



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas

**Operadores de Toeplitz con símbolo radial
en el espacio de Fock armónico**

TESIS QUE PRESENTA
Jesús Enrique Macías Durán
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Directoras de Tesis:
Dra. Maribel Loaiza Leyva
Dra. María del Carmen Lozano Arizmendi

Ciudad de México

Octubre, 2016.

Abstract

The study of Toeplitz operators comes from the work of Otto Toeplitz (1881-1940) about matrices that are constants in every diagonal. Since then, the interest in this subject has been increasing. Several works about the topic have been published using different kind of symbols (e.g. radials, verticals, etc.) and in a big variety of spaces, including the Hardy and Bergman spaces, among others.

The space of harmonic functions defined in \mathbb{C} , besides of containing properly the entire functions, it is very important in applied mathematics, differential equations and, of course, harmonic analysis. On the other side, the Fock space (in honor of Vladimir Fock 1898-1974), also called Bargmann space (Valentine Bargmann 1908-1989) or Segal-Bargmann space (Irving Ezra Segal 1918-1998), is relevant in several areas such as quantic mechanics, probability theory and operator algebras. The idea of express the harmonic Fock space using the Fock space comes from another similar works in the Bergman space.

The present work is devoted to study Toeplitz operators with bounded radial symbols acting on the harmonic Fock space, h_α^2 , i.e., the space consisting in harmonic functions that are square integrable with respect to the measure $d\lambda_\alpha(z) = \alpha\pi^{-1}e^{-\alpha|z|^2}dA$. This space contains the Fock space and the anti-Fock space (anti-analytic functions) and, moreover, it can be expressed as the sum of these spaces. Using this we can study Toeplitz operators acting on harmonic Fock space in terms of Toeplitz operators acting on Fock space (and anti-Fock space). In particular if we consider radial symbols then Toeplitz operators are diagonals with respect to the monomial basis of h_α^2 . From this we describe the spectrum of a Toeplitz operators with these characteristics as well as the C^* -algebra generated by them.

Resumen

El estudio de los operadores de Toeplitz comenzó como resultado de los trabajos realizados por Otto Toeplitz (1881-1940) sobre matrices que son constantes en cada diagonal. Desde entonces se ha incrementado el interés en el tema. Diversos trabajos se han publicado utilizando diferentes clases de símbolos (e.g., radiales, verticales, etc.) y en gran variedad de espacios, incluyendo los espacios de Hardy y de Bergman, entre otros.

El espacio de funciones armónicas en \mathbb{C} además de contener propiamente al espacio de funciones enteras, es de gran importancia en la matemática aplicada, ecuaciones diferenciales y, por supuesto, análisis armónico. Por su parte, el espacio de Fock (en honor de Vladimir Aleksandovich Fock(1898-1974)), también llamado espacio de Bargmann (Valentine Bargmann 1908-1989) o espacio de Segal-Bargmann (Irving Ezra Segal 1918-1998), es relevante en diversas áreas tales como la mecánica cuántica, la teoría de probabilidad y las álgebras de operadores. La idea de expresar el espacio de Fock armónico a partir del espacio de Fock surge de trabajos similares hechos en el espacio de Bergman.

En este trabajo se estudian los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Fock armónico h_α^2 , i.e., el espacio de funciones armónicas cuadrado integrables con respecto a la medida $d\lambda_\alpha(z) = \alpha\pi^{-1}e^{-\alpha|z|^2}dA$. Este espacio contiene a los espacios de Fock y anti-Fock (funciones anti-analíticas) y de hecho se expresa como suma de estos espacios. Lo anterior nos permite estudiar operadores de Toeplitz en el espacio de Fock armónico en términos de operadores de Toeplitz en el espacio de Fock (y anti-Fock). En particular si los símbolos considerados son radiales, los operadores de Toeplitz son diagonales con respecto a la base monomial de h_α^2 . A partir de esto se describe el espectro de un operador de Toeplitz con dichas características y el álgebra C^* generada por los mismos.

Agradecimientos

Agradezco profundamente al CONACYT por el apoyo económico proporcionado para la realización de esta tesis.

A las doctoras Maribel Loaiza y Ma. del Carmen Lozano, mis asesoras, gracias por su tiempo y su dedicación, por sus consejos y enseñanzas. Este trabajo no sólo es mío, sino también de ustedes.

Gracias también a los profesores y doctores que colaboran con el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV. En especial agradezco al Dr. Hugo, sin duda alguna una buena parte de esta tesis se debe a sus consejos y a sus comentarios.

A mis amigos, gracias por acompañarme en estos dos años durante mi estadía en la Ciudad de México.

Por último, agradezco a mi familia, a mis padres y a mis hermanos, que fueron mi apoyo durante este tiempo. Fue gracias a ustedes que comencé esta empresa llamada maestría y fue en gran parte por ustedes que pudo llegar a un buen fin.

A familia.

Contenido

Introduction	1
1 Preliminares	3
1.1 Los espacios $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R}^2)$	3
1.2 La transformada de Fourier y el Lema de división de Wiener	4
1.2.1 Transformada de Fourier	4
1.2.2 El álgebra $L^1(\mathbb{R})$	6
1.3 Álgebras C^*	10
2 Espacios de Fock	11
2.1 Espacios de Fock y anti-Fock	11
2.2 Espacio de Fock armónico	17
2.3 Representación del espacio de Fock armónico	21
3 Operadores de Toeplitz con símbolo radial en espacios de Fock	31
3.1 Operadores de Toeplitz	31
3.2 Operadores radiales	33
4 Álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz radiales	41
4.1 El espacio de funciones acotadas uniformemente continuas	42
4.1.1 Propiedad de oscilación raíz cuadrada de las sucesiones en Γ	46
4.2 Densidad de Γ en $RO(\mathbb{Z}_+)$	48

Notación

La siguiente lista describe algunos símbolos que serán utilizados en este trabajo.

$L^p(\mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones p -integrables con respecto a la medida de Lebesgue usual, $p \geq 1$
$f * g$	Convolución de dos funciones
S^1	Círculo unitario en el plano
X^*	Dual de un espacio de Banach X
$\ell^1(\mathbb{Z})$	Álgebra de Banach formada por las sucesiones sumables en \mathbb{Z} con la suma puntual y la convolución como producto
$A(S^1)$	Álgebra de Wiener formada por las funciones definidas en el círculo unitario cuya transformada de Fourier discreta es absolutamente sumable
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	Álgebra de operadores acotados definidos de \mathcal{H} en \mathcal{H}
\mathcal{F}_α^2	Espacio de Fock con peso α
$\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$	Espacio anti-Fock con peso α
h_α^2	Espacio de Fock armónico con peso α
\widehat{T}_a	Operador de Toeplitz con símbolo a actuando en el espacio de Fock armónico
$L^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones en el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ esencialmente acotadas con respecto a la medida de Lebesgue
$K_w, \widetilde{K}_w, \widehat{K}_w$	Funciones núcleo reproductor de los espacios de Fock, anti-Fock y Fock armónico, respectivamente
I	Operador identidad actuando en el espacio correspondiente
$\text{Rad}(S)$	Radialización del operador S
$\text{rad}(a)$	Radialización de la función a
ℓ^2	Espacio de sucesiones cuadrado sumables en \mathbb{Z}
$\ell^2(A)$	Espacio de sucesiones cuadrado sumables en $A \subset \mathbb{Z}$
$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$	Entero anterior y posterior inmediato al número real x , respectivamente

$C_{b,u}(X, d)$	Espacio de funciones complejo-valuadas en X acotadas y uniformemente continuas con respecto a la métrica d
$C_{b,u}$	Espacio de funciones complejo-valuadas en \mathbb{R} acotadas y uniformemente continuas con respecto a la métrica usual
$L^\infty(\Omega, d\mu)$	Espacio de funciones en el conjunto Ω esencialmente acotadas con respecto a la medida $d\mu$
$dA(z)$	Medida de área usual en el plano $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $dA(z) = dx dy$, $z = x + iy$
$L^2(\Omega, d\mu)$	Espacio de funciones cuadrado integrables en Ω con respecto a la medida $d\mu$
\mathbb{Z}_+	Conjunto de los números naturales junto con el cero
$\mathcal{F}(f), \hat{f}$	Transformada de Fourier ó transformada discreta de Fourier de la función f
χ_A	Función característica del conjunto A
$B(a, r)$	Bola centrada en a y radio r

Introducción

Este trabajo está dedicado al estudio del tema de los operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Fock armónico, i.e., el espacio de funciones armónicas cuadrado integrables con respecto a la medida $d\lambda_\alpha(z) = \alpha\pi^{-1}e^{-\alpha|z|^2}$. El estudio de los operadores de Toeplitz comenzó como resultado de los trabajos realizados por Otto Toeplitz (1881-1940) sobre matrices que son constantes en cada diagonal. Desde entonces se ha incrementado el interés en el tema. Diversos trabajos se han publicado utilizando diferentes clases de símbolos (e.g., radiales, verticales, etc.) y en gran variedad de espacios, incluyendo los espacios de Hardy y de Bergman, el dominio de Siegel, la bola unitaria, etc.

El espacio de Fock armónico (en honor de Vladimir Aleksandovich Fock(1898-1974)) es una generalización natural del espacio de Fock de funciones analíticas (también llamado espacio de Bargmann (Valentine Bargmann 1908-1989) o espacio de Segal-Bargmann (Irving Ezra Segal 1918-1998)), este último de gran importancia en diversas áreas tales como la mecánica cuántica, la teoría de probabilidad y las álgebras de operadores. El espacio de funciones armónicas en \mathbb{C} además de contener propiamente al espacio de funciones enteras, es de gran importancia en la matemática aplicada, ecuaciones diferenciales y, por supuesto, análisis armónico. La idea de extender el espacio de Fock al espacio de Fock armónico surge de trabajos similares hechos en el espacio de Bergman, el dominio de Siegel y la bola unitaria.

Durante el desarrollo de la tesis se presentan varios resultados referentes al espacio de Fock armónico y los Operadores de Toeplitz. De entre estos el más importante es la descripción del álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz radiales actuando en este espacio. Para este caso, el álgebra generada es conmutativa, isomorfa a un subálgebra de ℓ^∞ . Resulta digno de atención el hecho que el resultado sea prácticamente el mismo que para el caso de Fock (ver [4]) y, a pesar de esto, se encuentran fuertes diferencias entre los operadores actuando en un espacio y otro. En particular podemos mencionar que los operadores de Toeplitz con el mismo símbolo actuando en ambos espacios no son, en general, unitariamente equivalentes. Cabe mencionar que esta analogía entre las álgebras generadas por operadores de Toeplitz radiales en un espacio de funciones analíticas y el álgebra generada por operadores actuando en funciones armónicas se puede observar en otros casos, como lo es el de Bergman.

Al describir el espacio de Fock armónico en término de funciones analíticas podremos extender todas las propiedades que se conocen de ese espacio, en particular dar una base ortonormal, la cual está en términos de monomios en z y \bar{z} . Esto nos dará la oportunidad de estudiar los operadores de Toeplitz radiales de forma que observaremos de forma explícita cómo actúan en las funciones armónicas. Los mismos resultados se muestran utilizando una acercamiento diferente. Extenderemos algunos de los resultados para el caso de Fock dados en [5] utilizando las herramientas presentadas en [6]. Esta técnica es interesante por sí misma ya que una generalización de la misma puede aplicarse a otras clases de símbolos.

Por último, resaltamos que en este trabajo se considerarán espacios con peso $\alpha\pi^{-1}e^{-\alpha|z|^2}$, con $\alpha > 0$. Cabe destacar que aunque el peso no afecta la forma en como actúan los operadores de Toeplitz con símbolo radial, sí muestra la forma general de los espacios, lo cual puede ser de interés para quien necesite estas expresiones de forma explícita.

A continuación presentaremos la estructura general de la tesis, la cual está desglosada en cuatro capítulos:

El capítulo 1 presenta los resultados necesarios para desarrollar la teoría en el resto de la tesis, especialmente en el capítulo 4. El capítulo 2 tiene como objetivo estudiar el espacio de Fock armónico h_α^2 . Esto se hará partiendo del estudio de los espacios de Fock \mathcal{F}_α^2 de funciones analíticas y anti-Fock $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ de funciones anti-analíticas. En efecto, mostraremos que el espacio de Fock armónico puede descomponerse en la forma $h_\alpha^2 = \mathcal{F}_\alpha^2 \ominus (\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \setminus \mathbb{C})$, es decir, el espacio de Fock armónico se puede escribir como suma directa de funciones analíticas y funciones anti-analíticas que valen cero en cero. Por otra parte, utilizando herramientas de [5] y [6], proporcionaremos una representación del espacio de Fock armónico como el espacio de sucesiones cuadrado sumables en \mathbb{Z} .

En el capítulo 3 nos enfocaremos en los operadores de Toeplitz en h_α^2 . Daremos su definición así como algunas de sus propiedades elementales, estudiaremos la clase de operadores de Toeplitz con símbolo radial y acotado y mostraremos cómo actúan, describiendo sus eigenvalores. Como parte del estudio de los operadores con símbolo radial, definiremos los operadores radiales y daremos una caracterización de los mismos utilizando la radialización de un operador. Además, demostraremos que los operadores radiales actúan de forma diagonal en la base $\{\hat{e}_n\}$ y tienen estructura de álgebra C^* . Utilizaremos la radialización para probar que un operador de Toeplitz es radial si y sólo si proviene de un símbolo radial, i. e., los operadores de Toeplitz con símbolo radial y los operador de Toeplitz radiales son el mismo conjunto. Para cerrar el capítulo, utilizando la representación dada en el capítulo caracterizaremos a los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado, de forma que se observe la técnica desarrollada para otros espacios y clases de símbolos.

Recientemente, en el año 2015, [4] describió el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Fock. En el capítulo 4 nosotros haremos una revisión de este trabajo, el cual resulta también ser válido para el espacio de Fock armónico. Describiremos el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado a través de su relación con las sucesiones γ_α descritas en el capítulo 3. Al final del capítulo se mostrará el resultado más importante del trabajo, el cual muestra en resumen el trabajo de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Los espacios $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R}^2)$

Sean $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, dx)$ y $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}^2, dA)$ los espacios de funciones cuadrado integrables con la medida de Lebesgue usual en la recta y el plano, respectivamente. En esta sección construiremos una base ortonormal para el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$ a partir de una conocida para $L^2(\mathbb{R})$: el conjunto de polinomios de Hermite con peso.

El n -ésimo polinomio de Hermite está definido por la fórmula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

El conjunto de polinomios de Hermite con peso $\{e^{-x^2} H_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$; véase [11, §5]. Más aún, para cada $\alpha > 0$ el conjunto de funciones $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ definidas como

$$h_n(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\alpha x^2} H_n(\sqrt{2\alpha}x), \quad (1.1)$$

es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$ (ver [15, §6]).

A partir de las funciones h_n definidas en la Ecuación (1.1) podemos construir una base para $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la siguiente forma: el espacio $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ tiene una base ortonormal dada por $\{h_n \otimes h_m\}_{n,m \in \mathbb{Z}_+}$. Por otro lado, el espacio $L^2(\mathbb{R}^2)$ puede identificarse con $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ mediante la asignación

$$f(x) \otimes g(y) \mapsto f(x)g(y),$$

con $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto, el conjunto $\{h_n(x)h_m(y)\}_{n,m \in \mathbb{Z}_+}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^2)$; para ver más detalles consultar [13, §3].

Es importante remarcar que el conjunto formado por todos los elementos de la forma

$$x^n y^m e^{-\alpha(x^2+y^2)}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+$$

es denso en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Si escribimos $z = x + iy$, entonces el conjunto

$$\{z^n \bar{z}^m e^{-\alpha|z|^2}\}_{n,m \in \mathbb{Z}_+} \quad (1.2)$$

es denso en $L^2(\mathbb{C}, dA)$.

1.2 La transformada de Fourier y el Lema de división de Wiener

El objetivo de esta sección es demostrar el Lema de división de Wiener, que será de utilidad en el Capítulo 4. Para esto recordaremos algunos resultados fundamentales de la transformada de Fourier. Posteriormente, definiremos y estudiaremos el álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R})$ de funciones integrables en \mathbb{R} .

1.2.1 Transformada de Fourier

El espacio $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx. \quad (1.3)$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. La *transformada de Fourier* $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ de f está definida por la ecuación

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi ixy} dy.$$

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ es un operador lineal.

A continuación enunciaremos algunos resultados y propiedades relacionados con la transformada de Fourier que utilizaremos posteriormente. Los detalles de las demostraciones pueden consultarse en [1, §6] y [9, §1].

Dada una función integrable, su transformada de Fourier es una función continua y acotada. Además, para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se satisface

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = 0.$$

Teorema 1.2.1 (de inversión). *Si f y \hat{f} pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy, \quad (1.4)$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}$. Si f es continua entonces (1.4) se satisface para todo $x \in \mathbb{R}$.

La Ecuación (1.4) es conocida como *fórmula de inversión de Fourier*. Notemos que el Teorema 1.2.1 implica que $f \equiv 0$ si y sólo si $\hat{f} \equiv 0$. Como consecuencia, la transformada de Fourier es inyectiva.

Ejemplo 1.2.2. Para $a > 0$ se tiene

$$\hat{\chi}_{[-a,a]}(x) = \int_{-a}^a e^{2\pi ixy} dy = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2\pi ax)}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 2a, & x = 0. \end{cases}$$

Ahora definiremos una operación importante en el estudio de la transformada de Fourier y que fungirá como producto en el álgebra $L^1(\mathbb{R})$: la convolución. Dadas dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ su *convolución* está definida como la función

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

La convolución de f y g existe si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y, en este caso, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Además, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Otra propiedad importante de la transformada de Fourier que relaciona la convolución con el producto puntual es la siguiente.

Proposición 1.2.3. Para $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ se cumple

$$\widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.2.4. Consideremos la función trapecio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2, \\ 1, & |x| < 1, \\ 2 - |x|, & 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

Podemos verificar directamente que $f = \chi_{[-3/2, 3/2]} * \chi_{[-1/2, 1/2]}$. De la Proposición 1.2.3 y el Ejemplo 1.2.2 tenemos que

$$g(x) := \widehat{f}(x) = \widehat{\chi}_{[-3/2, 3/2]}(x) \cdot \widehat{\chi}_{[-1/2, 1/2]}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(3\pi x)\text{sen}(\pi x)}{(\pi x)^2}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Observemos que f es continua y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Del Teorema de inversión concluimos que $\widehat{g} \equiv f$.

Dos de los principales objetos de estudio en análisis armónico clásico son los operadores de multiplicación y traslación $M_\rho, \tau_t : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ definidos por las fórmulas

$$\begin{aligned} M_\rho f(x) &= \rho f(\rho x), \\ \tau_t f(x) &= f(x - t). \end{aligned}$$

Podemos verificar directamente que ambos operadores son isometrías. Además, estos operadores interactúan con la transformada de Fourier de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_t f}(x) &= e^{-2\pi i x t} \widehat{f}(x), \\ \widehat{e^{2\pi i x t} f}(x) &= \widehat{\tau_t f}(x), \\ \widehat{M_\rho f}(x) &= \widehat{f}(x/\rho). \end{aligned} \tag{1.6}$$

En los siguientes resultados mostraremos algunas propiedades que cumplen los operadores τ_t y M_ρ .

Proposición 1.2.5. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V_ε del origen tal que

$$\|\tau_t f - f\|_1 < \varepsilon, \quad t \in V_\varepsilon.$$

Demostración. El conjunto de funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^1(\mathbb{R})$. El resultado se sigue entonces aproximando primero para funciones continuas con soporte compacto seguido de un argumento $\varepsilon/3$. ■

Corolario 1.2.6. Para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ la función $t \mapsto \tau_t f$ de \mathbb{R} en $L^1(\mathbb{R})$ es uniformemente continua.

Proposición 1.2.7. Sean $f, h \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\left\| (M_\rho h) * f - \left(\int_{\mathbb{R}} h(x) dx \right) f \right\|_1 \rightarrow 0, \quad (\rho \rightarrow \infty).$$

Demostración. El valor de la función $(M_\rho h) * f - \left(\int_{\mathbb{R}} h(x) dx\right) f$ en el punto $y \in \mathbb{R}$ puede escribirse en la forma

$$\int_{\mathbb{R}} M_\rho h(x) (f(y-x) - f(y)) dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| (M_\rho h) * f - \left(\int_{\mathbb{R}} h(x) dx\right) f \right\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} |M_\rho h(x)| \|\tau_x f - f\|_1 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |h(x)| \|\tau_{x/\rho} f - f\|_1 dx. \end{aligned}$$

Como $\|\tau_x f - f\|_1 \leq 2\|f\|_1$ tenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |h(x)| \|\tau_{x/\rho} f - f\|_1 dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} |h(x)| \|\tau_{x/\rho} f - f\|_1 dx = 0,$$

ya que, de la Proposición 1.2.5 se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0} \|\tau_t f - f\|_1 \rightarrow 0$. ■

1.2.2 El álgebra $L^1(\mathbb{R})$

El conjunto $L^1(\mathbb{R})$ de funciones integrables en \mathbb{R} forma un álgebra de Banach conmutativa con la norma (1.3), la suma puntual y el producto dado por la convolución definida en (1.5). Ahora veremos que aunque $L^1(\mathbb{R})$ no tiene identidad, sí tiene *identidad aproximada*. Más aún, en el caso de $L^1(\mathbb{R})$ podemos encontrar sucesiones que son identidades aproximadas, e.g., las sucesiones de Dirac. La siguiente proposición muestra que el álgebra $L^1(\mathbb{R})$ tiene identidades aproximadas.

Proposición 1.2.8. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que \hat{h} tiene soporte compacto, $\hat{h}(0) = 1$ y*

$$\|h * f - f\|_1 < \varepsilon,$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Demostración. Tomemos una función $h_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que \hat{h}_0 tenga soporte compacto y $\hat{h}_0(0) = 1$ (véase el Ejemplo 1.2.4). De la Proposición 1.2.7, para $\rho > 0$ suficientemente grande,

$$\|(M_\rho h_0) * f - \hat{h}_0(0) f\|_1 < \varepsilon,$$

por lo que $M_\rho h_0$ satisface lo deseado. ■

Notemos que $\{M_\rho h_0\}_{\rho \in \mathbb{R}}$ es una identidad aproximada del álgebra $L^1(\mathbb{R})$. Por otra parte, una sucesión $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R})$ es llamada una *sucesión de Dirac* si satisface las siguientes condiciones:

a) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $h_m(x)$ es positiva.

b) Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} h_m(t) dt = 1.$$

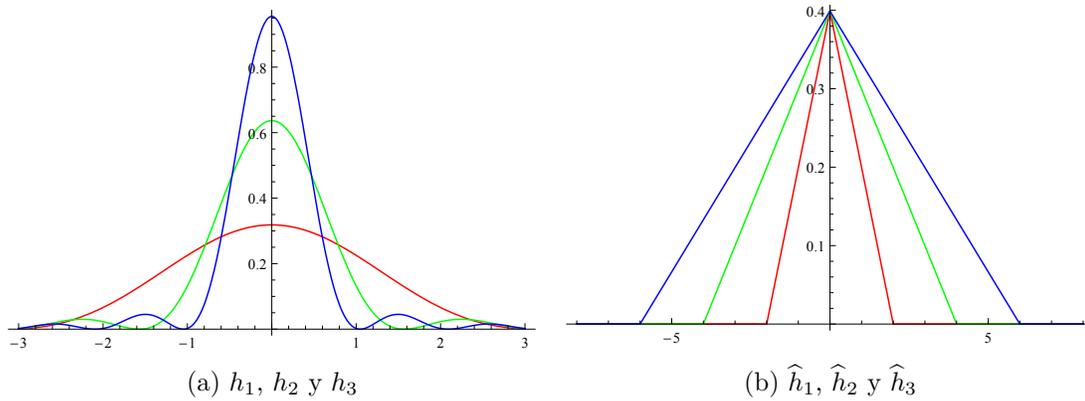


Figura 1.1: Gráficas de los primeros tres elementos de la sucesión de Dirac y su transformada de Fourier dada en 1.2.9

c) Para cada vecindad U del 0 se cumple

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus U} h_m(t) dt = 0.$$

En especial, del Corolario 1.2.6 tenemos que una sucesión de Dirac es una identidad aproximada de $L^1(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.2.9. La sucesión $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ dada por

$$h_m(x) = \frac{\text{sen}^2(mx)}{m\pi x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es una sucesión de Dirac. En efecto, la condición a) se tiene de la definición de h_m . Para b) notemos que

$$h_m = \pi M_m \left((\chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]} * \chi_{[-1/2\pi, 1/2\pi]})^\wedge \right),$$

por lo que, de la Ecuación (1.6) y de la fórmula de inversión de Fourier obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} h_m(x) dx = \hat{h}_m(0) = 1.$$

Para comprobar la propiedad c) observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} h_m(x) dx &= \int_{|x| > \delta} \frac{\text{sen}^2(mx)}{m\pi x^2} dx \\ &= 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(mx)}{m\pi x^2} dx \\ &\stackrel{y=mx}{=} 2 \int_{m\delta}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(y)}{\pi y^2} dy. \end{aligned}$$

La última integral tiende a cero cuando $m \rightarrow \infty$.

Podemos dotar a la imagen de $L^1(\mathbb{R})$ bajo la transformada de Fourier, $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, de una estructura de álgebra de Banach con las operaciones puntuales y con la norma dada por

$$\|\hat{f}\| = \|f\|_1.$$

Esta álgebra tendrá un papel importante en la demostración de los teoremas que se presentan a continuación.

El lema de división de Wiener

La transformada discreta de Fourier

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} f(t) t^{-n} \frac{dt}{it}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.7)$$

es un isomorfismo entre $\ell^1(\mathbb{Z})$ y el álgebra de Wiener $A(S^1)$. El lema de Wiener nos dice que un elemento $f \in A(S^1)$ que no se anula en S^1 es invertible en $A(S^1)$, es decir $1/f \in A(S^1)$. En otras palabras, el lema de Wiener es una herramienta que nos ayuda a determinar si un elemento de $\ell^1(\mathbb{Z})$ es o no invertible.

En esta sección demostraremos un resultado similar al lema de Wiener conocido como *lema de división de Wiener*, que nos ayudará a determinar cuándo una función en $L^1(\mathbb{R})$ puede escribirse como el producto de dos elementos de $L^1(\mathbb{R})$. Similar al caso del Lema de Wiener, la demostración se hará a través del álgebra $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ de las transformadas de Fourier de funciones integrables. Con este fin presentamos el Teorema de Wiener-Levy.

Teorema 1.2.10 (Wiener-Levi). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Si V es una vecindad de $\hat{f}(K)$ y $A : V \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica entonces existe una función $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g}(t) = A(\hat{f}(t))$ para todo $t \in K$.*

La demostración del Teorema 1.2.10 requiere del siguiente lema, el cual presentaremos sin demostración; véase [9, §1].

Lema 1.2.11. *Sea $\hat{f} \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ existe una función $\hat{h}_{t_0} \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ tal que*

$$i) \hat{h}_{t_0}(t) = 1, \text{ para } t \text{ cerca de } t_0;$$

$$ii) \left\| (\hat{f} - \hat{f}(t_0)) \hat{h}_{t_0} \right\| < \varepsilon.$$

El siguiente lema es una versión local del Teorema de Wiener-Levy.

Lema 1.2.12. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Sea t_0 un punto en K . Si V es una vecindad de $\hat{f}(K)$ y $A : V \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica entonces existe una función $g_{t_0} \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g}_{t_0} = A(\hat{f}(t))$ para todo t en alguna vecindad de t_0 .*

Demostración. Fijemos $\hat{f}(t_0) = z_0$. Entonces para algún $\varepsilon > 0$, si $|z - z_0| < \varepsilon$ entonces

$$A(z) = A(z_0) + \sum_{n \geq 1} c_n (z - z_0)^n.$$

Tomemos h_{t_0} como en el Lema 1.2.11 y definamos

$$\widehat{g}_{t_0} := A(\widehat{f}(0)) \widehat{h}_{t_0} + \sum_{n \geq 1} [(\widehat{f} - \widehat{f}(t_0)) \widehat{h}_{t_0}]^n. \quad (1.8)$$

Entonces la ecuación (1.8) converge en $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ por el inciso *ii*) del Lema 1.2.11. Más aún, por el inciso *i*) del mismo lema tenemos que $\widehat{g}_{t_0}(t) = A(\widehat{f}(t))$ para t cercano a t_0 , lo que demuestra el lema. ■

Demostración del Teorema 1.2.10. Para cada $t_0 \in K$ existe una función $\widehat{g}_{t_0} \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ tal que $\widehat{g}_{t_0}(t) = A(\widehat{f}(t))$ para $t \in U_{t_0}$ una vecindad de t_0 . Además, existen funciones $\widehat{h}'_{t_0} \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ tal que \widehat{h}'_{t_0} se anula fuera de U_{t_0} y es igual a 1 en una vecindad U'_{t_0} de t_0 (ver Ejemplo 1.2.4). Por otro lado, existen una cantidad finita de puntos en K , a saber, t_1, \dots, t_N tal que las correspondientes vecindades U'_{t_n} ($1 \leq n \leq N$) cubren a K . Por simplicidad, de ahora en adelante escribiremos U_n, U'_n, \widehat{g}_n y \widehat{h}'_n en lugar de $U_{t_n}, U'_{t_n}, \widehat{g}_{t_n}$ y \widehat{h}'_{t_n} , respectivamente.

Fijemos $\widehat{e}_1 = \widehat{h}_1$ y $\widehat{e}_n = \widehat{h}'_n(1 - \widehat{h}'_1) \dots (1 - \widehat{h}'_{n-1})$, ($2 \leq n \leq N$). Entonces $\widehat{e}_n \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ y \widehat{e}_n se anula fuera de U_n ($1 \leq n \leq N$). Más aún, por inducción podemos comprobar que

$$\sum_{n=1}^N \widehat{e}_n = 1 - (1 - \widehat{h}'_1) \cdots (1 - \widehat{h}'_N),$$

y, por lo tanto, $\sum_{n=1}^N \widehat{e}_n(t) = 1$ para todo $t \in K$.

Consideremos ahora la función

$$\widehat{g} = \sum_{n=1}^N \widehat{e}_n \widehat{g}_n \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})).$$

Para $t \in K$ tenemos que $\widehat{e}_n \widehat{g}_n(t) = \widehat{e}_n A(\widehat{f}(t))$, ya que $\widehat{e}_n(t) = 0$ si $t \notin U_n$. Entonces

$$\widehat{g}(t) = \left(\sum_{n=1}^N \widehat{e}_n(t) \right) A(\widehat{f}(t)) = A(\widehat{f}(t)) \quad t \in K,$$

como se deseaba. ■

A continuación mostramos el Lema de división de Wiener.

Lema 1.2.13 (de división de Wiener). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que el soporte de \widehat{f} es compacto y $\widehat{g}(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Entonces existe $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f = g * h$.

Demostración. Sea K el soporte de \widehat{f} . Como \widehat{g} no se anula en \mathbb{R} entonces existe una vecindad de $\widehat{g}(K)$ donde la función $A(z) = z^{-1}$ es analítica. Del Teorema de Wiener-Lévy existe $g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{g}_1(t) = 1/\widehat{g}(t)$ en K . Entonces

$$(f * g_1 * g)^\wedge = \widehat{f} \cdot \widehat{g}_1 \cdot \widehat{g} = \widehat{f}.$$

La función $h = f * g_1$ satisface lo deseado. ■

1.3 Álgebras C^*

En esta sección presentamos el concepto de álgebra C^* . Esto nos permitirá dar estructura algebraica al conjunto de operadores radiales y al conjunto de operadores de Toeplitz, los cuales serán estudiados en los Capítulos 3 y 4.

Sea \mathcal{A} un álgebra sobre los complejos. Una involución en \mathcal{A} es una operación $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisface las siguientes condiciones:

- i) $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$,
- ii) $(xy)^* = y^*x^*$,
- iii) $(x^*)^* = x$,

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathcal{A}$. Un *álgebra C^** \mathcal{A} es un álgebra de Banach junto con una involución $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisface la condición C^*

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Ejemplo 1.3.1. Presentamos algunos ejemplos representativos en el tema y que serán utilizados en este trabajo.

1. Sea K un conjunto compacto. El álgebra $C(K)$ de funciones complejo-valuadas definidas en K es un álgebra C^* con las operaciones puntuales, la conjugación como convolución y la norma del supremo. Cabe resaltar que toda álgebra C^* conmutativa es isomorfa a un álgebra de este tipo.
2. El álgebra $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ formada por todas las sucesiones acotadas es un álgebra C^* conmutativa con la norma del supremo y operaciones puntuales.
3. Dado un espacio de Hilbert \mathcal{H} el conjunto de los operadores lineales acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ forma un álgebra C^* con la norma de operadores, la suma usual, la composición como producto y la involución dada por el operador adjunto. Cabe resaltar que cada subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cerrada bajo involuciones es un álgebra C^* .

Es interesante remarcar toda álgebra C^* puede verse como un subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert \mathcal{H} . Este resultado es conocido como construcción GNS (Gelfand-Naimark-Segal); ver [14, §14] para más detalles.

Estamos interesados en las álgebras C^* generadas por cierta clase de operadores acotados. En el capítulo 3 estudiaremos las álgebras C^* generadas por operadores de Toeplitz con símbolos radiales. Este tipo de álgebras es conocido como *álgebras de Toeplitz*.

Capítulo 2

Espacios de Fock

El objetivo de este capítulo es estudiar el espacio de Fock armónico. Se sabe que el espacio de Bergman armónico del semiplano superior es la suma directa del espacio de Bergman y anti-Bergman [7]. En este capítulo demostraremos que este mismo resultado se cumple para el espacio de Fock armónico, es decir, el espacio de Fock armónico es la suma directa del espacio de Fock y anti-Fock. Comenzaremos estudiando propiedades de los espacios de Fock y anti-Fock. Por último, utilizando herramientas de [4] proporcionaremos una representación del espacio de Fock armónico como el espacio de sucesiones cuadrado sumables en \mathbb{Z} .

2.1 Espacios de Fock y anti-Fock

En esta sección definiremos y haremos una breve revisión de algunos resultados básicos sobre los espacios de Fock y anti-Fock. Analizaremos algunas de sus propiedades como espacios de Hilbert, tales como la existencia de la función núcleo reproductor para cada espacio, la proyección ortogonal dada por un operador integral, entre otros. Algunos de estos resultados pueden ser consultados en [15, §2].

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y f una función definida en G tal que sus derivadas parciales existen en cada punto de G . Los operadores de Wirtinger $\frac{\partial f}{\partial z}$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ están definidos por las fórmulas

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (2.2)$$

La regla de la cadena implica el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sea G un dominio en \mathbb{C} . Sean f y g funciones complejo-valuadas en G tales que sus derivadas parciales existan y sean continuas. Entonces, entonces*

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

Además, si $g(G) \subset G$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g \right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g \right) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}$$

Las funciones analíticas se caracterizan por medio de los operadores de Wirtinger de la siguiente manera: f es analítica en el dominio G si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en cada punto $z = (x, y) \in G$, son continuas y se satisface $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Análogamente, decimos que f es anti-analítica en G si sus derivadas parciales existen, son continuas y $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ en G .

Podemos concluir del Lema 2.1.1 que una función es analítica si y sólo si \bar{f} es anti-analítica. Más aún, una función es analítica si y sólo si $f \circ \bar{z}$ es anti-analítica.

Consideremos el plano complejo \mathbb{C} con la medida de probabilidad gaussiana con peso $\alpha > 0$ dada por

$$d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} dA(z), \quad z = x + iy.$$

Denotemos por $L_\alpha^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ el espacio de funciones cuadrado integrables en \mathbb{C} con respecto a $d\lambda_\alpha$.

Para $\alpha > 0$ definimos el *espacio de Fock* \mathcal{F}_α^2 con peso α como el subespacio de todas las funciones analíticas en $L_\alpha^2(\mathbb{C})$.

Un subespacio de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ que está estrechamente relacionado con el espacio de Fock es el *espacio anti-Fock*, denotado por $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$, el cual consiste en todas las funciones anti-analíticas en $L_\alpha^2(\mathbb{C})$.

Propiedades de los espacios de Fock y anti-Fock

En esta sección veremos que los espacios de Fock y anti-Fock son subespacios cerrados de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$, y proporcionaremos fórmulas explícitas para sus núcleos reproductores y para las proyecciones ortogonales de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre cada subespacio.

El siguiente lema muestra que los funcionales evaluación son continuos en \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$.

Lema 2.1.2. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ existen constantes C_z y C'_z tales que*

$$|f(z)| \leq C_z \|f\|$$

y

$$|g(z)| \leq C'_z \|g\|$$

para toda $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ y toda $g \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ y $z \in \mathbb{C}$. Para cada $r > 0$, la serie de Taylor de f

$$f(w) = f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - z)^n, \quad w \in \mathbb{C}$$

converge uniformemente en $\overline{B(z, r)}$. Integrando en $B(z, r)$, haciendo una traslación y cambiando a coordenadas polares vemos que

$$\int_{B(z, r)} (w - z)^n dA(w) = \int_0^r \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta d\rho = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

ya que la integral con respecto a θ es cero para todo $\rho \in [0, r]$. Tenemos entonces que

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z, r)} f(w) dA(w). \quad (2.3)$$

Ahora bien, como $e^{-\alpha|w|^2}$ nunca se anula para $w \in \mathbb{C}$, podemos reescribir (2.3) como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z, r)} e^{\alpha|w|^2} f(w) e^{-\alpha|w|^2} dA(w) \\ &= \frac{1}{\alpha r^2} \int_{\mathbb{C}} \chi_{B(z, r)}(w) e^{\alpha|w|^2} f(w) d\lambda_{\alpha}(w) \\ &= \left\langle \frac{1}{\alpha r^2} \chi_{B(z, r)}(w) e^{\alpha|w|^2}, \bar{f} \right\rangle. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$|f(z)| = \left| \left\langle \frac{1}{\alpha r^2} \chi_{B(z, r)}(w) e^{\alpha|w|^2}, \bar{f} \right\rangle \right| \leq \frac{1}{\alpha r^2} \left(\int_{\mathbb{C}} \chi_{B(z, r)}(w) e^{2\alpha|w|^2} d\lambda_{\alpha}(w) \right)^{1/2} \|f\| = C_z \|f\|,$$

donde

$$C_z = \frac{1}{\alpha r^2} \left(\int_{\mathbb{C}} \chi_{B(z, r)}(w) e^{2\alpha|w|^2} d\lambda_{\alpha}(w) \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

La demostración para el caso anti-Fock es similar. ■

Notemos que para cada $r > 0$ la constante C_z definida en la Ecuación (2.4) depende continuamente de z . En efecto, para $z, z' \in \mathbb{C}$, la función $e^{2\alpha|w|^2}$ es acotada en $B(z, r) \cup B(z', r)$ por una constante M , por lo que

$$\begin{aligned} |C_z^2 - C_{z'}^2| &= \left| \frac{1}{\alpha^2 r^4} \int_{\mathbb{C}} (\chi_{B(z, r)}(w) - \chi_{B(z', r)}(w)) e^{2\alpha|w|^2} dA(w) \right| \\ &\leq C' \int_{\mathbb{C}} |\chi_{B(z, r)}(w) - \chi_{B(z', r)}(w)| dA(w), \end{aligned}$$

donde $C' = \frac{M}{\alpha^2 r^4}$. La última integral tiende a cero cuando $z' \rightarrow z$. Por lo tanto

$$\lim_{z' \rightarrow z} |C_z^2 - C_{z'}^2| = 0.$$

Es decir, la función $z \mapsto C_z^2$ es continua y, en consecuencia, $z \mapsto C_z$ es continua.

Teorema 2.1.3. *El espacio \mathcal{F}_{α}^2 es un subespacio cerrado de $L_{\alpha}^2(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{F}_α^2 que converge a una función f en $L_\alpha^2(\mathbb{C})$. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy, y del Lema 2.1.2 se sigue que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq C_z \|f_n - f_m\|.$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función que llamaremos f_0 . Como $f_n \rightarrow f$ en $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ entonces existe una subsucesión f_{n_k} que converge casi en todo punto a f . Por lo tanto $f = f_0$ casi en todo punto.

Por otro lado, por la continuidad de la función $z \mapsto C_z$, para cada $z \in \mathbb{C}$ existe una constante C y una vecindad $V = V(z, C)$ tal que

$$|h(w)| \leq C \|h\|, \quad h \in \mathcal{F}_\alpha^2, \quad w \in V.$$

Entonces, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} , lo cual implica que f es continua.

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una trayectoria continua diferenciable a trozos. Dado que f_n es entera para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\oint_\gamma f_n(z) dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_\gamma f_n(z) dz = \oint_\gamma f(z) dz.$$

Como γ es una trayectoria arbitraria diferenciable a trozos, por el Teorema de Morera concluimos que f es entera. De aquí obtenemos que $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ y, por lo tanto \mathcal{F}_α^2 es cerrado. ■

Definamos el operador $C : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \rightarrow L_\alpha^2(\mathbb{C})$ por la fórmula

$$Cf(z) = f(\bar{z}).$$

El operador C es un operador unitario. Más aún, C es una isometría de \mathcal{F}_α^2 sobre $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$, lo que implica que \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ son isométricamente isomorfos. Como conclusión, $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ es un subespacio cerrado de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$.

Teorema 2.1.4. *El conjunto $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ dado por*

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}$$

forma una base ortonormal para \mathcal{F}_α^2 .

Demostración. Comenzaremos por demostrar que $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ es un conjunto ortonormal. En efecto, en coordenadas polares, tenemos

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \sqrt{\frac{\alpha^m}{m!}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} e^{i\theta(n-m)} e^{-\alpha r^2} d\theta dr \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \sqrt{\frac{\alpha^m}{m!}} \left(\int_0^\infty r^{n+m+1} e^{-\alpha r^2} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta \right) \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2\alpha^{n+1}}{n!} \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} dr, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Mostraremos por inducción que

$$\int_0^\infty r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} dr = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}},$$

lo cual implicará que $\langle e_n, e_n \rangle = 1$. El caso $n = 0$ es trivial. Observemos que

$$\int_0^\infty r^{2n} r e^{-\alpha r^2} dr = -\frac{1}{2\alpha} r^{2n} e^{-\alpha r^2} \Big|_0^\infty + \frac{n}{\alpha} \int_0^\infty r^{2n-1} e^{-\alpha r^2} dr = \frac{n}{\alpha} \int_0^\infty r^{2(n-1)} r e^{-\alpha r^2} dr. \quad (2.5)$$

Supongamos que el resultado es cierto para n . Entonces, para $n + 1$ tenemos de la Ecuación (2.5) que

$$\int_0^\infty r^{2(n+1)} r e^{-\alpha r^2} dr = \frac{n+1}{\alpha} \int_0^\infty r^{2n} r e^{-\alpha r^2} dr = \frac{(n+1)!}{2\alpha^{n+2}}.$$

Ahora mostremos que $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ es una base ortonormal. Dada $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ y $n \geq 0$ tenemos

$$\langle f, e_n \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq R} f(z) \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z).$$

Como

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k \quad (2.6)$$

converge uniformemente en $|z| \leq R$ tenemos

$$\int_{|z| \leq R} f(z) \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \int_{|z| \leq R} a_k z^k \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) = a_n \int_{|z| \leq R} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z),$$

ya que $\int_{|z| \leq R} a_k z^k \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) = 0$ para $k \neq n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle f, e_n \rangle &= \lim_{R \rightarrow \infty} a_n \int_{|z| \leq R} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) \\ &= a_n \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z) \\ &= a_n \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} d\theta dr \\ &= \sqrt{\frac{n!}{\alpha^n}} a_n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por último, supongamos que $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ satisface $\langle f, e_n \rangle = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la Ecuación (2.7), los coeficientes a_n dados en (2.6) son cero para todo n . De aquí concluimos que $f \equiv 0$ y, por lo tanto, $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ es una base ortonormal para \mathcal{F}_α^2 . ■

Como consecuencia del Teorema 2.1.4 se tienen los siguientes resultados.

Corolario 2.1.5. *El conjunto $\{\tilde{e}_n\}_{n=0}^\infty$ dado por*

$$\tilde{e}_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n$$

forma una base ortonormal para $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$.

Corolario 2.1.6. Para cada $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ tenemos:

1. La serie de potencias de f centrada en $z = 0$ está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

2. La serie de potencias converge en \mathcal{F}_α^2 .

3.

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\alpha^n} a_n^2,$$

donde $a_n, n = 0, 1, \dots$ son los coeficientes de la serie de Taylor de f centrada en $z = 0$.

Del Teorema 2.1.3 sabemos que los espacios de Fock y anti-Fock son subespacios cerrados de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$, en consecuencia ambos son espacios de Hilbert. Por otra parte, el Lema 2.1.2 nos dice que los funcionales evaluación son acotados, esto garantiza la existencia del núcleo reproductor para ambos espacios.

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert formado por funciones complejo-valuadas definidas sobre un conjunto Ω . Si para cada $x \in \Omega$ el funcional evaluación $\varphi_x(f) := f(x)$ es acotado, entonces por el Teorema de representación de Riesz existe un elemento $R_x \in \mathcal{H}$ tal que $\varphi_x(f) = \langle f, R_x \rangle$. Con las condiciones dadas anteriormente, decimos que la función $R : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$R(x, y) = R_y(x)$$

es el núcleo reproductor de \mathcal{H} .

Proposición 2.1.7. El núcleo reproductor de \mathcal{H} cumple las siguientes propiedades:

- a) $R(x, y) = \overline{R(y, x)}$.
- b) $\|R_y\|^2 = R(y, y)$.
- c) Si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} entonces

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x) \overline{e_n(y)}.$$

En lo siguiente denotaremos por $K_w(z) = K(z, w)$ y por $\widetilde{K}_w(z) = \widetilde{K}(z, w)$ los núcleos reproductores de \mathcal{F}_α^2 y $\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$, respectivamente.

Teorema 2.1.8. Los núcleos reproductores de \mathcal{F}_α^2 y $\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ están dados por $K(z, w) = e^{\alpha z \bar{w}}$ y $\widetilde{K}(z, w) = e^{\alpha \bar{z} w}$, respectivamente.

Demostración. El resultado se sigue directamente aplicando el inciso c) de la Proposición 2.1.7, el Teorema 2.1.4 y el Corolario 2.1.5. ■

Notemos que $\widetilde{K}(z, w) = \overline{K}(z, w)$. Como consecuencia de la existencia de los núcleos reproductores tenemos una representación integral para las proyecciones ortogonales de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre \mathcal{F}_α^2 y $\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$, respectivamente.

Corolario 2.1.9. Las proyecciones ortogonales $P : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^2$ y $\tilde{P} : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ son operadores integrales y están dadas por

$$Pf(w) = \int_{\mathbb{C}} K(w, z)f(z)d\lambda_\alpha(z), \quad f \in L_\alpha^2(\mathbb{C}), \quad w \in \mathbb{C},$$

y

$$\tilde{P}g(w) = \int_{\mathbb{C}} \tilde{K}(w, z)g(z)d\lambda_\alpha(z), \quad g \in L_\alpha^2(\mathbb{C}), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Sea $f \in L_\alpha^2(\mathbb{C})$ y $w \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} Pf(w) &= \langle Pf, K_w \rangle = \langle f, PK_w \rangle = \langle f, K_w \rangle \\ &= \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{K(z, w)}d\lambda_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{C}} f(z)K(w, z)d\lambda_\alpha(w), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. El resultado para \tilde{P} se obtiene de manera similar. ■

Corolario 2.1.10. Sean $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ y $g \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$. Entonces

$$|f(w)| \leq e^{\frac{\alpha|w|^2}{2}} \|f\| \tag{2.8}$$

y

$$|g(w)| \leq e^{\frac{\alpha|w|^2}{2}} \|g\|, \tag{2.9}$$

para cada $w \in \mathbb{C}$.

Demostración. De la Proposición 2.1.7 y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$|f(w)| = \langle f, K_w \rangle \leq \|f\| \|K_w\| = \sqrt{K(w, w)} \|f\| = e^{\frac{\alpha|w|^2}{2}} \|f\|.$$

De donde se sigue el resultado.

La demostración de (2.9) se obtiene de manera similar. ■

2.2 Espacio de Fock armónico

En esta sección estudiaremos el espacio de Fock armónico y su relación con los espacios de Fock y anti-Fock.

Sea $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función en $C^2(\mathbb{C})$. Decimos que h es armónica si

$$\Delta h(z) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy.$$

Si escribimos $h = u + iv$, con $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces h es armónica si y sólo si u y v son funciones armónicas.

Utilizando los operadores de Wirtinger dados por las Ecuaciones (2.1) y (2.2) podemos reescribir el laplaciano Δh como

$$\Delta h = 4 \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Por lo tanto, una función $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es armónica si y sólo si

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z} \partial z} = 0.$$

Recordemos que dada una función armónica $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ podemos construir una función $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ igualmente armónica tal que $f := u + iv$ satisfaga las condiciones de Cauchy-Riemann, i.e., f sea analítica. A la función armónica v se le llama la armónica conjugada de u . Es importante remarcar que v es única salvo por la adición de constantes.

Lema 2.2.1. *Sea $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función armónica. Entonces existen funciones analíticas f, g en \mathbb{C} tales que*

$$h = f + \bar{g}.$$

Esta descomposición es única excepto por la adición de constantes.

Demostración. Escribamos $h = u_1 + iu_2$ con $u_1, u_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Sean v_1 y v_2 las conjugadas armónicas de u_1 y u_2 , respectivamente. Entonces las funciones $U = u_1 + iv_1$, $V = i(u_2 + iv_2)$ son analíticas. En consecuencia $f = (U + V)/2$ y $g = (U - V)/2$ son también analíticas. Además,

$$f + \bar{g} = \frac{u_1 - v_2 + i(v_1 + u_2)}{2} + \frac{u_1 + v_2 - i(v_1 - u_2)}{2} = u_1 + iu_2 = h,$$

que es la descomposición deseada.

Para probar la unicidad de la descomposición anterior supongamos que existen funciones enteras f_1 y g_1 tales que $h = f_1 + \bar{g}_1$. Entonces $f - f_1 = \bar{g}_1 - \bar{g}$. Como $f - f_1$ es analítica y anti-analítica, entonces debe ser una función constante. ■

Estamos interesados en funciones cuadrado integrables respecto a la medida $d\lambda_\alpha^2(\mathbb{C})$. El siguiente resultado nos dice cuándo la conjugada armónica de una función armónica real-valuada es cuadrado integrable. Véase [2, §4].

Proposición 2.2.2. *Sea $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en $L_\alpha^2(\mathbb{C})$. Entonces su conjugada armónica $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ también pertenece a $L_\alpha^2(\mathbb{C})$.*

Demostración. Supongamos que $v(0) = 0$. La función $f = u + iv$ es entera, y por lo tanto puede expandirse en su serie de potencias

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \quad (2.10)$$

Sean a_n y $-b_n$ las partes real e imaginaria de c_n , respectivamente. Escribiendo $c_n z^n$ en coordenadas polares

$$\begin{aligned} c_n z^n &= (a_n - ib_n) r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \\ &= r^n ((a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta + i(-b_n \cos n\theta + a_n \operatorname{sen} n\theta)). \end{aligned}$$

tenemos que (2.10) se expresa como:

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{senn}\theta) + i \sum_{n=1}^{\infty} r^n (-b_n \cos n\theta + a_n \operatorname{senn}\theta). \end{aligned}$$

Es decir,

$$u(re^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{senn}\theta)$$

y

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (-b_n \cos n\theta + a_n \operatorname{senn}\theta).$$

Fijemos $r > 0$. Del Teorema de Parseval se sigue que

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^2 d\theta = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} (a_n^2 + b_n^2)$$

y

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} (a_n^2 + b_n^2).$$

Por lo que

$$\int_0^{2\pi} |v(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^2 d\theta \quad \forall r \geq 0.$$

Supongamos ahora que $u \in L^2_\alpha(\mathbb{C})$, entonces tenemos

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} r |v(re^{i\theta})|^2 e^{-\alpha r^2} dr d\theta \leq \int_0^\rho \int_0^{2\pi} r |u(re^{i\theta})|^2 e^{-\alpha r^2} dr d\theta \leq \int_{\mathbb{C}} |u(z)|^2 d\lambda_\alpha(z) < \infty$$

para toda $\rho > 0$. Podemos concluir entonces que

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 d\lambda_\alpha(z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} r |v(re^{i\theta})|^2 e^{-\alpha r^2} dr d\theta < \infty.$$

Es decir, $v \in L^2_\alpha(\mathbb{C})$. ■

Es interesante el hecho de que la proyección ortogonal de \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ sobre el espacio de funciones constantes esté dada por la evaluación en cero.

Lema 2.2.3. *Si $f \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ es analítica, entonces*

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) d\lambda_\alpha(z) = f(0).$$

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n z^n$ la expansión en serie de potencias de f . Para $r > 0$ fijo tenemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} f(z) d\lambda_\alpha(z) &= \int_{B(0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n d\lambda_\alpha(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{B(0,r)} z^n d\lambda_\alpha(z) = a_0 \int_{B(0,r)} d\lambda_\alpha(z). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $r \rightarrow \infty$ en la expresión anterior obtenemos

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) d\lambda_\alpha(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} f(z) d\lambda_\alpha(z) = a_0 \int_{B(0,r)} d\lambda_\alpha(z) = f(0).$$

Que es lo que deseábamos demostrar. ■

Observemos que la resta directa

$$\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C} = \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \cap \mathbb{C}^\perp,$$

donde \mathbb{C} representa el espacio de funciones constantes, coincide con el subespacio del espacio anti-Fock $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ cuyas funciones valen cero en cero. Por lo tanto, el Lema 2.2.3 implica que \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$ son ortogonales.

El espacio de Fock armónico

Definimos el *espacio de Fock armónico*, denotado por h_α^2 , como el espacio de todas las funciones armónicas en $L_\alpha^2(\mathbb{C})$.

Del Lema 2.2.1 sabemos que la parte analítica y anti-analítica de una función armónica se pueden escribir en términos de su parte real e imaginaria. Más aún, si la función armónica pertenece a h_α^2 entonces de la Proposición 2.2.2 su parte analítica y anti-analítica pertenecen a \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$, respectivamente. De lo anterior obtenemos la descomposición del espacio de Fock armónico h_α^2 .

Teorema 2.2.4. *El espacio de Fock armónico h_α^2 se puede descomponer como*

$$h_\alpha^2 = \mathcal{F}_\alpha^2 \oplus (\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}).$$

Este resultado, análogo a la descomposición del espacio armónico en el espacio de Bergman, será útil para obtener relaciones entre los operadores de Toeplitz actuando en los espacios de Fock y anti-Fock, y los operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Fock armónico.

Del Teorema 2.2.4 concluimos que el espacio h_α^2 es un subespacio cerrado de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ y si escribimos

$$\hat{e}_n = \begin{cases} e_n, & n \geq 0, \\ \tilde{e}_{|n|}, & n < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

entonces el conjunto $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de h_α^2 .

Denotaremos por $\widehat{K}_w(z) = \widehat{K}(z, w)$ la función núcleo reproductor del espacio de Fock armónico. Del Teorema 2.1.8 tenemos que $\widehat{K}(z, w)$ es de la forma

$$\widehat{K}(z, w) = K(z, w) + \widetilde{K}(z, w) - 1. \quad (2.12)$$

Esta descomposición del núcleo reproductor nos permite escribir la proyección ortogonal \widehat{P} de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ en h_α^2 como el siguiente operador integral

$$\widehat{P}f(w) = \int_{\mathbb{C}} \widehat{K}(w, z) f(z) d\lambda_\alpha(z), \quad f \in L_\alpha^2(\mathbb{C}). \quad (2.13)$$

Juntando las Ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos que

$$\widehat{P}f(w) = Pf(w) + \widetilde{P}f(w) - 1 \otimes 1f(w), \quad f \in L_\alpha^2(\mathbb{C}) \quad (2.14)$$

donde $1 \otimes 1$ es la proyección de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre el espacio de funciones constantes \mathbb{C} dada por

$$1 \otimes 1(f) = \langle f, 1 \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z) d\lambda_\alpha(z). \quad (2.15)$$

2.3 Representación del espacio de Fock armónico

El espacio de Fock armónico es isométricamente isomorfo al espacio $\ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2$ usando la transformación natural

$$\widehat{e}_n \mapsto (\cdots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ésima}}, 0, \cdots).$$

Sin embargo, al hacer esta transformación perdemos la información que podríamos obtener de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$. En esta sección construiremos una transformación que envíe a $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ en $\ell^2 \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, donde $L^2(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+, dr)$, de tal forma que preserve la asociación natural entre el espacio de Fock armónico h_α^2 y ℓ^2 . Comenzaremos utilizando la llamada transformada tipo Bargmann; ver [8] para más detalles. Desarrollaremos este método en dos ocasiones: la primera para \mathcal{F}_α^2 y la segunda para el espacio $\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$. A continuación describimos este método. Este resultado, análogo a la descomposición del espacio armónico en el espacio de Bergman, será útil para obtener relaciones entre los operadores de Toeplitz actuando en los espacios de Fock y anti-Fock, y los operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Fock armónico.

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y \mathcal{A} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Sea P la proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre \mathcal{A} . Supongamos que existen:

- i) dos espacios medibles $(X, d\mu)$ y $(Y, d\nu)$,
- ii) un operador unitario

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(X, d\mu) \otimes L^2(Y, d\nu),$$

- iii) un subespacio medible X_1 de X y una función $\psi_0 = \psi_0(x, y)$ en $X_1 \times Y$, tal que

- para cada $x \in X_1$ la función $\psi_0(x, \cdot) \in L^2(Y, d\nu)$ y $\|\psi_0(x, \cdot)\|_{L^2(Y, d\nu)} = 1$.
- el operador U transforma \mathcal{A} sobre $\psi_0 L^2(X_1, d\mu) \subset L^2(X, d\mu) \otimes L^2(Y, d\nu)$.

Entonces, para cada $\varphi = \psi_0 f \in U(\mathcal{A}) = \psi_0 L^2(X_1, d\mu)$, con $f \in L^2(X_1, d\mu)$ tenemos que

$$\|\varphi\|_{U(\mathcal{A})} = \|f\|_{L^2(X_1, d\mu)}.$$

Consideremos el encaje isométrico

$$R_0 : L^2(X_1, d\mu) \longrightarrow L^2(X, d\mu) \otimes L^2(Y, d\nu)$$

dado por la fórmula

$$R_0 f = \tilde{f} \psi_0 \in L^2(X_1, d\mu) \otimes \psi_0 L^2(Y, d\nu),$$

donde

$$\tilde{f} = \begin{cases} f, & x \in X_1, \\ 0, & x \in X \setminus X_1. \end{cases}$$

El operador adjunto

$$R_0^* : L^2(X, d\mu) \otimes L^2(Y, d\nu) \longrightarrow L^2(X_1, d\mu)$$

está dado por

$$(R_0^* \varphi)(x) = \int_Y \varphi(x, y) \overline{\psi_0(x, y)} d\nu, \quad x \in X_1.$$

Denotemos por Q a la proyección ortogonal de $L^2(X, d\mu) \otimes L^2(Y, d\nu)$ sobre la imagen de \mathcal{A} bajo el operador unitario U , i.e., $U(\mathcal{A}) = \psi_0 L^2(X_1, d\mu)$. El operador R_0 satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} R_0^* R_0 &= I : L^2(X_1, d\mu) \longrightarrow L^2(X_1, d\mu), \\ R_0 R_0^* &= Q : L^2(X, d\mu) \otimes L^2(Y, d\nu) \longrightarrow U(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Obtenemos así el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *El operador $R = R_0^* U$ transforma al espacio de Hilbert \mathcal{H} en $L^2(X_1, d\mu)$ y su restricción*

$$R|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow L^2(X_1, d\mu)$$

es un isomorfismo isométrico. El operador adjunto

$$R^* = U^* R_0 : L^2(X_1, d\mu) \longrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{H}$$

es un isomorfismo isométrico de $L^2(X_1, d\mu)$ sobre $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$. Más aún, se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} R R^* &= I : L^2(X_1, d\mu) \longrightarrow L^2(X_1, d\mu), \\ R^* R &= P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}, \end{aligned}$$

donde P es la proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre \mathcal{A} .

Comenzaremos con la representación del espacio de Fock. La transformación unitaria U_1 de $L^2_{\alpha}(\mathbb{C})$ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$(U_1 f)(z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}} f(z), \quad (2.16)$$

proporciona una correspondencia entre ambos espacios. La imagen del espacio de Fock bajo U_1 , $U_1(\mathcal{F}_{\alpha}^2)$, es el conjunto de funciones suaves en $L^2(\mathbb{R}^2)$ que satisfacen la ecuación

$$U_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} U_1^{-1} f = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\alpha z}{2} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + \alpha(x + iy) \right) f = 0, \quad (2.17)$$

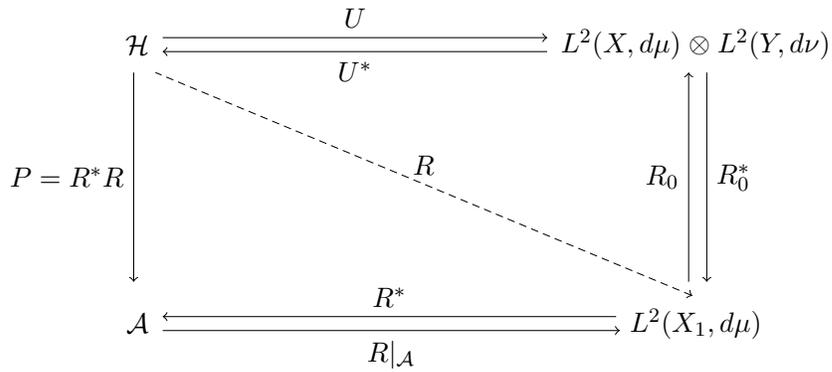


Figura 2.1: Esquema general de una transformada del tipo Bargmann.

donde $z = x + iy$. A lo largo de este trabajo consideraremos símbolos que sólo dependen de la parte radial, por lo que es natural escribir $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ en coordenadas polares, esto es,

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^2) &= L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L^2([0, 2\pi], d\theta) \\ &= L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L^2\left(S^1, \frac{dt}{it}\right) \\ &= L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L^2(S^1), \end{aligned}$$

donde $t = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\frac{dt}{it} = |dt| = d\theta$ es el elemento de longitud. Las relaciones entre las derivadas parciales con respecto a las diferentes variables en coordenadas rectangulares y polares están dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = ie^{i\theta} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Por lo tanto podemos reescribir los operadores dados en las ecuaciones (2.17) como

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\alpha z}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha r \right) = \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha r \right). \quad (2.18)$$

Consideremos la transformada de Fourier discreta $\mathcal{F} : L^2(S^1) \rightarrow \ell^2$ definida como la sucesión

$$\mathcal{F}f = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} f(t) t^{-n} \frac{dt}{it} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad f \in L^2(S^1). \quad (2.19)$$

La inversa de la transformada de Fourier discreta $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^* : \ell^2 \rightarrow L^2(S^1)$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^n, \quad \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2. \quad (2.20)$$

Debido a que el conjunto $\{(2\pi)^{-1/2} e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para $L^2(S^1)$, la transformada de Fourier discreta es un isomorfismo isométrico entre $L^2(S^1)$ y ℓ^2 . Más aún, si f es una función suave y $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es la sucesión dada en (2.19) entonces (2.20) converge absoluta y uniformemente. Definamos el operador unitario

$$U_2 = I \otimes \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L^2(S^1) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes \ell^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr)). \quad (2.21)$$

Tomemos $\{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr))$, donde $f_n(r)$ es una función suave para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces el operador U_2 transforma (2.18) en

$$\begin{aligned} (I \otimes \mathcal{F}) \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha r \right) (I \otimes \mathcal{F}^{-1}) \{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} &= (I \otimes \mathcal{F}) \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha r \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(r) t^n \\ &= (I \otimes \mathcal{F}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} + \alpha r \right) f_n(r) t^n \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n-1}{r} + \alpha r \right) f_{n-1}(r) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Por lo que $U_2 U_1(\mathcal{F}_\alpha^2)$ puede describirse como el subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes \ell^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr))$ formado por las sucesiones $\{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con componentes suaves que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} + \alpha r \right) f_n(r) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

cuya solución general está dada por

$$f_n(r) = a'_n r^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} = a_n \sqrt{\frac{2\alpha^{n+1}}{|n|!}} r^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.22)$$

Como $r^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}$ no es acotado para $n < 0$ y es necesario que las funciones dadas en (2.22) pertenezcan a $L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$, entonces $f_n(r) \equiv 0$ para cada $n < 0$. Se sigue que $U_2 U_1(\mathcal{F}_\alpha^2) \subset L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes \ell^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr))$ coincide con el espacio de todas las sucesiones $\{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con

$$f_n(r) = \begin{cases} a_n \sqrt{\frac{2\alpha^{n+1}}{n!}} r^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}, & \text{si } n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases} \quad (2.23)$$

Además, como

$$\frac{2\alpha^{n+1}}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} dr = 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

entonces

$$\|\{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes \ell^2} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |a_n|^2 \right)^{1/2} = \|\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}\|_{\ell^2},$$

donde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ se extiende a una sucesión en ℓ^2 definiendo $a_n = 0$ para $n < 0$.

Para simplificar $f_n(r)$ consideraremos el operador unitario

$$u_n : L^2(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+, r dr), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

dado por

$$(u_n f)(r) = \omega_n(r) f(\tau_n(r)),$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_n(r) &= \sqrt{\frac{2\alpha^n}{n!}} r^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k r^{2k}}{k!} \right)^{-1/2}, \\ \tau_n(r) &= r^2 - \frac{1}{\alpha} \ln \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k r^{2k}}{k!}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En efecto, la derivada

$$\frac{d\tau_n}{dr} = \frac{2\alpha^n}{n!} r^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{r^{2k}}{k!} \right)^{-1} \geq 0$$

y sólo se anula en $r = 0$. Por lo que τ_n es creciente e invertible. También,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d\tau_n}{dr} = \infty,$$

por lo que τ_n no puede ser acotada y $\tau(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. En conclusión u_n es una biyección. Por último, para $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|u_n f\|_{L^2(\mathbb{R}_+, r dr)}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\alpha^n}{n!} r^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k r^{2k}}{k!} \right)^{-1} \left| f \left(r^2 - \alpha^{-1} \ln \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k r^{2k}}{k!} \right) \right|^2 dr \\ &\stackrel{u=\tau_n(r)}{=} \int_{\mathbb{R}_+} |f(u)|^2 du \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \end{aligned}$$

i.e., u_n es una isometría y, por tanto, unitario.

Finalmente, definamos el operador unitario

$$U_3 : \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr)) \longrightarrow \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+)) = L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$$

por la asignación

$$U_3 : \{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \{u_{|n|}^{-1} c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (2.25)$$

Observemos que, para $\{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definido en (2.23) el operador U_3 actúa de la siguiente forma

$$U_3 \{f_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} u_n^{-1} \left(a_n \sqrt{\frac{2\alpha^{n+1}}{n!}} r^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \right) = a_n \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r}{2}}, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

En conclusión, $U_3 U_2 U_1(\mathcal{F}_\alpha^2)$ coincide con el espacio de sucesiones $\{d_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donde

$$d_n(r) = \begin{cases} a_n \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r}{2}}, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Sea $\psi_\alpha(r) := \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r}{2}}$. Entonces $\psi_\alpha \in L^2(\mathbb{R}_+)$ y $\|\psi_\alpha\| = 1$. Denotemos por L_α el subespacio unidimensional de $L^2(\mathbb{R}_+)$ generado por ψ_α . La proyección ortogonal P_α de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sobre L_α está dada por

$$(P_\alpha f)(r) = \langle f, \psi_\alpha \rangle \psi_\alpha = \alpha \int_{\mathbb{R}_+} f(\rho) e^{-\frac{\alpha(r+\rho)}{2}} d\rho.$$

Consideremos el subespacio ℓ_+^2 de ℓ^2 formado por las sucesiones $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que $c_n = 0$ para $n \in \mathbb{Z}_-$. Denotemos por p^+ a la proyección ortogonal de ℓ^2 en ℓ_+^2 y por $\chi_+ = \{\chi_+(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^\infty$ a la sucesión dada por

$$\chi_+(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Observemos que p^+ es el operador de multiplicación por la sucesión χ_+ , i. e., $\chi_+ I$.

Podemos escribir la imagen del espacio de Fock bajo el operador $U_3U_2U_1$ como $L_\alpha \otimes \ell_+^2$, es decir, $U_3U_2U_1(\mathcal{F}_\alpha^2) = L_0 \otimes \ell_+^2$. Además,

$$P_\alpha \otimes p^+,$$

es la proyección ortogonal de $\ell^2(L^2(\mathbb{R}_+)) = L_2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ sobre $L_\alpha \otimes \ell_+^2$.

Nota 2.3.2. El espacio ℓ_+^2 se corresponde con el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ mediante el encaje natural:

$$\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \mapsto \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} c_n & n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & n \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

En adelante usaremos esta correspondencia de forma implícita.

El siguiente teorema resume la discusión anterior.

Proposición 2.3.3. *El operador unitario $U = U_3U_2U_1$ transforma al espacio $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ en $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ de tal forma que:*

1. *El espacio de Fock \mathcal{F}_α^2 es transformado en $L_\alpha \otimes \ell_+^2$, donde L_α es el espacio generado por la función $\psi_\alpha(r) = \sqrt{\alpha}e^{-\frac{\alpha r}{2}}$.*
2. *La proyección ortogonal P de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre \mathcal{F}_α^2 es unitariamente equivalente a $UPU^{-1} = P_\alpha \otimes p^+$, donde P_α es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sobre L_α y p^+ la proyección de ℓ^2 sobre ℓ_+^2 .*

La teoría que desarrollamos anteriormente para el espacio de Fock tiene su análogo para el espacio anti-Fock. A continuación presentaremos brevemente estos resultados.

La imagen de $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ bajo la transformación unitaria U_1 definida en (2.16) coincide con el conjunto de funciones suaves que satisfacen

$$U_1 \frac{\partial}{\partial z} U_1^{-1} f = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha \bar{z}}{2} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} + \alpha(x - iy) \right) f = 0. \quad (2.26)$$

Pasando a coordenadas polares podemos escribir el operador dado en la Ecuación (2.26) como

$$\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha \bar{z}}{2} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha r \right) = \frac{\bar{t}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha r \right). \quad (2.27)$$

Tomemos $\{g_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr))$, con $g_n(r)$ una función suave para cada $n \in \mathbb{Z}$. De forma análoga al espacio de Fock tenemos que (2.27), bajo el operador unitario U_2 definido en (2.21), se transforma en

$$(I \otimes \mathcal{F}) \frac{\bar{t}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha r \right) (I \otimes \mathcal{F}^{-1}) \{g_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n+1}{r} + \alpha r \right) g_{n+1}(r) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

La imagen de $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ bajo U_2U_1 , es decir $U_2U_1(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2)$, coincide con el subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes \ell^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, r dr))$ formado por las sucesiones $\{g_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con componentes suaves que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} + \alpha r \right) g_n(r) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

cuya solución general está dada por

$$g_n(r) = b'_n r^{-n} e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} = b_n \sqrt{\frac{2\alpha^{-n+1}}{|n|!}} r^{-n} e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}.$$

Es necesario que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $g_n(r)$ pertenezca a $L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$. Por lo tanto, la imagen del espacio anti-Fock bajo la transformación $U_2 U_1$ coincide con el espacio de las sucesiones $\{g_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde

$$g_n(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 0, \\ b_n \sqrt{\frac{2\alpha^{-n+1}}{(-n)!}} r^{-n} e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}, & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Además,

$$\|\{g_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes \ell^2} = \left(\sum_{n \leq 0} |b_n|^2 \right)^{1/2} = \|\{b_n\}_{n \geq 0}\|_{\ell^2},$$

donde $\{b_n\}_{n \leq 0}$ se extiende a una sucesión en ℓ^2 definiendo $b_n = 0$ para $n > 0$.

Consideremos ahora el operador U_3 definido en (2.25). Entonces $U_3 U_2 U_1(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2)$ es el espacio de sucesiones $\{d'_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, definido como

$$d'_n(r) = \begin{cases} 0, & n > 0, \\ b_n \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r}{2}}, & n \leq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Veamos ahora cómo actúa U sobre el espacio de las funciones constantes \mathbb{C} . Para una función constante $c(z) = z_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} U c(z) &= U_3 U_2 U_1 c(z) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} U_3 U_2 z_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} U_3 (I \otimes \mathcal{F}) z_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} U_3 \left\{ z_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S^1 t^{-n} \frac{dt}{it} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \sqrt{2\alpha} U_3 \left\{ z_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \delta_{0,n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= \left\{ \sqrt{\alpha} z_0 e^{-\frac{\alpha r}{2}} \delta_{0,n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

donde $\delta_{0,n}$ es la delta de Kronecker. Entonces, la imagen de \mathbb{C} bajo U coincide con el conjunto

$$\left\{ \left\{ \sqrt{\alpha} z_0 e^{-\frac{\alpha r}{2}} \delta_{0,n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2 : z_0 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sea $\{d'_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in U(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2)$ definida como en (2.28). Entonces

$$\left\langle \left\{ d'_n(r) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \left\{ \sqrt{\alpha} z_0 e^{-\frac{\alpha r}{2}} \delta_{0,n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, dr) \otimes \ell^2} = b_0 z_0 \alpha \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha r} dr = b_0 z_0, \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, $\{d'_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} \perp \mathbb{C}$ si y sólo si $b_0 = 0$. Como U es unitario

$$U(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}) = U(\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2) \cap U(\mathbb{C})^\perp = \left\{ \{d'_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} : b_0 = 0 \right\}, \quad (2.29)$$

con $\{d'_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definido en (2.28).

Introduzcamos el subespacio ℓ_-^2 de ℓ^2 que consiste en todas las sucesiones que se anulan en \mathbb{Z}_+ , y denotemos por p^- a la proyección ortogonal de ℓ^2 sobre ℓ_-^2 . Con la notación anterior podemos escribir la Ecuación (2.29) como

$$U(\mathcal{F}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}) = L_\alpha \otimes \ell_-^2,$$

de donde podemos concluir el siguiente resultado.

Proposición 2.3.4. *El operador unitario $U = U_3 U_2 U_1$ es un isomorfismo isométrico del espacio $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ bajo el cual:*

1. *El espacio $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C} \subset \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ es transformado en $L_\alpha \otimes \ell_-^2$, donde L_α es el espacio generado por $\psi_\alpha(r) = \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r}{2}}$.*
2. *La proyección ortogonal $\tilde{P} - 1 \otimes 1$ de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$, es unitariamente equivalente a $U(\tilde{P} - 1 \otimes 1)U^{-1} = P_\alpha \otimes p^-$, donde P_α es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sobre L_α y p^- la proyección de ℓ^2 sobre ℓ_-^2 .*

Por último, empleando las técnicas usadas en [6] daremos la representación del espacio de Fock armónico.

Teorema 2.3.5. *El operador unitario $U = U_3 U_2 U_1$ es un isomorfismo isométrico del espacio $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ bajo el cual:*

1. *El espacio de Fock armónico h_α^2 es transformado en $L_\alpha \otimes \ell^2$, donde L_α es el espacio generado por $\psi_\alpha(r) = \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r}{2}}$.*
2. *La proyección ortogonal \hat{P} de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre h_α^2 , es unitariamente equivalente a $U(\hat{P})U^{-1} = P_\alpha \otimes I$, donde P_α es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sobre L_α .*

Siguiendo el método descrito al inicio de la sección procederemos a la construcción del operador R del Teorema 2.3.1 para los espacios \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$. Para ello, consideremos el operador unitario $\mathcal{J} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dado por

$$\mathcal{J}\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{c_{-n}\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Observemos que \mathcal{J} puede definirse en $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+))$ por

$$\mathcal{J}\{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{c_{-n}(r)\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

y también es unitario. Introduzcamos el encaje isométrico $R_0 : \ell_+^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ definido por la regla

$$R_0\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} = \psi_\alpha(r)\{\chi_+(n)c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (2.30)$$

Notemos que la imagen de R_0 coincide con $L_\alpha \otimes \ell_+^2 \subset L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$. El operador adjunto $R_0^* : L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2 \rightarrow \ell_+^2$ está dado por

$$R_0^*\{c_n(r)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \chi_+(n)\sqrt{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} c_n(r) e^{-\frac{\alpha r}{2}} dr \right\}_{n \in \mathbb{Z}_+}.$$

Además, R_0 y R_0^* satisfacen

$$\begin{aligned} R_0^* R_0 &= I : \ell_+^2 \longrightarrow \ell_+^2, \\ R_0 R_0^* &= P_\alpha \otimes p^+ : L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2 \longrightarrow L_0 \otimes \ell_+^2. \end{aligned}$$

Definamos el operador $R : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_+^2$ como

$$R = R_0^* U. \quad (2.31)$$

Podemos ver que la imagen de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ bajo R coincide con ℓ_+^2 y su restricción $R|_{\mathcal{F}_\alpha^2} : \mathcal{F}_\alpha^2 \longrightarrow \ell_+^2$ es un isomorfismo isométrico con inversa dada por el operador adjunto $R^* = U^* R_0 : \ell_+^2 \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha^2 \subset L_\alpha^2(\mathbb{C})$. Los operadores R y R^* satisfacen

$$R R^* = I : \ell_+^2 \longrightarrow \ell_+^2, \quad (2.32)$$

$$R^* R = P : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha^2, \quad (2.33)$$

donde P es la proyección ortogonal de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre \mathcal{F}_α^2 .

Similarmente, definamos el operador $\tilde{R} : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_-^2$ como

$$\tilde{R} = p^- \mathcal{J} R_0^* \mathcal{J} U, \quad (2.34)$$

donde R_0^* está definido por la Ecuación (2.30). Entonces $\tilde{R}(L_\alpha^2(\mathbb{C})) = \ell_-^2$ y la restricción $\tilde{R}|_{\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}} : \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C} \longrightarrow \ell_-^2$ es un isomorfismo isométrico con inversa el operador adjunto $\tilde{R}^* = U^* \mathcal{J} R_0 \mathcal{J} : \ell_-^2 \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$. Más aún, \tilde{R} y \tilde{R}^* cumplen

$$\tilde{R} \tilde{R}^* = I : \ell_-^2 \longrightarrow \ell_-^2, \quad (2.35)$$

$$\tilde{R}^* \tilde{R} = \tilde{P} - 1 \otimes 1 : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}, \quad (2.36)$$

donde \tilde{P} y $1 \otimes 1$ son las proyecciones ortogonales de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2$ y \mathbb{C} , respectivamente.

Por último, a partir de la descomposición del espacio de Fock armónico como suma directa de los espacios \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$, dada en el Teorema 2.2.4, definimos el operador

$$\hat{R} : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \oplus L_\alpha^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_+^2 \oplus \ell_-^2 = \ell^2$$

por la regla

$$\hat{R}(f, g) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad f, g \in L_\alpha^2(\mathbb{C}).$$

El operador adjunto $\hat{R}^* : \ell_+^2 \oplus \ell_-^2 \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^2 \oplus (\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C})$ está dado por

$$\hat{R}^* (\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-}) = \begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & \tilde{R}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-} \end{pmatrix}.$$

Note que, tanto \hat{R}^* como $\hat{R}|_{\mathcal{F}_\alpha^2 \oplus (\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C})}$ son isomorfismos isométricos. Además,

$$\hat{R} \hat{R}^* = \begin{pmatrix} R R^* & 0 \\ 0 & \tilde{R} \tilde{R}^* \end{pmatrix} = I : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$

$$\hat{R}^* \hat{R} = \begin{pmatrix} R^* R & 0 \\ 0 & \tilde{R}^* p^- \tilde{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \tilde{P} - 1 \otimes 1 \end{pmatrix} : L_\alpha^2(\mathbb{C}) \oplus L_\alpha^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha^2 \oplus (\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}).$$

Resumiendo lo anterior tenemos el siguiente teorema, que proporciona una forma explícita a la acción de los operadores \hat{R} y \hat{R}^* .

Teorema 2.3.6. *El isomorfismo isométrico $\widehat{R}^* : \ell^2 \longrightarrow h_\alpha^2$ está dado por*

$$\widehat{R}^* \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \widehat{e}_n.$$

El isomorfismo inverso $\widehat{R} : h_\alpha^2 \longrightarrow \ell_+^2$ está dado por

$$\widehat{R}h(z) = \left\{ \int_{\mathbb{C}} h(z) \overline{\widehat{e}_n(z)} d\lambda_\alpha(z) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Demostración. Veamos cómo actúan R^* y \widetilde{R}^* en ℓ_+^2 y ℓ_-^2 , respectivamente. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \ell_+^2$

$$\begin{aligned} R^* \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} &= U_1^* U_2^* U_3^* R_0 \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ &= U_1^* U_2^* U_3^* \{a_n \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ &= U_1^* U_2^* \left\{ a_n \sqrt{\frac{2\alpha^{n+1}}{n!}} r^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ &= U_1^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n \sqrt{\frac{2\alpha^{n+1}}{n!}} (rt)^n e^{-\frac{\alpha r^2}{2}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n e_n. \end{aligned}$$

Similarmente, para $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-} \in \ell_-^2$ se sigue que

$$\widetilde{R}^* \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_-} b_n \widetilde{e}_{|n|}.$$

Por lo tanto, para $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-}) \in \ell^2$

$$\begin{aligned} \widehat{R}^* \left(\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-} \right) &= \begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & \widetilde{R}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^* \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ \widetilde{R}^* \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}_-} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n e_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-} b_n \widetilde{e}_{|n|} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \widehat{e}_n. \end{aligned}$$

El inverso se sigue del hecho que $\widehat{R}^* \widehat{R}|_{h_\alpha^2} = I$. ■

Capítulo 3

Operadores de Toeplitz con símbolo radial en espacios de Fock

Este capítulo está dedicado al estudio de Operadores de Toeplitz con símbolos radiales acotados actuando en el espacio de Fock armónico. A diferencia de otra clase de símbolos, las funciones radiales definen operadores de Toeplitz con una estructura rica e interesante. Como veremos, cálculos directos muestran que un operador de Toeplitz con símbolo radial es diagonal respecto a la base ortonormal del espacio de Fock armónico. La construcción que emplearemos aquí puede utilizarse para estudiar operadores de Toeplitz con símbolos no acotados; ver [5] para ejemplos en el espacio de Fock. Además estudiaremos otra clase de operadores acotados: los operadores radiales. Daremos algunas de sus propiedades y analizaremos su relación con los operadores de Toeplitz con símbolo radial.

3.1 Operadores de Toeplitz

Sea a una función medible con respecto a la medida $d\lambda_\alpha$ y \mathcal{A} un subespacio cerrado de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$. Denotemos por Q la proyección de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ sobre \mathcal{A} . El *operador de Toeplitz* $T_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ con símbolo a está definido como

$$T_a f = Q(af), \quad f \in \mathcal{D}(T_a),$$

donde el conjunto

$$\mathcal{D}(T_a) = \{f \in h_\alpha^2 : af \in L_\alpha^2(\mathbb{C})\}$$

es el *dominio natural del operador del operador de Toeplitz* T_a . Observemos que si $a \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ entonces $\mathcal{D}(T_a) = \mathcal{A}$.

Para el caso especial cuando el símbolo es acotado, tenemos que los operadores de Toeplitz satisfacen las siguientes propiedades

- a) $\|T_a\| \leq \|a\|_\infty$
- b) $T_{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2} = \beta_1 T_{a_1} + \beta_2 T_{a_2}$
- c) $T_a^* = T_{\bar{a}}$
- d) $T_a \geq 0$ si $a \geq 0$,

para cualesquier números complejos β_1, β_2 y funciones a_1, a_2 en $L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Entonces, si a es acotado también lo es T_a . Además, la asociación $a \mapsto T_a$ del símbolo con el operador que define es lineal y preserva involuciones.

De ahora en adelante para $a \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ denotaremos por T_a, \tilde{T}_a y \hat{T}_a a los operadores de Toeplitz actuando en los espacios $\mathcal{F}_\alpha^2, \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$ y h_α^2 , respectivamente.

La siguiente proposición muestra que para el caso del espacio de Fock armónico la asignación $a \mapsto \hat{T}_a$ es inyectiva. La demostración es análoga a la encontrada en [12, §2].

Proposición 3.1.1. *Sea $a \in L^\infty(\mathbb{C})$. El operador de Toeplitz $\hat{T}_a : h_\alpha^2 \rightarrow h_\alpha^2$ es cero si y sólo si $a \equiv 0$ casi en todo punto.*

Demostración. La suficiencia se sigue de la definición del operador. Para probar la necesidad supongamos que para alguna $a \in L^\infty(\mathbb{C})$ se cumple que $\hat{T}_a \equiv 0$. Entonces,

$$\langle a, z^m \bar{z}^n \rangle = \langle az^n, z^m \rangle = \langle \hat{P}(az^m), z^n \rangle = \langle \hat{T}_a z^m, z^n \rangle = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Como el conjunto $\{z^m \bar{z}^n : n, m \in \mathbb{Z}_+\}$ es un subconjunto denso de $L_\alpha^2(\mathbb{C})$ (ver (1.2)), podemos concluir que $a \equiv 0$ casi en todo punto. ■

Decimos que una función $a \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ es *radial* si sólo depende del módulo de la variable, i.e., $a(z) = a(r)$ casi en todo punto, donde $r = |z|$.

El siguiente teorema muestra cómo actúan los operadores de Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Fock armónico h_α^2 . Recordemos que $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ denota la base ortonormal para el espacio de Fock armónico h_α^2 .

Teorema 3.1.2. *Sea $a = a(r) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Los eigenvalores del operador de Toeplitz \hat{T}_a actuando en h_α^2 es el conjunto*

$$\{\gamma_\alpha(n) : n \in \mathbb{Z}_+\},$$

con

$$\gamma_\alpha(n) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} a \left(\sqrt{\frac{r}{\alpha}} \right) r^n e^{-r} dr.$$

Demostración. Podemos verificar directamente que

$$\langle T_a \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle = \delta_{m,n} \gamma_\alpha(|n|), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

donde $\delta_{m,n}$ es la delta de Kronecker. Por lo tanto, para $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle (\hat{T}_a - \gamma_\alpha(|n|)I) \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $\hat{T}_a \hat{e}_n = \gamma_\alpha(|n|) \hat{e}_n$. Tenemos que, para $h \in h_\alpha^2$ de la forma

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \hat{e}_n, \tag{3.1}$$

se cumple

$$\hat{T}_a h = \hat{T}_a \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \hat{e}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_\alpha(|n|) a_n \hat{e}_n. \tag{3.2}$$

Supongamos ahora que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un eigenvalor de \widehat{T}_a , entonces existe $h \in h_\alpha^2$ diferente de cero tal que

$$\widehat{T}_a h = \lambda h.$$

Si escribimos h en la forma (3.1) tenemos de la ecuación (3.2) que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_a(|n|) a_n \widehat{e}_n - \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \widehat{e}_n = 0,$$

por lo que $\lambda = \gamma_a(|m|)$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$. ■

Ejemplo 3.1.3. Sea $a(r) = \chi_{[0,\rho]}$, con $\rho > 0$. Entonces los eigenvalores del operador \widehat{T}_a están dados por

$$\begin{aligned} \gamma_a(n) &= \frac{1}{n!} \int_0^{\rho/\sqrt{\alpha}} r^n e^{-r} dr \\ &= \frac{1}{n!} \left(1 - e^{-\rho/\sqrt{\alpha}} \sum_{j=1}^n j! \left(\frac{\rho}{\sqrt{\alpha}} \right)^j \right). \end{aligned}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ los eigenvalores $\gamma_a(n)$ son diferentes, y sus eigenspacios asociados están generados por los elementos n y $-n$ de la base monomial.

Sea λ un eigenvalor del operador de Toeplitz \widehat{T}_a , con a radial y acotado. Denotemos por $E(\lambda)$ el eigenspacio asociado al eigenvalor λ . Entonces, del Teorema 3.1.2 tenemos que $E(\lambda_1) \neq E(\lambda_2)$ para $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Además, si $\widehat{e}_n \in E(\lambda)$ entonces $\widehat{e}_{-n} \in E(\lambda)$.

En [3] se muestra que los operadores de Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Fock armónico y en el espacio de Fock actúan de forma similar, y más aún, tienen el mismo conjunto de eigenvalores. Por lo tanto, es natural preguntarse si dado un símbolo $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, T_a y \widehat{T}_a son unitariamente equivalentes. Sin embargo, en general si λ es un eigenvalor de T_a y \widehat{T}_a los eigenspacios asociados a λ tienen diferente dimensión (ver Ejemplo 3.1.3). Podemos concluir entonces que, en general, los operadores T_a y \widehat{T}_a no son unitariamente equivalentes.

3.2 Operadores radiales

En esta sección definiremos los operadores radiales y daremos una caracterización de los mismos utilizando la radialización de un operador. Además, demostraremos que los operadores radiales actúan de forma diagonal en la base $\{\widehat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y tienen estructura de álgebra C^* . Por último, probaremos que un operador de Toeplitz es radial si y sólo si proviene de un símbolo radial.

Para $\theta \in \mathbb{R}$ definamos el operador unitario $U_\theta : h_\alpha^2 \rightarrow h_\alpha^2$ por la composición de la función con la rotación por el ángulo θ en sentido negativo, es decir

$$(U_\theta f)(z) = f(ze^{-i\theta}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que $U_\theta = U_{\theta+2\pi}$ y

$$U_\theta \widehat{e}_n(z) = \widehat{e}_n(e^{-i\theta} z) = e^{-in\theta} \widehat{e}_n(z),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Además, una función a es radial si y sólo si

$$U_\theta a(z) = a(e^{-i\theta} z) = a(z), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi).$$

Para $S \in \mathcal{B}(h_\alpha^2)$ definimos la *radialización* de S por

$$\text{Rad}(S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{-\theta} S U_\theta d\theta,$$

donde la integral es entendida en el sentido débil. Es decir, si dada $f \in h_\alpha^2$ existe $h \in h_\alpha^2$ tal que

$$\langle h, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_{-\theta} S U_\theta f, g \rangle d\theta, \quad \forall g \in h_\alpha^2,$$

entonces $h = \text{Rad}(S)f$; para mayor detalle ver [10, §3].

Sea $S \in \mathcal{B}(h_\alpha^2)$. Decimos que S es *radial* si para cada $\theta \in \mathbb{R}$

$$S U_\theta = U_\theta S.$$

Observemos que el operador S es radial si y sólo si $\text{Rad}(S) = S$. En efecto, si $U_{-\theta} S U_\theta = S$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$, entonces para $f \in h_\alpha^2$

$$\begin{aligned} \langle \text{Rad}(S)f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_{-\theta} S U_\theta f, g \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle S f, g \rangle dt \\ &= \langle S f, g \rangle, \end{aligned}$$

para todo $g \in h_\alpha^2$, es decir, $\text{Rad}(S)f = S f$ y por lo tanto $\text{Rad}(S) = S$. Por otro lado, si $\text{Rad}(S) = S$ entonces para cada $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle &= \langle \text{Rad}(S) \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_{-\theta} S U_\theta \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle S U_\theta \hat{e}_n, U_\theta \hat{e}_m \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle S(e^{-i\theta n} \hat{e}_n), e^{-i\theta m} \hat{e}_m \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(n-m)} \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle dt \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle, & m = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\langle U_{-\beta} S U_{\beta} \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle &= \langle S U_{\beta} \hat{e}_n, U_{\beta} \hat{e}_m \rangle \\
&= \langle \text{Rad}(S) U_{\beta} \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_{-\beta} U_{-\theta} S U_{\theta} U_{\beta} \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle S U_{\theta+\beta} \hat{e}_n, U_{\theta+\beta} \hat{e}_m \rangle dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{2\pi+\beta} \langle S U_{\omega} \hat{e}_n, U_{\omega} \hat{e}_m \rangle d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\omega} \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle d\omega \\
&= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle, & m = n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es decir, para cada $\beta \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$, $\langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle = \langle U_{-\beta} S U_{\beta} \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle$, i.e., $U_{-\beta} S U_{\beta} \hat{e}_n = S \hat{e}_n$. Como S es continuo y $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal para h_{α}^2 , entonces $U_{-\beta} S U_{\beta} = S$. En conclusión, S es radial.

Observemos que la Ecuación (3.3) muestra cómo actúa la radialización en los elementos de la base. Denotaremos por \mathcal{R} al conjunto de todos los operadores radiales actuando en el espacio de Fock armónico h_{α}^2 .

Proposición 3.2.1. *El conjunto \mathcal{R} forma un subálgebra C^* de $\mathcal{B}(h_{\alpha}^2)$.*

Demostración. La demostración de que \mathcal{R} es un álgebra es directa. Por otro lado, si $S \in \mathcal{R}$ entonces

$$S^* U_{\theta} = (U_{-\theta} S)^* = (S U_{-\theta})^* = U_{\theta} S, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Esto es, $S \in \mathcal{R}$ y por lo tanto \mathcal{R} es cerrada bajo involuciones. Por último, si $S \in \overline{\mathcal{R}}$ entonces existe una sucesión $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ tal que $S_n \rightarrow S$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como la composición es continua, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$S U_{\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n U_{\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{\theta} S_n = U_{\theta} S,$$

por lo que $S \in \mathcal{R}$. Luego \mathcal{R} es una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(h_{\alpha}^2)$. ■

Lema 3.2.2. *Un operador $S \in \mathcal{B}(h_{\alpha}^2)$ es radial si y sólo si es diagonal con respecto a la base $\{\hat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.*

Demostración. Si S es radial entonces de la Ecuación (3.3) tenemos que

$$\langle S \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle = \langle \text{Rad}(S) \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle = \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle \langle \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle = \langle \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle.$$

Es decir, $S \hat{e}_n = \langle S \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle \hat{e}_n$ y S actúa diagonalmente en la base monomial.

Por otro lado, supongamos que S actúa diagonalmente en la base, es decir, para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $a_n \in \mathbb{C}$ tal que $S \hat{e}_n = a_n \hat{e}_n$. Entonces

$$U_{-\theta} S U_{\theta} \hat{e}_n = U_{-\theta} S e^{-i n \theta} \hat{e}_n = U_{-\theta} e^{-i n \theta} a_n \hat{e}_n = a_n \hat{e}_n = S \hat{e}_n.$$

En conclusión $U_{-\theta}SU_{\theta} = S$. ■

Ahora veremos el concepto de radialización para funciones acotadas. Sea $a \in L^{\infty}(\mathbb{C})$. Definimos la *radialización* de a por la función

$$\text{rad}(a)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}z) d\theta. \quad (3.4)$$

Por la periodicidad de e^{it} podemos escribir la Ecuación (3.4) como

$$\text{rad}(a)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}|z|) d\theta. \quad (3.5)$$

Este concepto nos proporciona el siguiente lema que es un resultado simple pero esencial en el estudio de operadores de Toeplitz con símbolo radial.

Lema 3.2.3. *Sea $a \in L^{\infty}(\mathbb{C}, d\lambda_{\alpha})$. La función a es radial si y sólo si coincide con su radialización casi en todo punto.*

Demostración. Notemos que la Ecuación (3.5) implica que la radialización de una función es una función radial. Por lo tanto, si $a(z) = \text{rad}(a)(z)$ casi en todo punto entonces a es radial.

Supongamos ahora que a es radial. De la definición de radialización tenemos que

$$\text{rad}(a)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}|z|) d\theta = \frac{a(|z|)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = a(|z|).$$

Entonces $\text{rad}(a)(z) = a(z)$ casi en todo punto. ■

Proposición 3.2.4. *Sea $a \in L^{\infty}(\mathbb{C})$. El operador de Toeplitz \widehat{T}_a es radial si y sólo si a es una función radial.*

Demostración. Si $a \in L^{\infty}(\mathbb{C})$ es radial, entonces el operador de Toeplitz actúa diagonalmente en la base $\{\widehat{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ como lo muestra el Teorema 3.1.2. Entonces, por el Lema 3.2.2 concluimos que \widehat{T}_a es radial.

Por otro lado, si T_a es radial y $f \in h_{\alpha}^2$ entonces del Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_a f, g \rangle &= \langle \text{Rad}(\widehat{T}_a) f, g \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle U_{-\theta} \widehat{T}_a U_{\theta} f, g \rangle d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle a U_{\theta} f, U_{\theta} g \rangle d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{C}} a(w) f(e^{-i\theta} w) \overline{g(e^{-i\theta} w)} d\lambda_{\alpha}(w) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta} w) f(w) \overline{g(w)} d\theta d\lambda_{\alpha}(w) \\ &= \langle \text{rad}(a) f, g \rangle \\ &= \langle \widehat{T}_{\text{rad}(a)} f, g \rangle, \end{aligned}$$

para toda $g \in h_{\alpha}^2$. Por lo tanto $\widehat{T}_a f = \widehat{T}_{\text{rad}(a)} f$ para toda $f \in h_{\alpha}^2$. En conclusión $a = \text{rad}(a)$, i.e., a es radial. ■

Caracterización de los operadores de Toeplitz con símbolo radial

En esta sección mostraremos que los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Fock armónico h_α^2 son unitariamente equivalentes a operadores de multiplicación actuando en ℓ^2 . Para esto emplearemos la representación de h_α^2 que obtuvimos en la Sección 2.3. El método que utilizaremos, diferente al utilizado en el Teorema 3.1.2, puede utilizarse para el caso de símbolos no acotados (ver [5] para más detalles en el espacio de Fock).

Comenzaremos estudiando Operadores de Toeplitz con símbolos radiales actuando en el espacio de Fock. Ver [5] para más detalles. Para este caso emplearemos la representación del espacio de Fock dada en la Proposición 2.3.3

Proposición 3.2.5. *Sea $a = a(r) \in L^\infty(\mathbb{C})$. El operador de Toeplitz T_a actuando en el espacio de Fock es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\gamma_a I : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$, con $\gamma_a = \{\gamma_a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ dado por*

$$\gamma_a(n) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} a\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha}}\right) r^n e^{-r} dr, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.6)$$

Demostración. De las Ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) tenemos que el operador T_a es unitariamente equivalente al operador

$$\begin{aligned} RT_a R^* &= RPaIPR^* = R(R^*R)aI(R^*R)R^* \\ &= (RR^*)RaIR^*(RR^*) = RaR^* \\ &= R_0^*U_3U_2U_1aIU_1^*U_2^*U_3^*R_0 \\ &= R_0^*U_3U_2aIU_2^*U_3^*R_0 \\ &= R_0^*U_3(I \otimes \mathcal{F})aI(I \otimes \mathcal{F}^{-1})U_3^*R_0 \\ &= R_0^*U_3aIU_3^*R_0 \\ &= R_0^*\{a(\tau_{|n|}^{-1}(r))\}_{n \in \mathbb{Z}}IR_0, \end{aligned}$$

donde la función $\tau_{|n|}(r)$ está dada por (2.24). Ahora

$$R_0^*\{a(\tau_{|n|}^{-1}(r))\}R_0\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} = \left\{ \alpha \int_{\mathbb{R}_+} a(\tau_n^{-1}(r))c_n e^{-\alpha r} dr \right\}_{n \in \mathbb{Z}_+} = \{\gamma(n)c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+},$$

ya que

$$\begin{aligned} \gamma_a(n) &= \alpha \int_{\mathbb{R}_+} a(\tau_n^{-1}(r))e^{-\alpha r} dr \\ &= \frac{2\alpha^{n+1}}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} a(r)r^{2n+1}e^{-\alpha r^2} dr \\ &= \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} a(\sqrt{r})r^n e^{-\alpha r} dr \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} a\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha}}\right) r^n e^{-r} dr, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Consideremos ahora operadores de Toeplitz actuando en $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$. Para esto utilizaremos la representación de este espacio dada en la Proposición 2.3.4. ■

Proposición 3.2.6. *Sea $a = a(r) \in L^\infty(\mathbb{C})$. El operador de Toeplitz \tilde{T}_a actuando en el espacio $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\tilde{\gamma}_a I : \ell_-^2 \rightarrow \ell_-^2$, con $\tilde{\gamma}_a = \{\gamma_a(-n)\}_{n \in \mathbb{Z}_-}$ dado por la ecuación (3.6).*

Demostración. De (2.34), (2.35) y (2.36) se sigue que el operador de Toeplitz \tilde{T}_a es unitariamente equivalente a

$$\begin{aligned}
\tilde{R}\tilde{T}_a\tilde{R}^* &= \tilde{R}(\tilde{P} - 1 \otimes 1)aI(\tilde{P} - 1 \otimes 1)\tilde{R}^* = \tilde{R}(\tilde{R}^*\tilde{R})aI(\tilde{R}^*\tilde{R})\tilde{R}^* \\
&= (\tilde{R}\tilde{R}^*)\tilde{R}aI\tilde{R}^*(\tilde{R}\tilde{R}^*) = \tilde{R}aI\tilde{R}^* \\
&= p^- \mathcal{J}R_0^* \mathcal{J}U_3U_2U_1aIU_1^*U_2^*U_3^* \mathcal{J}R_0\mathcal{J} \\
&= p^- \mathcal{J}R_0^* \mathcal{J}U_3U_2aIU_2^*U_3^* \mathcal{J}R_0\mathcal{J} \\
&= p^- \mathcal{J}R_0^* \mathcal{J}U_3(I \otimes \mathcal{F})aI(I \otimes \mathcal{F}^{-1})U_3^* \mathcal{J}R_0\mathcal{J} \\
&= p^- \mathcal{J}R_0^* \mathcal{J}U_3aIU_3^* \mathcal{J}R_0\mathcal{J} \\
&= p^- \mathcal{J}R_0^* \mathcal{J}\{a(\tau_{|n|}^{-1}(r))\}_{n \in \mathbb{Z}}I\mathcal{J}R_0\mathcal{J} \\
&= p^- \mathcal{J}R_0^*\{a(\tau_{|n|}^{-1}(r))\}_{n \in \mathbb{Z}}IR_0\mathcal{J},
\end{aligned}$$

donde la función $\tau_{|n|}(r)$ está dada por (2.24).

El resultado se sigue entonces de la demostración del Teorema 3.2.5. ■

De la relación entre las proyecciones \hat{P} , P , \tilde{P} dada en (2.14) se sigue que el operador de Toeplitz actuando en el espacio de Fock armónico se puede escribir en términos de operadores de Toeplitz y Hankel actuando en los espacios \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$.

Sea $a \in L^\infty(\mathbb{C})$. Recordemos que cada $h \in h_\alpha^2$ puede descomponerse como $h = f + g$, con $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$ y $g \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$, entonces el operador de Toeplitz $\hat{T}_a : h_\alpha^2 \rightarrow h_\alpha^2$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\hat{T}_a(f + g) &= \hat{P}a(f + g) \\
&= P(af) + P(ag) + (\tilde{P} - 1 \otimes 1)(af) + (\tilde{P} - 1 \otimes 1)(ag) \\
&= T_af + \tilde{H}_ag + \tilde{T}_ag + Haf,
\end{aligned}$$

donde los operadores de Hankel $H_a : \mathcal{F}_\alpha^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$ y $\tilde{H}_a : \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^2$ están dados por $H_af = (\tilde{P} - 1 \otimes 1)(af)$ y $\tilde{H}_ag = P(ag)$, respectivamente.

A continuación verificaremos que:

- a) $\tilde{H}_ag = 0$ para toda $g \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$,
- b) $Haf = 0$ para toda $f \in \mathcal{F}_\alpha^2$.

Sabemos que los conjuntos $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ y $\{\bar{z}^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ son densos en \mathcal{F}_α^2 y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^2 \ominus \mathbb{C}$, respectivamente.

a) Para $j > 0$ y $k \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{H}_a \bar{z}^j, z^k \rangle &= \langle P(a\bar{z}^j), z^k \rangle \\
&= \langle a\bar{z}^j, Pz^k \rangle \\
&= \langle a\bar{z}^j, z^k \rangle \\
&= \int_{\mathbb{C}} a(|z|) \bar{z}^{j+k} d\lambda_{\alpha}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} a(r) r^{j+k+1} e^{-\alpha r^2} \int_0^{2\pi} e^{-i(j+k)\theta} d\theta dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que $\widetilde{H}_a \bar{z}^j = 0$ para todo $j > 0$. De aquí concluimos que $\widetilde{H}_a g = 0$ para todo $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\alpha}^2 \ominus \mathbb{C}$ y, por lo tanto, $\widetilde{H}_a \equiv 0$.

b) Para $j > 0$ y $k \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle H_a z^k, \bar{z}^j \rangle &= \langle \widetilde{P}(az^k), \bar{z}^j \rangle - \left\langle \int_{\mathbb{C}} a(z) z^k d\lambda_{\alpha}(z), \bar{z}^j \right\rangle \\
&= \langle az^k, \bar{z}^j \rangle - \left\langle \int_{\mathbb{C}} a(z) z^k d\lambda_{\alpha}(z), \bar{z}^j \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$H_a z^k = 0$$

para todo $k \geq 0$. De aquí concluimos que $H_a f = 0$ para todo $f \in \mathcal{F}_{\alpha}^2$.

Por lo tanto, cada operador de Toeplitz $\widehat{T}_a : h_{\alpha}^2 \rightarrow h_{\alpha}^2$ tiene la siguiente forma

$$\widehat{T}h = \begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & \widetilde{T}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad h = f + g \in h_{\alpha}^2, \quad f \in \mathcal{F}_{\alpha}^2, \quad g \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\alpha}^2 \ominus \mathbb{C}.$$

Concluimos entonces con la caracterización de los operadores de Toeplitz con símbolo radial actuando en h_{α}^2 .

Teorema 3.2.7. *Sea $a \in L^{\infty}(\mathbb{C})$. El operador de Toeplitz $\widehat{T} : h_{\alpha}^2 \rightarrow h_{\alpha}^2$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación en ℓ^2 , $\widehat{\gamma}_a = \{\widehat{\gamma}_a(n)\}$ dado por*

$$\widehat{\gamma}_a(n) = \gamma_a(|n|), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.7)$$

donde $\gamma_a(|n|)$ está dado por la Ecuación (3.6).

Demostración. El operador \widehat{T}_a es unitariamente equivalente a

$$\begin{aligned}
\widehat{R}\widehat{T}_a\widehat{R}^* &= \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \widetilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & \widetilde{T}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & \widetilde{R}^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} RT_aR^* & 0 \\ 0 & \widetilde{R}\widetilde{T}_a\widetilde{R}^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} RT_aR^* & 0 \\ 0 & \widetilde{R}\widetilde{T}_a\widetilde{R}^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \{\gamma_a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} & 0 \\ 0 & \{\widetilde{\gamma}_a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_-} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se siguen entonces los siguientes resultados de forma directa. ■

Proposición 3.2.8. *Sea $a \in L^\infty(\mathbb{C})$. El operador de Toeplitz \widehat{T}_a es compacto si y sólo si*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{\gamma}_a(n) = 0.$$

Proposición 3.2.9. *El espectro del operador de Toeplitz \widehat{T}_a está dado por*

$$\text{sp}\widehat{T}_a = \overline{\{\widehat{\gamma}_a(n) : n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Capítulo 4

Álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz radiales

Uno de los objetivos al estudiar Operadores de Toeplitz es dar una descripción completa del álgebra que generan estos operadores al restringirse a una cierta clase de símbolos. Recientemente [4] demostraron que en la cerradura en norma del conjunto de Operadores de Toeplitz con símbolos radiales actuando en el espacio de Fock es un álgebra C^* conmutativa unitariamente equivalente al álgebra de sucesiones de oscilación raíz cuadrada, el cual describiremos más adelante. En este capítulo presentamos la descripción del álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz con símbolos radiales pero ahora actuando en el espacio de Fock armónico. Mostraremos que al igual que en el espacio de Fock el álgebra generada es conmutativa e isomorfa al álgebra de sucesiones de oscilación raíz cuadrada. A pesar de las relaciones que existen entre esta clase de operadores actuando en el espacio de Fock y el espacio de Fock armónico (el espectro, el conjunto de eigenvalores, el álgebra generada, etc.), cabe resaltar que, en general, un operador de Toeplitz con símbolo radial que actúa en el espacio de Fock armónico no es unitariamente equivalente al operador de Toeplitz con el mismo símbolo actuando en espacio de Fock. En este capítulo nos dedicaremos a describir esta álgebra partiendo de su relación con las sucesiones γ_a descritas en el capítulo 3.

Por el Teorema 3.2.7 para $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, \widehat{T}_a es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\widehat{\gamma}_a I$ actuando en ℓ^2 . Los conjuntos

$$\{\widehat{\gamma}_a : a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\} \subset \ell^\infty$$

y

$$\{\gamma_a : a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\} \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}_+),$$

están relacionados mediante la Ecuación (3.7).

Estamos interesados en el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado. Como $\widehat{T}_a \mapsto \widehat{\gamma}_a I \mapsto \gamma_a I$ es una isometría y preserva la suma, el producto y la involución, el álgebra C^* generada por $\{\widehat{T}_a : a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\} \subset \mathcal{B}(h_\alpha^2)$ es isométricamente isomorfa a la generada por $\Gamma := \{\gamma_a : a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\} \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$. En lo que resta del capítulo nos dedicaremos a demostrar que la cerradura en $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ de Γ es un álgebra C^* y a describirla. Este capítulo está basado en [3] y es una generalización en el sentido de que consideramos espacios con peso.

4.1 El espacio de funciones acotadas uniformemente continuas

Sea (X, d) un espacio métrico. El conjunto $C_b(X, d)$ de funciones complejo-valuadas continuas y acotadas definidas de X forma un álgebra C^* con las operaciones puntuales y la norma del supremo. Definamos la función $\Omega_{d,f} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ como

$$\Omega_{d,f}(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X \text{ y } d(x, y) \leq \delta\}.$$

La función $\Omega_{d,f}$ es llamada *el módulo de continuidad de f* con respecto a la métrica d . Diremos que f es uniformemente continua con respecto a d si $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_{d,f}(\delta) = 0$. Podemos ver que la definición anterior de continuidad uniforme coincide con la usual. Denotemos por $C_{b,u}(X, d)$ al conjunto de funciones acotadas y uniformemente continuas con respecto a d , es decir,

$$C_{b,u}(X, d) = \left\{ f \in C_b(X, d) : f \text{ es acotada y } \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_{d,f}(\delta) = 0 \right\}.$$

Para el caso de los números reales con la métrica usual escribiremos simplemente Ω_f y $C_{b,u}$.

De la definición se siguen directamente las siguientes propiedades del módulo de continuidad

- (1) $\Omega_{d,f+g} \leq \Omega_{d,f} + \Omega_{d,g}$,
- (2) $\Omega_{d,\lambda f} = |\lambda| \Omega_{d,f}$,
- (3) $\Omega_{d,fg} \leq \|f\|_\infty \Omega_{d,g} + \|g\|_\infty \Omega_{d,f}$,
- (4) $\Omega_{d,\bar{f}} = \Omega_{d,f}$.
- (5) $\Omega_{d,f}(\delta) - \Omega_{d,g}(\delta) \leq 2\|f - g\|_\infty$.

Lema 4.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. El espacio de funciones complejo-valuadas uniformemente continuas y acotadas $C_{b,u}(X, d)$ es un subálgebra C^* de $C_b(X, d)$.*

Demostración. De las Ecuaciones (1)-(4) dadas en (4.1) se sigue que $C_{b,u}$ tiene estructura de álgebra y que es cerrada bajo involuciones.

Demostremos ahora que $C_{b,u}$ es cerrado en $C_b(X, d)$. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C_{b,u}(X, d)$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $C_b(X, d)$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Más aún, existe $\delta > 0$ de tal forma que si $\delta' < \delta$ entonces $\Omega_{d,f_N}(\delta') < \frac{\varepsilon}{3}$. Juntando las dos desigualdades anteriores y usando la Ecuación 5 dada en (4.1) tenemos que para $\delta' < \delta$ se cumple

$$\Omega_{d,f}(\delta') \leq 2\|f - f_N\|_\infty + \Omega_{d,f_N}(\delta') < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_f(\delta) = 0$ y $f \in C_{b,u}(X, d)$. ■

El espacio de funciones acotadas y uniformemente continuas $C_{b,u}$

En lo siguiente mostraremos que las funciones de $C_{b,u}$ pueden aproximarse por convoluciones de funciones en $L^1(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R})$. Para ello retomaremos algunos resultados del Capítulo 1.

Lema 4.1.2. *Sea $f \in C_{b,u}$. Si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * h_n - f\|_\infty = 0.$$

Demostración. Como $f \in C_{b,u}$, dado $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ existe una vecindad abierta $V = V(0)$ tal que $|f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $t \in V$. Por otro lado, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus V} h_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}, \quad \forall n \geq N_0.$$

De aquí tenemos que para $n \geq N_0$

$$\begin{aligned} |f * h_n(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| h_n(t) dt \\ &= \int_V |f(x-t) - f(x)| h_n(t) dt + \int_{\mathbb{R} \setminus V} |f(x-t) - f(x)| h_n(t) dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_V h_n(t) dt + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R} \setminus V} h_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Proposición 4.1.3. $L^1(\mathbb{R}) * L^\infty(\mathbb{R}) \subset C_{b,u}$.

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$\begin{aligned} |(f * g)(x+t) - (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t-y) - f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-t-y) - f(x-y)| dy \\ &= \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(u-t) - f(u)| du \\ &= \|g\|_\infty \|\tau_t f - f\|_1, \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}$. Por el Corolario 1.2.6, como $t \mapsto \tau_t f$ es uniformemente continua, entonces $f * g \in C_{b,u}$.

■

Proposición 4.1.4. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{g}(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces $\{g * f : f \in L^\infty(\mathbb{R})\}$ es denso en $C_{b,u}(\mathbb{R})$.

Demostración. De la Proposición 4.1.3 sabemos que $\{g * f : f \in L^\infty(\mathbb{R})\} \subset C_{b,u}(\mathbb{R})$.

Sea $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac tal que las funciones \hat{h}_n tengan soporte compacto (ver Ejemplo 1.2.9). Como $\hat{g}(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, por el Lema de división de Wiener para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $q_n \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $h_n = g * q_n$. Ahora bien, dado $\psi \in C_{b,u}$ construimos una sucesión $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por la regla $w_n = q_n * \psi$. Por lo tanto $w_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $\{g * w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{g * f : f \in L^\infty\}$. Finalmente, aplicando las identidades

$$g * w_n = g * q_n * \psi = h_n * \psi$$

y el Lema 4.1.2 concluimos que $\{g * w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ψ .

■

Sucesiones de oscilación raíz cuadrada

Consideremos la *métrica raíz cuadrada* $\rho : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$\rho(m, n) = |\sqrt{m} - \sqrt{n}|.$$

Definimos el *espacio de sucesiones de oscilación raíz cuadrada* $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ como $C_{b,u}(\mathbb{Z}_+, \rho)$.

A continuación presentamos una forma de determinar cuándo una sucesión es Lipschitz-continua con respecto a la métrica ρ .

Proposición 4.1.5. *Una sucesión $\sigma : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ es Lipschitz-continua con respecto a la métrica ρ si y sólo si*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\sqrt{n+1} |\sigma(n+1) - \sigma(n)|) < \infty.$$

Demostración. Suponga que σ es Lipschitz-continua con respecto a ρ . Entonces existe $M > 0$ tal que $|\sigma(m) - \sigma(n)| \leq M\rho(m, n)$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Aplicando esta desigualdad para $m = n+1$ obtenemos

$$\sqrt{n+1} |\sigma(n+1) - \sigma(n)| \leq M(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{M\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq M.$$

De forma recíproca, si suponemos que $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (\sqrt{n+1} |\sigma(n+1) - \sigma(n)|) = M < \infty$ y $n > m$, podemos "unir" m con n por una cadena de elementos intermedios y estimar las diferencias de los elementos adyacentes

$$\begin{aligned} |\sigma(m) - \sigma(n)| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |\sigma(k+1) - \sigma(k)| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} |\sigma(k+1) - \sigma(k)| \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} |\sigma(k+1) - \sigma(k)| \\ &\leq 2M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= 2M \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ &= 2M(\sqrt{n} - \sqrt{m}) \\ &= 2M\rho(m, n). \end{aligned}$$

La misma estimación puede hacerse para cuando $m \geq n$. Por lo tanto, σ es Lipschitz-continua con respecto a ρ . ■

Funciones de oscilación raíz cuadrada en \mathbb{R}_+

La métrica raíz cuadrada ρ puede extenderse al conjunto \mathbb{R}_+ . Denotamos por $\text{RO}(\mathbb{R}_+)$ el espacio $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, \rho)$. En otras palabras, $f \in \text{RO}(\mathbb{R}_+)$ si y sólo si $h(x) = f(x^2)$ pertenece a $C_{b,u}$.

Si f es una función de la clase $\text{RO}(\mathbb{R}_+)$ entonces su restricción a \mathbb{Z}_+ es una sucesión en la clase $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$. Mostraremos que cada sucesión de la clase $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ puede obtenerse de esta forma. La extensión de una sucesión a una función es sólo la interpolación lineal por partes con respecto al parámetro \sqrt{x} .

Lema 4.1.6. *Sea $\sigma : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión. Definamos la función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ por*

$$f(x) = \sigma(n) + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}(\sigma(n+1) - \sigma(n)), \quad (4.2)$$

donde $n = \lfloor x \rfloor$. Entonces $f|_{\mathbb{Z}_+} = \sigma$, $\|f\|_\infty = \|\sigma\|_\infty$ y para cada $\delta \in (0, 1]$

$$\Omega_{\rho,f}(\delta) \leq 3 \max\left(\Omega_{\rho,\sigma}(\sqrt{\delta}), \sqrt{\delta}\Omega_{\rho,\sigma}(1)\right). \quad (4.3)$$

Demostración. Por definición $f|_{\mathbb{Z}_+} = \sigma$. Además, notemos que $f(x)$ es una combinación convexa de $\sigma(n)$ y $\sigma(n+1)$, a saber,

$$f(x) = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\sigma(n) + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\sigma(n+1).$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right| \|\sigma\|_\infty + \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right| \|\sigma\|_\infty \\ &= \|\sigma\|_\infty. \end{aligned}$$

Por otro lado $|f(n)| = |\sigma(n)|$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, por lo que $\|f\|_\infty \geq \|\sigma\|_\infty$. En conclusión $\|f\|_\infty = \|\sigma\|_\infty$.

Para demostrar la relación (4.3), tomemos $\delta \in (0, 1]$ y $x, y \geq 0$ con $\rho(x, y) \leq \delta$. Procederemos esta demostración en dos casos.

Caso I: Sea $n \leq x \leq y \leq n+1$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$. Por las definiciones de f y $\Omega_{\rho,\sigma}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} |\sigma(n+1) - \sigma(n)| \\ &\leq \frac{\rho(x, y)\Omega_{\rho,\sigma}(\rho(n, n+1))}{\rho(n, n+1)}. \end{aligned}$$

Ahora, si $\rho(n, n+1) \leq \sqrt{\delta}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\rho(x, y)}{\rho(n, n+1)} \Omega_{\rho,\sigma}(\sqrt{\delta}) \leq \Omega_{\rho,\sigma}(\sqrt{\delta}).$$

Similarmente, si $\rho(n, n+1) \geq \sqrt{\delta}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} \Omega_{\rho,\sigma}(1) = \sqrt{\delta} \Omega_{\rho,\sigma}(1).$$

Por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| \leq \max\left(\Omega_{\rho,\sigma}(\sqrt{\delta}), \sqrt{\delta}\Omega_{\rho,\sigma}(1)\right).$$

Caso II: Sea $\lfloor x \rfloor = n < m = \lfloor y \rfloor$. De la desigualdad triangular se sigue que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(n+1)| + |f(n+1) - f(m)| + |f(m) - f(y)|.$$

Dado que $\rho(n+1, m) \leq \rho(x, y) \leq \delta$, del resultado del Caso I tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \Omega_{\rho, \sigma}(\delta) + 2 \max\left(\Omega_{\rho, \sigma}(\sqrt{\delta}), \sqrt{\delta} \Omega_{\rho, \sigma}(1)\right) \\ &\leq \Omega_{\rho, \sigma}(\sqrt{\delta}) + 2 \max\left(\Omega_{\rho, \sigma}(\sqrt{\delta}), \sqrt{\delta} \Omega_{\rho, \sigma}(1)\right) \\ &\leq 3 \max\left(\Omega_{\rho, \sigma}(\sqrt{\delta}), \sqrt{\delta} \Omega_{\rho, \sigma}(1)\right). \end{aligned}$$

En ambos casos (4.3) es válida.

Por lo tanto, si $\sigma \in \text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ y $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ es la extensión definida en (4.2), entonces $f \in \text{RO}(\mathbb{R}_+)$. ■

4.1.1 Propiedad de oscilación raíz cuadrada de las sucesiones en Γ

Mostraremos que $\gamma_a \in \text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ para todo $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Proposición 4.1.7. Sea $\kappa : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función dada por

$$\kappa(m, n) = \sup \{ |\gamma_a(m) - \gamma_a(n)| : a \in L^\infty(\mathbb{R}_+), \|a\|_\infty = 1 \}.$$

Entonces

$$\kappa(m, n) = \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{r^m e^{-r}}{m!} - \frac{r^n e^{-r}}{n!} \right| dr. \quad (4.4)$$

Demostración. Para cada $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $m, n \in \mathbb{Z}_+$, tenemos

$$|\gamma_a(m) - \gamma_a(n)| \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{r^m e^{-r}}{m!} - \frac{r^n e^{-r}}{n!} \right| dr.$$

Por otro lado, si m y n están fijos y $m \neq n$ definamos

$$a_0(r) = \text{sign} \left(\frac{r^m e^{-r}}{m!} - \frac{r^n e^{-r}}{n!} \right),$$

donde $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ es la función signo. Entonces $a_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ con $\|a_0\|_\infty = 1$, y

$$\kappa(m, n) \geq |\gamma_{a_0}(m) - \gamma_{a_0}(n)| = \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{r^m e^{-r}}{m!} - \frac{r^n e^{-r}}{n!} \right| dr.$$

■

Lema 4.1.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\kappa(n-1, n) = \frac{2n^n e^{-n}}{n!}.$$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, escribimos $\kappa(n-1, n)$ utilizando (4.4)

$$\kappa(n-1, n) = \int_0^\infty \left| \frac{\alpha^n r^{n-1} e^{-\alpha r}}{(n-1)!} - \frac{\alpha^{n+1} r^n e^{-\alpha r}}{n!} \right| dr = \int_0^\infty \frac{\alpha^n r^{n-1} e^{-\alpha r}}{(n-1)!} \left| 1 - \frac{\alpha r}{n} \right| dr.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \kappa(n-1, n) &= \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \left[\int_0^{n/\alpha} r^{n-1} e^{-\alpha r} \left(1 - \frac{\alpha r}{n} \right) dr + \int_{n/\alpha}^\infty r^{n-1} e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha r}{n} - 1 \right) dr \right] \\ &= \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \left[2 \int_0^{n/\alpha} e^{-\alpha r} \left(r^{n-1} - \frac{\alpha r^n}{n} \right) dr + \int_0^\infty e^{-\alpha r} \left(\frac{\alpha r^n}{n} - r^{n-1} \right) dr \right] \\ &= \frac{2\alpha^n}{(n-1)!} 2 \int_0^{n/\alpha} e^{-\alpha r} \left(r^{n-1} - \frac{\alpha r^n}{n} \right) dr \\ &= \frac{2\alpha^n}{(n-1)!} \left[\int_0^{n/\alpha} e^{-\alpha r} r^{n-1} dr - \int_0^{n/\alpha} e^{-\alpha r} \frac{\alpha r^n}{n} dr \right] \\ &= \frac{2\alpha^n e^{-n}}{n!}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene integrando por partes. ■

La fórmula de Stirling que recordaremos a continuación nos ayudará a aproximar $\kappa(n-1, n)$.

Lema 4.1.9 (Fórmula de Stirling). *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface*

$$\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \leq n!. \quad (4.5)$$

Más aún,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Lema 4.1.10.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\kappa(n-1, n) \sqrt{n} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Mostraremos ahora que para cada símbolo acotado a , $\gamma_a \in \text{RO}(\mathbb{Z}_+)$.

Proposición 4.1.11. $\Gamma \subset \text{RO}(\mathbb{Z}_+)$.

Demostración. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}_+$

$$|\gamma_a(n)| \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\alpha^{n+1} r^n e^{-\alpha r}}{n!} dr = \|a\|_\infty.$$

Por lo que γ_a es acotada. Además

$$|\sqrt{n}(\gamma_a(n) - \gamma_a(n-1))| \leq \|a\|_\infty \kappa(n, n-1) \sqrt{n} \leq M \|a\|_\infty.$$

Entonces γ_a es Lipschitz con respecto a ρ . ■

4.2 Densidad de Γ en $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$

En esta sección demostraremos que el conjunto Γ es denso en $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$. La demostración se dividirá en los siguientes resultados:

i) para cada sucesión σ en $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ existen $\gamma_a \in \Gamma$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $\varepsilon > 0$

$$\sup_{n \geq N} |\sigma(n) - \gamma_a(n)| \leq \varepsilon.$$

ii) cada sucesión en $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ que converge a cero puede aproximarse por una sucesión $\gamma_a \in \Gamma$, donde a tiende a cero en el infinito.

iii) Γ es denso en $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$.

Primero nos enfocaremos en demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Sea $\sigma \in \text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ una sucesión y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ y un número $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\sup_{n > N} |\sigma(n) - \gamma_a(n)| \leq \varepsilon.$$

Presentaremos varios lemas que servirán para la demostración de la Proposición 4.2.1. Recordemos de la fórmula de Stirling que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi},$$

por lo que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} - \sqrt{2\pi} = 0.$$

Utilizando esto y la Ecuación (4.5), para $\varepsilon > 0$ y $r \in \mathbb{R}_+$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$0 \leq \frac{r^n e^{-r}}{n!} - \frac{r^n e^{-r}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} = e^{-r} \frac{r^n}{n!} \frac{n! - \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} \leq \varepsilon e^{-r} \frac{r^n}{n!}.$$

Por lo tanto

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{r^n e^{-r}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} - \frac{r^n e^{-r}}{n!} \right) dr \leq \int_{\mathbb{R}_+} \varepsilon \frac{e^{-r} r^n}{n!} dr = \varepsilon \quad n > N.$$

En otras palabras

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{r^n e^{-r}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} - \frac{r^n e^{-r}}{n!} \right) dr = 0.$$

Enfoquémonos en la función $\frac{r^n e^{-r}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}$. Haciendo $r = y^2$ y $n = x^2$ tenemos

$$\frac{r^n e^{-r}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} = \frac{y^{2x^2} e^{-y^2}}{\sqrt{2\pi} x^{2x^2+1} e^{-x^2}}.$$

Definamos

$$F(x, y) = \frac{y^{2x^2+1}e^{x^2}}{x^{2x^2+1}e^{y^2}} = \exp\left((2x^2 - 1)(\log y - \log x) + x^2 - y^2\right).$$

Haciendo $u = y - x$ tenemos

$$\begin{aligned} (2x^2 + 1)(\log y - \log x) + x^2 - y^2 &= (2x^2 + 1)(\log(u - x) - \log x) + x^2 - (u + x)^2 \\ &= (2x^2 + 1)\left(\log x + \log\left(\frac{u}{x} + 1\right) - \log x\right) - 2xu - u^2 \\ &= (2x^2 + 1)\log\left(1 + \frac{u}{x}\right) - 2xu - u^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\log F(x, x + u) = (2x^2 + 1)\log\left(1 + \frac{u}{x}\right) - 2xu - u^2.$$

Por lo que

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x, y)a(y/\sqrt{\alpha})dy = \int_{[-x, \infty)} F(x, x + u)a((x + u)/\sqrt{\alpha})du.$$

Lema 4.2.2. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $h \geq 2$ tal que, si $x \geq 1$ entonces*

$$\int_{[-x, +\infty) \setminus [-h, h]} F(x, x + u)du < \varepsilon.$$

Demostración. Aplicando la desigualdad $\log(1 + t) \leq t$ que se satisface para $t \geq 0$ tenemos que

$$\log F(x, x + u) \leq (2x^2 + 1)\frac{u}{x} - 2xu - u^2 = \frac{u}{x} - u^2 \leq \frac{|u|}{x} - u^2. \quad (4.6)$$

Si $x \geq 1$, $h \geq 2$ y $|u| \geq h$ entonces $\frac{|u|}{2} \geq 1$ y, usando la Ecuación (4.6) obtenemos

$$\log F(x, x + u) \leq \frac{|u|}{x} - u^2 \leq |u|\frac{|u|}{2} - u^2 \leq -\frac{u^2}{2}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{[-x, \infty) \setminus [-h, h]} F(x, x + u)du &\leq \int_{[-x, \infty) \setminus [-h, h]} e^{-u^2/2} du \\ &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-h, h]} e^{-u^2/2} du \\ &= 2 \int_h^\infty e^{-u^2/2} du, \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando h tiende a infinito. ■

Lema 4.2.3. *Sean, $h \geq 1$ y $|u| \leq h$. Si $L > h$ es suficientemente grande entonces, para $x > L$ se satisface*

$$\left|F(x, x + u)e^{2u^2} - 1\right| \leq e^{5\frac{h^3}{L}} - 1.$$

Demostración. Para mostrar que $F(x, x+u)e^{2u^2} - 1 \leq e^{5\frac{h^3}{L}} - 1$ observemos que

$$\log(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}, \quad t \in (-1, 1).$$

Entonces para $t = \left|\frac{u}{x}\right| < 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \log F(x, x+u) + 2u^2 &= (2x^2 + 1) \log\left(1 + \frac{u}{x}\right) - 2xu + u^2 \\ &\leq (2x^2 + 1) \left(\frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + \frac{u^3}{3x^3}\right) - 2xu + u^2 \\ &= \frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + \frac{u^3}{3x^3} + \frac{2u^3}{3x} \\ &\leq \frac{u}{x} + \frac{u^3}{x} \\ &\leq \frac{2h^3}{L}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $t - \frac{t^2}{2} \leq \log(1+t)$ para $t \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned} \log F(x, x+u) + 2u^2 &= (2x^2 + 1) \log\left(1 + \frac{u}{x}\right) - 2xu + u^2 \\ &\geq (2x^2 + 1) \left(\frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2}\right) - 2xu + u^2 \\ &= \frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} \\ &= \geq -\frac{5h^3}{L}. \end{aligned}$$

Como $\log(1-t) \geq -t - \frac{t^2}{2} - t^3$ para cada $t \in [0, 2/3]$. Si tomamos x suficientemente grande para que $t = \frac{-u}{x} \in [0, 2/3]$, con $u \in [-h, 0]$, entonces

$$\begin{aligned} \log F(x, x+u) + 2u^2 &= (2x^2 + 1) \log\left(1 + \frac{u}{x}\right) - 2xu + u^2 \\ &\geq (2x^2 + 1) \left(\frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + \frac{u^3}{x^3}\right) - 2xu + u^2 \\ &= \frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + \frac{u^3}{x^3} + \frac{2u^3}{x} \\ &\geq \frac{5h^3}{L}. \end{aligned}$$

Combinando los resultados entonces obtenemos

$$e^{\frac{5h^3}{L}} - 1 \geq \alpha^{-1/2} F(x, x+u) - 1 \geq e^{-\frac{5h^3}{L}} - 1 \geq -(e^{\frac{5h^3}{L}} - 1 \geq -1).$$

■

Lema 4.2.4. Dado $\varepsilon > 0$ y $h \geq 1$ existe $L \geq h$ tal que, para cada $x \geq L$

$$\int_{[-h,h]} |F(x, x+u) - e^{-2u^2}| du \leq \varepsilon.$$

Demostración. Suponga que $x \geq L$ y $|u| < h$. Por el Lema 4.2.3, para $h \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{[-h,h]} |F(x, x+u) - e^{-2u^2}| du &\leq \int_{[-h,h]} e^{-2u^2} |F(x, x+u)e^{2u^2} - 1| du \\ &\leq 2h(e^{\frac{5h^3}{L}} - 1), \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $L \rightarrow \infty$. ■

Lema 4.2.5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty |F(x, y) - e^{-2(y-x)^2}| dy = 0, \quad (4.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{2y^{2n+1}e^{-y^2}}{n!} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{2(\sqrt{n}-y)^2} \right| dy = 0. \quad (4.8)$$

Demostración. Vamos a probar (4.7). Sea $\varepsilon > 0$. Usando el Lema 4.2.2 y el hecho que e^{-2u^2} es integrable, escogemos $h > 0$ lo suficientemente grande tal que

$$\int_{[-x,\infty) \setminus [-h,h]} F(x, x+u) du \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

y

$$\int_{[-x,\infty) \setminus [-h,h]} e^{-2u^2} du \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora, usando el Lema 4.2.4 escogemos $L \geq h$ tal que, si $x \geq L$ se cumpla

$$\int_{[-h,h]} |F(x, x+u) - e^{-2u^2}| du \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, si $x \leq L$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-x}^\infty |F(x, y) - e^{-2(y-x)^2}| dy &= \int_0^\infty |F(x, x+u) - e^{-2u^2}| du \\ &\leq \int_{[-x,\infty) \setminus [-h,h]} F(x, x+u) du + \alpha \int_{[-x,\infty) \setminus [-h,h]} e^{-2u^2} du \\ &\quad + \int_{[-h,h]} |F(x, x+u) - e^{-2u^2}| du \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$
■

Proposición 4.2.6. Sea $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \gamma_a(n) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} a(y/\sqrt{\alpha}) e^{-2(y-\sqrt{n})^2} dy \right| = 0.$$

Demostración. Usando la Ecuación (4.8) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}_+} a(y/\sqrt{\alpha}) \frac{2y^{2n+1}e^{-y^2}}{n!} dy - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} a(y) e^{-2(y-\sqrt{n})^2} dy \right| \\ &\leq \|a\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{2y^{2n+1}e^{-y^2}}{n!} dy - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2(y-\sqrt{n})^2} dy \right| \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. ■

Consideremos el núcleo de calor $H(x) = (2/\pi)^{1/2} e^{-2x^2}$.

Lema 4.2.7. Si $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $a = \chi_{\mathbb{R}_+} b$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H * a(x) - H * b(x)| = 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |H * a(x) - H * b(x)| &\leq \|b\|_\infty (2/\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^0 e^{-2(x-y)^2} dy \\ &= \|b\|_\infty (2/\pi)^{1/2} \int_x^\infty e^{-2t^2} dt. \end{aligned}$$

Demostración de la Proposición 4.2.1. Por el Lema 4.1.6 existe $f \in \text{RO}(\mathbb{R}_+)$ tal que $f|_{\mathbb{Z}_+} = \sigma$ y $\|f\|_\infty = \|\sigma\|_\infty$. Definamos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como $h(x) = f(x^2)$. Entonces $h \in C_{b,u}$. Por la Proposición 4.1.4 existe $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que ■

$$\|H * b - h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Denotemos por a a la restricción de b sobre \mathbb{R}_+ . Por la Proposición 4.2.6 y el Lema 4.2.7 existen $L_1, L_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |\gamma_a(n) - H * a(\sqrt{n})| &\leq \frac{\varepsilon}{3}, & n \geq L_1, \\ |H * a(x) - H * a(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{3}, & x \geq L_2. \end{aligned}$$

Tomando $L = \max\{L_1, L_2\}$ tenemos que, para $n \geq \lceil L^2 \rceil$

$$\begin{aligned} |\gamma_a(n) - \sigma(n)| &\leq |\gamma_a(n) - H * a(\sqrt{n})| + |H * a(\sqrt{n}) - H * a(\sqrt{n})| + |H * a(\sqrt{n}) - h(\sqrt{n})| \\ &\leq |\gamma_a(n) - H * a(\sqrt{n})| + |H * a(\sqrt{n}) - H * a(\sqrt{n})| + \|H * a - h\|_\infty \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Lema 4.2.8. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_a(n) = 0$. ■

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$ existe $L > 0$ tal que

$$|a(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para L existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\frac{L^{2n}}{n!} \leq \frac{\varepsilon}{2L^2 \|a\|_\infty}.$$

Entonces, para $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\gamma_a(n)| &\leq \frac{1}{n!} \left[\int_0^{L^2} |a(\sqrt{r/a})| e^{-r} r^n dr + \int_{L^2}^\infty |a(\sqrt{r/a})| e^{-r} r^n dr \right] \\ &\leq \frac{1}{n!} \left[\|a\|_\infty \int_0^{L^2} e^{-r} r^n dr + \frac{\varepsilon}{2} \int_{L^2}^\infty e^{-r} r^n dr \right] \\ &\leq \|a\|_\infty \int_0^{L^2} \frac{L^{2n}}{n!} dr + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_0^{L^2} \frac{\varepsilon}{2L^2} dr + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Denotemos por $c_0(\mathbb{Z}_+)$ y por $c_0(\mathbb{R}_+)$ los espacios de sucesiones y funciones que tienden a cero en el infinito. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.9. *El conjunto $\{\gamma_a : a \in c_0(\mathbb{R}_+)\}$ es un subconjunto denso de $c_0(\mathbb{Z}_+)$.*

Demostración. Haremos la demostración de manera indirecta. Del Teorema de Hahn-Banach sabemos que para cada subconjunto $X \subset c_0(\mathbb{Z}_+)$ existe un funcional $\phi \in c_0(\mathbb{Z}_+)^*$ tal que $\phi(x) = 0$ para $x \in \overline{X}$ y $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in c_0(\mathbb{Z}_+) \setminus \overline{X}$. Por lo tanto, basta demostrar que el único funcional que se anula en X es el funcional cero para probar que $\overline{X} = c_0(\mathbb{Z}_+)$.

Sea $\phi \in c_0(\mathbb{Z}_+)^*$ tal que $\phi(\gamma_a) = 0$ para cada $a \in c_0(\mathbb{R}_+)$. Sabemos que el dual $c_0(\mathbb{Z}_+)^*$ se puede identificar con $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$, por lo que existe $p \in \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ tal que

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n y_n, \quad y \in c_0(\mathbb{Z}_+).$$

Entonces tenemos que

$$0 = \phi(\gamma_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_a(n) p_n, \quad a \in c_0(\mathbb{R}_+).$$

En particular, para $x \geq 0$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\chi_{[0, \sqrt{\frac{x}{a}}]}}(n) p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x p_n \frac{r^n e^{-r}}{n!} dr = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n e^{-r}}{n!} dr.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n e^{-r}}{n!}$ converge uniformemente, por lo que es continua. Por el Teorema fundamental del Cálculo tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{x^n e^{-x}}{n!} = 0, \quad r \geq 0.$$

Como e^{-x} no se anula entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^n}{n!} = 0.$$

Definamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n z^n}{n!}.$$

Debido a que $p_n \rightarrow 0$ podemos encontrar $M > 0$ tal que $|p_n| \leq M$. Entonces, de 4.1.9

$$0 < \left(\frac{|p_n|}{n!} \right)^{1/n} \leq \frac{eM^{1/n}}{n(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. De aquí se sigue que f es entera. Ya que $f(x) = 0$ para $x > 0$ entonces $f \equiv 0$. Por lo tanto, $p_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. En conclusión $\phi \equiv 0$ y $\{\gamma_a : a \in c_0(\mathbb{R}_+)\}$ es denso en $c_0(\mathbb{Z}_+)$. ■

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo y describe el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado actuando en el espacio de Fock armónico h_α^2 .

Teorema 4.2.10. *El álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz con símbolo radial acotado es C^* -isomorfa a $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$.*

Demostración. Basta demostrar que

$$\Gamma = \{\gamma_a : a \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\}$$

es denso en $\text{RO}(\mathbb{Z}_+)$. Sea $\sigma \in \text{RO}(\mathbb{Z}_+)$ y $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 4.2.1 existen $b \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ y $N \in \mathbb{Z}_+$ tales que

$$|\sigma(n) - \gamma_b(n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N.$$

Defina $\vartheta = \{\vartheta(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ por

$$\vartheta(n) = \begin{cases} \sigma(n) - \gamma_b(n), & n < N, \\ 0, & n \geq N. \end{cases}$$

Entonces $\vartheta \in c_0(\mathbb{Z}_+)$ y por el Teorema 4.2.9 existe $c \in c_0(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\|\vartheta - \gamma_c\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $a = b + c \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ obtenemos

$$\|\sigma - \gamma_a\|_\infty \leq \|\sigma - \gamma_b - \vartheta\|_\infty + \|\vartheta - \gamma_c\|_\infty \leq \sup_{n \geq N} |\sigma(n) - \gamma_b(n)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

■

Referencias

- [1] CHENEY, W. *Analysis for Applied Mathematics*. Graduated Text in Mathematics, Springer, 2000.
- [2] DUREN, P. L. *Theory of H^p spaces*. Academic Press, Inc, 1970.
- [3] ESMERAL *Characterization of some Models Commutative C^* -Algebras Generated by Toeplitz Operators*. PhD thesis, CINVESTAV, Mathematics Department, 2015, dirigida por: N.Vasilevski, & E. Maximenko URL: <http://www.math.cinvestav.mx/tesisDoctorado>.
- [4] ESMERAL, K. & MAXIMENKO, E. A. *Radial Toeplitz operators on the Fock space and square-root-slowly oscillating sequences*. Complex Anal. Oper. Theory. DOI: 10.1007/s11785-016-0557-0
- [5] GRUDSKI, S. M., & VASILEVSKI, N. L. *Toeplitz Operators on the Fock Space: Radial Component Effects*. Integral Equations and Operator Theory 44, 1 (2002), 10–37, DOI: 10.1007/BF01197858.
- [6] LOAIZA, M., & LOZANO, C. *On Toeplitz Operators on the pluriharmonic Bergman space on the Siegel domain*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 44 2016, 583–604, DOI: 10.1007/s40590-016-0122-x.
- [7] LOAIZA M., & LOZANO C. *On Toeplitz operators on the weighted harmonic Bergman space on the upper half-plane*. Complex Anal. Oper. Theory 9, 2015, pp. 139-165, DOI 10.1007/s11785-014-0388-9.
- [8] QUIROGA-BARRRANCO, R., & VASILEVSKI, N. L. *Commutative C^* -Algebras of Toeplitz Operators on the Unit Ball, Bargmann Type Transforms and Spectral Representations of Toeplitz Operators* . Integral Equations and Operator Theory 99 (2007), 1–41.
- [9] REITER, H., & STEGEMAN, J. *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*. Clarendon Press., Oxford, 2000.
- [10] RUDIN, W. *Functional Analysis*, second ed. McGraw-Hill, 1991.
- [11] SZEGO, G. *Orthogonal Polynomials*, vol. Vol. XXIII. American Mathematical Society, Colloquium Publications, 1939.
- [12] VASILEVSKI, N. L. *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space* Nikolai L. Vasilevski, Birkhäuser Basel, 2008, Operator Theory: Advances and Applications, 1era edición.

- [13] WEIDMANN, J. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Graduate Text in Mathematics, Springer, 1980.
- [14] ZHU, K. *An Introduction to Operator Algebras*. CRC Press, 2000.
- [15] ZHU, K. *Analysis in Fock Spaces*. Graduated Texts in Mathematics, Springer, 2012.