

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Corango Algebraico de Gráficas
Completas con Signos
y
El Grupo Crítico de Complejos Simpliciales

Tesis que presenta:

Jesús Navarro López

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS ENRIQUE VALENCIA OLETA

CIUDAD DE MÉXICO

FEBRERO DEL 2016

*“I never make the same mistake twice;
I make it five or six times,
just to be sure”*

—Anónimo—

A todos, ya saben, los quiero.

Daniel Gumaro, Olaya, Alma L., Gustavo V.S., Jose Luis, Maria Luisa, Maria de Lourdes, Leticia, Jesús, Luz Maria, Jesús C. Juan Carlos, Karen, Alma V, Gustavo V., Marisol, Rene, Efrén, Miriam, Daniel, Karina, Julio Andrés, Allan, Luis, Nohemí Abigail, Juliana, Carlos, Eliza, Asher, Ismerai, Aranza, Fernanda, Ayleen, Mayra, y a todos los demás que están por venir.*

Todos, de una manera o de otra, me han ayudado (¡y aún lo hacen!) a moldear, a crear, y a forjar quien soy ahora, e indubitablemente no hubiera llegado hasta aquí, ni sería quien soy, sin ustedes. Les agradezco infinitamente que me hayan dado tanto de ustedes: afecto, apoyo, comprension, placer, inspiracion, conocimiento, reconocimiento, consejo, ejemplo, posada, regaños, gracias por ser compañeros de aventuras, locuras, travesuras, juegos, desveladas, desmañanadas, salidas, paseos, vigiliias, tardeadas, jornadas (acumuladas), valoro mucho su amistad, cariño y presencia. Va por ustedes mis estimados TODOS.

Resumen

La presente tesis abarca temas de teoría de gráficas concernientes al cálculo del corango algebraico de gráficas completas con signos y generaliza esta noción a un concepto más abstracto: el de los complejos simpliciales.

El capítulo uno revisa los preliminares de álgebra lineal, grupos, anillos y módulos y algunas propiedades básicas de los morfismos entre ellos, así mismo se pone particular énfasis en el álgebra conmutativa; se introducen nociones de la teoría de gráficas, la definición de matriz Laplaciana asociada a una gráfica. El capítulo concluye con una generalización de la eliminación Gaussiana, algoritmo de Euclides y el algoritmo simplejo en lo que se denominan bases de Gröbner.

El objetivo del capítulo dos es el de calcular el corango algebraico de una matriz completa con signos, el resultado principal determina el valor del corango algebraico de un clan, que es una subgráfica completa maximal. Definimos qué es lo que significa que una gráfica sea no mezclada, la cual nos permite establecer con precisión el corango algebraico de una gráfica completa bajo todas las configuraciones concebibles, es decir, el corango de gráficas con diferente estructura combinatoria, pues aunque esta sea completa, el hecho de que sea con signos permite diferentes valores para el corango y así que caracterizarlo por completo. En [1], Valencia y Corrales utilizan esto y el número de estabilidad para obtener cotas superiores del corango algebraico de gráficas más generales: gráficas que contienen clanes y subgráficas estables. Los árboles generadores y el teorema de Kirchhoff de matriz árbol hacen una primera aparición aquí, y se generalizan más adelante para adaptarse a la teoría complejos simpliciales.

El capítulo tres cambia de escenario y se sitúa dentro del universo de los complejos simpliciales. Aquí el trabajo para calcular corango algebraico se lleva de lo que conocemos para gráficas a complejos simpliciales. Partiendo de las ideas intuitivas preelminares de envolvente convexa y subespacio afín fijamos ideas para finalmente concentrarnos en la definición de complejo simplicial abstracto. Retomando el trabajo desarrollado en [5], trabajamos en el desarrollo de definiciones que abstraen y generalizan los árboles y árboles generadores. Cabe mencionar que en la literatura existen varios intentos de generalización, en vista de su diversidad, nosotros elegimos la nuestra por las propiedades que concervan.

Esperamos que el lector disfrute de este trabajo y le sea útil para su desarrollo.

Introducción

La principal herramienta involucrada en esta tesis es la matriz Laplaciana generalizada, la cual se define a partir de la configuración de una gráfica dirigida con signos $G = (V, E)$; con $|V| = n$ consideramos dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$. La matriz cuadrada de indeterminadas dada por:

$$X(G) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

y la matriz de adyacencia definida como sigue:

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Así definimos la matriz Laplaciana generalizada de G , como:

$$L(G, X_G) = X - A(G)$$

A partir de estas se define la matriz Laplaciana asociada a una gráfica. Calculando los n -menores de esta matriz se obtienen los ideales críticos asociados, además se demuestra que el corango algebraico de una matriz completa con signos es exactamente 1, lo cual se prueba mostrando que el ideal crítico I_2 tiene elementos polinomiales no constantes.

El k -ésimo ideal crítico de una gráfica G se define por medio de la matriz Laplaciana como el ideal (del anillo de polinomios en n variables sobre el anillo R , $R[x_1, \dots, x_n]$) generado por todos los menores de tamaño k de $L(G, X)$, es decir:

$$I_k(G, X) = \langle \det(M_{k,k}) \rangle$$

El corango algebraico se define como el máximo entero k para el cual el k -ésimo ideal crítico no es trivial: i.e. $\max \{ k \in \mathbb{N} \mid I_k = \langle 1 \rangle \}$. En [1] se obtiene una cota

para el corango algebraico de una gráfica arbitraria a partir de ciertas subgráficas llamadas clanes y estables, la demostración emplea implícitamente el siguiente hecho: el corango algebraico de una gráfica completa con signos es exactamente dos. Este hecho es observado de cerca y con este recuperamos el resultado citado de [1] como un corolario.

Después de esto pasamos a la noción más abstracta y generalizada a dimensiones superiores del objeto geométrico-algebraico llamado complejo simplicial, de los cuales, las gráficas son casos particulares, de dimensión 1, un conjunto de vértices no relacionados (gráficas triviales disconexas) son el caso de dimensión cero. Para estos, la matriz Laplaciana asociada se define de manera un poco más compleja y es ligeramente más complicada de calcular. Recordemos que se considera la construcción de estructuras llamadas complejos de cadena, que implican la definición de ciertos morfismos llamados diferenciales entre los complejos constituyendo las llamadas de una sucesiones exactas, componiendo estos morfismos con sus morfismos duales, obtenemos un endomorfismo cuya representación matricial será la definición de matriz Laplaciana combinatoria de un complejo simplicial. Por fortuna, análogamente al caso de gráficas, vamos a poder recuperar esta matriz observando únicamente la configuración combinatoria del complejo simplicial. Resulta bastante notable, que podamos obtener el mismo objeto, primero en términos algebraicos y a partir de la configuración de sus vértices, o más generalmente, de las caras del complejo simplicial, es decir de su combinatoria.

Finalmente con esta nueva matriz vamos a poder definir el ideal crítico del complejo simplicial asociado. En el caso de gráficas, el grupo crítico se define a partir de un cociente de módulos, el cokernel de la transformación lineal que define la matriz laplaciana del conjunto de vértices al conjunto de vértices. Para el caso de complejos simpliciales se involucra a la homología simplicial, la cual es análogamente un cociente de la imagen de los diferenciales el kernel del diferencial que sigue en el complejo de cadenas.

Contenido

Dedicatoria	v
Resumen	vii
Introducción	ix
Agradecimientos	xiii
1 Preliminares	1
1.1 Álgebra Conmutativa	2
1.2 Teoría de Gráficas	12
1.3 Grupo e Ideales Críticos	17
1.4 Bases de Gröbner	18
1.4.1 Introducción	19
1.4.2 Orden monomial	21
1.4.3 Algoritmo de Buchberger	24
2 Ideales Críticos de Gráficas	27
2.1 Corrago Algebraico	29
2.2 El Ideal Crítico de una Gráfica Completa con Signos	29
3 Matriz Laplaciana de un Complejo Simplicial	35
3.1 Preliminares	37
3.2 Árboles Generadores	50
3.2.1 Árboles generadores Simpliciales	50
3.3 Ejemplos	52
Bibliografía	57
Índice Analítico	61

Agradecimientos

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. por la oportunidad que me brindó de forjar mi persona dentro del ámbito científico. Hago extensiva la gratitud también a todos los profesores, que dentro de esta institución me apoyaron e instruyeron para que mi estancia aquí me fuera tan provechoza y productiva.

Asimismo, quiero externar mi gratitud al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado durante de mis estudios.

Al Instituto Politécnico Nacional, que me formó a nivel licenciatura y a los entrañables profesores que me impartieron clases. Gracias por su pasión, su dedicación y por transmitirme su amor por las matemáticas.

A mi asesor Carlos Valencia, por el apoyo otorgado, la confianza, la dedicación y paciencia con la que me guió para que este proyecto concluyera satisfactoriamente.

Gracias

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introductorio definiremos ciertos objetos matemáticos necesarios y enunciaremos algunos resultados pertinentes para el desarrollo del tema de esta tesis; consta de tres secciones:

1. Álgebra Conmutativa.- Teoría de anillos conmutativos, en particular, el dominio entero \mathbb{Z}
2. Teoría de Gráficas.- Vista como una rama de las matemáticas discretas, incluida en la teoría de combinatoria o cómo un área independiente por su propio mérito, la teoría de gráficas es medular para el capítulo 2.
3. Bases de Gröbner.- La teoría de las bases de Gröbner se ha alcanzado gran desarrollo y popularidad, más recientemente debido al algoritmo de Buchberger (1976) el cual construye una base de Gröbner a cualquier conjunto de polinomios, demostrando que admite, en efecto, una base de Gröbner; este resultado es muy importante, por ejemplo en la geometría algebraica computacional.

Esta primera parte es un esfuerzo de dejar esta obra autocontendida y, en la medida de lo posible, evitar la necesidad de buscar términos y resultados en otros textos, pese a la heterogeneidad en los textos del tema, pues recuerde que esta teoría tubo orígenes tan diversos, como la física matemática y sistemas dinámicos y autómatas y grupos abelianos de pilas de arena y etcétera y etcétera... Hemos tratado de que la notación y nomenclatura sea comprensible para una amplia gama de lectores,

y de modo que disminuya el tiempo que tarden en adaptar lo que saben a este contexto, esperamos que este propósito se cumpla pese a lo limitado del tiempo y del escaso espacio disponible. Cabe decir que el álgebra previa necesaria para este trabajo es asequible en un tiempo moderado, con una disciplina y persistencia constantes. El lector que se sienta un poco oxidado, no debería sentir preocupación, pues no es demasiada la teoría previa que se requiere, iremos dando las nociones básicas y ejemplos para entrar en materia lo antes posible, esperamos que esta introducción le sirva para recordar lo que ya sabe. Un lector familiarizado con esta teoría bien puede omitir el capítulo y pasar a siguiente.

1.1 Álgebra Conmutativa

La estructura algebraica sobre la que estaremos trabajando es un **anillo**.

Definición 1.1.1. Un anillo consta de un conjunto $R \neq \emptyset$ junto con dos operaciones (binarias) $+$ y \cdot las cuales cumplen:

1. $+$ es asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2. $+$ es conmutativa $a + b = b + a$.
3. Existe un elemento neutro 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Existen elementos inversos $\forall a \in R \exists -a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$.

1. \cdot es asociativa $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. \cdot es distributiva con respecto a $+$, es decir,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Definición 1.1.2. Un anillo R es **conmutativo** si “ \cdot ” es una operación conmutativa, i.e., $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in R$. (¡No confundir con anillo abeliano!)

En lo sucesivo omitiremos el símbolo \cdot para referirnos a la segunda operación del anillo la cual denotaremos simplemente por yuxtaposición, esto no causará confusión, pues se podrá interpretar correctamente del contexto, de modo que será evidente que ab denotará el producto de a por b y 45 denotará cuarenta y cinco, NO veinte.

Definición 1.1.3. Sea R un anillo, sea $a \in R$, con $a \neq 0$.

- a se llama *divisor de cero por la izquierda* si existe $b \in R$, con $b \neq 0$ tal que $ab = 0$.
- análogamente, a se llama *divisor de cero por la derecha* si existe $b \in R$, con $b \neq 0$ tal que $ba = 0$.
- Si un elemento a es divisor de cero tanto por la izquierda como por la derecha se dice simplemente *divisor de cero*.

Nota En el caso de anillos conmutativos, todo divisor de cero por la derecha es divisor de cero.

A veces para evitar al máximo cualquier confusión se suele indicar explícitamente que una propiedad se cumple tanto por la derecha con la palabra *bilateral*.

Ejemplo 1.1.4. Considere el anillo \mathbb{Z} de números enteros.

1. Vistos como subconjunto de los número reales \mathbb{R} , sabemos que no existen dos enteros $a \neq 0$, $b \neq 0$ tales que $ab = 0$.
2. Considere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, sean $a = (1, 0)$ y $b = (0, 1)$, donde $a \neq 0 \neq b$, con el producto usual en \mathbb{Z}^2 entrada por entrada, tenemos que $ab = (0, 0)$.
3. considera $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ Notamos que la clase del 4 $[4]$ es divisor de cero, ya que $[4] \neq [0]$ y se tiene que $[3] \neq [0]$, pero $[4][3] = [12] = [6] = [0]$.
4. Considere el anillo de matrices 2×2 con entradas en los enteros $M_2[\mathbb{Z}]$.

Sea $A \in M_2[\mathbb{Z}]$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ para la cual existe una matriz

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$ y otra matriz $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ con $B \neq C$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así que, aunque se tengan divisores de cero por la derecha e izquierda, estos bien pueden no coincidir, de modo que un elemento bien puede no tener divisores de cero bilaterales aunque este tenga divisores de cero por ambos lados.

Definición 1.1.5. Un anillo se dice *con identidad* o *anillo unitario* si existe un elemento $1 \in R$ tal que $1a = a1 = a$.

Ejemplo 1.1.6. El anillo $(P, +, \cdot)$ de los números enteros pares con la suma y producto de enteros usual $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo no unitario. $P = \{p \in \mathbb{Z} | p = 2z, \text{ con } z \in \mathbb{Z}\}$ y $1 \notin P$. En cambio el conjunto $M_2[\mathbb{R}]$ de las matrices reales cuadradas de orden 2, con la suma y producto de matrices usuales es un anillo unitario no conmutativo, como se ve en el ejemplo anterior. $0 = AB \neq BA$.

Definición 1.1.7. • Un anillo R cumple las *leyes de cancelación por la izquierda* si, dados $a, b, c \in R$ se tiene que $ac = bc$ implica que $a = b$.

- Análogamente R cumple las *leyes de cancelación por la derecha* si, dados $a, b, c \in R$ se tiene que $ca = cb$ implica $a = b$.
- Se dice que R cumple las *leyes de cancelación* si las cumple tanto por la izquierda, como por la derecha, así un *Anillo con leyes de cancelación* es aquel en el que se cumplen las leyes de cancelación.
- Nuevamente si R es conmutativo la distinción es irrelevante.

Definición 1.1.8. Un *Anillo de división* es aquel anillo en el cual todo elemento, a excepción del 0, tiene inverso.

Teorema 1.1.9. Un anillo no tiene divisores del cero si y sólo si se cumplen las leyes de cancelación.

Definición 1.1.10. Un anillo que no tiene divisores de cero es un **dominio de integridad** o **dominio de entero**. Para algunos textos esto no es suficiente y agregan conmutatividad y elemento neutro a la definición, para tener más semejanza a los números enteros.

Bajo este contexto podemos definir un campo como sigue:

Definición 1.1.11. Un *Campo* es un anillo de división conmutativo.

Definición 1.1.12. Un **Grupo** es una pareja formada por un conjunto $G \neq \emptyset$ y una operación binaria \odot y satisface los siguientes axiomas:

1. \odot es **cerrada** $\forall a, b \in G \ a \odot b \in G$.
2. \odot es **asociativa** $\forall a, b, c \in G \ a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$.
3. **existe elemento neutro** $\exists e \in G$ tal que $e \odot a = a \odot e = a \ \forall a \in G$.

4. **existen elementos inversos** $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$ tal que $a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = e$.

Notas

1. Esta definición no requiere que \odot sea conmutativa de modo que podemos tener elementos en G , a y b tales que $a \odot b \neq b \odot a$.
2. Si \odot es además conmutativo decimos que el grupo (G, \odot) es **abeliano**.
3. Podemos redefinir un anillo como un conjunto $A \neq \emptyset$ junto con dos operaciones $+$ y \cdot tal que:
 - $(A, +)$ es un grupo abeliano.
 - \cdot es asociativa.

Definición 1.1.13. Un *Espacio Vectorial* consta de:

- Un conjunto no vacío V de elementos llamados vectores.
- Un campo \mathbb{K} de escalares.
- Una operación binaria en $V+ : V \times V \rightarrow V$ bajo la cual V es un grupo abeliano.
- Una operación $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ tal que:
 1. $(r_1 r_2) \cdot v = (r_1 \cdot (r_2 \cdot v))$.
 2. Dado el elemento identidad del campo $1 \in K$. $1 \cdot v = v \forall v \in V$.
 3. \cdot tiene la propiedad distributiva respecto la suma de vectores: $c \cdot (v + w) = c \cdot v + c \cdot w$.
 4. \cdot tiene la propiedad distributiva del producto respecto la suma de escalares: $(r_1 + r_2) \cdot v = r_1 \cdot v + r_2 \cdot v$.

Finalmente,

Definición 1.1.14. Sea R un anillo conmutativo con identidad 1.

Un R -módulo consta de:

- Un grupo abeliano M .
- Un anillo conmutativo R con identidad 1.
- las operaciones de R y M son compatibles, es decir:

$$\forall r, s \in R \text{ y } \forall x, y \in M.$$

1. $(rs)x = r(sx)$.
2. $1x = x$.
3. $(r + s)x = rx + sx$.
4. $r(x + y) = rx + ry$.

Algunos ejemplos de módulos:

- Hacemos notar la gran similitud de un R -módulo con un \mathbb{K} -espacio vectorial. De hecho, si \mathbb{K} es un campo, los \mathbb{K} -módulos y los \mathbb{K} -espacios vectoriales coinciden.
- Si M es un grupo abeliano, entonces se tiene que M es un \mathbb{Z} -módulo, donde $nx = x + \dots + x$ (n términos) si $n > 0$; $nx = 0$ si $n = 0$, y $nx = -(-nx)$ si $n < 0$.
- Las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales forman un anillo R , y el espacio euclidiano \mathbb{R}^n es un módulo (izquierdo) sobre este R con la operación sobre el módulo definida por la multiplicación usual de matrices.
- Si R es cualquier anillo e I es cualquier ideal izquierdo en R , entonces I es un módulo izquierdo sobre R . Análogamente, los ideales derechos son módulos derechos.
- Un módulo M es finitamente generado si existe un número finito de elementos x_1, \dots, x_n en M tales que cada elemento de M es una combinación lineal de esos elementos con coeficientes del anillo escalar R .

Definición 1.1.15. Sea R un anillo $a \in R$ se dice idempotente si $aa = a^2 = a$ $a \in R$ se dice nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$ talque $a^n = 0$.

Definición 1.1.16. El centro de un anillo R denotado $Z(R)$ es el conjunto $Z(R) = \{x \in R \mid ax = xa \forall a \in R\}$ es decir es el conjunto de elementos del anillo que conmutan con todos los elementos del anillo.

Nota Si el anillo R tiene identidad, entonces el centro siempre es no vacío pues $1 \in Z(R)$

Definición 1.1.17. Un anillo en el que todo elemento idempotente pertenece al centro del anillo se llama **Anillo Abeliano**

Recordamos brevemente:

- De modo que en teoría de grupos los términos abeliano y conmutativo son equivalentes.
- Enfátizamos NO confundir los términos abeliano y conmutativo en anillos, pues en esta teoría son definiciones distintas.

Definición 1.1.18. Anillo o dominio euclideo euclidiano es un dominio entero R junto con una norma euclideana N . El anillo de los enteros, el de los enteros gaussianos y los anillos de polinomios son ejemplos de dominios euclídeos.

Definición 1.1.19. Un subconjunto $S \subset R$ se dice **subanillo** si como conjunto S es un anillo

Definición 1.1.20. • Un subanillo $I \subset R$ se dice **ideal derecho** $\forall x \in I$ y $\forall r \in R$ se comprueba que $xr \in I$.

- Un sub-anillo $I \subset R$ se dice **ideal izquierdo** $\forall x \in I$ y $\forall r \in R$ se comprueba que $rx \in I$.
- Un sub-anillo $I \subset R$ se dice **ideal** si es un ideal tanto izquierdo como derecho.

En términos de grupos podemos redefinir ideal derecho como sigue:

Definición 1.1.21. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, un Subconjunto $I \subset A$ es un ideal derecho si

- $(I, +)$ es un grupo abeliano
- $\forall x \in I, a \in A, xa \in I$

Las demás clases de ideales, izquierdo y bilateral, se definen análogamente. En anillos conmutativos la distinción entre ideales derecho e izquierdo es intrascendente.

- Ejemplo 1.1.22.*
1. Considere el anillo \mathbb{Z} de números enteros, con la suma y multiplicación usual. $\forall k \in \mathbb{Z} k\mathbb{Z} = \{kz | z \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal de \mathbb{Z}
 2. Sea A un anillo, los conjuntos $\{0\}, A$ son ideales y se denominan **triviales**
 3. Sea A es un anillo unitario, e I un ideal de A y se demuestra que $1 \in I$ entonces $I = A$
 4. Los ideales I de A que no son triviales, es decir $\{0\} \subset I \subset A$, pero $\{0\} \neq I \neq A$ se llaman ideales **proprios**.

Definición 1.1.23. Sea A un anillo conmutativo con identidad y $S \subset A$ el ideal I de A generado por S denotado $\langle S \rangle$ está dado por:

$$I = \langle S \rangle = \{x_1 s_1 + \dots + x_n s_n \mid x_1, \dots, x_n \in A, s_1, \dots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si resulta que S es finito, I se dice finitamente generado.

Podemos hacer algunas operaciones con los ideales un anillo.

Proposición 1.1.24. Sean I y J ideales de un anillo A .

- $I + J$ es el ideal

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

- $IJ = \langle xy \mid x \in I, y \in J \rangle$
- $I \cap J$ es un ideal y se cumple que $IJ \subset I \cap J$
- En general la unión de ideales no es un ideal, sin embargo

$$\langle I \cup J \rangle = \{ I_k \mid I_k \text{ es un ideal de } A, \text{ con } I \cup J \subset I_k \}$$

De hecho el ideal $I + J = \langle I \cup J \rangle$

Dado un I ideal, podemos preguntarnos por un conjunto mínimo de elementos que bastan para poder generar a todos los demás.

Definición 1.1.25. Sea A un anillo e I un ideal de A , existe un conjunto $\mathcal{G} \subset I$ que genera a I

Definición 1.1.26. Sea R un anillo, I un ideal de R . I se dice principal si y sólo si el conjunto generador consta de un sólo elemento, i.e.,

$$I = \langle a \rangle, \text{ para algún } a \in R$$

Morfismos

La potencia de éstos radica en las relaciones que forman entre unos y otros objetos. Para poder comparar dos estructuras algebraicas hace falta un puente o diccionario que nos permita ir de un espacio a otro y entender la estructura de uno en términos de una estructura conocida. Es aquí donde entran los morfismos. Dependiendo de la estructura sobre la que este definido un morfismo toma diferentes nombres, pero la característica común a todos es que puede llevar la estructura algebraica de su dominio a un subconjunto de su contradominio.

Partamos de lo básico.

Definición 1.1.27. Morfismos:

- **Grupos:**

Sean $(G, *)$ y (H, \cdot) dos grupos con operaciones binarias $*$ y \cdot respectivamente. La función $\Phi : G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos si: $\Phi(g_1 * g_2) = \Phi(g_1) \cdot \Phi(g_2)$.

- **Anillos:**

Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, \times, *)$ dos anillos, $\Phi : A \rightarrow B$ es un morfismo de anillos si: $\Phi(a_1 + a_2) = \Phi(a_1) + \Phi(a_2)$ y

$$\Phi(a_1 \cdot a_2) = \Phi(a_1) * \Phi(a_2)$$

- **Módulos**

Sean un anillo A y M, N dos A -módulos $\Phi : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos si: $\Phi(m_1 + m_2) = \Phi(m_1) + \Phi(m_2)$. $\forall m_1, m_2 \in M$

y

$$\Phi(am) = a\Phi(m) \quad \forall m \in M \text{ y } \forall a \in A.$$

- **Espacios Vectoriales**

Sean \mathbb{K} un campo y V, W dos \mathbb{K} -espacios vectoriales. $\Phi : V \rightarrow W$ es un morfismo de espacios vectoriales si: $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$. $\forall v_1, v_2 \in V$

y

$$\Phi(kv) = k\Phi(v) \quad \forall v \in V \text{ y } \forall k \in \mathbb{K}$$

Notas Los morfismos de grupos, anillos y módulos se llaman homomorfismos, los de espacios vectoriales, transformaciones lineales. Estos tienen la propiedad de trasladar las propiedades algebraicas de un conjunto en otro, y estas condiciones mejoran si además el morfismo es inyectivo. Si pasa esto entonces se sabe que hay una copia exacta del espacio dominio en el espacio su codominio. Recíprocamente, si el morfismo es suprayectivo, se tiene una copia exacta del espacio del codominio en su dominio. Si nuestro morfismo es biyectivo, este se llama isomorfismo, y significa que ambos espacios son algebraicamente indistinguibles. Es exactamente lo mismo trabajar con uno que con otro. Esto nos da la potencia de estudiar un espacio desconocido en términos de uno conocido, conociendo el isomorfismo entre ellos, es por eso que son tan importantes.

Anillo cociente

Sea A un anillo e I un ideal de A . Definimos una relación en A como sigue: x está relacionado con y denotado $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in I$. \sim es de equivalencia y es compatible con las dos operaciones del anillo.

Denotamos al conjunto de clases $\dot{x} = x + I$ por A/I así $A/I = \{x + I \mid x \in A\}$. Extendemos las operaciones de A al anillo cociente A/I como sigue

- $x + I + y + I = (x + y) + I$.
- $(x + I)(y + I) = (xy) + I$.
- el elemento neutro del anillo cociente A/I es $0 + I = I$.
- Dado un elemento $a + I$ en A/I el elemento inverso es $(-a) + I$.

Teorema 1.1.28. Si A es un anillo conmutativo con identidad P es un ideal primo de A si y sólo si A/P es dominio entero.

Teorema 1.1.29. Si A es un anillo conmutativo con identidad un ideal maximal es ideal primo. El ideal I es maximal si y sólo si A/I es un campo.

Ahora procederemos a definir el anillo de polinomios.

Definición 1.1.30. Sea S un anillo y X una indeterminada, el *anillo de polinomios en la indeterminada X con coeficientes en S* $S[X]$ es el conjunto de sumas formales finitas finitas:

$$S[X] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k \mid a_k \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

- \mathbb{N} o \mathbb{Z} o cualquier anillo conmutativo o anillo conmutativo con identidad, especialmente si este es de ideales principales.
- \mathbb{Q} o \mathbb{R} o cualquier campo

En estos casos obtenemos cierta riqueza en la forma en cómo podemos operar estos polinomios y los resultados que se pueden obtener.

Podemos generalizar aún más este concepto

- Definición 1.1.31.*
- Sea $X = \{ x_1, \dots, x_n \}$ un conjunto de indeterminadas.
 - Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice, i.e., $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde cada $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para algún n
 - $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
 - Sea S un conjunto no vacío. El conjunto de polinomios con coeficientes en S y variables en X denotado $S[X]$ es el conjunto de sumas formales

$$S[X] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k \mid a \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Nota En esta definición el conjunto de coeficientes puede ser cualquier tener cualquier estructura algebraica, dependiendo del conjunto de coeficientes será la estructura del correspondiente anillo de polinomios. Por ejemplo sabemos que un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes en \mathbb{C} se factoriza en n factores lineales en \mathbb{C} , es decir los factores irreducibles son siempre monomios de grado 1. Sin embargo en otras estructuras tendremos elementos polinomiales irreducibles de mayor grado, por ejemplo en \mathbb{Z} , o \mathbb{Q} e inclusive en \mathbb{R} . Dado que el anillo de polinomios hereda algunas de las propiedades de este conjunto de coeficientes, tendremos resultados diferentes tan sólo cambiando de conjunto de coeficientes. Esto se estudia profundamente en un curso de teoría de campos, en particular para la rica teoría de Galois, gracias a esta se dio la primera demostración de que no existe una fórmula para hallar las raíces de cualquier polinomio de grado mayor a 4, cómo la conocida fórmula general para ecuaciones cuadráticas, la fórmula de Cardano para polinomios de grado 3 o la de Ferrari para grado 4. Las cuales enuncian una fórmula analítica explícita de las raíces de los polinomios en términos de sus coeficientes. Con la teoría introducida por Galois, la teoría de grupos, se demuestra

que es imposible tener una fórmula en términos de operaciones conocidas: suma, resta, producto, división, potencias y radicales de los coeficientes arbitrarios de un polinomio cualquiera de grado superior a 4 para obtener sus raíces.

Un ejemplo de la estrecha relación entre el anillo de polinomios es el teorema de la base de Hilbert.

Teorema 1.1.32. Base de Hilbert Si todo ideal del anillo A es finitamente generado, entonces todo ideal del anillo de polinomios $A[x]$ es finitamente generado

Usando inducción matemática se puede demostrar el siguiente:

Teorema 1.1.33. Base de Hilbert generalizado Si todo ideal del anillo A es finitamente generado, entonces todo ideal del anillo de polinomios $A[x_1, \dots, x_n]$ es finitamente generado

1.2 Teoría de Gráficas

Desde tiempo inmemorial el género humano ha hallado patrones en todas partes. Esta imaginación nos ha convertido en una especie exitosa, hemos poblado casi todos los rincones del planeta, desde la tundra congelada, hasta los desiertos más abrasadores. Esta intrínseca habilidad de todos nosotros ha impulsado nuestra supervivencia, desde los más pequeños asentamientos humanos y aldeas que luchaban contra las inclemencias del tiempo y la naturaleza.

Considere intuitivamente un arreglo de n puntos.

Ejemplo 1.2.1. Sean V un conjunto de n puntos llamados *vértices*, esta distribución de puntos llamó la atención de muchas civilizaciones que los agruparon de distintas maneras e inventaron cuentos en torno a las figuras que ellos se imaginaban que formaban.

Podemos relacionar dichos puntos entre si mediante líneas.

El ser humano lleva mucho tiempo uniendo puntos con líneas, a modo de ejemplo considere las constelaciones. Tal vez escondido en nuestra genética está la necesidad de buscar patrones en todo lo que percibimos. Inclusive de las matemáticas, se presume que nacieron de la curiosidad y de la gran imaginación de las personas para encontrar y reconocer patrones verdaderos. La presente tesis es un esfuerzo



Conjunto de puntos, denominados **vértices** forman la llamada constelación de Orión, visible en invierno en el hemisferio norte y en verano en el hemisferio sur

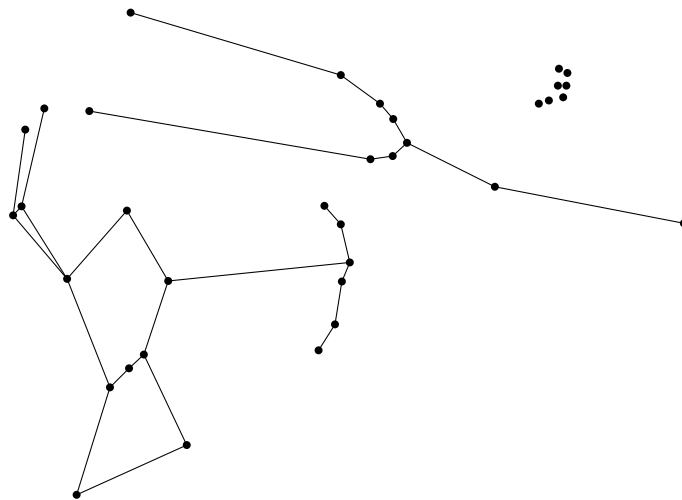
de encontrar los patrones que siguen ciertas clases de gráficas, las completas, y así encontrar una descripción de una estructura algebraica llamada ideal crítico.

Sean V un conjunto de n puntos llamados *vértices*, los cuales podemos relacionar mediante aristas, i.e., parejas ordenadas (v_i, v_j) , donde v_i y v_j son vértices, en la siguiente figura se muestra el mismo patrón anterior, unido representando al cazador que la civilización griega dió a este conjunto de estrellas.

La figura 2 es la representación geométrica la idea abstracta de una **gráfica**. Esta consta de un conjunto de puntos llamados **vértices** y las líneas que los unen se llaman aristas. Podemos tener diferentes gráficas para el mismo conjunto de vértices simplemente cambiando la forma en cómo se conectan las líneas entre ellos, a manera de semejanza considere los diferentes patrones que diversas civilizaciones encontraron en las distribuciones de puntos que forman las estrellas distantes en el cielo nocturno. Donde unos veían un cazador, otros vieron una mano, etc. Mismo conjunto de vértices puede dar lugar a distintas gráficas

Cabe mencionar que se admite en la definición de gráfica, condiciones más generales; por ejemplo, aquí podemos ver la constelación de Orión, seguido de Tauro y hasta la derecha las Pleyades. Esto se puede considerar como una gráfica disconexa, y además una colección de gráficas triviales las formadas por un sólo vértice, pues las últimas no están relacionadas con ninguna otra.

Ejemplo 1.2.2.

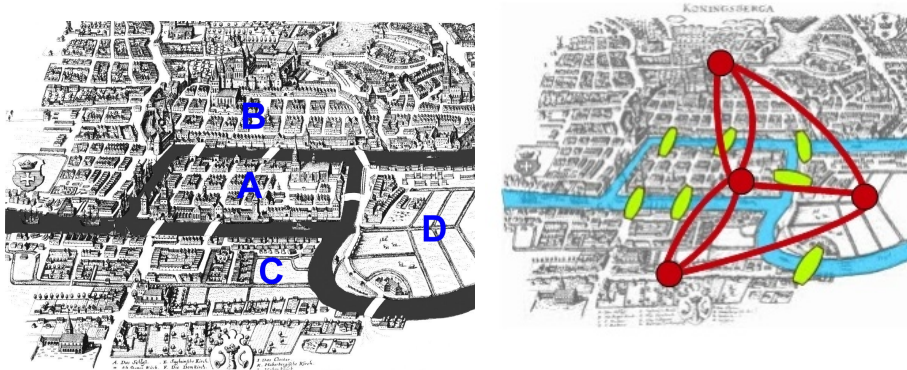


Otro ejemplo práctico importante en donde surgen las gráficas en la vida diaria más inmediata, es en un mapa del metro. En la práctica a uno no le interesa que el mapa este a escala, ni si representa distancias reales, lo único en lo que uno se molesta en poner atención es en los transbordes, es decir, la forma en como los vértices, que en este caso representan estaciones, están interconectadas, la configuración, el arreglo, la **combinatoria**.



Esta nueva teoría, la perspectiva de fijarnos en cosas como si fueran puntos y puentes históricamente surge a raíz de que un genio se fue a vivir al pueblo de Königsberg estaba escindido en cuatro partes por el río Pregel. Los lugareños tenían este juego que consistía en a tratar de pasar por todos los islotes hasta regresar al punto de partida, sin importar cual de ellos fuera y sin pasar más que una vez por cada puente. Este genio, llamado Leonard Euler, decidió tomar el problema en sus manos, y como es característico en esa clase de personas no desistió hasta que hubo resuelto el dilema, eventualmente lo resolvió trasladando la cuestión aun terreno más abstracto donde se dió cuenta que no importaba la longitud de los puentes, ni la distancia o tamaño de las regiones en cuestión, sino solamente de la configuración de los vínculos, podía ver cada región como un punto y cada puente como una

arista iniciándose así la teoría de gráficas.



Comenzamos con las nociones básicas de teoría de grafos, una rama de la combinatoria que se ha vuelto una materia en su propio derecho por la importancia que ha adquirido el desarrollo que ha alcanzado y el alcance de sus resultados.

Definición 1.2.3. Una **gráfica** G es una pareja (V, A) donde V un conjunto no vacío, a cuyos elementos denominaremos **vértices** y un conjunto de parejas (no necesariamente ordenadas) $A = \{x, y\}_{x, y \in V}$ de elementos en V llamadas aristas.

Si los elementos de V están indizados, denotamos la arista $\{v_i, v_j\}$ simplemente por $\{i, j\}$

Dicho de otro modo:

Aunque el conjunto V de vértices de una gráfica puede ser infinito, nosotros sólo trataremos el caso de $|V| < \infty$

Nota: Al imponer condiciones o restricciones extras sobre el conjunto A de aristas de G , obtenemos varias clases de gráficas

Definición 1.2.4. Si existe un elemento $\{a, a\} \in A$ para algún $a \in V$ tal elemento recibe el nombre de **ciclo** o **bucle**

Definición 1.2.5. Si resulta que las aristas A de una gráfica G están ordenadas, G se llama **Gráfica Dirigida** o **Digráfica**

Definición 1.2.6. Un multivértice es equivalente a tener elementos repetido en el conjunto A

Definición 1.2.7. Si en la gráfica G no tenemos aristas múltiples, i.e., no repetidas, ni ciclos $\{a, a\}$ decimos que G es **simple**

Definición 1.2.8. Un **camino** es una sucesión de vértices tal que de cada uno de sus vértices existe una arista hacia el vértice sucesor. Un camino **simple** es aquel que no repite vértices en su recorrido.

Definición 1.2.9. Un ciclo es un camino simple en el que el primer y último vértice coinciden.

Definición 1.2.10. Un camino euleriano es aquel en el que cada arista se recorre una sola vez.

Una definición dual a camino euleriano es la siguiente:

Definición 1.2.11. Un camino Hamiltoniano es aquel que visita cada vértice del grafo sólo una vez

Definición 1.2.12. Una gráfica se dice **completa** si $\forall v, u \in G, v \neq u \{v, u\} \in A$.

A todo grafo G se le puede asociar una tripla de matrices que definiremos a continuación:

Definición 1.2.13. Sea $G = (V, A)$ Sean $v, u \in V$ el grado de la arista $\{v, u\}$, denotado $m_{\{v,u\}}$ es el número de aristas que unen a los vértices v y u . En el caso de una digráfica $m_{(v,u)}$ es el número de aristas con vértice inicial v y vértice final u .

Definición 1.2.14. Sea $G = (V, A)$ Sea $v \in V$ un vértice. El grado de v es el número de aristas que tocan al vértice v y se denota por $m_v = |\{v, u\}_{u \in V}|$, en caso de que G sea digráfica m_v es el número de aristas cuyo vértice inicial es v

Definición 1.2.15. Sea G un grafo con $n = |V|$. y $m = |A|$

1. La *matriz de adyacencia* de G es la matriz cuadrada $n \times n$ A definida por:

$$[A_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } i \text{ es adyacente al vértice } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.1)$$

2. La **matriz de grado** de G es la matriz diagonal $D(G)$ $n \times n$ dada por

$$[D(G)_{i,j}] = \begin{cases} m_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.2)$$

3. La *matriz de incidencia* de G es la matriz I $n \times m$ definida por:

$$[I_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si el v\u00e9rtice } i \text{ es incidente en la arista } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.3)$$

4. La *matriz de indeterminadas* $X(G)$ es la matriz diagonal $n \times n$ donde cada variable es indizada por los v\u00e9rtices de G

$$[X(G)_{i,j}] = \begin{cases} x_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.4)$$

o lo que es lo mismo: $[X(G)] = \text{diag } \{x_v\}_{\{v \in V\}}$ Las variables son mudas y el hecho de etiquetar los v\u00e9rtices de una u otra manera podr\u00e1 facilitar en algunos casos los c\u00e1lculos

Ahora ya estamos en condiciones de definir la matriz Laplaciana de un grafo G .

Definici\u00f3n 1.2.16. La *matriz Laplaciana* de G $L(G)$ est\u00e1 dada por $L(G) = D(G) - A(G)$

Adem\u00e1s de esta definici\u00f3n, existe otra m\u00e1s general, que involucra al anillo conmutativo $\mathbb{Z}[X]$.

Definici\u00f3n 1.2.17. Sea $G = (V, A)$ un grafo simple, con $|V| = n$. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto de n indeterminadas. La *matriz Laplaciana generalizada* de G es $L(G, X)$ y esta dada por $L(G, X) = X(G) - A(G)$

As\u00ed que si formamos una matriz D con cada variable en la diagonal y cero fuera de ella, la matriz Laplaciana generalizada de G se obtiene de restar a esta, la matriz de adyacencia A de G

Nota Si G es completa entonces la matriz tiene las variables x_1, \dots, x_n cada una en una entrada de la diagonal y 1 en todo lo dem\u00e1s, esto le da a la matriz propiedades sim\u00e9tricas que aprovecharemos m\u00e1s adelante.

1.3 Grupo e Ideales Críticos

Ahora que ya tenemos las matrices Laplaciana y Laplaciana generalizada de una gráfica cualquiera, podemos asociarle una estructura algebraica que depende del rango de dichas matrices.

Sea $\mathfrak{G} = (V, A)$ una gráfica, con $|V|$ y sea $L(\mathfrak{G})$ su matriz Laplaciana. El grupo crítico de \mathfrak{G} denotado $K(\mathfrak{G})$ es el anillo cociente

$$K(\mathfrak{G}) = \mathbb{Z}^n / \text{Im}(L(\mathfrak{G}))^t$$

Es decir, estamos viendo a la matriz $L(\mathfrak{G})$ como la transformación lineal $L(\mathfrak{G}) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ donde $(z_1, \dots, z_n) \mapsto L(\mathfrak{G})(z_1, \dots, z_n)^t$

Así que el grupo crítico $K(\mathfrak{G})$ es el cokernel de $L(\mathfrak{G})$.

En general si $M \in M_{m \times n}(\mathbb{A})$, el grupo crítico de M esta dado por

$$(M) = \mathbb{A}^n / M^t \mathbb{A}^m.$$

Visto de esta forma, los grupos críticos son invariantes bajo matrices equivalentes.

Cuando nuestro anillo base \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, se tiene que el grupo crítico de una matriz M esta dado por:

$$K(M) = \bigoplus_{i=2}^n \mathbb{A}_{\Delta_i(M)/\Delta_{i-1}(M)}.$$

Donde $\Delta_i(M)$ es el máximo común divisor de todos los menores de tamaño $i \times i$.

Considere ahora la matriz Laplaciana generalizada de una gráfica \mathfrak{G} , $L(\mathfrak{G}, X)$. El ideal crítico de \mathfrak{G} , $I(\mathfrak{G}, X)$ es:

$$I(\mathfrak{G}, X) = \{\text{menores}_i(L(\mathfrak{G}, X))\} \subset \mathcal{P}[X] \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dada una gráfica \mathfrak{G} , se define el corrancho algebraico de \mathfrak{G} como el máximo índice i tal que el i -ésimo ideal crítico es trivial de \mathfrak{G} , i.e.:

$$\gamma(\mathfrak{G}) = \max \{i | I_i(\mathfrak{G}, X) = \langle 1 \rangle\}.$$

1.4 Bases de Gröbner

Una base de Gröbner es un conjunto de polinomios en varias variables el cual tiene propiedades algorítmicas deseables. Todo conjunto de polinomios se puede transformar en una base de Gröbner.

Este proceso generaliza tres técnicas familiares:

1. Eliminación Gaussiana: Para resolver sistemas de ecuaciones lineales
2. Algoritmo de Euclides: Para calcular el máximo común divisor de dos polinomios de una variable. Dado un ideal I en el anillo de polinomios en una variable $k[x]$, donde k es un campo, I es el generado por el conjunto $\{f(x)_1, \dots, f(x)_n\}$, entonces se puede calcular un polinomio p tal que I se puede generar por este sólo elemento, a saber el mínimo común múltiplo de $f(x)_1, \dots, f(x)_n$, empleando el algoritmo de Euclides. Entonces un polinomio $f \in k[x]$ está en I el residuo de la división de f por d es cero.
3. Algoritmo simplejo: Para programación lineal

Comenzaremos con lo básico

1.4.1 Introducción

Sea \mathbb{K} cualquier campo, (por ejemplo el campo \mathbb{Q} , de números racionales, el campo \mathbb{R} , de números reales, o el campo \mathbb{C} , de números complejos). Escribimos $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, con las operaciones usuales de suma de polinomios y multiplicación por escalar, este conjunto es el anillo conmutativo de polinomios en n variables con coeficientes en \mathbb{K} , así mismo este espacio tiene estructura de espacio vectorial sobre el campo \mathbb{K} . Sea \mathfrak{F} es cualquier familia de polinomios, consideramos el conjunto generado por \mathfrak{F} a saber $\langle \mathfrak{F} \rangle$ consistente de todas las combinaciones polinomiales.

$$\langle \mathfrak{F} \rangle = \{p_1 f_1 + \dots + \dots + p_n f_n \mid f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{F} \text{ } p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n] \}$$

Este conjunto es un ideal en el sentido de la teoría de anillos y es fácil ver que es así.

Por otra parte, sea $n \in \mathbb{N}$, el n -espacio afín $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K} \forall 1 \leq i \leq n\}$

Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ induce una función $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow f(a_1, \dots, a_n)$ llamada función evaluación.

Así tenemos dos formas de concebir un polinomio: La primera, como la suma formal de elementos de la forma $a x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, donde $a \in \mathbb{K}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (con $0 \in \mathbb{N}$)

La segunda, como una función evaluación $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$

Esta dualidad intrínseca de la definición de un polinomio nos brinda un diccionario para traducir el lenguaje del algebra al de la geometría; es decir llevar el conjunto sumas formales de elementos de un campo y un conjunto de indeterminadas a los valores que toma un polinomio en un conjunto de puntos.

Formalmente, definimos la *Variedad* definida por un polinomio f $V(f)$ como el conjunto de ceros del polinomio

$$V(f) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

Con esta definición podemos concebir el círculo unitario en \mathbb{R}^2 como la variedad del polinomio $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Nuestra definición de variedad no se limita a un sólo polinomio, pues si tenemos m polinomios, la variedad definida por ellos es $V(f_1, \dots, f_m) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall 1 \leq i \leq m\}$. Dicho de otra forma, la variedad es el espacio solución del sistema:

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = 0$$

$$f_2(a_1, \dots, a_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Esto es la intersección de las variedades formadas por cada polinomio individualmente.

Y aún podemos generalizar más nuestra variedad, pues no tenemos porque conformarnos con una variedad generada por sólo una cantidad finita de polinomios.

Definición 1.4.1. Sea $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ La variedad formada por S es $V(S) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall f \in S\}$

Dado el conjunto \mathfrak{F} y una base de Gröbner \mathcal{G} para \mathfrak{F} entonces \mathfrak{F} y \mathcal{G} generan los mismos conjuntos, i.e., $\langle \mathfrak{F} \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle$

Considere el siguiente

Teorema 1.4.2. Base de Hilbert Todo anillo de polinomios sobre un anillo Noetheriano es Noetheriano.

Proof. Pendiente

□

Entonces todo ideal I en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tiene la forma $I = \langle \mathfrak{F} \rangle$; i.e. es finitamente generado por algún conjunto finito \mathfrak{F} de polinomios.

1.4.2 Orden monomial

Definición 1.4.3. Un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es un orden total \prec en el conjunto de todos los monomios $x^a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ con las siguientes propiedades:

1. Es multiplicativo i.e.:

$$x^a \prec x^b \text{ implica } x^{a+c} \prec x^{b+c} \text{ para toda } a, b, c \in \mathbb{N}^n$$

2. El monomio constante es el elemento mínimo, i.e.:

$$1 \prec x^a \text{ para toda } a \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$$

- Ambas condiciones implican que si x^a y x^b son monomios, entonces $x^a \prec x^{a+b}$
- Así mismo implican que el orden es un *buen orden*, lo cual significa que toda cadena estrictamente decreciente de polinomios es finita, o equivalentemente, que todo conjunto no vacío de monomios tiene primer elemento.

Ejemplo 1.4.4. 1. Entre los polinomios de una variable, esto es $n = 1$, el único orden que satisface estas condiciones es el orden natural:

$$1 < x^1 < x^2 < x^3 < x^4 < \dots$$

Por lo que la noción de un orden monomial es de interés sólo para el caso multivariable.

2. Si $n = 2$, tenemos el orden **lexicográfico (lex)** de grado.

$$1 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_1^2 \prec x_1x_2 \prec x_2^2 \prec x_1^3 \prec x_1^2x_2 \prec \dots$$

3. Nuevamente para $n = 2$ tenemos el llamado **lexicográfico graduado (gr-lex)**. Este compara primeramente el grado total, esto es, la suma de los exponentes de las variables de cada monomio que compone a $p(x)$. En caso de empate comparamos ambos términos con el orden lexicográfico usual. Este orden no sólo es un buen orden, también tiene la propiedad de que todo elemento está precedido por una cantidad finita de monomios. En contraste con el orden lexicográfico en el que esto no ocurre, la variable x_1 y cualquier potencia de ella es *menor que* x_2 . Note que esto no exime al orden lex de la propiedad ser buen orden, pues aún se tiene la imposibilidad de tener una cadena descendente infinita.

4. *Orden Lexicográfico Graduado Inverso (grevlex)* Este orden es particularmente útil a la hora de calcular bases de Gröbner. Análogamente al anterior compara primeramente el grado total, después compara exponentes de la última indeterminada, x_n , así que el monomio con exponente más chico será el mayor en el orden, seguido, como siempre que ocurre un empate, por una comparación de x_{n-1} , y así sucesivamente hasta concluir con x_1 . Note que el hecho de estar graduado es indispensable para este orden, a diferencia del punto anterior en que es una condición opcional, al omitirlo, la condición 2, no tiene porque satisfacerse, dando así la posibilidad de tener cadenas en que no haya elemento mínimo pues podemos tener cadenas descendentes infinitas $x^1 \succ x^2 \succ x^3 \succ x^4 \succ \dots$

5. *Orden de bloques o de eliminación (lexdeg)* Se puede definir para cualquier número de bloques, pero por simplicidad consideraremos solo el caso de dos bloques. (Cuando el número de bloques es igual al número de indeterminadas este orden se reduce al lexicográfico. Para este orden, las indeterminadas se dividen en dos bloques $x_1 \dots x_h$ y $y_1 \dots y_k$ y se escoge un orden monomial

para cada bloque. Dos monomios son comparados usando su parte x y si hay empate, con la parte y .

6. *Orden de peso* Este orden depende de una sucesión $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$ llamado vector de peso. Primeramente compara el producto punto de la sucesión de exponentes de los monomios con este vector de peso, y en caso de empate usa algún orden monomial fijo. por ejemplo los ejemplos graduados anteriores son casos de ordenes peso para el vector de peso "grado total" $(1, \dots, 1)$

Considere los monomios xy^2z, z^2, x^3, x^2z^2 : los ordenes monomiales anteriores ordenan estos cuatro monomios como sigue:

- Lex: $x^3 > x^2z^2 > xy^2z > z^2$ (la potencia de x domina).
- Grlex: $x^2z^2 > xy^2z > x^3 > z^2$ (el grado total domina, la máxima potencia de x rompe el empate entre las primeras dos).
- Grvlex: $xy^2z > x^2z^2 > x^3 > z^2$ (el grado total domina, la mínima potencia de z rompe el empate entre las primeras dos).
- orden de peso con vector de peso $(1, 2, 4)$: $x^2z^2 > xy^2z > z^2 > x^3$ (el producto punto $10 > 9 > 8 > 3$ no deja ningún empate que romper aquí.)

Si fijamos un orden \prec entonces todo polinomio f tiene un único término inicial más grande (respecto de \prec) y usualmente lo subrayamos. Escribimos los términos de f en orden (\prec) decreciente, por ejemplo $f(x) = \underline{3x_2^2} + 5x_1x_2 + 7x_1^2 + 11x_1 + 13x_2 + 17$.

Suponga ahora que I es un ideal en $K[x_1, \dots, x_n]$. Entonces su **Ideal inicial** $in_{\prec}(I)$ es el ideal generado por los términos iniciales de todos los polinomios en I .

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(f) \mid f \in I \rangle.$$

Un subconjunto finito \mathcal{G} de I es una **base de Gröbner** con respecto al orden monomial \prec si los términos iniciales de los elementos en \mathcal{G} bastan para generar el ideal inicial I :

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(g) \mid g \in \mathcal{G} \rangle.$$

No hay requisitos de minimalidad para que un conjunto sea base de Gröbner. Si \mathcal{G} es una base de Gröbner para I entonces cualquier cualquier subconjunto finito de I que contenga a \mathcal{G} es base también de Gröbner. Esta ambigüedad se evita especificando lo que sigue:

Definición 1.4.5. \mathcal{G} es una **base de Gröbner reducida** si:

1. $\forall g \in \mathcal{G}$, el coeficiente de $in_{\prec}(g)$ en \mathcal{G} es 1
2. El conjunto $\{ in_{\prec}(g) \mid g \in \mathcal{G} \}$ genera minimalmente a $in_{\prec}(I)$.
3. Ningún término trailing de $g \in \mathcal{G}$ yace en $in_{\prec}(I)$.

Con esta definición, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.6. Dado un orden monomial \prec , todo ideal I en $K[x_1, \dots, x_n]$ tiene una única base de Gröbner reducida con respecto de \prec .

1.4.3 Algoritmo de Buchberger

La base de Gröbner reducida puede calcularse de cualquier conjunto generador de I con un algoritmo que describiremos a continuación:

Suponga que $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$ escribimos $F = \{f_1, \dots, f_t\}$

Para cualesquiera par de polinomios $f_1, f_2 \in K[x_1, \dots, x_n]$ y un orden monomial, podemos formar su S -polinomio, el cual cancela intencionalmente los términos líderes de ambos polinomios.

Ejemplo 1.4.7. Usando el orden *deglex*, sean

$$f_1 = 3x^3y + 2xy - y^2$$

$$f_2 = 2xy^2 - y^3$$

entonces podemos escribir

$$S(f_1, f_2) = 1/3yf_1 - 1/2x^2f_2 = (x^3y^2 + 2/3xy^2 - 1/3y^3) - (x^3y^2 - 5/2x^2y^3) = 5/2x^2y^3 + 2/3xy^2 - 1/3y^3$$

Ahora introduciremos una noción más general del concepto de mínimo común múltiplo de un par de monomios. Considere los monomios x^α, x^β , donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ son multi-índices, i.e. $x^\alpha = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$, $x^\beta = x^{\beta_1} \dots x^{\beta_n}$

No es difícil ver que el mínimo común múltiplo (MCM) de estos está dado por:

$$x^\gamma = LCM(x^\alpha, x^\beta) = x_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}}$$

Ahora estamos capacitados para definir un S -polinomio. Sean f_1, f_2 un par de polinomios, el S -polinomio de f_1 y f_2 denotado $S(f_1, f_2)$ esta dado por

$S(f_1, f_2) = \frac{x^\gamma}{LTf_1}f_1 - \frac{x^\gamma}{LTf_2}f_2$, donde $x^\gamma = LCM(LM(f_1), LM(f_2))$ es el mínimo común múltiplo de los monomios líderes de los polinomios f_1, f_2 .

Usualmente una base de Gröbner trata con ideales en un anillo de polinomios sobre un campo, sin embargo en esta tesis nos restringiremos al anillo de enteros \mathbb{Z} . Hacemos notar que hay desarrollos de la teoría de bases de Gröbner sobre casi todo tipo de anillo.

Definición 1.4.8. Sean f y g polinomios en $\mathcal{G}[X]$ y B un conjunto de polinomios en $\mathcal{G}[X]$. Decimos que f se reduce fuertemente a g módulo B si:

- $LT(g) < LT(f)$
- existe $f' \in B$ y $h \in \mathcal{G}[X]$ tales que $g = f - hf'$

Aún más si $f^* \in \mathcal{G}[X]$ puede obtenerse en un número finito de reducciones escribimos $f \rightarrow_B f^*$. Esto es, si $f = \sum_{j=1}^t p_{i_j} b_{i_j} + f^*$ con $p_{i_j} \in \mathcal{G}[X]$ y $LT(p_{i_j} b_{i_j}) \neq LT(p_{i_k} b_{i_k})$ para todo $j \neq k$, entonces $f \rightarrow_B f^*$

El siguiente criterio permite determinar si cierto (sub)conjunto G de generadores de algún ideal I es una base de Gröbner.

Proposición 1.4.9. Sea I un ideal de polinomios sobre un dominio de ideales principales, y G un conjunto de generadores de I . G es una base de Gröbner de I si y sólo si $S(f, g) \rightarrow_G 0$ para todo $f \neq g \in G$

Sea $f_1 = xy - x$, $f_2 = x^2 - y \in \mathbb{Z}$ con el orden deglex y $x < y$, sea $F = \{f_1, f_2\}$. Entonces $S(f_1, f_2) = xf_1 - yf_2 = x^2y - x^2 - (yx^2 - y^2) = y^2 - x^2 \rightarrow_F y^2 - y$ y $f_3 = y^2 - y$ es reducido respecto de F . Agregamos f_3 a F y sea $F' = \{f_1, f_2, f_3\}$. Entonces $S(f_1, f_2) \rightarrow_F 0$, $S(f_1, f_3) = yf_1 - xf_3 = xy^2 - xy - xy^2 + xy = 0$ y $S(f_2, f_3) = y^2f_2 - x^2f_3 = x^2y^2 - y^3 - x^2y^2 + xy = -y^3 + x^2y \rightarrow_F x^2y - y^2 \rightarrow_F 0$. Así $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de Gröbner.

Capítulo 2

Ideales Críticos de Gráficas

En lo que sigue, \mathcal{P} denotará un anillo conmutativo con identidad, a menos que se especifique lo contrario

Dada una gráfica G con n vértices y dado $1 \leq i \leq n$, el i -ésimo ideal crítico de G denotado $I_i(G, X)$ está dado por:

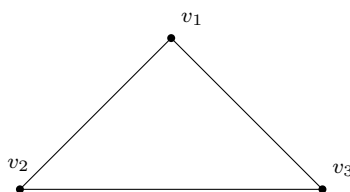
$$I_i(G, X) = \langle \text{minors}_i(L(G, X)) \rangle \subseteq \mathcal{P}[X_G]$$

donde $L(G, X)$ es la matriz Laplaciana generalizada.

Convención $I_i(G, X) = \langle 1 \rangle$ cuando $i < 0$ y $I_i(G, X) = \langle 0 \rangle$ cuando $i > n$.

Nota: $I_n(G, X)$ es un ideal principal generado por el determinante de la matriz Laplaciana generalizada.

Ejemplo 2.0.1. Considere la siguiente gráfica.



Esta es la gráfica completa con 3 vértices K_3

Así la matriz Laplaciana generalizada de K_3 , esta dada por:

$$L(K_3, X_{K_3}) = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & -1 \\ -1 & x_2 & -1 \\ -1 & -1 & x_3 \end{pmatrix}$$

Procedemos a calcular los ideales críticos.

$$I_1 = \langle x_1, x_2, x_3, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} I_2 = \left\langle \begin{vmatrix} x_1 & -1 \\ -1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & -1 \\ -1 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & -1 \\ -1 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x_1 \end{vmatrix}, \right. \\ \left. \begin{vmatrix} x_2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x_3 \end{vmatrix} \right\rangle = \\ = \langle x_1x_2 - 1, x_2x_3 - 1, x_1x_3 - 1, -1 - x_1, -1 - x_2, -1 - x_3, x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1 \rangle = \\ = \langle x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1 \rangle \end{aligned}$$

$$I_3 = \left\langle \begin{vmatrix} x_1 & -1 & -1 \\ -1 & x_2 & -1 \\ -1 & -1 & x_3 \end{vmatrix} \right\rangle = \langle x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 - 2 \rangle$$

Proposición 2.0.2. Si G es una digráfica con n vértices, entonces

$$\langle 0 \rangle \subsetneq I_n(G, X) \subseteq \dots \subseteq I_1(G, X) \subseteq \langle 1 \rangle$$

Más aún, si H es una subgráfica inducida de G con m vértices, entonces $I_k(H, X) \subseteq I_k(G, X)$, para todo $1 \leq k \leq m$

Proof. M una matriz $(k+1) \times (k+a)$ con entradas en $\mathcal{P}[X_G]$ con entradas en $\mathcal{P}[X_G]$. Dado que $\det(M) = \sum_{i=1}^{k+1} M_{i,1} \times \det(M_{i,1})$, $I_{k+1}(G, X) \subset I_k(G, X)$ para todo $1 \leq k \leq n-1$. Por otra parte, dado que cualquier submatriz de $L(H, X)$ también es una submatriz de $L(G, X)$, $\text{minors}_k(L(H, X)) \subseteq \text{minors}_k(L(G, X))$ para todo $1 \leq k \leq m$ y por lo tanto $I_k(H, X) \subseteq I_k(G, X)$ para todo $1 \leq k \leq m$ \square

2.1 Corrago Algebraico

Definición 2.1.1. Dada una gráfica G y el anillo \mathcal{P} , el corrago algebraico de G , denotado $\gamma_{\mathcal{P}}(G)$ es el máximo índice del ideal crítico que es trivial, es decir:

$$\gamma_{\mathcal{P}}(G) = \text{máx}\{i \mid I_i(G, X) = \langle 1 \rangle\}$$

Definición 2.1.2. Sea G una gráfica.

- Un subconjunto S de los vértices de G se llama *estable* o *independiente* si no hay ninguna arista de G que acabe en S . Un conjunto estable se llama *maximal* si lo es respecto de la inclusión de conjuntos. Dicho de otro modo, un conjunto es estable si
- Similarmente, un subconjunto C de vértices de una gráfica G se llama un *Clan* si toda pareja de vértices en C están unidos mediante una arista de G

Definición 2.1.3. Sea G una gráfica y \mathfrak{P} un dominio de ideales principales.

- El número de estabilidad de G , denotado por $\alpha(G)$ está dado por

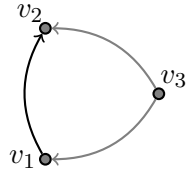
$$\alpha(G) = \text{máx}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto estable de } G\}$$

- El número de *Clan* de G denotado por $\omega_{\mathfrak{P}}(G)$ está precisamente el número de vértices en un clan maximal, es decir el número de vértices de una subgráfica inducida, es decir $\omega_{\mathfrak{P}}(G) = \text{máx}\{|G'| \mid G' \text{ es un conjunto clan de } G\}$

2.2 El Ideal Crítico de una Gráfica Completa con Signos

Sea H una gráfica completa dirigida y $\sigma : A(H) \rightarrow \{-1, 1\}$ i.e., H es **signada**

Definición 2.2.1. Sea $v \in A(H)$, decimos que v es **no-mezclado** si $\sigma(vu)\sigma(wv)\sigma(wu)$ es constante para todo $u, v, w \in V(H)$.



Desde una perspectiva geométrica, esto es, que el producto de los signos de los arcos de todo triángulo **no dirigido** es constante.

Notación Dada H digráfica completa, con signos, $v \in V(H)$ no-mezclado, denotaremos por $\sigma(v)$ al valor común $\sigma(vu)\sigma(wv)\sigma(wu) \forall u, w \in V(H)$.

Definición 2.2.2. Una gráfica completa H es no mezclada si todo $v \in V(H)$ es no mezclado.

Lemma 2.2.3. Si una gráfica completa con signos H con n vértices es *no-mezclada*, entonces:

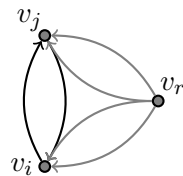
1. $\sigma(i)\sigma(j) = \sigma(ij)\sigma(ji) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$
2. $\sigma(rk)\sigma(ij) = \sigma(ik)\sigma(rj) \forall i, j, k, r \in \{1, \dots, n\}$

Demostración

- Sean $v_i, v_j \in V(H)$. Dado que H es *no-mezclada* tenemos que $\forall v_r \in V(H)$:

$$\sigma(i) = \sigma(ij)\sigma(pj)\sigma(ri)$$

$$\sigma(j) = \sigma(ji)\sigma(pj)\sigma(ri)$$



Y por tanto $\sigma(i)\sigma(j) = \sigma(ij)\sigma(rj)\sigma(ri)\sigma(ji)\sigma(rj)\sigma(ri) = \sigma(ij)\sigma(ji)$

pues $\sigma(rj)\sigma(rj) = \sigma(ri)\sigma(ri) = 1$. Por la arbitrariedad de los subíndices, se sigue el resultado para todo vértice de H

- Para la segunda parte, dado que H es *no-mezclada* para los vértices $v_i, v_j, v_k, v_r \in V(H)$ tenemos que $\sigma(rk)\sigma(kj)\sigma(rj) = \sigma(ik)\sigma(kj)\sigma(ij) \forall v_i, v_j, v_k, v_r \in V(H)$ Más aún, $\sigma(rk)\sigma(kj)\sigma(rj) = \sigma(ik)\sigma(kj)\sigma(ij)$ si y sólo si $\sigma(rk)\sigma(rj) = \sigma(ik)\sigma(ij)$ (cancelación de $\sigma(kj)$) y esta última igualdad si y solo si $\sigma(rk)\sigma(ij) = \sigma(ik)\sigma(rj) \forall v_i, v_j, v_k, v_r \in V(H)$

Teorema 2.2.4. Sea H una digráfica completa con signos. El ideal crítico I_2 esta dado como sigue:

$$I_2 = \begin{cases} \{x_i + \sigma(v_i) | 1 \leq i \leq n\} & \text{si } H \text{ es no-mezclada} \\ \{2, x_i + 1 | 1 \leq i \leq n\} & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (2.1)$$

Considere la matriz Laplaciana generalizada de una gráfica completa $H, L(H, X_H)$

$$L(H, X_H) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{1n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dónde a_{ij} es el signo del nodo que va del vértice i al vértice j si $i \neq j$.

Por abuso de notación, pondremos $a_{ij} = \sigma(ij)$ en lugar de $\sigma(v_i, v_j), i \neq j$

Si $i = j$, entonces $a_{ii} = x_i$

$$L(H, X_H) = \begin{pmatrix} x_1 & \sigma(12) & \sigma(13) & \sigma(14) & \dots & \sigma(1n) \\ \sigma(21) & x_2 & \sigma(23) & \sigma(24) & \dots & \sigma(2n) \\ \sigma(31) & \sigma(32) & x_3 & \sigma(34) & \dots & \sigma(1n) \\ \sigma(41) & \sigma(42) & \sigma(43) & x_4 & \dots & \sigma(1n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(n1) & \sigma(n2) & \sigma(n3) & \sigma(n4) & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Demostración En efecto, calcularemos el ideal crítico I_2 , calculemos los menores de tamaño dos.

Sean $\mathcal{I} = \{i_1, i_2\}, \mathcal{J} = \{j_1, j_2\} \subset \{1, \dots, n\}$ Esto significa calcular los determinantes de las submatrices de tamaño dos, i.e. los 2-menores.

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{pmatrix}$$

Considere

$$m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \det \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{bmatrix}$$

1. Si $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \emptyset$

$$m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \det \begin{bmatrix} \sigma(ij) & \sigma(ik) \\ \sigma(lj) & \sigma(lk) \end{bmatrix} = \sigma(ij)\sigma(lk) - \sigma(lj)\sigma(ik)$$

para $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$. Así para el caso $\mathcal{I} \cap \mathcal{I} = \emptyset$, tenemos que $m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} \in \{-2, 0, 2\}$

2. Si $|\mathcal{I} \cap \mathcal{J}| = 1$

En este caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que:

$$m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \det \begin{bmatrix} x_i & \sigma(ik) \\ \sigma(li) & \sigma(lk) \end{bmatrix} = x_i\sigma(lk) - \sigma(li)\sigma(ik)$$

ya que de otro modo un intercambio de fila y de columna nos daría dicha matriz, sin alterar el determinante. de modo que $\sigma(lk)m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = x_i - \sigma(li)\sigma(ik)\sigma(lk)$.

En este caso $x_i - \sigma(li)\sigma(ik)\sigma(lk) \in \{x_i \pm 1\}$

3. Si $\mathcal{I} = \mathcal{J}$

Se tiene que

$$m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \det \begin{bmatrix} x_i & \sigma(ik) \\ \sigma(ki) & x_k \end{bmatrix} = x_i x_k - \sigma(ki)\sigma(ik) = x_i x_j \pm 1$$

- Si H no es *no-mezclada* por el segundo punto (caso $|\mathcal{I} \cap \mathcal{I}| = 1$), tenemos que tanto $x_i + 1$ como $x_i - 1$ están en I_2 , pues para el vértice i deben existir j, k, l, p, q vértices con $\sigma(ij)\sigma(jk)\sigma(ji) \neq \sigma(ip)\sigma(qp)\sigma(qi)$ (de otro modo h sería **no-mezclada** contrario a nuestra hipótesis.) $\sigma(ij) \in \{-1, 1\}$ se sigue la afirmación.

Por otro lado note que

$$2 = x_i + 1 - (x_i - 1) \in I_2$$

$$x_i x_j - 1 = (x_i + 1)(x_j + 1) - (x_i + 1) - (x_j + 1)$$

y

$$x_i x_j + 1 = x_i x_j - 1 + 2$$

Así, necesariamente se tiene que $I_2 = \{2, x_i + 1 | i \in \{1, \dots, n\}\}$ (Pues todos los posibles elementos de I_2 son generados por $x_i + 1, x_i - 1$ los cuales si están en I_2 , cuando H es **no-mezclada**).

- Si H es no-mezclada, por el lema anterior, tenemos que $m_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = 0$ en el caso 1

$$\begin{aligned} \text{Además: } (x_i + \sigma(i))(x_j + \sigma(j)) - \sigma(j)(x_i + \sigma(i)) - \sigma(i)(x_j + \sigma(j)) = \\ x_i x_j - \sigma(i)\sigma(j) = x_i x_j - \sigma(ij)\sigma(ji) \end{aligned}$$

Por lo tanto $I_2 \langle x_1 + \sigma(1), \dots, x_n + \sigma(n) \rangle$

Cuando H es no-mezclada

Así obtenemos como corolario el siguiente resultado (teorema 3.13 a) de [1]).

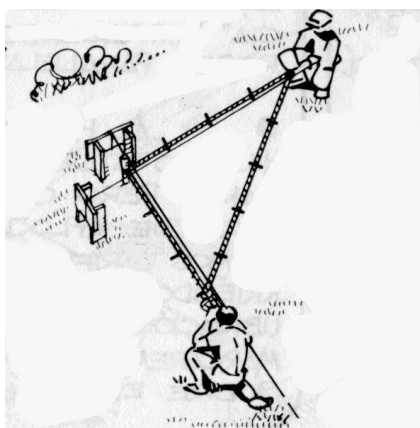
Si G es una gráfica (posiblemente con múltiples índices) con n vértices, entonces $\gamma_{\mathcal{P}} \leq 2(n - \omega(G)) + 1$.

donde $\omega(G)$ es el número de vértices de la mayor subgráfica completa de la gráfica G .

Capítulo 3

Matriz Laplaciana de un Complejo Simplicial

La teoría de los complejos simpliciales tiene una trayectoria bastante reciente en contraste con otras áreas de las matemáticas. Tiene su origen en la teoría de topología y geometría algebraica y son una herramienta utilizada en muchas áreas como en álgebra homológica, además de haberse ganado, por merito propio, un lugar de renombre como tema de estudio puramente abstracto.



Considere primeramente un triángulo, consta de 3 vértices, tres aristas y es el polígono más simple concebible. ¿Qué sucede si descendemos una dimensión? Ahora sólo podemos percibir una arista, un segmento de recta.

Si este triángulo se generaliza a una dimensión superior obtenemos un tetraedro. una pirámide, con cuatro vértices y seis aristas. nuevamente descendiendo una dimensión a la vez, obtenemos consecutivamente cuatro triángulos unidos mediante una arista común, es decir, cada uno com-

parte un lado con sus vecinos, así mismo los tres tienen tres triángulos vecinos. Descendiendo de nuevo, obtenemos ahora una familia de aristas unidas mediante vértices, 6 aristas, cada una tiene exactamente 4 vecinos, sólo la arista más alejada no es vecina de la arista considerada. Abstractamente podemos descender nuevamente, y ahora sólo podemos ver los vértices cuya dimensión se considera

cero (intuitivamente, los puntos se consideran cero dimensionales) Que tal si concatenamos estas "vistas" con respecto a las dimensiones del tetraedro, triángulos, rectas, y puntos, encadenadas mediante ciertos morfismos especiales.

Podemos generalizar estas estructuras a dimensiones superiores, definir objetos más abstractos, como *politopos* y *envolventes conexas* que contienen a estas estructuras como casos particulares.

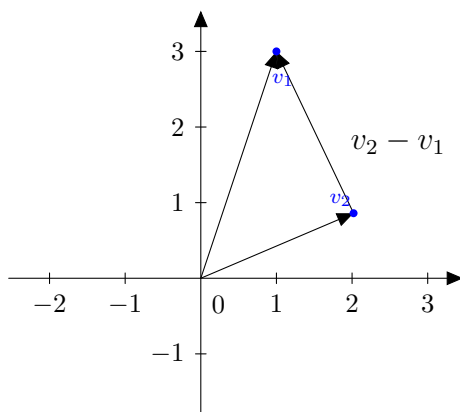


Previamente revisamos algunas conceptos y resultados básicos de la teoría de espacios vectoriales; ahora consideraremos una estructura que es en esencia un espacio vectorial, pero sin ningún punto "privilegiado" al que podamos llamar *origen* y donde la suma de elementos no tiene sentido: un espacio afín.

Sean v_1, \dots, v_k , puntos en el espacio euclidiano, un punto $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i u_i$ es una combinación afín de los u_i si los $\sum \lambda_i = 1$.

El conjunto generado por todas las combinaciones afines: $\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i u_i \mid u_i \in \mathbb{R}, \sum \lambda_i = 1 \}$ se llama espacio afín. El cual no es ningún espacio vectorial. Por ejemplo una recta que no pase por el origen es un subespacio afín tanto de \mathbb{R}^2 como de \mathbb{R}^3 , en general de \mathbb{R}^n ; un plano que no contenga el vector $\vec{0} = (0, 0, 0)$ es un subespacio afín de \mathbb{R}^3 .

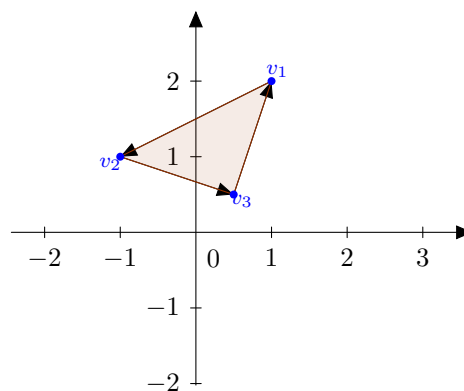
a modo de ejemplo, considere dos vectores v_1 y v_2 en el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 , el espacio afín generado por este par es el recta que parte de uno de ellos y se dirige hacia el otro, como se muestra a continuación:



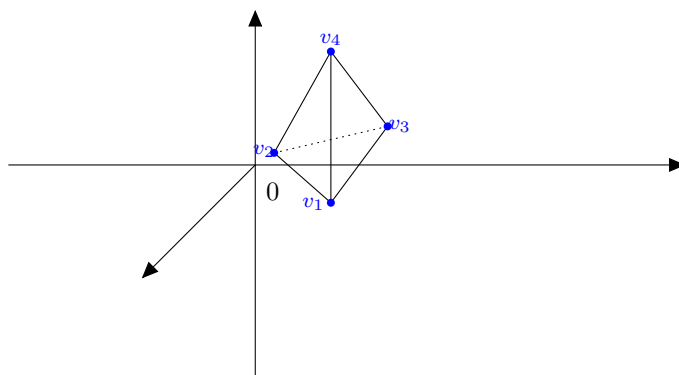
Podemos visualizarlo paramétricamente posicionándonos en el vector v_1 y nos encaminamos en dirección de v_2 al sumar λ veces $v_2 - v_1$, con un un poco de álgebra hallamos la expresión equivalente $(1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2$

Todo punto sobre el segmento de recta que une v_1 con v_2 es de la forma $v_1 + \lambda(v_2 - v_1) = (1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2$. Así, si que $0 \leq \lambda \leq 1$. Si λ es un valor cercano a 0, entonces el punto esta cerca de v_1 , si por otra parte, λ es un valor cercano a 1, el punto estará cercano a v_2

Análogamente para un triángulo en el plano \mathbb{R}^2 definido por los vértices v_1, v_2, v_3 ; tenemos que la combinación convexa $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, donde los λ_i suman 1.



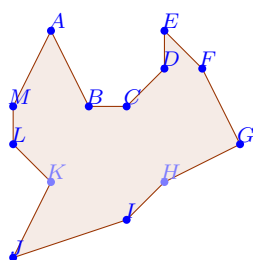
Finalmente un tetraedro en \mathbb{R}^3 , satisface las mismas condiciones, pero ahora se necesitan cuatro vértices para definirlo geoméricamete, este está dado por la combinación afín, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ con $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$



3.1 Preliminares

Un **politopo** es la generalización a dimensiones superiores de un polígono, así como hay polígonos de n lados, hay politopos de n caretas, y estas a su vez están

formadas por caras, ahondaremos más en estos detalles cuando hablemos de *complejos simpliciales*. También existen polítopos *regulares* equivalentes a lo que en dimensión dos se denominan polígonos regulares. Se dice en algunos textos de geometría que una recta es una sucesión de puntos, a partir de rectas se construye cualquier polígono regular. Ahora podemos formar poliedros a partir varios polígonos. por ejemplo un tetraedro esta formado de 4 triángulos. En dimensiones superiores existen estructuras que se forman a partir de unir poliedros, así como unimos aristas para construir polígonos, estos objetos reciben el nombre de polícoros. En general en cualquier dimensión n , se denominan polítopos. La construcción de polítopos de cualquier dimensión consiste en extender este proceso n veces.



Envolvente Convexa

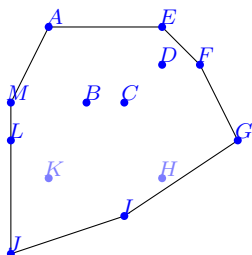
Una combinación convexa es una combinación afín con coeficientes no negativos $a_i \geq 0 \forall p_i \in S$. La envolvente convexa de S , $convS$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas, i.e. para todo coeficiente a_i en nuestro anillo base. Equivalentemente es la intersección de todos los semiplanos que contienen a S . Un simplejo es la envolvente convexa de un conjunto de puntos.

Definición 3.1.1. Un conjunto de puntos se dice **convexo** si este contiene los segmentos de receta que conectan cada par de sus puntos. La envolvente convexa de un conjunto X se define como:

- El único conjunto convexo minimal que contiene a X
- La intersección de todos los conjuntos convexas que contienen a X
- El conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en X
- La unión de todos los simplejos con vértices en X

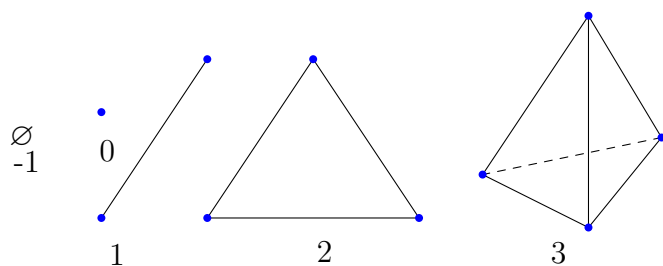
A los vértices de la envolvente convexa se les llama puntos **extremos** o **frontera** del conjunto. A los puntos restantes se les llama **interiores**

Envolvente convexa del politopo anterior, los vértices que tienen aristas incidentes son puntos extremos, los restantes, interiores.



Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de $k + 1$ puntos entonces la dimensión del simplejo $\sigma = \text{conv } S$ está dada por $\dim \sigma = k$ y σ se llama un k -simplejo. El número máximo de puntos en \mathbb{R}^n es $n + 1$ y tenemos simplejos de dimensión -1 hasta n . Como se muestra en la figura siguiente

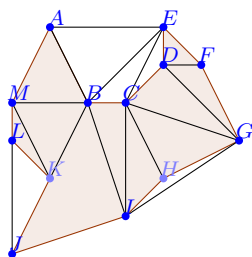
Example 3.1. *El simplejo vacío tiene dimensión -1 , el simplejo de un sólo vértice, 0 ; el simplejo que consiste de una arista, incluso el polígono más simple, el triángulo pero sin interior/relleno, tienen dimensión 1 , la superficie triangular tiene dimensión 2 y un tetraedro (sólido), tiene dimensión 3 y así sucesivamente.*



Definición 3.1.2. En geometría, la triangulación de un polígono o área poligonal es una partición de dicha área en un conjunto de triángulos por un conjunto maximal de diagonales que no se cruzan. De manera más precisa, una triangulación es una división del área en un conjunto de triángulos que cumplen las siguientes condiciones: La unión de todos los triángulos es igual al polígono original. Los vértices de los triángulos son vértices del polígono original. Cualquier pareja de triángulos es disjunta o comparte únicamente un vértice o un lado.

Notas La envolvente convexa forma parte de todas las triangulaciones de un conjunto.

“La triangulación es un método de obtener áreas de figuras poligonales, normalmente irregulares, (dos dimensiones) o de estimar el área de superficies (tres dimensiones) mediante su descomposición en formas triangulares.” ¹



Las aristas que yacen dentro de la región sombreada corresponde a la triangulación interna, propia del politopo.

Las aristas fuera corresponden a la triangulación de la envolvente convexa y se denomina triangulación exterior.

Definición 3.1.3. Un n -simplejo es la envolvente convexa de un conjunto de n puntos.

En pocas palabras un complejo simplicial es un espacio con una triangulación,

Tenemos la misma envolvente convexa de la ilustración anterior, en este caso le hemos dotado de una triangulación. Note que la intersección de cualesquiera dos triángulos es o bien vacía o bien, una arista o frontera de ambos. No hay secciones. Este hecho se verá reflejado abstractamente en la definición formal tanto de un complejo simplicial, como la de complejos simplicial abstracto.

Definición 3.1.4. Un complejo simplicial Δ es una familia de simplejos que satisface las siguientes propiedades:

1. Cualquier cara de un simplejo de Δ esta también en Δ
2. La intersección de cualesquiera dos simplejos en Δ es o bien vacía o una cara de ambos simplejos intersecados.

¹J. Daniel Expósito Polo www3.uah.es/ordend/files/TFC-TriangulacionesRestringidas-Memoria.pdf

Note que el conjunto vacío es una cara de todo simplejo.

Podemos abstraer aún más este objeto, dando una descripción puramente combinatoria de la noción geométrica de un complejo simplicial.

Definición 3.1.5. Una familia Δ de subconjuntos finitos de un conjunto universal S se llama un Complejo Simplicial Abstracto si para todo conjunto σ en Δ se tiene que todo subconjunto $\varrho \subset \sigma$ es un elemento de Δ .

Definición 3.1.6. Sea Δ un complejo simplicial d -dimensional. Para $-1 \leq i \leq d$, sea $C_i(\Delta; \mathbb{Z})$ el i -ésimo grupo simplicial cadena de Δ . Denotamos los mapeos de frontera y cofrontera respectivamente por:

$$\partial_{\Delta,i} : C_i(\Delta; \mathbb{Z}) \longrightarrow C_{i-1}(\Delta; \mathbb{Z})$$

$$\partial_{\Delta,i}^* : C_{i-1}(\Delta; \mathbb{Z}) \longrightarrow C_i(\Delta; \mathbb{Z})$$

Donde hemos identificado las cocadenas con cadenas vía el producto interno natural. Vamos a abreviar la notación de subíndices para fronteras y cofronteras siempre que no haya ambigüedad.

Sea $-1 \leq i \leq d$. La Laplaciana combinatoria i -dimensional de Δ es el operador:

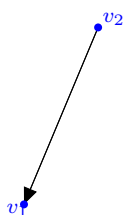
$$L_{\Delta,i} = \partial_{\Delta,i+1} \partial_{\Delta,i+1}^* : C_i(\Delta; \mathbb{Z}) \longrightarrow C_i(\Delta; \mathbb{Z})$$

Aunque no directamente, necesitaremos la herramienta algebraica llamada **Homología Simplicial**

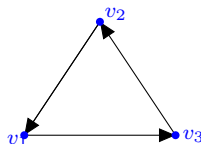
La homología simplicial formaliza la idea del número de hoyos en una dimensión dada en un complejo simplicial, lo cual generaliza el número de componentes conexas, es decir, en el caso de dimensión 0. La homología simplicial surge como una manera de estudiar espacios topológicos cuyos bloques de construcción son los n -simplejos, los análogos n -dimensionales de los triángulos, como ya vimos, estos incluyen los 0-simplejos que son puntos, los 1-simplejos son segmentos de recta, los 2-simplejos que son triángulos y los 3-simplejos que son tetraedros. Los homomorfismos entre complejos simpliciales se conocen como triangulaciones del espacio dado. Muchos espacios topológicos de interés admiten una triangulación. La homología simplicial se define como una simple receta para cualquier complejo simplicial, es un hecho sorprendente de que esta homología simplicial sólo depende del espacio topológico asociado. Como resultado esto nos da una manera calculable de distinguir entre un espacio y otro.

Definición 3.1.7. Primeramente, un concepto fundamental a la hora de definir la homología simplicial es la noción de **Orientación** de un simplejo. Una orientación de un n -simplejo esta dado por un orden en el conjunto de vértices; en el caso finito se tiene un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ y acordamos que dos ordenes definen la misma orientación si estos difieren por una permutación par. Así que todo simplejo tiene exactamente 2 orientaciones, e intercambiar el orden de dos vértices cambia una orientación por la otra.

Ejemplo 3.1.8. Para un 1-simplejo elegir una orientación significa que elegiremos una de las os posibles direcciones, en este caso la dirección de ir de v_2 a v_1 .



Análogamente, para el 2-simplejo, elegir una orientación es elegir el sentido en el que se van a recorrer las aristas del triángulo, con lo que se da sentido al enunciado, en el sentido o en contra de las manecillas del reloj.



Sea Δ un complejo simplicial. Una k -cadena simplicial es una suma formal finita

$$\sum_{i=1}^N c_i \sigma_i$$

Donde cada c_i es un entero y σ_i es un k -simplejo. Note que en esta definición dejamos implícito que cada simplejo orientado es igual al negativo del simplejo con orientación contraria, así: $(v_i, v_{i+1}) = -(v_{i+1}, v_i)$

El grupo de k -cadenas sobre Δ se escribe C_k . Este es un grupo abeliano libre, el cual tiene una base en correspondencia unívoca con el conjunto de k -simplejos en Δ . Para definir las explícitamente, se debe elegir una orientación en cada simplejo. Se ha estandarizado una manera de hacer esto como sigue: Se escoge un orden en

todos los vértices y en cada simplejo, la orientación correspondiente inducida por sus vértices. Esto quedará más claro más adelante con algunos cálculos, donde imponemos una orientaciones en los simplejos del complejo.

Sea $\sigma = (v_1, \dots, v_k)$ un k -simplejo orientado, visto como un elemento de C_k . el **Operador Frontera** $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ es el homomorfismo dado por:

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k), \text{ donde el simplejo orientado } (v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \text{ es la } i\text{-ésima cara de } \sigma \text{ que se obtiene borrando si } i\text{-ésimo vértice.}$$

En C_k los elementos del subgrupo $Z_k = \ker \partial_k$ se llaman **ciclos**, así mismo, decimos que el subgrupo $B_k = \text{im} \partial_{k+1}$ esta conformado por **fronteras**

El hecho de que $\partial^2 = 0$ es consecuencia directa de la definición.

La interpretación geométrica de este hecho es que la frontera de cualquier cosa no tiene frontera.

Dado que $\text{im} \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$ podemos definir una sucesión exacta de grupos abelianos la cual esta sujeta a calcular grupos cociente en cada par de términos de la cadena.

Así, definimos la k -ésima homología de Δ

$$H_k(\Delta) = Z_k / B_k.$$

Los elementos de $H_k(\Delta)$ se llaman clases de homología. Cada clase de homología es una clase de equivalencia sobre ciclos, dos ciclos en la misma clase de homología se dicen homólogos.

Un complejo de cadenas se dice exacto si la imagen del mapeo $(n+1)$ -ésimo es siempre igual al kernel del mapeo n -ésimo. Los grupos de homología de X por lo tanto miden que tan lejos esta de ser exacta la cadena de complejos asociados a X .

La homología reducida de un complejo de cadenas $C(\Delta)$ se definen como las homologías de complejo de cadenas aumentado.

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Donde el operador de frontera ϵ esta dado por:

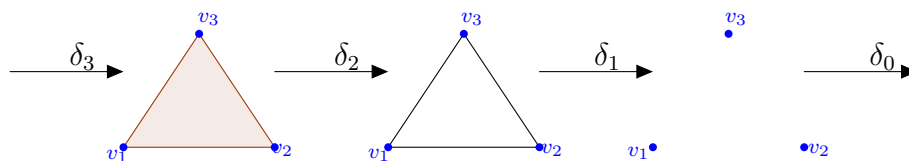
$$\epsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$$

Finalmente definimos los grupos de homología como sigue:

$\tilde{H}_n(X) = \ker(\partial_n)/\text{im}(\partial_{n+1})$ para n positivo y $\tilde{H}_0(X) = \ker(\epsilon)/\text{im}(\partial_1)$. Se puede demostrar que $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$; evidentemente $H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$ para todo n positivo.

Considere un 2-simplejo; el complejo simplicial que forma un triángulo.

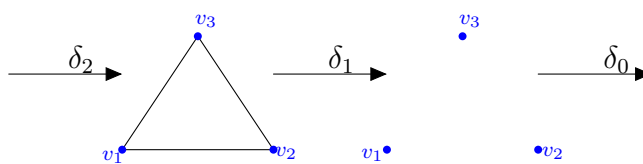
Primeramente calcularemos toda su estructura como si el triángulo estuviera relleno, es decir la única careta del simplejo será $[v_1, v_2, v_3]$ y se ve como sigue:



esto es:

$$0 \xrightarrow{\delta_3} [v_1, v_2, v_3] \xrightarrow{\delta_2} [v_2, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2] \xrightarrow{\delta_1} [v_1], [v_2], [v_3] \xrightarrow{\delta_0} 0$$

Ahora, para ver la diferencia calculemos las homologías del triángulo hueco, es decir, ahora el complejo simplicial tiene tres caretas, a saber: $[v_2, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2]$



i.e.:

$$0 \xrightarrow{\delta_2} [v_2, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2] \xrightarrow{\delta_1} [v_1], [v_2], [v_3] \xrightarrow{\delta_0} 0$$

Hagamos ahora el análisis del **tetraedro**

$$0 \xrightarrow{\delta_2} \langle [v_2, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2] \rangle \xrightarrow{\delta_1} \langle [v_1], [v_2], [v_3] \rangle \xrightarrow{\delta_0} 0$$

Tomamos δ_2 y calculamos su representación matricial. Consideramos las bases de C_2 y C_1 y escribimos a δ_2 en términos de los coeficientes de las bases ordenadas respectivas como siempre se hace para representaciones matriciales de transformaciones lineales, así:

$$\delta_2([123]) = [23] - [13] + [12]$$

$$\delta_2([124]) = [24] - [14] + [12]$$

$$\delta_2([134]) = [34] - [14] + [13]$$

$$\delta_2([234]) = [34] - [24] + [23]$$

Tomando en cuenta que $[ij] = -[ji]$ tenemos la siguiente configuración rectangular:

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la solución al sistema

$$[\delta_2] \cdot \vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así

$$-x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$-x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_4 = 0$$

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 - x_4 = 0$$

$$x_2 = -x_3$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 = -x_4$$

por lo cual

$$x_2 = x_4$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x_3 = -x_4$$

Resumiendo:

$$x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$$

Por lo que el espacio nulo es $\{ (x, -x, x, -x) \mid x \in R \}$ Es decir es generado por $\langle (1, -1, 1, -1) \rangle$

Así que la nulidad de δ_2 es 1, por lo que el cor rango es 3 por el teorema de la dimensión, cómo ya vimos que la imagen de $\delta_3 = 0$ entonces tenemos que $H_2(\Delta) = \frac{Ker(\delta_2)}{Im(\delta_3)} = \frac{R}{0} = R$

Prosigamos

Calculemos δ_1

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el espacio nulo: $\delta_1 \cdot \vec{x} = \vec{0}$

obteniendo $\vec{x} = (x_5 + x_4, x_6 - x_4, -x_6 - x_5, x_4, x_5, x_6) \mid x_4, x_5, x_6 \in R \} \cong R^3$

y obtenemos que la nulidad es exactamente 3, dándonos un cor rango igual a 3.

Ahora tenemos todo lo necesario para calcular la segunda homología, primero grupo de homología.

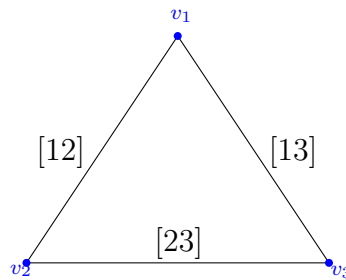
$$H_1(\delta) = \frac{Ker(\delta_1)}{Im(\delta_2)} = \frac{R^3}{R^3} \cong 0$$

Y por último la homología cero

$$H_0(\delta) = \frac{\text{Ker}(\delta_0)}{\text{Im}(\delta_1)} = \frac{R^4}{R^3} \cong R$$

Apliquemos lo que hemos calculado para obtener la matriz Laplaciana de el 2-simplejo y el 3-simplejo. Recuerde que por definición estos son el triángulo hueco y el tetraedro sin relleno.

Triángulo: Consideramos la base ordenada $[12],[13],[23]$ y $[1][2][3]$.



Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_2 = \langle 0 \rangle & \xrightarrow{\delta_2=0} & C_1 = [12][13][23] & \xrightarrow{\delta_1} & [1][2][3] = C_0 & \xrightarrow{\delta_0=0} & C_{-1} = \langle 0 \rangle \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C_2^* = \langle 0 \rangle & \xleftarrow{\delta_1^*=0} & C_1^* & \xleftarrow{\delta_1^*} & C_0^* & \xleftarrow{\delta_0^*=0} & C_{-1}^* = \langle 0 \rangle
 \end{array}$$

Donde

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\delta_1^* = \delta_1^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y los demás δ_i y δ_i^* son todos iguales a cero

Tetraedro

Tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{\delta_3} & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 & \xrightarrow{\delta_0} & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \xleftarrow{\delta_3^*} & C_2^* & \xleftarrow{\delta_2^*} & C_1^* & \xleftarrow{\delta_1^*} & C_0^* & \xleftarrow{\delta_0^*} & 0
 \end{array}$$

Por las propiedades duales de este sistema, se sabe que $[\delta_i^*] = \delta_i^t$. Así que no es necesario hacer más cálculos para obtener la matriz Laplaciana en cada eslabón del complejo de cadenas.

$$L_2(\Delta) = [\delta_3] \cdot [\delta_3^*] = 0$$

$$L_1(\Delta) = [\delta_2] \cdot [\delta_2^*] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_0(\Delta) = [\delta_1] \cdot [\delta_1^*] =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \xrightarrow{\delta_2} \langle [v_2, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2] \rangle \xrightarrow{\delta_1} \langle [v_1], [v_2], [v_3] \rangle \xrightarrow{\delta_0} 0$$

Finalmente procedemos a calcular la matriz Laplaciana directamente de la configuración del complejo simplicial, es decir de la combinatoria. Lo cual se hace de la siguiente manera: análogamente al caso de gráficas, nos fijaremos en los simplejos o caras adyacentes al simplejo en cuestión.

Consideramos una base ordenada de cada uno de los C_i

$$C_2 = \langle [123], [124], [134], [234] \rangle$$

Ahora, el procedimiento análogo al de gráficas para complejos simpliciales es como sigue. Ponemos un arreglo cuadrado de $n \times n$, en este caso es de 4×4 . En las entrada de la diagonal se asienta el up degree, es decir el número de caras (de la

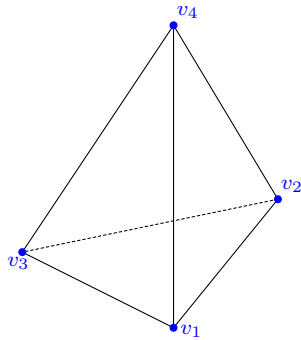


FIGURE 3.1: Fig

misma dimensión que la cara en cuestión. Al ser Δ un tetraedro, sabemos que cada entrada tiene exactamente 3 vecinos, así que $a_{ii} = 3 \forall i = 1, 2, 3, 4$. Segundo, en las columnas se asienta un 1 si el simplejo a la cabeza de la columna comparte alguna arista con el simplejo que liderea las filas. Nos fijamos en la columna etiquetada con el rotulo $[123]$, la primer entrada es un tres como ya se explicó, debajo del tres, corresponde un 1 porque la cara $[123]$ comparte la arista $[12]$ con el simplejo $[124]$ y lo hacen en el mismo sentido, esto es la arista $[12]$ se encuentra en el mismo sentido en $[123]$ que en $[124]$. Al contrario del caso correspondiente a la entrada a_{31} que tiene asignado un -1 por la siguiente razón. El simplejo $[123]$ comparte la arista $[31]$ con $[134]$ pero lo hacen en direcciones opuestas, en el simplejo $[123]$ dicha arista sale de 3 y va hacia el vértice 1, pero en el simplejo 134 sale de vértice 1 y va hacia el 3 por ende la orientación es contraria y a esto corresponde un -1 . Procediendo así sucesivamente con cada columna y desplazándonos hacia abajo en las filas llenamos la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cccc} [123] & [124] & [134] & [234] \\ \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} [123] \\ [124] \\ [134] \\ [234] \end{array} \end{array}$$

Ahora hacemos los cálculos para la siguiente elemento cadena.

$C_1 = \langle [12], [13], [14], [23], [24], [34] \rangle$ Esta nos dará una matriz Laplaciana de 6×6

$$\begin{array}{cccccc}
 [12] & [13] & [14] & [23] & [24] & [34] \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
 -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\
 -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2
 \end{array} \right) & \begin{array}{l} [12] \\ [13] \\ [14] \\ [23] \\ [24] \\ [34] \end{array}
 \end{array}$$

Todos los demás C_i son cero

3.2 Árboles Generadores

Recordemos el caso teorema de árboles generadores de Kirchhoff en el caso clásico. Sea G una gráfica, cuyos vértices son $V(G) = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ y aristas $E(G)$. Una subgráfica generadora de G es una gráfica T cuyos vértices coinciden con los de G , $V(G) = V(T)$. y sus aristas están contenidas; por lo que una subgráfica esta completamente por su conjunto de aristas. Una subgráfica generadora es un árbol generador si:

- T es acíclica
- T es conexa
- $|E(T)| = |V(T)| - 1$

Es una propiedad fundamental de los árboles generadores que cualesquiera dos de estas condiciones necesariamente implica la tercera.

3.2.1 Árboles generadores Simpliciales

Para extender la noción del teorema de Kirchhoff de matrices y árboles de gráficas a complejos simpliciales, primero habremos de definir lo que es un árbol generador en un contexto de dimensiones superiores. Sea Δ un complejo simplicial y $\Upsilon \subset \Delta$. Decimos que Υ es un **árbol generador simplicial** de Δ si:

- $\tilde{H}_d(\Upsilon; \mathbb{Z}) = 0$
- $|\tilde{H}_{d-1}(\Upsilon; \mathbb{Z})| < \infty$, equivalentemente $\tilde{H}_{d-1}(\Upsilon; \mathbb{Q}) = 0$
- $f_d(\Upsilon) = f_d(\Delta) - \beta_d(\Delta) + \beta_{d-1}(\Delta)$

Más generalmente, un *árbol generador i -dimensional* de Δ es un árbol generador del i -esqueleto de Δ .

Para el caso $d = 1$, cuando Δ es una gráfica, recuperamos la definición usual de árbol generador. Estas condiciones dice respectivamente que Υ es acíclica, conexa, y que tiene una arista menos que vértices, recuperando el caso la definición de árbol generador de gráficas, igualmente al caso de gráficas, tenemos que cualesquiera dos estas condiciones necesariamente implica la tercera.

Recordemos que una gráfica G tiene un árbol generador si y sólo si es conexa. La condición correspondiente para complejos simpliciales es que $\tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{Q}) = 0$ para todo $i < \Delta$; esto es, Δ tiene tipo de homología racional de un pedazo de las esferas d -dimensionales

Se definen dos invariantes:

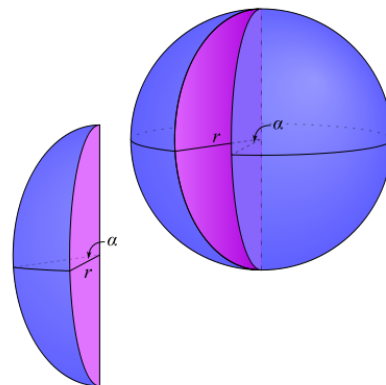
$\pi_k = \pi_k(\Delta)$ es el producto de los eigen valores no cero de $L = \partial\partial^*$

$$\tau_k = \tau_k(\Delta) = \sum_{\Upsilon \in \mathcal{T}_k(\Delta)} |\tilde{H}_{k-1}(\Upsilon)|^2$$

Donde $\mathcal{T}(\Delta)$ es el conjunto de k -árboles de Δ , es decir, árboles generadores simpliciales del k -esqueleto de Δ

en [6] Kalai estudió estos invariantes en simplejos Δ en n vértices y demostró la fórmula

$$\tau_k(\Delta) = n \binom{n-2}{k}$$



3.3 Ejemplos

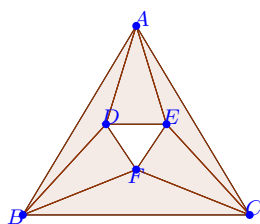
1. Triangulación del disco con un agujero. Triángulo, con tres triángulos internos y un hueco triangular enmedio, calculemos el corrancho de Δ algebraico. Definimos una orientación en las caras de Δ

$$[ABD][ADF][AFC][BDE][BEC][CEF] \xrightarrow{\partial_2} [AB][AD][AF][AC][BD][BE]$$

$$[BC][CE][CF][DF][DE][EF] \xrightarrow{\partial_1} [A][B][C][D][E][F] \rightarrow 0$$

Los operadores frontera están dados por

$$L_1(\Delta) \partial_{i+1} \partial_{i+1}^* : C_i \longrightarrow C_i$$



La matriz Laplaciana de este es:

El operador ∂ frontera de dicha la matriz anterior es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente a lo anterior, tenemos que la matriz del operador dual es la transpuesta

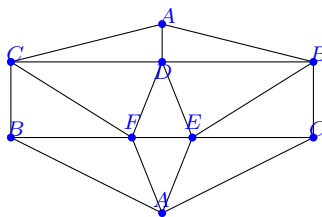
$$\partial^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así que la matriz Laplaciana combinatoria $\partial \circ \partial^*$ esta dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se tiene que el corrancho algebraico es $6 \neq 7 = 12 - 6 + 1 = |E(\Delta)| - (|V(\Delta)| - 1)$

2. Plano Proyectivo:



donde δ esta dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\partial^* = \partial^t$ esta dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz Laplaciana combinatoria es

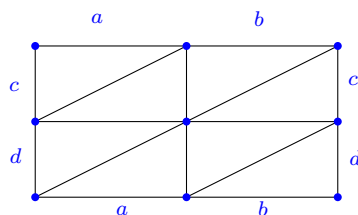
$$\partial \circ \partial^* =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y cuyo rango es $10 = 15 - 6 + 1 = E(\Delta) - V(\Delta) - 1!!!!!!$ (Si se satisface)

3. Toro

Considere la siguiente triangulación del toro:



En este caso tenemos el complejo de cadenas

$[123][124][134][234] \longrightarrow [12][13][14][23][24][34] \longrightarrow [1][2][3][4] \longrightarrow \emptyset$ así nuestro operador $\partial_1 \circ \partial_1^* = L_1(\Delta)$ esta dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuyo rango es $3 \neq 9 = E(\Delta) - V(\Delta) + 1$

Bibliografía

- [1] Hugo Corrales, Carlos E. Valencia, On the Critical Ideals of Graphs, México, 2013, 23p. Linear Algebra and its Applications 439 (2013) 3870389211
- [2] Marcus P. Robinson Critical Groups of Simplicial Complexes A Thesis presented to The Division of Mathematics and Natural Sciences Reed College, May 2013 36p.
- [3] Timothy E. Goldberg Combinatorial Laplacians of Simplicial Complexes A Senior Project submitted to The Division of Natural Science and Mathematics of Bard College. Annandale-on-Hudson, New York May, 2002 69p.
- [4] Art M. Duval, Caroline J. Klivans, and Jeremy L. Martin Groups of Simplicial Complexes arXiv:1101.3981v2[math.CO] 28 Feb 2011
- [5] Art M. Duval, Caroline J. Klivans, and Jeremy L. Martin Simplicial Matrix-Tree Theorems arXiv:0802.2576 [math.CO] 21 Aug 2008
- [6] Adams, William W., Philippe Loustau. Introduction to Grobner bases (Graduate studies in mathematics Vol 3) American Mathematical Society, U.S.A. 2000, 289 p.
- [7] Bernd Sturmfels, What is... a Gröbner Basis?, NOTICES OF THE AMS Volume 52, Number 10. U.S.A., 2005, 2p. Linear Algebra and its Applications 439 (2013) 3870389211
- [8] Cox, D. Little, J. and OShea, D., 1996, Ideals, Varieties, and Algorithms an Introduction to Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Springer Verlag, Berlin.
- [9] David S. Dummit, Richard M. Foote. Abstract Algebra, John Wiley & Sons, Inc. U.S.A, 2004, 931p.

- [10] Thomas W. Hungerford, Algebra, Springer, U.S.A. 2000, 502p.
- [11] Jacobson N., Algebra, W.H. Freeman, 1985
- [12] David M. Burton, A First Course in Rings and Ideals, Addison-Wesley Pub. Co., 1970 - 309p.
- [13] Andreas Gathmann, Algebraic Geometry, <http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2014/main.pdf> Class Notes TU Kaiserslautern 2014, 133p.
- [14] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002; available online at <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>, 2001, 550p.
- [15] Joseph J. Rotman Introduction to Homological Algebra, Springer, U.S.A. 2009, 709p.
- [16] Norman Biggs, Algebraic Graph Theory 2nd. ed. Cambridge University Press, U.K. 1996,205p.
- [17] Norman Biggs, Chip-firing and the critical group of a graph, J. Alg. Combin. 9 (1999), 2545.
- [18] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Great Britain, 1969, 128p.
- [19] Serge Lang, Algebra, 3rd ed., Addison-Wesley, 1993.
- [20] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977
- [21] Gregg Musiker, The Critical Groups of a Family of Graphs and Elliptic Curves Over Finite Fields, J. Algebraic Combin. 30 (2009), no. 2, 255276.
- [22] Richard P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, 2nd ed., Birkhäuser, 1996.
- [23] Reinhard Diestel, Graph Theory 2nd edition, Graduated Text in Mathematics 173 Springer U.S.A. 312p.
- [24] Harris, John M.; Hirst, Jeffrey L.; Mossinghoff, Michael J., Combinatorics and Graph Theory, Undergraduate Texts in Mathematics (2nd edicin), Springer. 2008

- [25] Maurer, Stephen B. (1976), Matrix generalizations of some theorems on trees, cycles and cocycles in graphs, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 30 (1): 143-148, MR 0392635.
- [26] Tutte, W. T. (2001), Graph Theory, Cambridge University Press, p. 138,

Índice Analítico

- Árbol Generador Simplicial, 50
- Anillo, 2
 - de polinomios, 10, 11
 - Centro, de un, 6
 - cociente, 10
 - conmutativo, 2
 - idempotente, 7
- Arista, 13, 15
 - grado de una, 16
- Base de Gröbner, 23
 - reducida, 24
- Camino
 - Euleriano, 16
 - Hamiltoniano, 16
- Ciclo, 15, 16
- Ciclos, 43
- Clan, 29
- Combinación Afín, 36
- Complejo de Cadenas
 - Exacto, 43
- Complejo Simplicial, 40
- Complejo simplicial
 - Abstracto, 41
- Conjunto Convexo, 38
- Corrango Algebraíco, 29
- Corrango algebraico, 18
- dominio entero, 7
- Envolvente Convexa, 38
- Espacio Vectorial, 5
- estable, 29
- Fronteras, 43
- Función Evaluación, 20
- Gráfica, 15, 27
 - completa, 16
 - dirigida, 15
 - no-mezclada, 30
 - simple, 15
- Grupo crítico, 18
- Homología Simplicial, 41
- Homologías del triángulo, 44
- Ideal
 - inicial, 23
- Ideal Crítico, 27
- ideal(es), 7
- idempotente, elemento, 6
- k-Cadena Simplicial, 42
- K_3 , 27
- Módulo, 5
- Matriz de
 - adyacencia , 16

- grado, 16
- incidencia, 17
- indeterminadas, 17
- Matriz Laplaciana, 17
 - Generalizada, 18, 27, 31
 - generalizada, 17
- Morfismos, 9
- Número de clan, 29
- Número de estabilidad, 29
- Operador Frontera, 43
- Orden Monomial, 21
- Politopo, 37
- Reducción fuerte, 25
- Simplejo, 38
- Orientación de un, 42
 - n-simplejo, 40
- Subespacio
 - afín, 36
- Teorema
 - base de Hilbert, de la, 12
- Tetraedro, 44
 - Matriz Laplaciana, 48
- triangulación, 39
- Vértice, 12, 13, 15
 - grado de un, 16
 - no-mezclado, 29
 - estable, 29
 - múltiple o multivértice, 15
- Variedad de Polinomios, 21