

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SEDE SUR
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

Estudio didáctico en la resolución de problemas con GeoGebra. Las rectas
notables de los triángulos

Tesis que presenta

Horacio Saúl Sostenes González

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Investigaciones Educativas

Directora de la Tesis:

M. en C. Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez

Agradecimientos

A mi familia por la paciencia y apoyo en mis periodos de estudio.

A todos mis profesores y al personal del Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav por los conocimientos que compartieron conmigo.

A mi asesora M en C Irma Fuenlabrada Velázquez por su amabilidad y su gran apoyo durante todo el trayecto en la realización de este proyecto.

Al Dr. Apolo Castañeda Alonso por sus consejos, amistad y por los comentarios realizados para mejorar este trabajo. A la Dra. Judith Kalman Landman por la revisión y los comentarios a esta tesis.

A Bertha Vivanco Ocampo por todo su apoyo que junto con mi asesora siempre me brindó su asesoría, amistad, además de siempre apoyarme para retomar diálogos y correos extraviados.

A todos mis amigos y compañeros por sus consejos, y por los buenos momentos que pasamos juntos.

A SEIEM por la Beca Comisión otorgada número 205C2400/002873/2016 con la que pude realizar mis estudios de maestría.

Índice

Índice de tablas e ilustraciones.....	5
Resumen.....	6
Abstract.....	7
Introducción.....	8
• Capítulo 1. Problema de investigación.....	12
1.1 Antecedentes.....	13
1.2 Planteamiento del problema y justificación.....	16
1.2.1 El panorama de la investigación educativa.....	16
1.2.2 La revisión del PyPEEB2011 y los libros de texto.....	17
1.2.3 Los resultados de pruebas nacionales.....	19
1.2.4 Justificación de la investigación.....	20
1.3 Preguntas de investigación y objetivos.....	22
• Capítulo 2. Marco conceptual.....	23
2.1 Resolución de problemas.....	24
2.2 Resolución de problemas con tecnología digital.....	29
2.3 Geometría dinámica.....	31
2.3.1 GeoGebra.....	34
2.4 Las rectas notables del triángulo.....	38
2.5 Superficie interactiva-Wiimote.....	40
• Capítulo 3. Metodología.....	45
3.1 Teoría de Situaciones Didácticas.....	46
3.2 La Ingeniería Didáctica.....	48
3.3 Diseño y método.....	
3.3.1 La institución.....	51
3.3.2 Diseño de la secuencia didáctica.....	52
3.3.3 Desarrollo de la secuencia didáctica.....	55
3.3.4 Planteamiento de nuevas situaciones problema.....	58
3.4 Características de los equipos.....	59
3.5 Análisis.....	60
3.5.1 Finalidades de las situaciones I, II y III.....	61
3.5.2 Expectativas docentes y análisis a priori.....	63
• Capítulo 4.....	70
4.1 Primeros análisis y hallazgos.....	71

4.2 Resolución de problemas de las rectas notables del triángulo uno.....	75
4.2.1 Análisis a priori uno.....	75
4.2.2 Respuesta de los estudiantes a las situaciones problema uno y análisis a posteriori.....	82
4.2.3 Segunda experimentación sobre la resolución de problemas.....	91
4.2.4 Análisis a priori dos.....	92
4.2.5 Respuesta de los estudiantes ante las situaciones problema de la segunda experiencia y análisis a posteriori.....	96
4.3 Análisis a posteriori del trabajo de los estudiantes.....	108
• Capítulo 5. Conclusiones y reflexiones finales.....	118
5.1 Conclusiones y reflexiones	119
Referencias bibliográficas.....	126
Anexos.	135

Índice de Tablas

<i>Tabla 1. Distribución del trabajo</i>	55
<i>Tabla 2. Propiedades de las rectas notables establecidas</i>	61-62
<i>Tabla 3. Control de avances de la secuencia didáctica</i>	71-72
<i>Tabla 4. Segundo problema de aplicación de mediatriz</i>	96-98
<i>Tabla 5. Segundo problema de aplicación de bisectriz</i>	100-103
<i>Tabla 6. Segundo problema de aplicación de mediana</i>	104-106
<i>Tabla 7. Categorías de estrategias de solución</i>	109
<i>Tabla 8. Niveles de apropiación</i>	115-116

Índice de Ilustraciones

<i>Ilustración 1. Modelo de actividad matemática compleja</i>	27
<i>Ilustración 2. Entorno de GeoGebra</i>	36
<i>Ilustración 3. Cajas de herramientas de GeoGebra</i>	37
<i>Ilustración 4. Pizarrón interactivo</i>	41
<i>Ilustración 5. Sistema que conforma el pizarrón interactivo</i>	43
<i>Ilustración 6. Primera situación problema</i>	76
<i>Ilustración 7. Solución esperada, problema 1</i>	76
<i>Ilustración 8. Segunda situación problema</i>	78
<i>Ilustración 9. Solución esperada, problema dos</i>	79
<i>Ilustración 10. Solución alternativa, problema dos</i>	79
<i>Ilustración 11. Solución alternativa dos, problema dos</i>	80
<i>Ilustración 12. Tercera situación problema</i>	81
<i>Ilustración 13. Solución esperada, problema tres</i>	81
<i>Ilustración 14. Segundo problema de aplicación de mediatriz</i>	92
<i>Ilustración 15. Segundo problema de aplicación de bisectriz</i>	94
<i>Ilustración 16. Segundo problema de aplicación de mediana</i>	95

Resumen

En esta tesis se estudian las estrategias de solución que estudiantes, de primero de secundaria, ponen en juego frente a problemas que implican el uso de las propiedades de las rectas notables de los triángulos, teniendo como instrumento y medio el uso de GeoGebra.

Se asume como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica a través de la implementación de una secuencia diseñada en apego a la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Los resultados muestran, que los estudiantes: a) aprenden a usar un recurso tecnológico al mismo tiempo que acceden a conocimientos geométricos a través de la búsqueda de la solución a problemas que involucran a ese conocimiento; b) que requieren de más tiempo, del dispuesto en esta investigación, para incorporar más esquemas de uso del software y con ello estar en mejores posibilidades de usarlo como herramienta, en la medida en que progresivamente evocaron más saberes geométricos en las estrategias de solución frente a cada nuevo problema. Dos procesos ligados a las estrategias de solución son: las sugerencias docentes para reorientar el trabajo de los estudiantes y la socialización de resultados a cargo de los estudiantes; de éstas retomaron ideas y pudieron ajustar su proceso para responder a los problemas.

Abstract

This thesis studies the strategies that seventh grade junior high school students use to solve problems which imply the properties of notable lines of triangles by using GeoGebra as tool.

The research methodology is based on didactic engineering implementing a designed sequence framed by the Theory of Didactic Situations.

Results show that students: a) can learn to use a new technological software while they are developing geometrical knowledge through problem solving, b) require more time than scope of this study to incorporate more software schemes so that they can have a better command of how to use GeoGebra as a tool.

Two processes linked to the solution strategies included teacher suggestions to the students to guide their work and the socialization of solutions by the students among themselves. This led to them retaking ideas and consolidating their thinking processes to be able to answer the problems.

Introducción

Esta tesis versa sobre las estrategias de solución que con el software GeoGebra ponen en juego un grupo de 8 estudiantes de primero grado de una telesecundaria, para resolver problemas donde se utilizan las propiedades de las rectas notables del triángulo, siendo éstas la mediatriz, bisectriz, altura y mediana, las cuales son trazos que se realizan y estudian en los triángulos, generan puntos de intersección sirviendo junto con sus propiedades para resolver situaciones problema. La concepción de estas rectas puede verse más a detalle en el apartado *2.4 Las rectas notables del triángulo*, del segundo capítulo.

Este tema de investigación se estudia en atención al enfoque metodológico para la enseñanza y el aprendizaje signado por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011a) en el que se señala que la resolución de problemas es tanto una meta del aprendizaje como el medio para aprender contenidos matemáticos. Así como la importancia que en dicha propuesta se otorga al uso de recursos tecnológicos como apoyo a la enseñanza para favorecer el aprendizaje de los alumnos. Es decir, la resolución de problemas matemáticos es el corazón para el aprendizaje de Matemáticas (Halmos, 1980, SEP, 2017) por lo que comprender este proceso es relevante tanto para el aprendizaje como para la enseñanza a estudiantes de la secundaria.

Es preciso comentar que los jóvenes del grupo desconocían el software aunque habían trabajado, al inicio del ciclo escolar, con su maestra el contenido referido utilizando las sugerencias de su libro de texto.

En la mayoría de los libros, el estudio de este contenido temático (y el libro para la telesecundaria no es la excepción), se desarrolla en un entorno donde los trazos se presentan solamente en algunos de los diversos tipos de triángulos, además se abordan figuras prototipo, es decir dibujadas con uno de sus lados paralelo al borde del libro. A lo que se adiciona que el trabajo con las rectas notables se desarrolla usando regla, escuadra, compás y transportador. Además, no se puede desestimar que entre los recursos de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje, el uso de un libro de texto es el de mayor incidencia cualitativa y cuantitativamente a decir de Reyes y Rodríguez (2014).

Por otro lado, los problemas que implican a las propiedades de las rectas notables de los triángulos en primero de secundaria, son una cuestión compleja para los estudiantes, a

decir de Sánchez, Martínez y Andrade (2016), por lo tanto deben estudiarse para comprenderse más a fondo y poder diseñar planes de intervención en las aulas.

En cambio, la geometría dinámica a través de diversos software y recursos permite generar espacios de plasticidad, en los que es posible la manipulación de las figuras y sus propiedades geométricas, favoreciendo el abordaje de un estudio más amplio y profundo de las propiedades de las figuras geométricas.

En síntesis, se pretende documentar, describir y analizar las estrategias de solución que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven problemas que implican a las rectas notables, además se muestran algunas de las principales dificultades que los alumnos evidencian en el proceso de solución dentro de un escenario en el que usan por primera vez el software GeoGebra.

El reporte de la investigación se organiza en cinco capítulos que se sintetizan a continuación. En el Capítulo uno, se justifica el objeto de estudio a través de la revisión de algunos referentes bibliográficos que permite ubicarlo en la literatura que se ocupa de indagatorias similares; asimismo se plantean las preguntas que permitieron orientar la investigación y se pretende responder.

En el Capítulo dos se realiza una revisión teórico conceptual sobre los principales conceptos ligados al tema de investigación, como son la resolución de problemas y la geometría dinámica; así como también a qué refieren los conceptos relacionados a las rectas notables del triángulo; para situar los principales objetos de análisis.

En el Capítulo tres se asume y justifica como metodología de investigación para realizar la indagatoria, a la Ingeniería Didáctica a través de la implementación de una secuencia diseñada en apego a la Teoría de las Situaciones Didácticas. Se relata además lo relacionado al diseño y contexto en que se aplicó la secuencia didáctica.

En el Capítulo cuatro se analizan las respuestas y procesos que los estudiantes desarrollaron durante la búsqueda de una solución a los problemas que les fueron presentados.

Los resultados muestran en primer lugar las estrategias de solución que los estudiantes desarrollaron ante cada situación problema. En términos generales dichas estrategias pasan de ser simples a compuestas. Es decir, los estudiantes comienzan planteando estrategias que no ponen en juego nociones relacionadas directamente con las rectas notables, sino recurren a procesos más experimentales, posteriormente van logrando plantear estrategias compuestas donde utilizan los trazos de las rectas notables de los triángulos a fin de encontrar la solución.

Al resolver los problemas se presentan algunas dificultades, entre las principales se encuentran que los estudiantes no logran atribuir de forma inmediata que el trazo de las rectas notables les es de utilidad, por lo que comienzan por aproximación, haciendo uso de componentes geométricos que eventualmente les permiten visualizar lo que desean ver. Posteriormente o en simultáneo, cuando seleccionan una herramienta del GeoGebra, tienen, inicialmente, dificultad para seleccionar los objetos geométricos necesarios para que la herramienta se ejecute. Entre las herramientas con las que los estudiantes mostraron dificultades para utilizarlas se encuentran: *Bisectriz* y *Perpendicular*.

Dos procesos que están estrechamente ligados al planteamiento de estrategias de solución son las sugerencias docentes y la socialización. Las sugerencias son intervenciones del profesor para que los estudiantes reorienten su trabajo sin explicarles cómo resolver el problema o cómo realizar los trazos sugeridos.

Mientras que la socialización de resultados espacio para mostrar al grupo (bajo la coordinación del profesor), el proceso seguido por un equipo, estuvo a cargo de los estudiantes salvo en un caso. La socialización funcionó como un tipo de institucionalización, con base en lo expuesto por una pareja; frecuentemente, los estudiantes retomaron ideas y consolidaron su proceso para dar respuesta por ellos mismos al problema en cuestión.

En términos generales puede augurarse que los estudiantes pueden aprender a usar un nuevo recurso tecnológico al mismo tiempo que acceden a conocimiento geométrico a través de la búsqueda de solución a situaciones problema que involucran a ese conocimiento. En segundo lugar, que requieren de más tiempo del que se dispuso en esta

investigación, para que logren apropiarse con soltura y fluidez del recurso tecnológico y con ello estén en mejores posibilidades de usarlo como herramienta.

Para finalizar, en el Capítulo cinco se presentan las conclusiones y reflexiones generales que suscitó el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1

Problema de investigación

1.1 Antecedentes

La introducción de la matemática al aula sufre cambios para hacerla accesible a los estudiantes, de los que se desprenden transformaciones importantes, dando lugar a estudios, teorías y métodos que permiten comprender mejor el quehacer matemático, su enseñanza y su aprendizaje. En México la Secretaría de Educación Pública brinda los lineamientos para la educación obligatoria, mismos que se ordenan en el Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica 2011 (PyPEEB2011) (SEP, 2011b), vigente al momento de realizar esta investigación. La pertinencia del objeto de estudio de esta tesis, puede rastrearse, como se verá más adelante, en esos lineamientos metodológicos aunado a la propuesta de incorporar, en la medida de lo posible, recursos tecnológicos para apoyar la enseñanza y el aprendizaje.

Tanto el PyPEEB2011 como el planteamiento curricular del nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria 2017, vigente a partir del ciclo escolar en curso (2018-2019), comparten el mismo enfoque para la enseñanza de la matemática, basado éste en la resolución de problemas, que como lo señala Santos-Trigo (2014), es una actividad realmente importante en el aprendizaje de la matemática. Además, en el campo de la investigación, uno de los objetivos de la Educación Matemática es comprender y analizar cómo aprenden y desarrollan conocimiento en esta disciplina los estudiantes cuando resuelven problemas (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016).

Hablar de resolver un problema no implica pensar únicamente en la respuesta final o la solución, sino en un conjunto de procesos que llevan a construirla, ya sea utilizando herramientas de la mente o conjuntamente con instrumentos tecnológicos que sirven de soporte para hacer más accesible su análisis y lograr resolverlo.

Así mismo, debemos tener en cuenta que “el proceso de resolver problemas o comprender un concepto matemático involucra ciclos iterativos de discusión y colaboración en los que los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar, revisar, contrastar, interpretar, y refinar sus ideas y métodos de solución” (Santos-Trigo, 2015, p.141). Es así que la tarea

de resolver problemas no es una serie de pasos a seguir, más bien una discusión, un contraste y un refinamiento en la búsqueda y planteamiento de la mejor solución.

Actualmente aumentan las voces que discuten sobre la solución de situaciones problema así como el uso de la tecnología en la solución de éstas en cualquier contexto (Kim y Hannafin, 2011). Si bien el uso de la tecnología brinda diferentes formas de presentar, explorar y resolver problemas, su incorporación en la enseñanza aún presenta retos para propiciar aprendizaje, entre ellos está su acceso e incorporación sistemática.

La literatura sugiere el beneficio al aprendizaje que proveen los entornos enriquecidos tecnológicamente como escenario de trabajo para la resolución de problemas, Santos (2010) señala que “(...) al representar un problema o situación con la ayuda del software dinámico es que los estudiantes tienen la oportunidad de formular preguntas acerca del comportamiento de algunos elementos de la construcción” (p. 124); “(...) pueden fácilmente modificar su construcción inicial (por medio del arrastre de objetos) y observar las relaciones que se mantienen invariantes al analizar una familia de casos” (p. 139).

Por su parte Hernández (2009), reporta algunas potencialidades de las herramientas tecnológicas como son: menor tiempo al resolver un problema; más posibilidades en cuanto a las herramientas que brinda para su resolución; mayor precisión en cuanto a los trazos que se realizan; así como autonomía en la exploración de un problema.

Particularmente la geometría dinámica en la resolución de problemas juega un papel importante ya que gracias a sus características pueden construirse y manipularse objetos geométricos, propiciándose una exploración distinta a la que tradicionalmente se logra con el uso de lápiz y papel; ya que en ésta las construcciones son casos específicos y rígidos que no permiten movilidad de los elementos geométricos involucrados. En cambio, la geometría dinámica se apoya en software que permiten dar a la enseñanza, un carácter dinámico y manipulativo (en el nivel de lo virtual). En este orden de ideas:

Los softwares de geometría dinámica pueden servir con un doble propósito: mientras ayuda a que los conceptos geométricos e ideas cobren vida y proporcionen contextualización, también guía a los estudiantes a un viaje de ideas de la informalidad a la formalidad geométrica. El primer propósito es bien descrito por Leung (2008) cuando afirma que una de las características principales de DGS

(Dynamic Geometry Systems) que los hace tan atractivos para el uso en el aula es "visualmente hacer explícito el dinamismo implícito de pensar sobre conceptos matemáticos geométricos" (p.135). En consecuencia, la investigación ha demostrado que el software de geometría dinámica es útil para visualizar conceptos geométricos y reglas de comprensión, pero también para hacer conjeturas y generalizaciones y encontrar relaciones entre conceptos (Carreira, Jones, Amado, Jacinto y Nobre, 2016, p.121) (traducción al español).

GeoGebra es "(...) un software de matemática dinámica para la enseñanza y aprendizaje de Matemáticas desde la escuela media hasta el nivel universitario. Combina la facilidad del uso del software de geometría dinámica con algunas características de los sistemas algebraicos computarizados" (Hohenwarter, Preiner y Yi, 2007, p.1).

Este software de acceso libre está sujeto a actualizaciones constantes por parte de la comunidad y equipo técnico del GeoGebra. Actualmente puede trabajarse en versiones 2d, tridimensionales, realidad virtual, y todo ello accesible desde telefonía celular, tabletas y computadoras, que hace que su uso no se limite a un nivel escolar en específico.

Los clubes y organizaciones que se dedican a desarrollar proyectos para mejorar el uso de GeoGebra, realizar simulaciones, diagramaciones, y comprender contenidos o fenómenos matemáticos, se han ocupado poco de desarrollar investigación para estudiar y/o desarrollar propuestas didácticas de temas o contenidos de matemáticos propuestos en los planes de estudio que ofertan los distintos países, como es el caso de las rectas notables de los triángulos del que se ocupa esta investigación y que deviene del Plan y Programa de Estudio 2011, vigente en México en el momento de la realización del trabajo experimental de esta tesis.

En estudios como el que nos ocupa, que ligan la resolución de problemas geométricos con el apoyo de GeoGebra, debe ponerse especial atención a las descripciones, explicaciones y construcciones de los estudiantes ligadas a las estrategias de solución, ya que éstos no son simplemente los procesos que utilizan para producir la respuesta como tampoco son guiones que dan después de que la respuesta se ha producido, más bien son los componentes principales de la respuesta (Lesh & Doerr, 2003, p. 3).

1.2 Planteamiento del problema y justificación

La formulación del problema de investigación toma sentido a través de tres ejes que permiten dar soporte y que indirectamente sientan las bases y se relacionan estrechamente con el planteamiento de una justificación al tema de estudio, estos son: el panorama de la investigación educativa, la revisión del PyPEEB2011 (SEP, 2011b) y los libros de texto, y los resultados de pruebas nacionales sobre la evaluación del conocimiento y habilidad geométrica en estudiantes de educación básica.

1.2.1 El panorama de la investigación educativa

La revisión bibliográfica en la investigación de la Matemática Educativa (Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick, Leung, 2013., Schukajlow, Kaiser & Stillman, 2018), muestra que ésta ha tenido distintos campos de interés como son los estudios socioculturales, epistemológicos, de currículum, por mencionar algunos. En México, específicamente en los últimos 20 años se ha tenido un auge investigativo en estudios algebraicos y de cálculo (Ávila, 2015).

El campo de investigación sobre la geometría no ha aumentado significativamente, por el contrario, los reportes muestran que ha perdido tiempo y espacio tanto en los centros de enseñanza como en la investigación (Itzcovich, 2005., García, 2014); por lo tanto, la comprensión y estudio del aprendizaje geométrico de niños y jóvenes se revela disminuido. Sin embargo, la tendencia actual es reinstalar el desarrollo geométrico de los estudiantes a la luz de perspectivas constructivistas del aprendizaje, por lo que su estudio se vuelve necesario tanto por las modificaciones que sufre la didáctica sugerida a los profesores como el acceso tecnológico del que presumiblemente se dispondrá en las instituciones escolares de México.

De forma específica, sobre el tema matemático que se estudia en esta investigación, se han desarrollado algunos estudios respecto al tratamiento de las rectas notables de los triángulos con recursos tecnológicos, como veremos enseguida, cabe señalar que éstos no se realizaron en el contexto mexicano.

La investigación de Martínez, Astiz, Medina, Montero y Pedroza (1998) se enfoca en mostrar resultados sobre la aplicación de algunas de las propiedades de las rectas para resolver tareas geométricas, haciendo un contraste entre un trabajo con el software Cabri-

Geometre y un trabajo de forma convencional. Entre los resultados destacables observados en dos grupos de estudiantes de 12 años de una institución privada -quienes tenían suficiente experiencia en el uso de la computadora-, se encuentra que los dos grupos de estudiantes obtuvieron los mismos resultados, pero el que trabajó con Cabri lo hizo en un tiempo significativamente menor; estos estudiantes realizaron construcciones superfluas o innecesarias.

En la investigación realizada por Etcheverry, Reid y Botta (2009) se implementa una propuesta para trabajar con Cabri-Geometre la construcción de triángulos y el análisis de las rectas notables con estudiantes entre 13 y 15 años; los resultados se enfocan en comentar la existencia de diferencias en el desempeño de los estudiantes cuando trabajan con un recurso tecnológico y cuando no lo hacen. El análisis de las rectas notables se desdibuja dentro de la investigación de los autores.

En la investigación de Miranda (2011) el estudio de las rectas notables se focaliza a través de dar instrucciones detalladas a los estudiantes, de entre 13 y 15 años de edad, a fin de que logren trazar alguna de las rectas notables en Cabri para posteriormente, plantear preguntas para explicitar las propiedades. Su análisis pretende identificar las características que debe enmarcar el uso de las TIC en la enseñanza; en este estudio el tratamiento de las propiedades y puntos notables de los triángulos más que ser el objeto de análisis es el camino para identificar las características.

Por su parte Puente (2017) en su investigación muestra cómo se presenta la instrumentalización de la noción de circuncentro en estudiantes de 14 y 15 años, explicita además los esquemas de uso de algunas herramientas mientras los alumnos solucionan una secuencia didáctica durante dos sesiones.

Las investigaciones citadas, abordan el estudio de las rectas notables, sin embargo, no describen ni analizan el proceso a través del cual los estudiantes resuelven situaciones problema que, como precisaremos más adelante, son parte de los objetivos de la presente investigación.

1.2.2 La revisión del PyPEEB2011 y los libros de texto

El tratamiento de las rectas notables (mediatriz, bisectriz, altura y mediana) en educación básica empieza desde la primaria con algunas nociones sobre rectas, ángulos y altura. En

este nivel los Libros de Texto Gratuito (LTG) para la enseñanza juegan un importante rol, tal es así que “son un recurso de alto impacto en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se consideran incluso como los materiales curriculares con mayor incidencia cuantitativa y cualitativa en el aprendizaje de los estudiantes dentro y fuera del aula” (Reyes y Rodríguez, 2014).

Inclusive como vemos en Barrantes y Zapata (2008), los profesores muchas veces utilizan al LTG como el único material para organizar y gestionar la enseñanza, incluso los docentes suelen acomodar su programación, la metodología, la evaluación, entre otros aspectos, a partir del libro de texto (Guillén, González y García, 2009).

La revisión en los LTG de primaria que realizan Reyes y Rodríguez (2014), deja entrever que de las cuatro rectas notables el estudio de la altura es el único que se trabaja en este nivel, más ampliamente en triángulos, aunque también en otras figuras geométricas. Sin embargo, los problemas abordados con la altura se enfocan en determinar áreas de figuras geométricas, tomando a la noción de altura solamente como una medida y no se estudian sus propiedades o las construcciones a partir de su trazo.

La comprensión de la noción de altura se ve obstaculizada también por otros factores derivados de la enseñanza, entre ellos, atribuir a los triángulos únicamente una altura. Esta creencia se gesta principalmente en los ejercicios abordados en los LTG, que requieren únicamente de la medida de una altura, por lo tanto, en el trabajo que el docente coordina no es necesaria la obtención de las tres alturas de un triángulo. Además, cuando el maestro o el alumno trazan “la” altura de un triángulo, empiezan por ubicarlo con un lado paralelo al borde del pizarrón o el cuaderno que identifican como “la” base, y desde ésta aparece la altura como una raya vertical “derecha” que llega al vértice opuesto. Difícilmente el estudiante conceptualiza que la altura de los triángulos es una línea perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación y por ello, los triángulos tienen tres alturas, cada una de ellas asociada a cada uno de los lados.

En secundaria, el estudio de las rectas notables que se muestra en los diferentes libros de texto analizados por Reyes y Rodríguez (2014), da cuenta que no en todos los libros se incluye el estudio de los diferentes tipos de triángulos: equiláteros, isósceles y escalenos. Además, aparece el trazo de las rectas notables en triángulos dibujados con un lado

paralelo al borde inferior de la hoja del libro; este hecho obstaculiza y limita, entre otras cosas, el razonamiento geométrico cuando se presentan los triángulos en una posición distinta. Por otro lado, la mayoría de las actividades que se presentan en los libros enfatizan el trazo de estas rectas más que su análisis y uso en la resolución de situaciones problema. Por lo tanto, explicar el proceso de aprendizaje de las propiedades de las rectas notables de los triángulos y la resolución de situaciones problema por los estudiantes juega un papel relevante en el estudio didáctico de este tema.

Un aspecto a destacar es que la indagatoria de Reyes y Rodríguez (2014) no incluyen la revisión de libros de Telesecundaria que en el contexto de nuestra investigación es importante referir, en la medida en que la muestra de estudiantes cursan su educación secundaria en una escuela de esta modalidad, a lo que se adiciona que los libros de texto en estos espacios educativos es uno de los principales recursos para organizar la enseñanza. En el Capítulo 2, con mayor pertinencia, se hacen algunos comentarios sobre este material.

1.2.3 Los resultados de pruebas nacionales

El aprendizaje de las propiedades de las rectas notables, y con ello el desarrollo del pensamiento geométrico, además de manifestarse en las actividades y resolución de problemas mediante el trabajo que el docente de secundaria coordina, con o sin el libro de texto, debe manifestarse en pruebas nacionales como PISA, Planea, EXCALE que permiten tener un panorama de la situación alrededor del aprendizaje geométrico de estudiantes al término de la educación básica.

La prueba de PISA (INEE, 2016), que pretende medir la capacidad de los estudiantes de 15 años de edad para usar su conocimiento y destrezas para afrontar la vida; entre otros aspectos mide la competencia matemática mediante la resolución de problemas en diferentes contextos o situaciones, donde por supuesto se incluyen problemas geométricos.

Las estadísticas de esta prueba muestran una situación verdaderamente alarmante: más del 50% de los estudiantes se encuentran en los dos primeros niveles de desempeño, es decir en los niveles más bajos. Alrededor del 16% en el tercer y cuarto niveles de desempeño,

mientras que menos del 1% se encuentra en los de mayor competencia matemática que son el quinto y sexto niveles de desempeño.

En la prueba Planea 2015 (INEE, s.f.) que pretende conocer la medida en que los estudiantes logran un dominio de aprendizajes esenciales. En secundaria los resultados muestran que solamente el 3.1% de los estudiantes en México se encuentran en el nivel IV de desarrollo del pensamiento geométrico, el más alto de esta prueba. En este nivel se espera que los alumnos resuelvan problemas entre los que se encuentran aquellos que implican transformaciones de figuras, propiedades de mediatrices y bisectrices, y razones trigonométricas.

En los resultados de Excale 2012 (Sánchez, Martínez y Andrade, 2016), se pretende conocer lo que los estudiantes aprenden a lo largo de la educación básica referente a los contenidos del plan de estudios. Lo que la prueba muestra, respecto al tema de nuestro interés, es que los educandos de tercero de secundaria al resolver problemas a partir de la mediatriz de un triángulo únicamente logran un 27% de aciertos en lo relacionado a este contenido.

1.2.4 Justificación de la investigación

Con base en lo expuesto en los párrafos precedentes, la investigación que se aborda, es relevante por el enfoque de resolución de problemas establecido por la SEP (2011a) porque estudiar la solución de situaciones problema donde se requiere poner en uso las propiedades de las rectas notables de los triángulos, permite avanzar sobre la comprensión del proceso de aprendizaje de este tema y con ello apoyar las propuestas de enseñanza y eventualmente abatir los bajos resultados mostrados por los estudiantes en las pruebas nacionales e internacionales.

A lo anterior se agrega que la misma SEP, recomienda un escenario que propicie el desarrollo de habilidades digitales de los estudiantes. No obstante, las investigaciones recientes, según se señala en la colección “Uso de tecnología en matemática educativa, Investigaciones y propuestas”, editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología Matemática (Pantoja, 2014), se ocupan en su mayoría, del análisis del impacto de los recursos tecnológicos en el aprendizaje geométrico de alumnos de los niveles medio superior y superior, consecuentemente el énfasis geométrico con uso de la

tecnología está poco estudiado en la secundaria. Así en esta investigación donde se usa el software GeoGebra como recurso de trabajo para la resolución de los problemas sobre las rectas notables con estudiantes de ese nivel, se vuelve un tema relevante.

Además, al diseñar (desde un enfoque constructivista), situaciones problemáticas a resolverse con GeoGebra, experimentarlas y analizarlas, se contribuye al estudio sobre la instrumentación de este software. Para Castillo y Montiel (2009) la instrumentalización de un software refiere que el sujeto se apropie de las propiedades iniciales de éste y se adapte a él, a la vez que pueda construir nuevas funciones del software. Mientras que la instrumentación es relativa a la aparición y evolución de los esquemas de utilización del software.

En la literatura, la mayoría de los estudios donde se utiliza GeoGebra, reportan las ventajas de este software (Ursini y Sacristán, 2006, Rojano, 2003., Caballero, 2009., Hernández, 2009., Fernández, 2014), pero no reportan el proceso a través del cual los usuarios se apropian del uso del instrumental de GeoGebra como tampoco reseñan las dificultades desprendidas de ello.

Desde este posicionamiento, el problema de investigación se centra en analizar las estrategias de solución que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven situaciones problema sobre las rectas notables de los triángulos. Para esta investigación consideramos como estrategias al conjunto de procesos y procedimientos que los alumnos deciden realizar para resolver un problema, utilizando para ello diversos recursos entre los que se encuentra el software GeoGebra. Además se documenta la apropiación del instrumental GeoGebra, reflejado a través de la evocación y uso que los estudiantes hacen de éste en la resolución de problemas planteados tiempo después de la primera experiencia con el software. La apropiación es entendida como el proceso de interiorización de un saber, que en este caso es un saber técnico dirigido al manejo de las herramientas de GeoGebra a fin de poder realizar trazos, una adecuada apropiación denota un manejo correcto de las herramientas.

1.3 Preguntas de investigación y objetivos

Considerando los planteamientos de los apartados precedentes, las siguientes preguntas permiten orientar y articular la investigación.

Pregunta general

¿El uso de GeoGebra ayuda a los estudiantes de primero de secundaria a resolver problemas que impliquen las propiedades de las rectas notables de los triángulos?

Preguntas secundarias

¿Qué estrategias ponen en juego los estudiantes para resolver problemas de contexto real simulado con GeoGebra que implican a las propiedades de las rectas notables de los triángulos?

¿Qué caracteriza a las estrategias de solución que manifiestan los alumnos?

¿Cómo se manifiesta la apropiación de esquemas de uso de GeoGebra al resolver los problemas?

¿De qué manera influye la socialización de resultados obtenidos en el grupo, en los procesos de solución de los problemas que manifiestan los estudiantes ?

Orientados con las preguntas de investigación y con algunas consideraciones de los apartados anteriores se plantean tres objetivos generales para el trabajo:

1. Caracterizar las estrategias de solución que los estudiantes ponen en juego, a fin de analizar el aprendizaje que logran sobre la resolución de situaciones problema de contexto real simulado que implican utilizar las propiedades de las rectas notables de los triángulos mediante el software GeoGebra.
2. Analizar la manifestación de la apropiación de esquemas de uso de algunas herramientas del software GeoGebra cuando se resuelven situaciones problema.
3. Mostrar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de apropiación del instrumental de GeoGebra previa y durante la resolución de las situaciones problema donde se requieren poner en uso las propiedades de las rectas notables de los triángulos.

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1 Resolución de problemas

La actividad de resolver problemas es el corazón de las Matemáticas (Halmos, 1980), actualmente incluso se considera una tarea imprescindible en el currículum mexicano. Dentro de las aulas donde se desarrolla la clase de Matemáticas, los estudiantes se ven enfrentados a resolver situaciones problema que pueden llamarse de diversas maneras dentro del aula: tareas, ejercicios o problemas; sin embargo su significado literal puede tener distinciones. Además, pueden ser planteados por el docente, recuperados de libros de texto o a través del acceso a internet y/o un dispositivo móvil o computadora. Las palabras son distintas, pero pueden referirse o no a la misma tarea de resolver una situación problema, es la interpretación que realiza cada persona lo que hace necesario puntualizar la concepción que adoptaremos para la investigación.

Mientras que para Mayer (1986) solo existen dos pasos generales para resolver problemas, el primero que consiste en traducir las palabras del problema a una representación interna, y el segundo en aplicar las reglas del álgebra y aritmética a la representación interna, por ejemplo, pasar de la ecuación al valor numérico desconocido. En cambio para Polya (1957) hay cuatro etapas o categorías que identifica en el proceso de resolver un problema. La primera etapa es la de entendimiento del problema, en la que se pretende entender la información del enunciado y las relaciones existentes en los elementos o datos. La segunda etapa es la elaboración de un plan y un proceso para llevar a cabo, en ésta se analiza si se han resuelto casos parecidos, si hay semejanzas. La tercera etapa es la ejecución del plan de solución. Por último, en la cuarta etapa se evalúa la solución con una mirada retrospectiva, analizando también si el proceso se puede usar en otros problemas. Para Polya (1957) la heurística es uno de los recursos más importantes ya que permiten descubrir y con ello acercarse al proceso de la resolución del problema. Entre algunas estrategias heurísticas se encuentran: ensayo y error, buscar un patrón, resolver un problema más simple, hacer un diagrama, resolver un problema equivalente, etc.

Aun así, Schonfeld (1985, citado en Hernández, 2013) al estudiar la obra de Polya se da cuenta que son insuficientes las estrategias que plantea, y declara que en el proceso de solución de problemas entran en juego otros elementos importantes, mismos que agrupa en cuatro dimensiones que se describen a continuación.

- a) Recursos: consiste en las “herramientas” que posee el individuo, los recursos se conforman por el repertorio de todos los hechos, procedimientos y habilidades con los que el individuo es capaz de superar un problema particular.
- b) Heurísticas: sugerencias generales que ayudan al individuo a la mejor comprensión del problema o a tener un avance hacia la solución.
- c) Control: es la forma en que los individuos usan la información con la que disponen.
- d) Sistemas de creencias: entran en juego cuando un estudiante trabaja en la resolución de un problema matemático.

Al revisar el trabajo de Schoenfeld (1985), tenemos que este autor, además de hacer señalamientos sobre los planteamientos de Polya, hace notar que existe dificultad en definir lo que es un problema debido a que se presenta cierta relatividad en la solución de éstos; es decir, lo que para una persona puede resultar complejo, para otros puede ser un ejercicio simple de rutina. Así se presenta una relación particular entre el individuo y la tarea que puede volverse un problema para quien pretende resolverlo. Desde esta perspectiva, acordamos con Schoenfeld; es decir, si se tiene acceso inmediato a un esquema de solución para la tarea matemática, esa es un ejercicio y no un problema.

Resolver problemas lleva consigo implicaciones que deben tenerse en cuenta para comprender lo complejo que es esta tarea, entre ellas se encuentra el uso que se da a la resolución de problemas, el estatus que se da a la respuesta, pero también deben tenerse en cuenta las diversas estrategias y modelos de análisis que han sido fruto de constantes investigaciones.

La resolución de problemas en la clase de matemáticas responde a varios fines y temporalidades mediados por los docentes frente a grupo. Un problema matemático puede servir de puente para introducir un nuevo tema; puede ser la etapa final a través del cual se evalúa lo aprendido, o puede ser la finalidad de la enseñanza, es decir, aprender a resolver problemas matemáticos.

Los diversos enfoques pedagógicos sugeridos en las propuestas curriculares de matemáticas de distintos países, insisten desde hace casi tres décadas en que el trabajo con problemas es la base de la acción docente. Lester (2013) menciona, por ejemplo, que

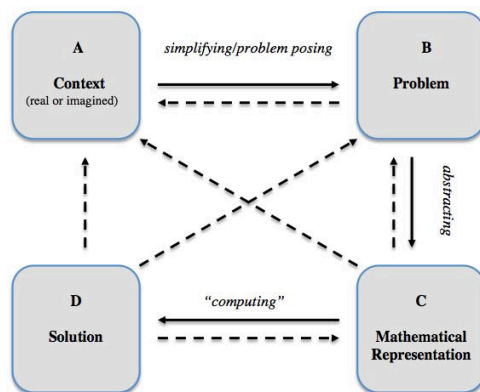
resolver problemas es entendido por los profesores ya sea como un fin en el proceso de instrucción o como un medio a través del cual los conceptos, procesos y procedimientos son aprendidos. Mientras que en el Modelo Educativo para la Educación Obligatoria 2017 la resolución de problemas es tanto una meta de aprendizaje como un medio para aprender contenidos matemáticos

Resolver un problema lleva al establecimiento de una respuesta a la tarea matemática, sin embargo, “En matemáticas se suele considerar que la solución de un problema matemático está asociada con la obtención de una cantidad que comprueba o verifica la situación planteada” Hernández (2013, p.28); sin embargo, la respuesta no es el único elemento ni el más valioso a considerar.

La tarea de resolver un problema esta rodeada de procesos en los cuales quien resuelve pone en uso conocimientos previos, técnicas, habilidades, inclusive utiliza instrumentos de apoyo.

La resolución exitosa de problemas necesita coordinar experiencias, conocimientos, representaciones familiares y patrones de inferencia e intuición, como esfuerzo para generar nuevas representaciones y patrones de inferencia que resuelven la tensión o ambigüedad que promueve la actividad real de resolución de problemas (Lester y Kehle, 2003, p.510).

Lester (2013) propone en un estudio posterior, un modelo de la actividad matemática compleja (Ilustración 1) en el cual señala los momentos por los que transita un individuo que trabaja en la solución de un problema.



Note. Dashed arrows denote "comparing"

Ilustración 1. Modelo de actividad matemática compleja.

El esquema comienza cuando un individuo trabaja en un contexto complejo y se le plantea una tarea para resolver (flecha sólida entre A y B). Para comenzar a resolver la tarea, el individuo simplifica el escenario complejo al identificar aquellos conceptos y procesos que parecen relacionarse de manera directa con el problema. Después viene la fase de abstracción (flecha sólida entre B y C), la cual introduce conceptos matemáticos y notaciones (aunque tal vez idiosincráticos). Esta fase de abstracción involucra la selección de conceptos matemáticos que representen las características esenciales del modelo real. Una vez que el individuo ha generado una representación matemática de la situación original, este problema matemático adquiere un significado propio, volviéndose un problema matemático aislado, bien definido (cuadro C). La tercera fase del proceso (de C a D) involucra la manipulación de la representación matemática y deducir algunas conclusiones matemáticas. Por último la fase final (que puede ser de D a A, D a B, y D a C) involucra la comparación de las conclusiones o resultados con el problema en su contexto original o con su representación matemática.

Con base en las distintas consideraciones sobre los problemas que los autores citados hacen; para este trabajo consideramos “problemas de contexto real simulado” o situaciones problema, a las situaciones matemáticas que presentan un reto intelectual para los estudiantes, quienes no cuentan con un esquema inmediato de solución, por lo que no son situaciones de repetición o mecanización. Son planteamientos que presentan una

situación problema basadas en un escenario retomado de la realidad, ajustados para propiciar el uso de conocimientos matemáticos específicos.

Cabe precisar que en este estudio no retoman las estrategias para resolver un problema en apego a algún modelo de los mencionados anteriormente, más bien la resolución de problemas entra en juego desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). Se pretende que los estudiantes evoquen sus saberes previos así como los aprendizajes logrados al verse enfrentados a problemas, donde éstos se vuelven situaciones que retan su intelecto; en ello manifiestan sus saberes tanto del tema como del uso del recurso tecnológico.

Además, desde la TSD consideramos que el conocimiento matemático emerge de la solución de problemas matemáticos, esto lleva a que “cualquier problema establecido en un aula es explícita o implícitamente parte de una situación, y la situación es considerada la unidad mínima de análisis para comprender lo que podría estar o realmente está en juego desde el punto de vista cognitivo en el proceso de resolución” (Artigue y Houdement, 2007, p.366).

En la TSD, el conocimiento matemático se atribuye a diferentes funciones a las que se adjuntan cuatro categorías de situaciones: situaciones de acción, de comunicación, de validación y de institucionalización. En este trabajo (por limitantes de tiempo para implementar y analizar una secuencia didáctica), se da cuenta fundamentalmente de situaciones de acción, que son aquellas que ponen al estudiante en contacto con un problema, donde la solución representa el saber que se pretende que adquieran pero deja librado a las posibilidades cognitivas de los alumnos la resolución. Así mismo se reportan situaciones de comunicación iniciales, en las que los alumnos verbalizaron lo que hicieron para resolver la situación planteada, pero no se abordaron, situaciones de comunicación conducentes a que los estudiantes pusieran en uso modelos implícitos sobre algún concepto, para propiciar con ello que realizaran una representación, descripción y uso del saber.

2.2 Resolución de problemas con Tecnología digital

La incorporación de tecnología al aula ha propiciado que la manera en que se aprende y en la que se enseña cambie, debido principalmente a que al tener mayor cantidad de recursos y abrir el acceso a mayores fuentes de información, las estrategias de enseñanza se diversifican, posibilitando que el estudiante participe de su aprendizaje en un escenario de descubrimiento, manipulación y reflexión donde pueden presentarse problemáticas de incorporación. Cabe destacar que el uso de tecnologías digitales en el aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas, está lleno tanto de retos en su incorporación como de beneficios.

Uno de los principales retos a los que se enfrenta la escuela es lograr que los maestros usen consciente y eficientemente diversas tecnologías para promover el aprendizaje de los estudiantes, quienes por su cuenta (en un importante porcentaje) tienen un acercamiento a instrumentos tecnológicos desde la infancia; sin embargo, el uso que dan a éstos no necesariamente responde a una finalidad consciente dirigida a un conocimiento disciplinario, más bien está orientada por un uso recreativo.

Este reto se agudiza porque la escuela es uno de los espacios donde más lentamente se incorporan recursos tecnológicos para el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje. Los estudiantes parecen tener acceso a más recursos tecnológicos en sus hogares que los que les provee la escuela; además surgen sistemática y rápidamente nuevos artefactos que están disponibles y diversifican el acceso a nuevas fuentes de información y con ello de aprendizaje. Sin embargo, el uso de éstos, suponen una inversión no sólo en el orden de lo económico, sino también del tiempo necesario para aprender a usarse.

Entre los beneficios que se vislumbran cuando se tiene acceso y se logra un uso eficiente de los recursos tecnológicos para el aprendizaje de la matemática está que los alumnos pueden extender las representaciones y estrategias que aparecen en acercamientos basados en un ambiente de trabajo con lápiz y papel, pero además generar con ello, nuevas formas de razonamiento para desarrollar conocimiento matemático (Santos-Trigo y Ortega-Moreno, 2013). Como vemos en Reyes (2016, p.40):

Las posibilidades que ofrecen estas tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas van desde brindar acceso a una biblioteca de videos

con explicaciones sobre conceptos matemáticos, el cálculo de expresiones aritméticas, encontrar las soluciones numéricas o simbólicas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, la creación de gráficas de funciones reales, la creación de modelos dinámicos que utilicen más de una ventana gráfica, hasta otros más avanzados que incluyen el uso de sistemas especializados.

Sin embargo, las posibilidades que podemos obtener a través de un recurso dependen del que sea elegido, ya que no es lo mismo contar con una calculadora científica a contar con dispositivo móvil y acceso a internet, pero también depende de la tarea o problema que se pretenda resolver. Algunos brindarán mayores herramientas, pero requerirán de mayor tiempo para aprender a usarlos, otros pueden ser muy sencillos y resultar útiles en el momento, pero ser ineficientes al querer resolver múltiples tareas.

Cuando se trata de resolver situaciones problema utilizando como medio o como apoyo un recurso tecnológico, la tecnología ayuda a encontrar diversas maneras de resolver los mismos problemas y extenderlos (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). Sin embargo, esto no quiere decir que por contar con los recursos tecnológicos siempre se podrán encontrar varias maneras de resolver el problema, ya que entre otros factores que determinaran hallar múltiples estrategias se encuentra el dominio del recurso, los recursos mentales y conocimientos de los que disponga cada sujeto.

Más bien el uso de la tecnología puede ofrecer a los estudiantes una ventana importante para observar y examinar las conexiones y las relaciones que se vuelven relevantes durante el proceso de resolución de un problema matemático (Santos-Trigo, 2004). Así, puede usarse un software como GeoGebra para analizar los elementos de una parábola, sin embargo para analizar la velocidad y trayectoria de un móvil puede utilizarse otro software como *Tracker Video Analysis*.

Las tecnologías son un elemento importante en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, por ello, tanto los profesores como los estudiantes deben utilizarlas de forma correcta para que propicien hábitos cuando se trabaja en un ambiente de resolución de problemas. Debemos tener en cuenta que "Una tecnología cognitiva deja rastros en nuestra mente a través de trabajo constante y después de un tiempo se convierte en parte de nuestros recursos cognitivos" (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016, p. 189).

Así surge una propuesta del NCTM (2011, citado en Gómez, 2016) de cómo deben usarse estas tecnologías en una propuesta de las fases que involucra una resolución de un problema:

- Analizar el problema: identificar que instrumentos de las tecnologías son apropiados para usarlos y cuándo usarlos .
- La implementación de una estrategia: buscar de qué forma se puede incluir la tecnología y monitorear el proceso de solución.
- La búsqueda y el uso de conexiones: realizar diferentes representaciones del problema con las tecnologías.
- Al reflexionar sobre la solución a un problema: reconocer las oportunidades y limitaciones que ofrece la tecnología en los resultados obtenidos, revisar enfoques con y sin tecnología e interpretar los resultados en el contexto del problema.

El uso de las tecnologías inclusive plantea un nuevo modelo para la resolución de problemas con tecnologías digitales, como puede verse en Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009, citados en Reyes, 2016) aunque será solamente ilustrativo ya que como mencionamos anteriormente los alumnos no siguen un proceso en específico. Este modelo se divide en episodios en los que está involucrado el proceso de resolución de tareas matemáticas, donde las herramientas digitales juegan un papel relevante en la representación y exploración de los problemas.

Tal como Reyes (2016, p.36) menciona, este modelo es “ (...) un marco que los profesores pueden utilizar para estructurar y reflexionar sobre la manera de utilizar las herramientas computacionales y sobre cómo pensar en los problemas como oportunidades para que los estudiantes representen, exploren y examinen diferentes maneras de resolverlos”.

2.3 Geometría dinámica

Desde hace varios años el impacto tecnológico ha llegado a las aulas de enseñanza, en algunas en mayor medida que en otras. Cuando se cuenta con recursos tecnológicos la enseñanza se ve modificada, generando nuevos espacios de aprendizaje, entre ellos el espacio de aprendizaje de la matemática, y con ello de la geometría. Al respecto Moreno

y Rojano (1998) comentan que toda tecnología modifica las formas de construcción del conocimiento y la naturaleza misma del conocimiento, por lo tanto, el conocimiento que se adquiere mediante nuevos instrumentos es un conocimiento nuevo.

La matemática tiene la posibilidad de ser aprendida en un entorno dinámico y generar nuevos conocimientos gracias a recursos como el internet, plataformas virtuales, aplicaciones, dispositivos móviles, entre otros. Se puede generar un escenario de interacción de los estudiantes directamente con el contenido a aprender. Es decir, los estudiantes interactúan con las pantallas de dispositivos donde los modelos manipulables de objetos matemáticos generan que los estudiantes tengan una mayor interacción que la que se suele realizar a través de libros de texto y el estudio de casos específicos en el pizarrón, sin embargo, esto no exenta que se presenten dificultades con el uso de dispositivos tecnológicos.

Considerando el término de geometría dinámica, como vemos en Reyes (2016, p. 43) “El término “dinámico” puede ser mejor entendido en contraposición a la estructura “estática” de las construcciones de la geometría tradicional de lápiz y papel. Los sistemas de geometría dinámica permiten crear y manipular construcciones geométricas, principalmente de geometría euclidiana”. Las construcciones que se realizan en un ambiente de geometría dinámica aunque están a disposición del sujeto, no se encuentran totalmente libres, están sujetas a reglas Geométricas y a la configuración de las herramientas de cada software.

Al hablar de software nos referimos a un Software de Geometría Dinámica (DGS por sus siglas en Inglés), siendo este un término que describe un tipo de software que es utilizado principalmente para la construcción y análisis de tareas y problemas geométricos (Sträßer, 2002). Los DGS tienen características fundamentales, tal como podemos apreciarlo en Ministerio de Educación Nacional (2004):

- a. La capacidad de arrastre (dragging) de las figuras construidas que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación.
- b. El uso extensivo de locus (lugar geométrico) y trace (huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra) que permite visualizar y descubrir hechos geométricos.

c. La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico.

Pero además en la base de cualquier uso de la geometría dinámica deben estar dos principios fundamentales: “dudar de lo que se ve, y ver más de lo que se ve” (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p.23). Dudar de lo que se ve significa no tomar por verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad durante el arrastre. Ver más de lo que se ve significa estudiar una figura para tratar de descubrir relaciones que no están presentes a simple vista. Esto es posible enriqueciendo la figura con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación.

Sin embargo, el incumplimiento de los principios fundamentales de la geometría dinámica puede llevar a creencias problemáticas, ya que un DGS se suele usar en la confirmación empírica de conjeturas mas no en el proceso de comprobarlas (Laborde, 2001). Es decir, se utiliza en un sentido de verificación y visualización más que para realizar un análisis minucioso y de descubrimiento de propiedades y conjeturas.

Además, se pueden presentar algunas características problemáticas de la interacción de los estudiantes con un DGS (Hölzl, 1996, citado en Gawlick, 2002):

- a) Los estudiantes están orientados hacia la implementación práctica de una solución y no hacia sus connotaciones e implicaciones teóricas.
- b) Circunstancia de la aplicación de herramientas y preferencia de conceptos más simples.
- c) Uso no reflejado de herramientas.
- d) Desviación de los objetivos dados.

La geometría dinámica y en general la Matemática dinámica presenta grandes ventajas tal como podemos ver en Reyes (2016), Ministerio de Educación Nacional (2004), Sacristán, Calder, Rojano, Santos, Friedlander, & Meissner (2010), Guerrero-Ortíz, Reyes-Rodríguez y Espinosa-Perez (2015), entre ellas se encuentra:

- La posibilidad del surgimiento de una amplia gama de heurísticas, algunas de las cuales son específicas para cada entorno tecnológico.

- La posibilidad de estudiar objetos y propiedades para que los alumnos redescubran teoremas por sí mismos. A partir de hacer, examinar, predecir, evaluar y generalizar, los estudiantes se formulan preguntas que les permiten acercarse a un pensamiento deductivo.
- Ayudar a que los conceptos e ideas cobren vida al proporcionar un significado contextualizado.
- Guiar a los estudiantes en un viaje desde ideas informales a nociones más formales.
- Los estudiantes demuestran gran cantidad de conocimientos inconscientes, los cuales no son posibles de comunicar fácilmente pero si de ejecutar.
- La posibilidad de percepción de propiedades además su dinamismo para manipular los objetos matemáticos, que permiten poner en evidencia aspectos invariantes de ellos.

Debemos tener en cuenta que al hablar de estas ventajas no nos referimos a ellas como un resultado inmediato de la implementación y uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje de la matemática de forma dinámica, porque algunos instrumentos requieren mayor tiempo de aprendizaje para que su uso pueda llevar a ventajas destacables. El carácter dinámico no es una ventaja didáctica *per se* (Holz, 1999, citado en Gawlick, 2002). Un cambio de medios sin sentido difícilmente llevará a los resultados esperados, entonces es necesario ver a los DGS como un instrumento que requiere tiempo para aprender a usarlo y requiere también cuestionar las relaciones entre los objetos matemáticos que se trabajan a través de él.

2.3.1 GeoGebra

Comencemos por describir lo que es este software en palabras de su creador “...es un Software de Matemáticas Dinámicas para la enseñanza y aprendizaje de Matemáticas desde la escuela media a un nivel universitario. Combina un uso fácil de software de geometría dinámica con algunas características de sistemas algebraicos computarizados” (Hohenwarter, Preiner y Yi, 2007, p.1). Sin embargo, actualmente este software gracias a las actualizaciones ahora cuenta con espacio para el estudio de Matemáticas en dos y tres

dimensiones, inclusive está expandiéndose una versión en realidad virtual. Su descarga está disponible para trabajarse en dispositivos móviles y computadoras.

Además, debemos tener en cuenta que su uso ya no es limitado a un nivel educativo específico, puede utilizarse en niveles de educación básica, medio superior o superior, sin embargo, debe tenerse presente que la facilidad de uso para un estudiante depende, entre otros factores, de los conocimientos con que cuente, de la madurez emocional, del tiempo que lleve usando el software y de qué tanto ha estado relacionado con instrumentos tecnológicos.

GeoGebra tiene su propio portal web <https://www.geogebra.org/> donde pueden encontrarse actividades que gran cantidad de usuarios han creado y compartido, estas actividades pueden descargarse libremente y retomarse para ser modificadas, para quitar elementos o agregar según se pretenda utilizarlas. Además de actividades también cuenta con tutoriales, grupos de discusión, ayuda; también pueden editarse libros Geogebra que son una colección de materiales, hojas de trabajo e información.

La comunidad de GeoGebra que se congrega especialmente mediante congresos y clubes se dedica a continuar realizando trabajos de modelación, diagramación y representación de casos de la realidad, sin embargo la tendencia de este software no se centra en una inserción al aula de matemáticas en la educación pública, la mayor parte de los proyectos que han podido ubicarse se centran en espacios extraescolares donde el trabajo voluntario de los estudiantes permite desarrollar de forma más adecuada trabajos donde ponen en juego conocimientos adquiridos y el uso del software para comprender fenómenos cotidianos.

Los beneficios y ventajas del uso de este software son variados según reporta la literatura. Provee una mejor representación visual y dinámica de ideas abstractas y los vínculos entre símbolos, variables y gráficos, por mencionar algunos (Lu, 2008). Permite el ahorro de tiempo para la adquisición de habilidades, ya que de una manera más precisa y rápida, se pueden realizar trazos, modificar figuras y medidas, visualizar y explorar para un análisis geométrico, conllevando así a un aprendizaje de los estudiantes (Cabrero, 2004).

La versión para computadora (Versión 5) permite trabajar contenidos con Graficación, CAS, Geometría, Gráficos 3D, Hoja de Cálculo y Probabilidad. Describamos brevemente

el entorno de este Software, ya que para ver más detalles puede consultarse su portal web mencionado anteriormente, además de que las herramientas disponibles dependerán de la aplicación elegida. No se tendrán las mismas herramientas si se elige el entorno de trabajo de geometría que si se elige trabajar con probabilidad, para ejemplificar consideramos la aplicación geometría, es la que es de nuestro interés en el trabajo.

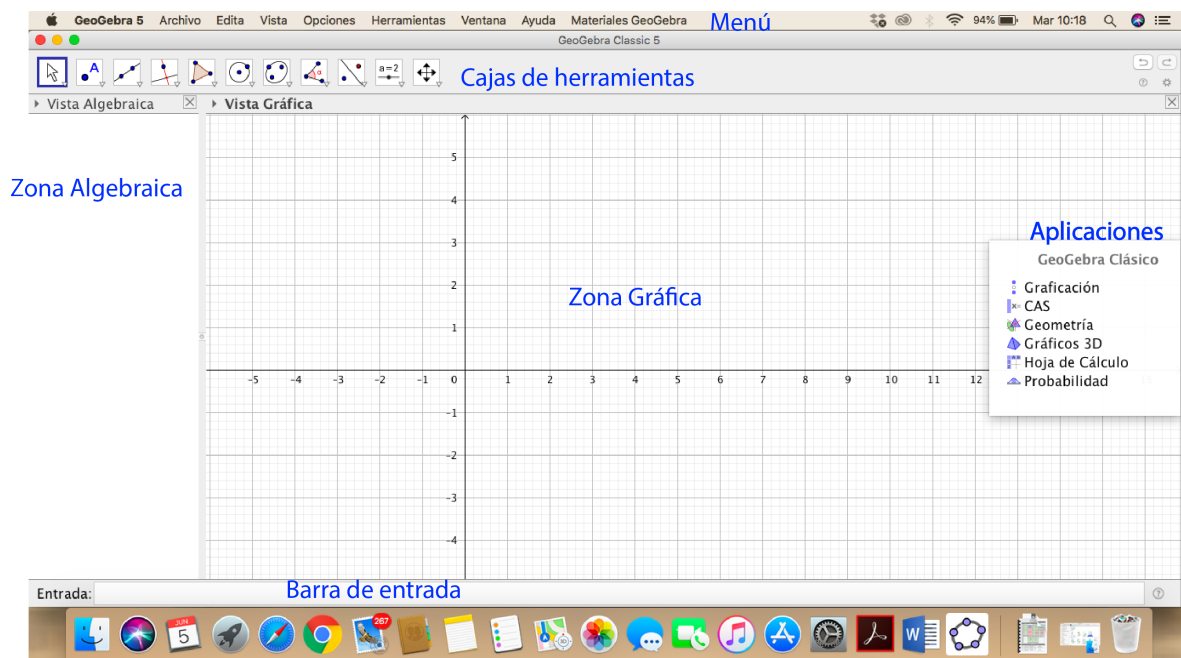


Ilustración 2. Entorno de GeoGebra

En la zona algebraica podemos ver en un entorno algebraico todas las construcciones realizadas, se pueden hacer algunas manipulaciones de parámetros. En la barra de entrada es el espacio donde se introducen comandos de construcción, graficación y secuencias. La barra de menú funciona para configurar las opciones de ventanas, para guardar los archivos, entre otras funciones. La zona de cajas de herramientas es el entorno donde seleccionas alguna herramienta para poder realizar cualquier trazo. La zona de aplicaciones es donde al ejecutar el programa eliges el ambiente en el que deseas trabajar, por ejemplo Graficación, que limitará algunas herramientas y activará otras.

Desglosemos un poco más las cajas de herramientas del entorno de geometría, ya que más adelante haremos alusión a varias herramientas por lo que una familiarización a ellas se vuelve relevante, aunque destaquemos que no todas las herramientas serán utilizadas en esta investigación.

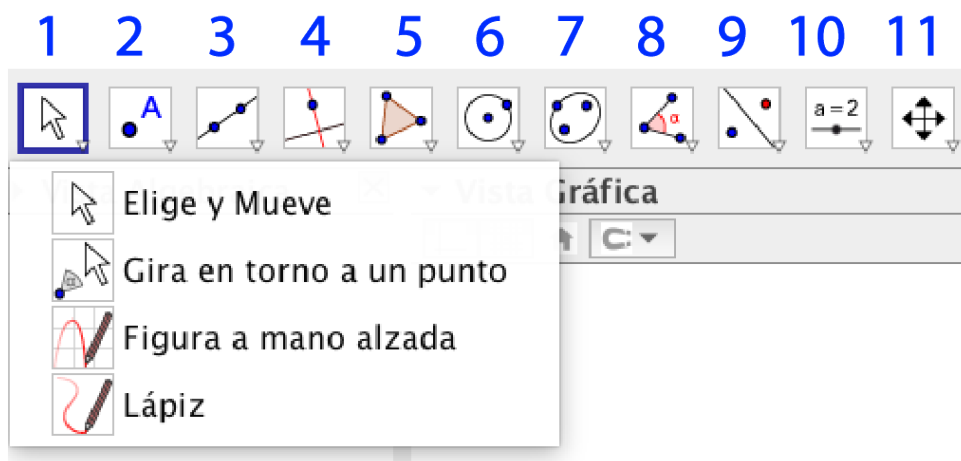


Ilustración 3. Cajas de herramientas de GeoGebra.

1. Caja de puntero. En ella se encuentran herramientas para elegir y mover y realizar trazos simulados con lápiz.
2. Caja de puntos. En ella encontramos las herramientas para colocar puntos medios, puntos en un objeto, hallar intersecciones, entre otras.
3. Caja de rectas. Encontramos herramientas para el trazo de rectas y segmentos.
4. Caja de trazados especiales. Aquí encontramos herramientas para trazar perpendiculares, paralelas, mediatriz, bisectriz, tangentes, entre otras.
5. Caja de polígonos. Las herramientas de esta caja permiten realizar polígonos regulares, irregulares, rígidos y vectoriales.
6. Caja de circunferencias. Aquí encontramos herramientas para trazar circunferencias a partir de diferentes datos.
7. Caja de cónicas. Con las herramientas de esta caja pueden trazarse elipses, hipérbolas, parábolas y cónicas.
8. Caja de medición. Las herramientas permiten medir área, distancias, ángulos, pendientes, entre otras.
9. Caja de transformación. Las herramientas permiten realizar trazos de simetría axial, central, rotación, traslación, inversión y homotecia.
10. Caja de objetos dinámicos. Las herramientas permiten insertar deslizadores, texto, imágenes, botones, casillas de control.
11. Caja de desplazamientos. Con estas herramientas puede realizarse acercamientos, alejamientos, mostrar elementos, borrar, copiar estilos.

2.4 Las rectas notables del triángulo

El nombre de rectas notables del triángulo hace alusión a cuatro rectas: la mediatriz, bisectriz, altura y mediana; ocasionalmente se analizan y se usan sus propiedades para la resolución de problemas. La investigación que se reporta es el estudio de estas rectas señalado como un tema de educación básica, para primero de secundaria (SEP, 2011a).

En la educación básica mexicana el estudio de las primeras nociones de las rectas notables comienza en primaria, las cuales son abordadas principalmente a través de los Libros de Texto Gratuitos. Sin embargo, únicamente la altura es la que claramente se trabaja en este nivel, según los hallazgos de Reyes y Rodríguez (2014), quienes expresan:

Después de hacer una revisión en los libros de primaria se encontró que la única recta notable que se trabaja es la altura de un triángulo. Ésta se introduce a partir de tercer grado mediante ángulos rectos, los cuales se representan por medio de giros, se menciona que un cuarto de giro representa un ángulo recto. Con ello se dan algunas ideas de lo que es perpendicularidad. En cuarto grado se continúa con el trabajo de rectas perpendiculares, las cuales se definen como “rectas secantes que se cruzan formando ángulos de 90 grados a los cuales se les llama ángulos rectos. En quinto grado aparece la recta altura, y se define como la menor distancia que hay entre un vértice y su lado opuesto o la prolongación de éste. Como ejercicios se enfatiza en el trazo de la altura en triángulos acutángulos y obtusángulos, trabajando poco el trazo de ella en triángulos rectángulos. En sexto grado se trabaja con rectas perpendiculares y se da de nuevo la definición dada en cuarto grado. La representación encontrada para abordar el concepto de altura es geométrica. Las aplicaciones se enfocan a la resolución de problemas de la misma matemática, tal es el caso de determinar áreas de figuras geométricas, por ejemplo triángulos (p.546).

Retomemos a manera de ejemplificación las concepciones de mediatriz y bisectriz desde el libro de texto de telesecundaria que fue el material vigente con el que trabajaron los estudiantes que participaron en este estudio, y los conceptos de altura y mediana desde un

libro de texto distinto, ya que el libro de telesecundaria no incluye ni la definición éstas como tampoco su tratamiento.

La mediatriz es entendida como “El conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento. La perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. El eje de simetría del segmento” (SEP, 2006, p.152).

La bisectriz de un ángulo es “La semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y determina dos ángulos iguales. El eje de simetría del ángulo. El conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo” (SEP, 2006, p.156).

La altura en Arteaga y Sánchez (2013) es presentada como “La altura de un triángulo es la perpendicular desde un vértice al lado opuesto” (p.52), mientras que “La mediana de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, es la recta que une dicho vértice con el punto medio del lado opuesto” (p.53).

El entorno de trabajo en que se presenta el tratamiento de las rectas notables, a partir de los libros de texto correspondientes al Plan y Programas de Estudio 2011 (SEP, 2011a) mayoritariamente es en un ambiente clásico, es decir utilizando lápiz, escuadras, compás, regla, para realizar los trazos; tal como puede verse en Farfán, Cantoral, Cabañas y Ferrari (2011), Arteaga y Sánchez (2013), Reyes (2012), Arriaga y Benítez (2012), Block y García (2012).

De forma específica en el libro Matemáticas I de Telesecundaria (SEP, 2006), que es uno de los principales recursos con los que trabajaron previamente los estudiantes involucrados en el proyecto de investigación, el trazo de las rectas notables y su análisis se realiza también en un ambiente clásico, utilizando escuadras y compás. En este libro se observa un énfasis en el trazo de las rectas más que el análisis de sus propiedades, tal como también puede apreciarse en los casos reportados por Reyes y Rodríguez (2014). Además se tienen escasas situaciones problema situadas desde un contexto real, por lo que el énfasis en la resolución de problemas no se visualiza claramente.

A lo largo de la secuencia 12 (del libro de texto de Matemáticas I de telesecundaria) destinada a las rectas notables del triángulo se propicia únicamente el análisis de la mediatriz y la bisectriz. Entre las propiedades que se lograron visualizar respecto al trabajo sobre la mediatriz se encuentran: la equidistancia hacia los puntos extremos del segmento,

la perpendicularidad hacia el punto medio del segmento. Y es en un último problema donde se espera que los estudiantes logren trazar las tres mediatrices y logren ubicar el circuncentro como punto de solución, sin antes haber establecido la equidistancia entre puntos.

En cuanto al trazo de las bisectrices se visualizan las propiedades: de equidistancia de un punto sobre la bisectriz a los lados del ángulo, la obtención de un eje de simetría del ángulo. Con un último problema se pretende que los estudiantes determinen el incentro de un triángulo y comprueben que a partir de éste punto se tiene la misma longitud a los lados del triángulo. Debe tenerse en cuenta que no se trabajaron otras situaciones problema en triángulos, no se estableció que un triángulo tiene tres bisectrices, mucho menos la intersección de éstas.

Para los estudiantes de telesecundaria además del trabajo en el libro de texto, se revisan cápsulas audiovisuales (video) <https://www.youtube.com/watch?v=a4u9ImW81vk> . Debido al cambio de plan de estudios, las cápsulas se han modificado (las recta notables ya no aparecen en los recursos audiovisuales ni tampoco en el nuevo libro de texto para telesecundaria 2018). En las cápsulas correspondientes a este tema en la propuesta del 2011, se trabaja con la mediatriz y bisectriz, en una cápsula que muestra una situación problema que relaciona ambas rectas para establecer una explicación sobre cómo funciona un reloj solar.

Los trazos que se muestran a través del video son utilizando regla y compás, pero cabe precisar que se complementan las propiedades de la mediatriz y bisectriz ya que se establece y muestra la obtención del circuncentro y el trazo de una circunferencia delimitada por dos segmentos. Además la definición dada en el libro de texto se complementa con la ofrecida en el video.

2.5 Superficie interactiva-Wiimote

Hace varias décadas se inició en México, la inserción de recursos tecnológicos para la enseñanza de Matemáticas en el aula. Pero, la expansión del uso de los pizarrones interactivos o pizarras digitales interactivas como herramientas de apoyo a la enseñanza, tiene apenas un poco más de una década. Su inserción a las aulas de las escuelas públicas

comenzó con el Programa Enciclomedia en el ciclo escolar 2004-2005 con la pretensión de colocar a México a la vanguardia en tecnología educativa.

Gracias a este programa a cargo de la SEP, miles de escuelas primarias y secundarias del país fueron beneficiadas con la instalación de pizarrones interactivos y otros recursos para equiparlas tecnológicamente.

A diferencia de los pizarrones verdes y blancos donde se escribe con gises y plumones, los pizarrones interactivos funcionan con sensores que permiten escribir sobre la pantalla y manipularla, tal como se realiza en las tabletas electrónicas, utilizando los dedos de la mano y otros dispositivos especializados.

Los componentes de un pizarrón interactivo básicamente son: un proyector, una computadora, el pizarrón mismo que tiene el panel táctil y otros dispositivos como marcadores digitales (Ilustración 4). Su funcionamiento se basa en que el proyector refleja la imagen de la computadora a la que es conectado, la imagen es proyectada hacia la superficie del pizarrón interactivo, éste es el encargado de mandar las señales de comandos a la computadora, comandos que son captados por el panel táctil del pizarrón.



Ilustración 4. Pizarrón interactivo. Recuperada de <http://www.smartboard.com.mx/pizarrones-interactivos>

En ocasiones contar con un proyector y una computadora suele considerarse como un pizarrón interactivo, sin embargo, es algo conceptualmente distinto. La distinción puede comprenderse mejor a raíz de la descripción encontrada en González y Durán (2015, p.7)

Una pizarra digital es un “sistema tecnológico integrado por un ordenador multimedia conectado a Internet y un video-proyector que presenta sobre una pantalla o pared de gran tamaño lo que muestra el monitor del ordenador” (Marquès y Grupo DIM, 2006). La Pizarra Digital Interactiva por su parte, se diferencia de la anterior porque añade un dispositivo de control de puntero que permite la interacción directa sobre la superficie de proyección de contenidos digitales, en un formato idóneo para visualización en grupo (Marquès, 2008).

A pesar de la gran inversión en recursos tecnológicos para equipar a las instituciones, y aunque “la Pizarra Digital Interactiva en la actualidad es el recurso tecno-educativo con más fuerza en el contexto de la educación y la formación en el siglo XXI” (González y Durán, 2015), en el contexto mexicano son escasas las escuelas de educación básica donde aún se utilizan los pizarrones interactivos con los que fueron beneficiadas gracias a Enciclomedia y programas derivados. Su inactividad se debe principalmente al deterioro que han sufrido los pizarrones, al costo elevado que tiene su reparación y/o adquisición y a la falta de capacitación de su uso, entre otros factores que pueden verse a más detalle en Tinajero (2009). Además, han surgido otros dispositivos con los que los docentes se apoyan en la tarea de la enseñanza y aprendizaje no solo de Matemáticas, sino también para resto de las asignaturas.

Considerando el difícil acceso a un pizarrón interactivo por su elevado costo, han surgido proyectos como el de Johnny Chung Lee quien en 2007 desarrolló la pizarra interactiva a bajo costo usando el *wiimote*, siendo éste el control remoto del videojuego *Nintendo Wii*. El funcionamiento del pizarrón interactivo es similar a los comercializados, necesita de una computadora con conexión *bluetooth*, un proyector, un lápiz de luz infrarroja, y en lugar del pizarrón requiere el control *wii* mejor conocido como *wiimote*. Esta pizarra interactiva, que por ahora llamaremos así, no necesita de la instalación de una pantalla táctil, por lo tanto su uso puede aprovecharse casi sobre cualquier superficie plana.

Al no requerir de un pizarrón para su funcionamiento, el nombre de pizarrón interactivo se aleja de las características de este dispositivo, que si bien tiene la misma funcionalidad, sus componentes diferencian un poco, así el nombre de “Superficie interactiva” enunciada en Sánchez (2012) cobra sentido. Para este trabajo nos referiremos a ella con el nombre de Superficie Interactiva-Wiimote (SI-Wm) haciendo alusión al dispositivo que su creador describe como “Low-Cost Multi-point Interactive Whiteboards Using the Wiimote” (Chung Lee, s.f).

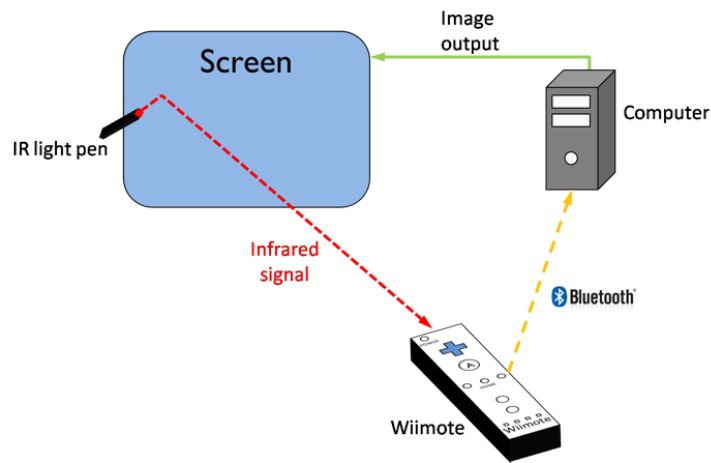


Ilustración 5. Sistema que conforma el pizarrón interactivo. Recuperado de <http://seminarprojecttopics.blogspot.mx/2012/10/wiimote-whiteboard.html>

Como vemos en Bosetti, Pilolli, Ruffoni y Ronchetti (2011), la idea de la superficie interactiva-Wiimote es simple (Ilustración 5), el Wiimote se coloca de forma que su cámara infrarroja pueda visualizar completamente la pantalla proyectada. El wiimote detecta y comunica (a través de Bluetooth) la posición de la luz infrarroja (mediante el lápiz infrarrojo) a la computadora, las indicaciones deben realizarse sobre el área de la pantalla proyectada. Gracias a una operación de calibración realizada al principio, la computadora puede mapear la ubicación del lápiz en el espacio virtual de su pantalla. El lápiz se convierte en equivalente a el mouse, y el usuario puede interactuar con la computadora moviendo el bolígrafo. El Wiimote puede rastrear hasta 4 luces infrarrojas al mismo tiempo, por lo que puede ser multitáctil. Hay diferentes controladores, que están disponibles para las principales plataformas (Windows, Macintosh y Linux).

Una superficie interactiva-Wiimote (SI-Wm) hace accesible la incorporación de recursos tecnológicos al aula, de forma que las clases se dinamizan teniendo acceso a gran variedad de recursos a través de la computadora, más aún si se tiene acceso a internet. El uso de la *SI-Wm* genera un escenario fácil de usar, donde los estudiantes se vuelven partícipes en la construcción de conocimientos, ya que pueden realizar manipulaciones que generan una interactividad donde ahora no son actores estáticos receptivos.

La mercadotecnia de los pizarrones interactivos presenta ventajas tanto para los docentes como para los estudiantes, entre ellas se encuentra la motivación, la optimización del tiempo, el acceso a inagotables fuentes de información, el beneficio para estudiantes con alguna necesidad específica por la posibilidad de usar recursos audiovisuales, entre otros. Sin embargo, un uso consiente, constante y organizado de este recurso es lo que propicia que las actividades desarrolladas puedan llegar a sus objetivos. Sumemos además que su combinación con otros dispositivos, softwares o páginas web abre a nuevas posibilidades y escenarios de trabajo y de aprendizaje.

Capítulo 3

Metodología

3.1 Teoría de situaciones didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) concibe a la enseñanza como un proceso de producción, transformación, reorganización y validación de conocimientos matemáticos (Sadovsky, 2005). Una situación didáctica desde el enfoque de Brousseau implica considerar la interrelación de tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico. En este conjunto el profesor es quien facilita el medio donde el estudiante ha de construir su conocimiento. En esta relación del profesor con el estudiante se producen interacciones que derivan en situaciones didácticas como adidácticas.

Una situación adidáctica consiste en una interacción entre un sujeto y un medio a propósito de un conocimiento. Tiene como objetivo que el estudiante logre resolver situaciones problema sin la intervención del docente, quien se mantiene a la expectativa, manteniendo distancia para que el estudiante ponga en juego sus saberes por sí mismo.

Hemos llamado situación al modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como los recursos del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas situaciones requieren de la adquisición anterior de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrece una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso genético (Brousseau, 1999, citado en Sadovsky, 2005, p.23).

La interacción es una relación de ida y vuelta entre el sujeto y el medio; a saber, frente a una problemática el sujeto elige una alternativa matemática entre varias posibles, la pone en uso y tiene la posibilidad de reafirmar su decisión o rectificarla, y es en este juego que se produce conocimiento. Confirma que una relación matemática se ajusta al problema o se da cuenta que lo que ha realizado no es adecuado. Ahora ya no están en juego únicamente los conocimientos iniciales que fueron puestos en uso, sino también los nuevos productos de la interacción con el problema.

Entre el momento en que el alumno acepte el problema como suyo y aquel en el que produce sus respuestas, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también

que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas (Brousseau, 1999, citado en Sadovsky, 2005, p.25).

La situación didáctica ocurre cuando el maestro genera el medio didáctico donde el estudiante ha de construir su conocimiento, siendo uno de los propósitos que el estudiante pueda resolver situaciones problema sin la intervención del docente (carácter adidáctico).

En el proceso de la situación didáctica, se dan relaciones de establecimiento de reglas de forma implícita (contrato didáctico), esto es, comportamientos del maestro esperado por el alumno, y aquellos que espera el docente que tenga el alumno (Sensevy y Mercier, 2007).

Dentro de las interacciones que se presentan en la SD, Brousseau identifica dos efectos fundamentales que pueden inhibir los alcances en la construcción del conocimiento, estos son el efecto Topaze, y el efecto Jourdain. El primero, se presenta cuando el profesor detecta las dificultades de un grupo al resolver determinado problema, y en lugar de generar retinencia, él asume la resolución sugiriendo un procedimiento de solución. El segundo efecto plantea que el docente para no causar desanimo en los estudiantes cuando dan una respuesta incorrecta, adopta una postura de validación haciendo creer al estudiante que ha generado una estrategia ganadora o correcta.

Tal como vemos en Sadovsky (2005), las nociones de devolución e institucionalización definen lo esencial de trabajo docente. La noción de devolución se manifiesta en el sentido que el docente devuelve al estudiante la responsabilidad de hacerse cargo del problema que se le propone. Cabe señalar que no basta con comunicar el problema al estudiante para que él lo asuma y sea el responsable de resolverlo.

Por otro lado, complementando la noción de devolución se encuentra la institucionalización, en ella se transforman los conocimientos en saberes, en un proceso de consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del profesor. De manera más específica los profesores toman nota de lo que han hecho los alumnos, relaciona las producciones de unos con las producciones de otros y conjuntamente con ellos se establecen generalidades.

3.2 Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica como metodología de investigación y como vía para la creación de secuencias didácticas surgió en la didáctica francesa de las matemáticas, este concepto se fundamenta en la analogía con el trabajo que realiza un ingeniero quien para realizar una tarea utiliza los conocimientos de su dominio, pero se somete a un control de tipo científico. Pero en su trabajo se ve obligado a trabajar con objetos más complejos que los depurados por la ciencia, por lo tanto aborda con todos los medios disponibles los problemas de los que la ciencia no quiere o puede hacerse cargo (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

Una concepción más centrada en las secuencias de clase puede verse en Douady (1996, p.241) quien expresa

El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor.

Por su parte la ingeniería didáctica como metodología de investigación “se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995, p.36). Otro punto destacable de la ingeniería didáctica es el registro de casos y la validación interna, que se realiza a través de un doble análisis, uno a priori y otro a posteriori.

El proceso experimental de la ingeniería didáctica se divide en cuatro fases que a continuación serán explicadas brevemente.

1) Análisis preliminar

Incluye el cuadro teórico didáctico general, y los conocimientos didácticos adquiridos sobre el tema, pero además incluye otros análisis preliminares, los más frecuentes son:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

En el análisis debe estar muy ligado a los objetivos de la investigación, sin embargo, “por lo general, a pesar de que esta serie de análisis no se evidencia en las publicaciones, los trabajos que el investigador ha realizado como pilares de su ingeniería se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases de la misma, en función de las necesidades sentidas” (Artigue, 1995, p.39).

2) Concepción y análisis a priori

En esta fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Nos parece útil, para facilitar el análisis de una ingeniería, distinguir dos tipos de variables de comando:

- Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería
- Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Recordemos que la validación que se realiza es de forma interna, y comienza desde la concepción el proceso, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. Como vemos en Artigue (1995) el objetivo del análisis a priori es determinar en que las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La

validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos:

- Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

3) Experimentación

Se realiza la experimentación con un grupo de estudiantes e inicia al momento de contacto entre el investigador y el profesor. Durante la experimentación se comparte al docente las actividades y que desarrollará, se explicitan los objetivos, se establece un contrato didáctico con los estudiantes, se desarrolla el trabajo y se realizan registros para su posterior análisis. Además debe tenerse en cuenta que durante la experimentación pueden presentarse complicaciones o necesidades que requieran ajustes al trabajo.

4) Análisis a posteriori y evaluación

Se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, que se fundamenta esencialmente la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

3.3 Diseño y método

3.2.1 La institución

La institución donde se desarrolló el trabajo fue una telesecundaria de turno único, matutino, ubicada en San Mateo Atenco, un municipio semiurbano del Estado de México, la escuela estaba conformada por 18 grupos, de los cuales siete eran de primer grado, con una media de 30 estudiantes por grupo. De acuerdo a los resultados Enlace 2013 (Disponible en <http://www.enlace.sep.gob.mx/>), el 68% de los estudiantes de primer grado de esta institución se ubicaba en un nivel de logro insuficiente en Matemáticas, mientras que el 23% se encuentra en un nivel elemental.

Por otro lado, considerando los resultados Planea en el ciclo escolar 2016-2017 (Disponible en <https://www.inee.edu.mx/index.php/planea/bases-de-datos-planea>), el 52% de los estudiantes de esta institución se encuentra en un nivel de logro I, que es el nivel más bajo en la escala manejado por esta prueba, hecho que posiciona a la institución con un bajo aprovechamiento académico. Mientras que únicamente el 7.5% de los estudiantes se encuentra en el nivel de logro IV, en el cual se encuentra la resolución de los problemas que implican utilizar las propiedades de mediatrices y bisectrices.

Entre los siete grupos de primer grado cada docente eligió a un estudiante indistintamente para conformar un grupo de estudio de casos con un total de ocho estudiantes, quienes siempre trabajaron en parejas. Al inicio de la experiencia todos los estudiantes se encontraban alrededor de los 13 años de edad, ninguno de ellos había recurrido algún

grado. Se realizó una entrevista a los docentes de primer grado de la institución, la entrevista tuvo la finalidad de conocer si el tema de las propiedades de las rectas notables había sido abordado previamente y de que manera. La entrevista con los docentes deja saber que todos ya habían trabajado con sus estudiantes nociones sobre las propiedades de las rectas notables de los triángulos, cada uno con distinta profundidad, pero de manera tradicional, es decir, utilizando los instrumentos de medición como regla, escuadra, compás, transportador. Aunque el tema ya había sido estudiado ningún profesor había resuelto problemas de aplicación, más bien realizaron trazos de las rectas notables y analizaron algunas de sus propiedades.

Todos los estudiantes cursaban el taller de computación como parte de las asignaturas de la institución, sin embargo, su dominio de la computadora era elemental, además su experiencia con la computadora se reducía al taller, una hora a la semana. Ningún estudiante había trabajado anteriormente con GeoGebra, así que el acercamiento planteado desde las actividades fue desde lo elemental y pretendiendo que fuera lo más sencillo posible.

3.2.2 Diseño de la secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica se retoman las bases de la TSD; la secuencia didáctica que se elaboró para el análisis que se aborda en este estudio, tomó como principal eje crear situaciones adidácticas (Sadovsky, 2005) mediante una secuencia de actividades (Tabla 1), las cuales fueron pensadas de forma que los estudiantes pudieran enfrentarlas sin la intervención directa del profesor. Es decir, los alumnos resolvieron las tareas de la secuencia entregadas en fotocopias (como una primera noción de devolución visto desde la TSD), para ello los estudiantes fueron provistos del software GeoGebra en una computadora.

No obstante que los estudiantes tenían conocimientos sobre las rectas notables, debido a que el tema había sido trabajado con su profesor con apoyo de su libro de texto y el programa televisivo diseñado exprofeso para la telesecundaria; cabe destacar que al incorporar el uso de un software para la resolución de los problemas, los estudiantes se

enfrentaron a la construcción de nuevos conocimientos ya que se trata de un nuevo medio para adquirir conocimiento, teniendo un tratamiento y características propias.

El diseño de la secuencia didáctica retoma además un enfoque constructivista de aprendizaje. Éste plantea, entre otras asunciones, que para la enseñanza de la Matemática debe tomarse en cuenta el contexto de los estudiantes y sus aprendizajes previos, favorecer el diálogo e interacción con el conocimiento y la participación activa de los estudiantes (Ortiz, 2015). En la medida en que se espera que los alumnos se responsabilicen de su propio aprendizaje, deben ser quienes interactúen con el saber para adquirir conocimiento.

El diseño de la secuencia didáctica

Para la secuencia didáctica las actividades fueron planteadas de manera que el medio de trabajo fuera el software GeoGebra en su versión 5.0. El software se instaló en computadoras de escritorio con sistema Windows. Aunque las actividades fueron planeadas para trabajarse con GeoGebra, no se limitó a los estudiantes a no poder realizar trazos manuales u operaciones escritas.

La implementación de la secuencia se realizó en dos fases que se dividieron en cuatro situaciones, cada situación con varios momentos o actividades. La primera fase va desde la sensibilización docente hasta la décima sesión. Las primeras tres situaciones compartieron la intención primordial de que los estudiantes comenzaran a familiarizarse con el entorno GeoGebra y aprendieran a utilizar varias herramientas de la aplicación Geometría. De la misma manera que comenzaron el acercamiento a los objetos matemáticos mediatriz, bisectriz, altura y mediana.

La segunda fase fue más breve. Su diseño inicial considera únicamente la situación IV, sin embargo, dada la naturaleza de la ingeniería didáctica y los objetivos de investigación es que se diseña una nueva experimentación, donde se observan, documentan y analizan los conocimientos de los estudiantes al pedirles que resuelvan nuevas situaciones problema un año después de la primera experimentación.

Esta fase de forma general pretende recuperar los conocimientos que prevalecieron en los estudiantes, desde una doble perspectiva. Por un lado los esquemas de uso de las herramientas del software y por otro las nociones sobre las propiedades de las rectas

notables de los triángulos, que los estudiantes manifestaron en el proceso de solución que pusieron en juego utilizando las herramientas de GeoGebra, generando esquemas de uso de las rectas notables.

En este sentido, la noción de esquema de uso se retoma del enfoque instrumental de Rabardel (1995) donde un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones. Sin embargo dentro de los esquemas de uso que un sujeto moviliza o utiliza se distinguen dos categorías: esquemas de uso, relativos a unas operaciones, es decir a la manipulación técnica del artefacto y esquemas de acción instrumental, relativos a la utilización de un artefacto en vista de realizar una acción (Rabardel, 1995, citado en Flores, 2015).

En esta investigación se retoma la noción de esquema de uso en una acepción general sin distinguir entre esquema de uso y esquema de acción instrumental ya que para efectos de este estudio no es de interés analizar y distinguir unos de otros. Entonces, un esquema aquí representará la manipulación de una herramienta de GeoGebra que se liga a realizar una acción, que es la búsqueda de una solución al problema, pero también refiere a esquema de uso de la noción geométrica que el alumno tiene sobre la mediatriz, bisectriz, altura y mediana (uso de algunas de sus propiedades y la realización su trazo). Los esquemas de uso sientan las bases para poder utilizar las herramientas logrando realizar construcciones o trazos geométricos relacionados a las rectas notables del triángulo, los esquemas se apropian y su adecuado uso puede evocarse en momentos posteriores cuando se ponen en uso para resolver las situaciones problema, que por un lado requieren conocimiento matemático, pero por otro conocimiento técnico-tecnológico para poder realizar trazos sin complicaciones.

Para la segunda fase experimental se diseñaron varios problemas de contexto real simulado, de los cuales se seleccionaron únicamente tres para cada experimentación, uno donde se utilizan las propiedades de la mediatriz, otro sobre la bisectriz y uno más sobre la mediana.

En total la implementación de la secuencia de trabajo directamente con los estudiantes abarcó 14 sesiones de trabajo (Tabla 1). Cada sesión tuvo una duración aproximada de 45 minutos. Dados los objetivos de la investigación, refieren a la caracterización de las

estrategias de solución y el análisis de la manifestación de la apropiación de esquemas de uso, la fase dos es la de mayor interés para el análisis.

FASE 1				FASE 2	FASE 2 COMPLEMENTO
Sensibilización docente.	Situación I: Para comenzar a usar GeoGebra.	Situación II: Construcción y análisis de triángulos.	Situación III: Las rectas notables del triángulo.	Situación IV: Resolución de problemas.	Recuperación de conocimientos:
	Siete momentos. 1. ¿Qué es GeoGebra? 2. Aplicaciones de GeoGebra. 3. Otros componentes de la interfaz. 4. Aprendiendo a usar el pizarrón interactivo. 5. Trazos y construcciones geométricas básicas. 6. Trazos de polígonos. 7. Trazo de circunferencias.	Tres momentos. 1. Los triángulos. 2. Triángulos de medidas específicas. 3. Suma de ángulos.	Cinco momentos. 1. Definición de las rectas notables y su trazo. 2. La mediatriz. 3. La bisectriz. 4. La mediana. 5. La altura.	Tres consignas. 1. Problema de mediatriz. 2. Problema de bisectriz. 3. Problema de mediana.	Problema 1. Uso de las propiedades de la mediatriz. Problema 2. Uso de las propiedades de la bisectriz. Problema 3. Uso de las propiedades de la mediana.
2 sesiones	3 sesiones	2 sesiones	4 sesiones	2 sesiones	3 sesiones

Tabla 1. Distribución del trabajo.

3.3.3 Desarrollo de la secuencia didáctica

La **primera fase** comienza con la sensibilización docente, ésta se centró en dialogar durante dos sesiones con la profesora que aplicaría la secuencia didáctica. En la primera sesión se entregó impresa la secuencia y se le explicó la finalidad y objetivos de cada actividad. Se explicaron las sugerencias docentes generales al trabajo y las posibles respuestas esperadas por los estudiantes. Se invitó a la docente a leer, revisar y hacer

adecuaciones (si se consideraban prudentes) a la secuencia didáctica para la sesión posterior acordada para 2 días posteriores.

Durante la segunda sesión de sensibilización debido a que la docente no sugirió cambios a la secuencia didáctica y manifestó no tener dudas al respecto, esta sesión se enfocó en mostrar y explicar a la docente el funcionamiento de la Superficie Interactiva-Wiimote (SI-Wm). Las actividades consistieron en mostrar y permitir a la maestra calibrar el pizarrón interactivo, construir figuras, explorar las cajas de herramientas. Para cerrar esta sesión se le explicaron sintéticamente las actividades por realizar durante la sesión uno, se resolvieron algunas dudas.

Con los estudiantes, antes de implementar la secuencia se hicieron dos reuniones, en la primera se comentó grosso modo en qué consistiría el trabajo, ya que aunque habían sido elegidos por sus docentes, no sabían lo que realizarían. La segunda reunión fue para resolver dudas y saber si se tenía el permiso de sus padres de familia para video grabarlos.

Para cada sesión se repartió únicamente el material impreso con el que se trabajaría en ese momento. No se repartió toda la secuencia didáctica por dos motivos: por los ajustes previstos por la ingeniería didáctica con base en los resultados de la implementación y a fin de evitar que los alumnos leyeran información de más (los recuadros de ayuda y definiciones) que podría eventualmente influenciar a sus estrategias.

Para cada momento de la secuencia se dio tiempo para que los equipos leyeran el planteamiento, realizaran exploraciones y resolvieran. El avance de la secuencia no estaba sujeto a un número predeterminado de actividades que debieran realizarse estrictamente en cada sesión. Para pasar de un momento de trabajo a otro, los estudiantes debían primero concluir su trabajo, posteriormente el docente elegía un equipo para que socializara su hallazgos y solución mediante la SI-Wm a fin de que el resto de los equipos pudieran redirigir su proceso o retomar ideas que, a su juicio, les sirvieran para terminar de resolver la actividad.

Cabe precisar que llamamos socialización a espacios en los que los alumnos, en cierta medida, institucionalizaban algunos resultados; es decir, la fase de institucionalización, dista de la concepción original, ofrecida en Sadovsky (2005). Ya que en nuestra experiencia, el profesor si bien analiza y apoya el trabajo que los estudiantes van

realizando en la búsqueda de solución, no establece ninguna conclusión; más bien, solicitaba a los alumnos que habían logrado resolver la situación problema o a quienes se habían acercado a una solución correcta, que compartieran con sus compañeros lo que realizaron.

Otra consideración, es que los estudiantes no tomaron la iniciativa permitida de llevar a cabo un diálogo activo entre ellos, más bien unos se limitaron a mostrar su proceso, mientras otros estudiantes intentaron nuevamente resolver la situación problema con base en lo que habían escuchado o hicieron los ajustes que consideraron pertinentes.

La socialización se realizó utilizando la SI-Wm; una pareja, elegida por el maestro, pasaba al frente del aula a mostrar y explicar a sus compañeros el proceso que habían seguido frente a la situación problemática planteada.

Todas las sesiones se desarrollaron en un horario variable pero dentro de la jornada escolar primero sujeto a la disponibilidad de la sala de cómputo en el que los estudiantes organizados en parejas trabajaron las primeras sesiones con computadoras de escritorio. Posteriormente debido a algunas dificultades técnicas, el lugar se cambió por la sala de reuniones de la institución, en el que las parejas de alumnos trabajaron con laptops.

Las dos primeras sesiones de trabajo fueron dirigidas por una docente de primer grado de la misma institución, pero dificultades que se le presentaron le impidieron disponer del tiempo para hacerse cargo de la implementación de la secuencia didáctica, por ello el docente investigador tuvo que coordinar el resto de las sesiones.

Durante las tres primeras situaciones, en apego a lo previsto, los estudiantes exploraron el software, comenzaron a utilizar las herramientas para realizar construcciones sencillas, que servían para recordar algunas nociones sobre las rectas notables; más adelante, en el análisis *a priori* se hace una descripción más detallada.

La **segunda fase** de la secuencia didáctica, comprende entre otras, a las sesiones que corresponden a la resolución de problemas (Situación IV), en las que se pretendió que los estudiantes manifestaran sus conocimientos geométricos sobre las rectas notables de los triángulos y su habilidad en el uso del software GeoGebra. Se planteó aproximadamente un año después una segunda experimentación con situaciones problemáticas análogas a las que se propusieron en la Situación IV de segunda fase. Aunque de ambas experiencias

se analizaron las respuestas, cabe anticipar, que en la segunda experimentación es en la que se encontraron hallazgos más significativos a los objetivos de la investigación.

Una vez finalizada la segunda fase de la secuencia didáctica, se realizó una entrevista a los estudiantes, la finalidad fue conocer la manera en que los estudiantes trabajaron anteriormente el tema con sus profesores, además se pretendió conocer la apreciación de los estudiantes respecto al trabajo con GeoGebra, a la cantidad y tipo de actividades y sobre su mismo aprendizaje que consideraron haber desarrollado.

3.3.4 Planteamiento de nuevas situaciones problema

Una vez realizado el análisis de las respuestas de la Situación IV de la segunda fase, se determinó, como se anticipa en el párrafo precedente, realizar una segunda experimentación, la cual inicialmente no fue prevista en la metodología. La finalidad de ésta fue contrastar lo sucedido en las dos experiencias, desde una perspectiva de lo que realmente permanece como conocimiento con el tiempo sobre el uso del software y sobre las rectas notables; y por tanto, los estudiantes pueden evocar para resolver situaciones problemática. Ya que como menciona Fuenlabrada:

En el proceso de enseñanza sigues con otros temas, pero cuando vuelven a aparecer éstos [el conocimiento trabajado con anterioridad: los problemas de las rectas notables], tienes [como profesor] que ver qué y cómo evocan el conocimiento los estudiantes para resolver. Los alumnos van avanzando, sin embargo, cuando planteas otra situación, equivalente a la que dio lugar a la enseñanza, parece que los alumnos “retroceden” en cuanto a sus posibilidades de solución, pero ya no regresan, al punto inicial ..., lo que realmente han aprendido es lo que se son capaces de evocar (Fuenlabrada, I., comunicación personal, 22 de marzo de 2018).

Para esta experimentación se diseñaron tres nuevas situaciones problema a resolverse utilizando GeoGebra. Una situación que requería para su solución el trazo de las mediatrices, otra el de bisectrices y la última el de bisectrices. El método de trabajo fue el mismo que se describió anteriormente, la única diferencia fue un reajuste de dos equipos de trabajo quienes intercambiaron un integrante. El motivo de este cambio fue para

propiciar una buena relación entre ellos, ya que al haber pasado un tiempo prolongado, algunos ya no conservaban una buena relación amistosa.

Cada situación problema fue desarrollada en una sesión de trabajo de aproximadamente 50 minutos. Para esta experimentación se previeron ayudas que el profesor podía dar paulatinamente a los alumnos si es que tenían dificultades para encontrar una solución. Mismas que fueron objeto de documentación para su ulterior análisis.

3.4 Características de los equipos

Durante la primera sesión de trabajo con los estudiantes se conformaron los equipos (parejas) quienes trabajaron juntos a lo largo de la aplicación de la secuencia didáctica. Los mismos estudiantes fueron quienes decidieron con quien trabajar. A lo largo de las sesiones cada equipo tuvo características y actitudes que permiten distinguirlos uno de otro. En seguida se describirán brevemente algunas características generales de los equipos, éstas se hacen con base en las observaciones de ellos durante varias sesiones.

Equipo 1. Conformado por Laura y Fabiola, estudiantes del mismo grupo. En un sentido general presentaron un desempeño medio a lo largo del trabajo. Muestran una actitud temerosa al expresarse y al manipular la computadora. En todo momento se negaron a pasar a manipular la SI-Wm. Al realizar las actividades demoraban un tiempo mayor que el resto de sus compañeros, esto ocasionó que se retrasaran en varias actividades. Después de las socializaciones aún presentaban dificultad para realizar las actividades.

En cuanto a colaboración en el trabajo, se observa que Laura es la que manipula en mayor medida la computadora, Fabiola hace pequeñas intervenciones para señalar algo o para realizar algunos trazos. Hay breves momentos de diálogo entre ellas, que no siempre es sobre el trabajo.

Equipo 2. Conformado por José Emanuel y José Carlos, estudiantes del mismo grupo. En términos globales presentaron un buen desempeño a lo largo del trabajo. Muestran rápidamente actitudes de destreza al usar el software, con una actitud entusiasta utilizan la SI-Wm para socializar su trabajo. En varios momentos se observan discusiones sobre las actividades planteadas y los trazos que realizan. Son los primeros en concluir las

actividades. En cuanto al manejo de la computadora José Emanuel es quien lidera el uso del software, pero da oportunidad a que José Carlos intervenga.

Equipo 3. Conformado por Ángel y Niki, estudiantes de dos grupos distintos. En general presentan a lo largo del trabajo, un desempeño medio tendiendo a bueno en relación a sus compañeros. Ángel es quien toma el liderazgo y realiza las actividades, mientras que Niki tiene un comportamiento disperso y no discute ni apoya a su compañero. En algunos momentos Ángel le da la oportunidad a su compañero para que lo apoye manipulando la computadora, pero Niki no hace grandes avances, solamente desplaza y crea elementos sencillos como líneas y segmentos. Ángel presenta una actitud de disposición al trabajo y a la socialización en el pizarrón interactivo.

Equipo 4. Conformado por Emanuel y Yosmar, estudiantes de dos grupos distintos. De forma general presentan un buen desempeño. Emanuel toma el liderazgo de la computadora, pero da breves oportunidades para que Yosmar manipule el software. Ambos tienen entusiasmo y dialogan, pasan y utilizan la SI-Wm para socializar su proceso, pero en menor medida que el equipo 2, sin embargo en las socializaciones se nota como Emanuel tiene un mejor dominio y confianza para usar el software.

3.5 Análisis

Este apartado retoma los fundamentos de la ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno, 1995). Arriba fue enmarcado de forma general el cuadro teórico didáctico que arroja al desarrollo y análisis de la secuencia didáctica, ahora se presenta un primer análisis de la secuencia didáctica (análisis *a priori*) destacando las propiedades de las rectas notables que se trabajaron con los estudiantes así como las expectativas docentes. Posteriormente en el capítulo cuatro se complementa este análisis *a priori* con los métodos de solución esperados, así como con los primeros análisis y hallazgos.

La fase de experimentación se relató brevemente en el apartado “Desarrollo de la secuencia didáctica”; sin embargo, se complementa con lo que acontece en el Capítulo 4. Por último, el análisis *a posteriori* que representa la cuarta fase de la ingeniería didáctica se aborda en la última parte del Capítulo 4.

3.6 Finalidades de las situaciones I, II y III

Dado que nuestro foco de interés es el análisis de la fase 2 donde se realiza la resolución de problemas sobre las rectas notables, las finalidades de las situaciones I, II y III serán presentadas brevemente. El análisis *a priori* de la situación IV que aquí se presente será complementado en el apartado de Análisis a priori en el Capítulo 4.

- *Situación I. Para comenzar a usar GeoGebra:* los estudiantes conocerán algunas de las herramientas con las que cuenta GeoGebra y las condiciones para su uso. Comenzarán a familiarizarse con el software y realizarán trazos básicos, entre ellos rectas, polígonos regulares e irregulares, trazarán circunferencias de distintas maneras, medirán longitudes.
- *Situación II. Construcción y análisis de triángulos:* los estudiantes aprenderán a trazar triángulos de medidas específicas y midiendo ángulos establecerán que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° .
- *Situación III. Las rectas notables del triángulo:* los estudiantes trazarán las rectas notables y a partir de preguntas planteadas en la secuencia y con las socializaciones entre el profesor y los estudiantes establecerán algunas de las propiedades de las mediatrices, bisectrices, alturas y medianas en los triángulos (Tabla 2), que les serán útiles al enfrentarse a la resolución de los problemas. Las actividades de la secuencia didáctica tienen por finalidad propiciar el análisis de algunas propiedades relacionadas con las rectas notables, éstas propiedades se conjuntan en la Tabla 2 que enseguida se visualiza.

<i>Recta</i>	<i>Propiedades analizadas</i>
<i>Mediatriz</i>	Las <i>mediatrices</i> dividen a un segmento en dos partes de igual longitud. En cualquier triángulo <i>las tres mediatrices</i> siempre se intersecan en un punto. El <i>circuncentro</i> es el punto que <i>equidista a los vértices del triángulo</i> . El <i>circuncentro</i> es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. El <i>circuncentro</i> siempre queda dentro del triángulo.

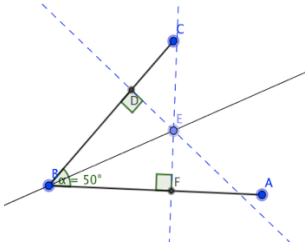
<p><i>Bisectriz</i></p>	<p>La recta <i>bisectriz</i> divide a un ángulo en dos partes iguales.</p> <p>Las <i>tres bisectrices interiores de un triángulo</i> se cortan en un punto.</p> <p>El <i>incentro</i> está a la misma distancia de los lados del triángulo.</p> <p>El <i>incentro</i> es el punto a partir del cual puede trazarse una <i>circunferencia tangente</i> a los tres lados del triángulo (circunferencia inscrita).</p> <p>Si se trazan líneas perpendiculares a los lados del ángulo y que se intersequen en el mismo punto sobre la bisectriz, se tiene la misma distancia entre los segmentos DE y FE.</p>  <p>El <i>incentro</i> de todo triángulo siempre queda dentro de él.</p>
<p><i>Altura</i></p>	<p>El <i>ortocentro</i> es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo puede quedar fuera de éste.</p>
<p><i>Mediana</i></p>	<p>La <i>mediana</i> es una de las rectas que divide a un triángulo en dos partes de igual área.</p> <p>El <i>baricentro</i> siempre queda dentro del cualquier triángulo.</p> <p>El <i>baricentro</i> permite equilibrar a una figura plana.</p>

Tabla 2. Propiedades de las rectas notables establecidas.

- *Situación IV. Resolución de problemas:* los estudiantes manifestarán sus conocimientos geométricos sobre las rectas notables del triángulo en la resolución de problemas y, su destreza en el uso del software.

Para el primer problema los estudiantes podrán trazar las tres mediatrices a partir de tres puntos que colocarán sobre el contorno de un calendario azteca, que es de forma circular, esto con fin de determinar el circuncentro, que será útil para medir la longitud del radio que tuvo el calendario.

Para el segundo problema, los estudiantes pueden hacer uso del trazo de las bisectrices a fin de determinar el lugar donde debe colocarse una planta de luz, que debe encontrarse a la misma distancia de dos calles.

Para el tercer problema los estudiantes pueden poner en juego el trazo de las medianas a fin de determinar el centro de gravedad de dos péndulos planos con forma triangular.

Un año después para el problema 1 del complemento de la fase dos, se espera que los estudiantes recuperen la noción de mediatriz, a fin de determinar el circuncentro de los tres puntos que representan tres embarcaderos. El circuncentro permite ubicar un punto de vigilancia que está a la misma distancia de los embarcaderos.

El problema dos requiere el trazo de las bisectrices y con ellas determinar el radio máximo que tiene la circunferencia inscrita a una sección triangular.

Por último, el problema tres requiere utilizar el trazo de las medianas a fin de determinar el centro de gravedad de un cuadrilátero irregular.

3.5.1 Expectativas docentes y el análisis *a priori*

Previamente a la implementación de la secuencia didáctica desarrollada y, considerando los propósitos o finalidades de éstas, el docente tuvo algunas expectativas para el trabajo, algunas de ellas se cumplieron, pero otras se alejaron de lo esperado; estas constituyen el análisis *a priori* visualizado por el profesor-investigador. A continuación comentaremos estas expectativas, así como lo ocurrido luego de haber realizado la experimentación de situaciones problema a los estudiantes, a fin de adelantar elementos para el análisis *a posteriori* que se describe en el Capítulo 4.

Expectativa 1. Los estudiantes al tener el taller de computación tienen conocimientos básicos del manejo de la computadora, y tienen confianza al usarla.

Lo ocurrido: Los alumnos involucrados en el proyecto demuestran tener conocimientos básicos del manejo de la computadora. Éstos se pueden visualizar desde la primera sesión cuando comienzan a manipular el mouse para utilizar las distintas herramientas del software, en algunos casos teclearon cantidades que sirvieron para trazar algunas figuras, además abren y cierran el programa cuando lo requieren.

Utilizar un software nuevo, trabajar con un compañero que no conocen y con el que anteriormente no habían interactuado (para el caso de los equipos 3 y 4), y adicionalmente,

trabajar con un profesor ajeno a la escuela, genera que los estudiantes muestren actitudes tímidas al utilizar la computadora durante las primeras sesiones. Estas actitudes se ven reflejadas en el momento en que empiezan a trabajar, los estudiantes no dialogan, y en todos los casos uno de ellos es quien toma el control de la computadora, poco a poco su compañero va colaborando, en mayor o menor medida según el equipo referido.

Para los equipos uno y dos, la interacción y colaboración entre sus integrantes se presentan casi de forma inmediata, esto debido a que son compañeros que se conocen y han trabajado juntos anteriormente.

En cambio, para el equipo tres, las actitudes de colaboración en el manejo de la computadora empiezan a visualizarse hasta la tercera sesión, cuando Niki observa la pantalla y comienza a señalar y a sugerir medidas.

Por su parte, la colaboración en el equipo cuatro se muestra desde la sesión dos, cuando Yosmar está atento a lo que Emanuel realiza y comienza a señalar algunas partes sobre la pantalla de la computadora, lo que indica que comprende lo que se está haciendo con ella.

Otro aspecto relacionado es el manejo del pizarrón interactivo, donde en las primeras ocasiones los estudiantes revelan una actitud temerosa al utilizarlo, lo que corroboran en las entrevistas realizadas posteriormente.

Expectativa 2. Los alumnos lograrán realizar las actividades planificadas para cada sesión, ya que fueron organizadas pensando en estudiantes de secundaria que tienen conocimientos matemáticos previos del trazo de las retas notables, ahora requieren ponerlos en juego al mismo tiempo que aprenden a utilizar un software de matemática dinámica.

Lo ocurrido: Ninguna sesión se desarrolló como estaba planificada inicialmente, cada día se presentaban retrasos y observaciones que generaron la realización de ajustes para cada sesión posterior. Debemos tener en cuenta que el carácter de la ingeniería didáctica permite realizar ajustes correspondientes sin modificar los objetivos de investigación. El principal retraso se debió a que los estudiantes demoraban mayor tiempo del previsto en realizar cada actividad.

Las observaciones de cada sesión proporcionaron información que evidenció que los estudiantes no recordaban algunos elementos geométricos, entre ellos las rectas perpendiculares, punto medio, recta tangente a un círculo, este hecho llevó a realizar ajustes colocando pequeños recuadros en la secuencia didáctica donde se explicaban estos conceptos.

Se esperaba que luego de las socializaciones cada equipo pudiera reorientar su procedimiento de acuerdo a las explicaciones de los estudiantes elegidos por el docente, quienes explicaban la respuesta o mostraban avances que se dirigían al establecimiento de ella, pero no todos los equipos lograban redirigir su trabajo hacia el proceso expuesto. Los estudiantes continuaban con sus estrategias, ocasionando un retraso en el inicio de las subsecuentes. En otros casos no culminan correctamente la actividad en su computadora, pero buscan seguir sin comprender el trabajo expuesto, así que escriben las respuestas a los planteamientos de acuerdo a lo que entendieron y observaron en la socialización.

Expectativa 3. Los estudiantes durante las socializaciones lograrán explicar a sus compañeros lo que realizaron con su trabajo de forma clara y concisa.

Lo ocurrido: Desde las primeras socializaciones los estudiantes si bien adoptaron un papel de mostrar en el pizarrón las acciones que habían realizado con GeoGebra para resolver el problema planteado, no oralizaban todo el proceso que habían realizado y estaban mostrando a sus compañeros.

Esto ocasionó que el docente tuviera que ir comentando el proceso a la par que los estudiantes realizaban los trazos mediante la SI-Wm. Esto sirve para evidenciar que la socialización es un proceso que es objeto de aprendizaje por parte de los alumnos y de enseñanza para el profesor. Cuando en las prácticas cotidianas del aula no se tiene incorporado que los estudiantes expliquen frente al grupo la solución de un problema y el proceso que siguieron para encontrarla, al solicitarlo en un contexto como el que nos ocupa, genera resistencia en los alumnos porque no están acostumbrados a participar de esa manera.

Esto sucedió con Ángel, Emanuel, Laura, Fabiola y Niki quienes, al no haber tenido oportunidad de desarrollar su capacidad para exponer y defender sus ideas frente a otros, en los espacios de socialización previstos en la implementación de la secuencia didáctica

se mostraron apenados y con dificultades para expresar claramente sus ideas tanto de forma oral como en las respuestas escritas solicitadas.

Expectativa 4. Los alumnos colaborarán entre ellos de forma que puedan resolver las actividades apoyándose unos a otros, dialogando y utilizando por turnos la computadora.

Lo ocurrido: Desde la primera sesión un estudiante de cada equipo tomó el liderazgo para comenzar a utilizar la computadora y con ello el software GeoGebra, esta actitud se extendió en todas las sesiones y en todos los equipos; el integrante que tomó el liderazgo continuó con este papel a lo largo de las once sesiones, pero eso no quiere decir que haya acaparado totalmente la computadora, su compañero también colaboró en la resolución de problemas utilizándola, pero en periodos no tan prolongados, centrando su papel mayormente en opinar, señalar y responder las hojas de trabajo.

El segundo equipo es el único en el que se notó diálogo y colaboración desde la primera sesión. En la entrevista realizada a los estudiantes de este equipo, se supo que son compañeros de salón en donde, por iniciativa propiciada por su maestra, constantemente interactúan y colaboran entre sí.

En el equipo uno, aunque está formado también por estudiantes del mismo grupo, se visualizan pocos momentos de diálogo y en los que ambas alumnas utilicen la computadora. Es a partir de la octava sesión cuando se observa mayormente actitudes de colaboración y diálogo y en donde las dos estudiantes manipulan la computadora.

En el tercer equipo, aunque en la tercera sesión se muestran actitudes de colaboración, en la mayor parte de sesiones Niki está atento a lo que su compañero realiza, pero no dialoga y cuando utiliza el software tiene complicaciones para realizar construcciones. Emanuel es quien realiza las actividades e incluso en ocasiones, como sucede en la cuarta sesión, dicta las respuestas a su compañero.

En el cuarto equipo se presentan actitudes de colaboración esporádicas, esto se visualiza mayormente en la segunda, quinta y sexta sesión. Emanuel es quien realiza casi en la totalidad las actividades de la secuencia didáctica, además cuando se trata de socializar es quien pide pasar y mostrar su proceso con la SI-Wm.

Expectativa 5. Los estudiantes lograrán entender las consignas y planteamientos de la secuencia didáctica, pudiendo realizar las actividades para posteriormente responder claramente en las hojas de respuesta.

Lo ocurrido: Aunque las indicaciones a las actividades fueron pensadas para estudiantes de secundaria, tuvieron que ser reajustadas en varias ocasiones para que pudieran comprenderse fácilmente, no siempre los estudiantes sabían lo que el planteamiento les pedía. El principal factor asociado que pudo detectarse es que no comprendían todas las palabras utilizadas, por ejemplo: no sabían la diferencia entre segmento y recta; qué es un vértice; la diferencia entre los triángulos isósceles y escaleno; desconocían a qué refiere la longitud perimetral. Esto último, llevó al docente, en un primer momento, a dar explicaciones verbales como medida inmediata; posteriormente se reajustó el planteamiento a palabras más sencillas, además de que se colocaron recuadros con algunas explicaciones, como se comenta en la expectativa 2.

Otro factor asociado a la falta de comprensión de lo que solicitaba averiguar o realizar la actividad, es que los estudiantes no leían todo el planteamiento; solamente leían parte de las consignas que iban asociando a una acción en cada momento, pero por no tener presente la idea general del planteamiento, esto se constituyó en un obstáculo para terminar la actividad. Ligado a ello se encuentra que una vez que realizaban algún trazo esperaban la validación del docente para continuar, cuando no la tenían pasaba un breve tiempo y ellos mismos decidían intentar otro proceso o continuar con lo que estaban realizando.

Un factor más es que al adolecer de un dominio básico y técnico de GeoGebra, cada actividad implicaba para ellos aprender a usar el software a la vez que resolvían una situación donde requerían desarrollar nuevos conocimientos y ponían en uso los ya adquiridos, pero ahora en un escenario tecnológico. Esto demoró las actividades porque los estudiantes no comprendían la utilidad de cada herramienta de GeoGebra; tenían pocos elementos para explicar detalladamente su proceso de solución, que incluso es difícil de entender en varios ejercicios.

Expectativa 6. El docente propiciará un adecuado ambiente de aprendizaje guiando a los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica desde un ambiente constructivista.

Lo ocurrido: Durante las sesiones el docente observaba el trabajo de cada equipo, les sugería leer los planteamientos, cuestionaba e invitaba a que probaran sus ideas con GeoGebra para ver si eso les llevaba a la solución. Sin embargo, el docente no promovió el diálogo y debate entre los estudiantes y entre equipos.

Cuando los estudiantes terminaban una actividad o realizaban algún proceso recurrían al profesor a fin de validar sus avances; como él sugería o realizaba pequeños comentarios, ocasionó que los estudiantes asumieran que en cada actividad deberían preguntar, esto ralentizó el ritmo de trabajo.

El docente en algunos casos realizó intervenciones que reorientaban el trabajo de los estudiantes, sin que esto signifique que en ocasiones su intervención los guio (indirectamente) hacia el uso de un proceso. Esto sucedió particularmente en la sesión 10, durante la resolución del problema del calendario azteca, que involucra el trazo de las mediatrices. El profesor sugiere utilizar alguna de las rectas que han estudiado, y un par de minutos después al ver que los estudiantes no se aproximan a la solución o a alguna de las alternativas plausibles, interviene y sugiere que no tracen circunferencias porque no les son de utilidad. Intervenciones como éstas son frecuentemente observadas en el trabajo cotidiano que realizan los docentes cuando los estudiantes no llegan a lo que ellos esperan.

La tarea del docente no es una actividad sencilla o de la que pudiera haberse prescindido, por un lado, por la necesidad de tener que desarrollar el trabajo con los estudiantes teniendo que realizar organizaciones, ajustes y sugerencias, por otro lado, dados los imprevistos de la investigación se vuelve necesario que el investigador cambie de rol y sea también el docente, teniendo que desarrollar el trabajo con los estudiantes pero en un doble rol realizar un análisis objetivo de la propia práctica.

Ser investigador tiene sus propias cualidades y es una ardua tarea. Para el momento de experimentación para esta tesis, volverme investigador en ese momento se convirtió en una situación estresante y difícil de manejar, teniendo que observar el trabajo de todos los estudiantes, realizar puntualizaciones, pensar en seleccionar alumnos para las socializaciones, entre otras cosas. Esta reflexión lleva a considerar que el papel docente está lleno de tareas y retos, donde en ocasiones se olvida la reflexión de la propia práctica, por lo tanto pero debemos estar atentos a cada detalle a fin de garantizar en la mayor

medida posible el logro de los aprendizajes esperados para cada tema de la asignatura que se trabaje.

CAPÍTULO 4.

Análisis

4.1 Primeros análisis y hallazgos

En este apartado abordaremos brevemente, pero de forma general, las tres primeras situaciones de la secuencia didáctica implementada, las cuales, como comentamos anteriormente, compartieron la intención de familiarizar a los estudiantes con el entorno de GeoGebra. Se vieron con ellas en la necesidad de utilizar varias herramientas de la aplicación “Geometría”, al resolver diversas situaciones; con ello se esperaba que empezaran a adquirir los primeros esquemas de uso tanto del software como de las rectas notables. En apego a lo que Puente (2017, p.35) señala “... como vemos, si los estudiantes no poseen esquemas preexistentes sobre estos temas, es decir, nociones previas sobre triángulos, recta perpendicular, intersección, punto; será muy complicado que puedan resolver problemas que involucren tanto a la mediatriz como al circuncentro”. Lo mismo sucede al querer resolver las situaciones problema que involucran a las otras rectas notables de los triángulos.

A continuación se muestran en una tabla general (Tabla 3) las actividades desarrolladas en las tres primeras fases, posteriormente comentamos las herramientas con las que los estudiantes interactuaron durante estas situaciones, así como algunas dificultades observadas, esto nos servirá para comentar y justificar después la cuarta situación del trabajo.

Situación	MOMENTO	E. 1	E. 2	E. 3	E. 4
I	Momento 1. ¿Qué es GeoGebra?	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	Momento 2. Aplicaciones de GeoGebra.	x	x	x	x
	Momento 3. Otros componentes de la interfaz.	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	a) Barra de menú				
	b) Barra de estilo	*	✓ ✓	x	*
	c) Cajas de herramientas	✓	✓ ✓	*	*
	Momento 4. Aprendiendo a usar el pizarrón interactivo.	x	x	✓ ✓	✓ ✓
	Momento 5. Trazos y construcciones geométricas básicas	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	a) Recta, segmento, segmento de 4u, segmento de 20u.	x	✓ ✓	x	x
	b) Desplaza y describe	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	Momento 6. Trazos de polígonos				
	a) Trazar triángulo y pentágono, desplaza, anota sus medidas	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓

	b) Triángulo y lo desplazan. Pentágono regular y lo desplazan. Miden ángulos y desplazan las figuras.	x	✓ ✓	x	✓ ✓
		*	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
		x	*	*	*
	c) Activar ayuda de herramientas.	x	✓ ✓	x	x
	Momento 7. Trazo de circunferencias.				
a) Problema de cálculo de perímetro de la llanta.	x	✓ ✓	✓ ✓	x	
b) Trazar círculos de diferentes maneras: Centro-Punto, Punto-Radio, Tres puntos.	*	✓ ✓	*	*	
II	Momento 1. Los triángulos.				
	a) Triángulo de medidas específicas.	X	✓ ✓	X	X
	Momento 2. Tres triángulos de medidas específicas.	✓ ✓	✓ ✓	x	✓ ✓
Momento 3. Suma de ángulos.					
a) *Trazar tres triángulos y medir sus ángulos.	*x	✓ ✓	x	*x	
III	Momento 1. Definición de las rectas notables.				
	a) Trazar las rectas a partir de su definición.	*x	✓ ✓	*x	✓ ✓
	b) Desplazar los vértices de las rectas notables.	x	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	Momento 2. La mediatriz.				
	a) Tres mediatrices y distancia del circuncentro a los vértices.	x	✓ ✓	x	✓ ✓
	b) Centro del círculo, comprueban y animan.	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	c) En qué triángulos el circuncentro queda fuera. Comprueban	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	Momento 3. La bisectriz.				
	a) Trazar bisectriz, sus perpendiculares, desplazan el punto de intersección.	✓ ✓	✓ ✓	*	✓ ✓
	b) Intersección de las bisectrices. Desplazan el incentro.	*	✓ ✓	x	✓ ✓
	c) Círculo inscrito.	x	x	x	x
Momento 4. La mediana.					
a) Trazar mediana. Miden el área de las secciones. Desplazan el triángulo.	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	
b) Intersección de las 3 medianas. Desplazan.	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓	x	
Momento 5. La altura.					
a) Trazo de alturas	*	✓ ✓	X	✓ ✓	
Notación:					
✓ ✓ Indica que lograron realizar la actividad y respondieron la interrogante en su secuencia didáctica.					
* Indica que realizaron la actividad pero no fueron concluyentes.					
x Indica que no pudieron realizar la actividad, pero responden en la secuencia didáctica escrita, cuando ésta pide alguna respuesta.					

Tabla 3. Control de avances de la secuencia didáctica.

Recordemos que los jóvenes de la muestra no habían trabajado con GeoGebra así que era necesario destinar varias sesiones para que se familiarizaran con éste; en la tabla anterior se muestran las diferentes actividades que realizaron para ir reconociendo el software y

con ello estar en mejores posibilidades para utilizarlo frente a las situaciones problema que posteriormente se les plantearían. La aplicación “Geometría” es una de las seis aplicaciones que tiene GeoGebra en su versión 5.0; para la secuencia nos centramos en el uso de aquellas herramientas de esa aplicación que podrían ser útiles e indispensables en la solución de problemas que involucran a las rectas notables de los triángulos, no se abordan todas debido a que son un gran número y no todas son de utilidad para el tipo de problemas abordados.

Los estudiantes pudieron realizar la mayor parte de las actividades, las cuales no solo requerían aprender a utilizar el software, sino también poner en juego conocimientos que consideramos que ya habían adquirido por ser temas de primaria o de bloques anteriores al momento en que se trabajó la secuencia didáctica. Aunque no podemos descartar que para algunos estudiantes o inclusive para todos, las actividades con contenido de por medio pudieran estarse estudiando por primera vez al trabajarse con GeoGebra, ya que como observan Moreno y Rojano (1998), el conocimiento que los alumnos adquieren mediante nuevos instrumentos es un conocimiento nuevo.

Entre las herramientas que se pretendió que aprendieran a usar los estudiantes mediante las actividades planteadas se encuentran las siguientes:

- *Elige y mueve.*
- *Punto, Intersección, Medio o centro.*
- *Recta, Segmento, Segmento de longitud dada.*
- *Perpendicular, Paralela, Mediatriz, Bisectriz.*
- *Polígono, polígono regular.*
- *Circunferencia (centro, punto), Circunferencia (centro, radio), Circunferencia por tres puntos.*
- *Ángulo, Ángulo dada su amplitud, Distancia o longitud, Área.*
- *Desplaza vista gráfica, Aproximar, Alejar, Borrar.*

Adicionalmente se esperó que los estudiantes pudieran realizar acciones de arrastre y utilizar los botones de deshacer, rehacer, ocultar la vista algebraica, activar la ayuda de las herramientas.

Los estudiantes no logran utilizar todas las herramientas con la misma facilidad (Tabla 3), debido esto, entre otros factores, a que las tareas o momentos planteados no dicen explícitamente las herramientas que debe utilizarse para realizar alguna construcción, porque se espera que los estudiantes busquen y utilicen la herramienta adecuada. Sin embargo, en algunas ocasiones resuelven la tarea sin utilizar forzosamente la herramienta esperada. Además, debe tenerse en cuenta que el uso ágil de una herramienta no es inmediato, algunas de ellas requieren poner en juego más nociones que otras, por ejemplo: al trazar un segmento únicamente deben seleccionarse dos puntos, pero en cambio para trazar una bisectriz deben elegirse los tres puntos o los dos segmentos que forman el ángulo, lo cual lo hace un trazo más complejo porque pone en juego más nociones geométricas. Sin embargo, las complicaciones que se presentaron inicialmente van disminuyendo con el uso frecuente de las herramientas.

De forma general a continuación se comentan algunas complicaciones del trabajo desarrollado durante las tres primeras situaciones. Una primera complicación se encuentra en el plano emocional, ya que los estudiantes no se conocen entre ellos, no dialogan demasiado; observándose que un estudiante de la pareja es quien toma la iniciativa al usar el software en mayor medida y continúa teniendo ese protagonismo ocasionando que su compañero adopte una actitud medianamente pasiva. Otra complicación de esta índole es la inseguridad de usar el software, que se presentó mayormente en las primeras sesiones, los estudiantes adoptaban una actitud temerosa de usarlo y explorarlo.

Otra dificultad se encuentra en el uso técnico de algunas herramientas durante la resolución de problemas, esto es: al ser seleccionada una herramienta por los estudiantes, no logran realizar algún trazo o utilizarla de acuerdo a su utilidad. Entre ellas se encuentran *Segmento de longitud dada, Perpendicular, Mediatriz, Bisectriz, Ángulo, Distancia o longitud*. La principal dificultad en su uso se encuentra en comprender qué elementos deben seleccionarse para poder utilizar una herramienta o qué elementos deben trazarse previamente. Por ejemplo, para poder trazar una recta perpendicular debe tenerse previamente un punto y una recta o segmento, que servirán como referencia para trazar la perpendicular. Aunque dentro de las actividades se encuentra que los estudiantes activen la ayuda de la barra de herramientas, que muestra los elementos que necesitan para ocupar

una herramienta, los estudiantes no solían activar esa ayuda, y sus procesos transitan más en un ensayo y error para aprender a usar la herramienta.

4.2 Resolución de problemas de las rectas notables del triángulo uno

Aquí se abordará el análisis de la fase dos de la secuencia didáctica, donde se presentan las dos experimentaciones de resolución de problemas. La primera sirvió para marcar las bases de análisis de los procesos de solución de los estudiantes, pero también para realizar ajustes pertinentes y brindar más sugerencias al docente aplicador sobre su papel en el trabajo con los estudiantes. Además, esta primera experimentación permitió contrastar con la segunda, la cual es el principal objeto de análisis e interés debido a que se pretende analizar desde lo que los estudiantes han aprendido y que evocan luego de haber pasado un ciclo escolar de haber trabajado las situaciones de la secuencia didáctica.

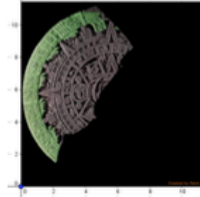
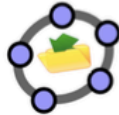
4.2.1 Análisis *a priori* uno

Para dar pauta al análisis *a priori* y con la pretensión de dar cierto orden a las ideas, en todos los casos se anticipa, aunque no se describe, que entre las estrategias posibles de solución, los alumnos por ensayo y error pretendan encontrarla. Adicionalmente se describe en primer lugar lo que llamamos soluciones “esperadas”; es decir, aquellas que implican el uso de alguna recta notable.

Los problemas fueron presentados en un contexto donde para su resolución se utilizó GeoGebra como medio y como software de apoyo. GeoGebra se convierte en el instrumento y medio de trabajo, donde las herramientas que contiene sirven para realizar trazos geométricos precisos cuando éstas se saben utilizar adecuadamente.

Partamos de la situación problema número uno que requiere la aplicación de las propiedades de la mediatriz en triángulos (Ilustración 6).

Consigna P1. En una excavación en Xochimilco donde se pretende hacer una gasolinera fue encontrada una parte de una piedra del sol, popularmente llamada Calendario Azteca, la cual presenta inscripciones alusivas a la cosmogonía mexicana y los cultos solares. Basándote en la piedra hallada, determina la longitud del radio que tuvo y anótala.



Toma como referencia el archivo "Calendario azteca", el cual es un archivo GeoGebra donde la **unidad** equivale a 10 cm del tamaño original de la piedra.

Ilustración 6. Primera situación problema.

El método de solución esperado (esperado por que utiliza el trazo de las mediatrices) usando GeoGebra (Ilustración 7) consiste en colocar tres puntos sobre el contorno circular del calendario azteca, que pueden unirse o no mediante segmentos. Posteriormente trazar las mediatrices entre los tres puntos (utilizando la herramienta *Mediatriz*, la cual necesita dos puntos como referencia o un segmento) *para* ubicar el circuncentro, que debe ser definido con la herramienta *Intersección*, seleccionando dos de las mediatrices. Finalmente, para determinar la distancia del circuncentro a cualquier punto sobre el contorno del calendario azteca (la medida del radio) debe utilizarse la herramienta *Distancia o longitud*, la cual necesita que sean seleccionados dos puntos o un segmento.

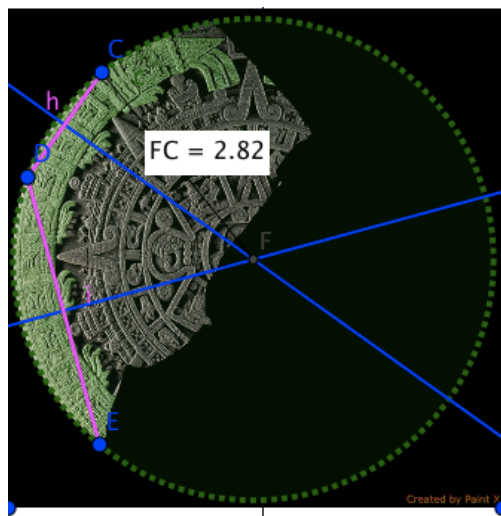


Ilustración 7. Solución esperada, problema 1.

Sin embargo, en este escenario de uso de GeoGebra pueden aparecer procesos que llevan a una solución correcta sin utilizar los conocimientos de los temas estudiados, en seguida se presentan dos posibles procesos alternativos:

- a) Para el problema de mediatriz puede utilizarse la herramienta *Circunferencia por tres puntos*. Al dar clic sobre tres lugares del contorno circular del calendario azteca, se define una circunferencia. Para determinar el centro del círculo puede utilizarse la herramienta *Medio o Centro*, dando clic sobre la circunferencia el centro se genera de forma automática, por lo que sólo faltaría medir la distancia del centro del círculo a cualquier punto de la circunferencia, para ello se utiliza la herramienta *Distancia o longitud*.
- b) Puede realizarse un método más impreciso que si bien es por ensayo y error, pone en uso conceptos matemáticos y lleva a la solución, aún sin utilizar las propiedades de la mediatriz; este consiste en utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*, colocar un punto en el lugar más aproximado al centro del calendario azteca, haciendo que se genere la circunferencia, para en seguida desplazar el puntero hacia el contorno del calendario azteca, ocasionando que la circunferencia varié de tamaño, cuando tiene el tamaño deseado basta con dar un clic para que la circunferencia quede definida en un lugar preciso. Si no queda de forma exacta, puede realizarse un arrastre a los puntos que definen la circunferencia, hasta lograr que tenga el tamaño adecuado al contorno del calendario. Una vez teniendo el centro del círculo es necesario utilizar la herramienta *Distancia o longitud* para medir la medida del radio del calendario.

Ahora retomemos la segunda situación problema que requiere el trazo y uso de las propiedades de las bisectrices en los triángulos (Ilustración 8).

Consigna P2. Se ha decidido crear una nueva planta de luz que permita generar y distribuir la energía. La planta se planea crear a un costado de la calle nueva, pero a la misma distancia de la autopista y de la calle 5 de mayo. Determina el punto donde debe colocarse la planta, para que en línea recta pueda llevarse y distribuirse la luz a ambas calles en línea perpendicular.

Ilustración 8. Segunda situación problema.

Para este problema como se proporciona una imagen dentro de GeoGebra que sirve como guía, el método de solución esperado (Ilustración 9) consiste en que los estudiantes primero tracen un triángulo considerando como sus vértices las intersecciones de las tres calles consideradas, para ello deben utilizar la herramienta *Polígono*, dando clic sobre las intersecciones de las calles. Posteriormente deben trazar la bisectriz del ángulo opuesto a la calle donde se desea colocar la planta de luz. Para ello deben elegir los 3 puntos o los dos segmentos que forman el ángulo. Deben determinar la intersección de la recta bisectriz con la calle nueva, este lugar será donde debe colocarse la planta de luz. Para comprobar a partir de este punto deben trazar perpendiculares hacia las otras calles (autopista y 5 de mayo), debe medirse la distancia (herramienta *Distancia o longitud*) entre las intersecciones, comprobando que hay la misma medida.

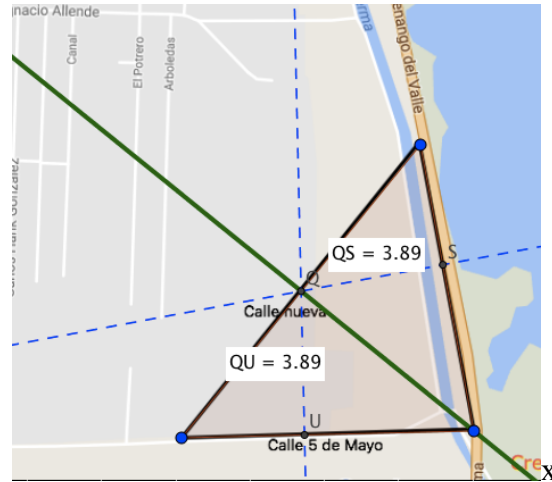


Ilustración 9. Solución esperada, problema dos.

Adicionalmente al proceso esperado, también se presentan soluciones posibles:

- a) Se puede trazar la bisectriz del ángulo opuesto a la calle nueva (Ilustración 10), determinar el punto de intersección, será este el lugar donde debe colocarse la planta de luz. Para comprobar, a partir de este punto se utiliza *Circunferencia (centro, punto)*. Al dar clic en el punto de intersección, éste será el centro de la circunferencia, el tamaño de ésta se ajusta por arrastre hasta que toca en un solo punto a la autopista y a la calle 5 de mayo. Puede medirse la distancia entre los puntos de intersección comprobando que es la misma longitud.

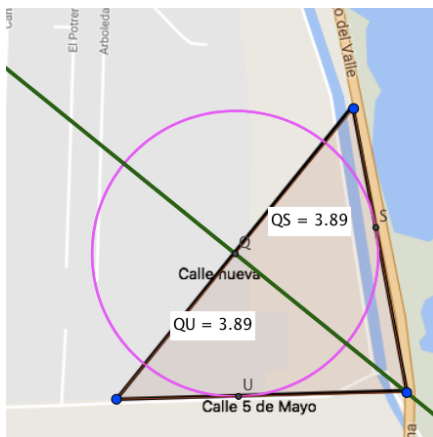


Ilustración 10. Solución alternativa, problema dos.

- b) Una segunda solución posible (Ilustración 11) pero por ensayo y error puede consistir en trazar rectas perpendiculares a la autopista y a la calle 5 de mayo, ubicar el punto de intersección de éstas y a partir de él medir la distancia hacia las intersecciones de la autopista y de la calle 5 de mayo. Como serán distancias diferentes, lo que debe hacerse es desplazar los puntos sobre las calles, generando que la distancia varíe hasta encontrar un punto donde sea la misma, pudiendo haber más de uno. Entonces el problema estará resuelto aún sin utilizar las propiedades de la bisectriz.



Ilustración 11. Solución alternativa dos, problema dos.

Por último, retomemos la tercera situación problema (Ilustración 12), que requiere el trazo y uso de las propiedades de la mediana.

Consigna P3. El señor Xavier es un herrero que se dedica a hacer péndulos de todo tipo. El arquitecto Andrés le ha encargado un pedido especial: realizar dos péndulos triangulares con una lámina de plata, que tenga de base 15 cm y de altura 12 cm, pero los péndulos deben equilibrarse, no solo colgarse de cualquier vértice. El señor Xavier ha elaborado dos diseños. Ubica el punto donde debe colocarse la cadena de la que colgará el péndulo para que se mantenga en equilibrio. Para ello modela la situación utilizando GeoGebra.

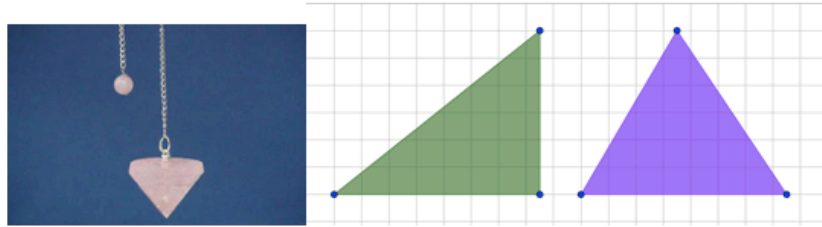


Ilustración 12. Tercera situación problema.

El método de solución esperado (Ilustración 13) parte de que los estudiantes puedan recordar que en su material se explica que el baricentro es de utilidad si se quisiera balancear una figura. Entonces utilizando GeoGebra debe ubicarse el punto medio de cada lado del triángulo, para ello se utiliza la herramienta *Medio o Centro*, siendo necesario dar clic en dos puntos o en una recta. Una vez teniendo los puntos medios se traza un segmento o recta de éstos al vértice opuesto. El punto de intersección de las medianas es el baricentro o centro de gravedad. Si quisiera comprobarse pueden trazarse los triángulos que se visualizan al aplicar las medianas, enseguida medir el área de cada uno de ellos logrando visualizar que la medida es la misma, por lo tanto, el punto de unión es el lugar que permite equilibrarlos.

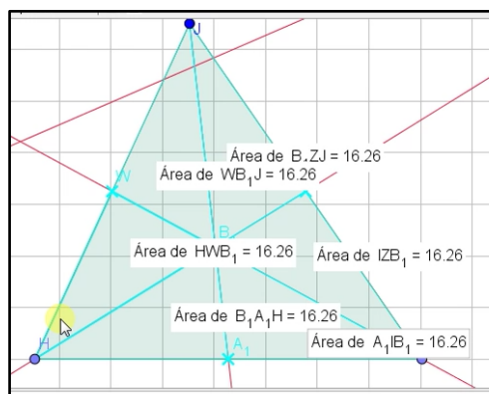


Ilustración 13. Solución esperada, problema tres.

Para este problema es difícil ubicar una solución alternativa en el escenario de uso de GeoGebra, dado que encontrar el centro de equilibrio puede realizarse mayormente por ensayo y error, pero de forma física y no digital, lo que supone una restricción del medio tecnológico.

4.2.2 Respuestas de los estudiantes a las situaciones problema 1 y análisis a posteriori

Para resolver la primera situación problema (Ilustración 6) cada equipo dispuso de un lapso de tiempo para idear y utilizar las estrategias que creyeron convenientes, todos realizaron varias en las que pusieron en juego distintas herramientas. Cabe señalar desde este primer momento que ningún equipo logra determinar una solución correcta en sus primeras estrategias, aunque el tema había sido estudiado en las sesiones anteriores. Los primeros procesos que los estudiantes utilizan resaltan más un carácter experimental por ensayo y error, ya que pretenden establecer una respuesta de forma aproximada más que utilizando el trazo de rectas notables.

Para tener mayor claridad veamos una descripción general de los procesos de solución de los problemas de cada equipo, posteriormente resaltaremos puntos generales a los procesos de cada problema.

a) Problema uno

En el equipo 1 logran distinguirse siete estrategias puestas en juego intentando resolver la situación problema antes de que se realice la socialización de la respuesta correcta. Ninguna estrategia de los estudiantes logra resolver el problema, sin embargo entre ellas se aprecian constantes procesos por ensayo y error, en los cuales no siempre se usan los conocimientos sobre los temas estudiados. Dentro de las respuestas consideradas en el análisis a priori únicamente se presenta parcialmente la segunda solución alternativa, pero los estudiantes no logran concretarla ya que se observa un intento por ensayo y error.

Durante la resolución de esta primera situación se detecta habilidad por parte de los estudiantes en el trazo de circunferencias, triángulos, colocación de puntos, sin embargo tienen dificultades en el trazo de mediatrices y bisectrices. Cabe aclarar que esas

dificultades las habían mostrado anteriormente y, en principio, pudieron superarlas desde la octava sesión. Ahora la dificultad puede deberse por el uso de una imagen que no tiene puntos definidos y cuando intentan realizar trazos estos no se ejecutan por falta de datos para utilizar el software. Sin embargo, es destacable que las estudiantes frente a las preguntas de la secuencia didáctica logran responder aún sin haber completado su propia estrategia, responden con base en lo que sus compañeros mostraron durante la socialización.

En el equipo 2 logran distinguirse siete estrategias en las que los estudiantes intentan resolver la situación problema. Durante la resolución se observa habilidad al trazar circunferencias, medir distancias, trazar segmentos, trazar polígonos. Por otro lado, se aprecia dificultad al trazar una *perpendicular*, aunque desde la octava sesión habían utilizado esta herramienta sin problema, ahora se les dificulta, hecho que nuevamente puede deberse al trabajar con una imagen en la que explícitamente no aparecen puntos definidos para poder aplicar la herramienta *perpendicular*. Análogamente muestran dificultades para trazar la bisectriz, debido a que no seleccionan tres puntos como referencia para que la herramienta *bisectriz* se ejecute.

Es destacable que el equipo logra plantear una correcta solución en su tercera estrategia, aunque ésta no es la respuesta esperada si representa la segunda solución alternativa anticipada en el análisis a priori. Trazan una *Circunferencia por tres puntos*, que coincide con tres puntos del contorno del calendario azteca, enseguida generan otra circunferencia utilizando la herramienta *Compás*. La circunferencia ya tiene el centro. Únicamente superponen y miden la longitud del radio. Después de esta solución continúan buscando otra, pero no logran formalizar otro proceso correcto.

Finalizada la socialización se observa en el rastro que queda en ¿la computadora? que los estudiantes ya no terminan de resolver el problema por sí mismos, lo que lleva a establecer que la respuesta de la medida del radio no fue producto de su trabajo, más bien la retoman de la socialización que el equipo cuatro realizó.

En el equipo 3 se distinguen cinco estrategias en las que los estudiantes intentan resolver la situación problema, mayormente son estrategias por ensayo y error que no corresponden a las comentadas en el análisis a priori. Ningún proceso de los estudiantes lleva a una

correcta solución. Muestran habilidad para trazar circunferencias, determinar el *Medio o centro* de un segmento, trazar segmentos, trazar polígonos; por otro lado, tienen dificultad para trazar la mediatriz, bisectriz o perpendicular, debido a que no tienen como referencia puntos definidos para ejecutar la herramienta correspondiente, por lo que al dar clic, no se generan los trazos que esperan. Al realizar procesos en los que se pretende trazar la mediatriz, bisectriz o perpendiculares es indicador de que los alumnos si identificaron que con una recta notable eventualmente podía resolverse el problema, pero el software como recurso condicionado para resolver la situación se evidenció como un obstáculo.

Al finalizar la socialización, aunque se dio un breve momento para que los estudiantes terminaran su actividad y respondieran, el equipo no logra concluir su trabajo, que puede deberse a la incomprensión de la estrategia de sus compañeros o al escaso tiempo del que se dispuso antes de terminar la sesión. Los estudiantes aun no habiendo planteado un proceso de solución, si anotan en su material las medidas que el equipo cuatro comentó en la socialización.

En el equipo 4 se distinguen doce estrategias en las que los estudiantes intentan resolver la situación problema. Es el único equipo que muestra la respuesta esperada y es a quien el docente elige para socializarla.

Se observa habilidad para trazar circunferencias, puntos, rectas, mediatrices y medir distancias. Por otro lado se registran dificultades al trazar una bisectriz, debido ello a que intentan hacerlo sin marcar previamente puntos de referencia para ejecutar la herramienta.

La solución a la que llegan los estudiantes es resultado de varias reconfiguraciones ya que es hasta la doceava estrategia cuando aparece la solución esperada. Las once estrategias anteriores parece que les sirvieron para descartar lo que les era útil de lo que no, ya que no eran muy elaboradas, más bien se trata de un par de trazos, mismos que cambiaban rápidamente. Entre estos procesos se presentan mayormente estrategias por ensayo y error, dentro de las cuales se presenta la segunda solución alternativa enunciada en el análisis a priori, sin embargo no logra concretarse en una respuesta correcta.

En síntesis, algunas cuestiones alusivas al proceso de solución de esta primera situación problema, se enlistan a continuación:

- Todos los equipos empiezan por intentar resolver la situación problema mediante el trazo de circunferencias, ya sea tomando centro-punto, centro-radio o utilizando circunferencia por tres puntos. Estos procesos son por aproximación por lo que no llevan a una pronta ni a una respuesta precisa.
- El equipo 1 es el único que intenta determinar directamente la medida del radio, utilizando la herramienta *Distancia o longitud*, pero al ser por aproximación se aleja de una respuesta correcta.
- Previamente a la socialización, únicamente los equipos 2 y 4 logran plantear soluciones al problema. Mientras que el equipo 4 plantea la solución esperada y la socializa, el equipo 2 plantea un proceso de solución alternativo.
- Por si solos ningún equipo logra responder correctamente al problema. Aunque obtienen la medida del radio, olvidaron realizar las conversiones que se indicaban en el planteamiento. Logran llegar a una respuesta esperada hasta luego de que el docente recalca la indicación de la consigna en una posterior sesión.
- Todos los equipos tienen dificultades al trazar una mediatriz o bisectriz, ello se debe a que intentan utilizar las herramientas y realizar los trazos sin antes tener puntos definidos que sirvan como referencia.

b) Problema dos

Retomemos ahora la segunda situación problema (Ilustración 8), en la que se pide a los estudiantes determinar el punto donde debe colocarse una nueva planta de luz, problema que fue diseñado para que movilizaran las propiedades de la bisectriz. Sin embargo, en el análisis *a posteriori* nos percatamos que el triángulo por ser isósceles admite múltiples soluciones como trazar la mediatriz, colocar un punto cercano a la calle indicada (nueva) y comprobar que se tiene la misma distancia en forma perpendicular de las calles restantes al punto indicado, proceso que también puede realizarse con el trazo de la bisectriz, y puede tener varios lugares que cumplen los requisitos enunciados en el problema.

En el equipo 1 se distinguen trece estrategias con las que los estudiantes intentan resolver la situación problema. Sin embargo, es hasta después de la socialización cuando pueden

plantear un proceso parecido al esperado que implica al uso de la bisectriz, en el que los trazos requeridos no los realizan con precisión.

Durante la resolución de esta situación problema los alumnos muestran habilidad para trazar rectas, bisectriz, colocar puntos, trazar polígonos, sin embargo aún presentan dificultades en el trazo de la perpendicular y mediatriz, ello debido a que inicialmente no marcan puntos de referencia para ejecutar la herramienta, cuando se percatan de que deben colocarlos, la dificultad desaparece.

Se observa que las estudiantes, en general, muestran cierta tenencia por utilizar el trazo de la mediatriz y la mediana como estrategias que las podían llevar a la solución del problema. No obstante, no logran acercarse significativamente a los procesos de solución esperados.

En el equipo 2 es posible distinguir ocho estrategias de solución. Es relevante destacar que el equipo logra llegar en la sexta estrategia a una solución correcta no prevista en el análisis a priori porque no se visualizó que el triángulo en cuestión era isósceles y no escaleno. La estrategia consistió en trazar las mediatrices para determinar el circuncentro, medir las distancias del incentro a los puntos de intersección de las mediatrices con los lados del triángulo y comprobar que se forman ángulos rectos. Además de esta estrategia, en la octava los estudiantes logran plantear la solución esperada, usando la bisectriz. Entonces el equipo descubre que hay varias maneras de resolver el problema.

Este equipo muestra habilidad para trazar y utilizar las herramientas *Punto medio*, *Mediana*, *Bisectriz*, *Mediatriz*, además miden ángulos y longitudes de segmentos. Ahora la única dificultad que presentan es trazar una recta perpendicular, porque no eligen los elementos correctos (un punto y una recta).

Es importante señalar que sólo este equipo comprueba que del sitio que encuentra donde puede construirse la nueva planta de luz, se tenga la misma distancia hacia las calles, midiendo la perpendicular, el resto de los equipos, aunque lo observan durante la socialización, no lo realizan y el docente no cuestiona sobre ello.

En el equipo 3 se visualizan cuatro estrategias complejas caracterizadas por un mayor uso de herramientas y procesos donde utilizan el trazo de las rectas notables. Las primeras tres estrategias de solución, aunque se acercan, en sus primeros trazos, a la respuesta esperada,

al final no logran concretarla. En su cuarta estrategia encuentran la respuesta, pero después de haber escuchado a sus compañeros en el espacio de socialización.

En los procesos que implementaron se detecta su habilidad para trazar *rectas y puntos, perpendiculares, medianas, intersección, medir segmentos*. Por otro lado tienen dificultad para trazar una mediatriz o bisectriz, debido a que no eligen dos puntos (para el caso de la mediatriz) o tres (para la bisectriz) por lo que las rectas se visualizan pero no quedan definidas en algún lugar. Entonces, aunque los estudiantes en sesiones anteriores no habían tenido dificultad en el trazo de la mediatriz o bisectriz, ahora las tienen, hecho que nos lleva a plantear que no tuvieron una apropiación consistente de los esquemas de uso de estas herramientas.

Los estudiantes en sus estrategias realizan procesos elaborados, lograban determinar un lugar donde consideraban que debía colocarse la nueva planta de luz, sin embargo, al comprobar se daban cuenta que no es el lugar correcto por no cumplir con el requisito de equidistancia entre la planta de luz y las calles. Posiblemente el equipo necesitaba mayor tiempo para llegar a plantear una solución correcta. Las estrategias de solución si bien no concuerdan con aquellas establecidas en el análisis a priori, retoman elementos que muestran que tienen la idea en mente pero se les dificulta comprender como realizar algunos trazos en el software.

En el equipo 4 aparecen cuatro estrategias, en la primera y en la cuarta, los estudiantes logran plantear procesos de solución adecuados. La primera estrategia concuerda con la solución inesperada del equipo 2. La cuarta estrategia que plantean, al acercarse al proceso de solución esperado es la que se socializa en conjunto con el equipo 2, quienes retoman el proceso para realizar la comprobación.

En los procesos empleados se detecta que este equipo hábilmente puede trazar mediatrices, medir distancias y ángulos, trazar polígonos, trazar rectas y perpendiculares, trazar bisectrices. La única dificultad que se visualiza en los procesos, es el trazo de rectas perpendiculares, que no se había presentado en sesiones anteriores, lo que lleva a considerar que posiblemente no se apropiaron de suficientes esquemas de uso de esta herramienta o posiblemente sólo fue un descuido temporal.

Para finalizar el breve análisis de esta situación problema comentemos de forma general algunas cuestiones alusivas al proceso de solución:

- Todos los equipos desde la primera estrategia comienzan colocando tres puntos sobre los vértices del triángulo, lo que facilita realizar algunos trazos. A excepción del equipo 1 que lo hace hasta la estrategia número nueve.
- Todos los equipos (menos el 4º) comienzan desde su primera estrategia a hacer algo constitutivo de sus procesos: el uso de rectas perpendiculares. Posiblemente esto se relaciona ya que el planteamiento menciona que la luz debe llevarse en línea perpendicular, lo que genera que los estudiantes dirijan su proceso a esto.
- Sólo los equipos dos y cuatro logran plantear estrategias de solución correctas previamente a la socialización, primero mediante el trazo de las mediatrices y posteriormente de las bisectrices.
- Todos los equipos a excepción del tercero, tienen dificultad en el trazo de perpendiculares, debido principalmente a intentar trazarlas y no tener puntos de referencia, o a no seleccionar correctamente un punto y una recta, elementos necesarios para que el software reconozca el comando.
- Todos los estudiantes en sus estrategias utilizan el trazo de la mediatriz como intento de llegar a la solución, hecho que nos hace ver que no logran comprender el problema y ligarlo directamente con las propiedades de una recta notable.

c) Problema tres

Por último, retomemos la tercera situación problema (Ilustración 12), en la que se plantea ubicar el punto que permita balancear los péndulos, es decir ubicar el baricentro mediante el trazo de las medianas. Cabe resaltar que para esta situación problema los estudiantes ocuparon menos tiempo para resolverlo que el que necesitaron para las otras.

El equipo 1 únicamente logra realizar dos estrategias de solución, la primera de ellas antes de la socialización, mientras que la segunda después de ésta. Es destacable que las estudiantes aún después de la socialización no logran plantear un proceso correcto de solución, más bien realizan uno de forma aproximada, ya que intentan trazar medianas,

pero lo hacen trazando rectas de un vértice a un punto y aproximado visualmente el centro del lado opuesto.

Durante los procesos logra detectarse habilidad para trazar mediatrices y ubicación de puntos, sin embargo, presentan complicaciones al intentar trazar una bisectriz; ello debido a que eligen únicamente dos puntos en lugar de tres o de elegir los dos segmentos que forman el ángulo.

En el equipo 2 se presentan únicamente dos estrategias. En la primera los estudiantes trazan una altura del triángulo, sin embargo el docente les indica que en caso de duda revisen su material, esto propicia que lo hagan y se den cuenta que en un recuadro dice que el baricentro es el punto del cuál una figura puede equilibrarse, por lo tanto para la segunda estrategia logran llegar a la solución esperada.

En esta estrategia los estudiantes utilizan sin ninguna complicación cada una de las herramientas implicadas en los trazos de la altura y las medianas, por lo que aquí se visualiza que hubo una correcta apropiación de los esquemas de uso de las herramientas *perpendicular, punto medio, recta, distancia o longitud, área*.

El equipo 3 previo a la socialización únicamente genera una estrategia de solución que, por falta de tiempo, resultó ser una aproximación a la esperada, ya que ésta se truncó al abrirse el espacio de socialización. El poco tiempo del que dispuso el Equipo 3 para resolver esta situación lo invirtieron en terminar la situación problemática anterior. Posteriormente a la socialización de la resolución de la tercera situación, los estudiantes intentan tres procesos más, siendo el tercero el que muestra la respuesta esperada.

En los procesos se observa que los estudiantes muestran habilidad en el trazo de puntos medios, en *determinar longitudes, en trazar las medianas*. Sin embargo, aún tienen dificultad para trazar *bisectrices*, ya que únicamente dan clic sobre dos puntos, siendo necesarios tres para obtener esta recta. Por lo que el uso de esta herramienta por parte de los estudiantes todavía no forma parte de sus esquemas de su uso, ya que en las tres situaciones problema intentaron trazar bisectrices, pero en ninguna lograron hacerlo con éxito.

En el equipo 4 se presentan cinco estrategias de solución, cuatro de ellas previas a la socialización. En estas estrategias se observa un predominio del trazo de *alturas* y

bisectrices, que no son de utilidad para esta situación problema. La quinta estrategia desarrollada después de la socialización corresponde a la solución esperada.

En los procesos mostrados por los estudiantes se observa su habilidad en el trazo de *segmentos, bisectrices, mediatrices, medianas, y medición de longitudes*. En la resolución de esta situación problema no se aprecian dificultades en el uso de alguna herramienta, los estudiantes realizan varias estrategias elaboradas, posiblemente requerían de mayor tiempo para que pudieran solos llegar a la solución esperada, ya que como vemos habían probado con el trazo de alturas, bisectrices y mediatrices, faltándoles solamente el de medianas.

Señalemos para finalizar algunas observaciones generales al proceso de solución de esta situación problema:

- El único equipo que logra establecer por sí sólo un proceso de solución a la situación problema es el Equipo 2. Ello se debe a que releen su material y encuentran en éste información útil para proceder.
- Todos los equipos después de la socialización logran establecer una respuesta a la situación problema, sin embargo el Equipo 1 únicamente plantea una aproximación a la solución, ya que el trazo de las medianas es de forma aproximada.
- Todos los equipos, excepto el 3, utilizan en sus procesos el trazo de la mediatriz, hecho que nos hace ver que consideran que el trazo de esta recta puede resolver más de un problema de los que fueron planteados. Al leer el problema los estudiantes aún no lo relacionan con el trazo de la recta notable que es de utilidad para resolverlo.
- Aunque no todos los equipos muestran tener la misma habilidad en el uso de las herramientas, se nota un adecuado uso y sin dificultad de: *Punto medio, Distancia o longitud, Mediatriz*.

4.2.3 Segunda experimentación sobre la resolución de problemas

Para esta fase de la secuencia didáctica se diseñaron en total tres problemas nuevos: dos de ellos de contexto real simulado, uno en el que su solución implica el trazo de mediatrices, y otro de bisectrices. El otro problema implica el trazo de medianas para poder determinar la solución.

El contexto de aplicación de la secuencia didáctica fue el mismo, la única variante destacable es que ahora los estudiantes se encontraban en segundo grado, y durante aproximadamente un año no tuvieron contacto con el uso de GeoGebra ya que no es un software que los profesores de esta institución utilicen en sus tareas de enseñanza. Además dos de las parejas de trabajo fueron reorganizadas debido a problemas de relaciones amistosas que se presentaron entre ellos en el transcurso del ciclo escolar anterior. Las parejas de trabajo ahora fueron Niki y Fabiola, Ángel y Laura, las otras parejas de José Emanuel y José Carlos, y Emanuel y Yosmar, quedaron sin cambios.

Para comenzar esta fase de resolución de problemas, una vez conformados los estudiantes en parejas de trabajo, se les proporcionó la hoja del Problema 1 y una computadora por parejas, en ésta se encontraba abierto un archivo GeoGebra, donde la imagen del problema estaba insertada. Los estudiantes únicamente recibieron la indicación de leer el problema y los cuestionamientos, para después resolverlo y dar respuesta. Se les recordó que para finalizar el trabajo un equipo compartiría y explicaría la respuesta del problema que estuvieran resolviendo.

Con esta segunda experimentación se pretende tener mayor claridad respecto al aprendizaje que los estudiantes adquirieron un año atrás cuando trabajaron con problemas que implican el uso de las rectas notables. El aprendizaje que pretendemos mostrar es desde dos planos. El primero de ellos respecto a los conocimientos sobre el tema, es decir, las estrategias que ponen en juego para resolver el problema, así como los conocimientos que evocan. El segundo sobre el uso y apropiación de los esquemas de uso de algunas herramientas del software.

4.2.4 Análisis a priori dos

Para adentrarnos en el foco de nuestro interés comencemos por mostrar los procesos esperados a cada problema que enfrentaron los estudiantes. Al hablar de procesos esperados nos referimos a aquellos procesos de solución en los que se utiliza una de las rectas notables del triángulo, donde su trazo y el conocimiento de sus propiedades lleva a la solución. Cada problema también tiene procesos de solución alternativos, que aunque en este apartado no se enuncian pueden estar presentes al igual que en la resolución de problemas uno.

a) Problema 1

Para el problema 1 (Ilustración 14) se requiere determinar el puesto de vigilancia mediante la obtención del circuncentro a partir de tres puntos que representan los embarcaderos.

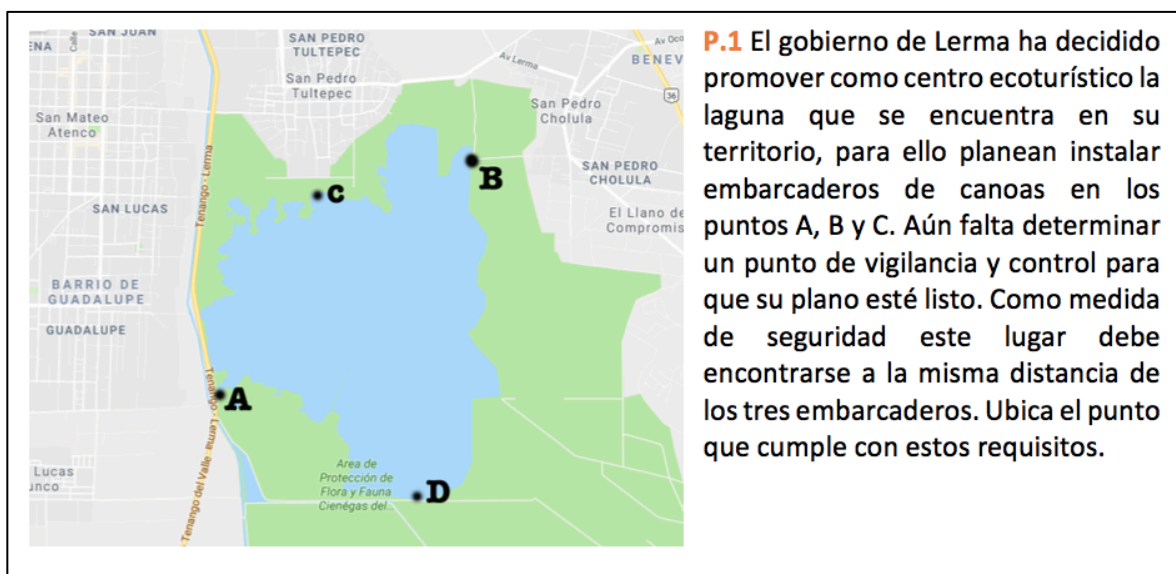


Ilustración 14. Segundo problema de aplicación de mediatriz.

En este problema se espera que:

Los estudiantes utilizan el trazo de las mediatrices para resolver el problema. Para ello es necesario trazar las mediatrices entre \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} , utilizando la herramienta *Mediatriz*, después determinar la *Intersección* entre ellas, dando lugar así al circuncentro, que es el punto que representa el lugar a partir del cual hay la misma distancia hacia los puntos A,

B y C. Debemos tener en cuenta que este punto puede obtenerse mediante el trazo de dos o tres mediatrices entre los pares de puntos mencionados.

Para trazar las mediatrices pueden utilizarse varias maneras, siendo la más sencilla y por lo tanto la definimos como la respuesta esperada:

- a) Utilizar la herramienta *mediatriz* y dar clic en dos puntos o en el segmento.
- b) Ubicar el punto medio entre dos puntos y a partir de este trazar una recta perpendicular.
- c) Trazar el triángulo que se forma por los tres puntos y a partir de ahí trazar la mediatriz con los procesos anteriores.

Sin embargo la obtención del circuncentro que es el punto que cumple los requisitos del problema, también puede obtenerse con un proceso alternativo, esto es mediante el trazo de una *Circunferencia por tres puntos* (A, B, C), y con la herramienta *Centro*, determinar el centro de la circunferencia, que cumple el requisito del circuncentro.

Una vez que los estudiantes determinen el circuncentro, se espera que utilizando la herramienta *Distancia o longitud* puedan comprobar que la distancia es la misma del circuncentro a los puntos A, B y C. Y por último que utilizando la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* o *Circunferencia por tres puntos* tracen la circunferencia que pasa por A, B y C.

En lo que respecta a la solución de este problema las herramientas que se espera que los estudiantes utilicen son: *Mediatriz, Punto, Intersección, Distancia o Longitud, Circunferencia (centro, punto)*. Pero ya que se consideran procesos alternativos los estudiantes también pudieran adicionalmente ocupar las herramientas *Segmento, Punto medio, Perpendicular, Triángulo, Circunferencia por tres puntos, Centro*.

b) Problema 2

Para el problema 2 (Ilustración 15) se requiere determinar la medida máxima de un tinaco que será construido dentro de una sección triangular, se requiere el trazo de las bisectrices.



Ilustración 15. Segundo problema de aplicación de bisectriz.

Para ello se espera que los estudiantes:

Determinen la circunferencia inscrita a la sección A para después medir la longitud del radio del círculo. Para lograrlo se espera que coloquen tres puntos, uno sobre cada vértice de la sección A. Después tracen las tres bisectrices de los ángulos y determinen su intersección, eligiendo la herramienta *Bisectriz* y dar clic sobre los tres puntos o los dos segmentos que forman cada ángulo. Posteriormente deben determinar la *Intersección* de las tres bisectrices para localizar el incentro. A partir del incentro deben trazar una *Perpendicular* a cualquier lado de la sección triangular y determinar la intersección.

Para resolver el problema deben elegir la herramienta *Distancia o longitud* de este punto de intersección al incentro. Para comprobar que su respuesta es correcta pueden trazar una *Circunferencia* (centro, punto), considerando el punto de intersección y el incentro. La circunferencia que obtienen queda inscrita en la sección triangular y es tangente a cada lado de ésta.

Con base en el proceso de solución esperado, entre las herramientas que los estudiantes pueden utilizar se encuentran: *Punto, Bisectriz, Intersección, Perpendicular, Distancia o longitud, Circunferencia (centro, punto)*.

a) Problema 3

Para el problema tres (Ilustración 16) se requiere determinar el centro de gravedad de un cuadrilátero, para ello es necesario el trazo de las medianas.

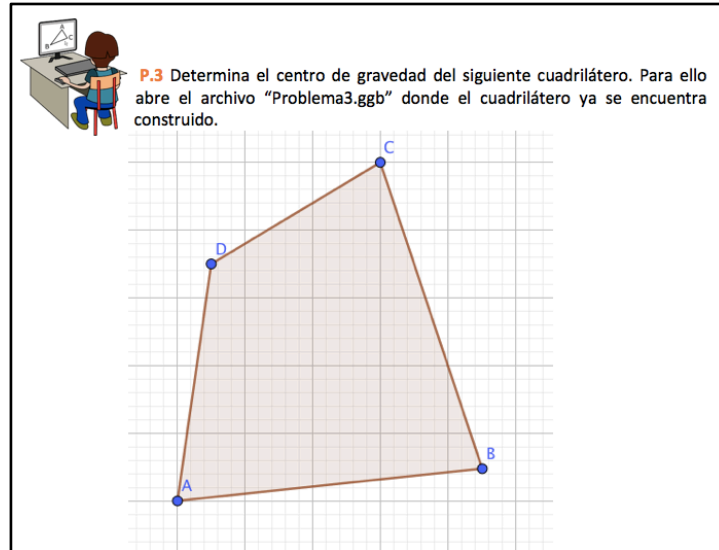


Ilustración 16. Segundo problema de aplicación de mediana.

Se espera que los estudiantes:

Visualicen o dividan el cuadrilátero en dos secciones triangulares. En cada una de ellas que tracen las medianas de cada uno de los triángulos, una vez determinados los dos baricentros, el punto medio entre éstos representa el centro de gravedad del cuadrilátero.

Para encontrar las medianas de cada triángulo, los estudiantes pueden trazarlas usando el *Punto medio* de cada lado y a partir de ellos trazar tres perpendiculares a los lados, que representan a las medianas de cada sección triangular. En la *Intersección* de las medianas se encuentra el baricentro. Después utilizando la herramienta de *Punto medio*, dar clic en ambos baricentros y encontrar el baricentro del cuadrilátero. En caso de querer comprobar que los trazos de las medianas son correctos, pueden marcar algunas de las secciones triangulares y medir el área de éstas, comprobando que el área es la misma.

De acuerdo al proceso de solución esperado, entre las herramientas que pueden ocupar los estudiantes se encuentran: *Punto medio*, *Recta*, *Intersección*, *Segmento*, *Área*.

4.2.5 Respuestas de los estudiantes ante las situaciones problema de la segunda experiencia

En las tablas que aparecen en este apartado se muestra de forma sintética las estrategias que los estudiantes pusieron en juego antes de resolver la situación problema, así como las herramientas que lograron utilizar durante la resolución. Se enumera cada intento de proceso de solución que los estudiantes realizaron frente a cada problema.

La distinción entre en proceso o estrategia de solución y otra se distingue principalmente en el momento en que los estudiantes deshacen sus trazos, esto marcando el inicio de un nuevo proceso. Los procesos de solución pueden ser sencillos donde los estudiantes realizan pocas acciones utilizando algunas herramientas, pero en otros casos son más elaborados, realizando varios trazos en el intento de resolver el problema.

PROBLEMA 1. EL LAGO			
Equipo	Procesos	Herramientas que usan	Dificultades en el uso del software:
1 Niki y Fabiola	<ol style="list-style-type: none"> 1. Intentan medir la distancia directamente, pero no se genera la medida. (P1) 2. Colocan el punto C. Intentan medir la longitud entre los puntos BC, pero no se genera la distancia. (P2) 3. Colocan los puntos ABCD, miden la distancia entre todos ellos. 4. A partir de los puntos C, B, generan un polígono regular de 5 lados. (P3) <p>Intentan trazar la mediatriz, luego un polígono, al no tener puntos no se genera ningún trazo.</p> <ol style="list-style-type: none"> 5. Utilizan Medio o centro, pero no generan ningún trazo. (P4), posteriormente intentan trazar una mediatriz sin resultado alguno. (P5) 6. Intentan trazar la mediatriz, colocan los puntos ABCD. A partir del punto A, generan una mediatriz. Trazan el punto medio entre AB. Colocan un punto aproximado al centro de la laguna. (P6) 7. Generan una mediatriz a partir del punto A, pretendiendo que pase por C. 	<ul style="list-style-type: none"> • Punto. • Distancia*. • Deshacer. • Polígono regular. • Mediatriz*. • Medio o centro. 	<ul style="list-style-type: none"> • Tienen dificultad al realizar trazos, entre ellos el trazo de mediatrices, circunferencia por tres puntos, debido a que no tienen puntos de referencia, por lo tanto no se genera ningún trazo. • Intentan medir distancias, pero no las obtienen porque no tienen puntos de referencia. • Al trazar una mediatriz, seleccionan un punto y desplazan el puntero pretendiendo que la recta quede en un lugar específico

	8. Después de la socialización: Trazan algunas mediatrices pero no terminan el problema.		
2 JE y JC	<p>1. Trazan segmentos que unen los puntos AB y CD, miden los segmentos.</p> <p>2. Trazan el segmento BD y su mediatriz. Determinan la intersección y trazan segmentos hacia los puntos C y A, miden las longitudes de todos los segmentos. (P1)</p> <p>3. Trazan el segmento AB. Trazan una Circunferencia por tres puntos considerando ABC. (P2) Generan otra circunferencia con la herramienta compás.</p> <p>4. Trazan una circunferencia que pasa por los puntos B y C. Trazan la circunferencia que pasa por ABC. Trazan dos segmentos que asemejan diámetros, y un radio. (P3) Miden las longitudes del punto central a los puntos ABC. (P4)</p> <p>5. Determinan el punto medio entre los puntos AB, BC, AC, CD. Repiten el proceso anterior.</p> <p>6. Trazan una circunferencia por ABC. Trazan rectas desde ABC hacia el punto D. Trazan mediatrices entre BC y BD. (P5)</p> <p>7. Trazan las mediatrices entre AD, CB, CD, BA. Obtienen todas las intersecciones que se forman. (P6) Trazan segmentos de un punto (H) hacia los puntos ABC. Miden las longitudes de estos segmentos. Miden las longitudes desde otro punto de intersección.</p> <p>8. Realizan la socialización de su proceso ya que resolvieron adecuadamente la situación problema.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Punto. • Segmento. • Distancia o longitud. • Mediatriz. • Intersección. • Circunferencia con tres puntos. • Compás. • Medio o centro. • Recta. 	<ul style="list-style-type: none"> • Inexactitud al querer trazar diámetros.
3 Ángel y Laura	<p>1. Trazan rectas de C y A hacia un punto aproximado al centro de la laguna. Miden la longitud del punto de intersección hacia los puntos ABCD.</p> <p>2. Obtienen el punto medio de CD. Trazan rectas de A y D a este punto</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Punto. • Circunferencia por tres puntos. • Recta. • Distancia o longitud. 	<ul style="list-style-type: none"> • Intentan trazar una mediatriz y una circunferencia por tres puntos, pero se les dificulta debido a que no tienen puntos de referencia.

	<p>medio. Miden la distancia de A y D al punto medio. (P1)</p> <p>3. Colocan los puntos ACD y con segmentos los unen para formar un triángulo y medir la longitud de sus lados. (P2)</p> <p>Trazan el polígono ADC, miden la longitud de 2 de sus lados.</p> <p>4. Intentan trazar perpendiculares entre los puntos ADC. Miden algunas distancias.(P3)</p> <p>5. Trazan una circunferencia por tres puntos y Circunferencia (centro, punto), pretendiendo que ésta pase por ABC. (P4)</p> <p>6. Colocan los puntos ACD y un punto aproximadamente al centro de la laguna. Intentan trazar mediatrices. A partir de C y D trazan un polígono de 3 lados. Miden sus lados. Ubican un punto cercano al centro y entre éste y el punto A trazan una mediatriz. (P5)</p> <p>7. Colocan los puntos ACD. Trazan la mediatriz entre CD. Trazan una recta entre el punto central y C. Trazan una recta entre AD. (P6)</p> <p>8. Después de la socialización realizan este proceso: Colocan los puntos ACD, trazan las mediatrices, el circuncentro, y miden la distancia de éste a los puntos ACD. Trazan una Circunferencia por tres puntos que pasa por ACD.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Intersección. • Medio o centro. • Deshacer. • Segmento. • Polígono. • Perpendicular. • Circunferencia (centro, punto). • Mediatriz**. 	<ul style="list-style-type: none"> • Intentan trazar perpendiculares pero no seleccionan un punto y una recta como referencia, más bien dan clic varias veces en el mismo punto.
4 Yosmar	<p>1. Colocan los 4 puntos que representan los embarcaderos. Trazan una recta entre C y D. P1-P6</p> <p>* El resto del video se perdió.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Punto. • Recta. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al presentar un comportamiento tímido utiliza el software con desconfianza, por lo que no realiza muchos trazos o intentos de resolver el problema.
<p>Nota: en la segunda columna se señala con P1, P2, P3,... las intervenciones puntuales que hizo el docente.</p>			

Tabla 4. Segundo problema de aplicación de mediatriz.

Una vez que se visualizaron los procesos que los estudiantes emplearon en la búsqueda de solución a la situación problema uno (Tabla 4), se hacen a continuación comentarios

generales respecto al trabajo desarrollado por los equipos durante la resolución de la primera situación problema:

- Ningún equipo hace uso inmediato de las nociones de mediatriz u alguna otra recta notable de los triángulos al intentar resolver el problema.
- El Equipo 4 es el primero que usa el trazo de mediatrices en el intento de solución del problema, pero lo abandonan rápidamente y comienzan el trazo de circunferencias y diámetros.
- Únicamente los Equipos 2 y 3 logran culminar todo el proceso de solución del problema. El Equipo 3 lo termina después de la socialización del Equipo 2.
- Los estudiantes no logran establecer por sí mismos que trazar las mediatrices permite resolver el problema. Ellos comienzan la mayoría de las veces con procesos basados en la percepción visual, como lo es querer determinar el lugar del puesto de vigilancia y control colocando a “ojo” un punto o trazando rectas que no los lleva a una solución geométrica correcta.
- El docente, con su intervención, propicia que los estudiantes se aproximen a un proceso de solución donde se utilicen las rectas notables del triángulo. Las puntualizaciones que realiza les proporciona después de que los alumnos intentaran resolver el problema y él se percatara que esos intentos no los iban a llevar a una solución. Estos apoyos o puntualizaciones se presentaron en apego al siguiente orden:
 1. Pregunta a los equipos el proceso que están usando y cuestiona sobre los temas que anteriormente habían trabajado, cuando usaron el software. Les recuerda que analizaron en aquella ocasión, las propiedades de las rectas notables: mediatrices, bisectrices, alturas y medianas de triángulos.
 2. Después, el docente proporciona a los estudiantes la secuencia didáctica con la que trabajaron el año anterior a fin de que la revisaran y con ello propiciar que recuperaran saberes; no todos los equipos realizan una revisión profunda.
 3. Pide que vayan a la página 13, donde el equipo dos señala haber encontrado información útil para resolver el problema. Los estudiantes revisan pero no hacen una revisión a fondo.

4. El docente pide ubicar la página 13 y pregunta ¿qué tema se estaba trabajando?, luego de que los estudiantes responden que la mediatriz, entonces sugiere realizar el trazo de mediatrices como proceso de solución.
5. El docente al ver que no realizan el trazo se da cuenta que no recuerdan como realizarlo, precisa que revisen en sus hojas las definiciones.
6. El docente muestra a todos el trabajo que el Equipo 2 ha realizado, y pide a los integrantes de éste que expliquen cómo han llegado a la solución.

Es relevante comentar que las intervenciones docentes, tanto para este problema como para los subsecuentes, no estuvieron pensadas para dirigir forzosamente a los estudiantes a realizar un proceso determinado. Más bien, las sugerencias tienen como finalidad observar cómo los estudiantes recuperan, a través de la revisión de documentos, las nociones sobre las rectas notables de los triángulos, pero en ningún momento el profesor indicó a los estudiantes cómo realizar algún trazo. Si bien se visualiza un proceso de direccionalidad mediante las sugerencias, se mantiene que sea el estudiante quien ponga en juego sus posibilidades de uso del software al realizar los trazos necesarios que le permitan obtener la solución del problema.

PROBLEMA 2. EL TINACO			
Equipo	Procesos	Herramientas que usan	Dificultades en el uso del software:
1 Niki y Fabiola	<ol style="list-style-type: none"> 1. Traza rectas, un triángulo. (P1, P2) 2. Intenta trazar una mediatriz, pero tiene dificultades.(P3) 3. Traza una bisectriz, pero no culmina el proceso. (P4) *Se perdió una parte del video.	<ul style="list-style-type: none"> • Polígono. • Recta. • Perpendicular. • Mediatriz. • Bisectriz. 	<ul style="list-style-type: none"> • Muestra un desconocimiento del uso del software, por ello no realiza procesos elaborados y no usa variadas herramientas.
2 JE y JC	<ol style="list-style-type: none"> 1. Realizan varios trazos: Circunferencia (centro, punto), Circunferencia por 3 puntos, Circunferencia de radio 3u, Arco entre dos puntos, Sector circular, Arco por tres puntos, Arco de Circunferencia, Arco. (P1) 2. Trazan varias mediatrices, ubican el circuncentro, a partir de él trazan 	<ul style="list-style-type: none"> • Circunferencia (centro, radio). • Circunferencia (centro, punto). • Circunferencia por tres puntos. • Sector circular. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al trazar perpendiculares no seleccionan un punto y un segmento, por lo tanto la recta sale en un lugar indeseado,

	<p>un Sector circular. (P2-P3) Trazan Circunferencia por tres puntos, Arco por tres puntos, Sector tres puntos, Circunferencia (centro, punto).(P4-P5)</p> <p>3. Obtienen puntos medios entre los puntos que delimitan la sección A. Trazan algunas mediatrices, obtienen el punto de intersección y trazan una Circunferencia (centro, punto). (P6) Intentan trazar una elipse. Trazan con Compás una circunferencia, trazan un sector circular.</p> <p>4. Trazan dos bisectrices, obtienen la Intersección. (P7) Trazan una perpendicular a partir de este punto, intentan trazar: una Circunferencia por tres puntos, un arco, sector circular. (P8)</p> <p>5. Después de la explicación docente: Trazan las bisectrices, obtienen el punto de Intersección. Trazan una perpendicular a un lado de la sección A, a partir del punto de intersección trazan una circunferencia hacia el incentro.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Arco por tres puntos. • Arco de Circunferencia. • Arco. • Mediatriz. • Intersección. • Deshacer. • Medio o centro. • Intersección. • Elipse. • Bisectriz. • Perpendicular 	<p>posteriormente mejoran su proceso.</p>
<p>3 Ángel y Laura</p>	<p>1. Trazan circunferencias con Circunferencia (centro, radio), Circunferencia (centro punto), Circunferencia por tres puntos. Trazan una elipse. (P1)</p> <p>2. Trazan Circunferencias de distinta medida de radio. (P2)</p> <p>3. Trazan una Circunferencia por tres puntos, Elipse, Arco, Tangente. (P3)</p> <p>4. Trazan dos bisectrices pero no quedan sobre el lugar esperado.</p> <p>5. Trazan de forma aproximada las mediatrices, obtienen la intersección y trazan una Circunferencia (centro, punto) mayor a la sección triangular.(P.4)</p> <p>6. Trazan mediatrices y obtienen el circuncentro de forma aproximada. (P5)</p> <p>Trazan una Circunferencia (centro, punto) que queda de un tamaño</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Circunferencia (centro, radio). • Circunferencia (centro, punto). • Circunferencia por tres puntos. • Elipse. • Compás. • Deshacer. • Bisectriz**. • Arco. • Tangente. • Mediatriz. • Polígono. • Intersección. • Perpendicular. • Distancia o longitud 	<ul style="list-style-type: none"> • Al intentar trazar las bisectrices seleccionan tres puntos, pero no conservan un orden, por lo que trazan bisectrices repetidas. • Al trazar la segunda y tercera mediatriz de un triángulo tienen complicaciones, ya que al no llevar un orden de los puntos seleccionados la misma recta parece una y otra vez.

	<p>aproximado dentro de la sección triangular. (P6)</p> <p>7. Trazan una Circunferencia (centro, punto) sobre la sección triangular. (P7-P8)</p> <p>8. Trazan el triángulo de la sección A, trazan un arco, trazan las tres mediatrices.</p> <p>9. Después de la explicación del docente: Trazan con dificultad las tres bisectrices, determinan el incentro, (42:30). Trazan una perpendicular, determinan su intersección, al trazar la circunferencia inscrita lo hacen de forma errónea. Después corrigen y trazan la circunferencia inscrita. Miden la longitud del radio del círculo.</p>		
<p>4 Emanuel y Yosmar</p>	<p>1. Trazan sobre la sección A circunferencias de distinto radio: 11, 52, 52, 51, 48, 46u. (P1)</p> <p>2. Trazan circunferencias con Circunferencia (centro, punto), pero quedan de un tamaño mayor del deseado. Trazan una circunferencia de radio 46. Trazan una bisectriz. (P2)</p> <p>3. Intentan trazar una Circunferencia (centro, punto) Trazan bisectrices pero no en el lugar deseado. (P3)</p> <p>4. Intentan trazar mediatrices, al no dar clic sobre otro punto, la recta no se define. (P4)</p> <p>5. Trazan una bisectriz con dificultad.</p> <p>6. Trazan el triángulo de la sección triangular A. Trazan una Circunferencia (centro, punto), arrastran un punto para ajustarla de tamaño. (p.5)</p> <p>7. Trazan las tres bisectrices. Obtienen el incentro y trazan una Circunferencia (centro, punto) de forma aproximada dentro de la sección A.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Circunferencia (centro, radio). • Circunferencia (centro, punto). • Bisectriz **. • Mediatriz*. • Deshacer. • Arrastre. • Perpendicular. • Intersección. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al intentar trazar las bisectrices seleccionan tres puntos, pero no conservan un orden, más bien lo hacen indistintamente, por lo que al querer trazar las tres bisectrices tienen complicaciones. • Al trazar una mediatriz únicamente dan clic en un punto y desplazan el puntero sin dar clic el otro punto, por lo tanto la recta no queda en un lugar fijo. • Intentan trazar perpendiculares pero no

	<p>8. Trazan perpendiculares sin un criterio. (P6-P8)</p> <p>9. Después de la explicación docente: Trazan las tres bisectrices e intentan trazar la recta perpendicular, pero ya no culminan su proceso.</p>		<p>seleccionan un punto y una recta como referencia, sólo dan clic aunque no se tengan puntos definidos.</p>
<p>Nota: en la segunda columna se señala con P1, P2, P3,... las intervenciones puntuales que hizo el docente.</p>			

Tabla 5. Segundo problema de aplicación de bisectriz.

Considerando el proceso de resolución de la segunda situación problema (Tabla 5) destacamos a continuación algunas ideas generales:

- Todos los equipos comienzan con un proceso en el cual trazan circunferencias inscritas a la sección triangular A, con base en su percepción geométrica.
- Ningún equipo por sí sólo logra plantear una solución correcta o determina que el trazo de las bisectrices es útil para resolver la situación problema. Es gracias a las precisiones que el docente realiza que los estudiantes se acercan a un proceso de solución.
- Posterior a la socialización únicamente los Equipos 2 y 3 logran establecer la respuesta a la situación problema.
- Después de las precisiones del docente los equipos logran trazar las bisectrices, pero no logran llegar a un proceso completo de solución antes de la socialización.
- Ya que la situación problema rebasa los conocimientos de los estudiantes, es el mismo docente quien termina explicando la manera de resolverla.
- Las puntualizaciones que hace el docente a fin de que los estudiantes se acerquen a un proceso de solución, al igual que en el problema anterior, aparecen cuando el maestro lo considera pertinente al ver que los intentos de los alumnos no se acercan a un proceso de solución eficiente.
 1. El docente primero pregunta a los estudiantes con qué rectas habían trabajado anteriormente, ellos comentan las rectas notables de los triángulos.
 2. Les entrega su material (la secuencia didáctica) para que revisen si algo de lo que habían trabajado les es de utilidad.

3. El docente comenta y pregunta a cada equipo los procesos que están usando para resolver el problema. Esto a fin de que otros equipos complementen su proceso o retomen ideas.
4. El docente pide que busquen en sus hojas si hay un ejercicio que les sea de utilidad o que sea parecido a lo que están resolviendo. Los estudiantes comentaron haber encontrado algunos problemas parecidos.
5. El docente señala que en la página 15 de su secuencia se encuentra un ejercicio similar al ahora resuelto. Les pide a los estudiantes leer y ver qué de esa información les es útil. Se tienen dificultades ya que cuando ellos explicaron su proceso en aquel ejercicio lo hicieron muy general, o describieron muy poco.
6. El docente al ver que los estudiantes no encuentran útil la información, pregunta a los equipos qué trazo están intentando. Sugiere que todos intenten un proceso mediante el trazo de bisectrices.
7. El docente se da cuenta que un integrante del Equipo 2 tiene una explicación más completa del proceso de solución del ejercicio que aparece en la página 15, le pide leerlo a sus compañeros para que retomen ideas.
8. El docente pide a todos los equipos trazar las bisectrices de los ángulos de la sección triangular A, pide al Equipo 2 volver a leer el proceso de su ejercicio de la página 15.

PROBLEMA 3. EL CENTRO DE GRAVEDAD			
Equipo	Procesos	Herramientas que usan	Dificultades en el uso del software:
2 JE y JC	<ol style="list-style-type: none"> 1. Obtienen el Punto medio entre los vértices B y D, deshacen. (P1) 2. Trazan bisectrices, obtienen su intersección. A partir de este punto miden la distancia a cada vértice. 3. Trazan algunas mediatrices, obtienen el punto de Intersección. Miden la distancia de este punto a los vértices Miden el área del cuadrilátero. (P2) 4. Trazan secciones triangulares e intentan medir el área de las secciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Punto medio. • Bisectriz. • Intersección. • Distancia o longitud. • Mediatriz. • Intersección. • Deshacer. • Polígono. • Recta. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al medir el área se presentaron problemas técnicos, pero luego de la explicación del docente logran medirla sin dificultad.

	<p>5. Trazan un polígono triangular que divide al cuadrilátero en dos partes. Trazan dos bisectrices.</p> <p>6. Trazan un Polígono regular de 4 lados. Trazan una bisectriz. Unen con rectas los vértices opuestos del cuadrilátero. (P3)</p> <p>7. Trazan varios puntos medios. Trazan la bisectriz del vértice D. Trazan la bisectriz del vértice B.</p> <p>8. Trazan rectas que unen los vértices opuestos. Trazan los puntos medios entre BD y AC. Entre ellas trazan un punto medio (G). Trazan rectas de los vértices A y B hacia el punto G. Trazan las secciones triangulares. (P4)</p> <p>9. Trazan el punto medio de cada lado del cuadrilátero, unen con rectas los puntos medio opuestos, determinan su intersección K. Trazan polígonos en forma de triángulo. (P5)</p> <p>10. Determinan el punto medio de cada lado del cuadrilátero, comienzan a unir con rectas un vértice con el punto medio del lado opuesto.</p> <p>11. Trazan un segmento entre BD. Trazan una mediana en cada sección triangular que se visualiza.</p> <p>12. Trazan una recta entre AC y trazan dos medianas de una sección triangular. (P6)</p> <p>13. Socializan su proceso ya que resolvieron la situación problema: Trazan una recta entre BD. De cada sección trazan las medianas, determinan el baricentro. Trazan un segmento entre los baricentros y obtienen el punto medio.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 	
<p>3</p> <p>Ángel y Laura</p>	<p>1. Intentan trazar bisectrices. Trazan puntos medios de algunos lados, luego el Punto medio del cuadrilátero. (P1) Trazan bisectrices pretendiendo que pasen por ese punto.</p> <p>2. Trazan una mediatriz y a partir de ésta una perpendicular. Trazan una bisectriz. A partir del punto de intersección miden la distancia a cada vértice del cuadrilátero. (P2)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Bisectriz. • Punto medio. • Deshacer. • Mediatriz. • Perpendicular. • Intersección. • Distancia o longitud. • Segmento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al intentar trazar bisectrices siguen teniendo dificultad, debido a que seleccionan en repetidas

	<p>3. Unen con segmentos los vértices opuestos.</p> <p>4. Colocan un punto en un lugar aproximado al centro de la figura. Trazan polígonos triangulares. (P3)</p> <p>5. Obtienen los puntos medios de dos lados opuestos, los unen con una recta. Trazan una recta que cruza por esta misma. (P4-P5)</p> <p>6. Trazan secciones triangulares sobre el cuadrilátero (46:00). Trazan rectas sin un criterio específico y obtienen su intersección. (P6)</p> <p>7. Después de la socialización: Trazan las medianas de las secciones triangulares. Trazan una recta que une los baricentros. Trazan la intersección.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Punto. • Recta. • Polígono. 	<p>ocasiones los mismos puntos, por lo que la bisectriz se repite.</p>
4 Emanuel y Yosmar	<p>1. Trazan una mediatriz a un lado del cuadrilátero. (P1)</p> <p>2. Trazan algunas bisectrices. Tienen dificultades al trazar una mediatriz. (P2) Determinan un punto de intersección entre la mediatrices y bisectrices. Miden el perímetro del cuadrilátero. (P3) Trazan algunas secciones triangulares o cuadrangulares e intentan medir el área.(P4-P5)</p> <p>3. Trazan algunas mediatrices y miden el área del cuadrilátero. (P6)</p> <p>4. Después de la socialización ya no culminan su proceso.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Mediatriz. • Bisectriz. • Deshacer. • Punto en objeto. • Distancia o longitud. • Polígono. 	<ul style="list-style-type: none"> • Al trazar una mediatriz únicamente dan clic en un punto y desplazan el puntero, la recta no queda en un lugar estático. • Al medir el área se presentaron problemas técnicos, pero aunque el docente les explica como realizarlo, ellos no logran medir el área.
<p>Nota: en la segunda columna se señala con P1, P2, P3,... las intervenciones puntuales que hizo el docente.</p>			

Tabla 6. Segundo problema de aplicación de mediana.

Considerando el tercer y último problema (Tabla 6) a continuación se comentan algunas situaciones generales que se presentaron a lo largo de la resolución de esta tercera situación problema:

- Los estudiantes comienzan retomando las nociones de las rectas notables, sin embargo tienen complicaciones en los trazos y en elegir la recta notable que es de utilidad para resolver el problema.
- Cuando el docente ofrece como apoyo al trabajo la secuencia didáctica anterior, ningún equipo la revisa a profundidad a fin de encontrar información útil para el problema que están resolviendo. Más bien, insisten en ejecutar el proceso que estaban realizando.
- Se observa que los estudiantes ponen en juego trazos de rectas que usaron recientemente, como es el caso de la mediatriz y bisectriz, sin embargo no recuerdan como realizar todos los trazos, entre ellos el de las medianas y alturas.
- Posterior a la socialización, únicamente el Equipo 4 logra completar la solución del problema.
- El docente tiene que hacer precisiones para que los estudiantes se acerquen a un proceso de solución. Las sugerencias las realiza bajo las mismas consideraciones descritas en los problemas anteriores:
 1. El docente explica que el centro de gravedad equilibra la figura y divide en partes de igual área.
 2. Pregunta qué podrían hacer para realizar el trazo de las rectas notables en cuadriláteros si anteriormente sólo lo realizaron en triángulos. Emanuel propone formar triángulos.
 3. El docente les proporciona la secuencia didáctica para que revisen su material y recuperen ideas.
 4. El docente pregunta que información útil encontraron, el Equipo 3 señala que el trazo y ubicación del centroide puede ser de utilidad, por lo tanto el trazo de medianas es de utilidad. Luego de un tiempo el docente recalca que revisen la página 16 donde el Equipo 3 encontró información útil.

5. Les pide ir a la página 19 y revisar si la situación problema es parecida a la que se encuentran resolviendo. Les pide revisar las definiciones para recordar las rectas notables.
6. Sugiere que tracen primero las medianas de un triángulo y posteriormente las del otro. Muestra el trabajo del Equipo 2 para que observen los avances de sus compañeros.

4.3 Análisis a posteriori del trabajo de los estudiantes

Los análisis y comentarios que a continuación se presentan pretenden comenzar a dar claridad a las preguntas de investigación pero también a los objetivos planteados en el Capítulo 1 de esta investigación. Para ello comenzaremos planteando lo alusivo a las estrategias de solución ante cada situación problema de la segunda experimentación, esto será relacionado a la apropiación de los esquemas de uso y dentro de esta discusión se comentarán simultáneamente las principales dificultades presentadas durante el uso de herramientas en la resolución de los problemas.

Al presentar a los estudiantes la primera situación problema, donde se requiere poner en uso las propiedades de la mediatriz, se presenta una primera dificultad en los equipos, quienes no logran identificar de forma inmediata un contenido temático preciso que les sea de utilidad para resolver. No evocan saberes previamente trabajados sobre las rectas notables, vistos desde otra manera; para ellos no está claro, en este primer momento, que el uso de las rectas notables es de utilidad, por ello plantean sus primeras estrategias alejadas de aquellas establecidas en el análisis *a priori*.

En términos globales los procesos de solución (estrategias) que los estudiantes plantean en un primer momento, tienen la característica de ser primordialmente perceptuales e inexactos. Es gracias a las puntualizaciones que el profesor realiza que los estudiantes logran identificar un contenido de utilidad que los lleva al trazo de las mediatrices.

Sin ser el papel docente objeto principal de nuestro análisis, es destacable que ejerce una fuerte influencia en el proceso de los estudiantes, ya que aunque no les explica cómo

utilizar una herramienta si los direcciona hacia el uso de un objeto matemático, en este caso la noción de mediatriz.

Las estrategias de solución en esta investigación se identifican en el momento que los estudiantes comienzan a utilizar una herramienta generando un trazo, y se distinguen una de otra en el momento en que se visualiza que deshacen o borran sus últimos trazos y comienzan un nuevo proceso. Una primera categoría respecto a las estrategias de solución en las tres situaciones problema es dividir las en simples y compuestas (Tabla 7), lo cual se recupera al considerar las estrategias y la cantidad de herramientas y acciones realizadas en la búsqueda de un proceso correcto de solución.

Estrategias de solución de las situaciones problema		
Simples	Son aquellas en las que se desarrollan máximo 2 acciones distintas y se utilizan a lo más dos herramientas.	No utilizan nociones de rectas notables de triángulos.
		Utilizan nociones de rectas notables.
Compuestas	Son estrategias que utilizan múltiples herramientas pero en el proceso se distinguen más de dos acciones distintas.	No utilizan nociones de rectas notables de triángulos.
		Utilizan nociones de rectas notables.

Tabla 7. Categorías de estrategias de solución

De forma más puntual para esta **primera situación problema** los procesos de los cuatro equipos suelen ser predominantemente estrategias compuestas donde utilizan más de tres acciones o herramientas en la búsqueda de la solución. Sin embargo todos los equipos comienzan con estrategias simples que no están estrechamente relacionadas con las nociones de la mediatriz, que es la recta útil para este problema. Es destacable que el equipo 3 (Ángel y Laura) tiene un predominio de estrategias en las que no se utilizan las nociones de las rectas notables de los triángulos, esto es cinco de las ocho estrategias. El equipo 2 (José Emanuel y José Carlos) presenta cuatro de las ocho estrategias en las que no ocupan directamente el trazo de las rectas notables, mientras que en el equipo 1 (Niki y Fabiola) únicamente se presentan tres estrategias donde no se usan las rectas notables. El equipo 4 no es considerado en este problema al no tener el registro completo de su trabajo.

Al plantear procesos de solución, los estudiantes están poniendo en juego el conocimiento del uso de las herramientas de GeoGebra, pero por otro lado conocimientos geométricos, de los que se espera sean relacionados con las propiedades de las rectas notables del triángulo. Es entonces que durante el planteamiento de procesos de solución se da la manifestación de los esquemas de uso que se identifican al utilizar una herramienta pretendiendo generar una acción, la cual para este primer problema es el establecimiento implícito del circuncentro que representa el punto que equidista de otros tres puntos.

Considerando el uso de las herramientas debemos exponer que hay algunas de ellas que en este problema muestran ser más fáciles de usar, ya que ningún equipo tuvo dificultades y su uso es inmediato, entre ellas *Punto*, *Recta*, *Circunferencia*. Por otro lado hay complicación en algunas de ellas como lo son *Distancia y Mediatriz*. Este hecho nos puede llevar a conjeturar que para algunas herramientas los estudiantes lograron establecer mayores esquemas de uso, esto es al ser utilizadas en mayor cantidad de ejercicios establecieron mayores planos de utilidad y las aprendieron a usar de distintas maneras, pero otras presentan un uso limitado pero también complejo.

En lo que respecta al uso de la mediatriz, cuando todos los equipos intentan trazarla, únicamente el equipo dos logra realizar el trazo sin dificultad, hecho que representa un adecuado desarrollo o establecimiento de esquemas de uso para esta herramienta. Los otros equipos enfrentan principalmente la dificultad de que al elegir un punto la mediatriz se visualiza, pero al no dar clic en un segundo punto, la recta se desplaza cuando el puntero también lo hace, por lo tanto la mediatriz no se define en un lugar preciso. Sin embargo, es difícil distinguir si la dificultad se debe a un desconocimiento del uso de la herramienta "*Mediatriz*" o si se debe a que los estudiantes no comprendieron la parte conceptual, es decir, el concepto de mediatriz y sus aplicaciones.

Un aspecto más que hay que analizar es lo que ocurre con los estudiantes después de la socialización de la respuesta esperada, es este caso la respuesta que el equipo 2 socializa. Después de ella, únicamente el equipo 3 culmina su proceso de solución, mientras que el equipo 1 traza algunas mediatrices pero no lo culmina. Entonces podemos entrever que la socialización representa para los estudiantes un momento de contraste de su proceso, pero también un momento de apropiación del uso de algunas herramientas que no habían

aprendido a usar adecuadamente. Si bien el equipo 1 y 3 habían tenido dificultad en el trazo de las mediatrices, después de la socialización ya no se aprecia dificultad en ello. Por lo tanto es un claro ejemplo que la socialización es aún un momento donde los estudiantes consolidan o se apropian de más esquemas de uso.

Retomemos ahora la **segunda situación problema** en la que geoméricamente se requiere el uso de las propiedades de la bisectriz para trazar una circunferencia inscrita a una sección triangular. El trabajo de los cuatro equipos nos deja entrever que comprenden el problema ya que de inmediato comienzan estrategias, aunque estas suelen empezar siendo estrategias de solución simples en las que para los estudiantes no está claro que el uso de la bisectriz es de utilidad.

La mayor parte de las estrategias que ocupan todos los equipos son compuestas. De forma más puntual, el equipo 4 (Emanuel y Yosmar) es el único que tiene predominantemente mayor cantidad de estrategias simples que compuestas, y en tres de las nueve estrategias utiliza procesos que no están estrechamente ligados al uso de las rectas notables. El equipo 2 presenta dos estrategias, de las cinco planteadas, en las que no utiliza estrechamente las rectas notables, sin embargo algo destacable es que todas sus estrategias son compuestas. El equipo 4 tiene un predominio de estrategias compuestas de solución, sin embargo cuatro de las nueve estrategias planteadas no están estrechamente relacionadas con las rectas notables.

Es debido a las puntualizaciones que realiza el profesor que los estudiantes logran acercarse a un proceso más exacto, sin embargo incompleto. Aunque el docente señala una página donde ellos pueden encontrar información de ayuda para resolver el problema, leen pero no logran evocar su conocimiento, hecho que entre otros factores puede deberse a las respuestas cortas que colocaron en su material. Los estudiantes comienzan a utilizar el trazo de las bisectrices hasta que el docente pide que realicen ese trazo.

Cuando comienzan a trazar las bisectrices, el equipo 1 es el único que tiene demasiadas dificultades debidas principalmente a que no seleccionan tres puntos o los dos segmentos que forman el ángulo, hecho que indica que los estudiantes no desarrollaron los adecuados o suficientes esquemas de uso de esta herramienta y al querer realizar la acción de trazar las bisectrices se ven imposibilitados. Por otro lado, el equipo 3 logra trazar sin dificultad

únicamente dos bisectrices, la tercera se les dificulta debido a que no reconocen los puntos que deben elegir para trazar la bisectriz del ángulo faltante. El equipo 2 y 4 logran trazar sin dificultad las tres bisectrices.

Este hecho nos lleva al manejo que los estudiantes tienen del software. De forma general los equipos muestran cada vez mayor apropiación y desarrollo de esquemas de uso del software debido a que usan más herramientas y sin complicaciones mayores. En específico consideremos que los estudiantes han desarrollado adecuados esquemas de uso de la bisectriz cuando son capaces de trazarla seleccionando los puntos que conforman el ángulo, o sus dos segmentos. Pero además cuando son capaces de trazar las tres bisectrices de un triángulo manifestando en sus procesos tanto conocimiento técnico como geométrico.

Durante la resolución de este problema hay herramientas los estudiantes usan sin complicaciones, entre ellas *Circunferencia*, *Mediatriz*, de las cuales podemos expresar que los estudiantes han desarrollado los esquemas de uso. Entre las que presentan dificultad en su uso son *Bisectriz* y *Perpendicular*. En el caso del trazo de rectas perpendiculares la dificultad se aprecia al momento de elegir los elementos para obtener esta recta (un punto y un segmento), ya que los estudiantes dan clic indistintamente sin cuidar en qué elementos están dando clic, por lo tanto la recta no se visualiza o sale en un lugar indeseado.

Respecto al papel de la socialización en este problema, esta surge por parte del docente quien explica, muestra y comenta el proceso correcto para resolver la situación problema, ya que ésta rebasó intelectualmente los conocimientos de los que los estudiantes disponían al no poder ser resuelta por ningún estudiante aún con las puntualizaciones que el docente realizó.

Después de la explicación docente únicamente al igual que en el problema anterior el equipo 2 y 3 son quienes logran llegar a la respuesta correcta del problema realizando los trazos en su computadora, aunque todos los equipos responden su material.

Para finalizar retomemos la **tercera y última situación problema** en la que se pretende poner en uso las propiedades de la mediana para la obtención del centro de gravedad de un cuadrilátero. Los tres equipos desde su primera estrategia comienzan a poner en juego

nociones de las rectas notables, aunque estas no sean la respuesta esperada, es decir el trazo de la mediana. El proceso de los estudiantes retoma únicamente las rectas usadas en los problemas anteriores, la mediatriz y la bisectriz, hecho que da evidencia que los estudiantes no están logrando evocar los saberes específicos de la mediana. Y aunque en una puntualización docente se les proporciona su secuencia didáctica no logran abstraer las definiciones o un proceso similar que les pueda ser de utilidad.

En forma general todos los equipos utilizan predominantemente estrategias de solución compuestas; utilizan en mayorm medida nociones de las rectas notables pero continúan sin evocar las nociones de la mediana.

Es destacable que el equipo 2 plantea trece estrategias, de las cuales cinco son estrategias simples, y tres estrategias no utilizan directamente el trazo de rectas notables. Todas las estrategias que el equipo 4 utiliza son relacionadas a las recta notables. El equipo tres aún en tres de las siete estrategias que plantea, no utiliza las rectas notables del triángulo.

Nuevamente es gracias a las puntualizaciones que el docente realiza que los estudiantes comienzan a trazar las medianas. Aunque previamente a la puntualización cuatro el equipo tres había detectado que la obtención del baricentro era de utilidad, es hasta la intervención docente cuando comienza a hacer uso del trazo de las medianas. Posteriormente a la puntualización docente y una vez que los estudiantes atribuyen que el trazo de la mediana es de utilidad, todos los equipos muestran dificultad en su trazo debido principalmente a que para ellos no parece estar claro el concepto, por ende al pretender trazar la mediana lo hacen con procesos imprecisos denotando que no lograron construir los adecuados esquemas de uso de la noción de mediana y ésta dificultad se manifiesta al utilizar las herramientas pretendiendo generar ese trazo.

En este problema final se nota una mayor apropiación de las herramientas del software y con ello un mayor desarrollo de esquemas de uso, sin embargo aún se tiene dificultad por algunos equipos al usar algunas herramientas, entre ellas al trazar una mediatriz el equipo 4 únicamente da clic en un punto, por lo que la recta no queda estática. Y el equipo 3 sigue teniendo dificultad al trazar las tres bisectrices de un triángulo.

Para este problema el papel de la socialización ya únicamente es complementario a la puntualización número 6. La socialización se enfoca en que el equipo 2 explique

nuevamente como logró determinar el centro de gravedad del cuadrilátero. Después de la explicación únicamente el equipo 3 es quien culmina su proceso, sin embargo todos los equipos responden su material respecto de la respuesta que observaron.

Considerando el análisis de las estrategias que los estudiantes implementaron durante la segunda experimentación de resolución de los problemas, se han logrado identificar cuatro elementos que caracterizan las estrategias de solución que los estudiantes plantean cuando resuelven los problemas, pero teniendo como medio y recurso para su solución al software GeoGebra. Éstas son:

a) Presencia y uso de conocimientos previos (parte matemática y el uso del software):

Los conocimientos previos que se manifiestan se caracterizan por denotar un saber matemático y un saber tecnológico. El primero de ellos es el conocimiento sobre las propiedades y la utilidad del trazo de las rectas notables para resolver determinada situación problema. Por otro lado, el conocimiento tecnológico se centra en el uso adecuado de las herramientas de GeoGebra, es decir, tras seleccionar una herramienta saber utilizarla para realizar el trazo respectivo.

Estos conocimientos están estrechamente ligados a los procesos de solución.

b) Planteamiento de representaciones:

Las representaciones se presentan principalmente visibles dentro de la aplicación Geometría en GeoGebra. Los estudiantes teniendo en mente la idea de algunos objetos geométricos que pretenden representar y que consideran que les serán útiles para resolver el problema presentado, realizan la representación de éstos utilizando las herramientas del software.

Tal es el caso por ejemplo de representar el punto que se encuentra equidistante de otros tres puntos, es decir el circuncentro, para el que los estudiantes realizan una representación aproximada o precisa; los estudiantes recuerdan esta noción pero su representación no siempre concuerda con el objeto geométrico en sí.

c) Procesos de solución:

Se distinguen tres procesos de solución que responden a su origen, los heurísticos, los que utilizan nociones de las rectas notables y los referenciados. Los primeros dos se enmarcan en las categorías vistas en la Tabla 7, sin embargo, el último surge

del análisis minucioso observando que el docente es quien sugiere a los estudiantes realizar algún trazo, las sugerencias van desde pedir intentar resolver las situaciones problema con alguna recta notable hasta pedir que realicen el trazo de las bisectrices.

d) Búsqueda de comprobación:

En todas las situaciones los estudiantes posteriormente a plantear un proceso de solución buscaron comprobar si su estrategia era correcta y cumplía las características del problema. La búsqueda de comprobación se realizó principalmente mediante la medición de longitud y de áreas, pero en otros casos los estudiantes por simple inspección y arrastre realizaron una valoración dándose cuenta que su estrategia no llevaba a una correcta solución.

Por ejemplo, en la situación problema dos de la segunda experimentación, se requiere determinar la medida máxima de un tinaco que será construido dentro de una sección triangular. Los estudiantes se enfocaron en realizar una inspección visual para darse cuenta si el círculo trazado era el de mayor tamaño y que se encontraba limitado por la sección triangular.

Por otro lado, en la situación problema tres de esta segunda experimentación la comprobación recae en la medición de longitudes y áreas, buscando que las medidas sean iguales como indicio de una correcta solución (obtención del centro de gravedad).

Durante la resolución de los problema que se plantearon a los estudiantes a lo largo de las dos experimentaciones se ha podido realizar un análisis que da cuenta de la apropiación del uso de GeoGebra (Tabla 8). La apropiación se manifiesta a través de los procesos que los estudiantes realizan poniendo en juego los esquemas de uso de las herramientas en conjunto con el saber sobre las rectas notables del triángulo.

Nivel de apropiación	Descripción (Herramientas)	Descripción (Rectas notables)
Alto	Uso fluido de las herramientas que anteriormente ha utilizado.	Al utilizar nociones de las rectas notables realiza los trazos sin dificultad.

	Al utilizar una herramienta selecciona sin equivocación los elementos que la herramienta requiere.	
Medio	Utiliza varias herramientas para sus trazos, pero aún presenta dificultad al utilizar algunas de ellas.	Al utilizar procedimientos dirigidos al trazo de rectas notables presenta dificultades ocasionales.
Bajo	Uso de pocas herramientas. Aún presenta constantes dificultades para seleccionar los objetos que requiere la herramienta para su uso.	Utiliza constantemente procedimientos de ensayo y error al realizar un trazo. No muestra procedimientos ligados directamente al uso de las rectas notables.

Tabla 8. Niveles de apropiación.

A partir de la tabla anterior podemos ubicar y explicar más a fondo el nivel en el que los estudiantes se encontraron luego de haber realizado la segunda experimentación sobre la resolución de problemas.

En cuanto al equipo 1, utilizaron varias herramientas, sin embargo aún presentan constantes dificultades al realizar los trazos, además sus procedimientos continúan siendo mayoritariamente por ensayo y error. Cuando el docente sugiere realizar algún trazo, ellos tienen dificultades al utilizar la herramienta, por ello se considera que los estudiantes de este equipo aún se encuentran en un bajo nivel de apropiación de uso de las herramientas del software, pero también reflejan una falta de consolidación de las nociones y propiedades de las rectas notables en los triángulos.

El equipo 2, desde el comienzo de la segunda experimentación de la resolución de problemas comienza a mostrar un uso fluido de las herramientas de GeoGebra, se presentan algunas dificultades que son superadas paulatinamente y cuando requiere realizar el trazo de alguna recta notable de los triángulos lo realiza sin tantas complicaciones, por ello se considera que este equipo ha logrado un alto nivel de apropiación del software.

Por otro lado, tanto el equipo tres como el cuatro logran utilizar las herramientas, pero aún presentan dificultades ocasionales, lo mismo sucede cuando comienzan a tener en mente

las nociones de las rectas notables, por ello se considera que estos equipos lograron un nivel de apropiación medio sobre GeoGebra.

Capítulo 5

Conclusiones y reflexiones finales

Conclusiones y reflexiones finales

El uso de recursos tecnológicos para la resolución de problemas matemáticos, es decir, problemas que pueden basarse en escenarios reales pero que son adaptados para trabajar un contenido matemático, ofrecen distintas herramientas y abren tanto un panorama de nuevas posibilidades de resolución, como un nuevo panorama de aprendizaje, ya que el conocimiento que se adquiere mediante nuevos instrumentos (entre otros, los tecnológicos), es un conocimiento nuevo (Moreno y Rojano, 1998).

Para este estudio el uso de GeoGebra representó un nuevo medio y herramienta mediante la cual los estudiantes de primero de secundaria se enfrentaron a la tarea de resolver varios problemas, en los que las propiedades de las rectas notables (las mediatrices, bisectrices y medianas) de los triángulos resultaban útiles para solucionarlos. Cada problema, de los planteados, si bien ponía en juego conocimientos y esquemas de uso específicos, éstos estaban relacionados entre sí; los estudiantes los manifestaron progresivamente mostrando cada vez, una mayor facilidad en el uso de las herramientas de GeoGebra en los últimos problemas.

La resolución de los problemas representa el momento central de este trabajo, ya que a través de las estrategias de resolución fue posible observar, documentar y analizar: los esquemas de uso de las herramientas de GeoGebra; el saber geométrico de los estudiantes; las dificultades que enfrentaron; así como la influencia de la socialización y de las intervención docente en los ajustes a la propia estrategia, cuando esto fue necesario.

En términos globales las estrategias de solución que los equipos implementaron en la fase dos, muestran que los estudiantes aún tienen dificultades en el uso de las herramientas que fueron utilizadas durante la fase uno de la secuencia didáctica. Tienen una apropiación parcial de los esquemas de uso, lo que se constituye en un obstáculo que deriva en un inadecuado uso de la herramienta y, en la imposibilidad de plantear una solución adecuada. Sin embargo, paulatinamente conforme los estudiantes resuelven más problemas, reconstruyen y evocan saberes adquiridos anteriormente, las dificultades van en descenso permitiendo a los estudiantes plantear diversos procesos de solución, aunque no en todos los casos los llevaron a una respuesta correcta. De hecho, tenemos a un equipo cuyo desempeño fue muy bueno, dos en un nivel intermedio y solo un equipo no logró

avanzar significativamente ni en la apropiación del software como tampoco en las nociones inherentes a las rectas notables de los triángulos.

A diferencia de lo ocurrido en otros estudios relacionados al tratamiento de las rectas notables (Puente, 2017) con estudiantes del mismo nivel, - en el que se establece que en tres días los alumnos mostraron competencia en el uso del recurso tecnológico-, nuestra experiencia muestra en cambio, que los estudiantes de primero de secundaria que desconocen el uso de GeoGebra, requieren más de tres sesiones para apropiarse del uso de este software y con ello desarrollar esquemas de uso de sus herramientas que puedan manifestarse a través de la solución de los problemas.

Una adecuada apropiación y desarrollo de esquemas de uso de las herramientas de GeoGebra contribuye a que la idea geométrica que los estudiantes tengan en mente pueda representarse de forma más manipulable, logrando con ello estar en mejores condiciones para establecer procesos de solución. Es decir, es importante tener presente que los esquemas de uso de las herramientas del software desarrollados por los estudiantes se manifiestan y combinan con sus saberes geométricos en las estrategias de solución de los problemas geométricos abordados.

Los esquemas de uso sirven como un saber que posibilita utilizar adecuadamente las herramientas y con ello plantear un proceso de solución. En otras palabras, los estudiantes relacionan la idea que tienen en mente con un saber tecnológico y geométrico y así plantean una solución. Si los esquemas no han sido incorporados por los estudiantes, cuando quieren implementar una solución, se verán imposibilitados ocasionando que sus trazos no representen la idea que pretendían.

De forma más puntual, el análisis realizado nos deja ver que la apropiación de esquemas de uso del instrumental de GeoGebra no es inmediata, se requiere tiempo para lograrla. Lo que los estudiantes aprenden es lo que logran evocar y que reconstruyen en un tiempo posterior, cuando requieren poner en uso sus conocimientos y habilidades (Fuenlabrada, 2018). Por otro lado evocar ese saber para algunos estudiantes de la muestra complicaciones entre las que se encuentra reconocer y seleccionar los elementos necesarios para plasmar un trazo mediante una de las herramientas de GeoGebra.

En nuestra investigación los estudiantes manifiestan la apropiación adecuada de algunas herramientas en el momento en que las ponen en uso y logran utilizarlas sin dificultad para realizar las construcciones que tienen en mente. Tal es el caso de las herramientas: *Circunferencia, Polígono, Recta, Distancia o longitud*, las que todos los estudiantes logran hábilmente utilizarlas. Por otro lado, se presentan herramientas como *Bisectriz y Perpendicular* donde se evidencia que los estudiantes se han apropiado parcialmente de su uso, como vimos en el apartado *Segunda experimentación sobre la resolución de problemas*; debido a que los estudiantes no logran seleccionar los elementos adecuados para su trazo, y cuando ejecutan la herramienta se encuentran con que el trazo no se posicionó en el lugar que esperaban, entonces realizan acciones de arrastre, dando lugar a un proceso aproximado.

En cuanto a la apropiación de esquemas de uso de las rectas notables, se presenta parcialmente, sólo algunos equipos muestran tanto en su respuesta como en su proceso esquemas de la mediatriz, la bisectriz o la mediana. El conflicto principal que se observa en la apropiación de los esquemas de uso de las rectas notables del triángulo, es la dificultad de los estudiantes para distinguirlas, por lo que les resulta complicado seleccionar la adecuada. Otra dificultad de menor orden, que aparece inicialmente, es que los estudiantes piensen que alguna de las rectas notables es útil para resolver el problema ya que ocasionalmente utilizan nociones no relacionadas con alguna de estas rectas.

De forma estrechamente ligada a la apropiación de esquemas de uso, se encuentran las estrategias de solución, las cuales en términos globales pasan temporalmente de ser experimentales y simples, donde únicamente utilizan una o dos herramientas de GeoGebra, a ser más precisas y a utilizar esquemas de uso de las nociones de las rectas notables que llevan a la solución. Esto ocurre paulatinamente y evoluciona cuando los estudiantes se enfrentan a las tres situaciones problema que fueron la parte final y medular de la secuencia didáctica.

Frente a la primera situación problema, de la segunda experimentación, en la que se requiere determinar el circuncentro, las primeras estrategias que los estudiantes muestran son simples y tendientes a determinar el circuncentro por aproximación. Las estrategias no evidencian de forma inmediata una movilización de esquemas de las nociones de

mediatriz, bisectriz, altura o mediana. Paulatinamente comienzan a movilizar el uso de mayor cantidad de herramientas, nociones geométricas que se perfeccionan, y en las respuestas se presentan esquemas que tienen que ver con el objeto mediatriz. Las últimas estrategias para este problema pasan de ser simples a compuestas; las estrategias compuestas se caracterizan por poner en uso mayor cantidad de objetos geométricos y herramientas.

La segunda situación problema pone en juego las propiedades de la bisectriz para determinar geoméricamente una circunferencia inscrita en un triángulo y obtener la medida de su radio. En ésta los estudiantes nuevamente presentan inicialmente estrategias simples en las que no aparecen directamente nociones de las rectas notables de los triángulos, pero si evidencian el uso de esquemas de varias herramientas del software, entre ellas *Circunferencia*, *Recta*, *Mediatriz* y no la bisectriz que era la recta notable útil para este problema.

En un segundo momento, al tomar en cuenta las sugerencias docentes, comienzan a modificar su proceso, logrando establecer estrategias de solución compuestas en las que movilizan mayores nociones y esquemas de uso tanto de herramientas del software como nociones geométricas. Estas estrategias de solución compuestas aún presentan un carácter experimental, ya que los trazos que realizan los estudiantes movilizan nociones de la mediatriz y bisectriz, pero aún no son precisos, sino aproximados. En este caso, la socialización de la respuesta es hecha por el docente, la socialización se vuelve el momento en que los estudiantes retoman ideas y posteriormente las usan para reproducir el proceso de solución. En esta situación los estudiantes no lograron una apropiación e incorporación de la noción bisectriz o no desarrollaron los suficientes esquemas de uso que les permitieran trazar la circunferencia inscrita de un triángulo.

Por su parte los procesos de resolución de los estudiantes ante la última situación problema, que requiere la obtención del centro de gravedad de un cuadrilátero mediante la movilización de las propiedades de la mediana, se caracterizan por ser compuestos. Además ponen en juego esquemas de uso de nociones de las rectas notables en la gran mayoría de los procesos, en especial nociones de mediatriz y bisectriz, aunque lo esperado

(el uso de la mediana) aparece como producto del apoyo del docente quien pide a los estudiantes revisar su secuencia didáctica.

La socialización, en este estudio, más que ser un espacio de socialización de ideas –como lo prevé la TSD-, representa un tipo de institucionalización de la solución del problema. En ella, el profesor elegía a los estudiantes que podían mostrar frente a sus compañeros la solución al problema o un proceso cercano a ésta y en un caso tuvo que hacerse cargo de ella ante las dificultades mostradas por los alumnos. Para desarrollar la socialización tanto los alumnos como el docente utilizaron la SI-Wm.

La socialización significó para los estudiantes diversas cosas, para unos fueron el punto terminal del trabajo, para otros el momento para retomar ideas y poder terminar el proceso que habían iniciado, pero también fueron el momento en que descubrieron la solución ante las situaciones problemáticas.

A manera de ejemplificación comentaremos lo ocurrido en algunas situaciones. En el problema uno, para el Equipo 3 la socialización representa el momento en que los estudiantes visualizan la solución y retoman ideas para poder concluir su proceso, ya que aunque utilizaban nociones del trazo de la mediatriz, no lograban concretar un proceso correcto.

Para el Equipo 1, la socialización la viven como el momento en que descubren la solución, pero también como el momento terminal, debido a que responden su material con el proceso que expuesto por sus compañeros, pero ya no intentan reproducirlo en su computadora.

Ante la tercera situación problema, donde únicamente el Equipo 2 logra llegar por sí sólo a la respuesta esperada, la socialización que este equipo realiza, se vuelve el proceso terminal donde sólo un equipo más retoma las ideas y finaliza su proceso satisfactoriamente, sin embargo para el Equipo 4 la socialización es el proceso terminal, pero para ellos no representó un momento para retomar ideas porque no concluyen su proceso y sus respuestas a las preguntas del problema provienen de lo observado en la explicación de sus compañeros.

De forma estrechamente ligada a la socialización está la intervención docente, que como vimos en el apartado *Respuesta de los estudiantes ante las situaciones problema de la*

segunda experiencia y análisis a posteriori estuvieron dirigidas a brindar sugerencias a los estudiantes, proponiéndoles utilizar conocimientos sobre las rectas notables. Debemos resaltar que en ningún momento, el profesor dio indicaciones a los estudiantes sobre cómo realizar los trazos. Sin embargo estas sugerencias, como en todo proceso de enseñanza incidieron en las respuestas de los estudiantes, por lo que éstas pudieron aparecer prematuramente y no necesariamente se corresponden con una evolución gradual de las estrategias de los propios estudiantes. De hecho, en general no pudimos observar con toda claridad el momento en que los estudiantes dejan de utilizar las estrategias experimentales de aproximación y comienzan a utilizar directamente las nociones de las rectas notables de los triángulos; lo destacable es que hay un cambio en las estrategias de los estudiantes para resolver los problemas.

Para finalizar, cabe señalar que el estudio consideró como contenido las rectas notales de los triángulos, por ser una temática que tradicionalmente aparecía en las propuestas curriculares incluida la del 2011 (SEP, 2011a), vigente en el momento de la experimentación de la secuencia didáctica. Sin embargo ante la nueva propuesta de Aprendizajes Clave para la Educación Obligatoria (SEP, 2017), el análisis de las rectas notables de triángulos y cuadriláteros desaparece como tema de estudio porque los autores de la propuesta curricular consideraron que éste no es un conocimiento básico imprescindible; es decir, que desconocerlo no se convierte en un obstáculo para seguir aprendiendo; cabe señalar que su estudio es importante para quienes se encaminan en el nivel medio superior, hacia las ingenierías o ciencias físico-matemáticas pero no para los estudiantes de la educación básica.

Al margen de que las rectas notables de los triángulos ya no sean objeto de enseñanza en la secundaria, la investigación realizada y reportada en esta tesis mantiene su pertinencia y sus resultados aportan al conocimiento, en la medida en que la incorporación de recursos tecnológicos para apoyar la enseñanza y el aprendizaje en la escuela sigue vigente.

Aunado a lo anterior, el trabajo aporta elementos para reflexionar sobre las dificultades que tienen los alumnos para hacerse de esquemas de uso del GeoGebra para resolver problemas geométricos. El GeoGebra ha mostrado sus bondades en estudiantes de los

niveles medio superior y superior, por lo que utilizarlo en la secundaria, como se hace en esta investigación, y estudiar sus efectos es importante.

Los resultados muestran las dificultades de los alumnos para acceder a un uso fluido del software en la resolución de problemas geométricos; sin embargo, se puede anticipar por la manera como se comportaron dichos resultados, que si los alumnos disponen de más tiempo para explorar el software a la vez que, como si hizo en esta experiencia, se enfrentan a la búsqueda de solución de problemas, su conocimiento sobre las nociones geométricas básicas se verán beneficiadas en la medida en que se posibilita que interactúen y experimentan con la forma de las figuras y sus propiedades de manera dinámica y no estática como tradicionalmente se ha hecho.

Estas reflexiones lleva a plantear el interés de realizar investigaciones futuras que permitan no solo seguir conociendo sobre los logros y dificultades en el uso de recursos tecnológicos en la resolución de problemas, o sobre el desarrollo de esquemas de uso, sino también se vuelve necesario realizar estudios que impliquen el aprendizaje de otros contenidos sobre la geometría de la forma, propios del nivel de la secundaria.

Referencias

- Arriaga, A. y Benitez, M. (2012). *Matemáticas I por competencias*. México: Pearson.
- Arteaga, R. y Sánchez, A. (2013). *Trabajo en Proceso 1. Matemáticas*. México: Oxford University Press.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M., Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM Mathematics Education*, 39, 365–382.
- Ávila, A. (2015). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo. *En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-IACME*. México: CIAEM.
- Barrantes, M., Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y Errores en la Enseñanza-Aprendizaje de las Figuras Geométricas. *Campo Abierto*, 27 (1), 55-71.
- Block, D. Y García, s. (2012). *Matemáticas I*. México: SM.
- Bosetti, M., Pilolli, P., Ruffoni, M., & Ronchetti, M. (2011). Interactive whiteboards based on the WiiMote: Validation on the field . *In 14th International Conference on Interactive Collaborative Learning (ICL2011)—11th International Conference Virtual University (pp. 269–273)*. Kassel: Kassel University Press. doi: 10.1109/ICL.2011.6059588
- Caballero, A. (2009). *Cambios en la enseñanza de las matemáticas al incorporar tecnologías digitales al taller de computación de una escuela telesecundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.
- Cabrero, Julio. (2004) Formación del profesorado en TIC. El gran caballo de batalla. Comunicación y Pedagogía. *Tecnologías y Recursos didácticos*, 195, 27-31. Descargado desde: <http://ecaths1.s3.amazonaws.com/cts/684729374.Formaci%C3%B3n%20del%20profesorado%20en%20TIC.%20El%20gran%20caballo%20de%20batalla..pdf>

- Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. y Nobre S. (2016). *Youngsters Solving Mathematical Problems with Technology. The Results and Implications of the Problem@Web Project. Mathematics Education in the Digital Era*, 5. Switzerland: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-24910-0
- Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 459-467. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Chung Lee, J. (s.f.). *Proyectos*. (Febrero, 2017) Disponible en <http://johnnylee.net/projects/wii/>
- Clements, M.A.K., Bishop, A., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., Leung, F.K.-S. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*, 27 (1). New York: Springer-Verlag. DOI 10.1007/978-1-4614-4684-2
- Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.
- Etcheverry, N., Reid, M. y Botta, R. (2009). TIC: Animándonos a la enseñanza de la geometría con Cabri. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 1(17), 102-116.
- Farfán, R., Cantoral, R., Cabañas, M. y Ferrari, M. (2011). *Matemáticas I*. México: McGrawHill.
- Fernández, A. (2014). *Impacto a posteriori de la integración de actividades con computadora, en clases de matemática de secundaria: estudio de caso a través de entrevistas a alumnos de un profesor*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.
- Flores, J. (2015). Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática, *Unión*, 41, 57-67.
- Fuenlabrada, I., comunicación personal, 22 de marzo de 2018.

- García, D. (2014). *Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria*. Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *ZDM*, 34(3). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02655711>
- Gómez, A. (2016). *El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden y promueven la interacción y discusión matemática de los estudiantes*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.
- González, C. y Durán, J. (2015, Septiembre). La pizarra digital interactiva como recurso potenciador de la motivación. *Revista de Comunicación Vivat Academia*, 132, 01-19. Recuperado de <http://www.vivatacademia.net/index.php/vivat/article/view/829>
- Guerrero-Ortiz, C., Reyes-Rodriguez, A. y Espinosa-Perez, H. (2015). Integrating Synthetic and Analytical Aspects of Geometry Through Solving Problems Using a DGS. L. Uden et al. (Eds.): *LTEC 2015, CCIS 533*, pp. 283–297. Springer International Publishing Switzerland. DOI: 10.1007/978-3-319-22629-3_23
- Guillén Soler, G., González Quiza, E., García Moreno, M.A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 247-258). Santander: SEIEM.
- Halmos, P.R. (1980) The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7) (Aug. - Sep., 1980), 519-524. Doi: 10.2307/2321415
- Hernández, J. (2013). *Análisis del discurso de argumentación de estudiantes en la solución de una actividad matemática*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.
- Hernández, M. (2009). *Incorporación de herramientas tecnológicas a la enseñanza de las matemáticas: cambios en el aula y búsqueda de nuevas formas de evaluación*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

- Hohenwarter, M., Preiner, J, & Yi, T. (2007). *Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level*. Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematics 2007. Boston, USA: ICTCM
- INEE (2016). *México en PISA 2015 . 1a edición*. México: INEE
- INEE (s.f). *Matemáticas Planea 2015. 6° de primaria, 3° de secundaria*. En. García, S. México: INEE. Recuperado de <http://www.inee.edu.mx/index.php/resultados-nacionales-2015>
- Iztcovich H. (2005). *“Iniciación al estudio didáctico de la Geometría”*. 1.ed. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Kim, M. C., & Hannafin, M. J. (2011). Scaffolding problem solving in technology-enhanced learning environments (TELEs): Bridging research and theory with practice. *Computers and Education*, 56 (2), 403–417. Doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2010.08.024> .
- Laborde, C.(2001): Integration of Technology in the Design of Geometry tasks with Cabri-Geometry. *Int. J. Computers for Math. Learn.*, 6(3), 283-317.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism – models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.
- Lester, F., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501–518). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lester, Frank K. Jr. (2013) "Thoughts About Research On Mathematical Problem-Solving Instruction," *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), Recuperado de <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/12>

- Lu, Y. (2008). *Linking Geometry and Algebra: A multiple-case study of Upper-Secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan*. Master's thesis, Universidad de Cambridge, Reino Unido.
- Martínez, R., Astiz, M., Medina, P., Montero, Y. y Pedroza, M. (1998). Aspectos del uso del Cabri-Geometre en el estudio de Triángulos. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, 9(1). Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4794622>
- Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.
- Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Miranda, N. (2011). *Caracterización del uso de las TIC en la enseñanza de los puntos notables de los triángulos*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Moreno, L. y Rojano, T. (1998). Las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas y Ciencias. *Avance y Perspectiva*, 17. México.
- Ortiz Granja, Dorys. (2015) El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, 19, 93-110, Cuenca, Ecuador: Universidad Politécnica Salesiana.
- Pantoja, R. (2014). *Uso de tecnología en matemática educativa, Investigaciones y propuestas*. Ciudad Guzmán, México: AMIUTEM
- Polya, G. (1957). *How to solve it (2da. Ed.)*. Princeton: University Press.
- Puente, M. (2017). *Génesis instrumental del circuncentro con el uso del geogebra en estudiantes de nivel secundario*. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

- Reyes, I. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.
- Reyes, L (2012). *Matemáticas I*. México: Terracora.
- Reyes, L. E., Rodríguez, F. M. (2014). Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 543-551). Salamanca: SEIEM.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación* 33, 135-165. Recuperado de <http://www.rieoei.org/rie33a07.htm>
- Sacristán, A.I., Calder, N., Rojano, T., Santos, M., Friedlander, A., & Meissner, H. (2010). The Influence and Shaping of Digital technologies on the Learning – and Learning Trajectories – of Mathematical Concepts. In C. Hoyles and J.B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain*. New ICMI Study Series, 13, 179-226. New York: Springer. DOI 10.1007/978-1-4419-0146-0_6.
- Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. & Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Sánchez A., Martínez, J. y Andrade, E. (coords.) (2016). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe de resultados EXCALE 09 Aplicación 2012. Español, Matemáticas, Ciencias y Formación Cívica y Ética*. México: INEE
- Sánchez, J. (2012). *I-Locus. Exploraciones digitales del lugar geométrico*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.
- Santos-Trigo & Moreno-Armella (2016). The use of digital technology to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp.189-2007). Switzerland: Springer.

- Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009). Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 19 (3), 260-279.
- Santos-Trigo, M. (2004). *The role of technology in students' conceptual constructions in a sample case of problem solving. Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(2), 1-17.
- Santos-Trigo, M. (2014). *Problem solving in mathematics education. Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501) . Springer Netherlands.
- Santos-Trigo, M. (2015). El uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI. En X. Martínez-Ruiz y P. Camarena-Gallardo (Coords). *La educación matemática en el siglo XXI*. Pp. 133-153
- Santos-Trigo, M. y Ortega-Moreno, F. (2013). Digit technology, dynamic representation, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *International Journal of Learning Technology*, 8(2), 186-200.
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space Framework. *ZDM*, 1-16.
- Santos, M. (2010) *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Schukajlow, S., Kaiser, G. & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education*, 50: 5. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5>
- Sensevy, G & A. Mercier (2007). *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes: PUR. Traducción de Juan Duque, y revisión de René Rickenmann.
- SEP (2006). *Matemáticas I. Libro para el maestro. Telesecundaria*. México: ILCE.

- SEP (2011a). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro Educación Básica, Secundaria, Matemáticas*. México: SEP.
- SEP. (2011b). Plan de Estudios 2011. Educación Básica. México: SEP.
- SEP (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. México: SEP.
- Sträßer, R. (2002). Research on dynamic geometry software (DGS) – An introduction. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 34(3), 65.
- Tinajero, E. (2009). Enciclomedia: determinismo tecnológico y educativo en México. Análisis y reflexiones de un fracaso educativo más. Recuperado el 12 de mayo de 2018 de <https://ezequiel.wordpress.com/2009/05/01/enciclomedia-determinismo-tecnologico-y-educativo-en-mexico-analisis-y-reflexiones-de-un-fracaso-educativo-mas/> .
- Ursini, S. & Sacristán, AI (2006): On the role and aim of digital technologies for mathematical learning. Experiences and reflections derived from the implementation of computational technologies in Mexican mathematics classrooms. En Son, L. Sinclair, N. Lagrang, J. & Hoyles, C. (Ed.) *Digital Technologies and Mathematics Teaching and Learning: Rethinking the Terrain*, pp. 447-486. Hanoi, Vietnam: Institute of Technology.
- ZDM: Mathematics Education (2018). Empirical research on the teaching and learning of mathematical modeling, 50 (1-2). Editors: Gabriele Kaiser, Marcelo C. Borba, Stanislaw Schukajlow, Gloria A. Stillman.

Anexos



SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ANÁLISIS DE LAS RECTAS NOTABLES EN TRIÁNGULOS

SITUACIÓN I: Para comenzar a usar GeoGebra

Objetivo: Que conozcas qué es GeoGebra y explores sus herramientas y funcionalidades básicas para usarlas en la resolución de problemas geométricos.

Organización: Trabajo grupal con trabajo en parejas.

Momento 1. ¿Qué es GeoGebra?

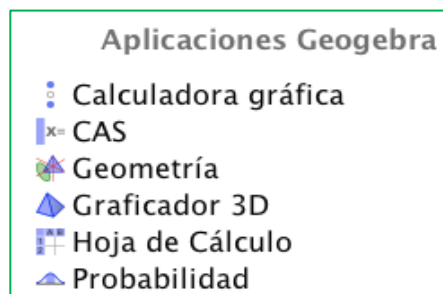


Es un software libre de matemática dinámica, para aprender y enseñar en todos los niveles educativos. Su instalación puede realizarse en cualquier dispositivo móvil y computadoras, presentando únicamente cambios de interfaz entre un dispositivo y otro; la versión para computadora es la más completa.

Momento 2. Aplicaciones en GeoGebra

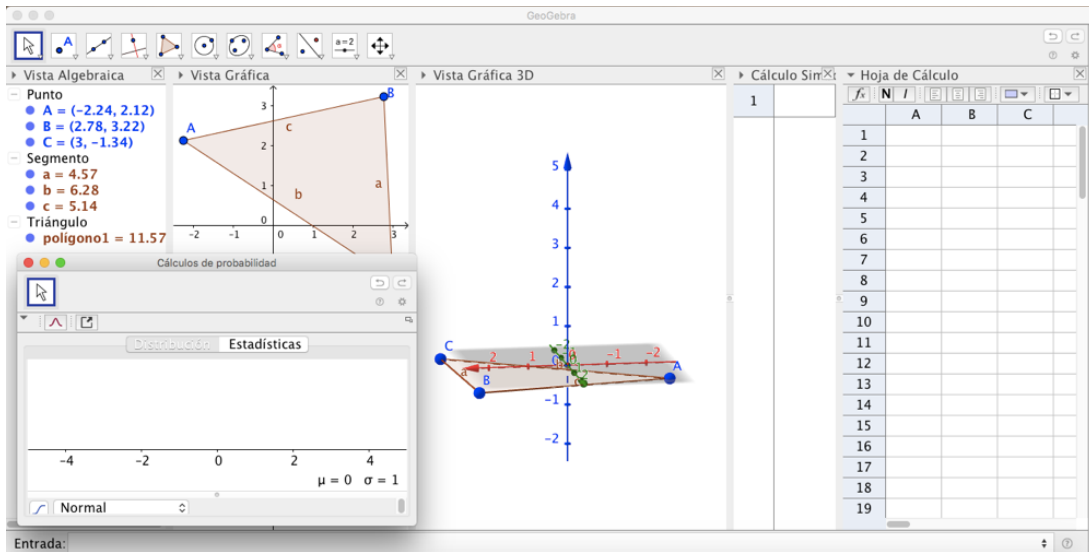
Cada aplicación presenta su propia barra de herramientas y comandos, éstos permiten crear construcciones dinámicas con diferentes representaciones de los objetos matemáticos. En el recuadro se muestran las aplicaciones que GeoGebra ofrece.

GeoGebra ofrece diversas aplicaciones para los objetos matemáticos.



Según los contenidos matemáticos con los que quieras trabajar, seleccionas una de las aplicaciones de GeoGebra.

En la siguiente imagen, se muestran activadas las 6 vistas que GeoGebra contiene, combinándolas dependiendo la aplicación elegida.

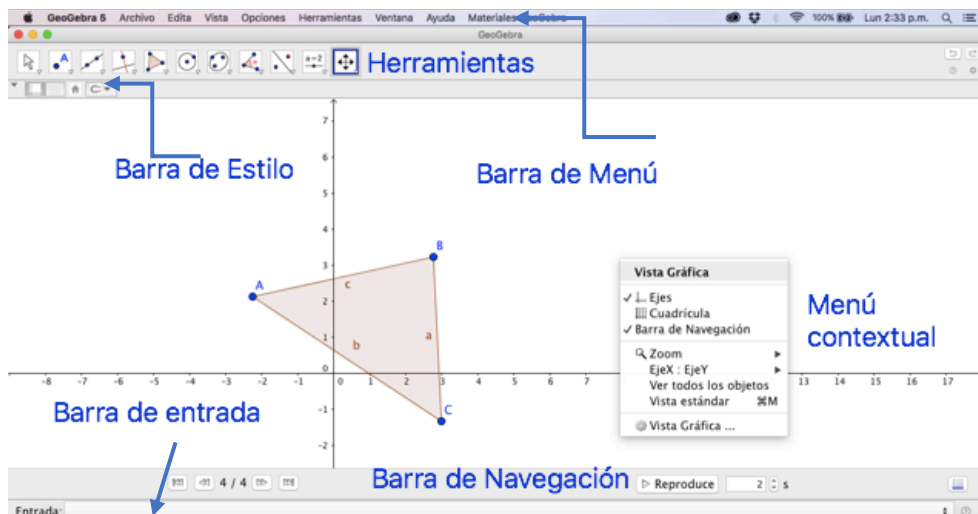


Momento 3. Otros componentes de la interfaz

Una vez seleccionada la aplicación Geometría es necesario conocer otras herramientas y funcionalidades que el GeoGebra ofrece para esta aplicación. Vale resaltar que algunas de éstas son comunes para las otras aplicaciones.

Nota: para los temas geométricos que vas a resolver, se requiere **UNICAMENTE** de la aplicación Geometría.

Estos componentes pueden visualizarse en la siguiente imagen.



Bajo la coordinación del maestro, explora con tu compañero los componentes de la interfaz, haz las anotaciones que consideres convenientes.

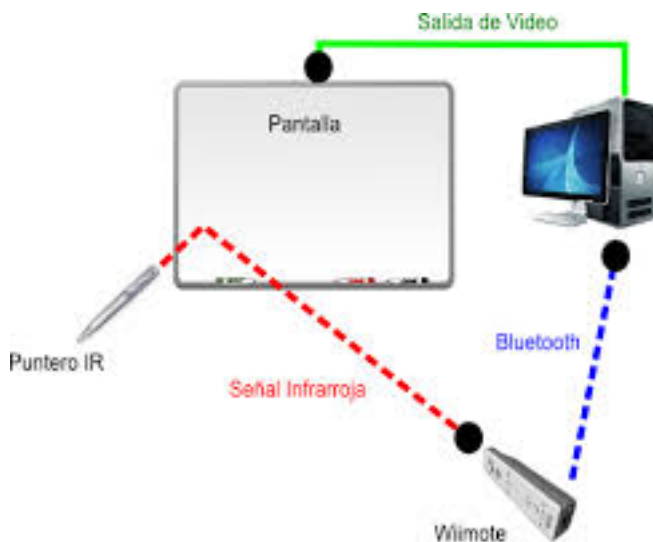
¿Qué usos tiene la Barra de menú?

¿Qué activa la Barra de estilo?

Las Herramientas se encuentran organizadas a través de diferentes categorías, menciona algunas de ellas.

Momento 4. Aprendiendo a utilizar el pizarrón interactivo

El funcionamiento básicamente consiste en vincular el control Wii a la computadora mediante bluetooth, para ello necesita instalarse previamente el software para que la computadora reconozca el control del Wii. Luego de vincularse necesita colocarse cerca del proyector en una adecuada posición que abarque el tamaño de la pantalla. El **lápiz infrarrojo** es el encargado de mandar la señal al control y el control a la computadora. El lápiz funciona de forma análoga a un mouse.



Es necesario no interferir entre el sensor del control Wii y el led del lápiz infrarrojo para que la señal sea captada adecuadamente.

Nombre: _____ Equipo: _____ Fecha: _____

Advertencias generales

- Al término de cada actividad el profesor va a elegir a **un alumno** para que pase a explicar frente al grupo lo que hizo con su compañero, para realizar los trazos y las respuestas a las preguntas solicitadas. Es decir, tanto tú como tu compañero deben poder explicar lo que hicieron y la validez de sus respuestas. Este espacio de la sesión se señala con el ícono “socializa”.
- Es necesario que quede un registro de lo que vas haciendo con GeoGebra. Antes de trabajar con una **CONSIGNA**, abre un nuevo archivo GeoGebra al terminar guárdalo. Para etiquetar cada archivo: anota, con mayúsculas, el **número de sesión** (S2) seguido del **Momento y el inciso trabajado** (M5ab), **guion bajo**; **E1** (si eres equipo 1), **guion bajo**; y, finalmente la fecha separada por puntos (dd.mm.aaaa). Por ejemplo, para la siguiente consigna la etiqueta del archivo sería: S2M5ab_E1_24.03.2017.

Organización: Trabajo en parejas

Momento 5. Trazos y construcciones geométricas básicas



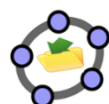
Con tu compañero, utilicen el software GeoGebra, realicen los trazos que se indican y respondan a las preguntas, cada uno en su Guía de trabajo.

a) **Consigna:** Realiza los siguientes trazos.

- Una recta.
- Un segmento.
- Un segmento de 4 unidades.
- Un segmento de 20 unidades.



¿Qué semejanzas o diferencias encuentras entre ellos?



b) **Consigna:** Desplaza las rectas y segmentos anteriormente trazados a partir de los puntos que resaltan. Observa, analiza y explica el efecto de esta acción sobre las rectas.

Momento 6. Trazo de polígonos



- a) **Consigna:** Traza un triángulo y un pentágono. Explora lo que sucede en cada polígono al desplazar uno de sus vértices. Observa, analiza y explica el efecto de esta acción sobre las figuras.

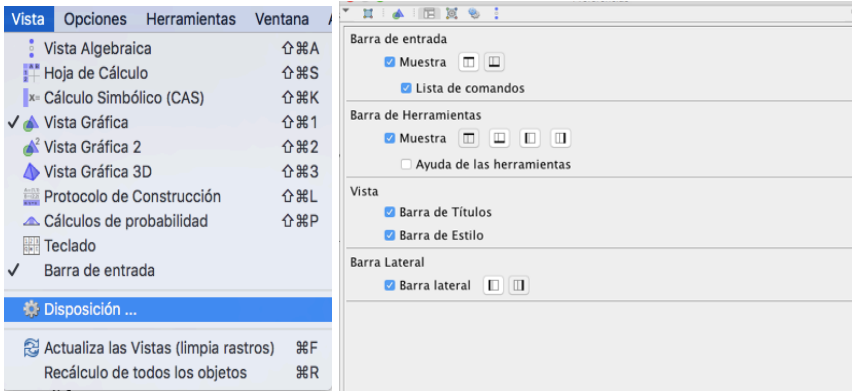
Mide y anota las longitudes de los lados de cada polígono.

	Medidas				
Triángulo					
Pentágono					

- b) **Consigna:** Traza un triángulo y un pentágono regulares. Explora lo que sucede en cada polígono al desplazar uno de sus vértices. Observa, analiza y explica el efecto de esta acción sobre las figuras.

¿Qué pasa con los ángulos de los polígonos regulares, cuando se desplaza uno de sus vértices? Elige y usa la herramienta que te permita verificar tu respuesta.

Nota: GeoGebra cuenta con ayuda para indicar la manera en que se trazan las figuras o la manera de realizar alguna construcción. Para activarla debemos ir a la Barra de Menú seleccionar Vista. Ahí elegir Disposición, para luego activar la casilla de “Ayuda de las herramientas”.



Nombre: _____ **Equipo:** _____ **Fecha:** _____

Momento 7. Trazo de circunferencias

- a) **Consigna:** El auto del papá de Andrea, un Mazda 3, tiene llantas con rines de 18 pulgadas de diámetro (22.86cm de radio). Si sabemos que la altura de la sección de la llanta es de 9 cm. Representa con círculos la llanta y determina la longitud perimetral aproximada que tiene la llanta.

¿Cuál es el perímetro que tiene la llanta? _____

¿Cuál es la longitud perimetral del rin? _____



Sugerencia. Si al trazar alguna figura es demasiado grande, puedes hacer uso del zoom con la herramienta "Alejar".

- b) **Consigna:** Traza círculos utilizando diferentes herramientas. Hay tres maneras diferentes de trazar círculos, encuéntralas.

Explica las tres maneras diferentes con las que puedes trazar círculos con las herramientas de GeoGebra.



SITUACIÓN II: CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DE TRIÁNGULOS

Objetivo: Que aprendas a trazar triángulos, analices cuando un triángulo puede construirse y encuentres la relación entre los lados de un triángulo.

Organización: Trabajo en parejas

Momento 1. Los triángulos

- a) **Consigna:** Traza un triángulo que tenga en sus lados, las siguientes medidas: tres, cuatro y cinco unidades.

Explica la estrategia que utilizaste para trazarlo.

Momento 2.

- a) **Consigna:** Traza los siguientes triángulos con las medidas indicadas.

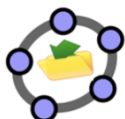
Medidas de los lados del triángulo dos: 6u, 7u, 4u.

Medidas de los lados del triángulo tres: 2u, 5u, 5u.

Medidas de los lados del triángulo cuatro: 8u, 4u, 3u.

¿Todos los triángulos pudieron trazarse? _____

¿Qué condición crees que deban cumplir las longitudes de los lados de un triángulo?



Criterio de existencia de triángulos:

Para que un triángulo exista la suma de la medida de dos de sus lados debe ser mayor que la medida del tercero.



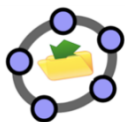
Momento 3.

- a) **Consigna:** Traza un triángulo equilátero, un isósceles y un escaleno. Mide de cada triángulo sus ángulos internos y completa la tabla.

	Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3	Suma de ángulos
Triángulo Equilátero				
Triángulo Isósceles				
Triángulo Escaleno				

Modifica los triángulos anteriores y vuelve a calcular la suma de sus ángulos internos.

¿Qué puedes expresar al respecto?



Nombre: _____ Equipo: _____ Fecha: _____

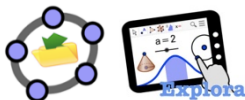
SITUACIÓN III: LAS RECTAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Objetivo: Que diferencies las rectas notables del triángulo con base en su definición y aprendas a trazarlas con las herramientas que ofrece GeoGebra.

Organización: Trabajo en parejas

Momento 1. Definición de las rectas notables del triángulo y su trazo

- **La mediatriz:** es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a éste.
- **La bisectriz:** Es la recta que pasa por un vértice y divide el ángulo interno de ese vértice en dos partes iguales.
- **La mediana:** es la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto a ese vértice.
- **La altura:** Es el segmento perpendicular que va de un vértice al lado opuesto.



a) **Consigna:** Traza cuatro triángulos en un archivo GeoGebra. En cada uno traza una recta notable diferente.

Explica los pasos que seguiste para realizar los trazos.

Mediatriz

Bisectriz

Altura

Mediana

¿Qué dificultades tuviste para trazar las rectas notables del triángulo?

a) Desplaza los vértices de los triángulos anteriores.

Observa, analiza y explica el efecto de esta acción sobre las figuras y sobre la recta notable que trazaste en cada triángulo.

Mediatriz:

Bisectriz:

Altura:

Mediana:



Momento 2. La mediatriz



Rectas perpendiculares:

Rectas que se cortan en un punto formando ángulos rectos.

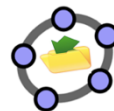
Punto medio: es el punto que divide a un segmento en dos segmentos de igual longitud.

Mediatriz de un segmento: es la línea perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

a) **Consigna:** ¿Qué crees que pase si trazas las tres mediatrices de cualquier triángulo? Escribe tu anticipación.

Usando GeoGebra analiza si tu anticipación fue correcta. Complementa tu explicación o corrígela si no fue acertada.

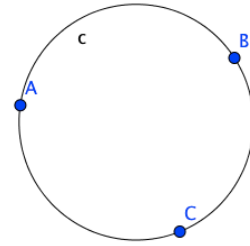
Mide la distancia del punto de intersección de las rectas a los vértices del triángulo, anótalas, ¿qué te sugiere este hallazgo?



Nota: Para cambiar el estilo, color y ancho de línea de cualquier recta, debes seleccionarla y en *la barra de estilo* puedes realizar estos cambios.

Nombre: _____ Equipo: _____ Fecha: _____

- b) **Consigna:** Traza una circunferencia a partir de tres puntos. Localiza el centro del círculo. Verifica que sea el centro del círculo.



Explica tu procedimiento.

Sobre la figura anterior, traza un segmento del centro del círculo a cualquier punto de la circunferencia. Sobre ese punto en la circunferencia da “clic derecho” y selecciona “Animar”. Observa lo que sucede.

Para recordar...

¿Qué nombre recibe el segmento de recta que trazaste?

¿Qué sucede con el segmento que trazaste al animarlo?

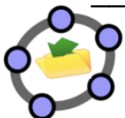


Vocabulario

El punto donde se intersecan las mediatrices se llama **circuncentro**.

- c) **Consigna:** Traza un nuevo triángulo y determina su circuncentro. Traza la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. Averigua si hay algunos triángulos en los que el circuncentro quede fuera del triángulo.

¿Cómo se llaman los triángulos donde el circuncentro queda fuera del triángulo?





Nombre: _____ Equipo: _____ Fecha: _____

Situación 3, continuación

Momento 3. La bisectriz

Así como se puede dividir un segmento en dos partes iguales, también puede hacerse con los ángulos.



Distancia de un punto a una recta: es la magnitud del segmento perpendicular a la recta, que pasa por el punto.



- a) **Consigna:** Traza la bisectriz de un ángulo. Ubica un punto sobre la bisectriz y a partir de éste traza rectas perpendiculares a cada lado del ángulo.

¿Qué relación tienen las perpendiculares que trazaste? Verifica tu respuesta.

¿Sucede lo mismo si desplazamos sobre la bisectriz el punto elegido? Analiza y explica lo que ocurre.



- b) **Consigna:** Traza un triángulo cualquiera. ¿Qué crees que suceda si trazas las tres bisectrices? Anticipa tu respuesta y escríbela.

Verifica tu idea trazando las bisectrices del triángulo. Complementa o corrige tu anticipación.



Incentro: es el punto donde se intersecan las bisectrices de un triángulo.

¿Habrá algún tipo de triángulo donde el incentro quede fuera del triángulo?

Desplaza los vértices del triángulo

anterior. Observa, analiza y explica lo que sucede con el incentro, ¿qué relación tiene esto con la pregunta anterior?



c) **Consigna:** Traza un nuevo triángulo. Determina su incentro. Traza un círculo que quede dentro del triángulo, y toque a cada lado del triángulo en un sólo punto.



Recta tangente a un círculo: recta perpendicular a un radio del círculo que pasa por el punto del radio que está sobre la circunferencia

Verifica si tu estrategia es la adecuada, para ello desplaza los vértices del triángulo. El círculo debe

seguir tocado únicamente en un punto a cada lado del triángulo.

Explica tu procedimiento



Nombre: _____ Equipo: _____ Fecha: _____

Momento 4. La mediana

a) **Consigna:** Traza en un triángulo una mediana.

¿Crees que la mediana divide al triángulo en dos partes de igual área?

Observa, analiza y explica la manera en la que podrías verificar tu respuesta a la pregunta anterior.

Desplaza los vértices del triángulo original y observa lo que ocurre con las áreas de los triángulos generados por la mediana.

¿Qué conclusión puedes establecer?



b) **Consigna:** ¿Crees que exista un triángulo en el que al trazar las tres medianas, se junten en un punto fuera del triángulo? _____

Verifícalo en el triángulo anterior.

Verifícalo con GeoGebra.

¿Tu anticipación fue acertada? _____



El punto donde se intersecan las medianas se llama **baricentro o centroide**. Si quisiéramos balancear una figura, éste punto sería de utilidad para lograr el equilibrio, ya que las medianas dividen al triángulo en secciones de igual área.

Momento 5. La altura

Altura del triángulo: es la distancia de un vértice al lado opuesto.

a) **Consigna:** Traza un triángulo, y en él las alturas.

¿Cuántas alturas pudiste trazar?

Explica el proceso que seguiste.

¿Cuántas alturas tienen los triángulos?



El punto donde se intersecan las alturas se llama **ortocentro**.

Situación IV: Resolución de problemas

Objetivo: Que resuelvas problemas que implican utilizar tus conocimientos sobre el trazo y propiedades de la mediatriz, bisectriz, altura y mediana de los triángulos.

Organización: Trabajo en parejas.

Resuelve los siguientes problemas haciendo uso de GeoGebra, si necesitas hacer operaciones, puedes realizarlas en los espacios disponibles de cada hoja.



Consigna P1. En una excavación en Xochimilco donde se pretende hacer una gasolinera fue encontrada una parte de una piedra del sol, popularmente llamada Calendario Azteca, la cual presenta inscripciones alusivas a la cosmogonía mexicana y los cultos solares. Basándote en la piedra hallada, determina la longitud del radio que tuvo y anótala.

Toma como referencia el archivo “Calendario azteca”, el cual es un archivo GeoGebra donde **la unidad** equivale a 10 cm del tamaño original de la piedra.



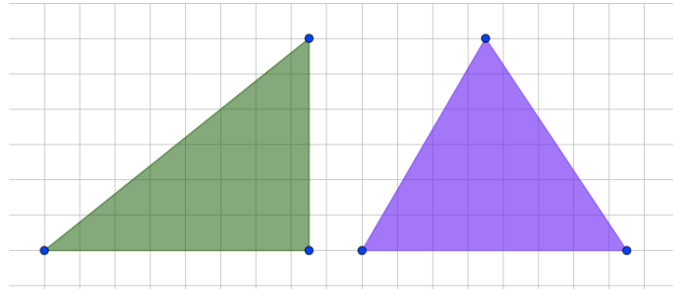
Consigna P2. Se ha

decidido crear una nueva planta de luz que permita generar y distribuir la energía. La planta se planea crear a un costado de la calle nueva, pero debe estar a la misma distancia y de forma perpendicular a la autopista y a la calle 5 de mayo para que la luz pueda llevarse en línea recta y sea más eficiente. Determina el punto donde debe colocarse la planta de luz.

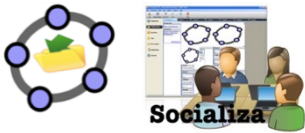


Consigna P3. El señor Xavier es un herrero que se dedica a hacer péndulos de todo tipo. El arquitecto Andrés le ha encargado un pedido especial:

realizar dos péndulos triangulares con una lámina de plata, que tenga de base 15 cm y de altura 12 cm, pero los péndulos deben equilibrarse, no sólo colgarse de cualquier vértice. El señor Xavier ha elaborado dos diseños. Ubica el punto donde debe colocarse la cadena e la que colgará el péndulo para que se mantenga en equilibrio. Para ello modela la situación utilizando GeoGebra.



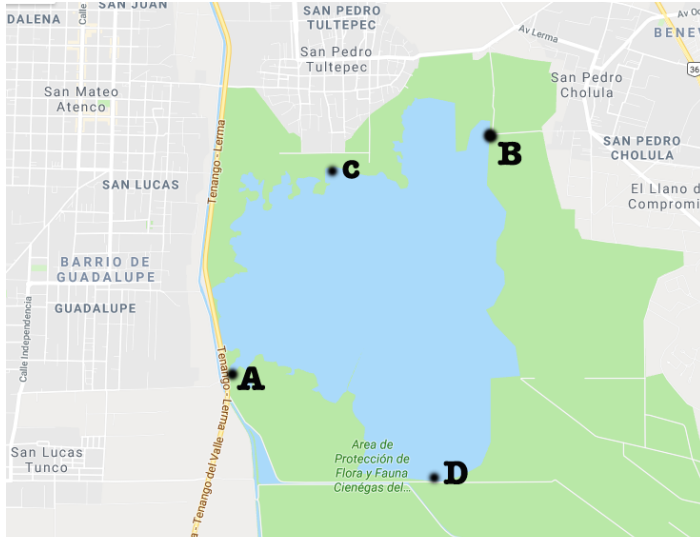
Explica la manera en que determinaste el centro de masa del cuadrilátero anterior.



RECUPERACIÓN DE CONOCIMIENTOS

Consigna: Lee los siguientes problemas y con base en la información planteada da solución a cada uno de ellos, para ello apóyate de GeoGebra. Responde a las preguntas de cada problema.

Organización: Trabajo en parejas.



P.1 El gobierno de Lerma ha decidido promover como centro ecoturístico la laguna que se encuentra en su territorio, para ello planean instalar embarcaderos de canoas en los puntos A, B y C. Aún falta determinar un punto de vigilancia y control para que su plano esté listo. Como medida de seguridad este lugar debe encontrarse a la misma distancia de los tres embarcaderos. Ubica el punto que cumple con estos requisitos.

¿Cómo puedes comprobar que el punto que ubicaste cumple con los requisitos que marca el problema?

Explica el proceso que seguiste.

¿Habrá un círculo cuyo centro sea el punto que encontraste y pase por los puntos A, B, D?

¿Por qué? _____



P.2 El papá de Tania ha decidido instalar su propio sistema de recolección y purificación de agua debido a los problemas que han tenido con el servicio de agua potable de su localidad. Pretende que se instale en el cuarto vacío que tiene de medidas 1.4m de ancho y 2.5m de largo. En la sección A quiere construir un tinaco circular de recolección de agua, mientras que en la B instalar el sistema de purificación.



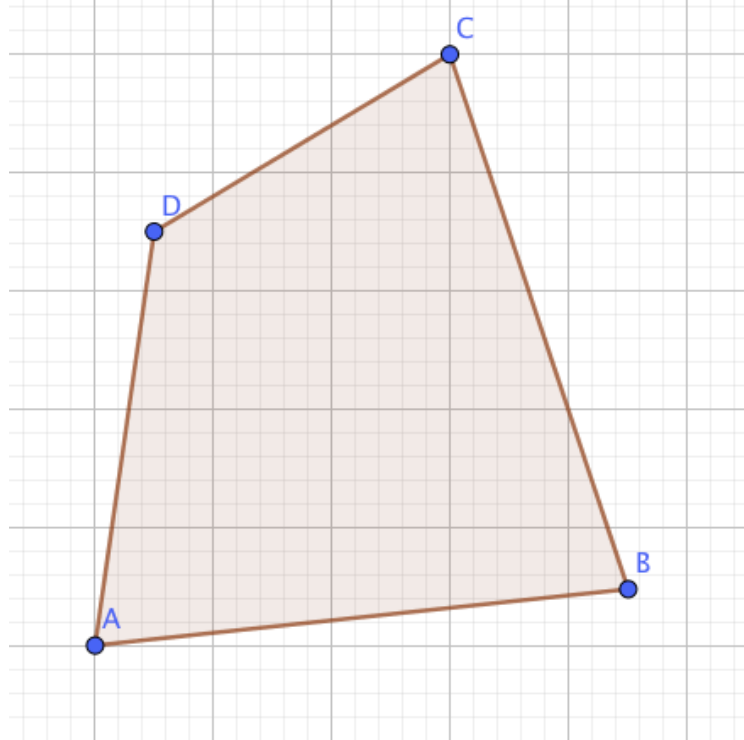
¿Cuál es la medida máxima de radio que puede tener el tinaco que será construido en la sección A?

Explica el proceso utilizado





P.3 Determina el centro de gravedad del siguiente cuadrilátero. Para ello abre el archivo “Cuadrilátero_CGravedad.ggb” donde el cuadrilátero ya se encuentra construido.



¿Cómo puedes comprobar que el punto que obtuviste es el centro de gravedad del cuadrilátero?

Explica el proceso que seguiste para determinar el centro de gravedad del cuadrilátero.

