipo, desde la distribución de las tarjetas y la formación de los mazos (el ejemplo anterior fue solamente de cómo proceder una vez que ya se tienen las cartas). A la par, la maestra intentó supervisar que el resto de los equipos fueran siguiendo las indicaciones; esto resultó complejo porque ella permaneció al frente sin poder verificar que los equipos que estaban más alejados estuvieran realizando las acciones que ella decía. Al interior de los equipos hubo alumnos que exclamaron no haber comprendido del todo y la maestra les dijo que irían entendiendo el juego "sobre la marcha".

Quinto momento. Finalmente, los alumnos jugaron varias rondas mientras la maestra y los observadores nos acercábamos a mirar y a seguir recordándoles algunas instrucciones.

Como puede apreciarse la consigna resultó compleja para los alumnos y difícil de comunicar para la maestra. Es muy posible que la misma maestra supiera que el primer intento de explicación sin apoyo del material fue en vano. En cambio, la decisión de la docente de apoyarse en una de las actividades de la HT nos pareció importante y necesaria para explicar las nociones de #RS y #RI, así como para aclarar la meta a los alumnos. Finalmente, ejemplificar un juego completo también ayudó. En estos casos, es inevitable que las primeras jugadas de los niños todavía se confundan y haya que recordarles varias veces las reglas. El tiempo y esfuerzo invertidos en trasmitir la consigna, aunado por supuesto al interés del juego, ameritan que éste sea jugado a lo largo de varias ocasiones.

A continuación, muestro un pequeño fragmento de un equipo que iniciaba el juego. Durante la explicación de la consigna Tonatiuh y Brandon comentaron en voz baja no haber entendido cómo jugar. Sin embargo, al empezar el juego entre todos fueron reconstruyendo las instrucciones al tiempo que las realizaban, tales como: si se forma el par: "te las quedas" o los turnos: "vas tú, Brandon"; en cambio, otras instrucciones no quedaron muy claras como se apreció en una de las jugadas:

> (Tonatiuh toma la carta del 65, luego mira sus cartas: uno y dos)
> Tonatiuh: No, yo no la tengo. *¿Me ayudan?* (viendo a los otros jugadores)
> (Camila le pasa su carta del cinco, pero Tonatiuh duda unos instantes)
> Tonatiuh: (a la obs) ¿Se la doy? (la carta del 65 a Camila)
> (La obs le recuerda que debe tomar una carta del mazo comodín)
> Tonatiuh: Ahh
> (El alumno toma una carta, la del 6, y cuenta con los dedos)
> (…)
> Tonatiuh: Nooo
> (…)
> Tonatiuh: ¿Entonces qué hago? (con las cartas)
> (…)
> Obs: Se vuelven a revolver en el mazo

En el fragmento anterior podemos observar que Tonatiuh no ha asimilado una de las reglas: *"Si no le sirve ninguna de sus tarjetas, roba una del mazo (del uno al nueve)"* e introdujo una nueva cuestión: ¿se vale compartir cartas?[19] Su petición, de entrada, no fue cuestionada por los otros jugadores, incluso Camila le compartió su carta del cinco; no obstante, esto generó, a su vez, otra pregunta: si cada uno aportó una carta, ¿quién se queda con el par ganado? En esta ocasión la observadora ayudó a disipar la duda tras recordarles la regla.

Más adelante, Tonatiuh nuevamente tuvo una confusión tras elegir el 93, calculó que necesitaba el 7 y al revisar sus tres cartas expresó: "Sí lo tengo", enseguida mostró el par formado a sus compañeros, quienes probablemente aún no asumían su papel de validar los cálculos del otro. Un poco intrigado, el alumno preguntó directamente a la observadora: "¿Si estoy bien? ¿Qué hago?", ella le preguntó a su vez: "¿llega a cien?", Tonatiuh afirmó con un gesto y la observadora respondió: "entonces te quedas con esas dos (cartas)", Tonatiuh celebró levantando los brazos.

En varios equipos, como en éste, los alumnos empezaron a jugar sin la claridad suficiente acerca de las reglas a seguir. Poco a poco, a través de las intervenciones de los jugadores, y eventualmente de la maestra o de la observadora, éstas se fueron aclarando. En general, se puede decir que en el juego todos los participantes tendieron a estar atentos a las jugadas de los demás, y, aunque no lo hicieron explicito, verificaban que la carta elegida por el compañero satisficiera la condición de llegar a un número redondo. En este primer juego, Tonatiuh sintió necesidad de recibir validación de sus compañeros y al no tenerla la buscó en la observadora.

Prácticamente todos los niños pudieron poner en obra alguno, así fuera el más elemental (más adelante los detallo). Fue notorio que pocos alumnos pudieron identificar de manera relativamente rápida la carta que necesitaban o darse cuenta de que ninguna les servía. Esto permite considerar que el juego representó un reto adecuado para el grupo. No obstante, para que resulte provechoso y propicie lo que se espera de él, es necesario que se juegue varias veces más, alternando con otras actividades (o juegos) que apunten en la misma dirección.

[19] Esta regla no fue dicha por la maestra durante el momento de la consigna. Como se ve, hay precisiones que surgen hasta que comienza el juego.

La resolución de las actividades individuales, como se verá, constituyó otra oportunidad de afianzar conocimientos implícitos, para pensarlos, recordarlos y utilizarlos.

2.4.2.2 Diversidad de interacciones a partir de un mismo juego

En este apartado describo y analizo la diversidad de interacciones al interior de cinco equipos, poniendo atención a las diferencias que se derivan de los conocimientos de cada alumno, del factor azar en los cálculos que enfrentan y de las estrategias que utilizan para resolver las operaciones. Cabe señalar que son episodios que recortan cierto momento del juego y que permiten mirar "algo". Lo que muestro en cado uno de los episodios siguientes, no necesariamente ocurrió durante todo el juego. Conforme éste avanzó, las dinámicas, o algunos aspectos de éstas, también cambiaban.

Episodio uno: Entrar o no entrar al juego

Hay distintos modos de *entrar al juego*, pero no todos permiten que los alumnos aprendan lo que se espera.

En la trina de Oliver, Fernanda M. y Braulio podemos observar que uno de los jugadores no logra entrar al juego:

> (Oliver toma el 96 y enseguida revisa una por una sus cartas, toma la del nueve, que volteada parece 6, y muestra el par a los otros jugadores)
> Fernanda M: ¡Ese no es un seis es un nueve!
> (Oliver no dice nada, de cierto modo acepta que ese número no es. Le muestra su segunda carta (5) a Fernanda y ella niega con la cabeza)
> *Oliver: ¿Cuatro?*
> (Fernanda vuelve a negar con la cabeza)
> Oliver: (riéndose) ¿Nueve?
> Braulio: Sííí
> Fernanda: (a Oliver) Agarra otra (se refiere al mazo)
> (Oliver mira a Braulio, vacila si tomar o no una carta del mazo)
> *Braulio: Noventa y seis más cuatro…*
> Fernanda: (negando con la cabeza) Pero dijo la maestra que nomás (sic) del diez al noventa[20].

[20] Nuevamente, vemos un ejemplo de asimilación de la consigna. En este caso, la maestra dijo algo erróneo que Fernanda tomó al pie de la letra y afectó una jugada de Oliver.

En este fragmento podemos ver un cambio en Oliver, quien en un principio calculó correctamente: 96-6=90 (lo cual no deja de ser inusual por la propensión a calcular hacia el número redondo superior). Sin embargo, tras ser invalidada su operación se mostró más evasivo a enfrentar el juego como un reto y pasó a verlo como una serie de adivinanzas: “¿es un nueve? ¿es un cuatro?”. Vemos que dejó de responsabilizarse en su intento de hallar la carta correcta y procuró pasar dicha responsabilidad a los otros jugadores que, al menos en esta jugada, sí la asumieron[21]. Cada uno le ofreció distintas ayudas, Fernanda por medio de gestos le indicaba cuáles números no le servían, pero sin decirle cuál sí (eso hubiera sido facilitarle la tarea al máximo); Braulio estuvo atento al diálogo, pero solamente intervino en una ocasión validando el cálculo 96+4 dicho por Oliver, cuyo argumento numérico se vio debilitado por el argumento de Fernanda, validado implícitamente por lo que la maestra había dicho durante la consigna.

A lo largo de las siguientes jugadas fue posible ver que Oliver recurrió a distintos mecanismos para sobrevivir al juego, pero sin preocuparse por jugar realmente: 1) Actuaba de manera juguetona: regañaba a sus compañeros por no mantener los mazos bien apilados, aparentaba enojarse con el vecino que se asomaba a verlos jugar; 2) La forma en que pedía ayuda a sus compañeros, preguntando como si fueran adivinanzas, haciendo caras chistosas, etc., deja ver que, de manera aparente, Oliver está jugando (sigue las reglas, respeta los turnos, gana cartas) pero al mirar de cerca notamos que ni siquiera intenta hacer los cálculos por él mismo.

Episodio dos: Compartir el juego

En algunos equipos, los jugadores se involucran incluso realizando las cuentas que tocan a sus contrincantes. Para ejemplificar, nuevamente tomo un fragmento de uno de los juegos del equipo de Camila, Tonatiuh y Brandon:

> [Camila toma la carta del 96. Tonatiuh ve el 96 y rápidamente comienza a contar con deditos]
> Tonatiuh: [recita en voz baja] Noventa y siete [levanta un dedito], noventa y ocho [dos deditos], noventa y nueve [tres deditos], cien [cuatro deditos]
> [Tonatiuh revisa sus cartas]
> Tonatiuh: No, yo no lo tengo. [A Camila] Yo ya sé [sonriendo]

[21] En otra jugada Oliver intentó nuevamente que le ayudaran, pero sus compañeros ya no le respondían y se reían de él.

Brandon: ¿Es 96? (cuenta con deditos)
(Camila no comenta nada y elige su carta del cuatro, pero no les muestra el par)
Tonatiuh: (tratando de ver) Ay, ¿cuál es?
(Camila le muestra las cartas)
Tonatiuh: (vuelve a hacer sobreconteo) Sííí, sí da cien.
(…)
Tonatiuh: (A Camila) Te las quedas (las cartas).

Aunque era el turno de Camila, sus compañeros también se involucraron en la resolución de la operación mediante distintas formas de participación: Brandon realizó el cálculo, pero no expresó nada en voz alta; en cambio, Tonatiuh asumió una participación más intensa: calculó con apoyo de dedos, revisó sus cartas para ver si tenía el 7, comentó en voz alta que él ya sabía cuál era el número que necesitaba la niña y, al terminar la jugada, pidió a Camila que le mostrara sus cartas, luego volvió a calcular (suma directa) para validar el resultado de la jugadora. Por su parte, Camila no pareció tomar en cuenta lo que hacía Tonatiuh pues ella permaneció absorta resolviendo su operación y hasta el final volteó a ver a sus compañeros. Así, vemos que los jugadores pueden participar en el turno del otro y beneficiarse también.

Episodio tres: Juego de amistad

A veces los alumnos van más allá de la competencia, poniendo por delante su afán de simplemente jugar, y de ayudarse. En el siguiente episodio, las alumnas son amigas y una de ellas tiene dificultades para entender el juego. Las acciones de las otras dos alumnas, en especial de Melissa, nos dejan ver un *cambio de juego* que, de acuerdo con Sensevy (2007), llamaremos *juego de amistad*:

(Aylín toma el 72 y durante varios segundos mira sus tres cartas: 4, 6 y 2)
Melissa: Sí te sirve una, ¿menos o más?
(Aylín no dice nada)
Melissa: ¿No te has dado cuenta?
Xadani: ¿No te has dado cuenta?
(Aylín niega con la cabeza)
(Melissa acomoda las cartas así: 2, 4, 6, la del 2 queda junto al 72).
Xadani: (desesperada) ¡Mira, menos dos!
(Aylín no dice nada)
Melissa: Setenta y dos menos dos (señalándole cada carta).
Aylín: Setenta
Xadani: ¡Setenta!
(Melissa junta el 72 y el 2 y se las da a Aylín, ella las pone a un lado).

En el fragmento anterior podemos observar un comportamiento atípico, pero también comprensible, de cierta manera, ya que las tres niñas son amigas antes, durante y después del juego. Seguramente ellas no quieren que Aylín se sienta mal y por eso le ofrecieron distintas ayudas en las que no le dicen directamente la respuesta (¿también se valora el tipo de ayuda que se ofrece? sin humillarla, sin burlarse). En primer lugar, vemos que Melissa observó que tras varios segundos Aylín no pareció haber averiguado cuál carta le ayudaba y por eso le ofreció una primera ayuda: "sí te sirve una, ¿menos o más?", con esto no le dijo la respuesta, pero sí la animó a entrar al juego (sí hay una carta que sirve, averigua cuál es) y le recordó, a su vez, que debe restar o sumar. Tras percatarse que Aylín sigue sin saber, Xadani comenta sorprendida: "¿no te has dado cuenta?", probablemente porque para ella parece tan fácil (72-2) pero ella no contempla que si Aylín no lo ve es porque la resta no está en su campo de estrategias.

Las sucesivas ayudas dejan ver el juego de amistad entre Melissa y Aylín. Una segunda ayuda que le ofrece consistió en mover las cartas de manera tal que la tarjeta del 2 quedara a un lado del 72. ¿Qué pretendía Melissa con este tipo de ayuda? Ayudar a que Aylín viera la relación entre el 72 y el 2, pero sin decírsela directamente, es decir, dejándola descubrirla. Xadani, por otro lado, también intentó ayudarla, fue paciente durante algún rato, pero en un punto se desesperó y le ayudó de una manera que intentó facilitarle el problema al máximo: "¿menos dos?" Aylín no logró interpretar dicha ayuda, y Melissa nuevamente intervino: "¿setenta menos dos?", es hasta este momento en que Aylín respondió.

En otro equipo en el que, a diferencia de éste, se dio cierta tensión por las diferencias considerables en los niveles de desempeño (más adelante vuelvo sobre este punto), observé, pese a ello, un evento de ayuda entre pares similar al que he reportado aquí. Probablemente para que el juego pudiera continuar, en varias jugadas, Joy esperaba algunos segundos antes de ofrecer ciertas ayudas a Marifer, dándole así oportunidad a que calculara por su cuenta. Al percatarse de que ella no avanzaba, Joy realizaba alguna de tres acciones: le decía qué la carta no le servía (pero sin decirle cuál sí le servía); estaba atento a lo que hacía la niña y cuando fue preciso le recordaba algunas instrucciones de la consigna y, le decía directamente el resultado.

Episodio cuatro: Jugar no siempre es divertido

La disparidad de niveles dentro de los equipos generó, a veces, situaciones inconfortables para los jugadores, y que el juego perdiera dinamismo.

> Joy: (a Marifer) ¡Vas!
> Fernando: ¡Vas!
> (Marifer toma la carta del 65 y la muestra. Joy y Fernando comentan algo en voz baja y se ríen)
> Fernando: Sesenta y cinco
> (Marifer tiene sus tres cartas hacia abajo, toma una (8) y la mira unos segundos. Enseguida comienza a recitar en voz baja viendo hacia el techo. Los niños la miran unos segundos y después se miran entre ellos, Fernando finge que se duerme).
> Joy: (a Marifer) No puedes ni sumarle ni restarle (al 65) con el ocho
> Marifer: ¿No?
> (Joy niega con la cabeza. Marifer vuelve a mirar ambas cartas unos segundos. Joy y Fernando platican en voz baja, se ríen. La niña los mira de reojo y después continúa recitando en voz baja. Los jugadores siguen platicando, pero después de un rato voltean a ver a Marifer con evidente desesperación: Joy mueve la pierna y Fernando se pasa la mano por la cara)
> Joy: No te sirve el ocho
> (Fernando niega con la cabeza)
> (Marifer los mira y deja la carta del ocho. Luego intenta tomar una carta del mazo del 1 al 9 pero Joy la interrumpe)
> Joy: Otra de aquí de tus cartas (levantando una de las cartas que Marifer tiene hacia abajo, sale un cinco)
> Joy: Sí, esa (señalando con su dedo)
> (Marifer mira ambas cartas, sin decir nada)
> (Joy le indica que las junte y las apile a un lado)

Las dificultades de Marifer para calcular (se tardaba mucho, usaba procedimientos más primitivos, repetía varias veces el conteo para estar segura del resultado) provocaron que en ciertos momentos el juego se volviera lento y aburrido para los otros jugadores que tenían mayor habilidad para calcular rápido y que se desesperaban de su compañera. Por otro lado, Marifer se percató de que los niños hablaban en secreto, se reían y se desesperaban cuando ella calculaba; aún así ella siguió haciendo la operación, pero seguramente bajo presión. No obstante, conforme avanzó el juego, Marifer fue descartando más rápidamente las tarjetas que no le servían.

Episodio cinco: ¿Importa o no ganar primero?

A lo largo de las rondas, se observó en varios equipos que los alumnos estaban involucrados y motivados por ganar: se interesaban en juntar más pares, contaban las tarjetas que llevaban apiladas y comentaban que aún les faltaban 2 (de las 3 con que iniciaban el juego). También se mostraban nerviosos cuando al otro jugador le quedaba una carta nada más, apretaban sus manos, se tapaban la boca, daban golpecitos a la mesa por pura emoción. También dejaban ver su malestar cuando no se daban cuenta a tiempo de que una tarjeta les servía o no salía la que necesitaban.

Otros alumnos se acercaban a la maestra para platicarle que habían ganado, ella los felicitaba o los abrazaba. Ellos sonreían y volvían a sus lugares contentos. Otros alumnos daban esta noticia a los observadores. Recuerdo el caso de Kenay y Sofía que me comentaron haber ganado un juego cada uno, mientras que al fondo estaba Josué de brazos cruzados, muy serio: él no había ganado ninguna partida.

En varios equipos puede constatar también que el deseo de ganar no impidió que se generaran interacciones positivas y ayudas entre los jugadores, como la siguiente.

> (Tonatiuh manifiesta preocupación porque a los tres les queda una sola carta)
> Tonatiuh: ¡Ay, mamá! Llevamos empate
> (Tonatiuh cuenta las cartas apiladas de Brandon y los dos se ríen)
> Tonatiuh: Ya nada más me falta una (de las tres cartas que le repartieron al principio)
> (A Brandon le queda la carta del 6, él toma una carta del mazo (24) y después comienza a contar con deditos. Al darse cuenta que sí hizo par, sonríe tímidamente. Tonatiuh hace el cálculo y cuando se percata de que su compañero formó par hace un gesto de gran sorpresa. Brandon apila sus cartas)
> Tonatiuh: Ahora Camila contra yo (sic)
> Brandon: (levantando los brazos) ¡Yo gané! (canta) *We are the champions my friends…*
> (Tonatiuh no le presta atención porque ya está tomando una carta del mazo y Camila, en cambio, le sonríe a Brandon)

Estas interacciones se vieron facilitadas, entre otros factores, por el hecho de que en este juego *perder* no pone en evidencia la ignorancia del jugador, porque ganar a veces depende del azar (de tener o no las cartas necesarias). Además, aunque a veces el alumno no identifica rápidamente el resultado, los compañeros le ofrecen ayudas (voluntarias o involuntarias).

No obstante, no en todas las trinas se propició un clima de confianza para equivocarse o una difusión de ayudas que posibilitaran al jugador a aprender (a veces solamente les daban la respuesta correcta).

Episodio siete: Ayudas que posibilitan ver otro camino (de resolución)

En una jugada, Melissa no identificó que el 7 le ayudaba a que el 93 se convirtiera en número redondo. Las otras jugadoras tampoco se percataron de ello. Cuando tomó una carta del mazo nuevamente obtuvo un siete, pero volvió a comentar que ese no le servía. Es probable que ella estuviera pensando solamente en quitar. Cuando la observadora intervino y le preguntó si no le servía ese número, Melissa dijo que no. De esta manera, en este caso no resultó fácil encontrar un modo de ayudarle a verificar, sin darle la respuesta. Además, sus compañeras no mostraron interés en sacarla de su error.

Algo distinto le ocurrió a Tonatiuh, quien al principio solamente consideraba la decena superior, pero posteriormente la participación de Camila le ayudó a transitar hacia la decena inferior:

> (Camila toma la carta 43, observa sus cartas: 5 y 3. Y durante varios segundos mira el 43 y el 3. Mientras tanto Tonatiuh se asoma y ve el 43, extiende su mano y comienza a contar hacia la decena superior)
> Camila: Sí, sí me alcanza porque cuarenta y tres menos tres…
> (Tonatiuh hace un gesto de desconcierto)
> Obs: Cuarenta y tres menos tres, ¿cuánto es?
> (Tonatiuh se queda pensando y extiende sus deditos, hace conteo regresivo)
> Tonatiuh: Cuarenta
> (Camila asiente y sonríe).

Esta jugada de Camila favoreció también a Tonatiuh, quien se dio cuenta de manera más consciente que también podía quitar, sobre todo porque él en todos los casos había sumado. Esta misma niña ofreció, en una ocasión, una ayuda más directa a otro compañero, Brandon, quien no se percató que a 18 le podía quitar 8, y aun diciéndole y haciendo la operación Brandon no quedó muy convencido.

Otro caso ocurrió en la trina de Juan Carlos:

> (Juan Carlos toma el 51, mira sus cartas (2, 5, 1) y rápidamente levanta la carta del 1, las apila y coloca a un lado)
> M: A ver, a ver, ¿está correcto él? (muestra las cartas 51 y 1).
> Ademar y Ricardo: Nooo
> (Juan Carlos le explica en voz baja a la maestra)
> M: No, sí está correcto (mostrando las cartas)
> Ricardo: Ahhhh, le quita uno
> M: ¡Exacto! Le quita uno (sonriendo)

La negativa de los niños pareció hacer efecto en Juan, quien se esforzó en explicar a la maestra su jugada. Pero aún más, es bueno ver que Ricardo logró explicar el procedimiento de su compañero pese a que también pensaba en la suma principalmente. A partir de compartir la estrategia de Juan, Ademar y Ricardo utilizaron la resta en algunas jugadas siguientes, aunque no de manera tan automática. En otra de las jugadas, Ricardo no se dio cuenta que para el 96 podía usar su carta del 6. Sin embargo, a los pocos segundos, pero ya habiendo pasado su turno, comentó que le podían restar 6 al 96. La maestra le dijo: "lo sentimos, lo sentimos, ¿ya viste? Ya hubieras ganado", Ricardo no responde nada, pero de manera evidente muestra su enojo.

2.4.2.3 Procedimientos de los alumnos

Identifiqué siete procedimientos en las distintas jugadas de los alumnos. Lo primero que sobresale es que los alumnos tendían a buscar el número redondo superior (#RS) a pesar de que entre sus cartas estuviera el número que les permitía formar el inferior (#RI). Esto explica porqué hay más procedimientos de un tipo que del otro. A continuación, ejemplifico.

Procedimientos para encontrar el número redondo superior

Se desplegó una diversidad de maneras de obtener el complemento aditivo, en función de los números que salen y de los conocimientos de los niños.

Procedimiento 1: Se suma cada número de las tarjetas disponibles al número no redondo y se ve si da o no el número redondo superior (usualmente con dedos).

> *Tonatiuh tomó la carta del 37 y tras observar su última carta, un 2, contó discretamente con los dedos y dijo en voz alta que no le servía. Enseguida tomó una carta del mazo comodín y le salió el 4, volvió a hacer el conteo con dedos y nuevamente dijo que no le servía. A diferencia del compañero del procedimiento anterior, Tonatiuh no pareció buscar, de entrada, el número que sumado a 37 le ayudara a formar un número redondo; más bien, fue haciendo los cálculos en función de las cartas disponibles. En el primer caso: 37+2=39 y después 37+4.*

• Procedimiento 2. Se busca el complemento contando con dedos: sobreconteo a partir del número dado para determinar la diferencia entre número no redondo y número redondo superior. Tras obtener el número se revisan las cartas para seleccionar la correcta. Este fue el procedimiento más utilizado.

> *Brandon recurrió al conteo con los dedos, pero a diferencia de su compañero, él no sumó cada dígito al número dado, sino que recurrió directamente a calcular la diferencia por medio de conteo ascendente con apoyo de dedos, es decir, a partir*

del 54 inició el conteo hasta llegar a 60. Brandon observó que tenía 6 dedos levantados y a partir de esto seleccionó la carta del 6.

• Procedimiento 3: Antes de calcular, el alumno parece estimar primero cuál de las cartas le permite llegar al número redondo superior.

Braulio toma la carta del 54 y echa un vistazo a sus dos cartas (5 y 2), rápidamente descarta la del 2 y dice: "¿Cincuenta y cuatro más cinco?... nooo" y tras descartar también el 5 toma una carta del mazo comodín y sale la del 9 (pero al revés: 6). Braulio hace un gesto de desilusión, pues sabe que si fuera 6 le serviría.

• Procedimiento 4: Se determina el complemento de memoria, esto es, la diferencia entre número no redondo y número redondo superior.

Aylin, toma la carta del 89 y son las otras jugadoras quienes rápidamente encuentran los números que le sirven:
Xadani: Yo sí tengo nueve.
Melissa: (Viendo las cartas de Aylin) No tienes uno.

Por la rapidez con que ambas alumnas dan las opciones muestra que disponen de resultados memorizados que les ayudan a calcular rápidamente los números que sirve para que el 89 se vuelva un número redondo. Este procedimiento se usó más cuando el número de unidades era cercano a la decena superior (8 o 9) o cuando era 5.

• Procedimiento 5: Se determina el complemento calculando (sin contar de uno en uno).

El único caso que observamos y que además fuera explicitado por el mismo alumno es el de Joy, quien tomó el 93 y tras mirar unos segundos las cartas del 5 y el 9, las descartó. Luego tomó una del mazo común (7), y tras varios segundos mirando las dos cartas: 93 y el 7, se dio cuenta que sí daban un número redondo. Tras preguntarle cómo sumó, Joy respondió: "Porque a este (3) mejor lo cambias por 7, ya sabemos que 7+3 es 10... así que nada más le sumas 10 (al 90)". Es decir, Joy logró simplificar la búsqueda del número que sumado a 93 diera 100, al considerar solamente la búsqueda del número que sumado a las unidades de 93, esto es, a 3, diera 10. El complemento de 3 a 10 tal vez ya lo tenía memorizado.

Procedimientos para encontrar el número redondo inferior

Como ya mencioné, estos fueron menos frecuentes.

• Procedimiento 6: Se determina la diferencia entre número no redondo y número redondo inferior mediante conteo regresivo.

> *Fernando, quien tomó la carta del 43 y viendo su carta del 2 hizo conteo regresivo a partir del 43 controlando con apoyo de dedos: "Cuarenta y dos, cuarenta y uno…". Así se dio cuenta de que el dos no le servía y también se dio cuenta de cual necesitaba, pues poco antes de tomar una carta del mazo comodín, dijo (como implorando): "¡Tres!¡Tres!¡Tres!".*

• Procedimiento 7: Se determina la diferencia considerando la composición del número no redondo en decenas y unidades (la diferencia buscada es la cifra de las unidades). Este procedimiento, pese a ser muy simple de implementar, parece ser tardío en establecer, pues se observó en pocos alumnos.

> *Camila toma el 43 y parece considerar que el tres le sirve. Ante el cuestionamiento de su compañero explica: "cuarenta y tres menos tres". En varias jugadas esta alumna identifica, ya con mayor rapidez, el número que se debe restar, es decir, la cifra de las unidades del número compuesto.*

Errores derivados de cálculos erróneos o por no identificar la posibilidad de sumar o restar

Algunos alumnos ignoraron que una carta les servía para formar un número redondo. Por ejemplo, Camila tomó la carta del 68 y entre sus cartas tenía un 2 pero ella no se dio cuenta de que le servía para formar el 70 porque, extrañamente, estaba pensando en quitar (68-8). Otro caso similar es el de Brandon, quien tomó el 18 y aunque tenía un 8 disponible no se percató de esto. Parece que, a diferencia de Camila, él está pensando solamente en la suma o en el complemento. Un caso más difícil de explicar es el de Rodolfo, quien de entrada no identifica la posibilidad de restar 32-2, pese a las múltiples ayudas del observador.

También hubo algunos errores de cálculo, por ejemplo, un error observado dos veces fue con la carta 54: los dos alumnos contaron con apoyo de dedos y seguramente perdieron el control de lo que iban sumando. Ademar rectificó a los pocos segundos, pero

Melissa no se dio cuenta y dio por hecho que había formado el par correctamente, fue la intervención de la observadora la que la hizo darse cuenta de que el total era erróneo.

Comentarios

De los 10 alumnos observados en los distintos equipos, se registró que 9 de ellos, al menos una vez, recurrieron al procedimiento 1 que consiste en ir probando con cada uno de los números de las cartas, sumando éstos al número dado para ver si alguno arroja el #RS. Considero este procedimiento como el más elemental porque implica sumas directas (a+b=__) en lugar de sumas para restar (a+__=c), con lo que también es el más largo.

Se esperaba que los alumnos utilizaran con más frecuencia resultados de sumas memorizadas, pero esto se vio poco, y en su lugar, el conteo con dedos apareció con frecuencia. Al parecer no tienen dominados dichos resultados lo suficiente y se sienten más seguros contando de uno en uno. El procedimiento 2 o de complemento, implicó un avance con respecto al primero. Los alumnos hacían un solo cálculo, principalmente por sobreconteo con apoyo de dedos para determinar el número que necesitaban. Este procedimiento fue utilizado, al menos, por 7 niños en una o dos jugadas.

El procedimiento 4 dejó ver que los alumnos que lo usaban habían ido memorizando la suma y resta de algunos dígitos y algunos complementos a diez, y esto les ayudó a resolver varios de los cálculos. Se observó que resultaron fáciles las sumas cercanas a la decena: 49+1, 18+2 y también números con 5 unidades (85+5), quizás porque una de las sumas que todos los niños dominan en 5+5. En cambio, el procedimiento 5 sólo fue empleado por un alumno y en su explicación vemos que aprovechó su conocimiento sobre sumas de dígitos y también reordenó las unidades para facilitar el cálculo.

Los procedimientos para buscar el número redondo inferior fueron menos utilizados, sólo observamos dos. Esto puede deberse a que para los alumnos resultaba más accesible la idea de "avanzar" que la de "retroceder", es decir, es más fácil pensar en la cantidad que debe sumarse (el complemento aditivo), que la que debe restarse.

No obstante, cuando contemplaban la posibilidad de usar la inferior por alguna ayuda o comentario de alguno de los jugadores, empezaban a restar sin aparente dificultad (18-8, 72-2, 65-5). Al parecer se volvían conscientes de que pensar en la decena inferior (procedimiento 7) era un procedimiento más sencillo: no requiere restar ni hacer conteo regresivo con dedos, en cierta forma, el mismo número te dice cuánto restar: 68 - 8= 60.

El procedimiento 6 fue observado solamente en dos alumnos, ambos recitaban la serie numérica hacia atrás con apoyo de dedos. La cantidad que debían restar era comunicada por el número de dedos levantados.

Después del juego, los alumnos resolvieron las actividades de las hojas de trabajo. En general, las actividades no resultaron difíciles para la mayoría de los alumnos. A diferencia de lo que pasó en el juego, el recurso a la decena inferior fue más frecuente, lo que se explica por el hecho de que, en las actividades, dicho recurso era solicitado de manera directa (por ejemplo, en la actividad 2 debían completar 95 - __ = 90).

2.4.2.4 Puesta en común: ¿qué se comparte y cómo? ¿Cómo se hace avanzar a los procedimientos?

La docente busca difundir un buen procedimiento

Después del momento de jugar, la maestra organizó un momento de revisión de procedimientos. En uno de los equipos, identificó el uso de un buen recurso e intentó que los alumnos lo compartieran con el grupo. Preguntó a Juan Carlos cómo le hizo para *ganar* la partida, el niño se puso nervioso y no contestó, fue su compañero Ademar quien respondió: “sumando y restando” y, ante la pregunta “pero ¿qué sumabas y qué restabas?” él dio un ejemplo: “dieciséis menos seis…”. La maestra insistió: “cuando te salía la carta dieciséis ¿le quitabas menos seis o le aumentabas cuánto?” A lo lejos otro niño respondió: “cuatro”. Extrañamente, la maestra no destacó más el procedimiento de ir a la decena inferior y en cambio retomó la participación del alumno que indicaba cuánto había que sumar para llegar a la decena superior.

En su siguiente intervención, la maestra se esforzó por mostrar a los alumnos una forma específica de calcular la diferencia entre 16 y 20, que a la vez minimizara el uso de los dedos para contar:

> M: Oigan chicos, ¿y eso que hemos estado jugando y practicando de sumar y restar números para que rápido encuentre yo el diez serviría en este juego o no? ¿Se acuerdan a que juego jugamos, a que cinco más qué número me da diez?
> Aos: Cinco

M: ¿Seis más…?
Aos: Cuatro
M: Ocho más
Aos: Dos
(…)
M: Ahhhh ¿no creen que como *estrategia de juego* les sirva *eso* para haber ganado esta ocasión o para hacerlo más rápido y divertido nuestro juego? Lo digo por lo que nos acaba de decir Ademar que cuando le salía la tarjeta dieciséis (…) ¿qué hacías Ademar? Me dijiste…
Ademar: Sumaba o restaba
M: Sumabas o restabas o le quitaba el seis para que le diera el 10 o le aumentaba el cuatro para que le diera el 20"

El fragmento anterior, me parece, muestra un intento, por parte de la maestra, de vincular un hallazgo hecho en un juego previo, el de la situación 1, con el juego de ese día. Cuando la maestra menciona *estrategia de juego* para ganar, parece estar pensando en descomponer la cantidad en decenas y unidades, para después operar con las unidades, como se muestra en el siguiente esquema:

16

10 + 6 (descomponer en decenas y unidades)

6 + 4 =10 (resultado ya memorizado)

10 + 10 = 20

Esta mirada "integradora" de la maestra refleja un intento de reutilizar un conocimiento visto y al mismo tiempo ampliar su alcance para hacerlo útil en operaciones más grandes. Sin embargo, la explicación no se aterrizó en ejemplos concretos, quedó en un nivel muy general, quedó a nivel oral y, por las expresiones de los niños, no pareció que les quedara clara la idea. Posiblemente habría sido de ayuda que la maestra propusiera uno o dos cálculos para que intentaran utilizar la idea. Más adelante, mientras resolvían la hoja de trabajo, la maestra siguió hablando de la *estrategia*, y reiteró que era útil. Como veremos más adelante, identifiqué al menos a un alumno que implementó ese procedimiento, pero no pude saber si otros también lo hicieron.

Con respecto a la opción de ir a la decena inferior, lamentablemente no se observaron procedimientos, posiblemente por la presión del tiempo.

Si bien la maestra organizó puestas en común de las actividades 1 y 3, en éstas tendió únicamente a que se mostraran los resultados, más no los procedimientos, con lo cual disminuyó la posibilidad de difundirlos, en particular, el de identificar la diferencia del número dado con la decena inferior mediante la cifra de las unidades del número.

En la actividad 1, Oliver debía decir si alguno de los números 4, 7, y 3, permitía obtener un número redondo, al sumarse o restarse a 43.

> M: Oliver, pasa al pizarrón, por favor (…) Me salió la tarjeta 43, ¿cuál de estas tres (4, 7, 3) me sirve para hacerla número redondo, es decir que sea la decena que esta antes o la que está después?

Como se ve, Oliver señaló únicamente el siete. La maestra le preguntó si otro de los números también servía y Ricardo dijo en voz alta que el tres, la maestra tachó ambos números.

> M: A ver chicos, ¿tendrán razón Ricardo y Oliver? Aquí tachamos estas dos, ¿me sirven las dos?
> Tonatiuh: Sí, porque si este Ricardo dijo que la tres: cuarenta y tres menos tres me da cuarenta
> M: Y Oliver dijo que el siete…
> Tonatiuh: Ese me da sumas.

2.5 Situación 4: “Descarto 100”

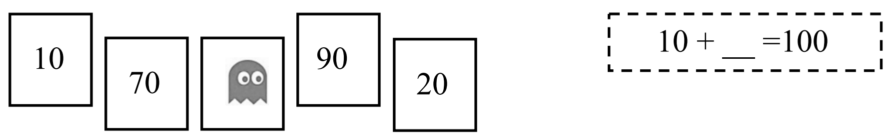
2.5.1 Análisis previo

Descripción. Este juego implica que cada jugador identifique y descarte los pares que suman 100.

- Se juega en equipos de tres o cuatro integrantes, se les entregan dos mazos con tarjetas del 10 al 90, más un fantasma.
- Un jugador mezcla los mazos y reparte todas las tarjetas. Algunos jugadores reciben cinco tarjetas, y otros seis.

El juego se divide en dos momentos:

- Primero, cada jugador mira sus tarjetas, forma todos los pares que sumen 100 y los descarta poniéndolos en medio de la mesa.



- Luego, el jugador que empieza ofrece las tarjetas que le quedan (con los números hacia abajo) al jugador de la derecha, quien tiene que “robar” una.
- Si el jugador que robó forma un par que sume 100, lo descarta al centro y después ofrece sus cartas al jugador de su derecha para que tome una. Si éste no forma par, se queda con la carta que robó.
- Continúan así hasta que todos se queden sin cartas. En este juego el que se queda con la carta del “fantasma” es quien pierde.

Posterior al juego, se plantearon tres actividades en una hoja de trabajo para que se resolvieran individualmente: a) Se repite la idea del juego, pero bajo una representación escrita de la suma con hueco: 30 +__=100; b) Formar 100 con tres decenas que ellos eligen, la idea es partir de una decena e ir sumando otras decenas hasta completar cien, por ejemplo: $\boxed{20}$+ $\boxed{30}$+__=100 y, c) Nuevamente formar 100, pero esta vez con cuatro decenas elegidas por ellos. Ambos ejercicios implican hacer distintas descomposiciones del 100 e ir completando o ajustando la cantidad hasta formar 100.

Propósito de la situación

Los complementos de decenas cerradas a 100 juegan el mismo papel que los complementos de dígitos a 10, pero con número más grandes, que rebasan la centena. Para hacer una suma como 80 + 30, conviene saber que 80 + 20 es 100, y solamente agregar 10 más (de manera parecida a como se suma por ejemplo 8 + 3= 8 + 2 + 1). El mismo recurso funciona con sumandos no redondos, aunque en ese caso se puede combinar con otros recursos, por ejemplo, para sumar 75 + 37 puede hacerse lo siguiente:

1) Completar decenas: (75 + 5) + 32= 80 + 32
2) Completar centenas: 80 + 32= (80 + 20) + 12=112

Esta situación busca que los alumnos incrementen su dominio de los complementos de decenas a 100, los cuales forman parte del repertorio aditivo básico.

Se espera también que pongan en juego propiedades como la conmutatividad (para 10 + 90, es más fácil sumar 90 + 10), y que reutilicen su conocimiento de los complementos a 10, como sería sumar las cifras de las decenas y agregar un cero. El juego también puede favorecer recurrir a la estimación para seleccionar aquellas cartas que son buenos candidatos para formar la centena.

Para poder jugar, se requiere solamente que los alumnos identifiquen las decenas y que tengan memorizada la serie de diez en diez de manera que se puedan apoyar en ella para poder sumar. Es deseable, aunque no es un requisito, que ya dispongan de sumas como: 50 + 50, 20 + 20 (dobles), 50 + 10, 80 + 10 (cualquier decena más diez, conocimiento relacionado con el SND).

Las actividades individuales, después del juego

La primera actividad que los alumnos realizan individualmente implica volver a resolver la mayoría de los cálculos que enfrentaron durante el juego, ahora en forma de sumas con hueco. Suponemos que no les resultarán difíciles después de la práctica previa.

1. Completa.

80 + ____ = 100	30 + ____ = 100
10 + ____ = 100	60 + ____ = 100
70 + ____ = 100	50 + ____ = 100
20 + ____ = 100	90 + ____ = 100

En la segunda y tercera actividad se pide formar 100 con tres decenas y con cuatro decenas respectivamente. La acción de descomponer permitirá practicar diferentes sumas que dan 100, teniendo que completar y ajustar las cantidades. Suponemos que la elección de la primera decena podría ser azarosa, pero los siguientes sumandos requerirán de la estimación para controlar lo que llevan y lo que falta para completar la centena. Por ejemplo, si eligen como primer sumando el número 30, para el segundo sumando tendrán que elegir dentro de un margen del 10 al 60 (con el 70 se pasarían).

2.5.2 Análisis posterior

Descripción de la clase. Nuevamente la maestra comunicó la consigna con apoyo de un equipo que fue ejemplificando las instrucciones. Esto resultó útil para que los alumnos visualizaran el manejo de los distintos mazos y para que la maestra explicitara ciertos detalles. El juego fue jugado varias veces por siete equipos de cuatro alumnos durante 25 minutos aproximadamente, de los que pudimos observar solamente algunos juegos (rondas completas) de 3 equipos. Finalmente, los alumnos resolvieron la hoja de trabajo individualmente y la maestra realizó una revisión grupal de las tres actividades.

2.5.2.1 La consigna: el inicio de la devolución

> M: Primero nos vamos a fijar cómo se va a organizar este equipo para poder hacerlo en orden y bien.

La maestra inició organizando equipos de tres o cuatro alumnos, en función de la cercanía de los alumnos, y entregó los materiales. Luego explicó las reglas mediante un juego simulado con un equipo. En esta ocasión, aparentemente, la consigna le resultó fácil de transmitir desde el primer intento y logró hacer que tanto los jugadores como los alumnos que permanecían de espectadores se involucraran con la dinámica.

> M: Voy a ver mis tarjetas, las mías, y me voy a fijar si logro formar pares que me den de resultado cien, como estas: ochenta más veinte, ¿sí? Las voy a poner aquí en medio. Vuelvo a ver, tengo éstas (mostrando las cartas) setenta, fantasma, cincuenta y noventa, ¿formo otro par?
> Aos: (algunos) Nooo
> (…)
> M: Ricardo tiene (mostrando cada carta) cincuenta, cuarenta, cincuenta, sesenta y noventa, ¿puede formar?

(Varios aos levantan la mano)
Aos: Sííí, cincuenta y cincuenta.

El segundo momento del juego también fue explicado por la maestra con mucha claridad:

> M: Ahora él (Carlos), va a extender sus tarjetas (con las que no pudo formar pares) y le dice a ella: toma una de mis tarjetas. (A Fernanda H.) Toma una, la que tú quieras y te fijas si con esa que agarraste puedes hacer un par.

Enseguida, la maestra aconsejó a los alumnos que no dijeran quién tiene el fantasma para poder "librarse" de él. De esta manera, ganan los que se queden sin tarjetas y pierde el que se quede con el fantasma.

Finalmente, la maestra dio otras indicaciones útiles: debido a que los números de las cartas se podrían ver a trasluz, dio la indicación de dejarlas boca abajo; recordó la necesidad de validar las tiradas: "tienen que enseñar a su equipo el par que formen porque que tal si por ganar nada más lo ponen en medio. No. Tienen que enseñarle". Asimismo, fue pertinente que indicara que el alumno al que le tocara robar carta debía elegir la que él quisiera, muy distinto de que el otro jugador le pasara la que el quisiera.

Tras el juego simulado la maestra consideró que los equipos ya podían comenzar a jugar y agregó: "Y vamos viendo cómo le hacemos, ¿va?". Como siempre, durante el primer juego de varios equipos la maestra tuvo que seguir precisando reglas y resolviendo algunas dudas.

2.5.2.2 Diversidad de interacciones a partir de un mismo juego

En general, los alumnos se entusiasmaron con el juego, competían cooperando y divirtiéndose. Vimos que los alumnos seguían las reglas del primer momento de juego (descartar pares que den 100 dentro de sus propias cartas) sin mucha dificultad; en el segundo momento (robar una carta del vecino y ver si con ésta y una de las propias logra formar par) la mayoría no pareció tener muchas dificultades para averiguar si alguna de sus cartas le servía o no. Me parece que la principal dificultad radicó en coordinar la secuencia de turnos: a roba a b, b roba a c, etc. Lo anterior dio lugar a que algunos alumnos robaran más veces de las que les correspondía y con ello, ganaran antes que los demás. Uno que otro incluso rompió el orden a propósito para tener alguna ventaja.

Ganar en este juego depende tanto del azar como de los conocimientos de los alumnos y, como comentamos, también depende de la postura de los alumnos frente a la posibilidad de seguir las reglas o “hacer trampa”. A continuación, muestro algunos aspectos de las dinámicas de los equipos, nuevamente a través de la selección de ciertos episodios que me parecen representativos.

Episodio 1: Un juego de azar y de conocimiento

Me interesa destacar el modo en que confluyen el azar del juego y los conocimientos de los alumnos. Como veremos, el azar se evidencia en las cinco o seis cartas que le tocan a cada alumno, las cuales pueden propiciar cálculos fáciles o difíciles de acuerdo a los conocimientos del alumno. Veamos el caso de Marifer, quien en otras situaciones mostró algunas dificultades para calcular; y, sin embargo, en este juego se desenvolvió bastante bien, probablemente por el clima agradable que generó el equipo y también porque le tocó enfrentar cálculos muy fáciles.

En el primer momento del juego ella revisó sus cartas, pero no logró formar ningún par. En cambio, en el segundo momento del juego, a lo largo de las sucesivas jugadas, ella resolvió tres cálculos: 90 +__=100 (sí tuvo el 10), nuevamente 90 +__=10 (esta vez no tuvo la carta), el tercer turno lo perdió debido a la confusión con los turnos y finalmente resolvió: 50 +__=100. Así, este juego no le permitió a Marifer practicar cálculos más difíciles como a los otros tres jugadores. En ese sentido el azar le favoreció, lo que le ayudó a ser la segunda ganadora. Sin embargo, el juego no le brindó la oportunidad de enfrentar cálculos que habrían sido retos mayores para ella y que la habrían llevado a practicar operaciones que no aún no dominaba. No obstante, podemos confiar en que los siguientes juegos se tendió a dar un equilibrio y resolvió cálculos con un nivel de dificultad más alto.

Episodio dos: No entrar al juego

Al entrar al juego el alumno asume el deseo de llegar a la meta (ganar), pero siguiendo las reglas. Por el contrario, no entrar al juego implica asumir solamente el propósito de ganar tergiversando las reglas cuando sea necesario. En la consigna hay dos instrucciones importantes: 1) Formar pares que den 100 (lo cual implica calcular) y, 2) El que se quede con el fantasma pierde. Ocurrió que la intención de deshacerse del fantasma que, en principio, fungió como un elemento motivador para los alumnos, conforme avanzó el juego, fue tan fuerte que incluso desplazó el propósito didáctico mismo del juego: hacer cálculos. Algunos alumnos se concentraban más en deshacerse del fantasma (para no perder) que en jugar (resolver cálculos). Aylin, por ejemplo, pedía constantemente que le robaran alguna de sus cartas (no solo en el turno correspondiente), acomodaba el fantasma adelante y presionaba con el codo las otras cartas para que no las pudieran elegir. Al parecer, no considera que al cumplir la consigna de robar cartas tiene la posibilidad de formar pares y deshacerse paulatinamente de sus cartas. Este tipo de acciones fue observado también en otros dos alumnos.

Episodio tres: No entender las reglas del juego

Otra forma de no entrar al juego es por no entender bien las reglas. En algunos equipos, los jugadores recordaban las reglas e incluso uno de los jugadores tomaba el rol de dirigir los turnos, de validar, etc. En cambio, en otros equipos, no sucedió tal cosa, como en el de Yunery quien, hasta muy avanzado el juego, empezó a jugar realmente, pues pensaba que por tener el fantasma no tenía derecho a formar pares. Cuando robaba cartas en lugar de revisar sus cartas y formar algún par, lo que hacía era simplemente acumularlas. Aún así, aparentemente, ella jugaba en el sentido de que seguía las otras reglas: robar cartas a su vecina, dejar que el otro jugador le robara, pero omitía la regla más importante.

En cierto momento uno de los jugadores alcanzó a ver sus cartas de reojo y le dijo que sí formaba un par, la niña tomó las cartas y las descartó al centro. En su siguiente jugada comenzó a descartar pares. Así vemos que ella no entraba al juego por no entender las reglas, pero poco a poco fue haciendo los cálculos necesarios.

Episodio cuatro: ¿Cómo sé si gané o perdí?

Durante la consigna la maestra solía solicitar a los alumnos espectadores que validaran si los pares formados sumaban 100, pero fue hasta que empezaron los juegos que, de manera directa, les dijo que tenían que mostrar los pares al equipo para que verificaran: “porque qué tal si por ganar (el jugador) nada más lo pone en medio”. No obstante, como ya he comentado, la necesidad de validar no siempre surge. En general, los alumnos que calculan mejor suelen no mostrar sus cartas ni preocuparse por validar a los otros excepto en algunas ocasiones. Otros alumnos, en cambio, sí solicitan a sus compañeros que los dejen ver los pares y a veces, cuando no disponen de la suma memorizada, ellos mismos hacen la cuenta.

Solamente en un caso se observó que Fernando usó el sobreconteo con dedos como una manera de verificar su propia selección de cartas. En los equipos observados notamos diferencias. En el equipo de Braulio los jugadores no mostraban las cartas antes de descartarlas al centro, parecían convencidos por su propio cálculo y no les interesaba la validación de los otros. En el equipo de Tonatiuh, algunas veces los jugadores mostraban las cartas y los demás a veces validaban (haciendo el cálculo y afirmando que sí daba 100). En el equipo de Joy, a veces los más ágiles para calcular (Joy y Juan) mostraban sus cartas por iniciativa propia; en cambio, las jugadoras de ese equipo (con más dificultades al hacer las cuentas) no lo hacían a menos que los otros les pidieran que mostraran el par.

Episodio cinco: Los turnos

Seguir los turnos resultó ser la instrucción más difícil para los alumnos. Esto generó cierto desorden al interior de dos equipos. En uno de ellos los alumnos tomaron las cartas sin seguir el orden del reloj, y cuando la carta no era de su agrado la aventaban. Esmeralda, incluso trató de descartar cartas sin haber formado pares. Ademar la observaba e intentó que siguiera las reglas, pero tanto ella como los demás no le hacían mucho caso y más bien se divertían.

En otro equipo, la consecuencia de no seguir los turnos provocó que algunos jugadores perdieran su turno para calcular y que otros intentaran que el compañero les robara más de la cuenta (similar al caso de Aylín). En el segundo caso, sobre todo, dicha dificultad no se debió a que no estuvieran interesados en el juego, al contrario, utilizaron la confusión de los turnos para tener ciertas ventajas. No todos los alumnos asumieron estas acciones, pero aún así, es un ejemplo que muestra cómo se puede afectar el propósito del juego. Probablemente de hacer el juego en trinas funcionaría mejor para esta instrucción en específico.

2.5.2.3 Procedimientos de los alumnos

En la siguiente tabla presento los cálculos enfrentados por un equipo a lo largo de un juego completo con la finalidad de apreciar la diversidad de cálculos que resolvieron, así como la diversidad de procedimientos utilizados. Más adelante, señalaré diferencias entre los recursos con los que cada alumno contaba y que les permitieron generar procedimientos con distinto nivel de elaboración; también intervino el factor azar en los cálculos que cada jugador debió enfrentar, lo que condicionó sus acciones.

Alumno/ronda	Brandon	Marifer	Tonatiuh	Haziel
Descartan pares individualmente	50 + 50	No tuvo	80 + 20	60 + 40
1ª ronda	70 + 30	90 + 10	No tuvo	90 +__ no tuvo
2ª ronda	60 + 40	90 +__ no tuvo	30 +__ no tuvo	30 + 70
3ª ronda	-	50 + 50	20 +__ no tuvo	10 +__ no tuvo
4ª ronda	-	-	90 +__ no tuvo	fantasma
5ª ronda	-	-	80 + 20	90 + 10 fantasma

Viendo la tabla por columnas, podemos apreciar que el juego de Brandon (el primer ganador) fue bastante corto, pero enfrentó cálculos difíciles. 70 + 30 le costó trabajo, en un principio, no identificó que el 30 le servía, pero tras una ayuda de la maestra, volvió a revisar sus cartas (30, 60 y 90) y seleccionó la tarjeta del 30. No se observó que contara con dedos. Después le robaron la carta del 90 y en el turno de Tonatiuh, Brandon observó que él tenía el 40, así cuando fue su turno de nuevo, eligió dicha carta para hacer par con su carta del 60. De esta manera vemos que calculó previamente y eso le ayudó a ser el primer jugador.

El juego de Marifer ya lo analizamos en el apartado anterior, y como se ve, a ella le tocaron los cálculos más fáciles, no se apreció que hiciera conteo con dedos, probablemente ya sabía las operaciones sabía de memoria. Ella ganó en segundo lugar.

El juego de Tonatiuh estuvo más variado. Al enfrentar 40 +__=100, descartó rápidamente la carta del 10, pero con la del 70 dudó unos segundos, supongo que estaba haciendo sobreconteo mental (no usó los dedos quizás porque la maestra estaba junto a él). Luego enfrentó: 30 +__=100, nuevamente descartó rápidamente el 10, pero dudó si el 40 le servía por lo que hizo sobreconteo con dedos. Me llama la atención que no descartara dicho número, pensando que tanto 30 como 40 son menores que 50. En las siguientes jugadas: 20 +__=100 y 90 +__=100 no tuvo la carta necesaria, en esos casos parece que sí fue fácil para él anticipar que sus cartas no le servían. Y finalmente, con 80+__=100, se observó que pese a la relativa facilidad del cálculo igualmente se apoyó en el sobreconteo con dedos para determinar que su carta 20 le servía. En general, este alumno iba probando distintas sumas según los números que tenía disponibles, aunque en algunos casos muy específicos -con la tarjeta del 10- sí estimó o quizás la sumaba muy rápido.

Haziel también enfrentó cálculos variados, desde muy fáciles como 90 +__=100 hasta 60 +__=100, el cual le costó algo de trabajo. En cambio, 30 +__=100 lo resolvió casi instantáneamente, en ambos casos tenía la carta necesaria, y el cálculo fue mental. Perdió porque en dos jugadas no tuvo la carta necesaria y porque se quedó con el fantasma.

A continuación, mostraré la gama de procedimientos utilizados en los cinco equipos que se pudieron observar. Identifiqué tres maneras de proceder ante los cálculos. Algunos alumnos robaban la carta del compañero y a partir de ese número iban sumando cada una de sus cartas pensando en llegar a cien, si les faltaba o se pasaban de cien tomaban otra de sus cartas y así sucesivamente. Otros alumnos calculaban con anticipación cuál número era el que necesitaban y tras realizar esto, revisaban cada carta tratando de averiguar si tenían el número necesario. Otros alumnos hacían una especie de combinación, es decir, no calculaban el número con anticipación, pero eran capaces de descartar una o dos sus cartas, esto les permitía no tener que hacer un cálculo por cada carta. Tras describir estas tres formas más globales de proceder, explicaré los procedimientos de cálculo.

a) Sobreconteo de diez en diez

Este fue el recurso más utilizado por los niños. Por lo general, iniciaban el sobreconteo a partir de la carta que habían tomando, y después le sumaban cada una (o la mayoría) de las cartas que tenían disponibles, con apoyo en los dedos.

Sin embargo, hubo un caso en el que este procedimiento tan extendido, de entrada, no resultó tan fácil para un alumno. Oliver no logró identificar rápidamente que con 70 y

30 podía formar un par. Sus compañeros le dijeron que sí se podía, pero él se concentró en calcular algunos segundos, aunque con un error, bastante común: para sumar 30 a 70 de 10 en 10, levanta un dedo al considerar el primer 10, pero dice "70" en lugar de 80", por lo que con el tercer dedo llega a 90 en lugar de a 100. Tras un nuevo intento parece que sí se dio cuenta que ambas cartas formaban par.

Otro uso del sobreconteo fue para comprobar un cálculo realizado mentalmente. Fernando identificó rápidamente que 70 + 30 daba cien, pero aún así realizó sobreconteo con apoyo en dedos y tras verificar que el total era correcto festejó.

En algunos casos, se observó que los alumnos hacían el cálculo mentalmente pues se quedaban inmóviles algunos segundos y posteriormente elegían o descartaban la carta en cuestión.

Finalmente, me parece que es probable que hayan utilizado la propiedad conmutativa, aunque no pude identificarlo claramente. Este supuesto se basa en el hecho de que algunas veces parecían identificar muy rápido el número en "10 +__= 100" que, de entrada, podría parecer difícil, excepto si ya memorizaron 90 + 10=100 (o 9 + 1= 10).

b) Cálculos memorizados

Algunas sumas ya las sabían de memoria, sobre todo 50 + 50 y 90 + 10. Observamos algunos casos, en los que los alumnos rápidamente identificaban el número que necesitaban, como el de Haziel quien tomó la carta del 20 y, tras revisar sus cartas, descartó rápidamente la del 50, y cuando vio la del 80 inmediatamente festejó mostrando sus dos cartas a los demás jugadores.

c) Apoyo en el complemento a 10

El procedimiento de pensar en las decenas como dígitos, permitió usar sus conocimientos de las sumas de complemento a diez y al resultado obtenido se agrega un cero. Juan Carlos platicó que para resolver: 80 + 20 "(a 80) le quito el cero y sumo ocho más dos, diez". Una explicación similar fue dada por Haziel, al resolver uno de los ejercicios del tipo a + __ = 100 de la hoja de trabajo: "El otro ejercicio de uno en uno se me hizo fácil este hacerlo de 10 en 10, me acordé del otro ejercicio".

d) Apoyo en la estimación para descartar tarjetas que ayudan a formar cien

Al hacer los cálculos algunos alumnos descartaban las cartas con números muy grandes y calculaban solamente con aquellas que parecían más viables. Por ejemplo: Haziel debía resolver 50 +__=100, las cartas que tenía disponibles eran: 70, 90 y 40 rápidamente descartó la 70 y 90 y se concentró en el 40, probablemente hizo sobreconteo de diez en diez mentalmente y tras pocos segundos se dio cuenta de que tampoco le servía.

e) Se identifica la resta

Finalmente, en el caso de un alumno, Braulio, ya en el momento de la resolución de ejercicios individuales de la hoja de trabajo, frente a 20 +__=100, comentó: “Ya sé que es lo mismo que cien, veinte menos cien”. Es muy posible que quiso decir “cien menos 20”.

2.5.2.4 Comentario general sobre los procedimientos

Más allá de cierta diversidad de procedimientos, entre el inicio y el final del juego pude observar que algunos alumnos disminuyeron visiblemente el tiempo para hacer los cálculos, incluso hubo quienes ya aparentemente dejaron de hacer sobreconteos, lo que sugiere que memorizaron algunas cuentas. Brandon, por ejemplo, en las primeras jugadas, dudó al calcular 60 + 50, recurrió al sobreconteo con dedos y se dio cuenta de que su elección era incorrecta (no daba 100). Al avanzar el juego enfrentó varias veces 40 +__= 100 ó 60 +__= 100 y en una ocasión, hacia el final del juego, rápidamente identificó que 60+40 daban 100. Otro caso, muy distinto, fue el de Tonatiuh quien tras resolver tres veces 80 + 20 y 20 + 80 no logró memorizarla, se observó que seguía necesitando recurrir al sobreconteo con dedos.

En resumen, la dinámica del juego, aunada a los ejercicios de la hoja de trabajo, al enfrentar a los alumnos varias veces a los dieciséis cálculos que componen el complemento a 100, parece sí abonar a su memorización progresiva por los alumnos y a que agilizaran ciertos procedimientos y recursos de cálculo. Al respecto, dice Kenay “Como ya hicimos las sumas varias veces pues ya…”.

De esta manera, el recurso de sobreconteo empieza a dejar de ser el principal modo de encontrar el resultado y relegándose a un segundo plano como modo de comprobación. Recordemos como lo usó Fernando, quien al enfrentar la cuenta 30 +__= 100, se percató bastante rápido de que el 70 le servía y, aunque mostró cierta emoción, dedicó algunos segundos a verificar mediante sobreconteo con dedos y hasta que comprobó que el par era correcto fue cuando festejó.

Como hemos visto, las situaciones didácticas tipo juego tienen un potencial didáctico significativo, pero a la vez tienen características que en ciertas circunstancias pueden dificultar el proceso de aprendizaje de los niños. En las conclusiones finales destacaremos estos aspectos.

Capítulo 3
Situaciones didácticas para el desarrollo del cálculo mental reflexivo. Operaciones aisladas

¿Una operación puede constituir una situación problemática fecunda? Intentaré mostrar que sí, bajo ciertas condiciones. Más específicamente, intentaré aportar información que contribuya al proyecto amplio de contestar las preguntas siguientes:
¿Qué condiciones son necesarias para que los niños acepten un nuevo contrato para calcular? Esto es, para que dejen de utilizar el algoritmo y piensen en desarrollar procedimientos propios. ¿De qué manera tienen que "mirar" los números (ya no en decenas y unidades necesariamente) para ello? ¿Cómo ayudarlos a…

- distinguir entre lo que saben (lo que disponen de memoria) y lo que no saben (algunos cálculos son difíciles de memorizar). En los del segundo tipo entran en juego los procedimientos mentales.
- A abandonar paulatinamente recursos de cálculo como el conteo con dedos, a favor de procedimientos mentales.
- A apropiarse y utilizar procedimientos dichos por otros.
- A explicitar oralmente sus procedimientos para compartirlos, discutirlos, reflexionar sobre ellos, esto es, a pasar de ese "chispazo" para calcular, más o menos implícito, a la explicitación…
- A descubrir que escribir los procedimientos mentales ayuda a reflexionar sobre ellos, y a aprender a hacerlo, usando los números, signos, espacios entre los cálculos intermedios, y marcas gráficas de distinto tipo.

Lo anterior, supone, sin embargo, un trabajo de planeación y de gestión sumamente complejo.
En este capítulo analizo tres situaciones didácticas que buscan propiciar el trabajo con cálculo reflexivo. El análisis estará centrado, esta vez, en aspectos de la gestión de la maestra durante los momentos de trabajo colectivo, esto es, el momento de dar la consigna y el de la puesta en común–considerando su función múltiple de ayudar a explicitar procedimientos, identificar y difundir estrategias, propiciar su comprensión y su uso.

También me referiré con frecuencia a la problemática de la comunicación con la maestra desde las fichas de trabajo. Con ello, seguiré intentando poner en evidencia la complejidad del trabajo con el cálculo mental, destacando aspectos poco visibilizados en estos procesos, que requieren mucha atención.

3.1 Situación 5: Sumas que ayudan a sumar

3.1.1 Análisis Previo

Propósitos de la situación

1) Acrecentar el dominio del repertorio aditivo y utilizarlo para resolver otros cálculos;
2) Utilizar la descomposición y asociación de sumandos para encontrar resultados.

A la vez, se pretendió obtener un diagnóstico de los procedimientos o recursos con que contaban los alumnos para abordar sumas sencillas. La situación se compone por tres actividades.

Actividad 1: "Sumas fáciles y sumas difíciles"

1. Resuelve las siguientes sumas y encierra las que pudiste resolver muy rápido (sin contar con los dedos).

5 + 5 = ________ 8 + 3 = ________ 6 + 4 = ______

10 + 10 = ______ 4 + 7 = ________ 9 + 6 = _______

Con esta actividad se quiere propiciar que los niños empiecen a distinguir entre las sumas que saben de memoria y las que no; es una actividad importante porque ayuda a conjuntar dos aspectos de lo que se necesita saber para hacer cálculo mental: 1) Disponer de memoria ciertos cálculos y, 2) Desarrollar procedimientos, apoyados en aquellos, para resolver cálculos más difíciles. Por lo anterior, se espera que la atención se centre en los cálculos difíciles: 8+3, 4+7 y 9+6, pues suponemos que 5+5, 6+4 y 10+10 resultarán fáciles para la mayoría. Para hacer los cálculos dispondrán de un tiempo individual, y posteriormente de la puesta en común. El propósito de esta última es que, a través del diálogo, de compartir ideas, y de los aportes de la maestra, los alumnos vayan constatando que una operación difícil -de la que no se dispone el resultado de memoria- puede volverse fácil sí se dispone de estrategias para calcular.

Actividad 2: "Sumas de dobles": una estrategia de cálculo mental

2. Resuelve las sumas de números iguales. Luego, usa esos resultados como ayuda para resolver las otras sumas.

7 + 7 = ________	7 + 8 = ________	7 + 6 = ________
8 + 8 = ________	8 + 9 = ________	8 +7 = ________
15 + 15 = _______	15 + 16 = ________	15 + 14 = ________

Esta actividad consta de dos partes cuya finalidad es introducir la estrategia de apoyarse en una suma ya conocida de memoria, o resuelta en el momento, para resolver otros cálculos. En la primera parte se presentan nueve sumas organizadas en tres columnas. La idea es que los alumnos resuelvan por renglones, primero la suma de dobles y enseguida, apoyándose en ésta, las otras dos sumas (el segundo sumando aumenta y/o disminuye 1, respectivamente). Por ejemplo, 15+16 puede resolverse a partir del resultado de 15+15=30. Se requiere que los alumnos identifiquen que, si el segundo sumando aumenta o disminuye 1, el resultado también aumenta o disminuye 1. Como se verá después, habría sido mejor que resolvieran las tres operaciones de un renglón, y luego las del siguiente.

Se consideró que de no lograrse comunicar la estrategia de apoyarse en los resultados de los dobles para calcular los demás durante la resolución de la actividad, se podría aprovechar la puesta en común para hacerlo. El papel previsto de la maestra era abrir el diálogo con la pregunta: "Si ya sé que 7 más 7 es 14, ¿cómo me ayuda saber eso para encontrar el resultado de 7 más 6 sin tener que calcular con dedos?". Como se ve, a diferencia de la actividad 1 en la que interesan los resultados, en la actividad 2, interesa que entiendan la estrategia y la utilicen.

La segunda parte de la actividad 2 plantea un trabajo inverso al del anterior: dada una suma de sumandos iguales (20+20) los alumnos debían inventar tres sumas que puedan resolverse apoyándose en la primera.

3. **¿Qué sumas puedes resolver si sabes que 20 + 20 = 40?**
   - ***Escribe*** **por lo menos tres sumas en tu cuaderno y resuélvelas.**
   - ***Compara*** **con tu compañero: ¿Escribieron las mismas sumas? ___________**

La idea de que una cuenta conocida puede servir para calcular otras cuentas es probablemente inusual y difícil de comprender para los alumnos. Se consideró que comparar las cuentas inventadas con los compañeros podría ayudar a quienes no hubieran entendido de qué trataba la actividad, además de propiciar un diálogo entre los alumnos para justificar los cálculos propuestos.

A continuación, centraremos el análisis en aquello que fue comunicado a la maestra, en cada actividad, a la luz de lo que ocurrió en la clase.

3.1.2 Análisis posterior

Descripción. Como ya se dijo, la situación se integró por dos actividades: a) "Sumas fáciles y sumas difíciles", los alumnos resolvieron seis cálculos y señalaron cuáles les habían resultado fáciles y cuáles difíciles. Luego, en la puesta en común, se buscó que compartieran ideas para resolver las cuentas más difíciles; b) "Estrategia de los dobles", consistió en aprender a utilizar una suma de dobles ya conocida, como apoyo para calcular otras sumas, y en inventar dos sumas que pudieran resolverse a partir de una suma de dobles (20+20=40). La consigna de esta última actividad resultó muy confusa.

Una vez terminado el juego "Descarto 10" (Situación 1), y antes de plantear los ejercicios de la hoja de trabajo, la maestra hizo una larga intervención que no estaba prevista, en el formato de "pregunta de la maestra al grupo, respuesta de los alumnos a coro". Se trató de una serie de ejercicios orales aparentemente improvisados, que buscaban introducir la estrategia de recurrir a la suma de dobles para facilitar otras sumas y que, al mismo tiempo, parecía intentar hacer una vinculación de esa estrategia con el juego antes realizado de Descarto 10.

Se analizará la clase en tres partes, en el mismo orden en que ocurrieron: La fase introductoria dada por la maestra la cual constó de varios episodios y la resolución de los dos ejercicios de la hoja de trabajo por parte de los niños, incluyendo los momentos de revisión colectiva de estos ejercicios[22]. Al final, incluyo una reflexión sobre la relación que la maestra va estableciendo con las ideas de cálculo mental que subyacen a las actividades.

3.1.2.1 La fase introductoria

Primer momento: Sumas que dan 10

Al finalizar el juego "Descarto 10"[23], la maestra comentó al grupo que dicho juego los había llevado a una carrera por alcanzar el número diez[24] y enseguida les preguntó algunas sumas con hueco: "tengo cinco, ¿cuánto me falta para llegar a diez", la mayoría de los alumnos respondían a coro de manera correcta.

Segundo momento: "Carrera a 11". Un intento desafortunado de vincular actividades

Después de repasar las sumas que daban diez, la maestra preguntó: "¿Cómo puedo llegar al número once, por ejemplo? ¿Qué puedo yo sumar?". Como veremos, la maestra se esforzó por vincular el propósito del juego "Descarto 10" con la actividad de los dobles, probablemente porque ella identificó una relación entre ambas: 1) El juego: "*¿Cinco más qué me da diez?*" y, 2) La actividad de los dobles: "*Si sé que cinco más cinco es diez, ¿Cinco más qué me da once?*".

La vinculación pensada por la maestra entre el juego y la estrategia de los dobles es correcta, pero la pregunta que hizo: "¿Cinco más qué me da once?" generó otras respuestas. Dado el objetivo de la maestra, hubiera sido más apropiado que preguntara: "Si sé que cinco más cinco es diez, ¿cómo me ayuda esa suma a resolver cinco más seis?" La estrategia consiste en apoyarse en un resultado conocido para obtener otro, establecer

---

[22] Los llamamos así pues, como se verá, no llegan a ser propiamente puestas en común.
[23] Por la forma en que se organizó el análisis, la implementación de dicho juego fue reportada aparte (Capítulo 2, situación 1), no obstante, influyó en el devenir de las actividades y las consignas dadas por la maestra en la situación que ahora revisamos.
[24] El propósito del juego "Descarto 10" era ejercitar los complementos a 10 bajo la estructura de sumas con hueco, es decir, 3+__=10. En todos los casos (dígitos del 1-9) se buscaba averiguar cuánto faltaba para completar o llegar a 10. El nombre de "carrera a 10" fue introducido por la maestra. No tiene que ver con el conocido juego de "Carrera a 20".

una relación entre cálculos, específicamente, considerar que si el segundo sumando aumenta uno, el resultado también aumenta uno.

Ante la pregunta de la maestra, los alumnos pensaron varias posibilidades que no fueron destacadas por la maestra: 5+6 (Kenay), 10+1 (Fernando), 8+3 (Luis), y otros alumnos dijeron: 7+4, 9+2. La única respuesta que ella aprobó fue: 5+5+1. Como se ve, las respuestas de los alumnos muestran distintas sumas que dan once, la maestra pareció intuir que no todas eran "buenas" pero tampoco supo qué destacar de las descomposiciones ni cómo abrir el diálogo con los alumnos. Esto pudo hacer confuso el propósito de la actividad de decir distintas sumas que den once.

Este primer intento de la maestra por introducir la estrategia de los dobles terminó por convertirse en un primer acercamiento a la idea de diversidad de descomposiciones[25] para un mismo resultado. Así, la intención de vincular actividades consecutivas, en este caso pudo haber dificultado comprender una organización distinta, en "contrapunto", en la que varias actividades, independientes entre sí, convergen hacia un mismo fin.

Tercer momento: Comunicación directa de un "método muy bueno": sumar dobles

Después de la "carrera a 11" la maestra decidió comunicar la estrategia de una manera más explícita, y de entrada la calificó como: "un método muy bueno". Antes preguntó varias sumas de dobles y los alumnos respondieron a coro sin mucha dificultad. Enseguida, ella retomó la idea:

> M: Ahora listos, si yo sé, por ejemplo, que cinco más cinco son diez, ¿qué pasa si yo digo rapidísimo cinco más seis?
> Aos: (respuesta más débil) Once
> M: ¿Por qué? Porque puede pensar mi cerebro: ah bueno, cinco más cinco son diez, seis es uno más, le sumó uno, ¿sí o no?

La maestra intentó mostrar la relación entre la suma base y el segundo cálculo, logrando una formulación más clara de la estrategia, pero quizás faltó apoyo visual, pues todo quedó a nivel oral. Enseguida, y quizás un poco rápido, les preguntó otro cálculo:

> M: (…) si ya sé que cinco más cinco es diez, ¿cómo puedo obtener nueve?
> Ao: (con voz muy débil) Menos uno.
> M: menos uno, ¡muy bien! A cinco más cinco le puedo quitar uno para que me dé los nueve que quiero

[25] Una distinción importante es la siguiente: descomponer para resolver un cálculo implica transformar los sumandos, mientras que descomponer a partir del resultado conlleva reconstruir los sumandos.

Vemos que la maestra propuso una suma menor a la suma base, y también cambió la formulación misma de la pregunta, volviendo más difícil aplicar la estrategia. Para los niños puede resultar más complicado pensar en restar o retroceder por lo que resulta comprensible que sólo un alumno le haya respondido. En esta formulación de la maestra, el cálculo original 5+4 se pierde y parece intercambiarlo por 5+5-1=9.

1) Formulación 1 (similar al ejercicio original). 5+5=10, ¿cuánto es 5+4? Si 5+5 es 10, entonces 5+4 es 9.
2) Formulación 2 (la que se hizo). 5+5=10, ¿cómo puedo obtener 9? 5+__=9. En esta segunda idea, no se trata de resolver otra suma, sino de hallar un sumando, hay un cambio de operación, por lo que la suma base ya no apoya tan directamente la resolución de la otra.

Este ejemplo muestra como ciertas consignas de cálculo mental pueden ser "frágiles", en el sentido de que algunos cambios sutiles pueden afectar la tarea a realizar[26].

Cuarto momento: Pertinencia incierta de un intento de generalización

La maestra continúo enseñando la estrategia de los dobles de una manera muy directiva:

> M: Cinco más cinco y yo le quiero aumentar uno
> Aos: (a coro) Once
> M: ¿Cinco más cinco?
> Aos: (a coro) Diez
> M: Pero ¿qué pasa si yo tengo cinco más seis?
> Aos: (a coro) Once
> M: ¿Y si tuviera cinco más siete?
> Aos: (a coro) Doce
> M: Doce, claro. Porque cinco más cinco son diez, más los dos extras (muestra dos dedos) del siete, ya me dan doce y así sucesivamente.

Mientras tanto, ella fue anotando en el pizarrón las sumas y sus resultados:

> 5+5=10
> 5+6=11
> 5+7=12

[26] Robert (2007) propone el término de "robusto" para designar a una situación que difícilmente se deforma al ponerse en obra en una clase. Con la misma idea, pero en sentido opuesto, aquí usamos el sentido de frágil.

Aquí se registra un cambio sutil en la tarea original pudiendo propiciar que los alumnos aprovechen un atajo para contestar evitando de nuevo la estrategia que se les quiere enseñar. Al plantear la suma 5+7 después de 5+6, se corre el riesgo de que los alumnos se limiten a seguir aumentado uno al resultado anterior, sin preguntarse por qué. Aún si consideran que el resultado aumentó uno porque un sumando lo hizo, ejercitar esa relación de esa manera no será de gran ayuda, pienso, para identificarla cuando se encuentren otras sumas de números consecutivos, por ejemplo, 7+8.

Por otra parte, la maestra no destacó el aumento de una unidad en el sumando 7 con respecto al 6, sino el aumento de 2 respecto del 5 de la suma original de dobles. Cabe preguntar ¿la estrategia funciona igual con una diferencia entre sumandos de dos unidades que con una diferencia de solo una? Es posible que no, pues la posibilidad de identificar números consecutivos descansa en el conocimiento de la serie numérica que los alumnos aprenden a recitar desde primer grado al menos hasta 100, según los programas escolares. No es el caso de las sucesiones de 2 en 2.

¿Qué pudo haber motivado la decisión de la maestra de ir más allá de los números consecutivos? Pienso que probablemente fue una intención, que en otros casos es fecunda, de empujar hacia cierta *generalización*: si funciona la para una diferencia entre sumandos de una unidad, podría funcionar para una diferencia de dos unidades. Y también, si funciona para sumar uno, o dos a un sumando, también podría funcionar para *restar*:

> M: Pero si yo tengo otra vez el cinco más cinco que me da diez, y al cinco le quito uno, ¿qué número me da? (escribe en el pizarrón 5+4) (…) ¿Y si al cinco más cinco le quito dos porque me da tres?

Este mismo ejercicio lo repitió con el 3+3=6. Por lo que ya he explicado, considero que esta generalización no fue pertinente en este caso.

Comentario: ¿Qué hizo falta comunicar a la maestra?

La maestra decidió iniciar la clase enseñando el recurso de los dobles, probablemente porque anticipó que ningún niño llegaría a éste por sí mismo. Intentó comunicar la estrategia de diversas formas, y a veces alteró la tarea original (decir cuánto es 5+6 a partir de saber que 5+5+ es 10) por otra tarea (¿qué sumas dan 11?). Finalmente explicó directamente la estrategia, pero perseveró en un intento de generalizar al caso de diferencias de dos unidades. En las pocas interacciones con los niños se percibe en ellos cierta timidez o inseguridad para responder, lo cuál puede ser un indicador de que para la mayoría no resultaba muy claro lo que se esperaba de ellos.

Este complejo y aparentemente poco fructuoso recorrido da cuenta de cuán importante es que para la maestra sea muy claro el funcionamiento de la estrategia que se quiere promover. Veamos brevemente lo que se le comunicó en la ficha:

Saber de memoria el resultado de algunas sumas te puede ayudar a resolver otras. Por ejemplo, si sabes cuánto es 5+5, puedes resolver 5+6, porque le agregas 1. También puedes resolver 5+4, porque le restas 1. 5+5=__ 5+6=__ 5+4=__

Asimismo, en la ficha también se le sugirió lo siguiente:

Si algún niño comenta un procedimiento que tenga que ver con sumar dobles (en el caso de 5+5 ó 10+10), la maestra lo retoma para explicar el recurso de apoyarse en los dobles, agregando o quitando 1. Y si no, ella introduce la idea.

Como se ve, la maestra tuvo cierto margen de libertad para decidir cómo introducir la estrategia de los dobles. No obstante, a partir de lo sucedido, puede considerarse que hicieron falta orientaciones. He ido comentando algunas: difundir sobre todo en la puesta en común de la segunda actividad el uso de la estrategia, si algún alumno la hubiera utilizado para resolver una suma de números consecutivos o, en su defecto, proponerla directamente. En ambos casos plantear enseguida varias sumas similares más, es decir, de números consecutivos y analizar cada vez cómo se podría usar la estrategia. Analizar los efectos del camino seguido muy probablemente sería la acción más eficaz, para la maestra, de recapacitar sobre su pertinencia.

3.1.2.2 Primera actividad: Sumas fáciles y sumas difíciles

La maestra dio la consigna de la actividad: 1) Resolver las seis sumas y, 2) Encerrar de color rojo aquellas que les resultaran fáciles, es decir, las que no hubieran calculado con apoyo de dedos.

Durante el ejercicio sólo se pudo observar el trabajo realizado por Tonatiuh, quien constantemente volteaba a ver a la maestra, quizás porque varias veces recurrió al sobreconteo con dedos (acción que ya había sido prohibida). Los procedimientos detectados fueron:

- Sumas memorizadas: 5+5 y 10+10, rápidamente
- Sobreconteo mental (sin uso visible de dedos): 8+3
- Sobreconteo con dedos: 6+4, 9+6 y en 4+7.
- Además, recurso a la conmutatividad: 4+7, hizo conteo a partir del 7.

Tonatiuh encerró todas las sumas, excepto 4+7, dejando ver que la consigna de encerrar solamente las sumas que le resultaron fáciles no fue clara para él o bien tal vez él consideró que el sobreconteo era fácil.

Puesta en común del ejercicio 1: Sumas fáciles y difíciles

La maestra inició pidiendo que levantaran la mano quienes ya habían terminado y preguntó: "¿Fáciles o difíciles?", supongo que con esta pregunta pretendía tener una apreciación general de los alumnos sobre el ejercicio. Los alumnos respondieron a coro: "¡Fáciles!". Al parecer, ninguno se animó a decir "difíciles", lo cual abona a la idea de un contrato didáctico –se trata de que me evalúen– que aún no cede ante uno nuevo: se trata de buscar formas de volver fácil lo difícil.

¿Cuáles sumas les parecieron fáciles y difíciles? La maestra preguntó a ciertos alumnos cuáles sumas les habían resultado difíciles y posteriormente cuáles fáciles, mientras las iba escribiendo en el pizarrón por medio de dos columnas. Veamos dos ejemplos.

> M: ¿Y cuál se te hizo fácil?
> Juan Carlos: 6+4
> M: Ah, muy bien, 6+4. Miren de las que varios coinciden en difíciles, a Juanito se le hizo fácil: 6+4, 10, ¿sí? Muy bien.

Ese cálculo no había sido considerado fácil por muchos niños, entonces habría podido ser útil que Juan compartiera su procedimiento. En otra ocasión, hubo una discordancia entre dos alumnos, Astrid señaló que le había parecido difícil 9+6 y un alumno dijo que a él no. Esta hubiera podido ser una buena oportunidad para problematizar sobre lo que significa una suma fácil y una difícil. La maestra se limitó a decirle al alumno que, para Astrid, sí había sido difícil. Ello deja ver la necesidad de un proceso, esta vez de la docente, en el que se aprende a aprovechar las divergencias en clase, pero también deja ver un par de indicaciones que habría sido conveniente incluir en la Ficha: la de clarificar qué están entendiendo por fácil y difícil y la de darles la oportunidad de cambiar de lugar algunas cuentas.

Compartir procedimientos para resolver las sumas difíciles. La maestra comentó lo siguiente:

> M: Bueno, pues precisamente eso es lo que queremos: que estas sumas ya no se nos hagan difíciles, sino súper fáciles y… ¿cómo? Acordándonos de lo que les dije hace un momento de las sumas de dobles, si yo tengo 9+6 cómo puedo yo hacer estas sumas para que se me haga más fácil. ¿A alguien se le ocurre cómo resolver esta suma de una manera más sencilla?

Varios alumnos compartieron sus procedimientos, dejando ver diversas descomposiciones. Por ejemplo, ante 9+6, Kenay señaló que él había pensado en: 9+5+1; Si bien resulta casi igual de difícil sumar 9+6 que 9+5, debemos considerar que los niños suelen decir algo ligeramente distinto de lo que hicieron, pues en el proceso de explicitar se reconstruyen ideas, y que posiblemente Kenay sumó (9+1)+5. Sin embargo, la maestra no se percató de esto y no le ayudó a modificar la escritura de los números, o incluso pedir a los alumnos que pensaran en un modo de facilitar el cálculo. Más adelante, Haziel propuso 9+1+5 pero nuevamente la maestra no se percató de que esa descomposición era buena. Ella observó que eran los mismos números que ya había dicho Kenay, dijo que ya estaba en el pizarrón, y siguió preguntando por otros procedimientos. Este episodio parece manifestar que la maestra está más ocupada en conducir la clase que en reflexionar sobre lo que dicen los niños. ¿Cómo podría modificar ella la dirección de su atención? Es una pregunta que queda abierta.

Otros alumnos compartieron varias descomposiciones para la misma suma 9+6, por ejemplo: 9+3+2 (Fernando); 9+3+3 (Luis); 9+4+2 (Fernanda Montes), las cuáles no siempre respondieron a la idea de facilitar los cálculos. La maestra enfatizó ciertas cuestiones que probablemente no resultaron fáciles de entender para los alumnos en ese momento, y que no contribuyeron a centrar la atención en la idea de facilitar los cálculos:

- Sobre la descomposición de Luis (9+3+3) señaló que: “o sea, el 6 lo sumó como doble, ¿verdad? Ya sabe él que 3+3 es 6 pues las separó para que se me haga más (fácil)”. Enseguida fue conduciendo el modo de sumar: 9+3=12 y 12+3=15. Cabe observar que en este caso los dobles no ayudaron a facilitar.
- De la descomposición de Carlos: 6+6+3 señaló el uso de los dobles y agregó: “¿Qué hizo él? El que dejó ahora fijo fue el 6 y el 9 fue el que descompuso, ¿ya vieron?”. En este caso, el uso de los dobles sí podría facilitar el cálculo.

Algunas de las cuestiones que la maestra enfatizó podrían llevar a ciertas confusiones. Ella dijo: “puedo descomponer uno de los dígitos o el otro de los dígitos y así de fácil ya podemos llegar”, parece dar a entender que cualquier descomposición permite calcular fácilmente. Hay que considerar, no obstante, que la maestra empezaba a valorar el sentido de descomponer los números de diferentes maneras y que eso, en sí mismo, ya es un avance

Comentario. Como vimos, el análisis y la difusión de estrategias que podrían facilitar las sumas difíciles fueron muy limitados. En ciertos momentos pareció que la maestra lograba recuperar información, pero después no sabía qué hacer con ella, tanto con los cálculos que le decían los niños como con las discordancias.

Durante el segundo momento destinado a compartir estrategias, la maestra tuvo dificultad para identificar buenas alternativas y para mostrar que algunas descomposiciones no facilitaban los cálculos. Puede interpretarse que la conducción de estas situaciones constituye una tarea poco familiar para la docente, y que, además, requiere de propósito muy claros y de una destreza que se desarrolla con la práctica.

Por otra parte, estos resultados ponen en evidencia supuestos implícitos en el diseño: primero que la mayoría de los alumnos no tendría dificultad para explicitar sus procedimientos, y segundo, que recurrirían a la descomposición que permite completar la decena y sumar las unidades restantes de un sumando, y no a cualquier descomposición. Esta primera sesión deja entre ver que solo algunos lo lograron.

En la ficha para la maestra se dieron pocas sugerencias para la gestión de esta primera actividad. Se propuso comentar grupalmente los procedimientos y se explicitó, a título de ejemplo, un caso de descomposición para completar una decena:

Se espera que dos o tres alumnos comenten sus procedimientos para resolver esas sumas difíciles. Por ejemplo: La maestra puede preguntar: ¿Cómo le hicieron para saber el resultado de 8+3? Quizás algún niño responda que 8+2=10 y 10+1 es 11.

Dichas sugerencias resultaron insuficientes para poder orientar la conducción de la actividad. En particular, no quedó lo suficientemente claro el propósito de la puesta en común ni cómo propiciar la explicitación de los procedimientos por parte de los alumnos, y su socialización, para ir alimentando la memoria didáctica[27]. Junto a las insuficiencias de la información que aportó Ficha, e incluso antes de ello, se manifiesta una necesidad de formación por parte de la docente.

3.1.2.3 Segunda actividad. Sumas de dobles como apoyo para resolver otras sumas

Primera parte. A partir del resultado de la suma de dobles, encontrar otros resultados

La maestra inició pidiendo a Carlos que leyera las instrucciones: "Resuelve las sumas de números iguales. Luego, usa esos resultados como ayuda para resolver las otras sumas". Enseguida retomó la consigna y la clarificó un poco más: "Primero suma las sumas que tienen dígitos iguales ¿7+7?" y "enseguida nos vamos a las sumas que tenemos en el mismo renglón. A ver si es cierto que más rápido las puedo resolver". Así, la maestra precisó el orden en que había que resolver las sumas (horizontalmente), el cual en la hoja de trabajo no era claro, aunque no enfatizó el motivo, a saber, aprovechar el resultado de la suma de dobles para resolver los otros dos cálculos. Quizás esto influyó en que de entrada varios alumnos siguieron un orden por columnas y resolvieron primero las tres sumas de dobles y después las demás, sin considerar las relaciones que interesaba. Veamos los casos de Tonatiuh y de Brandon.

Tonatiuh resolvió rápidamente las tres sumas de dobles con algunos errores: 7+7=13, 8+8=16 y 15+15=20. En la última suma se alcanzó a ver que escribió primero el 0: 15+15=_0 y después puso el dos de las decenas, lo que indica que utilizó el algoritmo de manera mental. Continuó con la segunda columna de sumas: 7+8=15, 8+9=17 usando en ambas el sobreconteo con dedos. En 8+9 se pudo apreciar que movió nueve dedos, lo

[27] Es decir, ir conformando un acervo de resultados, atajos, estrategias emanados de la misma actividad del grupo (Brousseau y Centeno, 1991).

que sugiere que hizo sobreconteo a partir del ocho. En el caso de 15+16 murmuró: "quince más quince", pero después se observó que usó los dedos, primero levantó 4 y luego 6. Tonatiuh comentó que le parecieron difíciles 8+7 y 15+15 y señaló que las difíciles las resolvió con dedos. No obstante, en una ocasión pareció mostrar que empezó a utilizar la relación entre dos cálculos: "Tonatiuh: Bueno, estas las resolví rápido (señala varias con su lápiz) como… le estaba haciendo… porque mira 8+7 (en la hoja dice 7+8) y le cambié éste (señala 8+8=16) y es 15".

Brandon, resolvió rápidamente las tres sumas de dobles, dos de ellas, 7+7 y 8+8, correctamente, y con error en 15+15, la cual posteriormente corrigió. En una ocasión, también pareció dar un indicio de usar la suma de dobles para resolver otro cálculo, al menos por la explicación que dio: "lo multipliqué[28] catorce, siete más siete es catorce más uno, son quince, entonces le hice así".

Las ayudas de la maestra. Mientras los alumnos resolvían la actividad 2, la maestra pasó entre las bancas y varias veces tuvo que volver a explicar la estrategia a los alumnos. Veamos algunos ejemplos.

> M: Ya sabes que siete más siete es catorce, pero aquí es ocho, ¿entonces?

En esta intervención se escuchó que el alumno dijo haber entendido la explicación de la maestra. En otras ayudas, la maestra menciona la palabra "aumentar" o "quitar":

> M: Bien, eso es pensar. ¡Eso! ¿Se les hizo más fácil sabiendo que siete más siete es catorce? Le aumento uno, quince, ¿sí?
> M: Siete más siete es catorce. ¿Siete más seis? Le quité uno, ya no es catorce. ¡Claro!

Con otro alumno intentó otro tipo de ayuda:

> M: (al Ao) Si ya sabemos que siete más siete es catorce, siete más ocho, o sea siete más siete más uno, ¿cuánto es?
> (…)
> M: A ver, otra vez. Siete más siete es catorce. ¿Siete más ocho?
> (…)
> M: ¡Claro! ¿Ya viste?
> (…)
> M: Nooo, a ver…
> (…)
> M: Siete más siete es catorce más uno, ¿no? (…) Ahhh, pues sí. ¿Y la otra, no te fijaste…?

[28] En el sentido de duplicar.

Las intervenciones que ofreció la maestra trataron de ayudar a los alumnos a ver la relación entre la suma base y los otros cálculos. Ella intentó comunicar la estrategia lo más claramente que pudo, de diferentes maneras, pero no siempre resultó sencillo para ella o suficientemente sencillo de entender para los alumnos.

La puesta en común

Se esperaba que en la puesta en común los alumnos que lograron utilizar la estrategia de los dobles la difundieran en el grupo. La maestra optó, sin embargo, como lo hizo en la fase introductoria, por plantear series de sumas que fue generando sumando sucesivamente 1, o restando 1, como se muestra en el siguiente extracto:

> M: Yo tengo mis sumas de dígitos iguales: ¿siete más siete?
> Aos: ¡Catorce!
> M: Catorce. Y aquí estoy haciendo exactamente lo mismo fíjense (escribe 7+7) siete más siete, catorce. Ah, pero… ¿qué pasa si yo aumento uno a mí siete? (escribe 7+8 y señala el 8)
> Aos: (a coro) ¡Quince!
> M: Quince. ¿Y qué pasará si pongo siete más nueve? (escribe 7+9).
> Ao: (dudando) Diecisiete
> (La M voltea muy seria y varios A corrigen inmediatamente).
> Aos: Dieciséis
> M: (afirmando) Dieciséis. ¿Siete más diez? (escribe la suma) Diecisiete. ¿Ya vieron cómo va, cómo va la secuencia? (señala los resultados 14, 15, 16, 17 y los alumnos repiten el número que ella señala).

Ya se comentaron anteriormente los puntos débiles de esta forma de proceder: los alumnos pueden contestar siguiendo simplemente la sucesión numérica que forman los resultados (14, 15, 16…). Por otra parte, perdió de vista la suma base, de dobles, que era el propósito de la actividad. Hizo falta comunicarle está información a la maestra de manera más clara.

A partir de cierto momento, bastante pronto, la maestra intentó sistematizar una especie de algoritmo marcando ciertos pasos: 1) Uno de los sumandos debe mantenerse igual; 2) El otro sumando debe ir aumentando de uno en uno; 3) El resultado, por ende, también irá aumentando de uno en uno. Muy pocos alumnos manifestaron comprender lo que la maestra pretendía mostrarles. En cierto momento, la maestra les preguntó: "¿Sí suena bien? ¿Si lo entendemos bien?", pero los alumnos no contestaron. Estas dificultades dejan ver nuevamente la necesidad, para la maestra, de mayor información acerca de cuál era y de cómo podría comunicar la estrategia en juego. Se manifiesta también la necesidad de que, una vez dada a conocer la estrategia, todos los alumnos tuvieran la oportunidad de ponerla en práctica varias veces, con otras sumas de números consecutivos. Se manifiesta, asimismo, una necesidad de formación docente.

Segunda parte: Inventar sumas a partir de 20+20=40

La maestra pidió a Kenay que leyera las indicaciones: "¿Qué sumas puedes resolver si sabes que 20+20=40?" y comunicó a los alumnos que la consigna implicaba un trabajo diferente al anterior: "Ahora me piden que yo ponga las sumas (…) A mí me dicen que en base a 20+20".

La primera participación fue de Kenay, y muy pronto dejó ver que no había entendido de lo que se trataba. Él conservó el primer sumando (siguiendo las instrucciones dadas), después vaciló en cuanto a la operación que iba a realizar. Tras recibir una ayuda de la maestra, se observa que descompuso el segundo sumando en 10+5+5, lo cual no era necesario, ya que en este caso no necesitaba descomponer para resolver la operación, puesto que ya sabía el resultado de antemano. Enseguida pasaron otros alumnos a proponer sumas:

Haziel: 10+20+10=40
Ricardo: 39+1=40
Luis: 30+10=40

La maestra, quien no había comentado nada, hizo una pausa y dijo: "las personas que pasaron me encontraron sumas que su resultado fue 40, pero no entendimos la indicación que nos dio nuestra hoja". Después volvió a leer la instrucción y ejemplificó de la siguiente manera:

> M: yo ya sé que siete más siete es catorce, entonces qué sumas puedo resolver: Ah, pues siete más ocho me da quince; siete más nueve, dieciséis; siete más diez, diecisiete. Ya sé que puedo ir aumentando uno y mi resultado va también aumentando uno o quitando uno. ¿Qué sumas en base a veinte más veinte es cuarenta puedo yo resolver? no que sumas también me dan cuarenta que ese… muy bien a los que pasaron, pero esa fue otra pregunta...

Enseguida pidió a una alumna, con buen desempeño, que pasara al pizarrón:

> (Fernanda comienza a escribir, pone 20)
> M: Eso, ya sabía que tú sabes… (en voz medio baja)
> (Fernanda continúa escribiendo: 20+10+10=40. La M ya no se ve tan convencida).
> M: Ok. ¿Mi suma me dio el mismo resultado? Ok (riéndose, resignadamente)

La maestra hizo un nuevo intento para comunicar la consigna, esta vez agregó más información, iniciando así, en cierto grado, un efecto Topaze (Brousseau, 1999), esto es, induciendo la respuesta.

> M: Esperen, esperen. Van muy bien pero ahora, ¿qué creen? Quiero que me digan sumas que a partir de este veinte más veinte que me da cuarenta, no me den cuarenta, quiero que me dé cuarenta y uno, cuarenta y dos o cuarenta y tres el resultado o cuarenta y cuatro. A ver… ya no quiero que me den cuarenta porque ya tengo la que me da veinte más veinte, cuarenta, pero a partir de ésta cuál me dará rápidamente… *si a mí me dicen el cuarenta y uno*, por ejemplo.

Kenay logró entender la indicación y escribió en el pizarrón: 20+21=41, la maestra dijo: "perfecto". A partir de esto, la maestra intentó generar nuevamente una serie de sumas, aumentando cada vez una unidad a un sumando, lo cual logró eligiendo a los alumnos con buen desempeño, tales como: Fernanda M: 20+22=42, Melissa: 20+23, entre otros. A partir de este momento la maestra se mostró más animada, seguramente porque finalmente algunos alumnos parecían haber entendido lo que ella esperaba. Solamente hubo un niño, Fernando, que sí mostró dificultades. Veamos un extracto:

> M: Vamos a ver si nos sirvió la regularidad. Y aquí estamos aumentando uno, nadie me ha quitado menos uno.
> (…)
> M: (a Fernando) Ahora quiero quitarle uno a mi suma de 20+20=40
> (Fernando escribe 20)
> M: (aprueba) Ajá
> (El niño duda un poco. La maestra toma la mano del niño y va señalándole las sumas anteriores)
> M: Acá, basándome en esta: veinte más veinte, cuarenta; ahora veinte más…
> (Fernando se queda pensativo y la maestra le señala el resultado: 40. Fernando escribe 20+2, mira a la maestra, luego borra el 2 y pone: 20+21-1=20).
> M: No… veinte más veintiuno es cuarenta y uno, menos uno, cuarenta.

La maestra decidió repetir la consigna dando más información:

> A ver, chicos, ¿y qué pasaría, Fernando, a ver, si yo a partir de esta suma de veinte más veinte, cuarenta, yo digo: Ah bueno, 20+20 me da 40, este (20) lo dejo igual, 20 pero a este (20) le quito uno, diecinueve, ¿cuánto será mi resultado?
> Aa: Cuarenta y nueve
> M: Otra vez: Veinte más veinte, cuarenta…
> Ao: Treinta y nueve
> M: Treinta y nueve. Y si yo digo, ¿Veinte más dieciocho?
> Aos: (a coro) Treinta y ocho

Y así continúa con varios cálculos más, después volvió a preguntar a Fernando y sí respondió correctamente: 20+16=36.

M: Bueno, ¿fácil?
Aos: (débilmente) Síí
M: Sí, ¿verdad? (risas) Bueno…

3.1.2.4 Comentario general

Como se vio, la maestra tuvo grandes dificultades para conducir la sesión y puede decirse que el propósito se cubrió muy parcialmente. Los elementos de análisis, tanto previo como posterior, nos dejan suponer que el origen de las principales dificultades que se manifestaron en la realización de las actividades no radica tanto en las características de éstas, sino en que los propósitos y ciertos aspectos de la gestión no fueron suficientemente explicados a la maestra, quién no tenía experiencia previa en esta línea de trabajo, aunado al hecho de ser ésta la primera situación que buscaba difundir recursos de cálculo mental. Dar cuenta de esta información nos parece relevante, como ya hemos dicho desde la introducción de este trabajo, en el marco de un proyecto en el que se da importancia a la forma de comunicar al docente una propuesta didáctica de manera que se facilite la comprensión de sus componentes esenciales.

De las dificultades observadas en la segunda actividad, la de los dobles, se puede inferir lo siguiente: 1) Es necesario afianzar primero las sumas de dobles de una cifra, de manera que sea claramente ventajoso recurrir a éstas y; 2) La comunicación de la estrategia a los alumnos por parte de la maestra resultó confusa. Se revela necesario precisar en la Ficha para la maestra que la pregunta que se debe plantear no es la que alude al resultado que se va a obtener: "si 5+5=10, ¿cómo puedo llegar a 11? (carrera a 11)", sino la que alude a la suma que se quiere resolver "si" 7+7=14, ¿cuánto será 7+8? Generar series de sumas agregando una unidad cada vez a un sumando, o restándola, como lo hizo en esta clase la docente, tal vez constituiría una estrategia eficaz, siempre y cuando el énfasis estuviera en el proceso inductivo: si se conoce el resultado de 20+20 se puede anticipar el de 20+21 y si se conoce este último se puede anticipar el de 20+22, etc.

Lo anterior pone de manifiesto que favorecer el uso de las sumas de dobles para facilitar los cálculos, si bien constituyó una actividad importante y hay indicios suficientes para afirmar que sí fue accesible para los alumnos, a la vez fue considerablemente difícil de gestionar para esta maestra. Se han señalado ya algunas correcciones que podrían ayudar.

La variante inversa que consiste en generar sumas que se pueden resolver a partir de una suma de dobles dada (20 + 20) resultó aún más compleja puesto que presuponía la asimilación de la actividad anterior. Frente a las dificultades de transmisión de la consigna, la maestra se vio obligada a repetirla, agregando cada vez más información (si 20 + 20 es 40 ¿cuánto es 20 + 19?, o si 20 + 20= 40, ¿qué suma da 41?), con lo que se tendió a guiar paso por paso la acción de los alumnos (efecto Topaze). A partir de los resultados observados, considero que la introducción de esta variante "inversa" debe esperar un poco más, al menos a que la acción directa –dada la suma de dos consecutivos, recurrir a la suma de dobles para hallar el resultado–empiece a ser utilizada.

3.2 Situación 6. Descomponer números[29]

3.2.1 Análisis Previo

Propósitos de la situación

Al igual que en la situación 5, los propósitos son: 1) Acrecentar el dominio del repertorio aditivo y utilizarlo para resolver otros cálculos; 2) Utilizar la descomposición y asociación de sumandos para encontrar resultados.

Las actividades

La situación consta de tres actividades y dos puestas en común. En la **actividad 1** se planteó resolver la operación 17 + 5. Se previeron dos procedimientos: 1) Sobreconteo de uno en uno a partir del 17 y, 2) Completar decenas, descomponiendo el 5 en 3 + 2 y sumando 17 + 3. Este segundo procedimiento, de aparecer, tenía que ser destacado por la maestra.

Tras resolver individualmente 17+5 en la **actividad 2** se propone una consigna distinta, ahora se trata de analizar y elegir entre dos descomposiciones distintas para el mismo cálculo pensando en cuál facilita más la resolución de la suma:

Encierra el procedimiento que te parezca mejor.

17 + 3 + 2 = ______ 10 + 5 + 2 + 5 = ______

Se esperaba que los alumnos vieran que para cada suma hay más de una forma posible de resolución, y más de una manera de simplificar la operación. En la ficha se sugería a la maestra la siguiente consigna:

> Unos niños me dijeron que (17 + 5) también podía resolverse así: 17 + 3 + 2 y otros me dijeron que así: 10 + 5 + 2 + 5 (anota en el pizarrón). ¿Qué opinan? ¿De dónde salieron tantos números? ¿Cuál de los dos procedimientos les parece mejor? ¿Por qué? ¿Alguna se parece a la que usaron ustedes?

En la ficha para la maestra se señaló, además, lo siguiente:

> No se espera que escriban, sólo que encierren el procedimiento que les haya parecido mejor y que se comente brevemente por qué (elegir a dos o tres niños).

---

[29] Las actividades de esta situación se realizaron en la misma sesión que las de la situación 3: “Saludos”

Luego hay que señalar que esas son dos maneras de *descomponer* los números para sumar.

Se pretendía que la puesta en común fuera un momento para profundizar en lo que significa descomponer para facilitar los cálculos. El objetivo no era revisar los resultados sino dialogar sobre los dos procedimientos mostrados para la suma 17+5. Mediante el diálogo, se buscaría que comprendieran el origen de los números de cada descomposición, por ejemplo, 2+3 viene del sumando 5, y que vieran cómo se facilita hacer ciertas sumas, por ejemplo, varios pueden ya saber que 17 + 3 es 20. Se buscaba asimismo responder a preguntas como: "¿En 17+3+2, de donde salió 3+2?", y, de manera indirecta, abordar cuestiones como: ¿qué significa descomponer? ¿se descomponen ambos sumandos o sólo uno? ¿cómo se componen los números? ¿cómo se lleva el control de las sumas parciales? ¿de qué manera descomponer/componer permite aprovechar las sumas que ya sabemos? ¿se vale cualquier descomposición? (se apela a la que es más fácil) Se esperaba, además, que el diálogo ayudara a los niños a explicitar. Como veremos, lo anterior no se le explicó lo suficiente a la maestra, hizo falta una mayor interacción de la maestra con la situación, propiciada por los investigadores, para generar las preguntas posibles.

En la **actividad 3**, se presenta tres sumas, dos de bidígito más dígito y una de dos bidígitos, con unidades rebasando la decena:

Usa las ideas anteriores para resolver estas sumas.

35 + 8 = ______   15 + 9 = ______   18 + 22 = _______

Las sumas presentan una dificultad considerable con respecto a las actividades previas (complemento a 10, dobles). El propósito es descomponer para facilitar los cálculos, pero ¿disponen ya los alumnos de los conocimientos previos suficientes (cierto repertorio y ciertas estrategias) para ello? El desempeño de algunos alumnos en la situación anterior no nos dio certezas, no obstante, después de un diálogo con la docente, decidimos probar la situación.

La suma 35+8 se puede resolver mediante la idea de *completar la decena*[30], es decir, considerando cuánto le falta a 35 para 40 (o a 5 para 10): es 5, entonces se

[30] Se señaló por medio de un recuadro en la ficha de la maestra.

descompone 8 en 5+3. En la segunda suma 15+9, puesto que el 9 está cerca del 10, se puede pensar en compensar: sumar 15+10 y después restar lo que se agregó: 15+10=25 y 25-1=24; o bien, descomponer 9 en 5+4, para sumar: 15+5+4= 24. Los anteriores ejemplos de resoluciones no pierden de vista, la posibilidad de que cada alumno utilicen otro procedimiento que les resulten más sencillo. No obstante, hay procedimientos que, posiblemente no surgirán espontáneamente; en tales casos sería conveniente ponerlo a consideración de los alumnos, por ejemplo, en las puestas en común.

Con respecto a los momentos de formulación y validación, en la ficha de la clase se consideró que, al terminar de resolver las tres sumas anteriores, los alumnos platicarían con algún compañero sobre los procedimientos de cada uno. La idea era iniciar el diálogo antes de la puesta en común. En la ficha para la maestra se apuntó lo siguiente:

> comparen con un compañero cómo resolvió cada uno las sumas: primero, que vean si obtuvieron el mismo resultado; si no es el mismo deben tratar de averiguar quién se equivocó. Segundo, que vean si cada uno hizo distinta descomposición o si hicieron la misma.

Se preveía que el diálogo entre los niños aún resultaría limitado, pero se buscaba que, no obstante, tuvieran distintas oportunidades de expresar sus ideas y sus dudas.

Al término de la actividad 3 se previó una segunda puesta en común. La intención de esta segunda puesta en común era principalmente la difusión. Mediante la comparación de algunas descomposiciones realizadas por los niños se pretendía analizar grupalmente cuál respondía más a la idea de facilitar los cálculos, aunque esto puede ser diferente para diferentes niños. En la ficha para la maestra se le indicaba, por medio de un recuadro, dos estrategias de cálculo mental: 1) Completar la decena y, 2) De compensación.

> La maestra anota las diferentes descomposiciones que comentan los niños.
>
> Para facilitar la suma, puedes descomponer sus números y luego sumarlos por partes. Por ejemplo, para resolver 15+9, puedes descomponer la suma como 10+5+5+4. También puedes sumar 15+10 y restarle 1 al resultado.

3.2.2 Análisis posterior

A continuación, centraremos el análisis en aquello que fue comunicado a la maestra, en cada actividad, a la luz de lo que ocurrió en la clase.

3.2.2.1 Primera actividad

La consigna de la primera actividad: sumar 17 + 5

La clase inició con una actividad de descomposición, se pidió a los alumnos que resolvieran la suma 17+5, la consigna sólo decía: “Resuelve”. La maestra comentó: “(...) en ese *resuelve*… A mí me dicen que sume diecisiete más cinco…”. No obstante, mientras la maestra pensaba en cómo explicar mejor la consigna, los alumnos ya habían terminado de resolver la suma. De todas formas, la maestra agregó una indicación más:

> M: No, pero escúchenme, escúchenme (señala 17+5), quiero que me lo resuelvan *descomponiéndolo*. Igual y nada más me pueden escribir aquí el resultado, pero quiero que me *escriban el resultado descomponiendo mis sumandos*[31], ¿sale? Para que me dé el resultado total. Acuérdense, buscando la mejor manera de no estar usando deditos sino estar usando … (señala la cabeza)
> Aos: (a coro) Cerebrooo.
> M: A ver, vamos a ver si es cierto. Y voy a pasar al pizarrón al que me haga la suma que me diga más fácil y más rápido cómo llego yo al resultado de diecisiete más cinco.

La petición directa de la maestra a los alumnos de que descompusieran ocurrió con dos elementos en contra: por una parte, los alumnos no tenían casi antecedentes de lo que significa descomponer para facilitar cálculos[32]; por otra parte, varios alumnos ya habían calculado el resultado, por lo que, para responder a la petición de la maestra, tendieron a descomponer el resultado y no los sumandos, incluso pese a la precisión, probablemente no muy clara, de “descomponiendo mis sumandos”. Ambos factores juntos harán que se deje de lado el propósito de descomponer para simplificar el cálculo.

La maestra agregó: “buscando la mejor manera de no estar usando deditos sino estar usando (señala la cabeza)”. Efectivamente, en una de las reuniones se le comentó que el apoyo en los dedos tendría que ir siendo sustituido por recursos de cálculo mental (descomposiciones, memorización del repertorio). Sin embargo, entre pedir a los alumnos que intentaran ir dejando de usar los dedos, a que ellos lo asuman como prohibición de usarlos, no hay más que una distancia pequeña fácil de franquear, y esto fue lo que acabó

[31] Lo que se esperaba que fuera un recursos o apoyo para calcular, se convirtió en una exigencia posterior, y por lo tanto, independiente del primer cálculo.
[32] La maestra comentó que los niños ya habían trabajado algo relacionado con descomposiciones aditivas en su libro de los Desafíos Matemáticos. No obstante, bajo una idea distinta: Por ejemplo, diferentes sumas que dan 15, y no para resolver cálculos.

ocurriendo. Me pregunto acerca de la conveniencia de dicha petición. A lo largo de la experiencia, como veremos, me fue pareciendo que la prohibición no fue adecuada, pues eran varios los alumnos quienes aún requerían del conteo con dedos.

Finalmente, vemos que la maestra después de expresar el deseo de "quiero que me lo resuelvan descomponiéndolo", agrega, otra parte de la consigna: "voy a pasar al pizarrón al que *me* haga la suma que me diga *más fácil y más rápido* cómo llego yo al resultado de 17+5". Así, la finalidad de la facilidad y la rapidez compite con otra: que la descomposición satisfaga a la docente. Ya hemos visto en situaciones anteriores cómo tiende a superponerse esta última justificación sobre otras, procedente de una especie de contrato didáctico.

No queda claro, por otra parte, a qué se refiere con "igual y nada más me pueden escribir aquí el resultado", ¿basta con que anoten el resultado? Es decir, no dice explícitamente que escriban su procedimiento en la hoja de trabajo.

Como se dijo en el Análisis Previo, después de que los alumnos resolvieran como pudieran la suma la maestra anotaría algunos de los procedimientos y finalmente, a partir del diálogo que lograra entablar con los alumnos, presentaría dos descomposiciones más. Es decir, había que mostrar primero distintas descomposiciones y analizar de qué forma facilitaban la operación, de tal manera que se *justificara* la necesidad de descomponer.

Ahora, a posteriori, cabe suponer que habría sido ventajoso haber planteado una segunda operación que justificara la consigna de descomponer, debido a que 17+5 resultó demasiado fácil para los alumnos. ¿Por qué la maestra decidió continuar con la misma cuenta? Probablemente se sintió obligada a ello, porque dicha cuenta se retomaba en la siguiente actividad.

La consigna: "descomponer para facilitar los cálculos" fue repetida en varias situaciones más a lo largo de la secuencia. ¿Cómo mostrar que descomponer, efectivamente, facilita los cálculos? ¿Es mejor usar ejemplos ficticios muy buenos o contraejemplos? ¿Cómo integrar los recursos aprendidos para mejorar las descomposiciones? (complemento a 10, dobles, completar decena, redondear a 10 y restar 1) y de hacerlo, ¿cómo nombrar dichos recursos antes de vincularlos? Volveré sobre estas preguntas a lo largo del trabajo.

Ayudas de la maestra y precisiones de la consigna

Después de que se pidió a los alumnos repensar lo que habían hecho (es decir, hacer una descomposición), se pudieron observar varios casos.

Josué levantó la mano y la maestra mirando de reojo su hoja, le comentó: "No veo aquí el resultado ni que esté descompuesto". Podemos suponer que Josué hizo sobreoconteo y debido a que el segundo sumando es relativamente chico pudo obtener bastante rápido el resultado. Quizás para él no fue necesario anotar nada en su hoja. Parte de la consigna ahora es también escribir, tanto el resultado como la descomposición. Esto implica otra dificultad: ya no se trata sólo de resolver, sino de decir y escribir cómo lo descompusieron, incluso si aparentemente no usaron ninguna descomposición. Al revisar la hoja de trabajo de Josué noté que dejó el espacio en blanco y sólo apuntó el resultado, quizás no entendió la consigna completa.

Haziel primero escribió: "17+4+1=22". La maestra hizo un sonido reprobatorio y comentó: "Bueno. Hazme otra abajo". Este alumno, como veremos después, solía hacer muchas descomposiciones; para esta suma hizo otras dos: 17+3+2 y 17+2+2+1.

Algunos alumnos interpretaron que debían encontrar diversos procedimientos, pero no parecían estar pensando si les facilitaba o no el cálculo.

Otra ayuda que ofreció la maestra se escuchó a lo lejos:

> M: Pero si yo te la dijera en cálculo mental, ¿así no se te complicaría más? Piensa. Piensa que no tienes lápiz ni hoja para escribir y de repente te digo, dime, por favor, ¿cuánto es diecisiete más cinco? Me tienes que contestar veintidós, sin dedos, ¿cómo?

A otro alumno le dijo:

> Esa, quiero mi suma… sí, pero, mmm, ¿Ah sí? Tan… ¿crees que no se te complicaría aquí resolverla rápidamente?

Podemos ver que la maestra tiene claro lo que espera que hagan los niños y aunque procura no decirles qué poner, da ciertos indicios de que ese no es el procedimiento pensado y les pide que escriban algo diferente. Los alumnos, al no entender la consigna, podrían pensarlo en término de una adivinanza: ¿qué quiere la maestra? ¿qué pistas me da?

Procedimientos de los alumnos

Presentaré los procedimientos que generaron los alumnos en función de si identifiqué o no una intención de "simplificar los cálculos", y en caso positivo, de la estrategia subyacente que infiero. Como se verá, varios alumnos, más no la mayoría, parecen haber comprendido la intención.

a) Completar la decena

El procedimiento más sofisticado fue el de Joy, quien tempranamente descompuso bajo la idea de completar la decena. Para 17+5, Joy comentó que él descompuso el 5 en 3 y 2, tomó el 3 para sumarlo a 17 (17+3=20) y luego al 20 le sumó los 2 que faltaban.

Otro alumno, Kenay, también pareció usar esta estrategia, no lo sabemos a ciencia cierta porque sólo tuvimos acceso a su procedimiento escrito: su primer intento fue 17+4+1, pero lo borró y enseguida anotó 12+5+4+1, en este último no hacía falta descomponer el 5 si la intención era sumarlo con el otro 5, ¿habrá supuesto que ambos sumandos debían descomponerse?

Ademar, Luis y Astrid escribieron: 5+5+5+5+2. En la puesta en común, la maestra señaló que Ademar había descompuesto el diecisiete en tres veces cinco, más el cinco (del segundo sumando) y dos. En el caso de Astrid se alcanza a leer en su hoja que ella resolvió la operación por medio del algoritmo convencional y después escribió la suma. Otros procedimientos similares, pero más compactos, en su escritura numérica resultan más económicos, son los de Carlos: 10+5+5+2 y el de Yunery: 15+5+2, este último al igual que los casos de Joy y Kenay, parece responder a la intención de completar la decena.

Retomo algo comentado por Braulio, quien me dijo que a él le parecía más fácil su manera (17+4+1) y no la que la maestra explicaba en el pizarrón (17+3+2) en ese momento. Le pedí que me explicara el procedimiento del pizarrón y si bien sí identificó que la descomposición de 5 en 3+2 ayudaba a sumar el 3 con el 17, insistió en que, para él, su resolución era más fácil. ¿Se debe a la tendencia a preferir lo propio solo por ser propio, o realmente Braulio todavía no encuentra ventajas de completar una decena?

b) Descomponer en decenas y unidades

Xadani y Josué, descompusieron un sumando en decenas y unidades: 10+7+5. En cuanto a la composición de las sumas parciales es probable que sumaran las unidades: 7+5=12 y después sumaran la decena: 12+10, de ser así también habrían facilitado la cuenta.

c) Descomposiciones diversas que no parecen facilitar los cálculos

Varios alumnos más hicieron descomposiciones que no lograron responder al propósito de facilitar los cálculos. Algunos descompusieron solamente un sumando como Braulio, Brandon, Haziel: 17+4+1; Tonatiuh: 17+1+4, o Fernanda M y Luis: 10+7+4+1. Otros parecieron hacer descomposiciones *del resultado* ya obtenido (por otro medio), por ejemplo, la de 10+10+2, realizada por Marifer, Oliver y Luis, o 20+2 de Melissa, Sofía y Astrid. Estas últimas fueron valoradas positivamente durante la puesta en común por la maestra, quizá porque planteaban sumas de decenas, pero se dejó de lado cómo se obtuvieron esas decenas. Otros alumnos hicieron varias descomposiciones, por ejemplo: Haziel: 17+4+1, 17+3+2 y 17+2+2+1. Luis, quien primero descompuso ambos sumandos (10+7+4+1) y después en números fáciles de sumar (5+5+5+5+2); en otra conservó el primer sumando (17+2+2+1) y por último, algo distinto, quizás a partir del resultado (10+10+2).

d) Restar

Dos alumnos, Melissa y Fernando, hicieron dos descomposiciones en las que ponen en juego a la resta, pero nuevamente, sin la intención de simplificar un cálculo: Melissa: 20-1+1 y Fernando: 17+6-1[33]. En una ocasión, Fernando preguntó a la maestra si se podía restar y ella le dijo: “Tú llégale al resultado, ¿sale? Sumando o restando”, pero al ver la hoja del niño le preguntó porque había puesto más seis y el niño le respondió: “porque diecisiete más seis (piensa) veintitrés menos uno, veintidós”. La maestra le preguntó: “¿Eso se te hace fácil?”, el niño dubitativo respondió que sí.

[33] Resulta interesante pensar que de reordenarse de otra manera el procedimiento de este alumno: 17+6+1, podría haber dado lugar a un buen procedimiento: 17-1+6 = 16+6= 10+12=22.

Ya encarrilados descomponiendo números, aparecen casos que se alejan todavía más de la idea de simplificar cálculos: Joy, por ejemplo, comentó que *otra manera* era sumar cinco veces el uno a partir del 17; Sofía propuso: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=22.

Así, es claro que el propósito de descomponer para simplificar los cálculos tendió a desvanecerse para varios alumnos, derivando en solamente descomponer. ¿Fue esto rectificado en la puesta en común? Veamos.

Puesta en común de 17+5

La maestra pidió a siete alumnos que pasaran a compartir sus procedimientos. La gestión de la maestra deja ver que su propósito va más allá de simplemente mostrar la diversidad de procedimientos; en lugar de eso, deja ver cierta valoración de éstos en función al criterio de facilidad/rapidez: ¿cuáles vale la pena enfatizar y cuáles no? Se abren otras preguntas que intentaré abordar aquí: ¿qué entiende ella por fácil? ¿cómo hablar de lo que parece fácil para la maestra y fácil para los alumnos? ¿enfatizar oralmente un procedimiento valioso es suficiente para que los alumnos lo conozcan, o hace falta algo más?

En varios casos la maestra reconstruyó el procedimiento, sin consultar a los autores. Algunos procedimientos reciben menos atención que otros, por ejemplo, en el caso de Fernanda M: 10+7+4+1: “Fernanda nos dijo… descompuso el diecisiete en diez y siete y el 5 en cuatro y uno, o sea que Fernanda nos dice que diecisiete más cinco igual me dio veintidós (hace un gesto de duda, o de cierto desinterés)”. Otro caso es el de Haziel, quien escribió: 17+2+2, la maestra detectó un error: “A ver, ayúdenme a ver si Haziel tiene razón. Nos dijo que: ¿diecisiete más dos?” Haziel expresó que se había equivocado y corrigió: 17+2+2+1. Después, la maestra (ya aprobando el resultado) reconstruyó el procedimiento: “Él dejó el mismo diecisiete y descompuso el cinco en dos más dos más uno (hace un gesto de desencanto)”. Con Mía, ocurrió algo distinto, por primera vez le preguntó directamente cómo le hizo, cómo es que descompuso la suma original para obtener ese procedimiento. La alumna no pudo responder y la maestra concluyó así: “M: No, o sea, tú nada más buscaste una suma que te diera de resultado veintidós, pero no descompusiste esta… De eso se trata (de descomponer). No, ¿no sabes cómo llegaste?”.

Y finalmente, Xadani escribe: 10+7+5=22, la maestra mira el procedimiento y no comenta nada.

Otros casos reciben una atención distinta, dejando ver que los valora y le interesa destacarlos. Ademar escribió: 5+5+5+5+2 y la maestra comentó: “Ohh, ¡qué interesante! Vean lo que hizo Ademar: él dijo para rápido aquí, ¿cuántas veces está el cinco en el diecisiete?” Ademar permaneció callado, pareció no entender lo que estaba explicando la maestra. Ella continuó: “Tres, ¿verdad? Él dijo cinco, luego este cinco y el dos que me faltaba aquí para completar el siete, ¿cinco más cinco?” Enseguida fue preguntando las sumas parciales al resto del grupo, los alumnos respondían a coro. Al comprobar que el procedimiento propuesto por Ademar sí daba el resultado correcto la maestra concluyó que: “esta se me hizo como que, si no tuviera yo papel y lápiz, más rápido en mi cabeza la puedo yo resolver”.

Otro caso es el de Oliver, quien escribió: 10+10+2, la maestra comentó: “Muy bien. Oliver nos dijo que diez y los siete de allá los puso aquí (señala el cinco) para formar otros diez más dos, veintidós”. El alumno no comentó nada que reforzara la explicación dada por la maestra. ¿Otra posibilidad podría ser que Oliver hubiera descompuesto a partir del resultado? La maestra no consideró esta idea.

En el caso de Sofía, la maestra dejó ver una intención de dar un valor, aunque sea acotado, a procedimientos que no responden a lo que se busca, al parecer para no desanimar a los alumnos. La maestra le preguntó a la niña: “¿Cómo descompusiste tú para llegar al veintidós?”, Sofía escribió: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2, y la maestra comentó: “Sofía lo hizo muy bien aquí (lee) Uy, pero si fuera un concurso ya hubiera perdido, ¿verdad? Aunque llegó al resultado correcto, eso sí”. Sin embargo, la maestra recordó otro procedimiento hecho por la niña y le pidió que lo anotara, Sofía escribió: 20+2=22 y la maestra dijo: “¡Perfecto!” y al final comentó que “de lo que se trata es de llegar a nuestro resultado de la manera más rápida y sin usar los deditos”. Como se ve, una misma niña elaboró dos descomposiciones muy contrastantes, una muy elemental y la otra muy elaborada. Sin embargo, me parece que a la maestra la segunda le pareció tan clara que no mereció que la autora explicara su procedimiento con detalle.

Así, pese a que la maestra deja claro que el propósito de las descomposiciones es que faciliten los cálculos, el efecto que pudo tener la puesta en común seguramente se vio atenuado debido a que los procedimientos más interesantes desde ese punto de vista no fueron lo suficientemente explicados, al mismo tiempo que algunos procedimientos que no aportaban en la dirección deseada no fueron claramente cuestionados.

3.2.2.1 Segunda actividad: decidir cuál de dos descomposiciones es mejor

Tras concluir con la difusión de los procedimientos de varios alumnos, la maestra pidió a Josué que pasara al frente y le preguntó:

> A ver, Josué, de todas estas sumas (señala el pizarrón) ¿cuál te servirá a ti para contestarme más rápido el resultado de diecisiete más cinco? Observadas, ¿cuál dijeras… Ah no, bien rápido si tengo diez más diez más dos ya sé que diez, veinte, veintidós o ¿de cuál manera? ¿Cuál suma, tú, Josué, agarrarías para darme bien rápido el resultado? ¿Cuál se te ocurre?

Josué señaló 20+2=22 pero no queda claro que estaba entendiendo él. ¿Qué nos dice su elección? Creo que cumple los requisitos pedidos por la maestra: una suma que ayude a llegar bien rápido al resultado (22). Evidentemente de acuerdo con la elección de Josué, la maestra pregunta al grupo:

> M: ¿Si yo les digo veinte más dos?
> Aos: Veintidós
> M: ¡Así de fácil!
> (…)
> M: A ver, su compañero nos dijo que esta (20+2=22) si no tuviera papel ni lápiz es la que bien rápido hubiera sabido. ¡Muy bien!

La maestra logró vincular la puesta en común con la actividad 2:

Encierra el procedimiento que te parezca mejor.

17 + 3 + 2 = _____   10 + 5 + 2 + 5 = ______

> M: Encierra el procedimiento que te parezca mejor (…) es decir, dos niños también quisieron llegarle al diecisiete más cinco y uno dijo: Pues para mí lo más fácil es diecisiete más tres más dos y el otro dijo: No, no, no, para mí el mejor es diez más cinco más dos más cinco (la M escribe ambos procedimientos). Cada uno, solamente, encierre cuál de las dos descomposiciones creen o consideran que es la más fácil para resolver y encontrar el resultado.

Varios niños rápidamente comentan que ya eligieron una. Enseguida, la maestra preguntó a cuántos alumnos les pareció más fácil una u otra, también preguntó el resultado (doce alumnos encerraron 17+3+2 y la misma cantidad encerró 10+5+2+5). Y a modo de cierre comentó:

> M: Ah, muy bien. Entonces, tenemos diferentes opiniones, ¿verdad? Muy bien. Bueno, pues resulta, muchachos, que de esto es de lo que se trata, *Fernanda*[34], (se trata de) que yo, descomponiendo mis sumas, busque estrategias que me lleven al resultado, *Joy*, de una manera más rápida, precisa y (se trata de) que mis deditos estén guardados lo más que se pueda para poder llegar al resultado final, ¿sí o no?
> Aos: Sííí
> M: Y generalmente eso se da cuando yo llego a acercarme a la decena. Si yo tengo diecisiete más cinco, ¿cuál es la decena que le sigue al diecisiete?
> Aa: Diez
> M: No, diez es la que está antes…
> Ao: Veinte
> M: ¡Veinte! Es lo que hizo Sofía. Ella se acercó a la decena más próxima que tiene el diecisiete que es el veinte (escribe en el pizarrón), ¿por qué? Porque agarró el tres del cinco y ya nada más le sobraron… ¿cuántas? (señala el dos escrito en el pizarrón)
> A: Veintidós
> M: ¡Dos! Y por eso, le dio ¿cuánto?
> A: Veintidós
> M: ¡Veintidós! Muy bien, Sofi.

Creando un momento de institucionalización, la maestra explicó la estrategia de completar la decena más próxima (superior) descomponiendo el segundo sumando. Atribuyó la autoría a Sofía, de cuyo procedimiento, como vimos, no hay suficiente evidencia, pero eso no es importante aquí. Con ello, la maestra le da un estatuto de procedimiento que vale la pena utilizar, un estatuto de procedimiento emblemático (Sensevy, 1996). Hubiera sido adecuado proponerles un cálculo distinto donde pudiera reutilizar la idea, al no hacerlo quedó la duda de qué tanto y cuántos lo entendieron. Por otra parte, considero que el ejercicio requería una mayor dirección de la maestra para indagar las virtudes del otro procedimiento, que sin embargo fue escogido por la otra mitad del grupo. Con ello quedó impresión de que un procedimiento era "el mejor", y no que cada uno tenía ventajas y podía ser preferido por alguien.

Finalmente, cabe destacar que la actividad pone en juego varias acciones, cada una de las cuales supone aprendizajes: 1) descomponer, 2) Reconocer que no todas las descomposiciones facilitan los cálculos, 3) descomponer durante el cálculo y no a partir del resultado, 4) Explicitar por escrito la descomposición que se pensó y, 5) Comparar

[34] Cada que la maestra intercala el nombre de un niño en medio de su discurso significa una llamada de atención porque no le estaban poniendo atención.

entre dos descomposiciones y argumentar cuál es mejor. Se requiere un trabajo de reflexión para discriminar entre una descomposición y otra. Todo este trabajo se debiera hacer, paulatinamente, con apoyo de la maestra.

3.2.2.2 Tercera actividad: Resolver tres sumas

35 + 8 = ______	*15 + 9 =* ______	*18 + 22 =* ________

La maestra dio la siguiente consigna: "Tienen… en base a las sumas, chicos, que tienen nos piden que encontremos la manera más fácil de llegar al resultado. Por favor, resuelvan las tres sumas que tenemos abajo", se escucha que alguna voz dice que ya acabó. La maestra agrega: "Hey, pero importante: Anótenme aquí (en la hoja) cómo descompusieron la suma para llegar al resultado". Unos minutos después, a lo lejos se alcanzó a escuchar que la maestra le señaló a un alumno: "no veo ahí ni el resultado ni descomposición", "Vamos a usar estos trucos que nos ayuden a no usar deditos. ¡Trucos!"

Las acciones de descomponer y componer números fueron denominadas por la maestra como "trucos", lo cual corresponde bastante bien, en el lenguaje de los niños, a lo que se les pedía hacer: formas muy sencillas, a veces sorprendentes, de llegar a un resultado. Mientras los alumnos siguieron trabajando la maestra siguió haciendo intervenciones diversas. En una de esas ella hizo notar un procedimiento tras haber sido valorado positivamente por ella:

> M: A ver, vean algo que se me hizo muy listo de Ricardo. Vean lo que hizo (escribe en el pizarrón 35+8), ¿cómo la descompusiste?
> Ricardo escribe: 40+3=43
> M: ¿Esta correcto?
> Aos: Síií
> M: Sí. (A Ricardo) Pero, diles por qué hiciste esto (señala el 40).
> Ricardo: Porque al treinta y cinco le *agarré* cinco y al 8 le quité tres…
> M: Ah ok, más bien al ocho… *agarraste* cinco del ocho para completar la decena y te sobraban tres y te dio cuarenta y tres (Ricardo no dice nada). Ah, muy bien, gracias. Ahora haz las otras.

La maestra hizo aquí algo no previsto y polémico: interrumpir el momento de trabajo individual para llamar la atención de los alumnos sobre un procedimiento. Esta acción corre el riesgo de evitar que los alumnos busquen por si mismos formas de resolver la operación. Pero, por otro lado, dada la dificultad que la maestra ha experimentado para transmitir la idea de descomponer para facilitar, puede resultar oportuno difundir un buen ejemplo que emergió en el grupo, a mitad de camino. Si bien los alumnos ya no resolverían por sí mismos esa operación, tienen todavía varias más que resolver.

Procedimientos de los alumnos

En la tercera parte del grupo se identificó que usaron una descomposición para completar decenas que probablemente sí facilitó las sumas, no en todos los casos, pero sí en al menos una de las tres operaciones. Veamos algunos casos:

- Joy fue nuevamente el más sistemático, pues en los tres casos completó decenas. Podemos decir que para él ya constituye una estrategia de cálculo.

35 + 8=	15 + 9 =	18+22=
35 + 5 + 3	15 + 5+ 4	18 + 2+ 20

- Melisa también usó dicho procedimiento en las tres operaciones, pero en la suma que anota ya no deja ver la descomposición, por lo que cabe cierta duda de si no descompuso a partir del resultado ya calculado:

35 + 8=	15 + 9 =	18+22=
40 + 3	20 + 4	10 + 10 + 20

- Camila

35 + 8=	18+22=
30 + 10 + 3	30+10=40
Quizás viene de 30 + (5 + 5) + 3	Quizá corresponde a 10+8+20+2 y luego 10+20=30 y 8+2=10

- Kenay lo hace en dos operaciones, pero es un caso más dudoso. Aunque descompone más de lo realmente necesario (para simplificar la suma) y sus descomposiciones no son del todo explícitas, puede suponerse una intención de separar las decenas y de completar decenas:

35 + 8=	15 + 9 =	18+22=
40 + 3	10+5+4+5	10 + 10 + 10 + 4+ 4+ 1+ 1

En el caso de varios alumnos más, en cambio, no se apreció una intención de simplificar el cálculo, ya sea que descompusieran a partir de un resultado ya obtenido por otro medio, o a partir de los sumandos. Veamos algunos ejemplos:

- Brandon:

35 + 8=	15 + 9 =	18+22=
35 + 4+ 4	15 + 8 + 1	18+21+1

- Fernanda M:

35 + 8 =
20+15+8

- Haziel, desarrolló distintas descomposiciones, algunas parecen buenas, pero las pensó tras haber obtenido el resultado:

15 + 9 =
19+5
20+4
10+10+4
15+5+4

Puesta en común de la actividad 3

La puesta en común fue breve. Nuevamente, no logró constituir un espacio de difusión de buenas estrategias. Carlos escribió 10+5+9 y, tras observar lo escrito por el niño, la maestra decidió descomponer también el 9, quedando 10+5+5+4. Comenta que "es un truco para que mis deditos estén guardados y mi pensamiento esté súper rápido, ¿sale?" Haziel pide compartir la suya: "¿Puedo pasar a hacer una de cuarenta?". La suma es 18+22=40 y el escribe: 10+30=40. No hay indicios para saber si descompuso a partir del 40, o si pensó en 10 + (8+ 2) + 20 La maestra no se pudo percatar de esta posibilidad porque empezó a recoger hojas y da por concluida la clase. La clase ya llevaba más de una hora, por lo que había presión de tiempo y cansancio.

Así, se puso de manifiesto la dificultad de la docente para gestionar la puesta en común en estas primeras experiencias: identificó pocos de los procedimientos que valía la pena destacar, tendió a dialogar con un solo alumno, y a veces pareció sobreinterpretar las explicaciones muy incompletas de los alumnos que participaron (como en el caso de Ademar).

3.3 Situación 7: “Pensar los cálculos”

3.3.1 Análisis Previo

La situación se integró por las siguientes actividades: 1) Calcular individualmente 23+18; 2) Resolver en parejas la suma 87+25, con la indicación de encontrar, al menos, dos procedimientos distintos. Al finalizar cada una de las actividades ya señaladas se previó una puesta en común con el objetivo de difundir algunos procedimientos pensados por los alumnos y, 3) Resolver individualmente una hoja con cuatro sumas: 35+9, 68+8, 46+26, 25+37. Para esta última actividad no se previó hacer una puesta en común.

El orden y las actividades mismas tuvieron algunos cambios por decisiones de la maestra en el último momento: a) Calcular en parejas 23+18; b) Resolver individualmente 83+56 y, c) Resolver hoja de trabajo se mantuvo individualmente. Al finalizar cada actividad la maestra realizó puestas en común.

Propósitos de la situación

En esta situación se esperaba que tanto las estrategias generales (descomponer para facilitar, sustituir un cálculo por otros más simples), como las específicas (apoyarse en sumas conocidas de memoria para resolver otros cálculos, completar decenas, entre otras) que empezaron a perfilarse en las dos situaciones anteriores, extendieran su alcance al trabajar con números mayores, a la vez que se hiciera más evidente las ventajas que aportaban a la realización del cálculo.

También se buscaba propiciar la explicitación oral y por escrito de los procedimientos. Los propósitos anteriores fueron conversados con la docente y se vio con ella la necesidad de procurar disuadir a los alumnos de hacer descomposiciones no motivadas por la idea de facilitar cálculos. En la ficha se le dijo lo siguiente:

Propósito

- Utilizar descomposiciones aditivas <u>para facilitar</u> los cálculos
- Darse cuenta de que en cálculo mental hay diferentes maneras de hacer una suma.

Aclaración: Hay que enfatizar que se trata de facilitar los cálculos para tratar de evitar que los niños hagan descomposiciones solamente para tener muchas diferentes.

Conocimientos y procedimientos previstos

Partimos de que los alumnos ya tenían conocimientos previos para desarrollar un procedimiento de base, tales como la descomposición en decenas y unidades, y el conteo de uno en uno. Se esperaba que, a partir de ello, podrían descomponer los sumandos y hacer composiciones que les permitieran sumar con mayor facilidad. Se esperaba que la puesta en común permitiera mostrar diferentes resoluciones con las que se buscaría contrastar y ejemplificar en qué consiste lo "fácil" de un procedimiento o de otro.

Con base a lo que pasó en la situación 6 que recién revisamos, anticipamos que lograr lo anterior y en particular comunicar lo que significa descomponer para facilitar una operación, no sería sencillo para la maestra. Aunque la idea de facilitar es lo que motiva las descomposiciones, al mismo tiempo es lo que las restringe: no se trata de tener muchos procedimientos diferentes sino de pensar en aquél que permita resolver de una manera más simple, aunque este tipo de trabajo puede ser bastante subjetivo.

Iniciaré el análisis con la relación que la maestra establece con la situación misma y con el impacto que ésta tiene en el medio con el que interactúan los alumnos. Las preguntas que guían esta parte del análisis son: ¿cómo estaba elaborando la maestra la noción de calcular mentalmente? ¿qué entendía por descomponer para facilitar un cálculo? Sin duda, lo que ella hacía público (y el modo en que lo comunicaba) influía en lo que los alumnos hacían.

3.3.2 Análisis posterior

Descripción de las clases

Esta situación estaba pensada para una clase, pero al no lograr concluir todas las actividades la maestra le dedicó una sesión extra, al día siguiente. A continuación, enlisto brevemente lo que aconteció en cada clase.

Primera sesión: Marzo 23, 2015. La maestra inició preguntando algunos cálculos del tipo complemento a 10, algunos alumnos respondieron sin aparente dificultad. Después dio una introducción sobre la utilidad de descomponer números y mostró contraejemplos de descomposiciones. Los alumnos trabajaron en parejas para resolver

23+18 (cambió el orden, la ficha indicaba primero trabajo individual) y después hizo la puesta en común en la que participaron varios niños.

Segunda sesión: Marzo 24, 2015. La maestra inició pidiendo a los niños que copiaran del pizarrón una frase relacionada con hacer cálculo mental. Enseguida les pidió que resolvieran individualmente la suma 83+56 (propuesta por ella) y después llevó a cabo una puesta en común. Luego entregó una hoja de trabajo con cuatro sumas que los alumnos resolvieron individualmente, y finalmente se realizó otra puesta en común.

En el análisis que presento a continuación, iré haciendo referencia a algunos momentos de la actividad 1 (la consigna, un ejemplo de interacción, procedimientos de los alumnos) y de la actividad 2, destacaré una parte de la puesta en común con la participación de dos alumnos, es decir, esta vez no separaré por actividad.

3.3.2.1 La fase introductoria

¿Para qué sirve estar descomponiendo números?

En la sesión 1, antes de dar las indicaciones para la primera actividad la maestra decidió iniciar preguntando: ¿para qué me sirve estar descomponiendo números? Algunas respuestas de los alumnos fueron: “para poner a trabajar nuestro cerebro”, “para hacer más rápido las sumas”, “para calcular más rápido”. Estas respuestas dejan ver que los niños, tras haber trabajado varias situaciones de cálculo mental, se han ido formando algunas ideas sobre las características del cálculo mental. Enseguida la maestra agregó que: “descomponer un número claro que nos sirve para muchísimas cosas (…) pero nuestro objetivo (…) es descomponer el número de tal manera que a mí me sirva para hacer un cálculo rápido del resultado”. Para precisar más el sentido de descomponer con un fin, dio algunos ejemplos de descomposiciones que no ayudan:

> M: si yo tuviera esta suma: 34+16 (la anota en el pizarrón) y me dicen: ¡descomponla! Ah, pues como tengo mucho tiempo a lo mejor la voy a descomponer en diez más diez más diez más uno más uno más uno más uno más cinco más cinco más cinco más uno, puede ser, ¿no? Otra descomposición, a lo mejor digo 34 de uno más cinco más cinco más cinco más cinco más uno. Hay muchas variantes o muchas maneras de descomponer un número, pero nuestro objetivo que vamos a perseguir hoy es descomponerlo para que a mí me sirva para calcular rápidamente el resultado, ¿sí?

En esta manera de introducir la noción de descomposición vislumbro algunas dificultades: 1) La descomposición es mostrada como algo azaroso y no como algo pensado; 2) La descomposición en función de la rapidez podría no dejar ver que debe ser algo reflexionado; 3) Se enfatiza que hay muchas maneras de descomponer, pero no queda claro cuáles pueden ser interesantes dentro del propósito señalado. Quizás habría ayudado que mostrara y analizara no solo contraejemplos sino uno o dos ejemplos de buenas descomposiciones. La idea de facilitad es relativa, puesto que las descomposiciones y composiciones surgen a partir de los conocimientos disponibles y es por eso que, al principio, el procedimiento más fácil es el propio, pero supusimos que conforme se avanzara en el trabajo de las puestas en común los alumnos irían comparando, cuestionando y reelaborando otros procedimientos –pensados por otros alumnos– hasta lograr utilizarlos ellos mismos para resolver diferentes cálculos.

En la segunda sesión la maestra decidió iniciar con un ejercicio de copia, que pareció continuar con la idea del día anterior. La frase decía lo siguiente: *"Hay diferentes modos de resolver una misma suma. Hay modos más largos o más cortos y siempre debo usar el que me resulte más fácil"*. En la ficha para la maestra se anotó lo siguiente para el momento de las puestas en común: "(la maestra) buscará que los niños noten que hay modos más largos o más cortos, pero que mientras resulten fáciles y comprensibles para ellos, están bien". La similitud entre los textos es notable, quizás la frase fue el modo que ella encontró para comunicarles lo que se espera que hagan.

En ambas introducciones puede entreverse que la maestra confía en que, anteponiendo una explicación general sobre cómo descomponer para facilitar los cálculos, los alumnos podrían aplicarla en lo que sigue. Como en muchas otras situaciones, se manifiesta una idea de enseñanza (y detrás de ella, una de aprendizaje) en la que la explicación explícita precede a la acción. Sin embargo, excepto cuando se trata de instrucciones muy precisas, como las que hay seguir al aplicar algoritmos, dicha orientación presenta debilidades importantes. En este caso, la acción de descomponer para facilitar implica utilizar, de maneras diversas, el repertorio de cálculos básicos, mediante descomposiciones estratégicas, que han venido aprendiendo en las situaciones anteriores. Es mucho más factible que un aprendiz entienda cómo hacerlo cuando lo intenta por sí mismo, y, en caso de no lograrlo, viendo, *post factum*, cómo resuelven otros niños o la maestra, ese mismo cálculo. Las estrategias pueden cobrar significación al estar vinculadas a cálculos concretos, que se vuelven de alguna manera, representantes de éstas. Las explicaciones generales tienen sentido solamente después[35].

3.3.2.2 Primera actividad

La consigna

Las indicaciones dadas por la maestra para la primera actividad: Resolver 23 + 18, fueron numerosas, destaco a continuación su contenido, en el orden en que las fue dando:

> 1ª. Solicitó una explicitación oral de los procedimientos: "Cada uno me va a decir ahorita cómo le hizo".
>
> 2ª. Pidió que resolvieran la operación en parejas y aclaró: "no se trata de que los miembros de la pareja compitan entre sí, se trata de ver cómo solucionan una suma".
>
> 3ª. Indicó directamente la acción de descomponer: "La van a des-com-po-ner, de tal manera que ustedes consideren que con esa descomposición van a encontrar más rápido el resultado".
>
> 4ª. Pidió que escribieran el procedimiento en una hoja: primero la suma y debajo las descomposiciones.
>
> 5ª. Mientras trabajaban revisó algunos procedimientos y dijo en voz alta que seleccionaría algunos: "Voy a ver quién me gusta cómo la descompuso.

Cabe destacar la petición explícita de descomponer para resolver más rápido el cálculo y también la petición de escribir los procedimientos. Además, se puede observar que en la forma de dar la consigna, se transparenta un contrato en el que una de las motivaciones para resolver el cálculo y escribir el procedimientos es la aprobación de la maestra. Ello probablemente resta autonomía al trabajo de los niños. Este contrato convive entonces con otro en el que el criterio de calidad del procedimiento esté dado por la facilidad de calcular para el alumno.

[35] Las explicaciones generales como las que hemos visto aquí se sitúan en el extremo opuesto de lo que Sensevy (1996) llama procedimiento "emblemático": éste es un procedimiento que surge en el seno de una situación específica, en el grupo, y resulta muy adecuado, o funcional para los alumnos. En adelante, lo recuerdan (o el profesor lo evoca) asociado a esa situación (a su contexto, o a su autor, por ejemplo). Pasa a constituir un elemento lo que Brousseau y Centeno (1991) llaman "memoria didáctica".

Cabe preguntarnos ahora, ¿cómo habrán interpretado la consigna los alumnos? ¿la acción de descomponer les permitió calcular más fácilmente o la tomaron como una instrucción más? A continuación, veremos el trabajo de los alumnos.

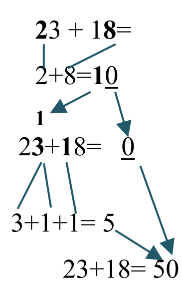
Un ejemplo de interacción: El caso de Haziel y Tonatiuh

No se puede pensar e interactuar al mismo tiempo. Tonatiuh pretendió esperar a su compañero para iniciar el trabajo juntos mientras que Haziel ya había empezado a calcular mentalmente. Es claro que el momento inicial de resolver un cálculo no se puede resolver en equipo. Debimos anotar en la ficha: “cada alumno puede disponer de unos minutos para pensar y escribir su procedimiento. Después le explicará a su compañero lo que hizo y viceversa. La idea es que contrasten lo que cada uno hizo y después decidan cuál procedimiento resulta más fácil”.

Identificar errores en el compañero y proponer alternativas. Una virtud del trabajo en parejas. La consigna era resolver 23+18 buscando, al menos, dos procedimientos diferentes. Haziel expresó que el resultado de 23+18 era 50, lo que pareció desconcertar a Tonatiuh, quien empezó a calcular (¿o a verificar?) con apoyo de dedos, iniciando por las unidades de cada sumando: 8+3… pero no pudo terminar porque Haziel lo interrumpió:

> Haziel: ¿sabes cómo le hice para que sea *rápido*?
> Tonatiuh: A ver…
> Haziel: ¿Cuánto te da ocho más dos?
> Tonatiuh: Diez
> Haziel: Pues aquí hay un cero y aquí le sumo un uno… (escribe un cero: 23+18= **0**)
> Tonatiuh: (lo interrumpe) No, mira… (señalando las decenas) primero se suma esto, dos más uno y así mira (borra el 0)

La confusión de Haziel no es fácil de interpretar. Probablemente no atendió el valor posicional de las cifras y pensó algo así: “aquí hay un cero (de 8+2=1**0**) y aquí le sumo uno (al 3 de 23)”, siguiendo su idea sí se obtiene 50 porque:



Tonatiuh se percató, muy pronto, de que 8+2 no podían sumarse, es decir, atendió el valor posicional de ambas cifras e intentó ayudar a su compañero: “No, mira… (señalándole las decenas) primero se suma esto, dos más uno”.

$$23 + 18 =$$
$$2 + 1$$

Tonatiuh se refería a las decenas, pero en su explicación recurrió a las cifras: 2 + 1 (y no 20 + 10), por lo que obtuvo 3 y no 30. Quizás por esa razón a Haziel no le resultó clara la explicación. No obstante, Tonatiuh no se rindió e intentó con un nuevo procedimiento:

> Tonatiuh: ¿3+18? A ver, dime…
> Haziel: (no contesta) La mía era más fácil, Tona. Te estoy diciendo que aquí me da un cero y… (vuelve a escribir el cero que su compañero había borrado).

El segundo intento de Tonatiuh pone en juego una descomposición que facilita el cálculo, pero Haziel no permitió que terminara de explicarlo: 23 + 18 = 20 + (18 + 3) = 20 + 21 = 41. ¿Por qué Haziel se muestra renuente a escuchar otras alternativas de cálculo? Es difícil saberlo a estas alturas, pero su falta de interés ante las ayudas de Tonatiuh no permitió que se diera cuenta de su error. No fue sino hasta su tercer intento de explicar su procedimiento que finalmente vaciló: “H: dos más ocho, diez (pone el 0) y llevo uno, ¿tres más uno? (corrige) ¿dos más uno más uno?”. Es hasta este momento que replantea su procedimiento: borró el cero y empezó a hacer algo distinto: sumó las unidades 8+3 con apoyo de dedos y al obtener la respuesta (11) intentó decírselo a Tonatiuh, pero éste no lo escuchó. Así, finalmente, Haziel se dio cuenta que su descomposición lo estaba llevando a un resultado incorrecto.

Me parece destacable que la dificultad de Haziel para darse cuenta de que su resultado era erróneo propició que Tonatiuh pensara diferentes caminos que lo llevaron a calcular, a verificar, a ofrecer alternativas más fáciles a su compañero que terminaron por ser útiles para él mismo. Pese a haber verificado, al menos, de tres formas diferentes que el resultado daba 41, la insistencia de Haziel hizo que él terminara dudado. Primero preguntó a la observadora: “es 41, ¿verdad?” y ante la falta de respuesta recurrió a otro procedimiento: contar de uno en uno a partir del 23 (con apoyo de dedos), es decir, empleó un procedimiento más elemental y difícil (respecto a los que había hecho antes). Es probable que recurriera a este procedimiento por resultar confiable para él (dominaba el conteo con dedos) y porque, más que calcular, lo que quería era verificar el resultado. Así, la interacción finalmente fue beneficiosa para ambos.

Descomponer antes o después. Además de resolver el cálculo, la consigna incluía escribir el procedimiento. Tonatiuh un poco molesto comentó: "Haziel nos estamos tardando y los demás ya están empezando (a escribir)". En ese momento ambos alumnos ya estaban de acuerdo en que el resultado era 41 pero no habían decidido qué escribirían en la hoja. Haziel comentó a su compañero que tenían que poner el mismo resultado, pero lo que terminó escribiendo fue el 23, varias veces en la hoja:

23+
23+
23+

Enseguida ambos alumnos empezaron a proponer distintas descomposiciones del segundo sumando (18):

> Haziel: (23) más diez (escribe 23+10)
> Tonatiuh: (cuenta con deditos) 23, 24, 25, 26, 27… (hasta) 33
> (Haziel ya había calculado, bastante rápido, que daba 33)
> Haziel: Ocho, más ocho, ya me di cuenta, da 41.
> (Tonatiuh está de acuerdo, se empujan queriendo escribir ambos en la hoja)

La escritura de las otras descomposiciones ocurrió de manera similar, aunque en este segundo momento Haziel tomó un papel más activo y dio muestra de que podía calcular mentalmente muy rápido. A continuación, se muestran las descomposiciones que anotaron en su hoja:

23+10+8=41
23+15+3=41
23+14+4=41

Aunque comentaron varias descomposiciones más, no las anotaron: 20+20+1, 10+20+10+1, porque no empezaban con 23. Como vemos, los alumnos no se dieron cuenta de que para hallar el resultado de la cuenta ya habían hecho mentalmente varias descomposiciones. Esto dificultó aún más que reconstruyeran por escrito lo que habían pensado. Finalmente, separaron la tarea a realizar en dos momentos: primero calcular; después descomponer. Hay una diferencia entre descomponer para resolver el cálculo (tras reflexionar y tener en mente una estrategia) y descomponer por indicación de la maestra; esta última puede tergiversar el propósito y volverse un "descomponer por descomponer". Tal como comentó Haziel: "Hay que poner más (descomposiciones) para que nos saquemos un diez".

Cabe destacar, finalmente, la conveniencia de alternar el trabajo en equipo o parejas con el trabajo individual el cual, como recién vimos, ofrece posibilidades ricas de interacción entre los alumnos a propósito de un problema (Sadovsky, 2005). La interacción de estos niños resultó fecunda pese a la aparente dificultad en la comunicación: Tonatiuh realizó y formuló varios procedimientos en su intento por convencer a Haziel, quien, por su parte, acabó identificando su error.

Procedimientos de los alumnos para la suma 23+18

Muestro ahora los procedimientos realizados por doce parejas. Las producciones de los alumnos fueron revisadas en un momento posterior. Cabe señalar que resultó difícil interpretar algunos de los procedimientos porque, como veremos más adelante, la escritura numérica no permitió entender del todo las composiciones realizadas; aunado a ello, las limitaciones de la dinámica de la clase, sobre todo del tiempo disponible, no permitieron cuestionar a los niños sobre lo que habían escrito. Por tal motivo, con el fin de lograr interpretaciones más fidedignas, tuve en mente estas consideraciones: 1) Analicé cada descomposición de un alumno o pareja de alumnos en relación con las otras realizadas por ellos mismos, nunca por separado; 2) Para entender mejor las resoluciones, tomé en cuenta el desempeño de los alumnos en otras sesiones.

En este apartado integro, además, algunas reflexiones derivadas de la problemática de la explicitación escrita, tales como la dificultad que supone para los alumnos reconstruir lo que pensaron por medio de una escritura numérica, clara y suficiente, con la que comuniquen todos los pasos realizados, la descomposición/composición de los sumandos y de los cálculos parciales. Para lograr comunicarlas de una manera más organizada y más entendible decidí contrastarlas bajo diferentes aspectos.

La descomposición con la que inician los alumnos es casi siempre en decenas y unidades debido, seguramente, a que ésta es la que subyace a la escritura (y al nombre) de los números, en el sistema decimal. Por ejemplo, 23 se conforma de 20 y 3. Algunos alumnos descompusieron ambos sumandos mientras que otros, los menos, solamente descompusieron uno de los sumandos. Por otra parte, algunos solamente explicitaron esta primera descomposición, pero otros fueron más allá: dejando ver las nuevas composiciones de los números. A continuación, muestro ejemplos representativos.

a) Descomposición de ambos sumandos en decenas y unidades. Explicitación de precaria a buena

1. Oliver, uno de los alumnos con desempeño bajo, realizó una de las descomposiciones más elementales para 23+18: 5+5+10+10+4+4+2+1=41. Como se ve, consideró por un lado las decenas y por otro las unidades. No queda clara la ventaja de haber descompuesto las decenas y las unidades en números tan pequeños.

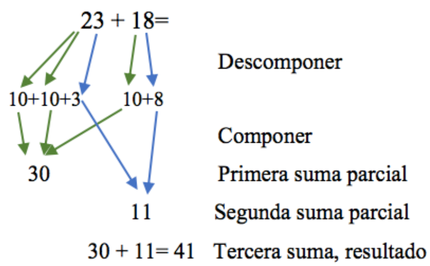
2. Otro procedimiento fue desarrollado por cuatro parejas que también descompusieron ambos sumandos en decenas y unidades. Su escritura solamente muestra la descomposición, respetando el orden de las cantidades, pero no deja ver cómo compusieron las cantidades para llegar al resultado. Éste puede considerarse el primer paso de la explicitación:

   23+18=
   20+3+10+8=41

3. Una descomposición más explícita es la realizada por Esmeralda y también por Juan y Aylín. Ellos dejaron implícito el primer paso (la descomposición anterior) y en cambio, mostraron de qué manera habían reacomodado los números para sumarlos: decenas con decenas y unidades con unidades.

   23+18=
   20+10+8+3=41

4. Joy hizo algo similar: 10+10+3+10+8=41. Descompuso el 20, lo que le permitió trabajar con dieces: 10+10+10=30 y posteriormente sumó las unidades: 8+3=11.



5. Dos alumnos realizaron procedimientos muy explícitos en los que, además de descomponer en decenas y unidades, hacen una segunda descomposición con las unidades para completar una decena. La escritura de Kenay, aunque dejó algunos pasos implícitos, reflejó bastante bien las composiciones que hizo: juntó las decenas: 20+10=30 y con las unidades descompuso el 3 de 23 en 2 y 1, para después sumar 8+2, y formar una decena: 10+1 (esto no quedó por escrito). Finalmente sumó 30+11 y obtuvo 41. Un procedimiento similar es el de Camila, quien trabajó con Kenay, pero cada uno anotó su propio procedimiento en la hoja. Camila dejó implícito que descompuso el 3 de 23 en 1 y 2, para formar una decena con el 8 de 18

Kenay	Camila
23+18=	23+18=
20+10=30	10+10+10=30
8+2+1=11	10+1=11
30+11=41	30+11=41

a) Descomposición de decenas o unidades (un solo sumando)

Tres parejas descompusieron solamente el segundo sumando y escribieron el siguiente procedimiento: 23+10+8=41, no quedó claro si sumaron 23 más 10, 33 y 33 más 8, 41 (quizás con apoyo de dedos) o si la descomposición surgió a partir del resultado.

Aylín y Melissa, en cambio, descompusieron el primer sumando y lo conmutaron con el segundo sumando: 18+10+10+3=41, como habíamos comentado antes, trabajar con dieces resultó sencillo para varios alumnos porque se apoyaban en la serie numérica: 18 más 10, 28; y 28 más 10, 38; y 38+3=41.

En resumen, prácticamente todos los alumnos empezaron a hacer descomposiciones; si bien, no en todos los casos resultó claro si les facilitaron los cálculos y muchas veces dejaron implícitos los pasos intermedios.

b) Descomposiciones que no ayudan

Algunas de las descomposiciones realizadas por ciertos alumnos parecen haber sido hechas a partir de un resultado ya obtenido, y no como un medio para llegar a él. Esto se infiere a partir de varios indicadores: suelen ser listas de varias descomposiciones; la relación con los sumandos originales no es evidente; parecen obtenidas una de la otra descomponiendo algún sumando o combinándolos de distintas maneras. Además, suelen ser de alumnos que han hecho este tipo de trabajo en otras ocasiones. A continuación, muestro algunos ejemplos del equipo de Fernanda H y Ademar:

20+20+1=41
20+10+10+1=41
10+10+10+10+1=41
40+1=41
30+10+1=41

Juan y Aylín, una vez que encontraron el resultado haciendo una descomposición, generaron una serie de descomposiciones a partir de los sumandos de la primera:

20+18=

20+10+8+3

20+5+5+8+3

10+10+18+3

5+15+10+8+3

Otra pareja, Fernanda y Brandon, hicieron un ejercicio similar, pero descomponiendo únicamente el segundo sumando (puede notarse que aumentan de uno en uno del 13 al 16, a la vez que disminuyen de 1 en 1 del 5 al 2, poniendo en juego una propiedad de la suma:

23+13+$\underline{\underline{5}}$
23+14+$\underline{\underline{4}}$
23+15+$\underline{\underline{3}}$
23+16+$\underline{\underline{2}}$

Astrid y Melissa, realizaron una serie de descomposiciones parecidas a algunas que se mencionaron (en el sentido de buenos procedimientos) con otras que no fueron pensadas a partir de la idea de facilitar los cálculos (¡incluso una multiplicación!).

20+3+10+8=41
18+10+10+3=41
20+10+10+1=41
20+20+1=41
30+10+1=41
40+1=41
5x9=45-4=41
30+11=41

Hubo otras descomposiciones que, a pesar de haber surgido dentro de esta dinámica de "descomponer por descomponer" resultan interesantes:

Josué: 10+10+3+17+1, permite completar decenas.
Luis: 30+8+2+1, también permite completar decenas.

Sin embargo, es probable que los autores no se percataran de que sus procedimientos resultaban fáciles para calcular.

Si bien este tipo de descomposiciones producidas muy probablemente sin la finalidad de facilitar los cálculos no eran las que se quería propiciar, permiten a los alumnos familiarizarse con la descomposición misma de los números, con la diversidad, con las formas de generarla, y esto puede tener cierto beneficio para su conocimiento de los números, y también, en alguna medida, para el cálculo mental. Descomponer con un propósito en mente es algo que, me parece, se aprende paulatinamente, mediante el trabajo individual y comparando las propias producciones con las de otros. Esto último es lo que se espera que ocurra en gran medida en las puestas en común.

Las puestas en común

Ya he explicado el papel central que juegan los momentos de puesta en común, como la contraparte esencial de los momentos de trabajo individual, en los procesos de mejora de procedimientos de cálculo mental. Esta situación de *Pensar los cálculos*, en la que ocurrieron tres momentos de puesta en común, permitirá mostrar ampliamente tanto los logros como las dificultades de la maestra en la conducción de este complejo momento. A partir de este análisis será posible continuar el proyecto de identificar qué tipo de información se revela necesario compartir con la docente, para brindarle mejores oportunidades de llevar a cabo estos momentos.

En lo que sigue abordaré las siguientes preguntas: ¿Cuáles procedimientos se hacen públicos? ¿Con qué criterios se seleccionan? ¿cuáles se validan y cuáles se dejan de lado (incluso si valían la pena)? ¿Qué dificultades surgen para comunicarlos? ¿Cómo son recibidos por los demás alumnos? ¿Qué posibilidades tienen los alumnos de reelaborar dichos procedimientos? ¿Tales procedimientos representan una evolución con respecto de lo que venían haciendo?

Criterios no claros de selección de procedimientos. No emergió claramente un criterio de la docente para escoger los procedimientos que se hacían públicos. Observé que tendió a pasar al frente a alumnos que se auto proponían, y no me queda muy claro hasta dónde ella conocía el procedimiento que ellos iban a presentar, es probable que en varios casos no lo supiera. En algunos casos también pasó a alumnos que habían participado poco o por considerar que, dadas sus dificultades, se les podría ayudar[36]. Esto puede explicar que, con cierta frecuencia, aparecieran en escena procedimientos poco interesantes.

En la puesta en común 1: resolver 23+8, la maestra inició validando de entrada, positivamente, la diversidad de descomposiciones: "todas muy acertadas porque nos dieron el resultado súper rápido". Aunque ella lo atribuyó a que los resultados fueron obtenidos rápido, esto no necesariamente ocurrió así.

En lo que sigue analizaré dos ejemplos que dejan ver más claramente la complejidad de la gestión de la docente durante la fase crítica –por su importancia– de la puesta en común.

Seleccionar procedimientos y ayudar a explicitarlos: tareas difíciles de la gestión de la puesta en común. Ejemplificaré lo anterior con dos casos tomados de la puesta en común de la actividad 2, que consistía en resolver individualmente 83+56.

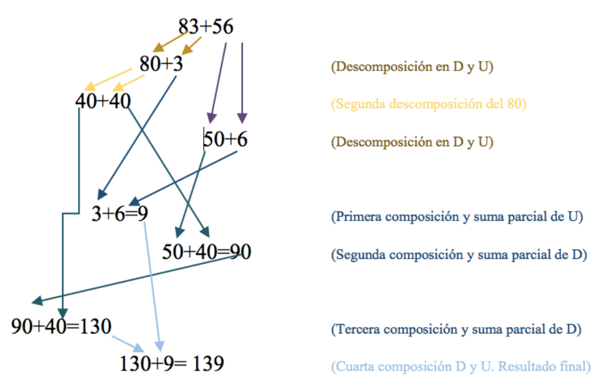
---

[36] A veces la maestra usaba el momento de puesta en común para interactuar largamente (varios minutos) con un solo alumno, sin la participación del grupo.

El caso de Kenay

En la segunda puesta en común, Kenay pasó al frente y escribió la siguiente descomposición: 40+40+9+50=139 y enseguida explicó: "Le sumé 50+40 que son 90, luego 40 pues que están aquí y 50, 90 (controla con sus dedos, cada uno vale 10: 90+10) 100, 110, 120, 130, 140 y el 6 y el 3 los junté…"

Lo que el alumno explicitó no corresponde completamente a su propia escritura numérica, la cual refleja la descomposición de los números, pero no la composición misma. Por ello, la reagrupación de los números la comunicó de manera oral y con cierta dificultad. ¿Por qué resulta tan difícil explicitar por escrito y oralmente? Para que la explicación de Kenay hubiera sido más clara necesitaría haber comunicado varias cosas más:



Sin embargo, parece difícil que Kenay, sin ayuda, explicitara tantos pasos. Además, tampoco quedó claro si esta sería información útil para los demás compañeros. Después de la explicación del alumno, la maestra decidió intervenir, dejando ver que el procedimiento de Kenay aportaba algo de interés. Vemos que ella se esforzó en reconstruir lo dicho por este alumno:

> M: Nos dice Kenay que él escribió del 80, 40+40, sumó el 3 más el 6 que le dio 9 y dijo 50+40, 90 (Kenay asiente), más 40, 130; más los 9, 139, ¿sí? Así lo resolvió su compañero. Ahora Juanito, gracias. ¿Está correcto?

La intervención de la maestra ayuda a explicitar un poco lo que descompuso y compuso Kenay. ¿Fue suficiente? ¿hizo falta que enfatizara algo?

83+56=	
Lo que maestra explicitó	Lo que la maestra dejó implícito
	El primer sumando se descompuso en 80 y 3.
El 80 se descompuso a su vez en 40 y 40.	
	El 56 se descompuso en 50 y 6.
Se suman las unidades de cada sumando: 3+6=9	
Se suma 50+40=90	Se suma el 50 (del segundo sumando) con el primer 40 (del 80, originalmente 83).
Se suma 90+40=130	Se asocia el resultado parcial de la suma anterior, 90, con 40 (del primer sumando descompuesto, 80), da: 130.
Se suma 130+9=139	
	El recurso de contar de 10 en 10 usado por Kenay.

Probablemente no fue fácil para todos los alumnos seguir la explicación, a nivel oral, de la maestra. Es posible que, al hacer explícitas algunas cuestiones, la maestra pudiera contribuir a que a los niños poco a poco lograran explicitar mejor sus procedimientos por escrito y oralmente. No se trata de enseñarles paso a paso a explicitar, sino de hacerlos conscientes de lo que puede estar quedando fuera de sus escrituras numéricas: Por ejemplo, algo que hubiera sido útil que la maestra enfatizara es que conviene acomodar los números en el orden en que se van a ir sumando o marcar debajo de ellos cuál se sumó con cuál. Es notorio también que hay una necesidad de una forma para representar (líneas y flechas; o escalones). Tales ideas están pensadas desde cómo ayudarlos a explicitar mejor.

También pudo haber resultado útil que, en ciertos momentos, recordara a los alumnos recursos trabajados dentro del repertorio aditivo, propiciando que ellos los reelaboraran mediante ejemplos. Por ejemplo, comentar algo parecido a: “vemos que a Kenay no se le dificultó sumar 50+40, pero sí 90+40” y enseguida, preguntar: “¿Qué idea se les ocurre para sumar 90+40?” Propiciando una forma de resolver más fácilmente el cálculo: 90 más 10=100 y 100 más 30, 130.

No obstante, aun con las carencias de la puesta en común, Kenay siguió reflexionado sobre su procedimiento y después de que varios compañeros ya habían participado, pidió volver a pasar y propuso este: 80+20+30+9=139.

Podemos observar que la segunda descomposición surge a partir de la anterior:

83+56=

40+40+9+50=139 (primera descomposición)

80 20 30

100 + 30 + 9=139 (segunda descomposición)

Parece que Kenay notó que no era necesario descomponer el 80 en 40 y 40. También vemos que reacomodó los números (en el orden en que los iba sumando). También optó por descomponer el 50 en 20 y 30. El acomodo de los números no parece azaroso porque le permite usar el recurso de completar decena. Este alumno deja ver un avance en el proyecto de facilitar los cálculos y poner en juego recursos. Al mismo tiempo manifiesta una mejora en su explicitación. ¿La maestra se percató de todo lo anterior? Al parecer esto se logra poco a poco tras la experiencia de conducir puestas en común. Probablemente analizar, a posteriori, eventos como éste sería de gran ayuda para un docente.

El caso de Esmeralda

Ante la misma operación, 83+56, la alumna propuso: 100+30+9. La maestra no vio de entrada la relación de la descomposición con el cálculo original (83+56), por lo que comenzó a cuestionar:

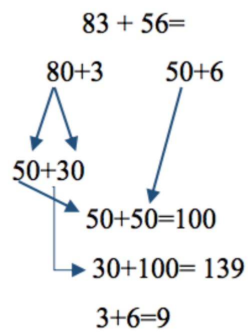
> M: A ver, ¿qué hiciste?
> Esmeralda: A 100 le sumé 30… (M la interrumpe)
> M: Pero… ¿por qué 100? A ver este (señalando el cálculo original) cómo lo descompusiste
> (…)
> M: A ver, ¿de dónde sacaste 100? (señalando otra vez el cálculo original) de aquí, de aquí, de aquí, ¿cómo le hiciste?
> Esmeralda: Al 50 le sumeeeé… (piensa un rato) ¡20! (señalando el 80), (repite) al 50 le sumé 20… y al 80 (¿le sumé?) 50 y me dio 100.

La pregunta de la maestra obliga a la niña a repensar su descomposición, hace varios intentos por explicar, pero ninguno queda muy claro. El último intento de la niña sólo es escuchado por la maestra, quien hace público lo siguiente:

> M: Al 50 le sumó 50 de aquí (83), y fueron 100, entonces de aquí cuánto sobraba (la M señala el 83, la niña no dice nada)
> M: los que pusiste ahí, ¿no? (señala hacia 100+30+9=139)
> Esmeralda: Treinta.

> M: Los treinta. Y luego, ¿qué más sumaste? (rápidamente le señala el 3 del 83 y el 6 del 56)
> Esmeralda: Tres y seis y salió nueve.

Es decir, de acuerdo con la explicación de la maestra, la alumna hizo lo siguiente.



¿Puede decirse que la maestra sobre interpretó las explicaciones –no muy claras– de la niña? No podemos saberlo, pero en todo caso, comunicó y validó un procedimiento que consideró interesante por los recursos que ponía en juego.

3.3.2.4 Comentario: un proyecto complejo

Como vemos, las dificultades de las intervenciones de la docente se hacen más evidentes ante la complejidad de la puesta en común que frente a los otros momentos de la clase. Entre estas dificultades están la de identificar y seleccionar procedimientos que pueden valer la pena, la de ayudar a los alumnos a explicitarlos –ellos a su vez, están aprendiendo no solamente a calcular, también a explicitar lo que hicieron– y, sobre todo las de ayudarlos a apropiárselos.

Hizo falta comunicar en mucho mejor medida a la docente los propósitos de estos momentos de puesta en común, y, sobre todo, brindarle sugerencias de cómo gestionarlos. Dos recomendaciones que desprendo de lo observado son: convendría que la maestra apoyara sus intervenciones en algún tipo de representación gráfica cuando aclara el procedimiento de algún alumno. Lo anterior podría favorecer que el resto del grupo pudiera apreciar mejor los procedimientos que se fueran destacando. Asimismo, sería de mucha utilidad que se propusiera nuevos cálculos que permitieran practicar dichos procedimientos, con el fin de que se los vayan apropiando.

No obstante, sortear estas dificultades probablemente requiere, además de disponer de información clara de los propósitos y recursos, de práctica, e, idealmente, de retroalimentación sobre esta. Por ejemplo, analizar con ella sesiones como las que he comentado podría ser muy beneficioso.

Espero haber podido mostrar en qué medida el medio con el que interactúa una maestra al intentar propiciar la mejora de procedimientos de cálculo mental, y en particular, la gestión de las puestas en común constituye una tarea de gran complejidad, sobre todo cuando la maestra cuenta con muy poca experiencia previa con el enfoque implementado.

Conclusiones

El propósito general de este trabajo fue analizar las condiciones didácticas que podrían favorecer el desarrollo de procedimientos de cálculo mental, más precisamente sumas, por parte de alumnos de segundo grado de primaria. Sobre la marcha definí tres propósitos más específicos: 1) Analizar el funcionamiento de las situaciones a la luz de los conocimientos revelados por los alumnos; 2) Reflexionar sobre algunos efectos de las interacciones sociales en el propósito de los juegos, y 3) Analizar algunos aspectos de la gestión de la docente. A continuación, destacaré algunos aspectos que me parecen relevantes con respecto a cada uno de esos propósitos. Intentaré mostrar la complejidad que se manifiesta al llevar a la práctica el proyecto, aparentemente simple, de fomentar el cálculo mental reflexivo en la escuela, complejidad que yo no había previsto en todas sus dimensiones.

- Analizar el funcionamiento de las situaciones a la luz de los conocimientos revelados por los alumnos, desde sus procedimientos, errores y dificultades

Se pusieron en práctica dos tipos de situaciones: juegos para reforzar el repertorio, y operaciones aisladas para dar pie al desarrollo de estrategias de cálculo. Las situaciones de juego, sobre todo la situación 1 (Descarto 10), la 3 (Armar números redondos) y la 4 (Descarto 100), favorecieron el trabajo de practicar y agilizar el repertorio básico, también fueron motivantes para los niños. No obstante, también se manifestaron dificultades: la necesidad de rapidez en las jugadas y la competencia por ganar, a veces parecieron erigirse en obstáculos para el desarrollo de procedimientos de cálculo, los cuales requieren, de cierta reflexión y, por lo tanto, de tiempo. Volveré sobre este punto al comentar las dinámicas de los equipos. Con respecto a la situación 2 “Saludos”, cabe un comentario adicional: fue interesante, pero resultó prematura para varios alumnos quienes, ante un reto que resultó elevado para ellos, tendieron a evitar el juego, por ejemplo, “haciendo trampa”.

En otro orden de cosas, cabe destacar que la modalidad de complementar los juegos con trabajo individual, en hojas de trabajo, constituyó una buena oportunidad para los alumnos de reutilizar conocimientos movilizados durante el juego, en condiciones más pausadas y adecuadas para la reflexión.

Con respecto a las situaciones con operaciones aisladas, cabe destacar, en primer lugar, que éstas mostraron que pueden constituir situaciones problemáticas en toda forma, propiciando diversos procedimientos en los que los alumnos ponen en juego sus conocimientos en diferentes niveles, de resolución, de explicitación oral o escrita. La gestión de estas situaciones se reveló sin embargo inesperadamente difícil. De esto hablaré también un poco más adelante, me centraré primero aquí en algunas características de los procedimientos y de las situaciones.

Los procedimientos. Prácticamente todos los alumnos pudieron poner en marcha algún procedimiento para resolver cálculos, desde los más elementales como el sobreconteo con apoyo de dedos, hasta procedimientos que incluyen descomposiciones y composiciones de los sumandos para facilitar los cálculos. En el proceso de aprender a descomponer, el tipo más socorrido en un principio fue en términos de decenas y unidades, lo cual seguramente tiene relación con la organización de los números desde el SND, y también, posiblemente, con el conocimiento previo que tenían los niños del trabajo con cifras en el algoritmo convencional. Bastante pronto, no obstante, aparecieron procedimientos en los que no se descomponían los dos sumandos, sino solamente uno, por lo general el segundo, para sumar sus decenas y sus unidades por separado, al otro. Con respecto a lo anterior, puede verse aquí un avance en términos de economía en la descomposición misma como en la cantidad de operaciones parciales que hacer.

A lo largo de la experiencia, el sobreconteo con dedos nunca desapareció. Los alumnos asumieron que estaba prohibido y optaron por ocultarlo, pero no por abandonarlo. Considero ahora que el camino más conveniente no es prohibirlo, pues esto deja desarmados a los alumnos que avanzan más despacio, además de que siempre aparecen dificultades nuevas frente a las cuales el apoyo en dedos vuelve a ser útil. La alternativa podría ser, entonces, instalar en clase una especie de contrato según el cual se trata de ir abandonando el conteo de dedos en busca de procedimientos más rápidos, pero éste es legítimo mientras se necesite.

Una dificultad recurrente ante la demanda de "descomponer los números para facilitar los cálculos" fue que numerosos alumnos resolvían de alguna manera la cuenta (no siempre supimos cómo), y posteriormente, a partir del resultado, hacían una descomposición. Los alumnos dejaron ver que podían pensar los números de distintas maneras, hacían gran cantidad de descomposiciones, algunas muy ingeniosas, pero no con el propósito de facilitar los cálculos, sino de cumplir la consigna de la docente. Descompusieron mucho, pero se alejaron del objetivo.

Finalmente, en el otro extremo, algunos alumnos lograron hacer descomposiciones elaboradas y eficientes, como la de completar decenas. No obstante, fueron relativamente pocos quienes lo lograron (alrededor de 5 de 29) y, además, fueron los que más se destacaban en la materia. A continuación, abundaré un poco sobre esto último.

Al iniciar este trabajo anticipé que los alumnos con más dificultades para aplicar el algoritmo convencional encontrarían en los procedimientos de cálculo mental una alternativa más accesible que las técnicas convencionales y que esto les permitiría además fortalecer su conocimiento de los números, del sistema de numeración, y de la suma misma. Para mi sorpresa, me percaté de que justamente los niños con mayores dificultades (Oliver, Aylín, Yunery, Marifer) se aferraban más al algoritmo, en su versión no escrita. Comprobé que, como señala Butlen: "los alumnos quieren usar algoritmos lo máximo posible porque les proporcionan ahorro de pensamiento" (Butlen, 1996, p. 3). Y también, agregaría yo, les proporcionan seguridad. En cambio, los alumnos destacados (Joy, Kenay, Camila, Juan Carlos) fueron quienes mostraron poder desplegar procedimientos avanzados (en el sentido de que incluían descomposiciones que sí tendían a facilitar los cálculos) casi desde el principio. La mayor parte del grupo estaba en un nivel intermedio, y fue en este grupo (Tonatiuh, Brandon, Haziel, Melissa) en el que pudimos notar cierta mejora de los procedimientos. Este resultado, aunado a otros que presento más adelante, ponen de relieve la necesidad de explorar alternativas didácticas considerando de manera muy focalizada, a los alumnos con mayores dificultades. Citando nuevamente a Butlen, afirmaré que: "Toda enseñanza que se proponga luchar contra el fracaso escolar, tiene que ofrecer a los alumnos situaciones de aprendizaje tomando en cuenta las características específicas de un público con dificultades" (Butlen, 1986, p. 1). Se podría precisar, dificultades para aprender mediante los métodos y ritmos convencionales.

Los procesos de explicitación. El cálculo mental se hace pensando, a veces expresando algo para uno mismo mediante palabras murmuradas y gestos discretos, a veces dejando algunos pocos rastros escritos. Es decir, lo que se hace para calcular tiende a quedar implícito, si no se crean condiciones para explicitarlo. Y, sin embargo, la explicitación es necesaria: en primer lugar porque es a través de ella que los alumnos se hacen conscientes de lo que hicieron, y, sobre todo, porque es a través de ella que pueden compartirlo con otros, convertirlo en objeto de análisis, y a final de cuentas, mejorarlo.

En general, fue difícil obtener explicitaciones suficientes. Es claro que explicitar implica en cierto modo reconstruir. Identifico tres circunstancias que dieron pie a la explicitación, en esta experiencia. Por una parte, estuvieron las peticiones de explicación por parte de la maestra, o de mi parte y de los otros observadores, al acercarnos a los alumnos a observar su trabajo. Ante preguntas como "¿qué hiciste?", "oí que contabas de 15 en adelante, ¿qué buscabas?", a veces los alumnos lograban reconstruir un procedimiento, o algunos pasos de este, pero a veces solo podían contestar "pensando", o bien, lo que sucedió con frecuencia, reconstruían un procedimiento distinto al pensado, apoyándose en el resultado ya conocido, incluso sin darse cuenta. Otro espacio para la explicitación lo constituyeron las puestas en común. En éstas, la maestra tendió a establecer un diálogo con el alumno interpelado, diálogo en el que comúnmente el alumno no lograba decir más de lo que decía en corto, es decir, muy poco. La maestra se veía entonces en la difícil situación de interpretar la respuesta de los alumnos para luego comunicar a la clase procedimientos que aún resultaban un tanto ininteligibles. Probablemente las interpretaciones no siempre fueron fieles. Finalmente, la tercera fuente de explicitaciones era el trabajo en parejas. En estos momentos llegué a identificar, a veces, algunas de las explicitaciones más claras. Es muy entendible que así haya sido puesto que en estos casos la motivación para explicitar era mucho más funcional para ellos: se trataba de ayudar a alguien cercano, o bien, convencerlo de algún error.

Con respecto a la explicitación escrita de los procedimientos, cuando se trató de anotar únicamente las operaciones realizadas, pocos niños lograron dar cuenta de su procedimiento. La mayoría tendió a proponer descomposiciones que llamé "de un resultado ya obtenido". Ahora pienso que, en un primer momento, es preferible propiciar la explicitación oral y dejar a cargo del docente la escritura, para comunicar los procedimientos. Poco a poco es posible que los alumnos vayan aprendiendo a explicitar también por escrito. Esto lo pude comprobar en una parte de la secuencia que ya no me fue posible incluir en esta tesis (corresponde a situaciones de resta), en la que se empezó a solicitar a los alumnos que describieran por escrito sus procedimientos, justo después de haber calculado (se insistía: "ponlo como tú quieras..." o "como si me lo estuvieras platicando"). Sorprendentemente, esto pareció funcionar bien con varios alumnos. No detecté que ocurriera una tendencia de regresar al uso del "algoritmo mental", como lo previene, por ejemplo, Butlen (2007).

Así, me parece que la explicitación constituye uno de los aspectos que requiere ser más estudiado para favorecer los procesos de toma de conciencia, de comunicación y de mejora de los procedimientos de cálculo mental reflexivo.

La validación de resultados. ¿Cómo se decide en clase lo que está bien y lo que está mal? En las situaciones adidácticas, se busca que los alumnos reciban retroalimentación de la situación acerca de sus resoluciones y puedan saber si llegaron o no a la meta, por sí mismos. Sin embargo, en las situaciones de cálculo mental que estudiamos aquí, esto no fue sencillo, ni fue siempre posible. Durante los juegos fue inevitable que ese momento se desvaneciera, o perdiera importancia. En algunos, como "Descarto 10", "Armar números redondos" y "Descarto 100", la validación, de haberla, tenía que ser social, esto es, tenía que estar dada por los contrincantes. La tendencia en estos casos fue no validar, lo cual pudo deberse a que hacerlo implicaba a los contrincantes realizar nuevos cálculos. Además, la demanda de rapidez en las jugadas para sostener la dinámica del juego tampoco era propicia para que los jugadores se detuvieran a calcular más, sobre todo si no lo podían hacer rápido. Cabe decir que, no obstante lo anterior, algunos pocos alumnos sí lo hacían. El juego "Saludos" fue el único que ofreció a los jugadores una validación empírica de su resultado: después de anticipar el número oculto, los jugadores, podían ver su carta y verificar (no así al secretario, quien no contaba con la posibilidad de validaar empíricamente su suma). Los jugadores contaban también con la validación (social) ofrecida por el secretario.

En las situaciones con operaciones aisladas, cuyo foco sí era analizar, comparar, reflexionar sobre el trabajo propio y el de los otros, la validación fue siempre de tipo social: ocurría principalmente durante el trabajo en parejas, y en general puede decirse que funcionaba bien, al motivar la revisión de procedimientos cuando los resultados no coincidían[37]. Llegó a ocurrir algunas veces que los procesos de validación entre pares se vieran obstaculizados por la dificultad de alguno de los participantes para aceptar que otro resultado y no el propio fuera el correcto, o que otro procedimiento fuera más eficaz. Un fenómeno similar ha sido identificado en otros estudios (Sadovsky, 2005; Mendoza, 2007). Más allá de esta dificultad, coincido con la observación de Sadovsky, en el sentido de que:

> pronunciarse sobre la validez de otro procedimiento luego de haber producido uno, es una tarea esencialmente diferente que permite acceder a relaciones que tal vez no se habían llegado a elaborar en el momento de la propia resolución (p. 12)

En resumen, las situaciones de juego mostraron ciertamente un potencial didáctico importante para reafirmar y ampliar el repertorio básico, pero dejaron ver la necesidad de alternarlas con otro tipo de situaciones con mejores condiciones para la reflexión y la retroalimentación sobre las resoluciones. Las operaciones aisladas constituyeron en general buenos problemas, pero en este caso el buen funcionamiento de la situación dependió mucho de la gestión de la docente. Amplío este punto más adelante.

- Efectos de las interacciones sociales en el propósito del juego

En el Capítulo 2, relativo a los juegos, mostré que al interior de los equipos se generaban distintas dinámicas pese a estar todos los alumnos participando en la misma situación. En el Capítulo 3, en las situaciones con operaciones aisladas, identifiqué una diversidad menor de dinámicas, por lo que la reporté en menor medida. Los episodios que analicé muestran que, en el trabajo en equipo, y sobre todo en los juegos, la diversidad de dinámicas en las que los diferentes alumnos participaban constituía incluso una diversidad

[37] En las situaciones de resta, que no incluí en este análisis, se utilizó con bastante éxito la calculadora como una forma de validación de estimaciones

de *medios,* en el sentido de “milieux”, de la TSD. A veces, era casi como si les tocara jugar juegos diferentes.

Los factores que identifiqué detrás de estas diferencias son numerosos y de distinta naturaleza. Por una parte, intervienen, naturalmente, los conocimientos previos de los alumnos, los cuales, a final de cuentas, forman parte del medio matemático que enfrentan, influyen en su comprensión de las consignas, en su posibilidad de participar de la devolución, asumiendo en cierto momento que sus decisiones influyen (que no se trata de adivinar, sino de calcular, por ejemplo), en sus posibilidades para procesar las retroacciones y para ir mejorando sus recursos. Otros factores, también ligados a los jugadores en lo individual, son los que tienen que ver con su modo de posicionarse en el juego, por ejemplo, con la disposición y tolerancia para equivocarse e intentar por otro camino. Pero hay otros factores que ya no dependen de cada jugador en lo individual, sino del colectivo, de los otros jugadores, quienes también forman parte del medio de cada alumno, y que, en conjunto, crean cierto clima al jugar. Hubo equipos en los que los jugadores generaron un clima de solidaridad, de paciencia ante la tardanza de algún jugador, de disposición a ayudarlo a entender las instrucciones, incluso se ofrecían ayudas en las jugadas. Estas dinámicas fueron favorables sobre todo para los alumnos con dificultades. En otros equipos se pudo ver un clima de mayor competencia, necesidad de ganar, lo que inhibió la posibilidad de colaboración, incluso llevó a algunos a hacer trampa. En estos equipos, los alumnos más lentos vivieron una dinámica estresante. Algunos de ellos, parecieron usar mecanismos de defensa como evadirse del juego, hacer trampa también, aguantar cierto nivel de burlas.

Estas observaciones dejan ver, nuevamente, una faceta de los juegos, una especie de “reverso de la moneda”, que me lleva a considerar la necesidad de un equilibrio entre los juegos colectivos, las actividades individuales o en grupos pequeños, las puestas en común, las cuales son oportunidades para volver a transitar por un mismo conocimiento. Considero que este aspecto merece ser estudiado con mayor profundidad sobre todo en el caso de los alumnos con dificultades. Es muy evidente que el trabajo intelectual de los alumnos es sensible al clima que se genera en los equipos. Crear juegos que impliquen mayor colaboración entre los niños, podría ser un ayuda importante (hay aquí un reto para el diseño). Además, se asoma aquí otro tipo de necesidad, la cual no es del ámbito de la didáctica de las matemáticas, y que tiene que ver con la inculcación de valores de colaboración y de respeto de las diferencias, en el trabajo en el aula.

- La gestión de la docente

La maestra que condujo las sesiones de cálculo mental tenía experiencia amplia como docente de primaria (estaba cerca de jubilarse), era considerada como una buena maestra por su comunidad, y se comprometió con entusiasmo en el proyecto. Por otra parte, la maestra no tenía experiencia conduciendo clases bajo este enfoque que busca dar más participación a los niños en la construcción de sus conocimientos, que propicia la interacción con situaciones problemáticas para ellos. Si bien sus clases incluían una rutina diaria de cálculo mental, ésta distaba del tipo de trabajo que realizamos a raíz del estudio, sobre todo porque en dichas prácticas no se prestaba atención a los procedimientos: la maestra dictaba operaciones, los alumnos anotaban los resultados y luego intercambiaban cuadernos para poner paloma o tache a los resultados que se iban validando. Estas prácticas de cálculo mental no constituían una alternativa a la enseñanza de la suma y la resta, sino un complemento al trabajo con los algoritmos convencionales. Este desconocimiento del enfoque didáctico, y de la concepción de cálculo mental subyacentes en la experiencia, se reflejaron en importantes dificultades respecto a lo esperado en la forma de gestionar la clase, sobre todo en lo que refiere a dos cuestiones relacionadas: cómo brindar ayudas a los alumnos y cómo llevar a cabo las puestas en común.

En distintos momentos la maestra pareció responder a la idea de que, transmitiendo directamente a los alumnos ciertos conocimientos sobre cálculo mental, ellos lograrían implementarlos después. Me refiero a los momentos en los que libraba amplias explicaciones tanto generales (para qué nos sirve el cálculo mental, qué significa descomponer para facilitar, por ejemplo) como otras muy específicas (ejercitar las sumas a 10, o tratar de generar una cadena de sumas partiendo de $n + n$, y luego $n + n + 1$, $n + n +2$, $n + n + 3$, etc.). También fue notorio que intentaba ayudar a los alumnos a integrar lo ya visto con lo nuevo, por ejemplo, cuando procuró vincular la suma de dobles con el juego “Descarto 10” (sobre complemento a diez). Los alumnos difícilmente comprendían estas explicaciones: las seguían, respondían puntualmente a las preguntas que la maestra iba a haciendo, pero éstas no les servían a la hora de calcular. Como vimos, más bien los alumnos tendieron a identificar la expectativa de “descomponer números” y se dieron a la tarea de hacerlo, separadamente del propósito de facilitar los cálculos. Acabó siendo bastante evidente que ese no era un camino adecuado para apoyarlos en el desarrollo de procedimientos de cálculo mental. Hacía falta un giro, vincular más las explicaciones con las producciones de los alumnos, empujar las nuevas ideas proponiendo ponerlas inmediatamente en práctica, en numerosos ejemplos.

Las puestas en común constituyeron para la docente otro reto mayúsculo, lo cual puso en evidencia la complejidad de la gestión de ese momento: le implicaba identificar procedimientos durante la resolución (ya dijimos que estos no se explicitaban fácilmente), discernir los que valía la pena hacer públicos, ayudar a los alumnos a explicitarlos, hacer participar a los alumnos en la puesta a prueba de los procedimientos que parecieran interesantes, para ayudarlos a apropiarse de ellos. ¿Cómo se aprende todo esto? La docente con la que trabajamos fue mejorando poco a poco, con base a lo que ocurría, y a los comentarios que se le iban haciendo sobre la marcha. Me dejó ver lo necesario que es, en primer lugar, que los docentes se apropien de las maneras de calcular que se busca propiciar con los alumnos y, por otro lado, que cuenten con información muy clara acerca de cómo propiciarlo con ellos. Participar en actividades de cálculo mental con sus pares, analizar fragmentos de clases, escritos o video grabados, incluso de sus propias clases, sería de inmensa utilidad. El reto aquí es para la formación docente.

Para terminar...

Estoy consciente de que en este trabajo he destacado más las dificultades que subyacen al propósito de instalar el proyecto de cálculo mental reflexivo en el aula, que los beneficios. Sé que esto no es usual. No obstante, los episodios de buenas producciones de los alumnos, escasos pero cada vez más frecuentes, el dominio naciente que la docente empezó a mostrar, la claridad con la que fueron apareciendo cuestiones que, de haberse previsto, habrían ayudado a mejorar la experiencia, aunado al hecho de saber que existen otras experiencias exitosas, me llevan a resaltar la pertinencia del proyecto. Sigo convencida de que es un camino que vale la pena recorrer, pues permite a los alumnos afianzar su conocimiento de los números, desarrollar alternativas por sí mismos, adquirir herramientas para hacer cálculo estimativo más adelante y en general una manera de enfrentar las matemáticas de una manera más efectiva.

Lo importante para el alumno –dice Charlot–, “no es conocer la solución, es ser capaz de encontrarla por sí mismo y de construir así, a través de su actividad matemática, una imagen positiva de sí mismo, valorizante frente a las matemáticas. La recompensa al problema resuelto no es la solución del problema, es su éxito personal al resolverlo por sus propios medios, es la imagen que puede tener de sí mismo como alguien capaz de resolver problemas, de hacer matemáticas, de aprender (Charlot, 1986, p. 9)”.

Espero que el haber arrojado luz sobre las dificultades para implementar el proyecto de cálculo mental en el aula, en un caso particular, constituya un aporte, justamente por señalar los lugares en los que hay que poner la mirada, prever carencias y trabajar.

Anexo 1

Cálculo mental en segundo grado de primaria. Lista de situaciones del bloque de suma agrupadas por propósito general.

NOTA: Las situaciones en negritas son las que fueron seleccionadas para integrarse en la tesis.

	Propósitos	Situaciones
Repertorio básico	Acrecentar el dominio del repertorio aditivo y utilizarlo para resolver otros cálculos (complemento a 10, a 100; encuadrar números entre decenas y formar decenas por medio de sumas o restas; Identificar regularidades en las series que se forman sumando 10, con apoyo en desplazamientos en el cuadro de números; sumar y restar múltiplos de 10 (10, 20, 30…) a números de dos cifras, con apoyo en desplazamientos de 10 en 10 en el cuadro de números; Promover la suma de hasta cinco sumandos para formar decenas enteras; Favorecer la realización de cálculos mentales de sumas de decenas enteras.	**1. Descarto 10** **2. Saludos** **3. Armar números redondos** **4. Descarto 100** 5. Puntos que valen 1 y 10 6. Mayor, menor, igual que 100
	Acrecentar el dominio del repertorio aditivo y utilizarlo para resolver otros cálculos. Énfasis en el sistema de numeración decimal (vincular escalas y desplazamientos en el cuadro de números con regularidades de la serie numérica; ubicar las cifras anticipando combinaciones y relaciones correlativas de orden).	7. Saltos hacia atrás 8. Hacerlos valer
Desarrollo de procedimientos	Utilizar la descomposición y asociación de sumandos para encontrar resultados.	**9. Sumas que ayudan a sumar** **10. Descomponer números** 11. Sumas que ayudan a restar **12. Pensar los cálculos** 13. Con la calculadora
	Resta	Nueve situaciones

Anexo 2

Cálculo mental en segundo grado de primaria. Lista de situaciones organizadas en el orden en que se implementaron.

Situación/núm. de sesión	Fecha	Observaciones
1. Descarto 10	Lunes 2 de marzo, 2015	Propósitos: 1) Acrecentar el dominio del repertorio aditivo y utilizarlo para resolver otros cálculos y, 2) Utilizar la descomposición y asociación de sumandos para encontrar resultados. Juego por equipos y ejercicios individuales. Puesta en común.
2. Sumas que ayudan a sumar	Miércoles 4 de marzo	Propósitos: 1) Agilizar los procedimientos mentales para calcular diferencias entre números pequeños; 2) Acrecentar el dominio del repertorio aditivo y utilizarlo para resolver otros cálculos y, 3) Utilizar la descomposición y asociación de sumandos para encontrar resultados. Juego en trinas y ejercicios individuales. Puesta en común.
3. *Descarto 10* (clase extra)	Viernes 6 de marzo, 2015	Esta vez jugó todo el grupo.
4. Armar números redondos	Lunes 9 de marzo, 2015	Propósitos: 1) Encuadrar números entre decenas y, 2) Formar decenas por medio de sumas o restas.
5. Saltos hacia atrás (primera parte) *6, Saltos hacia atrás (segunda parte)*	Miércoles 11 de marzo, 2015 Viernes 13 de marzo, 2015 (segunda parte).	Propósito: 1) Vincular escalas[1] y desplazamientos en el cuadro de números con regularidades de la serie numérica. Se trabajó con el cuadro de números, resolvieron hojas de trabajo individuales. Propósitos: 1) Identificar regularidades en las series que se forman sumando 10, con apoyo en desplazamientos en el cuadro de números; 2) Sumar y restar múltiplos de 10 (10, 20, 30…) a números de dos cifras, con apoyo en desplazamientos de 10 en 10 en el cuadro de números. Se continúo con el cuadro de números y con hojas de trabajo.
7. Puntos que valen 1 y 10	Miércoles 18 de marzo	Propósitos: 1) Utilizar, en el contexto de un juego, la equivalencia "diez por uno". Ejercitar la suma de decenas; 2) Expresar un número dado de hasta 6 decenas de manera global (6d=60) y sumar unidades y decenas a un número dado. Juego de dados por parejas, hojas de trabajo.
	Lunes 23 de marzo (continuación)	Continuación de la situación anterior, terminaron de resolver las hojas de trabajo.
8. Pensar los cálculos (primera parte)	Lunes 23 de marzo	Propósitos: 1) Utilizar descomposiciones aditivas <u>para facilitar</u> los cálculos y, 2) Darse cuenta de que en cálculo mental hay diferentes maneras de hacer una suma. Resolvieron algunas sumas individualmente y puesta en común.

9. Pensar los cálculos (segunda parte)	Martes 24 de marzo (clase extra)	La sesión anterior no alcanzó para concluir la ficha, así que la maestra nos dio una clase extra para que los aos contestaran la HT1.
10. Descarto 100	Miércoles 25 de marzo	Propósito: "Trabajar los complementos de decenas a 100". Juego de formar pares de tarjetas que dieran 100, en equipos de 4 alumnos. El ejercicio 1 de la HT1 implicó sumar decenas.
11. Mayor, menor, igual a 100 *12.Mayor, menor, igual a 100*	Lunes 13 de abril Miércoles 15 de abril (cont.)	Propósitos: 1) Promover la suma de hasta cinco sumandos para formar decenas enteras. 2) Favorecer la realización de cálculos mentales de sumas de decenas enteras. Juego de tarjetas Resolvieron hojas de trabajo.
13. Dados y restas	Miércoles 20 de abril	Propósito: Ejercitar la resta de decenas enteras menos dígitos. Juego de dados por pareja y hojas de trabajo. Puesta en común.
	Lunes 20 de abril (cont.)	Continuación de la situación: "Dados y restas". Ejercicio 3, cuadro de restas. Puesta en común. Ejercicio 4.
14. Sumas que ayudan a restar	Lunes 20 de abril	Propósito: Establecer relaciones entre sumas y restas (apoyo en sumas para resolver restas). Ejercicios individuales. Puesta en común.
15. Restas demasiado fáciles	Miércoles 22 de abril	Propósito: Buscar diversos procedimientos de cálculo mental para la resta de bidígitos.
16. Con la calculadora I	Lunes 27 de abril	Propósitos: 1) Estimar el resultado de sumas y restas antes de usar la calculadora y, 2) Favorecer que los alumnos tengan un mayor control sobre procesos y resultados de operaciones de suma y resta, mediante la estimación o el uso de la calculadora. HT1, ejercicio 1. Consigna: ¿Cuáles de estas operaciones tiene como resultado números mayores que 100? Ht1, ejercicio 2. Consigna: Inventar sumas o restas dentro de los criterios menor, igual o mayor que 100 y despeués verificar con la calculadora.
17. Con la calculadora II	Miércoles 29 de abril	Mismos propósitos. HT3, ejercicio 1. Consigna: De las siguientes sumas y restas, hay tres que tienen resultados incorrectos, subraya las que creas que están mal. HT3, ejercicio 2. Consigna: Completa los espacios vacíos de las sumas y restas. Ejercicio 3, consigna: Encuentra una manera muy rápida de calcular. Puedes usar calculadora.
18. Hacerlos	Lunes 4 de	Propósito: Tomar decisiones para ubicar las cifras anticipando

valer	mayo	combinaciones y relaciones correlativas de orden. *Sólo asistieron 8 alumnos. Juego de cartas. HT2. El ejercicio 2 simulaba una partida entre dos niños y permitió hacer explícita la estrategia para ganar. Ejercicio 3, armar todos los números posibles con las cifras de 4, 7, y 8. Añadimos un ejercicio con la calculadora.
19. Guerra de restas	Miércoles 6 de mayo	Propósito: 1) Estimar o calcular resultados de restas; 2) Estimar si el resultado de una resta es mayor, menor o igual que 50 y, 3) Resolver restas mentalmente mediante descomposiciones de los números. Juego en parejas.
20. Guerra de restas	11 de mayo (cont.)	Se concluyeron las actividades pendientes…
21. Mentalmente o con el algoritmo (11 y 13 de mayo)	Miércoles 13 de mayo	Propósito: 1) Verificar restas sumando (M=D+S); 2) Diferenciar el papel del minuendo y del sustraendo: Uno representa lo que hay, el otro lo que se quita; 3) Establecer las relaciones "A mayor minuendo, mayor diferencia" y "A mayor sustraendo, menor diferencia"; 4) Seleccionar el recurso de cálculo (mental o algorítmico) más adecuado en cada caso y, 5) Producir cálculos anticipando procedimientos y resultados. Actividad de inicio, "la M mete 5 objetos en un bote, luego saca 2 y pregunta: ¿cuántos quedan? Vuelve a meter los dos y pregunta: ¿Cuántos tengo?". HT1. Ejercicio 1. Consigna: Encuentra el número que falta. (La M sugirió cuentas verticales). HT1. Ejercicio 3. Con una suma resuelve dos restas.
	Lunes 18 de mayo (cont.)	Ejercicio pendiente de la situación 14: ¿Mentalmente o con el algoritmo? HT2. Ejercicio 4. Resolver 4 restas y escribir el procedimiento (con palabras).
22. Sumas y restas… ¿mentalmente o con el algoritmo?	Lunes 18 de mayo	Propósitos: 1) Seleccionar el recurso de cálculo (mental o algorítmico) más adecuado en cada caso; 2) Ejercitar la suma mental de números de hasta tres cifras y, 3) Ejercitar el algoritmo convencional de la suma y de la resta. HT3. Ejercicio 5. Mentalmente o con el algoritmo.
23. Entre más quitas menos queda	Lunes 25 y martes 26 de mayo	Propósito: Ver los efectos que provoca la variación del minuendo y/o del sustraendo sobre el resultado (operaciones con minuendo fijo y sustraendo variable y viceversa). Juego de los papelitos. HT1: Ejercicio 1.
23. Entre más quitas menos queda II	Martes 26 de mayo (segunda parte).	Actividad pendiente de la situación 16: "Entre más quito menos queda". HT2. Ejercicio 2.
24. Quitar poco	Miércoles 26 de	Propósitos: 1) Descomponer el sustraendo para facilitar la resta y, 2)

a poco I	mayo	Mostrar que la descomposición más conveniente depende las unidades del minuendo. Resolver 73-8. Se introduce la estrategia de descomponer el sustraendo. Resolver 72-7, individualmente. HT1, ejercicio 2. Resolver restas.
25. Quitar poco a poco II	Lunes 1 de junio	Propósitos: 1) Descomponer el sustraendo para facilitar la resta y, 2) Mostrar que la descomposición más conveniente depende las unidades del minuendo. Resolver 23-7, enfatizando que escribieran su procedimiento (como si lo platicaran). Se introduce la estrategia de quitar poco a poco. Resolver: 81-7, individualmente. HT1 (contenía 12 restas, pero sólo se les pidió que hicieran 6). Ejercicio: ¿Con qué empieza el resultado?
26. La tiendita	Miércoles 3 de junio	Propósito: 1) Propiciar la estrategia para restar que consiste en: "sumarle al chico para llegar al grande", en el contexto de la compraventa. Situación ficticia de compra venta. Actividad 2: Jugar a la tiendita en parejas.
27. Tomar una decena y Juego de estimación	Lunes 6 de junio	Propósito: Descomponer el minuendo en las decenas, menos una, y las unidades, más 10. Por ejemplo: para 35-7, el 35 se descompone 20 +15 (en lugar de en 30 +5). De esta manera las 7 unidades del sustraendo se pueden restar a las 15 del minuendo: 35-7= 20 + (15-7) = 20 + 8 =28. Resolver 35-7, individualmente. En la PC se comentaron varios procedimientos de los A. LA M introdujo la estrategia de "tomar una decena". Segunda parte de la clase: Juego de estimación.

Anexo 3

Ficha para la maestra, primer ejemplo

Situación "Armar números redondos"[38]

Propósito

- Encuadrar números entre decenas y formar decenas por medio de sumas o restas.

Material

- Tarjetas del 1 al 9, un mazo por jugador.
- 18 tarjetas con los números: 16, 18, 21, 24, 32, 37, 43, 49, 51, 54, 64, 68, 72, 77, 85, 89, 93, 96, un mazo por equipo.
- Hoja de trabajo 1, una por alumno.

Desarrollo

<u>Actividad 1</u> (15 minutos, equipos)

-La maestra inicia explicándoles qué son los números redondos (son los que terminan en cero) y pide a los niños ejemplos de números redondos (10 al 100).

-Luego explica las reglas de la actividad y entrega las tarjetas:

- Se juega en equipos de 3 ó 4 jugadores.
- Se arma un mazo con las tarjetas de números mayores que 10 y se coloca boca abajo.
- Cada niño recibe un mazo de tarjetas del 1 al 9. Los juntan en un solo mazo del que se reparten 3 tarjetas para cada uno. Las tarjetas que sobren se apilan y se ponen al centro de la mesa (mazo de números del 1 al 9).
- Un jugador da vuelta a una de las tarjetas con números mayores que 10. Si puede armar un número redondo *sumando* o *restando* una de sus 3 tarjetas al número que le salió, se queda con ambas tarjetas y las guarda a un costado (por ejemplo, para el número 43 puede sumar un 7 y armar 50, o restar un 3 y armar 40).
  Si no le sirve ninguna de sus tarjetas, roba una del mazo (del 1 al 9). Si esa tarjeta tampoco le sirve, la devuelve al mazo y pasa el turno al siguiente jugador.
- El otro jugador puede usar la tarjeta que no le sirvió a su otro compañero (por ejemplo, el 43, considerando que ya la vio) o dar vuelta a una nueva.
- Gana el jugador que se queda sin tarjetas en la mano.
- Se juegan dos rondas.

<u>Actividad 2</u> (10 minutos, individual y grupal)

-La maestra entrega la HT1 y pide que resuelvan individualmente el ejercicio 1.

---

[38] Parra, C. y Saiz, I. (2013). *Hacer matemáticas 2: nueva edición.* Ficha 17. Armar números redondos Boulogne: Estrada. pp.20-21.

Armar números redondos

1. Los chicos de segundo jugaron varias veces a armar números redondos. En cada cuadro aparecen las tarjetas que les tocaron durante el juego.

- **Encierra el número (o los números) que te ayuden a armar un número redondo.**

Número	Tarjetas del 1 al 9
$\boxed{43}$	4 7 3
$\boxed{89}$	1 4 5
$\boxed{65}$	3 6 5

Número	Tarjetas del 1 al 9
$\boxed{16}$	3 9 6
$\boxed{72}$	8 2 5
$\boxed{77}$	6 4 8

- **Compara tus respuestas con tus compañeros.**

-Se revisan grupalmente las respuestas.[39]

Actividad 3 (15 minutos, individual)

-Se indica a los alumnos que contesten individualmente los ejercicios 2 y 3. Si es necesario se da un ejemplo en cada uno.

2. Escribe cuánto hay que sumar o restar para llegar a un número redondo.

32 + ______ = 40 73 + ______ = 80 95 - ______ = 90

69 - ______ = 60 81 + ______ = 90 66 + ______ = 70

3. Escribe los números redondos entre los que se encuentra cada número.

______ 57 _______ ______ 85 _______

______ 34 _______ ______ 76 _______

-Puesta en común[40] del ejercicio 2: La maestra anota cada operación en el pizarrón y pide que algún voluntario pase a explicar cómo le hizo. También pregunta si alguien encontró otro procedimiento distinto, de ser así, se escribe y se comenta.

-El ejercicio 3 se revisa grupalmente[41] con la participación de algunos niños.

---

39 Considerando que esta actividad es una ejercitación (pues es similar a lo que los alumnos realizaron en el juego), se sugiere que sólo se revisen las respuestas en el pizarrón de manera grupal. Sin embargo, si los alumnos mostraran tener dificultades con algunos números sí podría extenderse la explicación.

40 La puesta en común hace referencia a un intercambio con los alumnos más amplio que la revisión grupal, tomando en cuenta los procedimientos que utilizaron para resolver algún cálculo. Asimismo, la maestra puede animarlos a explicar de manera más amplia lo que hicieron mediante preguntas, ejemplos, etc.

41 Creemos que también se puede revisar de manera breve, haciendo énfasis en que un número tiene una decena anterior y una decena posterior.

Anexo 4

Ficha para la maestra, segundo ejemplo

Situación. Pensar los cálculos[42]

Propósito

- Utilizar descomposiciones aditivas para facilitar los cálculos.

Material

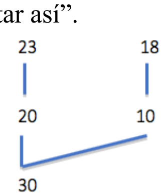
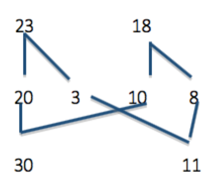
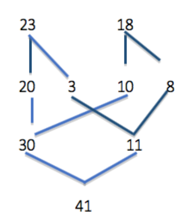
- Hoja de trabajo.

Desarrollo

Actividad 1 (10 min, individual)

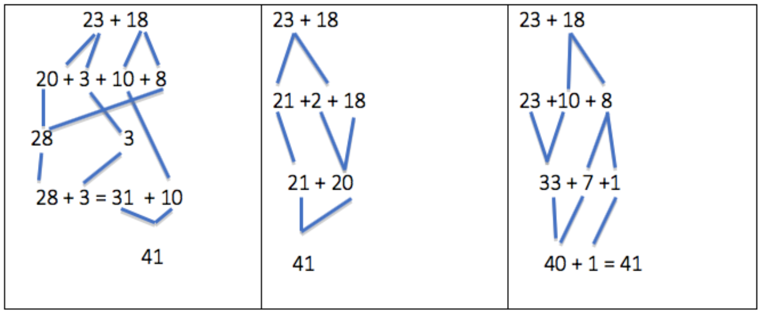
1. La maestra inicia diciéndoles: “voy a poner una suma en el pizarrón, resuélvanla mentalmente. Luego les voy a preguntar cómo le hicieron”. Anota la siguiente suma en el pizarrón, de manera horizontal: 23 + 18 =
2. La maestra da un momento para que piensen y resuelvan la operación.
3. Puesta en común: La maestra pregunta a dos o tres niños: ¿Cómo le hiciste? De acuerdo a lo que los alumnos vayan platicando la maestra anotará los procedimientos en el pizarrón y ayudará, de ser necesario, a explicarlos.

   -Si un alumno sumó, por ejemplo, 20 + 10 y 3 + 8, él puede no estar aún muy consciente de que “descompuso” 23 en 23+10 y 18 en 10+8. Entonces es la maestra quien explica, a la vez que anota:

<table>
<tr>
<td>“Su compañero tomó el 20 de 23 para sumarlo con el 10 del 18 y obtuvo 30. Eso lo podemos anotar así”.
</td>
<td>Luego tomó el 3 de 23 y el 8 de 18, los sumó y obtuvo 11:
</td>
<td>Y finalmente sumó 30 más 11:
</td>
</tr>
</table>

4. Si los niños no proponen más procedimientos, la maestra puede decirles que ella resolvió la suma de otra manera, puede mostrar alguna de las siguientes. Por ejemplo:

[42] Parra, C. y Saiz, I. (1998) *Hacer matemáticas 2*. Ficha 27. Pensar los cálculos. Boulogne: Editorial Estrada. p. 47.



Aclaración: No es indispensable explicar a los niños con apoyo de estos esquemas.

5. La maestra puede comentar que las distintas maneras de sumar permiten llegar al mismo resultado. Por ejemplo: "Fíjense que su primer compañero descompuso el 23 en 20 y 3, y el 18 en 10 y 8, luego sumó 20 + 10 y 3+8. Luego sumó 30 + 11. ¿Les parece más fácil sumar 30 + 11? En cambio, su segundo compañero sumó 23 con 10, y le dio 33, luego a 33 le agregó 8. ¿Se fijan que les dio el mismo resultado?

<u>Actividad 2</u> (20 min, equipos de 3)

1. La maestra organiza equipos de dos o tres niños y anota la siguiente suma en el pizarrón 87+25=
2. La consigna será: "Encuentren, al menos, dos maneras diferentes de resolver la suma".
3. La maestra da tiempo para que los niños escriban y comenten sus procedimientos.
4. Puesta en común: Compartir procedimientos (anotar las resoluciones en el pizarrón).
5. Al terminar, pide que observen los distintos procedimientos y pregunta: ¿Cuántos procedimientos distintos tenemos? ¿cuál procedimiento les pareció más fácil? ¿por qué?
6. La maestra vuelve a hacer énfasis en que hay diferentes modos de resolver una misma suma. Mediante diversas preguntas (similares a las de la actividad 1) buscará que los niños noten que hay modos más largos o más cortos pero que mientras resulten fáciles y comprensibles para ellos está bien.

<u>Actividad 3</u> (individual, 10 minutos)

1. La maestra entrega la hoja de trabajo y pide que la contesten individualmente.
2. Se invita a que dos o tres niños pasen a explicar cómo le hicieron.

Resuelve los siguientes cálculos usando las ideas que te parecieron mejores:

35 + 9=

68 + 8=

46 + 6=

Aclaración: La puesta en común podría hacerse al inicio de la siguiente sesión. Así, habría tiempo de revisar todas las hojas y escoger algunos procedimientos para la revisión grupal.

Referencias bibliográficas

Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (editor). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Revisado 31 de agosto de 2015. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Askew, M. y Ebbutt, S. (2000). *The Numeracy File*. England: Drakeford Press.

Askew, M. (2004). El CM, piedra angular del aprendizaje matemático inicial. *Revista de Educación*, Ministerio de Educación de Chile, 23-25.

Ávila, A. (2001, diciembre). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Revista Educación matemática*, 13 (3), 5-21.

Ávila, A. (2005). El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo *Revista Latinoamericana de Estudios Educativo*s (México), vol. XXXV, núm. 3-4, 3er-4to trimestres, 2005, pp. 179-219 Centro de Estudios Educativos, A.C. Distrito Federal, México. Revisado el 14 de septiembre de 2017. Tomado de http://www.redalyc.org/pdf/270/27035406.pdf

Block, D. (1996, septiembre/octubre). Juegos para el aprendizaje en la primaria. *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, 13 (3), 6-17.

Block, D. (1991, mayo/junio). Validación empírica del conocimiento en clase de matemáticas en la primaria. *Cero en conducta*, 6 (25), 4-9.

Block, D. y Dávila, M. (1993). La matemática expulsada de la escuela. *Educación Matemática*, 5 (3), 39-58.

Block, D. (coord), Balbuena, H., Dávila, M., Moreno, E., García, V. y Shulmaister, M. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera Parte.* México: Programa Nacional de Actualización Permanente, SEP.

Block, D., y Álvarez Icaza, A. M. (1999). Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática*, 11 (1), 57-76.

Block, D. (2001). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico (Tesis Doctoral). Centro de Investigación y de Estudios

Avanzados (CINVESTAV), Departamento de Investigaciones Educativas (DIE), México.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M. y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12 (33), 731-762.

Brousseau, G. y Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l´enseignant. En *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol. 11/2.3, pp. 167-210, Grenoble: La Pensée Sauvage

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*. París: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G y Warfierl, V. (1999). El caso de Gael: El estudio de un niño con dificultades matemáticas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18 (1). Traducción de José Muñoz Delgado.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Butlen, D. (1996). *Dos ejemplos de situaciones de enseñanza de la matemática dirigida a alumnos con dificultades.* Documentos para la formación de profesores de escuela en didáctica de la matemática, COPIRELEM tomo V, IREM Paris-VII, 1996. Revisado el 18 de agosto de 2017. Tomado de https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:GN2lrbnFkTcJ:https://campus.fahce.unlp.edu.ar/pluginfile.php%3Ffile%3D%252F137120%252Fmod_folder%252Fcontent%252F0%252FButlen.pdf%26forcedownload%3D1+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=mx

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre le sens y la technique.* Besancon: Presses universitaires de Franche-Comté.

Charlot, (1986, marzo) (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas.* Traducción en versión mimeo de la conferencia conferencia dictada en Cannes, marzo 1986. Publicada en Bkouche, R Charlot, B.; Rouche, N.: Faire des mathematiques: le plaisir du sens. Paris, Armand Colin. Revisado el Tomado de: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/epistemologia_charlot.pdf

Coll, C., Solé, I. (1989). Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica, en Reforma y curriculum. *Cuadernos de Pedagogía* No. 168. España: Fontalba, 78-81.

Conne, F. (1987). *Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire: Des dénombrements à la division euclidienne* - Activités numériques élémentaires à l'école primaire - ÉPISODE 1. Math-Ecole, pp. 2-12.

Revisado el 22 de julio de 2017. Tomado de: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01027537v2/document

Ferreiro et. al (1983). Los adultos no alfabetizados y sus conceptualizaciones del sistema de escritura. Cuaderno DIE N° 10. México DF, DIE - CINVESTAV.

Fregona, D., Orús Baguena, P. (2011) *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S. y Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (1). Revisado el 11 de diciembre de 2015. Tomado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000100002

García, S. (2014) *Sentido numérico*. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México: INNE.

Kamii, C. (1985) *El niño reinventa la aritmética*. España: Visor.

Lerner, D., Sadovsky, P. y Wolman, S. (1994). *El sistema de numeración: un problema didáctico*. En Saiz I. y Parra, C. (Comps.) Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós.

Lerner, Delia (2005). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. En M. Alvarado y B. Brizuela (comp.) *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. (pp. 147-197). México: Paidós.

Mendoza, T. (2007) *Estudio didáctico de la noción de porcentaje.* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), Departamento de Investigaciones Educativas (DIE), México.

Ortega, T. y Ortiz M. (2006, marzo). Jerarquía holística de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas de cálculo mental. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 24, nº1.

Parra, C. (1994). *Cálculo mental en la escuela primaria*. En Parra, C. y Saiz. I. (coords.). (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 219-272). Argentina: Paidós Educador.

Parra, C. y Saiz, I. (1998). *Hacer matemáticas 2.* Boulogne: Estrada.

Parra, C. y Saiz, I. (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio.* Argentina: Homo Sapiens.

Parra, C. y Saiz, I. (2013). *Hacer matemáticas 2: nueva edición.* Boulogne: Estrada.

Perrin-Glorian, M. J. (2009). La ingeniería didáctica como interfaz de la investigación con la enseñanza. Desarrollo de recursos y formación de profesores. En En amont et en aval des ingénieries didactiques. 15ª École d´été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand, Francia. 16-23 de agosto, 2009. Traducción: Margarita Ramírez y David Block.

Perrin-Glorian, M. J. (s/f) Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu. Structuration du milieu pour l'élève et pour le maître. Université Paris 7 et IUFM Nord-Pas-deCalais, Université d'Artois.

Ramírez, L. y Block, D. (2006). *Análisis de situaciones didácticas para el aprendizaje del número en preescolar* (Documentos DIE no. 59). México D.F.: CINVESTAV-Sede Sur, 9-24.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré): une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 27(3), 183–216.

Sadovsky, P., Quaranta, M. E., Itzcovich, H., Becerril, M. M. y García, P. (2015, abril). La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su confijguración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes. *Educación Matemática*, 27 (1).

Saiz, I. (1995). ¿Confrontación o corrección? *Revista La educación en nuestras manos*, Suteba. Año 4, Número 32.

Sensevy, G. (1996). *El tiempo didáctico y la duración [de este tiempo] en el alumno. Estudio de un caso en el curso intermedio. El diario de las fracciones.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 16 (1), 7-46. Traducción realizada por Alejandra Ávalos y Margarita Ramírez.

Secretaria de Educación Publica (SEP). (1972). Matemáticas. Segundo Grado. México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Secretaria de Educación Publica. (2011). Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Segundo grado. México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Secretaria de Educación Publica. (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación Primaria. 2º. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

The Qualifications and Curriculum Authority (QCA). Guarding standards. (1999). *The National Numeracy Strategy. Teaching mental calculation strategies. Guidance for teachers at key stages 1 and 2.* QCA: Great Britain.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Weiss, E. (Coord), Block, D., Civera, A. y Dávalos, A. (2017). Evaluación de medio camino: Estudio de las prácticas de docentes de primaria y secundaria. Informe final. Volúmenes I y II (Proyecto financiado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación –INEE-). Documento interno.

Wolman, S. (2010). La escritura en los procedimientos de resolución de problemas de suma y resta: un proceso constructivo. *Revista del IICE* (Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación) 17, (28).

Wolman, S. (s/f) La enseñanza del sistema de numeración en los primeros grados. www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca...descarga...id.

Wolman, S. (1999, agosto). Los algoritmos de suma y resta: ¿por qué favorecer desde la escuela los procedimientos infantiles? *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, 8 (14).

Wolman, S. (2002). *Las intervenciones docentes y su incidencia en la adquisición y el progreso de procedimientos numéricos no convencionales empleados por los niños en la resolución de situaciones suma y resta en primer grado.* (Tesis de Maestría). Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía, Argentina.