



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# Corango algebraico de gráficas tipo malla

Tesis que presenta:

**Mayra Nayeli Esquildo Uvaldo**

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS ENRIQUE VALENCIA OLETA

CIUDAD DE MÉXICO

FEBRERO, 2017



*La inspiración existe;  
pero tiene que encontrarte trabajando.*

—Pablo Picasso—



*Dedico esta tesis a  
todos aquellos que  
me apoyaron moral  
y económicamente.*

## *Agradecimientos*

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme una beca durante mis estudios de maestría. Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. por haberme permitido cursar estudios de postgrado y formarme en el ámbito científico. Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a mi asesor de Tesis, Dr. Carlos Valencia, por sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su paciencia y el haberme guiado durante todo el desarrollo de esta tesis, así como también le agradezco el haberme orientado durante la realización de mi maestría.



# Resumen

Dada una gráfica  $G = (V, E)$  y  $u, v \in V(G)$ , su matriz Laplaciana generalizada esta dada por

$$L(G, X_G)_{u,v} = \begin{cases} x_u & \text{si } u = v, \\ -m_{uv} & \text{si } u \neq v, \end{cases}$$

donde  $X_G = \{x_u \mid u \in V(G)\}$  es un conjunto de indeterminadas indexadas por los vertices de  $G$  y  $m_{uv}$  es el número de aristas entre  $u$  y  $v$ . Dado un anillo conmutativo con identidad  $\mathcal{P}$ , para cada  $1 \leq j \leq n$  el  $j$ -ideal crítico de  $G$  esta dado por

$$I_j(G, X_G) = \langle j\text{-minors of } L(G, X_G) \rangle \subseteq \mathcal{P}[X_G].$$

El corango algebraico de  $G$  se define como:

$$\gamma_{\mathcal{P}}(G) = \text{máx}\{i \in \mathbb{N} \mid I_i(G, X_G) = \langle 1 \rangle\}.$$

En esta tesis estudiamos el corango algebraico de gráficas tipo malla, las cuales son una generalización de las gráficas de malla. Este trabajo está dividido en dos capítulos. En el primero se encuentran los preliminares necesarios para entender el contenido de este trabajo el cual se divide en cuatro secciones. En la primera sección se encuentran algunos conceptos básicos del álgebra conmutativa, tales como la definición de grupo, anillo conmutativo con identidad, anillo de polinomios e ideales. La segunda sección es acerca de las bases de Gröbner; dicha teoría es la generalización del algoritmo de la división de Euclides y eliminación Gaussiana. La tercera sección se centra en la forma normal de Smith de una matriz sobre un Dominio de Ideales Principales y de como calcularla. Se concluye con una sección dedicada a definir algunas conceptos básicos de la teoría de gráficas.

En el capítulo dos se encuentran los resultados principales de este trabajo. Iniciamos con algunas definiciones que serán importantes para el desarrollo de este capítulo, tales como el concepto de matriz de adyacencia y de grados de una gráfica. Después definiremos su matriz Laplaciana asociada, grupo crítico e ideales críticos. La primera gráfica cuyo corango algebraico calcularemos es a la gráfica escalera. También daremos una cota inferior para el corango algebraico de la malla de dimensión dos, la cual es el producto cartesiano de dos caminos. Después de esto definimos una malla extendida con  $k$  caminos, denotada por  $ME_k$ , ( $k \in \mathbb{N}$  y  $k \geq 2$ ) la cual consiste de  $k$  caminos los cuales están relacionado por medio de una cantidad finita de aristas de tal manera que si tomamos cualesquiera dos caminos, entonces la gráfica inducida es plana.



Para el caso  $k = 2$  se demuestra que el corango algebraico de esta gráfica es igual al número de vértices menos 2.

Por último si una gráfica  $G$  es isomorfa a una malla extendida  $ME_k$  con  $k$  caminos para algún  $k \in \mathbb{N}$ , conjeturamos la siguiente desigualdad:

$$\gamma_{\mathcal{P}}(G) = \gamma_{\mathcal{P}}(ME_k) > |V(ME_k)| - k.$$

Mostrando un ejemplo en el cual la desigualdad anterior no es una igualdad.



# Contenido

<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vi</b>
<b>Resumen</b>	<b>viii</b>
<b>Introducción</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Álgebra . . . . .	1
1.2 Bases de Gröbner . . . . .	4
1.3 Forma normal de Smith. . . . .	8
1.4 Teoría de gráficas . . . . .	10
<b>2 Ideales críticos y el corango algebraico de una gráfica</b>	<b>17</b>
2.1 Grupo crítico e ideales críticos de gráficas . . . . .	17
2.2 Corango algebraico de gráficas tipo malla . . . . .	21
2.3 Una última conjetura . . . . .	35
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>



# Introducción

El objetivo principal de este trabajo es calcular el corango algebraico de gráficas tipo malla, las cuales son una generalización de las mallas quienes son el producto cartesiano de dos caminos. Las mallas son importantes ya que fueron las primeras gráficas sobre las que en 1987 Bak definió el grupo de pilas de arena en [1]. Calcular el corango algebraico de algunas gráficas no es trivial. En nuestro caso lo calcularemos combinatoriamente, es decir, encontrando submatrices de la matriz Laplaciana con determinante igual a uno.

Este trabajo está dividida en dos capítulos. El primer capítulo está dedicado a las nociones y definiciones básicas que se requieren para el resto de este trabajo y el cual se divide en cuatro secciones: la primera contiene algunas nociones básicas de álgebra conmutativa como grupo, anillo conmutativo, ideales y en particular anillo de polinomios de  $n$  variables sobre un anillo  $R$  con identidad. En la segunda sección definimos lo que es una base de Gröbner. En la tercera sección damos una pequeña introducción de como calcular la forma normal de Smith de una matriz definida sobre un Dominio de Ideales Principales (DIP). En la cuarta sección se da una pequeña introducción a la teoría de gráficas.

El capítulo dos se divide en tres secciones. La primera sección contiene los conceptos más importantes de esta tesis, tales como la definición de matriz Laplaciana de una gráfica; la cual es igual a la matriz de grados menos su matriz de adyacencia. También definimos a los ideales críticos de una gráfica los cuales se definen a partir de los menores de la matriz Laplaciana generalizada, así como la relación que existe entre los ideales críticos de una gráfica con sus subgráficas. Esta relación se muestra en la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.5** Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices, entonces

$$\langle 0 \rangle \subsetneq I(G) \subsetneq \cdots \subsetneq I_2(G) \subsetneq I_1(G) \subsetneq \langle 1 \rangle.$$

Además, si  $H$  es una subgráfica inducida de  $G$ , entonces:

$$I_k(H) \subseteq I_k(G) \text{ para todo } 1 \leq k \leq |V(H)|.$$

Definimos el concepto de grupo crítico y terminamos definiendo el concepto de corango algebraico de una gráfica. El objetivo principal de esta tesis es el cálculo del corango algebraico de las gráficas tipo malla.

La segunda sección definimos algunas gráficas de las cuales calculamos su corango algebraico o bien encontramos una cota inferior. Como se muestra en los siguientes resultados:

**Proposición 2.2.1** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $G$  una gráfica escalera con  $2n$  vértices, entonces el corango algebraico de  $G$  es igual a  $\gamma_P(G) = 2n - 2$ .

En la Figura 1 podemos observar una gráfica escalera con  $2(7)$  vértices.

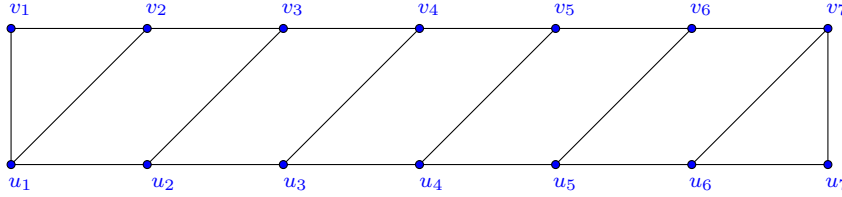


FIGURE 1: Gráfica escalera.

Finalmente se define lo que es una malla 2 dimensional y se da una cota inferior para su corango algebraico, como se enuncia en el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.5** Sea  $G_{m,n}$  una malla dos dimensional, entonces

$$nm - \min\{m, n\} \leq \gamma_P(G_{m,n}).$$

Definimos a la vinculación de  $k$  caminos por medio de aristas bajo ciertas condiciones como la malla extendida con  $k$  caminos  $ME_k$ , la cual es una generalización de la malla. En particular, para  $k=2$  hallamos el corango algebraico, como se muestra en el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.19** Sea  $G$  una malla extendida con dos caminos, uno con  $m$  vértices y el otro con  $n$  vértices. Entonces

$$\gamma_P(G) = n + m - 2.$$

Para  $k \geq 3$  no sé llevo a un resultado en concreto; sin embargo tenemos la siguiente conjetura:

**Conjetura:** Si  $ME_k$  es una malla extendida con  $k \geq 3$  caminos y  $k' \geq k$  de estos caminos tienen al menos dos vertices, entonces

$$\gamma_P(ME_k) \geq |V(ME_k)| - k'.$$

Por otro lado, dado que toda gráfica simple  $G$  es isomorfa a una malla Extendida con un número finito de caminos entonces por la conjetura anterior podemos calcular el corango algebraico de  $G$ . Teniendo así los siguientes resultados:

Si  $k = 1$ , entonces claramente  $G$  es un camino y por el [13, Corolario 3.9 ] la igualdad en la conjetura anterior se cumple.

Si  $k = 2$ , entonces  $G$  es isomorfa a  $ME_2$  y por el Teorema 2.2.19 tenemos que:

$$\gamma_{\mathcal{P}}(G) = \gamma_{\mathcal{P}}(ME_2) = |V(ME_2)| - 2.$$

Para  $k \geq 3$  tenemos que la desigualdad dada en la conjetura es estricta como se muestra a partir de algunos ejemplos.





# Capítulo 1

## Preliminares

En esta sección proporcionamos algunos resultados y definiciones necesarios para el desarrollo de esta tesis. Todo el contenido de esta sección es estándar en libros de álgebra abstracta.

### 1.1 Álgebra

**Definición 1.1.1.** Un **grupo** es una pareja conformada por un conjunto  $G$  no vacío junto con una operación binaria  $\circ$ , denotado por  $(G, \circ)$ , que satisface las siguientes condiciones:

- Para todo  $a, b \in G$ , tenemos  $a \circ b \in G$ .
- Para todo  $a, b, c \in G$ ,  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  (**Ley asociativa**).
- Existe un elemento  $e \in G$  tal que  $a \circ e = e \circ a = a$  para todo  $a \in G$ . (**Existencia de elemento identidad**)
- Para cada  $a \in G$ , existe un elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a \circ a^{-1} = e$  y  $a^{-1} \circ a = e$ . (**Existencia del elemento inverso**)

Más aún, si para todo  $a, b \in G$ ,  $a \circ b = b \circ a$  diremos que  $G$  es un grupo **abeliano**.

**Definición 1.1.2.** Un subconjunto no vacío  $H$  de un grupo  $G$  es llamado un **subgrupo** de  $G$  si y sólo si

- La operación binaria es cerrada en  $H$ , es decir, para todo  $a, b \in H$  tenemos que  $a \circ b \in H$ .

- $H$  contiene el elemento identidad de  $G$ , es decir,  $e \in H$ .
- Para todo  $a \in H$  tenemos que  $a^{-1} \in H$ .

**Definición 1.1.3.** Un **grupo cíclico** es aquel grupo que puede ser generado por un solo elemento, es decir, existe un elemento  $g$  del grupo  $G$ , tal que:

$$G = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

**Ejemplo 1.1.4.** Algunos ejemplos de grupos abelianos:

- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Q}, +)$
- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{C}, +)$
- Todo grupo cíclico es abeliano.

**Definición 1.1.5.** Un **anillo** es una terna  $(R, +, \cdot)$  donde  $R$  es un conjunto no vacío,  $+$  y  $\cdot$  son dos operaciones binarias llamadas **adición**  $+: R \times R \rightarrow R$  denotada por  $a+b$  y **multiplicación**  $\cdot: R \times R \rightarrow R$  denotada por  $a \cdot b$  para  $a, b \in R$ , que satisfacen los siguientes axiomas, llamados los axiomas de anillos:

1.  $(R, +)$  es un grupo abeliano.
2. La multiplicación es asociativa, i.e.,
 
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ para todo } a, b, c \in R.$$
3. Existe un elemento  $1 \in R$  tal que  $a \cdot 1 = a$  y  $1 \cdot a = a$  para todo  $a \in R$ .
4. La multiplicación es distributiva con respecto a la adición, es decir,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ para todo } a, b, c \text{ en } R.$$

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \text{ para todo } a, b, c \text{ en } R.$$

**Ejemplo 1.1.6.** Algunos ejemplos de anillos con identidad son:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- Anillo de funciones. Sea  $A$  un conjunto no vacío y  $R = \mathcal{F}(A, R)$  el conjunto de todas las funciones  $f : A \rightarrow R$ . Sean  $f, g \in R$ , definimos  $f + g$  y  $f \cdot g$  como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ para todo } x \in A.$$

Entonces  $R$  es un anillo conmutativo con identidad. La identidad es la función constante  $I(x) = 1$  para toda  $x \in A$ .

**Definición 1.1.7.** Un subconjunto  $I$  de un anillo  $R$  es llamado un **ideal izquierdo** si:

- $I$  es un subgrupo aditivo de  $R$ .
- Para todo  $r \in R$  y  $a \in I$ , tenemos que  $r \cdot a \in I$ .

Similarmente,  $I$  es llamado un ideal derecho si para todos  $a \in I$  y  $r \in R$ ,  $a \cdot r \in I$ . Por lo tanto, un subconjunto  $I$  de  $R$  es llamado un **ideal** si es ideal derecho e izquierdo.

**Ejemplo 1.1.8.** Ejemplos de ideales:

- En un anillo  $R$ , el conjunto  $R$  forma por sí mismo un ideal.
- El conjunto de los números enteros pares es un ideal en el anillo de los enteros  $\mathbb{Z}$ , en general para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , el conjunto  $n\mathbb{Z}$  es un ideal en dicho anillo.
- El anillo  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  de todas las funciones continuas  $f$  de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  bajo la multiplicación puntual contiene el ideal  $I = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \}$ .

Ahora definiremos un anillo muy particular, el anillo de polinomios en  $n$  variables sobre otro anillo con identidad, el cual se define de manera análoga al anillo de polinomios en una variable.

**Definición 1.1.9.** Sea  $R$  un anillo con identidad, definimos  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  como **el anillo de polinomios en  $n$  variables con coeficientes en  $R$** , donde los elementos son sumas formales finitas, a saber,

$$R[x_1, x_2, \dots, x_n] = \left\{ \sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha \mid a_\alpha \in R, I \subseteq \mathbb{N}^n \right\}$$

donde el producto  $x^\alpha$  se define como:

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

el cual es llamado el **monomio de multigrado**  $\alpha$ .

Así, un polinomio en  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  es una combinación lineal finita de monomios con coeficientes en  $R$ , es decir,

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} x^{\alpha},$$

donde  $P_{\alpha} = P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in R$  y solo una cantidad finita de coeficientes  $P_{\alpha}$  son diferentes de cero.

El grado de un monomio  $x^\alpha$ , frecuentemente denotado por  $|\alpha|$ , se define como:

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Así el grado del polinomio en  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  será el monomio de mayor grado que tiene coeficiente no cero en la expansión de  $\sum_{\alpha} P_{\alpha} x^{\alpha}$ .

## 1.2 Bases de Gröbner

En esta sección definiremos a las bases de Gröbner, las cuales son una herramienta fundamental y básica en muchos aspectos del álgebra. Pero antes enunciaremos algunas definiciones previas.

**Definición 1.2.1.** Un **orden monomial** es un orden total  $<$  sobre el conjunto de monomios  $x^\alpha$  que satisfacen lo siguiente:

- $x^\beta < x^\alpha$  implica  $x^\beta x^\gamma < x^\alpha x^\gamma, \forall x^\gamma$ .
- $1 < x^\alpha, \forall x^\alpha \neq 1$ .

Estas dos condiciones implican que si  $x^\alpha$  y  $x^\gamma$  son monomios, entonces  $x^\gamma < x^\alpha x^\gamma$ .

**Ejemplo 1.2.2.** Ordenes monomiales:

- **Orden lexicográfico:** Se define para el producto cartesiano  $\times$ , pues para cualesquiera dos conjuntos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  con relaciones de orden  $<_A$  y  $<_B$ , respectivamente, tenemos que si  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  pertenecen a  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  entonces  $(a_1, b_1) <_{lex} (a_2, b_2)$  si y solo si cualquiera de estas dos condiciones se cumple:

- $a_1 <_A a_2$ .
- $a_1 = a_2$  y  $b_1 <_B b_2$ .

El orden lexicográfico se puede extender a productos cartesianos de longitud arbitraria recursivamente aplicando esta definición, es decir, observando que:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

- **Orden lexicográfico graduado :** Decimos que  $\beta <_{grlex} \alpha$  si cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $|\beta| < |\alpha|$
- $|\beta| = |\alpha|$  y  $\beta <_{lex} \alpha$

- **Orden lexicográfico graduado inverso :** Similarmente, decimos que  $\beta <_{grevlex} \alpha$  si cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $|\beta| < |\alpha|$
- $|\beta| = |\alpha|$  y la entrada no cero más a la derecha de  $\alpha - \beta$  es negativa.

Ahora daremos algunos ejemplos de estos ordenes monomiales.

**Ejemplo 1.2.3.** Consideremos el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x, y]$ . Bajo el orden lexicográfico tenemos:

$$1 <_{lex} y <_{lex} y^2 <_{lex} \cdots <_{lex} x <_{lex} xy <_{lex} xy^2 <_{lex} \cdots <_{lex} x^2 <_{lex} x^2y <_{lex} x^2y^2 <_{lex} \cdots$$

En el caso de los ordenes lexicográfico graduado y lexicográfico graduado inverso tenemos que en el anillo de polinomios  $\mathbb{C}[x, y]$  coinciden, como se muestra a continuación:

$$1 < y < x < y^2 < xy < x^2 < y^3 < xy^2 < x^2y < x^3 <$$

Sea  $A$  un anillo y  $A[x, y, z]$  el anillo de polinomios en las variables  $x, y, z$ . Consideremos a los siguientes monomios:

$$\alpha = x^3 y^2 z^8 \quad y \quad \beta = x^2 y^9 z^2$$

Con los ordenes monomiales anteriores tenemos para estos monomios:

- $\beta <_{lex} \alpha$
- $\beta <_{grlex} \alpha$
- $\beta <_{grevlex} \alpha$

Sea  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$  un conjunto finito de polinomios en un anillo de polinomios  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , definimos el ideal generado por  $\mathcal{F}$ , denotado por  $\langle \mathcal{F} \rangle$ , como el conjunto que consiste de todas las combinaciones lineales de elementos de  $\mathcal{F}$  con coeficientes en  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , es decir,

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \langle f_1, \dots, f_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k g_i f_i \mid g_1, \dots, g_k \in R[x_1, x_2, \dots, x_n] \right\}$$

**Definición 1.2.4.** Sea  $<$  un orden monomial sobre  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y sea  $f \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$  con  $f \neq 0$ . Entonces  $f$  puede escribirse de manera única como:

$$f = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \dots + c_k x^{\alpha_k}$$

Así podemos definir los siguientes términos:

- $\mathbf{lt}(f) = cx^\alpha$  es el término líder de  $f$ .
- $\mathbf{lm}(f) = x^\alpha$  es el monomio líder de  $f$ .
- $\mathbf{lc}(f) = c$  es el coeficiente líder de  $f$ .

Por ejemplo, sea  $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$  tal que:

$$f(x_1, x_2) = 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 7x_1^2 + 11x_1 + 13x_2 + 8$$

Para el polinomio anterior tenemos que:

- $\mathbf{lt}(f) = 5x_2^2$

- $\text{lm}(f) = x_2^2$
- $\text{lc}(f) = 5$

A continuación daremos una breve descripción del algoritmo de la división en el anillo de polinomios  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  contrastando con el de los polinomios de una variable.

Fijemos un orden monomial en  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  para definir  $\text{lt}(f)$  que será el término líder de  $f$ . Sean  $g, f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Construiremos polinomios  $q_1, q_2, \dots, q_n, r \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tales que

$$g = q_1 f_1 + \dots + q_n f_n + r$$

Fijamos todos los  $q_i = 0$ . Si  $\text{lt}(g)$  es divisible por  $\text{lt}(f_i)$  para  $i=1, \dots, n$  entonces podemos sumar  $\frac{\text{lt}(g)}{\text{lt}(f_i)}$  a  $q_i$  y restar  $\frac{\text{lt}(g)}{\text{lt}(f_i)} f_i$  de  $g$  para cancelar el término líder de  $g$ , dejándolo con un grado menor. De esta manera tendremos eventualmente un polinomio cuyo término líder no será divisible por ninguno de los  $\text{lt}(f_i)$  y así tendremos que mover el término líder del residuo. Continuando de este modo tenemos dos posibilidades o bien cancelamos el término líder de  $g$  si este es divisible por algún  $\text{lt}(f_i)$  o bien lo movemos al residuo sino es divisible por ningún  $\text{lt}(f_i)$ . Dado que el término decrece en cada paso, este proceso debe terminar eventualmente y así no quedará ningún término de  $g$ , en ese punto todo término del residuo que nos quedé no será divisible por ningún  $\text{lt}(f_i)$ .

**Teorema 1.2.5. (Algoritmo de la división)** Fijemos un orden monomial. Sean  $f_1, f_2, \dots, f_k \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Entonces todo  $g \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  puede ser expresado como:

$$g = q_1 f_1 + \dots + q_n f_n + r$$

con  $q_1, q_2, \dots, q_k, r \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  y bien  $r = 0$  o todo término de  $r$  no es divisible por el término líder de ningún  $f_i$ . También el monomio líder de cada  $q_i f_i$  no es mayor que el correspondiente de  $g$ .

**Definición 1.2.6.** Cualquier representación para  $f \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  de la forma

$$f = q_1 f_1 + \dots + q_s f_s$$

donde el monomio líder de cada  $q_i f_i$  no es mayor que el monomio líder de  $f$  con respecto al orden monomial dado, la llamaremos una **representación estándar de  $f$** .

**Definición 1.2.7.** Un **ideal monomial** en  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  es un ideal generado por monomios.

**Definición 1.2.8.** Sean  $I$  un ideal y  $<$  un orden monomial en  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , el **ideal inicial** es el ideal monomial que se define como:

$$\langle lt(I) \rangle = \langle lt(f) \mid f \in I \rangle$$

Más aún si  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , entonces  $\langle lt(f_1), \dots, lt(f_s) \rangle \subseteq \langle lt(I) \rangle$ .

Ahora de nuevo fijemos un orden monomial  $<$  sobre  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  para definir una base de Gröbner.

**Definición 1.2.9.** Dado un ideal  $I \subseteq R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , decimos que  $f_1, \dots, f_n \in I$  es una **base de Gröbner** para  $I$  bajo  $<$  si:

$$\langle lt(I) \rangle = \langle lt(f_1), \dots, lt(f_n) \rangle$$

**Definición 1.2.10.** Una base de Gröbner  $G$  es **reducida** si para todo  $g \in G$ :

- $lt(g)$  no divide a ningún término de  $G \setminus g$
- $lc(g) = 1$ .

De hecho todo ideal no nulo  $I$  admite una base de Gröbner respecto a un orden monomial dado. También una base de Gröbner es un tipo particular de conjunto generador de un ideal en un anillo de polinomios sobre un anillo  $R$ . Además, el conjunto de polinomios en una base de Gröbner tienen la misma colección de raíces como los polinomios originales.

### 1.3 Forma normal de Smith.

La forma normal de Smith de una matriz con entradas en los enteros, es una matriz **diagonal**. Esta puede ser obtenida de la matriz original al multiplicarla por la izquierda y por la derecha por matrices cuadradas invertibles. En particular, los enteros son un **DIP**, así uno siempre puede calcular la forma normal de Smith de una matriz con entradas en los enteros.

Recordemos que las operaciones elementales por filas (columnas) sobre una matriz son las siguientes:



1. Permutar dos filas (columnas).
2. Multiplicar una fila (columna) por -1.
3. Sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un entero.

**Definición 1.3.1.** Sea  $A$  una matriz no-cero de tamaño  $m \times n$  sobre un DIP y  $s$  el rango de  $A$ . Así,  $A$  es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales a la matriz  $A$  se puede reducir a una matriz diagonal de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(d_1, \dots, d_s, 0, \dots, 0),$$

donde  $d_i > 0$  y  $d_i$  divide a  $d_{i+1}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ .

La matriz  $D$  es la **forma normal de Smith** de  $A$  y  $d_1, \dots, d_s$  son los **factores invariantes** de  $A$ .

**Ejemplo 1.3.2.** Sea  $A$  la siguiente matriz, su forma normal de Smith se calcula de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando operaciones elementales a la matriz  $A$ , tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Así, la forma normal de Smith de la matriz  $A$  es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

por lo que sus factores invariantes son 1, 1 y 8.

## 1.4 Teoría de gráficas

En esta sección damos algunos conceptos fundamentales de la teoría de gráficas, por ejemplo las gráficas simples, las cuales son esenciales para el desarrollo de este trabajo.

**Definición 1.4.1.** Una **gráfica** es un par ordenado  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es un conjunto de parejas, no ordenadas, formadas por elementos de  $V$ . A los elementos de  $V$  los llamaremos **vértices** y a los elementos de  $E$ , **aristas**. El conjunto de vértices de la gráfica  $G$  serán denotados por  $V(G)$  y las aristas por  $E(G)$ . Por otro lado, el **orden** de la gráfica es el número de vértices y será denotado por  $|G|$  y su número de aristas será denotado por  $\|G\|$ . Así, las gráficas serán **finitas** o **infinitas** de acuerdo a su orden, en el presente trabajo todas las gráficas las consideraremos finitas.

Además dos vértices son llamados **adyacentes** si están conectados por una arista y dos aristas son llamadas **incidentes** si comparten un vértice en común.

Una arista  $e = \{x, y\}$  será denotada como  $xy$  o  $yx$ , en nuestro caso serán la misma arista pero en algunos casos tomaremos a alguno de los vértices como vértice inicial (tail) y al otro como vértice final (head). Así para cualquier  $v \in V(G)$  definimos el **indegree** de  $v$ , como el número de vértices finales adyacentes a  $v$  y lo denotaremos como  $d^-(v)$ . El **outdegree** de  $v$  es el número de vértices iniciales adyacentes a  $v$ , denotado por  $d^+(v)$ .

Sean  $U$  y  $V$  dos conjuntos de vértices y sean  $u \in U$  y  $v \in V$  dos vértices, a la arista  $uv$  la llamaremos  $U - V$  arista, este conjunto de aristas será denotado por  $E(U - V)$ . Por lo tanto, el conjunto de aristas que tienen como vértice común a  $v$  será denotado por  $E(v)$ .

La manera usual de visualizar una gráfica es dibujar un punto para cada vértice y unir dos de esos puntos por una línea si los correspondientes dos vértices forman una arista. Como veremos en el siguiente ejemplo, pero antes daremos las siguientes definiciones.

**Definición 1.4.2.** Decimos que  $e$  es un **bucle**, si es una arista que une a un vértice consigo mismo y si dos o más aristas conectan a los mismos dos vértices las llamaremos **aristas múltiples**.

**Definición 1.4.3.** Una **gráfica dirigida** es una gráfica  $G = (V, E)$  donde el conjunto de aristas son parejas ordenadas de elementos de  $V$ . Así, una **gráfica no dirigida** es aquella donde las aristas son parejas no ordenadas de elementos de  $V$ .

**Definición 1.4.4.** Una gráfica  $G = (V, E)$  es **simple** si es una gráfica dirigida o no dirigida, la cual no tiene bucles y múltiples aristas.

**Ejemplo 1.4.5.** Representación de una gráfica.

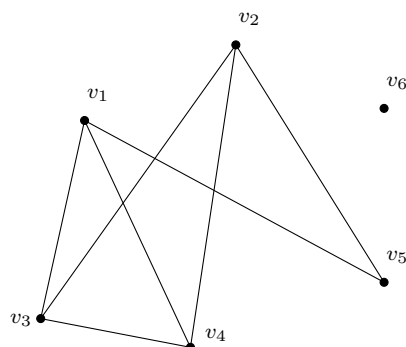


FIGURE 1.1: Una gráfica simple no dirigida  $G$ .

En la figura 1.1 tenemos que  $V(G) = \{v_1, \dots, v_6\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  donde  $e_1 = v_1v_3$ ,  $e_2 = v_1v_4$ ,  $e_3 = v_1v_5$ ,  $e_4 = v_2v_3$ ,  $e_5 = v_2v_4$ ,  $e_6 = v_2v_5$ . Dado que  $G$  es una gráfica no dirigida tenemos que las aristas  $v_1v_3$  y  $v_3v_1$  son las mismas, similarmente las demás aristas.

**Definición 1.4.6.** Sea  $v$  un vértice en una gráfica  $G$ , definimos el **grado de  $v$**  como el número de aristas incidentes a  $v$ , con los bucles contando dos veces. El grado de  $v$  será denotado por  $deg(v)$ , más aún el grado total de  $v$  es  $deg(v) = d^+(v) + d^-(v)$ .

Además la suma de los grados de los vértices de una gráfica  $G = (V, E)$  es igual al doble del número de las aristas, es decir,

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|.$$

Esto se debe a que toda arista tiene un vértice inicial y un vértice final, lo que significa que hay dos vértices por arista, es decir, la suma de los grados de los vértices es el doble que el número de aristas. Esto se muestra en la siguiente gráfica:

**Ejemplo 1.4.7.** Consideremos la siguiente gráfica.

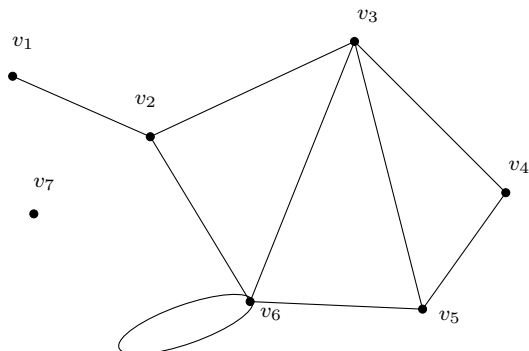


FIGURE 1.2: Gráfica  $G$  no simple y no dirigida.

En esta gráfica tenemos que los grados de sus vértices son:  $\deg(v_1) = 1$ ,  $\deg(v_2) = 3$ ,  $\deg(v_3) = 4$ ,  $\deg(v_4) = 2$ ,  $\deg(v_5) = 3$ ,  $\deg(v_6) = 5$ ,  $\deg(v_7) = 0$  y el total de aristas es 9, así

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 18 = 2(9) = 2||G||.$$

Ahora definiremos lo que es un homomorfismo de gráficas, es decir, un mapeo entre dos gráficas que respeta su estructura, por ejemplo, mapea vértices adyacentes a vértices adyacentes.

**Definición 1.4.8.** Un **homomorfismo de gráficas**  $f$  de una gráfica  $G = (V, E)$  a una gráfica  $G' = (V', E')$ , denotada como  $f : G \rightarrow G'$ , es un mapeo  $f : V \rightarrow V'$  tal que si  $uv \in E$ , entonces  $f(u)f(v) \in E'$ . Más aún, si el mapeo  $f : V \rightarrow V'$  es una biyección, entonces decimos que  $f$  es un **isomorfismo de gráficas**.

**Ejemplo 1.4.9.** En las gráficas de la Figura 1.3 definimos al homomorfismo de gráficas  $f$  tal que  $f(v_i) = u_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, 8\}$ , el cual también es un isomorfismo de gráficas.

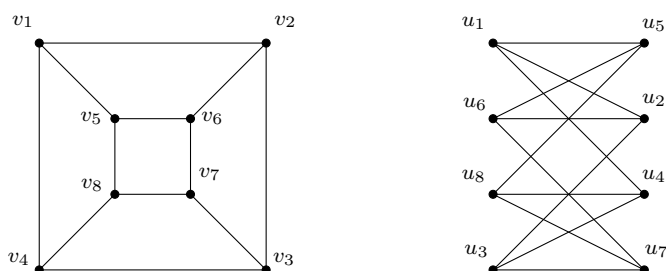


FIGURE 1.3: Isomorfismo de gráficas.

**Definición 1.4.10.** Una gráfica  $G' = (V', E')$  es una **subgráfica** de  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ , lo cual denotaremos como  $G' \subseteq G$ .

Si  $G' = (V', E')$  es una subgráfica de  $G = (V, E)$  la cual contiene todas las aristas  $u'v' \in E(G)$  tales que  $u', v' \in V'(G')$ , entonces diremos que  $G'$  es una **subgráfica inducida** de  $G$  y lo denotaremos como  $G' := G[V']$ .

Ahora si  $G' \subseteq G$  tal que  $V' = V$ , entonces diremos que  $G'$  es una **subgráfica generadora**.

**Ejemplo 1.4.11.** Sea  $G$  la gráfica con diez vértices que se muestra en la primera gráfica de la Figura 1.4, la segunda gráfica es una subgráfica inducida de  $G$  y la tercera gráfica es una subgráfica generadora de  $G$ .

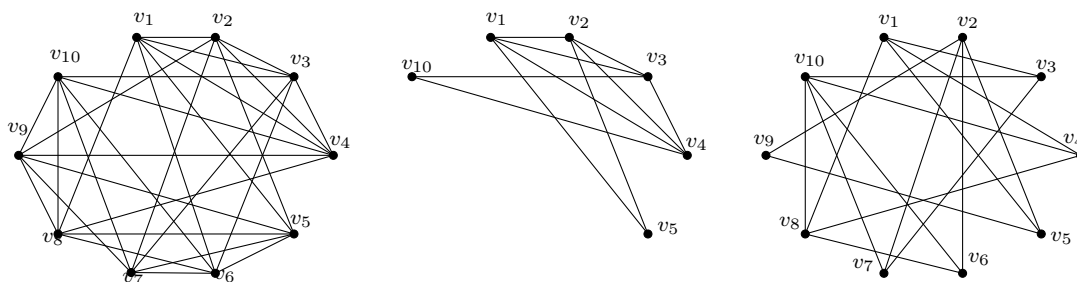


FIGURE 1.4: Subgráfica inducida y generadora de una gráfica.

Ahora definiremos un tipo de gráfica muy particular, esencial en el desarrollo de este trabajo.

**Definición 1.4.12.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , un **camino**  $P_n$  es una gráfica cuyos vértices pueden ser listados en el orden  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que las aristas son  $v_j v_{j+1}$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Este tipo de gráficas tiene la propiedad de que los vértices  $v_1$  y  $v_n$  tienen grado uno, mientras los vértices  $v_2, \dots, v_{n-1}$  tienen grado dos. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.4.13.** La Figura 1.5 ilustra el camino  $P_6$ .



FIGURE 1.5: Camino con seis vértices.

**Definición 1.4.14.** Una **gráfica completa**  $G = (V, E)$  es una gráfica simple no dirigida en la que cada par de vértices distintos están conectados por una única arista.

**Definición 1.4.15.** Un **clan** en una gráfica no dirigida  $G = (V, E)$ , es un subconjunto  $C \subseteq V$  de vértices que cumple la condición que cualesquiera dos vértices distintos de  $C$



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  es un clan máximo, al no existir ningún otro clan con más vértices, como podemos observar ambas gráficas inducidas por esos conjuntos de vértices son clanes máximos solo que uno de ellos tiene la mayor cardinalidad entre el conjunto de subgráficas maximales, como se muestra en la Figura 1.8:

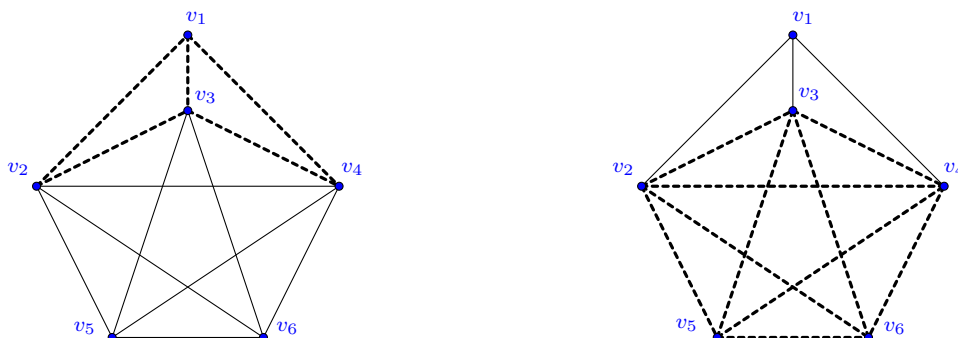


FIGURE 1.8: Ejemplo de clan máximo y maximal.

**Definición 1.4.20.** Sea  $G$  una gráfica, decimos que una subgráfica inducida  $C$  es una **componente conexa** de  $G$  si cualesquiera dos vértices están conectados por un camino y la cual no está conectada a ningún vértice adicional a la gráfica  $G$ .

**Ejemplo 1.4.21.** En la gráfica de la Figura 1.9 podemos observar dos componentes conexas.

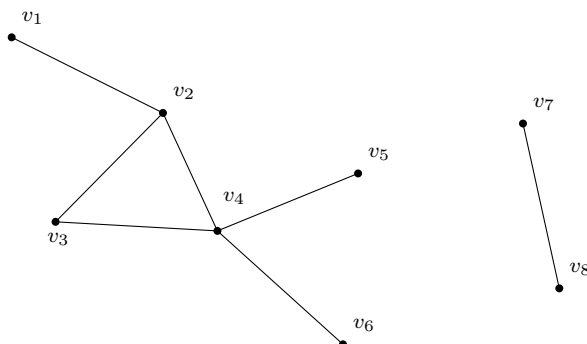


FIGURE 1.9: Gráfica con dos componentes conexas.

El número de componentes conexas de una gráfica es invariante bajo isomorfismo de gráficas. En teoría de gráficas es igual a la multiplicidad del eigenvalor cero de la matriz Laplaciana de la gráfica.

**Definición 1.4.22.** Una gráfica  $G$  es  **$k$ -conexa**, si  $k$  es el tamaño más pequeño de subconjunto de vértices donde la gráfica llega a ser desconexa si borramos este conjunto de vértices. Por otro lado, si  $k = 1$  decimos que la gráfica  $G$  es conexa y en este caso cada par de vértices están unidos por al un menos camino.





## Capítulo 2

# Ideales críticos y el corango algebraico de una gráfica

En este capítulo presentaremos los resultados principales de esta tesis. Una malla es una gráfica que es el producto cartesiano de dos caminos. En la primera sección de este capítulo definiremos que es la matriz Laplaciana de una gráfica y su corango algebraico. En la segunda sección, presentaremos una fórmula para el corango de una gráfica tipo malla con dos caminos y de forma particular el caso de una gráfica escalera. Una gráfica la cual es similar a una malla se dice que es de tipo malla, en la segunda sección presentaremos una definición formal de este concepto. En la última sección presentaremos una conjetura respecto a una cota inferior del corango algebraico de una gráfica tipo malla con más de tres caminos.

### 2.1 Grupo crítico e ideales críticos de gráficas

En esta sección definiremos el concepto de matriz Laplaciana de una gráfica, para luego definir su grupo crítico e ideales críticos. También definiremos el concepto de corango algebraico de una gráfica, el cual juega el papel más importante en esta tesis.

**Definición 2.1.1.** Dada una gráfica simple  $G = (V, E)$  con  $n$  vértices, definimos su **Matriz Laplaciana** como:

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

donde  $D(G) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  es la matriz de grados de  $G$  (la matriz diagonal formada por los grados de los vértices de  $G$ ) y  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$ , la cual es una matriz cuadrada con la entrada  $A_{i,j}$  igual a uno si existe una arista del vértice  $v_i$  al vértice  $v_j$  y cero en otro caso.

Así tenemos que la matriz Laplaciana  $L(G)$  esta dada por:

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} d_v & \text{si } u = v, \\ -1 & \text{si } u \text{ y } v \text{ son adyacentes,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación daremos un ejemplo de como calcular la matriz Laplaciana de una gráfica.

**Ejemplo 2.1.2.** Consideremos la siguiente gráfica simple  $G$  dada en la Figura 2.1.

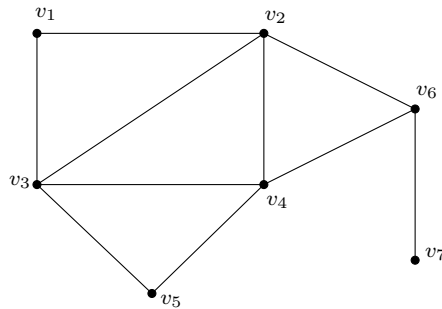


FIGURE 2.1:  $G$  gráfica simple y no dirigida.

Su matriz de grados es la siguiente:

$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así mismo tenemos que su matriz de adyacencia es igual a:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz Laplaciana de esta gráfica esta dada por:

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.1.3.** Dado un anillo conmutativo con identidad  $\mathcal{P}$ , la **Matriz Laplaciana Generalizada** de una gráfica  $G = (V, E)$  esta dada por:

$$L(G, X_G)_{u,v} = \begin{cases} x_u & \text{si } u = v \\ -1_{\mathcal{P}} & \text{si } u \text{ y } v \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $X_G = \{x_v | v \in V(G)\}$  es un conjunto de indeterminadas indexadas por los vértices de  $G$  y  $1_{\mathcal{P}}$  es la identidad en  $\mathcal{P}$ .

Obtener la Matriz Laplaciana Generalizada de la gráfica anterior es muy simple ya que basta con tomar su matriz Laplaciana y cambiar los coeficientes de la diagonal principal por las indeterminadas del conjunto  $X_G$  indexadas por los vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ . Así su Matriz Laplaciana Generalizada es:

$$L(G, X_G) = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & x_3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & x_4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & x_5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & x_6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x_7 \end{pmatrix}$$

Dado que  $L(G, X_G)$  es una matriz con entradas en el anillo de polinomios sobre  $\mathcal{P}$  en las variables del conjunto  $X_G$ , el cual se denota como  $\mathcal{P}[X_G]$ , tenemos que los ideales determinantaes de  $L(G, X_G)$  son ideales sobre  $\mathcal{P}[X_G]$ , los cuales definiremos a continuación.

**Definición 2.1.4.** Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y  $1 \leq i \leq n$ , el  **$i$ -ésimo ideal crítico de  $G$**  es el ideal generado por los menores de tamaño  $i$  de  $L(G, X_G)$ . Esto es,

$$I_i(G, X_G) = \langle \text{Minors}_i(L(G, X_G)) \rangle \subseteq \mathcal{P}[X_G],$$

donde el  $\text{Minors}_i(L(G, X_G))$  es el conjunto de menores de tamaño  $i$  de  $L(G, X_G)$ . Por convención,  $I_i(G, X_G) = \langle 0 \rangle$  si  $i \leq 0$  e  $I_i(G, X_G) = \langle 0 \rangle$  si  $i > n$ .

Evidentemente  $I_n(G, X_G)$  es un ideal principal generado por el determinante de la matriz Laplaciana generalizada. Por otro lado, una propiedad de los ideales críticos es que son una sucesión decreciente, como se demuestra en la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.5.** Sea  $G$  una gráfica no dirigida con  $n$  vértices, entonces

$$\langle 0 \rangle \subseteq I_n(G) \subseteq \cdots \subseteq I_2(G) \subseteq I_1(G) \subseteq \langle 1 \rangle.$$

Además, si  $H$  es una subgráfica inducida de  $G$ , entonces:

$$I_k(H) \subseteq I_k(G) \text{ para todo } 1 \leq k \leq |V(H)|.$$

**Demostración:** Sea  $A$  una  $(k+1) \times (k+1)$  matriz sobre  $\mathcal{P}[X_G]$ , es decir,

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,k+1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,k+1} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & A_{k+1,3} & \cdots & A_{k+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

Sea  $A(i, 1)$  la submatriz de  $A$  la cual se obtiene de eliminar la  $i$ -ésima fila y la primera columna. Luego

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{k+1} A_{i,1} \det(A(i, 1)).$$

Por lo que el determinante de  $A$  es una combinación lineal de matrices de tamaño  $(k) \times (k)$  y así el  $\det(A) \in I_k(G)$ , más aún  $I_{k+1}(G) \subseteq I_k(G)$  para todo  $1 \leq k \leq n-1$ .

Por otro lado, cualquier submatriz de  $L(H, X_H)$  es también una submatriz de  $L(G, X_G)$ , así tenemos que el conjunto de  $i$ -menores de  $L(H, X_H)$  están contenidos en  $i$ -menores de  $L(G, X_G)$  para todo  $1 \leq i \leq |V(H)|$ . Por lo tanto,

$$\text{Minors}_i(L(H, X_H)) \subseteq \text{Minors}_i(L(G, X_G)) \text{ para todo } 1 \leq i \leq |V(H)|.$$

□

Ahora definamos el concepto de grupo crítico de  $G$ , para ello primero pensemos en la matriz Laplaciana  $L(G)$  como un homomorfismo de grupos Abelianos, es decir,

$$L(G) : \mathbb{Z}^{|V|} \longrightarrow \mathbb{Z}^{|V|}.$$

Para este homomorfismo tenemos que:

$$\text{coker}(L(G)) = \mathbb{Z}^{|V|}/\text{Im}(L(G))$$

**Definición 2.1.6.** El **grupo crítico** de una gráfica conexa  $G$ , denotado por  $K(G)$ , se define como la parte de torsión del  $\text{coker}(L(G))$ , es decir, el único grupo abeliano finito tal que el  $\text{coker}(L(G))$  puede ser expresado como:

$$\mathbb{Z}^{|V|}/\text{Im}(L) \cong \mathbb{Z} \oplus K(G).$$

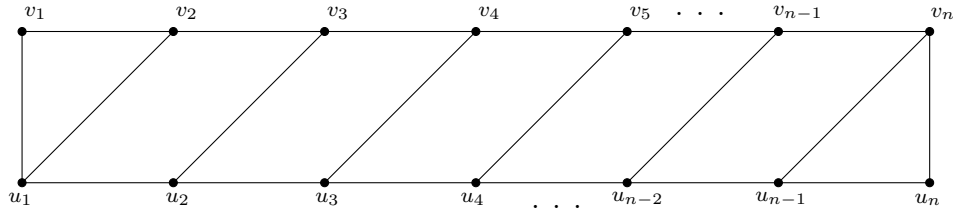
Ya definidos los ideales críticos y grupos críticos definimos el siguiente concepto que será primordial para el desarrollo de esta tesis.

**Definición 2.1.7.** Sea  $G$  una gráfica, definimos el **corango algebraico** de  $G$ , el cual denotaremos como  $\gamma_{\mathcal{P}}(G)$ , como el máximo entero  $i$  tal que  $I_i(G, X_G)$  es trivial.

## 2.2 Corango algebraico de gráficas tipo malla

En esta sección analizaremos el corango algebraico de las gráficas tipo malla, las cuales son una generalización de la malla. Las mallas son las gráficas sobre las que por primera vez en 1987 fue definido el grupo de pilas de arena por Bak, véase [1].

Empezaremos por definir la gráfica escalera. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y tomemos dos caminos con el mismo número de vértices  $P_n^1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $P_n^2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . A continuación tracemos aristas entre ambos caminos de la siguiente manera: tomemos a los vértices  $v_2 \in P_n^1$ ,  $u_1 \in P_n^2$  y formemos a la arista  $e_1 = v_2u_1$ , ahora tomemos a los vértices  $v_3 \in P_n^1$  y  $u_2 \in P_n^2$  y formemos la arista  $e_2 = v_3u_2$  y así sucesivamente hasta tener el siguiente conjunto de aristas  $e_1 = v_2u_1$ ,  $e_2 = v_3u_2$ ,  $e_3 = v_4u_3$ ,  $\dots$ ,  $e_{n-1} = v_nu_{n-1}$ . A esta gráfica la llamaremos la **gráfica escalera**, la cual se ve de la siguiente manera:



**Proposición 2.2.1.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $G$  una gráfica escalera con  $2n$  vértices, entonces el corango algebraico de  $G$  es igual a  $\gamma_P(G) = 2n - 2$ .

**Demostración:** Primero la matriz Laplaciana de la gráfica escalera es la siguiente:

$$L(G, X_G) = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & x_{n+1} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & x_{n+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & x_{2n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x_{2n} \end{pmatrix}$$

Sean

$$\begin{aligned} t(P_1) &= \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}, h(P_1) = \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\}, \\ t(P_2) &= \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}, h(P_2) = \{u_2, u_3, u_4, \dots, u_n\} \end{aligned}$$

Con los conjuntos anteriores construimos a la matriz  $M$  de tamaño  $(2n - 2) \times (2n - 2)$ ,  $M = L(G, X_G) [h(P_1) \cup h(P_2), t(P_1) \cup t(P_2)]$ , la cual es una submatriz de  $L(G, X_G)$ . Así tenemos que  $M$  es de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_3 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & x_{n+2} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & x_{n+3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & x_{2n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

Observemos que esta matriz es de bloques, por lo cual nos será más fácil calcular su determinante. Por lo que consideraremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & x_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x_4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x_5 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_6 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x_{n+2} & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_{n+3} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_{n+4} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x_{n+5} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x_{2n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

Así a la matriz  $M$  la podemos representar como una matriz por bloques donde cada una de las matrices es una matriz cuadrada, es decir,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Dado que  $A \in GL(n-1, n-1)$  (matriz triangular superior con unos en la diagonal principal) y  $C = I_{n-1}$ , entonces  $CD = DC$ . Por otro lado, por el [14, Teorema 3] tenemos que el  $\det(M) = \det(AD - CB)$  y dado que  $CB = 0$  entonces

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D) = 1 \cdot 1 = 1$$

Como  $M$  es una submatriz de la matriz Laplaciana de  $G$  tenemos que  $2n - 2 \leq \gamma_P(G)$ . Para la otra desigualdad utilizaremos el [13, Corolario 3.9]. Dado que  $G$  es una gráfica simple con  $2n$  vértices diferente del camino, entonces  $\gamma(G) \neq 2n - 1$  y por lo tanto  $\gamma(G) = 2n - 2$ .  $\square$

**Definición 2.2.2.** Sean  $G = (V(G), E(G))$  y  $H = (V(H), E(H))$  dos gráficas, el **producto cartesiano** de  $G$  y  $H$  es la gráfica  $G \square H = (V, E)$  con  $V = V(G) \times V(H)$  y  $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$  si  $u_1 = u_2$  y  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes en  $H$  o bien  $v_1 = v_2$  y  $u_1$  y  $u_2$  son adyacentes en  $G$ .

**Ejemplo 2.2.3.** Gráficamente el producto cartesiano de los caminos  $P_m$  y  $P_n$  es de la siguiente forma:

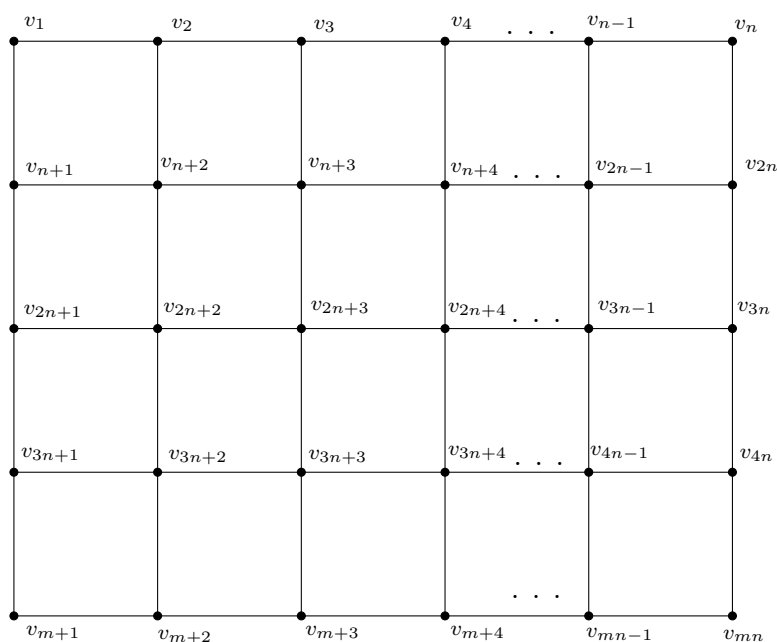


FIGURE 2.2: Malla dos dimensional.



**Definición 2.2.4.** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ , una **mallado dos dimensional** es una gráfica la cual es el producto cartesiano  $P_m \square P_n$  de caminos con  $m$  y  $n$  vértices respectivamente, la cual denotamos como  $G_{m,n}$ .

En el siguiente teorema daremos una cota inferior para el corango algebraico de la mallado dos dimensional.

**Teorema 2.2.5.** Sea  $G_{m,n}$  una mallado dos dimensional, entonces

$$nm - \min\{m, n\} \leq \gamma_P(G_{m,n}).$$

Antes de demostrar el teorema anterior daremos algunas definiciones y resultados que nos serán útiles.

**Definición 2.2.6.** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m \neq n$  y  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  una matriz sobre el campo  $\mathbb{F}$ , definimos la diagonal principal de la matriz rectangular  $A$  como aquellos elementos de la forma  $a_{ij}$  donde  $i = j$ .

**Ejemplo 2.2.7.** Consideremos la siguiente matriz  $B \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ , es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 9 \\ 8 & 2 & -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que para esta matriz, la diagonal principal de la matriz rectangular  $B$  está formada por las entradas  $1, 7, -3$ .

**Definición 2.2.8.** Sea  $A \in M_m(\mathbb{F})$  una matriz de  $r \times r$  bloques, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2r} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix},$$

donde  $A_{ii}$  es una matriz triangular inferior de tamaño  $n_i$  con unos en la diagonal principal y elementos distintos de cero por debajo de ella para todo  $i = 1, \dots, r$ . Más aún el tamaño de estas submatrices es creciente, es decir,  $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ .

Los bloques  $A_{ij}$  con  $i \neq j$  e  $i, j = 1, \dots, r$  son matrices de tamaño  $n_i \times n_j$ , donde los únicos elementos distintos de cero son los que están por debajo de la diagonal principal de cada una de estas submatrices. Para calcular el determinante de la matriz  $A$  tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.9.** Si  $A$  es una matriz como la que se definió en 2.2.8 tenemos que:

$$\det(A) = 1 \text{ o } \det(A) = -1.$$

**Demostración:** Por la fórmula de Leibniz tenemos que el determinante de una matriz cuadrada  $B$  está dado por:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^m a_{i,\sigma(i)},$$

donde  $m$  es el tamaño de la matriz  $B$ . Por lo que será suficiente con demostrar que si:

$$\prod_{i=1}^m a_{i,\sigma(i)} \neq 0,$$

entonces  $\sigma = id$ .

En efecto, dado que  $\prod_{i=1}^m a_{i,\sigma(i)} \neq 0$ , entonces  $a_{i,\sigma(i)} \neq 0$  para toda  $i = 1, \dots, m$ .

Demostraremos por inducción que  $\sigma(i) = i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Tenemos que  $\sigma(1) = 1$  ya que el único elemento no cero en la primera fila es la entrada  $a_{1,1}$ . Para  $i = 2$  tenemos que  $\sigma(2) = 2$  pues para la segunda fila de la matriz  $A$  los únicos elementos distintos de cero son  $a_{2,1}$ ,  $a_{2,2}$  o  $a_{2,n_i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, m$  pero dado que  $\sigma$  es una biyección esta no puede ser igual a 1. Por otro lado, si  $\sigma = n_i + 1$  para algún  $i$  tenemos que para  $n_i + 1$ -ésima fila el único elemento no cero es  $a_{n_i+1,n_i+1}$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k < m$  y supongamos que  $\sigma(k) = k$ . Por demostrar que  $\sigma(k+1) = k+1$ , en efecto, dado que  $n_i$  es el grado de la matriz  $A_{ii}$  para todo  $i = 1, \dots, r$ , entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer los siguientes casos:

- $k + 1 = n_i + 1$  para algún  $i \in \{1, \dots, r\}$ . En este caso tenemos que  $\sigma(k+1) = n_i + 1 = k + 1$  por la misma razón que en el caso  $k = 1$ .
- $k + 1 = n_i + j$  para algún  $i \in \{1, \dots, r\}$  y  $j \in \{2, \dots, n_{i+1} - 1\}$ . En este caso, procederemos por contradicción, es decir, supongamos que  $\sigma(k+1) \neq k+1$ . Por hipótesis de inducción y dado que  $\sigma$  es una biyección, tenemos que  $\sigma(k+1) \neq k$  para toda  $k = 1, \dots, n_i + j - 1$ . Así:
  - Si  $\sigma(n_i + j) = n_s + 1$  para algún  $s > i$  llegamos a una contradicción dado que el elemento  $a_{n_i+j,\sigma(n_i+j)} = a_{n_i+j,n_s+1} = 0$
  - Si  $\sigma(n_i + j) = n_s + l$  con  $i \leq s < r$  y  $l \in \mathbb{N}$ , entonces si  $i = s$  tenemos que  $l > j$  y así el elemento  $a_{n_i+j,\sigma(n_i+j)} = a_{n_i+j,n_s+l}$  es un elemento del bloque

$A_{i+1,s+1}$  que está por encima de la diagonal y así  $a_{n_i+j,\sigma(n_i+j)} = 0$ ; lo cual es una contradicción. Por otro lado, si  $i < s < r$  y  $l \in \mathbb{N}$  dado que  $a_{n_i+j,n_s+l}$  está en el bloque  $A_{i+1,s+1}$ , entonces tenemos los siguientes casos:

Si  $l \geq j$ , entonces  $a_{n_i+j,n_s+l} = 0$  dado que sería un elemento de la diagonal principal o estaría por encima de la diagonal, lo cual es una contradicción.

Si  $l < j$ , entonces  $a_{n_i+j,n_s+l} \neq 0$  pero dado que  $\sigma$  es una biyección y por la forma de la matriz  $A$  tendremos que después de un número finito de pasos el elemento  $a_{p,\sigma(p)} = 0$ , para algún  $1 < p \leq m$  lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $\sigma(k+1)=k+1$ , así tenemos que  $\sigma=id$ . En resumen tenemos que:

$$\det(A) = \text{sgn}(id) \prod_{i=1}^m a_{i,id(i)} = (1)(-1)^m = (-1)^{m+1}$$

el cual será 1 si  $m$  es impar y  $-1$  si  $m$  es par. □

**Demostración del Teorema 2.2.5** Dada la malla dos dimensional tenemos que su matriz Laplaciana está dada por:

$$L(G_{m,n}, X_{G_{m,n}}) = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & x_{2n} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_{nm-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $n < m$ . Ahora si consideramos los siguientes  $m$  caminos formados por los siguientes conjuntos de vértices, tenemos que  $P_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $P_2 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n}\}$ ,  $P_3 = \{v_{2n+1}, v_{2n+2}, \dots, v_{3n}\}$ ,  $\dots$ ,  $P_m = \{v_{mn-(n-1)}, v_{mn-(n-2)}, \dots, v_{mn}\}$ .

Tomando ambos extremos de cada uno de estos caminos tenemos los siguientes conjuntos de vértices:

$$\begin{aligned} t(P_1) &= \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}, h(P_1) = \{v_2, \dots, v_n\} \\ t(P_2) &= \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n-1}\}, h(P_2) = \{v_{n+2}, \dots, v_{2n}\} \\ t(P_3) &= \{v_{2n+1}, v_{2n+2}, \dots, v_{3n-1}\}, h(P_3) = \{v_{2n+2}, \dots, v_{3n}\}, \dots, \\ t(P_m) &= \{v_{mn-(n-1)}, v_{mn-(n-2)}, \dots, v_{mn-1}\}, h(P_m) = \{v_{mn-(n-2)}, v_{mn-(n-3)}, \dots, v_{mn}\}. \end{aligned}$$

Con los conjuntos de vértices anteriores formamos a la matriz  $A$  de tamaño  $(mn - n) \times (mn - n)$ ,

$$A [h(P_1) \cup h(P_2) \cup \dots \cup h(P_m), t(P_1) \cup t(P_2) \cup \dots \cup t(P_m)]$$

Notemos que  $A$  es una submatriz de  $L(G_{m,n}, X_{G_{m,n}})$ . Más aún esta matriz satisface las condiciones de la proposición 2.2.9, así tenemos que  $\det(A)$  es igual a 1 o  $-1$ . Por lo tanto, una cota inferior para el corango algebraico es:

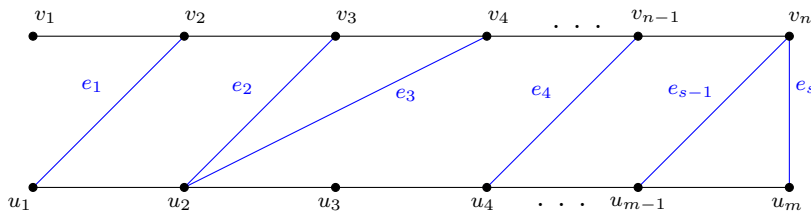
$$nm - \min\{m, n\} \leq \gamma(G_{m,n}).$$

□

Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n, m \geq 2$  y  $P_n, P_m$  dos caminos formados por los respectivos conjuntos de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Vincularemos a estos dos caminos por medio de aristas bajo las siguientes condiciones:

- Para algún  $s \in \mathbb{N}$  tenemos que la arista  $e_s = v_i u_j$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ .
- Si  $e_s = v_i u_j$  es una arista que vincula a los caminos  $P_m$  y  $P_n$ , entonces  $e'_s = v_k u_l$  no la consideraremos como una arista que vincula a los caminos  $P_m$  y  $P_n$  si  $k < i$  y  $l > j$  o si  $k > i$  y  $l < j$ , es decir, ninguna de las aristas que vinculan a los dos caminos se intersecan entre sí, solo en los puntos finales de las aristas, es decir, son disjuntas a pares. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.10.** Vinculación de dos caminos por medio de aristas.



En este ejemplo enumeramos a las aristas de izquierda a derecha para tener un orden, así para cualesquiera dos caminos que estén vinculados, también las enumeraremos. Generalizando este proceso para más caminos tenemos:

Sea  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > 2$  y supongamos que tenemos  $k$  caminos, es decir,  $P_{n_1}, \dots, P_{n_k}$  con  $n_i \geq 2$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Más aún el conjunto de vértices de cada camino es  $\{v_{n_j}^1, v_{n_j}^2, \dots, v_{n_j}^{n_j}\}$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  como en el caso anterior para cualesquiera dos caminos los vincularemos por medio de una cantidad finita de aristas con las mismas condiciones. Por lo cual ahora tendremos  $(k - 1)k / 2$  conjuntos de aristas donde en cada conjunto las aristas son disjuntas a pares. A esta gráfica la llamaremos **malla extendida con  $k$  caminos**, la cual la denotaremos por  $ME_k$ .

**Ejemplo 2.2.11.** En la siguiente gráfica mostramos una malla extendida con cuatro caminos donde todos los caminos están vinculados por medio de aristas las cuales no se intersectan entre sí.

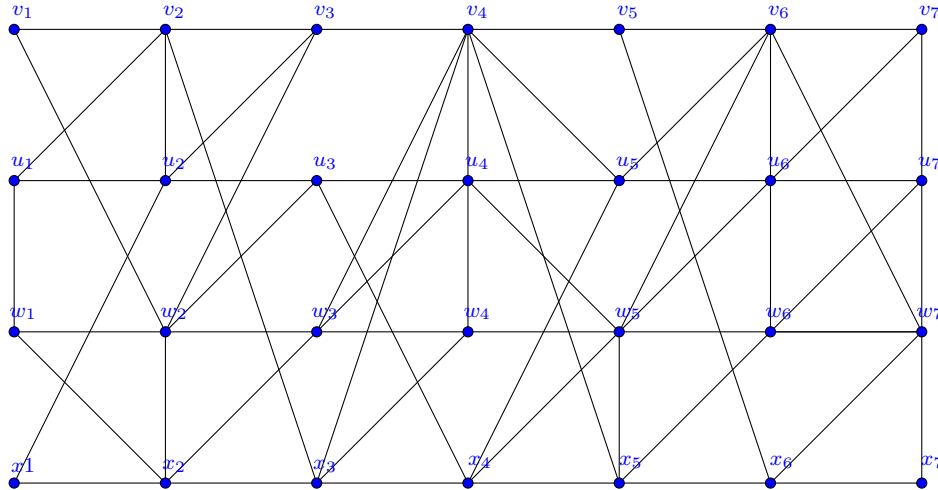


FIGURE 2.3: Malla extendida con cuatro caminos.

Antes de dar una cota inferior para el corango algebraico de  $ME_k$  daremos unos resultados previos que nos serán de gran utilidad durante el desarrollo de esta sección.

**Definición 2.2.12.** Una **digráfica**  $D$  es un par  $(V, E)$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices y  $E$  es el conjunto de aristas ordenadas de elementos distintos de  $V$ .

Dada una digráfica  $D$ , una subdigráfica  $C$  de  $D$  es llamado un **1-factor dirigido** si y sólo si  $d_c^+(v) = 1 = d_c^-(v)$  para todo  $v \in V(C)$ .

Así tenemos el siguiente teorema de [13, Teorema 12]:

**Teorema 2.2.13.** Sea  $D$  una digráfica con  $n$  vértices (posiblemente con múltiples aristas y loops), entonces:

$$\det(-A(D)) = \sum_{C \in \mathcal{F}} (-1)^{c(C)},$$

donde  $\mathcal{F}$  es el conjunto de 1-factores dirigidos generadores de  $D$  y  $c(C)$  el número de componentes conexas de  $C$ . Más aún:

$$\det(L(D, X)) = \sum_{U \subseteq V(D)} \det(-A(D[U]^{wl})) \cdot \prod_{v \notin U} x_v$$

donde  $D[U]$  es la subgráfica inducida por  $U$  de  $D$  y  $D[U]^{wl}$  es la subgráfica obtenida de  $D[U]$  borrando los posibles loops.

Sea  $D$  una digráfica (o una gráfica) y sean  $u, v$  dos vértices de  $D$  con  $u \neq v$ . Definimos a  $D(u, v)$  como la digráfica obtenida de  $D$  borrando las aristas que salen de  $u$  y entran a  $v$  (recordar que cada arista de una gráfica es considerada como dos aristas dirigidas en ambas direcciones) e identificando los vértices  $u$  y  $v$  en un nuevo vértice denotado por  $u \circ v$ . Además, si  $u = v$ , entonces  $D(u, v)$  se define como  $D \setminus u$ .

Ahora sean  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  y  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  subconjuntos ordenados de  $V(D)$  con  $s \geq 2$ , definimos  $D(U, V)$  inductivamente como  $D(U \setminus u_s, V \setminus v_s)(u_s, v_s)$ .

**Teorema 2.2.14.** Sea  $D$  una digráfica y  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  subconjuntos ordenados de  $V(D)$ , entonces

$$L(D, X)(U; V) \approx L(D(U, V), X)_{\{x_{u_i \circ v_i} = -m_{(v_i, u_i)} \mid i=1, \dots, s\}}$$

Claramente,  $D(U, V)$  y  $L(D(U, V), X)$  depende del orden de los elementos de los subconjuntos  $U$  y  $V$ . Sin embargo, si  $\sigma \in S_S$  es una permutación tenemos

$$\begin{aligned} & L(D(U, V), X)_{\{x_{u_i \circ v_i} = -m_{(v_i, u_i)} \mid i=1, \dots, s\}} \\ & \approx L(D(U, \{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(s)}\}), X)_{\{x_{u_i \circ v_{\sigma(i)}} = -m_{(v_{\sigma(i)}, u_i)} \mid i=1, \dots, s\}}, \end{aligned}$$

lo que significa que en algún sentido  $L(D(U, V), X)_{\{x_{u_i \circ v_i} = -m_{(v_i, u_i)} \mid i=1, \dots, s\}}$  no depende del orden de los elementos de los subconjuntos  $U$  y  $V$ .

Supongamos que tenemos dos caminos  $P_n, P_m$  con  $n$  y  $m$  el número de vértices, respectivamente. Los cuales están vinculados por un conjunto de aristas las cuales no se cortan entre sí, como se muestra en la siguiente figura.

**Ejemplo 2.2.15.** Relación de dos caminos por medio de aristas.

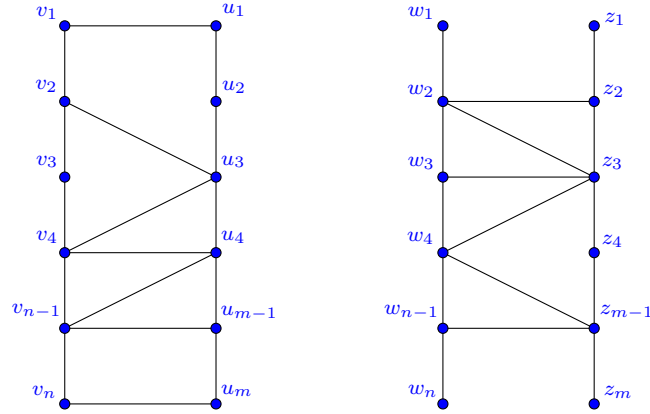


FIGURE 2.4: Malla extendida con dos caminos  $ME_2$ .

De las gráficas anteriores, en particular la izquierda, tomemos los siguientes conjuntos de vértices  $U = \{v_1, u_1\}$  y  $V = \{v_n, u_m\}$  para así obtener la gráfica  $ME_2(U, V)$  (con la otra gráfica obtendríamos algo similar), como se muestra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.2.16.** Malla extendida con dos caminos extrayendo los conjuntos de vertices  $U$  y  $V$ .

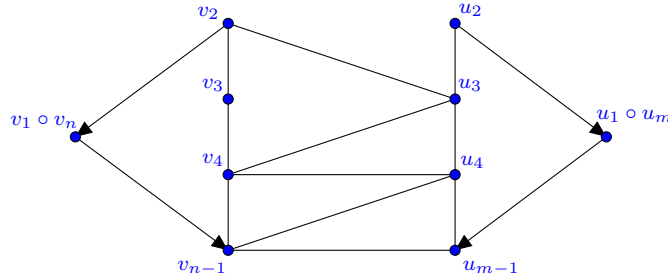


FIGURE 2.5: Gráfica  $ME_2(U, V)$ .

Definimos a  $v = v_1 \circ v_n$ ,  $u = u_1 \circ u_n$  y enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.17.** En la gráfica  $ME_2(U, V)$  descrita anteriormente tenemos que el único 1-factor dirigido que contiene a  $v$  y  $u$  es la unión de dos ciclos disjuntos.

**Demostración:** Sea  $D$  un 1-factor dirigido de  $ME_2(U, V)$  que contiene a los vértices  $u$  y  $v$ . Dado que las componentes conexas de  $D$  forman una partición tenemos que:

$$D = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_s,$$

donde  $C_i$  es una componente conexas de  $D$  para todo  $i = 1, \dots, s$ .

Sea  $C_j$  una componente conexa que contiene a  $v$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

$$C_j = \{v, w_2, w_3, \dots, w_{r-1}, v\}.$$

Dado que  $C_j$  es un ciclo tenemos que  $w_2 = v_{n-1}$ , afirmamos que  $u$  no está en  $C_j$ .

Supongamos lo contrario, es decir,  $u \in C_j$ . Así existen  $i, l \in \{3, \dots, r-1\}$  con  $i \neq l$  tal que  $u = w_i$  y  $v_j = w_l$  para algún  $v_j \in \{v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ , donde  $v_j$  es un vértice que conecta con algunos de los vértices  $\{u_2, u_3, \dots, u_{m-1}\}$ , por medio de una arista, supongamos que tal vértice es  $u_i$ .

Como  $u \in C_j$  también tenemos que  $u_{m-1} \in C_j$ . Así tenemos los siguientes casos:

- Si no hay ningún vértice entre  $u_i$  y  $u_{m-1}$  que conecta por medio de una arista con algunos de los vértices  $\{v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ , entonces  $d^+(u_i) = 2$ , lo cual es una contradicción.
- En caso contrario existe un vértice entre  $u_i$  y  $u_{m-1}$  que conecta con alguno de los vértices  $\{v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ . Supongamos que tal arista es  $e'$ , entonces tenemos que se intersecaría con la arista  $e = v_j u_i$  si  $e$  tiene como vértice final a un vértice entre  $\{v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{n-1}\}$  y si la arista  $e$  tiene como vértice final a un vértice entre  $\{v_2, v_3, \dots, v_{j-1}\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que es  $v_r$ , entonces  $d^+(v_r) = 2$ , en ambos casos tenemos una contradicción.

Por lo tanto,  $u \notin C_j$ . Ahora afirmamos que

$$C_j = \{v, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_3, v_2, v\}$$

Supongamos que existe algún  $w_r \in C_j$  tal que  $w_r = u_t$  para algún  $u_t \in \{u_2, u_3, \dots, u_{m-1}\}$ . Por otro lado, dado que  $u \in D$ , entonces existe  $C_k$  tal que  $u \in C_k$  y  $v \notin C_k$ . Así tenemos que existe una arista en  $C_j$  y otra en  $C_k$  tales que se intersecan. Por lo tanto,  $w_r \notin C_j$ .

Similarmente tenemos que para la componente conexa  $C_k$  que contiene a  $u$ , no contiene a  $v$  y además es de la forma:

$$C_k = \{u, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_3, u_2, u\}$$

Dado que  $C_j$  y  $C_k$  contienen a todos los vértices de  $G(U, V)$  tenemos que:

$$D = C_j \cup C_k.$$

□



**Teorema 2.2.18.** El determinante de la matriz Laplaciana de la gráfica  $ME_2(U, V)$  es igual a 1.

**Demostración:** Dado que la matriz Laplaciana de  $ME_2(U, V)$  es fuertemente equivalente a:

$$L(ME_2, X)(U; V) \approx L(ME_2(U, V), X)_{\{x_{u_i \circ v_i} = -m_{(v_i, u_i)} | i=1, \dots, s\}}$$

Tenemos que la matriz Laplaciana de  $ME_2(U, V)$  es la siguiente:

$$L(ME_2, X)(U, V) = \begin{pmatrix} -1 & x_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & y_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & y_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

La cual es fuertemente equivalente a la siguiente matriz:

$$L(ME_2(U, V), X)_{\{x_v=0, x_u=0\}} = \begin{pmatrix} x_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & x_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & y_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & y_{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de la matriz anterior, por el artículo [13] tenemos que:

$$\det(L(ME_2(U, V), X)_{\{x_v=0, x_u=0\}}) = \sum_{S \subseteq V(ME_2(U, V))} \det(-A(ME_2(U, V)[S]^{wl})) \cdot \prod_{s \notin S} x_s$$

Dado que  $x_v = 0$  y  $x_u = 0$ , tenemos que para el determinante de la gráfica  $ME_2(U, V)$  la única subgráfica que se considera es el 1-factor dirigido del teorema anterior que contiene a  $u$  y  $v$ . Ya que las subgráficas que no contienen a alguno de ellos son cero y por lo tanto no aportan al determinante, así por el Teorema 2.2.13 tenemos que:

$$\det(L(ME_2(U, V), X)_{\{x_v=0, x_u=0\}}) = \det(-A(D^{wl})) \cdot 1,$$

donde  $D$  es un 1-factor dirigido que contiene a  $u$  y  $v$  el cual tiene dos componentes conexas. Luego

$$\det(-A(D^{wl})) = \sum_{C \in \mathcal{F}} (-1)^{c(C)} = (-1)^2 = 1.$$

donde  $\mathcal{F}$  es el conjunto de 1-factores dirigidos generadores de  $D$ .

Por lo tanto:

$$\det(L(ME_2(U, V), X)) = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

**Teorema 2.2.19.** Sea  $G$  una malla extendida con dos caminos, uno con  $m$  vértices y el otro con  $n$  vértices. Entonces

$$\gamma_{\mathcal{P}}(G) = n + m - 2.$$

**Demostración:** Sean  $P_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $P_m = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  los caminos inducidos de  $G$  de tal manera que  $G$  es una malla extendida con los caminos  $P_1$  y  $P_2$ . Sean  $V = \{v_1, u_1\}$  y  $U = \{v_n, u_m\}$ .

Sea  $L(G, X_G)$  la matriz Laplaciana de  $G$  y  $L(G, X_G)(U, V)$  la submatriz de  $L(G, X_G)$  obtenida al borrar los renglones indexados por  $U$  y las columnas indexadas por  $V$ . Como se mostro antes  $L(G(U, V), X_G)_{\{x_v=0, x_u=0\}}$ . Por el teorema 2.2.18 tenemos que  $\det(L(G(U, V), X_G)_{\{x_v=0, x_u=0\}}) = 1$ . Por lo tanto,  $n + m - 2$  es una cota inferior del corango algebraico de  $G$ , es decir,

$$n + m - 2 \leq \gamma_{\mathcal{P}}(G)$$

Para la otra desigualdad tenemos que la matriz Laplaciana de  $G$  no tiene determinante igual a 1, entonces  $\gamma_{\mathcal{P}}(G) \neq m + n$ . Por otro lado, dado que  $G$  es un gráfica simple con  $m + n$  vértices la cual no es un camino entonces por el [13, Corolario 3.9], tenemos que  $\gamma_{\mathcal{P}}(G) \neq m + n - 1$  y por lo tanto  $\gamma_{\mathcal{P}}(G) = m + n - 2$ . □

## 2.3 Una última conjetura

Para finalizar esta tesis presentaremos una conjetura, la cual es una cota inferior para el corango algebraico de una malla extendida con al menos tres caminos y el cual generaliza el resultado obtenido en el Teorema 2.2.19.

**Conjetura 2.3.1.** Si  $ME_k$  es una malla extendida con  $k \geq 3$  caminos y  $k' \geq k$  de estos caminos tienen al menos dos vertices, entonces

$$\gamma_{\mathcal{P}}(ME_k) \geq |V(ME_k)| - k'.$$

Esta cota es muy útil, ya que esta implica una cota inferior para el corango algebraico para toda gráfica simple. De forma más precisa, no es difícil ver que toda gráfica simple  $G$  es isomorfa a una malla extendida  $ME_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ . De manera trivial, si  $G$  tiene  $n$  vértices, entonces  $G$  es isomorfa a una malla extendida con  $n$  vértices; sin embargo, en este caso la cota que obtenemos es trivial. Esto nos lleva a definir el siguiente invariante de una gráfica.

**Definición 2.3.2.** Dada una gráfica simple  $G$ , sea  $\mu(G)$  el mínimo entero positivo tal que  $G$  es isomorfa a alguna malla extendida con  $\mu(G)$  caminos.

A continuación presentaremos dos ejemplos para ilustrar como funciona esta conjetura. En el primero la cota dada por la conjetura es justa y en el segundo no.

**Ejemplo 2.3.3.** Consideremos la siguiente gráfica simple con seis vértices.

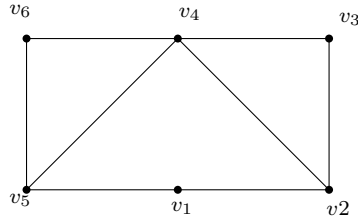


FIGURE 2.6: Gráfica con seis vértices isomorfa a una malla extendida con dos caminos.

Primero no es difícil ver que  $G$  es una malla extendida con dos caminos, basta con considerar los caminos  $P_1$  formado por los vértices  $\{v_5, v_1, v_2\}$  y  $P_2$  formado por los vértices  $\{v_6, v_4, v_3\}$ . Además como claramente no es un camino, entonces en este caso  $\mu(G) = 2$ .

Así tenemos que por el Teorema 2.2.14, que una cota inferior para el corango algebraico de  $G$  es:

$$\gamma_{\mathcal{P}}(G) = \gamma_{\mathcal{P}}(ME_k) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}_{\geq 2}(ME_k)} |V(P)| - 1 = |V(ME_k)| - k = 6 - 2 = 4.$$

Por otro lado, tenemos que los ideales críticos de la gráfica simple, los cuales fueron calculados con el programa Mathematica, son los siguientes:

$$I_1 = \{1\}, I_2 = \{1\}, I_3 = \{1\}, I_4 = \{1\},$$

y

$$I_5 = \{-2 + x_2 - x_4 - x_5 + x_2x_6 + x_5x_6 + x_4x_5x_6, -2 - x_3 + x_2x_3 - x_6 + x_2x_3x_6 + x_5x_6 + x_3x_5x_6, \\ x_1 - x_3 + x_1x_3 - x_6 + x_1x_6 + x_1x_3x_6 + x_3x_4x_6, -2 + x_1 + x_1x_2 + x_1x_6 + x_1x_2x_6 + x_4x_6, \\ -2 + x_1 + x_1x_3 + x_3x_4 + x_1x_5 + x_1x_3x_5, x_1 - x_2 + x_1x_2 + x_4 - x_5 + x_1x_5 + x_1x_2x_5, \\ -2 - x_2 + x_2x_3 - x_4 + x_2x_3x_4 + x_5 + x_3x_5\}.$$

Por lo tanto el corango algebraico de la gráfica  $G$  es igual a 4. Aplicando la Conjetura 2.7 tenemos que  $\gamma_{\mathcal{P}}(G) \geq 4 = 6 - 2 = |V(G)| - 2$ .

**Ejemplo 2.3.4.** Consideremos la gráfica simple dada en la Figura 2.7. Una forma de ver esta gráfica es como la gráfica obtenida de la gráfica completa con seis vértices menos el camino  $P_4 = \{v_2, v_3, v_5, v_4\}$ .

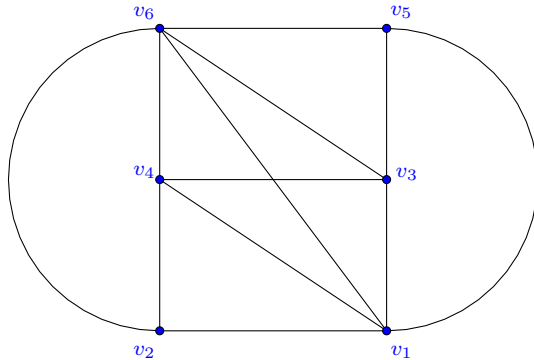


FIGURE 2.7: Una malla extendida con tres caminos.

Primero tomando los caminos  $P_1 = \{v_1, v_2\}$ ,  $P_2 = \{v_3, v_4\}$  y  $P_3 = \{v_5, v_6\}$ , no es difícil ver que  $G$  es igual a una malla extendida con tres caminos y por lo tanto  $\mu(G) \leq 3$ . Además se puede comprobar que  $G$  no es isomorfa a una gráfica con dos caminos. Aplicando la Conjetura 2.7 tendríamos que  $\gamma_{\mathcal{P}}(G) \geq 3 = 6 - 3 = |V(G)| - 3$ . Sin embargo, usando *Mathematica* no es difícil comprobar que sus ideales críticos están

dados por:

$$I_1 = \langle 1 \rangle, I_2 = \langle 1 \rangle, I_3 = \langle 1 \rangle, I_4 = \langle 1 \rangle,$$

$$\begin{aligned} I_5 = & \langle 2x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 + 2x_6 + x_2x_6 + 2x_3x_6 + x_2x_3x_6 + x_4x_6 + x_3x_4x_6, 2x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 \\ & + 2x_5 + 2x_2x_5 + x_3x_5 + x_2x_3x_5 + x_4x_5 + x_2x_4x_5, \\ & -2 + 2x_1x_3 - x_4 + x_1x_3x_4 + 2x_5 + 2x_1x_5 + x_3x_5 + x_1x_3x_5 + x_4x_5 + x_1x_4x_5, \\ & -2 + 2x_1x_2 - x_4 + x_1x_2x_4 + 2x_6 + 2x_1x_6 + x_2x_6 + x_1x_2x_6 + x_4x_6 + x_1x_4x_6, -2x_3 - x_3x_4 \\ & -2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5 + x_5x_6 + x_3x_5x_6 + x_4x_5x_6 + x_3x_4x_5x_6, \\ & -2x_2 - x_2x_4 - 2x_6 - x_2x_6 - x_4x_6 + x_5x_6 + x_2x_5x_6 + x_4x_5x_6 + x_2x_4x_5x_6, \\ & -2 - x_4 + x_5x_6 + x_1x_5x_6 + x_4x_5x_6 + x_1x_4x_5x_6, \\ & -x_3 - x_6 + x_1x_3x_6 + x_5x_6 + x_1x_5x_6 + x_3x_5x_6 + x_1x_3x_5x_6, \\ & -x_2 - x_5 + x_1x_2x_5 + x_5x_6 + x_1x_5x_6 + x_2x_5x_6 + x_1x_2x_5x_6 \rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\gamma_{\mathcal{P}}(G) = 4$ , lo cual implica que en caso de ser cierta la Conjetura 2.7, esta no sería justa. Má aún no es difícil encontrar más ejemplos en donde la cota inferior dada por la Conjetura 2.7 no es justa.



# Bibliografía

- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: an explanation of the  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.* 59 no. 4, 381–384, 1987.
- [2] Reinhard Diestel, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics Vol. 173, Springer-Verlag, 312p., 2005.
- [3] N. L. Biggs, Algebraic Graph Theory, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, viii+205 pp., 1993.
- [4] W.W. Adams y P. Loustaunau, An Introduction to Gröbner Bases, Grad. Stud. Math., vol. 3, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1994.
- [5] Bernd Sturmfels, What is... a Gröbner Basis?, *Notices Amer. Math. Soc.* 52 (2005), no. 10, 1199–1200.
- [6] David Cox, John Little y Donal O’Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms: an Introduction to Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Fourth edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, xvi+646 pp., 2015.
- [7] David S. Dummit y Richard M. Foote, Abstract Algebra, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, xii+932 pp., 2004.
- [8] Thomas W. Hungerford, Algebra, Graduate Texts in Mathematics 73, Springer-Verlag, New York-Berlin, xxiii+502 pp., 1980.
- [9] Jacobson N., Algebra I, Second edition, W. H. Freeman and Company, New York, xviii+499 pp., 1985.
- [10] David M. Burton, A First Course in Rings and Ideals, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. London-Don Mills, Ont. viii+309 pp., 1970.
- [11] Andreas Gathmann, Algebraic Geometry, <http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2014/main.pdf> Class Notes TU Kaiserslautern 2014, 133p.

- [12] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, xii+544 pp., 2002.
- [13] Hugo Corrales y Carlos E. Valencia, On the critical ideals of graphs, Linear Algebra Appl. 439 no. 12, 3870173892, 2013.
- [14] John R. Sylvester, Determinants of Blocks Matrices