CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SEDE SUR

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

“La probabilidad como lugar de encuentro de razones, fracciones y decimales. Un estudio didáctico en primer grado de nivel secundaria”

Tesis que presenta

Juan José Sosa Maidana

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Investigaciones Educativas

Director de la Tesis:
Dr. David Francisco Block Sevilla

Ciudad de México, México SEPTIEMBRE, 2018

PARA LA ELABORACIÓN DE ESTA TESIS, SE CONTÓ CON EL APOYO DE UNA BECA CONACYT.

A mis hermanos Gustavo y Natalia

A mi compañero de ruta José Luis

A la memoria de mis padres

AGRADECIMIENTOS

A David Block, por el compromiso en la dirección de este trabajo. Gracias por las lecturas rigurosas, el acompañamiento, por las sugerencias, la escucha, las explicaciones, la pasión y generosidad en todo este trayecto. Gracias por aceptar ser mi maestro.

A Irma Fuenlabrada, por sus cuidadosas lecturas y enriquecedores y atinados comentarios.

A Irma Saiz, por su acompañamiento a distancia, su lectura rigurosa, siempre acertiva y muy presente en mi formación académica.

A Laura Reséndiz por su gran apoyo en el trabajo de campo, por su calidez humana y su contención en los momentos difíciles.

A Evelyn Caballero, por su acompañamiento en el trabajo de campo y recolección de datos.

A Sandra Karina Giménez por su esfuerzo, compromiso, y comentarios enriquecedores.

Agradezco a todos y cada uno de los Maestros del seminario de didáctica de las matemáticas que me acompañaron en este viaje: Margarita Ramírez, Laura Reséndiz, Apolo Castañeda, Alejandra Avalos Rogel, Aldo Escamilla Jardón, Tatiana Mendoza, Javier Zariñán, Ligia Ramírez, Horacio Sostenes, Alam Valdez, Evelyn Caballero.

A Edith Gorostegui y Diego Vilotta, por sus mensajes de apoyo, generosidad, fuerza y pasión, siempre presentes en mi formación.

A los Maestros del DIE, por su compromiso, paciencia y pasión en la formación de investigadores educativos. Agradezco a Alicia Civera, Daniel Hernández Rosete, Eugenia Roldán, María de Ibarrola, Ariadna Acevedo, Iliana Reyes, Rosa Nidia Buenfil, Judith Kalman, Emilia Ferreiro, Inés Dussel, Elsie Rockwell, Rosalva Ramírez, Silvie Didou, Eduardo Weiss, Germán Alvarez, Alma Maldonado y Gabriel Maya.

A los compañeros de generación, por su amistad, y por compartir conocimientos y experiencias, y momentos inolvidables. A Aldo Escamilla Jardón, Jairo Iván Auli Silva, Juan Carlos Gomez Palacios, por su apoyo y palabras de aliento en todo este camino.

A los compañeros de sala de cómputos, Fernando Pérez Santiago, Esmeralda Dionicio, Roberto Méndez, Mónica Lopez Rivas, Ivett Estrada, Juan Páez Cardenas, Rocio Estrada, Julia Gonzalez y Margarita Pérez, por compartir momentos de trabajo, cafés y lecturas.

A Maribel Guevara y Maria Elena Maruri, por su calidez humana, paciencia y apoyo en los procesos administrativos.

RESUMEN

La investigación didáctica que reportaré en esta tesis se centra en la noción de probabilidad en las clases de matemáticas escolares, en el primer grado de nivel secundaria. Dicha noción es considerada como lugar de encuentro de nociones básicas de este nivel escolar: las razones, fracciones y decimales. La investigación focaliza las interacciones de los alumnos y el docente, alrededor de un medio (Brousseau, 1989).

La metodología consiste en el diseño de una ingeniería didáctica (Artigue, 1995), que incluye las siguientes dimensiones: la construcción de un marco epistemológico de referencia, integrado por la problemática conceptual de la probabilidad y apoyado en una revisión de la literatura sobre la didáctica de la estadística y la probabilidad; una revisión de los programas de estudio de primaria y de secundaria de México , el diseño y la adaptación de situaciones didácticas, su implementación en el aula y, finalmente el análisis de la misma.

El propósito de la investigación es identificar el papel de la noción de razón en el desarrollo de razonamientos probabilísticos por alumnos de primer grado de secundaria.

ABSTRACT

My research includes the notion of probability in mathematic didactics as main subject. Considering seventh grade mathematics as a merging point where ratios, fractions and decimals approaches come into contact, I have selected the aforementioned as my focus group. Hence, my research focuses on interactions between students and teacher, in relation to a milieu (Brousseau, 1989).

I follow a didactic engineering design (Artigue, 1995) which is constituted by three main points: the construction of an epistemological framework (a conceptual problematization of probability; a bibliographic review on the didactics of statistics and probability); the revision of mathematics programs up to the ninth grade; and finally, the designing, customizing and implementing of sequence of didactic situations performed in the classroom focus group.

Thus, the main purpose of this research is to identify the notion of ratio and its role in the development of probabilistic reasoning by seventh grade students.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

1. Antecedentes y Propósitos

En México, desde la reforma de los años 70', así como en otros países, existe una creciente incorporación de temas relacionados a la Estadística y la Probabilidad al currículo de Matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria, debido al uso frecuente de datos y conceptos estadísticos en la vida cotidiana, y en otras disciplinas que debe cursar el alumno, así como a la necesidad de un conocimiento básico de estadística en numerosas profesiones y a su papel en el desarrollo de un razonamiento crítico (Batanero, 2000).

También en las últimas décadas se han desarrollado diversos enfoques acerca de la enseñanza de la Estadística que buscan promover la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadísticos (Ben-Zvi y Garfield; 2004), y la formación de un ciudadano "estadísticamente culto" o "alfabetizado estadísticamente" (Gal, 2004). Estos estudios incluyen a la probabilidad como parte fundamental de la construcción del sentido estadístico (Batanero 2013, Burrill y Biehler, 2011).

Frente a las dificultades que se presentaron a educadores, estadísticos y matemáticos, se fueron creando –a partir del 1999- grupos de trabajo internacionales, como es el caso del SRTL (Statistical Reasoning, Thinking and Literacy), el GILEE (Grupo de Investigación Latinoamericano de Educación Estadística) y la RELIEE (Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística), pensados para fomentar investigaciones que den respuestas a los problemas que se presentan en los procesos de enseñanza y los de aprendizaje de la disciplina.

También se han presentado trabajos de investigación en el curso de la XII Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas (Mercier y Margolinas, 2003) que abordan los problemas detectados en el proceso de enseñanza desde la escuela francesa: la dimensión epistemológica de la Estadística (Pressiat, 2003), las situaciones fundamentales y procesos genéticos de las estadísticas y las probabilidades (Brousseau, 2003) y la enseñanza de la Estadística en el secundario (Chevallard y Wozniak, 2003).

El estudio didáctico se fundamenta en numerosos trabajos, que iré haciendo referencia a ellos más adelante, donde han puesto una particular atención en abordar, tanto desde la perspectiva del desarrollo cognitivo como de la didáctica, y del campo relativamente nuevo de la educación estocástica, los problemas que se presentan en los procesos de enseñanza y los de aprendizaje de la probabilidad y la estadística, así como las fracciones, proporcionalidad y las razones.

Una de mis fuentes principales en esta tesis es un estudio experimental dirigido por Brousseau (1972-1974), con 17 alumnos de la escuela primaria Jules Michelet de Talence (Burdeos), en nivel CM2, y en el marco del COREM[1]. El estudio, que consta de 35 sesiones, fue difundido por primera vez en 1976, y publicado en el Journal of Mathematical Behavior 20 (2002) 363-411 y presentado en el curso de la XII Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas, en 2003.

Asimismo, pretendo realizar aportes a investigaciones desarrolladas por Block (2001) acerca de la noción de razón, en el cual señala la necesidad de realizar estudios centrados en el tratamiento de la información y la probabilidad, que constituyen otros dos ámbitos característicos de la noción de razón. Estos estudios son centrales para la presente investigación.

En este vasto campo, elegí estudiar la noción de probabilidad desde una perspectiva didáctica, porque por una parte, aborda un tipo de fenómenos que me interesan especialmente: los aleatorios, y por otra parte, se los modeliza (y presenta) mediante una expresión fraccionaria, y se la interpreta además bajo expresiones decimales o porcentuales (en particular los casos discretos). Cabe destacar que estas nociones forman parte de una agenda de investigación actual en este Departamento de Investigaciones Educativas (DIE).

Así, en el presente trabajo estudio las condiciones didácticas que podrían dar lugar en el aula a la construcción de la noción de probabilidad (frecuencial o clásica), enfocando de manera más específica sus vínculos con las nociones de razón, fracción, decimal y porcentaje.

2. Metodología de esta investigación

La metodología de investigación que utilicé en el presente estudio fue la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), que consiste en poner a prueba un conjunto de hipótesis acerca del proceso de aprendizaje y de enseñanza de la noción de probabilidad en un contexto escolar. Esta metodología incluyó:

[1] Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques.

- La construcción de un Marco Epistemológico de Referencia[2] (MER); en el cual se problematiza el concepto de probabilidad, su relación con las estadísticas, y algunas de sus interpretaciones en el nivel de la escolaridad básica. Esto me condujo, por una parte, a visitar estudios pioneros y ejemplares como el de *"Las botellas de Brousseau"*, así como conceptos fundamentales de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Capitulo 1), de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y de la Educación Estocástica. Por otra parte, incluí en este marco la problemática didáctico-matemática de la probabilidad y su encuentro con las razones, las fracciones, los decimales y los porcentajes. (Capitulo 2)
- Una revisión curricular de programas y de algunos libros de texto.
- El análisis a priori, el cual constituye, después del MER, un segundo elemento fundamental de esta metodología. Este análisis consta de la selección, diseño y reformulación de problemas matemáticos para los fines de la experimentación, así como de su fundamentación. Estos análisis me llevaron a construir una secuencia de *problemas* matemáticos de la noción de probabilidad vinculada a la idea de frecuencia relativa. Luego, transformé dichos problemas en una secuencia de *situaciones* didácticas, pensada como una guía para su gestión en el aula. Di a esta guía la forma de fichas para el docente, con orientaciones acerca de los materiales, duración de los tiempos, momentos de presentación de los problemas de forma colectiva, de trabajo en equipos, de puestas en común, de debates, de validación, de institucionalizaciones, y de cierres. (Capítulo 3)
- La experimentación de la secuencia de situaciones diseñada. Se desarrolló en un aula de primer grado, con 43 alumnos de una escuela secundaria en el barrio de Lindavista, Ciudad de México. Sostuve previamente una reunión con la profesora que conduciría las clases.

[2] Noción de la Teoría Antropológica de lo Didáctico: "La formulación de un problema didáctico (en el sentido de problema de investigación en didáctica de las matemáticas) involucra siempre, de manera más o menos explícita, una interpretación del ámbito de la actividad matemática que está en juego. Así, cuando en el enunciado de un problema didáctico se habla de la enseñanza o el aprendizaje del *concepto de derivada*, de la *geometría analítica* o de los *sistemas de numeración*, se está sustentando inevitablemente una interpretación (un modelo, aunque sea muy impreciso) de la actividad matemática que acompaña a dicha noción o ámbito de la matemática escolar en la institución en cuestión. En la TAD, postulamos que la explicitación de dicho modelo es imprescindible para poder formular el problema didáctico como un auténtico problema científico. La citada explicitación constituye el núcleo de la respuesta que proponemos en cada caso a una dimensión básica del problema didáctico que denominamos "dimensión epistemológica del problema" (Gascón, 2011) y se materializa en un *modelo epistemológico de referencia* (o, abreviadamente, MER)." (Gascón, Fonseca, Oliveira, 2013, p.3)

- Asimismo, presenté la secuencia a los integrantes del Seminario de Didáctica de las Matemáticas del DIE, de quienes recibí una retroalimentación que me permitió hacer ajustes.
- Para la observación de las clases, conté con la participación de tres miembros del Seminario (incluyendo la de mi asesor), dos de ellos tomaron notas a mano y grabaron con audio, y una se hizo cargo de la videograbación. Así, en total fue posible dar seguimiento a cuatro equipos de alumnos en cada sesión.
- Posteriormente, con las informaciones recolectadas, se seleccionaron episodios que se transformaron en registros escritos. Estos fueron analizados y contrastados con los análisis previos, dotando así de validación interna al estudio didáctico (Capitulo 4). Para finalizar, se realizó un análisis global de todo el proceso de investigación, destacando los aspectos que consideramos relevantes desde las perspectivas didácticas y las hipótesis que explicitamos (Capitulo 5).

CAPÍTULO 1. LA TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

En este capítulo me interesa desarrollar un primer trazo de un marco epistemológico que sea útil para analizar los significados que podrían emerger en las interacciones de distintos tipos que se producen en el aula, a propósito de un saber: la probabilidad clásica y la frecuencial.

Se inicia con el desarrollo de conceptos fundamentales de la Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada por G. Brousseau y denominada por Sensevy (2011) como una "Revolución Brousseauniana" por el modo de abordar y redefinir ciertos asuntos que son relevantes en los procesos de enseñanza y los de aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

La centralidad de la noción de funcionalidad matemática, rica y controlada en el aula, el asunto espinoso de la reproductibilidad de las experiencias, las interacciones que se producen en el aula, con los alumnos, y el maestro y un medio, la adidacticidad de las situaciones, la devolución e institucionalización, el contrato y las situaciones fundamentales, son parte de este marco desde el cual se aborda este estudio.

En el segundo trazo que desarrollaré en el capítulo 2, precisaré las actividades de los estadísticos: sus tareas, técnicas, tecnologías y estrategias, que nos dará marco para pensar en elementos de una situación fundamental, y la relación entre las estadísticas con las probabilidades. En este contexto, describiré brevemente un dispositivo experimental desarrollado por Brousseau a inicios de 1970 con alumnos de una escuela primaria. Luego, como parte de nuestro marco epistemológico desarrollaré algunas ideas de un campo relativamente nuevo de la Educación Estocástica. Finalmente abordaré la problemática conceptual de la probabilidad y las relaciones con las razones, las fracciones, los decimales, y porcentajes.

1.1 La didáctica de la estadística y probabilidad entre las obras de Brousseau

G. Brousseau había iniciado su carrera profesional como maestro de escuela unitaria y más tarde doctorado en ciencias de la Universidad de Burdeos. A partir de 1970, realiza contribuciones teóricas a partir de experimentaciones de dispositivos didácticos, que constituirán la Teoría de las Situaciones Didácticas. En su trabajo como investigador en el IREM[3] de Burdeos, propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los

[3] Los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) fueron creados en Francia luego de la Reforma Educativa de fines de los años 60, con la que se impulsó la enseñanza de la "Matemática

conocimientos y donde el control de estas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar.

Recientemente, G. Sensevy (2011) ha presentado ciertos elementos de la obra de G. Brousseau, y describe el progreso esencial que ha logrado en la Investigación Educativa y particularmente en la Didáctica de las Matemáticas, en términos de "Revolución Adidáctica, Epistemológica, y Praxeológica". En una de las citas que retoma de Brousseau, enmarca un trabajo de primera experiencia de enseñanza de las estadísticas y las probabilidades, como un dispositivo de un conjunto amplio y sistemático de estudios de las condiciones didácticas en contexto escolar.

> *"Hay quienes probablemente no notarán que nosotros hemos diseñado y experimentado numerosos dispositivos didácticos originales para enseñar de manera "funcional" y no formal las nociones matemáticas básicas a los niños reales en clases ordinarias: los números y la numeración, el cálculo elemental, la medida de magnitudes, las estructuras numéricas elementales, los conocimientos espaciales… Hemos agregado las nociones de estadística, lógica, teoría de funciones e incluso de topología sin buscar jamás hacer "arranques de bravura" injustificados. Estos dispositivos han sido experimentados y reproducidos bajo control durante años". (Brousseau, 2011, p.102, tomado de Sensevy, 2011, p.295)*

Dos aspectos que se desprenden de esta cita, que retomará Sensevy (2011), son por un lado el asunto de la reproductibilidad de las experiencias y por otro lado, el paso de la noción de problema a la de situación como un instrumento fundamental para dotar de funcionalidad matemática y practica a los conceptos matemáticos.

> *"La primera condición era lograr que los conceptos que queremos enseñar tuvieran una función matemática y práctica rica y controlada.*
> *Volver funcional una noción matemática es dotarla de un rol visible en una decisión crítica específica. No es suficiente que (la noción) sea "lógica" o incluso razonable, o que se derive de lo que ya se sabe. Es necesario que sea pertinente, adecuada, oportuna, eficaz, económica. Para que la noción sea el fruto de una actividad matemática, se necesita también que las alternativas plausibles le sean oponibles y que su elección sea el resultado de una anticipación posible. Las condiciones elegidas para presidir su aparición deben dejar entrever rápidamente el interés de identificar la causa de la riqueza del campo en el que promete ser útil… (Brousseau, 2011, p. 102, Sensevy, p. 296)*[4]

Moderna". Inicialmente se dedicaron a complementar la formación matemática de los maestros, en los programas y la preparación de los nuevos maestros en las escuelas normales. Otro ámbito importante fue la producción de materiales de apoyo: texto de matemáticas, fichas de trabajo para los alumnos, juegos y juguetes didácticos, colecciones de problemas y ejercicios, etc. La producción de estos materiales solía acompañarse de una experimentación rudimentaria, concebida como prueba de su factibilidad y como antecedente para introducir ajustes mínimos, antes de proceder a su difusión dentro del sistema educativo, urgentemente requerida. A partir de la reflexión sobre su validez, en los propios IREM fue surgiendo otra clase de actividades, destinadas ya no a la producción de medios para actuar sobre la enseñanza, sino a la producción de conocimientos para controlar y producir tales acciones sobre la enseñanza. (Gálvez, G. 1985)

[4] Las citas de G. Sensevy (2011), fueron traducidas para uso interno, por los integrantes del Seminario de Didáctica de las Matemáticas del DIE.

A partir de esta cita, Sensevy (2011) enfatiza esta condición “funcional” como el desplazamiento fundamental que se encuentra en el origen de lo que ha llamado la “Revolución Brousseauniana”. Los principios implican dos nociones esenciales: una poiética epistémica (es decir las propiedades específicas de la noción matemática que le permite ser una ganadora del juego que va a modelizar en una situación), y la segunda se refiere a lo que podría llamarse una ecología epistémica (es decir la relación de esta noción con otras que pueden ser estrategias ganadoras para otros juegos de otras situaciones más o menos cercanas).

Para Brousseau (2011, p.102) existe una segunda condición fundamental para la reproducción de experiencias:

> *“La segunda condición concierne a la epistemología y la didáctica utilizadas. Nuestros resultados, positivos durante 25 años, han mostrado que las limitaciones residen mucho menos en las capacidades de los niños que en la cultura didáctica de nuestra sociedad, totalmente inadaptada a sus ambiciones educativas y sociales. Desarrollar una cultura apropiada, con bases científicas, institucionales y con el enraizamiento necesario en los conceptos educativos de la población será una obra de largo aliento”. (Brousseau, 2011, p. 102, Sensevy, 298)*

Esta segunda condición de reproductibilidad aborda la noción de cultura didáctica de una sociedad. Deja ver el asunto espinoso que implica pensar en la posibilidad de reproducir de la misma manera los dispositivos didácticos pensados en otros tiempos y espacios. Lleva a repensar en la complejidad de las condiciones en las que se desarrollan las prácticas de enseñanza, sometidos muchas veces a restricciones socioculturales, históricas, económicas, políticas, de formación docente, etc.

Por otra parte, asumo que las secuencias no se reproducen tal cual, pues considero que es imposible debido a los múltiples factores que afectan el desarrollo de una clase (experiencia docente, la cultura matemática que se crea y recrea en la clase, los significados compartidos entre alumnos y docente y la memoria didáctica de la clase, etc.) Sin embargo considero también que sí aportan lineamientos básicos (las propiedades matemáticas del objeto, las principales características de las situaciones que lo ponen en juego de determinada manera). Qué aspectos de las secuencia planeada se conservan en la implementación y cuáles se trasforman, y porqué, es una parte importante del análisis que pretendo realizar.

Veremos en el apartado siguiente el desplazamiento fundamental de la noción de problema a la situación.

1.2 Situación didáctica

Una aportación de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar es la inclusión, en el clásico triángulo didáctico "*maestro, alumno, saber*", de un cuarto elemento: el *medio ("milieu")*. El medio se define como el objeto de la interacción de los alumnos: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. En una acepción un poco más amplia, el medio al que el alumno se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la consigna que él da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los alumnos y que mediante mecanismos diversos transmite (Block, 2001).

La situación didáctica se define entonces como un sistema de interacciones entre: los alumnos, el medio (y el maestro), el saber:

> *Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable (Brousseau, 2000:10, tomado de Block (2001))*

Asimismo Kuzniak (2005) enfatiza la importancia de esta noción como el corazón de la teoría desarrollada por Brousseau, y esquematiza su funcionamiento:

> *"Brousseau reorganiza las miradas sobre el sistema educativo para privilegiar la acción del alumno, el profesor tiene la tarea esencial de establecer las condiciones que sean más favorables para poner en acción al alumno.*
> *La situación didáctica engloba todo el entorno del alumno y en particular el maestro. La parte adidáctica de la situación (designada con el nombre de situación adidáctica) es la parte que el profesor delega (devuelve) al alumno. Este último puede interactuar con un milieu casi no didáctico, donde puede y debe ignorar las intenciones didácticas del profesor". (p.27)*

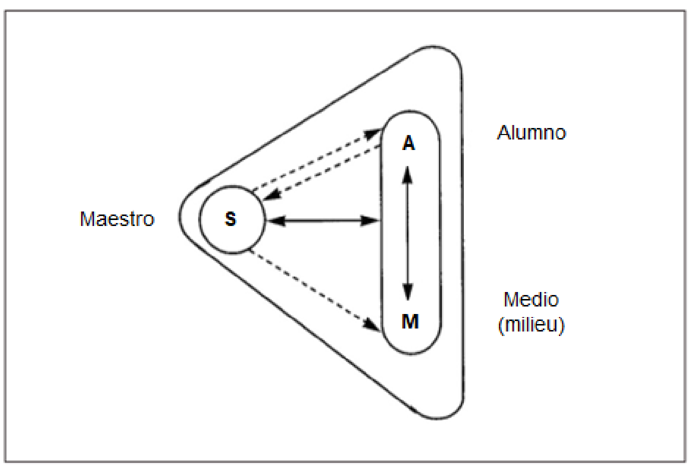


Figura 1. Cuadro de la situación didáctica.

En el seno de las situaciones representadas en el esquema anterior, se genera el proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase a partir de dos tipos de interacciones básicas Sadovsky (2005), por un lado la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego (medio en un sentido antagónico), y por otra parte la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con el problema matemático.

Sensevy (2011), expresa que la propuesta de pasar de la noción de problema a la de situación[5] significa darse cuenta que hay una distancia entre la producción de primera mano del conocimiento por los matemáticos y lo que puede propiciarse con un problema matemático tal como se establece en libros de texto. Considerar únicamente el problema excluye otras condiciones que son relevantes para la producción del conocimiento, como lo es la actividad matemática. Asimismo afirma que una situación es, a diferencia de un simple problema escolar, una modelización de un sistema de condiciones a partir del cual se ha constituido un concepto matemático.

> *"Al comparar la resolución de problemas con la historia de los conceptos matemáticos, parece que las condiciones que desaparecen del enunciado final juegan un papel esencial. Estas condiciones pueden ser consideradas como sistemas que pueden ser modelados por "situaciones". Así, cada concepto puede estar asociado con condiciones en las que un ser humano es llevado a producir, como respuesta, un comportamiento específico que atestigua un conocimiento del concepto inicial. La noción de "situación"… amplía así la noción de "problema" e introduce parámetros distintos de la validez lógica". (Brousseau, 2009, tomado de Sensevy, 2011, p. 299)*

Retoma Sensevy (2011) que estas situaciones, dichas por Brousseau (2011, p.101) implican:

> *"Conducir a los agentes en interacción para manifestar el conocimiento". Estas situaciones pueden ser matemáticas (epistémicas), "donde no se prevé ninguna intervención didáctica", o didáctica, que "incluye una situación matemática, arraigada en un sistema de condiciones que llevan al sujeto a la adopción directa de comportamientos determinados solamente por la intervención del profesor, si el estudiante descubre o no la necesidad matemática" (p.299)*

[5] Asimismo, en palabras de Sadovsky (2005), la doble acepción de la palabra "situación" ha llevado en algunos casos a identificar "*situación*" con "*problema matemático*". La confusión no es menor justamente porque, en el modelo de Brousseau, no es solamente el problema es el que "determina" la producción de conocimientos, -interpretación que daría lugar a poner la teoría bajo sospecha de una suerte de empirismo- sino la *interacción* que puede entablarse entre el sujeto y un "medio resistente" (en el que sin duda el problema es un núcleo principal). (p.4)

1.3 Situación adidáctica, conocimientos y saberes, devolución e institucionalización

Las situaciones en las cuales el alumno interacciona con un medio de manera independiente de la mediación del docente en relación con el saber que debe poner en juego, es un concepto teórico que constituye un momento de la situación didáctica, denominado situación adidáctica. Junto a la institucionalización y devolución son elementos esenciales en el trabajo de enseñanza.

> *"Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir como el que propone los conocimientos que quiere propiciar. El alumno sabe bien que el problema fue escogido para ayudarlo a adquirir un nuevo conocimiento, pero debe saber también que ese conocimiento está completamente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin apelar a razones didácticas. No solamente puede, sino debe, ya que no habrá adquirido verdaderamente ese conocimiento sino hasta que sea capaz de utilizarlo por sí mismo en las situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza." (Brousseau, 1998: 59)*

Emergen en la literatura expresiones como saber "sabio", saber "erudito", saber "enseñado", conocimientos, contenidos. Se diferencia el conocimiento que se produce en una situación particular, eventualmente implícito, y el saber estructurado y organizado a partir de sucesivas interpelaciones, generalizaciones, puestas a punto, interrelaciones y descontextualizaciones, que son producto de situaciones específicas. Block (2001) hace referencia a una dualidad fundamental de la TSD: la distinción entre conocimiento y saber, que da cuenta que en las clases no circulan solamente "saberes" institucionales.

> *"La distinción[6] entre saber y conocimiento lleva a distinguir, en el concepto de situación didáctica, las nociones de "situación adidáctica", el momento de la situación didáctica en la que podrían suceder aprendizajes por adaptación a un medio, y la noción de institucionalización[7], que describe el proceso en el que el maestro, en tanto portador de un saber cultural, interviene en la situación para ayudar a tender un puente entre los conocimientos, siempre fuertemente*

[6] Block (2001) señala que: "Desde la perspectiva constructivista de los procesos de aprendizaje, que es la que ha asumido la TSD, el papel de las interacciones de los alumnos con el medio es fundamental. El proceso de aprendizaje es concebido como una adaptación del sujeto a un medio que ofrece resistencias: los alumnos construyen determinados conocimientos en tanto herramientas que les permiten resolver determinados problemas. Los conocimientos se manifiestan por lo tanto en la acción del alumno En este sentido en situación de resolución de problemas y, a diferencia de los saberes, pueden no ser identificados por el sujeto que los utiliza. (p.28)

[7] "Fue así como "descubrimos" (¡!) lo que hacen todos los docentes en sus clases pero que nuestro esfuerzo de sistematización había hecho inconfesable: deben tomar nota lo que han hecho los alumnos, describir lo que ha sucedido y lo que tiene una relación con el conocimiento al que se apunta, dar un estatuto a los acontecimientos de la clase, como resultado de los alumnos y como resultado del docente, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, relacionar esas producciones con los conocimientos de los otros (culturales o del programa), indicar que ellos pueden ser reutilizados. (…) La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: ese doble reconocimiento constituye el objeto de la INSTITUCIONALIZACION" (Brousseau, 1988b), tomado de Sadovsky, 2005)

contextualizados, y los saberes institucionales, que son objeto de enseñanza. (Block, 2001).

Respecto al proceso de institucionalización, Brousseau lo describe como otro juego del maestro, en el cual:

"Escoger ciertas preguntas entre las que ya se saben resolver, ubicarlas en el corazón de una problemática que confiere a las respuestas un estatuto de saber más o menos importante, vincularlas a otras preguntas, a otros saberes, constituye a final de cuentas lo esencial de la actividad científica. Este trabajo cultural e histórico difiere totalmente del que podría dejarse a cargo del alumno, le corresponde al maestro, no es el resultado de una adaptación del alumno (Brousseau, 1998, p. 77).

Así, finalmente, "los dos tipos principales de juego del maestro son la devolución y la institucionalización. Mediante la devolución el maestro pone al alumno en situación adidáctica. Mediante la institucionalización define las relaciones que puede haber entre las producciones "libres" del alumno con un saber cultural o científico, y con el proyecto didáctico: da lectura a esas actividades y les da un estatuto" (Brousseau, 1998, p. 92).

1.4 El contrato didáctico

En el salón de clases, los alumnos están expuestos a expectativas que perciben, o suponen, de parte del docente, en relación con cada tarea específica que hacen. La noción de contrato didáctico da cuenta, en la TSD, de la influencia estas expectativas en los procesos de aprendizaje.

Brousseau (en Sensevy y Mercier, 2007, p.9) en su texto emblemático, "El caso de Gael", explica:

Llamamos "contrato didáctico" al conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno y al conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro.
…este «contrato» rige las relaciones entre maestro y alumno en cuanto a proyectos, objetivos, decisiones, acciones y evaluaciones didácticas. Es este mismo el que, en cada momento, precisa las posiciones recíprocas de los participantes en relación con la tarea y define el significado profundo de la acción que se desarrolla, de la formulación o de las explicaciones suministradas;…
Es la regla de decodificación de la actividad didáctica por la cual pasan los aprendizajes escolares.
Puede pensarse que a cada instante, las actividades de un niño en un proceso dependen del sentido que da a la situación que se le propone, y que este sentido depende mucho del resultado de las acciones repetidas del contrato didáctico. El contrato didáctico se presenta así como el vestigio de las exigencias habituales del maestro (exigencias percibidas con mayor claridad), sobre una situación particular. Lo que es habitual o permanente se articula en mayor o menor medida con lo que es específico del conocimiento buscado; ciertos contratos didácticos favorecerían el funcionamiento específico de los conocimientos por adquirir y otros

no, y ciertos niños leerían o no las intenciones didácticas del profesor y tendrían o no la posibilidad de ser beneficiados con una formación conveniente" (Brousseau, 1980, p. 35).

En otras palabras, Sadovsky (2005) define al contrato como una relación en el cual se negocian significados a propósito de cierto objeto matemático, y en que se vehiculizan normas matemáticas y expectativas mutuas:

"(…) La relación que sostienen el docente y el (los) alumno(s) ***a propósito de la situación adidáctica****, o más en general,* ***a raíz de cierto objeto matemático*** *–es la relación didáctica- que el docente va comunicando, a veces explícitamente, pero muchas veces de manera implícita, a través de palabras pero también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemático que se está trabajando en la clase.*
Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo en clase con respecto a cierto objeto matemático, se negocian significados, se transmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas, es el contrato didáctico (p.11)

1.5 Situaciones fundamentales

La experiencia de primera enseñanza de las estadísticas y las probabilidades realizada en los 70, luego la de los racionales y decimales en la escuela obligatoria, entre otras, han llevado a Brousseau a postular que para todo conocimiento existe lo que denomina una Situación Fundamental, representativa y que permite que éste emerja como solución óptima para resolver el problema.

"Por razones heurísticas, suponemos que cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los otros.
Además, conjeturamos que el conjunto de situaciones que caracterizan a una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes, de variables y de cotas sobre estas variables." (Brousseau, 2000, p.13).

Numerosos trabajos de Brousseau (1969-1971, 1972-1974, 1976, 1993, 2002, 2003, 2008, 2009), demuestran su interés en el estudio de situaciones fundamentales en las estadísticas y las probabilidades, utilizando como soporte la TSD. En 2003 ha realizado una presentación en la XII Escuela de verano en Didáctica de las Matemáticas en el cual identifica componentes de las situaciones fundamentales, del medio, tipos de obstáculos, entre otros.

"Me parece importante desde el punto de vista educativo presentar a los alumnos una imagen correcta, completa, significante y positiva de todas las actividades ligadas a esta comunidad, y para ello, respetar lo mejor posible los problemas que (la estadística) tiende a resolver. Esta visita muy rápida de las actividades de los estadísticos podría dar una idea del amplio campo del cual la enseñanza deberá dar una imagen. Podríamos contemplar una multiplicidad de situaciones didácticas que

ilustren, cada una, uno de los aspectos diferentes (…) pero esta estrategia didáctica es dudosa: demanda mucho tiempo, aporta una imagen muy rica pero muy parcelada, y puede que nunca transmita el sentido del conjunto. Por lo tanto, parece ventajoso disponer de una "situación fundamental" que pueda generar ese campo. La función de una situación fundamental es resumir el significado global a fin de permitir que el número y la diversidad de sus ocurrencias se desplieguen de acuerdo con las necesidades y posibilidades de la enseñanza. Este rol es comparable al de un conocimiento general para relacionar los conocimientos particulares." (Brousseau, 2003, p.11)

Con esto se propone investigar y producir un modelo didáctico de situaciones de las estadísticas y las probabilidades, a partir del análisis de los conocimientos que se ponen en juego, las actividades, los métodos utilizados y las motivaciones de quienes intervienen en el proceso de producción:

"(…) Podemos imaginar la situación <fundamental> como un modelo general – una situación con muchos parámetros que pueden tomar todo tipo de valores y en cada variable, sus valores o variantes excluidos- tal que toda situación estadística entre en ese esquema[8]. Pero también podemos imaginarlo como una situación más particular, donde la elección de los parámetros y de sus valores es mucho más restringida para modelizar la esencia misma de la noción matemática (…)" (Brousseau, 2003, p.11)

1.6 Comentarios

En este primer trazo, he destacado algunos de los componentes de la Teoría de las Situaciones Didácticas, que aún hoy se sigue desarrollando, y que sirven para comprender algunos aspectos de lo que sucede en las clases de matemáticas. La cuestión de la reproductibilidad de las experiencias, el paso del problema a la noción de situación, el asunto de la adidacticidad, el medio, el contrato, la devolución, la institucionalización, las situaciones fundamentales, son grandes conceptos teóricos, desarrollados a partir de trabajos experimentales, útiles, formativos, y potentes.

En el capítulo siguiente continuaré desanudando el objeto de estudio, y creando marco epistemológico, ahora con más especificidad en lo referente a la funcionalidad de la noción de probabilidad en su diálogo con las estadísticas, una máquina de azar y las razones, las fracciones, los decimales y porcentajes. Incluiré un apartado sobre conceptos fundamentales de un campo relativamente nuevo, denominado "Educación Estocástica".

[8] Por esquema se refiere a un modelo de actividad de los estadísticos en términos de praxeología, noción fundamental de la Teoría Antropológica de lo Didáctico desarrollada por Y. Chevallard (1999), y que se desarrollará en el capítulo siguiente.

CAPITULO 2. LA PROBABILIDAD, LA RAZÓN Y LA FRACCIÓN. PROBLEMÁTICA CONCEPTUAL

En la primera parte del capítulo abordaré las actividades de los estadísticos: sus tareas, técnicas, tecnologías y estrategias, que nos dará marco para repensar en elementos de una situación fundamental, y la relación entre las estadísticas con las probabilidades.

A continuación describiré brevemente una experiencia de enseñanza de estadísticas y probabilidades dirigido por Brousseau de 1972 a 1974 con alumnos de una escuela primaria francesa. En la misma veremos la probabilidad presentada en diálogo con las estadísticas y con una máquina de azar, y sin anteponer su medida expresada con fracciones o decimales. Con esto pretendo poner en evidencia la noción de funcionalidad del conocimiento y de dar una imagen de la actividad menos parcelada y con una fuerte consideración de una génesis artificial de conocimientos en contexto escolar.

Por otra parte, desarrollaré algunas ideas de un campo relativamente nuevo que es el de la Educación Estocástica, que con sus aportes podría enriquecer los análisis posteriores.

Finalmente, abordaré un asunto fundamental del marco epistemológico de referencia, que es la problemática conceptual de la probabilidad y las relaciones con las razones, las fracciones, los decimales, y porcentajes. En este apartado me propongo desanudar la noción de probabilidad –a través de las razones y sus propiedades- usualmente presentada bajo una expresión fraccionaria o decimal.

2.1 Las actividades que realizan los estadísticos

Retomaré en primer lugar una cita de Brousseau que nos permitirá repensar una presentación usual de las probabilidades, si bien adecuada desde el punto de vista formal de las matemáticas, es limitada cuando se trata de hacerla vivir en el contexto escolar. Las reflexiones nos conducirán a revisar las actividades de los estadísticos, como una pieza clave, en el ámbito de su enseñanza, para poner a funcionar a la probabilidad y favorecer la construcción de su sentido. Al final solo nombraré unas características generales de una situación fundamental de estadísticas y probabilidades, y describiré brevemente, a modo de ejemplo, una experiencia de enseñanza dirigida por Brousseau de 1972 a 1974.

En ocasión de un curso destinado a la formación de profesores, Brousseau (1993) escribe un texto de 84 páginas denominado "*Estrategias del análisis estadístico*". En la introducción presenta un esquema que, en el año 2003, será parte de su presentación acerca de su investigación sobre las situaciones fundamentales de la estadística y la probabilidad. Por otra parte, evidencia que la elaboración formal de la teoría de la probabilidad obedece a otras condiciones o reglas que son distintas a las del ámbito escolar.

> *"Las presentaciones clásicas de las estadísticas se apoyan en una construcción previa de la Teoría de las Probabilidades, ella misma construida como una parte de la Teoría de la Medida. Estas teorías permiten así definiciones y un control matemático riguroso y bastante progresivo, pero también se alejan de las bases intuitivas y de los recursos o fuentes históricas del pensamiento estadístico necesario para la comprensión de los conceptos y las consideraciones prácticas.*
> *La axiomática de Kolmogorov permite efectivamente evitar las paradojas fundamentales y las consideraciones incómodas que se utilizaban al inicio del siglo, en la introducción al cálculo de las probabilidades, y escapar de los errores empíricos de la logística estadística. Pero ello conduce a los alumnos a interpretar directamente las probabilidades (sus medidas momentánea y aparentemente arbitrarias) por las frecuencias y en consecuencia dejará de comprender no solamente el juego de la ley de los Grandes Números sino también todas las relaciones entre la teoría, los modelos y la contingencia." (Brousseau, 1993)*

La siguiente parte de la cita conduce a considerar nuevamente la idea de funcionamiento de un saber[9], en este caso las probabilidades, en su dialéctica con las estadísticas y una máquina de azar[10].

> *"En realidad la explicación de una estadística por un proceso estocástico, la explicitación de una probabilidad por la consideración de una máquina de azar, la prueba y la regularidad de una maquina por sus componentes estadísticos, constituyen los tres polos de una dialéctica que es el verdadero motor epistemológico de este extraño sector de las matemáticas. Si hay un lugar donde la presentación axiomática se aleja y aleja al lector del funcionamiento del pensamiento científico, esa es la estadística. (…)" (Brousseau, 1993)[11].*

---

[9] Comenta Sensevy (2011) que: "La exigencia funcional es el corazón de los dispositivos brousseaunianos. Es importante entender que a través de la funcionalidad Brousseau encuentra la autenticidad, la verdad de la práctica, porque encontró la verdad del saber, es decir el poder *epistémico* de actuar que ofrece el saber. La autenticidad, la verdad de las prácticas didácticas son epistémicas. Ellas no nacen de una suerte de imitación de formas externas (que podrían ser por ejemplo el "debate", o el "proceso de investigación", o la "práctica de escritura", o "el estudio del documento", etc.), sino de la experiencia propia del poder de acción, del poder de decisión crítica específica, del que son dotados los saberes en las situaciones." (p.6)

[10] Una "máquina de azar" es un dispositivo cuyos resultados son aleatorios, y está asociado a la noción de "experiencia aleatoria", por ejemplo, un dado es una máquina de azar, y su lanzamiento la experiencia o acción; lanzar una moneda, extraer una canica de una botella, etc.

[11] En la Introducción al texto del *"Cours et Aide-Mémoire á l'intention des Professeurs en formation. Laboratoire Aquitain de Didactique des Sciences et des Techiniques. Université Bordeaux 1 et Institut Universitaire de Formation des Maitres d'Aquitaine" (1993)*.

Este tipo de reflexiones abonan la noción de “revolución broussoniana” (Sensevy, 2011). Una revolución epistemológica que se evidencia en la consideración de un “motor epistemológico” de la probabilidad, considerada como el juego –dialéctico- de tres polos: primero la explicación de una estadística por un proceso estocástico (aleatorio), lo cual puede interpretarse que la estadística “*vive*” en estos tipos de procesos aleatorios y de búsqueda de regularidad en situaciones donde interviene el azar y la incertidumbre; segundo la explicación de la probabilidad por una máquina de azar, y tercero la prueba y regularidad de una maquina a partir del tratamiento de la información, los datos obtenidos, es decir por sus componentes estadísticos. Estos polos o dialécticas G. Brousseau las pondrá a funcionar en una secuencia de primera enseñanza de estadísticas y probabilidades que veremos más adelante.

Para comprender mejor este motor epistemológico explicitaré algunas características de sus componentes. Abordaré en primer lugar las estadísticas como un conocimiento que es un producto cultural y social, una actividad humana con un devenir histórico, que busca comprender y modelizar fenómenos de un colectivo o universo. Más adelante, en este mismo capítulo abordaré algunos aspectos relativos a la probabilidad que es otro componente de esta dinámica epistemológica y que nos interesa particularmente en este estudio didáctico, que son las razones, fracciones, decimales y porcentajes.

Existen variadas definiciones acerca de lo que se considera que *es* la estadística, que dan pistas acerca de las actividades que realizan los miembros de esta comunidad y nos aproximan a su razón de ser. Presento algunas de estas definiciones:

- *“La estadística es lo que hacen los estadísticos[12]”, expresaba recientemente Brousseau (2003) tomando una definición de Thurston[13].*

---

[12] Ciertamente se podría preguntar, *¿y qué hacen los estadísticos?* .El propósito de tal respuesta parecer ser solamente, por ahora, el de dirigir la mirada hacia la *acción* de quienes ejercen la disciplina, sus prácticas y sus discursos, y no, por ejemplo, hacia una axiomática.

[13] No es casual que Brousseau tome una reflexión del matemático norteamericano William P. Thurston dado que este, según Bolea, Bosch y Gascón (2001), interpreta las matemáticas de una manera que concuerda con la didáctica fundamental y la tesis broussoniana. Thurston esquematiza una forma de interpretar el progreso matemático de la siguiente forma: -los matemáticos parten de algunas estructuras matemáticas fundamentales y de una colección de axiomas “dados” que caracterizan dichas estructuras; -existen cuestiones importantes y variadas que hacen referencia a dichas estructuras y que pueden expresarse mediante proposiciones matemáticas formales; -la tarea de los matemáticos es la de buscar una serie de deducciones que enlacen los axiomas con dichas proposiciones o con la negación de éstas. Thurston denomina inicialmente “*definición-teorema-prueba (DTP)*” a este modelo de las matemáticas. Pero, si se pretende dar razón del origen de las cuestiones problemáticas, entonces, según cuenta Thurston, se le suele añadir la *especulación* como un ingrediente importante y suplementario de dicho modelo. Especular consiste

- *"Estadística: ciencia cuyo propósito es el de conocer el alcance, la población, los recursos agrícolas e industriales de un estado", Schneitzel y Achenwall.*
- *"La palabra "estadística" designa a la vez un conjunto de datos de observación y la actividad que consiste en su recolección, su tratamiento y su interpretación", G. Morlat[14] en la Enciclopedia Universalis.*
- *"La estadística es el conjunto de los métodos científicos a partir de los cuales se recolecta, organiza, resume, presenta y analiza los datos y que permitirían sacar conclusiones y de tomar decisiones acertadas". M. Spiegel.*
- *"La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final" expresa C. Batanero (2013) tomando una definición de S. Gutiérrez Cabriá (1994)[15].*
- *Llamaré estadístico a una persona que efectúa una parte significativa (una sobre la praxeología[16]) de esas actividades, es decir que efectúa las tareas con técnicas que él controla, usando las tecnologías apropiadas con un mínimo de conocimientos teóricos: en ese sentido un investigador que <recoge> los datos podría ser un estadístico." Brousseau (2003).*

Antes de formular la última definición, Brousseau (1993, 2003) presenta, como veremos a continuación, una aproximación a la praxeología de la estadística, y describe sus componentes, es decir de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías así como las estrategias de los estadísticos.

---

en emitir conjeturas, plantear preguntas, hacer suposiciones inteligentes y desarrollar argumentos heurísticos sobre lo que es probablemente verdadero. Se obtiene así un modelo de *"definición-especulación-teorema-prueba (DSTP)"* (Thurston 1994). (p. 250)

[14] Georges Morlat es profesor en la Universidad Paris-IV. Más información disponible en la dirección https://www.universalis.fr/encyclopedie/statistique/ (Recuperado el 5/6/2018).

[15] Segundo Gutiérrez Cabriá es doctor en Matemáticas y catedrático y profesor emérito de la Universitat de Valencia. La definición se encuentra en el libro "Filosofía de la estadística" (1994). Universidad de Valencia y Servei Publicaciones.

[16] El término "*praxeología*" proviene de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual describe los *componentes* de *organizaciones matemáticas institucionales* (Chevallard 1997 y 1999) que surgen como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones: los *tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías*. Las dos cuestiones esenciales se resumen en una *práctica matemática* o "*praxis*" (formada por tareas y técnicas) y el *discurso razonado o "logos"* sobre dicha práctica (formado por tecnologías y teorías). Al unir estas dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de praxeología matemática, noción que se complementará con la praxeología didáctica (Bolea, Bosch, Gascón, 2001)

a) *“En el esquema se observa el* ***ciclo de tareas****: la determinación de los datos, el plan de experiencias, recolección de los datos, organización y presentación de los datos, elección de hipótesis, hipótesis nulas, modelos y distribuciones correspondientes, discriminación. Es un ciclo porque el proceso puede iniciar en cualquier punto, tanto por la elección de las hipótesis que por la determinación o recolección de los datos. La verificación de la pertinencia, de la validez y de la adecuación de cada etapa puede demandar múltiples ciclos de estudio.*

b) *Las* ***técnicas*** *de la estadística. Una técnica se apoya sobre elecciones sucesivas: elecciones de la estructura matemática para los datos, de una fórmula de distancia entre los datos, de un tipo de distancia entre los modelos o las distribuciones, cálculo de la distancia entre el modelo y los datos. El usuario elige entre diferentes técnicas que les parecen las más apropiadas.*

c) *Las* ***tecnologías*** *de la estadística. Se trata de determinar la distribución de las distancias entre dos distribuciones y la posición de la distancia observada (calculada) para relacionar a esa distribución de distancias. La distribución teórica de las <distancias> entre dos distribuciones se presenta como una tabla por quien la utiliza. Esta se establece por cálculos matemáticos que provienen de diversos campos teóricos, pero para quien lo utiliza, puede ser –bajo ciertas condiciones- por otros medios (simulación, Monte-Carlo, y cálculos con la computadora con la ayuda de funciones pseudo-aleatorias).*

d) *La interpretación del análisis de los datos, y de las decisiones que se derivan, las criticas metodológicas y las nuevas preguntas que relanzarían eventualmente el proceso, constituyen un conjunto de nuevas tareas.*

e) *Las* ***teorías*** *de la estadística, en particular las justificaciones epistemológicas y matemáticas. La verificación de la consistencia de los métodos estadísticos es la apuesta de la teoría de las probabilidades y de la modelización matemática de la estadística.” (Brousseau, 2003, p.10)*

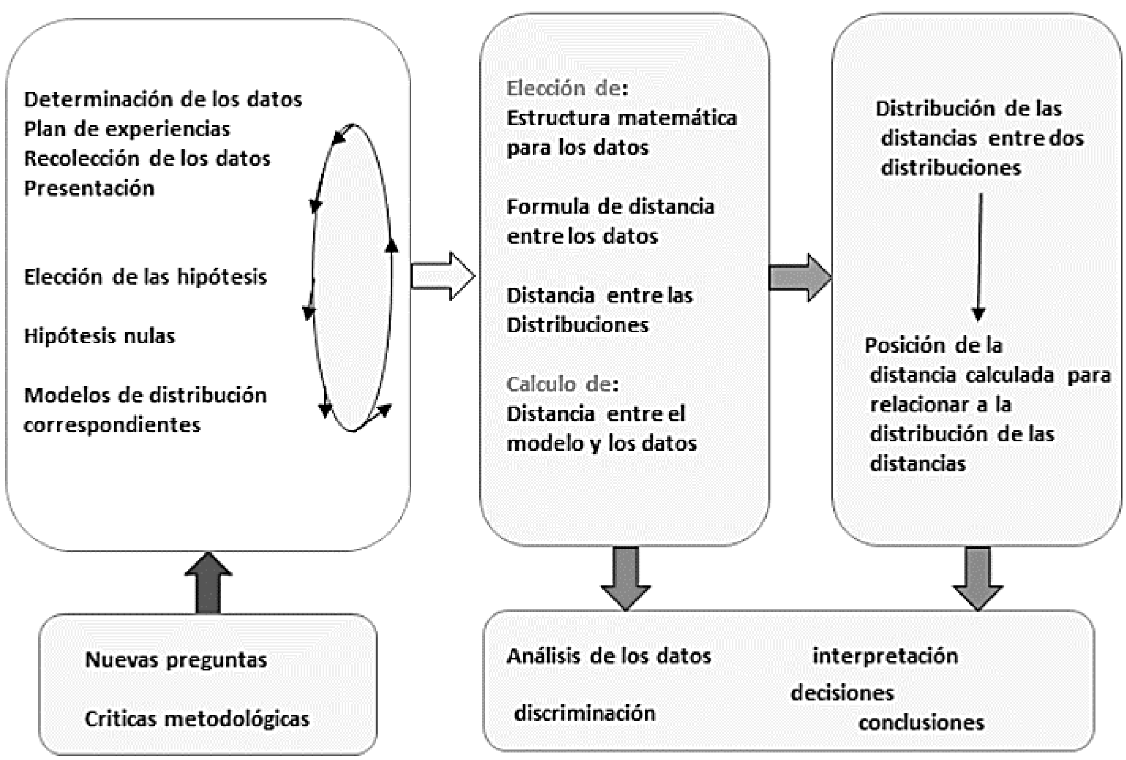


Figura 2. Esquema: praxeología de la estadística.

2.2 Una experiencia de enseñanza de estadísticas y probabilidades en primaria

Realizaré un breve recorrido por una experiencia de enseñanza de las estadísticas y las probabilidades, dirigida por G. Brousseau de 1972 a 1974, con 17 alumnos en el nivel CM2 (10-11 años), de la escuela primaria Jules Michelet de Talence (Burdeos, Francia)

Se desarrolló en un total de 35 sesiones, y constituye una experiencia ejemplar, y pionera, como la de Decimales y Fracciones en la enseñanza obligatoria que desarrollaría años más tarde, y otras ingenierías broussonianas.

El interés en la experimentación se justifica por la manera particular de estudiar la probabilidad y la estadística en el aula. Por un lado simula el funcionamiento de la probabilidad con sacos y luego botellas con canicas (máquinas de azar), sin anteponer su medida expresada con fracciones o decimales, sino luego de un lapso de tiempo relativamente largo, a través del funcionamiento implícito de la noción de razón expresada por una relación entre dos números naturales. Esto podría permitirnos ir *desanudando*, a través de sus propiedades, el objeto matemático que nos interesa: la probabilidad y sus vínculos con las razones, fracciones y decimales.

Describiré brevemente las primeras, dejando al lector interesado una descripción más detallada en anexos. Esta experimentación, fue desarrollada en seis fases.

Fase 1	Una introducción al test de hipótesis	Sesiones 1 a 5
Fase 2	Modelización y experiencia	Sesiones 6 a 8
Fase 3	La representación gráfica de series largas	Sesiones 9 a 16
Fase 4	La convergencia y la decisión estadística	Sesiones 17 a 20
Fase 5	Los intervalos de decisión	Sesiones 21 a 25
Fase 6	Los eventos y la probabilidad	Sesiones 26 a 32

En la primera fase, la maestra ha preparado tres sacos de color negro, con letras A, B y C y fichas blancas y negras. Presenta la consigna de la siguiente manera:

> *"M: Aquí hay tres sacos vacíos, llamados A, B y C. Coloco mi mano en el recipiente grande (que contiene treinta de ellas) y sin mirar pero con firmeza, tomo 5 fichas, cierro bien la mano y siempre sin mirar las coloco dentro del saco A. Abro la mano. Ya tenemos las 5 fichas en el saco A, pero no sé cuántas blancas y negras hay. ¿Ustedes lo saben?...*
> *La clase: ¡Nooo!*
> *M: Pero pueden verificar a través del saco que hay 5 fichas. Juan, ven a verificar (…) A continuación, realizaré lo mismo en los otros dos sacos. Ustedes deberán intentar adivinar cuál es la composición de cada saco. Pero como no se puede mirar dentro del mismo y no se conoce su contenido exacto, deberán convencerse a sí mismos.*

A: [Perplejo, murmura] ¡Eso es imposible!
M: Tendrán entonces el derecho de mirar un poco en el saco, pero atención: ***solo podrán mirar una ficha a la vez y ¡colocarán nuevamente en el mismo saco!*** *Eso llamaremos una* **tirada**. *Ahora, cada uno podrá venir en su turno a realizar una tirada en cada saco, y me dirán lo que han obtenido."*

Esta cuestión enfrenta evidentemente los modos de razonamiento deterministas en uso en las clases y los alumnos no comprenden qué cálculo podrían hacer para obtener la solución de ese problema. El tiempo de las sesiones ocupa solo una parte, de 15 a 30 minutos del tiempo reservado a las clases de Matemáticas.

Los alumnos realizan las primeras exploraciones, y establecen primeras relaciones entre el contenido del saco y los resultados de las tiradas (indicaremos con n: negras y b: blancas):

M: ¿Cómo saber que si cuando hay más n que b en un saco, se sacan más n que b?
Los alumnos proponen registrar tiradas. Elaboran las primeras conjeturas y relaciones entre contenido de los sacos y lo que sale en cada tirada. Por ejemplo, si contiene muchas fichas negras, entonces saldrá negro en muchas tiradas o si han salido muchas negras, entonces ahora saldrá una blanca.
A: n n b n b b n n b b n n b b n n b
B: n b n n b n n b n n b n b b n n n
C: b b n b b b b b n b b b b n n b n

Comenta G. Brousseau (2003) que en general, son los niños quienes forman las hipótesis que van a comenzar el proceso. En las primeras formulaciones sostienen que las canicas deben mostrarse sucesivamente bien ordenadas si se sacan cinco. Pero luego observan que al sacar nuevamente cinco, los resultados son diferentes, y formulan una nueva conjetura: se obtienen en ambas series de tiradas más canicas de un color que de otro.

En esta primera fase está presente la idea de sucesión regular y de compensación (si salieron muchas blancas entonces luego es el turno de que salgan las negras). Estas constituyen las primeras conjeturas que permiten poner atención en los resultados de las observaciones y su registro (las estadísticas), el funcionamiento de la máquina de azar y las primeras previsiones o idealizaciones acerca de su posible composición (probabilidades). Evidentemente la gestión de la maestra es fundamental en todo el desarrollo de este proceso.

En las siguientes sesiones, los alumnos y a veces la maestra, proponen nuevas estrategias para hacer frente al desafió de conocer cuántas fichas blancas y negras tiene cada saco, sin abrirlo. Una alumna propone escribir totales y comparar con el resultado obtenido en la sesión anterior. Se observa un cambio en la escritura y el orden en registros.

Ayer	Hoy
A: 9n 8b B: 11n 6b C: 5n 12b	A: 10n 7b B: 12n 5b C: 4n 13b

Otra alumna propone realizar series de 5 tiradas, idea que es aceptada rápidamente. Se generan nuevos registros con los sacos A, B y C, tal como puede observarse en la siguiente imagen.

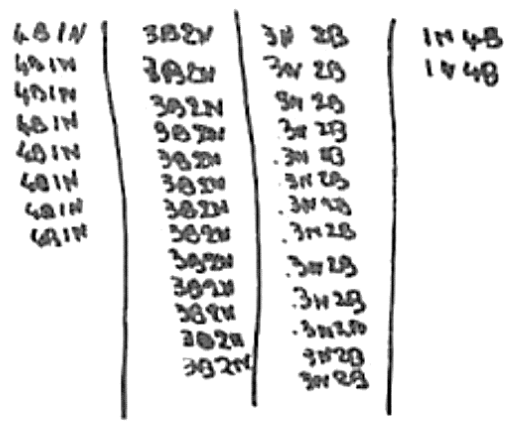


Figura 3. Otra manera de anotar los resultados.

Afirma Brousseau (2002) que:

> *"La primera observación muestra que la representación de los contenidos de los sacos por una serie de 5 tiradas es implícitamente, claramente y unánimemente aceptada por los alumnos como regla de evaluación. Sin embargo, esta regla no puede ser institucionalizada, ni siquiera formulada porque es obviamente falsa en un razonamiento determinista. La composición de un saco está determinada y es fija, y no puede fluctuar de un momento a otro". (p.7)*

Los alumnos continúan realizando durante cierto tiempo grupos de cinco tiradas con la idea de representar el contenido, sin embargo se decepcionan al ver fluctuar los resultados, aunque la idea de mayoría de blancas o negras sostiene el proceso. A su vez, en su desarrollo, vinculan las estadísticas y las probabilidades. Por ejemplo en 12 series de cinco tiradas, han obtenido 5 veces la composición (3b, 2n), 4 veces (4b, 1n) y 3 veces (2b, 3n). Al estar convencidos de la composición de la botella (3b, 2n), reclaman abrir la botella, sin embargo la maestra se rehúsa: "*Si ustedes están seguros es inútil verificar, si no, háganlo de otra forma para convencerse"*. Tal como afirma Brousseau *"La probabilidad no es un concepto experimental".*

En la sesión 4, la maestra propone a los alumnos revisar los resultados. Tienen cierta seguridad que en el saco C hay 4b y 1n y continúan realizando ensayos con los sacos A y B. Los alumnos se centran en contar cuántas veces aparecen ciertas combinaciones.

Una alumna razona de la siguiente manera frente a los resultados obtenidos con el saco A: *"Hay dos empatados: hay que tirar de nuevo hasta que hubiera dos de diferencia"*

3n 2b ------- 6 veces
4n 1b ------- 6 veces
3n 2b ------- 2 veces

Por un lado, es evidente el control que tienen los alumnos sobre sus estrategias (devolución). Por otra parte, la propuesta de hacer series de cinco tiradas juega un papel capital en el proceso de confrontación de resultados estadísticos con las composiciones posibles de la máquina de azar. Una serie de este tipo representa una composición posible de la máquina. Posiblemente desentrañar la razón entre blancas, negras y total de tiradas esté detrás de la idea de ver cuál de las seis posibles combinaciones sale más seguido.

En la sesión 5, los alumnos siguen contando en tiradas de 5 con el saco A. En 15 series de 5 tiradas obtienen 5 veces la composición (3n, 2b), 3 veces (4n, 1b) y 7 veces (2n, 3b). Algunos argumentan que la composición es de 2n y 3b, sin embargo otros protestan porque observan que si suman los resultados obtenidos en las sesiones anteriores con el saco A se obtuvieron más blancas que negras. Una alumna, aprovecha un momento de indecisión general de la clase para deslizar una nueva estrategia: "*Tres alumnos tiraron cada uno cinco veces. Contamos cuantas blancas y negras hay en total y dividimos por tres para encontrar la composición del saco A*".

10n y 5b
10n ------ 10:3 = 3,33
5b ------- 5:3 = 1,66

La clase queda satisfecha pero a la vez perpleja, por azar un alumno destaca que la suma es "4,99 es casi 5".

La segunda fase se inicia con varias propuestas. Por una parte, la maestra les recuerda el "nuevo método" que ha sido propuesto por ellos (realizar 3 tiradas de 5, y dividir por 3 los totales obtenidos). Una alumna propone fabricar un saco donde se conozca la composición con la finalidad de ver si es verdad que las tiradas se parecen al contenido (simulación y búsqueda de relación entre máquina de azar y estadísticas). La maestra presenta a partir de la propuesta, un nuevo material: botellas en lugar de sacos y canicas azules y amarillas en lugar de fichas blancas y negras, la denominan “La botella Z”.

Se producen discusiones acerca de si utilizar sacos es equivalente a utilizar botellas. Los alumnos desarrollan una nueva estrategia: cargan una botella transparente con 4 azules 1 amarilla y sus resultados los comparan con la botella C, porque sospechan que este último posee la misma composición. Obtienen los resultados siguientes:

Z 5 azules; 5 azules; 3 azules 2 amarillas.
Total: 13 azules y 2 amarillas, entonces se obtiene: 4,33 y 0,66 (al dividir los totales entre 3)

La maestra propone realizar tiradas con un saco para comparar con ese resultado. Los alumnos deciden probar con el saco C (porque piensan que contiene 1n y 4b). Obtienen:

C 11b 4n cuyas frecuencias son 3,66 y 1,33.

No se observaron grandes dificultades para los estudiantes que practicaron decimales durante un año, en ver que los dos resultados se relacionan con (4,1), y no es muy extraño dado que estuvieran bastante seguros de la composición del saco C. Este método les permitió verificar, además, que la botella y el saco se comportan de la misma manera.

En las sesiones siguientes afianzan la estrategia (modelo) con una nueva botella (“Botella Z_2”), que tiene la misma composición pero ahora con canicas blancas y negras en lugar de azules y amarillas. Introducen la palabra “frecuencia”, y realizan grupos de 10 series de 5 tiradas (en lugar de 3 series de 5 tiradas) para facilitar los cálculos, y dividir entre 10 (en lugar de dividir entre 3). Por último, piden a la maestra que, a escondidas, componga las botellas A, B y C con la misma composición de los sacos A, B y C, porque con este material pueden realizarse rápidamente muchas tiradas.

Durante la tercera fase, se aumenta la cantidad de tiradas y calculan las frecuencias. Luego se representan en tablas y en gráficos cartesianos, mediante el uso de una computadora[17].

La profesora recuerda el método anterior de continuar el conteo de series de 5 tiradas y calcular frecuencias (de cada combinación de 5) y realizar divisiones, y luego propone un plan que incluye la realización de un gran número de tiradas y luego dividir la cantidad de blancas y negras por el total. Con esto, introduce la noción de frecuencia

[17] Olivetti TE 300 unida a una IBM 360/30 de la Universidad de Burdeos.

relativa acumulada de manera sistemática. Organiza la clase en tres grupos, cada uno con la tarea de realizar este plan con cada saco y completando una tabla de frecuencias.

En la tabla siguiente pueden observarse los resultados de un equipo, donde realizan 25 series de distinta cantidad de tiradas: 10, 15, 30, 40, 50, 59, 69, 79, 89, 99, 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199, 209, 219, 229, 239, 339. Están acompañados por la frecuencia absoluta de canicas blancas y negras, y frecuencias acumuladas absolutas y relativas. Las cantidades marcadas con asterisco (*) son las que presentaron errores. Los cálculos se corresponden con una composición de (2b, 3n).

série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blancs	5	2	7	4	3	4	3	3	3	6	5	5
Cumul	5	7	14	18	21	25	28	31	34	40	45	50
Noirs	5	3	8	6	7	5	7	7	7	4	5	5
Cumul	5	8	16	22	29	34	41	48	55	59	64	69
Nbr.tir	10	15	30	40	50	59	69	79	89	99	109	119
.												
Calcul	5 :10	7 :15	14:30	18:40	21:50	25:59	28:69	31:79	34:89	40:99	45:109	50:119
Fréq.B	0,5	0,45	0,49	0,45	0,42	0,42	0,40	0,39	0,48*	0,44*	0,41	0,46*
Calcul	5 :10	8 :15	16 :30	22 :40	29 :50	34 :59	41 :69	48 :79	55 :89	59 :99	64:109	69:119
Fréq.N	0,50	0,53	0,53	0,55	0,58	0,57	0,57*	0,60	0,61	0,50*	0,58	0,57

Série	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Blancs	5	3	6	4	3	4	3	5	3	5	4	11	36
Cumul	55	58	64	68	71	75	78	83	86	91	95	106	142
Noirs	5	7	4	6	7	6	7	5	7	5	1	4	64
Cumul	74	81	85	91	98	104	111	116	123	128	129	133	197
Nbr.tir	129	139	149	159	169	179	189	199	209	219	229	239	339
Fréq.													
Calcul													
Fréq.B	0,42	0,417	0,429	0,427	0,420	0,418	0,412	0,417	0,411	0,415	0,414	0,443	0,418
Calcul													
Fréq.N	0,57												

Figura 4. Tabla de frecuencias.

Cabe destacar que este plan propuesto por la maestra introduce un elemento nuevo (calcular las frecuencias relativas acumuladas). Esto representa un cambio importante en la estrategia respecto al trabajo que venían realizando en sesiones anteriores.

Con la idea de promedio, los alumnos contaban el total de blancas y negras de 3 series de 5 tiradas, y a este resultado lo dividían por 3. Dicho promedio de los resultados de 15 tiradas y las 5 fichas de la botella daba una idea (por “proyección”) de la composición de las dos bolsas o botellas. Es decir, si se tiene un conjunto de tiradas de tamaño 15, con b blancas y n negras, éste se proyecta a un conjunto (b', n') de tamaño 5=b'+n' (el de la botella), con la misma composición y donde se conserva la relación b/n = b'/n'. En efecto, si 15=b+n; b'=b/3 y n'=n/3; entonces: b'+n'=b/3+n/3=(b+n)/3=15/3=5 y b'/n'=(b/3)/(n/3)= =b/n. Quiere decir que existe un tratamiento de la información (de los resultados de las tiradas), mediante sumas y divisiones, que les devuelve una aproximación a cierta composición de una botella.

Pero ahora, proponer el cálculo de frecuencias relativas (y acumuladas) los lleva a un resultado diferente. Los cocientes son siempre menores a 1, lo cual hace que nunca se llegue como resultado a una cantidad próxima a 5. En lugar de proyectar resultados a un conjunto de tamaño 5 (como el caso anterior), ahora se proyecta a un conjunto de tamaño 1 y hay un distanciamiento a la idea de cantidades dentro de la botella. En efecto, si se realizaran 3 series de 5 tiradas, 15=b+n, b''=b/15 y n''=n/15; y b''+n''=b/15+n/15= =(b+n)/15=15/15=1; y b''/n''=(b/15)/(n/15)=b/n. Quiere decir que aunque se conserve la relación b/n=b''/n'', cambia el modo de interpretar el resultado que requiere dar sentido al número 1 como equivalente al "todo".

En este trabajo, según los reportes de la experiencia, se evidencia cierto hartazgo de los alumnos quienes, cansados de realizar muchos cálculos, no han tenido tiempo de reflexionar sobre lo que podrían hacer con los resultados obtenidos. Hay una situación tensa. Solicitan a la maestra que abra los sacos para ver su contenido (tal como había sucedido en las primeras sesiones).

> *M: Si ustedes están seguros de la composición de los sacos (o de las botellas), será inútil (innecesario) abrirlos".*

Una alumna propone inventar las botellas y representar los contenidos supuestos de los sacos, luego sumar los totales de blancas y de negras por el número de tiradas. Hay acuerdo, con tal de salir de esta fase fastidiosa y donde ignoran el objetivo. Representan la botella C (desconocida) por la botella X con (4b, 1n); la B por la botella Y con (3b, 2n) y la A por la botella Z con (1b, 4n) y vuelven a realizar muchas tiradas. Varios piensan que habrá que agregar una nueva botella con otra composición posible: (2b, 3n). Otros piensan igualmente en la composición 5n y 5b, pero se rechaza inmediatamente (trivial). La maestra organiza la clase en 4 grupos, cada uno con una botella distinta, y deben realizar una nueva tabla, para una serie de 180 tiradas. Los alumnos eligen realizar series de 10 para facilitar las divisiones. Este trabajo les llevará tres sesiones más[18].

Cabe mencionar una característica importante del desarrollo de la situación: que la maestra no ceda al pedido de los alumnos de abrir las botellas, y por otro lado, la necesidad de disponer de un plan para el caso de que no sucedan los eventos que ocurrieron en otras experiencias. Por ejemplo, es poco probable que a un alumno se le ocurra realizar series de cinco tiradas.

En las sesiones siguientes la maestra propone que cada grupo realice un gráfico representando sus tiradas. Verticalmente se indican las frecuencias de blancas y negras. Se presentan problemas en el marcado de los puntos, dado que utilizan la regla para el trazo de paralelas porque la hoja no es cuadriculada. Producen gráficos como el siguiente:

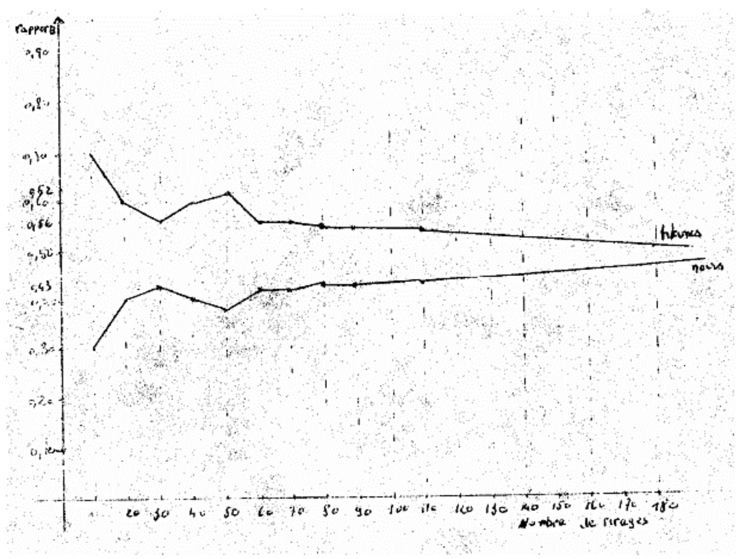


Figura 5. En el eje X el número de tiradas y el eje Y las frecuencias de blancas y negras con la botella con (3b, 2n)

Luego, incorporan el uso de una computadora programada con una función pseudo aleatoria que les permite tener rápidamente resultados de muchas tiradas y centrar el trabajo en la reflexión alrededor de los gráficos. Ingresan en la computadora la

[18] Kuzniak (2003) ha comprobado en un estudio reciente el rol importante del profesor en esta fase de la experimentación, para sostener una característica de las botellas que tiene un significado en la noción misma de la probabilidad: *"La probabilidad no es un concepto experimental. Esta postura es particularmente difícil de sostener por el profesor y cuando esta experiencia se rehízo recientemente en clase de segundo (15 años), el docente cedió a la demanda de los alumnos, cancelando de hecho todo el proceso de entrada a los test o pruebas de hipótesis, para convencerse de la naturaleza de las estadísticas en cuestión. Otro elemento de riesgo para el maestro es, evidentemente, que ciertos eventos necesarios para la continuación de su experiencia no se producen y aquí es donde la elección de la configuración de base necesitó un cálculo que no debe nada al azar." (p.25)*

cantidad de canicas blancas y negras que tiene la botella, y luego el número de tiradas a realizar, y ésta les devuelve los resultados de las tiradas. En el ejemplo siguiente se observan los resultados para 100 tiradas con una botella, de los cuales se obtuvieron 60 canicas blancas y 40 negras[19]:

```
--------COMBIEN DE TIRAGES DOIT-ON EFFECTUER ?
?100
DANS L'ORDRE ON A OBTENU LES COULEURS
N N B B B B N N B B N N N B B B B N B B
N B B B N B B B N B B B B N N N N B N B
B B B B B B B N B N N B N B B N N B B B
B B B B B B N N B N B N N B N N B N N B
******* CES 100 BILLES TIREES ONT ETE :
******* 60 BILLES BLANCHES ET 40 BILLES NOIRES

POUR TIRER ENCORE DANS CE SAC ECRIVEZ 1
POUR CHANGER SON CONTENU ECRIVEZ 2
POUR CESSER LE JEU ECRIVEZ 3
```

Figura 6. Simulación con computadora

Los alumnos realizan entonces 10 tiradas, luego 50 hasta 180 tiradas. Calculan rápidamente las frecuencias y trazan nuevas curvas, e incluso tienen a su disposición una calculadora. Por ejemplo, producen gráficos como los siguientes (X: tiradas, Y: frecuencia de blancas): el de la izquierda representa simulaciones con la botella de composición (4n, 1b) y el de la derecha con la botella compuesta por (2b, 3n).

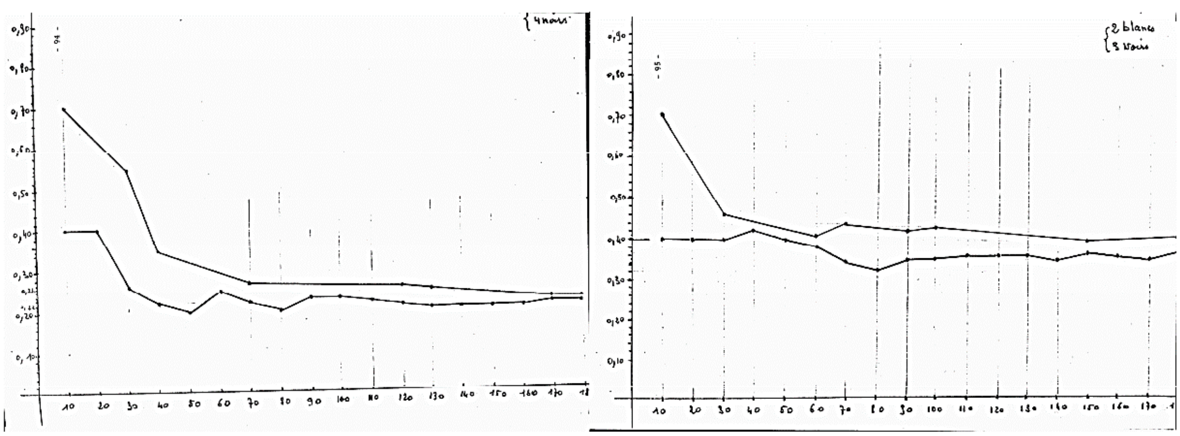


Figura 7. Frecuencia relativa de blancas en función de las tiradas.

El trabajo de producción de gráficos permite a los alumnos empezar a sospechar el rol de hacer largas series de observaciones, en lugar de tener solamente los resultados de las primeras tiradas. Frente a la longitud de las tiradas cada vez más numerosas, al inicio cuentan la cantidad de veces que se observa cada color, luego solo piden ver las cantidades y mucho después empiezan a observar las relaciones entre ellas. Luego de 16 sesiones:

[19] Obtenido del artículo original en francés. Notar que en este ejemplo, en las líneas de los resultados de las tiradas, solo se muestran 80 de los 100 resultados que se indica que se tiraron. Posiblemente han cargado una composición de 3 blancas y 2 negras.

“(…) Todo está listo para calcular la relación en la cual esperamos ver que la frecuencia observada de blancas o de negras se aproximan a: 3/5 para (3b, 2n), 2/5 para (2b, 3n), etc. Los alumnos establecen ellos mismos el número de tiradas en las que solicitan los resultados a la computadora (introducida en la clase). Las series de frecuencias observadas son representadas gráficamente y los alumnos <observan> que las curvas después de las oscilaciones bastante importantes vienen aproximándose a los valores previstos”. (Brousseau, 2003, p.5)

A continuación, ***durante la cuarta fase***, se promueve un trabajo de exploración y comparación de curvas, y luego un juego (con fichas y apuestas) que les permite establecer nuevas relaciones entre las posibles composiciones de las botellas y los valores a los que las curvas se aproximan.

Emerge de nuevo el importante rol de la maestra, que *negocia*, es decir, propone y habilita ciertas transacciones[20], donde acepta propuestas y también propone estrategias, muchas veces dando direccionalidad epistémica a las producciones de los alumnos (tal como vimos, por ejemplo, cuando introdujo de manera sistemática la noción de frecuencia relativa)

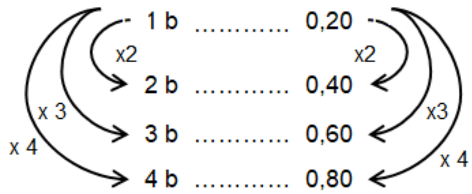
En la clase siguiente, se colocan los papeles sobre el pizarrón. Los alumnos observan las cuatro curvas correspondientes a las cuatro composiciones de las botellas: 1b4n, 2b3n, 3b2n y 4b1n. Describen que cuando hay 1 canica blanca, la curva esta “abajo”, es un poco más alta con 2 canicas blancas, un poco más arriba con 3 blancas y está en la parte superior con 4 blancas. Muchos alumnos enfatizan que en las 180 tiradas se mantienen en los valores 0,2; 0,4; 0,6 y 0,8, respectivamente.

En un segundo momento de la clase, la maestra realiza una serie de tiradas con la computadora y escribe en el pizarrón las frecuencias acumuladas de las 10 tiradas, hasta llegar a las 180 (el ordenador calcula las frecuencias). Los alumnos deben adivinar con que saco realiza las tiradas. Un alumno explica cómo encuentra:

Si las frecuencias están alrededor de 0,2, entonces hay 1 blanca. Si ellas están dentro de 0,4, entonces hay 2 blancas. Análogamente para 0,6 y 0,8. Otro alumno propone una tabla (procedimiento emblemático y habitual en la clase), donde describe

[20] Gerard Sensevy (2011) utiliza el término transacción como una parte de las dimensiones de la comunicación, diferenciándola del término interacción, ambas partes de una noción de diálogo que toma de Vernant (1997, 2004). Utiliza este término “transacción” para describir un elemento importante de la Teoría de la Acción Conjunta (Sensevy, 2007): “Si la acción didáctica es orgánicamente cooperativa, es ante todo porque toma lugar en el seno de un proceso comunicativo. Puesto que es una acción de comunicación, la acción didáctica supone la cooperación propia de la comunicación. Decir eso, es una manera de empezar a especificar esta acción como *acción dialógica* y es al mismo tiempo decir que una manera productiva de considerar las interacciones didácticas es contemplarlas como *transacciones*.” (p. 7)

que las frecuencias de canicas blancas son proporcionales al número de canicas blancas contenidas en la botella (propiedad de linealidad).



La experimentación continúa desarrollándose durante 13 sesiones más[21] (quinta y sexta fase), en las cuales irán afinando el modelo para botellas con otra cantidad total de canicas y funcionalizando esta *propiedad de linealidad* para poder predecir nuevas composiciones, mediante la construcción de intervalos con *valores límites* Las actividades incluyen juegos de apuestas, con uso de la computadora y fichas, y resolución de ejercicios en el mismo contexto, de manera individual, siempre con interesantes episodios que describen momentos de discusiones colectivas y grupales, y mediadas por la maestra.

En la última fase buscan construir un método de búsqueda de frecuencias, identificar eventos posibles, y calcular probabilidades teóricas utilizando otras máquinas de azar. Por ejemplo usando dados de distintas características (algunas caras de determinado color y las otras blancas, o con puntos rojos y las caras blancas, dados comunes, dados sesgados, etc.); dodecaedros con caras numeradas; una caja de plástico con perlas de colores distintos (2 azules, 2 rojos, 2 verdes, 2 amarillos), tarjetas numeradas y de colores, etc.

Para finalizar la descripción de esta larga secuencia didáctica, retomaré brevemente las primeras conclusiones, provisorias, expresadas por Brousseau (2003):

"La situación comporta tres sistemas de objetos:
- *Lo que se ha visto se vuelve una imagen del pasado de una máquina de azar, es decir, una estadística*
- *Lo que se busca reproducir son los eventos más o menos probables…*
- *Determinados por la estructura de la máquina,*

Las observaciones responden a hipótesis fáciles de imaginar sobre las relaciones entre esos tres tipos de objeto.
Estas ponen en relación:
- *Los razonamientos que se corresponden de un objeto al otro*
- *El contenido de la botella no cambia: contenido →hipótesis (probabilidad)*
- *Las observaciones reflejan el contenido de la botella: estadísticas → contenido*

[21] El lector puede encontrar una descripción detallada en la sección de Anexos.

* *Las observaciones que vendrán deben reflejar aquellas del pasado, dado que la máquina no cambia. Hipótesis (probabilidades) → estadísticas*

Lo que se genera es un proceso a tres tiempos cuyo motor es el siguiente:

* *Si lo que observamos da indicaciones sobre lo que contiene la botella, entonces al reproducir lo que se realiza deberá reproducirse lo que hemos visto (evidentemente, la cuestión implícita es: "¿qué tienen todas estas experiencias en común?".*
* *El pasado → la máquina → el futuro.*

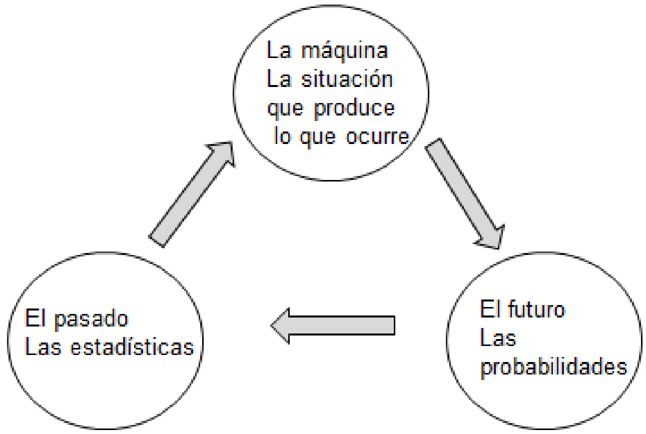


Figura 8. Sistema de objetos de la situación.

Comentarios

Un aspecto que nos interesa de esta experiencia de enseñanza es que aporta una mirada sobre el modo de hacer vivir en el aula situaciones en las cuales intervienen fenómenos aleatorios, y donde las estadísticas y las probabilidades emergen junto a otras nociones, en particular las razones, las fracciones y los decimales constituyendo un entramado complejo de gestionar y de abordar.

Años más tarde, G. Brousseau revisita esta experiencia con la ayuda de nociones teóricas que fueron desarrolladas posteriormente, con el propósito de explicarla en términos de "situaciones fundamentales", de "variables", de "praxeología", de "milieu" y de "obstáculos".

Los aportes del estudio pueden revisarse también desde los desarrollos de un campo relativamente nuevo como lo es la denominada Educación Estocástica, en particular desde las nociones de cultura estadística, cultura aleatoria, "literacy", ideas fundamentales de la estadística, sentido estadístico, razonamiento y pensamiento estadísticos.

Por último, quiero destacar un aspecto de esta experiencia que es importante en la presente tesis: la fuerte presencia, implícita, de la noción de razón. En las sesiones, particularmente las relacionadas con la botella de azar, emergieron tareas que implicaron la realización de comparaciones entre cantidades (canicas blancas contra canicas negras, o contra total de canicas), así como comparaciones entre pares de cantidades (el par de una botella contra el de otra botella, o el par de un conjunto de tiradas contra el de la botella). A la vez, progresivamente, se produjeron otras cantidades (fracciones y decimales) que expresan y cuantifican a dichas razones para poderlas manipular.

2.3 Cultura, razonamiento y pensamiento estadístico

La probabilidad es un conocimiento necesario para la formación de ciudadanos estadística y matemáticamente cultos. Burrill y Biehler (2011), han realizado un estudio en donde presentan una síntesis de diferentes marcos teóricos educativos de diferentes países, en la cual identifican lo que denominan "ideas fundamentales de la estadística" (en la que subyace la noción de cultura de la aleatoriedad, cultura estadística y literacy).

En dicho artículo[22] se explicitan siete ideas que son conocimientos básicos: 1. Datos; 2. Gráficos; 3. Variación; 4. Distribución; 5. Asociación y correlación; 6. Muestreo e inferencia y 7. Probabilidad.

La última es el objeto de estudio de esta tesis:

> *"La característica principal de la Estadística es hacer uso de modelos aleatorios, a diferencia de otras ramas de la matemática donde se usan modelos deterministas. Pero al contrario que para otros conceptos matemáticos, no hay una única acepción de la probabilidad. Para la escuela serán relevantes al menos tres aproximaciones diferentes:*
>
> - *En la concepción clásica, se define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de todos los casos posibles, siempre que todos sean equiprobables.*
> - *En el enfoque frecuencial se obtiene una estimación experimental de la probabilidad. Su valor teórico seria el límite de la frecuencia relativa de aparición del suceso al realizar la experiencia un número infinito de veces en las mismas condiciones. Un aspecto importante de este enfoque es comprender la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). También hay que entender que los resultados de una experiencia son impredecibles, pero se puede predecir el comportamiento general de un gran número de resultados (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).*
> - *En otras situaciones la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos, sino la percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso. Muchos problemas de toma de decisión o elaboración de un juicio son abiertos o tienen más de una posible decisión y en su solución intervienen tanto factores matemáticos como extra matemáticos (Contreras, et al, 2011). La concepción subjetiva de la probabilidad seria adecuada para modelizar este tipo de situaciones." (Batanero, 2013, p.4)*

[22] C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

La probabilidad es producto de un proceso de modelización que involucra la construcción de razonamientos estadísticos. C. Wild y M. Pfannkuch[23] (1999, 2004) han realizado investigaciones y generado un modelo a partir de entrevistas a estadísticos y estudiantes universitarios, en donde identificaron lo que denominan *formas o modos fundamentales de razonamiento estadístico*. Estas formas de razonamiento implican: a) Reconocer la necesidad de los datos, b) Transnumeración (comprensión que surge al cambiar la forma de representación de los datos), c) Percepción o consideración de la variación, d) Razonamiento con modelos estadísticos (aquí se incluye al uso de modelos probabilísticos) y e) Integración de la estadística y el contexto.

Estos modos de razonamiento, conforman una de las cuatro dimensiones del pensamiento estadístico que C. Batanero[24] (2013) describe de la siguiente manera:

> *Uno de los modelos para describir el desarrollo del razonamiento estadístico es debido a Wild y Pfannkuch (1999), quienes lo conciben como la suma de cuatro dimensiones: (a) El ciclo investigación, que consiste en la serie cíclica de pasos a seguir desde que se plantea un problema estadístico hasta que se resuelve o bien se modifica y que es bastante similar al proceso general de resolución de problemas; (b) Los modos fundamentales de razonamiento estadístico; (c) el ciclo de interrogación, que se aplica constantemente en la solución de problemas estadísticos, tanto a nivel global como en cada posible paso y consiste en la búsqueda y comprobación sucesivas de explicaciones, hipótesis o preguntas, desde los datos, los análisis realizados o los resultados; y (d) una serie de actitudes, como es escepticismo, la mentalidad abierta, la perseverancia, el espíritu crítico o la curiosidad." (p. 4-5)*

Por último, Batanero (2013) propone la noción de desarrollo del *sentido estadístico*, como la unión de las categorías descriptas anteriormente. Propone que se aborden las ideas estadísticas fundamentales de manera progresiva en los niveles educativos desde la primaria (Batanero, Contreras y Arteaga, 2011). Asimismo precisa que el desarrollo de razonamientos favorecen la comprensión y por consiguiente del sentido para los alumnos, y propone que las clases de estadística se basen en el trabajo con proyectos bien planteados por el profesor o escogidos libremente por los alumnos[25].

---

[23] Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds). The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, pp. 17 – 45.

[24] Dos aclaraciones: por un lado, este modelo de desarrollo constituirá una de las componentes del *sentido estadístico* Batanero (2013). Por otra parte, cabe aclarar que en la actualidad existe una cierta distinción o consenso -desde la perspectiva de la educación estocástica- entre razonamiento y pensamiento estadístico. El pensamiento, se atribuye, al menos desde esa perspectiva, a una actividad de los "profesionales" del campo, mientras que el razonamiento, a la actividad desarrollada por quienes están en proceso de aprendizaje.

[25] Ver, por ejemplo: "Batanero, C. y Díaz, C. (2010). "Estadística con Proyectos". Facultad de Ciencias, Universidad de Granada. España. En este libro convergen capítulos donde participan autores como Pedro Arteaga, J. Miguel Contreras, M. Magdalena Gea y Gustavo R. Cañadas, integrantes del Departamento de Didáctica de la Matemática de dicha Universidad

Para finalizar, destaco que estas dimensiones provenientes de estudios de este campo en desarrollo denominado Educación Estadística o más general como Educación Estocástica nos ayudan a comprender la complejidad de los procesos que se producen en el aula. La experiencia de enseñanza desarrollada por Brousseau aporta además un ejemplo concreto y pionero de la construcción de una *razón de ser* profunda, y conduce a repensar en las características de las situaciones que permitan una *génesis* escolar de los conceptos estocásticos sin perder su sentido ni dar una imagen muy parcelada de las actividades que hacen las personas que trabajan en este campo. Efectivamente, pensar en situaciones fundamentales de las estadísticas y probabilidades incluye pensar en toda una cadena de problemáticas donde se implican los ciclos de investigación, los modos de razonamiento, las ideas fundamentales, y por supuesto, la construcción de su sentido por parte de los alumnos.

2.4 La probabilidad, la razón y la fracción.

En este apartado me propongo *desanudar* algunos aspectos de la probabilidad (clásica y frecuencial) y en particular su relación con la razón y la fracción. Iniciaré describiendo ideas conceptuales de la probabilidad, de carácter global, y poco a poco acercar al lector a relaciones más específicas con otros objetos matemáticos (razón y fracción), para evidenciar que la manera formal de presentar habitualmente la probabilidad (como una fracción), vehiculiza significados y propiedades de otros objetos que es importante explicitar en el marco de este estudio didáctico.

La regularidad y la aleatoriedad

La presencia de fenómenos aleatorios en los que hay un cierto tipo de variabilidad constituye uno de los aspectos de las situaciones en los que interviene la probabilidad. Es parte de su relación con las estadísticas, y de lo que podríamos denominar su poiética epistémica (Sensevy, 2011), es decir de sus propiedades internas o específicas.

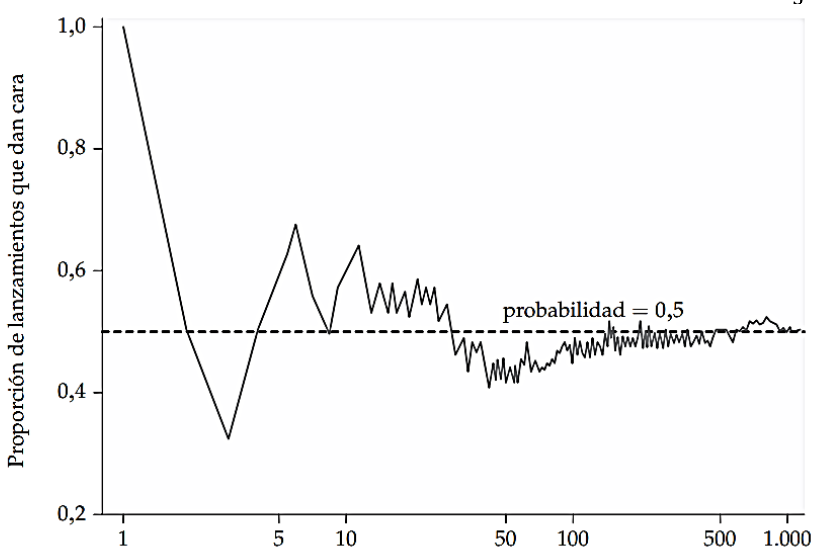
Frente a una máquina de azar, como la de las botellas de Brousseau, o como lanzar una moneda, o un dado, se generan conjuntos de datos cuyo comportamiento es muy variable con pocas repeticiones, pero presenta un comportamiento regular y predecible con muchas. Es decir que hay un *tipo de variabilidad* característico de estas situaciones que arroja resultados aleatorios, los cuales tienen una regularidad en muchas repeticiones[26].

> *"Lanza una moneda al aire o escoge una muestra aleatoria simple. A priori no se puede predecir el resultado, ya que variará cuando repitas el lanzamiento de la moneda o cuando obtengas la muestra. De todas formas, existe un comportamiento regular de los resultados, una regularidad que aparece de forma clara sólo después de muchas repeticiones. Este hecho remarcable es la base de la idea de probabilidad." (Moore, 2005, p. 272)*

La probabilidad y la noción de razón (o proporción)[27]

A propósito del ejemplo clásico de lanzamiento de la moneda emerge, de la explicación de Moore (2005), uno de los significados de la probabilidad que también se presentará en la experimentación realizada en esta tesis: la probabilidad asociada a la noción de razón (o proporción)[28].

> *"Cuando lanzas una moneda al aire sólo hay dos resultados posibles, cara o cruz. La figura muestra los resultados de lanzar una moneda 1.000 veces. Para cada lanzamiento, desde el primero hasta el último (…). El primer lanzamiento fue cara, por tanto, la proporción de caras empieza siendo 1. El segundo lanzamiento fue cruz. Después de dos lanzamientos dieron una cruz seguida de dos caras, por consiguiente, la proporción de caras después de cinco lanzamientos es $\frac{3}{5}$ o 0,6.*



[26] Ver por ejemplo, el razonamiento acerca del "riesgo en realizar una conjetura falsa" (Briand, 2011) en la sección de Anexos

[27] Existe una ambigüedad en el lenguaje con respecto a los términos razón y proporción, muchas veces se consideran sinónimos. En la teoría clásica de "razones y proporciones", se distinguían unas de otras, sin embargo las reformas como las de las "Matemáticas modernas" en Francia en 1970 las han quitado como elementos teóricos y tecnológicos de las matemáticas clásicas (dejando únicamente la técnica), tal como afirma Chevallard (1999). Situaciones similares ocurrieron en otros países, y muchos libros de texto lo consideran sinónimos. Años después, al echar marcha atrás a la reforma en muchos aspectos, la proporcionalidad aparece poco a poco, pero no ya enmarcada en la teoría de las razones y las proporciones

[28] Noción de razón que emerge también de la experimentación de la enseñanza de las probabilidades y las estadísticas, realizado por Brousseau, descripto en apartados anteriores.

“(…) “Aleatorio” en estadística no significa de “cualquier manera”, sino que se refiere a una clase de orden que únicamente aparece después de muchas repeticiones. La cara más impredecible de la aleatoriedad es nuestra experiencia del día a día: es difícil que veamos suficientes repeticiones de un mismo fenómeno aleatorio como para que observemos la regularidad que aparece después de muchas reiteraciones. Después de muchas repeticiones, la proporción de lanzamientos que dan cara es 0,5. Esta es la idea intuitiva de la probabilidad. Una probabilidad de 0,5 significa “ocurre la mitad de las veces después de un gran número de ensayos”. (Moore, p.272-273)

Luego, resume:

- *“(…) La probabilidad es la rama de las matemáticas que describe el comportamiento aleatorio. Por supuesto que nunca podemos observar la probabilidad de forma exacta. Siempre podríamos, por ejemplo, seguir lanzando una moneda al aire. La probabilidad matemática es una idealización basada en imaginar lo que ocurriría después de una serie infinita de repeticiones.”*
- *La idea de probabilidad es empírica. Las simulaciones con ordenador parten de unas probabilidades predeterminadas e imitan un comportamiento aleatorio. Sin embargo, en el mundo real solamente podemos estimar las probabilidades observando muchos resultados de un determinado fenómeno.*
- *La probabilidad de un suceso es la proporción de veces que ocurre después de muchas repeticiones de un determinado fenómeno aleatorio.” (Moore, 2005, pp.276)*

Las citas precedentes dan cuenta de una noción matemática central en la construcción del sentido de la probabilidad: la idea de proporción de veces que ha salido cara en el lanzamiento de una moneda. Una proporción (o razón) que cambia a medida que se realizan más lanzamientos, pero que se aproxima a 0,5 que es su probabilidad. En estas citas se utiliza la noción de proporción para referirse a lo que otros autores denominan “frecuencia relativa” en un enfoque de la probabilidad empírica[29].

Por otra parte, N. Rouche[30] (1998) muestra que existe una ventaja desde el punto de vista matemático (formal), en representar las probabilidades a través de las fracciones. Afirma que la escritura fraccionaria es interesante como una *expresión* de las probabilidades, porque conserva claramente el número de casos posibles (en el denominador) y el número de casos favorables (en el numerador), pero hay mucho más: las leyes fundamentales de las probabilidades conducen a calcular con las fracciones.

“Tenemos 2 chances sobre 6 de obtener 1 o 2 al lanzar un dado. La probabilidad correspondiente es 2/6 o 1/3. Es interesante conservar aquí la escritura fraccionaria 2/6 (en lugar de 1/3), porque ella recuerda claramente el número de casos posibles (en el denominador) y el número de casos favorables (en el numerador). Sería

[29] En la experimentación desarrollada por Brousseau, y descripta en el apartado anterior, se denominaban “valores límites (supuestos)”, que se construían mediante el uso de la “propiedad de linealidad”, en la cual al doble de canicas de cierto color, le corresponde el doble de su valor límite o frecuencia.
[30] Cap. 7. Calcular con fracciones. Del libro: “*Pourquoi ont-ils inventé les fracctions?* Ed. Ellipses / édition marketing S.A. París.

menos sugerente decir que la probabilidad en cuestión vale 0,333…, o incluso que vale aproximadamente 0,333. De la misma manera preferimos decir, para la probabilidad de extraer un As de un mazo de 52 cartas, que vale 4/52 o 1/13 en vez de 0,07692307…" (Rouche, 1998, p.96)

Alatorre (2004), en su tesis doctoral, realiza un estudio del razonamiento proporcional. Una de las ideas que destaca - retomando una clasificación de tipos de problemas de razonamiento proporcional propuesta por Tourniaire y Pulos (1985) - es que los problemas de probabilidad son una clase especial de problemas que pueden invocar un razonamiento proporcional. No obstante, señala Alatorre, desafortunadamente esos autores solo mencionan el caso de la probabilidad, pero no lo incorporan en sus análisis posteriores (p.63).

En su tesis doctoral Block, (2001) realiza un estudio didáctico de la noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. En éste, señala la necesidad de indagar con más profundidad las formas en que la noción de razón interviene en dos de sus ámbitos característicos, el de tratamiento de la información y probabilidad (p.497). En su primer capítulo analiza y define la noción de razón y su presencia en la historia de las matemáticas y de su enseñanza:

"La noción de razón, en la enseñanza, tiene el sentido de una relación multiplicativa entre cantidades, más precisamente, un cociente, o una fracción (a su vez definida como un cociente). Esta es la forma en que esta noción fue definida en la teoría de las razones y las proporciones desarrollada en el siglo XVIII y vigente hasta mediados del siglo XX. Es la forma en que todavía se define en los textos escolares en los que aún constituye un objeto de estudio, casi siempre fugaz, y, podemos agregar, es la única definición precisa posible." (Block, 2001, p.32)

"Se llama razón o relación de dos números, el cociente del primero por el segundo (Leysenne, 1913:307)".

"Se llama razón geométrica de dos cantidades de la misma especie al cociente de los números que las miden." (Hernández, 1954:299 en Block, 2001).

Basándose en estudios con alumnos de primaria, Block (2001, 2007) demuestra que en un proceso de matematización y antes de disponer de las fracciones, es posible identificar en las producciones de los alumnos, un trabajo con las razones entendidas como parejas de números enteros, los cuales funcionarían como la forma implícita y "germinal" de las fracciones.

"Los alumnos de 4° a 6° grado de primaria que entrevistamos muestran poder resolver problemas del tipo "valor faltante" y "comparación de razones", que implican fracciones, tanto en el papel de expresar medidas como en el de expresar operadores multiplicativos, sin hacer explicitas las fracciones, manipulando razones de números naturales: "a de cada b", "a por cada b", "a entre b", en vez de "a/b de". En contra parte, muestran un bajo dominio de las fracciones.

Las mismas entrevistas permiten conjeturar que, al favorecer un trabajo con razones, además de poderse propiciar el desarrollo de la noción misma de razón, lo cual es un objetivo de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, se podría ayudar a enriquecer la noción de fracción que se estudia en este nivel: una medida fraccionaria, digamos ¾ de unidad, además de significar "tres partes de un cuarto de una unidad", podría vincularse con razones equivalentes del tipo "por cada 4, se dan 3", o "3 entre 4" a las que subyace dicha medida. El operador multiplicativo "a/b de" podría significar aquello que tienen en común todas las razones del tipo "por cada a, b"." (Block, 2007, pp. 510-511)

¿La noción de razón para construir la frecuencia relativa y la probabilidad?

Es importante destacar entonces las características de las razones (algunas definiciones y propiedades) que nos permitan luego considerar su papel en la construcción de las probabilidades. Pero antes, veamos algunas formas clásicas de presentar estas últimas.

Es habitual, por ejemplo en libros de texto, presentar la probabilidad clásica o a priori (o cardinalista), apelando a una expresión fraccionaria, en donde previamente se definieron las nociones de experiencia aleatoria, espacio muestral equiprobable, eventos, sucesos, y operaciones entre ellos (operaciones de la teoría de conjuntos, unión, intersección, complemento).

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

En algunos casos se advierte previamente que la probabilidad ES un número y que estará comprendido entre 0 y 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Otras presentaciones incluyen la noción de "cardinal" de conjuntos, y la probabilidad se define como:

$$P(A) = \frac{\#A \text{ (Cardinal de } A)}{\#S \text{ (Cardinal del espacio muestral } S)}$$

Asimismo, se acompañan de propiedades o "reglas":

- La probabilidad del conjunto vacío es cero. Si Φ, es la notación para el conjunto vacío, $P(\Phi) = 0$
- La probabilidad del espacio muestral es 1. Si S es el espacio muestral de la experiencia, entonces P(S)=1
- Si A es un evento y A^c su complemento entonces: $P(A^c) = 1 - P(A)$ o $P(A) = 1 - P(A^c)$
- Regla aditiva o regla de la adición: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Estas constituyen formas de presentar matemáticamente a la probabilidad a través de unas leyes generales sobre la cual se desarrolla toda una teoría, heredadas de una presentación axiomática del matemático ruso A. N. Kolmogorov (1903-1987).

El enfoque de la probabilidad denominado “empírico” o “frecuencial”, parte de la necesidad de repetir una experiencia aleatoria un cierto número de veces y registrar los resultados debido a la condición de que los eventos no tienen –necesariamente- la misma probabilidad de ocurrir (no son equiprobables). Este segundo enfoque es habitualmente acompañado de la noción de “Frecuencia” (absoluta y relativa, simple y acumulada) de un evento o suceso, a veces expresados bajo la noción de *cociente*, y otras recurriendo a las *fracciones*: Si se repite un experimento un número dado de veces y *A* es un evento de la experiencia, se llama *frecuencia absoluta* del evento *A* al número de veces que ocurrió *A* y se llama *frecuencia relativa* del evento *A* al *cociente* de la frecuencia absoluta de *A* entre el número de veces que se repitió el experimento. (Luego mediante tablas y gráficos se estudia el comportamiento de estas frecuencias).

La probabilidad bajo este enfoque se define como la *proporción* de resultados favorables al total de resultados y está dada por ($P(A) = \frac{N_A}{N}$), *pero* se basa necesariamente en la repetición de un experimento “muchas veces”, o sea en datos observados, no en el conocimiento previo de un proceso como el caso de la probabilidad clásica o cardinalista.

Hasta acá he presentado algunos elementos de la forma canónica de presentar la teoría de las probabilidades. Se destaca la presencia protagónica de nociones como *fracciones, decimales y porcentajes*, enfatizando la ausencia de énfasis en la noción de *razón.*

> *“Las nociones de razón y de proporción… desaparecieron totalmente del vocabulario “oficial” de los matemáticos. Los conceptos, en cambio, siguen siendo muy importantes: la construcción moderna (de las matemáticas) no los necesita en lo absoluto. Los ha sustituido por la noción de número. Pero la transposición didáctica de esta presentación “moderna” no tuvo éxito. En la génesis escolar de los conocimientos, los profesores necesitan distinciones de conceptos y de términos que estén al alcance de los alumnos. No es fácil saltar y borrar una actividad matemática y didáctica tri milenaria, para sustituirla de un golpe por términos y usos de expertos (Brousseau s/f en Ramírez, 2004: 30)*

Así, comprender estos objetos (fracción, decimal, porcentaje, probabilidad) como razones, constituyen un interesante camino para la realización de estudios didácticos.

La razón

A continuación abordaré con más detenimiento a la noción de razón para disponer de un marco teórico desde el cual seguir repensando a la probabilidad.

Freudenthal (1983) en su trabajo acerca de la *fenomenología de las razones*[31], ha destacado que la razón entre dos números a y b, entendida como relación "*a es a b*" y expresada como *a:b* se puede interpretar como la *fracción* $\frac{a}{b}$, o como el *cociente* $a \div b$ y también puede interpretarse como una *función*.

> *"La razón es una función de una pareja ordenada de números o de valores de magnitud. ¿Y qué ocurre con los valores de esta función? ¿Son de nuevo números, valores de magnitudes? Se puede interpretar así, aunque es un modo erróneo. En efecto esto identificaría la razón como el cociente. El significado de la razón es poder hablar de igualdad (y desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, poder decir significativamente "a es a b como c es a d" sin anticipar que "a es a b" puede ser reducido a un número o a un valor de magnitud $\frac{a}{b}$, que entonces es el mismo para "c es a d ", es decir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (…). La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas de números (o de valores de magnitud), formalmente indicada por a:b=c:d. (Freudenthal, 1983, pp.179-180)*

En efecto, la cita se conecta con dos puntos enunciados anteriormente: por un lado el interés didáctico de la razón como precursora de la fracción y la imposibilidad de sustituir conceptos milenarios de la aritmética por nociones modernas. Por otra parte lo que considera Freudenthal como un aspecto fundamental del sentido de las razones esta puesto en lo relacional más que en lo numérico, y aquí reside una importante diferencia con respecto a las fracciones. Constituye un motivo importante para no reducir a la razón bajo una expresión fraccionaria[32]. Freudenthal (1983), expresa además que la interpretación de la razón como un cociente o una fracción comporta una simplificación de su significado[33]:

> *"Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad [la de las razones], de bajar el estatuto lógico, a costa, como ocurre, de la lucidez." (p. 181)*

[31] En su obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Situations*.

[32] Como he presentado en párrafos anteriores, Rouche, que ha sido discípulo de Freudenthal, comenta que las fracciones son una buena manera de expresar razones o probabilidades, y tienen ventajas frente al uso del decimal. Freudenthal, habla del interés de preservar el sentido de la razón previo a la fracción. Podemos imaginar un recorrido donde las razones van de ser parejas de números, a expresarse con fracciones y luego, al final, decimales.

[33] Sugiere además, que uno de los elementos que configuran el sentido de las fracciones está dado por la noción de razón: *"Uno debe dudar de que las fracciones puedan enseñarse intuitivamente, si falta la intuición de la razón"* (Freudenthal, 1983, p. 181)

De esta manera, es importante que al representar una razón se conserve la idea de relación entre los dos números que la conforman y que, al hablar de su comparación (y en particular de proporcionalidad), esté presente la idea de relación *entre* relaciones[34]. A su vez, son estas comparaciones las que dan funcionalidad a las razones y las hacen emerger: por ejemplo cuando se pregunta cuál de dos naranjadas, mezclas de agua y jugo, sabe más a naranja, o que escuela de varias obtuvo los mejores resultados en un concurso, considerando el total de alumnos y el número de aprobados, o cual es el mejor jugador de tiros al aro a partir del total de tiros que hizo y los que encestó, se necesitan establecer relaciones entre pares de cantidades relacionadas entre sí (es decir, relaciones de relaciones).

Con respecto a la equivalencia de razones, Alatorre (2004) señala cuatro posibles maneras de definirla. Tomemos por ejemplo la proporción 3:2=6:4

- *Una manera de definir la equivalencia de las razones a:b y c:d, es decir, de definir la igualdad a:b=c:d, es mediante los productos cruzados. En este caso a:b=c:d si o solo si axd=bxc. (en el ejemplo 3x4 = 2x6)*
- *Otra manera es mediante un escalar. Entonces, decimos que a:b=c:d cuando si a=λc y b=μd (λ, μ є R). Entonces λ=μ (en el ejemplo λ=μ=0.5, ya que 3=0.5x6 y 2=0.5x4)*
- *Otra manera es recurrir a la equivalencia de fracciones. Entonces decimos que a:b=c:d cuando* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *(en el ejemplo* $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$*)*
- *Otra manera más es recurrir a los cocientes. Entonces decimos que a:b=c:d cuando* $a \div b = c \div d$ *(en el ejemplo 3*$\div 2 = 6 \div 4 = 1.5$*) (Alatorre, 2004, p.25)*

Estas cuatro formas de definir equivalencias presentan reducciones del significado de las razones por el recurso a fracciones, decimales y cocientes, y a técnicas como la de los “productos cruzados”. Existe otra manera de comparar razones, importante en la teoría clásica y usada por los alumnos y que no reduce: consiste en la búsqueda de razones equivalentes a la primera razón, con un término común, mediante el uso de la propiedad que afirma que a:b::na:nb. Por ejemplo para comparar 2:3 y 4:7, se usa la razón 4,6 equivalente a 2,3. La razón 4:6 que al ser distinta a 4:7 indica que no son equivalentes. Otro ejemplo: se puede afirmar que 3:2=6:4 porque al multiplicar 3 y 2 de la primera razón por el número 2 se obtiene la razón 6:4, que es igual a la segunda.

---

[34] “Los matemáticos griegos, para quienes sólo los naturales tenían el estatuto de números, desarrollaron una sólida teoría de las razones y proporciones. Esta contemplaba razones de números enteros, que corresponden a nuestros racionales positivos, y que de hecho eran estudiadas “como si fueran números” (prop. 5, Libro X de los Elementos), y razones de magnitudes geométricas inconmensurables que ahora identificamos con los números irracionales. La razón no era por lo tanto un número, de hecho, lo que fue objeto de definición precisa y de teorización fueron la equivalencia y el orden de las razones, no la razón misma. Esta última constituía una especie de elemento primitivo de la teoría, como puede apreciarse en la definición 3 del Libro V de los Elementos: <*“La razón es una especie de relación en el tamaño de dos magnitudes de misma especie”*> (Block, 2001, p.41-42)

Estas operaciones suelen ser bastante intuitivas cuando hay un contexto con magnitudes, por ejemplo, la naranjada que se preparó con 3 vasos de agua y 2 de jugo sabe igual que la que se preparó con 6 de agua y 4 de jugo. En el contexto de la probabilidad, se trata de suponer, por ejemplo, que un evento que tiene *a* casos favorables de un total de *b* casos posibles, tiene la misma probabilidad de ocurrir que uno que tiene *na* casos favorables, de *nb* casos en total. Pero en este contexto, la veracidad de dicho supuesto, dependerá también del número de ocurrencias: para a, b grandes, tenderá a ser verdadero, para a, b pequeños, no. Podríamos decir respecto a la probabilidad frecuencial o empírica, que establecemos relaciones *entre* relaciones (comparamos razones) cuyo comportamiento es tal que se aproximan a un cierto valor (límite teórico) al ocurrir muchas repeticiones del mismo fenómeno aleatorio. Estas razones permanecen ocultas (o implícitas) en la enseñanza habitual de la probabilidad, debido a que se enfatiza demasiado pronto su expresión fraccionaria o decimal, o en el mejor de los casos porcentual.

Abordar la probabilidad puede ser una ocasión para volver sobre estas nociones pocas veces bien comprendidas. De hecho, estas nociones, en particular razón y fracción, podrían fortalecerse mutuamente, aun reconociendo que la probabilidad trae consigo su propio “paquete” de sentidos y significados.

La probabilidad (y las estadísticas) abordan fenómenos que la sociedad actual requiere cada vez más, que tienen que ver con la comprensión de la aleatoriedad, la toma de decisiones frente a situaciones de incertidumbre en casos individuales y la posibilidad de predecir el comportamiento de grandes conjuntos de datos. Ciertamente, son otras situaciones (menos clásicas) en donde evidentemente vive la razón.

Razones internas y razones externas

Continuemos desanudando las razones, y creando marco para repensar la probabilidad. En párrafos anteriores vimos que el significado de la razón, como relaciones entre cantidades, emerge al compararlas entre sí más que en cuantificar su tamaño con un solo número, con lo cual es interesante recuperar la noción de “relación de relaciones” pues es allí cuando las razones cobran significación. Como ya vimos, uno de sus significados más potentes es la posibilidad que da de afirmar que “*a es a b como c es a d*”, sin acudir a los cocientes. También vimos que las razones se pueden expresar con fracciones, decimales, porcentajes, que son útiles pero que muchas veces reducen su significado. Por ultimo vimos que efectivamente las probabilidades, bajo su expresión fraccionaria, podrían “engrosar” los significados de la razón y mejorar su comprensión en este conglomerado de objetos que convergen, si repensamos el papel que en su génesis podría tener la noción de razón.

Analicemos ahora, con mayor detalle, esas relaciones que dan sentido a la razón. Freudenthal (1983) en su fenomenología de la razón y la proporcionalidad, distingue entre razones internas y razones externas, en el contexto referido a “espacios de medida”, los cuales él denomina “sistemas de magnitudes”[35]. En este marco determina que, cuando se consideran razones de parejas que pertenecen al mismo espacio de medida, se habla de razones internas y cuando se consideran razones de parejas que pertenecen a dos espacios de medida, se habla de razones externas.

Para ejemplificar estas razones, utiliza la noción de movimiento uniforme, en el cual considera que en un tiempo t_1 se recorre una distancia d_1 (relacionadas mediante una función lineal), y en un tiempo t_2 se recorre una distancia d_2. Las razones internas estarán representadas por las razones de parejas $d_1:d_2 = t_1:t_2$ (misma magnitud o espacio de medida). Por otra parte, las razones externas se representan por las razones de parejas $d_1:t_1=d_2:t_2$ (distintos espacios de medida).

En esta interpretación, afirma Freudenthal (1983, tomado de Alatorre, 2003, p.30)

- *La razón interna ocurre dentro de una magnitud (“withing a magnitude”)*
- *La razón externa ocurre entre dos magnitudes (“between magnitudes”)*

Además, cuando las razones son interpretadas como cocientes:

- *La razón interna es un número*[36]*.*
- *La razón externa es una magnitud*[37]*.*

En el marco de la TSD, Block (2001) en su tesis doctoral sobre la noción de razón, utiliza conceptos y fenómenos identificados del repertorio del trabajo de Freudenthal, pero las pone en funcionamiento a través de la noción de estructuración del “medio (milieu)” de la razón, y no de la identificación de fenómenos, como afirma el autor:

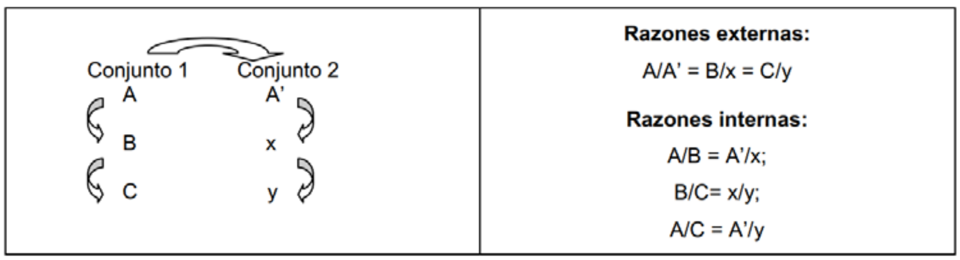
> *“(…) nuestro análisis del conjunto de situaciones que ponen en funcionamiento la noción de razón, consistió en identificar unas pocas situaciones fundamentales y las variables didácticas relevantes, y ciertos niveles de funcionamiento de la noción que no fueron consideradas en el repertorio de Freudenthal, que implican nociones*

[35] Construidos a partir de productos cartesianos entre números reales o naturales y una unidad de medida; una función definida de un conjunto de objetos medibles hacia el producto cartesiano; una relación de orden y dos operaciones: suma y producto por un escalar, para construir un *sistema* con ciertas propiedades como ley de cierre, asociatividad, conmutatividad, etc.
[36] Sin dimensión, por ejemplo un “número de veces”.
[37] Una nueva magnitud, que puede ser conceptualmente compleja de aprehender: densidad, velocidad, precio por kilo, probabilidad, etc.

básicas de matemáticas: la de medida, las de multiplicación y división. (Block, 2001, p.229)

Uno de los componentes de ese medio lo constituyen las razones internas y externas, que bajo esta última perspectiva (TSD), -y que adoptamos en el presente estudio-, se expresan de la siguiente manera:

"En un medio determinado, se establece una relación entre dos conjuntos de magnitudes, de medidas concretas, o de números. Los valores de un conjunto varían en función de los valores del otro. La relación se caracteriza por el hecho de que la razón entre dos valores cualesquiera de uno de los conjuntos es siempre igual a la que guardan los valores correspondientes del otro. Llamaremos a estas razones internas a cada conjunto. O bien, la razón que hay entre un valor de un conjunto y la que le corresponde en el otro es invariante (razones externas).



Podemos describir el funcionamiento del medio en esta situación como un autómata que, para cada valor del conjunto 1, genera un valor en el conjunto 2, y que se caracteriza por el hecho de que la razón entre cada uno de estos pares de valores es constante, aunque esto no está explícito en la situación. Dados los valores del conjunto 1, el problema consiste entonces en anticipar los valores correspondientes del conjunto 2, a partir de conocer por lo menos uno de los valores de éste último. Identificar una razón (interna o externa) y reproducirla constituye entonces el procedimiento de resolución. Esta situación incluye a la situación típica de anticipar el cuarto valor faltante en una proporción (problemas de cuarta proporcional). (Block, 2001, pp. 52-53)

En este estudio, Block (2001) identifica estas razones como variables numéricas de las situaciones fundamentales de la razón y su comparación. Como puede observarse en el esquema anterior existen muchas razones internas diferentes mientras que la razón externa es constante. La riqueza de las razones se expresa así en estas relaciones numéricas que favorecen la comprensión de muchos fenómenos que la matemática modeliza. Veamos que otras características o propiedades tienen las razones:

- *Mientras las razones internas expresan la variación de una cantidad a otra en un mismo conjunto, las razones externas expresan un "estado", al cual corresponde un nuevo concepto, una cantidad "intensiva". (…)*
- *Mientras la razón externa no se cuantifique, esta "cantidad intensiva" se expresa mediante una relación entre dos cantidades.*

- *Los valores numéricos de las razones interna y externa*[38] *tienen por lo tanto funciones y características dimensionales muy distintas:*
  a) Los operadores internos son siempre escalares, números sin dimensión que dan cuenta de una comparación multiplicativa entre dos valores de un mismo conjunto. Mediante estos es posible generar razones externas equivalentes, es decir, "estados" equivalentes.
  b) Los operadores externos tienen dimensión cociente, expresan la medida de una nueva magnitud. Esta característica añade una dificultad adicional considerable a este recurso. Solo cuando la razón externa es homogénea (misma magnitud y misma unidad) estos operadores pueden ser asimilados a un operador sin dimensión. Este es el caso más favorable para la utilización de un operador externo constante. (Block,2001, p.114)

Otra característica importante de las razones, internas y externas, es el conjunto numérico al que pertenecen. Dado que en determinadas situaciones fundamentales de la razón intervienen dos tipos de razones, internas y externas, hay dos variables: la razón interna natural o racional y la razón externa natural o racional.

Estas variables favorecen la aparición de estrategias o procedimientos (efectos), que pueden ser internos (conservación de la suma, de las razones internas, del paso por un valor unitario), o externos (mediante el uso de un operador). Asimismo, destaca Block[39] (2001, p.118), lo anterior da solamente un panorama parcial dado que se considera la variable "razones naturales y no naturales" y no otras variables numéricas, por ejemplo el tipo de números que expresan las cantidades (grandes, pequeños, naturales, racionales).

En el siguiente esquema se presentan los procedimientos internos y externos (filas) a partir de las cuatro variables didácticas consideradas (columnas):

- *Conservación de la suma (CS)*: es utilizado cuando la razón interna es entera, y la razón externa puede ser entera o racional. En la misma se pone en juego una propiedad específica de la linealidad. Ejemplo: *"Un comerciante vende melones a razón de 2 por 10 pesos, ¿cuánto hay que pagar por 6 melones?"* (razón externa entera), pero podría preguntarse también *¿cuánto hay que pagar por 6 melones si ahora 2 melones cuestan 5 pesos?* (razón externa racional). Los procedimientos podrían llevar en el primer caso a sumar consecutivamente el número de melones de 2 en 2 hasta llegar a 6 y el precio de 10 en 10 hasta llegar a 30. Análogamente

[38] El autor llama "operadores" a los valores numéricos de las razones.
[39] En su tesis doctoral realiza un estudio detallado en el cual identifica algunas situaciones fundamentales de la razón (entre magnitudes, una magnitud y una medida, dos medidas, etc.). Aquí consideramos solo algunas características, parciales, pero que pueden contribuir a describir ciertos procedimientos que desarrollan los alumnos frente a una situación donde interviene la noción de probabilidad y estadística.

en el segundo caso sumar 2 hasta llegar a 6 y el precio de 5 en 5 hasta llegar a 15.

	Razón Interna	N		Q	
Variables	Razón externa	N	Q	N	Q
	Ejemplo	2→10 6→ x	2→5 6→x	2→10 3→x	2→5 3→x
Proced. Internos	CS Conservación de la suma	2→10 **+2** **+10** ... ... 6→ 30	2→5 **+2** **+5** ... ... 6→15	No es posible	No es posible
	CRI Conservación de las razones internas	2→10 **X3** **X3** 6→ 30	2→5 **X3** **X3** 6→15	improbable	improbable
	VU Valor unitario	2→10 **1→5** 6→ 30	2→5 **1→5/2** 6→15	2→10 **1→5** 3→15	2→5 **1→5/2** 3→7½
Proced. Externo	Op Operador	**X5** 2→10 6→ x	**X5/2** 2→5 6→15	**X5** 2→10 3→15	**X5/2** 2→5 3→7½

- *Conservación de las razones internas (CRI)*: ocurre cuando se realizan primero las sumas en el primer conjunto y se cuenta el número de sumandos, este último es la razón interna. El número de veces que se repite en el primer conjunto es el mismo que en el del segundo, lo cual arroja la noción de "conservación". En el ejemplo presentado anteriormente, las relaciones se expresan mediante una multiplicación por 3 en el conjunto de melones y el de sus precios correspondientes[40].
- *Valor unitario (VU)*: el paso por este valor puede ser un procedimiento más accesible que determinar la razón interna, por ejemplo en los casos donde el valor que se busca es mayor que el valor conocido: *"Si 6 melones cuestan 18 pesos, ¿cuántos costarán 2 melones?"*. Sin embargo requiere de un estudio más detallado, tal como el realizado por Block (2001) puesto que el carácter entero o

[40] Block (2001) realiza un estudio detallado del paso de conservación de sumas a las de las razones internas. Asimismo incorpora otro procedimiento, denominado CL: el de las Combinaciones Lineales, donde se combinan los procedimientos CS y CRI.

no entero de la razón externa (y la interna) afecta la dificultad de los problemas (pues el valor unitario será no entero), generando un conjunto de variaciones en las relaciones que se establecen entre los conjuntos considerados (y en consecuencia distintos tipos de problemas).

- *Operador (OP)*: se presentan en situaciones en las cuales se cuantifica una razón externa constante mediante un operador multiplicativo natural o racional. Lo invariante ahora se cuantifica mediante un factor constante. Este operador también genera una serie de variantes con distinto nivel de dificultad de acuerdo a si las razones internas y externas sean naturales o no. Asimismo, como afirma Block (2001, p.190) constituye una ocasión en que un significado de las *fracciones* se construye a partir de una relación entre dos cantidades naturales: las fracciones como *medidas* y como *relaciones*[41].

Los procedimientos de esta lista, sin embargo, no están “igualdad de condiciones”, en el sentido de que no son igualmente accesibles para los alumnos y, también, de que tienen distinta presencia en la conciencia de los docentes. Al respecto comentaré brevemente un estudio didáctico de Ramírez (2004), sobre el tema proporcionalidad, con un maestro reconocido en su escuela, con 18 años de experiencia, y alumnos de sexto grado. A lo largo de 12 clases observadas, la investigadora destaca en los procedimientos de los alumnos, la *funcionalidad* de las razones internas, manteniéndose como un conocimiento *implícito* (útil) para ellos, pero a la vez ella observa que, en la gestión del maestro en la clase, dichos procedimientos no alcanzan un estatus de saberes institucionalizados (objeto). En cambio las razones externas sí son identificadas por el docente como un objeto de enseñanza, relacionándolas con las fracciones, aunque resultan poco accesibles para los alumnos. Ambas, para la autora, conforman dos tipos de dificultades observadas en las clases.

> *“En los momentos en que las razones internas estuvieron presentes, el maestro no hizo explícito el conocimiento que estaba en juego. Este silencio puede tener su origen tanto en la tendencia del profesor a identificar la noción de razón con una razón externa y ésta con una fracción, como en el hecho de que la propiedad de la conservación de las razones internas, y de la técnica basada en ésta, carezcan de un nombre propio, dando lugar a un vacío conceptual que en la práctica podría conducir no sólo a establecer una identidad entre razones internas y tablas de variación, entre una noción y una herramienta, sino a no reconocer, o incluso inhibir*

[41] La fracción *b/a* es la *medida* que *a* veces es igual a *b*; pero también la relación que a la cantidad *a* se asocia la cantidad *b* o que a *1* le asocia *b/a*; o incluso el número que multiplicado por *a* es igual a *b*. Por ejemplo la fracción 2/5 puede ser la medida que 5 veces es 2, pero también la relación que a 5 le asocia 2 o que a 1 le asocia 2/5; o el número que multiplicado por 5 da como resultado 2.

> *el desarrollo de procedimientos que resultan más accesibles para los alumnos. Las razones internas se usaron pero no fueron motivo de enseñanza, por lo tanto, tampoco representaron un saber que el maestro considerara necesario institucionalizar." (Ramírez, 2004, pp. 231-232)*

El porcentaje

Es usual expresar las probabilidades en términos de *porcentaje*, y ésta última es una noción que no se escapa a la interpretación en términos de razones, sino que "*vive*" y es su razón de ser, la razón. Mendoza (2007), ha realizado un estudio didáctico[42] en el cual ha puesto de relieve algunos rasgos de los conocimientos de dos grupos de estudiantes de primer año de nivel secundario, poniendo atención en las relaciones entre estos conocimientos (*porcentajes*, *razones*, *fracciones* y *decimales*) y las características de las situaciones en las que se ponen en juego.

En un análisis didáctico-matemático del porcentaje, Mendoza (2007) ubica la noción, como una razón, que puede expresarse mediante una fracción o un decimal; considera la posibilidad de estudiarla como una relación entre dos cantidades ante de verla como número y caracteriza los modos de utilización por parte de los alumnos de esta noción: como una relación parte todo o, más difícil, parte parte, como una relación que asocia un total con el número arbitrario 100, como un operador fraccionario, como una cantidad absoluta (interpretación errónea), entre otras (Mendoza, 2007, pp.190-196)

2.5 Comentarios

En la primera parte del capítulo se abordaron las actividades de los estadísticos, y se incluyó la descripción breve de una experiencia de enseñanza de estadísticas y probabilidades dirigido por Brousseau de 1972 a 1974 con alumnos de una escuela primaria, que ha sido pionera y que nos deja ver un modo de abordaje de la probabilidad en el aula sin anteponer su medida expresada con fracciones o decimales. Es decir, que aunque implícita, evidencia claramente la presencia de la noción de razón.

Por otra parte, hemos reflexionado acerca de conceptos como sentido estadístico, ideas estadísticas fundamentales, modos de razonamiento estadístico, provenientes de un campo relativamente nuevo que es el de la Educación Estocástica. Nos permitió tomar conciencia que el abordaje de escolar de estos temas tiene necesariamente un enraizamiento en la cultura y la sociedad, que cada vez necesita más conocimientos y habilidades para comprender información estadística y tomar decisiones en contextos donde interviene la aleatoriedad.

---

[42] Mediante la aplicación de un cuestionario, entrevistas y de una secuencia didáctica.

Un asunto fundamental del marco epistemológico de referencia, es la problemática conceptual de la probabilidad y las relaciones con *las razones, las fracciones, los decimales, y porcentajes*. Notemos que una de las nociones que desanudan las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, es la de la razón, y el reconocimiento de su rol funcional y muchas veces implícito en situaciones didácticas. En efecto, si las fracciones presentan ventajas para expresar las probabilidades, entonces las razones, en tanto precursoras de las fracciones, deberían jugar un rol fundamental.

La última parte de este capítulo se dedicó al análisis de las características de las razones. Identificamos que estas no son útiles solamente cuando se abordan situaciones deterministas, sino que también viven en situaciones donde hay aleatoriedad. Al recurrir a la fenomenología de Freudenthal así como a la noción de situaciones fundamentales y elementos del medio de las razones de Brousseau y Block, emergen nuevas relaciones que abren posibilidades al estudio de la probabilidad, como lo que ocurre cuando se piensa en términos de razones internas y externas, y las variables que se derivan de ellas.

El recorrido realizado también deja ver algunas de las causas de las dificultades que se presentan en su enseñanza y su aprendizaje. Por ejemplo la imposibilidad de prever lo que saldrá en la tirada siguiente debido a la aleatoriedad pero que hay una regularidad si se repite muchas veces; comprender que detrás de las formas canónicas como se presenta la probabilidad habitualmente (fracciones, decimales, porcentajes), está en juego la noción de razón; o el tránsito de la razón expresada con dos números naturales a la fracción y al decimal; o las variables que se ponen en juego cuando se consideran razones externas, internas, naturales y racionales, etc.

Finalmente, emerge de este capítulo que en el aula, la probabilidad conservará durante un tiempo prolongado un estatus de razón (tal como sucedió, implícitamente en la experiencia desarrollada por Brousseau) y luego se expresará como fracción o decimal, lo cual hace que el vínculo entre razones y probabilidad sea de cooperación epistémica: una suerte de “engrosamiento” de su significado. Invita además a estar atentos a su explicitación y su estatus, en los procesos de enseñanza y los de aprendizaje.

CAPITULO 3. ANALISIS A PRIORI Y DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

En este capítulo realizo una revisión de los contenidos de probabilidad y estadística, en los Programas de Estudio de Matemáticas de sexto grado de Primaria y de primero de Secundaria, para enseguida especificar los propósitos de la secuencia de situaciones didácticas aplicada y las fichas diseñadas. Se incluyen las características de la escuela, los alumnos, la profesora y los observadores que participaron en la recolección de los datos.

Para facilitar la lectura, explicitaré hasta el capítulo siguiente una parte del análisis a priori de las situaciones didácticas que fueron objeto de estudio, junto con el análisis de su experimentación.

3.1 Marco curricular

De acuerdo a los propósitos generales de los Programas de Estudio de Matemáticas para la Educación Básica (SEP, 2011) se pretende que los niños y adolescentes, a lo largo de toda su escolaridad,

> *"Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos. Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución. Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo." (p.13)*

Educación Secundaria. Entre los propósitos generales para los tres años, se espera que los alumnos utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos; que emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o graficas de diferentes tipos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas; que identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, y calculen valores faltantes y porcentajes utilizando números naturales y fraccionarios como factores de proporcionalidad. Finalmente, se pretende que calculen la probabilidad de experimentos aleatorios simples, mutuamente excluyentes e independientes, entre otros (p.14)

Además, los conocimientos en este período se organizan en cuatro *Estándares Curriculares* donde cada uno de ellos comprende una serie de aprendizajes esperados:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Estos estándares, se organizan por asignatura, grado y bloque. Las *Nociones de probabilidad*, se ubican en el estándar 3. *Manejo de la información* y se distribuyen en cada año y periodo escolar en cinco bloques. En primer grado (12-13 años) se propone trabajar con juegos de azar sencillos, registro y anticipación de resultados, por ejemplo mediante el uso de una tabla de frecuencias, y comparaciones cualitativas de la probabilidad. En segundo grado (13-14 años) la realización de experimentos y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial y teórica e identificación de eventos complementarios, excluyentes e independientes. En tercer grado (14-15 años) se apunta al cálculo de probabilidades de eventos complementarios, mutualmente excluyentes e independientes.

Desde esta perspectiva curricular las nociones de probabilidad se presentan aisladas de las fracciones y decimales. Los porcentajes, sin embargo, se explicitan en el punto *3. Manejo de la información*. Por otra parte se observa la ausencia de la noción de razón en Secundaria.

Educación Primaria. Me interesó conocer qué antecedentes tenían los alumnos en su paso por la primaria. Surgió entonces la revisión del programa de sexto grado. Allí se propone la resolución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales, decimales y fraccionarios; conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa; y resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “a/b de n”. También se propone la resolución de problemas que aborden la noción de porcentaje; y en estadística, lectura de datos en tablas, gráficos circulares, y uso de la media, mediana y moda. Asimismo, se incluye la comparación de razones del tipo “por cada n, m”, mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de una razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.

Cabe destacar que en este programa de sexto grado de primaria (SEP, 2011) no se encuentra la noción de probabilidad. Esto quiere decir que los alumnos la estudiarán por primera vez en primer grado de secundaria[43].

Por otra parte, en sexto los alumnos estudian la noción de razón y su expresión como un número entero, fraccionario o como porcentaje, lo cual constituye un antecedente destacado para el estudio de la probabilidad en primer grado. Considero además que la reconstrucción de la razón y su expresión fraccionaria en el ámbito del estudio de la probabilidad, implica una dificultad adicional, por lo que consideré adecuado realizar estudios didácticos en primer grado de secundaria. Parto entonces de la hipótesis de que, los alumnos podrían disponer de recursos aritméticos (“viejos”: la razón, el porcentaje, las fracciones, los decimales) que nos interesa poner en relación con la probabilidad para construir “nuevos” conocimientos.

La visita a los programas de estudio, como parte del análisis previo de la ingeniería, fortalece la hipótesis acerca de la conveniencia de diseñar una secuencia de situaciones en la cual sea posible el encuentro entre objetos matemáticos que se presentan separados desde este punto de vista curricular. Por una parte, notamos que van por un lado probabilidad y los porcentajes; y por otra parte las fracciones, los decimales y múltiplos de naturales. La razón está ausente como contenido explícito en la escolaridad secundaria. Lo anterior constituyó un motivo más para considerar la pertinencia de la situación fundamental de las botellas con canicas, al ofrecer un contexto donde estas nociones pudieran emerger de forma integrada.

En particular, interesa poner en juego las razones (y su comparación) que, según los programas, fueron estudiadas en sexto grado de primaria, en diálogo con las fracciones que expresan una probabilidad, en su significado clásico, o como frecuencias en su significado empírico, o expresadas como cocientes, decimales, o porcentajes.

La hipótesis anteriormente mencionada (recursos viejos al servicio de elaborar otros nuevos) puede precisarse al considerar que, al producirse el encuentro entre los objetos matemáticos, habría un “engrosamiento” de significados tanto de las nociones aritméticas de razón y porcentaje, fracción y decimal como de la noción de probabilidad.

[43] En los programas del 2011 se eliminaron los contenidos de probabilidad de primaria no porque no se consideraran pertinentes, sino por una política que buscaba adelgazamiento del currículum para dejar únicamente contenidos básicos. En los nuevos programas, aun no vigentes, se contempla volver a incluir contenidos de probabilidad en primaria (Información proporcionada en entrevista con el Dr. Block, colaborador de SEP en la reforma del 2011)

Que en ese encuentro con la probabilidad el conjunto de nociones: razón, fracción, decimal y porcentaje adquieren nuevos sentidos como herramientas que permiten modelizar matemáticamente un fenómeno aleatorio.

3.2 La secuencia de situaciones didácticas y el objeto del estudio

Para abordar el objeto de investigación de este estudio didáctico, se ha diseñado una secuencia de situaciones didácticas, que permita estudiar las interacciones que se dan en el salón de clases entre los alumnos, la profesora y un medio.

Esta secuencia está estructurada en dos fases compuestas por seis lecciones en total. La *primera fase* con dos problemas (lecciones): “Tiros al aro y Concurso entre alumnos de escuelas”, tiene por objeto retomar las nociones aritméticas de razón y fracción entre otras, posiblemente estudiadas en sexto grado. Se crean condiciones para establecer relaciones parte todo entre cantidades (tiros encestados y total de tiros, y alumnos que pasaron el concurso y total de alumnos de las escuelas) en contextos conocidos. Se espera traer a la memoria colectiva de la clase, ciertos conocimientos, tareas, técnicas, tecnologías y teorías que puedan ser insumos para abordar las situaciones siguientes. La *segunda fase,* con cuatro lecciones, constituye una adaptación de una parte de la secuencia de las botellas con canicas (máquina de azar), situación fundamental de las probabilidades y las estadísticas diseñada originalmente por Brousseau, y ya reseñada en el capítulo anterior.

En el siguiente apartado explicito los propósitos generales de cada fase, y al final del capítulo, en el apartado 2.4, los propósitos de cada lección, incluyendo una breve descripción de las mismas. En los anexos se presentan las fichas para el docente.

3.2.1 Propósitos de cada fase

FASE 1: ¿Es mucho o es poco? • Lección 1.1 Tiros al aro • Lección 1.2 Concurso, ¿cómo cuidamos el planeta?
Que los alumnos establezcan relaciones entre cantidades absolutas, para construir la noción de cantidades relativas, a través del uso de diferentes procedimientos de comparación de razones, fracciones y decimales. Se pretende realizar un trabajo que implique poner en relación cantidades absolutas, a través del uso de razones, fracciones y decimales. Además en el desarrollo

de esta fase los alumnos tendrán oportunidad de utilizar procedimientos con apoyo de nociones conocidas, como la descomposición de un producto de números naturales en sumas reiteradas, y las nociones de doble, triple, mitad, tercios y quintos. Se quiere verificar si el trabajo previo con cantidades absolutas y relativas podría favorecer la entrada al estudio de la probabilidad.
FASE 2: Botellas con canicas, ¿cuántas de cada color? • Lección 2.1: Presentación de la experiencia • Lección 2.2: Rondas de 5 tiradas • Lección 2.3: Una cierta botella "Z" • Lección 2.4: ¡Calcula, apuesta y gana!
Estudiar un modo de acercamiento a la probabilidad a través de un experimento aleatorio donde los alumnos deben analizar series de tiradas, poner a prueba conjeturas y formulaciones sobre cómo validarlas. En particular, interesa estudiar la funcionalidad de las razones, fracciones, decimales, en un contexto de azar, y en la construcción de la noción de probabilidad. Asimismo, estudiar los sistemas de prácticas estadísticas que se ponen en juego en un experimento aleatorio: obtención de los datos, recuento, formas de registro, y las hipótesis que se formulan y se validan y sus relaciones con la construcción de la noción de probabilidad en su expresión fraccionaria o decimal.

3.2.2 La escuela, la profesora, los alumnos, y los observadores

La experimentación se llevó a cabo en la Escuela Secundaria Técnica No.31 "Ing. Roberto Medellín Ostos", en la colonia Lindavista, de la Ciudad de México. Las sesiones fueron desarrolladas por una profesora de esa misma escuela, con dos años de antigüedad en la docencia y con conocimientos sobre didáctica de las matemáticas, en particular conceptos fundamentales de la TSD.

El grupo de primer grado de secundaria en el que trabajamos, estuvo conformado por 42 alumnos, con edades comprendidas entre los 13 y 14 años. Junto con la profesora, se decidió organizar al grupo de alumnos en siete equipos de seis integrantes. La profesora decidió que los equipos fueran heterogéneos desde el punto de vista del rendimiento de los alumnos en las clases. Los equipos estuvieron conformados por los mismos alumnos durante toda la experimentación.

Debido a la gran cantidad de alumnos, la posibilidad de recolectar mayor información y las interesantes discusiones que se produjeron en las sesiones, opté, en acuerdo con mi asesor y con anuencia de la profesora, por incorporar a dos nuevos observadores, quien, junto conmigo, haría cada quien el seguimiento de uno de los equipos hasta la finalización de la experimentación. Cada observador estuvo a cargo de la elaboración de notas y grabaciones de audio. Una observadora más videograbó todas las sesiones, realizando el seguimiento a un equipo y la filmación de los momentos de interacción colectiva (puestas en común, debates, institucionalizaciones, presentación de consignas, uso del pizarrón). Con esta organización hemos logrado tener suficiente información para realizar el análisis a posteriori de lo que sucedía en la clase, y las interacciones en cuatro equipos[44].

La secuencia de situaciones fue desarrollada en cinco sesiones de cien minutos[45], los días viernes, durante el mes de noviembre hasta mediados de diciembre del año 2017. La decisión de experimentar un día a la semana permitió realizar adaptaciones entre sesiones, organizar las informaciones recolectadas, iniciar las transcripciones y permitir que la profesora en los otros días pudiera continuar con el proceso de enseñanza habitual de los temas previstos en su planificación institucional.

Para asegurar en la medida de lo posible una buena comunicación con la docente, llevé a una reunión previa con ella, una entrevista entre sesiones, y numerosas comunicaciones por correo electrónico entre cada clase.

Debido a lo larga duración de las sesiones, en cada una se desarrollaron entre una y dos situaciones que requerían de la profesora de una gestión particular: una breve presentación de la lección o su lectura colectiva, un momento de trabajo en equipos, y breves puestas en común e institucionalizaciones.

3.2.3 Las fichas para la profesora

La secuencia de situaciones didácticas se presentó a la profesora en el formato de “Fichas”, elaborada a partir del proceso de selección y análisis a priori de problemas.

Contiene una breve guía de uso, los problemas listos para proponer a los alumnos (consignas, lecciones), los propósitos y la gestión de la clase (organización de los

[44] En el Anexo III puede observarse la distribución en el aula de los cuatro equipos de alumnos a los que hicimos seguimiento, y las sesiones en que se incorporaron los observadores.
[45] Inicialmente fueron planificadas para desarrollarlas en ocho sesiones de media hora y para equipos de 3-4 integrantes.

alumnos, tiempos destinados para abordar cada inciso o pregunta del problema, momentos de puestas en común, y de institucionalización). También se incluyen comentarios o anticipaciones sobre los problemas, posibles respuestas de los alumnos, aspectos a destacar o a institucionalizar en las puestas en común, y otras sugerencias para su gestión en el aula.

Con estas fichas se busca proveer a la profesora de insumos didácticos de apoyo para el desarrollo de las lecciones. Naturalmente, algunas lecciones fueron transformadas en su puesta en escena (momento de acción), advertidas por la profesora “en acto” es decir durante la sesión en la que se desarrollaba.

3.2.4 La secuencia aplicada

<table>
<tr><th>Sesión</th><th colspan="2">Situación didáctica</th><th>Propósitos y comentarios</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1
10/11/17</td><td rowspan="2">Tiros al aro</td><td>Incisos
1, 2 y 3</td><td rowspan="2">• Revisitar nociones como las razones y en menor medida las fracciones.
• Utilizar diferentes procedimientos para comparar razones y fracciones.
• Las cantidades que se presentan son menores a 30 y múltiplos de 2, 3, 5, 8 y 10, lo cual podría favorecer que los alumnos las pongan en relación, y emerjan procedimientos usando dobles, triples, medios, tercios, quintos y decimos.

El problema propone en un contexto de juego de tiros al aro, comparar pares de tiros y encestados, y establecer un orden entre ellos. En los incisos 1, 2 y 3, los pares: (3,7) y (2,4); (4,6) y (3,7); (5,4) y (6,10) respectivamente. En el inciso 4 deben calcular los tiros o encestados correspondientes a varios jugadores, conociendo la relación (razón) expresada como una fracción. El “mejor jugador” será aquel cuya relación (razón) de tiros y encestados es mayor que la de otros jugadores.</td></tr>
<tr><td>Inciso 4</td></tr>
<tr><td>Concurso: ¿Cómo cuidamos el planeta?</td><td>Incisos
1 y 2</td><td>• Que los alumnos utilicen diferentes procedimientos para comparar razones y establezcan un orden entre ellas, expresadas como fracciones, decimales o porcentajes.
• En particular interesa que noten la necesidad de establecer relaciones entre parte y todo para aproximarse a la noción de frecuencia (o cantidad) relativa. Por ejemplo, notar que aunque las cantidades absolutas son iguales, o una más grande o más pequeña que la otra, al comparar las relativas (que consideran los totales), estas relaciones pueden cambiar.
• Además se pretende que los alumnos expresen den significado a la expresión de las razones mediante decimales y se aproximen a la noción de “orden” de las razones y cuando varían</td></tr>
</table>

2 17/11/17	Concurso ¿Cómo cuidamos el planeta?	Inciso 3	entre 0 y 1. *El problema propone, en un contexto de comparación de cantidades de alumnos (totales y quienes pasaron a una próxima etapa de un concurso), determinar si se puede saber o no cuáles grupos tuvieron los mejores resultados. Se busca poner en juego la noción de cantidades "relativas".*
		Inciso 4	*En los incisos 1 y 2, se propone poner en relación los pares del tipo (alumnos aprobados, total de alumnos) de escuelas A: (70, 300); B: (28, 30); C: (28, 120) y D: (12, 120). Luego se pide interpretar las fracciones "alumnos aprobados/total de alumnos" y ubicarlas de manera aproximada en un segmento que representa el intervalo 0-1.* *En el inciso 3 se da la fracción 3/7 como único dato de una escuela "E" y se pide compararla con las anteriores. En el inciso 4 se da el decimal 0.3 y se pide lo mismo. Con estos últimos se busca promover la idea que tanto las fracciones como los decimales dan cuenta de una relación entre cantidades y a su vez pueden "generar" pares que cumplan con esa relación.*
	Botellas con canicas	Inciso 1	• Que los alumnos comprendan las reglas del experimento, y puedan diferenciar una tirada de una ronda o serie de tiradas, que elaboren registros de resultados para establecer las primeras conjeturas acerca del contenido de las botellas. • Instalar un medio que permita la producción de conjeturas que se irán enriqueciendo con las diversas repeticiones del experimento. • Analizar los tipos de registros que surjan de las producciones de los alumnos, y sus argumentos al momento de comunicar las primeras conjeturas. En particular las primeras relaciones entre cantidad de fichas blancas y negras con una serie de tiradas y el contenido de la botella. *En los incisos 1 al 4, se propone un trabajo de exploración con las "botellas de*

3 24/11/17	Botellas con canicas	Incisos 1 a 4	*Brousseau", oscuras u opacas, que contienen cinco canicas en total, donde algunas son blancas y otras negras, y cuyo desafío consiste en decidir si es posible conocer su composición (cantidad de cada color). Cada equipo tiene tres botellas, llamadas A, B y C, cada una con una composición diferente. Estas primeras exploraciones permitirán conocer su funcionamiento como una "máquina de azar", generar series de datos, y la necesidad de registrarlos, compararlos y con ellos formular las primeras conjeturas acerca de sus composiciones.*
	Rondas de 5 tiradas	Incisos 5 al 8	• Distinguir entre la cantidad de veces que se observan canicas de cierto color y la cantidad de veces que aparece cierto color en determinado número de repeticiones del experimento (es decir diferenciar cantidad absoluta de relativa) así como cantidad de canicas de ese color que hay en la botella. • Considerar la razón como una herramienta que da una información más completa para decidir si es posible conocer la composición. Por ejemplo no es lo mismo decir que se observó 5 veces una canica blanca, que decir se observó 5 veces una canica blanca en un total de 20 repeticiones del experimento. • Analizar si los registros que se proponen, a través de la organización de resultados en una tabla, favorecen la construcción de nuevas conjeturas y ver si se pone a prueba o se modifican o transforman las formuladas en la sesión anterior. Es decir interesa poner en diálogo relaciones entre las botellas con canicas (máquina de azar) y las estadísticas observadas. *Los incisos 5 al 8, proponen realizar 10 y 20 rondas de 5 tiradas, reformular las conjeturas hechas en la situación anterior, y promover la diferencia entre resultados de una serie de tiradas y las composiciones posibles de la botella, y también aumentar el número de datos disponibles.*

<table>
<tr>
<td rowspan="3">4

1/12/17</td>
<td>Rondas de 5 tiradas</td>
<td>Inciso 9</td>
<td>Se plantea la pregunta sobre qué resultados arrojarían 100 nuevas rondas de 5 tiradas. Ésta quizás favorezca establecer relaciones multiplicativas (o aditivas) entre el número de lanzamientos y el de veces que ocurre cierto resultado, para estimar lo que podría suceder (a futuro) al aumentar el número de repeticiones del experimento.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Una cierta botella Z</td>
<td>Inciso a)</td>
<td rowspan="2">• Propiciar el uso de las nociones abordadas en las situaciones anteriores, a fin de posibilitar la construcción de una estrategia para decidir cuál podría ser la composición más probable de la botella.
• Asimismo que los alumnos expliciten las relaciones (mediante el uso de razones, fracciones y decimales) entre cantidad de canicas de cada color y el total de canicas de la botella, que permitan tomar decisiones sobre la composición.
• En toda la segunda fase interesa estudiar de qué manera las razones se utilizan como una herramienta para la toma de decisiones en un contexto aleatorio.

En el inciso a) se presenta una tabla con resultados de 20, 30, 40 y 50 tiradas de una botella “Z”, en donde se pregunta en base a esos datos por cuál composición apostarían y cuáles descartarían. Los pares de canicas blancas y negras de esas tiradas son: (13, 7); (20, 10); (22,18) y (31, 19).

En el inciso b) se pide que realicen cocientes de cantidad de blancas entre total de tiradas, y se pregunta si la información que aportan dan posibilidades de conocer la composición[46].</td>
</tr>
<tr>
<td>Inciso b)</td>
</tr>
</table>

[46] Nota: La situación continúa con incisos c) y d), que buscan promover la idea que no se puede saber qué resultado saldrá en la próxima tirada, pero si se repite muchas veces, hay un patrón, regularidad o tendencia (en contexto aleatorio), bajo la noción de frecuencias acumuladas y su registro en tablas. Estos incisos, que están en las fichas, no hemos tenido oportunidad de experimentarlos, debido a la proximidad del fin de año. Entonces, optamos continuar en la última sesión, luego de los incisos a) y b), con una adaptación del juego denominado por *Brousseau*: *“Juego fundamental de los test de hipótesis”, que en esta secuencia lo titulamos: ¡Calcula, apuesta y gana!*

5 15/12/17	¡Calcula, apuesta y gana!	Juego	• Utilizar procedimientos de comparación de razones entre cantidades de canicas blancas y total de canicas, obtenidas con muchas tiradas de botellas con canicas (tiradas realizadas mediante un programa pseudo aleatorio[47] gestionado por la profesora), para decidir la composición de las botellas • Expresar las razones mediante fracciones, decimales, porcentajes, o alguna combinación de ellas. • Establecer que las razones entre blancas y el total de tiradas, se aproximan a la razón entre blancas y total de canicas de la botella, cuando se aumenta la cantidad de tiradas; y que esa aproximación es tanto mejor cuando mayor es el número de datos que se recolectan de la experiencia. De esta manera, tener una aproximación a la ley de los grandes números. *Se propone realizar un juego de apuestas entre equipos, sobre la composición más probable de botellas con canicas. El simulador virtual que se utiliza permite obtener rápidamente resultados de muchas tiradas. Cada equipo de alumnos dispondrá de fichas, cada una de ellas podrán intercambiar por resultados de 20 repeticiones del experimento y apostar en base a esos datos y su tratamiento, la composición más "probable".*

[47] Un programa pseudo aleatorio es un modelo computacional que simula un comportamiento aleatorio (impredecible), mediante la aplicación de un algoritmo (iteración de una función determinista).

3.3 Comentarios

La revisión del marco curricular ha confirmado la pertinencia del acercamiento por el que opté en el presente estudio didáctico de la noción de probabilidad. Por una parte, a partir de primer año (y quizás un poco antes) se proponen conocimientos fuertemente algebrizados. La noción de razón es vista por última vez en sexto grado de nivel primario, desaparece como contenido explícito del programa de la secundaria, Este último punto ha llevado a preguntarme, de qué manera se podrían vincular la probabilidad y las razones, en ese momento de tránsito, complejo, de continuidades y rupturas, de lo aritmético y lo algebraico.

Considero que, desde, el punto de visto curricular, para lograr que las competencias aritméticas desarrolladas por los alumnos en la escolaridad primaria sean insumos, de la construcción del sentido de la probabilidad en secundaria, es necesario organizar el tránsito de la expresión de la razón como relación entre dos cantidades, a su expresión fraccionaria, o decimal, y como porcentaje.

Confirmamos también que el primer grado de nivel secundario es una población adecuada para el estudio de la noción de probabilidad, con alumnos con edades de 13-14 años.

Por otra parte, en este capítulo se presentó el análisis a priori, y diseño de la secuencia de situaciones didácticas para experimentar. La intención general es la de producir un medio que evolucione (mediante el afinamiento de recursos conocidos) de tal manera que dé lugar a una génesis de la noción de probabilidad, incluyendo su expresión como fracción. Es decir, se busca que las expresiones fraccionaria, decimal, y porcentual de la probabilidad se enriquezcan de los sentidos que les puede aportar el uso de las razones.

En el siguiente capítulo presento los resultados de la experimentación de esta secuencia diseñada para hacer vivir la probabilidad en el aula, vía uso de las razones.

CAPITULO 4. ANALISIS DE LA EXPERIMENTACION DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDACTICAS

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados de la experimentación de cada una de las situaciones didácticas de la secuencia. Se incluye una descripción global acerca del momento de la sesión en el cual se desarrolla (pues en una misma sesión se desarrollaron hasta tres situaciones de la secuencia), junto con una descripción sucinta del desarrollo de cada situación experimentada.

Para facilitar su lectura, en primer lugar presentamos los propósitos, la consigna y algunos aspectos del análisis previo. En segundo lugar se describe la experimentación, donde se destacan producciones de alumnos, las nociones que emergen de las interacciones entre ellos con la situación y con la profesora en momentos de trabajos en equipos como en puestas en común o en institucionalizaciones, incluyendo breves estudios matemáticos de esas producciones. Por último se incluye al final de cada situación un apartado de comentarios donde se destacan los aspectos relevantes (y que nutren el análisis global que incluimos en el capítulo de concusiones).

1.1 Situación didáctica: Tiros al aro. Incisos 1, 2 y 3)

Fecha: 10-11-2017, duración 40 min /100 minutos.

La situación se desarrolló al inicio de la primera sesión. Se organiza la clase en 7 equipos con seis integrantes cada uno. Se presentan los incisos 1, 2 y 3 de la primera situación, luego los alumnos resuelven en equipos. La situación finaliza con una breve puesta en común.

1.1.1 Análisis previo de la SD. 1.1: Tiros al aro. Incisos 1, 2 y 3

Consigna

1. En el recreo Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3; en cambio, José tiró 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?
2. Si luego, Pedro tiró 6 veces al aro y encestó 4; en cambio Martín tiró 7 veces al aro y encestó 3, ¿quién es el mejor tirando al aro?

3. Las hermanas Silvia y Vanesa también juegan al básquet. Silvia tiró 5 veces y encestó 4; en cambio, Vanesa tiró 10 y encestó 6. ¿Cuál de las dos fue mejor tirando al aro en estos tiros? Discutan las respuestas y los argumentos que dieron.

Propósitos didácticos

Que los alumnos utilicen diferentes procedimientos para comparar razones, expresadas como fracciones o decimales. Analizar de qué manera se utilizan las razones y las fracciones, en la construcción del sentido de la noción de frecuencia relativa (como relación parte todo) y en consecuencia, el concepto de probabilidad.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente.

En el **inciso 1** los alumnos podrían mirar las veces que cada jugador ha encestado, es decir solo las frecuencias absolutas, sin embargo esta comparación es válida si los jugadores hubiesen tirado al aro la misma cantidad de veces. Las cantidades fueron elegidas de forma tal que al comparar los pares (tiros realizados; tiros encestados), pudiesen realizar comparaciones cualitativas, por ejemplo: "*José encestó la mitad de las veces que tiró, mientras que Juan encestó menos de la mitad de las veces que tiró, con lo cual José sería mejor tirador que Juan*". La elección del par (4,2) podría posibilitar el uso de la noción de mitad (como mitad de tiros encestados del total de tiradas). Notemos además que Juan encestó más veces que José, sin embargo el mejor jugador es José.

En el **inciso 2** los alumnos podrían argumentar que como Pedro encestó 4 veces y Martin 3, entonces Pedro es mejor jugador ("el que acierta más veces gana"). Otro argumento de tipo cualitativo, y valido para resolver el problema, podría ser que: "*Pedro tiró menos cantidad de veces y encestó más que Martín (o que Martín tiro más veces y encestó menos veces que Pedro)*", el cual es suficiente para afirmar que según esos datos, a Pedro le ha ido mejor en el juego.

Cabe observar que entre las cantidades hay una relación de suma y diferencia de una unidad: en las tiradas: 6 (Pedro) +1=7 (Martin) y en encestadas: 4 (Pedro) -1 = 3 (Martin)

En el **inciso 3** los alumnos deberían realizar un trabajo similar al inciso 1) pero ahora podrían establecerse relaciones bajo la idea de "la mitad" y "el doble". Podrían conjeturar que si Silvia hubiera tirado el doble de veces, encestaría 8, y como Vanesa encestó 6, entonces Silvia es mejor jugadora. Asimismo, si Vanesa hubiese tirado la mitad, encestaría 3 veces y como Silvia encestó 4, entonces Silvia es mejor jugadora. El cálculo mental podría ser un recurso útil en este apartado.

Por otro lado, dejaremos la siguiente pregunta para que el docente la utilice en el momento de la puesta en común: ***¿Puede ser Silvia mejor tiradora al aro de básquet que Vanesa, aunque encestó menos veces que ella?*** con la cual se espera que los alumnos se enfoquen en la diferencia entre las cantidades absolutas, observando que una es mayor que la otra, sin embargo, si se comparan las relativas, sucede lo opuesto (lo cual es una característica contra intuitiva).

Podrían argumentar que: "Aunque Vanesa encestó más veces que Silvia, ***en cantidades absolutas****, al considerar el número total de tiradas de cada una, resulta que Silvia lo hizo en un número menor de tiradas, mientras que Vanesa lo hizo en un número mayor".*

También podría argumentarse que *"Silvia es mejor que Vanesa, pues aunque encestó menos veces, ha tirado en total menos veces. Si observamos las veces que falló, Silvia lo hizo 1 vez en 5 tiros mientras que Vanesa falló 4 veces en 10 tiros."*

La pregunta podría poner en foco la importancia de considerar el total para decidir que jugadora es mejor, y con ello, la diferencia entre cantidades absolutas y las relativas.

Una primera noción para institucionalizar:

- "Para comparar quien es mejor jugador no es suficiente comparar la cantidad de tiros encestados por cada uno. Es importante considerar tanto el total de tiros realizados como el total de tiros encestados.
- Silvia es *relativamente* mejor que Vanesa, porque aunque encestó menos veces en *cantidad absoluta*, ha tenido mayor cantidad de tiros encestados *en relación* al total de veces que tiró.
- *Relativamente* se refiere a tener en cuenta no solo la cantidad de tiros encestados, sino también el número total de veces que se tiró.

1.1.2 Análisis de la experimentación de la SD. 1.1: Tiros al aro. Incisos 1, 2 y 3

La sesión se inicia cuanto la profesora organiza a los alumnos por equipos se seis integrantes y les reparte una hoja con los tres problemas.

Inciso 1. Devolución. La noción de mitad y 50%: recursos para establecer una relación de relaciones.

Episodio. Equipo 1.
P: Chicos, tenemos 15 minutos para hacer la actividad, y ahorita discutimos qué cosas hicieron. Empiecen a trabajar. [A todos]
Byron: [Lee] "Tiros al aro. En el recreo, Juan tiró 7 veces al aro, y encestó 3. En cambio, José tiro 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?" [Silencio en el equipo. Voz de fondo de la profesora, indicando donde escribir las respuestas]
Edu: Fue José, ¿no?
Alberto: Si
Byron: Tenemos que justificar las respuestas. Ahí van las respuestas Edu [Señala el lugar en la hoja]. Que Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3,
Alberto: Tuvo nada más, menos del 50% y en cambio José tiró 4 veces y tuvo el 50%". Sería entonces que José encestó más veces.
Edu: Si, está bien.

Byron: Escribe en la hoja: "José tiro 4 veces y encesto el 50% y Juan tiró 7 y encesto menos del 50%

Edu: Escribe: "José, porque Juan tiro menos de la mitad y José tiro la mitad[48]"

Lupita: Escribe: "José, porque Juan tiró 7 veces y encestó 3 que es menos del 50% en cambio José tiró 4 y encesto 2 que es el 50%"

Los alumnos se enfrentan a una situación donde deben realizar comparaciones entre dos pares de números relacionados entre sí: (7,3) y (4,2). Emerge entonces una primera expresión de las razones entendidas como relación de relaciones. La noción de mitad y de 50% se revelan ya desde ahora como razones privilegiadas, que ayudan a comparar a otras razones.

Inciso 2. Las relaciones dentro de cada par (total de tiradas, cantidad de tiros encestados)

Episodio. Equipo 1.
Byron: ¿Se las leo?: Pedro tiro 6 veces el aro, y encestó 4. En cambio Martín tiró 7 veces al aro y encestó 3. ¿Quién es mejor tirador? Es casi lo mismo como dijo Edu, porque… tuvo mayor… este… Pedro porque le faltaban 2 y en cambio… Martín tiró sólo 3 veces, le faltaba más de la mitad. [Pausa]… ¡Ah! … Pero… [Duda]
Edu: Pedro es el primero… no… [Duda]
Byron: Hay que explicar por qué… ¡hay que volver a explicar!
Edu: De que Pedro tuvo 4 por lo tanto <u>le faltaban 2</u>, por eso saco mayor… y este… Martin sacó 3 y para 7 <u>faltaban 4</u>: tiene menos.

[48] En esta respuesta, Edu basa su argumento únicamente en la noción de "mitad". Notemos además que quizás al escribir "tiró", pensó en "encestó", importante diferencia entre los pares de cantidades que se comparan.

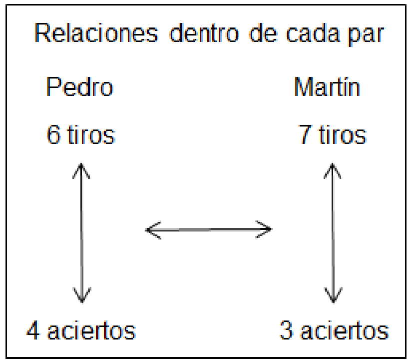
María: Nada más hay que ponerle…
Byron: Casi casi lo mismo
Edu: Ajá
María: Pedro porque tuvo más… tuvo <u>menos del 50%</u>...
Edu: ¡Votación! [Propone]. ¿Quién opina de que obtuvo mayor que el 50%?
Byron: Los dos… ah no, uno nada más obtuvo el 50%
Edu: Ajá [Asiente con la cabeza]
Byron: Uno obtuvo… uno obtuvo
Edu: El 50%
Byron: No, uno obtuvo menos y el otro más
Claudio: Le faltaba <u>medio tiro</u>…
Byron: Ajá, medio tiro para obtener el 50.
Edu: O ponemos… es mejor porque, ¿le faltaban menos tiros para… de los que tiró?
Byron: No
Edu: Menos el sexto de los tiros que…
Byron: No, porque ahí seria como un tipo de desigualdad., porque… como son 7, ahí sería… como…no sé… ***como trampa*** *o algo así porque: él tiró 7 y el otro 6.*
Alberto: Encestó todos… o sea… (…)
Byron: Entonces… ¿por cuál explicación quieren hacer? Una muy... digamos "formalita" o porque no "porque no somos así" [Ríen]
Edu: Pongamos como somos. [Risas]
Byron: Entonces… Tenemos que dar la explicación del porqué [Cláusula del contrato didáctico]
Edu: Tuvo mayor ***de la mitad****… Pedro*
Byron: Tuvo más de la <u>mitad</u> y el otro menos de la mitad
Aos: Si [Todos los integrantes del equipo]
Byron: Le ponemos: Pedro, porque… porque tuvo más de la mitad y… esté… José menos de la mitad…
Claudio: José… ¡Martín!

- *Edu: Escribe: "Pedro, porque tuvo más de la mitad y Martin solo tuvo la mitad"*
- *María: Escribe: "Pedro porque tuvo más de la mitad y Martin menos de la mitad"*
- *Byron: Escribe: "Pedro encestó más de 50% y Martín menos de 50"*

Al inicio del episodio, Byron busca reutilizar el argumento relacionado con la mitad, sin embargo la situación le ofrece una resistencia que lo hace dudar, dado que ninguno de esos dos pares tiene una relación de mitad de aciertos en el total de tiradas:

Byron: "(…) [el mejor tirador fue] Pedro porque le faltaban 2 y en cambio… Martín tiró sólo 3 veces, le faltaba más de la mitad."

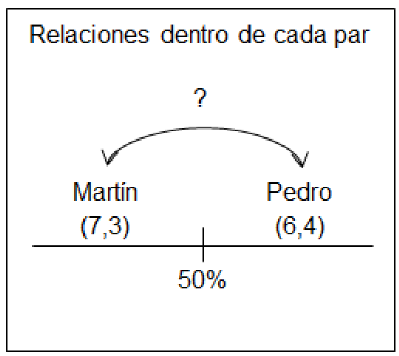
Edu, enuncia una estrategia en la cual compara cada par de (tiros, aciertos) y los cuantifica mediante una diferencia.



Estrategia aditiva de tipo "dentro" de cada par

Edu: (…) Pedro tuvo 4 por lo tanto le faltaban 2, por eso saco mayor… y este… Martin sacó 3 y para 7 faltaban 4: tiene menos.

Para este alumno, entonces, al jugador que tenga menor diferencia entre tiros y aciertos, le fue mejor. Por otra parte, el argumento parece insuficiente para María, quien introduce una nueva estrategia de comparación:



Estrategia de comparación de tipo "dentro"

María: Pedro porque tuvo más… tuvo menos del 50%...
Edu: ¡Votación! [Propone]. ¿Quién opina de que obtuvo mayor que el 50%?
Byron: Los dos… ah no, uno nada más obtuvo el 50% (…) uno obtuvo menos y el otro más
Claudio: Le faltaba medio tiro…
Byron: Ajá, medio tiro para obtener el 50.

Los alumnos establecen relaciones entre total de tiradas y tiros encestados, mediante la noción de 50% que luego les permitirá comparar los pares, construyendo de esa manera una relación entre relaciones. Se aseguran de la validez de su conjetura cuando asocian la noción de "más o menos de 50%" a "más o menos de la mitad".

Con respecto a las relaciones entre cantidades de cada par, es decir entre total de tiros entre sí y encestados entre sí, Byron considera que si las cantidades de tiros no son iguales, entonces la comparación entre las cantidades de encestadas podría ser injusta.

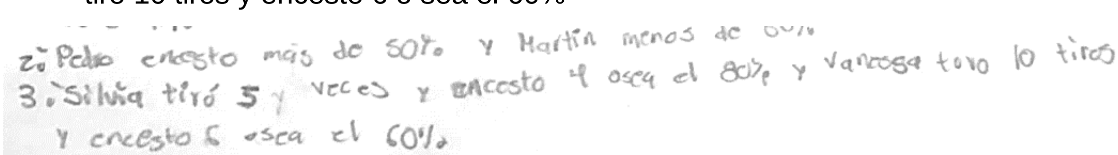
> *Byron: No, porque ahí seria como un tipo de desigualdad, porque… como son 7, ahí sería… como…no sé… como trampa o algo así porque: él tiró 7 y el otro 6.*

La sesión continua, y los alumnos leen el inciso 3. La profesora ha solicitado que se apresuren con la elaboración de una respuesta antes de la puesta en común. Emerge una estrategia imprevista: calcular los porcentajes de tiros encestados para comparar.

Inciso 3. Los porcentajes imprevistos y la heterogeneidad de las respuestas (4 aciertos de 5 tiros versus 6 aciertos de 10).

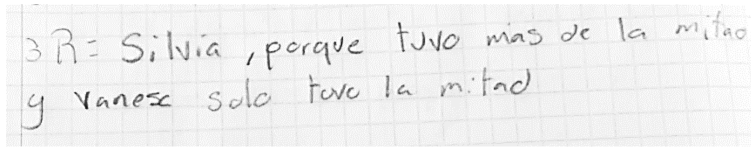
> *Episodio. Equipo 1.*
> *Byron: ¡Empiecen a discutir! Empiecen a discutir… ¡las ideas!*
> *P: ¿En este equipo ya acabaron?*
> *Byron: ¡No!, nos falta una.*
> ***Claudio: Sería Silvia, porque a ella le falto un tiro para completar todo y en cambio Vanesa que tuvo 10 tiros…***
> ***Alberto: Sería Silvia, porque Vanesa tuvo más oportunidades… Sería Silvia porque seria 80% y la otra el 20 [Habla en voz muy baja]***
> *Edu: Dile a Byron también [Alberto explica el porcentaje a Byron. Discuten en voz baja cuál es el porcentaje exacto de cada una. No escriben] [40 seg.]*
> *Alberto: Ya está*
> *Edu: No escuché mucho es que estaba… estaba… [Ríe]*
> *Byron: [Resume] Que ésta… Silvia obtuvo el 80% porque tuvo 5 oportunidades y encestó 4. Y cada tiro valía un 20%. O sea que multiplicado por 4 serían 80. Y esa Vanesa…*
> ***Alberto: Y en cambio Vanesa que tiro 10 veces sólo encesto 6,** y es un 60%…*
> ***Byron: Ajá… lo cual cada tiro vale al 10%***
> *Edu: Es un 60 multiplicando [La profesora se aproxima al grupo y observa las producciones. Realiza un gesto de sorpresa[49], dado que escuchaba sus discusiones desde lejos. Inicia la puesta en común]*

- Alberto-Byron: Escriben: “Silvia tiró 5 veces y encestó 4 o sea el 80% y Vanesa tiró 10 tiros y encestó 6 o sea el 60%”

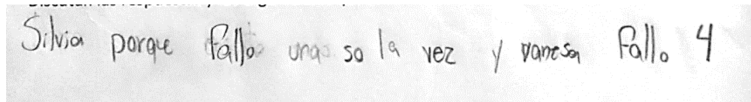

2. Pedro encesto más de 50% y Martín menos de 50%
3. Silvia tiró 5 y veces y encesto 4 osea el 80% y Vanesa tuvo 10 tiros y encesto 6 osea el 60%.

- Edu: Escribe: “Silvia, porque tuvo más de la mitad y Vanesa solo tuvo la mitad”

[49] Toma nota de esa estrategia, y como veremos más adelante, logra hacerla emerger en la puesta en común, a través de una técnica, y que constituye un elemento que promueve que sea socialmente compartido.



- María: Escribe: “Silvia porque fallo una sola vez y Vanesa falló 4”



Las diferentes respuestas que escriben, aunque coinciden que Silvia es mejor tirando al aro en esos tiros, no coinciden en los argumentos que lo sostienen. Mientras que Alberto y Byron consideran la comparación de los porcentajes exactos, Edu lo hace desde la noción de “más o menos de la mitad”, y María mediante la comparación “entre” cantidades que fallaron (tiros no encestados). Las diferencias entre las respuestas podría ser un efecto del apuro para el inicio de la puesta en común.

La consideración del cálculo exacto de los porcentajes “dentro” de cada par de (total de tiradas, cantidad de tiros encestados) es otra manera de expresar las razones. Las cantidades elegidas permiten la emergencia de esta estrategia (imprevista), en donde los porcentajes son cantidades enteras.

> *Byron: (…) Silvia obtuvo el 80% porque tuvo 5 oportunidades y encestó 4. Y cada tiro valía un 20%. O sea que multiplicado por 4 serían 80. Y esa Vanesa…*
> ***Alberto: Y en cambio Vanesa que tiro 10 veces sólo encesto 6,** y es un 60%…*
> ***Byron: Ajá… lo cual cada tiro vale al 10%***

La situación favorece expresar las razones como cantidades relativas, a través del porcentaje que es evidentemente una forma conocida por los alumnos para expresar la razón parte todo. La estrategia de resolución del problema incluye además la técnica que consiste en “pasar por la unidad”.

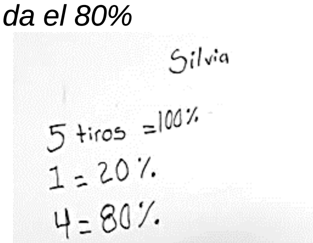
Puesta en común

El juego de la profesora para hacer emerger e institucionalizar una técnica. La socialización del episodio anterior (cálculo de porcentajes)

> *P: El ultimo equipo, allá, a ver, Byron [Da la palabra[50]]*
> *Byron: [Lee] “Las hermanas Silvia y Vanesa también juegan al básquet. Silvia tiró 5 veces y encestó 4. En cambio Vanesa tiró 10 veces y encestó 6. ¿Cuál de las dos*

---
[50] Nada “inocente” dado que en su recorrido ya había observado con sorpresa la estrategia de resolución que discutían.

fue mejor tirando al aro en estos tiros?"… Fue Silvia, ya que… este…tuvo 5 oportunidades y encestó 4…
P: ¿Quiere decir que falló?... [Espera una respuesta]
Aos: Una
Byron: De lo cual equivale al 80% [Murmullos]
P: ¿Y cómo hizo eso? A ver explíqueme. [Frunce el ceño, luego sonríe]
Byron: Es que cada tiro equivale al 20%.
// [En el equipo 1, susurran]:
Edu: No, carnal ese no… no, ese no…
Alberto: ¡Sí!
Edu: Ese no… [Ríe]… Hubiera dicho que sólo tuvo más de la mitad, la próxima yo lo digo [ríe]… su manera es…de físico-matemático. //
P: Ahorita discutimos… [Anticipa], él nos lo está diciendo de otra manera, venga, anótemelo. ¿Cuántos tiros fueron? Te ayudo. [Toma las fichas para recordarle los datos, simula. Algunos alumnos prestan más atención, ayudan]
Byron: Fueron 5 tiros y cada uno… [Escribe en el pizarrón]
P: Fueron 5 tiros y anotó 4 [Suspenso en la clase, espera]
Byron: Por 4… Entonces eso da el 80%



A: Ahhh ya le entendí yo también [Se escucha de un alumno]
P: Ahora anótame aquí al lado lo de Vanesa [Mientras tanto, reinterpreta] Él nos lo está representando de manera diferente, ¿verdad? Queremos…Yo quiero entender qué hicieron, para que nos quede…
//Edu: No sé sí le entendí, pero también se complicó mucho la vida [Voz de fondo]
Byron: Vanesa tiró 10 tiros, que es igual al 100%… [Interrumpe a la Profesora, escribe en el pizarrón]

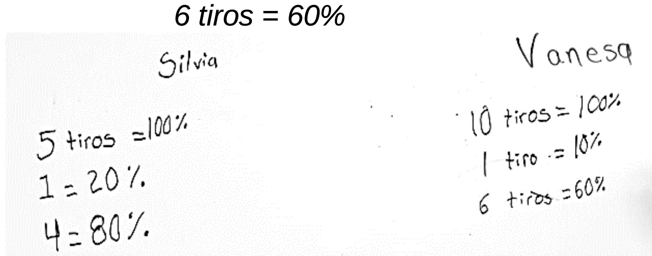
10 tiros = 100%

P: Anotó… yo digo… espérenme… encestó 6 [Regresa a la ficha]
Byron: Encestó 6 tiros, de los cuales cada tiro equivale al 10%. [Empieza escribiendo 6 tiros, luego borra para seguir el orden de paso por la unidad]

10 tiros = 100%
1 tiro = 10%

[Continúa]: O sea que si anoto 6 tiros equivale al 60%. [Escribe]

6 tiros = 60%



Luego de este episodio, la profesora continúa el intercambio con los alumnos para enfatizar esta estrategia (quizás promoviendo su instalación en la memoria colectiva de la clase). Evidentemente, logra que Byron explicite la técnica del cálculo de porcentaje, vía pasaje por la unidad (el porcentaje que corresponde a una encestada), que forma parte de la estrategia para poner en relación dos pares de cantidades: (5,4) y (10, 6). Cabe destacar que al menos para estos alumnos ya es claro que distintas cantidades pueden ser representados o corresponder al 100% (5 tiros y 10 tiros respectivamente). Se socializa la técnica que, como dice Edu, no es la más económica pero ha sido útil para resolver el problema. Los porcentajes representan una expresión de las razones (externas) entre total de tiradas y veces que encestó cada jugadora, y permite su comparación.

Institucionalización. Esta primera parte de la sesión, donde se desarrollaron los incisos 1, 2 y 3, se cierra cuando la profesora formula la pregunta sugerida en las fichas.

> *P: En ese problema les quiero hacer una pregunta, que es interesante: Silvia encestó 4 y Vanesa encestó 6. Entonces la pregunta es la siguiente. Pon atención: "¿Puede ser Silvia en éste caso, mejor tiradora que Vanesa, aunque encestó menos veces?"*
> *Aos: Si… No*
> *P: ¿Si? Ella encestó menos veces, encestó cuatro. Y ella encestó seis. ¿Por qué Silvia es mejor que la otra?*
> *A: Yo… [Varios levantan la mano]*
> *P: A ver, ustedes*
> *Aline: Porque Silvia… Silvia tuvo 5 oportunidades y de esas 5 solo perdió una vez; y en cambio Vanesa tuvo 10 tiros, encestó 6, perdió 4.*
> *P: Ella perdió una vez, y ella perdió*
> *Aos: ¡cuatro!*
> *P: Perdió [Escribe en el pizarrón]. Hasta ahí vamos bien. ¿Qué hicimos para poder comparar quien era mejor que otro? ¿Qué estábamos ocupando?*
> *Byron: **Porcentajes***
> *A: "Variación **proporcional**"…*
> *P: No, no… ¡Escuchen la pregunta! Y después me responden para que podamos concluir ésta y pasar a la siguiente actividad. ¿Qué utilizamos para poder saber que era mejor que otro? ¿Qué estábamos comparando?*
> *Aline: Comparar sus veces de oportunidades*
> *Carlos: <u>Comparar sus tiros con la lista de encestados</u>*
> *P: ¡Muy bien! A ver, dicen sus compañeros: En este problema teníamos que comparar cuantos tiros hizo con cuantas veces: encestó. En sus cuadernos anotamos lo siguiente. [Empieza a dictar la institucionalización que está prevista en las fichas]*

Aline expresa su estrategia aditiva (invalida) de comparación de razones, pero expresada a partir de “tiros perdidos”. Esta cuantificación a través de la observación de diferencias será muy utilizada por los alumnos en el trabajo en la situación didáctica siguiente.

El episodio anterior también nos advierte sobre la necesidad de abordar más situaciones de comparación de razones para la construcción de la noción de cantidades relativas. Percibimos un obstáculo en la comparación, que se expresa en argumentos que van más rápidamente en la dirección de lo aditivo lo cual es un argumento inválido para comparar. Las interacciones nos dejan ver además la insistencia de la profesora para que los alumnos expresen la insuficiencia de las cantidades absolutas, y donde se desliza la sospecha de dos alumnos que hay una relación con la proporcionalidad.

1.1.3 Comentarios

Los alumnos han cuantificado las relaciones entre cantidades parte-todo. Las nociones que emergieron fueron las de:

- La mitad asociada al 50%.
- Comparación de razones con uso de una aproximación basada en “más o menos de la mitad (o el 50%).
- Las relaciones se establecieron primero “dentro” de los pares parte-todo y luego “entre” los dos pares.
- Dos alumnos utilizaron la técnica de paso por la unidad en el cálculo de porcentajes de la parte (tiros encestados) en relación con el todo (Total de tiros).

En cada uno de los incisos se presentaron dos pares de cantidades que había que poner en relación entre sí. Observamos que la comparación mediante estrategias multiplicativas (presente en algunos equipos) no es fácil de abordar por los alumnos. Por otro lado, la situación en sí misma no ofrece aún la retroacción necesaria para que los alumnos se enfrenten a tal obstáculo.

Es difícil que frente a la situación muchos alumnos evidencien que la diferencia no resuelve el problema: que frente a totales de tiradas distintos, encestar más o menos tiros no implica ser mejor jugador y que para decidir es importante considerar el número de tiros encestados en relación con el total de tiros (relación que se puede expresar como porcentaje, decimal, o fracción)

Observamos un primer indicio de la necesidad de abordar situaciones que ofrezcan posibilidades que pongan en jaque la comparación aditiva de cantidades y promuevan el trabajo multiplicativo. Esto se observa en la conjetura falsa que emerge en la puesta en común (Aline) y es compartida por muchos alumnos. Un ejemplo de este tipo de situaciones que evidencian tal error es el de pedir a los alumnos que amplíen cada pieza de un rompecabezas, de tal modo que el lado que medía 4 cm ahora mida 7cm (Brousseau, 1980), y luego reconstruirlo. Otras situaciones que pueden ofrecer esas mismas posibilidades son las de intercambios (Block, 2006), por ejemplo fichas por estampas, donde los alumnos por equipos eligen una regla (cada 2 fichas se cambian por 6 estampas, o cada ficha por 4 estampas, etc.), efectúan los intercambios y ganan quienes logran obtener más estampas, a través de la verificación empírica. Esta última situación es bastante parecida a la actual, con la diferencia de que en aquella la condición "*de cada*" permite generar muchos pares de cantidades, mientras que en esta la discusión se basa en un solo par.

1.2 Situación didáctica: Tiros al aro. Inciso 4)

Fecha: 10-11-2017, duración 30 min /100 minutos.

La situación se desarrolló en una segunda parte de la primera sesión. La profesora reparte copias del inciso 4), luego los alumnos resuelven en equipos. La situación finaliza con una breve puesta en común. El propósito de esta actividad es que los alumnos pongan en juego la fracción como una expresión de la relación o razón parte todo.

1.2.1 Análisis previo de la SD. 1.1: Tiros al aro. Inciso 4

Consigna

1. En la siguiente tabla, están anotadas las veces que tiró cada uno de los chicos, cuántas veces encestó y qué parte del total de tiros encestó.
   a. Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto		6	$\frac{1}{2}$
Mary	24		$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	
Valeria		14	$\frac{2}{3}$
Tatiana		16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20		$\frac{3}{5}$

   b. Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente.

Para completar la tabla del **inciso 4 a)** es necesario que los alumnos interpreten el significado de las fracciones que en ella se explicitan, y donde convergen las ideas de fracción asociada a mitades, tercios, quintos, numeradores menores a los denominadores, y la noción de multiplicación y división entera. La noción que más se pondría en juego es la fracción como expresión de una relación parte todo, pero expresando relaciones, es decir, razones.

En las primeras filas se eligieron cantidades que faciliten entender el cuadro, las relaciones entre los datos, y aplicar una fracción sencilla a una cantidad. La columna de fracciones indicará el tipo de relación (razón, frecuencia relativa) entre total de tiradas y total de encestadas.

En la tercer fila (Manu), se presenta un caso distinto a las filas anteriores, dado que ahora el dato desconocido es la relación entre tiradas y encestados: los alumnos podrán realizar la fracción 10/25, pero también, podrían observar que al ser 10 y 25 múltiplos de 5, 10=5+5=2x5 y 25=5+5+5+5+5=5x5, y concluir que esa fracción corresponde a 2/5. Quizás algunos alumnos tengan mecanizado y sepan que dadas dos cantidades a y b: "a es a/b de b", o que "la fracción a/b es el número que multiplicado por b es igual a a", pero es probable que la mayoría no lo sepa, sin embargo podrían utilizar un razonamiento de paso por la unidad: para saber que parte de 25 es 10, uno es 1/25 de 25 y 10 es 10/25.

A continuación, en las dos filas siguientes (Valeria y Tatiana) se propone un trabajo similar a la primera, pero ahora las fracciones poseen numerador y denominador distinto a 1 La primera dificultad es comprender que 14 encestados (o 16) son los 2/3 del total de tiros buscado, y que ese total buscado es 3/3. La segunda dificultad es hallar como pasar de 2/3 a 3/3: una buena idea es de nuevo pasar por la unidad: 1/3, lo que implica dividir 14 (o 16) entre 2.

Las cantidades de tiros realizados y encestados son múltiplos de los numeradores y denominadores: otra manera de resolver, aunque un poco confuso, es: para el caso de Valeria podría resolverse también mediante sumas o productos, observando que si 14=2x7 = 7+7 y la relación es de dos terceras partes, entonces, la cantidad de veces que tiro al aro es 7+7+7=7x3=21, en caso de Tatiana podría pensarse a 16=8x2=8+8 y si son dos partes de tres, quiere decir que faltaría sumar una vez más el número 8 para completar el total de veces que tiró al aro, es decir 8+8+8=24 e incluso podría establecerse alguna relación con lo sucedido a Mary, pues ambas tiraron la misma cantidad de veces al aro (24 veces); y una encestó 1/3 de las veces mientras que la otra 2/3 de ellas.

Por último, el caso de Daniel, podría pensarse que si se tiró al aro 20 veces y la relación entre tiradas y aciertos es de 3/5, entonces, como 20=4+4+4+4+4 = 5x4 (5 veces 4), ha encestado 4+4+4=4x3=12 (3 veces 4). Bastaría con aplicar 3/5 a 20, como en el segundo caso.

El **inciso 4 b)** promueve la comparación (y establecer una relación de orden) a partir del trabajo realizado en la tabla. La meta de averiguar quiénes son los mejores jugadores podría dar lugar a un trabajo de comparación de relaciones parte-todo (como el caso de los primeros incisos de Juan y José y Silvia y Vanesa). Por otro lado podría permitir a los alumnos sospechar que las relaciones parte todo se pueden ordenar y que en esto las fracciones (que las expresan) son de gran ayuda. Los alumnos podrían empezar a sospechar también que esas fracciones pertenecen al intervalo [0,1].

Se podrá institucionalizar en esta puesta en común que:

- "La relación entre total de tiros realizados y los encestados, se puede expresar a través de las fracciones."
- Las fracciones expresan cantidades *"relativas", porque consideran las veces que se encestó y el total de tiros realizados.*
- Por ejemplo, cuando decimos que Alberto encestó ½ de las veces que tiró, estamos expresando que sea cual sea la cantidad de tiros, Alberto encestó la mitad. O si Valeria y Tatiana encestaron 2/3 de las veces que tiraron al aro, quiere decir que de cada 3 tiros, encestaron 2, es decir que si tiraron 21 veces, encestaron 14, o si tiraron 24 veces, encestaron 16, o sea cual sea la cantidad de tiros, encestaron 2/3 de los tiros, y en comparación, Valeria y Tatiana no son *relativamente* una mejor que otra (empate), pero ambas son *relativamente* mejores jugadoras que Alberto."

1.2.2 Análisis de la experimentación de la SD. 1.1: Tiros al aro. Inciso 4

La profesora reparte tres copias por equipo con el inciso 4. En el equipo 1 primero intentan resolver entre todos los integrantes, pero el ruido del aula aumenta (muchas voces hablan en simultáneo), motivo por el cual deciden organizarse en pares de dos integrantes.

Edu: Terminamos primero en equipos y después comparamos respuestas, ¿no?
Byron: Y vamos a dar las explicaciones

El equipo se subdivide en tres pares: Byron-Alberto, María-Lupita, Edu-Claudio (ya es muy evidente que Byron y Edu lideran el equipo).

Inciso a. Relaciones aritméticas entre cantidades.

Episodio. Equipo 1.
Obs$_1$: Oigan, ¿me explican cómo lo resolvieron? [A Edu, luego de unos minutos en donde discutieron en voz muy baja]

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$
Manu	25	10 +15	$\frac{2}{5}$
Valeria	21	14 +7	$\frac{2}{3}$
Tatiana	24	16 +8	$\frac{2}{3}$
Daniel	20	12 +8	$\frac{3}{5}$

Figura 9. Producción escrita de Edu.

Edu: Sí, primero sacamos... como sería… las fracciones… el que es un medio sería la mitad, la mitad de 12 es 6. Después sería un tercio, dividimos 24 entre 3. Después sacamos dos quintos y aquí checamos y 5 por 2 es 10 que sería un entero. Después 5 más 5 da 10, sería 2. Y serian dos quintos. Después aquí sería… ¡hay ya me revolví! [Ríe]
P: [Se acerca la profesora, quien en este momento recorre los equipos] Ahora con eso, como lo utilizamos. ¿Cómo sabemos quién es mejor?
Edu: Porque primero hay que calcular cuántos faltaban
P: ¿Cuántos… anotó mal?
Edu: ¡Ajá!
Obs$_1$: ¿Y éste? [Señala en la tabla la fila correspondiente a Valeria] [La Profesora se va]
Edu: Este sería 21 ya que pide dos tercios, que son tres
Obs$_1$: ¿Y el siete? [Señala lo escrito]
Edu: Eso es porque este [Indica al número 14] es siete por dos…más 7 es éste [Indicando al 21]
Obs$_1$: ¿y el caso de Tatiana?
Edu: Sería igual que el anterior, pero con ocho

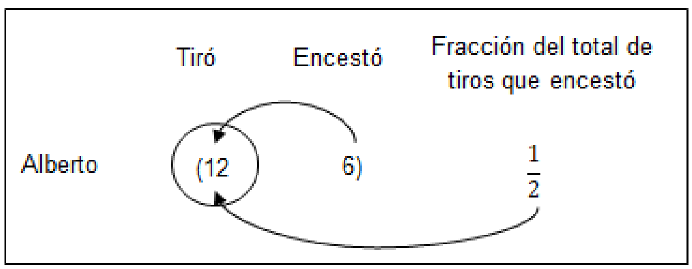
Byron: Oye carnalín… carnalín, ¿ya terminaste? [Pregunta desde el sub-equipo donde trabaja]
Edu: [Continúa su explicación]. Y éste sería tres quintos, lo dividimos entre 5 y daría 4…más….por tres y ya saldría 12.

Edu produce nuevas informaciones que dan cuenta del uso de recursos aritméticos (lo viejo) que ponen en relación las cantidades enteras y que configuran significados que está construyendo sobre las fracciones (nuevo). Al utilizar las expresiones fraccionarias para encontrar un valor faltante, y poner en relación esas cantidades, está construyendo nuevos significados de la fracciones[51].

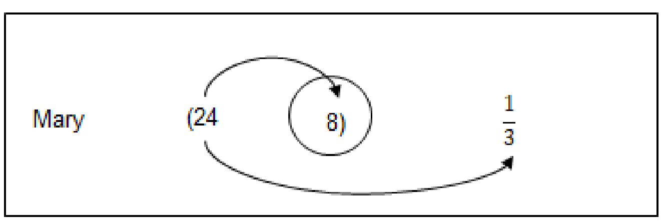
En el siguiente esquema mostraré cuáles son esas relaciones que emergen en esa interacción de Edu con la situación:

- Identifica la fracción como expresión de la relación entre cantidades, bajo la noción de "mitad" (noción que les permite realizar transformaciones dentro de cada par (razones externas 1/2 y 2).

  Luego, la cantidad buscada es 12 porque su mitad es 6.



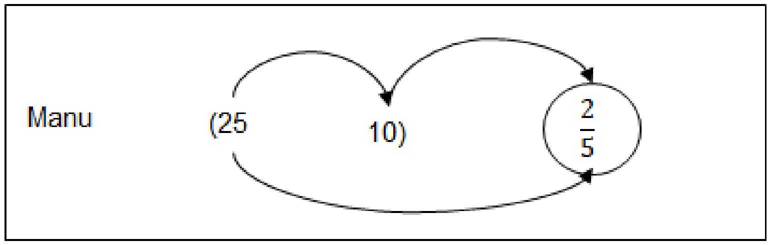
- La fracción se utiliza como operador bajo la forma de división de 24 entre 3. Luego la cantidad buscada es 8. La fracción 1/3 se interpreta como la tercera parte, y esta se identifica con dividir entre 3.



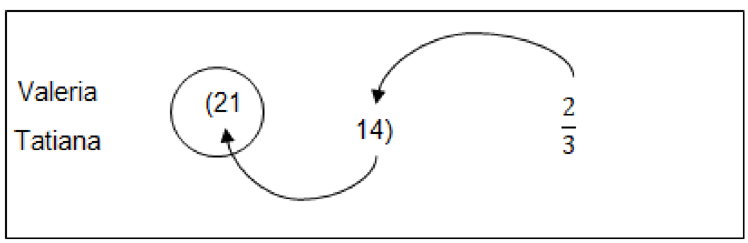
- Argumenta que, como 5x2 es 10, entonces llama a 5 un "entero". Luego, 10 equivale a 2 de esos "enteros" y 25 a 5 "enteros". Con esto construyen una

[51] Aunque cabe destacar que se observan dificultades en la formulación, y que falta darse cuenta que Valeria y Tatiana son igual de buenas en el juego.

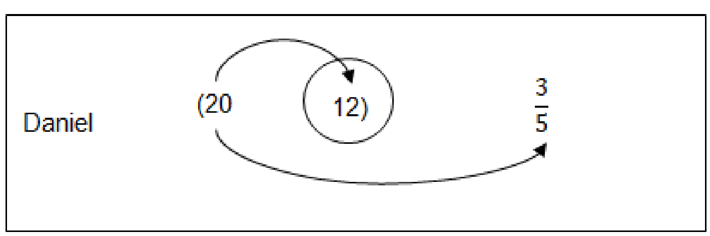
fracción como expresión de relaciones entre esas dos cantidades. En realidad usan la palabra “entero” para decir “porción”, entonces como 25 es el entero, tiene 5 porciones y 10 tiene 2, luego 10 es 2/5 de 25. Evidentemente la noción que utilizan son las razones como relaciones (multiplicativas) entre enteros, que luego se representan como fracciones.



- En el inciso de Valeria (encestó 14, fracción 2/3) para encontrar que el total de tiros fue 21, identifica que hay una cantidad que se repetirá tres veces. Posiblemente logra darse cuenta que si 14 representa 2/3, le conviene saber cuánto es 1/3 para luego determinar 3/3. Si 14 es 2/3, entonces es 2 por algo. Ese algo es 7. Luego, el entero es 3 veces el 7 (implícitamente 3/3). Usa o transfiere la misma técnica para el siguiente par de cantidades (Tatiana), aclarando que lo que cambia es el 7 por el 8, (cambio de unidad).



- Obtiene el número 12 como el cociente de 20 entre 5 multiplicado por 3. Es decir que genera el consecuente de la razón mediante el uso de la fracción como operador bajo la forma de división (similar al caso de Mary donde se aplica 1/3 a 24)



Inciso 4 b). Emergentes en la comparación.

Ordenar las razones en el contexto de indicar los mejores y peores jugadores, ha causado en los equipos intensas discusiones. Varios alumnos han recurrido al cálculo de “tiros no encestados o fallados”, y lo incorporaron a la tabla (ver la producción anterior de Edu). El orden de los puestos que se presentaron en la segunda tabla confundió a los alumnos del equipo 1, quienes empezaron completando en sentido inverso, agregando primero a los tiradores que les fue mejor en el juego.

Por otro lado, observamos en el equipo 2 cómo a partir de éstas discusiones sobre cantidades absolutas, emerge la fracción (entendida como razón o relación entre total de tiros y encestados) como mejor argumento para comparar.

Episodio. Equipo 2.
Aline y Mauro leen la consigna, ya están seguros que deben buscar quienes fueron los mejores y peores jugadores. Aline propone realizar el cálculo de la cantidad de “tiros perdidos”.
Aline: Aquí de 12 a 20 son 8. Le voy a apuntar 8 aquí, chiquito. Luego de 16 a 24…8 [De última fila hacia arriba en la tabla]
Mauro: De 14 a 21… 7
Aline: De 10 a 25… 15. De 8 a 24…
Mauro: 16.
Aline: De 6 a 12… 6.
Mauro: Entonces vamos a evaluar.
Aline: Los números que anoté aquí son las veces que perdieron.
Mauro: Entonces los peores serían éstos tres de aquí [Señala en la hoja de Aline]. El 7, 15 y el 16.
Aline: [Lee los tiros de Valeria] Perdieron 7 veces… Mira, tiraron 21…
Mauro: No, sería hasta acá, porque perdió 15, aquí perdió 16 y. [Corrige su afirmación sobre los peores]
Aline: Pero acertó en la mitad [Interrumpe]… ah no…
Mauro: A ver, ¿cuál puesto es éste? ¿Mary no? El segundo puesto es peor.
Aline: ¡Pero perdió 16 veces!
Mauro: ¡¿Y cuántos anotó?!
Aline: 8
Mauro: [Gesto con manos, palmas hacia arriba de algo evidente]
Aline: No, mira…
Mauro: ¡Le faltaron dos tercios!
Aline: No porque Mary tiró 24 veces. Es muchísimo. Y encestó… encestó 8. Perdió 16 tiros.
Mauro: Por eso esa es peor, ¡Le faltaron dos tercios!
Aline: ¡Ah, sí!

El episodio anterior muestra que los alumnos:

- Inician explorando los datos y realizando diferencias “dentro” de cada par.

- Utilizan las diferencias para comparar dos pares de datos (“entre” pares).

- Construyen en su interacción, un argumento basado en un nuevo dato: 16 tiros perdidos son 2/3 del total de tiros, el cual se valida cuando Aline pone en relación 24 (total) con 8 (encestados) y 16 (perdidos). Esquemáticamente:

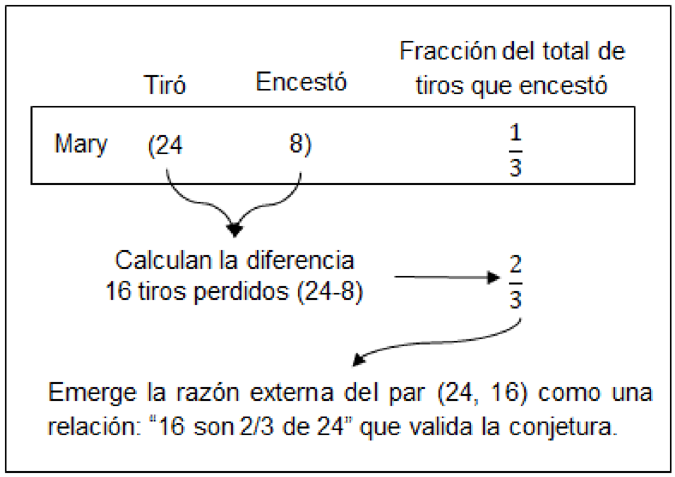


Figura 10. Expresión fraccionaria de una razón.

Sin embargo, como veremos en el episodio siguiente, el mismo Mauro regresa a una estrategia aditiva para comparar el juego de Tatiana y Valeria. Hay una intensa discusión entre éste (que sostiene que a Valeria le corresponde el primer puesto), y Axel y Aline (que sostienen que a Tatiana le corresponde el primer puesto).

Episodio. Estrategia: Igualar tiradas mediante suma. Parte 1
Mauro: El mejor puesto sería Tatiana. [Pausa] El mejor, el primer puesto seria Valeria. Solo le faltaron 7. Y a Tatiana le faltaron 8. [Escribe] “Valeria primer puesto”.
Axel: Aquí, primero es Tatiana [Indica el primer puesto]
Mauro: No
Axel: Si
Aline: Tú dijiste que Tatiana tiró mejor.
Mauro: Si, pero los que no encestó, le faltaron cuánto: le faltaron 8 [Indica en su hoja]
Aline: Tatiana, tiró 24.
Mauro: ¡Y le faltaron 8!
Aline: Encesto 8 y perdió 8 [Se acerca la Profesora y escucha la discusión]
Mauro: ¡Y aquí, Valeria cuántos tiró!... ¡21, y encestó 14! ¡Encestó más de la mitad!
P: ¿En qué se tienen que fijar para comparar?
Mauro: En los tiros y en los cuartos.
Aline: No, en lo que encestó.
P: En la cantidad de veces que tiró y en los que: encestó.

Mauro: ¿Ya viste? Entonces sería Valeria el primer puesto.
Axel: No, sería Tatiana.
Mauro: Mire maestra, mira, espera [Ríen]. En el juego Tatiana tiró 24 tiros. Y aquí fueron 16. Para 24 son 8. Y aquí Valeria tiró 21 y encestó 14, le fallaron solo 7 tiros. Entonces sería Valeria, solo le faltaron menos.
P: Pero tienen que hacerlo con todos los demás [Refiriéndose a otros jugadores en la tabla. Se va a otro equipo.]
Mauro: [Continúa la discusión] Dime por qué... a ver, dime por qué [Desafía a Aline]
Axel: ¡Yo te digo por qué! Mira…
Mauro: Dime por qué, y si estás mal, te doy… [Pierdes] [Ríen]

En esa primera parte del episodio, los alumnos discuten y toman posición sobre cuál de las dos jugadoras es mejor. Formulan una afirmación y buscan argumentos a favor. Aun no evidencian que ambas jugadoras tienen la misma fracción del total de tiros que encestaron (2/3), y lo tienen escrito en la tabla. ¿Cómo convencer al compañero cual es la mejor jugadora? ¿O acaso en términos relativos son igual de buenas? La profesora observó la discusión, y los alumnos intentaron que valide sus respuestas.

Episodio. Estrategia: Igualar tiradas mediante suma. Parte 2
Axel: Mira: O sea la mitad de 24 es 12. O sea, [Tatiana] encestó más de la mitad porque es 16. Y aquí [refiriéndose a Valeria] sería 10.5, así que encestó más de la mitad, pero aquí encestó dos más que Valeria.
Mauro: ¿Y aquí? Aquí fueron menos tiros y encesto más de la mitad. Y aquí fueron más tiros y encesto más de la mitad.
Axel: ¿Ves? Es mejor Tatiana.
Mauro: [Enfático] Si éste tuviera 24 [Refiriéndose a los 21 tiros de Tatiana], le sumamos 3. Entonces a Valeria le sumamos 3 de los que anotó, serían 17. Serían 17, para que estén parejo 24 y 24. Serían 17. ¡Y aquí sólo anotó 16! [Refiriéndose a Tatiana]. ¡Y aquí serían 17! [Sonríe. Axel queda dudando]
*Aline: Te explicaré como Kínder. [Toma su hoja y escribe] Ahí está, mira: 24 es la de Tatiana. Y tiró, encestó 16….3, 6, 8, **10, 12, 14, 16**… encestó todo esto, y, perdió 8.*
Mauro: No. Déjame hablar. Mira: Aquí tuvo más tiros, y si le sumamos los mismos tiros que tuvo aquí, hubieran sido 24. Y si le sumamos ¡tres! en los que Valeria anotó, hubieran sido 17. Entonces, ¿quién anotó más? [Espera una reacción]
Aline: Porque… mira: ella tiró 24. La mitad de 24 son 12.
Mauro: ¡Doce!
Aline: Y ella anotó "más" de la mitad [Enfatiza].
Mauro: ¿Y aquí si lo dividimos cuánto es? [Se refiere a Valeria]
Aline: Entonces decimos que es Valeria [Silencio]. Porque Valeria, aquí la mitad de 21 sería 10.5.
Mauro: Pero ponle los mismos tiros… que tenía…a… Valeria
Aline: ¡10.5! y…
Mauro: ¡Pero ponle los mismos tiros que tiene Tatiana! ¡Ponle ya que las dos tengan 24! ¿Cuánto es? Súmale los 3 a ésta, ¡17!
Aline: Ya me hiciste bolas [Me confundiste]

Mauro: ¡Tú pon eso, yo voy a poner esto y a ver quién está bien! Vas a ver, que voy a estar bien.
Axel: ¿Y si estás mal y nosotros estamos bien?
Mauro: Les doy dulces.
Aline: Quien sabe y que tal si las dos están igual, si las dos están bien. A ver Cali, ¿Quién anotó más, Valeria o Tatiana? Tú eres el inteligente.
Mauro: ¿Entonces tú, yo y Alex somos los burros?
Cali: Valeria.
Mauro: ¡Ya vistes! ¡Te dije! ¡Te dije! [Cali le confirma su conjetura]
Cali: De acuerdo a las oportunidades, mira: Valeria y Tatiana, ¿no? Ella tiene 3 oportunidades más, y esta tiene 3 oportunidades menos. Entonces esta anotó 2 más que ésta. Y de acuerdo a las oportunidades no están equivalentes.

Luego, el sus hojas de resultados, escriben que Tatiana tiene el primer puesto y el segundo, Valeria.

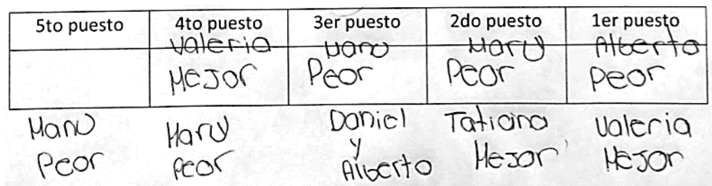


Figura 11. Respuesta escrita de Mauro.

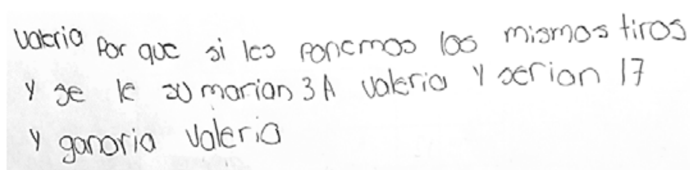


Figura 12. Reverso: Respuesta escrita de Mauro[52].

Comparan cantidades absolutas, y se convencen, mediante un razonamiento de “igualar el número de tiros a 24 a través de la suma de 3”, que Valeria es mejor[53]. Es muy evidente que las fracciones 2/3 no fueron funcionales.

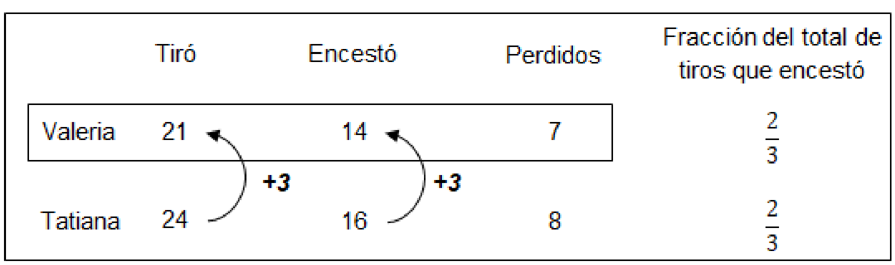


Figura 13. Estrategia aditiva (Mauro).

[52] “Respuesta: Valeria porque si les ponemos los mismos tiros y se le sumarían 3 a Valeria [Tatiana] y serían 17 y ganaría Valeria”
[53] Cabe destacar que la idea de igualar dos términos homólogos es buena, pero el cómo es donde fallan de nuevo, dado que utilizan una suma en vez de aproximarse mediante productos.

Esta vez, el uso de la noción de “mitad” dentro de cada par resultó insuficiente como argumento para refutar la conjetura de Mauro. Efectivamente, saben que ambas jugadoras encestaron más de la mitad de las veces que tiraron. Sin embargo, esta información no les permite compararlas entre sí.

Mauro al finalizar la puesta en común, vuelve a enunciar –ahora a la profesora- este procedimiento aditivo, a pesar de observar que muchos equipos han coincidido en que ambas jugadoras tienen el primer puesto[54].

La comparación de fracciones mediante el uso de técnica del común denominador. (Institucionalización local y validación)

Algunas de las respuestas que emergen en la puesta en común son contradictorias. Para unos el mejor jugador ha sido Manu, y para otros Mary. Para algunos equipos Valeria fue mejor jugadora que Tatiana y para otros ambas deben estar en el primer puesto. Frente a esto, emerge en las discusiones una técnica que se socializa como una buena estrategia para validar las conjeturas.

Puesta en común. Equipo 4. Comparar generando fracciones equivalentes de mismo denominador.
P: Quiero que escuchen al equipo 1, porque ellos dijeron: “Maestra, si son de distinto denominador, para que yo pueda saber quién es peor y quien es mejor (…). Ellos lo pasaron todo al mismo: denominador. ¿Cómo les quedó?, ¿cuál era la primera fracción?[55]
Claudia: ½
P: ¿Y a qué lo convirtió?
Claudia: 15/30
P: A 15/30, y la segunda fracción…
Claudia: 1/3, 10/30 (…) [El episodio continua, la alumna dicta las fracciones a la profesora, que oficia de escriba. Luego, realiza preguntas a otro equipo para que lo reinterprete.]

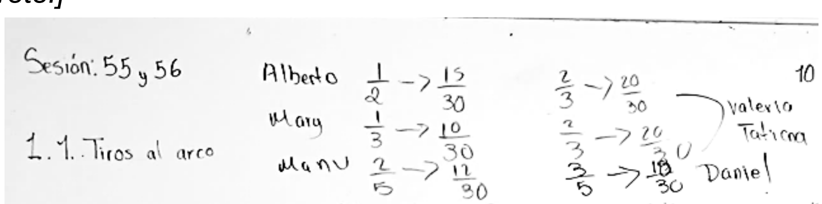
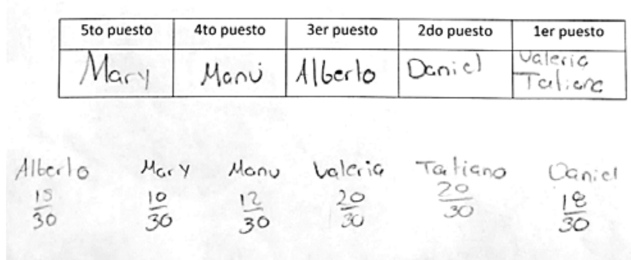


Figura 14. Transcripción de la profesora en el pizarrón.

[54] Lo que parece indicar que Mauro no fue convencido e informa además que hace mucha falta una forma de validación más contundente.
[55] Constituye este momento de puesta en común, un momento privilegiado de la profesora para realizar institucionalizaciones locales y promover la validación. En este caso, con la técnica de igual denominador. Por otro lado, oficiar de escriba podría ser una estrategia de la profesora para mostrar a los investigadores las producciones de los alumnos frente al problema.



5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto
Mary	Manú	Alberto	Daniel	Valeria Tatiana

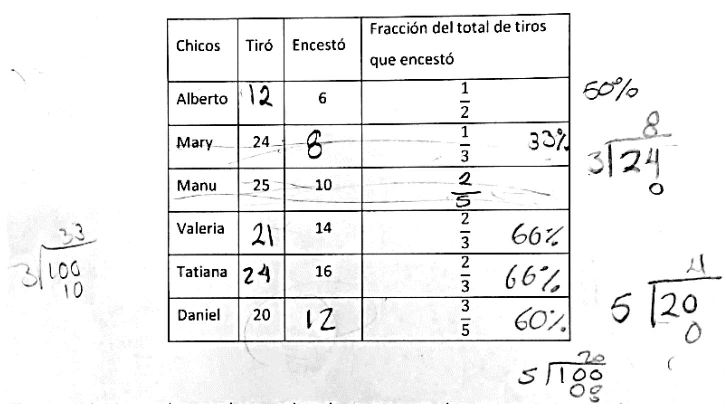
Figura 15. Producción equipo 4.

La técnica anterior les permite ordenar las relaciones mediante la obtención de fracciones equivalentes con el mismo denominador (30). Luego, la comparación de fracciones se reduce a la comparación de los numeradores[56].

Los porcentajes, el pastel y otros recursos (y representaciones) que emergen en la comparación.

A realizar el análisis de las respuestas escritas por los alumnos, observamos que dos de ellos han abordado el problema de comparar, mediante dos tipos de estrategias distintos:

a) Comparación mediante el cálculo de porcentajes de tiros encestados respecto del total de tiros realizados (Alberto: 50%; Mary: 33%; Valeria: 66%; Tatiana: 66%; Daniel: 60%). Lo cual abona la idea que los porcentajes son razón, es decir, son una expresión que da información sobre la relación entre dos cantidades y permite compararlas. Además, el porcentaje es una expresión de la relación más útil (más conocida y fácil de manipular) para estos alumnos que la expresión fraccionaria.



Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$ 50%
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$ 33%
Manu	25	10	$\frac{2}{5}$
Valeria	21	14	$\frac{2}{3}$ 66%
Tatiana	24	16	$\frac{2}{3}$ 66%
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$ 60%

[56] En esta técnica hay un supuesto de que cada jugador realizará siempre tiradas y aciertos proporcionales. Luego de ver el arraigo del modelo aditivo en Mauro, como seguramente en otros, es posible que esta manipulación con fracciones quede en la superficie y al menos para ese alumno era demasiado tentador utilizar tal procedimiento aditivo.

b) Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores al aro.

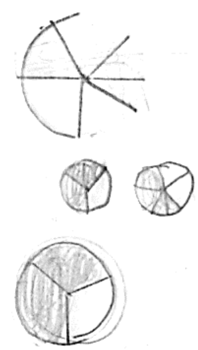
5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto
Mary	Manu	Alberto	Daniel	Valeria Tatiana

Figura 16. Calculo de porcentajes para comparar cantidades. Ana. Equipo 6.

b) Uso de gráfico de pastel (situación de reparto) para constituir una relación de relaciones. La comparación se realiza mediante la superposición en el mismo pastel de dos relaciones parte-todo (con lo cual el pastel completo representaría la misma unidad). Esto les sirve para comparar porciones sombreadas que representan las fracciones.

a) Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	$\frac{2}{5}$
Valeria	21	14	$\frac{2}{3}$
Tatiana	24	16	$\frac{2}{3}$ —
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$ —



b) Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto
Manu	Alberto	Daniel	Tatiana	Valeria

Figura 17. Comparación de racionales por fraccionamiento. Byron. Equipo 1.

El problema de ordenar razones y el sentido de la fracción. Reflexiones de la profesora.

Luego de dos semanas de ésta sesión, en una entrevista la profesora nos comenta cuáles fueron los problemas que identificó.

P: Yo creo que aquí, en la primera parte, siento que no hubo problema. Que los chicos pudieron ver e identificar qué es lo que estaban haciendo y estaba como bien organizado. Lo único que sí observé, en la tabla 4) a), ¿te acuerdas que decíamos que los chicos observaban también cuántas veces se equivocaron? Quiere decir que aún no tienen la noción, del total. Pero eso no era lo que te quería decir. De esta parte de todo el 1.1 yo pienso que lo más complicado fue esto para ellos (lee la tabla 4b).

Obs$_1$: ¿La comparación?
P: La comparación. Ya no sabían cómo comparar. Te voy a explicar por qué. Ellos hicieron, cometieron los errores porque dijeron: “el que cometió más errores, fue el peor” y así compararon, dejaron de lado la fracción del total de tiros que encestó. ***Entonces habría que hacer énfasis en ésta parte para poder comparar. Para que ellos, través de preguntas o no sé cómo****, analicen, identifiquen y observen qué es lo que está pasando con ésta parte.* ***Porque no está sirviendo la fracción****, y lo están viendo cómo “ahí al lado”, cómo que lo separaron, ¿si me entiendes? Cómo que lo aislaron.Como que* ***darle sentido a la fracción****, yo siento que como lo dejaron un poco de lado. Lo retomé en la sesión 2 cuando yo les decía “de 5 tiros, encestaron 3”, pero no lo retomamos ese día y hubiera sido interesante* ***que ellos llegaran a la conclusión, que eso me está diciendo la fracción****. O sea, como que nada más dijeron: “Ah, es la fracción” pero lo vi como aislado. Y yo creo que está muy bien diseñado para poder articularlo.*

En otros términos, los comentarios de la profesora, nos advierten que el problema es adecuado para los alumnos pero a la vez no ha permitido hacer emerger un significado ausente de las fracciones: como expresión de una relación entre dos cantidades (noción que por definición es la de razón). Nos permite pensar que en su interacción con la situación en la clase (situación distinta a la de los alumnos), emerge este obstáculo de los alumnos con el problema. **Asimismo expresa que interpretar las fracciones como razones podría enriquecer la construcción de su sentido.**

Por otro lado, la profesora identifica posibles transformaciones a la consigna que podrían favorecer un funcionamiento más autónomo de los alumnos al realizar las comparaciones.

Obs$_1$: ¿Faltarían unas preguntas en el medio no? (entre 4a) y 4b)).
P: ***Algo que le dé sentido, que diga qué significa un medio, que significa un tercio, en el contexto del problema****. Para que ellos solitos nos digan, significa que de dos tiros va a encestar uno, de tres tiros va a encestar uno, de cinco tiros va a encestar tres.* ***O sea que ellos lleguen a eso****. Cuando ellos lleguen a eso quizás sea más fácil comparar. Porque yo siento que ésta tabla 4b) les costó ¡mucho trabajo! Generalmente el equipo que comparó bien, igual… ¿así es tu referencia en la secuencia que utilicé? ¿Comparar uno con otro? Por ejemplo este es la mitad, y éste menos de la mitad y así entre ellos. Entonces para comparar todo junto, tendría que hacer un montón de mini comparaciones… o poder ponerle preguntas: en relación de éste y éste quien fue mejor, y éste y éste… que ya estén como estructuradas para que eso les vaya arrojando valores, ¿si me entiendes?*
Obs$_1$: Serían como preguntas intermedias… para que vayan ordenando
P: ¡Exactamente!, para que vayan ordenando
Obs$_1$: Porque o sino queda todo en el papel del profesor, o sea queda todo a cargo del profesor…
P: Sí, exactamente. Es eso lo que planteo, que ellos solitos vayan diciendo, porque yo los tuve que ayudar. Porque como que, intervenir, para que lo pudieran hacer. O

bien usemos otros medios, como esos que me lo convirtieron todo a treinta avos, que obviamente no compararon completamente. Pero lo que me hace ruido es si eso que hicieron saben lo que significa. ¿Si me entiendes?..
Obs$_1$: Si, una de las cosas que vimos en esta situación era que le faltaba retroacción, o sea que el alumno cuando resuelve el problema, éste no le devuelve si lo está haciendo bien o mal
P: Exactamente, él no puede decir si está bien o no… validar sus procedimientos.

Esto puede interpretarse como una necesidad que tuvo la profesora frente a una situación que la llevó a realizar muchas intervenciones (le demandó más presencia) para instalar y lograr devoluciones por parte de los alumnos lo cual identifica como posible pérdida de potencial de funcionamiento adidáctico.

1.2.3 Comentarios

El desarrollo de esta situación nos permitió ver:

La emergencia de un procedimiento erróneo (aditivo) que sostiene una conjetura (Valeria es mejor jugadora que Tatiana) y donde las interacciones entre alumnos, la profesora, la situación, no logran refutar. El procedimiento aditivo logra una resistencia tal que las proposiciones que se construyen en esta situación son aún insuficientes para poder refutarlo. Nos demuestra la necesidad de nuevas situaciones que den nuevas oportunidades de encuentro con la ignorancia (por ejemplo, situaciones de rompecabezas de Brousseau).

Los alumnos saben que hay una relación entre tiros encestados y total de tiros, generan otras relaciones mediante diferencias (tiros perdidos). En su mayoría son relaciones establecidas entre pares de números enteros, salvo casos excepcionales donde expresan esas relaciones mediante porcentajes y en otros casos utilizan una representación superpuesta de reparto de áreas de un pastel (con respecto a esta última no hay suficiente información para decir que efectivamente expresen relaciones)

Evidentemente los alumnos están en proceso de construcción del significado de la fracción como un número que conserva y genera informaciones o relaciones (objeto-herramienta).

Por otra parte, hay una práctica instalada de estudiar matemáticas donde está permitido el intercambio de ideas, la discusión entre pares, la búsqueda y exploración de estrategias de resolución, la puesta en común en un clima de confianza con la profesora que escucha, da la palabra, y promueve esa práctica.

1.3 Situación didáctica: Concurso, ¿cómo cuidamos el planeta? Incisos 1 y 2)

Fecha: 10-11-2017, duración 30 min /100 minutos.

Esta situación se desarrolla en la tercera parte de la primera sesión. Consta de dos etapas, durante la primera los alumnos trabajan en equipos y luego hay una breve puesta en común (inciso 1a), y en la segunda vuelven a trabajar en equipos (resuelven el inciso 2). La situación (y la sesión) finaliza con una puesta en común e institucionalización.

1.3.1 Análisis previo de la SD. 1.2. Incisos 1 y 2

Consigna

1. Todos los años, las cuatro escuelas de una pequeña ciudad, realizan un concurso de dibujos, videos y cuentos sobre el cuidado del medio ambiente. Los alumnos que pasaron a la siguiente etapa fueron los siguientes:

Escuela	Alumnos
A	70
B	28
C	28
D	12

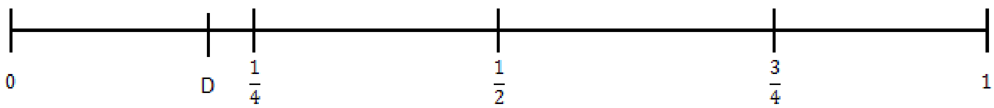
¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?. Explica tu respuesta.

2. Los alumnos en cada escuela son

Escuela	Total de alumnos
A	300
B	30
C	120
D	120

a. Considerando esto, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados? ¿y los peores?
b. En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la

recta de abajo. Ubica las otras escuelas. No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.



Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Propósitos didácticos

Que los alumnos utilicen diferentes procedimientos para comparar razones y fracciones. En particular interesa que noten la necesidad de establecer relaciones entre parte y todo para aproximarse a la noción de frecuencia relativa, y donde las cantidades absolutas son muy diferentes. Por ejemplo, notar que aunque las cantidades absolutas son iguales, o una más grande o más pequeña que la otra, al comparar las relativas (que consideran los totales), estas relaciones pueden cambiar. Además se pretende que los alumnos realicen un trabajo análogo al problema anterior, y se aproximen a la noción de orden de las cantidades relativas, y observen que varían entre 0 y 1. Se introduce la noción de decimales, como expresiones de razones, lo que será otro elemento útil para la construcción de la noción de probabilidad.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente.

En el **inciso 1)** los alumnos podrían afirmar que la escuela A tuvo mejores resultados y la D los peores, y que las escuelas B y C han tenido los mismos resultados.

En este momento, el docente dispondrá de la siguiente pregunta, para poner más énfasis en la necesidad de contar con los totales, para utilizarlo en una breve puesta en común colectiva: ***"¿Se necesita tener otra información de cada escuela para poder decir qué escuela tuvo los mejores resultados? ¿Cuál?".*** Recordemos que es la primera vez en la secuencia que los alumnos se enfrentan a una situación que pone en evidencia la necesidad de tener más información (datos) para poder decidir o dar mayor consistencia a sus argumentos.

Es posible que la pregunta **2a)** promueva la revisión de las afirmaciones realizadas, dado que se necesita conocer la información referida a la cantidad de alumnos de cada escuela para poder realizar las comparaciones y decidir cuál de ellas tuvo mejores resultados. Tanto la pregunta 1 como esta segunda pregunta 2a), podrían promover que los alumnos se den cuenta que para valorar el desempeño de las escuelas hacen falta dos datos. Un carácter de necesidad que no estuvo presente en el problema anterior, dado que en él la información relativa al total siempre fue un dato (a veces dado en forma de cantidades absolutas y otras veces en forma de cantidades relativas –como fracción-)

El inciso 2a) permite, mediante esta nueva información, establecer relaciones parte-todo para determinar en cuál de esas escuelas los alumnos, en general, tuvieron los mejores resultados.

En los datos de la tabla se presentan particularidades: en las escuelas B y C hay la misma cantidad de alumnos que han pasado a la siguiente etapa (28 alumnos), y por otro lado las escuelas C y D tienen la misma cantidad (total) de alumnos (120), además la matrícula de alumnos de la escuela A (300) es 10 veces mayor a la de la escuela B (30), así como la escuela D sólo aprobó la décima parte del total de alumnos (12 y 120) o que la escuela B tiene la cuarta parte del total de alumnos de las escuelas C y D.

Para responder qué escuela tuvo mejores resultados podrían establecerse comparaciones entre escuelas, tomadas de a dos, con argumentos como los siguientes:

- *La escuela B tuvo mejores resultados que la escuela C*, porque tienen la misma cantidad de alumnos aprobados pero en la escuela B hay un total de 28 alumnos mientras que en la C son 120 alumnos en total. Se compara 28 contra 30 (casi todo) y contra 120 (casi nada). Está en juego una estimación cualitativa de razones muy grandes contra muy chicas
- *La escuela B tuvo mejores resultados que la escuela A*, dado que en la escuela B pasaron a la siguiente etapa 28 de 30 alumnos y esta relación es equivalente a 280 de 300 alumnos (se mantiene la misma proporción) y como en la escuela A pasaron 70 de 300, afirmamos que B tiene más alumnos (relativos al total) que pasaron la prueba. Está en juego la noción de razón equivalente (o "misma proporción")

- *La escuela B sería mejor que la escuela D*, porque en la B sólo faltaron 2 alumnos para llegar al total de alumnos de la escuela (30-28=2) mientras que en la D faltaron 108 para llegar al total de alumnos (120-12=108). Este argumento es de tipo aditivo y normalmente es erróneo. En el caso de razones extremas, como éste (un muy grande, la otra muy chica), puede sin embargo permitir contestar bien.

Sin embargo, el razonamiento aditivo podría no intervenir. Las razones son tan extremas que, como en el caso de B y C, los alumnos podrían comparar mediante estimación cualitativa de razones, contraponiendo un “casi todos” contra un “casi nadie”.

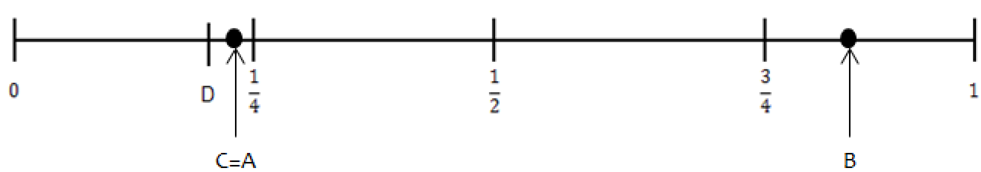
Finalmente, también es posible poner en juego la equivalencia de razones: en la escuela B pasaron a la siguiente etapa 28 de 30 alumnos y esto es equivalente a 112 de 120, multiplicando ambos términos por 4.

- *La escuela C es mejor que la escuela D* porque tienen la misma cantidad total de alumnos (120), sin embargo en la escuela C (28) pasaron a la siguiente etapa más alumnos que en la D (12). Los casos donde hay un término común, como éste son naturalmente de los más fáciles, pues basta con comparar cantidades absolutas.

Para responder el **inciso 2 b)** los alumnos podrían elaborar argumentos basados en fracciones sencillas y conocidas (1/2, 1/4, 3/4, etc.), casi emblemáticas, que funcionen estratégicamente para evocar la noción de razón (como relación que puede expresarse de variadas formas, con dos números (a de b), con una fracción (a/b de); con un decimal o, con un porcentaje, como vimos en el capítulo 2)

Algunos argumentos podrían ser:

- En la escuela A pasaron a la siguiente etapa 70 de 300, es casi la cuarta parte de los alumnos de la escuela, pues 300:2 = 150 y 150:2 = 75 o 300:4 = 75
- En la escuela C pasaron a la siguiente etapa 28 de 120 es casi la cuarta parte del total de alumnos de la escuela, pues 120:4=30
- En la escuela D pasaron a la siguiente etapa 12 de 120 es menos de la cuarta parte (30 alumnos) (es dato del inciso).



Por su parte, el docente podría proponer en caso que considere necesario, el uso de una tabla como la siguiente para que los alumnos construyan fracciones a partir del conocimiento de las relaciones numéricas entre alumnos que pasaron el concurso y el total de alumnos de la escuela (parte-todo). Podría funcionar como apoyo para el cálculo de fracciones, y un trabajo análogo al problema anterior (tiros al aro).

Escuela	Fracción de alumnos que pasaron a la etapa siguiente
A	70/300; 7/30
B	28/30; 14/15
C	28/120; 14/60; 7/30
D	12/120; 6/60; 3/30; 1/10

Cabe destacar que las fracciones que se puedan formar no son las usuales, como las que usaron en el problema 1 de tiros al aro, donde manipularon medios, quintos y tercios. En esta situación se podrían enfrentar al desafío de utilizar treintavos, trescientoavos, quinceavos, y decimoavos, entre otros. Estas fracciones, aunque son un recurso útil, son difíciles de manipular, y si bien puede ocurrir que saquen las fracciones, no es un procedimiento esperado de entrada (lo que si interesa es ubicar cada jugador en intervalos y de manera aproximada, de acuerdo a razonamientos como los mostrados anteriormente).

Se podrá institucionalizar que:

- La fracción es una razón o proporción que permite realizar comparaciones y da como información una relación entre dos cantidades.
- A este tipo de fracciones se los suele llamar cantidad relativa, por la relación que establece entre dos números enteros.
- Por ejemplo, la fracción 28/30 da como información que de un total de 30 alumnos, 28 pasaron el concurso; o su equivalente: de cada 15 alumnos, 14 pasaron el concurso. Es una afirmación que relaciona dos cantidades, una parte con un total.

1.3.2 Análisis de la experimentación de la SD. 1.2. Inciso 1 y 2

- **Etapa 1**

La profesora reparte por equipos varias copias del inciso 1) de la Lección: *Concurso, ¿cómo cuidamos el planeta?*

1. Todos los años, las cuatro escuelas de una pequeña ciudad, realizan un concurso de dibujos, videos y cuentos sobre el cuidado del medio ambiente. Los alumnos que pasaron a la siguiente etapa fueron los siguientes:

Escuela	Alumnos
A	70
B	28
C	28
D	12

¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?. Explica tu respuesta.

Los alumnos leen la consigna, discuten entre ellos. La profesora recorre los equipos, y repregunta: ¿se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?

En el equipo 2, discuten pero tienen su respuesta: *"Yo creo que fue la escuela A, ya que como tuvo más alumnos que pasaron a la siguiente etapa, fueron de veras la que tuvo mejores resultados." (Axel)*. Luego la profesora se acerca al equipo. Formula preguntas que logra que los alumnos expresen la respuesta esperada[57].

Episodio. Equipo 2.
P: ¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados? *[Dirigiéndose a los integrantes del equipo 1]*
Mauro: La A, ¡fueron más niños!, ¡fueron 70! Y los otros solo fueron 28 y 12… [Empieza a dudar]
P: Piénsenle, piénsenle, piénsenle…

[57] La intervención de la profesora direcciona las respuestas de los alumnos hacia una nueva pregunta: Si la pregunta (dicotómica) -¿se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?- se responde por "no, porque se necesita otro dato", entonces, *"¿Cuál es el dato que hace falta para que la respuesta sea "si"?".* No es una pregunta prevista en las fichas, sin embargo logra que los alumnos formulen una respuesta donde surge la necesidad de conocer cuántos alumnos hay en cada escuela (Mauro). Observar que en la cuarta intervención, la profesora relaja la reticencia a informar, aumentando así la potencia de su intervención respecto a la necesidad del conocimiento en juego.

Aline: A mí se me hace que no… [Regresa la profesora]
P: ¿Se puede saber? , a ver…
Aline: Se me hace que es una trampa. ¡Se me hace que nos tendieron una trampa maestra! [La profesora le sonríe]
Axel: Se me hace que es la escuela A maestra, estas tres escuelas fueron los alumnos que obtuvieron los mejores resultados y por eso pasaron a la siguiente etapa que éstos [Compara escuelas A, B, C versus la D]
P: ¿Y no se necesita otro dato para poder saber eso?, ¿y si se necesita otro dato, cuál dato? *[Dirigiéndose a Alex]*
Mauro: ¡Ah, se necesita saber cuántos alumnos hay en la escuela!
P: ¿Se necesita qué?
Mauro: Saber cuántos alumnos tenía la escuela, en la A, B, C, D…
P: Se necesita saber cuántos alumnos tenía la escuela… [Repite]
Aline: Para ver cuántos faltaron más [Interrumpe y agrega]… cuántos pasaron y no pasaron.
P: Bien, háganlo, así ahora anótenmelo.

Luego de la intervención de la profesora una parte de los integrantes del equipo vuelve a leer el problema, y otros exploran los datos (un poco a ciegas), calculan la suma del total de alumnos de las cuatro escuelas y dividen entre 4.

En el equipo 1, los alumnos expresan que la consigna es confusa. Luego agregan una condición: que todas las escuelas tengan la misma cantidad de alumnos.

Byron: Bueno, podemos poner de ejemplo que cada escuela tiene la misma cantidad de alumnos… de aquí nada más pasaron doce. Y aquí, aquí,... ¡setenta!...

Edu: Y ahí pasaron 28 y 28

La intervención de la profesora (análoga a la que realizó en el equipo 2), los lleva a reconocer que es necesaria la cantidad de alumnos de cada escuela. Sin embargo, al retirarse, vuelven a discutir su conjetura. En efecto, el razonamiento que realizan los alumnos, suponiendo que todas tienen igual cantidad de alumnos, es una forma de decir que faltan datos.

Edu, propone trabajar con fracciones del mismo denominador (como sucedió en la comparación de la situación anterior), Byron le explica que para eso, se necesita "el entero" (lo cual es otra manera de decir que falta un dato: el total de alumnos).

Equipo 1. La necesidad de tener "un entero" para reutilizar un procedimiento institucionalizado.
Edu: [Se dirige a Byron] ¿Y si lo hacemos como en el equipo 4?
Byron: ¿Cómo?

Edu: De que puso fracciones, o sea todo… el denominador… esteee, igual[58]…
Byron: Perooo… [Pausa]… ***¡No tenemos un entero!****... o sea, ¡aquí es lo mismo!... aquí tenemos nuestro entero y aquí estamos sacando una fracción… ¡Arr! [Se fastidia]. Es que la maestra no me entendió, es que yo le quería dar nada más un ejemplo. La escuela pudo tener 200 alumnos y aun así va a ser la A, porque pasaron ¡setenta! [Sostiene su hipótesis que todas tienen la misma cantidad de alumnos]*
Edu: Ah, ¡ya te entendí!
Byron: Ya, puede ser el número que quieras. Si aquí la maestra nos hubiera puesto 101 o 71...
Alberto: ¡Byron, no se puede!
Byron: Si se puede, porque aquí nos está diciendo que los alumnos que pasaron a la siguiente etapa fueron los siguientes. Y aquí nos está diciendo que pasaron 70 del A, y aquí nos está diciendo que nomás pasaron 12, del D.

En la puesta en común, la profesora repregunta: ¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados? Los alumnos responden colectivamente que no, aunque hay algunos para los que la respuesta no es evidente. En las respuestas escritas se evidencian estas contradicciones (ver imagen), en donde por ejemplo en el equipo 4, *"La escuela A es mejor porque tuvo más alumnos y para saberlo se necesita saber cuántos alumnos hay en la escuela"* , o la respuesta de Axel, donde descarta la primer conjetura (tacha) y escribe: *"No lo puedo saber porque no sé cuántos alumnos hay en cada escuela"*, u otra también del equipo 4 que afirma que *"No, porque solo te está diciendo la cantidad de alumnos que pasaron y no te está diciendo que escuela tuvo los mejores resultados y necesita saber cuántos alumnos había o cuantos concursaron"*.

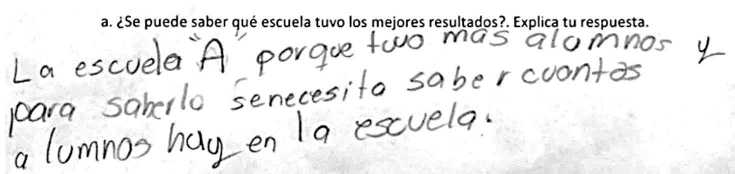


Figura 18. Respuesta de alumno en equipo 4.

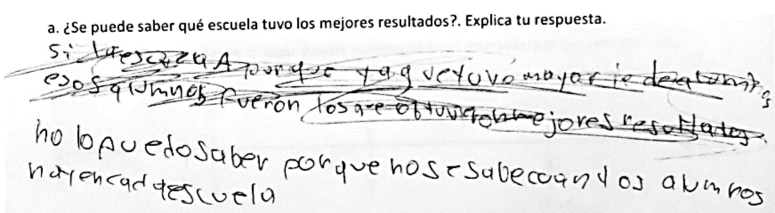
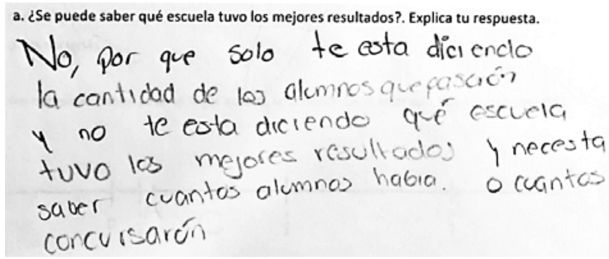


Figura 19. Respuesta escrita de Axel.

[58] Procedimiento que emerge del equipo 4. Ver situación anterior: "Equipo 4. Comparar generando fracciones equivalentes de mismo denominador." La técnica consistía en generar fracciones equivalentes (correspondiente a cada tirador), pero con igual denominador (30) para luego compararlas entre sí.


a. ¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?. Explica tu respuesta.

No, por que solo te esta diciendo la cantidad de los alumnos que pasarón y no te esta diciendo qué escuela tuvo los mejores resultados y necesita saber cuantos alumnos habia. o cuantos concursarón

Figura 20. Respuesta de alumno en el equipo 4.

- **Etapa 2**

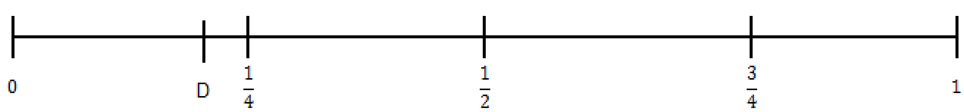
La profesora reparte copias del inciso 2. Los alumnos leen la consigna y buscan la anterior para comparar con los datos de ambas tablas.

2. Los alumnos en cada escuela son

Escuela	Total de alumnos
A	300
B	30
C	120
D	120

a. Considerando esto, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados? ¿y los peores?

b. En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la recta de abajo. Ubica las otras escuelas. No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.



Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

En el equipo 2. Vinculan los alumnos que pasaron (parte) con los totales de cada escuela, y a partir de estos modifican su conjetura (respuesta del inciso 1). Ya no es la escuela A quien obtuvo mejores resultados, ahora están muy seguros que es la B. Mauro y Aline utilizan una expresión cualitativa de las razones (pasaron 28 de 30 alumnos o no pasaron 2 de 30, por momentos el total queda implícito).

Mauro: ¡Es la B!
*Axel: Sí es la B, porque **de** sus 30 alumnos sólo 28 pasaron*
*Aline: ¡Sólo 2! **Sólo 2** no pasaron [Agrega]*
Mauro: y aquí son 30 y solo pasaron (…)
*Aline: ¡Y aquí son 120 **y** sólo pasaron 28!*

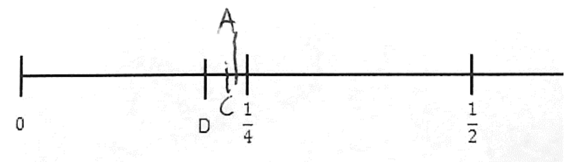
La profesora se acerca al equipo y los escucha. Los integrantes le comunican sus respuestas, y ésta se aleja. Parecería que reconoce que los alumnos de este equipo están en situación adidáctica, interactuando con el problema y generando argumentos para luego confrontarlos en la puesta en común.

Los alumnos leen el inciso b). En el mismo equipo, Mauro intenta ubicar escuelas en la recta numérica usando una regla, la profesora enfatiza en una breve discusión colectiva que no es necesario obtener la ubicación exacta. Mauro y Aline parecen confundidos, es evidente que hay una dificultad. Axel empieza a establecer comparaciones entre *los pares de cantidades de cada escuela y los cuartos de una unidad.*

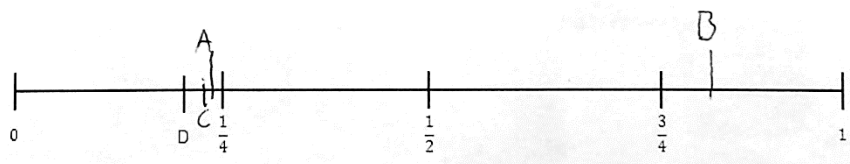
Episodio. Equipo 2.
Mauro: La escuela D… el ¼ se ubica en el 4… esto es en 4 centímetros… ½ se ocupa en el 1/8… el ¾ se ocupa en el 12.5… y el ultimo se ocupa en el 16. [Mide con la regla]
*Axel: Oigan, el C, es **menos de la cuarta parte** [Interrumpe]… Porque **la cuarta parte de la D sería 30**.*
Mauro: Entonces la D… sería (…)… se debería de ubicar… [Parece no escuchar a Axel]
Obs$_2$: ¿Y porque piensas que (…)?
*Axel: Porque si **dividimos D entre 4 serían 30**, que son los 4 en total [Señala los cuartos de la recta]. Y aquí, ya que **los alumnos que pasaron sólo fueron 28**, son menos de la cuarta parte. Por eso están ubicados aquí. [Ubica C entre D y ¼]*

Obs$_2$: Entonces menos de la cuarta parte de… [Señala la tabla]
***Axel: De la… de la C… 120 entre 4 son 3. Digo, ¡120 entre 4 son 30! Y como aquí sólo pasaron 28 son menos de la cuarta parte** [Silencio en el equipo] [En este momento la profesora genera una breve discusión colectiva sobre la consigna, enfatizando que hay que ubicar la escuela que va primero y la que va después, y en*

el intervalo correspondiente pero "sin que sea exacto". En simultáneo, Axel continúa con su trabajo y toma su cuaderno de apuntes]
Obs₂: ¿Ese es el apunte de…que…?
Axel: Es mi apunte de lo que ayer la maestra nos enseñó de los números divisibles entre 2, 3, 5, 7 y 11… [Continua su cálculo mental] 300 entre 2… 150… 75… Ah, no, sí, sí. [Escribe A entre C y ¼]



[Continúa. Voz de fondo la profesora pidiendo que entreguen la actividad]… [Luego, Axel ubica B entre ¾ y 1 y entrega su hoja] Aquí está… maestra esta ya la terminé.



Obs₂: ¿Y no te faltó la A?
*Axel: No, ya la ubiqué. También se ubica dentro del cuarto. **El cuarto de 300 son 75**. Y los alumnos que pasaron fueron 70.*
Aline: ¡Imagínate cuántos no pasaron!...ciento…
Axel: treinta. ¡130!. ¡No, 230! [Se sorprenden por la cantidad de alumnos]
Obs₂: ¿Pero cómo si son tantos (…)?
Axel: Tuvo menos alumnos los que fueron 30 pero sólo 2 no pasaron la prueba.
Aline: ¡Pasaron 28!
Axel: Más de los ¾.
Aline: Imagínate ahí son 28, nosotros somos novecientos y tantos… [Refiriéndose a su escuela]
Axel: ¡Casi los mil!

A partir del episodio anterior observamos que, efectivamente esta situación ha presentado mayor dificultad para los alumnos. En el equipo 2 sólo Axel ha logrado resolver el problema, utilizando el siguiente razonamiento:

Lee del problema la posición de la escuela D (menor a ¼), y la compara con la escuela C que tiene igual denominador (120). Su razonamiento se basa en el uso de la fracción ¼ como operador, cuando afirma por ejemplo que: *"La cuarta parte de los alumnos de la escuela D son 30"*, o que *"La cuarta parte de 300 es 75"*. Este operador "privilegiado", y funcional, le permite ubicar en la recta a la escuela C y A entre 0 y ¼. Es una manera de decir que el cuarto de 120 es 30, o que 75 es ¼ de 300 (aún no están presentes otras maneras de representar esa operación, como producto de un entero por una fracción: 1/4 X300=75 o 1/4x120=30).

Por su parte Mauro se queda pensando en el uso de la regla graduada, y Aline sigue prestando mucha atención al complemento. Evidentemente la dificultad está en el tránsito de las cantidades absolutas a la razón, que Axel lo aborda haciendo funcionar "*el cuarto de*" pero que al resto de los compañeros del equipo los desconcierta. Se aprecia además, que la situación es adecuada para suscitar discusiones que problematicen ese tránsito.

Por otro lado, indagando los resultados de todos los equipos, observamos que no han considerado la equivalencia de A con C posiblemente sea uno de los aspectos para mejorar en la consigna.

En el siguiente episodio se produce el momento de institucionalización, característica fundamental de la acción de la profesora, quien busca provocar lo más posible que sea una acción conjunta con los alumnos y entretejer un discurso formal (el escrito en las fichas) con un lenguaje que emerge de las preguntas realizadas a los alumnos.

Episodio. Institucionalización.
P: A ver, si yo les pregunto… ¿qué estuvimos trabajando en ésta sesión? ¿Qué me van a contestar?
Aos: Fracciones [Varios responden. La profesora levanta la mano, gesto que indica que deben levantar las manos para participar]
P: Aline… [Da la palabra]. A ver, dígame allá.
Aline: ***Comparación de… de cantidades… y fracciones.*** *[Murmullos]*
P: Dice su compañera. A ver, pon atención porque necesito que me digan si están de acuerdo o le agregamos algo más. Dice su compañera que estuvimos [Pausa. Murmullos. Falta 5 min para terminar la sesión]… comparando fracciones y cantidades [Murmullos]. Dijo: comparamos cantidades y utilizamos fracciones. ¿Qué más hicimos?
Mauro: Este… ***porcentajes****… [Murmullos]*
P: Utilizamos porcentajes… fracciones… ¿alguien más qué me puede decir que estuvimos haciendo?
Ana: ***Comparar cantidades***
P: Comparar cantidades, bien. ¿Y esas cantidades las comparamos utilizando qué cosa?
Aline: ¡Fracciones!
P: Fracciones. En sus cuadernos, vamos a concluir esa parte. [Aquí dicta a los alumnos la institucionalización prevista en las fichas] Dicta: "La fracción es una

***razón o proporción** que da como información una relación entre": ¿Cuántas cantidades comparábamos o relacionábamos?*
A: cinco… cinco… Dos
P: ¿cuántas relacionábamos?
Ana: Dos… dos o más…
P: ¿En el primer caso que relacionábamos?
A: Niños… Oportunidades…
P: Las veces…
Laura: La cantidad de veces que encestó y la cantidad de veces que tiró
P: Bien. En la primera relacionábamos tiros con las veces que encestó. ¿En otro problema qué relacionamos?... [Silencio] En la de las escuelas, ¿qué relacionábamos?
Itza: La cantidad de alumnos que había con la cantidad que pasaron a la siguiente etapa
P: Bien. Entonces anotamos: "es una relación entre dos cantidades, en este caso –en el último problema- entre el número de alumnos aprobados y el total de alumnos de la escuela. [Continua el dictado] "Las fracciones se pueden comparar, por ejemplo, la escuela con mejor resultado en el concurso". "Cuando las fracciones se usan para establecer una relación entre dos cantidades como aquí, se dicen que expresan cantidades relativas y absolutas". [Timbre fin de la sesión]

En la puesta en común si bien se destacan dos acciones que estuvieron implicadas: comparar y expresar la comparación con fracciones, hay cierto abuso de terminología nueva que se intenta instalar: fracción relacionada a razón (o proporción) y cantidad relativa y absoluta. Es decir que quizás hubiera bastado con describir que las fracciones ayudaron a comparar y cuando se usan de esa manera se llaman razones o proporciones.

1.3.3 Comentarios

La situación que se desarrolla en este momento nos permitió seguir conociendo los recursos matemáticos que disponen los alumnos. La pregunta del inciso 1 (si se puede saber qué escuela tuvo mejores resultados y sin conocer el total) ha provocado discusiones y confusión en los alumnos, que se han manifestado en respuestas contradictorias. Apostaban por la escuela donde han pasado mayor cantidad de alumnos (A), pero a la vez algunos sospechan que se necesita otra información y lo expresaban suponiendo que todas las escuelas tienen la misma cantidad de alumnos o diciendo que, si se quisiera usar fracciones, les falta el "entero" (realizando una analogía con la situación anterior donde utilizaron la técnica de expresar las fracciones equivalentes de común denominador 30).

Al presentarles los totales de alumnos de cada escuela en el inciso 2a), los alumnos reaccionaron con sorpresa, y elaboraron argumentos donde ponen en relación las cantidades, por ejemplo cuando afirman que “es la escuela B porque de sus 30 alumnos 28 pasaron o que de esa escuela sólo 2 no pasaron”, o cuando enfatizan que “¡son 120 y sólo pasaron 28!”. Al establecer estas relaciones, se refutan las conjeturas que habían realizado utilizando sólo las cantidades absolutas.

Al ordenar y ubicar en una recta, en el inciso 2b) se evidencia la dificultad en el tránsito de las cantidades absolutas a la razón para luego expresarlo como fracción. La presencia de las fracciones ½, ¼ y ¾ en la recta es importante, así como disponer de la ubicación de la escuela D, permite a algunos alumnos considerarlas como expresiones de razones.

En la clase las ideas emergen a modo de “destellos” de algunos alumnos, no necesariamente compartidos por todos, lo cual nos informa de la heterogeneidad de los recursos que poseen y la numerosidad de los alumnos en la clase. Esto hace muy compleja la tarea de la profesora, evidente en el momento de la institucionalización, cuando busca sintetizar lo colectivo o mejor dicho identificar cuáles son los significados compartidos. Sin embargo en su gestión al final de la sesión logra que emerja y se conjuguen dos ideas importantes: la comparación de cantidades y que ésta se puede expresar mediante fracciones.

2.1 Situación didáctica: Concurso, ¿cómo cuidamos el planeta? Inciso 3)

Fecha: 17-11-2017, duración 46 min /100 minutos.

La situación se desarrolló al inicio de la segunda sesión[59]. La profesora propone realizar un trabajo colectivo donde se recuperan ideas de la sesión anterior, en particular los incisos 1 y 2). Luego propone la resolución del inciso 3). Cabe destacar que esta situación como la siguiente, han llevado en su desarrollo un tiempo superior al previsto (aproximadamente 80 minutos). Antes de resolver el inciso 4), la profesora propone una puesta en común.

2.1.1 Análisis previo de la SD. 1.2. Inciso 3)

Consigna

Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

Propósitos

Este inciso busca seguir promoviendo el uso de la fracción, entendida como una razón, que expresa una relación entre una parte y un todo. La decisión de dar en el problema sólo la fracción, sin conocer el total de alumnos de la escuela E, ni aquellos que han pasado el concurso, busca dar fuerza a una característica semántica importante: el objeto de la comparación no son las cantidades sino las razones entre ellas[60]. La fracción expresa una *razón* entre cantidades y, en esa medida, se puede comparar con la razón implícita en los otros pares de cantidades.

Otra idea que se espera ver emerger es: la fracción podría sustituirse, si se quisiera, por cualquiera de los infinitos pares de cantidades que la tienen a ella como razón. Esta idea puede facilitar una forma de comparación.

Se espera que esta noción de fracción como razón se re funcionalice en otros momentos del desarrollo de la secuencia, cuando se manipulen frecuencias relativas que

[59] En esta sesión se desarrollaron además dos situaciones, que se corresponden con el inciso 4) y el inicio 1 de la fase 2: Botellas con canicas, ¿cuántas de cada color?

[60] Una nueva información, que no es la parte ni es el todo, sino la relación que hay entre ellos.

podrían permitir la construcción de una noción de probabilidad como convergencia en muchas repeticiones de un experimento aleatorio.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente.

Para promover la construcción del significado de la fracción 3/7, los alumnos podrían analizar cómo resolvieron los problemas anteriores, en los que sí tenían como dato el total de alumnos de la escuela y de los alumnos que pasaron el concurso (o en el caso de tiros al aro, tenían como dato el total de tiros realizados y/o total de encestados). Podrían preguntarse: *¿es posible comparar con las otras escuelas, sin conocer cantidades de alumnos?*

En las fichas se explicita que el docente podría disponer de algunas estrategias para utilizar en una breve puesta en común en el caso que los alumnos no pudieran avanzar en la comparación: podría proponer revisar los problemas resueltos anteriormente (tiros al aro y este problema en sus incisos 1 y 2), o también podría introducir un dato (parte o todo) que les ayude a comparar, realizando un trabajo análogo a los anteriores (con el riesgo de "quitar potencia" a la fracción[61] : "*Si la escuela E tuviera en total 84 alumnos, ¿Cuántos hubieran pasado el concurso?*" o "*Si hubieran pasado el concurso un total de 36 alumnos, ¿Cuál es la cantidad total de alumnos de la escuela E?*[62]".

Para comparar las escuelas anteriores con la E, usando 3/7, los alumnos podrían movilizar razonamientos cualitativos, por ejemplo con la noción de mitad:

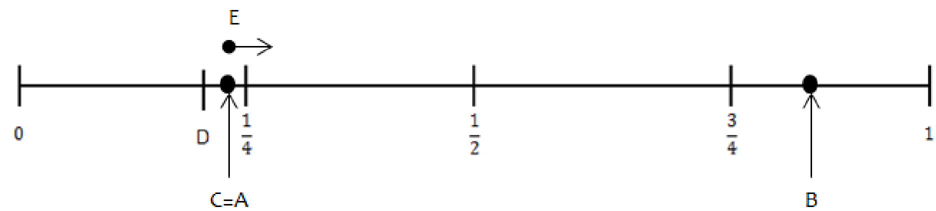
Dado que 3/7 es un poco menos de la mitad, seguro es mejor que la escuela D (que es 1/10 y menor a ¼). Además es mejor que la escuela A porque en ésta pasaron 70 de un total de 300 alumnos, o lo que es equivalente, 35 de 150, donde le falta mucho para llegar a la mitad (e incluso es menor que ¼).

---

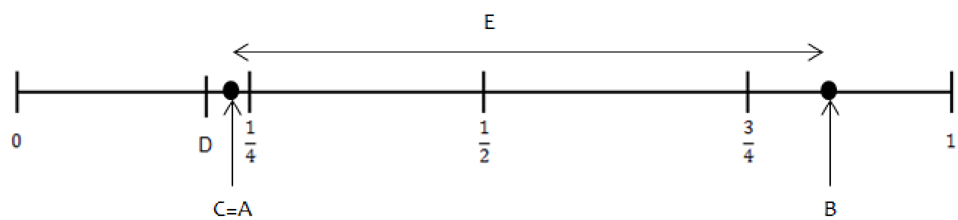
[61] Pero por otro lado, dando una nueva cantidad para repensar su sentido. En este caso, la fracción 3/7 podría pensarse como un operador que permite transformar total de alumnos en total de alumnos que aprobaron el concurso. El introducir un dato (parte o todo) podría promover el encuentro de una nueva razón distinta a la razón (3,7), cuya relación con ésta aporte la construcción de nuevos sentidos a la fracción 3/7.

[62] Con la información de la fracción 3/7 y suponiendo que 36 alumnos pasaron el concurso, los alumnos podrían, al relacionar 36 con 3/7, poner en evidencia que siendo una relación de "3 partes de 7", 36 sería la tercera parte. Para calcular el total de alumnos, es posible que evidencien que faltan 4 partes de 7, es decir 36 alumnos y un poco más, que serían 36:3=12. Luego, bajo este supuesto, en la escuela hay en total 36+36+12=84 alumnos (podría ser un procedimiento más o menos familiar de acuerdo al trabajo realizado en el problema anterior), con lo cual tendrán la equivalencia entre 3/7 y 36/84, o los pares (3,7) y (36, 84) y con estos pares podría abrirse un camino para comparar con las otras escuelas.

Además, si han observado que las escuelas A y C conservan la misma relación entre alumnos que pasaron y el total de alumnos, y éstas son mejores que la escuela D, entonces la escuela E es mejor (que A, C y D).



Respecto a la relación entre la escuela E y la B, a la primera le falta poco para llegar a la mitad, mientras que a la escuela B le falta poco para que todos sus alumnos pasen al concurso, y es mayor a los 3/4, con lo cual ésta última es mejor que E.



2.1.2 Análisis de la experimentación de la SD. 1.2. Inciso 3)

Este análisis es largo, obedece a que frente al problema y la gestión de la profesora, emergen en la clase nociones y procedimientos que merecían un estudio más detenido. Además cabe destacar que a partir de esta sesión se incorpora un tercer observador que ha favorecido el levantamiento de datos de un nuevo equipo de alumnos.

Para facilitar la lectura, he organizado el análisis en los apartados que se resumen en la siguiente tabla:

Inicio de la clase	- Episodio. La memoria de la clase: recapitulación de las lecciones anteriores.
Fase de trabajo en equipos	- Episodio. Una ayuda que deriva en la discusión de una conjetura imprevista (decimales/ porcentaje) y que concluye con la sugerencia de una técnica (simplificación). Tres diálogos y comentario de Obs_3.

	- Episodio. Equipo 1. Byron explora y se da cuenta que puede ser cualquier pareja equivalente (Multiplicar por 2 y por 3 al numerador y denominador de 3/7). - Episodio. Equipo 2. ¿Comparar en qué sentido? ¿Comparar quien tiene más o comparar qué? (Marian). Conjeturas alrededor de la noción de porcentaje.
Fase de puesta en común	- Episodio. Conversión a común denominador 210. - Episodio. Equipo 3. Conversión a común denominador 30.

Inicio de la clase. La memoria. La profesora solicita organizar los mismos equipos de la sesión anterior, e inicia un diálogo colectivo con el propósito de recordar las situaciones abordadas. Da la palabra a algunos alumnos para traer a la memoria colectiva de la clase el contexto de la situación de “tiros al aro”.

Episodio. Recapitulación
P: Prácticamente la semana pasada vimos dos problemas diferentes, ¿sí lo recuerdan?
Aos: Si
P: Levante la mano alguien y ayúdeme a recordar de que se trataba el primero. Ustedes (indica a un equipo)
A1: Se trataba de personas que jugaban y… [En voz baja]
P: Bien. Dice: “Se trataba el primer problema de ***personas que jugaban basquetbol****”. Teníamos que ver quién era el* ***mejor: tirador****. Recuerdo mucho yo a Silvia… ¿y quién más era la otra persona?*
Aos: ¿Daniel?
Aos: ¡y Tatiana!
P: Y Tatiana. Y decíamos que ***a pesar que alguna de las dos había encestado más cantidad de veces, esa no era la mejor tiradora. ¿Sí te acuerdas?*** *Porque lo estábamos comparando: ¿con quién? Comparaba dos cosas: las veces que encestó, ¿con qué cosa?*
A: Las veces que encestó con y...
Karen: Las ***veces que tiro y con las veces que perdió****. [La profesora realiza un gesto de duda, mirando hacia arriba]. [Murmullos].*
Axel: Las ***veces que tiró con las veces que encestó***
Karen: Ajá, no, las ***veces que tiró con las veces que encestó****.*
Itza: Las ***oportunidades*** *que tuvo, con las veces que tiró.*

La recapitulación en este primer momento reinstala en la clase las nociones a las que los alumnos hacen referencia: las relaciones entre cantidad de veces que se tira al aro y las que se encestan como forma de argumentar si un jugador es mejor que otro (comparación).

Continúa este primer momento colectivo de la clase, ahora con la situación donde se comparaban alumnos que pasaron un concurso con el total de cada escuela. Se evidencia cierta dificultad de hacer emerger en la clase la idea que una razón puede representarse a través de una fracción.

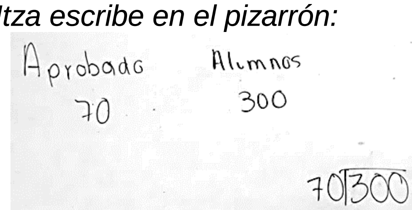
Diálogo. Lección 1.2: Concurso escuelas
P: Ah, ok, dice Itza: estaba comparando cuántas veces tiró al aro y cuántas veces: encestó. Y así pude definir quién era mejor jugadora que las otras. ¿Si se acuerdan? ¿Sí? Ahora el segundo problema, allí atrás. ¿De qué se trataba el segundo? El primero era de los aros que encestaban y el segundo de qué se trataba.
A2: Del… básquetbol
A3: No
Aos: De la escuela
P: A ver Ana
Ana: ¿El segundo problema?, el de las escuelas…
P: ¿De qué se trataban las escuelas?
Ana: Participaron de un… una competencia
A4: Un concurso…
P: A ver ayúdenle a Ana
Andrés: El segundo problema era sobre el medio ambiente
P: Ponemos atención. El segundo problema dice Ana: “Se trataba de un concurso de medio ambiente”, ¿ya lo recuerdas? Pero teníamos que ver cuántas personas, en este caso alumnos, habían pasado a la siguiente: etapa. Ahí en ese problema, lo primero que te di, fue una lista de cuantos alumnos aprobaron, ¿si te acuerdas?
Aos: Si
P: ¡Sí! Yo les preguntaba: con ese dato, ¿podemos saber qué escuela es mejor?
Aos: No [Rápidamente]
P: No, ¿por qué dijimos que no? [Repregunta, rápidamente]
Aos: Porque… [Responden varios alumnos a la vez, superponen sus voces]
P: A ver, levante la mano. Por qué.
A6: Porque faltaba la cantidad de alumnos que tenía cada escuela
P: Necesitábamos otro dato que era la cantidad de alumnos que hay en cada escuela. Una vez que ya tuvimos los alumnos, ¿cómo comparamos quien era mejor y quien era peor? [Silencio]
Aos: Por… [Murmullos/silencio]
P: A ver [Da la palabra a un alumno]
A: Por el total de alumnos que había en cada escuela
P: Por el total de alumnos que había en cada escuela y por el total de alumnos que había pasado a la ¿siguiente?: … [Espera respuesta]
Aos: Etapa [Completan la frase]

El episodio permite afirmar que los alumnos recuerdan la trama de los dos problemas. Como veremos en el siguiente episodio, el recordatorio continúa con una discusión colectiva, donde la profesora busca hacer recordar que una fracción puede expresar qué parte es una cantidad que contiene a otra, noción que los alumnos manifiestan con dificultad.

Diálogo (Continuación)
P: Etapa. Eso lo podían representar de alguna manera[63]*. ¿Cómo lo representaron? ¿Se acuerdan? En la hoja que les di, ¿en esa hoja no viene, verdad?*
A: No
Aos: No
P: Por ejemplo. Ahorita te voy a poner un ejemplo para que lo recuerdes. [Escribe en el pizarrón]. Decíamos que, en la escuela A habían aprobado o pasado 70, y en total en la escuela eran 300 alumnos. ***¿Cómo podía comparar estos datos?*** *¿Te acuerdas qué…, qué utilizábamos?*

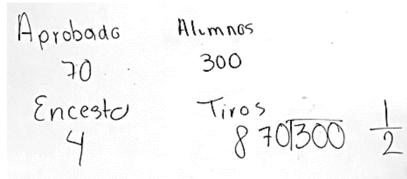
Aprobados	Alumnos
70	300

Aos: [Silencio y luego murmullos]
P: Utilizamos otra cosa… ¿Qué utilizamos? Acuérdense.
Itza: ¿Las fracciones?
P: Utilizamos una fracción: ¿Cómo lo puedo escribir?, ¿Cómo lo escribían?
Itza: 70…
P: A ver pase a anotarlo. Itza escribe en el pizarrón:



P: ¿Lo escribíamos así?...
Aos: [Murmullos]
P: ¿Así sabremos ***la cantidad de alumnos que no pasaron****? [Breve pausa]… ¿Cuántos no pasaron?*
Aos: 230
P: 230 no pasaron, muy bien. ¿Alguien recuerda cómo teníamos esto? Les voy a poner otro ejemplo. A ver anote… encestó y… el otro era… total de tiros, ¿verdad? [Escribe: "Encesto" y "tiros"] Si encestó 4, haber anótele cuatro. Si encestó 4 y tiró 8 veces, ¿eso cómo lo podía escribir?
Aos: Un medio*.*
P: [interrumpe] Un medio, ¡bien! Decía que un medio, anótemelo aquí.
Itza anota: 4…8… 1/2

[63] Se refiere a la relación entre los alumnos que había en cada escuela (total) y los que pasaron a la siguiente etapa del concurso.



P: Y lo mismo hacíamos con otro, ¿sí se acuerdan? Lo escribíamos con una: …
A: Fracción
P: Lo escribíamos con una fracción. ¿Ya te acordaste? Eso era importante que lo recordáramos porque con eso vamos a iniciar. [Pausa]. ¿Qué significa la fracción?
A: ¿La mitad?
A: ¿Las veces que aumentó?
Itza: Las… veces que encestó con… con los tiros que…lanzó
P: Es una comparación con las veces que encestó y con los tiros que: lanzó. Y que decimos en este caso que es: un medio, o bien podemos decir en este caso que dos tiros, ¿Cuál es la mitad?
Aos: Uno
P: De dos tiros encestó: uno. O de un… hizo un tiro de, un total de: dos.
Aos: Dos
P: Hasta ahí vamos bien. Váyanse a su lugar. Ya con esto vamos a empezar con la primera actividad del día de hoy [Inciso 3]. Les voy a entregar y para ello me va a ayudar Silvia.

En el episodio anterior, se observa la insistencia de la profesora para traer a la memoria de la clase algunos significados referidos a la fracción que aún los alumnos no pueden explicitar. El volumen de informaciones que expresa es mucho mayor a las respuestas que obtiene de ellos.

La comparación de 70 contra 300 que se evoca e intenta expresarse como una fracción 70/300, no permite hacer emerger el sentido de la razón, dado que se necesita para ello de otro par de cantidades. La comparación de (a contra b) versus (a’ contra b’), hace emerger a las razones que entre esas cantidades pueden establecerse. La representación como cociente se ignora, dado que la profesora no apunta a ese aspecto en este momento de recapitulación.

Por un momento se desvía la discusión hacía la consideración de cantidad de alumnos que no pasaron, pero rápidamente se apela a la noción de “mitad” para evocar la idea de razón-fracción.

Estos episodios permiten detectar cierto “estado de conocimiento” de la clase, en relación con las situaciones desarrolladas en la sesión anterior. Nos deja ver por un lado, la dificultad en los alumnos para recordar o explicitar cómo expresaron las relaciones entre 70 y 300, y por otro, las dificultades que implican para su enseñanza cuando se imponen las fracciones como único modo de expresión. Por otra parte, emerge de este análisis la pregunta: ¿en qué momentos del desarrollo de las situaciones cobran sentido las fracciones como razones? ¿Qué variable/s didáctica/s se debe/n poner a funcionar en el problema que habilite/n su dialéctica como herramienta y como objeto? ¿Qué situación las hace emerger en la clase?: preguntar cuánto representa una cantidad “a” de una “b” posiblemente no, pero al comparar cualidades como “el mejor jugador” o “la escuela que obtuvo mejores resultados”, sí, porque implican abordar la razón como una relación de relaciones.

Fase de trabajo en equipos.

- **Una ayuda (para todos) que deriva en la discusión de una conjetura imprevista (decimales/ porcentaje) y que concluye con la sugerencia de una técnica (simplificación).**

Luego del momento anterior de presentación colectiva, los alumnos realizan una primera lectura del inciso 3) y empiezan a discutirlo[64]. Primeros argumentos:

En el equipo 1:

Byron: No tenemos el dato de la escuela E
Edu: “Setenta ***de*** *treinta…eh de trecientos” [Lee los datos de la escuela A]*

En el equipo 2:

Axel: “No porque no sabemos el total de alumnos de esa escuela.”

Luego de una breve recorrida la profesora interrumpe las interacciones en todos los equipos volviendo a una instancia colectiva. Su estrategia ahora es la de promover una discusión sobre todas las cantidades iniciales del problema. Organiza los datos en una nueva tabla que combina la parte (cantidad de alumnos que pasaron el concurso) con el total de cada escuela.

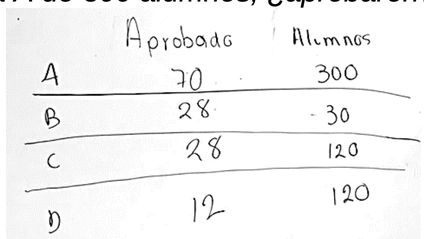
Los tres siguientes diálogos se produjeron a una velocidad muy rápida (4 minutos), y constituyen un mismo episodio. Muestran que la profesora inicia con una intención (ofrecer una ayuda, recordando los datos del problema) pero que las participaciones de los alumnos la llevan (o se deja llevar) por otro lado. Emergen en las interacciones de los

[64] Inciso 3): Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

alumnos con la profesora y con un medio, nociones con la intención de ponerlas a funcionar para comparar las escuelas anteriores con la escuela E cuyo única información disponible es que pasaron el concurso 3/7 del total de sus alumnos.

Diálogo 1. Inicio de una ayuda

P: Espérenme tantito. Creo que van a necesitar un dato para eso que les estoy anotando en el pizarrón. Teníamos una tabla que decía que… ya se los borre del pizarrón, donde la escuela A de 300 alumnos, ¿aprobaron?...



	Aprobado	Alumnos
A	70	300
B	28	30
C	28	120
D	12	120

Aos: 70

P: 70. ¿La escuela B? ¿De?... De 30 aprobaron:

Aos: 28

P: ¿En la C?

Aos: 120

P: De 28 [Completa la oración]. ¿En la D?

Aos: 120

P: 120 y 12. Y ahora les proponen una escuela ¿llamada?: “E”. Pero les dan otro dato, ¿verdad? [Silencio y murmullos]… ¿Qué dato les dan?

Aos: Una fracción

Aos: Tres séptimos

Byron: El tres séptimo serían los que aprobaron, ¿no?

P: Pero qué dice… A ver, ¿me puedes ayudar Byron?

Byron: Se sabe que tres séptimos del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso. ¿Se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

P: Dice que aprobaron tres séptimo del: total. Por ejemplo aquí [señala el pizarrón], en la escuela A, ¿los 70 alumnos son la mitad?

Aos: No

Hasta aquí la ayuda de la profesora se basa en traer y evocar, en el contexto del inciso 3) a los datos de las otras escuelas. Por otra parte, al final de este diálogo ofrece una pista para comparar, evocando la noción de “mitad”, con la intención de propiciar la formulación de comparaciones cualitativas con fracciones sencillas (1/2, 1/4). El episodio continúa con el siguiente diálogo, en el cual emerge una conjetura imprevista.

Diálogo 2.

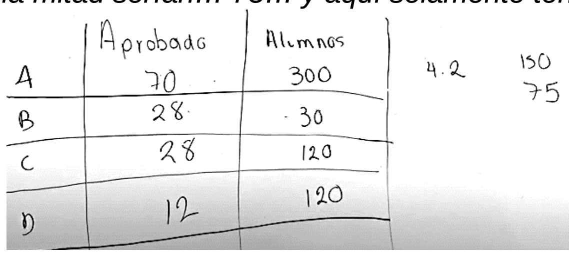
P: Cuánto sería. Del total [continúa]

A: 4.2

P: ¿Cómo?

A: 4.2

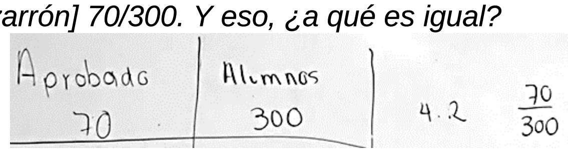
P: Cuatro punto dos, ¿cómo obtuvo el 4.2?
A: Dividí 300 entre 70
P: "Dice mi compañero: dividí, 300, entre, 70 y me da: 4.2. ¿Qué significa el 4.2? [Escribe 4.2 en el pizarrón]
Aos: El porcentaje… [Voz baja]
Aos: ¿El porcentaje? [Voz alta]
Aos: El porcentaje de la cantidad de alumnos aprobados
P: El porcentaje, es decir solamente ***¿solo el 4% aprobó?****... [Murmullos]. ¿Cuál sería la mitad de 300?*
Aos: ¡150!
P: 150 sería la mitad. ¿Y cuál sería la mitad de 150?
Aos: 75
P: 75 [Señala los 70 alumnos en escuela A]. Es decir, si le saco mitad de la mitad, me refiero a:…
Aos: ¡Un cuarto!
Aos: Veinticinco cuartos
P: Pero dijimos que la mitad serían… 75… y aquí solamente tengo…



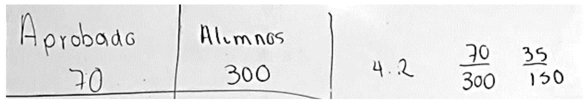
P: Es decir, es qué…Es menor que un: …
Aos: Cuarto

Cuando los alumnos formulan la conjetura en donde emerge el decimal 4.2, que interpretan como porcentaje, la profesora re direcciona las respuestas retomando la idea de comparar con la mitad (1/2) y la "mitad de la mitad" (1/4). Con esto busca refutar la conjetura dado que 70 de 300 es casi un cuarto (implícitamente casi el 25%), y no puede ser un porcentaje tan pequeño como el 4.2%. El episodio continúa, ahora la pregunta es mucho más dirigida hacia la expresión fraccionaria de las relaciones.

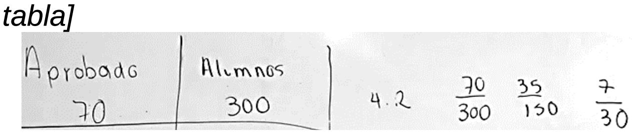
Diálogo 3.
P: Cuarto. Los de porcentaje es menor de un cuarto. ¿Alguien me puede decir exactamente… o como, lo podemos comparar como fracción? No es un cuarto, es menos.
A: ¿Setenta trecientos avos?
P: ¿Cómo?
A: ¿Setenta trecientos avos?
P: [Escribe en el pizarrón] 70/300. Y eso, ¿a qué es igual?



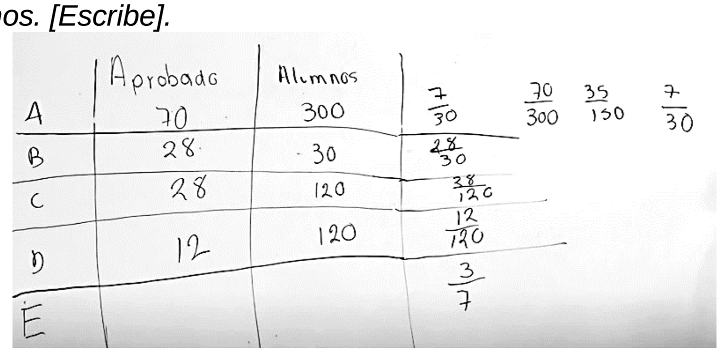
As: A cuatro punto…
P: Así como fracción, ¿a qué es igual…? [Algunos murmuran, otros miran atentamente el pizarrón] ¿Qué puedo hacer con ésta? [Señalando la fracción]
As: Simplificarla
P: Simplificarla dice su compañera, y ¿Cómo hago esto?
A: Treinta… y cinco ciento cincuenta avos
P: Treinta-y-cinco-ciento-cincuenta-avos [Escribe en el pizarrón]… ¿Le puedo hacer algo más?



Aos: mmm [Voces superpuestas de varios alumnos]
P: [Interrumpe] Si termina en cinco o en cero ¿le puedo…?
A: Bajar en cinco y da…
P: Dividir entre 5: cuánto me daría
As: ¡Siete! y…
Axel: ¡Siete cincuenta avos!
P: ¿150 entre 5? [Silencio]
As: ¡treinta!
P: Siete… treinta-avos. [Escribe en pizarrón]. Es decir que en la escuela A, solamente pasaron: siete treinta-avos. En la escuela B, ¿cuántos? [Señala las cantidades en la tabla]



A: Veintiocho sobre treinta [Varios]
P: [Escribe y borra]. En esta escuela fueron siete treinta avos, ¿en ésta? [Agrega una columna a la tabla y va completándola]
A: Veintiocho-treinta-avos
P: ¿En ésta? [Silencios]
A: Veintiocho…
P: Veintiocho-ciento-veinte-avos, ¿en éste, la D?
A: Doce ciento veinte avos
P: Doce-ciento-veinte-avos [Continua completando] Y me dicen que en la E, ¿cuánto fue?...
Edu: Tres séptimos [se escucha desanimado]
Aos: Tres séptimos
P: Tres séptimos. [Escribe].



¿Y qué le pregunta? Ya le ayudé. A ver ustedes, a ver… qué nos está preguntando. [A todos] Pueden copiar la tabla detrás de la hoja si les facilita. Si te es útil, anótala
Byron: Uuu, si es lo que dijiste [dirigiéndose a Edu]

Con el diálogo 3 finaliza este episodio, donde la ayuda que proponía la profesora ha sido atravesado -en menos de 4 minutos- por participaciones de los alumnos que han hecho emerger nociones que demandarán un largo proceso de estudio. Al final, logran en conjunto, evocar y traer a la memoria didáctica de la clase, objetos matemáticos como fracciones, decimales, y porcentajes y el procedimiento de “simplificar fracciones” como herramientas para poder comparar los resultados de las escuelas A, B, C y D con los 3/7 del total de alumnos de la escuela E que pasaron el concurso.

El efecto de la intervención anterior, en el equipo 3 donde se encontraba Obs_3:

Obs_3: “La primera respuesta inmediata: no se puede. En cuanto se leyó la consigna, rápidamente escuché que en el equipo algunos dijeron “nooo” a la pregunta de si se puede comparar la escuela E con las anteriores. La profesora sugiere pensar en qué parte es 70 de 300. Para encaminar a los alumnos para que vieran que con la información 3/7 sí es posible hacer la comparación, los lleva a pensar en la fracción que 70 es de 300 (escuela A), pero no lo hace preguntando directamente por la fracción, lo cual no hubiera apelado a la idea de razón, sino comparando con ½: ¿Los 70 son la mitad (de los 300)? Rápidamente varios dicen que no.

En ese momento Andrés bajito dice 70/300. La maestra lo retoma, en interacción con Andrés, lo simplifica, a 7/30. Enseguida obtienen de nuevo las fracciones que corresponden a las otras escuelas, y la profesora coloca junto a ellas la fracción en cuestión, de la escuela E: 7/30, 28/30, 28/120, 12/120, 3/7. La profesora vuelve sobre la pregunta: ¿Se puede comparar con las anteriores?

Escucho de alguien [en el equipo 3] una expresión de asombro y acuerdo (Ahhh) que deja ver que ya puesto de esa manera, sí consideran que se puede comparar, pero no es generalizado. Andrés lo dice muy claro: Andrés: “(no se puede) Porque se necesitan los datos de los niños”.

En las transacciones entre el juego de la profesora y los alumnos, se van delineando (afinando) significados acerca de esa fracción 3/7 que en un primer momento parece no informar mucho a los alumnos acerca de la relación de relaciones (entre escuelas).

Emergen en esa interacción, las nociones de fracción, (unida a la técnica de simplificación, amplificación, y cociente), de razón (son 70 de 300) y la privilegiada razón de ½ para comparar fracciones.

Cabe destacar que la emergencia de las nociones se presenta con una directividad cada vez más fuerte de la profesora (por la presión y contraste entre tiempo de desarrollo previsto en las fichas y el real en la clase) pero que mantiene cierto equilibrio que se sintetiza en la variedad de procedimientos que utilizan los alumnos y en el control que tienen sobre ellos (aunque sean muchos los alumnos que no participan) y la insistencia en considerar fracciones privilegiadas (medios, cuartos).

Retoman el trabajo en equipos. Luego de las discusiones anteriores, los alumnos vuelven a explorar los datos, no hay acuerdo "si es posible o no comparar". La profesora en una nueva intervención breve, advierte que "las fracciones nos dicen cosas", y que es importante que anoten para luego ver qué piensa cada equipo.

En algunos grupos hay momentos de silencio, y en otros de plática de otros temas. En varios sólo producen y se implican en la situación 3 o 4 alumnos (de un total de 6 integrantes).

Los alumnos comprenden la finalidad de la situación, el contexto del problema, y tienen una práctica instalada en donde saben que pueden preguntar a la profesora, y que ésta le ofrece eventualmente (en equipos o a toda la clase) algunas pistas para resolverlo.

El desafío: ¿qué quiere decir 3/7 en el contexto del problema? ¿Es necesario saber el número –exacto- de alumnos para poder compararlas?

Los episodios que se presentan en la tabla a continuación, se dan en el equipo 1, y se han subdividido en varios "*momentos*" que indican cambios de tareas de los alumnos, a veces promovidos por la interacción con el medio (o la situación) y a veces por la intervención de la profesora.

Luego veremos la descripción del procedimiento en el equipo 1: multiplicar por 2 y por 3 el numerador y el denominador de 3/7 y a continuación lo que discutían en ese mismo momento los integrantes del equipo 2. Finalizaré con la descripción de otros procedimientos que emergen en la puesta en común.

Momento 1. Luego de la explicación	*Byron: No, ya se me fueron las ideas [se lo observa pensando, un poco confundido]* *Edu: Tenia yo ideas, pero cuando estaba explicando la maestra…* *Byron: ¿Verdad que se te van?*

Momento 2. La maestra recorre los equipos. Luego pregunta a la clase.	*[Los alumnos del equipo piensan, observan otros equipos.]* *P: ¿Ya la compararon?... ¿sí se puede o no se puede? [A toda la clase]* *Aos: No* *P: ¿No se puede comparar?* *Aos: Si … No … [No hay acuerdos]* *[Los alumnos del equipo 1 están en silencio, piensan, se miran entre ellos, miran al pizarrón, murmuran]* *Byron: No, ya se me fueron las ideas…*
Momento 3. Obs_1 propone releer el inciso 3).	*Obs_1: Oigan, ¿y si leemos el problema de vuelta? ¿Alguien quiere leer? A ver cómo era.* *María: [Lee el problema 3]. "Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí compárala, si es no explica por qué.* *Obs_1: ¿Qué es lo que hay que hacer entonces? ¿Qué es lo que hay que hacer?* *Lupita: Es sacar la información de… de* ***los niños que participaron el concurso****… los que pasaron el concurso… y sacar también el resultado de los alumnos que estaban…* *Obs_1: ¿Ustedes se acuerdan cual de todas las escuelas era la mejor escuela?* *Byron: La... C* *Edu: No, la B* *Alberto: La B* *Obs_1: ¿Cuál de todas era la mejor?* *Byron: La B* *Obs_1: La B, ¿por qué?* *Edu: Porque le faltan…* *Byron: Porque hay dos alumnos que le faltan para completar los que hay en la escuela* *Alberto: Los aprobados fueron* ***menos*** *alumnos… [Ríen]* *Edu: ¡Te cacharon! [Risas].* *[El equipo se dispersa, hablan de otros temas, ríen]*
Momento 4. Frente a la necesidad de la parte o el todo para comparar, "generan muchos pares equivalentes, múltiplos de 10"	*Byron: Hice lo que pude…* *Edu: No se ve... ¿y ya lo hicieron?* *Byron: No, es que* ***no hay datos****…que nos digan…* *Edu: ¿Eh?* *A3: Es que* ***no hay datos*** *en los que lo digan…* *Edu: De qué* *Byron:* ***¡De cuántos alumnos eran!... pues pueden ser ¡30, los que pasaron de 70!... ¡300 de 700!...¡¡3000 de 7000!!... nunca sabremos la verdad...*** *[pausa]* *[El equipo se dispersa unos 15 seg.]*
Momento 5. Dos alumnas conjeturan basándose en la palabra "porcentaje"	*Obs_1: ¿Oigan y ustedes que piensan? [A María y Mónica]* *María: No tenemos respuesta…* *Mónica: Es que la pregunta dice ¿se puede comparar con las escuelas anteriores?*

	Obs$_1$: Ajá *María: Nosotras pusimos: "Si, porque no va a dar el mismo* ***porcentaje*** *que los demás".*
Momento 6. Nueva ayuda colectiva de la profesora.	*P: [interrumpe la clase] A ver todos, a ver todos ponemos atención. ¡Les voy a dar una pista! Para ver si podemos, este… desgajar… Decíamos que esto último [señalando las fracciones en el pizarrón],* ***esta información nos dice cosas****…* *Yo les decía al equipo…3, me parece ahí atrás, ¿qué me está diciendo esto? Me está diciendo de 30 alumnos, están aprobando… 7. De 30 alumnos están aprobando… 28. De 120 alumnos están aprobando:… 28. De 120 ¿están aprobando?... 12. [Algunos alumnos leen la cantidad que indica en el pizarrón]. ¿Y aquí qué está diciendo, entonces?, ¿qué es lo que me dice? [Realiza un gesto circular alrededor de la fracción 3/7 escrita en el pizarrón]* ***Aos: De 7 alumnos aprobaron 3 [responde un gran número de alumnos]*** *P: De 7 alumnos aprobaron: 3. Entonces, ¿lo puedo comparar?* *Aos: Si…No.* *P: Porque sí o porque no me anotan. [Pausa]. Y ahorita vamos a ver qué piensa cada equipo [Sonríe]. Anótele porqué sí o por qué no, lo que usted piense. [Recorre los equipos]*

En el momento en que la profesora "lee" las fracciones, parece que en este equipo Byron y Edu se sorprenden. Vuelven a conectarse con la situación y se ponen a escribir y hacer cálculos. Nuevamente sucede el fenómeno de la simultaneidad entre una ayuda de la maestra que motoriza el desarrollo de una conjetura, su formulación y la búsqueda de una prueba. En el siguiente diálogo además podemos observar cómo Byron empieza a obtener información a partir de nuevas interacciones con la situación y con la intervención de la profesora.

- **Equipo 1.** ***Byron explora y se da cuenta que puede ser cualquier pareja equivalente.***

Episodio. Momento 7. Nuevo cambio de tarea.
[Byron suspira hacia adentro en sonido de descubrimiento...Empieza a escribir en su hoja]
A4: ¡Ah! … [Lee lo que escribe Byron, se sorprende]
Byron: ***Si de los 70 alumnos están aprobando 30…*** *[Escribe]*
//-[Voz de fondo] La profesora continúa realizando su explicación, en un trabajo colectivo [Momento 6]. Algunos integrantes del equipo están en la discusión de afuera y de adentro escuchando y observando atentamente a Byron.

Byron: Esto quiere decir que ***hay que invertir los datos de la A****… [Realiza muchas cuentas en su hoja]*
//-[Voz de fondo] La profesora sigue (…) "Entonces, ¿lo puedo comparar?". Aos: Siiii… No… [Momento 6]
A4: Siiii [Responde a la profesora, observando los cálculos de Byron, con quien está pensando la respuesta]…
//-[Voz de fondo] Profesora: "Si dices que sí, ¿por qué no me anotas? Y Ahorita vamos a ver qué piensa cada equipo. Anótenle porqué sí, o por qué no. Quiero que piensen.
[Hay un intercambio en el equipo nuevamente, pero en voz muy baja…]
Obs$_1$: Byron que cuentas hiciste ahí.
Edu: Está haciendo… sus conclusiones científicas [Ríe]
Byron: Hice algunas cuentas
Obs$_1$: Y qué cuentas hiciste ahí
Byron: No, ***estaba multiplicando el resultado por dos-dos-dos-dos-dos****…*
Obs$_1$: ¿Por dos? A ver.
Byron: Si, ***no sé por qué****… [Muestra su producción, aún no puede dar una "explicación de su técnica"]… Para ver si podía hacer algo productivo pero es tan latoso como el primero…*
Obs$_1$: ¿Por qué no se puede?
Byron: No sé… no…
Edu: ¿Y por qué por dos? [Interrumpe]
Obs$_1$: Porqué por dos…
María: ¿Por qué se te ocurrió…?
Edu: Ahí está la respuesta a todo
A4: Di ya por qué Byron… [Lo interpelan]
Byron: ***También lo hice por tres***
A4: ¿Y por qué por tres?
A4: Bueno… es que ahí… lo que hay es un 7, y… al aumentarlo por 2… suena mejor… por 3 digo… sale 6
Byron: [Ríe] ¡No le hagan bulling! … [Refiriéndose a A4 y la atención de todos puesta en su explicación]… [Luego de unos segundos vuelve a la actividad, comenta con A4]… 7 por 4 esteee… 28… [Luego de un rato]… ***Si, nada más hay que invertir los datos de la A…***
Obs$_1$: ***¿Qué significa invertir los datos de la A?***
Byron: ***Si… en vez de 7 de 30 alumnos… 3 de 70 alumnos*** *[ríe]… Ahhh… espera, espera, espera, espera… [Escribe en su hoja]*

En el diálogo anterior, Byron produce en simultaneidad con la explicación de la profesora. Produce también en el diálogo –y la interpelación- con los compañeros que lo obligan a explicitar su técnica, y su conjetura. Parecería al menos en este equipo que se van construyendo significados compartidos entre pares, un engrosamiento del medio entendido en este sentido.

Ha intuido alguna relación que la llama "invertir", donde compara la fracción de alumnos en la escuela A: 70/300 = 7/30 con la de la escuela E: 3/7 que en el "Momento 4" afirma que equivale a 30/70, 300/700, 3000/7000 (múltiplos de 10). Quizás Byron quiso decir 30 de 70 (al parecer le llama la atención la similitud de los números 7 y 70, 3 y 30)

Para comparar las fracciones de estas dos escuelas, multiplica numerador y denominador por el mismo escalar (2) tal como se observa en su producción escrita:

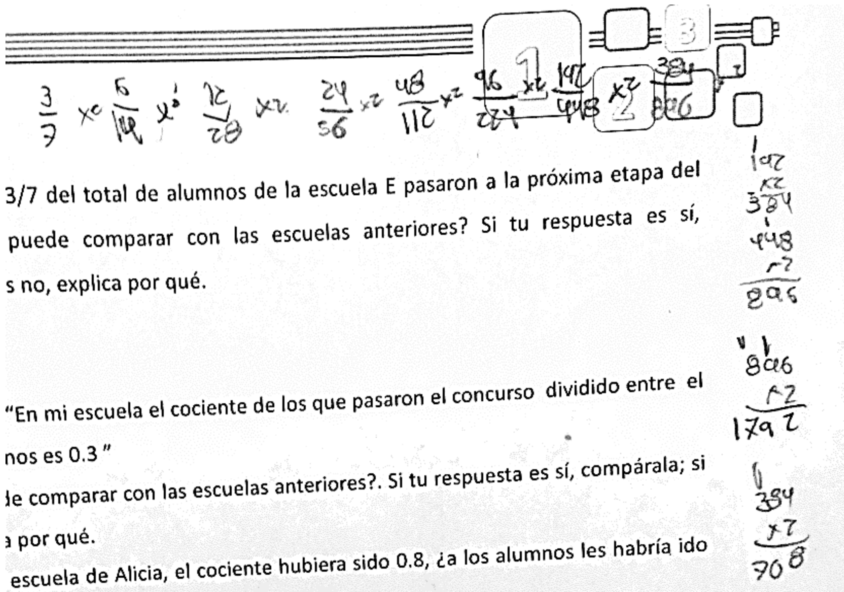


Figura 21. Producción Byron.

Observemos que en la cadena de fracciones omite el uso del signo igual:

$$\frac{3}{7}\,x2\ \ \frac{6}{14}\,x2\ \frac{12}{28}\,x2\ \frac{24}{56}\,x2\ \frac{48}{112}\,x2\ \frac{96}{224}\,x2\ \frac{142}{448}\,x2\ \frac{384}{896}\,x2$$

En el margen derecho de la imagen se observa también un último producto: 384x2 = 768 y 896 x2 =1792, que es parte de su trabajo exploratorio.

Continúa el diálogo en el equipo.

Diálogo: Multiplicar por 3.
//-[Voz de fondo] Profesora: "[A todos] Necesitamos escribir por qué sí, y por qué no para que los pueda escuchar. [Vuelve a recorrer equipos]
Byron: ¡No nos haga bulling! [Bromea y sigue con su escritura]
P: [En el equipo de al lado] A ver cómo vamos acá…no solamente hay que poner sí o no… hay que poner, por ejemplo la E es mejor que la A porque…
Byron: Ah, ya me acordé por qué le puse por 2
Obs$_1$: ¿Por qué le pusiste por 2?
Byron: Porque… porque pensé que ya estaba simplificada… y la fui multiplicando otra vez por dos…
A4: Y por tres, o por cinco

*Byron: **Para ver si me salía algo interesante** pero… [Pausa y luego propone] Vamos a hacer la de A4, por tres… [Realiza cuentas con A4]*
Edu: ¿Así vas a estar hasta que llegues hasta el último número?
Byron: No… los números son infinitos… los números son infinitos
A4: Y aquí 27… [Realiza junto con A3 unos productos]
Byron: Tres por seis, tres por seis: ¡dieciocho!

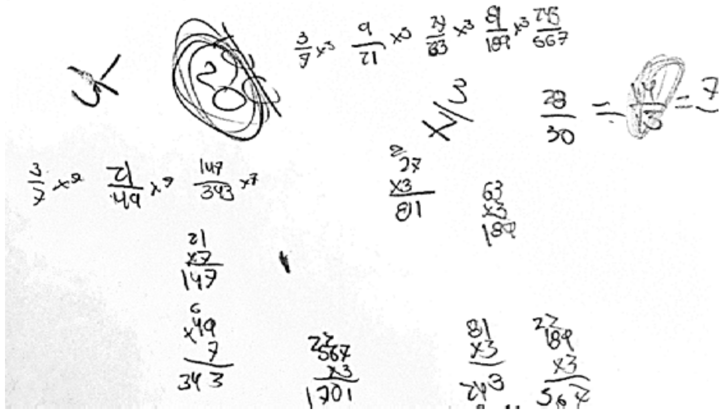


Figura 22. Producción de Byron y A4.

Una exploración conjunta. Byron y A4 están en una fase de acción. Exploran los datos, y generan pares equivalentes (amplificar una fracción). Parecería que se encuentran en búsqueda de alguna regularidad o patrón numérico que les permita establecer una comparación plausible con la escuela A. El punto de partida es el único dato del inciso 3): la fracción 3/7.

En la imagen anterior se observan tres cadenas de cálculos:

1°: Mediante un procedimiento análogo al de “multiplicar por 2”, ahora lo hacen por 3:

$$\frac{3}{7}\ x3\ \ \frac{9}{21}\ x3\ \frac{27}{63}\ x3\ \frac{81}{189}\ x3\ \frac{243}{567}$$

Deciden parar, se observa que realizaron el producto 567 x3 =1701.

2°: Simplifican la fracción 28/30 correspondiente a la escuela B, integrando allí el signo igual, pero es una idea que abandonan

$$\frac{28}{30} = \frac{14}{15} = \frac{7}{...}$$

3°: Mediante un procedimiento análogo al de “multiplicar por 3”, ahora lo hacen por 7:

$$\frac{3}{7}\ x7\ \ \frac{21}{49}\ x7\ \frac{147}{343}\ x7$$

El hecho de escribir los productos, confirma que estos alumnos están en búsqueda de nuevas relaciones con 3/7 que les permita comparar, y donde usan el numerador (3) y denominador (7) como escalares para ver *si acaso* con ello encuentran alguna solución.

Diálogo. Byron continúa buscando fracciones comparables
//-[Voz de fondo] Profesora: [a todos] ¿Ya terminaron aquí?, ¿cómo vamos?, ¿qué anotamos?
Byron: Eh… nada
//-[Voz de fondo] Profesora: "A ver, me dice, ¿se puede comparar las escuelas anteriores?, ¿si lo puedo comparar o no?"
Byron: No sabemos…
A4: Si
//-[Voz de fondo] Profesora: "Ahora, me dice: "Si tu respuesta es sí, compárala", ¿cómo puedo hacer una comparación? Yo puedo decir: "La escuela E, es mejor que la A", o "la escuela E es peor que la C", y de esa manera las estoy: comparando. Tú hazme una comparación con todos o las que tú quieras (…)"
Byron: [Interrumpe] ¡Hay que…! ¡Hay que… ***simplificar las otras****! [Silencio en el equipo]…mmm! ¡Ya me hinché!*
Edu: ¿Para qué?
A4: Porque así podemos ***hacer una mejor comparación***
//-[Voz de fondo] Profesora: "¿Quién es mejor?"
Byron: ¡Uyyy yaaa!...

Hay una intensa discusión en el equipo. El tiempo del trabajo entre pares se termina, y la profesora empieza la fase de puesta en común. La preocupación es evidente. Byron se coloca en el centro del equipo, y lanza la siguiente conjetura.

*Byron: Nosotros diremos que lo hicimos así: [escribe] "****Eran 3… eran 7 alumnos y nomás 3 pasaron, faltaron 4. Y la B, tuvieron 28…*** *[Con el cuerpo encogido y en el centro del grupo]*
María: ***De 30***
Byron: ***De 30****. Y nada más faltaron 2.*

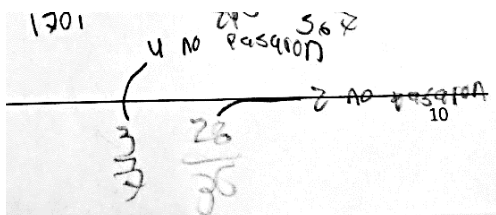


Figura 23. Producción escrita de Byron.

Byron: Sé que no es muy inteligente pero… al menos tenemos una respuesta… algo es algo.

En el episodio anterior, reaparece un recurso viejo. El uso de relaciones aditivas (diferencia entre numerador y denominador) como un argumento que les permite "decir algo" acerca de la comparación entre 3/7 y 28/30.

La comparación de las fracciones es resumida como la comparación de las diferencias: 7-3=4 versus 30-28=2, con lo que concluyen que en la segunda escuela B faltaron menos alumnos para llegar al total con respecto a la escuela E que faltaron más alumnos (4>2). Con esto argumentan que la escuela B es mejor.

Entonces, emerge, y es implícitamente validado, el recurso de contar "cuánto falta" a la parte para llegar al todo. Por otro lado ese razonamiento inválido no contradice el hecho que B es mejor.

Al finalizar el episodio, Byron afirma: "Sé que no es muy inteligente…" con lo cual, da por hecho que su conjetura, al menos para él, no es verdadera, pero sí usual.

- **Equipo 2: ¿Comparar en qué sentido? ¿Comparar quien tiene más o comparar qué? (Marian). Conjeturas alrededor de la noción de porcentaje.**

Volvamos al momento 6, pero ahora veamos qué sucede en el equipo 2.

Momento 6. Nueva ayuda colectiva de la profesora.	*P: [interrumpe la clase] A ver todos, a ver todos ponemos atención. ¡Les voy a dar una pista! Para ver si podemos, este… empezar a avanzar… Decíamos que ésto, último [señalando las fracciones en el pizarrón], ésta información nos dice cosas… Yo les decía al equipo…3, me parece ahí atrás, ¿qué me está diciendo esto? Me está diciendo de 30 alumnos, están aprobando… 7. De 30 alumnos están aprobando… 28. De 120 alumnos están aprobando:… 28. De 120 ¿están aprobando?... 12. [Algunos alumnos leen la cantidad que indica en el pizarrón]. ¿Y aquí qué está diciendo, entonces?, ¿qué es lo que me dice? [Realiza un gesto circular alrededor de la fracción 3/7 escrita en el pizarrón]* *Aos:* ***De 7 alumnos aprobaron 3*** *[responde un gran número de alumnos]* *P: De 7 alumnos aprobaron: 3. Entonces, ¿lo puedo comparar?* *Aos: Si…No.* *P: Porque sí o porque no me anotan. [Pausa]. Y ahorita vamos a ver qué piensa cada equipo [Sonríe]. Anótele porqué sí o por qué no, lo que usted piense. [Recorre los equipos]*

En este momento de la clase aún hay muchas dudas acerca de la pregunta "¿se puede comparar con las escuelas anteriores?". El momento anterior nos muestra además cómo la profesora empuja a los alumnos a formular una primera respuesta a la pregunta.

Veamos qué sucedió en el equipo 2: Marian, Aline, Axel, Pablo

Diálogo.
Marian: Entonces se puede comparar
Aline: Si, ¿no?
Marian: Entonces se puede comparar en el sentido de que… puede puedes ver quien tiene más alumnos y quien aprobó más. Pero… no sé cómo lo esté viendo la maestra…
Aline: Porque se supone que ahí son 7 alumnos, y aprobaron 3. Y son 4 los que no aprobaron.
Marian: Ajá, ¿por qué 4?
Aline: [Silencio, duda]
Marian: De 7 alumnos aprobaron 3. Lo que nos pregunta es ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? [Señala con su lápiz ese dato de la consigna, en la hoja de Aline].
Aline: Ajá
Marian: Pero comparar en qué sentido, ***¿comparar quién tiene más o comparar qué?****... [Ambas llaman a la maestra]*

Aline establece la relación entre 7 y 3 a través de la diferencia, y obtiene 4 que denomina los alumnos "no aprobados" (de los que supone que en total son 7).

Marian nos muestra cierta duda en su interpretación de la palabra "comparar". Por una parte, si se trata de comparar las cantidades absolutas, entonces la respuesta es negativa, dado que no es un dato de la escuela E (aunque con 3/7 se puedan generar infinitos pares de alumnos que pasaron el concurso y total de la escuela). Por otra parte, si comparar quiere decir comparar las cantidades relativas, sin que interese la cantidad exacta de alumnos de cada escuela, sino la "relación" entre esos pares de cantidades, la respuesta será afirmativa.

Es decir que estas alumnas están intuyendo –a través del sentido de comparar- la característica semántica de las fracciones que se refiere a conservar una relación entre pares de cantidades, y esto es un primer engrosamiento de su significado.

Diálogo.
P: ¿Se puede? ¿Por qué si se puede?
Aline: No, pero si se puede comparar, ***pero en qué sentido****… eh… los…*
P: [Interrumpe] ***en qué escuela es mejor****. En qué escuela están aprobando:* ***la mayor cantidad de alumnos, pero en relación a qué****… [Gesto con la mano hacia arriba con los dedos juntos hacia arriba y movimiento circular[65]]*
Marian-Aline: A los que…
P: ***Al total de alumnos…***
Marian-Aline: Ah… ya…

---

[65] Podría hacerse un estudio que aborde los movimientos y la gestualidad corporal de la profesora. Los significados de sus movimientos que dan presencia y son parte de la interacción, de la forma de comunicación con los alumnos. En sí mismo un lenguaje que es parte de su forma de presencia.

P: Es decir ¿qué escuela es mejor?… ¿puedo saberlo?[66]
Aline: ¡Ah! ¡Ya sé cómo! ¡Ya sé cómo!... ¿le digo? [La profesora empieza a alejarse del equipo]
P: A ver dígame… [Se aleja de la alumna y rodea al equipo]
Aline: Porque… si usted ***le resta****… si usted hace una resta… a ver… ¿120 menos 28?... El resultado que salga es el número de los niños que perdieron… [Habla sin pausas]…Y así-le-podemos-hacer-en-todas-y-asi-cuando-la-tendremos-la-¿misma-cantidad?-que… no… [Lee un gesto de la profesora, que frunce sus cejas observando en la lejanía pero escuchándola con su rostro de perfil]*
P: Entonces, nos fijamos nada más en los alumnos que… no pasaron. [Gesto circular con manos y dedos hacia arriba]
Aline: Ajá

En el diálogo anterior, la profesora, frente a la pregunta ¿comparar en qué sentido?, propone leer las cantidades de alumnos aprobados en relación al total de alumnos. Inmediatamente Aline formula una primera conjetura: "Realizar las restas entre alumnos aprobados y total de alumnos de cada escuela y luego comparar las diferencias".

La profesora entonces, repregunta, pone en duda esa conjetura, la cual dispara una nueva que la formula Marian y reformula Axel.

Diálogo.
P: Entonces, ¿no interesa cuántos alumnos hay?
Aline: Tienen que ser poquitos para que… [Duda]
Marian: ¡No!, sí se puede comparar porque… [Interrumpe]. Porque… haga de cuenta, los que restan… puede… ***los podemos convertir en porcentaje del total*** *y así podemos saber esteee…, cuán… ¿qué porcentaje fue más grande o qué porcentaje fue menor y el menor porcentaje fue…?*
P: [Completa la frase] Fue la escuela más baja… [Gesto mano]
Marian: No. El menor porcentaje… es que… lo mejor… es que… ***el-menor-porcentaje-de-los-que-no-aprobaron-fue-la-mejor****… [Duda entre mayor/menor y mejor]*
P: Haber, hágamelo. Eso que me dijo: "há-ga-me-lo" [Enfatiza]. Se va a tardar, ¿cierto?, ¡Hágalo! [Se retira del equipo]
Axel: Marian, lo que dijiste fue ***del total de alumnos sacamos un porcentaje*** *[Gesticula con la mano con dedos extendidos]… Por ejemplo,* ***el 7 es el 100 porciento, ¿no? Y hay que investigar cuánto… un alumno, cuánto tiene de porcentaje en ese 100 porciento.***
Marian: ¿Cuánto tiene de porcentaje?
Aline: ¡Cuánto tiene de porcentaje de cada alumno!
Axel: Ajá. Y se me lengua la traba.
Pablo: ¡Qué difícil!

[66] Otro aspecto que podría analizarse es "el tono" y la "pronunciación" que realiza la profesora cuando enfatiza una palabra. En términos matemáticos cuando con el tono evidencia una consecuencia en un razonamiento donde interviene una implicación Se relaciona con el ritmo de su alocución o discurso. Por ejemplo, cuando pregunta "¿qué escuela es mejor?", se oye como la afirmación: "qué escuela es mejor". Es un estilo muy personal que se sostiene en todas las sesiones.

En el episodio anterior, Marian propone mejorar la conjetura de Aline, mediante la conversión de las restas como porcentajes de alumnos no aprobados respecto del total de cada escuela, y luego comparar bajo el criterio: “La escuela con menor porcentaje es la mejor”.

Por otro lado, Axel recuerda la técnica que consiste en calcular la imagen de 1: “El 7 es el 100%, ¿un alumno qué porcentaje tiene?”.

En el siguiente episodio veremos otra característica de la interacción entre los integrantes de este equipo: Marian solicita a Aline que oficie de “escriba” de su respuesta (mostrando además una de las funciones sociales básicas de la escritura: conservar la memoria)

> *Diálogo.*
> *Marian: Si, espera que hay un problema de redacción. Sí, porque nada más necesitas saber cuántos alumnos no aprobaron… sí… escríbelo porque luego se me olvida [Solicita a Aline **que sea su escriba**]*
> *Dicta: “Sí, porque necesitas saber cuántos alumnos no aprobaron…”*
> *Axel: Sí, pero esa no es la respuesta, ¿sí? [Interrumpe]*
> *Marian: ¡No, pero es MI respuesta! [Continua el dictado] “… para sacar un porcentaje… y el mayor porcentaje de no aprobados… es la escuela más… ¿más baja?...*
> *[Axel parece no estar de acuerdo con el argumento]*
> *Marian: “Es la escuela más baja y… puedo compararlo con los demás resultados”*
> *Axel: ¡Órale! [En voz baja]*
> *Marian: Listo.*
> *Axel: Marian, captaste esto muy rápido*
> *Marian: ¿Qué?*
> *Axel: Que captaste esto muy rápido. Lo tienes que escribir.*
> *Marian: Ya me lo aprendí… [Llaman a la profesora] ¡Maestra! Ya lo saqué.*
> *P: ¿Ya? [Se acerca rápidamente al equipo]*
> *Marian: Bueno, lo que yo… lo que le dicté son un par de ideas: [Lee] “… no aprobaron un porcentaje y el mayor porcentaje de los no aprobados es la escuela más baja y así puedo saber qué escuela, de todas, no… no…*

Los alumnos de este equipo empiezan a comprender que puede ser posible comparar la escuela E con las otras, solamente conociendo la fracción 3/7, pero aún hay conflicto con el desconocimiento de la cantidad de alumnos.

El conflicto se observa también en la producción escrita que se describe a continuación.

Primera respuesta (fue borrada)	Segunda respuesta
No // porque necesito saber cuántos alumnos no aprobaron // para sacar su porcentaje y el mayor porcentaje de no // aprobados es la escuela más baja y puedo compararlo con // los demás resultados.	*Sí, porque solo necesito saber // cuantos alumnos no pasaron y así puedo hacer una // comparación*

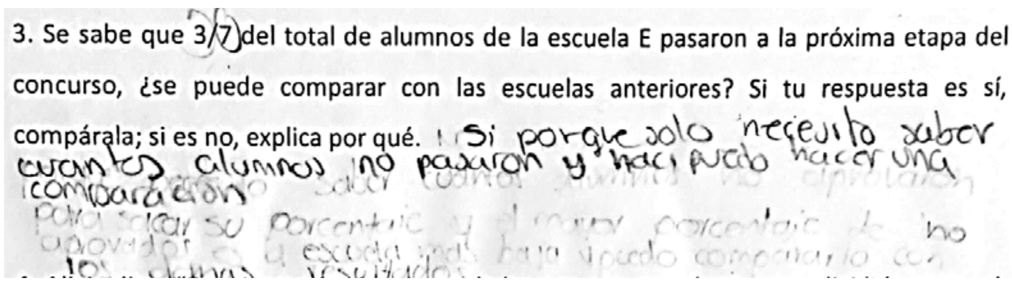

3. Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué. Si porque solo necesito saber cuantos alumnos no pasaron y haci puedo hacer una comparación

Figura 24. Producción escrita por Aline y dictada por Marian.

Frente a esta respuesta, el juego de la profesora consiste en empujar más a los alumnos, dar un siguiente paso: especificar las comparaciones entre escuelas. La siguiente intervención en el equipo, evidencia una direccionalidad coherente con la consigna: “Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué” (posiblemente, como afirma Sensevy (2011), favoreciendo con este juego, el encuentro con la ignorancia).

P: De esa manera las puedo comparar… Ahora, cuando yo digo que me comparen con la escuela E, puedo decir lo siguiente: “puedo decir la escuela E es mejor que la A” o “la escuela E es peor que la C”… no es verdad, nada más les estoy poniendo un ejemplo para comparar [Redobla la apuesta]

Puesta en común. Destacaré la participación de dos equipos, uno de ellos aborda el problema mediante la conversión a un común denominador (210) y otro lo hace con el denominador (30).

Episodio. Conversión al común denominador 210.
P: Puedo empezar o necesitan más tiempo. ¿Puedo empezar? Sí. Equipo 1. ¿Pudo comparar la escuela E con el resto?
A1: Si, porque convertimos todo a igual denominador.
P: ¿Qué convirtieron?
A2: ***Convertimos todo a igual denominador****. Lo que quiero decir con esto es que buscamos el denominador que es mayor y en todas (…) encontramos ese mismo denominador.*
P: Escuchen… Ajá, y de esa manera los puedo comparar. Para el equipo 1, ¿quién sería la mejor escuela?

Aos: La B
P: Ellos dicen que la B es la mejor. Quien sería la peor, ¿la tienen? [Escribe 1° al lado de la B]
Aos: La D
P: ¿Pudieron ordenar como quedaban todas las demás? [Escribe 5° al lado de la D]
Aos: Si
P: A ver, díganme ¿quién es la segunda escuela?
Aos: La E
P: ¿Quién es la tercera? [Escribe 2° al lado de la E]
Aos: La A y la C.
P: [Escribe 3° y 3° al lado de la A y C]

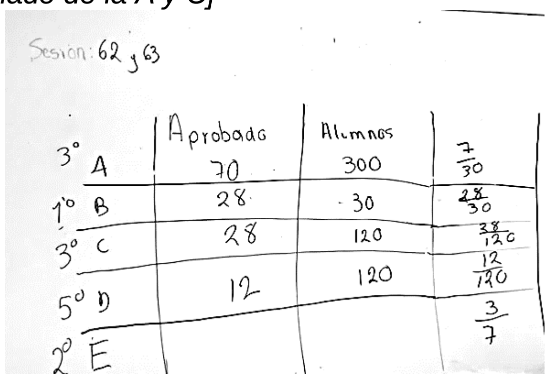
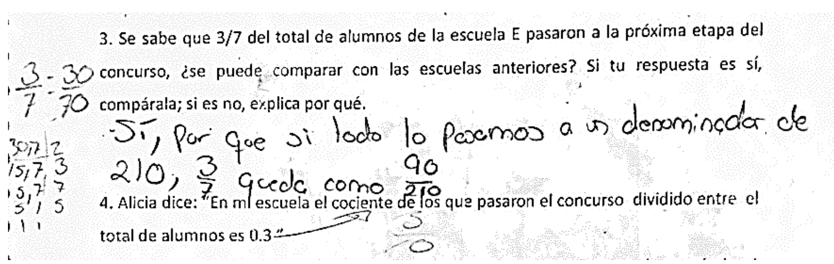


Figura 25. Orden de las escuelas (pizarrón).

El alumno A2 expresa que han abordado el problema mediante la búsqueda de un denominador común a todas las fracciones. La respuesta escrita del alumno, tal como se observa en la siguiente imagen fue:

A2: "Sí, porque si todo lo pasamos a un denominador de 210, 3/7 queda como 90/210".


3. Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

Sí, por que si todo lo pasamos a un denominador de 210, 3/7 queda como 90/210

4. Alicia dice: "En mi escuela el cociente de los que pasaron el concurso dividido entre el total de alumnos es 0.3"

Figura 26. Respuesta escrita de A2.

En el reverso de esta hoja, observamos a través del lenguaje escrito, una memoria del trabajo de exploración que abordaron en el equipo.

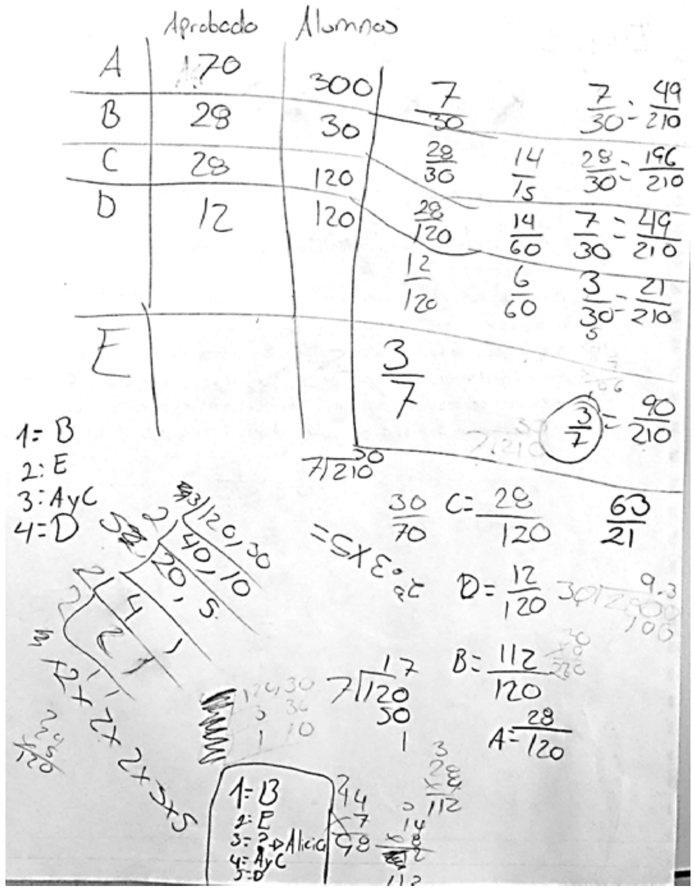


Figura 27. Producción escrita de A2.

Posiblemente la imagen anterior muestra el hallazgo del patrón numérico a través del procedimiento para la obtención de fracciones equivalentes. El común denominador de las fracciones 7/30; 28/30; 28/120; 12/120 y 3/7, es 210

La comparación de las fracciones se basa entonces en la relación de orden entre los numeradores, una vez obtenidas las fracciones equivalentes de mismo denominador (210).

$$A\colon \frac{7}{30} = \frac{49}{210}; \quad B\colon \frac{28}{30} = \frac{196}{210};\ C\colon \frac{7}{30} = \frac{49}{210};\ D\colon \frac{3}{30} = \frac{21}{210}\ y\ E\colon \frac{3}{7} = \frac{90}{210}$$

Concluyen que la mejor escuela es la B, le sigue la E, luego la A y C y finalmente la D.

Pequeño estudio matemático. ¿Cómo construyeron el denominador 210?

La imagen anterior nos advierte acerca de la combinación y adaptación de técnicas en esta situación. Describiré el procedimiento en seis pasos:

1°. Advierten a través de la ayuda de la profesora (ver apartado e) que las fracciones correspondientes a las escuelas A y B, así como las escuelas C y D tienen el mismo denominador, 30 y 120 respectivamente.

$$A\colon \frac{7}{30};\quad B\colon \frac{28}{30};\ C\colon \frac{28}{120};\ \ D\colon \frac{12}{120}$$

2°. Deciden calcular el mínimo común múltiplo entre 120 y 30, utilizando el siguiente algoritmo:

división

$$\begin{array}{r|l} 3 & 120,\ 30 \\ \hline 2 & 40,\ 10 \\ \hline 5 & 20,\ 5 \\ \hline 2 & 4,\ 1 \\ \hline 2 & 2, \\ \hline & 1,\ 1 \end{array}$$

De esta manera verifican que 120 es múltiplo común. Lo hallan mediante productos 2x2x2x3x5, también lo expresan como $2^3 . 3\ x\ 5$ y con el algoritmo de la multiplicación: 24 x 5 =120

3°. Escriben las fracciones correspondientes a la escuela A y B ahora con el denominador 120.

$$A\colon \frac{28}{120};\quad B\colon \frac{112}{120};\ C\colon \frac{28}{120};\ \ D\colon \frac{12}{120}$$

4°. Se confrontan a una nueva dificultad, ¿cómo comparar las escuelas anteriores con la escuela E?

Prueban si acaso 7 es divisor de 120, y comprobando mediante el algoritmo de la división entera, que su resto no es cero (división no exacta)

$$\begin{array}{r|l} & 17 \\ \hline 7 & 120 \\ & 50 \\ & 1 \end{array}$$

Leen del medio (retroacción): *“que no se puede comparar 3/7 con las escuelas anteriores, excepto que se calcule el común denominador entre esta y las otras”*.

5°. Exploran también la posibilidad de expresar las fracciones mediante denominadores de 30 avos (posiblemente lo toman de algún otro equipo o para reducir las cantidades)

$$A\!: \frac{7}{30};\quad B\!: \frac{18}{30};\ C\!: \frac{7}{30};\ D\!: \frac{3}{30}$$

6°. Conjeturo (porque no está escrito), que 210 pudo haberse obtenido mediante el producto de 7x30, quizás con cálculo mental. Expresando así todas las relaciones mediante fracciones con denominador 210.

$$A\!: \frac{49}{210};\quad B\!: \frac{196}{210};\ C\!: \frac{49}{210};\ D\!: \frac{21}{210}\ y\ E\!: \frac{90}{210}$$

En este momento de puesta en común, emerge el segundo procedimiento en el equipo 3, que consiste en convertir a 30 avos.

Este equipo también considera, que no es posible saber a cuál de las escuelas les fue mejor en el concurso a partir de la fracción 3/7. La intervención de la profesora apunta entonces a reconsiderar esa idea (bastante generalizada) sobre la imposibilidad. Con insistencia, y la estrategia de abrir un paréntesis temporal o una instancia de discusión colectiva en el momento de la acción en equipos, promueve rupturas a estas primeras conjeturas.

En el siguiente episodio, veremos lo potente de la razón ½ para favorecer las comparaciones, cuando han logrado en este equipo, convertir las primeras a un denominador común 30 avos.

Episodio. Equipo 3. Conversión al común denominador 30.
P: ¿Alguien lo hizo de una manera distinta? Levante la mano, un equipo diferente. Como lo hicieron allá atrás.
Andrés: Con otra tabla y fracciones
P: ¿Con éstas? ¿O le agregaron algo más? [Indica la tabla en el pizarrón]
Andrés: Con esas mismas… bueno convertimos la C y la D a ***treinta avos***
P: No le escucho. ¿Convirtieron la C y la D? ¿A octavos?
Andrés: ***¡Treinta avos!***
P: ¿Cómo le quedó?
Andrés: Quedó, en la C, siete treinta avos
P: 7/30 [Escribe en el pizarrón]
Andrés: Y en la D, tres treinta avos

P: Okey, y entonces aquí teníamos treinta avos, treinta avos, treinta avos, treinta avos… ¿y qué pasó aquí? ¿Cómo lo compararon? [Indicando la fila de la escuela E, con la fracción 3/7]

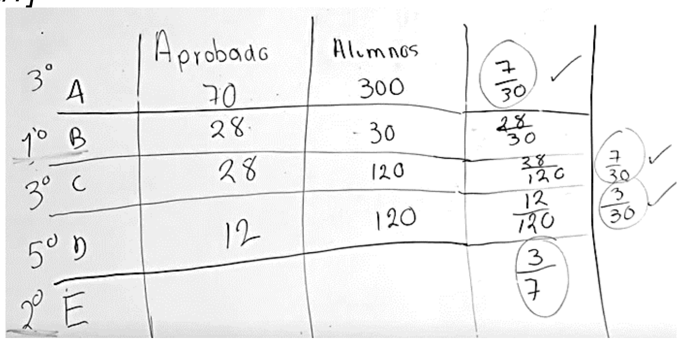


Figura 28. Pizarrón.

Andrés: Porque…estuvo a punto de llegar a la mitad de (…)
*P: Bien, **eso es importante. Dicen ellos: casi hizo la: mitad**. ¿Alguno de los anteriores hizo menos de la mitad?*
Aos: Si
P: ¿Quién hizo menos?
Aos: la A, C y D.
P: Ellos hicieron menos [Coloca una viñeta en el pizarrón]. Entonces, ¿quién es mejor?... en relación a la E… o la A, o la B… o la C o la D.
Aos: La B
P: Pero si yo les pregunto la A, la C, y la E, ¿quién es mejor?
Aos: La E [Todos]
P: ¿Por qué la E, Byron? [Indica la C: 3/30]
Byron: Porque la E casi llega a la mitad, y en la C le falta mucho para…
P: Para llegar a la mitad. ¿Y ésta? [Indica la C: 7/30]
Byron: Igual
P: Le falta menos pero igual le falta. ¿Y ésa? [Indica la A: 7/30]… Pues es igual que: … La… C. Entonces como las anteriores les falta mucho, dice su compañero. Así me lo dijo: le falta mucho para llegar a la mitad. Y a éste le falta: [Indica 3/7]
Aos: Poquito
P: Poquito. Entonces ella es: mejor.

Mediante la técnica de simplificar propuesta por la profesora al inicio de la sesión[67], hallan la regularidad en donde expresan las razones entre alumnos de las escuelas a través de las fracciones del mismo denominador (30 avos).

A: 70/300 = 7/30; B: 28/30; C: 28/120=7/30; D: 12/120=3/30

Además se han enfrentado a una técnica que plantea la imposibilidad de compararlas con la escuela E (retroacción del medio). No existen fracciones equivalentes a 3/7 cuyo denominador sea 30, problema que han superado con la consideración de la

[67] Ver los tres diálogos en páginas anteriores (las ayudas ofrecida por la profesora).

razón privilegiada ½ asociada a la noción de mitad, y que la profesora aprovecha en este momento, enfatizándola para instalarla en la clase.

Cabe destacar el rol de la profesora, de convertirse en este episodio en la “escriba” del procedimiento del equipo, promoviendo la socialización de razonamientos, técnicas, y procedimientos de resolución, e invitando a pensar juntos[68].

En otro equipo, una alumna expresa su razonamiento donde evidencia la funcionalidad de la razón al comparar las cantidades de la escuela E, donde afirma que pasaron “28 de 30” contra los alumnos de la escuela E, leído como “3 de 7”, y las vincula con la mitad.

Diálogo.
P: ¿Alguien lo comparó de manera diferente? [Silencio]. Yo vi que alguien lo hizo distinto… [Una alumna levanta la mano]… A ver acá [Da la palabra]
A1: Por ejemplo, en la B, es 28 de 30.
P: En la B es 28 de 30, bien.
A1: Es 28 de 30, por lo tanto dice que 28 alumnos pasaron entre los 30 que participaron y solo fallaron 2. Y comparando con la E que según solo pasaron 7 solo pasaron 3, es que fallaron 4. Comparando entre todas las fracciones, la E es segundo lugar porque…
P: La E es segundo lugar, bien bien
A1: Y como, dice Byron, y dijeron recién, estuvieron más cerca de la mitad… (…)

2.1.3 Comentarios

El inciso 3) que pregunta si se puede comparar los resultados de la escuela E con las anteriores, sabiendo que 3/7 del total de alumnos pasaron a la próxima etapa del concurso, ha promovido en la clase, interacciones interesantes de los alumnos con la profesora y con el medio y ha hecho emerger conocimientos, procedimientos, y estrategias.

El problema ha permitido dar fuerza a la idea que las fracciones expresan una razón entre cantidades (estas últimas son las que permiten comparar) y constituyen una nueva información que no son las cantidades que se ponen en juego.

---

[68] En la dirección de promover posiblemente la institucionalización de procedimientos (carácter útil), y quizás la de nuevas nociones de la fracción (carácter objeto), como esa característica de conservar una relación entre dos cantidades y generar otras relaciones posibles.

Emerge una intensa gestión de la profesora frente al inciso que la lleva a ofrecer ayudas, pistas, paradas para que los alumnos puedan realizar la comparación de la escuela E con las otras.

Se observa un juego de equilibración que desarrolla la profesora ofreciendo ayudas colectivas o por equipos, que intentan controlar una situación en la cual emergen muchos objetos matemáticos relacionados entre sí y una diversidad de procedimientos, con la intención de favorecer o relanzar el carácter adidáctico de la situación.

Las nociones que se evitan, reaparecen en otros momentos. Al inicio de la sesión, una alumna propone dividir 300 entre 70, como expresión de la relación. Se evita en ese momento, pero emerge su cociente 4.2 decimal en el momento exacto donde la profesora propone una ayuda. Se produce otro momento difícil e imprevisto de la clase.

El procedimiento de Byron de obtener fracciones equivalentes realizando amplificaciones, y que finaliza con un argumento basado en diferencias, que sabe que es un argumento falso, parecería que abona la idea de “responder por contrato didáctico”, bajo la cláusula: “Alguna respuestas hay que dar.” Sin embargo, deja la pregunta ¿acaso ese procedimiento –erróneo- no lo están tomando como un elemento conocido del medio? (¡qué interesante hubiese sido que se lo debata en la puesta en común!)

La variable didáctica: “compara teniendo como único dato 3/7”, juega un papel muy importante en el desarrollo de la clase. Su instalación exige a la profesora numerosas intervenciones y en los alumnos provoca la necesidad de construir nuevas estrategias para poder comparar con las otras escuelas, a través de variadas nociones: porcentaje, decimal, división, simplificación, amplificación, productos, restas, búsqueda de común denominados 30 avos, 120 avos.

Hay preguntas que se formulan de distinta manera por los actores que están en el aula. En el plano de los alumnos, la pregunta: “si se sabe que 3/7 de los alumnos de la escuela E aprobaron el concurso. ¿Se puede comparar con las escuelas anteriores? En el plano de la profesora la pregunta va más en el sentido de ¿Cómo abordar la clase cuando el problema tiene como único dato una fracción irreducible que los alumnos deberían poder comparar con otras? ¿Qué ayudas doy si los alumnos no hacen nada o si cometen errores?, etc. En el plano de los investigadores, ¿Qué está sucediendo en términos didácticos? ¿Qué condiciones permiten a los alumnos engrosar el significado de las fracciones? ¿El problema presenta un desafío “abordable” por los alumnos y la profesora?

Destaco también el emblema: “1/2 es la mitad y es el 50%” como una herramienta (simbólica, semiótica, enunciativa) que emerge (como saber compartido), cada vez que se recorre el tránsito entre fracción, razón y hasta porcentaje.

2.2 Situación didáctica: Concurso, ¿cómo cuidamos el planeta? Inciso 4).

Fecha: 17-11-2017, duración 20 min / 100 minutos.

La situación se desarrolló en un segundo momento de la segunda sesión. Junto con la anterior, demandó a la profesora mucho más tiempo que el previsto en las fichas. Se ha iniciado con una breve lectura colectiva de la consigna, trabajo en equipos y luego una puesta en común.

2.2.1 Análisis previo de la SD. 1.2. Inciso 4).

Consigna

Alicia dice: “En mi escuela el cociente de los que pasaron el concurso dividido entre el total de alumnos es 0.3”

a) ¿Se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.
b) Si en la escuela de Alicia, el cociente hubiera sido 0.8, ¿a los alumnos les habría ido mejor o peor en el concurso? Justifica.
c) ¿Cuál crees que sea el valor más grande que pueda tomar ese cociente? ¿y el más chico? Explica por qué.

Propósitos

En el inciso 4 se busca evidenciar que las expresiones decimales de las fracciones (como de las razones), tienen la propiedad de conservar la información relevante acerca de las relaciones entre las cantidades involucradas. Cabe destacar que asociada a la noción de los decimales, se presenta la noción de cociente entre dos cantidades (enteros positivos), una parte y un todo, lo cual podría necesitar una mayor presencia del docente en la gestión y desarrollo de la situación.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente.

Se buscará institucionalizar que las razones también pueden expresarse como números decimales, obtenidas como el cociente entre dos cantidades: una parte entre el total, dando información sobre la relación entre las cantidades puestas en juego.

Una forma de interpretar 0.3 sin pasar por la noción de cociente es convirtiéndolo a fracción: 0.3=3/10 por lo tanto, como se ha visto en la situación anterior (con la fracción 3/7), podría interpretarse como 3 de 10.

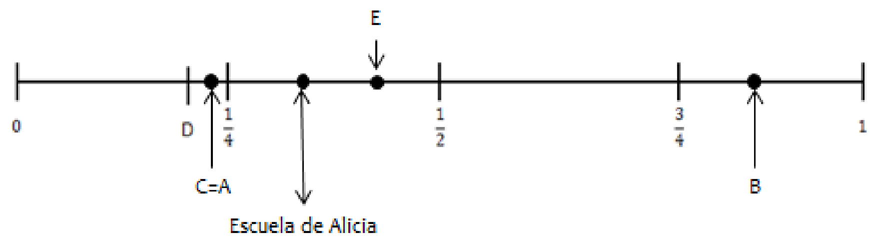
Para lograr que estas expresiones decimales tengan mayor fuerza (y sentido), como se afirmó en el inciso 4) con las fracciones, se optó por dar como única información que el cociente entre alumnos que pasaron el concurso y el total de alumnos de la escuela es 0.3.

Como recurso para favorecer el desarrollo de la clase, el docente podrá desplegar algunas de las estrategias siguientes: Podría preguntar ¿cuáles son las parejas de números cuyo cociente da como resultado 0.3? ¿Cuáles son todos los números cuya división da 0.3? Este tipo de trabajo incorpora a las situaciones, además, una propiedad nueva: "Dada la relación (razón) expresada como un número decimal, existen infinitos pares de números cuyo cociente da como resultado ese número decimal". Esta propiedad introduce la posibilidad de "generar" los pares de números naturales cuyo cociente se expresa como un número decimal. Y faltaría un paso: esos pares de cantidades guardan la misma razón.

También podría de realizar preguntas introduciendo alguna cantidad hipotética de alumnos que han pasado el concurso o total de alumnos de la escuela, por ejemplo: Si hubieran pasado el concurso un total de 45 alumnos, ¿Cuál es la cantidad total de alumnos de la escuela?, otra pregunta podría ser: Si en la escuela tuviera un total de 150 alumnos, ¿Cuántos hubieran pasado el concurso?

El propósito de estas últimas preguntas es el de posibilitar que los alumnos puedan abordar el problema con recursos matemáticos propios, o establecer relaciones con los problemas resueltos anteriormente. El desafío consistirá en pasar de la idea de 0,8 como cociente a la de razón (por ejemplo como "8 de 10").

Ante la última pregunta, los alumnos podrían realizar cálculos para determinar qué número dividido 150 dará como resultado 0.3, por ejemplo podrían realizar un método de tanteo, probando con calculadoras. Otro posible manera de calcular estará en el uso del decimal como operador: 150x0.3=45, con lo cual determinarían que 0.3 es equivalente a decir que pasaron el concurso 45 alumnos de un total de 150. Si utilizan otro recurso como cuartos y mitades, podrían afirmar que Alicia estará entre 1/4 y 1/2 porque 45 es menor que 75 pero mayor que su mitad.



Para comparar los resultados de la escuela de Alicia con los de la escuela E (que se encuentra en el mismo intervalo [1/4, 1/2]), podrían recordar que en la E se sabía que pasaron el concurso 3/7 del total de alumnos de la escuela, el cual podría compararse con 0.3 si se expresa como la razón 3 de 10 (o algunas de sus equivalentes).

Podría considerarse otro método que los alumnos podrían desarrollar, -o el docente proponer- que podría ser el de transformar todas las fracciones a su expresión decimal, realizando cocientes entre alumnos que pasaron el concurso y el total de cada escuela, lo cual podría permitirles decidir cuáles son las escuelas relativamente mejores que otras, a partir de la comparación de las expresiones decimales. Estas transformaciones podrían ser motivadas por la búsqueda de una regularidad numérica (dimensión sintáctica), bajo el riesgo de perder de vista a las razones, desde un punto de vista semántico.

Escuela	Fracción de alumnos que pasaron a la etapa siguiente	Expresión Decimal
A	70/300; 7/30	0.233
B	28/30; 14/15	0.933
C	28/120; 14/60; 7/30	0.233
D	12/120; 6/60; 3/30; 1/10	0.1
E	36/84	0.428
Esc. de Alicia	45/150	0.3

Asimismo podría discutirse que, como siempre el numerador será menor (o igual) que el denominador, entonces esas fracciones no podrán ser mayores a 1, porque los cocientes serán siempre de un número chico por otro más grande, es decir la parte dividido el total de alumnos.

Como recurso para el docente, para discutir en la puesta en común, podría preguntar: Al realizar el cociente, ¿es importante el orden?, ¿por qué?

-¿Cómo sería el cociente en una escuela donde todos los alumnos pasaron el concurso?

-¿Cómo sería el cociente en una escuela donde no pasó el concurso ningún alumno?

-¿Cómo sería el cociente en una escuela donde pasó el concurso la mitad de los alumnos?

-¿Podría ser el cociente mayor a 1?, ¿por qué?

2.2.2 Análisis de la experimentación de la SD. 1.2. Inciso 4)

En este momento de la sesión, la profesora solicita a los alumnos que resuelvan el inciso 4). Por equipos, empiezan a leer la consigna, dejando ver que no está claro qué es el cociente. La profesora interviene, promueve una breve discusión para todos los alumnos:

Diálogo: ¿Qué es el cociente?
P: ¿Hay una palabra que no conozcan? [A todos los alumnos]
Aos: ¡Cociente!
P: Cociente, y qué es un cociente.
Aos: El resultado.
P: ¿El resultado de quién?
Aos: ¡De una división!
P: El resultado de una: división. Bien. [Continúa su recorrido, los alumnos vuelven al trabajo en equipos]

En el siguiente episodio, hay un breve momento adidáctico que ocurre en el equipo 2. Los alumnos abordan el problema apoyándose en el algoritmo de la división (en donde ubican el cociente 0.3) y la información que falta: los alumnos que pasaron el concurso y el total de la escuela.

Diálogo.
Marian: ¿Entonces?...
Aline: Es la parte de arriba digamos… esto… como esto que pusiste [Indica el lugar del cociente 0.3 dentro del algoritmo de la división]

0.3

Marian: Bueno, y eso lo dividieron entre el total de alumnos y el resultado fue 0.3
Aline: [lee nuevamente el problema]

Como veremos en el siguiente diálogo, los alumnos de este equipo comunican sus conjeturas y estrategias para solucionar el problema, que incluyen: a) Buscar una división que dé sí o sí como resultado 0.3, b) Realizar los cocientes de las escuelas anteriores c) No es necesario conocer la cantidad de alumnos[69] y d) No se puede hasta no saber el total.

Diálogo. El cociente lejos de las fracciones, cerca de los decimales y de las razones.
Marian: Una división que nos de 0.3 [Interrumpe]. Es que… el cociente de los que pasaron, fue... no sabemos cuánto fue… pero eso lo dividieron entre el total de alumnos y el resultado fue 0.3. Hay que hacer una división que dé 0.3 [Silencio en el equipo]
Axel: Hay que buscar una división que dé sí o sí, el resultado de 0.3
Miguel: Lo que hay que hacer es… ver qué es lo que nos da de resultado con los alumnos que pasaron de ésta [Refiriéndose a otra escuela]
Marian: No, ¿o sí? ***¿Por qué tendrías que saber el total y los que pasaron?*** *[La profesora se acerca y escucha]*
Aline: No podemos comparar hasta que no sepamos el total.

En el episodio anterior, la profesora se acercó y escuchó a los alumnos. Decide intervenir con la pregunta: "¿Cuáles son las parejas de números cuyo cociente da como resultado 0.3?". Es un juego didáctico que se sugiere en las fichas para el docente.

Diálogo.
P: ¿Qué pareja de números nos puede dar el cociente de 0.3? [Se acerca al equipo con la pregunta que está en la ficha]
Marian: ¿Y si mejor intentamos con el total de alumnos que pasaron del total de alumnos en todas las escuelas?
P: ¿Cuál es el cociente?
Marian: Del total de alumnos de cada escuela, los probemos. Y veamos cual es 0.3
P: ¿Y cómo sabe de los otros…? ¿Cuál sería? ¿Qué tendría que hacer?
Aline: Dividir 7 entre 30
P: ¿Y con eso que podría saber?
Aline: Saber la cantidad de alumnos de la escuela
Axel: Saber el porcentaje de cada escuela… [Aline saca su calculadora, y Marian realiza una exploración numérica y concluye que no es ninguna escuela. También intenta escribiendo algunas divisiones[70]]

[69] Quizás lo trae del trabajo en el inciso anterior con el 3/7 aunque no lo explicita.
[70] Posiblemente exploraba los cocientes entre alumnos que pasaron el concurso y total de cada una de las escuelas anteriores, cuyo valor sea 0.3.

Esta intervención, en este equipo, lleva a los alumnos a explorar con la idea de "parejas" a las parejas de cantidades de las otras escuelas, en búsqueda del cociente 0.3. Se pierde la intuición genial y fugaz de Marian: *"¿por qué tendrías que saber el total y los que pasaron?*".

Por otro lado, en este equipo emerge en los alumnos una estrategia que se ha sugerido en las fichas: "El de transformar todas las fracciones a su expresión decimal, realizando los cocientes entre alumnos que pasaron el concurso y el total de cada escuela (…)"

Conectado con el episodio anterior, Marian se acerca al equipo 2 a intercambiar ideas con Itza, en donde se encontraba Obs_3. La intervención del investigador, cuya finalidad es la de motorizar la comparación del decimal 0.3 con las fracciones, es un argumento que, como vimos, ya ha sido comprobado por Marian en el equipo 1. Además es una intervención que ha sido sugerida a la profesora en las fichas como una estrategia para hacer avanzar el proceso de aprendizaje de los alumnos.

> *Obs_3: "**Hacer las divisiones de las demás escuelas (Sugerencia mía).** Cuando ya están bien seguros de que 0.3 no permite comparar, y sospechando que en ningún equipo lo van a encontrar (en lo cual me equivoqué), me atreví a meter "mano negra" y sugerí a Itza que viera cuánto daban esas divisiones en los demás casos. Itza hizo las divisiones. Al hacerlo empezaba a ver que 0.3 se podía comparar con esos números, pero fue interrumpida por Marian quien llegó con una idea muy buena.*
> *Proceso para hallar cantidades cuyo cociente sea 0.3 Marian le explica bajito a Itza esta idea. Itza se queda pensando y dice, en sus palabras (que no recuerdo textualmente) que el **"número de aprobados debe ser menor que el total de alumnos, para que la división dé punto algo"** (curioso que esa sea la explicación que se le ocurre, y no que no puede haber más aprobados que alumnos). Se queda pensando, no lo encuentra por ahora, pero un poco más adelante lo logran:*
> *Itza (dice a Dalia): "pasaron de 20 de 70, pero enseguida se corrige y dice "no…, 6 de 20". Y luego, al grupo: "así ya sabemos cuántos alumnos hay".*
> *Es decir, logran recuperar un par de cantidades, ligadas a ese número cociente. Falta un paso: ver que hay más pares de cantidades y que en todos los casos el desempeño es el mismo."*

Algunos aspectos para destacar en la observación anterior:

En primer lugar, hay una complejización de la situación didáctica (y el análisis a posteriori) en donde el Obs_3 provoca a través de su intervención, un cambio de tareas de los alumnos, pero en este caso con el impulso de ideas provenientes de Marian, colega de Itza, pero de otro equipo (en donde estaba Obs_2). Ya no es solo la intervención de la profesora en el aula, en instancias colectivas y en equipos, sino también la intervención de los observadores en la fase de trabajo en equipos.

En segundo lugar, parecería que Marian (que en episodios anteriores utilizo a Aline como escriba) comparte conocimientos con Itza que le permiten comunicar sus ideas a través de su compañera quien las interpreta y las verbaliza. De esta manera Itza parecería funcionar también como “traductora” de las ideas que aun Marian tiene dificultades de verbalizar a través de su lenguaje[71]. Marian nos deja ver entonces la importancia (necesidad) de los otros para la formulación y puesta a prueba de conjeturas en su proceso de actividad matemática.

En tercer lugar, notamos cierto nacimiento y recorrido de una idea. Dentro del aula, a partir del funcionamiento adidáctico muy breve de la situación en el equipo 2, que Marian comunica a Itza en el equipo 3 (reforzado al menos por Obs$_3$), y como veremos en la puesta en común, se comparte bajo la idea de razón (¿o cociente?, ¿o fracción?) de 6 entre 20.

Puesta en común. La profesora informa que necesita parar el tiempo para poder avanzar, y propone resolver colectivamente la actividad a partir de los resultados que cada equipo tenga[72]. En el diálogo con los alumnos, recuerdan qué es un cociente, y focaliza el interés en los cocientes de la cantidad de alumnos que pasaron entre el total de la escuela. Para ordenar los datos, agrega una columna en la tabla, en donde los alumnos van dictando los resultados.

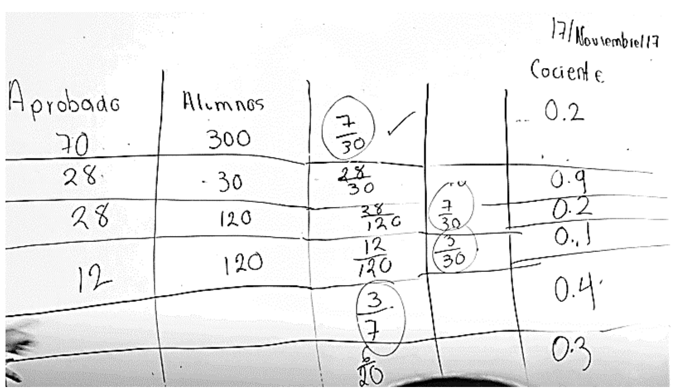


Figura 29. Tabla en el pizarrón con columna de expresiones decimales.

[71] Episodios similares veremos más adelante, cuando abordan la lección 2.3: Una cierta botella Z.

[72] La tensión del tiempo es un asunto casi transversal en todo el desarrollo de la experimentación. Hay una presión entre el tiempo hipotético previsto para el desarrollo de las situaciones y el tiempo efectivo de su recreación en el aula.

Luego, hay un momento donde comparan esos decimales, para ubicar en qué lugar colocarían a la escuela de Alicia. A continuación, emerge la idea de Marian e Itza.

Diálogo.
P: ¿Si tengo estos cocientes ahora, los puedo comparar con el resto?, ¿estos decimales se pueden comparar con la escuela F [de Alicia]?, ¿alguien lo hizo de manera diferente? [Itza levanta la mano en equipo 3]
Itza: El cociente de la escuela de Alicia fue 0.3 y lo que hicimos fue tratar de sacar una división que el resultado diera 0.3
P: ¿Y cuál encontraron?
Marian: 6 entre 20
P: ¿Cuánto les da 6 entre 20?
Itza y Marian: 0.3
P: 6 entre 20, muy bien [Escribe en el pizarrón 6/20] ¿Y luego?
Marian: Luego podemos comparar porque sabemos cuántos alumnos hay en la misma escuela.
Itza: Entonces sabemos cuántos alumnos hay en la escuela y cuántos pasaron.

Hay dos argumentos que están funcionando implícitamente en la clase: por una parte se acepta que los cocientes permiten ordenar, sin más, sin justificarlo, y por otra parte, que hay muchas divisiones cuyo cociente da 0.3 y en ellas el dividendo y divisor guardan la misma razón.

A continuación se reúnen los resultados en una tabla en el pizarrón y se comparan. Para finalizar se promueve una breve discusión respecto al cociente 1 y 0. Parecería que no hubo problema, aunque solo se pueda decir que unos pocos alumnos participaron[73]:

Diálogo.
Axel [Lee el inciso 4) c): ¿Cuál crees que sea el valor más grande que pueda tomar ese cociente?, ¿y el más chico?
P: ¿Cuál es el valor más grande que pueda tomar este cociente? [Señala la columna de cocientes en el pizarrón]
Axel: ¡Uno!
P: ¡Uno! ¿Qué significaría el 1?
Byron: Que está completo todo
P: Que está completo…
Axel: ¡El 100%!
P: Entonces el valor más grande es…
Ana: Que todos pasaron
P: Muy bien lo que dice Ana, que todos los alumnos que concursaron, pasaron. Eso también significaría. Entonces el valor más grande es: [Escribe 1], ¿y el más pequeño?

[73] La presión por el tiempo quizás provoca que se valida demasiado rápido y esto impide que participen más alumnos.

Aos: Cero
A: Cero punto cero cero cero cero cero cero uno.
P: ¿Qué significaría cero? [Escribe 0 en el pizarrón]
Aos: Nada
P: ¡Que ninguno pasó! Bien hasta ahí nos quedamos, recojo sus hojas y pasamos a la siguiente actividad.

Con esta situación la profesora se dispondrá a avanzar en el experimento con botellas con canicas, que es, según dio aviso al inicio de la sesión, el segundo momento de la clase.

2.2.3 Comentarios

No está fácil ni para los alumnos ni para la profesora, hacer que emerja, a partir este inciso, lo que pretendíamos que se institucionalice: "Las razones también pueden expresarse como números decimales, obtenidas como el cociente entre una parte y el total, dando información sobre la relación entre las cantidades puestas en juego. Ejemplo: en la escuela de Alicia paso el concurso 0.8 de los alumnos, quiere decir que pasaron 8 de 10, 16 de 20, 80 de 100, 120 de 150, etc.". Pero por otro lado, no deja de ser indicativo que unos pocos alumnos han mostrado poder hacerlo, aunque implícitamente. Un factor condicionante al menos para la profesora, es la presión por desarrollar la situación en cierto tiempo, que aunque ha sido mucho más extenso que el previsto en las fichas, aun parece insuficiente.

La no emergencia de esta propiedad de los decimales sobre la conservación de las relaciones entre dos cantidades que además tienen relación con las fracciones, merece un estudio más profundo. La no emergencia se evidencia en la necesidad de la profesora de intervenir más, organizar, sugerir, recurrir a las estrategias que anticipamos en las fichas: 1) Preguntando: ¿Cuáles son los pares de números cuyo cociente da como resultado? y 2) Transformando todas las fracciones a su expresión decimal.

Tampoco se logró que frente a un cociente un número decimal, se generen muchos pares de números naturales cuya razón se exprese bajo ese decimal. Marian e Itza logran construir un par (6, 20), pero ha quedado como solución única (o único par cuya relación se expresa mediante el decimal 0.3)

Parecería que se configuraron caminos cruzados para llegar a los decimales: desde la división y desde las fracciones. El decimal es una forma de expresar una fracción, o de aproximarla cuando ésta no es decimal. Si se usa la división para encontrar esa expresión decimal, se hace intervenir el significado de la fracción como cociente, el cual los alumnos no suelen reconocer. Al final de cuentas esa división no es aquí más que una técnica, cuya razón de ser se ignora. Lo que viene a completar el cuadro de confusiones que se complementan, es que en este caso, lo que interesa originalmente sí son divisiones, la del número de aprobados entre el total de cada escuela. ¿Cómo se sabe que pasando las fracciones a decimales se obtiene ese cociente que interesa? Cierto que para ese paso se hace una división, pero se hace sin tomarla en serio como división, solo como manera de obtener decimales. Entonces, ¿los alumnos se centran en la tarea de generar decimales perdiendo de vista que son el cociente de la división aprobados entre total?

La comprensión que van logrando los alumnos son diversas: para unos, el hecho de que los cocientes permitan comparar el desempeño es algo que parece funcionar, pero sin una justificación clara; para otros la justificación es que los decimales son equivalentes a las fracciones (que ya se había visto que permitían comparar), pero la idea de división queda fuera, y finalmente para muy pocos. Para Marian e Itza, los cocientes vienen de divisiones de cantidades (0.3 viene de 6 entre 20), y expresan la relación entre esas cantidades, como la expresan las fracciones.

2.3 Situación didáctica: Botellas con canicas. Inciso 1).

Fecha: 17-11-2017, duración 20 minutos /100 minutos.

La situación se desarrolló en un tercer momento de la segunda sesión. Luego de una breve lectura de la consigna y reparto de materiales, los alumnos se dispusieron a trabajar en equipos y a realizar las primeras exploraciones con las botellas.

Esta situación inaugura una segunda fase de la ingeniería didáctica, cuyo desarrollo demandará las tres sesiones siguientes, y que fue textualizado a través de un conjunto de lecciones.

2.3.1 Análisis previo de la SD. 2.1. Inciso 1).

Consigna

En un primer momento de diálogo colectivo, y los alumnos en equipos de 4-5 integrantes, el docente mostrará los materiales y se describirá la primera parte de la experiencia.

> *"Aquí hay una caja (o bolsa transparente) con 30 canicas blancas y negras (se muestran) y botellas (oscuras u opacas) con etiquetas A, B y C y con un agujero en la tapa. Se propone a un alumno que mezcle bien las canicas que están en la bolsa y tome, sin mirar, 5 canicas y las introduzca dentro de la botella (puede ser de una por vez). Puede pedirse a otro alumno que constate que la botella tiene 5 canicas, siempre sin mirar el color. Luego, cerrará la botella con su tapa y mostrará a toda la clase que al inclinar la botella, puede observarse el color de la canica que se asoma por la tapa."*

Importante: todos los niños saben lo que contienen las botellas, pero ignoran qué cantidad de canicas de cada color tiene cada una en su interior. Previamente, el docente ha conformado cada botella con la siguiente composición conocida por él, pero no por los alumnos:

Botellas	Canicas negras	Canicas blancas
A	4	1
B	3	2
C	2	3

Luego se repartirán tres por equipo, de acuerdo a la consigna que se describe más adelante[74]. A continuación se repartirán copias de la lección 2.1: Presentación de la experiencia.

En las botellas oscuras A, B y C hay 5 canicas en total, con distinta cantidad de blancas y de negras. Al volcar la botella podrán ver solamente una canica a la vez.

El desafío consiste en averiguar si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella.

Reglas:

- Se realizan tiradas en equipo de cinco integrantes.
- Al volcar la botella podrán ver una canica a la vez, se anota el color que sale y se mezcla el contenido de la botella.
- Pueden designar a un integrante del equipo para que lo realice o hacerlas por turnos.
- Se remueve bien y se repite esta operación.
- No se puede abrir la botella.

1. Realicen 20 tiradas con la botella que les tocó, luego hagan lo mismo con las otras dos botellas, intercambiando con otros equipos.
2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla:

Botella A	Número de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

Botella B	Número de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

Botella C	Número de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

[74] En este momento el docente puede, a modo de ejemplo, describir las reglas de la experiencia, por ejemplo podría pedir a un integrante de cada grupo que realice una “tirada”, diga el color, revuelva y repita el procedimiento.

3. Analiza en equipo, los resultados que obtuvieron en particular discutan si con estos datos es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella, ¿qué se puede saber? En caso afirmativo justifiquen y en caso negativo, digan por qué.
4. Realicen 20 nuevas tiradas con cada botella y comparen con los resultados obtenidos anteriormente, para ver si mantienen su idea de lo que hay, o si la cambian. Registren los resultados en una tabla similar a la que ya usaron.

Propósito didáctico: Se pretende que los alumnos comprendan las reglas del experimento, y puedan diferenciar una tirada de una ronda o serie de tiradas, elaboren registros de resultados para establecer las primeras conjeturas o hipótesis acerca del contenido de la botella que les tocó.

Propósito de investigación: Estudiar las condiciones iniciales que permitan establecer un medio que permita la producción de conjeturas que se irán enriqueciendo con las diversas repeticiones del experimento. Asimismo analizar los tipos de registros que surjan de la producción de los alumnos, sus argumentos al momento de comunicar las primeras conclusiones. En particular las primeras relaciones entre cantidad de fichas blancas y negras con una serie de tiradas, y el contenido de la botella.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente

Hemos previsto que luego de la presentación de la actividad, se desarrolla un momento de experimentación grupal, realización de tiradas y primeros registros.

En el **inciso 1**, se propone que los alumnos completen las primeras 20 tiradas con la botella A, y luego intercambien con otros equipos las demás botellas. En este momento los alumnos podrían establecer acuerdos acerca de quién realizará las tiradas (si lo harán por turnos o designan a un secretario en el grupo).

En el **inciso 2**, aunque se explicita por primera vez la palabra “ronda”, relacionándola con las 20 tiradas que realiza cada equipo con cada botella (A, B y C), puede suceder que para los alumnos no tenga sentido, dado que las primeras 20 tiradas no necesariamente puede pensarse como una ronda o agrupamiento, pueden pensar en que son tiradas, individuales, sin relación con el número de veces que se repite. Asimismo, puede ocurrir que no adviertan, ni es un propósito en ésta fase, la relación que hay entre el número de tiradas y la cantidad de canicas de cada color observada, con el contenido de la botella.

A su vez, el propósito de la lección es el de producir los primeros registros, realizando las primeras tiradas. Es posible que los alumnos escriban en la tabla que se propone, la letra “b” cada vez que observan una canica blanca y la letra “n” para canicas negras. Podrían, incluso, escribir las tiradas en forma de lista o series, por ejemplo:

Botella A: nnnbnnbnbnbnnnnnnnbn
Botella B: nbnbbbbbbnnbbnbnnnnn
Botella C: bnbbnbnbbnnbbbbnnnbb

Cabe destacar que en las tablas propuestas no se indica la palabra “cantidad de canicas”, con lo cual abre la posibilidad a que los alumnos decidan realizar el conteo de acuerdo a la necesidad de establecer alguna relación con el contenido de la botella. Por otra parte, si los alumnos razonan sobre las cantidades, podría suceder que propongan registros más compactos, por ejemplo:

Botella A: 15n y 5b
Botella B: 10n y 10b
Botella C: 8n y 12b

Sin embargo, esta posible forma de registro podría ser propuesta por los alumnos en la siguiente fase cuando se repita el experimento un cierto número de veces.

Cabe señalar que usar esta forma compacta de registro implica aceptar, implícitamente, que el orden en que van saliendo las canicas no importa para los fines de la actividad: averiguar la composición de la botella. Si no es ahora, se espera que en algún momento la adopten.

En el **inciso 3**, se espera que los alumnos construyan una primera conjetura para que un representante del grupo la pueda expresar en la puesta en común. Posiblemente para los alumnos sea una oportunidad para explicitar sus primeros enunciados sobre la relación entre los resultados obtenidos en 20 tiradas y la cantidad de fichas negras y blancas que podría contener la bolsa (composición). La revisión colectiva de los enunciados que se proponen, podría favorecer la formulación de nuevas conjeturas.

Además, de la puesta en común podría surgir una pregunta sobre los casos de composiciones posibles (seis posibles composiciones de botellas con 5 canicas, entre las que hay blancas y negras), sin embargo si no surge, podría esperarse hasta la próxima fase. También es posible que se plantee, para casos donde las tiradas muestran igual cantidad de blancas y negras, que la bolsa no puede tener misma cantidad de blancas y negras, dado que la cantidad de canicas es impar.

Por otra parte, el docente podrá preguntar cuestiones como las siguientes, en el caso que se observe que los alumnos no comenten. Incluso, podría proponer la siguiente tarea para discutir en equipos, y luego debatir en forma colectiva:

Revisen si…

- » Los resultados muestran la mitad de cantidad de fichas de cada color;
- » En general hay más fichas negras que blancas o al revés,
- » Los resultados permiten descartar alguna bolsa en particular, como la que tiene solo fichas blancas o solo fichas negras.
- » Anoten sus conclusiones.

Luego de estas rondas de tiradas, podría proponer una segunda puesta en común, donde se pedirá a cada equipo que explicite los resultados obtenidos en la primera ronda y la actual. Puede disponer de una tabla como la siguiente, para completarla en el pizarrón:

	Primeras 20 tiradas	Segundas 20 tiradas
Equipo 1	A: B: C:	A: B: C:

Como cierre de la lección, podría preguntarse a los alumnos ¿qué podemos saber hasta ahora?, para explicitarse, a modo de institucionalización:

- No se puede saber exactamente el color de la canica que se observará (antes de tirar), pero sí cuáles son los dos colores posibles.
- La presencia de aleatoriedad en el experimento, de incertidumbre
- Hay una relación entre el color de las canicas que hay dentro de la botella y las tiradas que se registran al repetir 20 veces el experimento.

2.3.2 Análisis de la experimentación de la SD. 2.1. Inciso 1)

Inicio. La profesora, apoyada por las fichas, empieza la sesión mediante un diálogo colectivo cuyo juego es el de lograr que los alumnos comprendan el experimento, las reglas de juego, y registren los resultados.

Episodio. Presentación del desafío.
P: En este momento vamos a pasar a una segunda etapa. ¿Se acuerdan que les dije que íbamos a trabajar con dos? En esta segunda etapa, les acaban de entregar una hoja nueva [Repartidas por un alumno] que dice las instrucciones y qué es lo que vamos a hacer. [Solicita a un alumno que lea la consigna]
A: Presentación de la experiencia. En las botellas oscuras A, B y C… [Empieza a leer la consigna]
P: Hasta ahí nos quedamos. [Interrumpe]. Les voy a ir diciendo así a cómo vamos a ir leyendo[75]. Ponemos atención. Me voltean a ver para que sepan de qué se trata. [Ya tiene en el medio del salón una bolsa con muchas botellas]. Dice en las botellas A, B y C. Les voy a dar por cada equipo, unas botellas, como éstas, unas dicen A, otras dicen B y otras dicen C. ¿Con estas botellas qué van a hacer? Sigue leyendo por favor. [Dirigiéndose a un alumno]
A: Hay 5 canicas en total, con distinta cantidad de blancas y negras. Al volcar la botella podrán ver solamente una canica a la vez. El desafío consiste en averiguar si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella.
P: Bien. De lo que acaban de leer: ***¿cuántas canicas hay?***
Aos: ***¡Cinco!***
P: ***Pero hay de diferentes colores, ¿verdad? ¿De qué color?***
Aos: Blancas y negras
P: ¿Qué más dice?... y no sé cuántas blancas y cuántas negras hay. Qué dice: "El desafío consiste en averiguar si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene ***la****: botella". Es decir: sé que hay 5 pero no sé cuántas blancas y cuántas negras: hay. ¿Cuáles son las reglas?... Por equipo, les voy a dar las tres botellas, empezamos con la A. ¿Qué van a hacer? Le doy vuelta a la botella y la voy a voltear. Ahí va a aparecer un color: ¿qué color ve? [Pregunta a un alumno, la botella A en una mano y las B y C en otra]*
A: Negro
P: Van a tener por equipo para que lo puedan ver: es negro. Lo van a revolver y lo van a volver… [Repite el movimiento de volcar la botella]. Y así lo van a ir jugando. Para que intenten adivinar cuántas canicas negras hay o cuántas blancas. Y dice otra cosa importante que está subrayada: No se pueden abrir las: botellas.
Aos: Botellas.
P: No las puedo abrir. Eso está prohibido. No lo puedo abrir. Tengo que hacer, el experimento, para poder saber [Repite el movimiento] Por ejemplo ahí quedó una: [Silencio]
Ana: Blanca.
P: Cómo vas a saberlo. En la primera actividad qué dice. Les entrego las botellas para que podamos leer la primera actividad. [Reparte las tres botellas por equipo con la colaboración de Obs_3]

Inmediatamente los alumnos ya empiezan a realizar sus primeras exploraciones. El sonido de las botellas con canicas aumenta el ruido en el aula. Algunos alumnos dicen:

[75] Quiere decir que irá explicando, enfatizando aspectos importantes de la experiencia conforme vayan leyendo la consigna.

“se puede ver algo”, otros la colocan en forma horizontal y miran a trasluz, otros a través de la tapa.

La estrategia de la profesora de presentar la experiencia al final de la sesión, permitió realizar ajustes para la siguiente, dado que para que sea un verdadero desafío es importante que las botellas tengan una composición “oculta”, imposible de verificar directamente (observando su interior).

Finaliza la presentación de la experiencia, pidiendo silencio, y explicando los incisos 1 y 2) de la consigna: hacer una ronda de 20 tiradas con cada botella, y apuntar los resultados en la tabla.

Equipo 2. Acuerdo inicial en el equipo: ¿tiradas por turnos o hechas por un integrante del equipo? ¿Cómo apuntamos? [76]

Empieza el episodio con la disputa entre Marian y Axel acerca de quién manipulará la botella, si lo hace un integrante o por turnos. Se observa a Marian muy enojada (todos quieren explorar). Se acerca la profesora (quien ya se disponía a recorrer los equipos) e indica a Axel: “si quiere empiece usted y vamos rolando la botella”, lo cual motoriza la situación.

Diálogo.
Marian: ¿Entonces qué es lo que ponemos? ¿Los números… o las letras… o qué ponemos?
Aline: Ah mira, le voy a poner N y B [Escribe]… y le voy a poner un palito por cada uno.
Axel: ¡Ándale, así mejor!

Realizan las tiradas, un integrante por vez, quien dice al resto del equipo el resultado obtenido. Todos escriben en su hoja agregando palitos. Cada tanto alguno cuenta el total de palitos hasta llegar a los 20. Durante las tiradas con la botella A, los alumnos evidencian que sale muchas veces el color “negro”. Al terminar de contar llaman a la profesora.

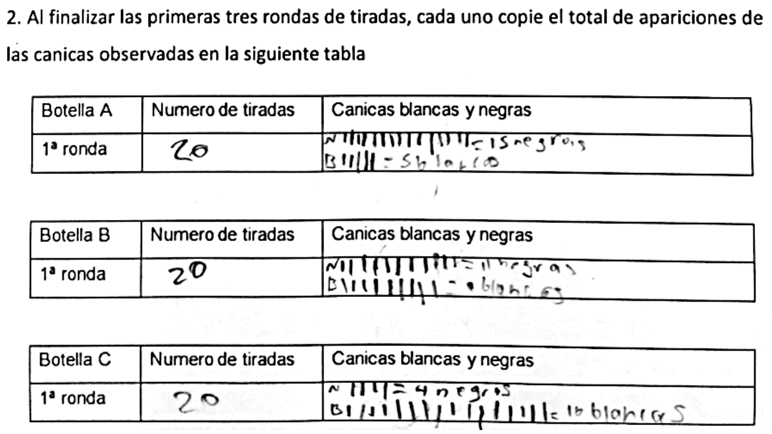
Aline: Maestra mire
P: Bien, ¿en total cuántas fueron?

---

[76] A este equipo ha dado seguimiento Obs_2 durante todas las sesiones. No ha realizado notas escritas dado que, al ser la investigadora que ha videograbado las sesiones y las interacciones con este equipo, he tomado la videograbación como un documento (registro) del trabajo de campo, en sí mismo (como pueden ser las notas escritas, grabaciones de audio, diálogos, etc.).

Los alumnos cuentan, y concluyen: 15 negras y 5 blancas. La profesora pide que ahora sigan con la botella B. Los alumnos continúan con su proceso de recolección de datos y registro en la tabla, tal como se muestra en la imagen siguiente, donde obtuvieron:

Botella A: 15 negras y 5 blancas
Botella B: 11 negras y 9 blancas
Botella C: 4 negras y 16 blancas.



2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla

Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	N = 15 negros B = 5 blancos

Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	N = 11 negras B = 9 blancas

Botella C	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	N = 4 negros B = 16 blancas

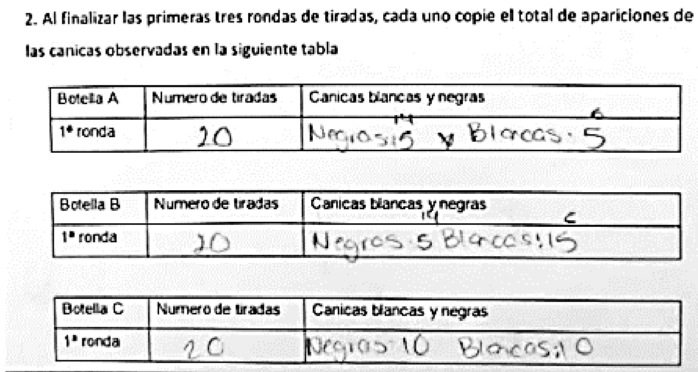
Figura 30.Producción de Axel en el equipo 2.

Equipo 3. Primeros registros. Veremos a continuación que hubo problemas para registrar las tiradas, y luego para estos el tiempo que se dio fue excesivo.

Obs$_3$: "[En el equipo 3] No resultó muy claro cómo debían registrar las 20 tiradas, antes de resumir los totales en la tabla. Itza intentó ir llevando el registro en la cabeza. Se confundió. Le sugerí que pusiera palitos, inmediatamente se confeccionó un registro de dos columnas. Al rato ya varios hacían eso mismo. Luego pasó los totales

	A	*B*	*C*
Itza	*15n, 5b*	*5n, 15b*	*10n, 10b*

No quedó claro si en el equipo debían hacer entre todos una ronda por botella o cada uno de los miembros del equipo debían hacer una ronde para cada botella. El tiempo fue excesivo, no sé por qué la maestra esperó tanto, y entonces hicieron varias rondas de 20 para cada botella. Hubiera sido práctico que en las tablas se pudieran registrar de una vez los resultados de esas rondas.
Andrés ve a trasluz: dice que en C hay 3n, 3b. Luego abren una y ven3n, 2b"



2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla

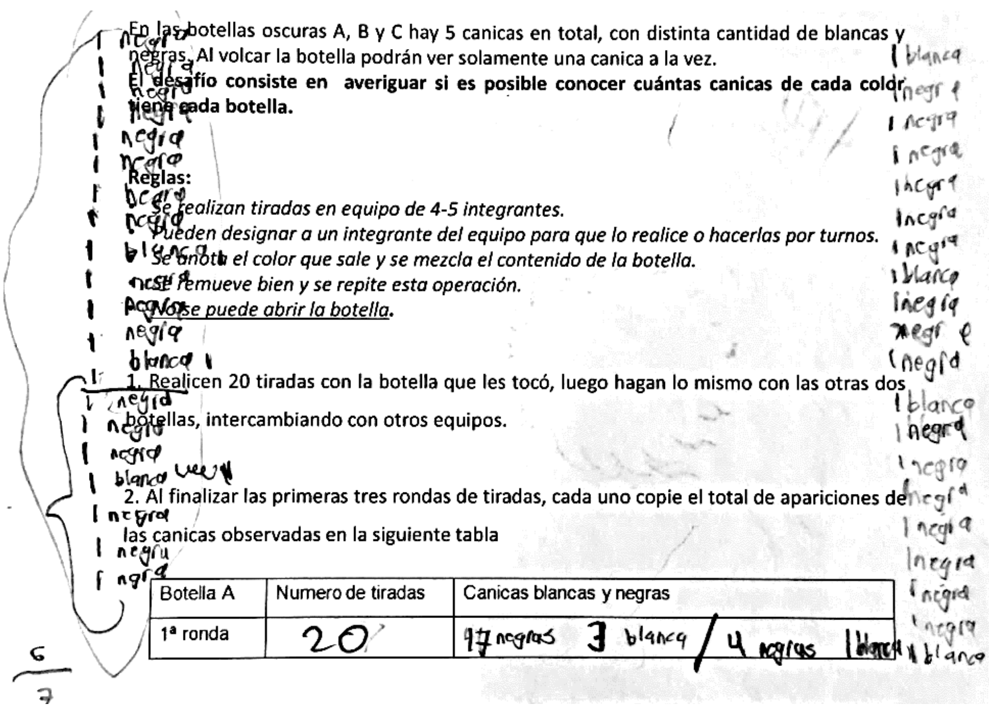
Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	Negras:15 y Blancas: 5

Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	Negros: 5 Blancas: 15

Botella C	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	Negras: 10 Blancas: 10

Figura 31. Producción escrita de Itza.

Equipo 1. Primeros registros. Se organizaron de forma distinta. Han tomado una botella cada dos integrantes, e hicieron sus tiradas, primero 20 con cada botella y luego 20 más, cuyos resultados sumaron al final de la sesión. Con estos datos conjeturaron cuales son las composiciones posibles de cada botella. Por ejemplo, en la siguiente imagen que muestra el registro realizado por Byron y Alberto, y puede observarse en los márgenes de la hoja las 20 primeras tiradas con la botella A (izquierda), de las cuales salieron 17 canicas negras y 3 blancas, y las otras 20 tiradas (derecha) donde salieron 17 canicas negras y 3 blancas. Conjeturaron entonces que la botella A contiene: 4 negras y 1 blanca.



En las botellas oscuras A, B y C hay 5 canicas en total, con distinta cantidad de blancas y negras. Al volcar la botella podrán ver solamente una canica a la vez.

El desafío consiste en averiguar si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella.

Reglas:

- *Se realizan tiradas en equipo de 4-5 integrantes.*
- *Pueden designar a un integrante del equipo para que lo realice o hacerlas por turnos.*
- *Se anota el color que sale y se mezcla el contenido de la botella.*
- *Se remueve bien y se repite esta operación.*
- *No se puede abrir la botella.*

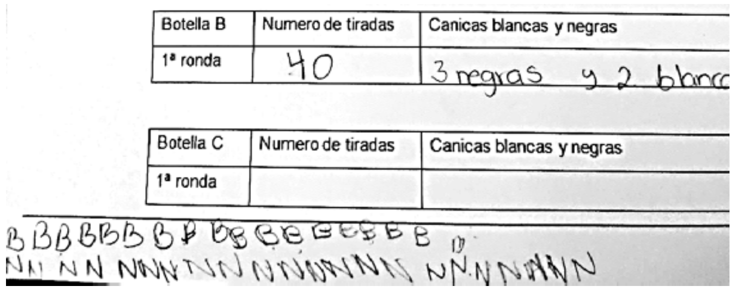
1. Realicen 20 tiradas con la botella que les tocó, luego hagan lo mismo con las otras dos botellas, intercambiando con otros equipos.

2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla

Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	17 negras 3 blanca / 4 negras 1 blanca

Figura 32. Registro realizado por Byron y Alberto.

En el mismo equipo, María y Lupita realizan 40 tiradas con la botella B y también formulan su conjetura. Notemos que el tipo de registro es diferente al anterior. Notemos que, tal como han concentrado los datos en la imagen anterior, ha registrado de la botella B, 18 veces una canica blanca y 22 veces una negra.



Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	40	3 negras y 2 blanc

Botella C	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

Figura 33. Registro realizados por María y Lupita en equipo 1.

Por último, el trabajo con la botella C realizado por Edu, muestra cierto cambio en su registro, en las primeras 20 tiradas escribe la palabra del color que sale, y en las segunda 20 tiradas, el registro es solo de la primera letra del color: B: blanco, N: negro, tal como se observa en las siguientes imágenes. Notemos además que en ambas rondas de 20 tiradas salieron 8 veces canica negra y 12 veces blanca, lo cual se concentra luego en la hoja de Byron, con 40 tiradas de las cuales salieron 16 veces el color negro y 24 veces el blanco.

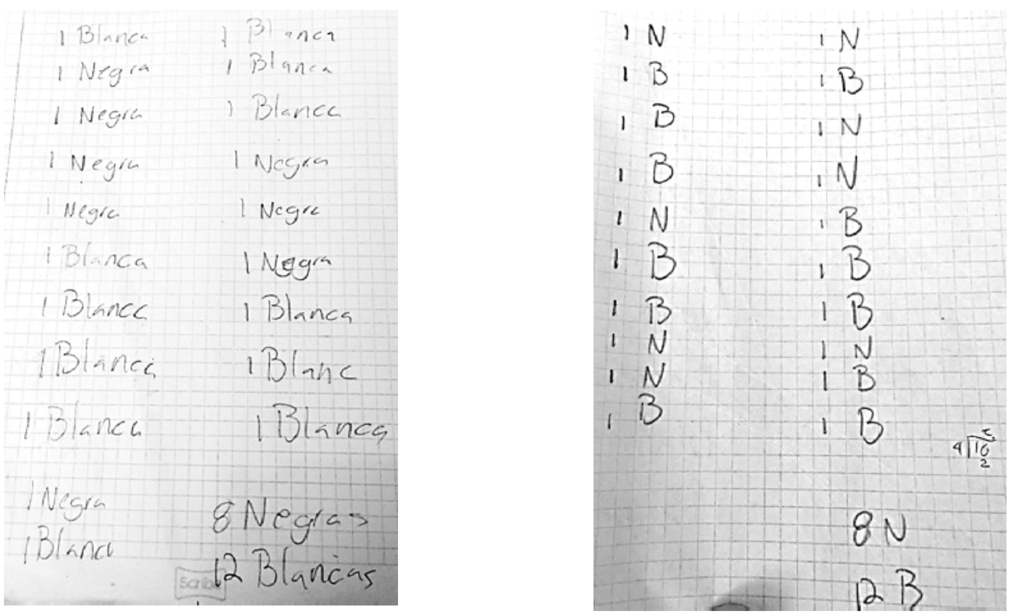


Figura 34. Registros de Edu, de tiradas realizadas con la botella C.

El conteo a través de la técnica de “colocar palitos” ha sido bastante generalizado en los equipos, aunque en algunos casos con cambios en su distribución, como vemos en la siguiente imagen:

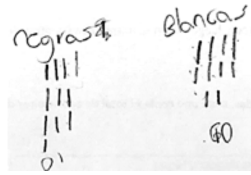
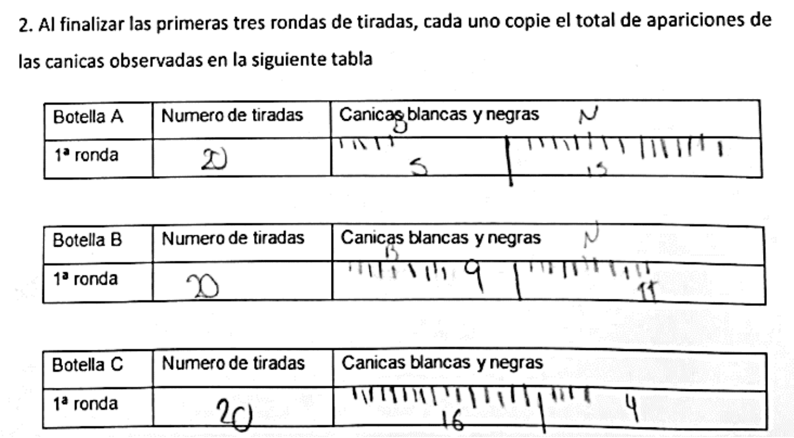


Figura 35. Conteo de resultados realizado por un alumno.

También han registrado en la tabla, pero agregando palitos en columnas, donde cada una indica el color de la canica (B/N), y finalmente contadas, tal como se observa en la siguiente producción:



2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla

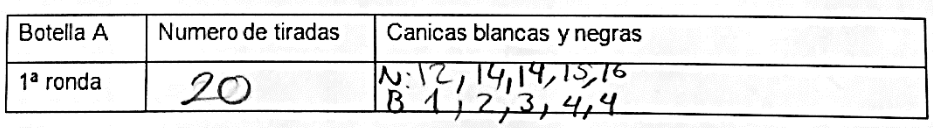
Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	5 | 15

Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	9 | 11

Botella C	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	16 | 4

Figura 36. Registro realizado por Marian.

Por último, otra forma de registro se observa en la siguiente producción, de característica más numérica y acumulativa. Suponemos que en las primeras 13 tiradas han salido 12 veces negro y 1 vez blanca. En las tres tiradas siguientes salieron 2 negras y 1 blanca, por lo tanto, se obtienen en total 14 negras y 2 blancas. Se realiza una tirada más y sale blanca, por lo tanto se tiene el par 14 negras y 3 blancas. En las dos tiradas siguientes sale una de cada color, por lo tanto son 15 negras y 4 blancas. Se realiza una tirada más, para llegar a las 20, y sale negra, con lo cual se obtienen 16 veces negras y 4 veces blancas.



Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	N: 12, 14, 14, 15, 16 B 1, 2, 3, 4, 4

Figura 37. Registro numérico acumulativo realizado por una alumna.

Cabe destacar que el desarrollo de esta situación no se ha podido cerrar en una puesta en común. Por lo tanto, la profesora realiza un breve cierre, comentando que en esta sesión han realizado sus primeras tiradas y en algunos casos han intuido la composición. Asimismo que en la siguiente se retomarán los resultados obtenidos, y se seguirá con el trabajo experimental.

2.3.3 Comentarios

El material escrito a través de fichas y las consignas repartidas a los alumnos ha servido de apoyo para que la profesora pueda presentar la actividad a los alumnos y pueda hacer énfasis en las variables fundamentales de la situación, que además se desarrollaría en sesiones siguientes.

El número de canicas por botellas, los colores posibles, cómo realizar el experimento, y lo no permitido: abrir las botellas, ha sido un aspecto importante, sobre todo por el problema que algunas de las botellas no eran totalmente opacas. Esta intervención de la profesora, llevó a muchos alumnos a no hacerlo por considerarla una “trampa”. La falla en la opacidad debilitó la situación (sobre todo para los alumnos que aun sabiendo la composición, han realizado las tiradas).

Frente a este problema, hemos tenido que repensar el experimento para no perder el sentido de desafío, por un lado reforzando la opacidad (asegurándonos que era imposible ver el interior), y por otro lado, comunicando esto a la profesora, que no hemos cambiado las composiciones pero que enfatice en la siguiente sesión que “tal vez pudieron haber cambiado la composición de alguna botella”, para reinstalar la duda, y con esto, el desafío.

Respecto a los registros de los alumnos, ellos han decidido realizar series de resultados a través del uso de palabras, otros solo la primer letra de cada color acompañados o no del número 1, y otros colocando un “palito”, y cuya disposición ha sido horizontal, vertical, y en pocos casos palitos sin un orden vertical ni horizontal. Esto es un detalle muy importante que la profesora ha respetado desde el inicio, cuando frente a la consigna de realizar anotaciones o registros, no se les dice cómo hacerlos. La necesidad de mejorarlos vendrá de la necesidad de organizar las informaciones, en búsqueda del desafío de averiguar si es posible conocer cuántas hay de cada color. Necesidad que se irá construyendo en las sesiones siguientes, y que ha sido un poco debilitada al inicio tal como lo comentamos.

Asimismo se han logrado los siguientes objetivos:

-Los alumnos comprendieron las reglas del experimento, y pudieron diferenciar una tirada de una ronda de 20 tiradas (en algunos casos hasta de 40 tiradas)

-No se puede saber exactamente el color de la canica que saldrá, pero si los colores posibles (en algunos casos aun sabiendo la composición de la botella, no se puede saber qué resultado se obtendrá en la próxima tirada –presencia de aleatoriedad-)

-Podría existir una relación entre el color de las canicas que hay dentro de la botella y las tiradas que se registran al repetir 20 veces el experimento.

-Que las veces que sale cierto color es distinta en cada botella, se sospecha que en algunas sale más un color que el otro (ej. En la botella A y B hay un fuerte predominio del blanco sobre el negro).

3.1 Situación didáctica: Botellas con canicas (Continuación)

Fecha: 24-11-2017, duración 20 min /100 minutos.

La situación se desarrolló al inicio de la tercera sesión[77]. La profesora recuerda brevemente las dos situaciones desarrolladas en las sesiones anteriores: Tiros al aro y Concurso de escuelas. Luego retoma lo hecho en la última parte de la sesión anterior, donde los alumnos realizaron los primeros registros de tiradas con botellas con canicas. Propone primero recuperar en equipos los resultados y realizar una primera conjetura sobre la composición de las botellas. Esta situación finaliza con una puesta en común donde los alumnos por equipos exponen brevemente sus respuestas.

La sesión se realiza en un salón de cómputos, mucho más amplio que el aula, y donde hay una mesa rectangular y sillas para cada uno de los 7 equipos de 6 integrantes. Debido a que se trata de la continuación de la sesión anterior, la consigna es la misma, y las botellas ahora sí, son absolutamente oscuras e imposible de abrirlas para ver su interior, excepto cuando se las vuelca y se ve la canica que se asoma por la tapa.

3.1.1 Análisis de la experimentación de la SD. 2.1

La reinstalación del desafío con una sutil ayuda. La profesora recorre los equipos, interviene en algunos de ellos, luego propone una breve discusión colectiva para reforzar la instalación de la consigna[78]

Diálogo.
*P: Para todos: ¿**cómo puedo saber** cuántas botellas negras o blancas tenía cada botella? Levanten la mano y me dicen. [Repite la pregunta] ¿Cómo puedo saber cuántas canicas blancas o negras tiene la botella?*
*A: La **mayoría** de las veces salía de un color*
P: Dice su compañero, la mayoría de las veces salía de un color. Es decir: las tiradas que nosotros hicimos, en el desafío de saber qué tenía la botella, ¿nos van a servir para saber cuántas canicas había?
Aos: Si
*P: Entonces con eso ustedes hagan una primera… **apuesta** de qué es lo que piensan ustedes que tiene la botella. Cuántas negras y cuántas blancas.*

La intervención anterior ha surgido del recorrido que realizo en los equipos, en donde busca reinstalar el desafío. Al mismo tiempo, provee de una gran ayuda que tiene

---

[77] En esta sesión se desarrolla además la lección 2.2: Rondas de 5 tiradas correspondiente a la fase 2: “Botellas con canicas, ¿cuántas de cada color?”
[78] Antes había hecho un breve recordatorio de las situaciones de tiros al aro y concurso de escuelas, abordadas en las sesiones anteriores.

un efecto directo en el trabajo por ejemplo del equipo 2, que veremos en el episodio siguiente.

La ayuda que realiza la profesora, aunque sutil, muestra una transformación importante en la consigna: la pregunta ¿cómo puedo saber cuántas canicas blancas o negras tiene la botella?, da por supuesto que es posible conocer su composición. Sin embargo, como veremos en la puesta en común, la mayoría de los equipos, frente a la situación, responde que no se puede conocer la composición "exacta".

Las primeras conjeturas. En el equipo 2. Aline lanza una primera conjetura, Marian la refuta, Axel pone en funcionamiento la consigna: "*justificar*".

Aline: Yo apuesto que la 2 [Refiriéndose a la botella B], tiene… [Observa su registro[79]]

Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda	20	Negras 11 Blancas 9

Axel: ¡Veinte!
Aline: No. Tiene 3 blancas y 2 negras. Lo apuesto por mi vida entera [Sonríe]
Obs$_2$: ¿Por qué? ¿Por qué piensas que es esa?
Aline: Siento que tiene más blancas, porque… las negras yo me imagino que son 2 aunque se repitieron muchas veces…
Obs$_2$: Entonces tú dices que son 3 blancas y 2 negras
Aline: Ajá. Porque… siento que como que eran menos negras hubo más posibilidades de que se repita más veces y las blancas, aunque sean un poco menos, la cantidad, siento que fueron más blancas… por eso digo que pueden ser 3 blancas y 2 negras.
Obs$_2$: ¿Ustedes están de acuerdo? [Pregunta al resto del equipo]
Aline: ¡Tienen que estar de acuerdo! Lo pudiera comprobar con mi vida entera… ¿quieren apostar?... ¿quieren apostar? [Desafía a sus compañeros]…
Marian: "Analicen si con estos datos es posible conocer cuántas canicas de cada color (…) [Relee la consigna]
Aline: Son 3 blancas y 2 negras… [Reafirma]
Marian: ¿Qué se puede saber?, ¿es posible saber cuántas hay? [Continúa leyendo y parafrasea la consigna]
Aline: "Analicen si con… [Lee también]
Marian: [Interrumpe] Podemos saber qué tenemos más, una cantidad muy grande de blancas o de negras.
Axel: De hecho, en la botella A habían 2 negras y 2 blancas porque si vemos (…)
Aline: Yo creo que sí… yo creo que sí depende de la cantidad que se repitan los colores. ***Yo pienso que entre más se repitan, menos colores hay; y entre menos se repitan, más hay.***

[79] Observemos que en el registro, en la sesión anterior ha escrito "palitos", pero al momento de entregar su producción, los ha borrado reemplazándolos por cantidades numéricas, como aparece en la imagen. Recuérdese que la botella B tiene la composición 3n2b.

Marian: ¿Por qué? ¿Entre más se repitan menos va a haber?
Aline: Es lo que yo creo. En la dos… [Refiriéndose a la botella B, segunda tabla]
Marian: Entre más se repita, más va haber. Porque, obviamente, si tienes 1 canica blanca y 4 negras, no se va a repetir más veces la blanca porque hay más veces negras.
Cali: Simplemente sí, porque apenas te asomas a la botella y observas… [Supone, porque es imposible ver la composición]
Aline: No sé, no sé cómo lo podremos sacar [Solucionar]… Le voy a poner que sí…
Axel: Justifica tu respuesta [En tono de consigna]

En el episodio anterior se observa además el modo en que se "afina" una conjetura en la interacción entre los miembros de un equipo frente a un desafío. Luego de la intervención de la profesora, Aline formula una hipótesis sobre la composición de la botella B, justifica su elección. El registro es un recurso que utiliza para formular su conjetura, la consigna también es punto de apoyo para los alumnos. Marian los utiliza para formular un contra-argumento, refutándolo.

Asimismo, Marian construye un contraejemplo en donde hace funcionar la máquina de azar suponiendo conocida la composición de una botella 1b4n y utilizando el sentido común, evidencia que teniendo más negras que blancas (cantidades fijas), saldrán más veces canicas negras que blancas (cantidades variables pero con una característica en común, razonamiento anticipatorio). Dirección de la relación: "Máquina de azar" → "Estadísticas")

Puesta en común. Las primeras conjeturas.

La profesora propone que escuchen lo que cada equipo escribió. Da la palabra a cada equipo. Se inicia con la siguiente intervención:

P: Bien. Vamos a escuchar lo que cada equipo escribió. Okey. Ahorita siguen comentando o de lo que escuchen de sus compañeros podemos llegar a más conclusiones. Equipo 1, levante la mano, ¿Dónde está? Acá. ¿Ya tiene una respuesta? [Nota: el uso del singular, dirigiéndose al "equipo"]. ***¿Ustedes creen que sí podemos saber?*** *Escuchamos lo que el equipo 1 propone. ¿Quién nos va a decir del equipo 1? , ¿O les digo yo quien?*

La profesora incorpora, en la pregunta si se puede saber cuál es la composición de las botellas. Gestiona la puesta en común, a través de un ciclo que se inicia con dar la palabra a cada equipo y escuchar las formulaciones de los alumnos, las cuales interpreta, las repite para todos, enfatizándolos, socializándolos, promoviendo dotarlos de un status de conocimiento compartido.

A continuación presentaré éstas formulaciones hechas por los alumnos, en este momento de la clase. Las consideraciones de cinco equipos refieren a que, de acuerdo a los resultados obtenidos en las 20 tiradas, no es posible conocer la composición exacta de la botella, pero sí saber de qué color es la mayoría de ellos. Luego analizaré la conjetura de otro equipo donde Andrés lanza un procedimiento más sofisticado: el uso de la razón entre 20 (tiradas) y 5 (canicas) y la del último equipo donde Gerardo formula una conjetura bajo una creencia errónea del funcionamiento del azar y que la profesora aprovecha para instalar una idea que luego institucionalizará[80].

> Equipo 4 - *Carla: No, porque se puede saber un aproximado, mas **no el exacto** número de canicas. Por ejemplo en la primera tirada fue 16 negras y 4 blancas, por lo tanto se sabe que hay más negras*[81]*.*
>
> Equipo 5 - *María: **No** se puede saber. Si se puede saber de qué color son la **mayoría** pero no cuantas de cada color tiene la botella.*
>
> Equipo 2 - *Aline: Si, porque depende las veces que más se repita un color. O sea, **no** la cantidad exacta, pero ya sabemos que hay **más de un color** de veces de la… depende las veces que se repita*[82]*.*
>
> Equipo 1. *Edu: **No** se puede saber, solo se puede saber de qué color de canica hay **más**. No exactamente*.
>
> Equipo 7 – *Víctor: **No**, pero podemos saber de qué color fueron la **mayoría** de las canicas.*

En los resultados anteriores, frente a la pregunta si "es posible" conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella. Aunque sus observaciones aun no implican el uso de alguna técnica más sofisticada, la dirección de su conjetura es: Estadísticas (resultados de las tiradas) → Probabilidad (predicen que la composición "sí aproximada, no exacta" se puede conocer: la botella (composición oculta) tendrá más o menos canicas de determinado color.)

Por otro lado, en la misma puesta en común, emerge una técnica más sofisticada, e imprevista:

> *Episodio. Funcionamiento de la razón de 20 (tiradas) entre 5 (canicas), esto es, dividiendo entre 4. Equipo 3.*

---

[80] Que no se puede saber exactamente el color de la canica que se obtendrá (antes de tirar), pero sí cuales son los dos colores posibles. La relación entre las canicas de la botella y las tiradas realizadas.
[81] A partir de esta sesión se incorpora Obs4 a este equipo, quien realiza el seguimiento hasta el final de la experimentación.
[82] Recordemos en este equipo, participa Obs2 durante toda la experimentación, y es quien además videograba las sesiones.

Andrés: Si, porque ***cada cuatro veces que sale un color equivale a una canica.***
P: Cada cuatro veces que sale un color, equivale a una canica… [Pausa] A ver, explíqueme eso.
Andrés: Si salen, por ejemplo en el primero, tenemos 15 negras.
P: Okey, voy al pizarrón [Se dirige rápidamente, y se dispone a oficiar de escriba del alumno]… Tenemos 15 negras, ajá. [Escribe]

15 negras

Andrés: Y eso lo dividimos entre 4
P: ¿Y cuántas blancas?
Andrés: 5… y ***cada una se divide entre 4***
P: Y cada una se divide entre 4 [Escribe en el pizarrón]… ***¿Por qué entre 4?***

15 negras
5 blancas

Andrés: ***Porque son 5 canicas en total [Muestra su hoja] y tiramos 20 veces.***
P: Okey, como son 5 canicas y tiramos 20, él dice: las canicas que me salga lo voy a dividir entre 4, ¿cierto? Y aquí cuánto les dio según usted, 15 entre 4.
Andrés: 3
P: ¿15 entre 4?... [Silencio]. ¿15-entre-4? [Enfatiza]… [Murmullos]… ¿les da cómo decimal, no?...
Andrés: Da un número… (…) [Realiza un movimiento con la mano]
P: Le da un decimal, pero él dice: Yo le cerré y digo que son: 3 negras, ¿blancas cuántas son?
Andrés: Una
P: Blancas una [Escribe en el pizarrón]

15 negras	*3 negras*
5 blancas	*1 blanca*

Andrés: Y como son más canicas negras que blancas entonces se agrega una canica, para completar las 5 canicas.
P: ¿Se agrega una canica? Ah… su compañero me dice yo necesito hacer más veces el desafío para saber con exactitud, ellos ya están teniendo una respuesta. [Continua con el otro equipo]…
Luego de la exposición de los equipos que faltan, la profesora vuelve un momento sobre esta conjetura, y en diálogo con Andrés, establecen que la composición de la botella A es de 4n 1b. Cierra la puesta en común proponiendo un nuevo desafío: ***"vamos a acercarnos lo más posible a lo que está adentro de la botella"****.*

El razonamiento de Andrés que emerge en la puesta en común, es un resultado del momento adidáctico de trabajo en equipo. Las notas que realiza Obs_3[83] que acompañaba explican, cómo veremos a continuación, las características del

[83] Recordemos que los observadores enviaban por su cuenta, luego de cada sesión, unas notas escritas (breves) acerca de lo que sucedió en sus equipos en los distintos momentos.

razonamiento, y también nos permite pensar, nuevamente, en cierto recorrido o entramado de los conocimientos que se construyen y que emergen del trabajo de devolución y como se socializan en la puesta en común[84].

> *Obs$_3$: "Andrés expresa entonces una idea que me tardo en comprender, incluso después de que me la vuelve a explicar a mí: plantea la división del resultado de las 20 tiradas entre 4, como forma de saber lo que hay (¿o podría haber?), en la botella. Subyace, me parece que, dado que hay 5 canicas en la botella y que 20 tiradas es 4 veces 5, hay que dividir lo que sale en 20 entre 4 para obtener lo que corresponde no solo a 5 tiradas, sino a lo que hay en la botella.*
>
> *Hay una idea brillante en este razonamiento: identificar la razón* ***4*** *entre las 5 canicas y las 20 tiradas, y suponer que se conservaría esa misma razón para cada uno se los dos subconjuntos, el de canicas blancas y el de canicas negras. Si esto fuera cierto, en las 20 tiradas tendrían que salir, en la botella A, por ejemplo, 4 blancas y 16 negras[85]. De hecho, eso sí ocurrió algunas veces. Este razonamiento sería cierto en un gran número de tiradas (de rondas de 20), pero no en una sola ronda. Esto último, no parecen saberlo aun.*
>
> *A partir de uno de los resultados de 20 tiradas de la botella A, el de 15-5, Andrés divide entre 4: 15negras:4 = 3 negras y sobran 3; y luego 5blancas:4= 1 blanca y sobra 1. Y luego como solo lleva 4 canicas (3+1), añade una a las negras, para tener 4 negras. Más adelante explica a la profesora que esto es porque en las divisiones que hizo, sobraron más negras. Itza, quien parece haber entendido el procedimiento antes que yo, lo traduce de la siguiente manera: "****Cada 4 veces que sale un color, equivale a una canica****"*

A la razón 4 podríamos interpretarla como la razón interna (entre totales), que tendrá la funcionalidad de ser un operador escalar. Este oficiará, a través de la operación de división de resultados de tiradas entre 4, de trasformador de estadísticas a probabilidades, de registros de las series de 20 tiradas a lo posible, en contexto aleatorio.

	"Totales"	negras	blancas
Botella A (máquina de azar)	5 canicas	3, … ≈ 4n	1, … ≈ 1b
	4	:4	:4
Registros obtenidos de la experimentación	20 tiradas	15 negras	5 blancas
	20:5 = 4 razón interna (operador escalar 4)	Resultados de las tiradas Transformación de un subconjunto a otro, mediante operación "dividir entre 4".	

Figura 38. Esquema. Razonamiendo de Andrés.

[84] En sesiones siguientes veremos cómo emerge y se instala éste tipo de razonamiento en otros equipos, bajo la forma de una técnica que les permitirá aproximarse lo más posible a la composición (oculta) de las botellas A, B y C.

[85] Dado que la botella A tiene una composición: 1b4n entonces, en 20 tiradas, se "espera" que ocurran aproximadamente 4x1b=4b y 4x4n=16n.

Por último, en la en común emerge el argumento de Gerardo, que la profesora aprovecha para instalar una de las ideas que es un propósito para institucionalizar.

Episodio. Equipo 6. Anticipar resultados de las tiradas, el pasado y el futuro.
Gerardo: No, porque puede pasar que la canica que haya caído anteriormente ***sea la misma*** *que cayo ésta vez.*
P: A ver, explíqueme ¿cómo que la canica que cayó anteriormente sea la misma que caiga esta vez?
Gerardo: Ah, y qué tal si se vuelve a repetir la canica.
P: ¿Mande?
Gerardo: Yo tiro. [Explica. Gesto, movimiento con manos]. Sale la canica, y vuelvo a tirar y vuelve a salir la misma canica.
P: Ah, okey. Él me dice: cuando yo volteo la botella, no puedo saber: el color de la canica, ¿verdad? ¿Ustedes no podían saber el color que iba a salir? ¿No, verdad?
Aos: No
P: Eso no lo podía saber. ¿Por qué no lo puedo saber?
Aline: Porque las botellas están pintadas de negro y (…)
P: Porque está pintada de negro… y si estuviera transparente, y yo la volteo [Gesto, movimiento con la mano], ¿yo podré saber de qué color va a caer?
Aos: No… Si…
P: ¿Por qué no? ¿Por qué si?
Aline: No, porque al momento de girarla no puedes ver… al momento en que ¡caigan las canicas! cuando están girando, no puedes ver qué color exactamente va a caer.
Daniel: Si, cuando va a caer puedo saber.
P: Ah sí, cuando ya está en la boquilla ya lo puedo saber porque veo un color, verdad. Solamente hasta ahí, pero antes no lo puedo saber. [Continua con otro equipo]

Entonces en el episodio anterior, frente a una conjetura del equipo, que formula Gerardo, que contiene una intuición errónea sobre el funcionamiento del azar (que caiga siempre la misma canica), la profesora promueve una discusión, donde busca instalar la noción de azar (propiedad de la situación): no se puede saber de antemano qué canica saldrá (aun siendo la botella transparente), lo que sí se puede saber (al menos hasta ahora) es cuales son los colores posibles.

3.1.2 Comentarios

El trabajo en conjunto de la profesora con los alumnos alrededor del desafío, configuran un entramado complejo en el aula, y en diversos lenguajes cuyo propósito es el de encontrar nuevas respuestas la gran pregunta si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella.

Los lenguajes que se ponen a actuar aportan elementos a la situación, que irán ampliando el repertorio de experiencias, recursos de los alumnos (y de la profesora) frente a una máquina de azar cuya composición es desconocida por los alumnos. Las formas de comunicación, a través de la lectura de las consignas, la escritura de respuestas, la elaboración de procedimientos, y la variedad de maneras de registrar los resultados de las tiradas (palitos en fila, en columna, palabras, letras), y la manipulación física de las botellas, son elementos que se ponen en funcionamiento en la situación.

Hasta el momento, la mayoría de los alumnos ha respondido que, a partir de los resultados de las tiradas, no se puede saber exactamente la composición de las botellas, pero sí se puede saber si hay mayoría de determinado color. Asimismo, vemos a partir de sus argumentos que hay una relación entre el color de las canicas que hay dentro de la botella y las tiradas que se registran al repetir 20 veces el experimento (ej. más canicas negras en las tiradas indica más canicas negras en la botella).

Por otro lado, el procedimiento de Andrés, enfatizado por la profesora (que oficio de escriba), ha puesto en jaque (al menos por cierto tiempo) la conjetura que "no se puede saber exactamente". La producción imprevista entonces direcciona la clase en el sentido que nos propusimos, que es el de estudiar en el contexto de las probabilidades, cómo intervienen las razones en la escritura fraccionaria de la probabilidad que es uno de los sentidos de ésta y en lo que se basan muchas de sus leyes fundamentales. La profesora entonces, lee esta direccionalidad y la destaca, reconoce que detrás de este argumento hay elementos que le son útil para el proyecto de enseñanza, y los desafía a dar un paso más: afirmando que "vamos a seguir acercándonos lo más que se pueda a lo que hay dentro de la botella", reinstalando así el motor de la situación.

3.2 Situación didáctica: Botellas con canicas. Rondas de 5 tiradas.

Fecha: 24-11-2017, duración 50 min /100 minutos.

La situación se desarrolló en la segunda parte de la tercera sesión[86]. La profesora propone una nueva actividad para saber cuántas canicas hay, y sí esto es posible, pero realizando rondas de 5 tiradas.

Se entregan las botellas A, B y C (ahora reforzadas para que sean absolutamente opacas y que sea imposible abrirlas, y donde sólo se ve cuando una canica se asoma por su tapa). Los alumnos en equipos vuelven a explorar, producen nuevos registros (lo que demanda un largo tiempo de 30 minutos). Luego, la profesora apura a los que van más lento, y cierra la sesión con una puesta en común e institucionalización.

En la clase se destaca el conteo de combinaciones como nueva forma de predecir el contenido de la botella, y otra donde se relacionan tiradas con contenido: “10 tiros (de un total de 50) es una canica de la botella”.

3.2.1 Análisis previo de la SD. 2.2.

Consigna. Rondas de 5 tiradas

5. A partir del trabajo anterior, ¿por cuál composición de cada botella apostarías? Justifica.
6. Realicen 10 rondas de 5 tiradas cada una para ver si siguen sosteniendo sus ideas de lo que hay en cada botella o si las cambian. Hagan lo mismo con las otras dos botellas intercambiando con otros equipos.
7. Registren el número de canicas de cada color que sale en cada ronda. Luego, analicen si con éstos datos es posible conocer la composición de la botella.

Rondas con la botella[87]	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Cantidad de fichas negras										
Cantidad de fichas blancas										

[86] En esta sesión se desarrollaron además dos situaciones, que se corresponden con el inciso 4) y el inicio 1 de la fase 2: Botellas con canicas, ¿cuántas de cada color?

[87] Aclaración: Ya no se trata de una tirada sino una ronda (que se compone de 5 tiradas), por lo tanto las sumas de blancas y negras para cada ronda será siempre igual a 5. Por otra parte, se elaborará una nueva tabla para las demás botellas.

8. Vamos a seguir experimentando, pero ahora con 20 rondas de 5 tiradas. ¿Quieren cambiar la composición que estiman que tiene cada botella? Dar argumentos de por qué sí o por qué no.

Además, registren en una tabla similar a la que ya usaron.

9. Si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas, ¿qué suponen que pasaría con los datos obtenidos y la composición de la botella?

Propósito didáctico

A partir de los registros y conclusiones elaboradas en la primera parte, y motorizados por la necesidad de poner a prueba sus conjeturas sobre la composición de la botella en relación con los resultados obtenidos en primeras rondas, lograr que se construyan o reutilicen registros que sean más económicos (en cuanto a procedimientos). Asimismo, construir relaciones entre cantidades de fichas blancas o negras respecto a cierta cantidad de tiradas, que permitan diferenciar cantidades absolutas de las relativas en un contexto aleatorio: una es la cantidad de veces que se observan canicas de cierto color y otra es la cantidad de veces que aparece cierto color en determinado número de repeticiones del experimento. Es esta última una información más completa para decidir si es posible conocer la composición de la bolsa. Por ejemplo, no es lo mismo decir que se observó 5 veces una canica blanca, que decir se observó 5 veces una canica blanca en un total de 20 repeticiones del experimento[88].

Además, realizar rondas de 5 tiradas podría favorecer un cambio en la forma de contar, donde lo que sale en cada ronda es a la vez una composición posible de la botella. Tiene como ventaja que los alumnos podrían contar la composición de 5 que sale más veces para inferir el contenido y así ahorrarse de otras estrategias (como hacer una proyección proporcional). Pero tiene como desventaja que podrá confundir un resultado de una ronda (variable) con la composición real de la botella (fija), sin embargo esto podría dar oportunidad de discutir esas diferencias.

[88] En efecto, la segunda afirmación hace alusión a la idea de razón, bajo la noción de pares de números naturales (5,20) que guardan la relación 5 a 20, que podría ser más adelante precursora o equivalente a la relación 1 a 4 (una parte de blancas por 4 en total), o incluso precursora de la idea de 25% (bajo otras condiciones).

Propósito de investigación: Analizar si los registros que se proponen, a través de la organización de resultados en una tabla resumen, favorece la construcción de nuevas conjeturas en otros marcos de representación u registros, y ver si se ponen a prueba se modifican o transforman las elaboradas en la sesión anterior. También interesa analizar si la situación funciona a-didácticamente, y si favorece o no el contraste de lo absoluto y lo relativo como herramienta para decidir la validez de determinados enunciados o conjeturas.

Por otra parte, interesa poner en diálogo relaciones entre las botellas con canicas (máquina de azar) y las estadísticas observadas, es decir con los datos obtenidos en el proceso de repetición del experimento.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente

La consigna de la clase plantea una continuidad respecto a la fase anterior, con lo cual es importante retomar las ideas, por ejemplo a través de un diálogo de preguntas y respuestas de forma colectiva. Repensar el experimento, y el desafío (si es posible conocer la composición de la botella), así como las conjeturas que se elaboraron en la fase anterior, podría generar la necesidad de realizar nuevas tiradas. En este sentido se propone el **inciso 5**, bajo la pregunta sobre la composición que apostaría que tiene de cada botella, a partir del trabajo realizado en la fase anterior. Las conjeturas que surjan en este momento, serán puestas a funcionar en el trabajo que se propondrá en esta fase.

El **inciso 6** propone un nuevo trabajo para los alumnos, incorporando la palabra "ronda" entendida como una sucesión (o agrupamiento) de tiradas, (noción que en la primera fase podría haber pasado inadvertida o implícita, y podría haberse pensado como 20 tiradas independientes). En este sentido, aquí se propone, como estrategia o método, realizar 10 rondas de 5 tiradas[89]. Este cambio podría llevar a los alumnos a establecer nuevas conjeturas o modificaciones de las primeras, y sostener o descartar posibles composiciones de la botella. Por ejemplo si se conjeturó que en cierta botella hay *más*

[89] En un estudio realizado por J. Briand (2011) donde compara tres experiencias matemáticas, el investigador recrea la situación de las botellas con canicas con alumnos de bachillerato (16-17 años), y realiza un análisis previo que incluye el cálculo del riesgo en que se incurre al decidir la composición de una botella en función del número de tiradas efectuadas. El resultado muestra que la elección de una botella con 5 canicas ayuda bastante bien a que las experimentaciones puedan realizarse en clase. Demuestra que las probabilidades de formular una conjetura falsa (riesgo) disminuyen significativamente luego de realizar 100 tiradas. En anexos hay un apartado acerca de estos cálculos, donde se muestra por ejemplo que una botella con (4b, 1n) tiene menor riesgo, es decir menos probabilidad de equivocarse que con una botella de (3b, 2n).

canicas negras que blancas, aquí podrían enriquecer el argumento afirmando (y especificando o refutando) que no puede estar compuesta por *1n4b ni puede ser la bolsa con 0n5b*. La repetición del experimento muchas veces y con cambio de series de tiradas (ahora son rondas de cinco tiradas) podría promover el cambio de registro de los resultados que se obtienen, por alguno que sea más económico, atendiendo al orden en que aparecen (en el caso que no hubiera sucedido en la fase 1). Por ejemplo, es posible que los registros de 5 tiradas se transformen en otros equivalentes donde se descarte el orden, convirtiendo el resultado de la ronda: nnbnb por 3n2b. La comparación entre 3 botellas, podría favorecer que los alumnos establezcan conjeturas distintas sobre cada botella, y promover la elaboración de un espacio muestral de posibles composiciones[90], que se podrían evidenciar mejor al completar la tabla que se propone.

El registro tabular de resultados correspondientes a rondas de 5 tiradas para cada botella, en el **inciso 7,** podría promover la necesidad de un cambio de registro, no solo por la ventaja del uso tabular sino también en la escritura. El propósito de la tabla es el de favorecer nuevas formas de escritura donde de evidencien las cantidades absolutas para ir hacia la construcción de las cantidades relativas, como relación entre pares de números naturales.

Asimismo, el nuevo registro permitirá comparar rondas de cinco tiradas en cada botella, cotejar esos resultados con sus conjeturas sobre la composición, así como la elaboración de nuevas conjeturas donde además de atender a la obtención de más y menos fichas de cada color, se incorporen cantidades, y eventualmente se relacionen con el número de tiradas, lo cual podría promover la construcción de una primera noción de razón como relación entre cantidades de igual magnitud.

Por otra parte, la comparación de resultados de la tabla podría evidenciar que cierta composición ocurre con más frecuencia que otras, aunque con 10 rondas es posible que se presenten muchas fluctuaciones en los resultados obtenidos. Podría conjeturarse, por ejemplo, que la bolsa A tiene una composición de 3n2b porque en las 10 rondas, esa

[90] Es un espacio muestral relacionado con el experimento aleatorio de construir botellas con canicas blancas y negras en su interior (extraer 5 canicas de un saco y colocar en las botellas). Es un espacio muestral distinto al que se puede pensar a partir de los resultados del experimento de observar el color de la canica un cierto número de veces en una botella. Por ejemplo, si se tiene una botella, y se realizan extracciones en rondas de 3, el espacio muestral estará compuesto por los resultados posibles: 0b3n, 1b2n, 2b1n, 3b0n. El espacio muestral cambia cuando las rondas cambian (porque cambia el experimento aleatorio).

composición ha ocurrido un mayor número de veces. La conjetura dejaría en evidencia la relación entre las estadísticas observadas y la composición de la máquina de azar (botellas).

En este momento, el docente podrá proponer una puesta en común para que los alumnos comenten los resultados obtenidos respecto a la conjetura inicial, y en particular, responder si cambiarían la composición que están pensando para cada botella. Es decir que esta pregunta se responda en el contexto del grupo total de alumnos (instancia colectiva), para luego retomar otro momento de trabajo en equipos.

En el **inciso 8**, se propone realizar nuevas rondas, ahora son 20 de 5 tiradas, pero con la pregunta si cambiarían la composición que están pensando que tiene cada botella y con el uso de tablas como las realizadas en el ítem anterior.

Además, la pregunta apunta a reconsiderar o rexaminar la conjetura, en función de los resultados obtenidos en rondas de 10 tiradas. Es posible que se formulen razonamientos a futuro, sobre qué tan posible es que ocurra cierto evento teniendo como información las estadísticas de las tiradas anteriores: por ejemplo, si ha salido con mucha frecuencia cierta cantidad de canicas blancas y negras, y además suponen que esa es la composición de la botella, podrían sostener que al aumentar la cantidad de rondas de tiradas, ese resultado seguirá presentándose con mayor con mayor frecuencia. Asimismo podría ocurrir que descarten ciertas composiciones de botellas posibles por la frecuencia de aparición en las estadísticas observadas. También podría ocurrir que el resultado más frecuente en 10 rondas de 5 tiradas, no lo sea cuando se repita el experimento 20 veces, debido a las fluctuaciones de las pocas tiradas.

3.2.2 Análisis de la experimentación de la SD. 2.2.

La profesora reparte copias de la consigna a cada alumno.

> *P: Bien. En esta segunda actividad, dice que se llama rondas de cinco: tiradas. [Lee el inciso 5] "A partir del trabajo anterior, ¿por cuál composición de la botella apostarías? Justifica." Me pueden escribir: yo creo que en la botella A hay tantas negras y tantas blancas, en la botella B hay tantas negras o tantas blancas, o bien si ustedes me dicen: "no maestra, yo no puedo decirle cuantas blancas y cuantas negras", nada más van a dejar el espacio y con lo que realicemos en toda de toda esta actividad, si ya sale una idea de cuántos creen ustedes que hay blancas y negras, ahora sí, la escriben. ¿Dudas? [Silencio]. No. Leemos el punto 6 para que veamos qué es lo que vamos a hacer.*

Un alumno lee el inciso 6) y el 7). La profesora aclara que son parte de lo mismo. Luego, explica con un ejemplo qué es una ronda.

P: Voy a hacer el experimento, por rondas de: ¿cuántas?
A: Cinco.
P: Cinco, es decir 5 veces voy a hacer y de esas 5 veces voy a anotar cuántas blancas y cuántas negras salieron. Les vamos a pasar las botellas para que los puedan trabajar. Puede que hayan cambiado la composición, así que hay que observar lo que les va saliendo.

Reparte las botellas A, B y C por equipos, y luego simula una ronda de 5 tiradas. Sugiere que realicen las tiradas por turnos y registren los resultados en la tabla. Al repartir, enfatiza que es probable que hayan cambiado lo que hay adentro. Pide que se organicen.

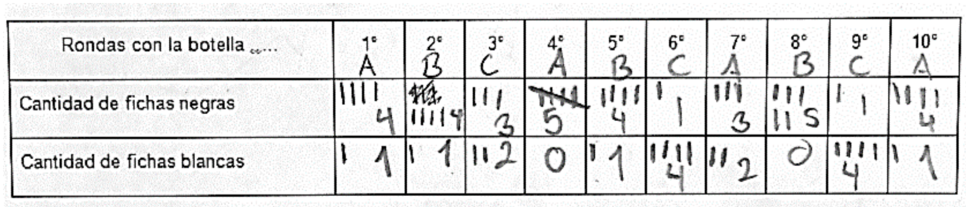
El problema de reinstalar la duda. Al realizar esta estrategia, se desliza también un pequeño problema: si pueden haber cambiado, entonces puede haber cambiado también el total de canicas. Inmediatamente de repartidas las botellas, los alumnos se disponen a explorarlas y realizar tiradas. En algunos equipos preguntan cuántas canicas tienen las botellas, se les repite que son 5 como la sesión anterior, blancas y negras. Esto es un efecto del problema que he descrito en la sesión anterior donde algunas botellas no eran absolutamente opacas.

Conteo y registro de rondas de 5 tiradas (incisos 6 y 7)

Los problemas asociados a la nueva consigna. El material escrito previamente en forma de fichas y consignas, constituye un punto de apoyo fundamental para la profesora, pero también para los alumnos. En la consigna hemos colocado solo una tabla con 10 columnas, y no advertimos que es importante aclarar que lo que se propone es completar una tabla para registrar tiradas, una por botella (es decir que hay que construir tablas para los registros de las botellas B y C). Esto ha causado confusión en algunos alumnos, como veremos en las notas que realizo Obs_4[91].

En algunos casos interpretaron cada columna de la tabla como rondas para cada botella, realizando registros como el siguiente:

[91] Ha sido advertido por la profesora y los investigadores en ese momento, quien rápidamente ha realizado una aclaración para todos acerca de qué dice la tabla y agregando esta condición: una tabla por botella.



Rondas con la botella …..	1° A	2° B	3° C	4° A	5° B	6° C	7° A	8° B	9° C	10° A
Cantidad de fichas negras	4	4	3	5	4	1	3	5	1	4
Cantidad de fichas blancas	1	1	2	0	1	4	2	0	4	1

Figura 39. Registro realizado por Claudia en el equipo 4.

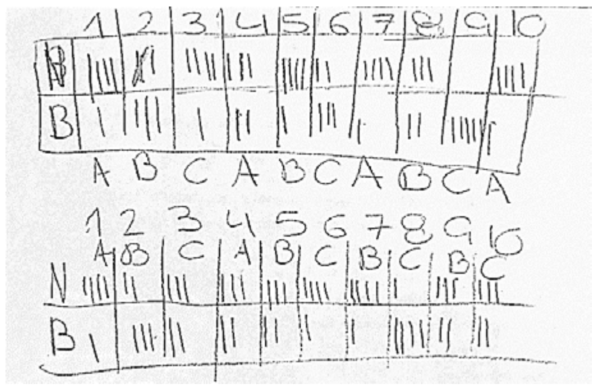


Figura 40. Registro realizado por Cristian en el equipo 4.

En equipo 4, donde se encontraba Obs$_4$, lo advierte en sus notas de la siguiente manera:

> *Obs$_4$: Ángel, Cristian, Oscar y Claudia empezaron a hacer las tiradas, por turnos se pasaban la botella A y registraban (con rayitas) el color que había aparecido. Las primeras rondas las fueron haciendo en la forma A, B, C; A, B, C… esto causó problemas porque la tabla no tenía suficientes filas (perdieron un poco de tiempo pensando si seguían así o si hacían otras tablas). Creo que 3 alumnos decidieron hacer al reverso de la hoja otras tres tablas (una por botella), sólo Cristian y Adrián continuaron haciendo el registro en A, B, C (me pareció que Adrián ya no hizo las siguientes tablas, pareció que ya no le interesó seguir registrando).*
>
> *El tipo de registro importa. El modo en que registraba Cristian (A, B, C) dificultaba la escritura (se confundía mucho) y tampoco ayudaba a que se fijara en alguna regularidad… Ángel sí hizo tablas separadas y eso permitió que se fijara constantemente en los resultados de la botella C."*

Tanto los alumnos como la profesora debían adaptarse a una tabla que constituye desde el principio una parte del registro, que responde a la pregunta: ¿Cómo ordenar los resultados de 10 rondas de 5 tiradas?

Los registros. En la tabla subyace un orden en los datos que se produce un momento posterior al de la recolección. La tabla en este sentido, funcionaba como una variable didáctica porque provoca cambios en las tareas (variedad de registros) que realizaban los alumnos: ya no se trataba de realizar tiradas hasta llegar a las 20, sino que había que observar el resultado, escribir una marca (numero, letra, palitos, combinaciones entre ellos), y una vez llegado a la quinta de tirada (1 ronda de 5), volver a empezar. Cabe destacar que la tabla solicitaba completarlas con “cantidades” de canicas blancas y negras. La tabla entonces, en tanto variable didáctica promueve en algunos casos, tal como habíamos previsto, un cambio de escritura.

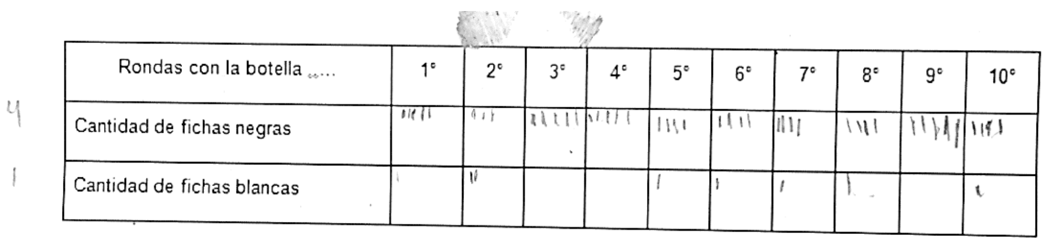
Algunos equipos completaron los registros directamente en el espacio de la tabla, otros, necesitaron hacer marcas en otro lugar.

- Realizan listados de letras N y B, agrupados de 5 en 5 [Ver registro de Yolanda e Isaías]

- Completan la tabla con palitos [Ver registro Marian]

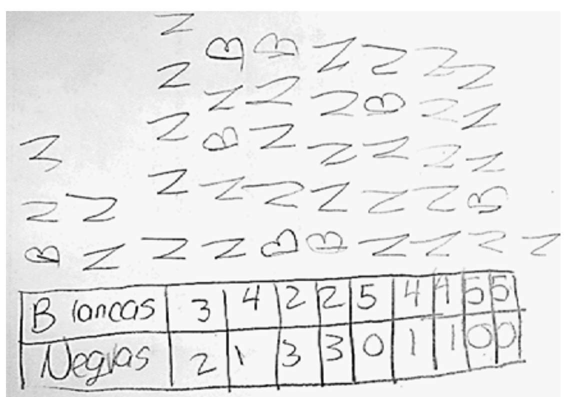
- Escriben palitos en otro lugar de la hoja, los cuentan y completan la tabla con números [Ver registro de Ana]

- Combinan palitos y números [Ver registros de Claudia, Yolanda e Isaías]



Rondas con la botella	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Cantidad de fichas negras										
Cantidad de fichas blancas										

Figura 41. Registro de Marian. Conteo mental solo de marcas (palitos).



Bloncas	3	4	2	2	5	4	4	5	5
Negras	2	1	3	3	0	1	1	0	0

Figura 42. Producción de Yolanda.
Combinación de letras y números.

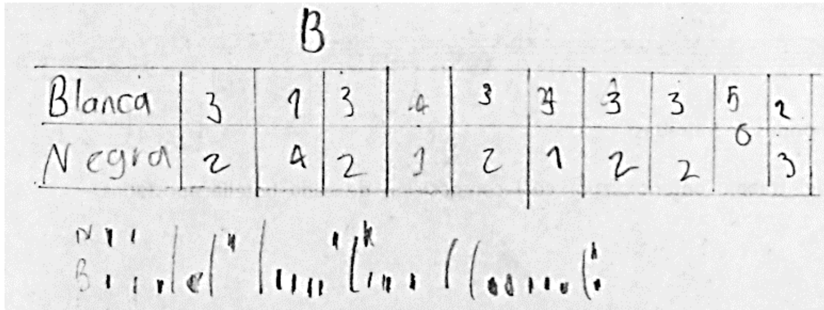


Figura 43. Producción de Isaías.
Combinación números y marcas (palitos).

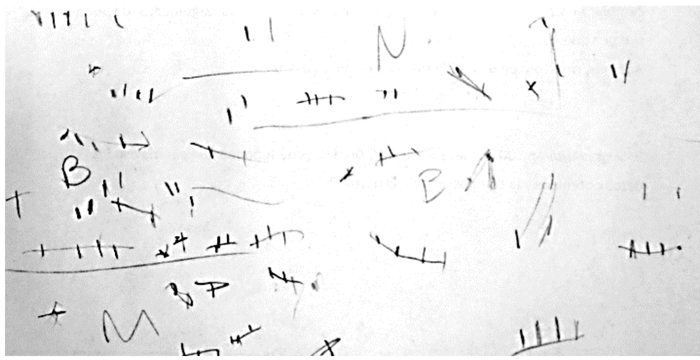


Figura 44. Marcas de conteo en la producción de Ana.
Previo a la escritura del número en la tabla.

Por lo tanto, en este proceso de manipulación de registros, se pone en funcionamiento informaciones y modos de hacer que van creando marco para la construcción del sentido de la probabilidad. Son recursos a los que recurren frente a una situación en contexto de aleatoriedad e incertidumbre. Emergen así recursos que son más o menos funcionales, y les permitirán (como veremos más adelante), luego de un largo trabajo de exploraciones, la construcción de relaciones entre cantidades (blancas, negras, combinaciones, blancas, negras) que irán delineando el uso implícito de las razones como un elemento necesario para acercarse lo más posible a la composición de la botellas. Los alumnos están razonando frente a una situación (antagónica), en contexto aleatorio, enriqueciéndose el espacio de interacciones del aula con elementos de la cultura aleatoria.

Procedimiento: contar combinaciones. El registro de las 10 rondas de 5 tiradas cada una, y hacerlo con cada una de las botellas, ha demandado gran cantidad de tiempo de la sesión (aproximadamente 30 minutos). Muchos equipos dilataron el tiempo aún más, otros, como en el equipo 3, han podido tomar nuevas decisiones frente a los datos recolectados, nuevas maneras de contar.

> Equipo 3. [Obs$_3$ video graba con su teléfono celular a una Itza, y solicita que explique otra vez, su procedimiento].
> *Itza: La cantidad que hay mayor, es la cantidad que vamos a poner [Señala en su hoja]. Porque, por ejemplo, la cantidad que se repitió… fui haciendo las combinaciones: 3 negras y 2 blancas se repitió en la 1, en la 3, en la 5 y en la 6 [Indica las rondas/columnas correspondientes]. La 1 negra y 4 blancas nada más se repitió en la 2, y así le fui haciendo con todas y el que se repitiera más veces, las combinaciones que se repitiera más veces es la cantidad que hay en cada botella.*

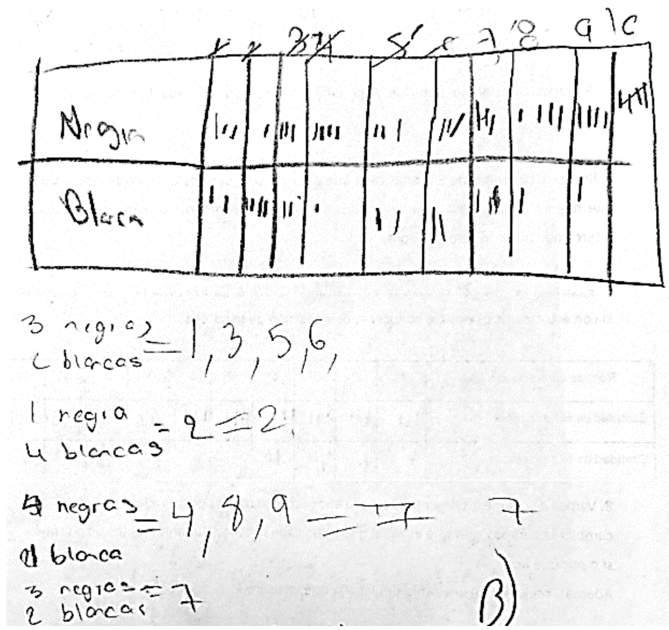


Figura 45. Producción de Itza.

En la producción anterior comprobamos entonces que comparar rondas de 5 tiradas en cada botella, provoca que emerja el conteo de las veces que salen las posibles composiciones.

El juego didáctico del valor “5” que indica cantidad de tiradas de una ronda, pero también cantidad de canicas de las botellas, diferencia que permanece implícita, parece favorecer el encuentro con nuevas conjeturas y regularidades de los datos obtenidos y registrados, lo que constituye parte de su proceso de modelización. (Relación entre las estadísticas y las probabilidades).

Asimismo, en la escritura que evidencia una forma de contar, debemos destacar entonces el doble juego que permite la ronda de 5 tiradas: por un lado pensar por un momento, que las combinaciones que se obtienen de las tiradas son de la misma naturaleza que las combinaciones posibles de las canicas de las botellas.

Con las nuevas tiradas, en este equipo, construyen una nueva manera de contar, como puede observarse en la imagen siguiente, en la cual utilizan palitos para contar combinaciones (ver margen derecho de la tabla).

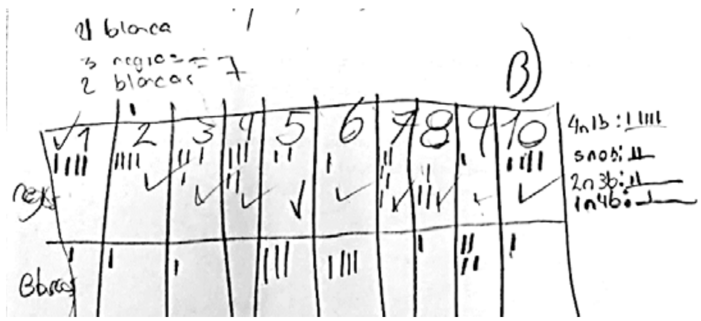
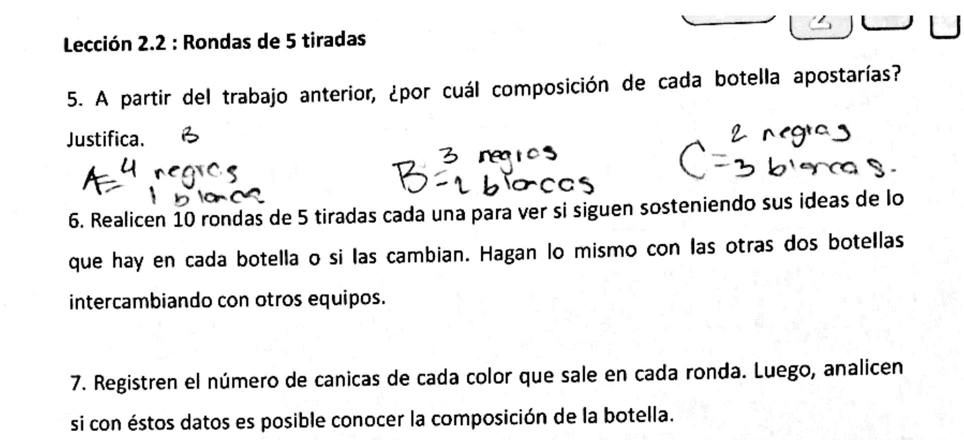


Figura 46. Producción de Itza.

Este nuevo resultado los lleva a conjeturar que la botella B, como había sucedido con la botella A, también contiene 4 canicas negras y 1 blanca. Lo escriben. De este modo, este medio les devuelve una información: la evidencia de aleatoriedad[92] y una contradicción entre la composición "apostada" y la "nueva" luego de hacer 10 rondas de 5 tiradas.



Lección 2.2 : Rondas de 5 tiradas

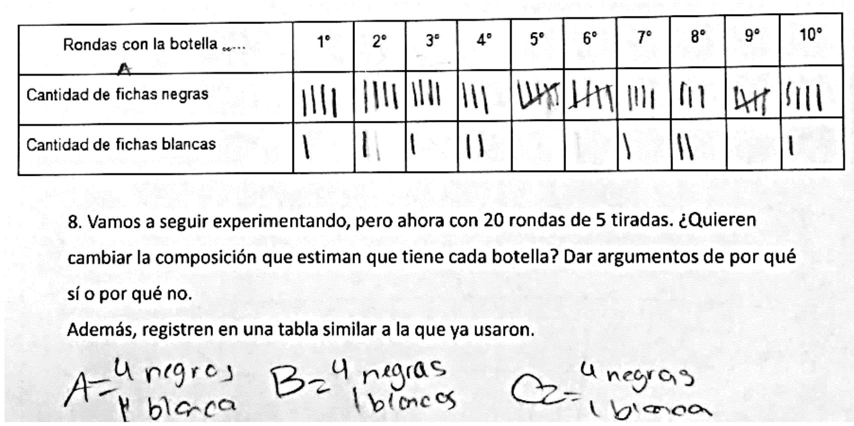
5. A partir del trabajo anterior, ¿por cuál composición de cada botella apostarías? Justifica. B

A= 4 negras 1 blanca   B= 3 negras 2 blancas   C= 2 negras 3 blancas.

6. Realicen 10 rondas de 5 tiradas cada una para ver si siguen sosteniendo sus ideas de lo que hay en cada botella o si las cambian. Hagan lo mismo con las otras dos botellas intercambiando con otros equipos.

7. Registren el número de canicas de cada color que sale en cada ronda. Luego, analicen si con éstos datos es posible conocer la composición de la botella.

[92] Recuérdese que la botella B estaba compuesta por 3 canicas negras y 2 blancas, composición que no ha salido en ninguna de las 10 rondas realizadas.



Rondas con la botella A	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Cantidad de fichas negras	IIII	IIII	IIII	III	~~IIII~~	~~IIII~~	IIII	III	~~IIII~~	IIII
Cantidad de fichas blancas	I	I	I	II			I	II		I

8. Vamos a seguir experimentando, pero ahora con 20 rondas de 5 tiradas. ¿Quieren cambiar la composición que estiman que tiene cada botella? Dar argumentos de por qué sí o por qué no.
Además, registren en una tabla similar a la que ya usaron.

A= 4 negros / 1 blanca B= 4 negras / 1 blancas C= 4 negras / 1 blanca

Figura 47. Producción de Itza.

En la imagen observamos dos conjeturas y el cambio al realizar nuevas tiradas. Notemos que la conjetura sobre la composición de la botella A permanece igual.

Conjeturas iniciales					
A=	4 negras / 1 blanca	B=	3 negras / 2 blancas	C=	2 negras / 3 blancas
Cambio luego de realizar rondas de 5					
A=	4 negras / 1 blanca	B=	4 negras / 1 blanca	C=	4 negras / 1 blanca

¿Cómo fueron producidas estas conjeturas? ¿Qué sabemos de lo que sucedía en ese equipo que los llevo a escribir esos resultados?

Equipo 3. Obs$_3$: (…) antes de pasar a la botella B, Itza cuenta las combinaciones que salieron en las rondas de 5, y observa que la más frecuente fue 4n, 1b. [Ver imagen anterior, el registro de Itza].
Botellas B y C: Por sugerencia mía para abreviar tiempo, se dividen en dos sub equipos, unos hacen la tabla de B y otros la de C. Itza, para la botella C, en dos ocasiones le salieron puras blancas. Nuevamente cuenta la combinación más frecuente: la de 2n, 3b salió 3 veces. Itza pide la hoja donde se registraron las rondas de botella B. Identifica errores (a veces 4 tiradas, a veces 6), se corrigen. La combinación más frecuente es ahora 3n, 2b. Itza (en la B hay 3n, 2b) porque son mayores las veces que se repite. ***Concluyen: A: 4n, 1b; B: 3n, 2b y C: 2n, 3b*** *[Estas constituyen las primeras conjeturas como vimos en la imagen anterior]*
(…) La profesora decidió bajar de 20 rondas a 10. Nuevamente, no hay fase de anticipación. Se subdividen en tres sub equipos de 2, cada uno se encarga de una botella (buena manera de ir más rápido). Ahora, con el método del conteo de la combinación más frecuente, salen resultados desconcertantes:

B: 4n, 1b (4 veces) / A: 5n / C: 5b
Las excelentes conjeturas de Itza: Juntar lo de las tablas
En esta fase, parece que solo Itza trabaja, ni Andrés.
En la A: Itza: sigue pensando que en la A son 4n, 1b. Es decir, el resultado de 5n no la disuade, tal vez le confirma que hay muchas negras, y ella sabe que al menos hay una blanca.
En la B: Itza: (4n, 1b) porque si juntas los resultados de dos tablas, predomina 4n, 1b. Es decir, ante la inconsistencia de lo obtenido en la segunda vuelta de 10 rondas, surge la idea, intuitiva, pero muy buena, de considerar las 30 tiradas (…)"

Volviendo a la noción de medio antagónico, vemos de qué manera la iteración con un medio en donde la naturaleza de la situación es aleatoria, genera mejorar los registros, analizarlos, y claramente a través de Itza, la necesidad de tener más datos para tener más certeza en el análisis de la composición de la botella.

Cabe destacar también que no es un argumento que ha sido generalizado. En la mayoría de los equipos fueron muy lento y solo la recolección y registro de 10 rondas de 5 tiradas con cada botella les ha demandado casi todo el tiempo, a pesar de la insistencia de la profesora. En este sentido, sobre todo en la parte final de la clase, se percibía cierta falta de equilibrio entre el tiempo de la realización de las tiradas y el tiempo de análisis de esos registros[93].

Puesta en común. La profesora solicita atención. Comienza con una pregunta inicial, que provoca una respuesta por contrato didáctico, que luego en los argumentos de los alumnos nos deja ver que para muchos alumnos la sesión parecería que no marcha en la dirección esperada.

P: Tantito suspendemos para que puedas saber lo que cada equipo trabajó. Primero, ¿ustedes creen que en todos los equipos salieron los mismos resultados?
Aos: No

Posiblemente, la dirección de la pregunta de la profesora apunta hacia una de las nociones que buscamos institucionalizar (y que emerja) en la sesión: *"Los resultados de las rondas de 5 tiradas son variables (aleatorios), mientras que el contenido de la botella es fijo"*. Sin embargo recibe inesperadas respuestas:

Diálogo.
P: No, ¿Por qué no? [Asiente con movimiento de cabeza]
Aline: Son diferentes botellas [Varios alumnos responden en simultáneo, la profesora pide que levanten la mano]

[93] Tiempo que Itza ha utilizado muy bien, pero en donde el resto de los integrantes ha dejado de participar.

María: Porque no me dio la misma cantidad de canicas
P: ¿Por qué no nos dio la misma cantidad de canicas? [Sorprendida]… A ver usted.
Aline: Porque fueron diferentes cantidades de bote… de canicas [corrige]
P: Porque contienen diferentes cantidades…
Alberto: Porque pensamos distinto
P: ¿Por qué pensamos distinto nos salió otra cosa? [Gesto de volcar una botella]
Aos: No
*P: **¿Por qué entonces?***
Aline: Porque… bueno, nosotros lo que hicimos para saber más o menos como cuántas hay, aunque no sabemos los colores, agarramos la botella y nos pusimos sobre el oído para saber cuántas hay, caen y… a lo mejor[94]…
P: [Interrumpe] Bien, okey, una primera cosa. "No sabemos…perdón… [Silencio]… en cada equipo obtuvimos resultados diferentes. Primera cosa. Segunda cosa que me interesa que ustedes compartan. Yo estuve observando que cada equipo, para saber cuántas blancas y cuantas negras tuvo, lo hizo de manera diferente. Usaron diferentes estrategias para tratar de saber cuántas blancas y cuantas negras. Me gustaría escuchar algunas de ellas, para que ustedes sepan como lo hicieron sus compañeros. Empiezo con ustedes. Cómo le hicieron para saber cuántas blancas y cuántas negras.

En la última intervención entonces la profesora enfatiza que lo que interesa saber es qué hicieron, cuáles fueron sus estrategias para saber la composición de las botellas. Los argumentos que emergen en la puesta en común, como veremos en los diálogos siguientes, se podrían agruparlos en dos:

* Contar combinaciones. Se apoyan en la noción de "predominio de un color sobre el otro (relación color-color en las botellas y en los resultados de las tiradas), que ha sido utilizado en la lección anterior. Observan en sus registros las combinaciones que se repiten más veces. (Equipos 7, 3, 4 y 8)

* Calcularon totales de cada color en 50 tiradas y lo relacionaron con una posible composición de la botella. Edu afirma que "10 tiros son equivalentes a 1 pelota, o canica" que nos deja ver cierta intuición de funcionamiento de la noción de razón como relación de relaciones entre (10, 40) y (1, 4), mediante una proyección proporcional. (Equipo 1)

Diálogo. Equipo 7.
Daniel: Porque, en la mayoría de las veces en algunas botellas, nos salían más negras que blancas.
P: ¿Ustedes se fijaron en qué cosas?

[94] La explicación de Aline tiene que ver con un trabajo exploratorio al inicio de la sesión. En su equipo estuvieron de forma continua realizando registros de rondas, por turnos, con cada botella, a un ritmo más lento que el resto de la clase, pero donde había participación activa de los seis integrantes. Antes de la puesta en común, sumaron las cantidades de veces que salió cada color en las 10 rondas, y expresaron que podría dividirse por 5.

Manuel: En de qué color salían las canicas.
P: En de qué color salían las canicas y qué más. Y cómo decidieron. En que hay tantas bancas y hay tantas negras. Porque cada equipo lo decidió de manera diferente y yo quiero ver cómo lo hicieron ahí.
Mónica: Vimos la tabla que hicimos y cuantas canicas negras salieron y cuantas blancas. Y sumamos e hicimos, calculamos un aproximado.
P: ¿Y cómo le hicieron para calcular ese aproximado?... algo se fijaron, algo vieron.
Mónica: Es que ahí aparecían más canicas negras y mucho menos blancas…
Martin: Salía cuatro uno cuatro uno cuatro uno…
Mónica: Ah, sí, salía cuatro uno cuatro uno…
P: Se fijaban si muchas veces les salía lo mismo, por ejemplo si les salía muchas veces cuatro uno cuatro uno cuatro uno ellos dijeron: pues yo creo que ese es el resultado. ¿Otro equipo lo hizo de manera diferente?
Itza: [Equipo 3]. De las tablas, sacamos cual combinación predominaba más y depende a cuan veces sale la combinación ese es el resultado. Y para las 20 rondas de 5 tiradas, este… hicimos el mismo procedimiento y luego juntamos los dos resultados de las dos tablas… para saber si… seguía predominando el mismo o si cambiaba.

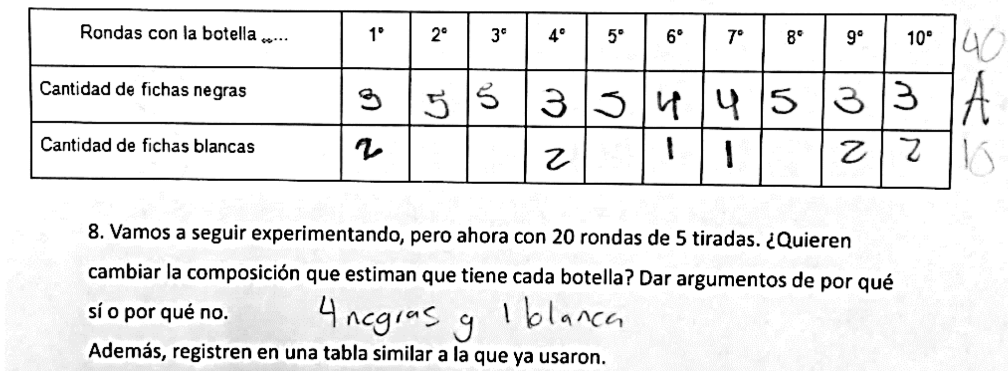
La intervención inicial de la profesora motoriza un juego didáctico que promueve la formulación de los resultados hasta ahora obtenidos, las conjeturas que emergen del trabajo en equipos, que implican un paso más hacia la elaboración de una estrategia ganadora. Luego interpela a los integrantes del equipo 7, para que logren explicitar "cómo decidieron", "en qué se fijaron", porque ya se había acordado que "cada equipo decidió de manera diferente". Con esto logra no sustituir la tarea de los alumnos, sino que elaboren –en la situación-, un razonamiento acerca de la composición posible, que vaya más allá de la observación del predominio de un color.

Logra entonces, que expresen que lo que han contado han sido combinaciones y su predominio (es un cambio de tareas respecto a lecciones anteriores). Itza agrega, como ya advertimos anteriormente, un nuevo elemento a su estrategia: "juntar el resultado de las dos tablas".

En el siguiente diálogo, Edu expresa una estrategia imprevista en esta lección. Hay una noción (rustica, artesanal) de proyección proporcional, donde interviene la suma pero no la división.

Equipo 1.
Edu: Nosotros aquí en las tiradas checamos que al sumarlas salía, por ejemplo 40 y en una 10. Después de ahí sacamos un… "de 10 tiros son equivalentes a una pelota o una canica"… Y ahí sería: "40 serían 4 y 10 sería equivalente a 1"
P: ¡Ah! [Sorpresa] este equipo hizo otra cosa. Este equipo sumó tooodas las blancas, que le salieron en, ¿cuántas rondas? [Algunos responden ¡Diez!]. Después

sumó tooodas las negras que les salieron en las: diez [Gesto con dedos de la mano]. Y ya después con esos resultados decidieron o eligieron cuántas blancas y cuántas negras había. Eso fue lo que hicieron, si se dieron cuenta todos hicieron cosas diferentes pero con los resultados de la: tabla. Bien. [Regresa al frente del aula, y toma las fichas para a modo de cierre institucionalizar algunas ideas]



Rondas con la botella	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	40
Cantidad de fichas negras	3	5	5	3	5	4	4	5	3	3	A
Cantidad de fichas blancas	2			2		1	1		2	2	10

8. Vamos a seguir experimentando, pero ahora con 20 rondas de 5 tiradas. ¿Quieren cambiar la composición que estiman que tiene cada botella? Dar argumentos de por qué sí o por qué no. 4 negras y 1 blanca
Además, registren en una tabla similar a la que ya usaron.

Figura 48. Producción del equipo 1.

Notamos además que el método se produjo frente a un eventual resultado de 40 negras y 10 blancas, con la botella A. Con las tiradas realizadas con las botellas B y C, sólo se apoyaron en la consideración de predominio de un color. Por otro lado, parecería que es muy evidente para los alumnos que hay una relación entre la composición de las botellas (ocultas) y los resultados de las tiradas, y están ensayando formas de estimar su composición (acercamiento lo más que se pueda).

	"Totales"	negras	blancas
Botella A (máquina de azar)	5 canicas	4n ≈	1b ≈
Registros obtenidos de la experimentación	50 tiradas	40 negras	10 blancas
	razón interna igual a 10	Equivalencia entre composición y resultados de las tiradas: "10 tiradas es 1 canica", es una relación genérica que emerge de los pares (40, 4) y (10,1)	

Figura 49. Esquema. Interpretación del razonamiento de Edu.

Por otro lado, nos confirma que, tal como vimos en la conjetura de Andrés en la situación didáctica anterior, una direccionalidad del medio hacia la búsqueda de soluciones bajo la idea de razón entendida como relación de relaciones entre composición de las botellas y composición de las tiradas.

Institucionalización

P: Vamos a empezar a ver, hasta el momento, qué es lo que sabemos. Yo les haría una pregunta para empezar a ver eso[95]: ¿En alguna botella tienen puras canicas negras o puras canicas blancas?[96]
Aos: No
Lupita: No, porque siempre salía, siempre salía uno que otro color
P: Era imposible que eso pasara porque siempre salía una de otro color, aunque solamente saliera una vez. Bien. Ahora, otra cosa. [Lee la ficha, y transforma los enunciados en forma de preguntas] ¿Los resultados de las rondas, podíamos saber que iba a salir en la ronda 6, o qué iba a salir en la ronda 7?
Andrés: No sabíamos, podíamos predecir.
P: No sabíamos, pero lo podemos predecir dice su compañero. ¿Cómo lo predice?
Andrés: ¡Ah! [Realiza un movimiento con la cabeza hacia atrás. Ríen]
P: Algo me quiere decir Ángel
Ángel: Que no se puede… que no se puede predecir porque en cada… si en la tirada 5 nos salía 4 negras y 1 blanca, la próxima vez que tiremos pudo haber salido un resultado diferente.
P: Okey. Cada vez que hacia el experimento me podía haber salido un resultado diferente. Ahora les pregunto: ¿lo que hay adentro de la botella, va a cambiar?
Aos: No.
P: Lo que hay adentro de la botella es una cantidad, ¿qué?
Aos: Exacta.
P: Exacta, fija, estable, ¿de qué otra manera lo puedo decir?
Ángel: Una cantidad limitada
P: Limitada [asiente. Revisa la ficha]. ¿No les pasó que cuando estaban haciendo el experimento, decían: Hay yo creo que va a salir esta, yo creo que va salir esta…?
Aos: Si
P: ¿y cómo sabían que va a pasar eso?
Edu: Porque ya sentíamos que como había más de una canica ya sentíamos que iba a pasar ese. [Luego la profe avisa que se concluye la clase, y se recogerán las hojas escritas].

En la siguiente tabla he realizado un breve contraste de la institucionalización prevista en las fichas y la realizada en la clase, frente a la pregunta ¿qué podemos saber hasta ahora? Evidentemente hay un esfuerzo por acercar o ajustar el lenguaje propuesto

[95] De esta manera, como es evidente, participa del proceso de modelización didáctica. Nos muestra además cómo en las interacciones con los alumnos y de cierto proceso de textualización del saber (en las fichas), busca que los alumnos "enuncien" ese conocimiento que se está construyendo, le den otro status, que sea compartido y comprendido. La participación de la profesora en el proceso es fundamental, porque articula las interacciones a través de nuevas preguntas para hacer emerger todo lo posible lo que se quiere institucionalizar.

[96] Nota: La recolección de la información en este momento de la sesión se complejizó, debido a las breves respuestas que se obtenían de alumnos en grupos distintos, en distancias distintas de la cámara. Recuperar este tipo de episodios ha necesitado del recorrido por las tres grabaciones de audio que se encontraban en tres equipos, y cuya distancia hacia que se escuchara mejor. También ha sido importante la relectura de las notas de los observadores que se encontraban en esos equipos, cuyos comentarios, intuiciones, datos sobre lo que sucedía en sus equipos, orientaban el encuentro de episodios, a veces muy locales.

en las fichas al de los alumnos, haciendo que la institucionalización sea una construcción compartida entre alumnos y profesora, lo que hace que sea un conocimiento aún local pero necesario para la comprensión posterior de una institucionalización donde los conocimientos tengan otro estatus.

Institucionalización realizada	Institucionalización en fichas
Ninguna de las botellas tienen puras canicas negras o puras canicas blancas, porque siempre salía uno que otro color.	Las composiciones no pueden ser 0n5b ni 5n0b, porque se observan canicas blancas y negras en cada botella[97].
No se puede saber que va a salir en la ronda 6, o en la 7. Algunos alumnos afirman que se puede predecir, otros no están seguros.	La presencia de aleatoriedad en el experimento, de incertidumbre
Lo que hay adentro de la botella no cambia, es una cantidad exacta.	Los resultados de las rondas son variables (aleatorios), mientras que el contenido de la botella es fijo (determinista).
Cuando salen más canicas de un color, entonces sospechamos que eso también pasa en la botella, y con ello podemos sentir más o menos qué saldrá en la próxima tirada.	Hay resultados que tienen más posibilidad de salir que otros, por ejemplo, en la botella A salen más canicas negras que blancas, en comparación con las botellas B y C. Existe una relación entre el color de las canicas que hay dentro de la botella y las tiradas que se registran.

3.2.3 Comentarios

El desarrollo de la situación demanda de la profesora una fuerte presencia en la gestión de los tiempos de la situación, motorizando las interacciones, solicitando rapidez en algunos equipos y colectivamente en la elaboración de registros. En muchos casos, dada

[97] En lugar de botella, debería decir “serie de tiradas o rondas”.

la poca economía en la elección de sus modos de registrar, los lleva a dilatar mucho el tiempo de ese momento de la clase, mientras que en otros equipos avanzan muy rápido.

Notamos además que los alumnos están elaborando nuevas informaciones a partir de datos experimentales, y que estás las realizan tomando decisiones frente a un contexto de incertidumbre, y de azar. En este contexto, los alumnos:

-Cuentan combinaciones.

-Tienen necesidad de más datos, que se evidencia con la unión de los resultados de dos tablas (a mayor cantidad de datos, el acercamiento a la composición tendrá menor error)

-Producen informaciones nuevas a partir de nuevos agrupamientos de datos (antes rondas de 20, ahora rondas de 5), otros alumnos suman y observan total de veces que sale cada color en 50 tiradas.

-Hay una evolución de la elaboración de los registros (escritura), aunque para algunos es muy útil el registro de palitos, otros ya utilizan el número como forma de registro más económico. Ya abandonaron el registro utilizando la repetición de letras o palabras.

-En el conteo de composiciones, está ausente (quizás implícita) la consideración que bajo la noción de "predominio" existe una relación entre veces que sale cierta composición y total de rondas.

-En la situación se presentan ambigüedades, en la noción de predominio: ¿de color o de combinación?, ¿respecto a cuántos en total?, en la noción de rondas de 5 y contenido de la botella: el resultado 4b1n en una ronda, es ¿resultado de tirada o contenido de la botella?

Hasta aquí, sólo eventualmente, en las conjeturas de Andrés de la situación didáctica anterior y la de Edu, empieza a emerger la noción de razón bajo la forma de proyección proporcional entre contenido y estadísticas. Pero la atención aún se focaliza, como vimos en la institucionalización, en un mayor conocimiento del funcionamiento de la máquina de azar y los resultados de las tiradas que se generan.

4.1 Situación didáctica: Rondas de 5 tiradas. Inciso 9)

Fecha: 1-12-2017, duración 30 min/ 100 min.

La situación se desarrolló al inicio de la cuarta sesión[98]. La profesora propone realizar un trabajo colectivo donde se recuperan los resultados de las tiradas realizadas que sean útiles para responder a la pregunta que plantea el inciso. Las interacciones con los alumnos y la situación, genera discusiones y algunos argumentos acerca de la composición de las botellas.

4.1.1 Análisis previo de la S.D. 2.2: Rondas de 5 tiradas. Inciso 9)

Consigna

Si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas, ¿qué suponen que pasaría con los datos obtenidos y la composición de la botella?

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente

En este inciso la pregunta se formula en tiempo futuro, y podría poner a funcionar la idea de "lo posible" en un contexto aleatorio. Asimismo, el aumento de 20 rondas a un número notablemente mayor (100 rondas), tal vez posibilite que los alumnos (en retroacción con el medio) puedan establecer relaciones multiplicativas o aditivas entre el número de lanzamientos y el número de veces que ocurre determinado resultado.

Por ejemplo, podrían pensar en alguna relación de proporcionalidad: si de las 10 rondas, se obtuvo 4 veces resultado 3n 2b, entonces en 100 rondas podría ocurrir 40 veces esa composición. Es posible que este tipo de razonamiento proporcional ocurriese también en el desarrollo de incisos anteriores, cuando se propone realizar 20 rondas, es decir el doble de 10, y podría trasladarse esto al doble de la frecuencia, sin embargo, podría ser más necesario ese tipo de razonamiento recién cuando se propone un aumento notable del número de rondas, en el contexto de la búsqueda por parte de los alumnos, de alguna respuesta a la pregunta.

Algunos alumnos podrían escribir una secuencia simulada otorgando frecuencias arbitrarias a los posibles resultados, aunque también es posible pensar que en dichas

[98] En esta sesión se desarrollaron además dos situaciones, que se corresponden con los incisos a) y b) de la lección 2.3: una cierta botella "Z".

secuencias pongan en funcionamiento algunas de sus creencias, como por ejemplo que en 10 rondas de 5 tiros siempre salen todos los posibles resultados (0n5b, 1n4b, 2n3b, etc.), por lo que necesariamente se debe asignar una frecuencia a cada resultado cada 10 rondas (o inclusive que su distribución es equiprobable).

Otra posibilidad es que los alumnos vuelvan a realizar el experimento, y registren los datos obtenidos en tablas de frecuencias similares a las anteriores, sin embargo es una estrategia muy poco económica, pues 100 rondas de 5 tiros son en total 500 tiros.

Incluso el docente podría tener presente que en el caso que los alumnos se propongan realizar efectivamente esas 100 rondas de 5 tiros, que podrá preguntar: ¿y si se realizaran 200 nuevas rondas?, ¿y si se realizaran 1000?

Los alumnos, frente a que ya no esté permitido experimentar o que la realización del experimento tenga un costo muy grande en términos de economía de tiempo, procedimiento o esfuerzo, podrán utilizar la siguiente tabla que el docente podría ofrecer a cada equipo, como un medio para organizar sus resultados y tener información en qué basar su respuesta para 100 tiradas.

Cantidad de veces		5b	1n 4b	2n 3b	3n 2b	4n 1b	5n
Botella	A						
	B						
	C						

Esta tabla que se completaría agregando la cantidad de veces que ocurren los eventos de la primera fila (frecuencia absoluta), y tiene la particularidad que combina dos tipos de informaciones de distinta naturaleza: las estadísticas observadas (resultados aleatorios), con el contenido de la botella (composición, fija, no aleatoria).

Asimismo, al coincidir el número de tiradas con la cantidad de canicas de la botella, presenta cierta ambigüedad, dado que las posibilidades que se presentan en la primera fila, referida a las posibles estadísticas (rondas de 5 tiradas) coinciden con las posibles composiciones de la botella (que tiene 5 canicas).

Esta última característica, muestra el especial interés en proponer extracciones de 5 canicas con reposición, pero también podría ser una oportunidad para evidenciar la diferencia entre resultado del experimento (estadísticas observadas) y posible composición de la botella. Mientras los resultados del experimento son variables y dependen del número de extracciones, la composición de la botella es fija[99]. *Contar rondas de 5 en botellas que contienen 5 canicas, también permitiría hacer emerger en la clase las distintas composiciones de la botella (y luego distinguir aquellas que sean más o menos posibles o probables).*

Los alumnos podrían basarse en los resultados de la tabla para responder al caso de 100 rondas de cinco. Posiblemente promueva la puesta en relación, por parte de los alumnos, de las cantidades de canicas blancas y negras con las veces que se ha repetido el experimento (rondas). Ejemplo: si se observa en la tabla que para la botella B, ha salido en 7 rondas la combinación 2n3b, sobre un total de 20 rondas, podría ser una evidencia acerca de su posibilidad de ocurrencia, en términos de frecuencias relativas, observando que son 7 de un total de 20, lo que podría generar alguna nueva conjetura de lo que ocurriría si se hicieran 100 rondas.

Asimismo promovería el contraste con conjeturas anteriores (lo que apostaban que sucedería) y el uso de relaciones multiplicativas porque si en 7 rondas ha ocurrido la combinación 2n3b, quiere decir que ha salido en total en 5x7=35 tiradas, de las cuales se observaron 7x2=14 canicas negras y 7x3=21 blancas.

A modo de cierre de las lección 2.2: Rondas de 5 tiradas, podría proponerse una puesta en común, donde se planteen respuestas a la pregunta: ¿qué podemos saber hasta ahora? Podría institucionalizarse:

- Existen seis posibles composiciones de la botella (0n5b, 1n4b, 2n3b, 3n2b, 4n1b, 5n0b)
- Las composiciones no pueden ser 0n5b ni 5n0b, porque se observan canicas blancas y negras en cada botella.
- Los resultados de las rondas de 5 tiradas son variables (aleatorios), mientras que el contenido de la botella es fijo (determinista).

[99] La diferencia sería más evidente si se realizaran extracciones (rondas) de una cantidad distinta a cinco, porque en esos casos, la primera fila de la tabla tendría combinaciones distintas. Por ejemplo si fuesen rondas de 6 extracciones, la tabla contaría con las combinaciones: 6n, 5n1b, 4n2b, 3n3b, 2n4b, 1n5b y 6b, distintas de las combinaciones posibles de canicas blancas y negras de la botella. En general, realizando p extracciones con reposición, se tendrían p+1 combinaciones posibles: pb0n; (p-1)b1n; (p-2)b2n; …; 2b(p-2)n; 1b(p-1)n; 0bpn.

- Una ronda está compuesta por 5 tiradas, pero pueden hacerse rondas de 6, 7 u otro número de tiradas consecutivas.
- Hay resultados que tienen más posibilidad de salir que otros, por ejemplo, en la botella A salen más canicas negras que blancas, en comparación con las botellas B y C.

4.1.2 Análisis de la experimentación de la S.D. 2.2: Rondas de 5 tiradas. Inciso 9)

Esta cuarta sesión inicia con un diálogo colectivo (aprox. 30 min). El foco estaba puesto en el inciso 9) de la lección 2.2: "Si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas, ¿qué suponen que pasaría con los datos obtenidos y la composición de la botella?

La profesora decide para esto, utilizar una tabla sugerida en las fichas: "*En una puesta en común, el docente podría proponer un trabajo colectivo que consista en recolectar información de varios equipos hasta completar las 100 rondas, y organizarlos en una tabla"*. Esta es la estrategia que usa, como modo de abrir la sesión, en la que también se desarrollará la situación siguiente[100].

En el debate colectivo, se observan dos propósitos bien definidos: primero recuperar ideas de lo trabajado en la sesión anterior (memoria didáctica) y segundo, explorar argumentos de los alumnos y formular una respuesta al inciso 9 (o intentarlo).

> *Diálogo.*
> *P: (…) ¿Por qué te entregué esa hoja? Para que recordemos el problema y para que completemos unos incisos que nos faltaba completar la sesión pasada. Vamos a ir retomando. ¿Qué es lo que hemos trabajado hasta el momento? Levante la mano una persona o la elijo yo, y me dice qué recuerda que trabajamos la última sesión. Veo muchas manos, Edu… [Da la palabra]*
> *Edu: Este…* ***estábamos calculando cuántas pelotas había dentro de una botella****.*
> *P: Cuántas pelotas había en una botella… ¿de qué color?*
> *Byron: ¡Negras y blancas!*
> *P: Negras y blancas… ¿Cuántas canicas tenía cada botella? [Murmullos]… ¿Cuántas canicas había en la botella? [Reformula y enfatiza]*
> *Aos: Cinco*
> *P: Cinco [levanta la mano indicando con los dedos]. Pero no sabías, cuántas blancas y cuántas negras. Sin embargo, ustedes, ¿qué hicieron? [Silencio]*
> *Aos: Las estuvimos…*
> *P: Hicieron por rondas [Realiza un gesto, levantando la mano y girándola, simulando una tirada]*

[100] Lección: Una cierta botella Z. Inciso a)

Martín: Estábamos… estábamos… Estábamos… A, B y C, y las inclinábamos para ver qué color de canica saldría, y anotábamos lo que salía. [Simula el movimiento con la mano]
P: Okey. Hacíamos el registro por rondas dice Byron, para saber, cuáles eran las canicas que salían. Y al final de la clase, con lo que ustedes hicieron, ustedes me dijeron: "Maestra, yo creo que tiene… 4 blancas y 1 negra, por ejemplo. Y ustedes me decían, que pensaban eso porque en qué se habían fijado para eso.
Itza: En el número de veces que salió la misma combinación.
P: En el número de veces que salió la misma: combinación. ¿Alguien se fijó en otra cosa para saber en el equipo cuántas había?
Aos: En el color de la canica
P: En el color de la canica y qué… [Pregunta]
Aos: Que salía más… en cada tirada o que salía más veces.

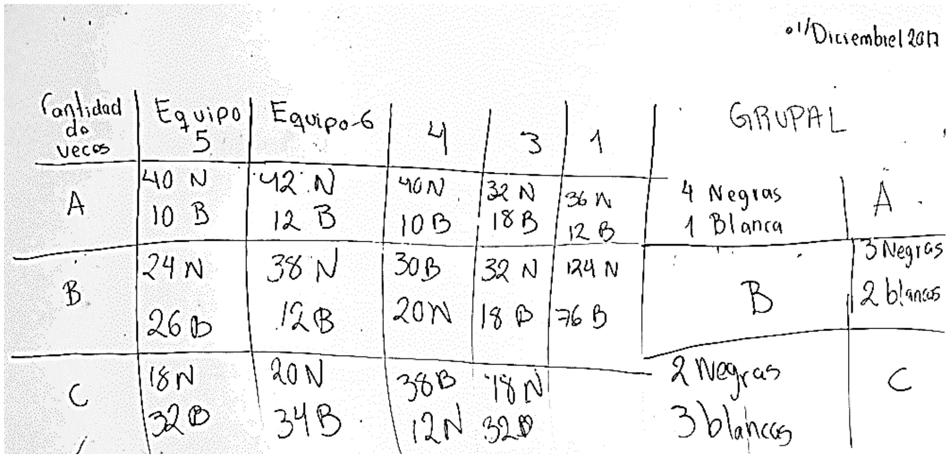
El diálogo nos deja ver una breve situación de revisión[101] que la profesora inicia con la pregunta: *¿Qué es lo que hemos trabajado hasta el momento?*, que le permite conocer cuáles aspectos de la situación "botellas con canicas" son elementos de la memoria didáctica de la clase. Los alumnos describen el funcionamiento de la máquina de azar (botellas con canicas), el desafío de decidir si es posible conocer su composición, y qué características de los datos son relevantes hasta el momento (estadísticas). Emergen dos procedimientos diferentes: contar combinaciones y contar total de veces que salen canicas negras y canicas blancas. Cuando les propone anticipar que sucedería si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas, los alumnos argumentan que:

- *"Sería **similar** a los anteriores (…)"*
- *"Como hicimos rondas de 5, luego hacemos las de 100 se van a **asemejar** a las que ya hicimos, de 5. Porque ya sabemos qué es **más probable** que salga; el color negro o el color blanco (…)"*
- *"Serian **casi igual** (…) [Itza]"*
- *"Cuando hicimos las tiradas… nos salió 40 veces negras y 10 veces blancas y eso… lo dividimos entre 5 pelotas,… saldría 4 canicas negras y 1 blanca." [Edu, en 10 rondas de 5 tiradas, refiriéndose a lo realizado en la sesión 3]*

A continuación la profesora solicita a cada equipo que dicte los resultados de las 10 rondas de 5 tiradas, hechas en la sesión anterior (con cada una de las botellas). Algunos grupos se disponen a realizar las sumas y productos, dado que la nueva tabla les

[101] "El concepto de *situación de revisión* fue introducido por Perrin-Glorian (1992 y 1993). (…).Los hechos principales y las acciones pasadas son evocados, formulados, reconstruidos, racionalizados y justificados en una situación didáctica particular que constituye uno de los instrumentos principales de la institucionalización. (…). Por otro lado, estas situaciones de revisión permiten al alumno formular sus observaciones y sus recuerdos de forma incompleta y alusiva, ya que el pasado común pone al profesor en una situación de comprenderlo. Se crea así una zona "próxima" de aprendizaje donde los conocimientos aparecen bajo formas provisorias (no evaluables formalmente pero perceptibles para el profesor) antes de su adquisición como saberes" (Brousseau, pp.109-110)

exige un cambio de registro: los resultados de la tabla se refieren a la observación de totales. Conforme obtiene los resultados de cada equipo, la profesora completa en el pizarrón:


01/Diciembre 2017

Cantidad de veces	Equipo 5	Equipo-6	4	3	1	GRUPAL	
A	40 N 10 B	42 N 12 B	40 N 10 B	32 N 18 B	36 N 12 B	4 Negras 1 Blanca	A
B	24 N 26 B	38 N 12 B	30 B 20 N	32 N 18 B	124 N 76 B	B	3 Negras 2 blancas
C	18 N 32 B	20 N 34 B	38 B 12 N	18 N 32 B		2 Negras 3 blancas	C

Figura 50. Tabla y composiciones de la botella en pizarrón[102]

Esta tabla posee diferencias respecto a la tabla prevista en las fichas. Por equipos, cuentan las veces que han ocurrido las canicas de cierto color para 50 tiradas (10 rondas de 5 tiradas). Provoca que no se cuenten las veces que ha salido cierta combinación, sino el color de canica que ha sido más o menos frecuente, que es otro tipo de información resumen de los datos.

Luego de completar la tabla, la profesora propone realizar un análisis colectivo. De acuerdo a los datos observados (en la primera fila), hay consenso en la clase que la botella A contiene 4 canicas negras y 1 blanca. Para la botella B, hay una breve discusión que la profesora pone a consideración de toda la clase. No hay acuerdo en los alumnos sobre su composición, y las composiciones rondan entre las siguientes:

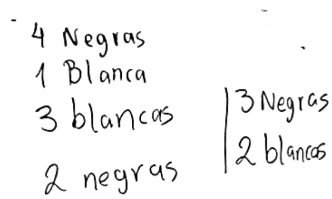


Figura 51. Conjeturas rivales que la profesora escribe en el pizarrón.

En la discusión:

"P: ¿Entonces, cuál vamos a dejar? La persona que dijo 2 negras y 3 blancas, dígame por qué, defiéndame su idea [Sonríe]"

[102] El resultado del equipo 4, para la botella B, es de 30N y 20B.

Dos argumentos se destacan:

- *Edu: "Digo que son 3 blancas porque… como casi son iguales, pero en las blancas… son más… más canicas… por ejemplo, en el mío tenemos 24 y 26. Si le quitamos los 4 que son pocos… y le ponemos al 26… daría 30… que serían como 3."*
- *Byron: "¡3 negras y 2 blancas!... porque si sumamos los resultados de todos da 124 negras y las blancas son: 76. Hubo más negras"*

Estas conjeturas "rivales" quedan en este momento solo en ese estatus. En el razonamiento de Edu observamos que establece relaciones entre dos parejas (24n, 26b) y (20n, 30b), y encuentra una relación sustractiva entre los elementos correspondientes de cada pareja, mediante la diferencia (±4). En el caso de Byron, su razonamiento se relaciona con la observación del predominio: "más" o "menos" canicas de cada color dentro del par (124n, 76b) obtenida mediante la suma de las blancas y luego las negras.

A continuación, la profesora sigue indagando, intentando obtener más información de los alumnos, pero no se expresan nuevos argumentos. Cierra el diálogo de éste momento, asociando a cada botella una posible composición.

En simultáneo a la puesta en común, en el equipo D, pero en privado, Tomás expresa a Obs_4:

[Obs_4]: "Tomás me comenta: ¨Es que lo que yo estoy haciendo es sumar los resultados de todos los equipos [indica la tabla en el pizarrón] y en conclusión el resultado de las negras es mayor… ¡ay! ya me confundí… [Pausa]… más bien… 3n y 2b¨. Tomás sigue atento a la discusión grupal y en cierto momento un alumno [Byron] opina algo similar a lo expresado por él y emocionado exclama: "¡Sí, estoy de acuerdo, Sí… sí, estoy de acuerdo!¨… Poco después dice: "Ay, todas mis expectativas son correctas [Se refiere a la botella B]".

Esto pone en evidencia la potencialidad de la puesta en común, de la socialización de las hipótesis y procedimientos que construyen en los diferentes equipos. Que la situación permite a Tomás contrastar sus hipótesis con la de los compañeros de otros equipos. Cuando se le preguntó acerca de la botella C, ha explicitado que:

Tomás: "Ahorita estoy haciendo cuentas para ver si tenemos razón o no"

En estas cuentas, repitió su procedimiento (aquel utilizado con la botella B), aunque tuvo errores de cálculos, podemos ver en la imagen siguiente que su prueba se basa hasta el momento, en sumar los totales de veces que salió cada color y después comparó los resultados observando el predominio de los colores:

Tomás: "Hubo [en las tiradas] más de cierto color, por lo tanto, en la botella hay más canicas de ese color."

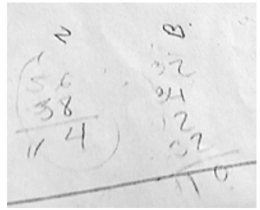


Figura 52. Cálculo realizado por Tomás.

Cuando la profesora al finalizar este momento, pidió que escribieran las composiciones grupales, Tomás afirma: *"A lo mejor si abrimos las botellas sale todo lo contrario."* Nos revela que sus conjeturas están –absolutamente- basadas en los resultados generados de las tiradas y que el *desconocimiento de la composición de la botella* funciona correctamente en la situación sosteniendo el desafío.

"[Obs3]: Me da la impresión de que la petición de anticipar no va muy lejos, dicen que "lo mismo" sin que quede muy claro qué es eso. Reflexiones y procedimientos más interesantes aparecen después, cuando a partir de las 100 tiradas por botella concentradas en un cuadro, infieren lo que podría haber en cada una. Hacen estimaciones basadas en dos consideraciones gruesas: •Si hay muchas más de un color que del otro, hay 4 canicas de ese color y una del otro. •Si son cercanas a la mitad, se fijan en qué color prevalece para decidir entre 2n 3b y 3n 2b."

4.1.3 Comentarios

Esta primera situación desarrollada al inicio de la clase, permite ver:

- Que los alumnos comprenden el funcionamiento de la máquina de azar, y el desafío ha sido instalado en la clase de manera satisfactoria.
- Las conjeturas que se formulan se basan en la construcción –aunque aún muy general- de una información que resuma los datos obtenidos de las tiradas (en este caso, fuertemente apoyadas en cantidades absolutas)
- El importante rol de la profesora, gestionando, dando la palabra, escuchando las voces de los equipos y recuperando las conjeturas y algunos procedimientos.
- Las relaciones que se establecen en los pares (b, n) se basan en estrategias aditivas y sustractivas más que multiplicativas.
- Que en la comparación hay un uso fuerte de las relaciones de orden entre antecedente y consecuente de los pares (b,n)

- La necesidad de un momento en equipos, luego de tener las nuevas informaciones en el pizarrón, para pensar mejor los argumentos acerca de la posible composición de las botellas B y C.
- Que los alumnos reconocen que los resultados de las tiradas tienen cierta variabilidad que no reflejará “exactamente” el contenido de la botella, pero se aproximará bastante. (Existencia de cierta “conservación”)
- El procedimiento inicial de Edu parecería proponer que el resultado de dividir las tiradas por 5 (¿o habrá querido decir entre 10?) será “exactamente” la composición de la botella (idea que luego abandona, pero que resurgirá en las siguientes situaciones).

4.2 Situación didáctica: Una cierta botella Z. Inciso a)

Fecha: 1-12-2017, duración 40 min / 100 minutos.

La situación se desarrolló en un segundo momento de la cuarta sesión. La profesora realiza la presentación del inciso a) de la lección 2.3: Una cierta botella “Z”. Luego, da un tiempo para el trabajo en equipos, y otro donde coordina una puesta en común.

Cabe destacar que el análisis de esta situación es un poco más extenso, dado que en su desarrollo emerge un procedimiento que involucra una proyección proporcional entre resultados de las tiradas y posible composición de la botella, mediante el supuesto de conservación de razones internas.

4.2.1 Análisis previo de la S. D. 2.3: Una cierta botella Z. Inciso a)

Consigna

1. Se sabe que con una cierta botella llamada Z se obtuvieron los siguientes resultados en muchas tiradas:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	13	7
30	20	10
40	22	18
50	31	19

a) Considerando estos datos, ¿por qué composiciones de la botella apostarías? Analicen además, cuáles son las posibles composiciones que descartarían, y expliquen por qué.

Los siguientes propósitos corresponden a la situación didáctica 2.3 que incluye incisos a), b) c) y d), que se verán en la sección de anexos.

Propósito didáctico: Propiciar el uso de las nociones abordadas en las situaciones anteriores (con uso de diferentes procedimientos para comparar razones y fracciones) y que los alumnos logren explicitar las relaciones (mediante el uso de razones, fracciones y decimales) entre cantidad de canicas de cada color y el total de canicas de la botella, que permitan tomar decisiones sobre la composición.

Propósito de investigación: Estudiar de qué manera las razones se utilizan como una herramienta para la toma de decisiones en un contexto aleatorio. En particular, analizar los obstáculos que se presentan en el pasaje de un registro coloquial de la razón (relación parte todo) hacia una cuantificación en un registro fraccionario, o como cociente y decimal, hacia la noción de “frecuencia relativa de un evento”.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente

Para ésta lección decidimos no continuar con la estrategia de rondas de 5 tiradas, dado que suponemos que mantener las rondas fijas, llevaría a establecer institucionalizaciones de nociones más complejas como es el comportamiento de la distribución binomial, con parámetros n y p, donde n es fijo (n=5) y p puede tomar los valores 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8 y 1, según la composición de la botella.

La decisión se fundamenta además en el interés en que los alumnos se centren en las frecuencias relativas de negras (o blancas) y pensamos que las rondas de 5 no favorecen, dado que estas apuntan más al conteo de la cantidad de veces que sale cada tipo de composición.

El **inciso 1a)** se pretende reforzar las discusiones acerca de cuál (o cuales) podrían ser las composiciones posibles de una botella Z, desconocida, a partir de los resultados obtenidos (estadísticas) en 20, 30, 40 y 50 repeticiones del experimento.

En las situaciones 2.1 y 2.2 es probable que los alumnos hubieran identificado que la frecuencia de canicas negras de la botella A era claramente mayor que la de blancas en comparación con las botellas B y C, y que por lo tanto, la botella A podría contener 4 canicas negras y una blanca. Esa decisión sobre el contenido de las botellas A, B y C se dejaría en suspenso, para centrar el trabajo ahora en la relación de las estadísticas observadas de una cierta botella Z y la composición “más probable”. Se busca ahora formalizar la noción de frecuencia asociada a una razón parte-todo posible de cuantificarse como una fracción, cociente o decimal.

Se prevé centrar reducir la discusión colectiva alrededor de los datos de la tabla (que todos los alumnos dispondrán). En particular, en este inciso 1 a) se plantea una situación cuyos cambios principales respecto a las actividades anteriores son:

- El número de tiradas es considerablemente mayor.
- Las tiradas resumidas en la tabla, se supone que han sido realizadas con una misma botella. Por lo tanto todos los alumnos dispondrán del mismo conjunto de datos.

Podrían construir conjeturas, por ejemplo desde un lenguaje coloquial, como las siguientes: i) *"En todas las tiradas salieron más canicas blancas que negras, entonces en la botella hay más canicas blancas que negras, y en consecuencia, las composiciones posibles (más probables) podrían ser 4b1n o 3b2n. ii) "La botella no podría estar compuesta por canicas de un mismo color, (todas blancas o todas negras), dado que en las tiradas salieron ambos colores." iii) "Si en las tiradas salen más canicas negras, quiere decir que en la botella hay más canicas negras que blancas, y en consecuencia, las composiciones posibles o más probables son 4n1b o 3n2n." (Caso complementario al ítem i))*

Es posible que surjan a partir del trabajo en equipos o en la puesta en común, argumentos relacionados con la noción de "mitad" y la "tercera parte", que les habilite a sospechar o intuir que ciertas composiciones son más posibles que otras, por ejemplo: "*En la relación blancas y negras, la cantidad de blancas en esas tiradas son siempre más de la mitad del total de tiradas: 13 blancas en 20 tiradas (13>10=20:2); 20 blancas en 30 tiradas (20>15=30:2); 22 blancas en 40 tiradas (22>20=40:2); 31 blancas en 50 tiradas (31>25=50:2)*." Podrían utilizar argumentos equivalentes, para la relación (razón o proporción) de negras con el total.

Estos razonamientos podrían llevar a los alumnos a elegir entre los casos posibles, aquellos que tienen mayor probabilidad de acuerdo al resultado de las tiradas. Además es posible que según los datos de la tabla, los alumnos discutieran alrededor de las composiciones 4b1n y 3b2n, dado que siempre han salido más blancas que negras. Esto podría posibilitar un trabajo posterior donde se elaboren estrategias para decidir cuál de las dos composiciones se aproxima más a la composición de la botella.

4.2.2 Análisis de la experimentación de la S. D. 2.3: Una cierta botella Z. Inciso a)

El juego[103] que se plantea en este segundo momento de la clase ya no es aquel donde los alumnos realizaban tiradas con las botellas con canicas, anotaban los resultados e intentaban organizarlos para inferir las cantidades de cada color. La tarea es ahora analizar y apostar por una cierta composición a partir de los datos de una tabla donde se registraron tiradas con una nueva botella llamada "Z". La profesora define, y se asegura que los alumnos se involucren en el nuevo juego didáctico.

> *Episodio. La profesora reparte copias de la actividad, y solicita a un alumno que lea la consigna.*
> *P: Bien. Ahora, en éste caso, nos están hablando de una botella, pero en este caso le llamamos Z porque no sabemos lo que había dentro de la botella. Sin embargo, registraron así como nosotros, sus resultados. ¿Ya los vieron? Ahora, considerando éstos datos, ¿por qué composición de la botella apostarías?*
> *Itza: Yo apuesto por 4 blancas y 1 negra…*
> *P: A lo que me refiero es: ¿Qué es lo que tenemos que observar? [Muestra la tabla en una hoja]*
> *A3: La cantidad de blancas y negras que salieron en los tiros.*
> *P: Ajá. Y con eso voy a poder saber, aproximado, de cuantas canicas blancas y negras hay en la botella, ¿cierto? Como equipo, la primera actividad que te voy a dejar es que analicen la tabla. Lean los resultados, analícenlos. En la composición [escribe en el pizarrón]: "En la composición Z, igual en la botella… escuchen esto es importante… igual en la botella, había 5 canicas. Quiero que me digas cuantas blancas y cuantas: negras"…*

En esta presentación, la profesora vuelve a poner en marcha el motor de un proceso de tres tiempos[104] (Brousseau, 2003) el pasado (las estadísticas), la máquina de azar (botellas con 5 canicas) y el futuro (por qué composición apostarías). Para reinstalar este motor, recurre a la memoria didáctica de la clase, afirmando que esos datos provienen de un registro "como el nuestro" (evocando la primera parte de la sesión y las sesiones anteriores) y donde había una botella que contenía también 5 canicas. Por otro

---

[103] La noción de "*juego*" refiere a una de las nociones fundamentales de la Teoría de la Acción Didáctica Conjunta (Sensevy y Mercier, 2007, p.11) la cual ha sido desarrollada a partir de conceptos didácticos elaborados por Brousseau (1986) en su Teoría de las Situaciones Didácticas. En la noción de juego definida en ésta teoría, la función del docente es la de permitir al alumno poner en acción la estrategia ganadora, ser garante de la validación de esa estrategia y a la vez lograr que él asuma la responsabilidad del juego, noción teórica de devolución de la TSD. "Los juegos de aprendizaje que proponen estos autores permiten pensar las clases como una sucesión de momentos en los que se van definiendo y redefiniendo nuevos juegos que podrían actuar como motores de avance del aprendizaje." (Saiz, Gorostegui y Vilotta, 2014)

[104] Brousseau (2003) afirma que este tipo de situación (botellas con canicas) genera un proceso a tres tiempos, cuyo motor es el siguiente: "Si lo que *observamos* da indicaciones de lo que contiene la botella, entonces al reproducir (repetir) lo que hemos hecho debería *reproducirse* lo que hemos visto" (p.171)

lado, adelanta un supuesto que no está dado en la consigna: *"se podrá saber, aproximado, cuántas canicas blancas y negras hay en la botella Z".*

Se describirán cuatro episodios ocurridos en cuatro equipos (cada uno acompañado por un observador). Los dos primeros en el momento de trabajo en equipos y los segundos en la puesta en común.

<table>
<tr><th>Episodios</th><th>Breve comentario</th><th colspan="2">Momento</th></tr>
<tr><td>Primero. Exploraciones y búsqueda de relaciones entre datos.

Nuevo encuentro con las razones y cocientes.

Equipo 2.</td><td rowspan="2">Se evidencia el proceso de elaboración de conjeturas acerca del contenido de la botella.

Los alumnos utilizan recursos matemáticos asociados a nociones de división, decimal, fracción. Por momentos hay pérdida de sentido de los recursos utilizados (en el contexto de la situación).</td><td rowspan="2">Privado</td><td rowspan="2">Interacciones en el momento del trabajo en equipos</td></tr>
<tr><td>Segundo. Escribir como fracción las relaciones entre cantidades enteras.

Equipo 4.</td></tr>
<tr><td>Tercero. Uso del operador interno 28 para estimar la composición.

Equipo 1.</td><td rowspan="2">Se evidencia en los procedimientos, el uso de estrategias que implican la conservación de las razones internas para estimar la composición de la botella.

Los alumnos suponen la existencia de relaciones de proporcionalidad entre parejas de cantidades obtenidas mediante las tiradas y las de la máquina de azar.</td><td rowspan="2">Público</td><td rowspan="2">Interacciones en el momento de la puesta en común</td></tr>
<tr><td>Cuarto. Uso del operador interno 4 para estimar la composición de la botella Z.

Equipo 3.</td></tr>
</table>

Primer episodio. Exploraciones y búsqueda de relaciones entre datos. Nuevo encuentro con las razones y cocientes. Equipo 2.

Mientras la profesora recorre el aula, Aline decide realizar unos cálculos involucrando las cantidades que se presentan en la tabla del inciso a), conjeturando que la botella Z contiene 2 canicas blancas y 3 negras. En la escena, vemos además a Axel que interpela constantemente las conjeturas de Aline, las refuta.

Diálogo: Conjetura (Aline)
Aline: (…) [Solicita una calculadora a Cali y realiza unos cálculos]… A mí se me hace que en la primera hay… 2 blancas y 3 negras.
Axel: ¿Por?
Aline: ¿Qué?
Axel: ¿Por qué?...
Aline: Porque… dividí… porque dividí primero las 13 blancas entre las 5 tiradas… y… salió "2.6"… y yo supongo que el primer número es el que está diciendo cuántas blancas y el segundo, es el que está diciendo cuántas negras. Pero como se pasa en 6, tenemos que ver cuánto falta al 2. Para el 5 faltan 3 y esas 3 son las negras.
P: ¿Ya dijeron cuántas? ¿Ya tienen una respuesta? [Interrumpe]
Aline: Sí, creo. Creo. [Duda]
P: Pero por qué crees…
Aline: Porque dividí.
Axel: ¡Qué dividiste! [Interrumpe]
Pablo: Las canicas blancas por las tiradas… [En voz baja]

Conjetura 1 (Aline): "El resultado de dividir las 13 blancas entre las 5 tiradas, dará el número de canicas que hay en la botella":

13B: 5T = 2.6 => en la botella hay 2B y 5-2=3N. Por lo tanto, en la botella hay 2B y 3N.

Este procedimiento da indicios de la búsqueda de una relación entre el contenido de la botella y el resultado de las tiradas, mediante la razón entre las 13 blancas que se observaron y 5 tiradas (posiblemente supone que son rondas de 5 tiradas como la lección anterior)

Por otro lado, está la profesora que interviene para observar la resolución de la consigna, y motorizarla. Al retirarse rápidamente, Aline continúa con su formulación, en búsqueda de convencer a sus compañeros, como veremos a continuación. Axel ofrece retroacción para que reconsidere la razón entre 13 y 5 por la razón entre 13 y 20, dado que, en éste caso no son 5 tiradas, sino 20.

Diálogo. Puesta a prueba de la consistencia de la conjetura (Aline)
Aline: ¡A ver! Yo creo… creo que voy a dar una explicación mala pero creo… que como dice aquí que son 13 canicas, se divide entre las 5 tiradas, y lo que había salido en la primera fue…
Axel: ¿Porque 5 tiradas si ahí hay vein-te?... [Interrumpe]
Aline: 20 es las veces que se va… ro… rolando… ron… rondando… y son 5 tiradas…
Axel: No, son 20 tiradas, mira lee…
Aline: Si lo divides entre 20 va a salir muchísimo más… va a salir cero puntito… como son 13 blancas imagino que se divide entre 5 y sale 2.6 y si son 2.6 el 2 sería de las blancas y del 2 al 5 faltarían 3 y las 3 serían las negras.
Obs$_2$: Aunque… hay menos negras, ¿igual serian 3 negras?... dices que hay 2 blancas y hay 3 negras…
Aline: Si, 3 negras… si… a ver Cali préstame la calculadora…

Aline sostiene su primera conjetura, bajo el supuesto que el resultado de la división (13 blancas entre 5 canicas) deberá dar cantidades que representen "exactamente" la composición de la botella. Por un lado hay un conflicto entre 5 y 20 (¿son rondas o son tiradas?) y por otro, 13 dividido entre 20 da un cociente menor que uno y ella está buscando obtener un número de canicas. Le viene mejor el 5, porque le arroja un "cociente factible".

Asimismo la pregunta de Obs$_2$ va en el sentido de reconsiderar la conjetura, porque además, en las 20 tiradas salieron más veces las canicas blancas que las negras.

La situación ofrece cantidades que Aline intenta ponerlas en relación para fortalecer su conjetura acerca de la composición de la botella Z. Ofrece contexto con muchos datos e incertidumbre. El uso de cocientes y decimales aparece aunque factible, difícil de interpretar a efectos de la evidencia que Aline busca.

La profesora vuelve al equipo, su juego en la clase es más evidente: participar en el equipo para escuchar los argumentos que se formulan, los procedimientos que se utilizan, promover alguna respuesta a la consigna, y retirarse rápidamente para que los alumnos asuman la responsabilidad del juego (devolución).

Diálogo. La explicitación de una nueva conjetura (Axel)
P: ¿Ya tienen sus negras y sus blancas? [Se acerca al equipo]
Aline: Maestra yo creo que hay 3 negras y 2 blancas
P: ¿Por qué?
Aline: Porque dividí los 13 entre (…) [Explica su conjetura en voz baja]
P: ¿Todos están de acuerdo con lo que dice? [Interrumpe]
Aline: No, no, no no. ¡Porque sólo dividí las blancas! [Toma la calculadora]… se me hace que es sumar 13 más 7…

Axel: ¡13 más 7 dan 20 que son las veces de tiradas!
P: Ajá, estoy de acuerdo. ¿Y eso que significa? Si les salen blancas 13, qué significa.
Axel: Que las canicas que salen de blancas o negras se dividen entre… las veces que se tiran… [Piensa]
Aline: ¡Entre 5! [Interrumpe]
P: ¿Cómo es eso? [Dirigiéndose a Alex]. A ver, hágame esa división que usted me dice para que yo me pueda imaginar qué está pensando. Y lo que me quiere decir porque si no, no le entiendo. [Se retira rápidamente del equipo, y los alumnos quedan pensando y vuelven a discutir]

En las interacciones se observa cierta intencionalidad de la profesora para que los alumnos den respuestas con mejores argumentos *(“¿Todos están de acuerdo?”, “¿Cómo es eso?”,” ¿Por qué?”)*. Esto parece provocar que Aline se dé cuenta que solo ha considerado el resultado de canicas blancas, sin percibir aún que le indican que el total de tiradas es 20. Por otro lado, Axel realiza una conjetura que la profesora valora implícitamente al proponer que las exploren.

Axel: “Las canicas que salen de blancas o negras se dividen entre las veces que se tiran”.

Pese a que la profesora se retira dejando una tarea explicita de “*hacer la división propuesta por Axel*”, en el equipo resurgen conflictos con el número 5. Parecería que existe una disputa entre las dos conjeturas.

Diálogo. ¿”Veces de tiradas” entre 5? (Aline)
Axel: 13 más 7… Si… ¡da 20!
Cali: Da 20
Aline: ¡Veinte!... ¿y si lo divides entre 5?
Cali: Da 4
Aline: ¿4? [Desconcertada]
Axel: ¿Y por qué, entre 5?
Aline: Porque 5 son las veces de tiradas y 20 son…
Axel: 20 son las veces de tiradas.
Aline: 20 son las rondas [realiza un gesto circular con su dedo índice] y cinco son las veces de tiradas [Sonríe]
Cali: Niñaaa…
Axel: Lee con calma…
Aline: Sí lo leo… ¿y cómo 20 lo vas a dividir entre 20?... A ver Cali, ¿20 entre 20? [Pide que realice la cuenta en la calculadora]
Cali: 20 entre 20 da cero…
Marian: ¡Da uno!
Cali: Da uno [Realiza la cuenta con la calculadora]
Aline: ¿Cómo no va a haber nada en la botella?
Marian: mmm… da uno… [Timbre de mitad de sesión]

P: ¿Ya tenemos una respuesta? Levante la mano el equipo que ya tiene una respuesta.
P: ¿No tienen una respuesta? [Se acerca al equipo]
Aline: Es que no me creen…
P: ¿Y usted le cree a ella?... ¿aquí quien ha hablado?
Aos: Yo [responde cada uno]
P: ¿Y ustedes, qué piensan? Tenemos que saber porque está bien o porque no está bien… Tenemos que hacer lo mismo, ¿cómo supimos el resultado grupal? [Señala el pizarrón]. Porque analizamos los datos que tenía la tablita... lo mismo vamos a hacer aquí: vamos a analizar y vamos a llegar a una conclusión. Necesito que me coloquen cuántas negras y cuántas blancas. En total había: 5 [muestra los dedos de una mano]
Aline: ¿Cuánto había salido? ¿4 dijiste? [Refiriéndose al cociente 20:5=4]
Cali: 4
Aline: ¿No serían… 4… blancas…y… 1 negra? [Conjetura]

Los conflictos resurgen cuando Aline propone una nueva conjetura que da evidencia de otra relación entre cantidades: dividir 20 entre 5. Esta conjetura parece tener más sentido para ella que la conjetura anterior de dividir 13 (blancas) entre 5. Conjetura (Aline): 20:5=4

Sin embargo, la cantidad 4 no tiene sentido para ella ni para el resto del equipo. En el proceso, revisitan la propiedad del cociente entre una cantidad (no nula) por sí misma (a: a=1).

Segundo episodio. Escribir como fracción las relaciones entre cantidades enteras. Equipo 4.

En este equipo observan que en los resultados que se presentan en la tabla, siempre han salido más veces las canicas blancas que las negras: *“Son muchas blancas y pocas negras”*

Oscar propone sumar totales y Karla comenta que ha escrito “*en fracción*”. La profesora recorre el aula.

Diálogo.
A: Salieron más blancas… que negras
Obs_4: ¿En total o en número de las tiradas?
A: En total…
Obs_4: ¿Y cómo hiciste? ¿Es que ya la sumaste?
A: No
Obs_4: ¿Estimaste?
Karla: Es que yo lo puse en fracción
Obs_4: ¿Cómo?

Karla: Yo lo puse en fracción
Obs$_4$: ¿En fracción?... ¿de…todas?
Karla: En… 86 blancas… 86 blancas [suma en voz alta] 7 y 19 son… 25 y 10, 35, 18, 45… fue 53… ¡son 53 blancas y…!... ¿Cuántas dije?... (…)
Karla: Y 53 negras
Obs$_4$: Bueno, ponle ahí abajito con pluma para que no se te olvide. O con lápiz. ¿Y luego de eso que podemos saber?
Karla: Hay más canicas blancas

A continuación, en el mismo equipo Obs$_4$ propuso a los alumnos escribir las combinaciones posibles y fue colocando una marca a las que parecen más probables, sabiendo que: *"En las tiradas han salido más veces las canicas blancas que las negras" (86b versus 53n)*. ¿Cuáles son las hipótesis que se formularon en este equipo? ¿Cuáles descartan? ¿Cuáles consideran "*más o menos probables*"?.

Obs$_4$: [Escribe]

Botella Z (5 canicas)
✓ 3b 2n
✓ 4b 1n
X X 2b 3n
X X 1b 4n
X 0b 5n

Diálogo
Obs$_4$: A ver, fíjense: hay una botella Z, con 5 canicas, ¿qué combinaciones podría tener ésta botella?
Oscar: La botella tiene 3… blancas y ¿2 negras?
Obs$_4$: 3 blancas y 2 negras, ¿qué otra? [Escribe en una hoja]
Oscar: 4 blancas y 1 negra
Obs$_4$: 4 blancas y 1 negra, ¿Qué otra? [Escribe]
Alexis: 2 blancas y 3 negras
Obs$_4$: 2 blancas y 3 negras... ¿Qué más? [Escribe]
Karla: No creo que sale 2 blancas y 3 negras porque hay más blancas que negras
Obs$_4$: ¿Qué opinan?...Karla dice que no podría haber ¿cuál?
Karla: 2 blancas y 3 negras
Obs$_4$: Karla dice que ésta no… [Indica la lista que hacen en conjunto], ¿por qué?...
Karla: Porque al comparar y sumar las cantidades te dan más blancas que negras
Aos: Ah…
Obs$_4$: ¿Escucharon? Ok. Entonces si ésta no es la posible combinación ¿qué otra sí?... ¿qué otra combinación sí es posible?
Alexis: ¡1 blanca y 4 negras!
Obs$_4$: [Escribe el listado]
Aos: No [Rechazan la afirmación de Alexis]
Alexis: Entonces todas son blancas [Duda]
Karla: No, porque también salieron negras
Obs$_4$: ¿Puede ser o no puede ser?
Aos: No puede ser (…)

Oscar: ¡Ah! ¡Pueden ser las dos de arriba! [Refiriéndose a las composiciones 3b 2b y 4b 1n]… (…) pero yo apuesto más por ésta de acá [indicado 3b y 2n] porque si fuera la segunda, deberían salir muchos más.
(…) [Discuten, en voces superpuestas]
P: ¿Ya tenemos una respuesta?

La intervención de Obs$_4$ les permite razonar sobre las combinaciones que son más probables según los resultados obtenidos en las tiradas. Sin embargo las decisiones se basan en a consideración de mayor cantidad de canicas blancas, y por el momento abandonaron la idea inicial de expresar relaciones usando fracciones. Nota de observador:

Obs$_4$: "*Al llegar a la tercera posible composición (2b y 3n), Karla comentó que ella no creía que hubiera 2b y 3n porque había más blancas. Alexis un poco dubitativo dijo ¨entonces todas son blancas¨. Karla le respondió que no porque también había negras. Otro alumno propuso que 1b y 4n, todos lo abuchearon y le dijeron que esa no podía ser. Finalmente, señalaron como las más posibles: 3b y 2n o 4b y 1n. Alexis y Oscar opinan que la primera (3b y 2n). Oscar descarta 4b y 1n ¨porque si no habrían salido muchas más blancas que negras y yo digo que no sería el de acá (4b y 1n) porque tendrían que haber salido más blancas¨. Cristian dice que él apoya lo que dice Oscar (3b y 2n).*"

En el equipo se plantean las siguientes hipótesis acerca de la composición de la botella:

Karla: "En la botella hay 2n 3b. Descarto 2b 3n."
Alexis-Oscar: "En la botella hay 3b 2n. Descartamos 4b 1n."

Estos alumnos contrastan dos hipótesis acerca de la composición de la botella: descartan una (2b3n o 4b1n), y aceptan otra (3b2n). Estos razonamientos podrían ser precursores de la noción de pruebas de significación o de hipótesis de la estadística inferencial. Los alumnos no rechazan la hipótesis nula (3b2n), siendo ésta verdadera (pues sí es la composición). Contrastan resultados de tiradas y posible composición de la botella.

Evidencian además que en todas las tiradas exista "mayoría de blancas" es una información *resumen* del conjunto de datos (estadística) que los alumnos usan para tomar la decisión acerca de cuál composición de la botella (hipótesis) *sería* la más *probable*. Por otro lado, una propiedad que vincula el contenido de las botellas: el resultado de las tiradas es un reflejo del contenido de la botella, por lo tanto, hay "algo" que se conserva.

Asimismo el “asomo” o intuición de la escritura fraccionaria leída como relación entre cantidades. En el siguiente diálogo indagamos un poco más acerca de esta intuición, y más abajo puede observarse su producción escrita.

Obs$_4$: Bueno, Karla podrías platicar o… ¿le quieres comentar a todos lo que hiciste?... y la vamos a comparar con la que dijeron ustedes dos [Conjetura Alexis-Oscar]
Karla: Pues… me dejan ver los procedimientos por favor [dirigiéndose a los compañeros]… bueno, yo sumé las cantidades de blancas y las cantidades de negras y me dio 54 negras y 86 blancas…y por lo tanto hay más blancas que negras.
Oscar: O sea que… en una botella pueden haber… pueden estar 4b y 1n.
Karla: Yo digo que son 2n y 3b.
Obs$_4$: ¿2n y 3b?… Ah, mira ellos también habían opinado eso... ¿y cómo te diste cuenta?
Karla: Porque no podían ser 4b y 1n, porque salieron demasiadas veces las negras como para que nada más fuera una.
Obs$_4$: Ah, okey. ¿Y eso que estabas haciendo acá? [Indicando las fracciones escritas]
Karla: Magia… [Risas]… arriba puse… en el numerador puse las negras y en el denominador puse las blancas.
Obs$_4$: ¿Y el 7/13?
Karla: Puse la cantidad…que había… de 7 para el 13 hay 4 [Error de cuenta]
Obs$_4$: Ajá
Karla: Igual, del 19 para el 31 hay 12. Del 10 para el 20 hay 10 y de 18 a 22 hay 14…
Obs$_4$: Okey, ¿y esos resultados que te dicen?... ¿estás apenas pensándolo? [Silencio]… ¿Y esto por ejemplo de acá abajito, del 30, 4…?
Karla: De 20 tiradas… lo que falta para… [Sonríe]
Obs$_4$: A, okey, ¿y esto que te ayudo a saber? ¿Pudiste encontrar la combinación?
Karla: No.

El episodio anterior muestra que en su exploración de la búsqueda de una regularidad, la alumna manipula las informaciones para *resumirlas*. De acuerdo a Brousseau (2003) el resumen de los datos es una de las características del milieu de una situación estadística, el cual será una composición “lógica” de informaciones complementarias.

“La función del resumen es esencial: debe permitir reconstruir el objeto oculto, o simplemente permitir comunicarlo de modo económico pero aproximado a un conjunto de datos sin preocuparse de lo que podrían tener concretamente en común” (p.14)

Sin embargo la técnica que se propone desarrollar, mediante el uso de fracciones y sus equivalentes parece poco inteligible para poder poner a prueba su hipótesis.

Parecería estar ligada al sentido que tiene la fracción parte-parte entre canicas blancas y negras, y donde no interviene el total de tiradas, ni las canicas de la máquina de azar. Las relaciones que establece “dentro” de los resultados de cada serie de tiradas están basadas en la cuantificación de las diferencias.

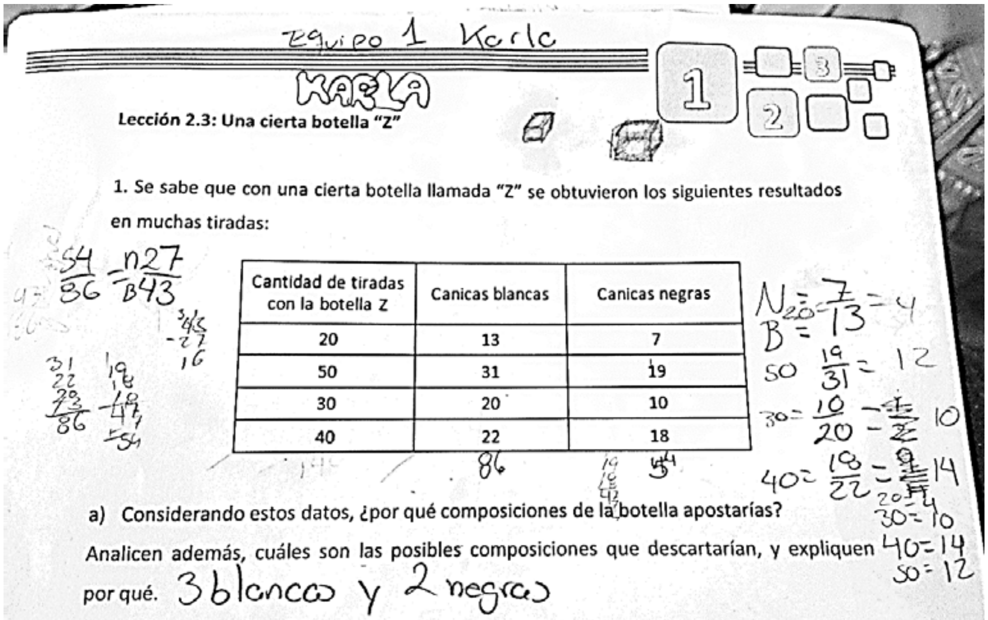


Figura 53. Producción de Karla.

Los argumentos demuestran también que ante la ausencia del sentido de las fracciones parte-parte o sus equivalentes, la alumna las descarta y recurre al análisis de las diferencias entre cantidad de canicas blancas y negras. De hecho estas fracciones construidas por la alumna no dan una información relevante para validar su conjetura. Ejemplo: en 86 veces que salieron canicas blancas se obtuvieron 54 negras (54/86), lo que es equivalente a 27/43. Otro ejemplo: la fracción 10/20=1/2, ¿qué significaría ½ (razón externa) a los efectos de la prueba de su conjetura, en éste contexto?

En su producción está presente el significado del signo igual, que parecería indicar una *relación* entre los totales de tiradas y las diferencias entre veces que salieron canicas de cada color. Ejemplo: 40 = 14 significa para la alumna que de un total de 40 tiradas, la diferencia entre blancas y negras es 14.

En el mismo equipo, Tomás construye la relación parte-todo en las 20 tiradas, y las vincula a través de la división entera para validar su conjetura, analizando el cociente y el resto. Luego lo descarta.

Obs$_4$: "Mientras tanto, Tomás sigue trabajando por su cuenta. Observé que realizó una división y le pedí que me platicara:
Tomás: Si vemos los resultados hay más blancas que negras (…) Para que hubiera nada más 1 negra éste resultado sería incorrecto [refiriéndose al total de negras (54)]
Obs$_4$: (…) o sea tú dices que hay más blancas que negras por los resultados… y cómo te salieron 54 dices que ¿hay 1 negra?, ¿o al menos una negra?, ¿o cómo? Eso último no te lo entendí bien, perdón.
Tomás: mmm… es que más bien en lo que yo estoy pensando es ***dividir los resultados entre el número de tiradas. Pero como, bueno, son diferentes cantidades de tiradas pues…no saldrían los mismos resultados****.*
Obs$_4$: Entonces, tú querías sumar las 13 blancas más las 7 negras, que da 20 y dividirlo entre 20...
Tomás: Pero si la dividiéramos ésta entre ésta y ésta, sería: 7 por 2 son 14 y para 20 son seis. Saldría 2 (en el cociente) y sobrarían 6 (…)
Obs$_4$: ¿Y eso qué te dice?
Tomás: Y eso… y para saber el número exacto de canicas no nos debe de sobrar nada (…) Si dividiéramos veinte entre trece saldría de a uno y nos sobrarían siete. Pero si estos dos los sumamos [se refiere a los cocientes] no nos da el total de 5 canicas que necesitamos saber.
Obs$_4$: Entonces no, no te convence
Tomás: No.

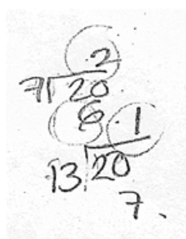


Figura 54. Divisiones realizadas por Tomás.

Tercer episodio. Uso del operador interno 28 para estimar la composición. Equipo 1.

La profesora inicia la puesta en común: es el momento de socializar sus procedimientos y conjeturas. También de ponerlas a prueba, aunque parecería que su juego consiste sólo en que los alumnos comenten cómo abordaron el problema, para los fines de la presente investigación. En este momento, un integrante del equipo X comenta su conjetura y cómo lo pensaron.

Conjetura (equipo X): *"Nosotros realizamos la suma de blancas y negras que hay en la tabla. Comparamos los totales: 86B y 59N, como la diferencia 8-5=3, entonces en la botella hay 3 blancas"*. La profesora escribe en el pizarrón:

Blancas 86…….. 3

Negras 54………2

Luego da la palabra a cada equipo para que comunique sus argumentos. Es el turno del equipo “A”.

Diálogo.
P: De éste equipo, ¿alguna respuesta?
Byron: Si, pero también tenemos otra lógica
P: A ver, explique su lógica, ¡venga! [Entusiasmada]. Y también el que está en su lado [Refiriéndose a Edu]

Los alumnos pasan a explicar en el pizarrón. Discuten entre ellos, se organizan. Escriben:

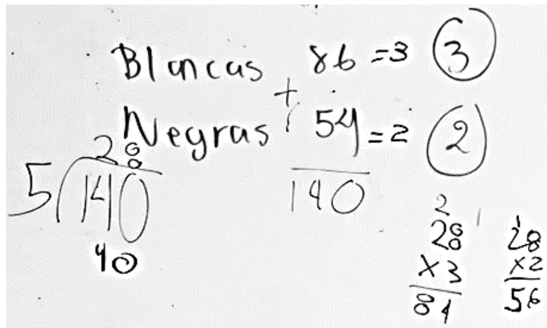


Figura 55. Pizarrón.

P: A ver váyame diciendo lo que hizo. Mejor anótelo. [Les da un breve tiempo para que escriban en el pizarrón] […] Ahora sí, ponemos atención a sus compañeros. Ponemos atención para saber qué cosa hicieron. Explíquenme, yo no entiendo nada.
Byron: Nosotros igual tenemos el resultado de las canicas blancas y negras, como éstos [refiriéndose a los totales que están escritos en el pizarrón: canicas negras: 54, canicas blancas: 86]. Luego, sumamos estos y nos dio como resultado 140.
Edu: Porque no sentíamos que nos dio un resultado concreto…
Byron: Y al resultado lo dividimos entre 5 que son las 5 canicas que hay en cada botella.
Edu: Luego, el resultado nos dio 28, y como… ya teníamos… una idea de cuántas canicas… Había 3 blancas, que lo multiplicamos por 28 y 2 negras que lo multiplicamos por 28.
*Byron: Y multiplicamos por 28 la primera que nos dio 84 que es un **acercamiento** al 86 al igual que 56… [Indica el 54 que está en el pizarrón]*
P: Y así lo hicieron. Y ahora yo les pregunto a ustedes, ¿qué significa el 140?
Edu: ¡Ah!, el resultado de la suma de éstos dos dígitos. [Señalando a las cantidades 54 y 86 que están escritas en el pizarrón]
P: Y en el experimento…
Byron: El total de las tiradas [interrumpe]
P: El total de las tiradas, en total, entonces cuantas veces tiraron
Byron: Fueron 140
P: Y de esos 140…
Byron: Fueron 86 blancas… y… 54 negras.
P: Fueron 86 blancas y 54 negras, muy bien. Y lo demás ya me lo explicó… Nada más una pregunta, ¿por qué me lo dividió entre 5?
Edu: Porque son la cantidad de canicas que había en la botella.

El razonamiento explicitado (y validado) parte de suponer que la botella tiene la composición de 3B2N (B: blancas, N: negras) y saben además (porque sumaron) que han salido 86B y 54N. Luego, agregan otra información: sumar todas las tiradas, que da un total de 140 y a éste resultado lo dividen por 5 canicas 140:5=28.

Este procedimiento les permite afirmar que “28 es una canica” (de la botella). A continuación, multiplican 28 x 3B = 84B que lo comparan con las 86B de las 140 tiradas. Asimismo, multiplican 28 x 2B = 56N que es aproximado a 54N. Se genera así un nuevo par, teórico: (56, 84) que lo comparan con el par, empírico: (54, 86). Como las cantidades correspondientes: 56 y 54 son cantidades próximas, y 84 y 86 también lo son, entonces afirman que la botella tiene 3B2N

La técnica se sustenta bajo la idea que si la botella tiene cierto número de canicas de cada color, hay una *conservación* de las *relaciones* entre cantidad de canicas blancas, negras y total, de lo que está en la botella y el resultado de las tiradas. Estas relaciones son consistentes con la noción de razón.

Pequeño estudio del procedimiento: Si la botella contiene 5 canicas, 3 blancas y 2 negras, y se realizan 140 tiradas, hay una probabilidad teórica que salgan 84 veces las canicas blancas y 56 veces las negras. Estas cantidades se obtienen realizando la operación: (140:5) x3=84 B, y también (140:5) x2=56 N

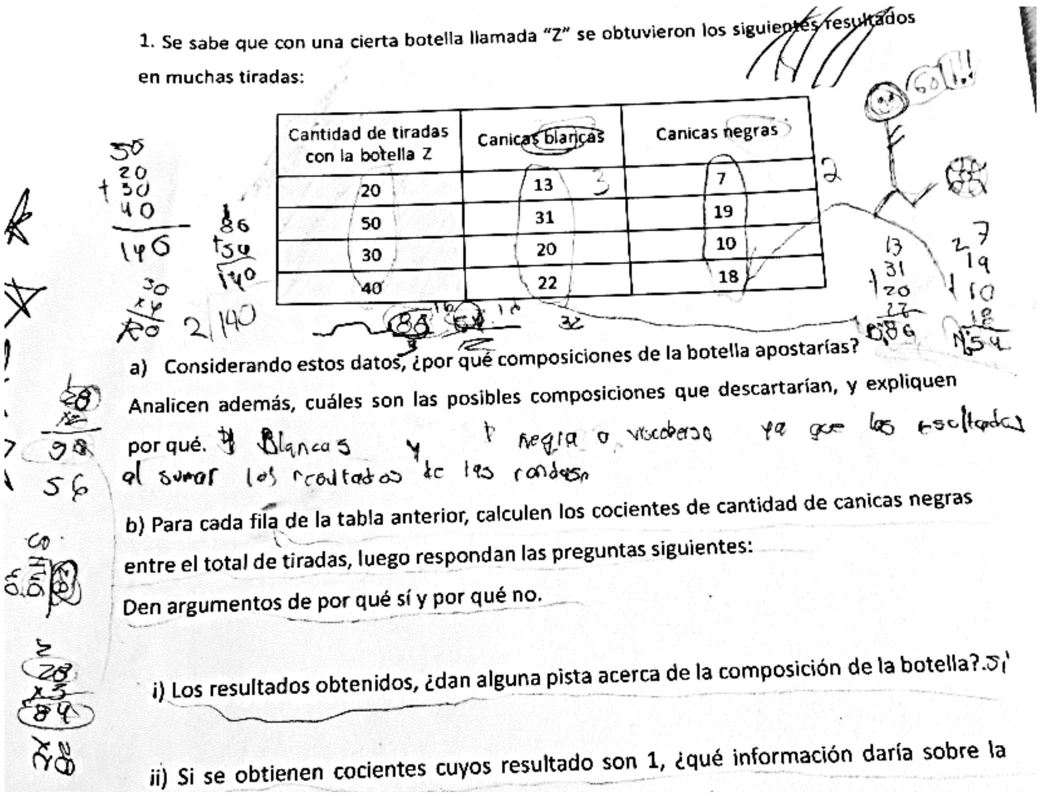
Que serían resultados “teóricos” del experimento: en efecto, como P(N)=2/5 y P(B)=3/5, (siendo P: Probabilidad), entonces, en 140 tiradas se obtendrían, con ciertas variaciones, 140 x 2/5= 56 negras y 140 x 3/5 = 84 blancas. A mayor cantidad de tiradas, la aproximación es mejor.

Esta comparación que realizan los alumnos puede observarse de la siguiente manera:

Estimación de total de canicas Negras:	Análogamente, las Blancas:
$56\text{N (teórico)} \cong 54\text{N (de 140 tiradas)}$	$84\text{B (teórico)} \cong 86\text{B (de 140 tiradas)}$
$28\text{x}2\text{N} \cong 54\text{N}$	$28\text{x}3\text{B} \cong 86\text{B}$
$\frac{140}{5}\text{x}2\text{N} \cong 54\text{N}$	$\frac{140}{5}\text{x}3\text{B} \cong 86\text{B}$
$140 \,.\, \frac{2}{5}\text{N} \cong 54\text{N}$	$140 \,.\, \frac{3}{5}\text{B} \cong 86\text{B}$

Esto nos permite constatar que las razones, en tanto relaciones entre dos medidas, son una herramienta a la que recurren los alumnos antes de disponer de las fracciones y entonces las razones de números enteros funcionarían como la forma implícita germinal de las fracciones (Block, 2001). En el contexto del cálculo de probabilidades, las razones permiten iniciar el tránsito hacia la escritura fraccionaria de las probabilidades que luego permitirá la construcción del sentido de leyes fundamentales como la ley débil de los grandes números.

Los argumentos son parte de su producción escrita en el momento de trabajo en equipos, como puede observarse en la siguiente imagen.


1. Se sabe que con una cierta botella llamada "Z" se obtuvieron los siguientes resultados en muchas tiradas:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	13	7
50	31	19
30	20	10
40	22	18

a) Considerando estos datos, ¿por qué composiciones de la botella apostarías? Analicen además, cuáles son las posibles composiciones que descartarían, y expliquen por qué.

b) Para cada fila de la tabla anterior, calculen los cocientes de cantidad de canicas negras entre el total de tiradas, luego respondan las preguntas siguientes: Den argumentos de por qué sí y por qué no.

i) Los resultados obtenidos, ¿dan alguna pista acerca de la composición de la botella? Sí

ii) Si se obtienen cocientes cuyos resultado son 1, ¿qué información daría sobre la

Figura 56. Producción escrita de Byron y Edu.

En la imagen anterior puede observarse el trabajo de búsqueda, posiblemente de elaboración del objeto oculto (composición de la botella). Para esto, basados en una serie de informaciones presentados en la tabla (resultados de las tiradas), realizan un proceso de modelización de la situación, el cual implica:

- Interpretar la información que se presenta en la tabla
- Analizar los resultados de 20, 50, 30 y 40 tiradas

- Sumar el total de veces que han salido canicas blancas (13+31+20+22=86) y canicas negras (7+19+10+18=54)
- Comparar los totales, calculando diferencias entre blancas y negras (mediante relaciones sustractivas)
- *Formular hipótesis, Hip1: 4 blancas y 1 negra – Hip2: 3 blancas y 2 negras*
- Sumar el total de tiradas realizadas con la botella Z (50+20+30+40=140)
- Verificar mediante la suma de los totales de veces que salieron blancas y negras (86+54=140)
- Dividir el total de las tiradas entre el total de canicas de la botella: 140:5=28
- Multiplicar el cociente por las cantidades de blancas y negras que se suponen (hipótesis) que contiene la botella: 28x3=84 y compararla con 86 (suma de veces que salieron blancas). Análogamente multiplicar 28x2=56 y compararla con 54.
- Contrastar las mediciones con resultados de tiradas. Como las diferencias entre las cantidades obtenidas mediante el modelo y los obtenidos en la tabla (por experimentación) es "muy pequeña" (2 unidades), entonces se afirma que la botella Z contiene 3 canicas blancas y 2 negras.

Estos alumnos están construyendo un modelo de probabilidad mediante un proceso de modelización matemática, apoyados en recursos aritméticos. En el camino elaboran la noción de razones internas (CRI, implícito) para poder reconstruir el objeto oculto (la composición de la botella), valiéndose además del uso de razonamientos conjeturales[105].

[105] "(…) ¿Cuáles son las otras dimensiones de la disciplina matemática? Una vez hemos tomado posesión de la tarea problemática que tenemos que llevar a cabo o de la cuestión que nos proponemos estudiar, el estudio de la cuestión entra en una fase exploratoria. Se trata de una fase en la que no se dispone de una formulación suficientemente precisa del problema dado y que vuelve a aparecer cuando, aun disponiendo de un enunciado matemático preciso, no se sabe cuáles serán las herramientas matemáticas más adecuadas para abordarlo. En la fase exploratoria juega un papel importante lo que el matemático *Georg Polya* llamó el pensamiento matemático "*plausible" o conjetural*, es decir, el "arte" de formular hipótesis y conjeturas que nos parecen acertadas, de examinar su validez y contrastarlas, de reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba, etc. Dicho de otro modo, nos referimos aquí a aquel momento del trabajo matemático en el que uno debe saber alejarse de lo que se acostumbra a considerar como la "certeza matemática", para ponerse a razonar con lo "probable o verosímil". La tesis principal de la obra de Polya puede resumirse diciendo que existen "leyes" o, como él dice, "patrones" que rigen el pensamiento plausible. Naturalmente, no son leyes de la misma naturaleza que las leyes lógicas utilizadas para demostrar resultados matemáticos "bien formulados" (lo que se suele llamar "razonamiento deductivo"), aunque ambas se complementan y son del todo imprescindibles en la actividad matemática (…)" (Chevallard, 1997, p. 131).

Cuarto episodio. Uso del operador interno 4 para estimar la composición de la botella Z. Equipo 3.

La profesora continúa con el juego de dar la palabra a cada equipo para que socialice sus argumentos. Es el turno del equipo “C”. Se observa que Marian tiene ideas para exponer, pero es muy tímida. Comunica sus ideas a Itza para que los exprese a toda la clase. La profesora regula las interacciones, insiste que comuniquen cuál fue su procedimiento, cómo lo pensaron.

Por momentos, la profesora realiza una “actuación”: se ubica en el rol de un personaje que intenta comprender, a través del lenguaje y la escucha, el argumento de los alumnos, y cuya respuesta es la de devolver parte del argumento en forma de pregunta: *“¿El 4 para llegar a qué?”.* Al final reelabora el argumento, lo resume (¿valida? ¿Institucionaliza?):

Diálogo.
P: Pero, ¿de qué se les habló? [Refiriéndose a Marian]
Itza: De que las canicas blancas son 4 blancas y 2 negras,
P: Ajá, coinciden con el resultado: 3 blancas y 2 negras [Refiriéndose al que varios grupos llegaron hasta ese momento] A ver… ¿cómo llegaron a ese resultado? ¿Qué más? [Hay una discusión entre Itza y Marian]
Itza: Que… porque 20 son las tiradas entre 5… y entonces seria ***20 entre 5 igual a 4****. Luego,… como* ***4, para llegar al 13, o para que sean 13 son 3 veces****…*
P: ¿El 4 para llegar al qué? [Interpela]
Itza: Al 13… es que… [Duda]
Marian: Es que… se supone que tengo 5 canicas, ¿no? Las primeras tiradas fueron 20… ¿no?, fueron ***20 tiradas y eso lo dividí entre 5****, entonces, aquí dice que salieron 13 blancas, y yo fui como que* ***dije que una canica es igual a 5… igual a 4*** *[corrige]. Entonces fui…* ***4, 8, 12… y entonces 4 multiplicado por 3 era igual a 12, y se acerca más a 13****.*
P: Y se acerca a 13
Marian: Entonces yo puse que… en cuanto a las blancas en las 20 tiradas, eran 3 blancas. En las puras negras eran 4, 8, y que se multiplicaba por 2, entonces el 7 se acerca más al 8, por eso supuse que serán 2 canicas negras.
P: ¿A alguien le quedó claro lo que nos explicó su compañera? [Se dirige a toda la clase]
Aos: Si... No...
P: ¿No le entendió? Utilizó un procedimiento un poco diferente entre el total de tiradas y el número de canicas que había en la: botella. Ella me dice: “maestra pues si tiró 20 veces, una canica va a equivaler a 4: de esas 20 veces”. Y así se fue aproximando. Hizo varios cálculos para saber pero al final llegó a la misma conclusión.

En éste razonamiento los alumnos dividieron el número de tiradas realizadas (en este caso 20) entre 5 que representa el número de canicas de la botella: 20:5=4. Este procedimiento les permite afirmar que "*4 es una canica de la botella*". Sin embargo han utilizado menos algoritmos de multiplicación y división y se han apoyado fuertemente en el cálculo mental y la suma repetida.

La tarea consistía para este grupo en ver cuántas veces cabe el 4 en 13B y en 7N, lo cual lo interpretan en términos de "acercamientos". Un acercamiento a 13B de 4 en 4: una aproximación a través de sus múltiplos: 4, 8 y 12 es el más próximo, es decir que son 3 veces 4, con lo cual se conjetura que la botella contiene 3B. Para acercarse a las 7N, también lo hacen de 4 en 4 y como 8 son 2 veces 4, se conjetura que la botella tiene 2N.

Pequeño estudio del procedimiento: Se divide el número de tiradas por cantidad de canicas: 20:5=4. Luego se generan múltiplos de 4 hasta llegar a 13 y 7. La cantidad de esos múltiplos corresponde a una aproximación de la composición de la botella.

Ejemplo:

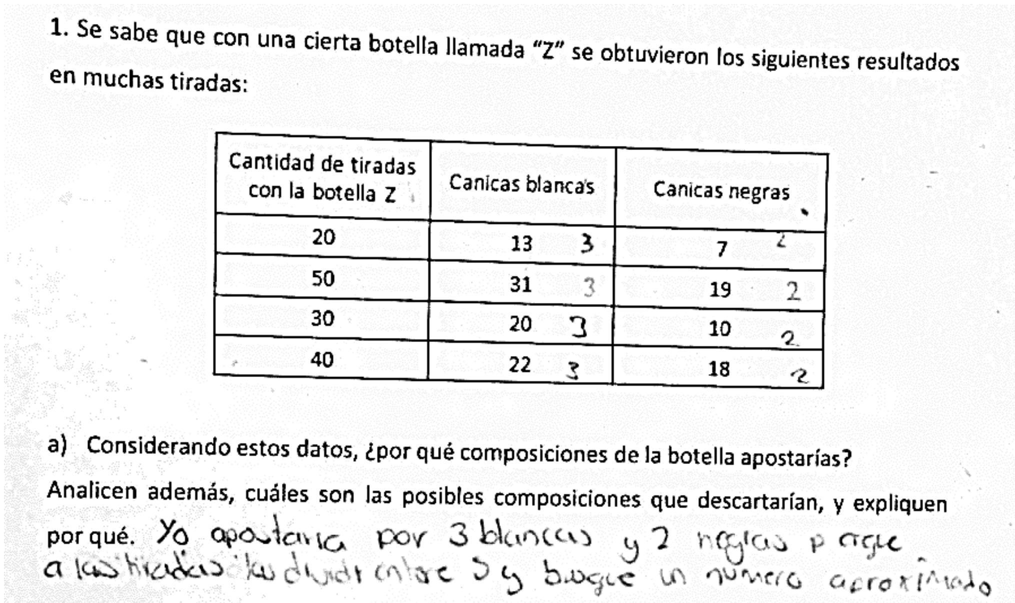
$12\text{B (teórico)} \cong 13\text{B (de 20 tiradas)}$

$4 \rightarrow 8 \rightarrow 12 = 4\text{x}3 = 12\text{B} \cong 13\text{B}$

$$\frac{20}{5}\ \text{x}\ 3 = 12\text{B} \cong 13\text{B (de 20 tiradas)}$$

$$20\ \text{x}\ \frac{3}{5} = 12\text{B} \cong 13\text{B (de 20 tiradas)}$$

La técnica se sustenta en la hipótesis implícita que si se divide el número de tiradas entre las 5 canicas, se obtiene una "unidad" (4 o en el episodio anterior 28), que se repetirá (o *conservará*) en las tiradas, un número aproximado de veces. Las repeticiones de esta "unidad" en las tiradas de cada color será una aproximación a la composición de la botella.



1. Se sabe que con una cierta botella llamada "Z" se obtuvieron los siguientes resultados en muchas tiradas:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	13 3	7 2
50	31 3	19 2
30	20 3	10 2
40	22 3	18 2

a) Considerando estos datos, ¿por qué composiciones de la botella apostarías? Analicen además, cuáles son las posibles composiciones que descartarían, y expliquen por qué. Yo apostaria por 3 blancas y 2 negras porque a las tiradas las dividi entre 5 y busque un numero aproximado

Figura 57. Producción escrita de Marian[106]

Como afirma Block (2017): "Están suponiendo que la composición de las 5 canicas de la botella se debe reflejar muy parecida en la composición de las 140 tiradas. Si en las 5, hay más blancas que negras, en las 140 también; si en las 5, la cuarte parte del total fueran negras, en el total también, y viceversa.

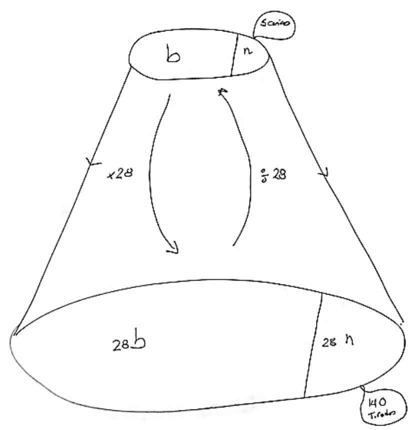


Figura 58. Proyección proporcional entre tiradas y contenido de la botella.

Por otro lado, si las 5 canicas, compuestas de b blancas y n negras **se repiten k veces**, la composición que resulte en la nueva colección de 5k canicas será la misma, es decir, kb y kn guardarán la misma razón que b y n. Y viceversa. Por eso se vale dividir ambas cantidades, kb y kn, entre k".

[106] Respuesta: "*Yo apostaría por 3 blancas y 2 negras porque a las tiradas las dividí entre 5 y busqué un número aproximado*."

Como en la conjetura de Byron y Edu, estas hipótesis sostienen una *conservación* de *relaciones entre* cantidades de canicas blancas, negras y totales en la botella que deberá replicarse en los resultados de las tiradas. Estas relaciones son consistentes con la noción de razón y también proporción. La idea que subyace (Block, 2017) *es que si se multiplica por esa razón interna (4 o 28) tanto blancas como negras, la razón externa entre blancas y negras (2/3 o 3/2) se mantiene igual.*

4.2.3 Comentarios

En esta lección 2.3 los alumnos:

- Tomaron decisiones en contexto de incertidumbre, y donde se presentaron muchos datos de distinta naturaleza (tiradas y botellas)
- Han buscado y expresado relaciones entre cantidades a través de sumas y restas, multiplicaciones y divisiones. Solo en un caso se presenta una escritura fraccionaria, pero se la interpreta como diferencia entre numerador y denominador.
- El proceso de búsqueda lleva implícito que el resultado de operar con ciertas cantidades involucradas en la situación debería dar la composición de la botella.
- Ponen en evidencia y prueban mediante relaciones de proporcionalidad, que existe una conservación de relaciones entre cantidad de tiradas (estadísticas) y el contenido de la botella. Esa relación se expresa mediante una razón interna.
- Las tiradas dan informaciones que deben ser resumidas para formular y poner a prueba las hipótesis acerca del contenido de la botella.
- La comparación de razones vía relaciones de “proporcionalidad” les permite generar cantidades “teóricas” que luego comparan con los resultados “empíricos” de las tiradas, interpretados en términos de “acercamientos”.

En otras palabras, estos razonamientos probabilísticos dan cuenta que en contextos aleatorios, los alumnos construyen un modelo de probabilidad donde recurren a la noción de conservación de las razones internas (CRI) para inferir la probabilidad de ocurrencia de cierto evento o suceso, bajo la hipótesis que las cantidades conservan cierta proporcionalidad.

4.3 Situación didáctica: Una cierta botella Z. Inciso b).

Fecha: 1-12-2017, duración: 20 min / 100 minutos.

La sesión se desarrolló en el tercer momento de la cuarta sesión. Se inicia con un diálogo colectivo donde la profesora presenta el inciso b) de la misma lección, acompañado de un ejemplo. Luego los alumnos vuelven a trabajar en sus equipos. La sesión finaliza cuando la profesora prepara el pizarrón para la puesta en común que no se llega a desarrollar, y la fatiga de los alumnos es evidente.

4.3.1 Análisis previo de la S.D. 2.3: Una cierta botella Z. Inciso b)

Consigna

1. Se sabe que con una cierta botella llamada Z se obtuvieron los siguientes resultados en muchas tiradas:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	13	7
30	20	10
40	22	18
50	31	19

b) Para cada fila de la tabla anterior, calculen los cocientes de cantidad de canicas negras entre el total de tiradas, luego respondan las preguntas siguientes:
Den argumentos de por qué sí y por qué no.

i) Los resultados obtenidos, ¿dan alguna pista acerca de la composición de la botella?

ii) Si se obtienen cocientes cuyos resultado son 1, ¿qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿y si el cociente es cero?

iii) Si los resultados de los cocientes son próximos a 0.8, ¿Qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿en esa botella habrá más o menos canicas negras?

Propósitos

Se comparten los propósitos de la situación anterior. En particular, analizar los obstáculos que se presentan en el pasaje de un registro coloquial de la razón (relación parte todo) hacia una cuantificación en un registro fraccionario y decimal.

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente

El docente propondrá un breve trabajo en equipos y posterior puesta en común para responder las preguntas planteadas en el **inciso b)** cuyo propósito es establecer vínculos entre las composiciones posibles y resultados de las tiradas, con la noción de cociente, el cual podría ser un nuevo elemento en el problema para tomar decisiones vía la cuantificación de las razones.

Asimismo, estamos revisitando una noción que ha sido trabajada en la fase 1, relacionada al cociente y la razón parte-todo en situaciones de tiros al aro y concurso de escuelas, e inclusive con la sospecha de que esos números pertenecen al intervalo 0-1. Cabe destacar el papel del contexto aleatorio, para darle sentido a esa cuantificación.

Cuando los alumnos realicen los cocientes de cantidad de canicas blancas entre el total de tiradas, se observarán que los valores están próximos a 0.6 (aunque no esperamos aún que los alumnos evidencien la importancia de 0.6), pues para 20, 30, 40 y 50 tiradas, esos cocientes son 0.65; 0.67; 0.55 y 0.62 respectivamente.

Es posible que los alumnos, frente a la **pregunta b i)**, consideren que esos resultados no den información acerca del contenido de la botella (excepto que realicen las comparaciones con los cocientes de cantidad de blancas entre el total de canicas, lo cual en este momento de la secuencia, quizás sea un método poco probable).

Por otra parte, frente a la **pregunta b ii)** los alumnos podrían argumentar que, cuando el cociente da 1, indica que todas las canicas dentro de la botella son blancas, dado que en las tiradas realizadas han salido siempre canicas blancas. La propiedad del cociente que utilizarían es el que afirma que, para todo número entero positivo a (distinto del cero), se verifica que $a: a=1$. El razonamiento para el caso del cociente de canicas blancas sobre el total de tirada es cero, se fundamenta en la propiedad que establece que dados dos números enteros a y b (con b distinto de cero); se verifica que si $a: b=0$, entonces (necesariamente) a=0, que en el contexto del problema significaría que no han salido canicas blancas en cierto número de tiradas.

En la **pregunta b iii)** se propone analizar el caso en que el cociente de canicas blancas entre el total de tiradas es 0.8, también en búsqueda del establecimiento de relaciones entre las estadísticas observadas y la composición de la botella.

4.3.2 Análisis de la experimentación de la S.D. 2.3: Una cierta botella Z. Inciso b)

Presentación de la actividad. La profesora solicita a un alumno que lea el inciso. Presenta un ejemplo, utiliza una tabla en el pizarrón, y se asegura que se comprenda qué es el cociente (asunto que fue discutido en *inciso 4)*, de la S.D.: *"Concurso, ¿Cómo cuidamos el planeta?"*)

Aclara que el cociente debe ser de cantidad de canicas negras entre el total de tiradas. El sentido de la fracción que se escribe es el de cociente: 13 entre 20 y 7 entre 20. También informa a los alumnos que pueden utilizar la calculadora para realizar las cuentas.

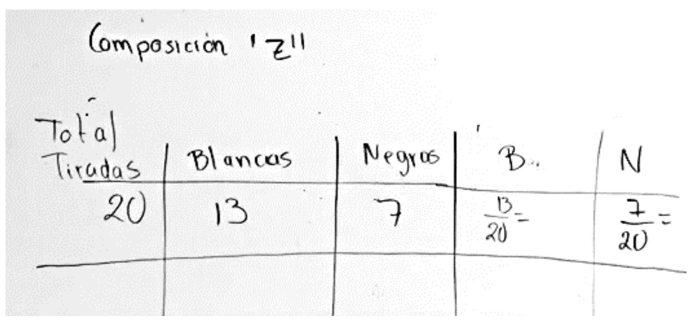


Figura 59. Ejemplo escrito en el pizarrón.

El problema de calcular cocientes de cantidad de canicas negras entre el total de tiradas.

En los cuatro equipos en donde se encontraba un observador, sucedió que han realizado cocientes pero invirtiendo el orden que solicitaba la consigna. A pesar de la aclaración explícita de la profesora de realizar, por ejemplo 13 entre 20, y 7 entre 20, los alumnos decidieron realizar cocientes del tipo 20 entre 13. Posiblemente se deba al repertorio de sentidos de la división que abordaron hasta ahora, en general donde un número más grande se divide "entre" otro más pequeño.

Como veremos a continuación, cada equipo ha enfrentado este obstáculo (cambio de orden de los cocientes) de manera diferente. Lo abordaremos explicitando algunas notas de los observadores y las producciones de los alumnos.

- Caso 1. Sostenimiento del orden erróneo y ausencia del sentido (Equipo 2).
- Caso 2. La intervención directa de la profesora para invertir el orden de los cocientes (Equipo 4)
- Caso 3. Cambio del orden a través de la interacción entre pares (Equipo 3)
- Caso 4. Cambio de orden por la ausencia del sentido en el contexto del problema e intervención de un observador (Obs_1) (Equipo 1)

Caso 1. **Sostenimiento del orden erróneo y ausencia del sentido (Equipo 2).** Frente a la pregunta si dan alguna pista acerca de la composición de la botella, acuerdan en responder que "*No, porque no representan un número entero*".

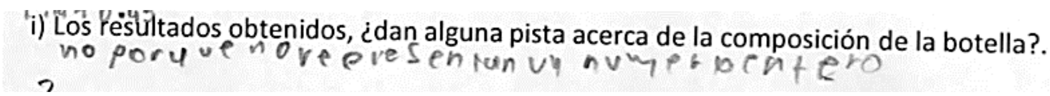


Figura 60. Respuesta escrita de Alex.

En la siguiente imagen se observa la exploración realizada por Marian, que se inicia realizando las divisiones 20:7= 2.85714 y 50:19= 2.6315789, primero con uso del algoritmo y luego con la calculadora. También obtiene los cocientes de la división 30:10 y 40:18. La ausencia del sentido de estos decimales, la lleva a probar sumándolos. Los alumnos sostienen su conjetura, aun con la intervención de la profesora y de Obs_2 que realizaba la videograbación del equipo y la clase.

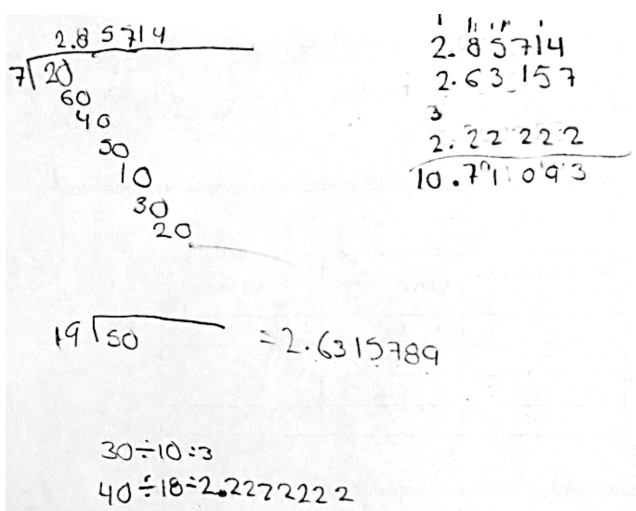


Figura 61. Producción escrita de Marian.

Caso 2. **La intervención directa de la profesora para invertir el orden de los cocientes (Equipo 4)**. De acuerdo al relato de Obs_4 notemos que, la intervención hecha por la profesora en el equipo parece haber convencido a los alumnos que deben realizar los cocientes de las veces que sale cada color entre el total, aunque aún parecen no hallar sentido a tal operación (más que el de ser un pedido sin razón de ser aparente). Al final, realizan una conjetura esperando que esos decimales den como resultado la cantidad exacta de canicas de la botella.

> *Obs_4: "Mientras la profesora da la consigna, Ángel calcula los cocientes con la calculadora, divide 20/7 y 20/13, la profesora lo ignora. Luego grita el resultado: 2.8, pero la profesora lo ignora de nuevo. Luego, más en corto [cuando interviene por equipos] la profesora sí le señala la confusión y le dice que es: 7/20, Ángel comenta que estaba dividiendo al revés. Luego hace todos los cálculos porque sólo él tiene calculadora, pero los compañeros no anotan nada, con excepción de Claudia, quien decide verificar los cocientes. Corrigen varios resultados erróneos.*
> *Les recuerdo la pregunta: ¿Los cocientes dan alguna pista? Claudia dice que hay que convertirlo todo a fracción: 35/100… y siguen. Ángel dice algo de sacar el mínimo común múltiplo, Claudia le dice que ya lo tienen: es el 100. Claudia propone simplificar y ella lo hace así: 9/20, 3/10, 7/20, 19/50. Ángel le pregunta que entre cuánto los está sacando, Claudia le señala que algunos entre 5 y otros entre 2.*
> *Les recuerdo la pregunta i), Claudia dice que sí dan información, pero no logra explicar por qué. Ambos señalan, leen la primera fila de la tabla (.35) como 7/20, 35/100 (eso dice) Que hubiera tres negras y dos blancas… porque en la mayoría el número es con tres, se refiere a .3 (los resultados son: .35, .38, .033 y .45)*

Caso 3. Cambio del orden a través de la interacción entre pares (Equipo 3)

> *Obs_3: Andrés e Itza obtienen los cocientes. Itza se equivoca, divide el total entre las negras. Cuando compara con Andrés se da cuenta y corrige. Axel también dividió al revés, ¡qué persistente es ese error! Andrés me pregunta que por qué no se puede dividir entre 0.*
> *Andrés contesta la pregunta i) (¿los cocientes dan alguna pista?) que "sí, porque muestras cuántas… canicas son aproximadas, por ejemplo en 20 tiradas hay más blancas ya que hay 0.65 y en las negras hay 0.35". Dos ideas interesantes subyacen: 1) Está logrando interpretar el decimal como expresión de la razón parte todo: más de la mitad, menos de la mitad, suman el entero y 2) está viendo al decimal como aproximación de la razón. Itza dice que sí porque "muestra sin el número exacto"*
> *Pregunta ii) Andrés interpreta bien: cociente 1 significa todas las canicas de un color, cocientes 0 no hay de ese color, pero en 0.8 dice que significa que "son menos", si bien expresa que si las negras fueran 0.8, las blancas serían 0.2. Luego, él mismo precisa: de las que salen 0.8 son más. Andrés explica a Itza que si fueran menos (las negras) sería 0.08, con lo cual conveniencia a Itza quien repetirá eso a Marian más adelante[107].*

[107] En el inciso ii) (a modo de mejora) podría reemplazarse la pregunta por la siguiente: ¿Cuántas negras tendrían que haber salido para que el cociente fuera igual a uno? ¿Y a cero?

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	0,65 13	0.35 7
50	0.62 31	0.38 19
30	0.66 20	0.3 10
40	0.55 22	0.45 18
	2.48	1.48

Figura 62. Tabla completada por Itza. Notar que en su exploración, suma los decimales[108].

i) Los resultados obtenidos, ¿dan alguna pista acerca de la composición de la botella?.
Si porque muestra cuantas canicas son aproximadas
por ejemplo en 20 tiradas hay mas blancas ya que hay .65 en la negra hay .35
ii) Si se obtienen cocientes cuyos resultado son 1, ¿qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿y si el cociente es cero?
que todas las canicas son de un color, y si es cero
que no hay de esas canicas
iii) Si los resultados de los cocientes son próximos a 0.8, ¿Qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿en esa botella habrá más o menos canicas negras?
que de las canicas negras da 0.8 hay mas,
mas negras

Figura 63. Respuestas de Andrés[109].

Respuestas de Andrés:

> *i) Si porque muestra cuantas canicas son aproximadas por ejemplo en 20 tiradas hay más blancas ya que hay .65 y en la negra hay .35*
> *ii) Que todas las canicas son de un color, y si es cero que no hay de esas canicas*
> *iii) Que de las canicas negras da 0.8 hay más, más negras.*

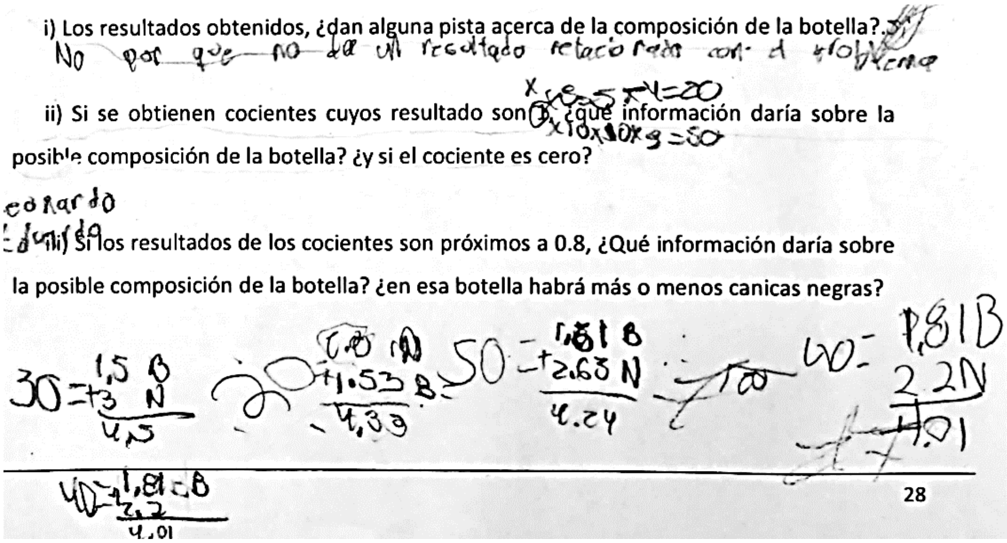
Caso 4. Cambio de orden por la ausencia del sentido en el contexto del problema e intervención de un observador (Obs$_1$) (Equipo 1)

En el equipo 5, como en el resto de los equipos, también cometen el error de dividir el total entre la cantidad de negras. Obtienen números mayores a 1, y realizan algunas conjeturas iniciales como que "*1.3 es una canica y un cachito*".

Antes de intervenir y advertirles que estaban realizando una división errónea, observamos que Byron y Edu realizaban un trabajo exploratorio que involucraba decimales (obtenidos con calculadoras), sumas, y relaciones entre éstos con posibles

[108] Obsérvese también que si se suman 2.48 y 1,48 se obtiene un valor próximo a 4, dado que la suma las frecuencias relativas en cada fila da 1, dado que salir "blanco" o "negro" son eventos complementarios (propiedad que aún no es evidente para los alumnos)
[109] Recordemos que los resultados de las tiradas que se presentaron en una tabla, corresponden a una botella Z cuya composición (desconocida por los alumnos) es de 3 canicas blancas y 2 negras.

composiciones de las botellas, como puede observarse en la imagen de su producción escrita.


i) Los resultados obtenidos, ¿dan alguna pista acerca de la composición de la botella?

No por que no da un resultado relacionado con el problema

ii) Si se obtienen cocientes cuyos resultado son 5, ¿qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿y si el cociente es cero?

iii) Si los resultados de los cocientes son próximos a 0.8, ¿Qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿en esa botella habrá más o menos canicas negras?

28

Figura 64. Exploración y respuesta de Byron.

Estos alumnos estaban implicados en su proceso de actividad matemática, buscando respuestas a la pregunta si los cocientes obtenidos dan alguna pista acerca de la composición de la botella. No advirtieron que han cometido un error con los cocientes, ni observaron el énfasis expresado por la profesora durante la presentación de la actividad. Han hecho un procedimiento donde calcularon los cocientes de dividir los totales entre cantidad de negras y blancas y luego sumaron los cocientes de cada serie de tiradas.

Pequeño estudio del procedimiento: Si designamos con B: blancas y N: negras, los alumnos dividen el total entre las veces que salen negras y blancas y luego suman los cocientes, como puede observarse en la siguiente tabla:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras	División del total entre las blancas	División del total entre las negras	Suma de cocientes
20	13	7	20:13=1.53 B	20:7=2.8 N	1.53+2.8 = 4.39
30	20	10	30:20=1.5 B	30:10= 3 N	1.5+3 = 4.5
40	22	18	40:22=1.81 B	40:18=2.2 N	1.81+2.2 = 4.01
50	31	19	50:31=1.61 B	50:19=2.63 N	1.61+2.63 = 4.24

La respuesta que formulan es que los resultados obtenidos *"No dan pista sobre la composición de la botella porque no da un resultado relacionado con el problema".* Los alumnos obtienen entonces como retroacción del medio, nuevas informaciones que no tienen sentido en el contexto del problema[110].

Luego de que escribieron su respuesta, y parecía que no avanzarían más, le advertí la confusión (Obs_1), lo cual los llevó a recalcular cocientes, donde buscaban un resultado que de información casi exacta de la composición de la botella. Como puede observarse en la siguiente imagen:

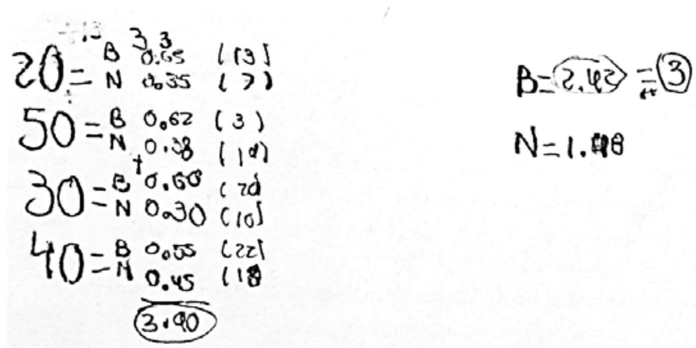


Figura 65. Reverso de hoja de Byron.

En la producción se evidencia que realiza el cálculo de los cocientes (ahora correctamente), pero a diferencia del procedimiento anterior donde sumaba cocientes del total entre blancas y negras, ahora suma los cocientes de blancas y negras entre el total, que conjetura que se acercan a 3 (B=2.42≈3), que se correspondería con la composición de la botella (a la que apostaron en la situación anterior, 3B2N). Hace lo mismo con los cocientes de las negras entre el total, y escribe N=1.48.

Evidentemente esta presentación de los cocientes (en decimales) como expresión de las razones entre total de tiradas y veces que sale determinado color, ha alejado nuevamente a los alumnos del desafío de acercarse lo más posible a la composición de la botella. El contraste entre lo realizado entre la producción de Byron en la situación anterior así lo demuestra[111]. En este equipo el cálculo de los cocientes entonces parecería no

[110] De hecho, está difícil interpretar por ejemplo los resultados de la división del total entre blancas o negras que se aproximan a 1.7 y 2.5 respectivamente y cuyas sumas se acercan a 4.2. Notemos además que en la situación anterior, venían de conjeturar que *4 es una canica, o que 10 o que 28 es una canica*, que se obtiene de dividir el total de tiradas entre 5 canicas que contiene la botella (20:5=4, 50:5=10 y 140:5).
[111] Cuando Byron y Edu conjeturaron que en las 140 tiradas, "*28 es una canica*", obtenido mediante la división 140:5.

ofrecer retroacción suficiente para seguir enriqueciendo la situación de nuevas propiedades.

4.3.3 Comentarios

En el desarrollo de esta situación[112], la entrada de los decimales, como cociente y como expresión que conserva una relación entre cantidades, presenta dificultades en los alumnos que se evidencian en la pérdida del sentido (para qué) de su desarrollo.

Cada vez que se ponen en juego las expresiones decimales, se evidencia cierto desequilibrio en el trabajo matemático de los alumnos, bajo conjeturas que buscan aproximarlas a cantidades enteras, lo cual podría darnos información acerca de la necesidad de nuevas actividades que ofrezcan un repertorio más amplio de experiencias que aborden a este conjunto numérico en relación con las razones. Se evidencia además por la pérdida de potencial adidáctico de la situación, y la exigencia en los observadores y la profesora de aumento de intervenciones en relación con el conocimiento.

Los alumnos que, como vimos, tienen un vasto repertorio aritmético y una actividad matemática instalada y promovida por la profesora (condiciones favorables para el desarrollo de la ingeniería), han evidenciado estas dificultades en la expresión decimal de las razones.

En la situación anterior han producido procedimientos complejos como los de conservación de razones internas, con una estimación de la composición de las botellas (favorecidos por el hecho que los cocientes de totales de tiradas entre 5 son enteros[113]). Sin embargo, los cocientes que se propone en la situación son expresiones de razones externas (blancas o negras entre el total), en una tabla con cantidades cuyas relaciones no son proporcionales sino que son resultados provenientes de una experiencia aleatoria, y de operador no entero.

A su vez, los alumnos se están inmersos en un proceso de algebrización en donde hay encuentros y desencuentros con lo conocido y desconocido. Esta situación nos deja ver que la modelización de la probabilidad bajo la noción de frecuencia relativa, implica un

[112] Tal como sucedió en el *inciso 4)* de la S.D: *Concurso, ¿Cómo cuidamos el planeta?*
[113] En efecto, han utilizado cocientes 4=20:5; 10=50:5; 28=140:5. Incluso si hubieran hecho cualquiera de la tabla, 20, 30, 40 y 50 son todos múltiplos de 5.

camino más largo, donde se desarrolle un juego epistémico y de aprendizaje en donde sea posible:

- Que una relación como “3 de 5” puede ser “medida” con un número, cuyo rango es 0-1;

- Que ese número tiene dos fuentes y dos interpretaciones convergentes. La división, o la fracción decimal equivalente.

- Que un porcentaje también puede cumplir con este papel.

NOTA: Debido a que transitábamos las semanas de cierre del semestre escolar, y en la semana posterior hubo coincidencia del horario de la experimentación con una reunión escolar, sólo nos quedaba el último viernes hábil de diciembre. Este imprevisto ha causado que hiciéramos un recorte en la experimentación de la secuencia, en donde omitimos desarrollar los incisos c) y d) que notamos que llevaría toda una sesión, y elegimos como última situación para experimentar, la que sigue a continuación.

5. Situación didáctica: ¡Calcula, apuesta y gana!

Fecha: 15-12-2017, duración: 100 minutos.

La situación didáctica se desarrolla en tres etapas. En las dos primeras (de aproximadamente 60 minutos), la profesora en interacción con los alumnos, el juego y eventualmente con el investigador, realiza ajustes para lograr cierto equilibro, con el establecimiento de un milleu. La situación demanda una fuerte presencia no sólo de gestión de resultados obtenidos con el simulador virtual, sino en nuevos acuerdos sobre las reglas del juego. En la tercera etapa de la sesión, se desarrollan tres partidas de la manera cómo se había previsto en la investigación, emergiendo en algunos equipos procedimientos análogos a los descriptos en las sesiones anteriores.

5.1 Análisis previo de la S.D. 2.4: ¡Calcula, apuesta y gana!

Materiales

- Una computadora con el simulador de botellas de Brousseau.
- 150 fichas o semillas, para realizar apuestas.

La situación inicial

El docente entregará a cada equipo 20 fichas, que podrán cambiar por 20 repeticiones consecutivas del experimento con una botella con cinco canicas, blancas y negras. Los alumnos desconocen la composición. El docente será el encargado del intercambio (trueque) de fichas por tiradas, disponiendo de una computadora con un simulador virtual de tiradas, la gestión de apuestas, y ganadores.

Los alumnos solicitarán al docente los resultados de las tiradas, quien será el encargado de realizar la simulación y dar la información: *"En 20 tiradas han salido... canicas **negras**".* Todos los alumnos recibirán, de acuerdo a sus pedidos, tiradas de una misma botella.

Cómo jugar

El objetivo del juego de apuestas es estimar la cantidad de canicas blancas y negras que tiene la botella, de acuerdo a las tiradas que vayan solicitando al docente.

- Se juega en equipo de 3-4 jugadores.

- Cada equipo tendrá 20 fichas que podrá intercambiar por resultados en 20 repeticiones del experimento realizados con el simulador de una botella con 5 canicas blancas y negras.
- Cada ficha equivale a 20 tiradas.
- Cuando un equipo está seguro de la composición, propone una apuesta. En ese momento todos los equipos deberán realizar las suyas y además:

  -Proponer una cantidad de canicas blancas y negras que tiene la botella
  -Dar argumentos basados en los resultados de las tiradas e indicar que sucederá con las frecuencias relativas si se realizaran un gran número de tiradas.
- Se verificara la apuesta realizada a través del simulador, ingresando la respuesta a la pregunta: *"¿Sabes cuántas negras son?"*, y dando clic en el botón *"Calificar".*
- Si la composición es correcta, recuperan el doble de lo apostado. Si es incorrecta, pierden su apuesta. ***Gana el juego el equipo que al finalizar la sesión, tenga más fichas.***

Registren los resultados de las tiradas y los cálculos realizados.

Propósito didáctico: Se pretende que los alumnos utilicen procedimientos de comparación de razones, fracciones y decimales para establecer relaciones entre la composición de la botella y los resultados de muchas tiradas. En particular, establecer relaciones entre las cantidades relativas de canicas negras (o blancas) contenidas en la botella.

Propósito de investigación: Estudiar las relaciones que los alumnos establecen entre una cantidad determinista (contenido de la botella) y los resultados de grandes números de tiradas (aleatorios). En particular, interesa observar de qué manera son utilizadas las nociones estudiadas en situaciones previas, y si ese trabajo favorece el uso de frecuencias relativas (bajo el registro de razones, fracciones o decimales) para utilizarlas en tomas de decisiones en contextos con presencia del azar. Asimismo estudiar la ley de los grandes números desde la perspectiva de las razones, como una propiedad que se conserva, relacionada a una regularidad[114].

[114] Que cuando se aumenta la cantidad de tiradas, las razones entre blancas y el total de tiradas, se aproximan a la razón entre blancas y total de canicas de la botella, y que esa aproximación es tanto mejor cuando mayor es el número de datos.

Nota sobre el simulador virtual

Es un programa pseudo-aleatorio que puede ejecutarse bajo el sistema operativo Windows 98 en adelante. Fue diseñado para simular la botella de Brousseau, que se menciona en el proyecto 5.3 del libro que está acompañado de un CD con estos recursos y disponible on line[115].

De acuerdo a la exploración realizada, el programa permite simular hasta 10.000 repeticiones del experimento, y calcular la cantidad de canicas negras así como su frecuencia relativa y acumulada.

El programa da dos oportunidades para arriesgar la cantidad de negras de la botella devolviendo el resultado de acierto o de error. Si en la segunda oportunidad no se acierta, devuelve la cantidad de canicas negras y se reinicia con una nueva composición. Haciendo clic en “Borrar” se cambia la composición de canicas dentro de la botella.

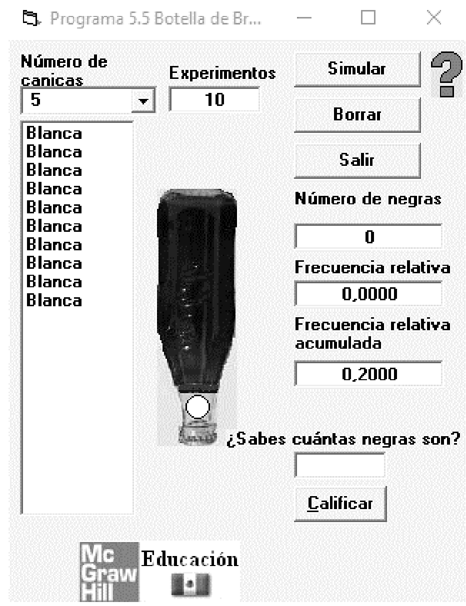


Figura 66. Programa Botella de Brousseau.

También posee un icono de ayuda, donde explica su funcionamiento de la siguiente manera:

> *“Se trata de determinar el número de canicas encerradas en la botella. Para ello debes seleccionar el número total de canicas. En el cuadro inferior podrás anotar el número de canicas negras que, de acuerdo a tu criterio, están contenidas en la botella. Tendrás dos oportunidades para acertar. Puedes cambiar el número de experimentos para tratar de aproximar la proporción de canicas negras en la botella. Una vez que acierte o falle a la segunda oportunidad, podrás utilizar el botón Borrar para reiniciar el juego. En este caso cambiará el número de canicas negras.”*

Posibles respuestas de los alumnos y la gestión docente

Uno de los objetivos del juego es el de construir un método de previsión para encontrar los valores limites a los que se aproximan las frecuencias acumuladas, cuando el experimento se repite muchas veces.

---

[115] Se encuentra disponible en la dirección http://www.mcgraw-hill.com.mx/pye01e/ (Recuperado en febrero de 2017) junto a otros programas que acompañan el libro: “Probabilidad y Estadística para Ingeniería, un enfoque moderno, Antonio Nieves Hurtado y Federico C. Domínguez Sánchez, Editorial Mc Graw Hill, 2010.

El juego podría permitir a los alumnos: i) La posibilidad de tener rápidamente resultados de muchas tiradas de una botella con composición desconocida, ii) Sumar resultados entre varias tiradas con la misma botella, con lo cual podrán calcular frecuencias acumuladas, y iii) El contexto de juego favorecería la búsqueda de relaciones entre tiradas y composición de las botellas, utilizando el mínimo posible de datos (para economizar fichas).

Será importante solicitar a los alumnos que registren los resultados que obtienen de las tiradas, así como los procedimientos, cálculos, estrategias que den argumento a su apuesta.

Por otro lado, el juego podría permitir la búsqueda de una estrategia para ganar siempre, con la mínima cantidad de fichas. Por ejemplo, los alumnos podrían establecer relaciones entre canicas negras y posibles composiciones de las botellas (método de previsión). Entre las relaciones posibles se destacan las siguientes:

1n es equivalente a 1 de 5; 1/5; 2 de 10; 20 de 100; ó 0.2
2n es equivalente a 2 de 5; 2/5; 4 de 10; 40 de 100; ó 0.4
3n es equivalente a 3 de 5; 3/5; 6 de 10; 60 de 100; ó 0.6
4n es equivalente a 4 de 5; 4/5; 8 de 10; 80 de 100; ó 0.8
5n es equivalente a 5 de 5; 1/1; 10 de 10; 100 de 100, ó 1

Estas relaciones pueden ser útiles para decidir a qué valores se aproximan las cantidades de canicas negras respecto al total de tiradas de una tarjeta con cierto número de tiradas.

Antes del final de la clase, a modo de institucionalización, podría preguntarse, ¿Qué podemos saber hasta ahora?, explicitando:

- El cociente de canicas negras que salieron entre el total de tiradas, es aproximado al cociente de canicas negras y total de canicas de la botella. La aproximación es mucho mejor a medida que las tiradas aumentan o “se acumulan”.
- El cociente es la frecuencia relativa, y puede escribirse como una fracción.
- El cociente indicaría qué composición de botella es más probable que otra. Por ejemplo, si el cociente de canicas negras entre el total de tiradas se encuentra entre 0.3 y 0.59, es poco probable que sea una botella con la composición de 4n1b.

- Además, el cociente indicaría que en esa botella es más probable obtener una blanca que una negra. Por ejemplo, si el cociente de canicas negras y total de tiradas es 0.62, indica que la proporción de canicas negras (en esas tiradas) fue mayor al de blancas*.*

5.2 Análisis de la experimentación de la S.D. 2.4: ¡Calcula, apuesta y gana!

La sesión se desarrolla en tres etapas o momentos en los cuales hay cambios de reglas del juego que son propuestos por la profesora junto con el investigador e implicaron cambios en las estrategias de los alumnos.

Etapa 1 (Inicial). En el desarrollo de la primera etapa, emergen dificultades técnicas e imprevistos en la gestión que dan evidencia que no es tan sencillo el establecimiento del juego matemático (que funcione adidácticamente) con uso de una computadora, simulador virtual y proyector en la clase. Demanda a la profesora largas intervenciones al inicio, y el establecimiento progresivo de condiciones (donde surge además la necesidad de explicar a los alumnos el funcionamiento del simulador).

Luego de la explicación inicial, la dinámica se configura de la siguiente manera: La profesora hace una serie de 20 tiradas que se proyectan en el pizarrón a todos los alumnos. En función a estos datos, elaboran una conjetura (composición), y la profesora elige a un equipo para que apueste.

Los alumnos al inicio apuestan fichas y expresan una posible composición, que se valida con el software. Si la composición falla, otro equipo conjetura, y se vuelve a validar con la computadora.

Tanto la profesora como los investigadores, luego de cierto tiempo, observamos que no estaba generando un medio antagónico, que permita a los alumnos el encuentro con un desafío. Además, sólo tienen oportunidad de apostar los equipos que rápidamente elaboran una conjetura y arriesgan, quedando afuera del juego los que van más lento. Cuando la profesora les da la palabra, no hay argumentos con una mayor elaboración.

Veamos cómo se fue transformando el medio:

Diálogo. Presentación.
[Luego de solucionar unos problemas técnicos de hardware y con el simulador proyectado en el pizarrón]

P: Les diré como es el juego, y al mismo tiempo les mostraré cual será la aplicación que nos va a ayudar a realizar este juego. El juego consiste en… ¿Qué dibujo tenemos aquí? [Señala la imagen proyectada en el pizarrón]
Aos: Una botella.
P: Que es similar con las botellas con las que nosotros trabajamos. Exactamente como las botellas que hicimos antes, donde queríamos saber que numero de canicas hay de cada color. [Luego explica el funcionamiento del simulador]. Les di 20 fichas por equipo. Cada ficha equivale a 20 rondas. Como el equipo 4 me dio una ficha, voy a simular estos 20 experimentos. [Realiza la simulación] De esas 20 rondas, dice que le salieron ¿Cuántas negras?: 16.
Ahora cada equipo hará su apuesta de cuantas negras cree que tiene. El equipo que gane les daré una ficha y al final el equipo ganador será el que tenga más fichas. El que haya apostado y ganado más veces. Si no apuestan, no van a poder ganar. Por eso es importante apostar. Por ejemplo, ¿algún equipo tiene una apuesta antes de seguir?
Itza: 3 negras y 2 blancas
P: Entonces la pregunta de abajo [aplicativo] me dice: ¿Cuántas negras son? Itza me dijo: son 3. Voy a ver si son 3 y le voy a escribir el resultado que me dijo Itza. Cuando coloco el número, apretó el botón "calificar", a ver. ¡Me puso una carita triste!, pueden volver a apostar. [Varios alumnos quieren participar]. A ver el equipo de allá.
Martin: ¡4 negras!
P: El equipo de allá dice que son 4 negras. Le voy a poner ese resultado. Le doy calificar. Y me da una carita feliz, quiere decir que si acertó. Entonces yo le devolvería una ficha al equipo. ¿Ya entendimos la regla del juego? ¿Quién puede pasar? Escuchamos. El mismo equipo me pudo haber dicho: Maestra, quiero volver a decir otra apuesta. Pero para volver a decir otra apuesta deben darme otra ficha. Y yo les hacía nuevamente el experimento. No le podemos hacer más de dos veces. Cada equipo va a tener oportunidades para acertar. ¿Okey?, ¿Hasta ahí quedamos claro? Cada vez que le doy clic en "borrar", cambia la botella, no tiene lo mismo en su interior. Van a ir cambiando las composiciones. De eso se va a tratar. ¿Ya le entendimos? [Pausa]. A cada equipo le di, empecé con tres [muestra papelitos] donde van a realizar sus apuestas.

EQUIPO N° ……… ………
Composición de la botella: ………… Blancas y ……… Negras
Apuesta: ……… ……… Fichas

(Continúa): Donde dice equipo, vas a poner el número de tu equipo. Donde dice composición, ahí vas a tener que escribir la composición y me la vas a tener que dar para que yo pueda registrarlas. Si no me la das escritas no lo puedo registrar, ¿de acuerdo? [Registrar es verificar la composición con el aplicativo]. Vamos a empezar entonces a ver qué equipo gana. ¡Es una nueva botella, eh! ¡Levante la mano el equipo que quiera apostar para ganar más fichas!

En el episodio anterior, observamos entonces lo que provoca no tener la consigna escrita en la hoja de los alumnos, que podría propiciar que la profesora pida a alguno de ellos que los lea. Se ve en la necesidad de dar una larga explicación para construir una situación (juego de fichas y apuestas) que funcione bajo ciertas reglas. Implica entonces establecer las reglas permitidas en el juego que serán incorporadas al contrato didáctico para que se produzca la génesis (y luego el sostenimiento) del medio. La profesora entonces tiene toda la tensión puesta en establecer las reglas del juego.

Luego del episodio anterior, el juego didáctico de la profesora consiste en hacer funcionar la situación, en búsqueda de que los alumnos comprendan las reglas de juego y busquen una estrategia ganadora.

¿Cómo se juega? Los alumnos primero apuestan sus fichas, luego se les da el resultado de 20 tiradas y tienen unos segundos (menos de un minuto) para decir la composición de la botella.

- Hay equipos que rápidamente realizan sus apuestas, mientras que los que van más lento pierden la oportunidad de jugar.
- La profesora advierte que algunos van más lentos, e indica que les toca apostar.
- Las conjeturas acerca de la composición aún se basan en “más o menos” canicas de un color. Cuando un equipo se equivoca, ya está muy clara cuál será la composición correcta.
- Los alumnos anotan en su papelito su apuesta y composición.
- La profesora los anima a apostar más de una ficha, sabiendo que si ganan, será el doble de lo apostado.
- Todos los equipos quieren participar, algunos anotan los resultados.
- Se incorpora una nueva clausula al contrato: si en la primera vuelta se equivocan, algún otro equipo “lo podrá robar”.
- Van rotando los equipos, y cuando les toca su turno, rápidamente deben dar una composición: el juego es de velocidad y acierto.
- Algunos alumnos en sus equipos discuten su estrategia.

Veamos en la siguiente tabla cuales fueron los resultados de las tiradas y las conjeturas de los alumnos y su verificación:

Cantidad de fichas que apuestan	Cantidad de canicas negras que salieron	Conjetura (composición)	Acierta (A) o Falla (F)
Tirada de ejemplo [diálogo anterior]	16n	3n2b	F
	-	4n	A
1	12n	3n	A
1	12n	3n	A
1	14n	4n	A
2	11n	2n	A
2	0n	1n	F
2	-	0n	A
1	17n	4n	A
1	19n	4n	A
3	14n	2n	F
3	-	3n	A
2	16n	4n	A
3	13n	3n	A

En esta etapa del juego, dado que se apuesta antes de conocer los resultados, ningún equipo arriesga muchas fichas. Algunos alumnos apuestan tres fichas por "*si se equivocan*". Además la situación que empieza a funcionar, aun no provoca la necesidad de tener muchos datos, ni la de elaborar alguna estrategia matemática.

En el equipo 2, los alumnos comentan su estrategia y registran los resultados de otros equipos. Están en búsqueda de un patrón. El Obs_2 que allí se encuentra, les pregunta cómo van en el juego, y comentan que "*todos les ganan al apostar*". La búsqueda de su patrón se basa en el siguiente registro de composiciones: 3,3,4,2,0,4,4,3,4,3,0,2.

Etapa 2 (Intermedia). El Obs_1 propuso a la profesora un cambio en el juego: que diga a los alumnos que a partir de ahora una ficha equivale a 20 tiradas, que apuesten todos al mismo tiempo y que no socialice los resultados. Apaga el proyector. Entonces el nuevo juego consiste en que:

- Ahora apostarán todos los equipos.

- Cada equipo pedirá las tiradas que necesite, cada ficha es igual a 20 tiradas.

- Pero en secreto, cada equipo tendrá su resultado.

- Cuando todos tengan su resultado, entonces veremos la composición. Pero antes deberán realizar sus apuestas. Esto en una puesta en común.

La comunicación de las nuevas reglas:

P: Ahora viene la segunda etapa del juego. Esta segunda etapa nos va a permitir que todos los equipos puedan hacer su apuesta al mismo tiempo. Eso es lo que nos va a permitir. Ahora ¿en qué consiste esta nueva forma? En esta ocasión, cada equipo puede darme una, dos, tres… las fichas que quiera. [Pide que la escuchen]. Una vez que ya me dieron sus fichas, eso va a equivaler a la simulación. Pero esta vez no les mostraré el resultado de la simulación. Ustedes como equipo, van a discutir que composición creen que tiene la botella. Eso es lo que vamos a discutir. Cada equipo haga su apuesta.
Un integrante de cada equipo da las fichas que apostará. Luego hay un momento de 5 minutos donde los alumnos con los datos que tienen de tiradas de distintas botellas (de la etapa anterior) intentan "decir algo" sobre la composición de la botella.

La profesora se tarda un rato en comprender la intención del investigador, a medida que transcurre el tiempo se va dando cuenta que debe instalar nuevas clausulas o reglas del juego a la situación. Que para que los alumnos por equipos trabajen necesitan de los datos de las tiradas. Entonces decide dar a cada equipo sus resultados según las fichas que apostaron. Socializa para todos los resultados que son de cada equipo. Luego que todos realizan sus apuestas, le entregan en un papel, y en una breve puesta en común, socializa la composición de la botella, y "paga" las fichas a los que ganaron: Primera ronda:

Equipo	Acierta (A) - Falla (F)
2	F
3	A
5	A
1	F
4	F

Etapa 3 (Establecimiento de las reglas del juego). Con la siguiente intervención, ahora sí se establecen las condiciones que habíamos previsto en el análisis a priori. Y detectamos además que entre muchas aclaraciones "no dichas" en las fichas, había una que es variable didáctica: n*o se deben socializar los resultados del trueque de cada equipo*.

P: Bien. Ahora sí, chicos. En este juego, ahora sí todos pudieron hacer sus apuestas. Pero ahora yo no les voy a decir en voz alta los resultados, se los voy a anotar en la papeleta de cada equipo. Es decir, por ejemplo, si éste equipo me da 3 fichas le doy 3 resultados, de la misma botella. Si ese [otro] equipo me da 5 fichas le doy 5 resultados. Al final ustedes comentan qué creen que hay en la botella y verificamos qué equipos ganaron. [Algunos alumnos se acercan a la mesa donde se encuentra la profesora con la computadora, y canjean sus fichas por resultados]

Entonces hasta aquí, la profesora ha instalado el juego donde:

-Los alumnos intercambian fichas por resultados de tiradas

-Se empiezan a dar cuenta que con las fichas que tienen pueden obtener resultados de muchas tiradas.

-Hay un momento de exploración y búsqueda de una conjetura lo más válida posible.

-A mayor acierto en la composición, más fichas ganan (con lo cual hay más posibilidades de ganar el juego colectivo, entre equipos)

Con estas reglas, la profesora propone realizar una nueva ronda. Obs_2, que realizaba la videograbación, decide recorrer el aula con la cámara[116]. Se detiene en el equipo 6 (al que no hemos hecho un seguimiento en todas las sesiones), en donde se producía el siguiente intercambio:

Episodio: Buscar un múltiplos para estimar la composición.
[Se acerca Obs_2 con cámara móvil, hay un intenso intercambio entre Laura y René]
Laura: (…) pero se supone que si salieron las 13 negras tienes que multiplicar… ¡pero es que tienes que buscar el múltiplo!... es que tienes que buscar el múltiplo que te acerque más… por ejemplo 4 por… 3 es 12 y entonces sería 4 negras y 1 blanca.
Rene: Por ejemplo, si tu apuestas 3 te dan 3 resultados, ¿no?... [Muestra tres dedos]… por ejemplo en uno te sale 13, en otro te sale 18 y en otro te sale, no sé… 9… [Escribe y ordena los números como si fuese a sumarlos]

$$\begin{array}{r} 13 \\ 18 \\ \underline{9} \end{array}$$

[Continúa] Los sumas y los divides entre la… cantidad de múltiplos que son.
Laura: Por eso… pero en lo que la maestra nos explicó, por ejemplo la otra vez de números primos, puedes buscar los múltiplos [Ríe], puedes buscar los múltiplos porque… por ejemplo ahí… [Indica el ejemplo], si te sale 13 puedes multiplicar 4 por 3 sale 12 y 1 más son los 13 que hay ahí, serian 4 negras y 1 blanca. [Conjetura]

---

[116] Dado que en este momento se generó gran movimiento de alumnos en el salón, y el equipo que hacía seguimiento estaba muy disperso, decide solo en esta sesión cambiar el uso de la cámara fija por la cámara móvil, lo cual nos permitió obtener información de otros equipos, como veremos en los diálogos siguientes.

Obs$_2$: ¿Cómo es eso de los múltiplos? [René va y regresa con su papel de apuestas, avisando que perdieron]
Laura: Ah, bueno es que la maestra nos explicó que podemos buscar múltiplos o números primos que se acerquen al… bueno al número que estamos buscando. Por ejemplo…
Obs$_2$: ¿Por ejemplo qué número de los que tienen ahí?
Laura: Por ejemplo en la pasada nos dijeron que era 13 y buscamos un número que multiplicado por una cantidad nos diera esa cantidad o que se acercara[117] (…).

En el episodio anterior, parecería que Laura muestra con un ejemplo particular una técnica para encontrar la composición de la botella. Primero explica el caso en que salen 13 veces el color negro, y luego expresa la técnica de modo más general. Trata de aproximar la cantidad de veces que sale una canica negra por un número que sea tal que su descomposición en productos (quizás de factores primos), dé una información de la composición de la botella.

Dado que salieron 13 canicas negras, se buscan dos números cuyo producto se acerque más a 13. Encuentran que 12 es el número más cercano a 13 que sale de multiplicar 4 por 3. No sabemos si los factores 4 y 3 son interpretados de la misma manera, dado que en su última afirmación, Laura distingue el producto de “un número” por una “cantidad” que dé (como resultado) esa cantidad [de negras en las tiradas] o que se acercara.

Evidentemente estos alumnos están en proceso de búsqueda de relaciones entre cantidades de veces que sale una canica negra y la composición de la botella. Demuestran un efecto de la sucesión de juegos didácticos que fue provocando la profesora al ir agregando nuevas reglas a la situación. Laura entonces empieza a construir una estrategia para ganar siempre.

En su razonamiento aún está ausente una cantidad que en el equipo que está a su lado ha sido clave: la razón interna 4 utilizada como operador escalar para estimar posibles composiciones, mediante la búsqueda de “un número tal que multiplicado por una cantidad (4) nos da la cantidad o se acerca” (lo veremos a continuación).

En esta tercera etapa, se jugaron tres rondas entre todos los equipos de la clase. A continuación describiré las estrategias que elaboraron en el equipo 1 y cómo éstas

[117] Se refiere a las 13 blancas que salieron en 20 tiradas, en la lección: “Una cierta botella Z”, cuando Itza y Marian expresaron su método de aproximación.

fueron afinándose conforme obtenían más datos. Incluiré imágenes de las producciones escritas.

La técnica para hacer emerger la composición más probable. Equipo 1

En cada una de las tres rondas que jugaron en esta etapa del juego, Byron y Edu han ido mejorando su estrategia para estimar la composición de la botella a partir de la cantidad de veces que salen canicas negras.

- <u>En la ronda 1</u>: Edu registra los resultados en una tabla construida al reverso de la papeleta de sus apuestas.

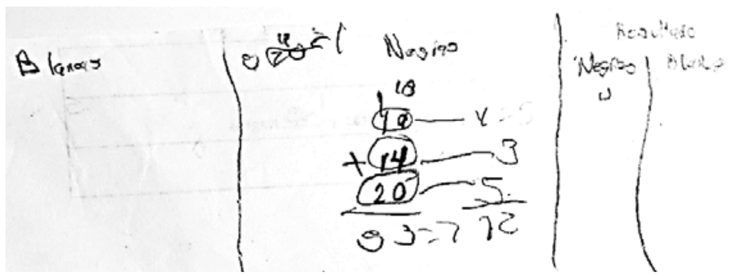


Figura 67. Producción de Edu.

Apuestan 3 fichas, y las canjean por resultados de tiradas, donde obtienen: 19n, 14n y 20n. Las suman y obtienen 53n y calculan cuántos faltan para llegar a las 60 tiradas en total: son 7.

Luego, dividen 20 entre 5 y obtiene el número 4. A continuación buscan qué números multiplicados por 4 se aproximan más a 19, 14 y 20: esos números darían una pista sobre la composición, y obtienen el número 4, 3 y 5, que los suman obteniendo 12.

Negras
19 ---------------- 4 (eligen 4 porque 4x4=16≈ 19)
+14 --------------- 3 (eligen 3 porque 4x3=12≈ 14)
<u>20</u> --------------- <u>5</u> (eligen 5 porque 4x5=20)
53 = 7 12

Hubo un momento de confusión donde asociaron cada ronda de 20 tiradas a una composición diferente. Intervino Obs_1 comentando que las 3 rondas son de una misma botella. Fueron a preguntar a la Profesora y se los confirmó. En esta ronda pierden su apuesta.

- <u>En la ronda 2</u>: Deciden aumentar la apuesta, ahora canjeando 6 fichas.

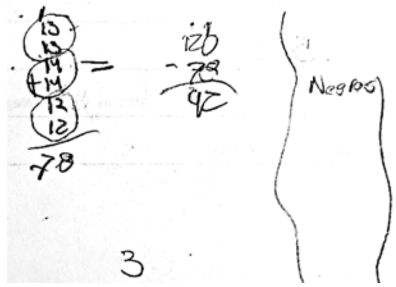


Figura 68. Producción de Edu. Apuesta que la botella tiene 3 canicas negras.

Obtuvieron como resultado de cantidad de negras: 13n, 13n, 14n, 14n, 12n, 12n. Identificaron el patrón que cada uno aparece repetido dos veces. Luego los sumaron, obteniendo 78n.

A continuación restaron 120-78=42 blancas, lo cual les permitió inferir que la botella tiene 3 canicas negras. Ganan la apuesta.

- <u>En la ronda 3</u>: La profesora avisa que el juego está por finalizar. Estos alumnos deciden canjear 18 fichas.

Se acercan al pupitre y la profesora les dicta sus resultados. Como son muchas rondas de 20 tiradas, deciden dividirse el trabajo en dos, Byron y Edu toman 9 datos cada uno:

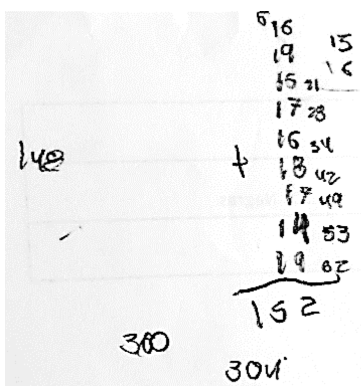


Figura 69. Escrito de Byron.

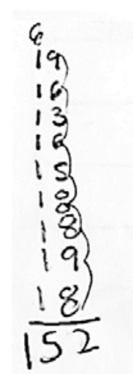


Figura 70. Escrito de Edu.

En la imagen de la izquierda, Byron toma 9 resultados : 16n, 19n, 16n, 17n, 16n, 18n, 17n, 14n y 19n, que al sumarlos da 152n (los números 21, 28, 34, 42, 49, 53 y 62 provienen de sumar las decenas, pero de forma acumulativa, de arriba hacia abajo: 6+9+6=21; 21+7=28; 28+6=34; 34+8=42; 42+7=49; 49+4=53; 53+9=62)

Edu toma las 9 rondas restantes: 19n, 16n, 13n, 16n, 15n, 18n, 18n, 19n, 18n, que al sumarlos con la calculadora da 152n.

Al realizar la comparación de las sumas, observan que el mismo número de canicas negras en total (152). Esto parece conflictuarlos, *¿es esto posible?* Se disponen a revisar sus sumas en búsqueda de "*lo que está mal*". Usan el celular, verifican el resultado.

A continuación, realizan con la calculadora el producto: 18x20=360. Luego suman 152 + 152 y obtiene 304. Comparan 360 con 304n.

Diálogo. Dulce ayuda a Edu a realizar la suma, y Alberto a Byron. Cada uno con 9 tiradas llega a que el total da 152. Luego de un rato de verificar, aún hay sorpresa.
Obs$_1$: ¿Les dio el mismo resultado?, ¿y no son los mismos números?
Edu: ¡No, no son los mismos números!... ¡Nooo! [Compara sus resultados con los de Byron]
Byron: Bueno, esos 4 que nos sobran (…) [Obtiene de sumar las unidades 152 y 152, para que les quede 150]
Edu: Esos son…
Byron: A ver espera… Ah no, si, si estamos bien, si estamos bien, ¡no hay problema! [Voz de fondo la profesora solicita que los equipos entreguen sus papeletas con sus apuestas]
Edu: 156… (…)
Byron: Multiplica 18 por 20…
Alberto: 20 por 18… 360. [Varios hablan a la vez y con voz de fondo de la profesora apurándolos y organizando a los alumnos que caminan en el salón]
Byron: 4 negras…
Edu: (…) menos… 360 menos 304… 56… ¡4 negras y 1 blanca!
Obs$_1$: Bueno, ¿pero porqué 4 negras y una blanca?
Byron: Porque…
Edu: ¡Sobran 56!
Obs$_1$: ¿Sobran?
Byron: Sobran 56… y tenemos 304 negras y… 56 blancas [La maestra los llama para entregar el doble de lo apostado, porque acertaron la composición]

En sus argumentos aparece nuevamente la comparación de cantidades mediante la observación de las diferencias, apoyados en la idea gruesa que más negras en las salidas indica más en la posible composición de la botella.

Pero sospechamos que el argumento más importante ha quedado implícito, ¿en las dos últimas rondas no ha sido verbalizado, o ha funcionado mediante cálculo mental? Emergerá justo en la puesta en común, como veremos a continuación.

Puesta en común. La profesora solicita que se organicen. En cada equipo cuentan sus fichas, para compartir cuantas tienen, pues ahora se definirán los ganadores del juego (los que hayan ganado más fichas en toda la sesión). Luego, pregunta a cada equipo y escribe en el pizarrón las cantidades de fichas obtenidas para establecer colectivamente el equipo ganador:

Equipo	Fichas
5	31
2	12
3	46
4	19
1	66 ✓
6	6
7	35

Diálogo. Cierre de la sesión.

P: A ver chicos, nada más para concluir. [Muchos murmullos]. Necesito nada más dos minutos de atención para que podamos terminar. Guarden silencio para que podamos terminar la actividad. Bien. Cuando nosotros hacíamos las apuestas, yo te daba resultados. Con los resultados que tú tenías, ***¿Cómo le hacías para apostar? ¿En qué te fijabas? ¿Qué era lo que hacías para poder apostar?***

Edu: ¡No pensar! [Lanza desde el equipo 1. La profesora da la palabra a Itza (Equipo 3)]

*Itza: Nos fijábamos en cuantas, si había mayor de negras y depende al número era lo que había. Por ejemplo…****nos dimos cuenta que a veces, cuando eran mayor de 12 canicas negras… podían ser 4 y a veces daban 3 negras (…)***

P: Silencio porque no los escucho y están susurrando entre los equipos. ¿Algún otro equipo que hizo para poder sacar sus apuestas? ¿En que se fijaban? [Da la palabra, en otro equipo]

Edu: ¡En no pensar! [La profesora da la palabra a Byron (Equipo 1)]

Byron: Como siempre, nos complicamos la vida. En la primera etapa, como eran 20 rondas, ***dividimos 20 rondas entre las 5 canicas de la botella, y…***

P: Escuchen lo que hicieron… no me dejan escuchar porque hacen mucho ruido… bajamos el tono para que podamos salir. Ahora sí. [Falta muy poquito para el timbre de salida]

Byron: ***Salía 4...y eso era lo que nos daba cuántas canicas*** *(…)*

P: Bien y en la segunda etapa[118], ¿cómo le hicieron? ¿Qué hacías con los resultados que yo te daba?

---

[118] La profesora divide la clase en dos etapas, pero en este análisis presentamos la clase dividida en una sucesión donde distinguimos tres grandes etapas o "momentos" (Inicial, intermedio y final), en relación con las nuevas reglas de juego que se establecen. El segundo momento al que se refiere la profesora es para este análisis, el tercero.

Byron: Nosotros nada más ***andábamos haciendo múltiplos, 3, 6, y 18*** *[Estas son las fichas que apostaron]*
// Edu: ¡Oye, dijiste nuestra trampa! *[Sonríen][119]*

Aquí inicia un episodio en el equipo 1, mientras la Profesora continua la puesta en común, da la palabra a otro equipo, y cierra la sesión. En este momento, en privado, los alumnos comentan lo que denominan "*trampa*".

Diálogo.
Obs$_1$: ¿Cuál es su trampa? ¿Cuál es su trampa? [Pregunta sonriendo al equipo, en simultáneo, mientras la profesora continúa la puesta en común]
Edu: ¡Dile Byron!
Byron: No te diré mi trampa[120] [Ríen]
Obs$_1$: No, no es trampa… [Risas] si ganaron bien.
Edu: ¿Cómo era? [Pregunta a Byron]
Byron: Es que no sé bien… ¿cómo era?, ¿cómo era? [Pregunta a Edu]
Edu: Es que 20 tiene múltiplos…
Alberto: ***Si salía 4 era una negra, si salía 8 eran 2, si salía 12 eran 3, si salía 16 eran 4…***
Obs$_1$: ¿Cuáles son los múltiplos?
Edu: Es que eran 2… 3… y por lo tanto apostamos por los que eran múltiplos, o sea 18, 16, 14, o así… apostamos 18.
Byron: Por ejemplo, cuando apostamos 6, teníamos 60… 60 tiradas, ¿no? Entonces… ¡Ah, no 120! [Recordar la ronda 2, del equipo 1]
Obs$_1$: Ah, sí, 120.
Byron: Entonces, al tener ese 120, nada más le dívidíaaaamos… y las caniiiicas… ¡es que era mucho rollo!...
Obs$_1$: ¿Y qué tiene que ver el múltiplo ahí?
Byron: Ahí… porque… Así no nos complicábamos tanto la vida entre decir que equivaldría el número de canicas de la… canicas… al número de canicas generales.

En el diálogo anterior, sucedieron dos episodios en simultáneo, y en un tiempo muy breve de menos de dos minutos. Emerge un argumento expresado en la ronda 1, y luego utilizado –y compartido- entre sus integrantes pero dado que era su estrategia para ganar, no la han explicitado hasta este momento.

Estrategia para ganar. ¿Cuál era su "trampa"?[121]

---

[119] La Profesora da la palabra a otro equipo, y cierra la sesión comentando que: *"Si se dan cuenta, la mayoría de los equipos ¿ganaban o perdían?* / Aos: *Ganaban* / P: *"Eso quiere decir que* ***tenían una estrategia que ya no me la compartieron todos****. Hasta aquí vamos a concluir la sesión. (…)"*.
[120] Llamaron "trampa" a su estrategia que los ha hecho ganadores. Un buen jugador nunca explicita su estrategia a sus competidores. Quizás por esto, lo llaman así y sólo lo socializan "en privado" (en el equipo).

Por un lado Byron expresa que obtuvieron 4 como resultado de dividir 20 entre 5. Edu, comenta que 20 tiene múltiplos y Alberto explicita los múltiplos de 4 que son menores a 20 (4, 8,12, 16 y 20).

En el siguiente diagrama veamos cómo modelizan matemáticamente la situación aleatoria, donde hacen emerger de los datos de las tiradas la composición más probable.

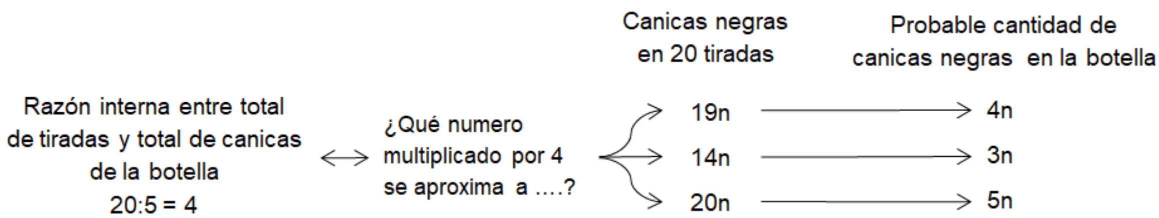


Figura 71. Relaciones entre botella y tiradas.

Los alumnos construyen la razón[122] (interna) entre 20 tiradas y 5 canicas, y lo expresan mediante el cociente 20:5, a partir del cual obtienen un operador igual a 4.

En la primera ronda, donde apuestan 3 fichas, buscan hacer emerger las composiciones, mediante un razonamiento que podríamos formularlo a través de la siguiente pregunta: ¿Qué número multiplicado por 4 da como resultado o se aproxima a ___ (tiradas)?

Con este razonamiento realizan una correspondencia entre cantidad de negras en 20 tiradas y cantidad de negras en la botella, mediante una relación multiplicativa por 4.

> *Alberto: Si salía 4 era una negra, si salía 8 eran 2, si salía 12 eran 3, si salía 16 eran 4… [Y sigue]*

De esta afirmación emerge la regularidad observada por los alumnos:

---

[121] Esto también nos confirma que en este equipo ha funcionado el trabajo de regulación del juego de aprendizaje de la profesora, que logró hacer funcionar un medio, que los alumnos hagan devoluciones, se apropien de las reglas y produzcan su propia estrategia, con control sobre su producción. Quizás sea interesante estudiar de qué manera producir el paso siguiente, cómo se institucionalizan las razones que hacen funcionar esas estrategias, y se expliciten.

[122] Recordemos que estos mismos alumnos en la situación 2.3: Una cierta composición Z, habían obtenido el operador 28, a través del cociente 140:5.

Razón (interna) 20:5=4		Cant. de canicas negras en la botella (nb)		Cant. de canicas negras las 20 tiradas (nt)
4	x	1	=	4
4	x	2	=	8
4	x	3	=	12
4	x	4	=	16
4	x	5	=	20
Constante (en 20 tiradas)		n(b)		n(t)

Evidentemente los alumnos transitan un pasaje de dominio aritmético a otro algebraico, con lo cual no hay uso de letras como representantes de cantidades que varían. Sin embargo, las relaciones que construyen sostienen:

- Que hay una conservación de razones entre contenido de la botella y resultados de las tiradas
- Esa conservación tiene la siguiente regularidad: 4 x n(b) = n(t)

Asimismo las relaciones les permiten hacer emerger la composición más probable en función de los resultados de las tiradas. Dado que 4 se obtuvo como razón entre 20 y 5, las relaciones que los alumnos establecen se orientan a una noción de razón entendida como relación de relaciones, que podríamos expresar como: 20:5 = n(t):n(b), siendo n(t) una cantidad conocida.

Observemos además que preguntarse qué número por 4 da (aprox.) el total de negras de las tiradas, es equivalente a preguntarse qué número por 20:5 se acerca más al total de negras de las tiradas: $\frac{20}{5}\ \mathrm{x}\ \ \mathrm{n(b)} = \mathrm{n(t)}$

Relación con la división. El proceso de búsqueda también lleva implícito relaciones que se establecen entre los términos de una división entera al dividir la cantidad de canicas negras obtenidas entre 4. La cantidad más probable de canicas negras que hay en la botella se corresponde a los cocientes de esa división. Bajo la idea de “aproximarse” está presente también la noción de resto de la división entera.

Por ejemplo, en la segunda ronda, donde apuestan 6 fichas, estiman a partir de los resultados obtenidos que la botella contiene 3 canicas negras, y ganan la apuesta[123].

Segunda ronda. Apuestan 6 fichas						
Dividendo. Resultados de las tiradas (canicas negras)	13	13	14	14	12	12
Cociente. Probable cantidad de canicas negras en la botella	3	3	3	3	3	3
Resto de dividir resultados de las tiradas entre 4 (divisor)	1		2		0	

Figura 72. Relación entre términos de la divisón.

En la tercera ronda, donde apuestan 18 fichas, vuelven a ganar el doble de lo apostado. La secuencia ordenada de canicas negras que canjean son: 13, 14, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19. Con estos datos afirman que la botella tiene 4 canicas negras.

Si analizamos nuevamente la estrategia mediante las relaciones entre los términos de una división, observamos que los resultados varían entre 13 y 19, y donde 3 resultados pertenecen al intervalo 12-16, y los 15 resultados restantes en el 16-19.

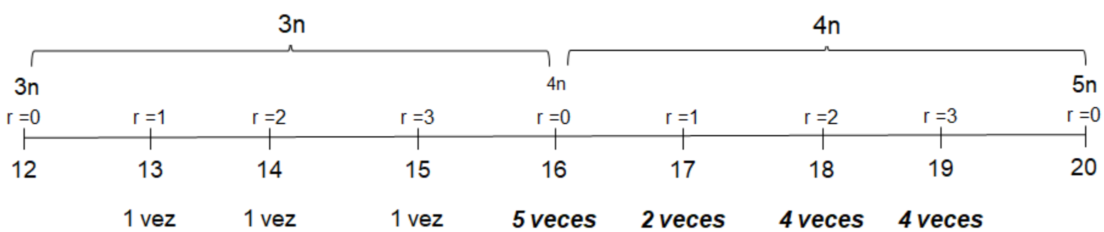


Figura 72. Esquema de relación entre términos de la divisón.

- Si salen los resultados 12n, 13n, 14n o 15n, los alumnos conjeturan que es probable que la botella contenga 3 canicas negras (restos 0, 1, 2 y 3 al dividir por 4).

-Si sale 16n entonces conjeturan que la botella tiene 4 canicas negras (resto 0 al dividir entre 4)

-Si sale 16n, 17n, 18n, o 19n, conjeturan que es probable que la botella contenga 4 canicas negras (restos 0, 1, 2 y 3 al dividir entre 4).

[123] Es el análisis que realizan calculando mentalmente. El razonamiento se convierte en “más plausible de ser verdadero” cuando obtienen totales de negras y de blancas, y observan el predominio de un color sobre el otro, que debe conservarse.

Entonces, la noción de acercar o aproximar los resultados de las tiradas con la composición de la botella, es encontrar el cociente de la división entera de la cantidad de veces que sale color negro entre 4, y cuyo resto sea 0, 1, 2 o 3 (lo cual podría tener estar vinculado con la relación de congruencia módulo 4).

5.3 Comentarios

Durante las dos primeras etapas de la sesión, observamos que la profesora ha tenido que resolver una fuerte tensión entre generar un medio (milieu) lo más cercano posible a su interpretación de las fichas (anticipaciones) y hacerlo funcionar instalando y probando nuevas reglas de juego, fomentando interacciones de los alumnos con esa situación, con ella y entre pares.

En las primeras etapas las producciones que logra de los alumnos, aún distan mucho del tipo de devoluciones esperadas. Las consideraciones son aún muy gruesas respecto a las relaciones entre los resultados de las tiradas y la composición de la botella.

En la etapa 3, observamos que la situación funcionaba mejor cuando los alumnos intercambiaban fichas por tiradas, tenían un tiempo para conjeturar una composición, y luego era validada cuando la profesora pagaba el doble a quienes habían acertado. Sin embargo, en las etapas anteriores varios equipos acumularon muchas fichas, con lo cual ha sido difícil instalar la condición de *economía* de fichas que podría *potenciar* la búsqueda más intensa de conjeturas y pruebas.

Las producciones en esta situación confirman que los alumnos buscan modelizarla matemáticamente a través de la búsqueda de una estrategia para ganar siempre. Frente a la variabilidad de los datos, emerge la noción de “acercamiento” o de “proximidad” a la composición, que se fundamentan en la idea de proyección proporcional, y en recursos aritméticos como el algoritmo de la división entera, múltiplos de un número, suma, resta, cálculo mental, que les retroalimenta de nuevas informaciones sobre el contexto de botellas con canicas: contenido posible y relaciones con los resultados de las tiradas.

Las relaciones que establecen entre las cantidades que son datos de la situación no generaron la emergencia de expresiones decimales ni fracciones (o las evitaron).

Respecto a la participación de los alumnos, muchos de ellos no se han involucrado en la situación y otros solo se mantuvieron al margen sosteniendo consideraciones bien gruesas (posiblemente debido a múltiples factores: último día de clases, cambios en las reglas del contrato, desequilibrio en tiempo necesario para desarrollar la tercera etapa, necesidad de realizar más rondas para fomentar la noción de economía/ganancia de fichas, laxitud debido a factores que desconocemos).

CAPITULO 5. CONCLUSIONES

En este capítulo desarrollaré los aspectos más relevantes del presente estudio didáctico que aborda la noción de probabilidad en diálogo con la estadística y como lugar de encuentro con las razones, decimales y fracciones en la clase de matemáticas en primer grado de nivel secundaria.

En primer lugar me centraré en el juego de la noción de razón como emergente de la dialéctica entre estadística, máquina de azar y probabilidad. En segundo lugar abordaré los resultados notables y dificultades que surgieron en relación a la probabilidad como razón y su expresión como fracción, decimal y porcentaje. Por último, destacaré aspectos relacionados con la gestión de la clase que aunque no se analizaron directamente en esta tesis, podrían derivar en estudios didácticos posteriores.

1. Acerca del funcionamiento de la probabilidad y la estadística en el aula

Poner en funcionamiento los tres polos: estadística, máquina de azar y probabilidad de manera dialéctica ha generado la formulación de razonamientos que se corresponden de un objeto a otro. Los resultados de las tiradas se interpretaban como un indicio acerca de la composición oculta de la botella cuyo contenido es fijo, y a la vez eran indicativos de que las que vendrán deberían reflejarlas. Los alumnos recolectaban datos, los registraban y organizaban, y tomaban decisiones acerca de cuáles son relevantes.

Los registros han ido evolucionando con las sucesivas repeticiones del experimento hasta llegar a cantidades que se relacionaban mediante estrategias aditivas y multiplicativas. Desde las primeras tiradas los alumnos formulaban conjeturas (al principio muy cualitativas) acerca de la composición posible de la botella, pero que poco a poco necesitaron ponerlas a prueba mediante la producción de un modelo de tratamiento de los datos que permita validarlas.

Pudo comprobarse que los alumnos han modelizado matemáticamente la situación aleatoria estableciendo relaciones entre estadísticas, máquina de azar y probabilidad, y mediante elecciones sucesivas de nuevos usos para objetos viejos. La construcción de esto requirió el desarrollo de técnicas y elección de objetos matemáticos (implícitos y explícitos). A su vez, esta construcción ha permitido el cálculo de la distancia entre ese modelo y los datos reales (experimentales) mediante la generación de valores teóricos y una noción de proximidad o acercamiento basado en la conservación de relaciones entre cantidades obtenidas en las tiradas y en las botellas.

El análisis de todo el proceso da elementos para fundamentar que el medio ha evolucionado de manera de producir un modelo de la probabilidad como aproximación basada en resultados estadísticos hacia una cantidad teórica, para un cierto número de repeticiones del experimento. En el modelo elaborado por los alumnos se identifica la noción de razón como un eslabón fundamental. Además esta noción (razón) es un recurso *necesario que permitirá* expresarla (más adelante) como fracción, decimal y porcentaje.

La noción de razón es un elemento del medio (milieu) de la probabilidad y la estadística. A su vez, la probabilidad y estadística constituyen uno de los espacios matemáticos por excelencia en los que vive la razón.

Dicha relación de ida y vuelta da oportunidad para enriquecer el sentido de la razón, en situaciones cuyos contextos tienen presencia del azar, a la vez que las propiedades de la razón permiten aprehender y manipular la noción de probabilidad. En las relaciones entre dos conjuntos de cantidades, pueden identificarse razones “internas” y “externas”: si la relación es de proporcionalidad, las primeras se conservan y las segundas constituyen una constante. En la situación como la de las botellas con canicas, la propiedad que emerge claramente es la conservación de las razones internas de blancas, negras y total (en tiradas y en la botella), siendo la constancia de la razón externa un desafío aún pendiente. La noción de probabilidad y de razón engrosan sus significados, y a la vez da oportunidades para fortalecer las nociones de fracción, decimal y porcentaje[124].

Otra característica que se destaca en este estudio es que la noción de razón, al ser un objeto “viejo” (más o menos conocido, y que figura en el programa de sexto de primaria), presenta ventajas por su carácter de necesidad y funcionalidad: contribuye a sostener el trabajo autónomo de los alumnos porque da posibilidades de construir

[124] Relacionadas con aspectos de *ecología epistémica (Sensevy, 2011)*, es decir de las relaciones entre nociones que cooperan, convergen o comparten propiedades y pueden ser estrategias ganadoras para otras situaciones más o menos cercanas (evidenciadas cuando la probabilidad evoca razonamientos proporcionales). Estas relaciones entre nociones son una parte importante que dan funcionalidad a las situaciones (como vimos en el capítulo 1). En este caso las razones constituyen un elemento del milieu de la situación fundamental de la probabilidad y la estadística.

conjeturas relacionadas al contexto aleatorio en lenguaje coloquial sin requerir de entrada expresar esas relaciones a través de las fracciones, los decimales y porcentajes, pero a la vez es un eslabón que promueve la construcción progresiva de dichas expresiones numéricas y habilita la posibilidad de uso de operaciones aritméticas.

2. Acerca de la probabilidad como razón y su expresión como fracción, decimal y porcentaje.

Durante el desarrollo de las primeras situaciones (tiros al aro y concurso de escuelas) los alumnos utilizaron recursos matemáticos que necesitaron ser readaptados a una nueva exigencia: comparar razones entre cantidades, y no directamente cantidades.

Emergieron conocimientos (como destellos) aprendidos en otros contextos que buscan readaptarlos (o reutilizarlos) a las nuevas situaciones.

Veremos en los apartados siguientes que los problemas de la secuencia evocaron en repetidas ocasiones el *error aditivo en la comparación de razones* así como propiedades que se vinculan con el modelo de proporcionalidad: *la constancia de la razón externa* y *la conservación de razones internas.* Luego en el trabajo de modelización de la situación con botellas con canicas, fue más evidente el uso de la propiedad de conservación de las razones internas. Estas propiedades constituyen datos relevantes en el presente estudio: *en el aprendizaje de la probabilidad, las razones juegan un rol de precursoras en su expresión fraccionaria, decimal y porcentual.*

a) La recurrente estrategia aditiva frente a la dificultad de operar con razones no enteras.

Las situaciones evocaron razonamientos en los cuales la comparación de pares de cantidades mediante estrategias multiplicativas no es fácil de abordar por los alumnos, quienes regresan al uso de estrategias aditivas.

En el problema de tiros al aro, por dar un ejemplo, la situación no ofrece aún la retroacción necesaria para que los alumnos se enfrenten a tal error aditivo. Muchos alumnos no evidencian que comparar diferencias entre tiros totales y encestados (que denominan “tiros fallados”) no resuelve el problema y que frente a totales de tiradas distintos, encestar más o menos tiros no implica ser mejor jugador. A su vez, el contexto favoreció el involucramiento de los alumnos en la situación, en donde se armaron debates y se suscita la duda. Pero es cierto que la validación no es empírica[125] (contundente) y varios alumnos no se dan cuenta que hay un error.

Es probable que los alumnos recurran en este error cuando deben determinar un factor externo entre cantidades distintas y en particular cuando no es entero. Por ejemplo relacionar cantidad de blancas en relación con el total de tiradas o de canicas presenta más dificultad para los alumnos frente a la determinación de un factor interno (entre totales de canicas de la botella y de tiradas) que luego suponen que se conserva, como veremos en los puntos siguientes.

b) La constancia de la razón externa

- *El asomo cualitativo de la razón externa en contexto aleatorio*

Desde el inicio de la situación de botellas con canicas los alumnos formulaban argumentos centrados en la comparación entre cantidades de canicas blancas y negras de las tiradas e inferían que esta relación debería conservarse entre las canicas de la botella (por ejemplo si al observar los registros de las tiradas salieron más canicas blancas que negras, estos resultados dan un indicio de la composición que conservaría este predominio).

Considero que estas expresiones coloquiales de comparación de cantidades de dos conjuntos distintos (el de canicas blancas y el de canicas negras) forman parte de una génesis de la construcción de razones externas en contexto aleatorio. Asimismo el análisis a posteriori confirma que esta relación se asomó débilmente.

- *El porcentaje como "vestimenta" de la razón externa*

---

[125] Brousseau (1986) distingue tres tipos de validación: empírica (o pragmática), semántica y sintáctica. La secuencia podría enriquecerse con problemas que ofrezcan posibilidades de poner en jaque la comparación aditiva de cantidades y promuevan el trabajo multiplicativo. Sin embargo es bien sabido que este error, en tanto obstáculo, aparecerá muchas veces y en nuevos tipos de problemas. Entre las situaciones que evidencian tal error y ofrecen validación empírica, se encuentra el de pedir a los alumnos que amplíen cada pieza de un rompecabezas, de tal modo que el lado que medía 4 cm ahora mida 7cm, y luego reconstruirlo (Brousseau, 1980). Otras situaciones que pueden ofrecer esas mismas posibilidades son las de intercambios (Block, 2006), por ejemplo el cambiar fichas por estampas, donde los alumnos por equipos eligen una regla (cada 2 fichas se cambian por 6 estampas, o cada ficha por 4 estampas, etc.), efectúan los intercambios y ganan quienes logran obtener más estampas, a través de la verificación empírica. Esta última situación es bastante parecida a los primeros problemas de la secuencia, pero con la diferencia de que en aquella la condición "*de cada*" permite generar muchos pares de cantidades, mientras que en esta la discusión se basa en un solo par.

Este objeto emergió desde las primeras situaciones y, como los medios y cuartos, favoreció la producción de argumentos con los que los alumnos expresan (y construyen) la razón parte todo, en situaciones de comparación entre dos o más pares. El uso del porcentaje fue socializado por un alumno en una puesta en común en la que se expuso además la técnica del paso por la unidad.

El porcentaje es un recurso del que disponen los alumnos para expresar una razón externa. En la comparación entre jugadoras de tiro al aro, los alumnos establecieron relaciones entre dos pares de cantidades (tiros, encestados). Estas relaciones las expresaron mediante porcentajes de tiros encestados respecto del total. En sus razonamientos, los alumnos utilizaron el paso por un valor unitario como una técnica subordinada al cálculo del porcentaje. Por ejemplo, sabiendo que Silvia tiró 5 veces y encestó 4, para conocer el porcentaje correspondiente, los alumnos establecen que los 5 tiros se corresponden con el 100% y un tiro es equivalente al 20% del total, con lo cual 4 tiros es el 80%. Con un razonamiento análogo, concluyen que Vanesa encestó el 60% de los tiros realizados (6 de un total de 10). Se revela que el uso del porcentaje se ve favorecido por razones internas y externas enteras[126].

En la fase 2, en las situaciones referidas a las botellas con canicas, el porcentaje no emergió en ninguna producción.

- *La razón externa expresada como fracción*

En particular en las primeras situaciones, cuando los alumnos deben comparar pares de cantidades parte todo, utilizan las fracciones conocidas como medios y cuartos. Funcionaron sobre todo en las primeras situaciones favoreciendo el tránsito de cantidades absolutas a la razón.

Las fracciones emblemáticas[127] (conocidas) ofrecen a los alumnos un andamio para construir y comparar razones. Surgieron sobre todo en la primera fase de la secuencia, y permitieron expresar y construir razones (como relación multiplicativa entre cantidades) a partir de la comparación de dos pares. Por ejemplo mediante el uso del

[126] Ver Situación didáctica: Tiros al aro. Incisos 1, 2 y 3)
[127] La noción de "emblema" es una categoría que proviene de la Teoría de la Acción Conjunta (Sensevi, 1996). La emblematización caracteriza el proceso por el cual una noción o producción de un alumno se hace visible y será un elemento de la memoria didáctica de la clase.

emblema: "*es más o menos de la mitad (o el 50%)*", los alumnos establecen relaciones dentro de cada par de cantidades y luego entre pares.

Por otra parte, estas fracciones, en tanto razones accesibles para los alumnos, ayudaron a revisitar el tránsito entre lo aditivo y lo multiplicativo. Se evidencia cuando desde las primeras situaciones emergen estrategias aditivas (usando sumas y restas entre los elementos de cada par, cuando cuentan tiros fallados, o calculan la resta entre las veces que sale un color de canica y el total de repeticiones), y en algunos casos usando estrategias multiplicativas (por ejemplo cuando comparan los elementos de cada par razonando sobre la representación de la parte con respecto al todo, si es más o menos la mitad o un cuarto; o cuando calculan porcentajes).

Las veces que aparecieron las fracciones expresaban una razón externa entre cantidades. En las situaciones referidas a tiros al aro, como las del concurso de escuelas, las fracciones surgieron con cierta dificultad (antes de ser propuestas por la situación misma) expresando una relación entre parte y todo (en tal escuela aprobó más de la mitad de los alumnos).

La situación donde se solicitaba realizar comparaciones teniendo como único dato una fracción (cuando abordan el inciso 3: "*Se sabe que en la escuela E pasaron el concurso 3/7 del total de alumnos"*), generó múltiples discusiones (al interior de los equipos y en fases colectivas), permitiendo dar fuerza a la idea que las fracciones expresan una razón entre cantidades (estas últimas son las que permiten comparar) y constituyen una nueva información, más allá de las cantidades que se ponen en juego. Al principio varios alumnos interpretaban que la fracción no aportaba información, y lo manifestaban ignorándola o elaborando argumentos coloquiales con uso de comparaciones mediante estrategias aditivas, pero a lo largo de la situación vieron varios de ellos que sí es posible. Desarrollaron procedimientos donde hacían uso de técnicas (simplificaciones, amplificaciones, búsqueda de común denominador) pero que sin embargo ha demandado una fuerte gestión de la profesora (esto posiblemente sea un indicio que ha faltado mejorar la propuesta en esta dirección).

Con respecto a la fase 2, en la situación de botellas con canicas, emergió solo en un equipo la escritura fraccionaria para expresar relaciones entre canicas blancas y negras (parte parte). Estas fracciones expresarían una razón externa (pero los alumnos lo interpretan realizando diferencias entre numerador y denominador). En esta fase hizo falta tiempo para enfatizar el uso de la fracción y abordar una situación en la que se pusiera en evidencia su uso en tablas similares a las situaciones de la fase 1.

El análisis de la experimentación ha revelado que la fracción es un objeto fuertemente imbricado en el proceso de modelización de la probabilidad, y por lo tanto las razones, en tanto precursoras de las fracciones, juegan un rol fundamental. En este contexto las fracciones expresan una razón externa entre cantidad de veces que sale un color y el total de veces que se realiza el experimento y entre la cantidad de canicas de un color y el total de canicas de la botella. Pero que además estas razones externas se construyen simultáneamente mediante el funcionamiento de las razones internas que veremos más adelante.

- *Las expresiones decimales de las razones externas*

Cada vez que se pusieron en juego los decimales, se evidenció cierto desequilibrio en el trabajo matemático de los alumnos, donde buscaron aproximarlos a cantidades enteras, y/o abandonaron el contexto del problema.

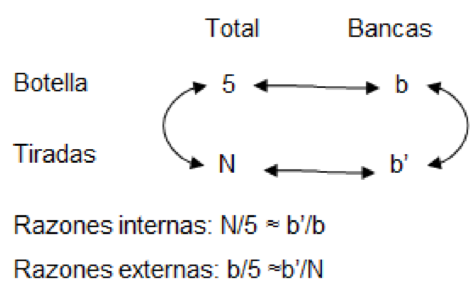
Esta ausencia de sentido de los decimales se ha identificado en las situaciones donde se buscaba institucionalizar que *las razones también pueden expresarse como decimales obtenidos como el cociente entre una parte y el total, dando información sobre la relación entre las cantidades puestas en juego*. Por ejemplo cuando una situación planteaba que en la escuela de Alicia pasó el concurso 0.8 de los alumnos, pocos estudiantes mostraron poder abordar la situación de manera adidáctica. La no emergencia se evidencio además en la necesidad de la profesora de intervenir más, organizar, sugerir, recurrir a las estrategias que anticipamos en las fichas. Sólo dos alumnas, Marian e Itza, lograron proponer un par de cantidades cuya razón era un decimal dado (0.3 razón correspondiente a 6 alumnos de 20), pero dicho par quedó como solución única (o único par cuya relación se expresa mediante el decimal 0.3), con lo cual la idea potente de la razón como expresión de infinita cantidad de pares de cantidades, no emergió.

En la segunda fase también se presentaron dificultades que provocaron el abandono del contexto de la experiencia. En ambas, los decimales aparecieron asociados a un cociente (parte todo) que expresaba una razón externa no natural. Se observa allí la emergencia de otro aspecto de nuestro objeto de estudio que se revela muy necesario seguir estudiando: ¿Cómo lograr que los alumnos se apropien del significado de los decimales como razones? ¿Desde la división y/o desde las fracciones?

c) La conservación de la razón interna

Una de las hipótesis de este estudio, es que en la enseñanza habitual de la probabilidad, no se deja *vivir* la noción de razón, debido a que se enfatiza demasiado pronto su expresión fraccionaria, decimal, y porcentual.

La experimentación de la secuencia deja ver que, en la modelización de la situación, los alumnos registran y exploran los datos, y luego establecen relaciones entre los resultados de las tiradas y el total de canicas que hay en la botella. Relativamente pronto suponen que la composición de las cinco canicas de la botella se debe reflejar muy parecida en la composición de las tiradas. Con este supuesto, los alumnos optan por poner en juego la conservación de las razones entre cantidades conocidas del conjunto de tiradas y las cantidades hipotéticas de la botella de la siguiente manera: si hubo N tiradas, dado que la botella tiene 5 canicas, la razón entre ambas es N/5, y, parecen pensar que esa misma razón es la que debería haber entre las canicas blancas de la botella y las canicas blancas del conjunto de tiradas (análogamente para las negras), es decir, hay un supuesto de que las razones internas deben conservarse[128]. Esta vez son las razones externas no enteras (entre canicas blancas o negras y total o entre blancas y negras) las que permanecen implícitas.



Los alumnos construyeron un modelo de proyección proporcional que supone la conservación de las razones internas entre resultados de las tiradas y el contenido de la

[128] La conservación de las razones internas entre resultados de las tiradas y composición de la botella, ha ocurrido en varias sesiones. Por ejemplo en diálogos en equipo y en puesta en común, y en producciones de: Andrés y Edu (Sesión 3), Andrés, Marian, Itza, Byron y Edu (Sesión 4).

botella. Emerge por primera vez cuando frente a las tiradas con las botellas con canicas, Andrés, ha puesto en jaque (al menos por cierto tiempo) la conjetura generalizada en la clase que "*no se puede saber exactamente la composición*". Andrés expresa que *"cada cuatro veces que sale un color, equivale a una canica"* (en 20 tiradas), y usa esta conjetura para estimar la composición de la botella donde han salido 15 veces las negras y 5 veces las blancas. En las sesiones siguientes, otros alumnos afirmaron que "una canica es igual a 4 (en 20 tiradas)". Una versión completa del modelo surgió en la explicación que realizaron Byron y Edu en las sesiones siguientes, cuando calcularon la razón interna (28=140:5) y la utilizaron para obtener cantidades teóricas que luego contrastaron con su conjetura (la validaron).

La emergencia del procedimiento de conservación de razones internas pudo haberse visto facilitado por la presencia de una variable didáctica: que siempre el número de tiradas había sido múltiplo de 5, con lo cual la división siempre da como resultado un número natural (tiradas: 5, 20, 30, 40, 50, 100, 140).

Así, se confirma que el recurso a las razones internas (naturales) permite manipular las razones externas no naturales las cuales permanecen implícitas, sin necesidad de usar fracciones.

Comprobamos que en el contexto aleatorio, las razones son un recurso necesario para establecer relaciones entre el conjunto de datos (estadísticas) y una composición oculta de la botella, e iniciar el tránsito (complejo) hacia la expresión fraccionaria, decimal y porcentual de la probabilidad (y que mucho después permitirá la construcción del sentido de leyes fundamentales como la ley débil de los grandes números).

Cabe destacar que esta tendencia del uso del modelo de proporcionalidad tendrá que evolucionar incorporando otra dimensión: no hay proporcionalidad de entrada, pero sí hay una tendencia hacia ella e idealmente la hay con un gran número de tiradas.

3. Acerca de la gestión de la clase y de otros aspectos para seguir estudiando

En este apartado destacaré algunos aspectos relacionados con la gestión de la clase, que, aunque no fueron objeto de análisis de esta tesis, podrían derivar en estudios didácticos posteriores.

- *El contexto de producción matemática en el aula, que incluye la obtención de datos, su exploración y la elaboración de razonamientos que se formulan y ponen a prueba, favorece la construcción de un modelo matemático de la probabilidad.*

La cláusulas del contrato didáctico entre las cuales se destaca la instancia de trabajo en equipos con discusiones colectivas, intercambio de ideas, la formulación de conjeturas, la exploración de datos, la búsqueda de resultados y de explicaciones o la explicitación de algún procedimiento o técnica, generaron en el aula un *clima* que favoreció el desarrollo de un proceso de modelización.

- *En el trabajo en conjunto entre profesora y alumnos, se observa una revisión de nociones viejas que emergen (sobre todo aritméticas). En este proceso se fortalecen las ideas, desanudando las viejas (o readaptándolas) y anudando con las nuevas.*

Abordar situaciones fundamentales como las botellas con canicas, ha sido una ocasión para volver a nociones viejas, a veces poco comprendidas, y ponerlas en diálogo. En particular las nociones de razón, fracción, división, o la técnica de obtención de fracciones equivalentes, la regla de tres en el cálculo de porcentajes, el paso por la unidad, o los decimales. En el proceso de búsqueda de una respuesta al desafío de averiguar si se puede conocer la composición de las botellas, los alumnos, con la profesora, utilizaron conocimientos de la cultura matemática instalada en la clase (o mejor dicho de la memoria didáctica de la clase). En este proceso, se producen vínculos entre recursos viejos que van construyendo la noción de probabilidad y en diálogo con la de estadística.

- *Por otra parte, la interacción de la profesora con las situaciones ha implicado el desarrollo de variados juegos didácticos para instalar los problemas y hacer emerger conocimientos, muchos provenientes de la memoria didáctica de la clase.*

Estos juegos se expresan en el diagnóstico de la profesora sobre el avance de las producciones de los alumnos y la necesidad de otorgarles más tiempo en fases grupales; en la escucha de las explicaciones e interpretación de las conjeturas que formulaban; en la identificación del momento oportuno para realizar puestas en común (a veces al inicio de una situación, otras veces para que se apropien de las consignas); cuando resuelve situaciones imprevistas que emergen de la interacción con los alumnos y con el medio; en el tipo de ayudas que propone (a veces individuales, otras veces por equipos, y otras a toda la clase en una discusión colectiva).

- *El tiempo juega un rol importante en la gestión de la clase y condiciona el funcionamiento de la actividad matemática en el aula*[129].

En general el tiempo de desarrollo de cada inciso de la secuencia ha sido mucho mayor al previsto en las fichas para el docente. Además, las sesiones que duraron 100 minutos han sido agotadoras para los alumnos y la profesora. En las cada sesión se desarrollaron hasta tres situaciones, y requerían de la profesora de una gestión particular: una breve presentación de la lección o su lectura colectiva, un momento de trabajo en equipos, y breves puestas en común e institucionalizaciones.

- *El conocimiento que produce un equipo en un momento adidáctico, circula en el aula en las sucesivas instancias (interacciones colectivas, grupales e individuales, entre pares y con la profesora).*

Hay ciertos conocimientos que se construyen en un contexto como el de botellas con canicas, que se van movilizando en el aula, a través de las interacciones entre los integrantes de los equipos, y sucesivas puestas en común que van poco a poco instalándolas en el medio.

Una vez que se genera una estrategia, esta se pone a consideración entre los integrantes del equipo, y una vez socializada empieza un recorrido en el aula, donde otros equipos la ponen a prueba (no ocurre solamente a través de las puestas en común). Un ejemplo de esto sucede en la última sesión cuando Obs_2 toma la cámara móvil y dialoga con un equipo que no ha sido observado en las sesiones anteriores. Allí se evidencia que están construyendo la noción de *proyección proporcional* (relacionando el contenido

---

[129] Este tiempo también es un objeto que podría derivar en estudios posteriores, dado que está relacionado, de acuerdo con Sensevy (1996), al avance de los alumnos en sus aprendizajes. Este autor lo explica utilizando la categoría de "*Cronogénesis". (…) "En la escuela, la restricción mayor es la temporalidad. Desde la fundación de la escuela moderna, a finales del siglo XVII, la institución del tiempo didáctico ejerce una fuerte imposición en el funcionamiento de la clase (Chevallard y Mercier, 1987, Mercier, 1992). El desfile de objetos de saber impide su trabajo en el tiempo previsto, y por consiguiente el estudio, y produce el "desajuste cognitivo [déconcertation cognitive]" (Chevallard, 1990): el alumno es aquél para quien ser un experto está prohibido. Podemos hacer la hipótesis siguiente: para que las "actividades", en el interior de las cuales el alumno pueda darse tiempo, perduren, es necesario que contribuyan a hacer avanzar el tiempo didáctico. Las producciones de los alumnos, en el seno de tales actividades, deberán por lo tanto, crear tiempo, ser cronogenéticas" (Sensevy, 1996, p. 4. Traducción realizada por* A. Ávalos y M. Ramírez para el Seminario de Didáctica de las Matemáticas del DIE)

oculto de la botella con los resultados de las tiradas), tal como habían comentado Itza y Marian en la sesión anterior, mediante aproximación de múltiplos de 4. En este equipo están interpretando una estrategia que se generó en otro equipo, tratando de ponerla a funcionar en este juego con fichas, aunque aún no está muy claro que el 4 proviene de dividir 20 entre 5. Analizar más esta idea de conocimiento en movimiento podría ayudar a entender qué y cómo se socializa y comparte en el aula.

- *Sobre la conformación de los equipos y el aprendizaje en las interacciones entre los alumnos.*

Junto con la profesora se decidió organizar a los 42 alumnos en siete equipos de seis integrantes, bajo el criterio de heterogeneidad a partir del conocimiento que tenía de ellos. Estos equipos se mantuvieron durante todo el desarrollo de la experiencia. Efectivamente en cada equipo sobresalían alumnos que tenían un alto desempeño en matemáticas, frente a otros un poco más rezagados.

Se observaron casos en los cuales había alumnos que participaban esporádicamente pero tendían a estar rezagados. Pero también se observaron casos, como el de Aline o Alberto, quienes teniendo un desempeño regular en matemáticas, participaban en sus equipos, elaboraban conjeturas, refutaban las de sus compañeros, al parecer favorecidos por un contrato didáctico en el que estaba permitido el error. Es decir, estos alumnos estaban involucrados en la actividad matemática que se proponía y la abordaban con sus recursos matemáticos (a veces muy distantes del de los mejores alumnos).

Este punto podría ser dilucidado con más profundidad desde la perspectiva de los estudios que abordan los modos en que los alumnos cooperan o construyen en conjunto y con la profesora, nociones que luego serán conocimientos institucionalizados. Se trataría de aportar respuestas a preguntas como en qué circunstancias, conformando equipos de alumnos muy buenos en matemáticas con otros con mayores dificultades, se promueve que aprende más el que sabe más y más el que sabe menos; en qué circunstancias, sobre todo, se aminora la tendencia del que sabe menos a rezagarse.

- *Acerca de la secuencia de situaciones*

Algunas de las dificultades que manifestaron los alumnos y la profesora en el desarrollo de la secuencia, constituyen indicadores para mejorarla, modificando algunas de las situaciones e incorporando nuevas, en particular:

- Para hacer evolucionar esa técnica de proyección proporcional y acercarnos a la idea que frente a un fenómeno aleatorio no se puede saber exactamente qué resultado saldrá, pero que luego de muchas repeticiones, las frecuencias relativas (es decir las razones) se aproximan a un valor que es su probabilidad.

- Para favorecer la comprensión de los decimales expresando razones. Pienso que las situaciones de la fase 1 constituyen un buen camino, pero claramente insuficiente. Se requieren más repeticiones de la misma situación y más situaciones.

- Para favorecer el poner en cuestión las estrategias aditivas. Como se vio, las situaciones utilizadas tanto en la fase 1 como en la 2 se mostraron débiles en ocasiones para cuestionar los procedimientos aditivos. Hacen falta algunas situaciones que agreguen el componente de una validación empírica contundente.

- *Las fichas (para el docente) constituyen un insumo básico que la profesora utiliza. En el desarrollo de las sesiones, las pone a prueba y las transforma.*

En las fichas se incluyen comentarios o anticipaciones sobre los problemas, posibles respuestas de los alumnos, aspectos a destacar o a institucionalizar en las puestas en común, y otras sugerencias para su gestión en el aula. La relación de la profesora con este material constituye otra arista que merece ser profundizada, tal como indican los estudios de las relaciones entre docentes con propuestas curriculares, y cambios en las prácticas de los profesores (ver por ejemplo, Block et al. 2004, 2007; Laguna, 2016). En estos estudios se sostiene que transformar la propuesta es una condición necesaria para su apropiación (Block et al, 2004) y que entre las condiciones para que esta transformación conserve los propósitos de la propuesta, están la explicitación del enfoque subyacente, la participación en talleres, y cierto dominio del conocimiento matemático[130].

---

[130] Siguiendo a Block (2018) destaca que este tipo de estudios "(…) además de ayudarnos a comprender mejor la relación de los profesores con las propuestas curriculares, aportan elementos que pueden ser

La experiencia realizada en el presente trabajo confirma lo anterior, en particular, deja ver el efecto que ciertas carencias de la propuesta tuvieron en la actividad requerida a la docente: debates en los que tuvo que hacer “malabarismos” para poder dar la vuelta a respuestas de los alumnos que corrían el riesgo descarrilar el curso previsto, o bien, para traer a escena contraejemplos, y argumentos en general, adecuados para ayudarlos a cuestionar sus puntos de vista. El trabajo desplegado por la profesora en este sentido fue intenso, y fue claro que una buena formación en la disciplina y cierta sensibilidad al enfoque didáctico, fueron de gran ayuda para avanzar.

Así, queda pendiente el estudio más sistemático de las transformaciones que realizó la docente, así como identificar los elementos que fueron confusos, mejorar las advertencias sobre posibles situaciones imprevistas, la identificación de las variables didácticas principales de una situación. Considero que el material resultante de esta prolongación del estudio podría funcionar como una herramienta para la formación continua y la recreación de situaciones didácticas potentes o más robustas[131].

---

valiosos para los procesos de formación y de actualización de maestros, al focalizar aspectos del enfoque que han resultado difíciles de implementar en la práctica, así como aspectos de los contenidos matemáticos que se suelen comprender superficialmente. Problematizan, por otro lado, la confección de materiales de apoyo para el docente, ¿qué características debe tener una propuesta didáctica, una secuencia de situaciones, por ejemplo, para hacer viable su aprovechamiento por el docente, sabiendo que no se trata de reproducirla punto por punto? ¿Qué margen de acción dejar? ¿Cómo comunicar lo que es fundamental conservar?” (p.17)

[131] Es una línea de investigación denominada “ingeniería didáctica de segunda generación (Perrin Glorian, 2011); que siguiendo a Block (2018): *“ejemplifica una de las evoluciones que ha seguido el estudio de la relación de los profesores con las propuestas (…). Esta investigadora toma secuencias didácticas producidas por los investigadores con la metodología de la ingeniería didáctica, y las estudia desde la perspectiva de su uso por parte de los docentes. Lo más problemático, dice Perrin Glorian, es dar un ejemplo de una realización posible de la secuencia, destacando aquello en lo que el profesor puede tomar decisiones, y aquello que debe conservar, so peligro de afectar el sentido de los conocimientos implicados. La autora subraya lo vano de los intentos de pretender que la conducción del profesor se apegue de manera estricta a un guion, y opone a ello la necesidad de que él pueda incorporar la ingeniería en su propia progresión didáctica. Los docentes no deben, agrega la investigadora, intentar reproducir la historia (que ocurrió en la aplicación experimental de la situación, por ejemplo), sino las condiciones de aprendizaje.”* (p.17)

ANEXOS

Anexo I: Una experiencia de enseñanza de estadísticas y probabilidades en primaria (Descripción detallada)

Realizaré un breve recorrido por una experiencia de enseñanza de las estadísticas y las probabilidades, dirigida por G. Brousseau de 1972 a 1974, con 17 alumnos en el nivel CM2 (10-11 años), de la escuela primaria Jules Michelet de Talence (Burdeos, Francia) y en el marco del COREM (Centro para la Observación y la Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas).

Dicho estudio, que se desarrolló en un total de 35 sesiones, fue publicado a nivel internacional por primera vez en el Journal of Mathematical Behavior (2002) en su versión en inglés[132], y presentado luego en una versión completa en francés[133] en la conferencia dictada en la XII Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas, en 2003 acerca de las Situaciones Fundamentales y Procesos Genéticos de la Estadística.

Esta experiencia, ejemplar, y pionera, como la de Decimales y Fracciones en la enseñanza obligatoria que desarrollaría años más tarde, y otras ingenierías broussonianas, constituye hoy en día un referente en el desarrollo de la TSD.

El interés en la experimentación dirigida por G. Brousseau se justifica por la manera particular de estudiar la probabilidad y la estadística en el aula. Por un lado simula el funcionamiento de la probabilidad con sacos y luego botellas con canicas (máquinas de azar), sin anteponer su medida expresada con fracciones o decimales, sino luego de un lapso de tiempo relativamente largo, a través del funcionamiento implícito de la noción de razón expresada por una relación entre dos números naturales. Esto podría permitirnos ir *desanudando*, a través de sus propiedades, el objeto matemático que nos interesa: la probabilidad y sus vínculos con las razones, fracciones y decimales.

---

[132] Brousseau, G., Brousseau N. y Warfield V. (2002). An experiment on the teaching of Statistics and Probability. En The Journal of Mathematical Behavior, 20 (3) (2002) 363–411

[133] Brousseau, G. (2005). Une expérience de premier enseignement des statistiques et des probabilités. In A. Mercier & C. Margolinas (dir.), Balises en didactique des mathématiques: Cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques (pp. 165-249). Grenoble: La Pensée sauvage. Francia.

Esta experimentación, fue desarrollada en seis fases:

Fase 1	Una introducción al test de hipótesis	Sesiones 1 a 5
Fase 2	Modelización y experiencia	Sesiones 6 a 8
Fase 3	La representación gráfica de series largas	Sesiones 9 a 16
Fase 4	La convergencia y la decisión estadística	Sesiones 17 a 20
Fase 5	Los intervalos de decisión	Sesiones 21 a 25
Fase 6	Los eventos y la probabilidad	Sesiones 26 a 32

En la primera fase, la maestra ha preparado tres sacos de color negro, con letras A, B y C y fichas blancas y negras. Presenta la consigna de la siguiente manera:

> *M: Aquí hay tres sacos vacíos, llamados A, B y C. Coloco mi mano en el recipiente grande (que contiene treinta de ellas) y sin mirar pero con firmeza, tomo 5 fichas, cierro bien la mano y siempre sin mirar las coloco dentro del saco A. Abro la mano. Ya tenemos las 5 fichas en el saco A, pero no sé cuántas blancas y negras hay. ¿Ustedes lo saben?...*
> *-La clase: ¡Nooo!*
> *-M: Pero pueden verificar a través del saco que hay 5 fichas. Juan, ven a verificar…*
> *-M: A continuación, realizaré lo mismo en los otros dos sacos.*
>
> *El desafío:*
> *-M: Ustedes deberán intentar adivinar cuál es la composición de cada saco. Pero como no se puede mirar dentro del mismo y no se conoce su contenido exacto, deberán convencerse a sí mismos.*
> *-A: [Perplejo, murmura] ¡Eso es imposible!*
> *-M: Tendrán entonces el derecho de mirar un poco en el saco, pero atención:* ***solo podrán mirar una ficha a la vez y ¡colocarán nuevamente en el mismo saco!*** *Eso llamaremos una* ***tirada****.*
> *-M: Ahora, cada uno podrá venir en su turno a realizar una tirada en cada saco, y me dirán lo que han obtenido.*[134]*”*

Esta cuestión enfrenta evidentemente los modos de razonamiento deterministas en uso en las clases y los alumnos no comprenden qué cálculo podrían hacer para obtener la solución de ese problema. El tiempo de las sesiones ocupa solo una parte, de 15 a 30 minutos, del tiempo reservado a las clases de Matemáticas,

---

[134] Existen dos versiones de la experiencia. L*a primera, en Cenon (con los sacos) durante el año escolar 1972-1973, luego la segunda (con la famosa botella bautizada por François Pluvinage “botella de Brousseau”), en Michelet, en el año de la creación del COREM, en el curso del año escolar 1973-1974.* La que se reporta en el artículo publicado en 2002, es la desarrollada en 1972-1973 que inicia con sacos negros y fichas -blancas y negras- (como las del juego de damas) y que luego se cambia por botellas -oscuras y opacas- y canicas o bolas -amarillas y azules y luego blancas y negras-. Debido a que estas ingenierías de desarrollaban periódicamente en esta escuela primaria, suponemos que en otros momentos se iniciaba directamente con botellas y canicas blancas y negras.

Los alumnos realizan las primeras exploraciones, y establecen primeras relaciones entre el contenido del saco y los resultados de las tiradas (indicaremos con n: negras y b: blancas):

M: ¿Cómo saber que si cuando hay más n que b en un saco, se sacan más n que b?
Los alumnos proponen registrar tiradas. Elaboran las primeras conjeturas y relaciones entre contenido de los sacos y lo que sale en cada tirada. Por ejemplo, si contiene muchas fichas negras, entonces saldrá negro en muchas tiradas o si han salido muchas negras, entonces ahora saldrá una blanca.
A: n n b n b b n n b b n n b b n n b
B: n b n n b n n b n n b n b b n n n
C: b b n b b b b n b b b b n n b n

Comenta G. Brousseau (2003) que en general, son los niños quienes forman las hipótesis que van a comenzar el proceso. En las primeras formulaciones sostienen que las canicas deben mostrarse sucesivamente bien ordenadas si se sacan cinco. Pero luego observan que al sacar nuevamente cinco, los resultados son diferentes y emerge otra característica: se obtienen en ambas series de tiradas más canicas de un color que de otro.

En esta primera fase está presente la idea de sucesión regular y de compensación (si salieron muchas blancas entonces luego es el turno de que salgan las negras). Estas constituyen las primeras conjeturas que permiten poner atención en los resultados de las observaciones y su registro (las estadísticas), el funcionamiento de la máquina de azar y las primeras previsiones o idealizaciones acerca de su posible composición (probabilidades). Evidentemente la gestión de la maestra es fundamental en todo el desarrollo de este proceso.

En las siguientes sesiones, los alumnos y a veces la maestra, proponen nuevas estrategias para hacer frente al desafió de conocer cuántas fichas blancas y negras tiene cada saco, sin abrirlo. Una alumna propone escribir totales y comparar con el resultado obtenido en la sesión anterior. Se observa un cambio en la escritura y el orden en registros.

Ayer	Hoy
A: 9n 8b B: 11n 6b C: 5n 12b	A: 10n 7b B: 12n 5b C: 4n 13b

Otra alumna propone realizar series de 5 tiradas, idea que es aceptada rápidamente. Se generan nuevos registros con los sacos A, B y C, tal como puede observarse en la siguiente imagen.

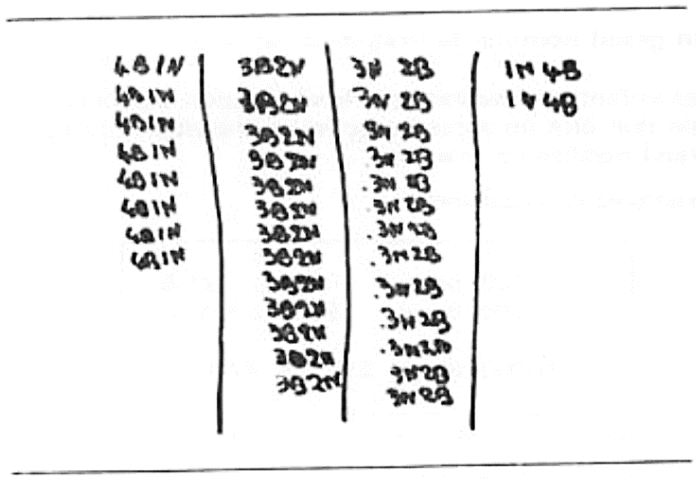


Figure 4. — Une autre manière de noter les résultats.

Afirma Brousseau (2002) que:

> *“La primera observación muestra que la representación de los contenidos de los sacos por una serie de 5 tiradas es implícitamente, claramente y unánimemente aceptada por los alumnos como regla de evaluación. Sin embargo, esta regla no puede ser institucionalizada, ni siquiera formulada porque es obviamente falsa en un razonamiento determinista. La composición de un saco está determinada y es fija, y no puede fluctuar de un momento a otro". (p.7)*

Los alumnos continúan realizando durante cierto tiempo grupos de cinco tiradas con la idea de representar el contenido, sin embargo se decepcionan al ver fluctuar los resultados, aunque la idea de mayoría de blancas o negras sostiene el proceso. A su vez, en su desarrollo, vinculan las estadísticas y las probabilidades. Por ejemplo en 12 series de cinco tiradas, han obtenido 5 veces la composición (3b, 2n), 4 veces (4b, 1n) y 3 veces (2b, 3n). Al estar convencidos de la composición de la botella (3b, 2n?), reclaman abrir la botella, sin embargo la maestra se rehúsa: “*Si ustedes están seguros es inútil verificar, si no, háganlo de otra forma para convencerse”*. Tal como afirma Brousseau *“La probabilidad no es un concepto experimental”.*

En la sesión 4, la maestra propone a los alumnos revisar los resultados. Tienen cierta seguridad que en el saco C hay 4b y 1n y continúan realizando ensayos con los sacos A y B. Los alumnos se centran en contar cuántas veces aparecen ciertas combinaciones.

Una alumna razona de la siguiente manera frente a los resultados obtenidos con el saco A: *“Hay dos empatados: hay que tirar de nuevo hasta que hubiera dos de diferencia”*

3n 2b ------- 6 veces
4n 1b ------- 6 veces
3n 2b ------- 2 veces

Por un lado, es evidente el control que tienen los alumnos sobre sus estrategias (devolución). Por otra parte, la propuesta de hacer series de cinco tiradas juega un papel capital en el proceso de confrontación de resultados estadísticos con las composiciones posibles de la máquina de azar. Una serie de este tipo representa una composición posible de la máquina. Posiblemente desentrañar la razón entre blancas, negras y total de tiradas esté detrás de la idea de ver cuál de las seis posibles combinaciones sale más seguido.

En la sesión 5, los alumnos siguen contando en tiradas de 5 con el saco A. En 15 series de 5 tiradas obtienen 5 veces la composición (3n, 2b), 3 veces (4n, 1b) y 7 veces (2n, 3b). Algunos argumentan que la composición es de 2n y 3b, sin embargo otros protestan porque observan que si suman los resultados obtenidos en las sesiones anteriores con el saco A se obtuvieron más blancas que negras. Una alumna, aprovecha un momento de indecisión general de la clase para deslizar una nueva estrategia: “*Tres alumnos tiraron cada uno cinco veces. Contamos cuantas blancas y negras hay en total y dividimos por tres para encontrar la composición del saco A*”.

10n y 5b
10n ------ 10:3 = 3,33
5b ------ 5:3 = 1,66

La clase queda satisfecha pero a la vez perpleja, por azar un alumno destaca que la suma es “4,99 es casi 5”.

La segunda fase se inicia con varias propuestas. Por una parte, la maestra les recuerda el “nuevo método” que ha sido propuesto por ellos (realizar 3 tiradas de 5, y dividir por 3 los totales obtenidos). Una alumna propone fabricar un saco donde se conozca la composición con la finalidad de ver si es verdad que las tiradas se parecen al contenido (simulación y búsqueda de relación entre máquina de azar y estadísticas). La maestra presenta a partir de la propuesta, un nuevo material: botellas en lugar de sacos y canicas azules y amarillas en lugar de fichas blancas y negras, la denominan "La botella Z".

Esto produce discusiones acerca de si utilizar sacos es equivalente a utilizar botellas. Los alumnos desarrollan una nueva estrategia: cargan una botella transparente con 4 azules 1 amarilla y sus resultados los comparan con la botella C, porque sospechan que este último posee la misma composición. Obtienen los resultados siguientes:

Z 5 azules; 5 azules; 3 azules 2 amarillas.
Total: 13 azules y 2 amarillas, entonces se obtiene: 4,33 y 0,66 (al dividir los totales entre 3)

La maestra propone realizar tiradas con un saco para comparar con ese resultado. Los alumnos deciden probar con el saco C (porque piensan que contiene 1n y 4b). Obtienen:

C 11b 4n cuyas frecuencias son 3,66 y 1,33.

No se observaron grandes dificultades para los estudiantes que practicaron decimales durante un año, en ver que los dos resultados se relacionan con (4,1), y no es muy extraño dado que estuvieran bastante seguros de la composición del saco C. Este método les permitió verificar, además, que la botella y el saco se comportan de la misma manera.

En las sesiones siguientes afianzan la estrategia (modelo) con una nueva botella ("Botella Z_2"), que tiene la misma composición pero ahora con canicas blancas y negras en lugar de azules y amarillas. Introducen la palabra "frecuencia", y realizan grupos de 10 series de 5 tiradas (en lugar de 3 series de 5 tiradas) para facilitar los cálculos, y dividir entre 10 (en lugar de dividir entre 3). Por último, piden a la maestra que, a escondidas, componga las botellas A, B y C con la misma composición de los sacos A, B y C, porque con este material pueden realizarse rápidamente muchas tiradas.

Durante la tercera fase, se aumenta la cantidad de tiradas y calculan las frecuencias. Luego se representan en tablas y en gráficos cartesianos, mediante el uso de una computadora[135].

[135] Olivetti TE 300 unida a una IBM 360/30 de la Universidad de Burdeos.

La profesora recuerda el método anterior de continuar el conteo de series de 5 tiradas y calcular frecuencias (de cada combinación de 5) y realizar divisiones, y luego propone un plan que incluye la realización de un gran número de tiradas y luego dividir la cantidad de blancas y negras por el total. Con esto, introduce la noción de frecuencia relativa acumulada de manera sistemática. Organiza la clase en tres grupos, cada uno con la tarea de realizar este plan con cada saco y completando una tabla de frecuencias.

En la tabla siguiente pueden observarse los resultados de un equipo, donde realizan 25 series de distinta cantidad de tiradas: 10, 15, 30, 40, 50, 59, 69, 79, 89, 99, 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199, 209, 219, 229, 239, 339. Están acompañados por la frecuencia absoluta de canicas blancas y negras, y frecuencias acumuladas absolutas y relativas. Las cantidades marcadas con asterisco (*) son las que presentaron errores. Los cálculos se corresponden con una composición de (2b, 3n).

série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blancs	5	2	7	4	3	4	3	3	3	6	5	5
Cumul	5	7	14	18	21	25	28	31	34	40	45	50
Noirs	5	3	8	6	7	5	7	7	7	4	5	5
Cumul	5	8	16	22	29	34	41	48	55	59	64	69
Nbr.tir	10	15	30	40	50	59	69	79	89	99	109	119
.												
Calcul	5 :10	7 :15	14:30	18:40	21:50	25:59	28:69	31:79	34:89	40:99	45:109	50:119
Fréq.B	0,5	0,45	0,49	0,45	0,42	0,42	0,40	0,39	0,48*	0,44*	0,41	0,46*
Calcul	5 :10	8 :15	16 :30	22 :40	29 :50	34 :59	41 :69	48 :79	55 :89	59 :99	64:109	69:119
Fréq.N	0,50	0,53	0,53	0,55	0,58	0,57	0,57*	0,60	0,61	0,50*	0,58	0,57

Série	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Blancs	5	3	6	4	3	4	3	5	3	5	4	11	36
Cumul	55	58	64	68	71	75	78	83	86	91	95	106	142
Noirs	5	7	4	6	7	6	7	5	7	5	1	4	64
Cumul	74	81	85	91	98	104	111	116	123	128	129	133	197
Nbr.tir	129	139	149	159	169	179	189	199	209	219	229	239	339
Fréq.													
Calcul													
Fréq.B	0,42	0,417	0,429	0,427	0,420	0,418	0,412	0,417	0,411	0,415	0,414	0,443	0,418
Calcul													
Fréq.N	0,57												

Cabe destacar que este plan propuesto por la maestra introduce un elemento nuevo (calcular las frecuencias relativas acumuladas). Esto representa un cambio importante en la estrategia respecto al trabajo que venían realizando en sesiones anteriores.

Con la idea de promedio, los alumnos contaban el total de blancas y negras de 3 series de 5 tiradas, y a este resultado lo dividían por 3. Dicho promedio de los resultados de 15 tiradas y las 5 fichas de la botella daba una idea (por “proyección”) de la composición de las dos bolsas o botellas. Es decir, si se tiene un conjunto de tiradas de tamaño 15, con b blancas y n negras, éste se proyecta a un conjunto (b’,n’) de tamaño 5=b’+n’ (el de la botella), con la misma composición y donde se conserva la relación b/n = b’/n’. En efecto, si 15=b+n; b’=b/3 y n’=n/3; entonces: b’+n’=b/3+n/3=(b+n)/3=15/3=5 y b’/n’=(b/3)/(n/3)=b/n. Quiere decir que existe un tratamiento de la información (de los resultados de las tiradas), mediante sumas y divisiones, que les devuelve una aproximación a cierta composición de una botella.

Pero ahora, proponer el cálculo de frecuencias relativas (y acumuladas) los lleva a un resultado diferente. Los cocientes son siempre menores a 1, lo cual hace que nunca se llegue como resultado a una cantidad próxima a 5. En lugar de proyectar resultados a un conjunto de tamaño 5 (como el caso anterior), ahora se proyecta a un conjunto de tamaño 1 y hay un distanciamiento a la idea de cantidades dentro de la botella. En efecto, si se realizaran 3 series de 5 tiradas, 15=b+n, b’’=b/15 y n’’=n/15; y b’’+n’’=b/15+n/15=(b+n)/15=15/15=1; y b’’/n’’=(b/15)/(n/15)=b/n. Quiere decir que aunque se conserve la relación b/n=b’’/n’’, cambia el modo de interpretar el resultado que requiere dar sentido al número 1 como equivalente al “todo”.

En este trabajo, según los reportes de la experiencia, se evidencia cierto hartazgo de los alumnos quienes, cansados de realizar muchos cálculos, no han tenido tiempo de reflexionar sobre lo que podrían hacer con los resultados obtenidos. Hay una situación tensa. Solicitan a la maestra que abra los sacos para ver su contenido (tal como había sucedido en las primeras sesiones).

> *M: Si ustedes están seguros de la composición de los sacos (o de las botellas), será inútil (innecesario) abrirlos”.*

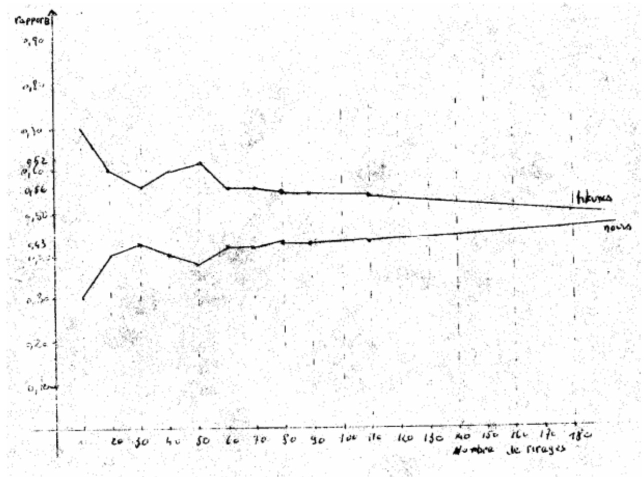
Una alumna propone inventar las botellas y representar los contenidos supuestos de los sacos, luego sumar los totales de blancas y de negras por el número de tiradas. Hay acuerdo, con tal de salir de esta fase fastidiosa y donde ignoran el objetivo. Representan la botella C (desconocida) por la botella X con (4b, 1n); la B por la botella Y con (3b, 2n) y la A por la botella Z con (1b, 4n) y vuelven a realizar muchas tiradas. Varios piensan que habrá que agregar una nueva botella con otra composición posible: (2b, 3n). Otros piensan igualmente en la composición 5n y 5b, pero se rechaza inmediatamente (trivial). La maestra organiza la clase en 4 grupos, cada uno con una botella distinta, y deben realizar una nueva tabla, para una serie de 180 tiradas. Los alumnos eligen realizar series de 10 para facilitar las divisiones. Este trabajo les llevará tres sesiones más.

Kuzniak (2003) ha comprobado en un estudio reciente el rol importante del profesor en esta fase de la experimentación, para sostener una característica de las botellas que tiene un significado en la noción misma de la probabilidad:

> *"La probabilidad no es un concepto experimental. Esta postura es particularmente difícil de sostener por el profesor y cuando esta experiencia se rehízo recientemente en clase de segundo (15 años), el docente cedió a la demanda de los alumnos, cancelando de hecho todo el proceso de entrada a los test o pruebas de hipótesis, para convencerse de la naturaleza de las estadísticas en cuestión. Otro elemento de riesgo para el maestro es, evidentemente, que ciertos eventos necesarios para la continuación de su experiencia no se producen y aquí es donde la elección de la configuración de base necesitó un cálculo que no debe nada al azar. (p.25)*

El comentario anterior pone en evidencia un elemento importante: que la maestra no ceda al pedido de los alumnos de abrir las botellas, y por otro lado, la necesidad de disponer de un plan para el caso de que no sucedan los eventos que ocurrieron en otras experiencias. Por ejemplo, es poco probable que a un alumno se le ocurra realizar series de cinco tiradas.

En las sesiones siguientes la maestra propone que cada grupo realice un gráfico representando sus tiradas. Verticalmente se indican las frecuencias de blancas y negras. Se presentan problemas en el marcado de los puntos, dado que utilizan la regla para el trazo de paralelas porque la hoja no es cuadriculada. Producen gráficos como el siguiente:



[Imagen: En el eje X el número de tiradas y el eje Y las frecuencias blancas y negras con la botella con (3b, 2n)]

Luego, incorporan el uso de una computadora programada con una función pseudo aleatoria que les permite tener rápidamente resultados de muchas tiradas y centrar el trabajo en la reflexión alrededor de los gráficos. Ingresan en la computadora la cantidad de canicas blancas y negras que tiene la botella, y luego el número de tiradas a realizar, y ésta les devuelve los resultados de las tiradas. En el ejemplo siguiente se observan los resultados para 100 tiradas con una botella, de los cuales se obtuvieron 60 canicas blancas y 40 negras[136]:

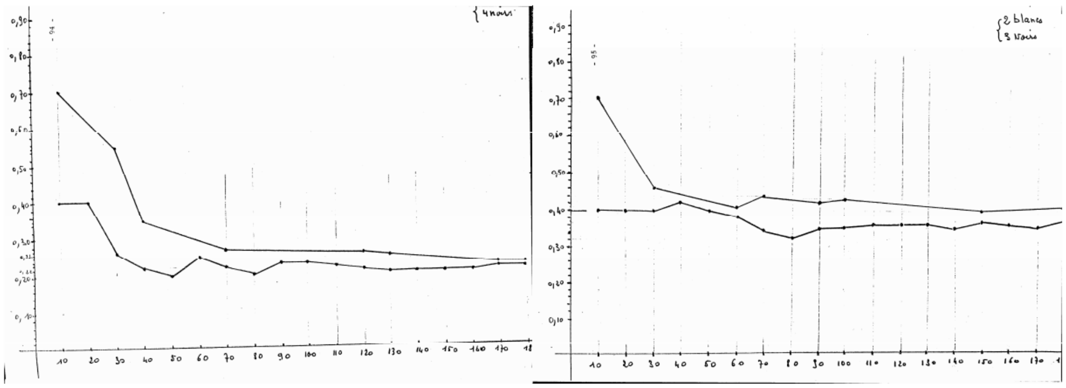
```
--------COMBIEN DE TIRAGES DOIT-ON EFFECTUER ?
?100
DANS L'ORDRE ON A OBTENU LES COULEURS
N N B B B B N N B B N N N B B B B N B B
N B B B N B B B N B B B B N N N N B N B
B B B B B B B N B N N B N B B N N B B B
B B B B B B N N B N B N N B N N B N N B
******* CES 100 BILLES TIREES ONT ETE :
******* 60 BILLES BLANCHES ET 40 BILLES NOIRES

POUR TIRER ENCORE DANS CE SAC ECRIVEZ 1
POUR CHANGER SON CONTENU ECRIVEZ 2
POUR CESSER LE JEU ECRIVEZ 3
```

Los alumnos realizan entonces 10 tiradas, luego 50 hasta 180 tiradas. Calculan rápidamente las frecuencias y trazan nuevas curvas, e incluso tienen a su disposición una calculadora. Por ejemplo, producen gráficos como los siguientes (X: tiradas, Y: frecuencia

[136] Obtenido del artículo original en francés. Notar que en este ejemplo, en las líneas de los resultados de las tiradas, solo se muestran 80 de los 100 resultados que se indica que se tiraron. Posiblemente han cargado una composición de 3 blancas y 2 negras.

de blancas): el de la izquierda representa simulaciones con la botella de composición (4n, 1b) y el de la derecha con la botella compuesta por (2b, 3n).



El trabajo de producción de gráficos permite a los alumnos empezar a sospechar el rol de la hacer largas series de observaciones, en lugar de tener solamente los resultados de las primeras tiradas. Frente a la longitud de las tiradas cada vez más numerosas, al inicio cuentan la cantidad de veces que se observa cada color, luego solo piden ver las cantidades y mucho después empiezan a observar las relaciones entre ellas. Luego de 16 sesiones:

> *"(…) Todo está listo para calcular la relación en la cual esperamos ver que la frecuencia observada de blancas o de negras se aproximan a: 3/5 para (3b, 2n), 2/5 para (2b, 3n), etc. Los alumnos establecen ellos mismos el número de tiradas en las que solicitan los resultados a la computadora (introducida en la clase). Las series de frecuencias observadas son representadas gráficamente y los alumnos <observan> que las curvas después de las oscilaciones bastante importantes vienen aproximándose a los valores previstos". (Brousseau, 2003, p.5)*

A continuación, ***durante la cuarta fase***, se promueve un trabajo de exploración y comparación de curvas, y luego un juego (con fichas y apuestas) que les permite establecer nuevas relaciones entre las posibles composiciones de las botellas y los valores a los que las curvas se aproximan.

Emerge de nuevo el importante rol de la maestra, que "*negocia*", es decir, propone y habilita ciertas transacciones[137], donde acepta propuestas y también propone

[137] Gerard Sensevy (2011) utiliza el término transacción como una parte de las dimensiones de la comunicación, diferenciándola del término interacción, ambas partes de una noción de diálogo que toma de Vernant (1997, 2004). Utiliza este término "transacción" para describir un elemento importante de la Teoría de la Acción Conjunta (Sensevy, 2007): "Si la acción didáctica es orgánicamente cooperativa, es ante todo

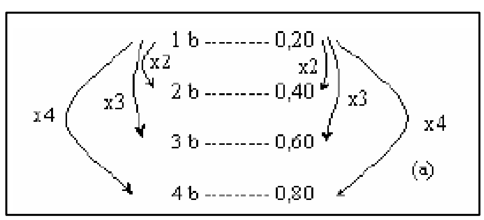
estrategias, muchas veces dando direccionalidad epistémica a las producciones de los alumnos (tal como vimos, por ejemplo, cuando introdujo de manera sistemática la noción de frecuencia relativa)

Los alumnos recuerdan que habían propuesto al final de la sesión anterior trazar nuevamente las curvas, pero ahora con papel cuadriculado, tanto las hechas con botellas como con computadora, por grupos. Al finalizar la clase, la maestra coloca sobre el mismo papel cuadriculado las curvas de todos los grupos.

En la clase siguiente, se colocan los papeles sobre el pizarrón. Los alumnos observan las cuatro curvas correspondientes a las cuatro composiciones de las botellas: 1b4n, 2b3n, 3b2n y 4b1n. Observan que cuando hay 1 canica blanca, la curva esta "abajo", observan que es un poco más alta con 2 canicas blancas, un poco más arriba con 3 blancas y está en la parte superior con 4 blancas. Muchos alumnos enfatizan que en las 180 tiradas se mantienen en los valores 0,2; 0,4; 0,6 y 0,8, respectivamente.

En un segundo momento de la clase, la maestra realiza una serie de tiradas con la computadora y escribe en el pizarrón las frecuencias acumuladas de las 10 tiradas, hasta llegar a las 180 (el ordenador calcula las frecuencias). Los alumnos deben adivinar con que saco realiza las tiradas. Un alumno explica cómo encuentra:

Si las frecuencias están alrededor de 0,2, entonces hay 1 blanca. Si ellas están dentro de 0,4, entonces hay 2 blancas. Análogamente para 0,6 y 0,8. Otro alumno propone una tabla (procedimiento emblemático y habitual en la clase), donde describe que las frecuencias de canicas blancas son proporcionales al número de canicas blancas contenidas en la botella (propiedad de linealidad).



porque toma lugar en el seno de un proceso comunicativo. Puesto que es una acción de comunicación, la acción didáctica supone la cooperación propia de la comunicación. Decir eso, es una manera de empezar a especificar esta acción como *acción dialógica* y es al mismo tiempo decir que una manera productiva de considerar las interacciones didácticas es contemplarlas como *transacciones*." (p. 7)

El juego de los acertijos. También llamado “el juego fundamental de los test de hipótesis”, fue desarrollado en la sesión 19. La maestra realiza sobre el ordenador una composición de un saco. Los alumnos no conocen esa composición, pero pueden solicitar resultados de tiradas. La clase se divide en 4 grupos, cada uno con 20 fichas. Con ellas, pueden comprar resultados de las tiradas con el saco (o botella) desconocido fabricado por la maestra. Cada ficha da derecho a 5 tiradas.

Cuando los alumnos de un grupo piensan que tienen unas suficientes tiradas para conocer la composición del saco, pueden realizar una apuesta. En ese momento apuestan la cantidad de fichas que quieran, proponen una composición e indican el valor al que piensan que las frecuencias acumuladas se aproximarían si se realizara un gran número de tiradas. Verifican el contenido del saco consultando el resultado en el ordenador. Si la composición no es buena, pierden su apuesta. Y si es correcta, recuperan el doble de lo apostado.

Los alumnos que ganaron tienen la siguiente tabla, para encontrar los valores a los que tienden las frecuencias acumuladas.

blancas	Valor limite (supuesto)
5b	1
4b	0,80
3b	0,60
2b	0,40
1b	0,20
0b	0

[Imagen: Tabla de valores limites (supuestos) y cantidad de blancas del saco (o botella)]

Luego la maestra propone cambios en el juego, por ejemplo si tuvieran 4 canicas en la botella, o si tuvieran 8 canicas, ¿cuáles serían los valores límites? Los alumnos elaboran sus tablas para ganar el juego, como puede observarse en la siguiente imagen:

Botella con 4 canicas en total.

blancas	
4b	**1**
3b	0,75
2b	**0,50**
1b	0,25

Botella con 8 canicas en total.

blancas	
8b	**1**
7b	0,87
6b	0,75
5b	0,62
4b	**0,50**
3b	0,37
2b	0,25
1b	0,12

[Imagen: Valores límites (supuestos) y cantidad de blancas en la botella]

En la sesión 20, ultima de esta fase, los alumnos verifican, con ayuda de la computadora, las “frecuencias limites teóricas” que se encontraron para diferentes contenidos: 5 canicas, 4 canicas, 8 canicas. Para eso, realizan un gran número de tiradas (5000). La computadora devuelve las frecuencias límites, y se comparan con las frecuencias teóricas que han sido calculadas.

> *"<<Pagar las informaciones>> les ha llevado a interrogarse acerca de las relaciones entre la longitud de la serie y el riesgo de equivocarse. La experiencia es <decisiva> para ellos. Alrededor de los valores de convergencia 0,2 (1 blanco); 0,4 (2b); 0,6 (3b); 0,8 (4b), localizan las bandas en el interior de aquellas series que terminan en entrar y quedarse. Al pedir 15 series de 15 tiradas, 8 series solamente están en la banda y 7 en el exterior, con 15 series de 20, se tiene éxito 9 veces y se falla 6 veces, con las series de 100, 15 éxitos sobre 15 pero con 160 solamente 14 éxitos sobre 15. Las series de 1000 tiradas se estrechan mucho alrededor del valor teórico….Con el vocabulario cercano, los alumnos utilizan la noción de nivel de significación y de intervalo de decisión." (Brousseau, 2003, p.6)*

En un estudio realizado por J. Briand (2011)[138], donde compara tres experiencias matemáticas, el investigador recrea la situación de las botellas con canicas con alumnos de bachillerato (16-17 años), y realiza un análisis previo que incluye el cálculo de ese riesgo en que se incurre al decidir la composición de una botella en función del número de tiradas efectuadas. El resultado muestra que la elección de una botella con 5 bolas ayuda bastante bien a que las experimentaciones puedan realizarse en clase. Demuestra que las probabilidades de formular una conjetura falsa (riesgo) disminuyen significativamente luego de realizar 100 tiradas. Por ejemplo una botella con (4b, 1n) tiene menor riesgo, es decir menos probabilidad de equivocarse que con una botella de (3b, 2n).

En la quinta fase, hay un trabajo conjunto con la maestra para construir un método de búsqueda de frecuencias empíricas de las frecuencias límites, que los lleva a producir una tabla de intervalos de manera colectiva y poner a prueba su funcionamiento. Inicia cuando la maestra recuerda a los alumnos:

> *M: Ustedes han descubierto que realizando un gran número de tiradas con un saco que tenga 5 canicas, las frecuencias acumuladas de tiradas "blancas" deberán a cercarse a los valores siguientes: 1 blanca →0,20; 2b →0,40; 3b →0,60; 4b →0,80; 5b → 1*

Luego, hace formular a los niños la correspondencia de la propiedad de linealidad, pero de otra manera. Es decir que la propiedad: *"La frecuencia de canicas blancas es proporcional al número de canicas blancas"*, se formula de esta manera: *"Si se tiene el doble de canicas blancas en el saco, la frecuencia es dos veces mayor."*

---

[138] El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase. Educación Matemática, vol. 23, núm. 1, abril de 2011.En los anexos se incluye más información sobre este artículo.

Para hacer emerger un método, la maestra pregunta: *“Si les piden que adivinen la composición de un saco o una botella que contiene 8 canicas en total, ¿cómo lo harían?”*

Los alumnos evocan progresivamente las etapas. La maestra insiste en obtener formulaciones resumidas con los términos específicos: a) Simularíamos los diferentes sacos posibles, b) haríamos numerosas series de tiradas, c) calcularíamos las frecuencias acumuladas, d) haríamos otro tanto de tiradas que hagan falta para que las frecuencias estén bien separadas, e) haríamos en el saco desconocido una serie de ese número de tiradas, f) compararíamos la frecuencia acumulada a los valores obtenidos por la simulación. (Las tres últimas etapas la formularon con la ayuda de la maestra).

La maestra propone un retorno al “juego fundamental”, suponiendo tener una botella que contiene 4 canicas, y donde deben: a) Adivinar la composición del saco b) Adivinar los valores a los que se aproximan las frecuencias acumuladas (al final de 3000 tiradas por ejemplo). Para ello, tienen derecho a realizar tiradas con el ordenador, donde 1 ficha son 5 tiradas. Cuando crean saber el contenido del saco, pueden hacer su apuesta. Cada grupo tiene 25 fichas. Luego la maquina realizará 3000 tiradas y sabrán si ganaron. Los alumnos por grupos, se acercan a solicitar sus tiradas, es la misma botella para todo el mundo. En una fase colectiva, los alumnos encuentran los valores para 1, 2 y 3 canicas blancas 0,25; 0,50; 0,75 respectivamente. La sesión finaliza cuando la maestra pregunta: *“M: ¿podrían encontrar los valores para un saco que contenga 8 canicas? La próxima vez, deberán responder individualmente.”*

En la sesión siguiente, la maestra les recuerda y luego propone:

> *M: “Ustedes a saben cómo hacer para adivinar la composición de un saco que contenga cualquier cantidad de canicas cuando realizan un gran número de tiradas. Asimismo saben encontrar los valores sobre los cuales se aproximan las frecuencias acumuladas (y para todas las composiciones). Si tuvieran que explicar a otros alumnos que se preguntan por la estrategia empleada para adivinar la composición de un saco con 5 canicas, ¿qué le dirían?”*

Luego de una discusión, los alumnos trabajan en equipos, cada uno busca y escribe los intervalos correspondientes a todas las composiciones posibles. Al finalizar, se realiza una puesta en común en el pizarrón y discusiones interesantes, aunque la tarea es aun difícil para los alumnos dado que los intervalos no son iguales.

	1 blanc	2 blancs	3 blancs	4 blancs	5 blancs
Equipe I	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe II	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe III	0,01 à 0,36	0,37 à 0,55	0,56 à 0,76	0,77 à 0,99	1
Equipe IV	0,01 à 0,26	0,27 à 0,56	0,57 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe V	0,01 à 0,38	0,39 à 0,58	0,59 à 0,78	0,79 à 0,99	1
Equipe VI	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1

En las sesiones siguientes, la maestra vuelve a recordar las tareas de las sesiones precedentes, y vuelve a escribir la tabla en el pizarrón. Luego solicita a los alumnos que le recuerden ¿para qué fue hecha la tabla? (busca que ellos digan que ésta permite decidir si hay 1b, 2b, 3b, 4b, 5b).

Propone ponerla a prueba, verificando empíricamente con apoyo de la computadora y en equipos. Los alumnos realizan una gran cantidad de tiradas, cuentan la cantidad de blancas y las frecuencias. Luego, sobre los intervalos colocan “verdadero” o “falso”, en caso que las frecuencias “entren” en ese intervalo. Se presentan problemas con las columnas de composiciones 2b3n y 3b2n. En equipos, retoman el trabajo pero con la siguiente consigna dada por la maestra:

a) *Poner a prueba los intervalos para la composición 3b2n, mediante series de 10, 20, 50, 200 y 5000 tiradas. Luego deben contar para cada serie cuantas veces encontraron “verdadero” y cuantas veces “falso”*
b) *Luego, con los resultados obtenidos deben mejorar, si es posible, los intervalos de manera de obtener lo más verdadero posible (sobre todo dentro de las series de 10, 20 y 50 tiradas que tiene más fluctuaciones)*
c) *Realizar el mismo procedimiento para la composición 3b2n*

Este trabajo permite a los alumnos mejorar los intervalos. Luego la maestra propone (nuevamente) una mejor representación de los intervalos. Los alumnos lo adoptan.

0 b		1b			2b			3b			4b		5b
0	0,01		0,29	0,30		0,49	0,50		0,69	0,70		0,99	1
0		0,20			0,40			0,60			0,80		1

En las sesión siguiente resuelven ejercicios individuales, donde las respuestas deben estar acompañadas de declaraciones como: Estoy seguro / Aproximadamente / No es seguro / No se puede saber / No se puede decir con seguridad / Pareciera que, etc…

1. Sobre 100 tiradas, se encontró una frecuencia acumulada de 0.91 blancas, ¿Cuántas veces se ha obtenido una blanca?

2. Si se tienen 4 canicas en un saco:

a) Luego de 10 tiradas, se encontró una frecuencia acumulada de 0.30 blancas. ¿Cuántas fichas blancas hay dentro del saco?
b) Se encontró 0.30 al final de 100 tiradas. ¿Cuántas fichas blancas hay en el saco?

3. En un saco, se colocaron 10 canicas. ¿A qué valores se aproximan las frecuencias acumuladas de blancos de acuerdo a la composición de los sacos?

4. ¿Cuáles son los intervalos de decisión?

5. ¿Cuántas tiradas necesitarías para que el método dé más de 9 respuestas correctas sobre 10?

En la sexta fase que abarca las sesiones 26 a 32, inicia un proceso de generalización. Los alumnos realizan tareas por equipos que involucran buscar los eventos posibles con otras máquinas de azar (por ejemplo…). Para ello utilizan tarjetas numeradas, azules y amarillas, dados de distintas características (algunas caras de determinado color y las otras blancas, o con puntos rojos y las caras blancas, dados comunes, dados sesgados, etc.); dodecaedros con caras numeradas; una caja de plástico con perlas de colores distintos (2 azules, 2 rojos, 2 verdes, 2 amarillos).

También realizan cálculos de probabilidades “teóricas” (límites de las frecuencias), y representaciones en conjuntos, en diagramas de árbol, tablas, y listas de combinaciones en experimentos compuestos como el de lanzamientos sucesivos de dos dados equilibrados.

Para finalizar la descripción de esta larga secuencia didáctica, retomaré brevemente las primeras conclusiones, provisorias, expresadas por Brousseau (2003):

“La situación comporta tres sistemas de objetos:

- *Lo que se ha visto se vuelve una imagen del pasado de una máquina de azar, es decir, una estadística*
- *Lo que se busca reproducir son los eventos más o menos probables…*
- *Determinados por la estructura de la máquina,*

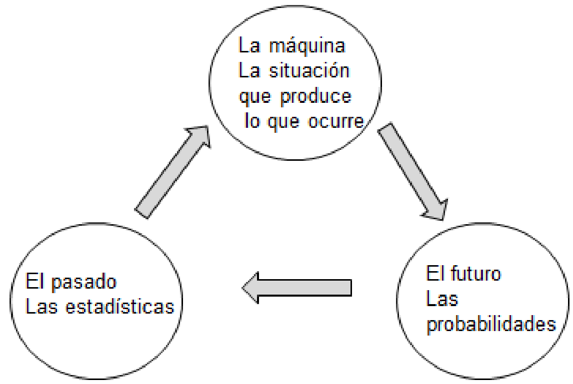
Las observaciones responden a hipótesis fáciles de imaginar sobre las relaciones entre esos tres tipos de objeto.

Estas ponen en relación:

- *Los razonamientos que se corresponden de un objeto al otro*
- *El contenido de la botella no cambia: contenido → hipótesis (probabilidad)*
- *Las observaciones reflejan el contenido de la botella: estadísticas → contenido*
- *Las observaciones que vendrán deben reflejar aquellas del pasado, dado que la máquina no cambia. Hipótesis (probabilidades) → estadísticas*

Lo que se genera es un proceso a tres tiempos cuyo motor es el siguiente:

- *Si lo que observamos da indicaciones sobre lo que contiene la botella, entonces al reproducir lo que se realiza deberá reproducirse lo que hemos visto (evidentemente, la cuestión implícita es: < ¿qué tienen todas estas experiencias en común?>*
- *El pasado -> la máquina -> el futuro.*



Anexo II: Acerca del cálculo del riesgo de formular una conjetura falsa.

En un estudio realizado por J. Briand (2011)[139], compara tres experiencias matemáticas, y recrea la situación de las botellas con canicas con alumnos de bachillerato (16-17 años). En su análisis a priori incluye el cálculo del riesgo en que se incurre al decidir la composición de una botella en función del número de tiradas efectuadas.

El cálculo muestra que la elección de una botella con 5 bolas ayuda bastante bien a que las experimentaciones puedan realizarse en clase. Demuestra que las probabilidades de formular una conjetura falsa (riesgo) disminuyen significativamente luego de realizar 100 tiradas. Asimismo que una botella con (4b, 1n) tiene menor riesgo, es decir menos probabilidad de equivocarse que con una botella de (3b, 2n).

En efecto, si se observa la tabla siguiente, en una botella con 3 bolas rojas y 2 verdes, las probabilidades de obtener bolas rojas aumentará hasta ser próxima a 1 en las 500 tiradas, y por lo tanto la probabilidad de formular una conjetura falsa (riesgo) disminuye hasta ser próxima a 0 en el mismo número de tiradas.

[139] El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase. Educación Matemática, vol. 23, núm. 1, abril de 2011.

Número de tiradas	15 tiradas	25 tiradas	50 tiradas	100 tiradas	500 tiradas
Intervalo	$0.5 < \frac{n}{15} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{25} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{50} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{100} < 0.7$	$0.5 < \frac{n}{500} < 0.7$
Valores de a, n y b	$8 \leq n \leq 10$	$13 \leq n \leq 17$	$26 \leq n \leq 34$	$51 \leq n \leq 69$	$251 \leq n \leq 351$
P	0.569	0.692	0.806	0.948	0.999
Probabilidad de formular una conjetura falsa	0.431	0.308	0.194	0.052	0.001

[Imagen: Estudio a partir de la composición 3 rojas, 2 verdes. (Briand, 2011)]

En la tabla anterior se observa que en el 56.9% de las series de 15 tiradas se obtendrán entre 8 y 10 bolas rojas (frecuencia relativa entre 0.5 y 0.7); con un riesgo de error del 43.1%; en el caso de 25 tiradas, el porcentaje aumenta al 62.9% de veces que se obtendrán entre 13 y 17 rojas, y el riesgo será del 30.8%; para 50 tiradas, el 80.6% de ellas se obtendrán entre 26 y 34 tiradas, con un riesgo del 19.4%; con 100 tiradas la probabilidad de formular una conjetura falsa disminuye al 0.52%, y con 500 tiradas, el riesgo baja considerablemente a 0.01%.

Veamos cómo se obtienen los resultados de la tabla anterior: Si se tienen t tiradas, los casos favorables (que proporcionan un número n de bolas rojas) se designan de la siguiente manera:

$$0.5 < \frac{n}{t} < 0.7, ya\ que\ 0.5t < n < 0.7t.$$

Llamemos a y b los valores límite que tomó n en este caso. La ley binomial nos permite calcular la probabilidad de que salga el número n de bolas rojas en el número de tiradas t.

$$\sum_{n=a}^{n=b} \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}$$ (Con p=0.6 en este caso)

Los cálculos se corresponden con el uso del modelo de distribución de una variable aleatoria Binomial. En esta botella, el parámetro 0.6 (probabilidad de éxito constante), se corresponde a la probabilidad de obtener una bola roja (en la botella con 3 rojas y 2 verdes). El parámetro n (cantidad de veces que se repite el experimento), es variable: n=15, 25, 50 y 100 tiradas.

A modo de ejemplo, el cálculo para 15 tiradas sería el siguiente: Supongamos que se obtienen “n” cantidad de bolas rojas en 15 tiradas. Calculare la probabilidad que la frecuencia relativa se encuentre entre 0.5 y 0.7.

$0.5 < \frac{n}{15} < 0.7$ es equivalente a $0.5x15 < n < 0.7x15$, es decir: $7.5 < n < 10.5$

Luego como estamos en un caso discreto, $8 \leq n \leq 10$

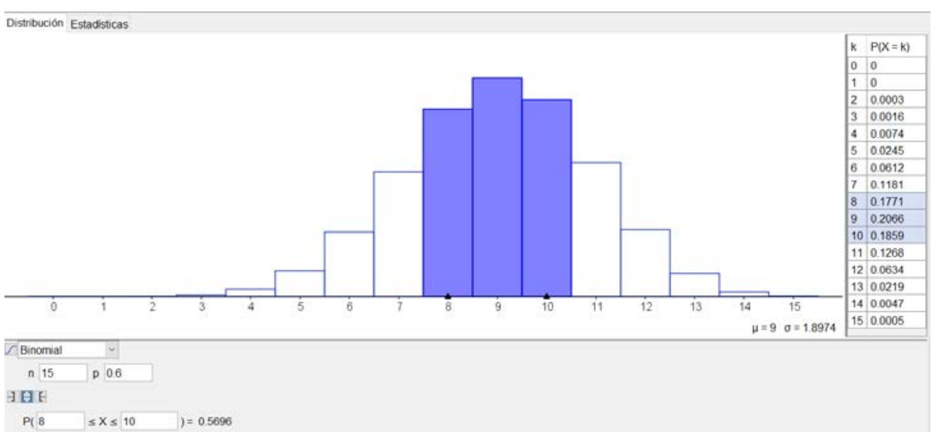
Así se calcula la probabilidad de que en 15 tiradas se obtengan entre 8 y 10 bolas rojas:

$$P = \sum_{n=8}^{n=10} \binom{15}{n} 0.6^{n}.\ 0.4^{15-n} = \binom{15}{8} 0.6^{8}.0.4^{7} + \binom{15}{9} 0.6^{9}.0.4^{6} + \binom{15}{10} 0.6^{10}.0.4^{5}$$

$$= 0.1771 + 0.2066 + 0.1859 = 0.5696$$

Quiere decir que hay una probabilidad de formular una conjetura falsa de: 1 – 0.5696= 0.4304.

En la siguiente imagen se observa la representación gráfica (vía GeoGebra) de la distribución de probabilidades binomial con parámetros (15; 0.6). Las alturas de las barras sombreadas indican las probabilidades de obtener 8, 9 y 10 canicas rojas en 15 tiradas, equivalentes al 56,96%.



Ahora, contrastemos los resultados de la tabla anterior con la tabla siguiente, correspondiente a una botella con 4 bolas rojas y 1 verde. Notemos que es menos probable formular una conjetura falsa conforme se aumenta el número de tiradas. Por ejemplo, en la primera columna, el 80% de las series de 15 tiradas tendrá una frecuencia entre 0.7 y 1, quiere decir que el 20% restante es la probabilidad de formular una conjetura falsa. El riesgo disminuye rápidamente a medida que se aumenta la cantidad de series de tiradas.

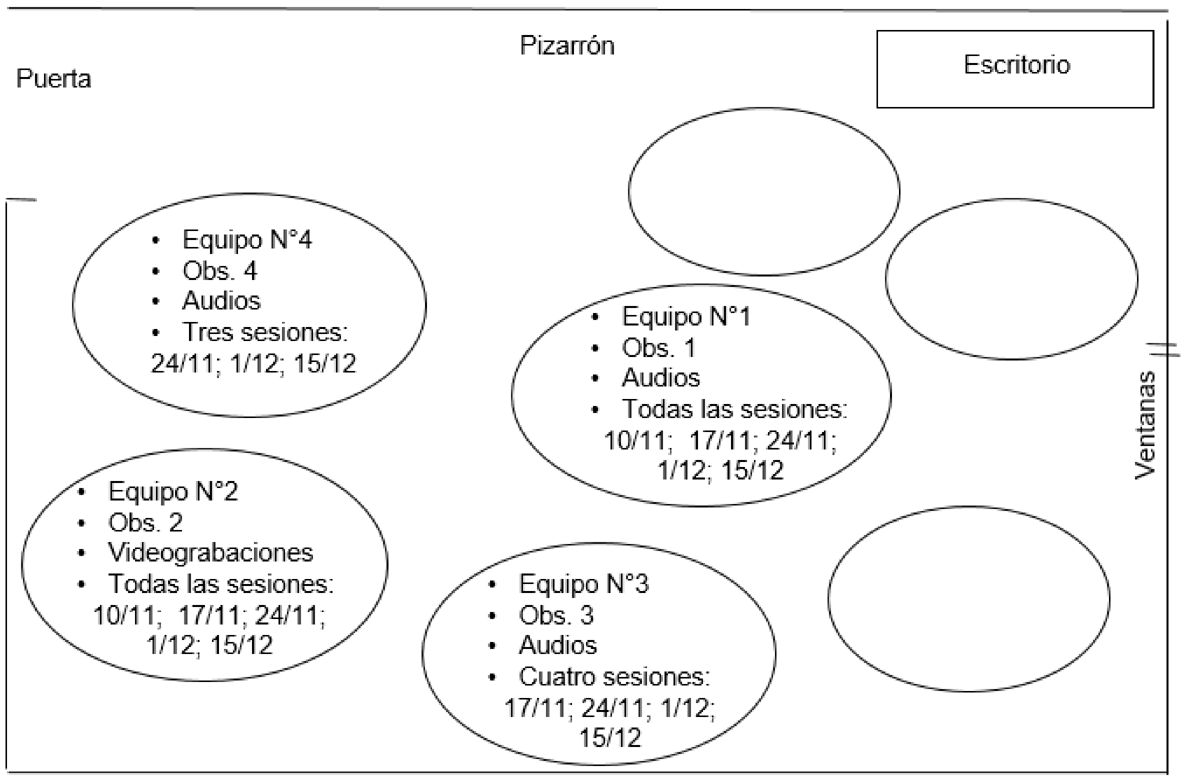
Número de tiradas	15 tiradas	25 tiradas	50 tiradas	100 tiradas	500 tiradas
Intervalo	$0.7 < \frac{n}{15} < 1$	$0.7 < \frac{n}{25} < 1$	$0.7 < \frac{n}{50} < 1$	$0.7 < \frac{n}{100} < 1$	$0.7 < \frac{n}{500} < 1$
Valores de *a*, *n* y *b*	$11 \leq n \leq 14$	$18 \leq n \leq 24$	$36 \leq n \leq 49$	$71 \leq n \leq 99$	$351 \leq n \leq 499$
P	0.800	0.887	0.939	0.988	0.999
Probabilidad de formular una conjetura falsa	0.2	0.113	0.061	0.012	0.001

[Imagen: Estudio a partir de la composición 4 rojas, 1 verde. (Briand, 2011)]

Una de las conclusiones de este análisis previo consiste en que los resultados confirman que, en una situación igual (en el número de tiradas), es menos arriesgado conjeturar la composición 4 rojas, 1 verde (para la botella que contiene 4 rojas y 1 verde), que conjeturar 3 rojas, 2 verdes (para la botella que contiene 3 rojas, 2 verdes).

Un estudio teórico detallado del modelo de ayuda en la decisión fue escrito en su tiempo por P. L. Hennequin (1974), el cual permitía poner en evidencia que, para un número de tiradas iguales con un riesgo dado, ciertas composiciones podían ser conjeturadas y otras, no. Por otro lado, una de las conclusiones del estudio realizado por Briand (2011), es que permite plantear la hipótesis de que las experiencias matemáticas en clase (en tres campos, uno de ellos la estadística), aun cuando producen retroacciones de distinta naturaleza desde el punto de vista del observador, producen en el sujeto efectos similares. Podríamos decir que no habría una razón objetiva para que estas retroacciones fueran de naturaleza diferente en el momento del aprendizaje.” (p. 32-33)

Anexo III: Distribución de los cuatro equipos de alumnos en el aula

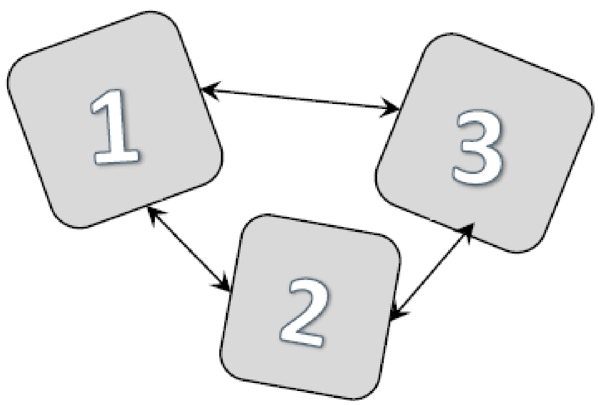


Anexo IV: Fichas para el docente

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

CINVESTAV

La probabilidad: lugar de encuentro de las razones, decimales y fracciones en primer año de nivel medio



Fichas para el desarrollo de una secuencia

Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad
en Investigaciones Educativas

Tesista: **Juan José Sosa**
Director: Dr. David Block Sevilla

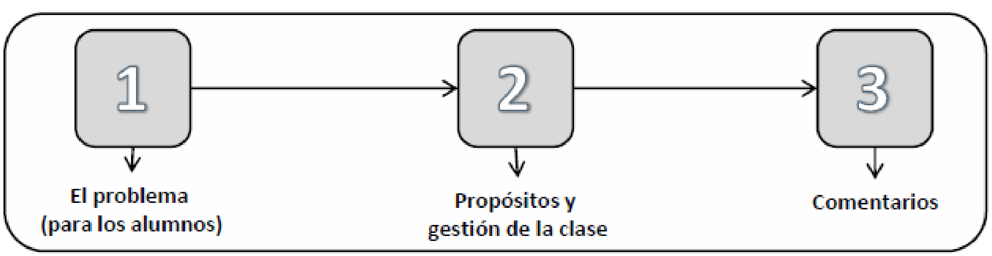
Índice

Guía de uso

En este documento se presenta una secuencia de actividades, su gestión en el aula, y comentarios, en el marco de un estudio didáctico de la noción de probabilidad y de los puntos de encuentro con otras nociones como son las razones, fracciones y los decimales. El estudio pretende, en términos generales, abordar las interacciones que se dan en el salón de clases entre los alumnos con este "medio" (problemas) para luego identificar los elementos de la situación que podrían favorecer u obstaculizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la probabilidad en primer año de nivel medio.
Las situaciones incluyen el trabajo con papel y lápiz, uso de calculadoras, experimentación con materiales concretos (botellas con canicas y fichas) y el uso de un simulador virtual. **La secuencia está estructurada en dos fases y seis lecciones. La duración aproximada es de 8 sesiones de 30 minutos.**

FASE 1: ¿Es mucho o es poco? (3 sesiones)	Lección 1.1 Tiro al aro	1 sesión y media	45'
	Lección 1.2 Concurso, ¿cómo cuidamos el planeta?	1 sesión y media	45'
FASE 2: Botellas con canicas, ¿cuántas de cada color? (5 sesiones)	Lección 2.1: Presentación de la experiencia	1 sesión	30'
	Lección 2.2: Rondas de 5 tiradas	1 sesión	30'
	Lección 2.3: Una cierta botella "Z"	2 sesiones	60'
	Lección 2.4: ¡Calcula, apuesta y gana!	1 sesión	30'

Para cada lección se presentan tres elementos: **(1)** El enunciado de los problemas para los alumnos (consignas); **(2)** Los propósitos didácticos de esa lección, con sugerencias para su desarrollo en el aula (la gestión de la clase) que incluye: una estimación de los tiempos y los momentos de puesta en común, debate, trabajo colectivo o en equipos y de institucionalización; y **(3)** Comentarios adicionales acerca del problema, su trabajo en el aula, y posibles respuestas de los alumnos.



Fase 1: ¿Es mucho o es poco?

Lección 1.1: Tiros al aro

1. En el recreo Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3; en cambio, José tiró 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?

2. Pedro tiró 6 veces al aro y encestó 4; en cambio Martin tiró 7 veces al aro y encestó 3, ¿quién es el mejor tirando al aro?

3. Las hermanas Silvia y Vanesa también juegan al básquet. Silvia tiró 5 veces y encestó 4; en cambio, Vanesa tiró 10 y encestó 6. ¿Cuál de las dos fue mejor tirando al aro en estos tiros?

Discutan las respuestas y los argumentos que dieron.

4. En la siguiente tabla, están anotadas las veces que tiró cada uno de los chicos, cuántas veces encestó y qué parte del total de tiros encestó.

a) Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto		6	$\frac{1}{2}$
Mary	24		$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	
Valeria		14	$\frac{2}{3}$
Tatiana		16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20		$\frac{3}{5}$

b) Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto

Propósitos y gestión de la clase

Propósito de la fase 1: Que los alumnos establezcan relaciones entre cantidades absolutas, para construir la noción de cantidades relativas, a través del uso de diferentes procedimientos de comparación de razones, fracciones y decimales.

Propósito didáctico de la lección: Que los alumnos utilicen diferentes procedimientos para comparar razones y fracciones.

1. ¿Es mucho o es poco?

En equipos de 3-4 integrantes

1.1 Tiros al aro

1. En el recreo Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3; en cambio, José tiró 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?

5 min

2. Pedro tiró 6 veces al aro y encestó 4; en cambio Martin tiró 7 veces al aro y encestó 3, ¿quién es el mejor tirando al aro?

5 min

3. Las hermanas Silvia y Vanesa también juegan al básquet. Silvia tiró 5 veces y encestó 4; en cambio, Vanesa tiró 10 y encestó 6. ¿Cuál de las dos fue mejor tirando al aro en estos tiros?
Discutan las respuestas y los argumentos que dieron.

5 min

Puesta en común (colectiva) + institucionalización ⟷ 5 min

Una primera noción para **institucionalizar**:

- "Para comparar quien es mejor jugador no es suficiente comparar la cantidad de tiros encestados por cada uno. Es importante considerar tanto el total de tiros realizados como el total de tiros encestados.
- Silvia es relativamente mejor que Vanesa, porque aunque encestó menos veces en cantidad absoluta, ha tenido mayor cantidad de tiros encestados en relación al total de veces que tiró.
- Relativamente se refiere a tener en cuenta no solo la cantidad de tiros encestados, sino también el número total de veces que se tiró.

4. En la siguiente tabla, están anotadas las veces que tiró cada uno de los chicos, cuántas veces encestó y qué parte del total de tiros encestó.

a) Completa los datos que faltan.

En equipos de 3-4 integrantes

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	10/25 o 2/5
Valeria	21	14	$\frac{2}{3}$
Tatiana	24	16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$

10 min

Puesta en común (comparación de procedimientos) → 5 min

b) Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto
Mary	Manu	Alberto	Daniel	Valeria-Tatiana (empate)

5 min

Puesta en común → 5 min

Se podrá **institucionalizar** que:

- La relación entre total de tiros realizados y los encestados, se puede expresar a través de las fracciones.
- Las fracciones expresan cantidades "relativas", porque consideran las veces que se encestó y el total de tiros realizados.
- Por ejemplo, cuando decimos que "Alberto encestó ½ de las veces que tiró, estamos expresando que independientemente de cuántos tiros haya lanzado, los que encestó son la mitad", ó si "Valeria y Tatiana encestaron 2/3 de las veces que tiraron al aro, quiere decir que de cada 3 tiros, encestaron 2, es decir que si tiraron 21 veces, encestaron 14, o si tiraron 24 veces, encestaron 16, y en comparación, Valeria y Tatiana no son relativamente una mejor que otra (empate), pero ambas son relativamente mejores jugadoras que Alberto."

Comentarios

En el **inciso 1)** los alumnos podrían mirar las veces que cada jugador ha encestado, es decir solo las frecuencias absolutas, sin embargo esta comparación es válida si los jugadores hubiesen tirado al aro la misma cantidad de veces. Las cantidades fueron elegidas de forma tal que al comparar los pares (tiros realizados; tiros encestados), pudiesen realizar comparaciones cualitativas, por ejemplo: *"José encestó la mitad de las veces que tiró, mientras que Juan encestó menos de la mitad de las veces que tiró, con lo cual José sería mejor tirador que Juan"*. La elección del par (4,2) podría posibilitar el uso de la noción de mitad (como mitad de tiros encestados del total de tiradas).
En el **inciso 2)** los alumnos podrían argumentar que como Pedro encestó 4 veces y Martin 3, entonces Pedro es mejor jugador. Otro argumento podría ser que: *"Pedro tiró menos cantidad de veces y encestó más que Martin (o que Martín tiro más veces y encestó menos veces que Pedro)"*, el cual es suficiente para afirmar que según esos datos, a Pedro le ha ido mejor en el juego.

El **inciso 3)** los alumnos deberían realizar un trabajo similar al inciso 1) pero ahora podrían establecerse relaciones bajo la idea de "la mitad" y "el doble". Podrían conjeturar que si Silvia hubiera tirado el doble de veces, encestaría 8, y como Vanesa encestó 6, entonces Silvia es mejor jugadora. Asimismo, si Vanesa hubiese tirado la mitad, encestaría 3 veces y como Silvia encestó 4, entonces Silvia es mejor jugadora. El cálculo mental podría ser un recurso útil.

Por otro lado, dejaremos la siguiente pregunta para que el docente la utilice en el momento de la puesta en común: ***¿Puede ser Silvia mejor tiradora que Vanesa, aunque encestó menos veces que ella?*** con la cual se espera que los alumnos expliciten la diferencia entre las cantidades absolutas, observando que una es mayor que la otra, sin embargo, si se comparan las relativas, sucede lo opuesto (lo cual es una característica contraintuitiva).

Podrían argumentar que: *"Aunque Vanesa encestó más veces que Silvia, en cantidades absolutas, al considerar el número total de tiradas de cada una, resulta que Silvia lo hizo en un número menor de tiradas, mientras que Vanesa lo hizo en un número mayor"*.
También podría decirse que *"Silvia es mejor que Vanesa, pues aunque encestó menos veces, ha tirado en total menos veces. Si observamos las veces que falló, Silvia lo hizo 1 vez en 5 tiros mientras que Vanesa falló 4 veces en 10 tiros."* La pregunta podría poner en foco la importancia de considerar el total para decidir que jugadora es mejor, y con ello, la diferencia entre cantidades absolutas y las relativas.

Para completar la tabla del **inciso 4a)** es necesario que los alumnos interpreten las fracciones anotadas en ella: medios, tercios, quintos, que están indicando relaciones parte-todo. El **inciso 4b)** podría permitir realizar un trabajo de comparación de relaciones parte-todo.

Lección 1.2: Concurso: ***¿cómo cuidamos el planeta?***

1. Todos los años, las cuatro escuelas de una pequeña ciudad, realizan un concurso de dibujos, videos y cuentos sobre el cuidado del medio ambiente. Los alumnos que pasaron a la siguiente etapa fueron los siguientes:

Escuela	Alumnos
A	70
B	28
C	28
D	12

a. ¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?. Explica tu respuesta.

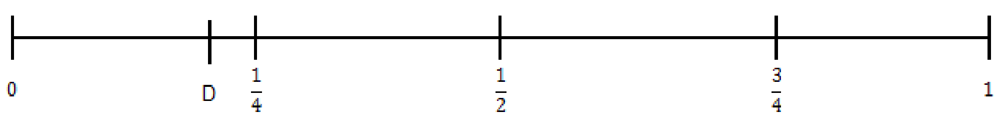
2. Los alumnos en cada escuela son:

Escuela	Total de alumnos
A	300
B	30
C	120
D	120

a. Considerando esto, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados? ¿y los peores?

b. En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la recta de abajo. Ubica las otras escuelas.

No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.



Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

3. Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

4. Alicia dice: "En mi escuela el cociente de los que pasaron el concurso dividido entre el total de alumnos es 0.3 "

a) ¿Se puede comparar con las escuelas anteriores?. Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

b) Si en la escuela de Alicia, el cociente hubiera sido 0.8, ¿a los alumnos les habría ido mejor o peor en el concurso?. Justifica.

c) ¿Cuál crees que sea el valor más grande que pueda tomar ese cociente? ¿y el más chico?. Explica por qué.

Propósitos y gestión de la clase

Propósitos didácticos: Que los alumnos utilicen diferentes procedimientos para comparar razones y fracciones.

1. Todos los años, las cuatro escuelas de una pequeña ciudad, realizan un concurso de dibujos, videos y cuentos sobre el cuidado del medio ambiente. Los alumnos que pasaron a la siguiente etapa fueron los siguientes:

En equipos de 3-4 integrantes

Escuela	Alumnos
A	70
B	28
C	28
D	12

5 min

a. ¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados?. Explica tu respuesta.

Breve Puesta en común

5 min

2. Los alumnos en cada escuela son:

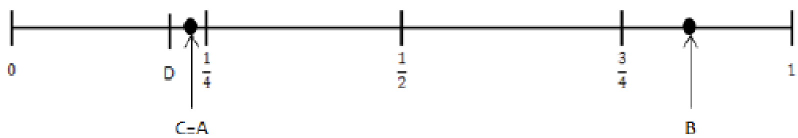
Escuela	Total de alumnos
A	300
B	30
C	120
D	120

5 min

a. Considerando esto, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados? ¿y los peores?

b. En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la recta de abajo. Ubica las otras escuelas.

5 min



No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.

Puesta en común + institucionalización ⟷ 5 min

Se podrá **institucionalizar** en esta puesta en común que:

- La fracción es una razón o proporción que da como información una relación entre dos cantidades, en este caso entre el numero de alumnos aprobados y el total de alumnos de la escuela.
- Las fracciones se pueden comparar por ejemplo para medir la escuela con mejor resultado en el concurso.
- Cuando las fracciones se usan para establecer una relación entre dos cantidades como aquí, se dicen que expresan cantidades relativas y no absolutas.

Por ejemplo, la fracción 3/4 da como información que de un total de 4 alumnos, 3 pasaron el concurso; o sus equivalentes: de cada 20 alumnos, 15 pasaron el concurso, o de cada 8 pasaron 6, o de cada 100 pasaron 75, o de cada 200 pasaron 150, etc.

En equipos de 3-4 integrantes

3. Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela E pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

Breve puesta en común

10 min

4. Alicia dice: "En mi escuela el cociente de los que pasaron el concurso dividido entre el total de alumnos es 0.3 "

a) ¿Se puede comparar con las escuelas anteriores?. Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

b) Si en la escuela de Alicia, el cociente hubiera sido 0.8, ¿a los alumnos les habría ido mejor o peor en el concurso?. Justifica.

c) ¿Cuál crees que sea el valor más grande que pueda tomar ese cociente? ¿y el más chico?. Explica por qué.

10 min

Puesta en común + institucionalización ⟷ 5 min

Se podría **institucionalizar:**

- Las razones se expresan como fracciones que dan información sobre la relación entre las cantidades puestas en juego. Ejemplo: en la escuela E, pasaron el concurso el 3/7 de los alumnos, quiere decir que pasaron 3 de cada 7, 30 de 70; 36 de 84, etc.

- Las razones también pueden expresarse como números decimales, obtenidas como el cociente entre una parte y el total, dando información sobre la relación entre las cantidades puestas en juego. Ejemplo: en la escuela de Alicia paso el concurso 0.8 de los alumnos, quiere decir que pasaron 8 de 10, 16 de 20; 80 de 100, 120 de 150, etc.

Comentarios

En el **inciso 1 a)** los alumnos podrían afirmar que la escuela A tuvo mejores resultados y la D los peores, y que las escuelas B y C han tenido los mismos resultados.

En este momento, el docente dispondrá de la siguiente pregunta, para poner más énfasis en la necesidad de contar con los totales, para utilizarlo en una breve puesta en común colectiva: ***"¿Se necesita tener otra información de cada escuela para poder decir qué escuela tuvo los mejores resultados? ¿cuál?".*** Recordemos que es la primera vez en la secuencia que los alumnos se enfrentan a una situación que pone en evidencia la necesidad de tener más información (datos) para poder decidir o dar mayor consistencia a sus argumentos.

El **inciso 2 a)** permite, mediante esta nueva información, establecer relaciones parte-todo para determinar en cuál de esas escuelas los alumnos tuvieron los mejores resultados. Para responder, podrían establecerse comparaciones entre escuelas, tomadas de a dos, con argumentos como el siguiente: *"La escuela B tuvo mejores resultados que la escuela A*, dado que si en la escuela B pasaron a la siguiente etapa 28 de 30 alumnos puede ser equivalente a 280 de 300 alumnos (para mantener la misma proporción) y como en la escuela A pasaron 70 de 300, afirmamos que B tiene más alumnos (relativos al total) que pasaron la prueba."

Para responder el **inciso 2 b)** los alumnos podrían elaborar argumentos como los siguientes:

- En la escuela A pasaron a la siguiente etapa 70 de 300, es **casi** la cuarta parte de los alumnos de la escuela, pues 300:2 = 150 y 150:2 = 75 ó 300:4 = 75
- En la escuela C pasaron a la siguiente etapa 28 de 120 es **casi** la cuarta parte del total de alumnos de la escuela, pues 120:4=30
- En la escuela D pasaron a la siguiente etapa 12 de 120 es **menos** de la cuarta parte (30 alumnos) (es dato del inciso).

El docente podría proponer en caso que considere necesario, el uso de una tabla para que los alumnos construyan fracciones a partir del conocimiento de la relaciones numéricas entre alumnos que pasaron el concurso y el total de alumnos de la escuela (parte-todo). La tabla podría funcionar como apoyo para el cálculo de fracciones, y un trabajo análogo al problema anterior (tiros al aro)

Escuela	Fracción de alumnos que pasaron a la etapa siguiente
A	
B	
C	
D	

El **inciso 3)** busca introducir la noción de fracción como una relación (razón) entre una parte y un todo. Esta relación es útil por ejemplo para obtener información del todo conociendo una parte.

La decisión de dar en el problema sólo la fracción, sin conocer el total de alumnos de la escuela E, ni aquellos que han pasado el concurso, podría permitir dar fuerza a una característica semántica importante: *la noción de fracción como una razón que conserva una relación entre cantidades.*

Para promover la construcción de un significado de la fracción 3/7, los alumnos podrían analizar cómo resolvieron los problemas anteriores, en los que sí tenían como dato el total de alumnos de la escuela y de los alumnos que pasaron el concurso (o en el caso de tiros al aro, tenían como dato el total de tiros realizados y/o total de encestados). Es posible que se pregunten: *¿es posible comparar con las otras escuelas, sin conocer el numero de alumnos?*

El docente podría disponer de algunas **estrategias** para utilizar en una **breve puesta en común** en el caso que los alumnos no pudieran avanzar en la comparación: la primera es proponer revisar los problemas resueltos anteriormente (tiros al aro y este problema en sus incisos1, 2, y 3), la segunda podría introducir un dato (parte o todo) que les ayude a comparar, realizando un trabajo análogo a los anteriores (con el riesgo de quitar potencia a la fracción): *"Si la escuela tuviera en total 84 alumnos, ¿Cuántos hubieran pasado el concurso?"* o *"Si hubieran pasado el concurso un total de 36 alumnos, ¿Cuál es la cantidad total de alumnos de la escuela?"*.

En el **inciso 4)** se busca evidenciar que las expresiones decimales de las fracciones (como de las razones), también tienen la propiedad de conservar la información relevante acerca de las relaciones entre las cantidades involucradas. Cabe destacar que asociada a la noción de los decimales, se presenta la noción de cociente entre dos cantidades (enteros positivos), lo cual podría necesitar una mayor presencia del docente en la gestión y desarrollo de la situación.

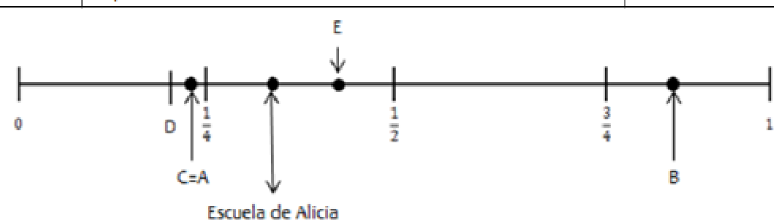
Como recurso para favorecer el desarrollo de la clase, el docente podrá desplegar algunas de las estrategias siguientes:

1. Podría preguntar *¿cuáles son las parejas de números cuyo cociente da como resultado 0.3? ¿Cuáles son todos los números cuya división da 0.3?* Este tipo de trabajo incorpora una propiedad nueva: *"Dada la relación (razón) expresada como un número decimal, existen infinitos pares de números cuyo cociente da como resultado ese número decimal"*. Esta propiedad introduce la posibilidad de "*generar*" los pares de números naturales cuya razón se expresa como un número decimal.

2. Otra posible intervención del docente, sería la de realizar preguntas introduciendo alguna cantidad hipotética de alumnos que han pasado el concurso o total de alumnos de la escuela, por ejemplo: *"Si hubieran pasado el concurso un total de 45 alumnos, ¿Cuál es la cantidad total de alumnos de la escuela?"*, otra pregunta podría ser: *"Si en la escuela tuviera un total de 150 alumnos, ¿Cuántos hubieran pasado el concurso?"*
El propósito de estas últimas preguntas es el de posibilitar que los alumnos puedan abordar el problema con recursos matemáticos propios, o establecer relaciones con los problemas resueltos anteriormente. Por ejemplo, ante la última pregunta, los alumnos podrían realizar cálculos para determinar qué número dividido 150 dará como resultado 0.3, por ejemplo podrían realizar un método de tanteo, probando con calculadoras.

3. Podría considerarse otro método que los alumnos podrían desarrollar, -o el docente proponer- que podría ser el de transformar todas las fracciones a su expresión decimal, realizando cocientes entre alumnos que pasaron el concurso y el total de cada escuela, lo cual podría permitirles decidir cuáles son las escuelas ***relativamente*** mejores que otras, a partir de la comparación de las expresiones decimales.

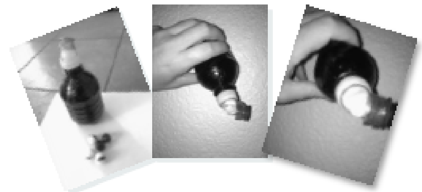
Escuela	Fracción de alumnos que pasaron a la etapa siguiente	Expresión Decimal
A	70/300; 7/30	0.233
B	28/30; 14/15	0.933
C	28/120; 14/60; 7/30	0.233
D	12/120; 6/60; 3/30; 1/10	0.1
E	36/84	0.428
Esc. de Alicia	45/150	0.3



En el **inciso 5 b) y c)** podría promover una generalización de la idea que éstos valores estarán comprendidos siempre entre 0 y 1, siendo los más cercanos a 0 las escuelas a las que les fue peor en el concurso y las más cercanas a 1 aquellas a las que les fue mejor.
Como recurso para el docente, ***para discutir en la puesta en común, podría preguntar***:
- ¿Cómo sería el cociente en una escuela donde todos los alumnos pasaron el concurso?
- ¿Cómo sería el cociente en una escuela donde no pasó el concurso ningún alumno?
- ¿Cómo sería el cociente en una escuela donde pasó el concurso la mitad de los alumnos? ¿Podría ser el cociente mayor a 1? ¿por qué?

Fase 2: Botellas con canicas, ¿cuántas de cada color?

Lección 2.1: Presentación de la experiencia



En las botellas oscuras A, B y C hay 5 canicas en total, con distinta cantidad de blancas y negras. Al volcar la botella podrán ver solamente una canica a la vez.
El desafío consiste en averiguar si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella.

Reglas:

- *Se realizan tiradas en equipo de 4-5 integrantes.*
- *Pueden designar a un integrante del equipo para que lo realice o hacerlas por turnos.*
- *Se anota el color que sale y se mezcla el contenido de la botella.*
- *Se remueve bien y se repite esta operación.*
- *No se puede abrir la botella.*

1. Realicen 20 tiradas con la botella que les tocó, luego hagan lo mismo con las otras dos botellas, intercambiando con otros equipos.

2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla

Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

Botella C	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

3. Analiza en equipo, los resultados que obtuvieron. en particular discutan si con estos datos es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella, ¿qué se puede saber? En caso afirmativo justifiquen y en caso negativo, digan por qué.

4. Realicen 20 nuevas tiradas con cada botella y comparen con los resultados obtenidos anteriormente, para ver si mantienen su idea de lo que hay, o si la cambian. Registren los resultados en una tabla similar a la que ya usaron.

Propósitos y gestión de la clase

Propósito didáctico: Se pretende que los alumnos comprendan las reglas del experimento, puedan diferenciar una tirada de una ronda o serie de tiradas y elaboren registros para formular las primeras conjeturas o hipótesis acerca del contenido de las botellas.

Presentación de la experiencia 5 min

"Aquí hay una caja (o bolsa transparente) con 30 canicas blancas y negras (se muestran) y botellas (oscuras u opacas) con etiquetas A, B y C y con un agujero en la tapa.

Se propone a un alumno que mezcle bien las canicas que están en la bolsa y tome, sin mirar, 5 canicas y las introduzca dentro de la botella (puede ser de una por vez).
Puede pedirse a otro alumno que constate que la botella tiene 5 canicas, siempre sin mirar el color.

Luego, cerrará la botella con su tapa y mostrará a toda la clase que al inclinar la botella, puede observarse el color de la canica que se asoma por la tapa."

Organización colectiva

Previamente, el docente ha conformado cada botella con la siguiente composición conocida por él, pero no por los alumnos.

Botellas	Canicas negras	Canicas blancas
A	4	1
B	3	2
C	2	3

Importante: todos los niños saben lo que contienen las botellas, pero ignoran qué cantidad de canicas de cada color tiene cada una en su interior. Por lo tanto, no se deberá abrir la botella.

Luego se repartirán las botellas, algunos equipos con botella A, otros B, otros C. Las botellas circularán entre los equipos, de acuerdo a la consigna.

2.1 Primera parte

En las botellas oscuras A, B y C hay 5 canicas en total, con distinta cantidad de blancas y negras. Al volcar la botella podrán ver solamente una canica a la vez.

El desafío consiste en averiguar si es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella.

Reglas:

- *Se realizan tiradas en equipo de 4-5 integrantes.*
- *Pueden designar a un integrante del equipo para que lo realice o hacerlas por turnos.*
- *Se anota el color que sale y se mezcla el contenido de la botella.*
- *Se remueve bien y se repite esta operación.*
- *No se puede abrir la botella.*

1. Realicen 20 tiradas con la botella que les tocó, luego hagan lo mismo con las otras dos botellas, intercambiando con otros equipos.

2. Al finalizar las primeras tres rondas de tiradas, cada uno copie el total de apariciones de las canicas observadas en la siguiente tabla

Botella A	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

En equipos de 4-5 integrantes

Botella B	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

10 min

Botella C	Numero de tiradas	Canicas blancas y negras
1ª ronda		

3. Analiza en equipo, los resultados que obtuvieron. en particular discutan si con estos datos es posible conocer cuántas canicas de cada color tiene cada botella, ¿qué se puede saber? En caso afirmativo justifiquen y en caso negativo, digan por qué.

Breve puesta en común

5 min

4. Realicen 20 nuevas tiradas con cada botella y comparen con los resultados obtenidos anteriormente, para ver si mantienen su idea de lo que hay, o si la cambian. Registren los resultados en una tabla similar a la que ya usaron.

5 min

Puesta en común + institucionalización

5 min

Podría preguntarse a los alumnos ¿qué podemos saber hasta ahora?, para explicitarse, a modo de **institucionalización**:

- No se puede saber exactamente el color de la canica que se observará (antes de tirar), pero sí cuáles son los dos colores posibles.
- La presencia de aleatoriedad en el experimento, de incertidumbre
- Hay una relación entre el color de las canicas que hay dentro de la botella y las tiradas que se registran al repetir 20 veces el experimento.

Comentarios

Luego de la presentación de la actividad, se desarrolla un momento de experimentación grupal, realización de tiradas y primeros registros.

En el **inciso 1**, se propone que los alumnos completen las primeras 20 tiradas con la botella A, y luego intercambien con otros equipos las demás botellas. En este momento los alumnos podrían establecer acuerdos acerca de quién realizará las tiradas (si lo harán por turnos o designan a un secretario en el grupo).

En el **inciso 2**, aunque se explicita por primera vez la palabra "ronda", relacionándola con las 20 tiradas que realiza cada equipo con cada botella (A, B y C), puede suceder que para los alumnos no tenga sentido, dado que las primeras 20 tiradas no necesariamente puede pensarse como una ronda o agrupamiento, pueden pensar en que son tiradas, individuales, sin relación con el número de veces que se repite. Asimismo, puede ocurrir que no adviertan, ni es un propósito en ésta sesión, la relación que hay entre el número de tiradas y la cantidad de canicas de cada color observada, con el contenido de la botella.

A su vez, el propósito del inciso es el de producir los primeros registros, realizando las primeras tiradas. Es posible que los alumnos escriban en la tabla que se propone, la letra "b" cada vez que observan una canica blanca y la letra "n" para canicas negras. Podrían, incluso, escribir las tiradas en forma de lista o series, por ejemplo:

Botella A: nnnbnnbnbnbnnnnnnnbn
Botella B: nbnbbbbbbnnbbnbnnnnn
Botella C: bnbbnbnbbnnbbbbnnnbb

Cabe destacar que en la tabla propuesta no se indica la palabra "cantidad de canicas", con lo cual abre la posibilidad a que los alumnos decidan realizar el conteo de acuerdo a la necesidad. Si los alumnos razonan sobre las cantidades, podría suceder que propongan registros más compactos, por ejemplo:
Botella A: 15n y 5b
Botella B: 10n y 10b
Botella C: 8n y 12b
Sin embargo, esta posible forma de registro podría ser propuesta por los alumnos en la siguiente fase cuando se repita el experimento un cierto número de veces.

En el **inciso 3** de la guía, se espera que los alumnos construyan una primera conjetura para que un representante del grupo la pueda expresar en la puesta en común. Posiblemente para los alumnos sea una oportunidad para explicitar sus primeros enunciados sobre la relación entre los resultados obtenidos en 20 tiradas y la cantidad de fichas negras y blancas que podría contener la bolsa (composición). La revisión colectiva de los enunciados que se proponen, podría favorecer la formulación de nuevas conjeturas.

Por otra parte, el docente podrá preguntar cuestiones como las siguientes, en el caso que se observe que los alumnos no comenten. Incluso, podría proponer como una tarea para discutir en equipos, y luego debatir en forma colectiva:

Revisen si…

-los resultados muestran la mitad de canicas de cada color;

-en general hay más canicas negras que blancas o al revés,

-los resultados permiten descartar alguna botella en particular, como la que tiene solo canicas blancas o solo negras.

Anoten sus conclusiones.

Vale aclarar que la puesta en común dará oportunidad para *generar la necesidad* de realizar nuevas tiradas. No se prevé que en este momento se deban validar las conjeturas.

En el **inciso 4** de la guía, se plantea una nueva instancia de experimentación grupal, con 20 nuevas tiradas. La cantidad de tiradas se mantiene constante y es igual a las del inciso 1, porque esto posibilitaría la comparación de resultados obtenidos y podría contribuir a que los alumnos reexaminen los argumentos que fueron explicitados en la puesta en común.

También es posible que los alumnos luego de esta comparación, propongan nuevas tiradas o incluso quieran cambiar el número de veces que se repite el experimento.

El docente, luego de estas rondas de tiradas, podría proponer una segunda puesta en común, donde se pedirá a cada equipo que explicite los resultados obtenidos en la primera ronda y la actual. Puede disponer de una tabla como la siguiente, para completarla en el pizarrón:

	Primeras 20 tiradas	Segundas 20 tiradas
Equipo 1	A: B: C:	A: B: C:

5. A partir del trabajo anterior, ¿por cuál composición de cada botella apostarías? Justifica.

6. Realicen 10 rondas de 5 tiradas cada una para ver si siguen sosteniendo sus ideas de lo que hay en cada botella o si las cambian. Hagan lo mismo con las otras dos botellas intercambiando con otros equipos.

7. Registren el número de canicas de cada color que sale en cada ronda. Luego, analicen si con éstos datos es posible conocer la composición de la botella.

Rondas con la botella ...	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Cantidad de fichas negras										
Cantidad de fichas blancas										

8. Vamos a seguir experimentando, pero ahora con 20 rondas de 5 tiradas. ¿Quieren cambiar la composición que estiman que tiene cada botella? Dar argumentos de por qué sí o por qué no.
Además, registren en una tabla similar a la que ya usaron.

9. Si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas, ¿qué suponen que pasaría con los datos obtenidos y la composición de la botella?

Propósitos y gestión de la clase

Propósito didáctico: A partir de los registros y conclusiones elaboradas en la sesión 2.1 y motorizados por la necesidad de poner a prueba sus conjeturas sobre la composición de la botella, se pretende que se construyan o reutilicen registros que sean más económicos (en cuanto a procedimientos) y explicitar las posibles composiciones de las botellas.

Asimismo, construir relaciones entre cantidades de fichas blancas o negras respecto a cierta cantidad de tiradas, que permitan diferenciar cantidades absolutas de las relativas en un contexto aleatorio, por ejemplo: *no es lo mismo decir que se observó 5 veces una canica blanca, que decir se observó 5 veces una canica blanca en un total de 20 repeticiones del experimento.*

2.2. Rondas de 5 tiradas

5. A partir del trabajo anterior, ¿por cuál composición de cada botella apostarías? Justifica.

Organización colectiva

6. Realicen 10 rondas de 5 tiradas cada una para ver si siguen sosteniendo sus ideas de lo que hay en cada botella o si las cambian. Hagan lo mismo con las otras dos botellas intercambiando con otros equipos.

En equipos de 4-5 integrantes

7. Registren el número de canicas de cada color que sale en cada ronda. Luego, analicen si con éstos datos es posible conocer la composición de la botella.

10 min

Rondas con la botella	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Cantidad de fichas negras										
Cantidad de fichas blancas										

Breve puesta en común

5 min

8. Vamos a seguir experimentando, pero ahora con 20 rondas de 5 tiradas. ¿Quieren cambiar la composición que estiman que tiene cada botella? Dar argumentos de por qué sí o por qué no.
Además, registren en una tabla similar a la que ya usaron.

En equipos

10 min

9. Si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas, ¿qué suponen que pasaría con los datos obtenidos y la composición de la botella?

Puesta en común + institucionalización

5 min

En la puesta en común el docente podría proponer completar la siguiente tabla en el pizarrón

Cantidad de veces		5b	1n 4b	2n 3b	3n 2b	4n 1b	5n
Botella	A						
	B						
	C						

¿Qué podemos saber hasta ahora?, podría **institucionalizarse**:

- Existen seis posibles composiciones de la botella (0n5b, 1n4b, 2n3b, 3n2b, 4n1b, 5n0b)
- Las composiciones no pueden ser 0n5b ni 5n0b, porque se observan canicas blancas y negras en cada botella.
- Los resultados de las rondas de 5 tiradas son variables (aleatorios), mientras que el contenido de la botella es fijo (determinista).
- Una ronda está compuesta por 5 tiradas, pero pueden hacerse rondas de 6, 7 u otro número de tiradas consecutivas.
- Hay resultados que tienen más posibilidad de salir que otros, por ejemplo, en la botella A salen más canicas negras que blancas, en comparación con las botellas B y C

Comentarios

La consigna de la clase plantea una continuidad respecto a la primera parte de la experiencia (pág. 17), con lo cual es importante retomar las ideas, por ejemplo a través de un diálogo de preguntas y respuestas. Repensar el experimento, y el desafío (si es posible conocer la composición de la botella), así como las conjeturas que se elaboraron, podría generar la necesidad de realizar nuevas tiradas. El **inciso 5)** busca retomar esas conjeturas y explicitarlas.

El **inciso 6** propone un nuevo trabajo para los alumnos, incorporando la palabra "ronda" entendida como una sucesión (o agrupamiento) de tiradas, (noción que en la primera fase podría haber pasado inadvertida o implícita, y podría haberse pensado como 20 tiradas independientes). Las rondas de 5 tiradas podría llevar a los alumnos a establecer nuevas conjeturas o modificaciones de las primeras, y sostener o descartar posibles composiciones de la botella. Por ejemplo si se conjeturó que en cierta botella hay *más canicas negras que blancas*, aquí podrían enriquecer el argumento afirmando (y especificando o refutando) que no puede estar compuesta por *1n4b ni puede ser la bolsa con 0n5b*.

Proponer a los alumnos la exploración con rondas de 5 tiradas, posee la particularidad que esa cantidad es la misma que el número de canicas de la bolsa, lo cual es interesante porque podría pensarse que una tirada de 5 canicas daría mejor aproximación a la composición de la botella compuesta también por 5 canicas. Esto pone en evidencia dos características bien diferentes: por un lado una relativa a la "máquina del azar" (botellas) y otra relativa a las "estadísticas observadas" a partir de esa máquina, la primera con característica determinista y la segunda, aleatoria.

La tabla del **inciso 7,** podría promover la necesidad de un cambio en la escritura. Asimismo, podría permitir comparar rondas de cinco tiradas en cada botella, cotejar esos resultados con sus conjeturas sobre la composición, así como la elaboración de nuevas donde además de atender a la obtención de más y menos fichas de cada color, se incorporen cantidades, y eventualmente se relacionen con el número de tiradas, lo cual podría promover la construcción de una primera noción de razón como relación entre cantidades de igual magnitud. Por ejemplo, de 10 rondas ha salido 6 veces la composición 2n3b.

Por otra parte, la comparación de resultados de la tabla podría evidenciar que cierta composición ocurre con más frecuencia que otras, aunque con 10 rondas es posible que se presenten muchas fluctuaciones en los resultados obtenidos. Podría conjeturarse, por ejemplo, que la bolsa A tiene una composición de 3n2b porque en las 10 rondas, esa composición ha ocurrido un mayor número de veces. La conjetura dejaría en evidencia la relación entre las estadísticas observadas y la composición de la máquina de azar (botellas).

En este momento, el docente podrá proponer una puesta en común para que los alumnos comenten los resultados obtenidos respecto a la conjetura inicial, y en particular, responder si cambiarían la composición que están pensando para cada botella.

En el **inciso 8**, se propone realizar nuevas rondas, ahora son 20 rondas de 5 tiradas, pero con la pregunta si cambiarían la composición que están pensando que tiene cada botella y con el uso de tablas como las realizadas en el ítem anterior.
Además, la pregunta apunta a reconsiderar o rexaminar la conjetura, en función de los resultados obtenidos en rondas anteriores. Es posible que se formulen razonamientos a futuro, sobre qué tan posible es que ocurra cierto evento teniendo como información las estadísticas de las tiradas anteriores: por ejemplo, si ha salido con mucha frecuencia cierta cantidad de canicas blancas y negras, y además suponen que esa es la composición de la botella, podrían sostener que al aumentar la cantidad de rondas de tiradas, ese resultado seguirá presentándose con mayor frecuencia. Asimismo podría ocurrir que descarten ciertas composiciones de botellas posibles por la frecuencia de aparición en las estadísticas observadas. También podría ocurrir que el resultado más frecuente en 10 rondas de 5 tiradas, no lo sea cuando se repita el experimento 20 veces, debido a las fluctuaciones de las pocas tiradas.

Por último, el **inciso 9**, se plantea la pregunta sobre qué sucederá si se realizaran 100 nuevas rondas de 5 tiradas. El aumento de 20 rondas a un número notablemente mayor (100 rondas), tal vez posibilite que los alumnos puedan establecer relaciones multiplicativas o aditivas entre el número de lanzamientos y el número de veces que ocurre determinado resultado.
Por ejemplo, podrían pensar en alguna relación de proporcionalidad: si de las 10 rondas, se obtuvo 4 veces resultado 3n2b, entonces en 100 rondas podría ocurrir 40 veces esa composición. Es posible que este tipo de razonamiento proporcional ocurriese también en el desarrollo de incisos anteriores.

Otra posibilidad es que los alumnos vuelvan a realizar el experimento, y registren los datos obtenidos en tablas de frecuencias similares a las anteriores, sin embargo es una estrategia muy poco económica, pues 100 rondas de 5 tiros son en total 500 tiros. **Luego, en una puesta en común, el docente podría proponer un trabajo colectivo que consista en recolectar información de varios equipos hasta completar las 100 rondas, en una tabla como la siguiente**:

Cantidad de veces		5b	1n 4b	2n 3b	3n 2b	4n 1b	5n
Botella	A						
	B						
	C						

Lección 2.3: Una cierta botella "Z"

1. Se sabe que con una cierta botella llamada "Z" se obtuvieron los siguientes resultados en muchas tiradas:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	13	7
50	31	19
30	20	10
40	22	18

a) Considerando estos datos, ¿por qué composiciones de la botella apostarías?
Analicen además, cuáles son las posibles composiciones que descartarían, y expliquen por qué.

b) Para cada fila de la tabla anterior, calculen los cocientes de cantidad de canicas negras entre el total de tiradas, luego respondan las preguntas siguientes:
Den argumentos de por qué sí y por qué no.

i) Los resultados obtenidos, ¿dan alguna pista acerca de la composición de la botella?.

ii) Si se obtienen cocientes cuyos resultado son 1, ¿qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿y si el cociente es cero?

iii) Si los resultados de los cocientes son próximos a 0.8, ¿Qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿en esa botella habrá más o menos canicas negras?

c) **Un nuevo plan de trabajo**: ¿Cuáles son las composiciones más probables de la botella Z?.

Para decidir cuál es la composición, realicen pruebas con una botella poniendo la cantidad de canicas blancas y negras que consideren que hay en la botella Z, luego:

i) Realicen un gran número de tiradas (alrededor de 180 o más, pueden hacerlo de 20 en 20)

ii) Dividan el número de canicas negras por el número de tiradas (frecuencia relativa)

iii) Registren los resultados en una tabla como la siguiente:

Tirada	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Blancas										
Negras										
Total	*20*	*40*								
Frec. relativa de negras										

iv) Elaboren conclusiones para compartirlas al final de la clase. Discutan qué información se podrá obtener con esta tabla acerca de la composición de su botella.

d) En la siguiente tabla, están las seis composiciones posibles de la botella con 5 canicas, blancas y negras, la parte del total que son negras y el cociente de negras entre el total.

i) Completa los datos que faltan.

Botella	Canicas negras	Canicas blancas	Fracción del total de canicas de la botella que son negras	Cociente de cantidad de canicas negras de la botella entre el total de canicas
1°	**4**	1	$\frac{4}{5}$	4:5=0.8
2°	3	2		0.6
3°		3	$\frac{2}{5}$	
4°	1			0.2
5°		5	0	
6°		0	1	

ii) Discutan si la información de esta última tabla podría ser útil para conocer la composición de la botella Z: ¿Hay alguna relación con las frecuencias relativas de canicas negras de la tabla anterior (ítem c)? Justifiquen.

Propósitos y gestión de la clase

Propósito didáctico: Propiciar el uso de las nociones abordadas en la Fase 1, pero ahora en un contexto aleatorio, bajo la hipótesis que esto posibilitaría la construcción del concepto de probabilidad. Asimismo que los alumnos logren explicitar las relaciones (vía el uso de razones, fracciones y decimales) entre cantidad de canicas de cada color y el total de canicas de la botella, que permitan tomar decisiones sobre la composición.

Situación 2.3: **Una cierta botella "Z"**

1. Se sabe que con una cierta botella llamada Z se obtuvieron los siguientes resultados en muchas tiradas:

Cantidad de tiradas con la botella Z	Canicas blancas	Canicas negras
20	13	7
50	31	19
30	20	10
40	22	18

En equipos de 3-4 integrantes

5 min

a) Considerando estos datos, ¿por qué composiciones de la botella apostarías? Analicen además, cuáles son las posibles composiciones que descartarían, y expliquen por qué.

5 min

Breve puesta en común

b) Para cada fila de la tabla anterior, calculen los cocientes de cantidad de canicas blancas entre el total de tiradas, luego respondan las preguntas siguientes:
Den argumentos de por qué sí y por qué no.

En equipos

10 min

i) Los resultados obtenidos, ¿dan alguna pista acerca de la composición de la botella?
ii) Si se obtienen cocientes cuyos resultado son 1, ¿qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿y si el cociente es cero?
iii) Si los resultados de los cocientes son próximos a 0.8, ¿Qué información daría sobre la posible composición de la botella? ¿en esa botella habrá más o menos canicas negras?

Puesta en común + institucionalización

5 min

- "La frecuencia relativa de un dato es el número de veces que ocurrió comparado con el total, es decir, se trata de una razón. Puede expresarse con una fracción o con un decimal.
- Relativa se refiere a tener en cuenta no solo la cantidad de canicas negras (o blancas), sino también el total de veces que se tiró. Por ejemplo, una frecuencia relativa de canicas negras de la botella Z es: 7 negras de 20 tiradas, 7:20=0.35. También puede escribirse como la fracción 7/20.
- Recordemos ejercicios anteriores, por ejemplo en el tiro al aro, Alberto encestó ½ de las veces que tiró, es decir que encestó la mitad de las veces que tiró, o que la frecuencia relativa de tiros es 0.5"

c) **Un nuevo plan de trabajo**: ¿Cuáles son las composiciones más probables de la botella Z?
Para decidir cuál es la composición, realicen pruebas con una botella poniendo la cantidad de canicas blancas y negras que consideren que hay en la botella Z, luego:

i) Realicen un gran número de tiradas (alrededor de 180 o más, pueden hacerlo de 20 en 20)

ii) Dividan el número de canicas negras por el número de tiradas (frecuencia relativa)

iii) Registren los resultados en una tabla como la siguiente:

En equipos de 3-4 integrantes

15 min

Tirada	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Blancas										
Negras										
Total	*20*	*40*								
Frec. relativa de negras										

iv) Elaboren conclusiones para compartirlas al final de la clase. Discutan qué información se podrá obtener con esta tabla acerca de la composición de su botella.

Puesta en común + institucionalización

10 min

Podría **institucionalizarse** que:

- Un fenómeno es aleatorio porque no se puede saber exactamente qué resultado saldrá, sin embargo si se repite muchas veces, hay un patrón o una regularidad en los resultados, según los cálculos realizados en la tabla del punto c).
- Luego de muchas repeticiones, la frecuencias relativas de negras, calculadas usando la fracción $\frac{cantidad\ de\ veces\ que\ sale\ negra}{total\ de\ repeticiones}$ (tambien llamada razón o proporción), se aproximan a un número que es su probabilidad.

d) En la siguiente tabla, están las seis composiciones posibles de la botella con 5 canicas, blancas y negras, la parte del total que son negras y el cociente de negras entre el total.

i) Completa los datos que faltan.

En equipos de 3-4 integrantes

10 min

Botella	Canicas negras	Canicas blancas	Fracción del total de canicas de la botella que son negras	Cociente de cantidad de canicas negras de la botella entre el total de canicas
1°	**4**	1	$\frac{4}{5}$	**4**:5=0.8
2°	3	2	3/5	3:5=0.6
3°	2	3	$\frac{2}{5}$	2:5=0.4
4°	1	4	**1**/5	1:5=0.2
5°	0	5	0	0:5=0
6°	5	0	1	5:5=1

ii) Discutan si la información de esta última tabla podría ser útil para conocer la composición de la botella Z: ¿Hay alguna relación con las frecuencias relativas de canicas blancas de la tabla anterior (ítem c)? Justifiquen

Puesta en común ⟷ 5 min

Comentarios

El **inciso 1a)** se pretende reforzar las discusiones acerca de cuál (o cuales) podrían ser las composiciones posibles de la botella Z, a partir de los resultados obtenidos (estadísticas) en 20, 30, 40 y 50 repeticiones del experimento.

En esta sesión 2.3 se propone dejar un momento esa decisión sobre el contenido de las botellas A, B y C, para centrar el trabajo en la relación de las estadísticas observadas de una cierta botella Z y la composición "más probable", intentando formalizar la noción de frecuencia asociada a una razón parte-todo posible de cuantificarse como una fracción, cociente o decimal.

Se prevé reducir la discusión colectiva alrededor de los datos de la tabla (que todos los alumnos dispondrán) que luego de un debate, se propondrá simular tiradas utilizando una botella con composición conocida por los alumnos, para comparar con los datos de la tabla (pertenecientes a la botella Z)

Estos razonamientos podrían llevar a los alumnos a elegir entre los casos posibles, aquellos que tienen mayor probabilidad de acuerdo al resultado de las tiradas. Además es posible que según los datos de la tabla, los alumnos discutirían alrededor de las composiciones 1n4b y 2n3b, dado que siempre han salido más blancas que negras. **Esto podría posibilitar un trabajo posterior donde se elaboren estrategias para decidir cuál de las dos composiciones se aproxima más a la composición de la botella.**

A continuación el docente propondrá un breve trabajo en equipos y puesta en común para responder las preguntas planteadas en el **inciso b)** cuyo propósito es establecer vínculos entre las composiciones posibles y resultados de las tiradas, con la noción de cociente, el cual podría ser un nuevo elemento en el problema para tomar decisiones vía la cuantificación de las razones. Asimismo, estamos revisitando una noción que ha sido trabajada en la fase 1, relacionada al cociente y la razón parte-todo, e inclusive con la sospecha de que esos números pertenecen al intervalo 0-1. Cabe destacar el papel del contexto aleatorio, para darle sentido a esa cuantificación.

Cuando los alumnos realicen los cocientes de cantidad de canicas negras entre el total de tiradas, se observarán que los valores están próximos a 0.4, pues para 20, 30, 40 y 50 tiradas, esos cocientes son 0.35; 0.33; 0.45 y 0.475 respectivamente (aunque no esperamos aún que los alumnos evidencien la importancia de 0.4).

Es posible que los alumnos, frente a la **pregunta b i)**, consideren que esos resultados no den información acerca del contenido de la botella (excepto que realicen las comparaciones con los cocientes de cantidad de negras entre el total de canicas de cada botella, lo cual en este momento de la secuencia, quizás sea un método poco probable).

Por otra parte, frente a la **pregunta b ii)** los alumnos podrían argumentar que, cuando el cociente da 1, indica que todas las canicas dentro de la botella son negras, dado que en las tiradas realizadas han salido siempre canicas negras. La propiedad del cociente que utilizarían es el que afirma que, para todo número entero positivo a (distinto del cero), se verifica que a:a=1. El razonamiento para el caso del cociente de canicas negras sobre el total de tirada es cero, se fundamenta en la propiedad que establece que dados dos números enteros a y b (con b distinto de cero); se verifica que si a:b=0, entonces (necesariamente) a=0, que en el contexto del problema significaría que no han salido canicas negras en cierto número de tiradas.

En la **pregunta b iii)** se propone analizar el caso en que el cociente de canicas negras entre el total de tiradas es 0.8, también en búsqueda del establecimiento de relaciones entre las estadísticas observadas y la composición de la botella.

En el **inciso c)** el docente propondrá ir aumentando la cantidad de tiradas, acumulando los resultados anteriores, podría ser, por ejemplo, aumentando de 20 en 20 tiradas. Con el cálculo de frecuencias acumuladas, se pretende que los alumnos intuyan, conjeturen y analicen las fluctuaciones de esas frecuencias, y su regularidad conforme se aumenta el número de veces que se repite el experimento. Regularidad asociada a la ley de los grandes números.

En el **inciso d)** aunque puede pensarse como un ejercicio independiente del trabajo anterior, pretende explicitar razones parte-todo de canicas negras respecto al total de canicas de botellas con distinta proporción. Consideramos que este trabajo podrá permitir que los alumnos construyan una referencia (determinista) que permita decidir la composición a partir del registro y procesamiento de datos de cierto numero de tiradas.

La **pregunta ii) del inciso d)** pretende que los alumnos establezcan y expliciten alguna relación entre los resultados obtenidos de las tiradas y la composición (conocida) de la botella. En este caso, podrían formular conjeturas acerca del comportamiento de las frecuencias acumuladas de canicas negras (registradas en la tabla del inciso c) y los valores fijos de los cocientes de cantidad de negras entre el total de canicas de la botella. Por ejemplo, podrían conjeturar: *"Dado que las frecuencias acumuladas se encuentran entre los valores 0.55 y 0.72 que son valores próximos a 0.6, entonces la botella tiene 3n2b"*. **Cabe destacar que es posible que ese argumento que relaciona los datos de la tabla d) con posibles composiciones de la botella y las frecuencias relativas de la tabla c) no ocurra en esta sesión, sin embargo será una noción muy importante que podrán seguir construyendo en la clase siguiente con el Juego: ¡calcula, apuesta y gana!.**

Lección 2.4: ¡Calcula, apuesta y gana!

El objetivo del juego de apuestas es estimar la cantidad de canicas blancas y negras que tiene la botella, de acuerdo a las tiradas que vayan solicitando al docente.

Cómo jugar:

- Se juega en equipo de 3-4 jugadores.
- Cada equipo tendrá 20 fichas que podrá intercambiar por resultados en 20 repeticiones del experimento realizados con el simulador de una botella con 5 canicas blancas y negras.
- Cada ficha equivale a 20 tiradas.
- Cuando un equipo está seguro de la composición, anota su apuesta y no podrá intercambiar mas fichas:

EQUIPO N° ……… ………
Composición de la botella: ……….. Blancas y …….. Negras
Apuesta: ……… ……… Fichas

- Luego se verificaran las apuestas realizadas a través del simulador, ingresando la respuesta a la pregunta: "*¿Sabes cuántas negras son?*", y dando clic en el botón "*Calificar*".
- Si la composición es correcta, recuperan el doble de lo apostado. Si es incorrecta, pierden su apuesta.
- **Gana el juego el equipo que al finalizar la sesión, tenga más fichas.**

Registren los resultados de las tiradas y los cálculos realizados.

Propósitos y gestión de la clase

Propósito didáctico: Se pretende que los alumnos utilicen procedimientos de comparación de razones, fracciones y decimales para establecer relaciones entre la composición de la botella y los resultados de muchas tiradas. En particular, establecer relaciones entre las cantidades relativas de canicas negras (o blancas) contenidas en la botella y las que resultan de la realización de grandes tiradas.

Materiales:

- Una computadora con el simulador de botellas con canicas.
- 150 fichas o semillas, para realizar apuestas.

Organización colectiva

5 min

Presentación del juego

El docente entregará a cada equipo 20 fichas, a todos la misma cantidad, la cual podrán cambiar cada una por 20 repeticiones consecutivas del experimento con una botella con cinco canicas, blancas y negras, que se realizara con una computadora con el simulador virtual. **Los alumnos desconocen la composición**.

El docente será el encargado del intercambio (trueque) de fichas por tiradas, disponiendo de una computadora con el simulador y de la gestión de apuestas, y ganadores.

Cuando todos los equipos estén seguros, se realizará una breve puesta en común, donde se darán argumentos basados en los resultados de las tiradas y que sucederá con las frecuencias relativas si se realizaran un gran número de tiradas.

- Los alumnos solicitarán los resultados de las tiradas que soliciten al docente, quien será el encargado de realizar la simulación y dar la información:

*"En 20 tiradas han salido..... canicas **negras**".*

- Todos los alumnos recibirán tiradas de una misma botella.

El objetivo del juego de apuestas es estimar la cantidad de canicas blancas y negras que tiene la botella, de acuerdo a las tiradas que vayan solicitando al docente.

Importante: el simulador solo permite acertar o fallar dos veces. En caso de fallar, en el segundo intento, el programa devuelve el resultado correcto. Con el botón "Borrar" se reinicia el juego (cambia la botella).

Se juegan varias partidas durante 20 min

En equipos de 3-4 integrantes

Cómo jugar:

- Se juega en equipo de 3-4 jugadores.
- Cada equipo tendrá 20 fichas que podrá intercambiar por resultados en 20 repeticiones del experimento realizados con el simulador de una botella con 5 canicas blancas y negras.
- Cada ficha equivale a 20 tiradas.
- Cuando un equipo está seguro de la composición, anota su apuesta y no podrá intercambiar mas fichas:

EQUIPO N° ……… ………
Composición de la botella: ……….. Blancas y ……… Negras
Apuesta: ……… ……… Fichas

Organización colectiva

- Luego se verificaran las apuestas realizadas a través del simulador, ingresando la respuesta a la pregunta: "*¿Sabes cuántas negras son?*", y dando clic en el botón "*Calificar*".
- Si la composición es correcta, recuperan el doble de lo apostado. Si es incorrecta, pierden su apuesta.
- **Gana el juego el equipo que al finalizar la sesión, tenga más fichas.**

Puesta en común + institucionalización

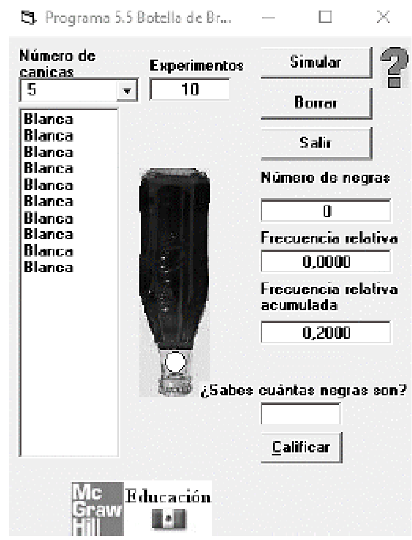
5 min

Al final de la clase, a modo de **institucionalización**, podría preguntarse, ¿Qué podemos saber hasta ahora?, explicitando:

- El cociente de canicas negras que salieron entre el total de tiradas, es aproximado al cociente de canicas negras y total de canicas de la botella. **La aproximación es mucho mejor a medida que las tiradas aumentan o "se acumulan".**
- El cociente es la frecuencia relativa, y puede escribirse como una fracción.
- **El cociente indicaría qué composición de botella es más probable que otra**. Por ejemplo, si el cociente de canicas negras entre el total de tiradas se encuentra entre 0.3 y 0.59, es poco probable que sea una botella con la composición de 4n1b.
- Además, **el cociente indicaría que en esa botella es mas probable obtener una blanca que una negra**. Por ejemplo, si el cociente de canicas negras y total de tiradas es 0.62, indica que la proporción de canicas negras (en esas tiradas) fue mayor al de blancas.

Comentarios

El simulador se encuentra disponible en la dirección http://www.mcgraw-hill.com.mx/pye01e/ en donde se encuentran los programas que acompañan el material impreso del libro: "Probabilidad y Estadística para Ingeniería, un enfoque moderno, Antonio Nieves Hurtado y Federico C. Domínguez Sánchez, Editorial Mc Graw Hill, 2010. Se encuentra bajo el nombre: "Programa 5.5: Botella de Brousseau 1"



De acuerdo a la exploración realizada, el programa permite simular hasta 10.000 repeticiones del experimento, y calcular la cantidad de canicas negras así como su frecuencia relativa y acumulada.

El programa permite realizar tantas repeticiones como sean necesarias, y da dos chances para arriesgar la cantidad de negras de la botella devolviendo el resultado de acierto o de error.

Si en el segundo intento se "califica" y no se gana, devuelve la cantidad de canicas negras que hay en la botella. Haciendo clic en "Borrar" se cambia la composición dentro de la botella y se reinicia el experimento.

También posee un icono de ayuda, donde explica su funcionamiento: *"Se trata de determinar el número de canicas encerradas en la botella. Para ello debes seleccionar el número total de canicas. En el cuadro inferior podrás anotar el número de canicas negras que, de acuerdo a tu criterio, están contenidas en la botella. Tendrás dos oportunidades para acertar. Puedes cambiar el número de experimentos para tratar de aproximar la proporción de canicas negras en la botella. Una vez que aciertes o falle a la segunda oportunidad, podrás utilizar el botón Borrar para reiniciar el juego. En este caso cambiará el número de canicas negras."*

Uno de los objetivos del juego es el de construir un método de previsión para encontrar los valores "limites" a los que se aproximan las frecuencias acumuladas, cuando el experimento se repite muchas veces. Podría permitir a los alumnos:

- Tener rápidamente resultados de muchas tiradas de una botella con composición desconocida,
- Sumar resultados entre varias tiradas con la misma botella, con lo cual podrán calcular frecuencias acumuladas
- El contexto de juego favorecería la búsqueda de relaciones entre tiradas y composición de las botellas, utilizando el mínimo posible de datos

Será importante solicitar a los alumnos que registren los resultados que obtienen de las tiradas, así como los procedimientos, cálculos, estrategias que den evidencia de su decisión (y que hagan que su apuesta esté lo más fundamentada posible).

Por otro lado, el juego podría permitir la búsqueda de una estrategia para ganar siempre, con la mínima cantidad de fichas, por ejemplo, los alumnos podrían establecer relaciones entre canicas negras y en posibles composiciones de las botellas (método de previsión). Entre las relaciones posibles que los alumnos podrían establecer como método, destacamos las siguientes, enfatizando que, por el trabajo que se propone en las últimas sesiones, es más probable que la expresión decimal sea la más utilizada por los alumnos.

1n es equivalente a 1 de 5; 1/5; 2 de 10; 20 de 100; ó 0.2
2n es equivalente a 2 de 5; 2/5; 4 de 10; 40 de 100; ó 0.4
3n es equivalente a 3 de 5; 3/5; 6 de 10; 60 de 100; ó 0.6
4n es equivalente a 4 de 5; 4/5; 8 de 10; 80 de 100; ó 0.8
5n es equivalente a 5 de 5; 1/1; 10 de 10; 100 de 100, ó 1

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alatorre, S. (2004). ¿A, B, o da igual?: estudio sobre el razonamiento proporcional (tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Artigue, M. (2011) “La ingeniería didáctica como objeto de estudio”. En Margolinas, C. *et al*. (2011) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVè école d’été de didactique des mathématiques. Vol. 1*. La pensée sauvage. Trad. Alejandra Avalos Rogel para uso interno del Seminario de didáctica de las Matematicas del DIE].

Batanero, C. (2013). “Sentido estadístico: Componentes y desarrollo” en I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria. Granada, España.

Batanero, C. y Díaz, C. (2010). “Estadística con Proyectos”. Facultad de Ciencias, Universidad de Granada. España.

Batanero, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME [en linea] 2005, 8 (noviembre): [Fecha de consulta: 12 de agosto de 2017] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302> ISSN 1665-2436

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, Kluwer Academic Publisher pp. 3-15

Block, D. (2001). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria: un estudio didáctico (tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Investigaciones Educativas. México.

Block, D. (2006). Se cambian fichas por estampas: Un estudio didáctico sobre la noción de razón “múltiplo” y su vinculación con la multiplicación de números naturales. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, vol. 18, núm. 2, agosto de 2006, pp. 5-36.

Block, D. (2007). El papel de la noción de razón en la construcción de las Fracciones en la Escuela Primaria. En: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) - Díaz de Santos. pp. 495-512. ISBN: 978-84-7978-803-2.

Block, D. (2018). La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular del 93 en México. Algunas reflexiones 25 años después (en prensa) Articulo aceptado para su publicación en el libro conmemorativo (en preparación) por los 30 años de la revista Educación Matemática.

Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las Fracciones en la Escuela Primaria. En: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) - Díaz de Santos. pp. 495-512. ISBN: 978-84-7978-803-2.

Briand, J. (2011). El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase. *Educación matemática*, *23*(1), 05-36. Recuperado el 23 de abril de 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000100002&lng=es&tlng=es.

Brousseau G. (1976). Premières découvertes des lois du hasard à l'école élémentaire. Document d'accompagnement du film de l'atelier de Pédagogie (TV Scolaire) ENS Saint Cloud, 1976. Publicado en 2015.Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2015/02/2_atelierTV1976.pdf

Brousseau, G (2009). Alternatives en Didactique de la Statistique (2009). Il a été extrait de ce texte une conférence prononcée au 41e Journées de Statistiques de la Société française de la Statistique en 2009. Le texte de cette conférence (10 pages) est extrait du texte présenté ici et a été publié dans les actes des journées et déposé sur HAL. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/09-Alternatives-en-didactique-de-la-statistique.pdf

Brousseau, G. (1974). Description des 31 leçons expérimentées à l'école J. Michelet à Talence; L'enseignement des Probabilités et les Statistiques; Compte-rendu de la 26e rencontre de la CIEAEM; Bordeaux août 1974; IREM de Bordeaux 82-123. Francia. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/ Proba-2i%C3%A8me-exp%C3%A9rience74.pdf

Brousseau, G. (2003). Recherches sur l'enseignement des probabilités et de la statistique: résumé des travaux de l'IREM de BORDEAUX 1971 à 1974, Francia. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/03-7e-R%C3%A9sum%C3%A9-des-travaux-de-lIREM-de-Bx-stat.pdf

Brousseau, G. (1969-1971). Etudes sur les possibilités d'enseigner des éléments de probabilités et de statistiques à l'école élémentaire 1971. Publicado en 2010.Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/possib71 1.pdf

Brousseau, G. (1972). Découverte des probabilités au CM; Expérience 1971-72. Enseignement élémentaire en Mathématiques n° 11, IREM de Bordeaux. Francia. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/D%C3%A9couverte-des-probabilit%C3%A9s-1971.pdf

Brousseau, G. (1993). Stratégies de l'analyse statistique. (Cours et Aide-Mémoire à l'intention des Professeurs en formation). LADIST, Université Bordeaux 1. Laboratoire actuel: DAESL; Laboratoire Cultures, Education, Sociétés (LACES). Unversité Bodeaux 2. Francia. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2014/11/1993strat%C3%A9ganalyzstat.pdf

Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In A. Mercier & C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques : Cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques (pp. 165-249)*. Grenoble: La Pensée sauvage. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/03-Sit-fond-et-processus-g%C3%A9n%C3%A9tiques-de-la-stat.pdf

Brousseau, G. (2005). Une expérience de premier enseignement des statistiques et des probabilités. In A. Mercier & C. Margolinas (Dir.), Balises en didactique des mathématiques: Cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques (pp. 165-249). Grenoble: La Pensée sauvage. Francia. Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/Une-exp-de-1er-enseignement-des-stat2001.pdf. En inglés: Brousseau, G., Brousseau N. y Warfield V. (2002). An experiment on the teaching of Statistics and Probability. En The Journal of Mathematical Behavior, 20 (3) (2002) 363–411. Disponible en: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312302000780

Brousseau, G. (2008). Notes sur l'enseignement des Statistiques et /ou des Probabilités dans la scolarité commune (6-14ans) (2001-2008). Notes pour le Colloque Inter. IREM de Périgueux et les débats de la commission Kahane (2001). Disponible en: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/Probabilit%C3%A9s-et-ou-statistiques.pdf

Brousseau, G. (2015). Etude de la situation fondamentale des Statistiques du curriculum. Premiere decouverte des lois du hasard a l'ecole elementaire. Emission TV « atelier de pédagogie » du 30.11.76. Date de production: 1974. COREM. Burdeos, Francia. Disponible en http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2015/01/1_Sit fon-statproba-74a.pdf

Brousseau, G. (1993) « Stratégies de l'analyse statistique. (Cours et Aide-Mémoire à l'intention des Professeurs en formation) « ; LADIST, Université Bordeaux 1 ; 84 pages. Disponible en : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2014/11/1993 str at%C3%A9ganalyzstat.pdf

Chevallard, G, Bosch, M. y Gascón, J. (1998) Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. (Biblioteca del Normalista) España: SEP, Cooperación Española, pp. 203-206

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). "Educación Estadística: relaciones con la matemática." Departamento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile. En: Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educacional Latinoamericana. pp. 53-64. Santiago, Chile.

DelMas, R. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En: D. BenZvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, Kluwer Academic Publisher pp. 79 –95

Gálvez, G (1985). "El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria" (tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Investigaciones Educativas. México.

Hacking, I. (1990). La domesticación del azar: la erosión del determinismo y el nacimiento de la ciencia del caos. España. Ed. Gedisa.

Kuzniak, A. (2005). La Theorie des situations didactiquees de Brousseau. Repères IREM numéro 61 – Octobre 2005 – p. 19-35. Recuperado el 23 de abril de 2018, de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/61_article_421.pdf

Mendoza, T. (2007). Estudio didáctico de la noción de porcentaje (tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Moore, D. (2005). Estadística aplicada básica. Ed. Antoni Bosch. España.

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, Kluwer Academic Publisher. pp. 17– 45

Nieves Hurtado, A. y Domínguez Sánchez, F. (2010).Probabilidad y Estadística para Ingeniería, un enfoque moderno. Editorial Mc Graw Hill. México

Ramírez, M. (2004). El saber enseñado: protagonista en la trama de acontecimientos en el aula: la proporcionalidad en sexto grado de educación primaria (tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Sadovsky, P. (2004). Marco didáctico general. La Teoría de Situaciones. En Condiciones Didácticas para un Espacio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas. Informe final de Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, UBA. (Capítulo 1, Apartado 5)

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. En H. Alagia, A. Bressan, P. Sadovsky Reflexiones teóricas para la educación matemática. Formación docente. Matemática. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina

Sensevy, G. (2011). Dispositivos didácticos y reconstrucción de la forma escolar. En: El sentido del saber. Elementos para una teoría de la acción conjunta en didáctica. Bélgica, Ed. Groupe de Boeck S. A., pp 291-640.

Sensevy, G. (1996). El tiempo didáctico y la duración de este tiempo en el alumno. Estudio de un caso en el curso intermedio. El diario de las fracciones. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 16 (1), pp. 7-46). CIRADE Aix-en-Provence, Université de Provence, Aix Marseille I. Traducción realizada por Alejandra Ávalos y Margarita Ramírez para el Seminario de Didáctica de las Matemáticas. DIE. Junio, 2016.

Secretaria de Educación Pública (SEP). (2011). Plan y Programas de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Primer grado. México.

SEP. (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Sexto grado. México.

SEP. (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. México.

Saiz, I.; Gorostegui E. y Vilotta, D. (2011) Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. Educación Matemática, vol.23, n.1, pp.123-151. ISSN 1665-5826.

Vergnaud, G. (1991), “La théorie des champs conceptuels”, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 10, núms. 2-3, Grenoble, La pensée sauvage, pp. 133-170.