



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional**

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas

Introducción a las curvas algebraicas complejas

Tesis que presenta

Rodolfo Salinas Muñoz

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Matemáticas

Director de Tesis: Dr. Ernesto Lupercio Lara

Ciudad de México,

Septiembre 2017

Matemáticas... es una expresión de la belleza artística del pensamiento humano.
Rodolfo Salinas.

*Dedicado a
mis padres Rodolfo y María Guadalupe.*

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mi familia en especial a mis padres por que sin su apoyo este trabajo no hubiera sido posible, quiero agradecer a mis compañeros de estudio de quienes siempre tuve su apoyo en especial a Jesús Ángel Lara, Omar Hernandez y Fabiola Rodriguez también quiero agradecer a Joaquín Maya por ayudarme siempre a despejar mis dudas, a los profesor Miguel Xicoténcatl por su orientación en el proceso de realización de esta tesis, al profesor Jesús Gonzáles por el gran apoyo que ha tenido hacia mi, al profesor Vladimir Vega quisiera darle un agradecimiento especial por tomarse el tiempo de revisar la tesis y hacerme las debidas correcciones, al profesor Ernesto Lupercio a mis sinodales los profesores Iakov Mostovoi y Juan Manuel Burgos y finalmente al CONACYT por haberme apoyado en mis estudios de maestría.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar las curvas algebraicas complejas desde tres puntos de vista el algebraico, el topológico y el que corresponde al análisis complejo.

El contenido aquí expuesto está basado principalmente en el libro *Complex Algebraic Curves*, de Frances Kirwan [1] donde la autora expone con bastante claridad a las curvas algebraicas desde sus diferentes enfoques de estudio.

Estructura de la tesis. En el capítulo 1 mencionamos una breve historia de las curvas algebraicas su relación con otras ramas de las matemáticas y dedicamos un apartado breve al estudio de las curvas algebraicas reales. En el capítulo 2 introducimos el material que será necesario para el estudio de las curvas algebraicas. En el capítulo 3 se establece el teorema de Bézout el cual nos da el número de puntos de intersección contando con su multiplicidad de dos curvas proyectivas C y D en términos de sus grados, estudiamos también los puntos de inflexión de una curva proyectiva. En el capítulo 4 definimos el género g de una curva proyectiva no singular y veremos que esa curva proyectiva es homeomorfa a una esfera con g asas más aún demostraremos que este número está relacionado con el grado de la curva proyectiva por la fórmula del “grado-género”. En el capítulo 5 introducimos las superficies de Riemann y demostramos que toda curva algebraica afín menos sus singularidades al igual que toda curva proyectiva menos sus singularidades son superficies de Riemann. En el capítulo 6 veremos que el género de una curva proyectiva no singular el cual fue definido en términos de las propiedades topológicas de C también tiene una caracterización en función de la estructura holomorfa de C , además estableceremos el teorema de Riemann-Roch el cual relaciona la dimensión de ciertos espacios vectoriales de funciones meromorfas con sus polos prescritos y ceros sobre C . Finalizamos con el teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas que son superficies de Riemann compactas X en la cual su campo global de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ cumple unas condiciones sobre X , es importante aclarar que esto solo se hace con el espíritu de motivar al lector para que vea el teorema de Riemann-Roch en su forma más general, pues no se cuentan con las herramientas para demostrar el teorema en esta forma, más sin embargo sí daremos prueba de algunas aplicaciones de esta versión tal como; que toda superficie de Riemann compacta puede ser encajada de manera holomorfa en un espacio proyectivo.

Abstract

In chapter 1 we mention a brief history of the algebraic curves of their relationship with other branches of mathematics and dedicate a brief section to the study of the real algebraic curves. In Chapter 2 we introduce the material that will be necessary for the study of algebraic curves. In chapter 3 we establish the Bézout theorem which gives us the number of points of intersection with its multiplicity of two projective curves C and D in terms of its degrees, we also study the points of inflection of a curve Projective. In Chapter 4 we define the genus g of a non-singular projective curve and we will see that this projective curve is homeomorphic to a sphere with g handles, we will still show that this number is related to the degree of the projective curve by the formula of the “degree-genus”. In Chapter 5 we introduce the Riemann surfaces and we show that any related algebraic curve minus its singularities as well as any projective curve minus its singularities are Riemann surfaces. In Chapter 6 we will see that the genus of a non-singular projective curve which was defined in terms of the topological properties of C also has a characterization as a function of the holomorphic structure of C , in addition we will establish the theorem of Riemann-Roch which relates the dimension of certain vector spaces of meromorphic functions with their prescribed poles and zeros over C . We conclude with the Riemann-Roch theorem for algebraic curves that are compact Riemann surfaces X in which its global field of meromorphic functions $\mathcal{M}(X)$ satisfies conditions on X , it is important to clarify that this is done only in the spirit of motivating the reader to see the Riemann-Roch theorem in its most general form, since the tools to prove the theorem in this form are not available, but we will give some proof of some applications of this version such as; that any compact Riemann surface can be holomorphically embedded into a projective space.

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
Lista de Símbolos	XVII
1. Introducción y antecedentes	1
1.1. Una breve historia de las curvas algebraicas.	3
1.2. Relación con otras partes de las matemáticas	7
1.2.1. Teoría de números	7
1.2.2. Singularidades y la teoría de nudos	7
1.2.3. Análisis complejo	10
1.2.4. Integrales Abelianas	11
1.3. Curvas algebraicas reales	13
1.3.1. Teorema de los ceros de Hilbert	14
1.3.2. Técnicas para dibujar curvas algebraicas reales	14
1.3.3. Curvas algebraicas reales dentro de curvas algebraicas complejas	15
1.4. Ejemplos importantes de curvas algebraicas reales	15
2. Fundamentos	19
2.1. Curvas algebraicas complejas en \mathbb{C}^2	19
2.2. Espacios proyectivos complejos	23
2.3. Curvas proyectivas complejas en \mathbb{P}^2	28
2.4. Curvas afines y proyectivas	29
2.5. Ejemplos	33
3. Propiedades algebraicas	41
3.1. Teorema de Bézout	41
3.2. Puntos de inflexión y curvas cúbicas	54

3.3. Ejemplos	61
4. Propiedades topológicas	65
4.1. La fórmula de el grado-género	67
4.1.1. El primer método de prueba	67
4.1.2. El segundo método de prueba	69
4.2. Cubiertas ramificadas de \mathbb{P}^1	72
4.3. Demostración de la fórmula del grado-género	75
4.4. Ejemplos	85
5. Superficies de Riemann	88
5.1. La función \wp de Weierstrass	88
5.2. Superficies de Riemann	97
5.3. Ejemplos	106
6. El teorema de Riemann-Roch	111
6.1. Diferenciales holomorfas	111
6.2. El teorema de Riemann-Roch	115
6.3. Breve descripción del Teorema de Riemann-Roch para Superficies de Riemann compactas	130
Bibliografía	135
Índice alfabético	136

Índice de figuras

1.1. Algunas curvas algebraicas complejas.	3
1.2. Dos vistas de la curva compleja $xy = 0$	4
1.3. Una curva epicicloidal.	5
1.4. Un enlace.	8
1.5. Un toro.	9
1.6. Un nudo trébol en el plano y un nudo trébol sobre un toro.	9
1.7. Los puntos reales sobre la curva $y^2 = x^3$ y una pequeña esfera sobre el origen.	10
1.8. Dos copias del plano de corte pegadas a lo largo de $[0, \infty)$	10
1.9. Dos copias de la esfera compleja pegadas a lo largo de $[0, \infty)$	11
1.10. Dos copias de la esfera compleja pegadas a lo largo de tres cortes.	12
1.11. Una esfera con dos asas.	12
1.12. Las curvas $y^2 = x^3 - x$ y $y^2 = x^3 + x$	15
1.13. La concoide de Nicomedes.	16
1.14. El caracol de Pascal.	17
1.15. Cardioide y deltoide.	18
1.16. Astroide y nefroide.	18
2.1. Las curvas $y^2 = x^3 + x^2$ y $y^2 = x^3$	23
2.2. La curva $(x^4 + y^4)^2 = x^2y^2$	23
2.3. La curva $y^2 = x^2 - 1$ y las líneas $y = \pm x$	24
3.1. Hexágono místico de Pascal.	48
4.1. Una esfera con tres asas.	65
4.2. Una curva singular.	66
4.3. Una deformación de una curva singular.	68
4.4. El plano de corte D	70
4.5. Tres discos para ser pegados.	71
4.6. Anillo formado a partir del segundo disco.	71

4.7. Anillo formado a partir del primer y tercer disco.	72
4.8. Toro.	72
4.9. Una triangulación de una esfera.	77
4.10. Una triangulación de un toro.	77
4.11. Una esfera con tres asas.	78
4.12. Pieza de una esfera con asas.	78
4.13. Extremidad de una esfera con asas.	79
4.14. Una subdivisión de la figura 4.12.	79
4.15. Una subdivisión de la figura 4.13.	80
4.16. Una subdivisión de \mathbb{C}	80
4.17. Una subdivisión de un triángulo.	81
4.18. Una subdivisión de dos triángulos adyacentes	82
5.1. \mathbb{C}/Λ es un toro.	96
5.2. Una función de transición.	98

Lista de Símbolos

- \mathbb{Z} ; Números enteros.
 \mathbb{R} ; Números reales.
 \mathbb{C} ; Números complejos.
 \mathbb{R}^n ; Espacio euclideo de dimensión n .
 \mathbb{C}^n ; Espacio complejo de dimensión n .
 \mathbb{P}^1 ; línea proyectiva.
 $[x, y]$; Coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^1 .
 \mathbb{P}^2 ; Plano proyectivo.
 $[x, y, z]$; Coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^2 .
 \mathbb{P}^n ; Espacio proyectivo complejo de dimensión n .
 $[x_0, \dots, x_n]$; Coordenadas homogéneas en \mathbb{P}^n .
 \mathbb{C}_∞ ; Esfera de Riemann.
 S^2 ; Esfera unitaria en \mathbb{R}^3 .
 $\text{Sing}(C)$; Conjunto de singularidades de una curva afin o proyectiva.
 $I_p(C, D)$; Multiplicidad de intersección.
 $\mathcal{R}_{P,Q}$; Resultante de dos polinomios P y Q .
 \mathcal{H}_p ; La Hessiana de P .
 g ; El género de una curva proyectiva.
 ν_ϕ ; El índice de ramificación.
 χ ; El número de Euler.
 \wp ; La función \wp de Weierstrass.
 Λ ; Una retícula.
 $\deg D$; Grado de un divisor D .
 κ ; Divisor canónico.
 $\mathcal{L}(D)$; Espacio vectorial de funciones meromorfas con polos y ceros acotados por D .
 $l(D)$; Dimensión del espacio vectorial $\mathcal{L}(D)$.
 $|D|$; Sistema lineal completo de un divisor D .
 $|\phi|$; Sistema lineal de un mapa holomorfo.

- ϕ_D ; Mapa holomorfo a \mathbb{P}^n asociado al divisor D .
 $\text{Div}(X)$; Grupo de divisores de X .
 (f) ; El divisor de una función meromorfa.
 $\text{ord}_p(f)$; El orden de una función meromorfa f en un punto p .
 $\text{mult}_p(F)$; La multiplicidad de un mapa holomorfo F en un punto p .
 $\text{deg}(F)$; Grado de una función holomorfa F .
 $d_y(F)$; La suma de las multiplicidades de F en $F^{-1}(y)$.
 $\mathbb{P}(V)$; Proyectivización de un espacio vectorial V .
 $\mathcal{M}(X)$; Campo global de funciones meromorfas.

Capítulo 1

Introducción y antecedentes

En este capítulo damos una definición un tanto informal de lo que entenderemos por una curva algebraica compleja, mencionaremos una breve historia de las curvas algebraicas así como también las relaciones que existen con otras partes de las matemáticas tales como la teoría de números, la teoría de nudos, el análisis complejo, etcétera. Hablaremos también sobre las curvas algebraicas reales que resultan útiles en el estudio de las curvas complejas, por último daremos ejemplos importantes de curvas algebraicas reales.

¿Por qué deberíamos estar interesados en estudiar las curvas algebraicas? Desde alrededor de 1990, las curvas algebraicas y la geometría algebraica han tenido un crecimiento explosivo. Las curvas algebraicas y la geometría ahora están siendo aplicadas en áreas tales como la criptografía, teoría de la codificación, robótica, redes biológicas y sistemas dinámicos. Las curvas algebraicas se usaron en la prueba de Andrew Wiles del último teorema de Fermat, y para entender la teoría de cuerdas se necesita conocer algo de geometría algebraica.

Comenzamos con la definición informal de una curva algebraica compleja, para posteriormente en el siguiente capítulo dar su definición formal.

Una *curva algebraica compleja* es un subconjunto C de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forma

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}. \quad (1.1)$$

Donde $P(x, y)$ es un polinomio en dos variables con coeficientes complejos. Tales objetos son llamados curvas por analogía con las curvas algebraicas reales, las cuales son subconjuntos de \mathbb{R}^2 de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}. \quad (1.2)$$

En este caso $P(x, y)$ es ahora un polinomio con coeficientes reales.

Es claro que cada curva algebraica real tiene asociada una curva algebraica compleja definida por el mismo polinomio. Es interesante observar que una vez que las curvas algebraicas complejas entraron en

escena, rápidamente se hizo evidente que tienen a su vez propiedades más simples y más interesantes que las curvas algebraicas reales.

Ejemplo de ello como veremos más adelante en este capítulo una curva algebraica real puede resultar un conjunto vacío mientras que una curva algebraica compleja definida por un polinomio no constante tiene “dimensión compleja” uno en un sentido razonable, además al estudiar las singularidades de una curva como por ejemplo $y^2 = x^3$ que tiene una singularidad en el origen, es útil observar que ocurre cuando se interseca una esfera cerca de la singularidad, en el caso real como lo muestra la figura 1.7 son dos puntos de intersección mientras que en el caso complejo produce un nudo trébol dentro del toro como se muestra en la figura 1.6 (más adelante daremos los detalles de esto). Para el lector, interesado en ver más de estas diferencias puede consultar [2].

Estudiaremos las curvas algebraicas desde tres puntos de vista diferentes: el algebraico el topológico y el analítico. Como ejemplo de una cuestión algebraica que nos preguntemos consideremos dos polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ ambos con coeficientes complejos, que definen dos curvas algebraicas complejas ¿cuándo tienen una solución en común? y, de existir alguna, ¿cuántas de ellas hay?

Con respecto al análisis complejo, la relación con las curvas algebraicas complejas surge cuando se intenta dar sentido a “funciones holomorfas multi-valuadas” tales como $z \mapsto z^{\frac{3}{2}}$ y $z \mapsto (z^3 + z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. Pues en cada una de las correspondientes funciones surgen las curvas complejas $\{(z, w) : w^2 = z^3\}$ y $\{(z, w) : w^2 = z^3 + z^2 + 1\}$ y como veremos en la sección 1.2.3. construiremos un espacio donde $\{(z, w) : w = +\sqrt{z^3}\}$ esté definida en una parte de este espacio y $\{(z, w) : w = -\sqrt{z^3}\}$ en el espacio restante y así poder definir $z \mapsto z^{\frac{3}{2}}$ de manera global en este espacio.

Por último, investigaremos la topología (esto es, la forma) de las curvas algebraicas complejas. Desde luego, no es posible dar un dibujo de una curva algebraica compleja en \mathbb{C}^2 en la forma usual en que dibujamos una curva algebraica real en \mathbb{R}^2 , puesto que \mathbb{C}^2 es un espacio real de dimensión cuatro. Sin embargo, podemos dibujar una curva algebraica compleja (con algunos puntos extra agregados “al infinito”) que serán imágenes topológicas de las curvas, pero no en el sentido en que ellas se encuentran dentro de \mathbb{C}^2 , para ver algunos ejemplos vease la figura 1.1

Es importante destacar que estas figuras sólo pueden representar a las curvas complejas como espacios topológicos y no en la forma en la que pertenecen a \mathbb{C}^2 . Consideremos el siguiente ejemplo, la curva definida por $xy = 0$, esta curva es la unión de dos “líneas complejas” definidas por $x = 0$ y $y = 0$ en \mathbb{C}^2 las cuales coinciden en el origen $(0, 0)$.

Topológicamente, cuando agregamos un punto al infinito a cada línea compleja, esta se convierte en una esfera y la curva compleja es la unión de dos esferas que coinciden en un punto como se ve en la figura 1.2. Dicha figura, aunque es topológicamente correcta, representa a las dos líneas como tangentes una a la otra en el punto de intersección, que no es el caso en \mathbb{C}^2 . No podemos evitar este problema sin hacer que las líneas complejas luzcan como “singulares” en el origen vease la figura 1.2, que nuevamente no es el caso.

1.1. Una breve historia de las curvas algebraicas.

La historia de la curvas algebraicas reales surge desde hace más de dos mil años, pero no fue sino hasta la introducción sistemática de las coordenadas en la geometría en el siglo XVII [3], que obtuvieron la forma descrita en (1.2).

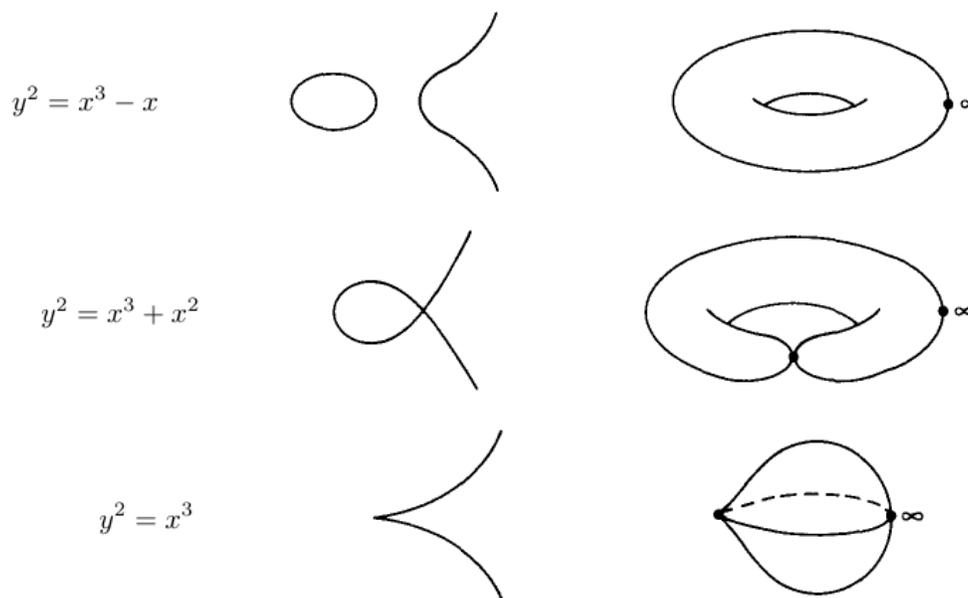


Figura 1.1: Algunas curvas algebraicas complejas.

Para los griegos una circunferencia era el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo $P(a, b)$ una misma distancia r . Ya que los griegos al desconocer el sistema de coordenadas cartesianas no concebían a la circunferencia como los ceros de $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. De forma similar se definían el resto de las secciones cónicas. Esto demostraba que tenían una comprensión primitiva del álgebra, mas poseían métodos geométricos lo suficientemente sofisticados para el trazo de las secciones cónicas y otras figuras geométricas. En efecto, los griegos idearon complicados mecanismos para la construcción de elipses e hipérbolas. Con estas herramientas intentaron abordar algunos problemas famosos, como el bien conocido de *duplicación del cubo*, es decir, en el que pretendían construir un cubo cuyo volumen es dos veces el volumen de un cubo dado. Esto se reduce a la construcción de un segmento de recta de longitud $2^{\frac{1}{3}}$ veces la longitud del segmento dado del cubo. Sin embargo, es bien sabido que dicho problema es imposible de resolver solo con regla y compás. A partir de entonces, con el advenimiento del álgebra y el descubrimiento de las curvas algebraicas, el problema se torna soluble; pues ellos hubieran advertido, con el conocimiento de estas poderosas herramientas algebraicas, que el pro-

blema podría haberse resuelto mediante la construcción de los puntos de intersección de las parábolas $y^2 = 2x$ y $x^2 = y$.

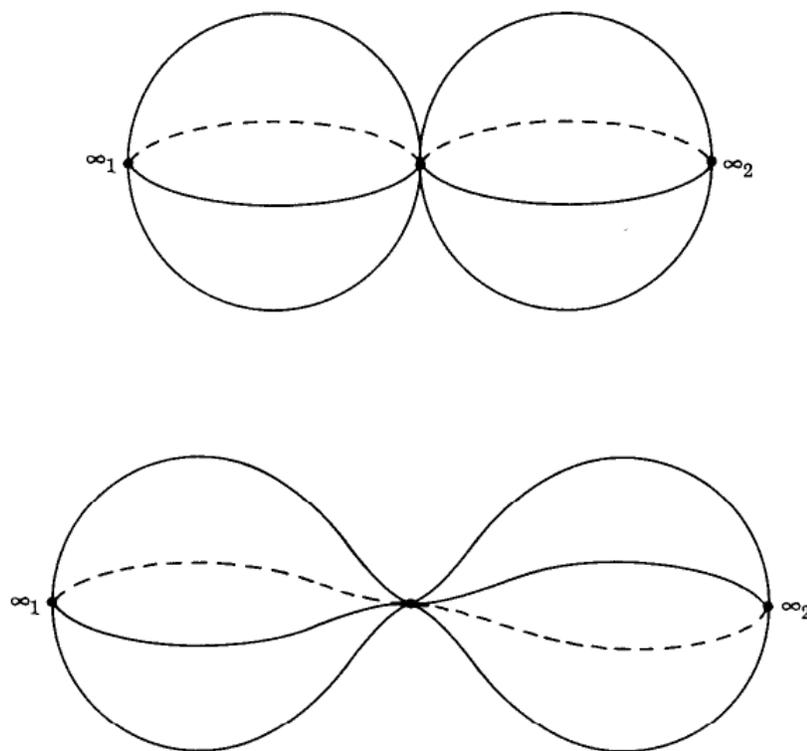


Figura 1.2: Dos vistas de la curva compleja $xy = 0$.

En la figura 1.2 superior podemos apreciar una vista de la curva compleja $xy = 0$ que, como mencionamos, es la unión de las curvas complejas definidas por $x = 0$ y $y = 0$ en \mathbb{C}^2 con puntos agregados al infinito las cuales coinciden en el origen $(0, 0)$, de ahí que sean tangentes una a la otra; sin embargo en el punto de tangencia existe una singularidad, así que la figura 1.2 superior no es un imagen fiel de la curva $xy = 0$, es por eso que necesitamos que en el punto de intersección las dos esferas se vean como singulares como se muestra en la figura 1.2 inferior.

Los griegos no solo fracasaron en resolver este problema, sino que también fracasaron en tratar de solucionar otros problemas con el uso de regla y compás, tales como trisecar un ángulo arbitrario. Se puede demostrar usando teoría de Galois que estas construcciones son imposibles de realizar con regla

y compás. Viene al caso citar el capítulo 39 del libro de Fraleigh dedicado específicamente a dilucidar matemáticamente la imposibilidad de resolver dichos problemas mediante el uso de regla y compás [4].

Además de las secciones cónicas, sabían construcciones para muchas otras curvas, por ejemplo para las curvas epicicloides usadas para describir las trayectorias de los planetas. Por una curva epicicloidal entendemos la trayectoria de un punto en un círculo que rueda sin resbalar en el exterior de un círculo fijo, como se observa en la figura 1.3.

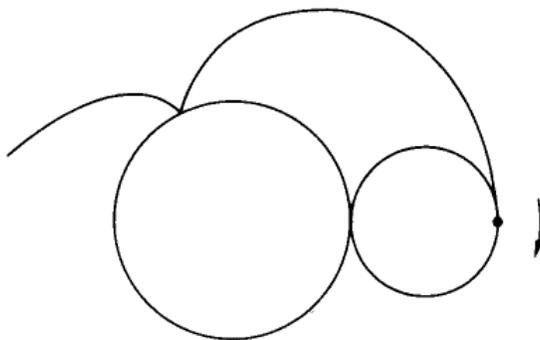


Figura 1.3: Una curva epicicloidal.

A finales del siglo XVII, los matemáticos ya estaban familiarizados con las ideas de Descartes y Fermat de describir un lugar geométrico de puntos en el plano por una o más ecuaciones en las variables x y y , además de que, los métodos de cálculo diferencial empezaban a ser entendidos y aplicados a las curvas.

Alrededor de 1700, Newton hizo un estudio detallado de las curvas cúbicas (esto es, curvas definidas por polinomios de grado tres) y describe setenta y dos casos diferentes [3]. Él investigó las singularidades de una curva C definida por un polinomio $P(x, y)$, es decir, los puntos $(x, y) \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\partial P/\partial x(x, y) = 0 = \partial P/\partial y(x, y)$. Estos son los puntos donde la curva no es "suave", tal es el caso de las curvas cúbicas $y^2 = x^3 + x^2$ y $y^2 = x^3$ en el origen.

Una vez que el uso de los números complejos se comprendió en el siglo XIX, los matemáticos se percataron que es a menudo mucho más fácil y más fructífero estudiar las soluciones complejas de una ecuación polinomial $P(x, y) = 0$ en lugar de sus soluciones reales. Por ejemplo, si permitimos cambios complejos proyectivos de coordenadas de la forma

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{ax + by + c}{hx + jy + k}, \frac{dx + ey + f}{hx + jy + k} \right),$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & j & k \end{pmatrix},$$

es una matriz no singular, es decir, de rango maximal, entonces algunas de las setenta y dos curvas

cúbicas descritas por Newton llegan a ser equivalentes una a la otra. De hecho cualquier curva compleja definida por un polinomio cúbico irreducible es equivalente a un polinomio cúbico;

$$\begin{aligned} y^2 &= x(x-1)(x-\lambda) && \text{con } \lambda \neq 0, 1 \text{ (cúbica no singular)} \\ y^2 &= x^2(x+1) && \text{(cúbica nodal)} \\ y^2 &= x^3 && \text{(cúbica cuspidal)} \end{aligned}$$

como veremos en el capítulo 3.

Un aspecto que hace distinguir a las curvas complejas de las reales es su comportamiento no degenerado, en el sentido que, una curva algebraica real puede ser tan degenerada que no se parecería en nada a una curva en absoluto. Ejemplos de este fenómeno son los ceros reales de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 = -1$; la primera ecuación corresponde geoméricamente con el punto $(0, 0)$, mientras que la segunda ecuación corresponde al conjunto vacío. Pero si $P(x, y)$ es cualquier polinomio no constante con coeficientes complejos entonces el subconjunto del espacio complejo \mathbb{C}^2 dado por $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}$ es no vacío y tiene “dimensión compleja uno” en un sentido razonable.

Sabemos que si a \mathbb{C} le agregamos un punto, digamos ∞ , éste se convierte en un espacio topológico compacto que conocemos como la *esfera de Riemann*, por otra parte como demostraremos más adelante, las curvas algebraicas complejas son espacios topológicos no compactos, sin embargo en el siglo XIX se observó que si a estas curvas se les agregan puntos “al infinito”, éstos llegan a ser espacios topológicos compactos. Surge así la teoría de superficies de Riemann, es decir, el análisis complejos aplicado sobre éstos espacios, como veremos en el capítulo 5.

A lo largo de este trabajo, nuestras curvas siempre estarán en el campo de los números complejos, es decir, los coeficientes de los polinomios que definen las curvas son números complejos, sin embargo Dedekind y Weber mostraron que gran parte de la teoría de curvas algebraicas sigue siendo válida cuando el campo de los números complejos era sustituido por otro campo (algebraicamente cerrado) K . Es de sorprender, que obtuvieron los mismos resultados que Riemann y sus seguidores los cuales usaron sólo métodos de análisis complejo y topológicos [15].

Otro problema es dar soluciones enteras a una *ecuación diofantina*, una ecuación definida por un polinomio $P(x, y) = 0$ en el que los coeficientes son enteros, esto nos lleva al estudio de curvas sobre otros campos además de \mathbb{R} y \mathbb{C} , como el caso del campo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, en donde uno considera la ecuación como una congruencia módulo un primo p . Como veremos en los siguientes capítulos el estudio de las curvas algebraicas y superficies de Riemann involucra una rica interacción entre el álgebra, el análisis, la topología y la geometría.

1.2. Relación con otras partes de las matemáticas

Hoy en día las curvas algebraicas complejas aparecen y son útiles en todo tipo de áreas de las matemáticas que abarca desde la teoría de números hasta la física teórica. Daremos una breve reseña de las relaciones de las curvas algebraicas con la teoría de números, las singularidades y la teoría de nudos, el análisis complejo y las integrales abelianas.

1.2.1. Teoría de números

Los teóricos en números están interesados en las soluciones enteras de ecuaciones tales como $x^n + y^n = z^n$. Por ejemplo, cabe preguntarse ¿esta ecuación tiene soluciones enteras x, y y z no nulas para $n > 2$? Esto se reduce a la cuestión de cuándo existen soluciones racionales no cero, de la forma $s = x/z, t = y/z$ para la ecuación $s^n + t^n = 1$, la cual define una curva algebraica compleja llamada *curva de Fermat* de grado n .

En 1983 el matemático Faltings [14], demostró que toda curva algebraica compleja de género al menos dos tiene sólo un número finito de puntos con coeficientes racionales, (más adelante veremos la definición de género de una curva), por ejemplo, la curva de Fermat de grado n tiene género $1/2(n-1)(n-2)$ así que, cuando $n \geq 4$ se sigue que sólo hay un número finito de soluciones racionales.

1.2.2. Singularidades y la teoría de nudos

Un área importante la cual mencionaremos en este trabajo será el estudio de singularidades. Una singularidad de una curva algebraica C definida por una ecuación polinomial $P(x, y) = 0$ es un punto $(a, b) \in \mathbb{C}$ que satisface $\partial P/\partial x(x, y) = 0 = \partial P/\partial y(x, y)$. Así pues, la curva $y^2 = x^3 + x^2 + 1$ no tiene singularidades, mientras las curvas $y^2 = x^3 + x^2$ y $y^2 = x^3$ tienen singularidades en el origen.

Hemos observado que la graficación de los puntos reales en una curva algebraica compleja no siempre son de utilidad en el estudio de la curva compleja (por ejemplo la curva $x^2 + y^2 + 1 = 0$) pues en este caso no existen parejas ordenadas de números reales que satisfagan dicha ecuación, es decir la curva algebraica real definida por el polinomio $P(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ es el conjunto vacío, aunque podemos darnos una idea de los que está pasando cerca de una singularidad con coordenadas reales. Una mejor manera de estudiar como se ve una curva cerca de una singularidad (a, b) es mirar su intersección con una esfera de dimensión tres $|x - a|^2 + |y - b|^2 = \varepsilon^2$ en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ con centro en (a, b) . Esta intersección será un “nudo” o “enlace” en la esfera tres dimensional. Podemos identificar esta esfera de dimensión tres topológicamente con el espacio euclideo \mathbb{R}^3 junto con un punto al infinito usando la proyección estereográfica. Asumimos, por simplicidad, que el centro (a, b) de la esfera es el origen $(0, 0)$ en \mathbb{C}^2 . Explícitamente tenemos

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon \operatorname{Re}(x)}{\varepsilon - \operatorname{Re}(y)}, \frac{\varepsilon \operatorname{Im}(x)}{\varepsilon - \operatorname{Re}(y)}, \frac{\varepsilon \operatorname{Im}(y)}{\varepsilon - \operatorname{Re}(y)} \right), & \text{si } \operatorname{Re}(y) \neq \varepsilon \\ \infty, & \text{si } \operatorname{Re}(y) = \varepsilon. \end{cases}$$

Cuya inversa es

$$(u, v, w) \mapsto \varepsilon \left(\frac{2\varepsilon(u + iv)}{u^2 + v^2 + w^2 + \varepsilon^2}, \frac{u^2 + v^2 + w^2 - \varepsilon^2 + 2iw\varepsilon}{u^2 + v^2 + w^2 + \varepsilon^2} \right), \quad \infty \mapsto (0, \varepsilon).$$

Ejemplo 1.1. Sea C la curva algebraica compleja definida por $xy = y^2$ la cual es la unión de las líneas complejas definidas por $y = 0$ y $x = y$. Bajo la proyección estereográfica como anteriormente definimos, la intersección de estas líneas complejas con la esfera $S : |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2$ son mapeados al círculo $w = 0$, $u^2 + v^2 = \varepsilon^2$ y la elipse $v = w$, $(u - \varepsilon)^2 + 2v^2 = 2\varepsilon^2$ en $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Este círculo y la elipse están enlazados en el sentido en que ninguno puede ser continuamente reducido a un punto sin pasar uno a través del otro (vease la figura 1.4).

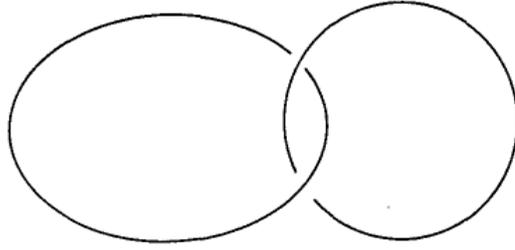


Figura 1.4: Un enlace.

Ejemplo 1.2. Ahora sea C una curva cúbica definida por $y^2 = x^3$ entonces cualquier punto $(x, y) \in C$ puede escribirse como (s^2, s^3) para un único $s \in \mathbb{C}$ por lo cual (x, y) pertenece a la esfera $S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$ si, y sólo si $|s| = \delta$ donde δ es la única solución positiva a la ecuación $\delta^4 + \delta^6 = \varepsilon^2$ luego $C \cap S = \{(\delta^2 e^{2it}, \delta^3 e^{3it}) : t \in [0, 2\pi)\}$ la cual está contenida en el subconjunto $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = \delta^2, |y| = \delta^3\}$. Bajo la proyección estereográfica, este subconjunto es mapeado sobre el subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : 2\varepsilon^2 \sqrt{u^2 + v^2} = \delta^2(u^2 + v^2 + w^2 + \varepsilon^2)\}$, o equivalentemente, $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{u^2 + v^2} - \varepsilon^2 \delta^{-2})^2 + w^2 = \varepsilon^2 \delta^2\}$. Esta es la superficie T en \mathbb{R}^3 obtenida al rotar el círculo con ecuación

$$(v - \varepsilon^2 \delta^2)^2 + w^2 = \varepsilon^2 \delta^2. \quad (1.3)$$

alrededor del eje w . Topológicamente T es un toro (ver figura 1.5). La imagen $C \cap S$ bajo la proyección estereográfica es un nudo en \mathbb{R}^3 el cual se encuentra en el toro T .

A medida que viajamos a lo largo de los puntos $(\delta^2 e^{2it}, \delta^3 e^{3it})$ de $C \cap S$ con el parámetro t variando de 0 a 2π , el ángulo de rotación sobre el eje w de los correspondientes puntos en T es dado por

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(x)}{\operatorname{Re}(x)}\right) = \arg(x) = 2t \pmod{2\pi}$$

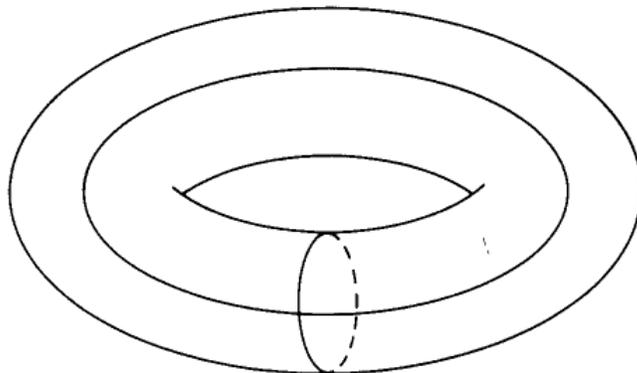


Figura 1.5: Un toro.

El cual varía de 0 a 2π dos veces. Así que, el nudo sobre T se enrolla dos veces alrededor del eje w . Por otra parte la coordenada angular estándar sobre el círculo definido por la ecuación (1.3) que gira a través de un ángulo fijo con respecto al eje w es

$$\arctan\left(\frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2 - \varepsilon^2 \delta^{-2}}}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(y)}{|\operatorname{Re}(y)| - \varepsilon \delta^{-2}(\varepsilon - \operatorname{Re}(y))}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 3t}{\sqrt{1 + \delta^2 \cos(3t) - \delta}}\right),$$

se verifica que, para δ lo suficientemente pequeño, éste varía de 0 a 2π tres veces conforme t varía de 0 a 2π . Con lo cual podemos decir que la imagen de $C \cap S$ bajo la proyección estereográfica es el nudo trébol sobre el toro T como se observa en la figura 1.6. Sólo dos puntos sobre este nudo pueden ser vistos en la figura sobre el caso real como se muestra en la figura 1.7.

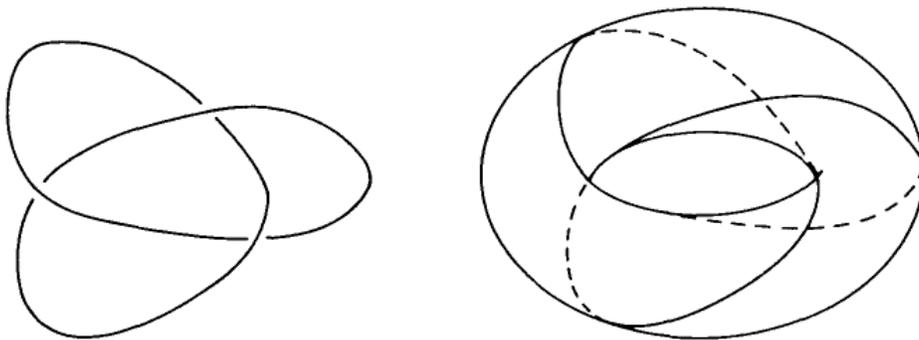


Figura 1.6: Un nudo trébol en el plano y un nudo trébol sobre un toro.

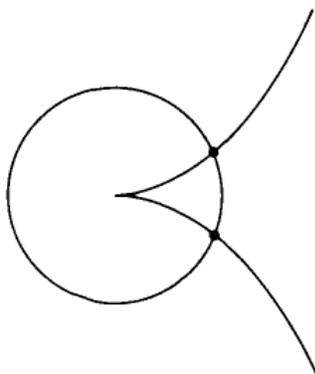


Figura 1.7: Los puntos reales sobre la curva $y^2 = x^3$ y una pequeña esfera sobre el origen.

1.2.3. Análisis complejo

No existe una función univaluada holomorfa \sqrt{z} definida sobre \mathbb{C} . Sin embargo, si cortamos a \mathbb{C} a lo largo del eje real no negativo $[0, \infty)$ podemos definir dos funciones holomorfas

$$\pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{si } z = re^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi, r > 0.$$

Hay que observar que si $r \in [0, \infty)$ entonces $+\sqrt{z}$ tiende a \sqrt{r} y $-\sqrt{z}$ tiende a $-\sqrt{r}$ conforme z tiende a r a través de valores en el semiplano superior, mientras que $+\sqrt{z}$ tiende a $-\sqrt{r}$ y $-\sqrt{z}$ tiende a \sqrt{r} conforme z tiende a r a través de valores en el semiplano inferior.

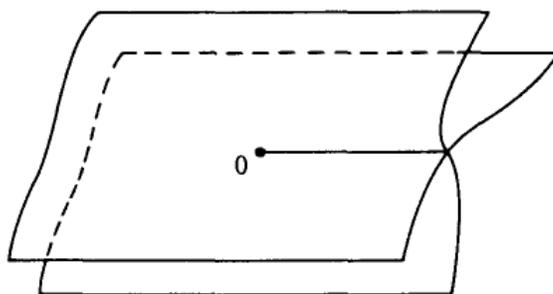


Figura 1.8: Dos copias del plano de corte pegadas a lo largo de $[0, \infty)$.

Tomamos dos copias de \mathbb{C} y cortamos a lo largo de $[0, \infty)$ y pegamos el lado superior del corte en la primera copia en la parte inferior del corte en la segunda copia y la parte inferior del corte en la

primera copia en la parte superior del corte en la segunda copia. La figura 1.8 puede ayudarnos a dar una idea intuitiva del espacio X obtenido de esta manera. Sin embargo esta imagen es engañosa en que da la impresión de que el espacio se intersecta a lo largo del eje real positivo, lo cual no se supone que suceda. Una mejor imagen topológica del resultado de este espacio es la agregación de un punto extra al infinito como sigue. Pensemos a dos copias de la esfera compleja $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y cortamos a lo largo del eje real positivo de 0 a ∞ . Abrimos los cortes y pegamos las dos copias en conjunto para obtener un espacio $X \cup \{\infty\}$ el cual nuevamente es una esfera, topológicamente hablando (ver figura 1.9). Sobre este espacio tiene sentido decir que existe una función holomorfa de un solo valor \sqrt{z} definida por $+\sqrt{z}$ sobre la primera copia del plano de corte, y $-\sqrt{z}$ sobre la segunda. Si a esto le añadimos ∞ y establecemos $\sqrt{\infty} = \infty$ entonces obtenemos una función holomorfa de $X \cup \{\infty\}$ a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que toma cualquier valor excepto el cero e ∞ exactamente dos veces.

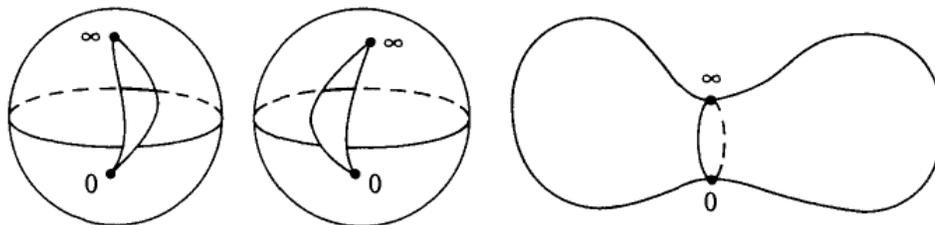


Figura 1.9: Dos copias de la esfera compleja pegadas a lo largo de $[0, \infty)$.

También podemos construir $X \cup \{\infty\}$ de manera abstracta, o podemos pensar en éste como una curva algebraica compleja $w^2 = z$, donde una copia de $\mathbb{C} - [0, \infty)$ corresponde a $w = +\sqrt{z}$, y la otra a $w = -\sqrt{z}$.

Del mismo modo, para hacer un espacio en el que la función $z \mapsto \sqrt{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_k)}$ sea holomorfa univaluada (donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son números complejos distintos) cortamos la esfera compleja de α_1 a α_2 , de α_3 a α_4 y así sucesivamente (incluido ∞ , si k es impar) y pegamos dos copias como antes, para obtener un espacio Y el cual es topológicamente una esfera con $\frac{1}{2}(k - 2)$ asas. Ver figuras 1.10 y 1.11 para el caso $k = 6$. Este espacio puede ser representado por la curva $w^2 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_k)$ junto con uno o dos "puntos al infinito" (dependiendo si k es impar o par).

Podemos hacer lo mismo para funciones holomorfas multi-valuadas $w(z)$ que satisfacen la relación $P(z, w(z)) = 0$, donde $P(x, y)$ es un polinomio irreducible. Así que, el espacio a construir es solo la curva C definida por $P(z, w) = 0$ menos los puntos donde $\partial P / \partial w(z, w)$ se anula.

1.2.4. Integrales Abelianas

Consideremos la integral $\int_a^b r(x) dx$ donde $r(x)$ es una función racional de x , esto es, de la forma $r(x) = p(x)/q(x)$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x y $q(x)$ no es idénticamente cero. Dado que

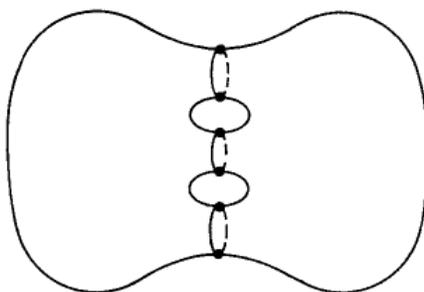


Figura 1.10: Dos copias de la esfera compleja pegadas a lo largo de tres cortes.

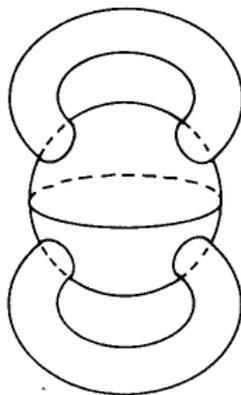


Figura 1.11: Una esfera con dos asas.

hemos asumido que $q(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$, tenemos que la integral existe. Podemos expandir $r(x)$ en fracciones parciales $r(x) = r_0(x) + \alpha_1(x - \beta_1)^{-k_1} + \dots + \alpha_m(x - \beta_m)^{-k_m}$, donde r_0 es un polinomio, k_i son números positivos y α_i, β_i son números complejos para $1 \leq i \leq m$. Esto significa que $r(x)$ tiene una integral indefinida la cual es la suma de una función racional y términos $\alpha_i \log(x - \beta_i)$ para cada i para los cuales $k_i = 1$.

Ahora consideremos la integral $\int_a^b 1/\sqrt{1+x^2} dx$ con la que podemos usar cualquiera de las sustituciones $x = \tan \theta$ ó $x = 2t/(1-t^2)$, la última sustitución produce una integral de la forma $\int_a^b R(x, \sqrt{1+x^2}) dx$, donde $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ es una función racional en dos variables, en la integral de una función racional de t .

Similarmente, podemos tratar con cualquier integral de la forma $\int_a^b R(x, w(x)) dx$ donde $R(x, y)$ es una función racional y $w(x)$ es una función continua de x en $[a, b]$ tal que $w(x)$ y x satisfacen una ecuación polinomial de grado dos $aw(x)^2 + (bx + c)w(x) + dx^2 + ex + f = 0$, donde $a, b, c, d, f \in \mathbb{C}$. Al suponer que $a \neq 0$ tenemos

$$(w(x) + (bx + c)/2a)^2 = \begin{cases} \alpha(x - \lambda)(x - \mu), & \alpha \neq 0. & \text{Caso 1} \\ \alpha(x - \lambda), & \alpha \neq 0. & \text{Caso 2} \\ \alpha, & \text{en otro caso.} & \text{Caso 3} \end{cases}$$

Para algunos $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. En sustitución

$$x = \begin{cases} \frac{(\mu - \lambda)it}{(1 - t^2)} + \frac{1}{2}(\lambda + \mu), & \lambda \neq \mu. \\ \lambda + \frac{t^2}{\alpha}, & \alpha \neq 0. \\ t, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La integral $\int_a^b R(x, w(x))dx$ se transforma en la integral de una función racional de t . Sin embargo, es necesario tener más cuidado por que estas sustituciones nos introducen en el plano complejo. Es importante recordar que la integral de una función a lo largo de una curva depende de la curva γ así como también de los puntos finales a y b . Por ejemplo, tenemos que $\log y = \int_1^y x^{-1}dx$ es una función multivaluada de $y \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Definición 1.3. Una *integral abeliana* es una integral de la forma $\int_\gamma R(z, w(z))dz$ donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una trayectoria continua en \mathbb{C} , $R(x, y)$ es una función racional en dos variables y $w(z)$ es una función continua de z definida sobre la imagen de la trayectoria γ tal que $w(z)$ y z satisfacen una relación polinomial $P(z, w(z)) = 0$.

Ejemplo 1.4. Si $w(z)$ satisface $w(z)^2 = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_k)$ donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son números complejos distintos entonces $\int_\gamma R(z, w(z)) dz$ es llamada *integral elíptica* si k es 3 o 4 e *integral hiperelíptica*, si k es al menos 5.

Ejemplo 1.5. La longitud de arco de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ entre los puntos con coordenadas en el eje x de c a d está dada por

$$\frac{1}{a} \int_c^d \frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 + (b^2 - a^2)x^2)}} dx,$$

la cual es una integral elíptica (de ahí el nombre).

Ejemplo 1.6. Las integrales elípticas también surgen en la soluciones de la ecuación diferencial para un péndulo simple $\ddot{\theta} = -k \sin \theta$. Multiplicando esta ecuación por $2\dot{\theta}$ e integrando obtenemos $(\dot{\theta})^2 = 2k \cos \theta + c$ y finalmente haciendo la sustitución $x = \cos \theta$ llegamos a la integral $\int dt = \int 1/\sqrt{(1 - x^2)(2kx + c)} dx$, la cual es una integral elíptica.

1.3. Curvas algebraicas reales

Es útil examinar las curvas reales en el estudio de las curvas complejas. Sin embargo, es importante destacar que a menudo es peligroso hacer esto. Existen muchas diferencias importantes entre la teoría de curvas reales y la teoría de curvas complejas.

1.3.1. Teorema de los ceros de Hilbert

Una de las mas importantes diferencias que surge es cuando consideremos la pregunta ¿cuándo dos polinomios definen la misma curva?

Ejemplo 1.7. Los polinomios $P(x, y) = x^5 + x^3y = x^3(x^2 + y)$ y $Q(x, y) = x^6 + 2x^4y + x^2y^2 = x^2(x^2 + y)^2$ definen la misma curva algebraica real y compleja en el sentido que tienen los mismos ceros y ¿las mismas multiplicidades?

Ejemplo 1.8. Los polinomios $P(x, y) = x^5 + x^3y = x^3(x^2 + y)$ y $R(x, y) = x^3 + xy + x^3y^2 + xy^3 = x(x^2 + y)(y^2 + 1)$ definen la misma curva algebraica real (desde que $y^2 + 1 \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$) pero no la misma curva algebraica compleja.

Para curvas algebraicas complejas tenemos una simple respuesta a la pregunta de cuando dos polinomios definen la misma curva. Vamos a denotar a los ceros del polinomio $P(x, y)$ por $Z(P)$ así $Z(P) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}$.

Teorema 1.9 (Los ceros de Hilbert.). *Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios con coeficientes complejos entonces $Z(P) = Z(Q)$ si, y sólo si existen enteros positivos n y m tal que P divide a Q^n y Q divide a P^m o equivalentemente si, y sólo si P y Q tienen los mismos factores irreducibles, los cuales posiblemente aparecen con diferentes multiplicidades.*

1.3.2. Técnicas para dibujar curvas algebraicas reales

Algunas veces es útil dibujar una curva algebraica real y en esta sección vamos a revisar brevemente algunas técnicas básicas.

Sea C la curva definida por $P(x, y) = 0$. Podemos obtener alguna información preliminar sobre C por la intersección con lo ejes; esto es los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$ tales que: $P(x, 0) = 0 = P(0, y)$.

Podemos trabajar en las líneas tangentes a C en estos puntos y en cualquier otro punto de la curva. La línea tangente a C en (a, b) está definida por

$$(x - a) \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Podemos encontrar los puntos (a, b) donde la línea tangente es paralela a un eje, esto es, donde $\partial P / \partial x(a, b) = 0$ o $\partial P / \partial y(a, b) = 0$. También podemos estudiar los puntos singulares de C , esto es, los puntos (a, b) donde $\partial P / \partial x(a, b) = 0 = \partial P / \partial y(a, b)$, de modo que no hay dirección tangencial bien definida.

Podemos investigar como se ve la curva C cerca de un punto singular (a, b) como explicamos a continuación. Supongamos por simplicidad que (a, b) es el origen; en general podemos hacer la sustituciones $x - a$ por x y $y - a$ por y . Sea m la multiplicidad de C en $(0, 0)$, esto es, el valor más pequeño de $i + j$ tal que $x^i y^j$ aparece con coeficiente no cero a_{ij} en el polinomio $P(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$.

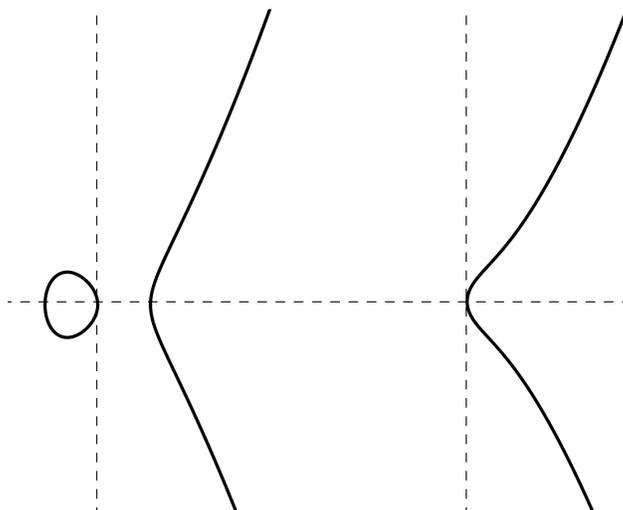


Figura 1.12: Las curvas $y^2 = x^3 - x$ y $y^2 = x^3 + x$.

Desde luego, $(0, 0)$ es un punto singular si, y sólo si $m > 1$. Cerca del origen los términos de orden más bajo en x y en y dominan así que, podemos esperar que C se vea aproximadamente como la curva definida por el polinomio $P = \sum_{i+j=m} a_{ij}x^i y^j$, ya que el polinomio P es homogéneo de grado m en x y y se factoriza sobre \mathbb{C} como un producto de m polinomios lineales $\alpha_i x + \beta_i y$, para $1 \leq i \leq m$. Vamos a suponer que las relaciones $\alpha_i : \beta_i$ son reales, para $1 \leq i \leq k$ y no reales para $k < i \leq m$ donde $0 \leq k \leq m$. Entonces es razonable esperar que, C cerca del origen se vea “en una primera aproximación” como la unión de líneas definidas por $\alpha_i x + \beta_i y = 0$. Estas se llaman *las líneas tangentes a C en el origen*.

1.3.3. Curvas algebraicas reales dentro de curvas algebraicas complejas

Es importante notar que curvas algebraicas reales bastante diferentes pueden descansar dentro de curvas algebraicas complejas equivalentes. Por ejemplo, la curva cúbica definida por $y^2 = x^3 - x$ tiene dos componentes conexas, mientras que la curva real cúbica definida por $y^2 = x^3 + x$, tiene sólo una (ver figura 1.12). Sin embargo las correspondientes curvas complejas son equivalentes bajo el cambio complejo de coordenadas $(x, y) \mapsto (ix, e^{\frac{3\pi i}{4}} y)$.

1.4. Ejemplos importantes de curvas algebraicas reales

Ahora vamos a considerar algunos ejemplos de curvas algebraicas reales con alguna relevancia histórica. Sea C cualquier curva algebraica en \mathbb{R}^2 , sea q un punto fijo en \mathbb{R}^2 y sea $a > 0$ una constante fija. Entonces el lugar geométrico de todos los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ tal que la línea en \mathbb{R}^2 que pasa a través de p y q y corta con C en un punto a una distancia a de p es llamada *concoide de C con respecto a q* y con

parametro a . Existen varios ejemplos de concoides.

La *concoide de Nicomedes* es la concoide de una línea con respecto a un punto que no está en la línea. Si la línea es definida por $x = b$ y el punto es el origen $(0, 0)$ entonces la concoide tiene por ecuación $(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2$. Se puede ver que a partir de su definición de la concoide de Nicomedes, que ésta puede ser dibujada con un simple aparato. Este aparato fue utilizado por los griegos al trisecar ángulos. Ellos mostraron que es posible trisecar un ángulo α , dado el ángulo entre dos líneas que se cruzan en un punto q , como sigue. Primero dibujamos una línea perpendicular L a una línea de un punto r sobre la otra línea. Entonces dibujamos la concoide de L con respecto a q y con parámetro $a = 2l$ donde l es la distancia de r a q . La paralela a la primera línea a través de r se encuentra con la concoide en el lado alejado de q en un punto p y la línea a través de p y q triseca al ángulo α .

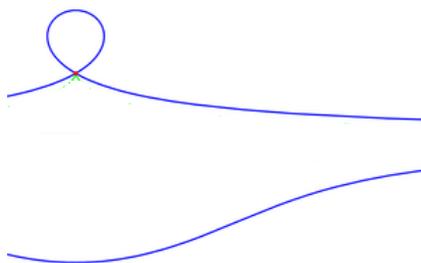


Figura 1.13: La concoide de Nicomedes.

El *caracol de Pascal* es la concoide de un círculo de radio b con respecto a un punto q sobre su circunferencia el cual podemos tomar como el origen. Si tomamos que el centro del círculo se encuentra sobre el eje x , entonces la ecuación está dada por $(x^2 + y^2 - 2bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, el caracol de Pascal es la trayectoria de un punto rigidamente unido a un círculo que rueda sobre un círculo fijo. Más generalmente si los círculos se permitan que tengan diferentes radios digamos a y b obtenemos una curva llamada *epitrocloide* o *hipotrocloide*, dependiendo si el círculo rodante está fuera o dentro del círculo. Cuando el punto fijo se encuentra en el círculo rodante hablamos de una *epicicloide* o *hipocicloide*. Epicicloides e hipocicloides fueron usadas para designar el así llamado conjunto cicloidal.

Casos importantes especiales de la epicicloide y la hipocicloide son la *cardioide* (y la epicicloide con $b = c$), así llamadas debido a su forma de corazón que tienen, la *nefroide* (una epicicloide con $c = 2b$), la *deltoide* (una hipocicloide con $3b = c$), la *astroide* (una hipocicloide con $4b = c$). Sus ecuaciones en un sistema de coordenadas adecuado son

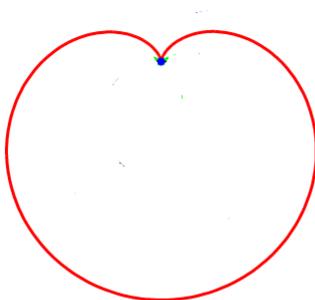


Figura 1.14: El caracol de Pascal.

$(x^2 + y^2 - 2bx)^2 = 4b^2(x^2 + y^2)$	Cardioide
$(x^2 + y^2 - 4b^2)^3 = 108b^4y^2$	Nefroide
$(x^2 + y^2)^2 - 8bx(x^2 - 3y^2) + 18b^2(x^2 + y^2) = 27b^4$	Deltoide
$(x^2 + y^2 - b^2)^3 + 27b^2x^2y^2 = 0$	Astroide

El caso degenerado de una epiciloide se da cuando el círculo es remplazado por una línea y es llamado una *cicloide*. El lector interesado en conocer más de estas curvas así como de la historia de ellas y demas curvas tales como las *curvas Watt* o las *curvas Lissajou* lo remitimos a consultar [8] además de esto encontrará en esta referencia un estudio de las curvas por resolución de singularidades, esto es, el estudio de las curvas singulares, pues en la mayor parte de esta tesis trabajaremos con curvas no singulares.



Figura 1.15: Cardioide y deltoide.

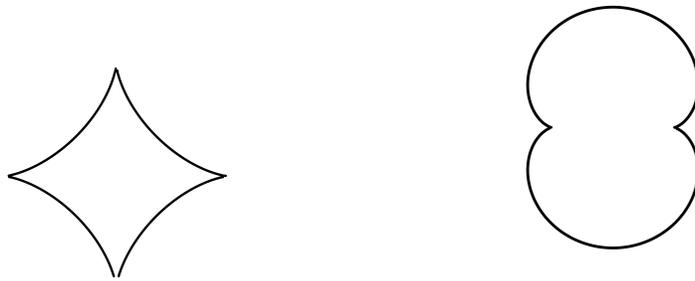


Figura 1.16: Astroide y nefroide.

Capítulo 2

Fundamentos

Este capítulo contiene las definiciones básicas y el material que vamos a necesitar para el estudio de las curvas algebraicas complejas. Vamos primero a definir las curvas algebraicas complejas en \mathbb{C}^2 y luego añadimos “puntos al infinito” para obtener curvas proyectivas complejas.

2.1. Curvas algebraicas complejas en \mathbb{C}^2

Sea $P(x, y)$ un polinomio no constante en dos variables con coeficientes complejos. Decimos que $P(x, y)$ *no tiene factores repetidos* si no podemos escribir $P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y)$, donde $Q(x, y)$ y $R(x, y)$ son polinomios y $Q(x, y)$ es no constante.

Definición 2.1. Sea $P(x, y)$ un polinomio no constante en dos variables con coeficientes complejos y factores no repetidos. Entonces la *curva algebraica compleja* en \mathbb{C}^2 definida por $P(x, y)$ es $Z(P)$.

La razón por la cual asumimos que $P(x, y)$ no tenga factores repetidos es el teorema de ceros de Hilbert ya mencionado en el capítulo anterior.

Teorema (Teorema de los ceros de Hilbert). *Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios con coeficientes complejos entonces $Z(P) = Z(Q)$ si, y sólo si existen enteros positivos n y m tal que P divide a Q^n y Q divide a P^m lo que equivale a decir que P y Q tienen los mismos factores irreducibles, los cuales aparecen posiblemente con diferentes multiplicidades.*

Demostración. Una prueba puede encontrarse, por ejemplo en [6]. □

Corolario 2.2. Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no tienen factores repetidos entonces ellos determinan la misma curva algebraica compleja en \mathbb{C}^2 si, y sólo si son un múltiplo escalar uno del otro, esto es, $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. \Rightarrow) Del teorema de los ceros de Hilbert se tiene que P y Q tienen los mismos factores irreducibles y como no tienen factores repetidos entonces se expresan en la forma

$P(x, y) = \alpha R_1(x, y)R_2(x, y) \cdots R_k(x, y)$ y $Q(x, y) = \beta R_1(x, y)R_2(x, y) \cdots R_k(x, y)$ donde α, β son no nulos, de aquí se sigue que $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. \Leftarrow) Si $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ es claro que definen la misma curva algebraica. \square

Observación 2.3. Una forma más general de definir una curva algebraica compleja en \mathbb{C}^2 es como una relación de equivalencia de un polinomio no constante en dos variables, donde dos polinomios son equivalentes si, y sólo si son un múltiplo escalar uno del otro. Un polinomio con factores repetidos es considerado como la definición de una curva con multiplicidades adjuntadas; por ejemplo $(y - x^2)^3$ define la misma curva que $y - x^2$ pero con multiplicidad tres.

Definición 2.4. El grado d de la curva C definida por $P(x, y)$ es el grado de el polinomio P , esto es,

$$d = \text{máx}\{r + s : c_{r,s} \neq 0\},$$

donde

$$P(x, y) = \sum_{r,s} c_{r,s} x^r y^s.$$

Un punto $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ es llamado un punto *singular* (o singularidad) de C si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b).$$

El conjunto de puntos singulares de C es denotado por $\text{Sing}(C)$. La curva C es llamada *no singular* si $\text{Sing}(C) = \emptyset$.

Ejemplo 2.5. La curva definida por $x^2 + y^2 = 1$ es no singular, mientras que la curva definida por $y^2 = x^3$ tiene una singularidad en el punto $(0, 0)$.

Definición 2.6. Una curva definida por una ecuación lineal $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, donde α, β, γ son números complejos y α y β no son ambos cero, es llamada una *línea*.

Definición 2.7. Un polinomio en n variables se dice *homogéneo* de grado d si

$$P(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d P(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Equivalentemente si P tiene la forma

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=d} a_{r_1\dots r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

para algunos números complejos $a_{r_1\dots r_n}$.

Note que cualquier factor polinomial $Q(x_1, \dots, x_n)$ de un polinomio homogéneo es también homogéneo.

Lema 2.8. Si $P(x, y)$ es un polinomio homogéneo no cero de grado d en dos variables con coeficientes complejos, entonces este se factoriza como un producto de polinomios lineales

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^d (\alpha_i x + \beta_i y),$$

para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$.

Demostración. Podemos escribir

$$P(x, y) = \sum_{r=0}^d a_r x^r y^{d-r} = y^d \sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r,$$

donde los $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ no son todos cero. Sea e el elemento más grande de $\{0, \dots, d\}$ tal que $a_e \neq 0$. Entonces

$$\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r,$$

es un polinomio con coeficientes complejos de grado e en una variable x/y y así se puede factorizar como

$$\sum_{r=0}^d a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r = a_e \prod_{i=0}^e \left(\frac{x}{y} - \gamma_i\right),$$

para algunos números complejos $\gamma_1, \dots, \gamma_e \in \mathbb{C}$. Por lo cual

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_e y^d \prod_{i=1}^e \left(\frac{x}{y} - \gamma_i\right) \\ &= a_e y^{d-e} \prod_{i=1}^e (x - \gamma_i y). \end{aligned}$$

De aquí se sigue el resultado. □

Desde que $P(x, y)$ es un polinomio de grado d tiene una expansión finita de Taylor

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} \frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i! j!},$$

sobre cualquier punto (a, b) .

Definición 2.9. La *multiplicidad* de la curva C definida por $P(x, y)$ en un punto $(a, b) \in C$ es el entero positivo más pequeño m tal que

$$\frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^i}(a, b) \neq 0,$$

para algunos $i \geq 0, j \geq 0$ tales que $i + j = m$. El polinomio

$$P(x, y) = \sum_{i+j=m} \frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i! j!}, \quad (2.1)$$

es entonces homogéneo de grado m y así, por el lema 2.8, éste se puede factorizar como un producto de m factores lineales de la forma $\alpha(x-a) + \beta(y-b)$ donde $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$. Las líneas definidas por estos polinomios lineales son llamadas *líneas tangentes* a C en (a, b) . El punto (a, b) es singular si, y sólo si $m = 1$ en este caso C tiene sólo una línea tangente en (a, b) definida por

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)(y-b) = 0.$$

Un punto $(a, b) \in \mathbb{C}$ es llamado un *punto doble* (respectivamente un *punto triple*, etcétera) si su multiplicidad es dos (respectivamente tres, etcétera) Un punto singular (a, b) es llamado *ordinario* si el polinomio (2.1) no tiene factores repetidos, esto es, si C tiene m líneas tangentes distintas en (a, b) .

Ejemplo 2.10. La curva cúbica definida por $y^2 = x^3 + x^2$ tiene un punto doble en el origen el cual es ordinario, mientras que la curva cúbica definida por $y^2 = x^3$ tiene también un punto doble en el origen pero este no es ordinario (ver figura 2.1). La curva definida por $(x^4 + y^4)^2 = x^2 y^2$ tiene un punto singular en el origen de multiplicidad cuatro el cual no es ordinario; la curva definida por $(x^4 + y^4 - x^2 - y^2)^2 = 9x^2 y^2$ tiene un punto singular ordinario de multiplicidad cuatro (ver figura 2.2).

Definición 2.11. Una curva C definida por un polinomio $P(x, y)$ es llamada *irreducible* si el polinomio es irreducible; esto es, si $P(x, y)$ no tiene otros factores además de constantes y múltiplos escalares de sí mismo. Si los factores irreducibles de $P(x, y)$ son $P_1(x, y), \dots, P_k(x, y)$ entonces las curvas definidas por $P_1(x, y), \dots, P_k(x, y)$ son llamadas las *componentes* (irreducibles) de C .

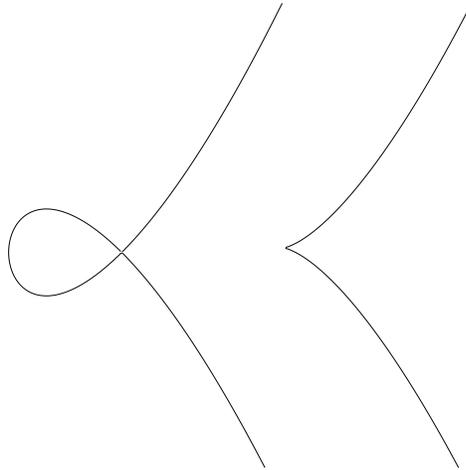


Figura 2.1: Las curvas $y^2 = x^3 + x^2$ y $y^2 = x^3$.

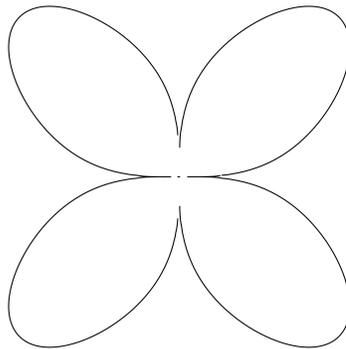


Figura 2.2: La curva $(x^4 + y^4)^2 = x^2 y^2$.

2.2. Espacios proyectivos complejos

Recordemos algunas propiedades importantes de la condición topológica de compacidad.

Propiedades 2.12

(i) *Un subconjunto de \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n es compacto si, y sólo si es cerrado y acotado (teorema de Heine-Borel).*

- (II) Si $f : X \rightarrow Y$ es un mapa continuo entre espacios topológicos y X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.
- (III) De I y II se sigue que si X es un espacio topológico compacto y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces f es acotada y alcanza sus límites, esto es, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $\sup f(X) = f(x_1)$ e $\inf f(X) = f(x_2)$.
- (IV) Un subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.
- (V) Un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.
- (VI) Unión finita de espacios compactos es compacta.

Para algunos propósitos es útil compactificar las curvas algebraicas en \mathbb{C}^2 agregando “puntos al infinito”. Por ejemplo, supongamos que deseamos estudiar los puntos de intersección de las dos curvas, tales como: $y^2 = x^2 - 1$, $y = cx$ donde c es un número complejo. Si $c \neq \pm 1$ estas curvas coinciden en dos puntos. Cuando $c = \pm 1$ las curvas no se intersectan, pero son asíntóticas conforme x y y tienden a infinito. Queremos añadir puntos al infinito a \mathbb{C}^2 de tal forma que las curvas $y^2 = x^2 - 1$ y $y = cx$ se intersecten “en el infinito” cuando $c = \pm 1$. De manera más general nos gustaría que dos curvas que son asíntóticas, “coincidieran en el infinito”.

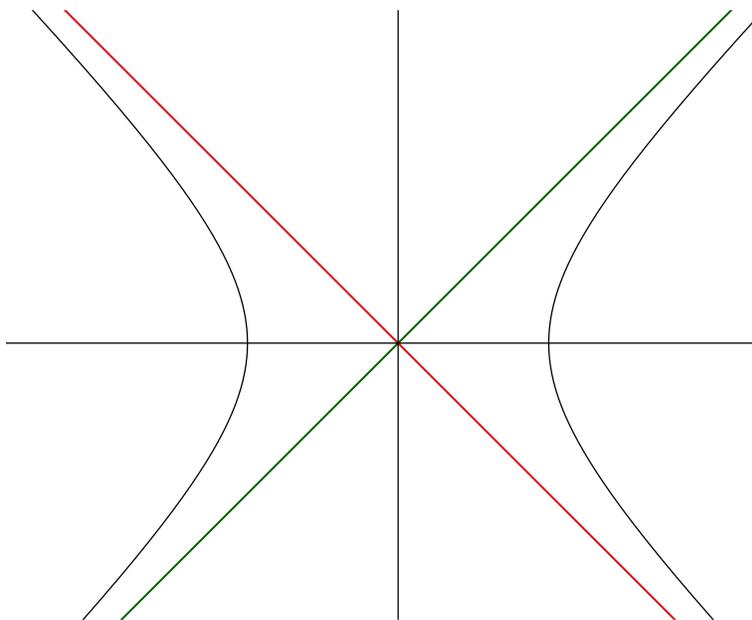


Figura 2.3: La curva $y^2 = x^2 - 1$ y las líneas $y = \pm x$.

Para hacer esto usamos el concepto de un espacio proyectivo. La idea que subyace en la definición de espacio proyectivo consiste en identificar cada $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ con el subespacio lineal complejo de di-

mensión uno de \mathbb{C}^3 generado por $(x, y, 1)$. Cualquier subespacio lineal de dimensión uno el cual no está en el plano $z = 0$ contiene un único punto de la forma $(x, y, 1)$. Los subespacios de dimensión uno de $z = 0$ pueden considerarse como los “puntos al infinito”.

Definición 2.13. El *espacio proyectivo* \mathbb{P}^n de dimensión n se define como el conjunto de todos los subespacios complejos de dimensión uno de el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^{n+1} . Cuando $n = 1$ tenemos la línea proyectiva \mathbb{P}^1 y cuando $n = 2$ tenemos el plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 .

Un subespacio de dimensión uno U de \mathbb{C}^{n+1} es generado por cualquier vector no cero $u \in U$. Así que podemos identificar \mathbb{P}^n con el conjunto de clases de equivalencia para la relación de equivalencia \sim sobre $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ tal que $a \sim b$ si, y sólo si $a = \lambda b$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Definición 2.14. Cualquier vector no cero (x_0, \dots, x_n) en \mathbb{C}^{n+1} representa un elemento x de \mathbb{P}^n : llamamos (x_0, \dots, x_n) las *coordenadas homogéneas* para x y escribimos $x = [x_0, \dots, x_n]$ entonces $\mathbb{P}^n = \{[x_0, \dots, x_n] : (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \text{ y } [x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n] \text{ si, y sólo si para algún } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ tal que } x_j = \lambda y_j, \text{ para todo } j.\}$

Ahora le daremos estructura de espacio topológico a \mathbb{P}^n . Definimos la proyección canónica $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ por $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$, para cada $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ y le damos a \mathbb{P}^n la *topología cociente* inducida de la topología usual de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Así que un subconjunto A de \mathbb{P}^n es abierto si, y sólo si $\pi^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Observación 2.15. I) Un subconjunto B de \mathbb{P}^n es cerrado si, y sólo si $\pi^{-1}(B)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$;

II) $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ es continua;

III) Si X es cualquier espacio topológico, una función $f : \mathbb{P}^n \rightarrow X$ es continua si, y sólo si $f \circ \pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow X$ es continua; más generalmente si A es cualquier subconjunto de \mathbb{P}^n entonces una función

$f : A \rightarrow X$ es continua si, y sólo si $f \circ \pi : \pi^{-1}(A) \rightarrow X$ es continua.

Definimos los siguientes subconjuntos U_0, U_1, \dots, U_n de \mathbb{P}^n por $U_j = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n : x_j \neq 0\}$. Hay que notar que la condición $x_j \neq 0$ es independiente de la elección de las coordenadas homogéneas, y que $\pi^{-1}(U_j) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : x_j \neq 0\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, así que U_j es un subconjunto abierto de \mathbb{P}^n . En efecto, si $(y_0, \dots, y_n) \in [x_0, \dots, x_n]$ entonces $y_k = \lambda x_k$ para $1 \leq k \leq n$ donde $\lambda \neq 0$ y como $x_j \neq 0$ debe ocurrir que $0 \neq y_j = \lambda x_j$. Ahora veamos que el conjunto $\pi^{-1}(U_j) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : x_j \neq 0\}$ es abierto, sea $x = (x_0, \dots, x_n) \in \pi^{-1}(U_j)$, entonces $x_j \neq 0$ sea $\varepsilon = |x_j|/2$, veamos que $B(x, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(U_j)$, sea $y = (y_0, \dots, y_n) \in B(x, \varepsilon)$, entonces debe ocurrir que $y_j \neq 0$, pues si $y_j = 0$, entonces

$$|x_j| \leq |x_j| - |y_j| \leq |x_j - y_j| \leq |(x_0, \dots, x_n) - (y_0, \dots, y_n)| \leq \frac{|x_j|}{2},$$

lo que no puede ocurrir, así $y_j \neq 0$ y por tanto tenemos la contención y esto demuestra que $\pi^{-1}(U_j)$ es un conjunto abierto.

Sea $[x_0, \dots, x_n] \in U_0$ entonces $x_0 \neq 0$, ahora sea $(y_0, \dots, y_n) \in [x_0, \dots, x_n]$ entonces $y_j = \lambda x_j$ por lo que tenemos

$$\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0} \right) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Por lo anterior queda bien definido el siguiente mapa $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ dado por

$$\varphi_0[x_0, \dots, x_n] = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right),$$

con función inversa

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n].$$

Las coordenadas (y_1, \dots, y_n) son llamadas las *coordenadas no homogéneas* sobre U_0 .

Se sigue de la observación 2.15 que $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ es continua, en efecto $\varphi_0 \circ \pi$ es el mapa dado por $(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$ el cual es un mapa continuo. Por otra parte su inversa es la composición de π con el mapa continua de \mathbb{C}^n a $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dado por $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (1, y_1, \dots, y_n)$. De lo que concluimos que φ_0 es un homeomorfismo.

Similarmente definimos homeomorfismos $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ para cada $1 \leq j \leq n$ dados por

$$\varphi_j[x_0, \dots, x_n] = \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right).$$

Observación 2.16. El complemento de U_n en \mathbb{P}^n es el hiperplano $\{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n : x_n = 0\}$. Éste puede ser identificado de manera obvia con \mathbb{P}^{n-1} . Así que, podemos construir el espacio proyectivo \mathbb{P}^n de manera inductiva. \mathbb{P}^0 es un sólo punto. Así \mathbb{P}^1 puede ser pensado como \mathbb{C} junto con un sólo punto ∞ (esto es, una copia de \mathbb{P}^0) y por lo tanto puede ser identificado con la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. \mathbb{P}^2 es \mathbb{C}^2 junto con una "línea al infinito" (esto es, una copia de \mathbb{P}^1) y en general \mathbb{P}^n es \mathbb{C}^n junto con una copia de \mathbb{P}^{n-1} al infinito.

Desde que $\{U_j : 0 \leq j \leq n\}$ es una cubierta abierta de \mathbb{P}^n y $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo para cada j , tenemos que una función $f : \mathbb{P}^n \rightarrow X$, donde X es un espacio topológico, es continua si y sólo si $f \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow X$ es continua para cada j . De forma similar una función $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ es continua si y sólo si $f^{-1}(U_j)$ es abierto en X y $\varphi \circ f : f^{-1}(U_j) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es continua para cada j .

Proposición 2.17. \mathbb{P}^n es compacto.

Demostración. Sea

$$S^{2n+1} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |x_0|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1\}.$$

Entonces S^{2n+1} es una esfera de dimensión $2n + 1$. Este conjunto es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{C}^{n+1} , así que por el teorema de Heine-Borel 2.12 (I) es compacto. La restricción $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$ de

el mapa π definido como antes es continuo, por lo cual su imagen es la imagen de un espacio compacto bajo un mapa continuo, y por lo tanto compacta por la observación 2.12(II).

Ahora si $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n$ entonces $\lambda = |x_0|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$ por lo que $[x_0, \dots, x_n] = [\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0, \dots, \lambda^{-\frac{1}{2}}x_n]$. De aquí que $|\lambda^{-\frac{1}{2}}x_0|^2 + \dots + |\lambda^{-\frac{1}{2}}x_n|^2 = 1$. Con lo cual concluimos que $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$ es suprayectiva y de ahí tenemos el resultado. \square

Definición 2.18. Una *transformación proyectiva* de \mathbb{P}^n es una biyección $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que para algún isomorfismo lineal $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ se tiene $f[x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n]$ donde $\alpha(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)$ esto es $f \circ \pi = \pi \circ \alpha$ donde $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ es la proyección canónica ya antes definida.

Lema 2.19. Una *transformación proyectiva* $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ es continua.

Demostración. Por definición tenemos que $f \circ \pi = \pi \circ \alpha$ para algún isomorfismo lineal $\alpha : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$. Tenemos que por la observación 2.15(II) π es continua además α es continua de esto se sigue $f \circ \pi$ es continua, y por tanto de 2.15(III) f es continua. \square

Definición 2.20. Un *hiperplano* en \mathbb{P}^n es la imagen bajo $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ de $V - \{0\}$ donde V es un subespacio de \mathbb{C}^{n+1} de dimensión n .

Lema 2.21. Dados $n+2$ puntos distintos p_0, \dots, p_n y q de \mathbb{P}^n de los cuales $n+1$ no se encuentran en un hiperplano, entonces existe una única transformación proyectiva que manda p_i a $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ donde 1 está en la i -ésima posición y que manda q a $[1, \dots, 1]$.

Demostración. Sean u_0, \dots, u_n y v elementos de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ cuyas imágenes bajo π son p_0, \dots, p_n y q respectivamente. Entonces u_0, \dots, u_n forma una base de \mathbb{C}^{n+1} por lo cual existe una única transformación lineal α de \mathbb{C}^{n+1} que manda u_0, \dots, u_n a la base canónica $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. Más aún la condición sobre p_0, \dots, p_n y q implica que $\alpha(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ son todos números complejos no cero. Así que la composición de α con la transformación lineal definida por la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Define una transformación proyectiva que manda p_i a $[0, \dots, \frac{1}{\lambda_i}, 0, \dots, 0] = [0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$ y q a $[1, 1, \dots, 1]$ \square

Proposición 2.22. El espacio proyectivo \mathbb{P}^n es Hausdorff.

Demostración. Necesitamos demostrar que si p y q son dos puntos distintos de \mathbb{P}^n entonces existen vecindades abiertas disjuntas en \mathbb{P}^n una de p y otra de q . Ya se ha mostrado que existe un homeomorfismo

$\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ donde U_0 es un conjunto abierto de \mathbb{P}^n . Si p y q se encuentran en U_0 , entonces $\varphi_0(p)$ y $\varphi_0(q)$ tienen vecindades disjuntas V y W en \mathbb{C}^n y $\varphi_0^{-1}(V)$ y $\varphi_0^{-1}(W)$ son vecindades abiertas disjuntas de p y q respectivamente en \mathbb{P}^n . En particular esto se tiene para cuando $p = [1, 0, \dots, 0]$ y $q = [1, 1, \dots, 1]$.

En general podemos encontrar puntos p_0, \dots, p_n de \mathbb{P}^n tal que $p_0 = p$ de los cuales $n + 1$ de los $n + 2$ puntos p_0, \dots, p_n y q no pertenezcan a un hiperplano. Así que, por el lema anterior existe una transformación proyectiva $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ que manda p a $[1, 0, \dots, 0]$ y q a $[1, 1, \dots, 1]$. Pero como acabamos de ver $[1, 0, \dots, 0]$ y $[1, 1, \dots, 1]$ tienen vecindades abiertas disjuntas $\varphi_0^{-1}(V)$ $\varphi_0^{-1}(W)$ en \mathbb{P}^n . Ahora bien tenemos que f es continua y además una biyección, por lo cual los subconjuntos $f^{-1}(\varphi_0^{-1}(V))$ y $f^{-1}(\varphi_0^{-1}(W))$ son vecindades abiertas disjuntas de p y q en \mathbb{P}^n , como había que demostrar. \square

2.3. Curvas proyectivas complejas en \mathbb{P}^2

Recordemos que el plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 es el conjunto de todos los subespacios complejos de dimensión uno de \mathbb{C}^3 . Si denotamos por $[x, y, z]$ el subespacio generado por $(x, y, z) \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $\mathbb{P}^2 = \{[x, y, z] : (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}\}$, y $[x, y, z] = [u, v, w]$ si, y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $x = \lambda u$, $y = \lambda v$, $z = \lambda w$.

Recordemos que un polinomio $P(x, y, z)$ es llamado homogéneo de grado d si $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Se sigue que, las primeras derivadas parciales de P son polinomios homogéneos de grado $d - 1$.

Definición 2.23. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo no constante en tres variables x, y, z con coeficientes complejos. Supongamos además que $P(x, y, z)$ no tiene factores repetidos. Entonces la *curva proyectiva compleja* C definida por $P(x, y, z)$ es

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P(x, y, z) = 0\}.$$

Note que la condición $P(x, y, z) = 0$ es independiente de la elección de las coordenadas homogéneas (x, y, z) por que P es un polinomio homogéneo y así $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0 \Leftrightarrow P(x, y, z) = 0$, donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Observación 2.24. Al igual que para curvas en \mathbb{C}^2 , es de hecho el caso que dos polinomios homogéneos $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ con factores no repetidos definen la misma curva proyectiva en \mathbb{P}^2 si, y sólo si son un múltiplo escalar uno del otro, y un polinomio homogéneo con factores repetidos puede ser pensado como la definición de una curva con multiplicidades unidas a sus componentes.

Definición 2.25. El grado de una curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ es el grado d de $P(x, y, z)$. La curva C es llamada *irreducible* si $P(x, y, z)$ es irreducible, i.e. $P(x, y, z)$ no tiene factores polinomiales no constantes distintos de los múltiplos escalares de si mismo. Una curva proyectiva irreducible D definida por un polinomio homogéneo $Q(x, y, z)$ es llamada una *componente* de C si $Q(x, y, z)$ divide a $P(x, y, z)$.

Definición 2.26. Un punto $[a, b, c]$ de una curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ es llamado *singular* si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

El conjunto de puntos singulares de C es denotado por $\text{Sing}(C)$. La curva C es llamada *no singular* si $\text{Sing}(C) = \emptyset$.

Ejemplo 2.27. La curva proyectiva en \mathbb{P}^2 definida por $x^2 + y^2 = z^2$ es no singular. La curva definida por $y^2z = x^3$ tiene una singularidad en el punto $[0, 0, 1]$.

Definición 2.28. Una curva proyectiva definida por una ecuación lineal

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

donde λ, β, γ no son todos cero, es llamada una *línea proyectiva*. La *línea tangente* a una curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ en un punto no singular $[a, b, c] \in \mathbb{C}$ es la línea

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c)z = 0.$$

Damos a la curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 la topología que hereda como subconjunto de \mathbb{P}^2 .

Lema 2.29. Una curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 es un espacio compacto y Hausdorff.

Demostración. Sea P un polinomio que define a C , con el fin de demostrar que C es compacto por la propiedad 2.12(IV) y la proposición 2.17 es suficiente demostrar que C es un subconjunto cerrado de \mathbb{P}^2 . Por la observación 2.15(I) esto pasa si y sólo si

$$\pi^{-1}(C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{0\} : P(x, y, z) = 0\},$$

es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Pero esto es cierto desde que los polinomios son funciones continuas. Ahora bien, como cualquier subconjunto de espacio Hausdorff es Hausdorff el resultado se sigue de la proposición 2.22. \square

2.4. Curvas afines y proyectivas

Las curvas algebraicas $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : Q(x, y) = 0\}$ en \mathbb{C}^2 son usualmente llamadas curvas *afines* para distinguirlas de las curvas *proyectivas* $C' = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P(x, y, z) = 0\}$. Aunque diferentes, las curvas afines y proyectivas están estrechamente relacionadas. De una curva afín C podemos obtener una curva proyectiva C' mediante la adición de “puntos al infinito”.

Recordemos que podemos identificar \mathbb{C}^2 con el subconjunto abierto $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : z \neq 0\}$ de \mathbb{P}^2 via el homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por

$$\varphi[x, y, z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right), \quad \text{para cada } [x, y, z] \in U,$$

con inversa

$$(x, y) \mapsto [x, y, 1].$$

El complemento de U en \mathbb{P}^2 es la línea proyectiva definida por $z = 0$, la cual podemos identificar con \mathbb{P}^1 via el mapa $[x, y, 0] \mapsto [x, y]$. Así que, \mathbb{P}^2 es la unión disjunta de una copia de \mathbb{C}^2 y una copia de \mathbb{P}^1 , el cual podemos pensar como “al infinito”.

Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo no constante de grado d . Bajo la identificación de U con \mathbb{C}^2 como antes, la intersección con U con la curva proyectiva C' definida por P es la curva afín en \mathbb{C}^2 definida por el polinomio no homogéneo en dos variables $P(x, y, 1)$. Este polinomio tiene grado d bajo la condición de que z no sea un factor de $P(x, y, z)$ (esto es, bajo la condición de que C' no contenga la línea $z = 0$).

Recíprocamente, si $Q(x, y)$ es un polinomio no homogéneo de grado d en dos variables x y y , digamos

$$Q(x, y) = \sum_{r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s,$$

entonces la curva afín C definida por $Q(x, y)$ es la intersección de U (identificado con \mathbb{C}^2) con la curva proyectiva C' en \mathbb{P}^2 definida por el polinomio homogéneo

$$z^d Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum_{r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s z^{d-r-s}.$$

La intersección de esta curva proyectiva con la línea al infinito $z = 0$ es el conjunto de puntos

$$\{[x, y, 0] \in \mathbb{P}^2 : \sum_{0 \leq r \leq d} a_{r, d-r} x^r y^{d-r} = 0\}.$$

Por el lema 2.8 el polinomio homogéneo

$$\sum_{0 \leq r \leq d} a_{r, d-r} x^r y^{d-r},$$

puede factorizarse como un producto de factores lineales

$$\prod_{1 \leq i \leq d} (\alpha_i x + \beta_i y).$$

Las líneas definidas por

$$\alpha_i x + \beta_i y = 0,$$

son por definición las *asíntotas* a la curva en \mathbb{C}^2 definidas por Q . Estas líneas corresponden a puntos $[-\beta_i, \alpha_i]$ en \mathbb{P}^1 ; cuando \mathbb{P}^1 es identificado con la línea $z = 0$ en \mathbb{P}^2 estos puntos son precisamente los puntos de $C' - C$.

En esta forma obtenemos una correspondencia biunívoca entre las curvas afines C en \mathbb{C}^2 y las curvas proyectivas C' en \mathbb{P}^2 las cuales no contienen la línea al infinito $z = 0$.

Si C' es una curva no singular entonces se sigue que C es no singular pero el recíproco en general no es cierto: C' puede tener puntos singulares al infinito incluso cuando C sea no singular. Ejemplo de ello considerese la curva proyectiva definida por $xy^4 + yz^4 + xz^4 = 0$ la cual tiene un punto singular en $[1, 0, 0]$ sin embargo la curva afín asociada a esta curva proyectiva, esto es, la curva $xy^4 + y + x = 0$ se verifica fácilmente que es no singular.

Lema 2.30 (Relación de Euler). *Si $R(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado m , entonces*

$$x \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) = mR(x, y, z). \quad (2.2)$$

Demostración. La relación de Euler se puede obtener por diferenciar la identidad

$$R(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m R(x, y, z),$$

con respecto a λ y luego hacer $\lambda = 1$. □

Lema 2.31. *Sea $[a, b, c]$ un punto de la curva proyectiva*

$$C' = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P(x, y, z) = 0\}.$$

Si $c \neq 0$, entonces el punto $[a, b, c]$ es un punto no singular de C' si, y sólo si $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ es un punto no singular de la curva $C = \{(x, y) : P(x, y, 1) = 0\}$. Más aún, la intersección de \mathbb{C}^2 identificado con $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : z \neq 0\}$ y la línea tangente proyectiva a $[a, b, c]$ para C' en \mathbb{P}^2 es la línea tangente a $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ para C en \mathbb{C}^2 .

Demostración. El punto $(a/c, b/c)$ es un punto singular de C si, y sólo si

$$P\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right).$$

Desde que $P(x, y, z)$ y sus derivadas parciales son homogéneas y $c \neq 0$ lo anterior pasa si, y sólo si

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c),$$

y de (2.2) nos dice que esto ocurre si, y sólo si

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c),$$

esto es, si, y sólo si $[a, b, c]$ es un punto singular de C' .

La intersección de \mathbb{C}^2 identificado con U y la recta tangente proyectiva

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) + y \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) + z \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0,$$

es la línea en \mathbb{C}^2 definida por

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) + y \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

Por la homogeneidad de las derivadas parciales y nuevamente de (2.2) esta es precisamente la línea tangente

$$\left(x - \frac{a}{c}\right) \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) + \left(y - \frac{b}{c}\right) \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = 0,$$

a C en \mathbb{C}^2 para $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$.

□

2.5. Ejemplos

Ejemplo 2.32. Muestre que el subconjunto de \mathbb{C}^2 que consiste de los puntos de la forma $(t^2, t^3 + 1)$ con $t \in \mathbb{C}$ es una curva algebraica compleja.

Demostración. Sea $x = t^2$ y $y = t^3 + 1$, por lo cual $x^3 = t^6$ y $t^3 = y - 1$, al elevar al cuadrado esta última expresión tenemos que $(y - 1)^2 = t^6 = x^3$, así pues elijamos al polinomio $P(x, y) = x^3 - (y - 1)^2$ y entonces tenemos que

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\} = \{(t^2, t^3 + 1) : t \in \mathbb{C}\}.$$

□

Ejemplo 2.33. Encuentre los puntos singulares y las líneas tangentes a los puntos singulares de cada una de las siguientes curvas en \mathbb{C}^2 .

1. $y^3 - y^2 + x^3 - x^2 + 3y^2x + 3x^2y + 2xy = 0$.
2. $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$.
3. $y^2 = x^3 - x$.

Solución

1. Consideremos el polinomio $P(x, y) = y^3 - y^2 + x^3 - x^2 + 3y^2x + 3x^2y + 2xy$. De donde tenemos que:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2x + 3y^2 + 6xy + 2y,$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2y + 6xy + 3x^2 + 2x.$$

Así que tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x + 3y^2 + 6xy + 2y &= 0, \\ 3y^2 - 2y + 6xy + 3x^2 + 2x &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 a la primera ecuación y sumando ambas ecuaciones llegamos a que $-4x + 4y = 0$ ó bien $x = y$, sustituyendo en la primera se tiene, $12x^2 = 0$ por lo que $x = y = 0$, luego el único punto singular de $P(x, y)$ es el origen $(0, 0)$ y la línea tangente a este punto singular es la línea dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0)y = 0.$$

Donde $\partial P/\partial x(0, 0)$ y $\partial P/\partial y(0, 0)$ son iguales a 0.

2. Sea $P(x, y) = x^4 + y^4 - x^2y^2$, entonces tenemos que las parciales están dadas por $\partial P/\partial x(x, y) = 4x^3 - 2xy^2$ y $\partial P/\partial y(x, y) = 4y^3 - 2x^2y$.

de donde obtenemos las ecuaciones

$$4x^3 - 2xy^2 = 0, \quad 4y^3 - 2x^2y = 0.$$

Al factorizar estas expresiones llegamos a que

$$2x(x^2 - y^2) = 0, \quad 2y(y^2 - x^2) = 0.$$

De lo cual se deduce que $x = 0$ ó $y = 0$ ó $x = y$ ó $x = -y$, pero todas estas posibles combinaciones tienen como resultado el único punto $(0, 0)$, por lo tanto la única singularidad de la curva definida por $P(x, y)$ es el punto $(0, 0)$ y la línea tangente es la misma que en caso 1.

3. Sea $P(x, y) = x^3 - x - y^2$, entonces tenemos que $\partial P/\partial x(x, y) = 3x^2 - 1$ y $\partial P/\partial y(x, y) = -2y$. De donde tenemos las ecuaciones $3x^2 - 1 = 0$, $-2y = 0$. De estas ecuaciones se deduce que los puntos singulares de la curva están dados por $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ y las líneas tangentes a estos puntos singulares están dadas por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) y = 0,$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial x} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) y = 0.$$

Ejemplo 2.34. Si $P(x, y)$ es un polinomio de grado d y a y b son números complejos, mostrar que $P(x, y)$ está dado por

$$\sum_{0 \leq i+j \leq d} \frac{1}{i!j!} (x-a)^i (y-b)^j \frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j} (a, b).$$

Demostración. Tenemos que el polinomio $P(x, y)$ se puede escribir en la forma

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq r+s \leq d} a_{r,s} (x-a)^r (y-b)^s.$$

Al derivar parcialmente j -veces con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial^j P(x, y)}{\partial y^j} = \sum_{0 \leq r+s \leq d} a_{r,s} \frac{s!}{(s-j)!} (x-a)^r (y-b)^{s-j}.$$

Así mismo, al derivar parcialmente i -veces con respecto a x , tenemos

$$\frac{\partial^{i+j} P(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = \sum_{0 \leq r+s \leq d} a_{r,s} \frac{r!}{(r-i)!} \frac{s!}{(s-j)!} (x-a)^{r-i} (y-b)^{s-j},$$

o bien

$$\frac{\partial^{i+j} P(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = \sum_{\substack{0 \leq r+s \leq d \\ r \neq i, s \neq j}} a_{r,s} \frac{r!}{(r-i)!} \frac{s!}{(s-j)!} (x-a)^{r-i} (y-b)^{s-j} + a_{i,j} i! j!.$$

Evaluando en el punto (a, b) llegamos a que

$$\frac{\partial^{i+j}P(a, b)}{\partial x^i \partial y^j} = a_{i,j} i! j!,$$

de donde

$$a_{i,j} = \frac{1}{i! j!} \frac{\partial^{i+j}P(a, b)}{\partial x^i \partial y^j},$$

de esto concluimos que

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} \frac{1}{i! j!} (x-a)^i (y-b)^j \frac{\partial^{i+j}P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b).$$

□

Ejemplo 2.35. Sea (a, b) un punto singular de una curva afín C en \mathbb{C}^2 definida por un polinomio $P(x, y)$. Demuestre que (a, b) es un punto ordinario doble si, y sólo si

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)^2 \neq \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right),$$

en el punto (a, b) .

Demostración. Consideremos la expresión

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(a, b)}{\partial x^2} (x-a)^2 + \frac{\partial^2 P(a, b)}{\partial x \partial y} (x-a)(y-b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(a, b)}{\partial y^2} (y-b)^2,$$

de donde al factorizar $(y-b)^2$ de la expresión anterior llegamos a

$$(y-b)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(a, b)}{\partial x^2} \left(\frac{x-a}{y-b} \right)^2 + \frac{\partial^2 P(a, b)}{\partial x \partial y} \left(\frac{x-a}{y-b} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(a, b)}{\partial y^2} \right].$$

Ahora bien, tendremos un punto ordinario doble si la primera expresión no tiene factores repetidos lo cual equivale a que el discriminante de la ecuación cuadrática en $(x-a)/(y-b)$ no se anule, pero esto significa que

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)^2 - 4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \neq 0,$$

en el punto (a, b) o equivalentemente

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)^2 \neq \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right),$$

en el punto (a, b) . □

Ejemplo 2.36. Sea C una curva afín definida por un polinomio $P(x, y)$. Muestre que si (a, b) es un punto de multiplicidad d en C , entonces $P(x, y)$ es un producto de d factores lineales, así que C es la unión de d líneas que pasan a través de (a, b) .

Demostración. Como la multiplicidad es d tenemos que para algunos $i \geq 0, j \geq 0$ tales que $i + j = d$ sucede que

$$\frac{\partial^d P(a, b)}{\partial x^i \partial y^j} \neq 0,$$

así que el polinomio

$$\sum_{i+j=d} \frac{1}{i!j!} (x-a)^i (y-b)^j \frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b),$$

es homogéneo, ahora bien, por el ejemplo 2.34, tenemos que $P(x, y)$ se puede expresar como

$$\sum_{0 \leq i+j \leq d} \frac{1}{i!j!} (x-a)^i (y-b)^j \frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(a, b).$$

Por lo cual concluimos que el polinomio $P(x, y)$ tiene que ser homogéneo de grado d , luego por el lema 2.8 se puede expresar como un producto de d factores lineales a saber

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^d (\alpha_i(x-a) + \beta_j(y-b)).$$

De esto concluimos que C es la unión de d líneas que pasan a través de (a, b) . \square

Ejemplo 2.37. 1. Demuestre que la unión de un número finito de curvas afines en \mathbb{C}^2 es una curva afín.

2. Demuestre que la unión de un número finito de curvas proyectivas en \mathbb{P}^2 es una curva proyectiva.

Demostración. 1. Sean $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P_1(x, y) = 0\}$ y $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P_2(x, y) = 0\}$ afirmamos que $C_1 \cup C_2 = C$ donde $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P_1(x, y)P_2(x, y) = 0\}$ En efecto, $(x, y) \in C_1 \cup C_2 \iff P_1(x, y) = 0$ ó $P_2(x, y) = 0 \iff P_1(x, y)P_2(x, y) = 0 \iff (x, y) \in C$.

2. Primero veamos que si $P_1(x, y, z)$ y $P_2(x, y, z)$ son dos polinomios homogéneos de grados d y e respectivamente, entonces P_1P_2 es un polinomio homogéneo de grado $d + e$. En efecto, tenemos pues que

$$P_1(x, y, z) = \sum_{r_1+r_2+r_3=d} a_{r_1 r_2 r_3} x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3},$$

y

$$P_2(x, y, z) = \sum_{s_1+s_2+s_3=e} a_{s_1 s_2 s_3} x^{s_1} y^{s_2} z^{s_3},$$

luego

$$P_1P_2(x, y, z) = \sum_{(r_1+s_1)+(r_2+s_2)+(r_3+s_3)=d+e} a_{r_1 r_2 r_3 s_1 s_2 s_3} x^{r_1+s_1} y^{r_2+s_2} z^{r_3+s_3},$$

si hacemos $m_i = r_i + s_i$, entonces tenemos que

$$P_1P_2(x, y, z) = \sum_{m_1+m_2+m_3=d+e} a_{m_1 m_2 m_3} x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3},$$

pero esto significa que P_1P_2 es un polinomio homogéneo. Sean $P_1(x, y, z)$ y $P_2(x, y, z)$ dos polinomios homogéneos y sean $C_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P_1(x, y, z) = 0\}$ y $C_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P_2(x, y, z) = 0\}$ afirmamos que $C_1 \cup C_2 = C$ donde $C = \{[x, y, z] : P_1(x, y, z)P_2(x, y, z) = 0\}$. En efecto, de la homogeneidad de los polinomios P_1, P_2 y P_1P_2 tenemos que $[x, y, z] \in C_1 \cup C_2$ si, y sólo si $P_1(x, y, z) = 0$ ó $P_2(x, y, z) = 0$ lo cual ocurre si, y sólo si $P_1(x, y, z)P_2(x, y, z) = 0$ y esto último sucede si, y sólo si $[x, y, z] \in C$. Por inducción se sigue que en cualquiera de los casos la unión finita de curvas afines o proyectivas es una curva afín o proyectiva respectivamente. \square

Ejemplo 2.38. Demuestre que una curva algebraica compleja en \mathbb{C}^2 no es un conjunto compacto.

Demostración. Consideremos el polinomio no constante $P(x, y)$, entonces afirmamos que para todo $a \in \mathbb{C}$ excepto un número finito de valores, existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $P(a, b) = 0$. En efecto, tenemos que $P(x, y)$ es de la forma

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq r+s \leq d} a_{r,s} x^r y^s,$$

ahora bien, si $P(x, y)$ se puede escribir en la forma $P(x, y) = P_1(x)P_2(y) + P_3(x)$ y si x_1, x_2, \dots, x_n son las raíces de $P_1(x)$, entonces para toda a excepto para x_1, x_2, \dots, x_n ; $P(a, y)$ sería un polinomio no constante de y y por lo tanto podríamos hallar $b \in \mathbb{C}$ tal que $P(a, b) = 0$.

Por el teorema de Heine-Borel es suficiente demostrar que el conjunto C no es acotado, supongamos por el contrario que C es un conjunto acotado así que existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ y $R > 0$ tal que $C \subseteq B((x_0, y_0), R)$ Ahora bien, sea (x_n) una sucesión de números naturales tal que para cada x_n , existe $b_n \in \mathbb{C}$ tal que $P(x_n, b_n) = 0$, nótese que por la afirmación anterior (x_n) es una sucesión infinita de números naturales, por hipótesis hemos supuesto que C está acotado, pero entonces tendríamos $|(x_n, b_n) - (x_0, y_0)| \leq R$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde

$$x_n - |x_0| \leq |x_n - x_0| \leq |x_n - x_0, b_n - y_0| \leq R, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

así que, concluimos que $x_n \leq R + |x_0|$, lo cual es una contradicción, luego C no está acotado y por lo tanto no puede ser un conjunto compacto. \square

Ejemplo 2.39. La multiplicidad en un punto $[a, b, c]$ de una curva proyectiva C definida por un polinomio $P(x, y, z) = 0$ es el entero más pequeño m tal que

$$\frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}(a, b, c) \neq 0,$$

para algunos i, j, k tales que $i + j + k = m$. Encuentre los puntos singulares y las multiplicidades de los puntos singulares de las siguientes curvas proyectivas.

1. $xy^4 + yz^4 + xz^4 = 0$,
2. $x^2y^3 + x^2z^3 + y^2z^3 = 0$,

$$3. y^2z = x(x-z)(x-\lambda z) \lambda \in \mathbb{C},$$

$$4. x^n + y^n + z^n = 0, n > 0.$$

Solución.

1. Sea $P(x, y, z) = xy^4 + yz^4 + xz^4$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y^4 + z^4 = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy^3 + z^4 = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 4yz^3 + 4xz^3 = 0 \quad (2.5)$$

De la ecuación (2.5) tenemos que $z^3(y+x) = 0$ de donde $z = 0$ ó $y+x = 0$, supongamos primero que $z = 0$, entonces de la ecuación (2.3) tenemos que $y = 0$ y así tenemos una singularidad en el punto $[1, 0, 0]$, ahora veamos que el caso $y+x = 0$ no puede ocurrir, supongamos pues que $z \neq 0$ y $y+x = 0$, de la ecuación (2.3) tenemos que $z^4 = -y^4$ sustituyendo en la ecuación (2.4) tenemos que $4xy^3 - y^4 = 0$ de donde $y^3(4x-y) = 0$, pero y^3 no puede ser cero, pues entonces por (2.3) $z = 0$, así $4x-y = 0$ y como $y+x = 0$ llegamos a que $x = 0$, luego $z = 0$, lo que no puede ocurrir, entonces el único punto singular es $[1, 0, 0]$ y dado que

$$\frac{\partial^4 P}{\partial y^4} [1, 0, 0] = 24,$$

tenemos que la multiplicidad es 4.

2. Sea $P(x, y, z) = x^2y^3 + x^2z^3 + y^2z^3$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy^3 + 2xz^3 = 0. \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2yz^3 = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 3x^2z^2 + 3y^2z^2 = 0 \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.8) tenemos que $z^2(x^2 + y^2) = 0$, supongamos que $z^2 = 0$, así $z = 0$ y entonces de las ecuaciones (2.6) y (2.7) tenemos que $x = 0$ ó $y = 0$; y esto produce los puntos singulares $[1, 0, 0]$ y $[0, 1, 0]$, ahora supongamos que $z \neq 0$ y $x^2 + y^2 = 0$, de las ecuaciones (2.6) y (2.7) tenemos que $x(y^3 + z^3) = 0$ y $y(3x^2y + 2z^3) = 0$ entonces debe suceder que $x = 0$ ó $y = 0$ de lo contrario si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces $y^3 + z^3 = 0$ y $3x^2y + 2z^3 = 0$ de donde $3x^2y + 2z^3 = -3y^3 + 2z^3 = 3z^3 + 2z^3 = 0$ luego $5z^3 = 0$ y así $z = 0$ lo que no puede ocurrir así supongamos que $x = 0$ y como $x^2 + y^2 = 0$, entonces $y = 0$ y así tenemos el otro punto singular $[0, 0, 1]$. Para el punto singular $[1, 0, 0]$ la multiplicidad es 3 pues

$$\frac{\partial^3 P}{\partial y^3} [1, 0, 0] = 6.$$

Para el punto $[0, 1, 0]$ la multiplicidad es 2, pues

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}[0, 1, 0] = 2.$$

Para el punto $[0, 0, 1]$ la multiplicidad es 2, pues

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}[0, 0, 1] = 2.$$

3. Sea $P(x, y, z) = x(x - z)(x - \lambda z) - y^2 z$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 2\lambda xz - 2xz + \lambda z^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2yz = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\lambda x^2 - x^2 + 2\lambda xz - y^2 = 0 \quad (2.11)$$

De la ecuación (2.10) tenemos que $y = 0$ ó $z = 0$, note que $z \neq 0$, pues si $z = 0$, entonces de la ecuación (2.9) $x = 0$ y así de la ecuación (2.11) $y = 0$ lo que no puede ocurrir, así $z \neq 0$ y $y = 0$ luego de la ecuación (2.11) tenemos que $x(-\lambda x - x + 2\lambda z) = 0$. Si $x = 0$ entonces de la ecuación (2.9) tenemos que $\lambda z^2 = 0$ por lo que $\lambda = 0$, así que para la curva $y^2 z = x^2(x - z)$ tenemos la singularidad $[0, 0, 1]$ cuya multiplicidad es 2, pues

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2.$$

4. Sea $P(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = nx^{n-1},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = ny^{n-1},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = nz^{n-1},$$

De las ecuaciones anteriores concluimos que la curva dada por el polinomio P es no singular, pues $nx^{n-1} = ny^{n-1} = nz^{n-1} = 0$ si, y sólo si $x = y = z = 0$, pero $[0, 0, 0]$ no pertenece a la curva. \triangle

Ejemplo 2.40. ¿Para cuáles valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ las siguientes curvas proyectivas en \mathbb{P}^2 son no singulares? Describa las singularidades cuando ellas existan.

1. $x^3 + y^3 + z^3 + 3\lambda xyz = 0.$

2. $x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x + y + z)^3 = 0.$

Solución.

1. Al tomar las derivadas parciales con cada una de las variables llegamos a las ecuaciones

$$x^2 + \lambda yz = 0 \quad (2.12)$$

$$y^2 + \lambda xz = 0 \quad (2.13)$$

$$z^2 + \lambda xy = 0 \quad (2.14)$$

Primero notemos que si $xyz = 0$, esto es, x ó y ó z es igual a cero, entonces implicaría que en cualquiera de los casos $x = y = z = 0$, así que supongamos que x, y y z son diferentes de cero. Así pues, de la ecuación (2.12) al multiplicar por y tenemos $yx^2 + \lambda y^2z = 0$, al sustituir la ecuación (2.13) en esta última expresión tenemos que $x(xy - \lambda^2 z^2) = 0$, de donde $\lambda xy - \lambda^3 z^2 = 0$, de donde $-z^2 - \lambda^3 z^2 = 0$ y así llegamos a la ecuación para $\lambda^3 + 1 = 0$ de esto concluimos que la curva es no singular para cualquier λ que no satisfaga $\lambda^3 + 1 = 0$ ó equivalentemente para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1, 1 \pm 3/i2\}$.

2. Sea $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x + y + z)^3 = 0$. Al derivar parcialmente con respecto a cada una de las variables se obtienen

$$x^2 + \lambda(x + y + z)^2 = 0,$$

$$y^2 + \lambda(x + y + z)^2 = 0,$$

$$z^2 + \lambda(x + y + z)^2 = 0.$$

De estas ecuaciones se llega a $x^2 = y^2 = z^2$, por lo que x, y y z son no nulas. Ahora bien, de las igualdades $x^2 = y^2 = z^2$ tenemos que la ecuación queda expresada de dos únicas formas: $x^2 + 9\lambda x^2 = 0$ ó $x^2 + \lambda x^2 = 0$, de donde obtenemos las ecuaciones

$$9\lambda + 1 = 0 \text{ y } \lambda + 1 = 0.$$

De esto concluimos que la curva es no singular para todo $\lambda \neq -\frac{1}{9}, -1$. \triangle

Capítulo 3

Propiedades algebraicas

3.1. Teorema de Bézout

En este capítulo vamos a estudiar algunas de las propiedades algebraicas de las curvas complejas. Más precisamente, vamos a investigar la forma en la cual dos curvas proyectivas complejas en \mathbb{P}^2 se intersectan. Más adelante investigaremos los “puntos de inflexión” de una curva proyectiva compleja y demostraremos que cualquier curva proyectiva no singular de grado tres es equivalente bajo una transformación proyectiva a una curva definida por $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. El lector interesado puede encontrar una variedad de ejemplos de intersección de curvas en [5], así como también en [11] encontrará el teorema de Bézout desde un punto de vista más del álgebra conmutativa.

En esta sección vamos a estudiar la forma en la cual dos curvas proyectivas C y D en \mathbb{P}^2 pueden intersectarse. Vamos a ver que C y D siempre se intersectan en al menos un punto, y que si C y D no tienen componentes en común, entonces ellas se intersectan en a lo más nm puntos donde n es el grado de C y m es el grado de D . Vamos a ver también que ellas coinciden en exactamente nm puntos, si cualquier punto de $C \cap D$ es un punto no singular tanto de C y D y las líneas tangentes a C y a D en tales puntos son distintas. En [9] el lector encontrará un estudio más amplio de las curvas cuadráticas y cúbicas, así como también se estudia la topología de las curvas de grado 4 y 5 sólo que hará falta estudiar la cohomología de una curva compleja.

Vamos a demostrar un resultado más general sobre el número de puntos de intersección de C y D una vez que hayamos definido la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ de C y D en el punto p . Éste es definido como infinito si p se encuentra sobre una componente común de C y D , y en otro caso es un entero no negativo el cual es precisamente cero cuando p no pertenece a $C \cap D$. Vamos a demostrar que $I_p(C, D)$ es uno si, y sólo si p es un punto no singular tanto de C y D y las líneas tangentes a C y a D en p son distintas. La forma fuerte del teorema de Bézout puede expresarse en la forma que se enuncia a continuación.

Teorema 3.1 (Teorema de Bézout). Si C y D son dos curvas proyectivas de grados n y m respectivamente en \mathbb{P}^2 las cuales no tienen componentes comunes, entonces ellas tienen precisamente nm puntos de intersección contando multiplicidades; esto es

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = nm.$$

La prueba de este teorema se dará más adelante pues necesitamos introducir el concepto de *resultante*.

Definición 3.2. Sean $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, donde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, donde $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$, $b_m \neq 0$, polinomios de grados n y m en x . El *resultante* $\mathcal{R}_{P,Q}$ de P y Q es el determinante de la matriz cuadrada $m+n$ dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \cdots & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdots & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & & \cdots & & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & & \cdots & & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \cdots & & & & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & & \cdots & & & b_m \end{pmatrix}.$$

Si $P(x, y, z) = a_0(y, z) + a_1(y, z)x + \cdots + a_n(y, z)x^n$ y $Q(x, y, z) = b_0(y, z) + b_1(y, z)x + \cdots + b_m(y, z)x^m$ son polinomios en tres variables x, y, z , entonces el *resultante* $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ de P y Q con respecto a x es definido como un determinante en exactamente la misma forma que $\mathcal{R}_{P,Q}$, pero reemplazando en la matriz $a_i(y, z)$ y $b_j(y, z)$ por a_i y b_j para $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq m$. Note que el $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio en las variables y y z de cuyo valor cuando $y = b$ y $z = c$ es el *resultante* de los polinomios $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$ en x , siempre que $a_n(b, c)$ y $b_m(b, c)$ sean no cero.

Los siguientes lemas indican porque los *resultantes* son útiles en el estudio de la intersección de las curvas proyectivas en \mathbb{P}^2 .

Lema 3.3. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios en x . Entonces $P(x)$ y $Q(x)$ tienen un factor común no constante si y sólo si $\mathcal{R}_{P,Q} = 0$.

Demostración. Sean $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ polinomios de grados n y m en x . Entonces $P(x)$ y $Q(x)$ tienen un factor común no constante $R(x)$ si, y sólo si existen polinomios $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tales que $P(x) = R(x)\varphi(x)$, $Q(x) = R(x)\psi(x)$. Lo cual ocurre si, y sólo si existen polinomios no cero $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}$ y $\psi(x) = \beta_0 + \beta_1x + \cdots + \beta_{m-1}x^{m-1}$ de grados a lo más $n-1$ y $m-1$, tales que $P(x)\psi(x) = Q(x)\varphi(x)$. Igualando los coeficientes de x^j en esta ecuación para $0 \leq j \leq mn-1$, encontramos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha_0\beta_0 &= \beta_0\alpha_0, \\
\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 &= \beta_1\alpha_0 + \beta_0\alpha_1, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\alpha_n\beta_{m-1} &= \beta_m\alpha_{n-1}.
\end{aligned}$$

La existencia de una solución no nula $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \dots, \beta_{m-1})$ a estas ecuaciones es equivalente a que el determinante el cual define $\mathcal{R}_{P,Q}$ se anule. \square

Lema 3.4. Sean $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ polinomios homogéneos no constantes en las variables x, y, z tal que $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$. Entonces $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ tienen un factor común homogéneo no constante si, y sólo si el polinomio $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ en y y z es idénticamente cero.

Demostración. Sean $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ polinomios homogéneos no constantes en x, y, z de grados n y m tal que $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$. Podemos asumir que $P(1, 0, 0) = 1 = Q(1, 0, 0)$. Entonces podemos considerar a P y a Q como polinomios mónicos de grados n y m en x con coeficientes en el anillo $\mathbb{C}[y, z]$ de polinomios en y y z con coeficientes complejos. Este anillo $\mathbb{C}[y, z]$ está contenido en el campo $\mathbb{C}(y, z)$ de las funciones racionales de y y z , esto es, funciones de la forma $f(y, z)/g(y, z)$ donde $f(y, z)$ y $g(y, z)$ son polinomios y $g(y, z)$ no es idénticamente cero. Ahora bien, desde que $\mathbb{C}(y, z)$ es un campo la prueba del lema anterior muestra que el resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es idénticamente cero si, y sólo si $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ tienen un factor común no constante cuando son considerados como polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}(y, z)$. Se sigue del lema de Gauss que esto ocurre si, y sólo si $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ tienen un factor común no constante cuando los consideramos como polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}[y, z]$ o equivalentemente como polinomios en x, y, z con coeficientes en \mathbb{C} . Finalmente desde que cualquier factor polinomial de un polinomio homogéneo es homogéneo se tiene el resultado. \square

Observación 3.5. La razón para pedir que $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$ en este lema es para asegurar que los polinomios $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ tengan el mismo grado cuando los consideramos como polinomios en x con coeficientes en el anillo $\mathbb{C}[y, z]$ de polinomios en y y z que cuando los consideramos como polinomios en las variables x, y y z juntas.

Lema 3.6. Si $P(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$ y $Q(x) = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_m)$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ son números complejos, entonces

$$\mathcal{R}_{P,Q} = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_j - \lambda_i).$$

En particular $\mathcal{R}_{P,QR} = \mathcal{R}_{P,Q}\mathcal{R}_{P,R}$ donde P, Q y R son polinomios en x . El correspondiente resultado es también cierto cuando P, Q y R son polinomios en las variables x, y y z .

Demostración. Si consideramos $P(x) = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_n)$ y $Q(x) = (x-\mu_1) \cdots (x-\mu_m)$ como polinomios homogéneos en x , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y μ_1, \dots, μ_m , entonces la prueba del lema 3.7 muestra que el resultante $\mathcal{R}_{P,Q}$ es un polinomio homogéneo de grado nm en las variables $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$. Más aún, por el lema 3.3, este polinomio se anula si $\lambda_i = \mu_j$ para cualquier $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, así que es divisible por

$$\prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (\mu_i - \lambda_j).$$

Desde que este es también un polinomio homogéneo de grado nm en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y μ_1, \dots, μ_m tiene que ser un múltiplo escalar de $\mathcal{R}_{P,Q}$. Se tiene que si $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, entonces $Q(x) = x^m$ así

$$\mathcal{R}_{P,Q} = \prod_{i=1}^n (-\lambda_i)^m,$$

por lo tanto se debe tener que

$$\mathcal{R}_{P,Q} = \prod_{i,j} (\mu_i - \lambda_j).$$

Así que, se sigue inmediatamente que $\mathcal{R}_{P,QR} = \mathcal{R}_{P,Q} \mathcal{R}_{P,R}$ cuando P, Q, R son polinomios en x . Por lo que si P, Q, R son polinomios en x, y, z tenemos que $\mathcal{R}_{P,QR}(b, c) = \mathcal{R}_{P,Q}(b, c) \mathcal{R}_{P,R}(b, c)$, para todo $b, c \in \mathbb{C}$ y así tenemos $\mathcal{R}_{P,QR}(y, z) = \mathcal{R}_{P,Q}(y, z) \mathcal{R}_{P,R}(y, z)$, como queríamos demostrar. \square

Lema 3.7. Sean $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ polinomios homogéneos de grados m y n en las variables x, y, z . Entonces el resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado nm en las variables y y z .

Demostración. Por definición tenemos que el resultante de $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ de los polinomios homogéneos $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ de grados n y m es el determinante de una matriz de $n+m$ por $n+m$ de cuya ij -ésima entrada $r_{ij}(y, z)$ es un polinomio homogéneo en y y z de grado d_{ij} dado por

$$d_{ij} = \begin{cases} n+i-j & \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ i-j & \text{si } m+1 \leq i \leq n+m. \end{cases}$$

Entonces $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es una suma de términos de la forma

$$\pm \prod_{i=1}^{n+m} r_{i\sigma(i)}(y, z),$$

donde σ es una permutación de $\{1, \dots, n+m\}$. Cada tal término es un polinomio homogéneo de grado

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+m} d_{i\sigma(i)} &= \sum_{i=1}^m (n+i-\sigma(i)) + \sum_{i=m+1}^{n+m} (i-\sigma(i)) \\ &= nm + \sum_{i=1}^{m+n} i - \sum_{i=1}^{m+n} \sigma(i) \\ &= nm. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado nm en y y z . \square

Ahora estamos listos para probar los siguientes teoremas.

Teorema 3.8. *Cualesquiera dos curvas proyectivas C y D en \mathbb{P}^2 se intersectan en al menos un punto.*

Demostración. Sean C y D definidas por polinomios homogéneos $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ de grados n y m respectivamente. Por el lema 3.7 el resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado nm en las variables y y z . Luego por el lema 2.8 $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es o bien idénticamente cero o es el producto de nm factores lineales $bz - cy$ con b, c números complejos, no ambos cero. En cualquier caso existe $(b, c) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ tal que $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ se anula cuando $y = b$ y $z = c$. Esto significa que el resultante de los polinomios $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$ en x es cero, luego por el lema 3.3 estos polinomios tienen una raíz en común $a \in \mathbb{C}$. Entonces $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$ por lo cual $[a, b, c] \in C \cap D$. \square

Teorema 3.9 (Forma débil del teorema de Bézout). *Si dos curvas proyectivas C y D en \mathbb{P}^2 de grados n y m no tienen componentes en común, entonces ellas se intersectan en a lo más nm puntos.*

Demostración. Supongamos que C y D tienen al menos $nm + 1$ puntos de intersección. Vamos a demostrar que C y D tienen una componente en común. Elija cualquier conjunto S de $nm + 1$ puntos distintos en $C \cap D$. Entonces podemos elegir un punto en \mathbb{P}^2 el cual no se encuentre sobre C o sobre D o sobre cualquier número finito de líneas en \mathbb{P}^2 que pasen a través de dos puntos distintos de S . Aplicando una transformación proyectiva podemos asumir que este punto es $[1, 0, 0]$. Entonces las curvas C y D están definidas por polinomios homogéneos $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ de grados n y m tales que $P(1, 0, 0) \neq 0 \neq Q(1, 0, 0)$, debido a que $[1, 0, 0]$ no pertenece a $C \cup D$. Por el lema 3.7 el resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ de P y Q con respecto a x es un polinomio homogéneo de grado nm en las variables y y z , así que, si $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ no es idénticamente cero, entonces es el producto de nm factores lineales de la forma $bz - cy$ donde $(b, c) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Más aún, si $(b, c) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ entonces $bz - cy$ es un factor de $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ si, y sólo si el resultante de los polinomios $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$ en x se anula y por lo tanto por el lema 3.3 si, y sólo si existe un $a \in \mathbb{C}$ tal que $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$. Pero si $[a, b, c] \in S$ entonces $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$ y b y c no son ambos cero (porque $[1, 0, 0]$ no pertenece a S) así que $bz - cy$ es un factor de $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$. Por otro lado si $[\alpha, \beta, \gamma] \in S$ es distinto de $[a, b, c] \in S$ entonces $\beta z - \gamma y$ no es múltiplo escalar de $bz - cy$, porque de otra forma $[a, b, c], [\alpha, \beta, \gamma]$ y $[1, 0, 0]$ deberían estar todos sobre una línea en \mathbb{P}^2 definida por $bz = cy$, lo cual contradice la hipótesis sobre $[1, 0, 0]$. Esto muestra que $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ tiene al menos $nm + 1$ factores lineales distintos, así que tiene que ser idénticamente cero. Por el lema 3.4 esto implica que C y D tienen una componente en común. \square

Los siguientes resultados son aplicaciones de estos dos teoremas.

Corolario 3.10. (i) *Una curva proyectiva no singular C en \mathbb{P}^2 es irreducible.*

(ii) *Una curva proyectiva irreducible en \mathbb{P}^2 tiene a lo más un número finito de puntos singulares.*

Demostración. (i) Sea $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P(x, y, z)Q(x, y, z) = 0\}$ una curva proyectiva reducible en \mathbb{P}^2 . Luego por el teorema 3.8 existe al menos un punto $[a, b, c] \in \mathbb{P}^2$ tal que $P(a, b, c) = 0 = Q(a, b, c)$. Se

verifica que $[a, b, c]$ es un punto singular de C .

(ii) Sea C definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ de grado n . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $[1, 0, 0]$ no pertenece a C así que el coeficiente $P(1, 0, 0)$ de x^n en $P(x, y, z)$ no es igual a cero. Esto asegura que $Q(x, y, z) = (\partial P / \partial x)(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado $n - 1$ el cual no es idénticamente cero y, por tanto define una curva D en \mathbb{P}^2 . Desde que C es irreducible y el grado de D es estrictamente menor que el grado de C las curvas C y D no tienen componentes en común. Luego por el teorema de Bézout C y D se intersectan en al menos $n(n - 1)$ puntos. Como cualquier punto singular de C se encuentra $C \cap D$ se sigue el resultado. \square

Definición 3.11. Una *cónica* es una curva de grado dos en \mathbb{C}^2 o \mathbb{P}^2 .

Corolario 3.12. *Cualquier cónica proyectiva irreducible C en \mathbb{P}^2 es equivalente bajo una transformación proyectiva a la cónica $x^2 = yz$ y en particular es no singular.*

Demostración. Por el corolario 3.10, la curva C tiene a lo sumo un número finito de puntos singulares. Por lo tanto, al aplicar una adecuada transformación proyectiva podemos asumir que $[0, 1, 0]$ es un punto no singular de C y que la línea tangente a C en $[0, 1, 0]$ es la línea $z = 0$. Entonces C tiene que estar definida por un polinomio de la forma $ayz + bx^2 + cxz + dz^2$ para algunos números complejos a, b, c, d . Ahora bien, desde que C es irreducible, a y b son ambos no cero. La transformación proyectiva

$$[x, y, z] \mapsto [\sqrt{b}x, ay + cx + dz, -z],$$

mapea a C en la cónica $x^2 = yz$. Ya que la cónica es no singular se sigue que C es no singular también. \square

Observación 3.13. Sea C la cónica no singular definida por $x^2 = yz$ en \mathbb{P}^2 . Existe un homeomorfismo $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ dado por $f[x, y] = [xy, y^2, x^2]$ con inversa $g : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, dada por

$$g[x, y, z] = \begin{cases} [x, y] & \text{si } y \neq 0, \\ [z, x] & \text{si } z \neq 0. \end{cases}$$

(Note que si $[x, y, z] \in C$ entonces $x^2 = yz$, así que, si $y \neq 0 \neq z$, entonces $x \neq 0$ y

$$[x, y] = [x^2, xy] = [yz, xy] = [z, x]).$$

Por lo tanto por el corolario 3.12 cualquier cónica proyectiva irreducible es homeomorfa a \mathbb{P}^1 .

El siguiente resultado es otra aplicación del teorema de Bézout.

Proposición 3.14. *Si dos curvas proyectivas C y D de grados n y m respectivamente en \mathbb{P}^2 se intersectan en exactamente n^2 puntos y si exactamente nm de estos puntos se encuentran sobre una curva irreducible E de grado $m < n$ entonces el resto $n(n - m)$ de los puntos se encuentran sobre una curva de grado a lo más $n - m$.*

Demostración. Sean C, D y E definidas por polinomios homogéneos $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ respectivamente. Elíjase un punto $[a, b, c]$ sobre E el cual no se encuentre sobre $C \cap D$. Entonces la curva de grado n definida por $\lambda P(x, y, z) + \mu Q(x, y, z)$ donde $\lambda Q(a, b, c), \mu = -P(a, b, c)$, corta a E en al menos $nm + 1$ puntos, a saber $[a, b, c]$ y los nm puntos de $C \cap D$ los cuales están sobre E por hipótesis. Entonces, por el teorema 3.9 esta curva y E tienen que tener una componente en común, la cual tiene que ser E misma porque E es irreducible. Por lo tanto

$$\lambda P(x, y, z) + \mu Q(x, y, z) = R(x, y, z)S(x, y, z),$$

para algún polinomio homogéneo no constante de grado $n - m$. Por lo tanto, si $[u, v, w] \in C \cap D$, entonces o bien $R(x, y, z) = 0$ ó $S(u, v, w) = 0$. Por lo tanto los $n(n - m)$ puntos de $C \cap D$ los cuales no se encuentran sobre E todos tienen que estar sobre la curva definida por $S(x, y, z)$. \square

Corolario 3.15 (Hexágono místico de Pascal). *Los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica irreducible en \mathbb{P}^2 coinciden en tres puntos colineales.*

Observación 3.16. Este resultado tiene que ser interpretado como sigue. Un hexágono en \mathbb{P}^2 está simplemente determinado por seis puntos distintos p_1, \dots, p_6 en \mathbb{P}^2 (sus vértices) y sus lados son las líneas en \mathbb{P}^2 que unen a p_1 a p_2 ; p_2 a p_3 ; p_3 a p_4 ; p_4 a p_5 ; p_5 a p_6 y p_6 a p_1 . Los lados opuestos a la línea que une p_1 a p_2 es la línea que une p_4 a p_5 y así sucesivamente. El hexágono se dice inscrito en una cónica si sus vértices se encuentran sobre la cónica. Tres puntos \mathbb{P}^2 se dicen colineales si todos ellos se encuentran sobre una línea en \mathbb{P}^2 .

Demostración. del corolario 3.15. Sea la sucesión de lados del hexágono las líneas definidas por los polinomios lineales L_1, \dots, L_6 en x, y, z . Las dos curvas proyectivas de grado tres definidas por $L_1L_3L_5$ y $L_2L_4L_6$ se intersectan en los seis vértices del hexágono y los tres puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono. El resultado ahora se sigue inmediatamente de la proposición 3.14. \square

Observación 3.17. Si asumimos que la cónica está definida por un polinomio con coeficientes reales y los vértices del hexágono se encuentran en un subconjunto de \mathbb{R}^2 de $\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$ entonces obtenemos un teorema sobre la geometría euclideana real. (ver figura 3.1)

Con el fin de probar la forma fuerte 3.1 del teorema de Bézout, primero tenemos que definir la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ en un punto $p = [a, b, c]$ de dos curvas C y D en \mathbb{P}^2 . Vamos a definir la multiplicidad de intersección usando el resultante de los polinomios $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ que definen C y D en un adecuado sistema de coordenadas. A manera de mostrar que la definición es independiente de la elección de coordenadas, demostraremos que está determinado de forma única por las propiedades listadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.18. *Existe una única multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ definida para todas las curvas proyectivas C y D en \mathbb{P}^2 que satisfacen las siguientes propiedades (i) $I_p(C, D) = I_p(D, C)$.*

(ii) Si p se encuentra en una componente común de C y D , entonces $I_p(C, D) = \infty$. En otro caso $I_p(C, D)$ es un

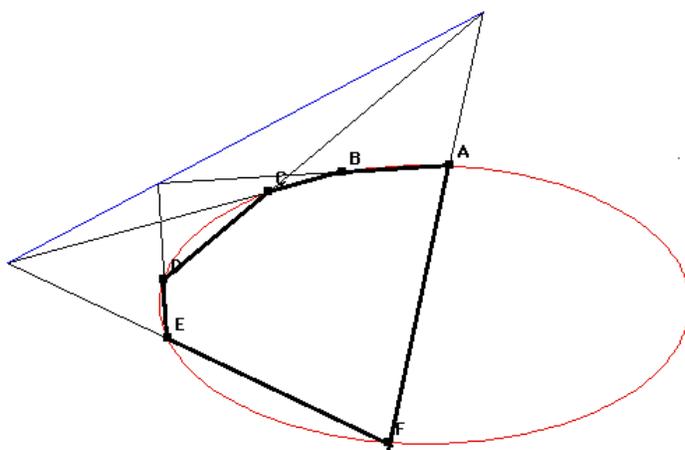


Figura 3.1: Hexágono místico de Pascal.

entero no negativo.

(iii) $I_p(C, D) = 0$ si, y sólo si $p \notin C \cap D$.

(iv) Dos líneas distintas coinciden con multiplicidad de intersección uno en su único punto de intersección.

(v) Si C_1 y C_2 están definidas por polinomios homogéneos $P_1(x, y, z)$ y $P_2(x, y, z)$, y C está definida por

$$P(x, y, z) = P_1(x, y, z)P_2(x, y, z),$$

entonces

$$I_p(C, D) = I_p(C_1, D) + I_p(C_2, D).$$

(vi) Si C y D están definidas por polinomios homogéneos $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ de grados n y m , y E está definido por $PR + Q$ donde $R(x, y, z)$ es homogéneo de grado $m - n$, entonces

$$I_p(C, D) = I_p(C, E).$$

Más aún, si C y D no tienen componentes en común y si elegimos coordenadas proyectivas tal que las condiciones

(a) $[1, 0, 0]$ no pertenece a $C \cup D$;

(b) $[1, 0, 0]$ no se encuentra sobre cualquier línea que contiene dos puntos distintos de $C \cap D$;

(c) $[1, 0, 0]$ no se encuentra sobre la línea tangente a C o D en cualquier punto de $C \cap D$; son satisfechas, entonces la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ de C y D en cualquier $p = [a, b, c] \in C \cap D$, es el entero más grande k tal que $(bz - cy)^k$ divide al resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$.

Observación 3.19. Un estudio cuidadoso de la prueba de unicidad de este teorema revelará que para que la prueba sea válida necesitamos permitir que las curvas tengan múltiples componentes, esto es, el polinomio que las define tenga factores repetidos. De hecho todos los argumentos de este capítulo se aplican sin alteración a curvas con múltiples componentes.

Demostración. del teorema 3.18. Para simplificar la notación en esta prueba, vamos a escribir $I_p(P, Q)$ en lugar de $I_p(C, D)$ cuando $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ son polinomios homogéneos que definen a las curvas C y D . Primero vamos a demostrar que la multiplicidad de intersección $I_p(P, Q)$ puede ser calculada usando sólo las condiciones (i)-(vi), así que éstas condiciones determinan a $I_p(P, Q)$ completamente. Ahora bien, desde que las condiciones son independientes de la elección de coordenadas, podemos asumir que $p = [0, 0, 1]$, más aún, de las condiciones (i) y (iv) podemos asumir que P y Q son irreducibles y además por (ii) que $I_p(P, Q)$ es finito y que $I_p(P, Q) = k > 0$ por la condición (iii). Finalmente por inducción sobre k , podemos asumir que cualquier multiplicidad de intersección estrictamente menor que k puede ser calculada sólo usando las condiciones (i)-(iv). Consideremos los polinomios $P(x, 0, 1)$ y $Q(x, 0, 1)$ en x de grados r y s respectivamente. Por la condición (i) podemos asumir que $r \leq s$, entonces tenemos dos casos a considerar.

Caso 1: $r = 0$. En este caso $P(x, 0, 1)$ es constante y por tanto cero desde que $P(0, 0, 1) = 0$. Ahora bien, desde que $P(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo se sigue que $P(x, 0, z)$ es idénticamente cero y por lo tanto que $P(x, y, z) = yR(x, y, z)$ para algún polinomio homogéneo $R(x, y, z)$. Más aún, podemos escribir

$$Q(x, y, z) = Q(x, 0, z) + yS(x, y, z) = x^q T(x, z) + yS(x, y, z),$$

para algunos polinomios homogéneos $T(x, z)$ y $S(x, y, z)$ tal que $T(0, 1)$ no es igual a cero, y para algún entero q el cual es positivo, ya que $Q(0, 0, 1) = 0$. Observemos que la condición $T(0, 1) \neq 0$ significa que el punto $p = [0, 0, 1]$ no se encuentra sobre la curva definida por $T(x, z) = 0$ y de la condición (iii) tenemos entonces que $I_p(y, T(x, z)) = 0$, mientras que de la condición (iv) tenemos que $I_p(y, x) = 1$. Juntando toda esta información y utilizando la condición (v) obtenemos que

$$I_p(P, Q) = I_p(R, Q) + I_p(y, Q),$$

y de (vi) obtenemos que

$$I_p(y, Q) = I_p(y, x^q T(x, z)),$$

y por el uso repetido de (v) y (ii) tenemos

$$I_p(y, x^q T(x, z)) = qI_p(y, x) + I_p(y, T(x, z)) = q.$$

Por lo tanto $I_p(P, Q) = I_p(R, Q) + q$, y desde que $q > 0$ nuestra hipótesis de inducción nos dice que $I_p(R, Q)$ puede ser calculado sólo usando las condiciones (i)-(vi).

Caso 2: $r > 0$. En este caso podemos multiplicar $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ por constantes para hacer a los polinomios $P(x, 0, 1)$ y $Q(x, 0, 1)$ polinomios mónicos. Sean n y m los grados de $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ respectivamente y consideremos el polinomio

$$S(x, y, z) = z^{n+s-r} Q(x, y, z) - x^{s-r} z^m P(x, y, z).$$

Esto se construye para ser un polinomio homogéneo en x, y, z tal que el polinomio

$$S(x, 0, 1) = Q(x, 0, 1) - x^{s-r}P(x, 0, 1),$$

en x tenga grado t estrictamente menor que s . Note que $S(x, y, z)$ no es idénticamente cero ya que hemos supuesto que $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ son irreducibles y distintos. Más aún, por (i),(v) y (vi) tenemos que

$$I_p(P, S) = I_p(P, z^{n+s-r}Q) = I_p(P, Q).$$

Ahora, reemplazando P y Q por P y S (o por S y P si $t < r$) y después de repetir este proceso un número finito de veces llegamos al caso 1.

Esto completa la parte de unicidad de la prueba. Para probar la existencia, vamos a definir la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ como sigue.

- Si p se encuentra en una componente común de C y D , entonces $I_p(C, D) = \infty$.
- Si p no pertenece a $C \cap D$, entonces $I_p(C, D) = 0$
- Si p pertenece a $C \cap D$, pero no se encuentra sobre una componente común de C y D , primero removemos cualquier componente común de C y D y entonces elegimos coordenadas tales que las condiciones (a)-(c) son satisfechas.

Si $p = [a, b, c]$ está en estas coordenadas, entonces $I_p(C, D)$ es el entero más grande k tal que $(bz - cy)^k$ divide al resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ de P y Q con respecto a x .

Resta demostrar que las condiciones (i)-(iv) ahora se satisfacen. En efecto, (i) es una consecuencia directa del hecho que al intercambiar dos renglones en un determinante cambia su signo y por lo tanto tenemos que $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z) = \pm \mathcal{R}_{Q,P}(y, z)$. (ii) Se sigue de la definición y del lema 3.4. (iii) Si $p = [a, b, c] \in C \cap D$ entonces los polinomios $P(x, b, c)$ y $Q(x, b, c)$ tienen una raíz en común a , luego por el lema 3.4 el polinomio homogéneo $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ se anula cuando $y = b$ y $z = c$. Luego entonces es divisible por $bz - cy$ y así tenemos $I_p(C, D) > 0$.

(iv) Se reduce al cálculo de un determinante de 2×2 .

(v) Es una consecuencia inmediata del lema 3.6.

(vi) Esto es cierto debido a que el determinante no cambia por la suma de un múltiplo escalar de un renglón a otro. El resultante de P y $PR + Q$ es el determinante de una matriz (s_{ij}) obtenida de la matriz (r_{ij}) definida por $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ por la suma de adecuados múltiplos escalares de las primeras n filas a las últimas m filas. Más precisamente, si

$$R(x, y, z) = \rho_0(y, z) + \rho_1(y, z)x + \cdots + \rho_{n-m}(y, z)x^{n-m},$$

entonces

$$s_{ij} = \begin{cases} r_{ij} & \text{si } i \leq m, \\ r_{ij} + \sum_{k=i-m}^{i-n} \rho_{i-n-k} r_{kj} & \text{si } i > m, \end{cases}$$

así que

$$\mathcal{R}_{P,PR+Q}(y, z) = \det(s_{ij}) = \det(r_{ij}) = \mathcal{R}_{P,Q}(y, z).$$

Esto completa la prueba del teorema y la definición de la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$. \square

Observación 3.20. La parte que corresponde a la unicidad en esta prueba muestra que el cálculo de la multiplicidad de intersección no es difícil. Este sólo involucra algo de simple manipulación algebraica de polinomios.

Observación 3.21. Tenemos que es una consecuencia de (iii) y (v) que la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ depende sólo sobre aquellas componentes de C y D en las cuales p está contenido.

Ahora podemos probar el teorema 3.1, la forma fuerte del teorema de Bézout.

Demostración. del teorema 3.1. Sean C y D curvas proyectivas de grados n y m en \mathbb{P}^2 respectivamente las cuales no tienen componentes en común. Tenemos que demostrar que el número de puntos de intersección contando multiplicidades es nm , esto es,

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = nm.$$

Podemos elegir coordenadas tales que las condiciones (a)-(c) del teorema 3.18 se satisfagan. Sean C y D definidas por polinomios homogéneos $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ en este sistema coordenado. Por los lemas 3.4 y 3.7 el resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado nm en dos variables y y z , el cual no es idénticamente cero, así que por el lema 2.8, este puede ser expresado como un producto de nm factores lineales en la forma

$$\mathcal{R}_{P,Q}(y, z) = \prod_{i=1}^k (c_i z - b_i y)^{e_i},$$

donde cada e_i es un entero positivo tal que $e_1 + \cdots + e_k = nm$ y (b_i, c_i) no es un múltiplo escalar de (b_j, c_j) cuando $i \neq j$. Por el mismo argumento usado para probar los teoremas 3.8 y 3.9 existen únicos números complejos a_i tales que $C \cap D = \{p_i : 1 \leq i \leq k\}$ donde $p_i = [a_i, b_i, c_i]$ y $I_p(C, D) = e_i$ de aquí se sigue el resultado. \square

Ahora describimos cuando la multiplicidad de intersección $I_p(C, D)$ es uno.

Proposición 3.22. Sean C y D curvas proyectivas en \mathbb{P}^2 y sea p cualquier punto en \mathbb{P}^2 . Entonces $I_p(C, D) = 1$ si, y sólo si p es un punto no singular de C y D y las líneas tangentes a C y D son distintas.

Observación 3.23. La prueba de esta proposición se puede extender para demostrar que en general

$$I_p(C, D) \geq m_p(C)m_p(D),$$

donde $m_p(C)$ y $m_p(D)$ son las multiplicidades de C y D en p como se definieron en el ejemplo 2.39 y la igualdad se tiene si, y sólo si C y D no tienen líneas tangentes en común.

Con el fin de probar la proposición 3.22 primero necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 3.24. *Si $p \in C \cap D$ es un punto no singular de C , entonces $I_p(C, D) > 1$.*

Demostración. Podemos asumir que C y D no tienen componentes en común y por tanto podemos elegir coordenadas tal que $p = [0, 0, 1]$ y las condiciones (a)-(c) del teorema 3.18 se tengan. Deseamos mostrar que y^2 divide al resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ de los polinomios $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ que definen a C y D . Ahora bien, desde que $p \in \text{Sing}(C)$ tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) = \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1) = P(0, 0, 1) = 0.$$

Así que, $P(x, y, z)$ es una suma de monomios todos de grado al menos dos en x y y , esto es,

$$P(x, y, z) = a_0(y, z) + a_1(y, z)x + \cdots + a_n(y, z)x^n,$$

donde y^2 divide a $a_0(y, z)$ y y divide a $a_1(y, z)$. También, tenemos $Q(0, 0, 1) = 0$, luego

$$Q(x, y, z) = b_0(y, z) + b_1(y, z)x + \cdots + b_m(y, z)x^m,$$

donde y divide a $b_0(y, z)$. Por lo tanto, podemos escribir $b_0(y, z) = b_{01}yz^{m-1} + y^2c_0$, y $b_1(y, z) = b_{10}z^{m-1} + yc_1(y, z)$ para algunos polinomios homogéneos $c_0(y, z)$ y $c_1(y, z)$. Si $b_{01} = 0$, entonces la primera columna del determinante definido por $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es divisible por y^2 y por lo tanto y^2 divide a $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ como se quería. Si $b_{01} \neq 0$ entonces la primera columna es divisible por y ; si sacamos este factor y restamos b_{10}/b_{01} veces la primera columna de la segunda columna, entonces la segunda columna llega a ser divisible por y . Por lo tanto, y^2 divide a $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$. \square

Demostración. de la proposición 3.22. Asumamos primero que p pertenece a $C \cap D$ y que C y D no tienen componentes en común. Por lo tanto podemos elegir coordenadas tales que las condiciones (a)-(c) del teorema 3.18 se satisfagan y $p = [0, 0, 1]$. Ahora bien, por el corolario 3.10 podemos asumir que p es un punto no singular de C y D . Sean $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ los polinomios que definen C y D . Deseamos demostrar que las líneas tangentes a C y D en p coinciden en p si, y sólo si y^2 divide al resultante $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ o equivalentemente si, y sólo si $\partial \mathcal{R}_{P,Q} / \partial y(0, 1) = 0$ desde que $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ es homogéneo y divisible por y .

Por (iii) del teorema 3.18, el punto $[1, 0, 0]$ no se encuentra sobre la línea tangente

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) + y \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1) + z \frac{\partial P}{\partial z}(0, 0, 1) = 0,$$

a C en $p = [0, 0, 1]$, luego

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0, 1) \neq 0. \quad (3.1)$$

Por lo tanto por el teorema de la función implícita para polinomios aplicado a el polinomio $P(x, y, 1)$ en x y y , existe una función holomorfa $\lambda_1 : U \rightarrow V$ donde U y V son vecindades abiertas de 0 tales que $\lambda_1(0) = 0$ y si $x \in V$ y $y \in U$ entonces $P(x, y, 1) = 0$ si, y sólo si $x = \lambda_1(y)$. Más aún, se tiene

$$P(x, y, 1) = (x - \lambda_1(y))l(x, y),$$

donde $l(x, y)$ es un polinomio en x del cual los coeficientes son funciones holomorfas de y . Si suponemos que el coeficiente de $P(1, 0, 0)$ de x^n es 1, entonces

$$l(x, y) = \prod_{i=2}^n (x - \lambda_i(y)),$$

donde $\lambda_1(y), \dots, \lambda_n(y)$ son las raíces de $P(x, y, 1)$ considerado como un polinomio en x con y fijo. Similarmente si U y V son elegidas lo suficientemente pequeñas, entonces existe una función holomorfa $\mu_1 : U \rightarrow V$ tal que $\mu_1(0) = 0$ y podemos escribir $Q(x, y, 1) = (x - \mu_1(y))m(x, y)$ donde

$$m(x, y) = \prod_{i=2}^m (x - \mu_i(y)),$$

es un polinomio en x de quien los coeficientes son funciones holomorfas de y . Entonces las líneas tangentes a C y D en $p = [0, 0, 1]$ están definidas por las ecuaciones $x = \lambda'_1(0)y$ y $x = \mu'_1(0)y$. Si $y \in U$, entonces, por el lema 3.6, tenemos

$$\mathcal{R}_{P,Q}(y, 1) = (\mu_1(y) - \lambda_1(y))S(y), \quad (3.2)$$

donde

$$S(y) = \prod_{(i,j) \neq (1,1)} (\mu_i(y) - \lambda_i(y)).$$

Note que $S(y)$ es el producto de los resultantes de los pares de polinomios $l(x, y)$ y $m(x, y)$, $l(x, y)$ y $x - \mu_1(y)$, y $m(x, y)$ y $x - \lambda_1(y)$. Por lo tanto, $S(y)$ es una función holomorfa de $y \in U$.

Ahora bien, desde que $\lambda_1(0) = 0 = \mu_1(0)$ obtenemos al diferenciar la ecuación (3.2) que

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{P,Q}}{\partial y}(0, 1) = (\mu'_1(0) - \lambda'_1(0))S(0).$$

Se sigue de la desigualdad (3.1) que el polinomio $P(x, 0, 1)$ no tiene raíces repetidas en 0 así que si $i > 1$, entonces $\lambda_i(0) \neq 0 = \mu_1(0)$ y similarmente tenemos $\mu_i(0) \neq 0 = \lambda_1(0)$. Más aún, si $\lambda_i(0) = \lambda_j(0)$ para algunos $i, j > 1$, entonces $[0, 0, 1]$ y $[\lambda_i(0), 0, 1] = [\lambda_j(0), 0, 1]$ son puntos distintos de C y D ambos perteneciendo a la línea $y = 0$, lo que contradice la condición (ii) del teorema 3.18. Luego $S(0) \neq 0$. Por lo tanto $\partial \mathcal{R}_{P,Q} / \partial y(0, 1) = 0$, si, y sólo si $\lambda'_1(0) = \mu'_1(0)$. Esto es, $I_p(C, D) > 1$ si, y sólo si las tangentes en C y D en p coinciden. \square

Corolario 3.25. Sean C y D curvas proyectivas en \mathbb{P}^2 de grados n y m respectivamente. Supóngase que cualquier $p \in C \cap D$ es un punto no singular de C y D y que las líneas tangentes a C y a D son distintas. Entonces la intersección $C \cap D$ consiste de exactamente nm puntos.

Demostración. Se sigue directamente del teorema 3.1 y la proposición 3.22. \square

Observación 3.26. Incluso si permitimos que las curvas sean definidas por polinomios con factores repetidos, las condiciones de este corolario nunca se satisfacen si de los polinomios $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ que

definen C y D se han repetido factores. Por ejemplo supongamos que $P(x, y, z) = A(x, y, z)^2 B(x, y, z)$ donde $A(x, y, z)$ es un polinomio no constante irreducible. Entonces la curva definida por $A(x, y, z)$ corta en D en al menos un punto p . Se verifica que $p \in C \cap D$ y todas las derivadas parciales de P se anulan en p .

3.2. Puntos de inflexión y curvas cúbicas

El concepto de un punto de inflexión sobre una curva C es una generalización de la definición usual de un punto de inflexión sobre la gráfica de una función (esto es, un punto en el cual la segunda derivada se anula). Vamos ver que cualquier curva proyectiva no singular de grado mayor que dos tiene al menos uno y a lo más un número finito de puntos de inflexión. Como un corolario vamos a mostrar que cualquier curva cúbica proyectiva no singular se puede expresar en la forma

$$y^2 z = x(x - z)(x - \lambda z),$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Comenzaremos nuestra investigación de la estructura natural de grupo abeliano sobre una curva cúbica no singular y su relación con los puntos de inflexión de la curva. Comenzamos con la definición de hessiana de un polinomio.

Definición 3.27. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d . La hessiana \mathcal{H}_P de P es el polinomio definido por

$$\mathcal{H}_P(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix},$$

donde $P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}, P_{zx}, P_{zy}$ y P_{zz} denotan las derivadas parciales mixtas.

Observación 3.28. Notemos que las segundas derivadas parciales de P son polinomios homogéneos de grado $d - 2$ en x, y, z ; así que \mathcal{H}_P es un polinomio homogéneo de grado $3(d - 2)$ en x, y, z .

Definición 3.29. Un punto no singular $[a, b, c]$ de una curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 definido por $P(x, y, z)$ es llamado un *punto de inflexión* de C si $\mathcal{H}_P(a, b, c) = 0$.

Con el fin de ver de como esta definición se relaciona con la definición usual de un punto de inflexión sobre una gráfica, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.30. Si $P(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado $d > 1$, entonces

$$z^2 \mathcal{H}_P(x, y, z) = (d - 1)^2 \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_x \\ P_{yx} & P_{yy} & P_y \\ P_x & P_y & dP/(d - 1) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Por la relación de Euler (2.2) tenemos que

$$dP(x, y, z) = xP_x(x, y, z) + yP_y(x, y, z) + zP_z(x, y, z).$$

Ahora bien, desde que las derivadas parciales de P son polinomios homogéneos de grado $d-1$ podemos aplicar la relación de Euler para obtener

$$(d-1)P_x = xP_{xx} + yP_{yx} + zP_{zx},$$

$$(d-1)P_y = xP_{xy} + yP_{yy} + zP_{zy},$$

$$(d-1)P_z = xP_{xz} + yP_{yz} + zP_{zz}.$$

Por lo tanto, multiplicando el primer renglón del determinante definido por \mathcal{H}_P por x y el segundo renglón por y y sumándolo al tercer renglón multiplicado por z llegamos a que

$$z\mathcal{H}_P(x, y, z) = (d-1) \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_x & P_y & P_z \end{pmatrix}.$$

Aplicando el mismo procedimiento a las columnas de este nuevo determinante y usando el hecho de que las segundas derivadas parciales de P son simétricas obtenemos

$$z^2\mathcal{H}_P(x, y, z) = (d-1)^2 \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_x \\ P_{yx} & P_{yy} & P_y \\ P_x & P_y & dP/(d-1) \end{pmatrix}.$$

□

Observación 3.31. Cuando la derivada parcial $\partial P/\partial y$ no es cero, la ecuación

$$P(x, y, 1) = 0,$$

localmente define a y como una función holomorfa de x . Diferenciando esta ecuación dos veces con respecto a x obtenemos primero que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial P}{\partial x}}{\frac{\partial P}{\partial y}},$$

y entonces

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + 2\frac{dy}{dx} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{2P_x P_y P_{xy} - (P_y)^2 P_{xx} - (P_x)^2 P_{yy}}{(P_y)^3}, \\ &= (P_y)^3 \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_x \\ P_{yx} & P_{yy} & P_y \\ P_x & P_y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenemos que, del lema 3.30, que si $d > 1$, entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathcal{H}_P(x, y, 1)}{(d-1)^2(P_y)^3}.$$

En particular si $P(a, b, 1) = 0 \neq P_y(a, b, 1)$, entonces $[a, b, 1]$ es un punto de inflexión de C si, y sólo si d^2y/dx^2 se anula en a cuando y es considerada como una función de x definida implícitamente por la ecuación $P(x, y, 1) = 0$. Así que, la definición de un punto de inflexión sobre una curva corresponde en un sentido razonable a la definición de un punto de inflexión sobre una gráfica.

Lema 3.32. *Sea $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : P(x, y, z) = 0\}$ una curva proyectiva irreducible de grado d . Entonces cualquier punto de C es un punto de inflexión si, y sólo si $d = 1$.*

Demostración. Supóngase que cualquier punto de C es un punto de inflexión. Aplicando una adecuada transformación proyectiva podemos asumir que

$$P(0, 0, 1) = 0 \neq \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0, 1).$$

Entonces por el teorema de la función implícita aplicada a el polinomio $P(x, y, 1)$ en x y y existe una función holomorfa $g : U \rightarrow V$ donde, U y V son vecindades de 0 en \mathbb{C} tal que $g(0) = 0$ y si $x \in U$ y $y \in V$, entonces $P(x, y, 1) = 0$, si, y sólo si $y = g(x)$. Podemos asumir que U es conexo y que $P_y(x, y, 1) \neq 0$, donde $x \in U$ y $y \in V$. Ahora bien, desde que cualquier punto de C es un punto de inflexión, por la observación 3.31 tenemos que $g''(x) = 0$ para cualquier $x \in U$. Como $g(0) = 0$ esto implica que existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $g(x) = \lambda x$, para todo $x \in U$ y por lo tanto el polinomio $P(x, \lambda x, 1)$ en x se anula. Desde que $P(x, y, z)$ es homogéneo, encontramos al igualar los coeficientes de x^j en $P(x, \lambda x, 1)$ a cero que $P(x, y, z)$ es divisible por $y - \lambda x$. Pero tenemos que C es irreducible así que $P(x, y, z)$ tiene que ser un múltiplo escalar de $y - \lambda x$. Luego $P(x, y, z)$ tiene grado $d = 1$. Es claro que si $d = 1$ la hessiana es igual a cero para cualquier punto de C , esto termina la prueba. \square

Proposición 3.33. *Sea C una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}^2 de grado d . (i) Si $d \geq 2$, entonces C tiene a lo más $3d(d-2)$ puntos de inflexión. (ii) Si $d \geq 3$ entonces C tiene al menos un punto de inflexión.*

Demostración. Por la observación 3.28, \mathcal{H}_P es homogéneo de grado $3(d-2)$, así que siempre que sea no constante (cuando $d > 2$ esto significa que no es idénticamente cero) éste define una curva proyectiva en \mathbb{P}^2 en el sentido general de las observaciones 2.3 y 2.24. Desde que toda la teoría de §3.1 se aplica a

las curvas en este sentido general los resultados se siguen de las formas 3.8 y 3.9 del teorema de Bézout una vez que hayamos demostrado que P y \mathcal{H}_P no tienen factores comunes no constantes si $d > 1$. Por el corolario 3.10(i) tenemos que una curva no singular es irreducible, ahora bien si P y \mathcal{H}_P tienen un factor común no constante entonces P divide a \mathcal{H}_P , luego cualquier punto de C es un punto de inflexión. Ahora el resultado es una consecuencia del lema 3.32. \square

Corolario 3.34. *Sea C una curva cúbica no singular en \mathbb{P}^2 . Entonces C es equivalente bajo una transformación proyectiva a la curva definida por $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.*

Demostración. Por la proposición 3.33 C tiene un punto de inflexión. Al aplicar una adecuada transformación proyectiva, podemos asumir que $[0, 1, 0]$ es un punto de inflexión de C y que la línea tangente a C en $[0, 1, 0]$ es la línea $z = 0$. Entonces C está definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ de grado 3 tal que

$$P(0, 1, 0) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}(0, 1, 0) = \frac{\partial P}{\partial y}(0, 1, 0) = \mathcal{H}_P(0, 1, 0).$$

También $\partial P / \partial z(0, 1, 0) \neq 0$, debido a que C es no singular. Ahora aplicando el lema 3.30 con lo papeles de y y z invertidos, obtenemos

$$y^2 \mathcal{H}_P(x, y, z) = 4 \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_x & P_{xz} \\ P_x & 3/2P & P_z \\ P_{zx} & P_z & P_{zz} \end{pmatrix},$$

de aquí que

$$0 = \mathcal{H}_P(0, 1, 0) = 4 \det \begin{pmatrix} P_{xx} & 0 & P_{xz} \\ 0 & 0 & P_z \\ P_{zx} & P_z & P_{zz} \end{pmatrix} = -4(P_z)^2 P_{xx},$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en $(0, 1, 0)$. Por lo tanto $P_{xx}(0, 1, 0) = 0$, y entonces $P(x, y, z) = yz(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \phi(x, z)$ donde $\phi(x, z)$ es homogéneo de grado 3 en x y en z y $\beta = \partial P / \partial z(0, 1, 0) \neq 0$ después de la transformación proyectiva dada por

$$[x, y, z] \mapsto \left[x, y + \frac{\alpha x + \gamma z}{2\beta}, z \right],$$

la curva C es definida por la ecuación $\beta y^2 z + \psi(x, z) = 0$, donde $\psi(x, z)$ es homogéneo de grado 3 en x y z y por lo tanto es un producto de tres factores lineales. Desde que C es no singular es irreducible, y por lo tanto $\psi(x, z)$ no es divisible por z , así que el coeficiente de x^3 en $\psi(x, z)$ no es cero. Por lo tanto, después de una transformación proyectiva diagonal, la curva C está definida por la ecuación $y^2 z = (x - az)(x - bz)(x - cz)$, para algunos $a, b, c \in \mathbb{C}$. Desde que a, b, c son distintos (de otra forma C sería singular) podemos aplicar la transformación proyectiva

$$[x, y, z] \mapsto \left[\frac{x - az}{b - a}, \eta y, z \right],$$

donde $\eta \in \mathbb{C}$ satisface $\eta^2 = (b - a)^{-3}$ y esta última transformación nos permite poner a C en la forma $y^2z = x(x - z)(x - \lambda z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. \square

Observación 3.35. La prueba del corolario 3.34, de hecho, muestra que si p es cualquier punto de inflexión sobre una curva cúbica no singular C , entonces existe una transformación proyectiva que manda a p a $[0, 1, 0]$ y que manda a C a la curva definida por $y^2z = x(x - z)(x - \lambda z)$, para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Ejemplo 3.36. Como una aplicación de este último resultado y el corolario 3.25 del teorema de Bézout, podemos mostrar que una curva cúbica no singular C en \mathbb{P}^2 tiene exactamente nueve puntos de inflexión. (Así, la cota dada en la proposición 3.33(i) siempre se alcanza en el caso de una cúbica no singular). Para probar esto supongamos que C es definida por $P(x, y, z)$ y sea D la curva proyectiva en \mathbb{P}^2 definida por la hessiana $\mathcal{H}_P(x, y, z)$. Sabemos de la observación 3.28 que $\mathcal{H}_P(x, y, z)$ es homogéneo de grado 3; sin embargo, este puede tener factores repetidos así que como en la prueba de la proposición 3.33 D tiene que ser considerada como una curva en el sentido generalizado visto en las observaciones 2.3 y 2.24. Nuevamente desde que toda la teoría de §3.1 se aplica a las curvas en este sentido generalizado, es suficiente mostrar que las condiciones del corolario 3.25 se satisfacen. Esto es, tenemos que mostrar que si $p \in C \cap D$ o equivalentemente si p es un punto de inflexión de C , entonces p es un punto no singular de C y D , y las líneas tangentes a C y a D en p son distintas.

Sabemos de la última observación que, aplicando una adecuada transformación proyectiva, podemos asumir que $p = [0, 1, 0]$ y $P(x, y, z) = y^2z - x(x - z)(x - \lambda z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Pero encontramos que $\partial P / \partial x(0, 1, 0) = 0 = \partial P / \partial y(0, 1, 0)$, $\partial P / \partial z(0, 1, 0) = 1$, $\partial \mathcal{H}_P / \partial x(0, 1, 0) = 24$, $\partial \mathcal{H}_P / \partial y(0, 1, 0) = 0$ y $\partial \mathcal{H}_P / \partial z(0, 1, 0) = 8(\lambda - 1)$. De donde concluimos que las condiciones del corolario 3.25 se satisfacen.

Como otro útil resultado sobre puntos de inflexión sobre curvas cúbicas probaremos que

Lema 3.37. *Una línea L en \mathbb{P}^2 corta a una curva cúbica no singular en o bien*

- (I) *en tres puntos distintos p, q, r cada uno con multiplicidad de intersección uno (i.e. L no es una línea tangente a p, q ó r); o*
- (II) *en dos puntos, p con multiplicidad de intersección uno y q con multiplicidad de intersección dos (i.e. L es la línea tangente a C en q pero no en p y q no es un punto de inflexión sobre C); o*
- (III) *en un punto p con multiplicidad de intersección tres (esto es, L es la línea tangente a C en p y p es un punto de inflexión sobre C).*

Demostración. Esto se puede deducir de la forma fuerte del teorema de Bézout comprobando que la definición de multiplicidad de intersección dada en el argumento del lema coincide con la definición dada en el teorema 3.18. Sin embargo, es apenas más largo y tal vez dá mayor claridad dar un argumento directo de la prueba y eso es lo que se hará aquí.

Desde que C es irreducible, tenemos que C no contiene a L , así que podemos asumir que L es la línea definida por $y = 0$ y el punto $[1, 0, 0]$ no se encuentra sobre C . Supongamos que la curva C está definida por un polinomio P . Por el lema 2.8, podemos factorizar $P(x, 0, z)$ como

$$P(x, 0, z) = \mu(x - \lambda_1 z)(x - \lambda_2 z)(x - \lambda_3 z),$$

para algunos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ y $\mu \in \mathbb{C} - \{0\}$, así que

$$C \cap L = \{[x, 0, z] \in \mathbb{P}^2 : P(x, 0, z) = 0\} \quad (3.3)$$

$$= \{[\lambda_i, 0, 1] : 1 \leq i \leq 3\}, \quad (3.4)$$

La línea tangente a C en $[\lambda_i, 0, 1]$ está definida por

$$x \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda_i, 0, 1) + y \frac{\partial P}{\partial y}(\lambda_i, 0, 1) + z \frac{\partial P}{\partial z}(\lambda_i, 0, 1) = 0.$$

Por la relación de Euler (2.2) esta línea es L si, y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\lambda_i, 0, 1) = 0,$$

o equivalentemente si, y sólo si λ_i es una raíz repetida del polinomio $P(x, 0, 1) = \mu(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$ luego, por el lema 3.30, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P(\lambda_i, 0, 1) &= 4 \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & 0 \\ P_{yx} & P_{yy} & P_y \\ 0 & P_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= -4(P_y)^2 P_{xx}. \end{aligned}$$

Evaluadas en el punto $(0, 1, 0)$ y

$$\frac{\partial P}{\partial y}(\lambda_i, 0, 1) \neq 0,$$

ahora bien, desde que C es no singular, tenemos que $[\lambda_i, 0, 1]$ es un punto de inflexión si, y sólo si

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(\lambda_i, 0, 1) = 0,$$

o equivalentemente si, y sólo si λ_i es una raíz de multiplicidad 3 en el polinomio $P(x, 0, 1)$. Ahora tenemos el resultado. \square

Finalizamos este capítulo con resultado el cual dice que una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}^2 tiene una estructura natural de grupo abeliano.

Teorema 3.38. *Dada cualquier curva cúbica proyectiva no singular C en \mathbb{P}^2 y un punto de inflexión p_0 en C existe una única estructura de grupo aditivo sobre C tal que p_0 es el elemento cero y tres puntos de C suman cero si, y sólo si son tres puntos de intersección de C con alguna línea en \mathbb{P}^2 .*

Demostración. Para probar la unicidad, note primero que los inversos aditivos están determinados de forma única desde que $-p_0 = p_0$, y si $p \neq p_0$ entonces $-p$ es el tercer punto de la intersección de C con la línea en \mathbb{P}^2 que pasa a través de p y p_0 . También, si p, q son cualesquiera puntos de C , entonces $p + q = -r$, donde r es el tercer punto de intersección de C con la línea en \mathbb{P}^2 que pasa a través de p y q (si $p \neq q$) o la línea tangente a C en p (si $p = q$). Por lo tanto la estructura de grupo aditivo está determinada de forma única.

Resta mostrar que existe una estructura de grupo aditivo con p_0 como el elemento cero definido de esta manera. La conmutatividad viene directamente de la definición de $p + q$. Para cualquier $p \in C$ tal que $p \neq p_0$ tenemos $p + p_0 = -r$ donde r es el tercer punto de la intersección de C con la línea en \mathbb{P}^2 que pasa por los puntos p y p_0 . Este punto r no es p_0 desde que p_0 es un punto de inflexión, así que $-r$ es el tercer punto de intersección de C con la línea en \mathbb{P}^2 que pasa por r y p_0 el cual es desde luego p . Por lo tanto $p + p_0 = p$ siempre que $p \neq p_0$ y $p_0 + p_0 = p_0$, ya que p_0 es un punto de inflexión (así que su línea tangente interseca a C con multiplicidad 3 en p_0). La prueba que $p + (-p) = p_0$ para cualquier $p \in C$ viene igualmente dada de las definiciones de adición y de inversos. Así que sólo resta probar la asociatividad la cual demostraremos en el capítulo 6 como una aplicación del teorema de Riemann-Roch. □

3.3. Ejemplos

Ejemplo 3.39. Sean C y D curvas proyectivas en \mathbb{P}^2 que no tienen componentes en común. Demuestre que

$$\text{Sing}(C \cup D) = \text{Sing}(C) \cup \text{Sing}(D) \cup (C \cap D).$$

Use el corolario 3.10 para deducir que cualquier curva proyectiva en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio con factores no repetidos tiene a lo más un número finito de puntos singulares.

Demostración. Sean C y D curvas proyectivas definidas por polinomios P y Q respectivamente. Sea $[a, b, c] \in \text{Sing}(C \cup D)$, entonces $[a, b, c] \in C \cup D$, luego $P(a, b, c)Q(a, b, c) = 0$, supongamos que $P(a, b, c) = 0$. Ahora bien, tenemos que

$$\frac{\partial PQ}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) + Q(x, y, z) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z).$$

Pero como $[a, b, c] \in \text{Sing}(C \cup D)$, tenemos $\partial PQ/\partial x(a, b, c) = 0$, así que $Q(a, b, c)\partial P/\partial x(a, b, c) = 0$, entonces $Q(a, b, c) = 0$ ó $\partial P/\partial x(a, b, c) = 0$. Si $Q(a, b, c) = 0$, sucede $[a, b, c] \in C \cap D$, así pues supongamos que $Q(a, b, c) \neq 0$, luego $\partial P/\partial x(a, b, c) = 0$ y de forma similar tenemos que $\partial P/\partial y(a, b, c) = 0 = \partial P/\partial z(a, b, c)$, lo que significa que $[a, b, c] \in \text{Sing}(C)$. Similarmente si suponemos que $Q(a, b, c) = 0$ y $P(a, b, c) \neq 0$ llegamos a que $[a, b, c] \in \text{Sing}(D)$. Por lo tanto en cualquier caso tenemos que $[a, b, c] \in \text{Sing}(C \cup D) = \text{Sing}(C) \cup \text{Sing}(D) \cup (C \cap D)$.

Para la contención recíproca obsérvese que de la regla del producto para derivadas parciales si $[a, b, c] \in C \cap D$, entonces $[a, b, c] \in \text{Sing}(C \cup D)$. Ahora bien, si $[a, b, c] \in \text{Sing}(C)$, entonces $P(a, b, c) = 0$ y $\partial P/\partial x(a, b, c) = \partial P/\partial y(a, b, c) = \partial P/\partial z(a, b, c) = 0$, luego $[a, b, c] \in \text{Sing}(C \cup D)$, de forma similar tenemos si $[a, b, c] \in \text{Sing}(D)$.

Ahora supongamos que C es una curva proyectiva en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio con factores no repetidos, afirmamos que tiene a lo más un número finito de puntos singulares. En efecto, supongamos que el polinomio que define a C está dado por $P(x, y, z) = P_1(x, y, z)P_2(x, y, z)\dots P_n(x, y, z)$ donde cada P_i es un polinomio irreducible y sean C_i las curvas proyectivas definidas por estas componentes, entonces por inducción al generalizar el anterior resultado a un número finito de curvas proyectivas tenemos que

$$\text{Sing}(C) = \text{Sing}(C_1) \cup \text{Sing}(C_2) \cup \dots \cup \text{Sing}(C_n) \cup (C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n).$$

Ahora bien, por el corolario 3.10 (ii) tenemos que $\text{Sing}(C_i)$ es un conjunto finito, además como P_i no tienen componentes en común, de la forma débil del teorema de Bézout tenemos que $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n$ es un conjunto finito, luego $\text{Sing}(C)$ es un conjunto finito, como deseamos probar. \square

Ejemplo 3.40. Use el teorema de Bézout para demostrar que si una curva proyectiva C en \mathbb{P}^2 de grado d tiene estrictamente más de $d/2$ puntos singulares los cuales se encuentran sobre una línea L , entonces L es una componente de C .

Demostración. Supongamos por el contrario que L no es una componente de C , entonces por el teorema de Bézout se tiene

$$\sum_{p \in L \cap C} I_p(L, C) = d,$$

donde $I_p(L, C)$ es la multiplicidad de intersección de la línea L y la curva C en p y d es el grado de la curva C . Ahora bien, del lema 3.24, tenemos que para cada punto singular $p \in L \cap C$ de C , $I_p(L, C) \geq 2$ y como tenemos estrictamente más de $d/2$ puntos singulares, entonces concluimos que

$$d = \sum_{p \in L \cap C} I_p(L, C) > 2(d/2) = d,$$

lo cual es una contradicción y como la contradicción surge al suponer que L no es una componente de C , se tiene que tener que L es una componente de C . \square

Ejemplo 3.41. Muestre que dados cinco puntos en \mathbb{P}^2 . Existe al menos una cónica que los contiene. Deduzca que una curva proyectiva de grado cuatro en \mathbb{P}^2 con cuatro puntos singulares es reducible.

Demostración. Sean $P_i = [a_i, b_i, c_i]$ con $1 \leq i \leq 5$ dichos puntos y sea

$$P(x, y, z) = ax^2 + b^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz,$$

una cónica, entonces necesitamos encontrar coeficientes a, b, c, d, e, f tal que $P(x, y, z)$ pase por estos puntos, pero si los puntos P_i están en la cónica tenemos que

$$aa_i^2 + bb_i^2 + cc_i^2 + da_ib_i + ea_ic_i + fb_ic_i = 0, \quad \text{para } 1 \leq i \leq 5;$$

pero este es un sistema homogéneo de 5 ecuaciones con 6 incógnitas, así que por un teorema de álgebra lineal el cual dice: Si A es una matriz $m \times n$ con $m < n$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene una solución no trivial, tenemos que el sistema 5×6 tiene una solución no trivial, pero esto significa que existe una cónica que contine a estos cinco puntos a saber, la formada por los coeficientes de la solución del sistema homogéneo.

Ahora bien, sea C una curva proyectiva de grado 4, con cuatro puntos singulares digamos p_1, p_2, p_3, p_4 y sea p_5 cualquier otro punto en C . Entonces por lo anterior sabemos que existe una cónica que contiene a estos cinco puntos digamos D , entonces C y D deben tener una componente en común, supongamos por el contrario que C y D no tienen componentes en común, entonces

$$\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = 8,$$

por otra parte, del lema 3.24, se tiene $I_{p_i}(C, D) \geq 2$ para $1 \leq i \leq 4$ y como $p_5 \in C \cap D$, entonces $I_{p_5}(C, D) \geq 1$, así que

$$\sum_{i=1}^5 I_{p_i}(C, D) \geq 9 > 8 = \sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) \geq \sum_{i=1}^5 I_{p_i}(C, D),$$

lo cual no puede ocurrir por lo tanto C y D deben de tener una componente en común y así tenemos que C es una curva reducible. \square

Ejemplo 3.42. Pruebe el siguiente recíproco del teorema de Pascal: si las intersecciones de los lados opuestos de un hexágono se encuentran sobre una línea recta, entonces los vértices se encuentran sobre una cónica.

Demostración. Sean $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ los vértices del hexágono. Si $i \neq j$ sea L_{ij} la línea que pasa por los puntos p_i y p_j . Deseamos demostrar que si los tres puntos de intersección de los pares de líneas L_{12} y L_{45} , L_{23} y L_{56} , L_{34} y L_{61} están sobre una línea recta, entonces p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 están sobre una cónica. Consideremos las curvas cúbicas $C = L_{12}L_{34}L_{56}$ y $D = L_{23}L_{45}L_{61}$, entonces C y D se intersectan en los seis vértices del hexágono y en los tres puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono, ahora bien, por hipótesis estos tres puntos están sobre una línea que es una curva irreducible de grado 1; luego, por la proposición 3.14, el resto de los puntos esto es $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ se encuentran en una curva de grado 2, es decir pertenecen a una cónica. \square

Ejemplo 3.43. Si en el teorema de Pascal dejamos que algunos vértices coincidan (los correspondientes lados del hexágono se convierten en tangentes a la cónica), obtenemos nuevos teoremas. Establezca que pasa si

- (a) $p_1 = p_2, p_3 = p_4, p_5 = p_6$, donde $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ son los vértices del hexágono.
- (b) $p_1 = p_2$ y todos los otros cuatro vértices son distintos. De (b) deduzca una regla para construir una tangente a una cónica en \mathbb{R}^2 en un punto dado usando sólo un lado recto.

Demostración. El caso (a) queda traducido en el siguiente teorema: Sea C una cónica irreducible y sea T un triángulo inscrito en la cónica con vértices p_1, p_2 y p_3 . Sea L_1 la línea que une los puntos p_1 y p_2 , L_2 la línea que une los puntos p_2 y p_3 y L_3 la línea que uno los puntos p_3 y p_1 . Si L'_i es la línea tangente a la cónica en el vértice, opuesto al lado de línea L_i , entonces los puntos donde se intersectan estos pares de líneas son colineales.

(b) Considere un pentágono inscrito en una cónica irreducible C y sean p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 los vértices del pentágono, además supongase que en p_1 tenemos una línea tangente a C . Sea L_{ij} la línea que pasa por los puntos p_i y p_j , que son los lados del pentágono. Ahora, sea R_1 el punto donde se intersectan la línea tangente y la línea L_{34} y sea R_2 el punto donde intersectan los lados del pentágono dado por las líneas L_{12} y L_{45} y R_3 el punto de intersección de las líneas L_{23} y L_{51} , entonces estos tres puntos son colineales. Sea p el punto donde deseamos la línea tangente y consideremos $p_1 = p, p_2, p_3, p_4, p_5$ cinco punto sobre

la cónica, entonces sea L_{ij} la línea que pasa por p_i y p_j , ahora bien tracemos el pentágono inscrito en C con vértices p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y los lados las líneas L_{ij} . Sea R_2 el punto de intersección de la línea L_{12} y la línea L_{45} y R_3 el punto de intersección de la línea L_{23} y la línea L_{51} trazamos el punto por el cual pasa la línea L_{31} y la línea que une los tres puntos colineales, la línea tangente pedida es pues la que pasa por p y este punto. \square

Capítulo 4

Propiedades topológicas

Sea C una curva proyectiva compleja. Ya que $C \subset \mathbb{P}^2$, entonces C tiene la topología de subespacio. Así, tiene sentido hablar de funciones continuas sobre C . En este capítulo vamos a investigar las curvas proyectivas no singulares desde un punto de vista topológico.

Es importante notar que una curva proyectiva en \mathbb{P}^2 es topológicamente una esfera con g asas (ver la figura 4.1 para una imagen cuando $g = 3$). Este número g es llamado *género* de la curva. Vamos a ver que está relacionado con el grado d de la curva por la fórmula *grado-género*:

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \quad (4.1)$$

Es también posible describir la topología de las curvas proyectivas singulares en \mathbb{P}^2 , aunque podría esperarse que la descripción es más complicada. Es suficiente considerar curvas irreducibles desde que cualquier curva proyectiva en \mathbb{P}^2 es la unión finita de curvas irreducibles (vease 2.25) que se cortan en un número finito de puntos (ver teorema 3.9.)

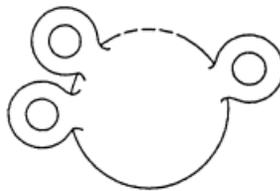


Figura 4.1: Una esfera con tres asas.

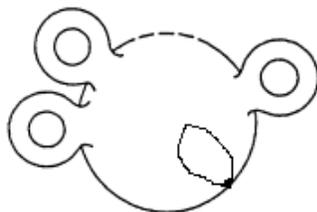


Figura 4.2: Una curva singular.

Resulta que una curva proyectiva irreducible es el resultado de identificar un número finito de puntos sobre una esfera con g asas (como se aprecia en la figura 4.2). Más precisamente, si C es una curva proyectiva irreducible de grado d en \mathbb{P}^2 con puntos singulares p_1, \dots, p_r , entonces existe una esfera con g asas C' y una función continua suprayectiva $\pi : C' \rightarrow C$, la cual se restringe a un homeomorfismo $\pi : C' - \pi^{-1}\{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow C - \{p_1, \dots, p_r\}$ y $\pi^{-1}(p_i)$, es un conjunto finito de puntos para cada $1 \leq i \leq r$. El número g es nuevamente llamado el género de C . El número de puntos $\pi^{-1}(p_i)$ depende sólo del tipo de singularidad de C en p_i . Por ejemplo, si p_i es un punto doble ordinario entonces $\pi^{-1}(p_i)$ consiste de dos puntos; más generalmente si p_i es un punto ordinario singular de cualquier multiplicidad $m \geq 2$, entonces $\pi^{-1}(p_i)$ consiste precisamente de m puntos. Por otra parte si C es la curva cúbica cuspidal definida por $y^2z = x^3$ y $p = [0, 0, 1]$ es el único punto singular de C , entonces $\pi^{-1}(p)$ consiste de un sólo punto y de hecho tenemos el caso que $\pi : C' \rightarrow C$ es un homeomorfismo. La fórmula del grado-género puede ser generalizada para aplicarse a C ; a cada punto singular p_i le podemos asignar un entero positivo $\delta(p_i)$ tal que la siguiente fórmula

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{j=1}^r \delta(p_j) \quad (4.2)$$

(llamada la *fórmula de Noether*) es verdadera.

Existen varias maneras de probar la fórmula del grado-género. En §4.1 damos una breve descripción de dos métodos. El primero sólo es de tipo atractivo pero esta más allá de los fines de esta tesis para llevarlo en detalle. El segundo es esencialmente el que vamos a usar en §4.2 y §4.3 para dar una prueba detallada de la fórmula del grado-género. En §4.1 la idea aproximada de la prueba se explica e ilustra con un ejemplo.

4.1. La fórmula de el grado-género

Nuestro objetivo es probar que una curva proyectiva compleja no singular de grado d en \mathbb{P}^2 es topológicamente una esfera con g asas donde el género g satisface la *fórmula del grado-género*

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

En esta sección vamos a describir dos métodos de prueba sin detalles.

4.1.1. El primer método de prueba

Este método se basa en tres pasos:

El primer paso es considerar una curva proyectiva compleja (singular) C_0 la cual es la unión de d líneas proyectivas en \mathbb{P}^2 en “posición general” en el sentido que ningún punto de \mathbb{P}^2 se encuentra sobre más de dos de estas líneas. Por lo tanto existen exactamente $\frac{1}{2}d(d-1)$ puntos de intersección de estas líneas y estos son los puntos singulares de C_0 .

Lema 4.1. *Una línea proyectiva compleja en \mathbb{P}^2 es homeomorfa a la esfera unitaria de dimensión dos*

$$S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1\}.$$

Demostración. Usamos la proyección estereográfica. Por la aplicación de una transformación proyectiva (la cual es un homeomorfismo) asumimos que L es la línea definida por $z = 0$. Ahora definamos $\phi : S^2 \rightarrow L$ por $\phi(u, v, w) = [u + iv, 1 - w, 0]$, para cada $(u, v, w) \in S^2$. Usando la definición de coordenadas homogéneas se verifica que ϕ es una biyección con inversa dada por

$$\phi^{-1}[x, y, 0] = \left(\frac{2\operatorname{Re}(x\bar{y})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(x\bar{y})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{|x|^2 - |y|^2}{|x|^2 + |y|^2} \right),$$

ϕ es continua desde que es la composición del mapa continuo $(u, v, w) \mapsto (u + iv, 1 - w, 0)$, de S^2 a $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ con el mapa $\pi : \mathbb{C}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ definido por $\pi(x, y, z) = [x, y, z]$, mientras que ϕ^{-1} es continua ya que su composición con la restricción de π a $\pi^{-1}(L) \subset \mathbb{C}^3 - \{0\}$ es continua. \square

Este lema muestra que, topológicamente, nuestra curva singular C_0 es homeomorfa a la unión de d esferas que se cortan en $\frac{1}{2}d(d-1)$ puntos.

Ahora parece intuitivamente razonable que de hecho es siempre posible, perturbar los coeficientes del polinomio definido por C_0 por una cantidad arbitrariamente pequeña para obtener una curva proyectiva no singular C_1 . Un argumento equivalente es que si $\mathbb{C}[y, z]$ denota el espacio de polinomios homogéneos de grado d en x, y, z con coeficientes complejos, entonces el subconjunto $\mathbb{C}^{\text{nosing}}[x, y, z]$ de $\mathbb{C}_d[x, y, z]$ que consiste de los polinomios los cuales definen curvas no singulares es denso. Esto se sigue del hecho que el subconjunto de $\mathbb{C}_d[x, y, z]$ que consiste de polinomios que definen curvas singulares tiene dimensión compleja una menos que la de $\mathbb{C}_d[x, y, z]$. Ahora observemos que $\mathbb{C}_d[x, y, z]$ puede ser identificado con $\mathbb{C}^{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)}$ por considerar simplemente los coeficientes de $x^i y^j z^k$ donde $i + j + k = d$.

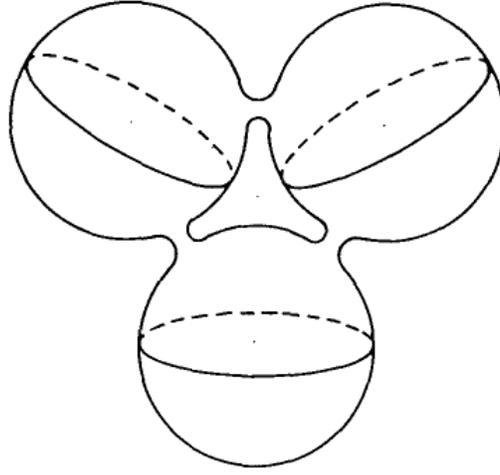


Figura 4.3: Una deformación de una curva singular.

Resulta que lo que sucede a un nivel topológico cuando se produce tal perturbación es que los puntos de intersección de las líneas proyectivas que componen a C_0 se convierten en muy finos cuellos lisos o asas que unen a las líneas proyectivas (ver figura 4.3). Precisamente $d - 1$ de estas asas son usadas para unir las d esferas juntas para formar una esfera (topológicamente). Por lo tanto, la curva no singular perturbada C_1 de C_0 es topológicamente equivalente a una esfera con

$$\frac{1}{2}d(d-1) - (d-1) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2),$$

asas. Por lo tanto, tenemos una curva no singular con la topología deseada.

El segundo paso en este método de prueba es demostrar que si los coeficientes de el polinomio que define una curva no singular son perturbados por una cantidad lo suficientemente pequeña, entonces la topología de la curva permanece sin cambios. Esto es quizá plausible en un nivel intuitivo, pero no intentaremos probarlo.

El tercer paso es mostrar que el espacio $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$ de polinomios homogéneos de grado d en x, y, z que definen a las curvas proyectivas no singulares es arco-conexo. Esto es, dadas cualesquiera dos curvas proyectivas de grado d en \mathbb{P}^2 definidas por los polinomios $P(x, y, z)$ y $Q(x, y, z)$ existen curvas no singulares C_t definidas por polinomios $P_t(x, y, z)$ para cada $t \in [0, 1]$ que dependen continuamente de t tal que $P_0(x, y, z) = P(x, y, z)$ y $P_1(x, y, z) = Q(x, y, z)$. El mapa continuo de $[0, 1]$ a $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$ definido por $t \mapsto P_t$ es llamado una trayectoria en $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$ de $P(x, y, z)$ a $Q(x, y, z)$. No es difícil demostrar que tal trayectoria existe. Si no fuera por el requisito de que cada $P_t(x, y, z)$ debe definir una curva singular, podríamos tomar simplemente

$$P_t(x, y, z) = (1-t)P(x, y, z) + tQ(x, y, z),$$

para obtener una trayectoria de $P(x, y, z)$ a $Q(x, y, z)$ en el espacio $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$. Desde que tal trayectoria tiene dimensión real uno y el complemento de $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$ en $\mathbb{C}_d[x, y, z]$ tiene codimensión real dos siempre podemos cambiar el camino muy ligeramente para asegurar que se pierda el complemento de $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$ y por lo tanto defina una trayectoria en $\mathbb{C}_d^{\text{nosing}}[x, y, z]$ como se requiere.

Ahora podemos juntar estos tres pasos para obtener el resultado que deseamos. Sea C cualquier curva proyectiva no singular de grado d en \mathbb{P}^2 . Por el primer paso existe una curva proyectiva no singular C_1 de grado d en \mathbb{P}^2 la cual es topológicamente una esfera con $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ asas. Por el tercer paso existe una trayectoria $t \mapsto C_t$ con $t \in [0, 1]$, de C a C_1 en el espacio de las curvas proyectivas no singulares de grado d en \mathbb{P}^2 . Ahora, finalmente por el segundo paso, dado $t \in [0, 1]$ existe $\varepsilon(t) > 0$ tal que si $|t-s| < \varepsilon(t)$ entonces C_s y C_t son homeomorfas. De esto se tiene que C_s y C_t son topológicamente equivalentes para todo $s, t \in [0, 1]$. En particular tenemos que C es homeomorfo a C_1 y por lo tanto es topológicamente es una esfera con $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ asas.

4.1.2. El segundo método de prueba

Este método está relacionado con el estudio de funciones holomorfas multivaluadas.

Sea C una curva no singular en \mathbb{P}^2 . Asumamos que C no contiene el punto $[0, 1, 0]$, así que el coeficiente de y^d en $P(x, y, z)$ es no cero. Entonces, pongamos $z = 1$ para encontrar la correspondiente curva afín definida por la ecuación $P(x, y, 1) = 0$, donde P define a C . Vamos a considerar a esta ecuación que define a y como una función multivaluada de x .

Ejemplo 4.2. Consideremos la siguiente curva no singular C definida por

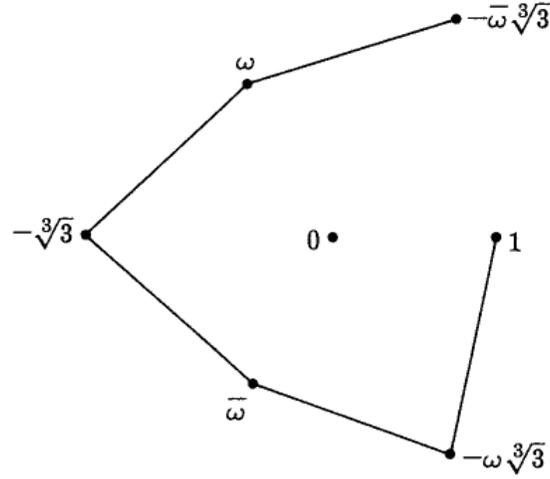
$$x^3 + y^3 + z^3 = 3yz^2,$$

Al hacer $z = 1$, obtenemos la ecuación $x^3 + y^3 + 1 = 3y$, la cual podemos considerar que define a y como una función multivaluada de x ; en efecto

$$y = \left(\frac{-(x^3 + 1) + \sqrt{x^6 + 2x^3 - 3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-(x^3 + 1) - \sqrt{x^6 + 2x^3 - 3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

para algunas elecciones apropiadas de las raíces cúbicas. Ahora bien, observemos que $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$ si, y sólo si x^3 es igual a 1 ó -3 , esto es, x es igual a $1, \omega, \bar{\omega}, -\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}$ ó $-\bar{\omega}\sqrt[3]{3}$ donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Para cualquier valor de x en $C - \{1, \omega, \bar{\omega}, -\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, -\bar{\omega}\sqrt[3]{3}\}$ le corresponde exactamente tres valores de y , y localmente estos definen tres funciones holomorfas de x llamadas ramas de la función multivaluada $y(x)$.

Cuando x viaja alrededor de cualquiera de estos puntos $\{1, \omega, \bar{\omega}, -\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, -\bar{\omega}\sqrt[3]{3}\}$ el valor de y cambia de una rama de la función multivaluada a otra. Si cortamos el plano \mathbb{C} a lo largo del segmento lineal recto $[1, -\omega\sqrt[3]{3}]$ de 1 a $\omega\sqrt[3]{3}$ y a lo largo de los segmentos lineales rectos $[-\omega\sqrt[3]{3}, \bar{\omega}]$, $[\bar{\omega}, -\sqrt[3]{3}]$, $[-\sqrt[3]{3}, \omega]$

Figura 4.4: El plano de corte D .

y $[\omega, -\bar{\omega}\sqrt[3]{3}]$ (ver figura 4.4) entonces encontramos que existen tres (de un solo valor) funciones holomorfas f_1, f_2, f_3 definidas sobre el plano de corte D que satisfacen que

$$f_j(x)^3 + x^3 + 1 = 3f_j(x),$$

para $j = 1, 2, 3$ y para todo $x \in D$. Por lo tanto los subconjuntos

$$\{[x, y, 1] \in C : x \in D\} = \bigcup_{j=1}^3 \{[x, y, 1] \in \mathbb{P}^2 : x \in D, y = f_j(x)\},$$

de C es la unión disjunta del plano de corte D . Si agregamos en el plano tres puntos al infinito esto significa que podemos construir C topológicamente por tomar tres copias de $D \cup \{\infty\}$ y pegar los lados de los cortes juntos apropiadamente, corresponde a la manera en la que la función multivaluada salta de una rama f_j a otra como y cruza los cortes. Note que cada copia de $D \cup \infty$ es topológicamente un disco y su frontera se compone de diez segmentos lineales.

Se verifica que la frontera debe ser identificada acorde a la figura 4.5 en los cuales a_j, b_j, c_j, d_j, e_j hacen referencia a los cortes a lo largo de $[1, -\omega\sqrt[3]{3}]$, $[-\omega\sqrt[3]{3}, \bar{\omega}]$, $[\bar{\omega}, -\sqrt[3]{3}]$, $[-\sqrt[3]{3}, \omega]$ y $[\omega, -\bar{\omega}\sqrt[3]{3}]$ respectivamente. Las dos copias de c_2 en el segundo disco pueden ser identificadas para dar un anillo de cuya frontera está dada por la figura 4.6. Los dos pares b_1c_1 y c_3d_3 que aparecen en el primer y tercer disco en la figura 4.5 se pueden identificar para dar otro anillo cuya frontera muestra la figura 4.7. Note que las copias adyacentes de a_3 y e_1 sobre esta figura se pueden pegar y por tanto eliminarse. Por lo tanto, los dos anillos dados en las figuras 4.6 y 4.7 se pueden pegar para dar una esfera con un asa, o un toro (figura 4.8).

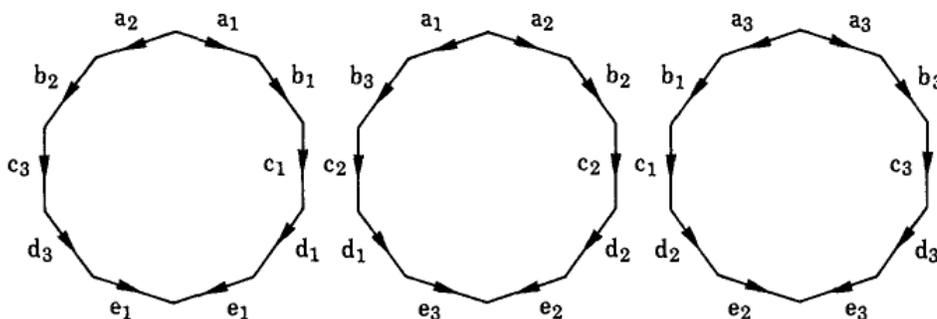


Figura 4.5: Tres discos para ser pegados.

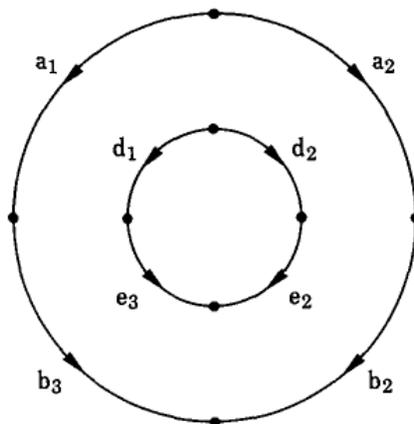


Figura 4.6: Anillo formado a partir del segundo disco.

Esto concuerda con la fórmula del grado-género (4.1) cuando $d = 3$ obtenemos $g = 1$.

Después de estudiar este ejemplo con cierto detalle, vamos a considerar el caso general nuevamente. Así, sea C una curva no singular de grado d en \mathbb{P}^2 la cual no contiene al punto $[0, 1, 0]$. Entonces la ecuación $P(x, y, 1) = 0$, definida por el polinomio P define a y como una función multivaluada de x tal que le corresponde exactamente d valores de y para cada valor de $x \in \mathbb{C}$, además de los *puntos de ramificación*, esto es, valores de x para los cuales existe un valor de y que satisface $P(x, y, 1) = 0 = \partial P / \partial x(x, y, 1)$. El punto ∞ es considerado como un punto de ramificación si existe un valor de y que satisface

$$P(1, y, 0) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(1, y, 0).$$

Si p_1, \dots, p_r son los puntos ramificación, ordenados adecuadamente, entonces podemos cortar el plano complejo \mathbb{C} a lo largo de los segmentos lineales rectos $[p_1, p_2], [p_2, p_3], \dots, [p_{r-1}, p_r]$ y definir funciones

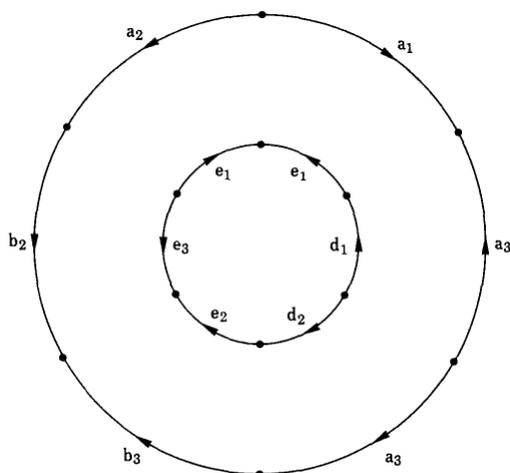


Figura 4.7: Anillo formado a partir del primer y tercer disco.

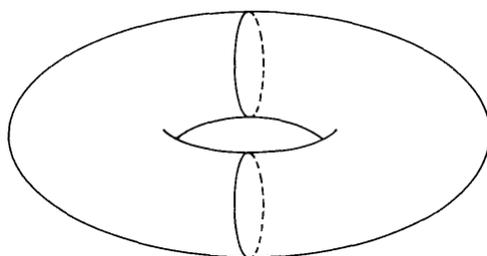


Figura 4.8: Toro.

holomorfos f_1, f_2, \dots, f_d sobre el plano de corte tal que si y se encuentra sobre el plano de corte entonces $P(x, y, 1) = 0$ si, y sólo si $y = f_j(x)$ para algún $j = 1, \dots, d$. Entonces como en el ejemplo 4.2 podemos construir la curva C pegando juntas d copias de el plano de corte a lo largo de los cortes. Esto siempre da como resultado una esfera con cierto número de asas. Sin embargo el cálculo de este número g requiere de algo de más información sobre los puntos de ramificación. Por esta razón vamos a estudiar los puntos de ramificación más detenidamente en la siguiente sección.

4.2. Cubiertas ramificadas de \mathbb{P}^1

La curva proyectiva no singular C definida por la ecuación $y^2 = xz$ admite una función suprayectiva $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ definida por $\phi[x, y, z] = [x, z]$ tal que si $[x, z] \in \mathbb{P}^1$ entonces $\phi^{-1}([x, z])$ consiste de exactamente dos puntos a menos que $x = 0$ ó $z = 0$. Un tal mapa $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ es llamado una cubierta doble de

\mathbb{P}^1 , ramificado sobre los puntos $[0, 1]$ y $[1, 0]$. Los puntos en C mapeados a $[0, 1]$ y $[1, 0]$ son llamados los puntos de ramificación de ϕ . Podemos usar ϕ para visualizar a C como dos copias de \mathbb{P}^1 pegadas juntas como en §1.2.3.

Vamos a ver en esta sección que cualquier curva proyectiva no singular de grado $d > 1$ en \mathbb{P}^2 puede ser visualizada como una cubierta ramificada de \mathbb{P}^1 en una forma similar. Vamos a mostrar que si elegimos coordenadas sobre \mathbb{P}^2 de forma apropiada entonces el número de puntos de ramificación es precisamente $d(d-1)$. Vamos a usar esto en la siguiente sección para probar la fórmula del grado-género.

Sea C una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ de grado $d > 1$. Aplicando una adecuada transformación proyectiva podemos asumir que $[0, 1, 0] \notin C$. Entonces tenemos un mapa bien definido $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ dado por $\phi[x, y, z] = [x, z]$.

Definición 4.3. El índice de ramificación $\nu_\phi[a, b, c]$ de ϕ en un punto $[a, b, c] \in C$ es el orden del cero del polinomio $P(a, y, c)$ en y para $y = b$. El punto $[a, b, c]$ es llamado un punto de ramificación de ϕ si $\nu_\phi[a, b, c] > 1$.

Observación 4.4. 1. $\nu_\phi[a, b, c] > 0$ si, y sólo si $[a, b, c] \in C$,

2. $\nu_\phi[a, b, c] > 1$ si, y sólo si

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c),$$

esto es, si, y sólo si $[a, b, c] \in C$ y la línea tangente a C en $[a, b, c]$ contiene a el punto $[0, 1, 0]$.

3. $\nu_\phi[a, b, c] > 2$ si, y sólo si

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c).$$

Esto pasa si, y sólo si $[a, b, c]$ es un punto de inflexión sobre C y la línea tangente a C en $[a, b, c]$ contiene a el punto $[0, 1, 0]$. Para demostrar esto notemos que si $[a, b, c] \neq [0, 1, 0]$, entonces $a \neq 0$ o $c \neq 0$. Supongamos que $c \neq 0$; el caso $a \neq 0$ se procede de forma similar. Supongamos que

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c);$$

entonces por el lema 3.30 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P(a, b, c) &= \frac{(d-1)^2}{c^2} \det \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_x \\ P_{yx} & P_{yy} & 0 \\ P_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{(d-1)^2}{c^2} (P_x)^2 P_{yy}, \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en (a, b, c) . Por la relación de Euler (2.2) si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = 0,$$

entonces como $c \neq 0$ y $\partial P/\partial y(a, b, c) = 0$ el punto $[a, b, c] \in C$ sería un punto singular, lo cual contradice el hecho que C es una curva no singular por lo tanto $\mathcal{H}_P(a, b, c) = 0$ si, y sólo si

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(a, b, c) = 0,$$

como se pedia.

Lema 4.5. *La imagen inversa $\phi^{-1}([a, c])$ de cualquier punto en \mathbb{P}^1 bajo ϕ contine exactamente*

$$d - \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} (\nu_\phi(p) - 1),$$

puntos. En particular $\phi^{-1}([a, c])$ contiene d puntos si, y sólo si $\phi^{-1}([a, c])$ no contiene puntos de ramificación de ϕ .

Demostración. Un punto C se encuentra en $\phi^{-1}([a, c])$ si, y sólo si es de la forma $[a, b, c]$ donde $b \in \mathbb{C}$ satisface $P(a, b, c) = 0$. Por suposición $[0, 1, 0] \notin C$ así que $P(0, 1, 0) \neq 0$. Por lo tanto, podemos asumir que $P(0, 1, 0) = 1$. Entonces $P(a, y, c)$ es un polinomio mónico de grado d en y así que

$$P(a, y, c) = \prod_{1 \leq i \leq r} (y - b_i)^{m_i},$$

donde b_1, b_2, \dots, b_r son números complejos distintos y m_1, m_2, \dots, m_r son enteros positivos tales que

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = d.$$

Por lo tanto $\phi^{-1}([a, c]) = \{[a, b_i, c] : 1 \leq i \leq r\}$ y en índice de ramificación de ϕ en $[a, b_i, c]$ es

$$\nu_\phi[a, b_i, c] = m_i.$$

El resultado ahora se sigue. □

Definición 4.6. Sea R el conjunto de puntos de ramificación de ϕ . La imagen $\phi(R)$ de R bajo ϕ es llamado el *lugar geométrico ramificado* de ϕ , y $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ es llamada una *cubierta ramificada* de \mathbb{P}^1 .

Lema 4.7. (i) ϕ tiene a lo más $d(d-1)$ puntos de ramificación. (ii) Si $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in C$, entonces C tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación.

Demostración. Desde que C es una curva no singular tenemos por el corolario 3.10 que es irreducible. Por hipótesis $[0, 1, 0] \notin C$, así que el coeficiente $P(0, 1, 0)$ de y^d en $P(x, y, z)$ es no cero. Por lo tanto el polinomio homogéneo $\partial P/\partial y(x, y, z)$ no es idénticamente cero y tiene grado $d-1$, así que no puede ser divisible por $P(x, y, z)$. Por lo tanto la curva proyectiva D de grado $d-1$ definida por este polinomio no tiene componentes en común con C . Por lo tanto (i) se sigue de la forma débil del teorema de Bézout, debido a que el conjunto R de punto de ramificación de C es la intersección de C y D .

Ahora supongamos que $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$, para todos los $[a, b, c] \in C$. Por el corolario 3.25 de la forma fuerte del teorema de Bézout, con el fin de probar (ii) es suficiente mostrar que si $[a, b, c]$ se encuentra en $R = C \cap D$, entonces $[a, b, c]$ es un punto no singular de D y las líneas tangentes a C y a D en $[a, b, c]$ son distintas. Si no, entonces satisfacen $P(a, b, c) = 0 = P_y(a, b, c)$, porque están en C y D , y el vector $(P_{xy}(a, b, c), P_{yy}(a, b, c), P_{zy}(a, b, c))$, o bien es cero o es un múltiplo escalar del vector $(P_x(a, b, c), P_y(a, b, c), P_z(a, b, c))$. Esto implica que $P(a, b, c) = 0 = P_y(a, b, c) = P_{yy}(a, b, c)$, esto es, $\nu_\phi[a, b, c] > 2$. Esto produce una contradicción y completa la prueba. \square

Lema 4.8. *Aplicando una adecuada transformación proyectiva a C podemos asumir que $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in C$.*

Demostración. Por la proposición 3.33, C tiene un número finito, a saber, a lo más $3d(d-2)$ puntos de inflexión. Por lo tanto, aplicando una adecuada transformación proyectiva podemos asumir que $[0, 1, 0]$ no se encuentra sobre C ni sobre ninguna de las líneas tangentes a C en sus puntos de inflexión. El resultado ahora se tiene de la observación 4.4(3). \square

4.3. Demostración de la fórmula del grado-género

Podemos usar los resultados sobre cubiertas ramificadas en esta última sección para probar la fórmula del grado-género (4.1) que relaciona el grado d y género g de una curva proyectiva compleja no singular en \mathbb{P}^2 . La primer tarea es dar una definición precisa del término género. Para este propósito, introducimos el concepto de triangulación de una curva C , la idea aproximada es dividir C en triángulos. Sea

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

el triángulo estandar en \mathbb{R}^2 con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Sea

$$\Delta^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\},$$

su interior.

Definición 4.9. Sea C una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}^2 . Una *triangulación* de C está dada por la siguiente información:

- (a) Un conjunto finito no vacío V de puntos llamados *vértices*,
- (b) Un conjunto finito no vacío E de mapas continuos $e : [0, 1] \rightarrow C$ llamados *lados*,
- (c) Un conjunto finito no vacío F de mapas continuos $f : \Delta \rightarrow C$ llamados *caras*,

que satisfacen

- (i) $V = \{e(0) : e \in E\} \cup \{e(1) : e \in E\}$, esto es, los vértices son los puntos finales de los lados;
- (ii) si $e \in E$, entonces la restricción de e a el intervalo $(0, 1)$ es un homeomorfismo sobre su imagen en C , y está imagen no contiene puntos en V o en la imagen de cualquier otro lado $\bar{e} \in E$;

(iii) si $f \in F$, entonces la restricción de f a Δ^0 es un homeomorfismo sobre una componente conexa K_f de $C - \Gamma$, donde

$$\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1]),$$

es la unión de la imagen de los lados, y si $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow \Delta$ son definidas por

$$r(t) = 1 - t, \quad \sigma_1(t) = (t, 0), \quad \sigma_2(t) = (1 - t, t), \quad \sigma_3(t) = (0, 1 - t),$$

entonces o bien $f \circ \sigma_i$ ó $f \circ \sigma_i \circ r$ es un lado $e_f^i \in E$ para $1 \leq i \leq 3$;

(iv) el mapa $f \mapsto K_f$ de F a el conjunto de las componentes conexas de $C - \Gamma$ es una biyección;

(v) Para cualquier $e \in E$ existe exactamente una cara $f_e^+ \in F$ tal que $e = f_e^+ \circ \sigma_i$ para algún $1 \leq i \leq 3$ y exactamente una cara $f_e^- \in F$ tal que $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$ para algún $1 \leq i \leq 3$.

Observación 4.10. Esta no es la definición estándar de triangulación, pero es la conveniente para nuestros propósitos. En particular podemos asumir que V, E y F son finitos desde que estamos tratando con espacios compactos. Además la condición 4.9(v) nos dice que es una triangulación coherentemente orientada.

Definición 4.11. El *número de Euler* χ de una triangulación es definido por

$$\chi = |V| - |E| + |F| \tag{4.3}$$

donde el símbolo $|S|$ denota el número de elementos de un conjunto finito.

El número de Euler es importante debido al siguiente teorema cuya demostración puede consultarse en [1].

Teorema 4.12. (i) *Cualquier curva proyectiva en \mathbb{P}^2 tiene una triangulación.*

(ii) *El número de Euler χ de una triangulación de C depende sólo sobre C , no sobre la triangulación.*

Debido a este teorema podemos definir el número de Euler $\chi(C)$ de C como el número de cualquier triangulación.

Ejemplo 4.13. (I) Por el Lema 4.1 una línea proyectiva en \mathbb{P}^2 es homeomorfa a una esfera. Por lo tanto tiene una triangulación de tres vértices, tres lados y dos caras (ver figura 4.9). Por lo tanto

$$\chi(\mathbb{P}^1) = 3 - 3 + 2 = 2.$$

(II) La curva cúbica no singular definida por $y^2z = x(x - z)(x - \lambda z)$ con $\lambda \neq 0, 1$ es topológicamente un toro, así que tiene una triangulación de un vértice, tres lados, y dos caras (ver figura 4.10). Por lo tanto $\chi(C) = 1 - 3 + 2 = 0$.

Ahora daremos la definición del género de una curva proyectiva no singular C en términos del número de Euler χ de C .

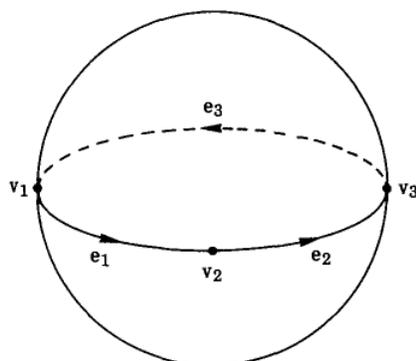


Figura 4.9: Una triangulación de una esfera.

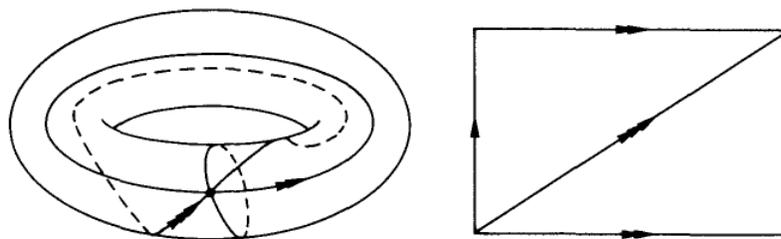


Figura 4.10: Una triangulación de un toro.

Definición 4.14. Sea C una curva proyectiva no singular y sea χ el número de Euler de C definimos el género de C por

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi) \quad (4.4)$$

Ejemplo 4.15. Supongamos que C es homeomorfa a la esfera con g asas (ver la figura 4.11 para una imagen cuando $g = 3$). Entonces C puede cortarse en $g - 2$ piezas de la forma ilustrada en la figura 4.12 junto con dos piezas de la forma ilustrada en la figura 4.13. Estas piezas pueden subdividirse en triángulos, por ejemplo como en las figuras 4.14 y 4.15.

Por lo tanto, C tiene una triangulación con $2g - 1$ vértices, $12g - 9$ lados y $8g - 6$ caras, así que su número de Euler es

$$\chi = (2g - 1) - (12g - 9) + 8g - 6 = 2 - 2g,$$

y, por lo tanto, el género de C es $\frac{1}{2}(2 - \chi) = g$.

De aquí podemos notar que la definición dada de género de C se ajusta a nuestra descripción original de género como el "número de asas".

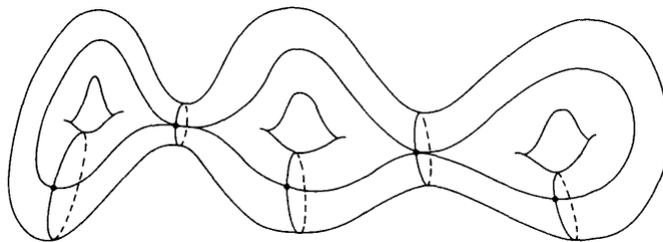


Figura 4.11: Una esfera con tres asas.

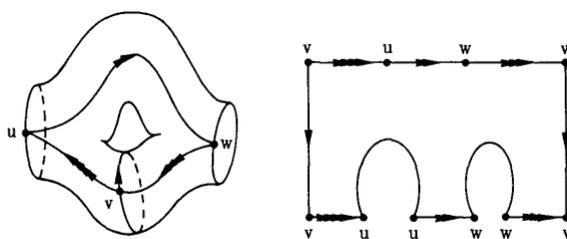


Figura 4.12: Pieza de una esfera con asas.

Nos preguntamos de manera natural que pasa con el género o el número de Euler cuando dos curvas son homeomorfas, la siguiente observación da respuesta a ello.

Observación 4.16. Si $h : C \rightarrow D$ es un homeomorfismo entre dos curvas proyectivas no singulares C y D y si C tiene una triangulación con V, E, F como el conjunto de vértices, lados y caras, entonces D tienen una triangulación con vértices $\{h(v) : v \in V\}$; lados $\{h \circ e : e \in E\}$; y caras $\{h \circ f : f \in F\}$. Por lo tanto C y D tienen el mismo número de Euler y el mismo género. En otras palabras el número de Euler y el género de una curva proyectiva no singular son *invariantes topológicos*: sólo dependen de la topología de la curva, no de su estructura algebraica.

Para demostrar la fórmula del grado-género primero necesitamos demostrar los siguientes resultados.

Lema 4.17. Existe una triangulación de \mathbb{P}^1 que tenga por vértices cualquier conjunto de al menos tres puntos p_1, p_2, \dots, p_r tal que tenga $3r - 6$ lados y $2r - 4$ caras.

Demostración. Esta prueba la haremos por inducción sobre el número de vértices para $r \geq 3$. Cuando $r = 3$ existe una transformación proyectiva que manda p_1 a 1 , p_2 a $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y p_3 a $e^{\frac{4\pi i}{3}}$, esto en virtud del lema 2.21. Note que aquí estamos identificando \mathbb{P}^1 con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Podemos unir estos tres puntos mediante segmentos del círculo unitario en \mathbb{C} (ver figura 4.16).

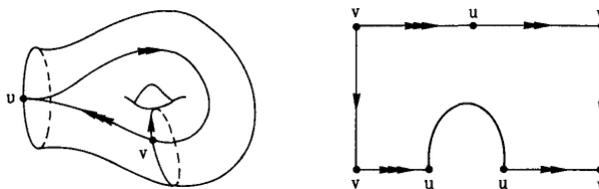


Figura 4.13: Extremidad de una esfera con asas.

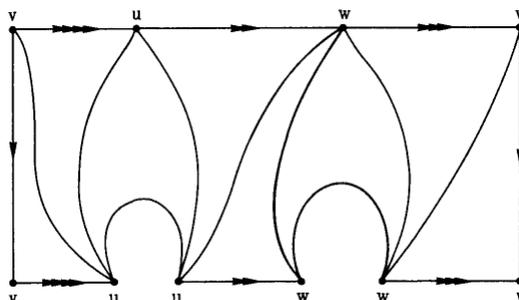


Figura 4.14: Una subdivisión de la figura 4.12.

La transformación proyectiva $z \mapsto \frac{1}{z}$ tiene el efecto de mapear el exterior del círculo unitario junto con el infinito a el interior del círculo unitario. Ahora bien, desde que existe un homeomorfismo

$$\Delta \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

el cual manda los vértices del triángulo a $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ y manda los lados de Δ a los segmentos correspondientes del círculo, así obtenemos una triangulación de \mathbb{P}^1 con tres lados y dos caras cuando $r = 3$.

Ahora supongamos que tenemos una triangulación con vértices p_1, p_2, \dots, p_{r-1} y $3r - 9$ lados y $2r - 6$ caras. Si p_r se encuentra en el interior de una cara (más precisamente, si $p_r \in f(\Delta^0)$) podemos agregar tres lados que unan p_r a los vértices de la cara f (ver figura 4.17) y obtenemos una nueva triangulación con un vértice extra, p_r , tres lados extra y una cara vieja subdividida en tres nuevas caras. Si p_r no está en el interior de una cara, entonces se encuentra sobre un lado e (más precisamente $p_r = e(t)$ para algún $t \in (0, 1)$). Podemos entonces reemplazar e por dos lados que unen p_r a $e(0)$ y $e(1)$ y agregar dos lados que unen p_r a el resto de los vértices de de las caras f_e^+ y f_e^- (ver figura 4.18) esto da una triangulación con un nuevo vértice, p_r , dos lados extra y un lado viejo reemplazado por dos nuevos y dos caras viejas cada una reemplazada por dos nuevas caras. Al realizar los cálculos el resultado se tiene. \square

La siguiente proposición nos dice que dada una curva proyectiva C ; entonces, bajo ciertas hipótesis, si tenemos una triangulación de \mathbb{P}^1 podemos inducir una triangulación en C .

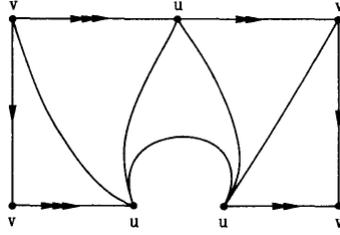
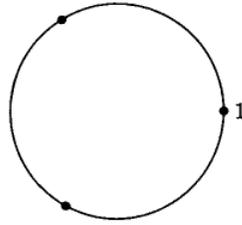


Figura 4.15: Una subdivisión de la figura 4.13.

Figura 4.16: Una subdivisión de C .

Proposición 4.18. *Supongase que C es una curva proyectiva no singular que no contiene a $[0, 1, 0]$ y sea $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ una cubierta ramificada definida por $\phi[x, y, z] = [x, z]$. Ahora consideremos que (V, E, F) es una triangulación de \mathbb{P}^1 de tal manera que el conjunto de vértices V contiene a el lugar geométrico ramificado $\phi(R)$ de ϕ . Entonces existe una triangulación $(\bar{V}, \bar{E}, \bar{F})$ de C tal que $\bar{V} = \phi^{-1}(V)$, $\bar{E} = \{\bar{e} : [0, 1] \rightarrow C : \bar{e} \text{ es continua, } \phi \circ \bar{e} \in E\}$ y $\bar{F} = \{\bar{f} : \Delta \rightarrow C : \bar{f} \text{ es continua, } \phi \circ \bar{f} \in F\}$. Más aún, si $\nu_\phi(p)$ es el índice de ramificación de ϕ en p y d es el grado de C entonces*

$$|\bar{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

$$|\bar{E}| = d|E| \quad \text{y} \quad |\bar{F}| = d|F|.$$

Demostración. Tenemos que demostrar que \bar{V} , \bar{E} y \bar{F} satisfacen las condiciones (i) – (v) en la definición 4.9 de una triangulación y que las fórmulas para $|\bar{V}|$, $|\bar{E}|$ y $|\bar{F}|$ son correctas.

Si $f \in F$ y $p \in C$ y $\phi(p) = f(t)$ para algún $t \in \Delta$ que no es igual a cualquiera de los vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ o $(0, 1)$, entonces existe un único mapa continuo $\bar{f} : \Delta \rightarrow C$ tal que $\phi \circ \bar{f} = f$ y $\bar{f}(t) = p$. Por el lema 4.5 $\phi^{-1}\{f(t)\}$ consiste de exactamente d puntos de C (por que $f(t)$ no se encuentra en el lugar geométrico ramificado $\phi(R)$) así que podemos deducir que existen exactamente d mapas continuos $\bar{f} : \Delta \rightarrow C$ tal que $\phi \circ \bar{f} = f$. Esto significa que $|\bar{F}| = d|F|$. Podemos deducir también que

$$C - \phi^{-1}(V) = \phi^{-1}\{f(t) : f \in F, t \in \Delta, t \neq (0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \quad (4.5)$$

$$= \{\bar{f}(T) : \bar{f} \in \bar{F}, t \in \Delta, t \neq (0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \quad (4.6)$$

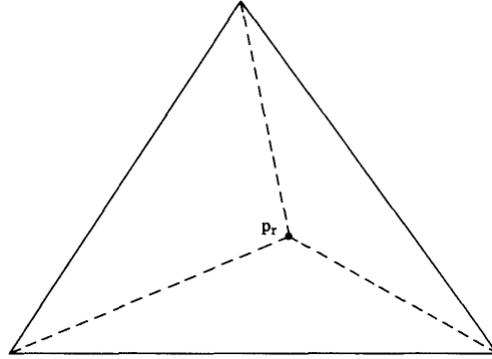


Figura 4.17: Una subdivisión de un triángulo.

En particular

$$G = \bigcup_{\bar{f} \in \bar{F}} \bar{f}(\Delta),$$

contiene a $C - \phi^{-1}(V)$ y por tanto es denso en C porque $\phi^{-1}(V)$ es finito por el lema 4.5. (El complemento de un conjunto finito de puntos en C es siempre denso, ver observación 5.26). Pero Δ es compacto (por 2.12 (i)) así que si $\bar{f} \in \bar{F}$, entonces (por 2.12 (ii)) $\bar{f}(\Delta)$ es compacto, así que G es compacto (por 2.12 (vi)) luego G es cerrado en C (por 2.12(v) y 2.29). Por lo tanto $G = C$, lo cual implica que

$$\phi^{-1}(V) = \{\bar{f}(t) : \bar{f} \in \bar{F}, t \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}\}.$$

Si $\bar{f} \in \bar{F}$ entonces $\phi \circ \bar{f} \in F$ así que o bien $\phi \circ \bar{f} \circ \sigma_i \in E$ ó $\phi \circ \bar{f} \circ \sigma_i \circ r \in E$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, si $\bar{f} \in \bar{F}$ entonces o bien $\bar{f} \circ \sigma_i \in \bar{E}$ ó $\bar{f} \circ r \in \bar{E}$, así que

$$\bar{f}(t) \in \{\bar{e}(0) : \bar{e} \in \bar{E}\} \cup \{\bar{e}(1) : \bar{e} \in \bar{E}\},$$

si $t \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$. Pero esto significa que

$$\phi^{-1}(V) = \{\bar{e}(0) : \bar{e} \in \bar{E}\} \cup \{\bar{e}(1) : \bar{e} \in \bar{E}\};$$

Esto es, la condición (i) de 4.9 se satisface.

Si $e \in E$ y $p \in C$ y $\phi(p) = e(t)$ para algún $t \in (0,1)$ entonces existe un único mapa continuo $\bar{e} : [0,1] \rightarrow C$, tal que $\phi \circ \bar{e} = e$ y $\bar{e}(t) = p$ y más aún la restricción de \bar{e} a $(0,1)$ es un homeomorfismo sobre su imagen en C . La condición (ii) de la definición 4.9 se sigue, usando la unicidad de \bar{e} . También se sigue que

$$\phi^{-1}\{e(t) : e \in E, t \in (0,1)\} = \{\bar{e}(t) : \bar{e} \in \bar{E}, t \in (0,1)\}.$$

Por lo tanto, si

$$\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0,1]) = V \cup \{e(t) : e \in E, t \in (0,1)\},$$

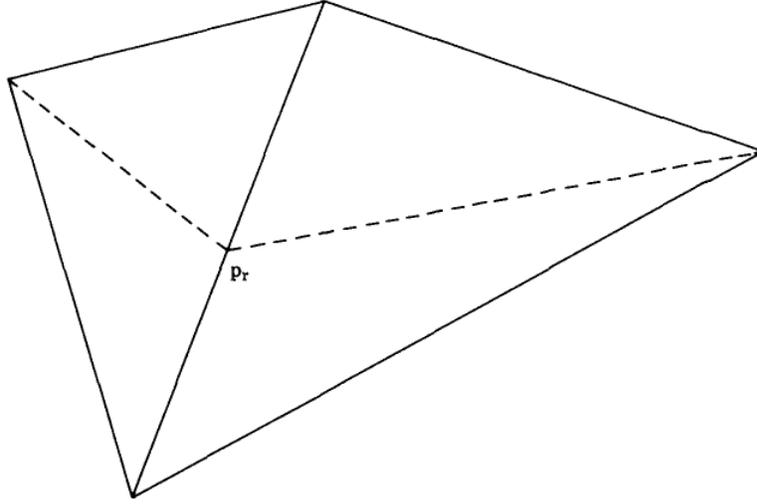


Figura 4.18: Una subdivisión de dos triángulos adyacentes

entonces

$$\phi^{-1}(\Gamma) = \phi^{-1}(V) \cup \{\bar{e}(t) : \bar{e} \in \bar{E}, t \in (0, 1)\} = \bar{\Gamma},$$

donde

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_{\bar{e} \in \bar{E}} \bar{e}([0, 1]).$$

Más aún, por el lema 4.5, si $t \in (0, 1)$ y $e \in E$; entonces $\phi^{-1}\{e(t)\}$ consiste de exactamente d puntos de C (debido a que $e(t)$ no pertenece a el lugar geométrico ramificado $\phi(R)$ así que existen exactamente d mapas continuos $\bar{e} : [0, 1] \rightarrow C$ tal que $\phi \circ \bar{e} = e$. Por lo tanto $|\bar{E}| = d|E|$.

Si $\bar{f} \in \bar{F}$ entonces la restricción de \bar{f} a Δ^0 es un homeomorfismo sobre su imagen el cual es una componente conexa de $\phi^{-1}(f(\Delta^0))$ donde $f = \phi \circ \bar{f}$. Ahora bien, desde que $f(\Delta^0)$ es una componente conexa de $\mathbb{P}^1 - \Gamma$ se sigue que $\bar{f}(\Delta^0)$ es una componente conexa de

$$\phi^{-1}(\mathbb{P}^1 - \Gamma) = C - \phi^{-1}(\Gamma) = C - \bar{\Gamma}.$$

Esto muestra que la primera parte de la condición (iii) se satisface y ya hemos visto que la segunda parte es verdadera. Las condiciones (iv) y (v) se siguen fácilmente de lo que ya hemos hecho. Por lo tanto, resta demostrar que

$$|\bar{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1).$$

Pero esto se sigue inmediatamente del lema 4.5 desde que V contiene a $\phi(R)$. □

Observación 4.19. Se sigue de esta proposición que el número de Euler $\chi(C)$ de C es dado por

$$\chi(C) = |\bar{V}| - |\bar{E}| + |\bar{F}| = d\chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1).$$

Esta es llamada la *fórmula de Riemann-Hurwitz* para la cubierta ramificada $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Estamos en condiciones de probar el teorema que nos dara como consecuencia la fórmula del grado-género.

Teorema 4.20. *Sea C una curva proyectiva no singular de grado d en \mathbb{P}^2 . Si r es un entero positivo con $r \geq d(d-1)$ y $r \geq 3$, entonces C tiene una triangulación con $rd - d(d-1)$ vértices, $3(r-2)d$ lados y $2(r-2)d$ caras.*

Demostración. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d el cual define a la curva C . Por el lema 4.8 después de aplicar una adecuada transformación proyectiva a C podemos asumir que el mapa $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ dado por $\phi[x, y, x] = [x, z]$ está bien definido (esto es, $[0, 1, 0] \notin C$) y el índice de ramificación $\nu_\phi[a, b, c]$ de ϕ en cualquier $[a, b, c] \in C$ satisface $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$. Entonces por el lema 4.7 ϕ tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación, es decir, $|R| = d(d-1)$.

Por el lema 4.17 si $r \geq 3$ y $r \geq d(d-1)$ entonces podemos elegir una triangulación de \mathbb{P}^1 tal que $\phi(R) \subseteq V$ y $|V| = r$, $|E| = 3r - 6$ y $|F| = 2r - 4$. Luego por la proposición 4.18 existe una triangulación $(\bar{V}, \bar{E}, \bar{F})$ de C con $|\bar{E}| = d|E| = 3(r-2)d$, $|\bar{F}| = d|F| = 2(r-2)d$ y $|\bar{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1)$. Como $|R| = d(d-1)$ y $\nu_\phi(p) = 2$ para todo $p \in R$ tenemos que $|\bar{V}| = rd - d(d-1)$ como se pedía. \square

Corolario 4.21 (La fórmula del grado-género). *Sea C una curva proyectiva no singular de grado d en \mathbb{P}^2 , entonces el número de Euler y el género de una curva proyectiva están dados por*

$$\chi = d(3-d) \quad \text{y} \quad g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Ejemplo 4.22. 1 Cuando $d = 1$ entonces $\chi = 2$ y $g = 0$. Una curva proyectiva de grado 1 en \mathbb{P}^2 es una línea, luego es homeomorfa a la 2-esfera lo que concuerda con nuestro ejemplo 4.13(i).

2 Cuando $d = 2$ de igual manera tenemos $\chi = 2$ y $g = 0$. Una curva proyectiva de grado 2 en \mathbb{P}^2 es una cónica y por nuestra observación 3.13 cualquier cónica proyectiva no singular es homeomorfa a \mathbb{P}^1 o equivalentemente a una línea compleja proyectiva en \mathbb{P}^2 así que, esto también concuerda con el ejemplo 4.13(i).

3 Cuando $d = 3$ $\chi = 0$ y $g = 1$. Por el corolario 3.34 una curva cúbica proyectiva no singular en \mathbb{P}^2 es equivalente bajo una transformación proyectiva a la curva definida por

$$y^2z = x(x-z)(x-\lambda z),$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, y por el ejemplo 4.13 (ii) tenemos que esta curva es topológicamente un toro.

Observación 4.23. Otra propiedad topológica que posee cualquier curva algebraica proyectiva compleja es que es un espacio conexo. La prueba de esto no es elemental y requiere algo de herramienta de geometría algebraica. Una prueba de este hecho puede consultarse en [5]. Esto no es del todo cierto para curvas proyectivas reales, tómese por ejemplo la curva algebraica afín C definida por el polinomio $Q(x, y) = y^2 - x^3 + x$ y considérese la curva proyectiva asociada a C dada por el polinomio $P(x, y, z) = zy^2 - x(x^2 - z^2)$ entonces la imagen topológica de $\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : P(x, y, z) = 0\}$ consiste de la unión disjunta de dos círculos reales, mientras que el conjunto $\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : P(x, y, z) = 0\}$ es topológicamente un toro, en efecto, $P(x, y, z) = zy^2 - x(x - z)(x + z)$, luego por el corolario 3.34 para $\lambda = -1$ tenemos que $P(x, y, z)$ es no singular y como este tiene grado 3 de la fórmula de el grado-género tenemos que $g = 1$, luego la curva proyectiva es topológicamente equivalente a una esfera con una asa o bien un toro.

4.4. Ejemplos

Ejemplo 4.24. Sean C y D curvas proyectivas no singulares de grados n y m en \mathbb{P}^2 respectivamente. Demuestre que si C es homeomorfa a D , entonces o bien $n = m$ ó $\{n, m\} = \{1, 2\}$.

Demostración. Por el Teorema 4.12, C tiene una triangulación, ahora bien sea g_n el género de C el cual como sabemos no depende de la triangulación de C . Sea g_m el género de D . Entonces por la fórmula del grado-género tenemos $g_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ y $g_m = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$. Ahora, supongamos que $n, m > 2$, en virtud que la función $g(d) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ es inyectiva para $d > 2$ y como las curvas son homeomorfas tenemos $g_n = g_m$, o sea $g(n) = g(m)$ de donde $n = m$. Ahora supongamos que $n, m \leq 2$, entonces $g(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 0$ lo cual implica que $n = 1$ ó $n = 2$, de manera similar $0 = g(m) = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, de donde $m = 1$ ó $m = 2$, de aquí tenemos que $n = m$ ó $\{n, m\} = \{1, 2\}$. Por lo tanto en cualquiera de los casos tenemos $n = m$ ó $\{n, m\} = \{1, 2\}$. \square

Ejemplo 4.25. Sea $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ definida por $\phi[x, y, z] = [x, z]$, donde C es una curva proyectiva no singular en el plano proyectivo que no contine al punto $[0, 1, 0]$. Muestre que si C tiene grado $d > 1$, entonces ϕ tiene al menos un punto de ramificación. Muestre que si $d = 1$ ϕ no tiene puntos de ramificación y es un homeomorfismo.

Demostración. Como C es no singular, entonces C es irreducible, luego al asumir que $[0, 1, 0] \notin C$ tenemos que el coeficiente $P(0, 1, 0)$ de y^d en $P(x, y, z)$ no es cero, luego el polinomio $\partial P / \partial y(x, y, z)$ no es idénticamente cero y tiene grado $d - 1$. Sea D la curva proyectiva definida por este polinomio, entonces por el teorema 3.8 las curvas proyectivas C y D en \mathbb{P}^2 se intersectan en al menos un punto, esto significa que existe $[a, b, c] \in \mathbb{P}^2$ tal que

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c),$$

luego $\nu_\phi[a, b, c] > 1$ y así $[a, b, c]$ es un punto de ramificación. Supongamos ahora que $d = 1$, entonces por aplicar una adecuada transformación proyectiva podemos suponer que C es la línea $y = 0$ observese que el punto $[0, 1, 0] \notin C$. Entonces como $\partial P / \partial y = 1$, tenemos que ϕ no puede tener puntos de ramificación. Ahora consideremos el mapa $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ dado por $\phi[x, 0, z] = [x, z]$. Entonces veamos que ϕ es un homeomorfismo, en efecto la inyectividad se tiene del siguiente hecho: si $\phi[x_1, 0, z_1] = \phi[x_2, 0, z_2]$, entonces $x_1 = \lambda x_2$ y $z_1 = \lambda z_2$ de donde concluimos que $[x_1, 0, z_1] = [\lambda x_2, 0, \lambda z_2] = [x_2, 0, z_2]$, la suryectividad se tiene claramente, como la función $(x, y, z) \mapsto [x, z]$ es continua pues es la composición $f_1 \circ \pi : \mathbb{C}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ donde $f_1(x, y, z) = (x, z)$ y $\pi(x, z) = [x, z]$ son funciones continuas, se sigue de la observación 2.15 que $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ es continua. Ahora bien, como C es un conjunto compacto y \mathbb{P}^1 es Hausdorff concluimos que f es un homeomorfismo. \square

Ejemplo 4.26. Muestre que la curva proyectiva D definida por $y^2z = x^3$ tiene un único punto singular. Demuestre que el mapa definido por $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow D$, $f[s, t] = [s^2t, s^3, t^3]$ es un homeomorfismo. Deduzca que la fórmula del grado-género no puede ser aplicada a curvas singulares.

Demostración. Sea $P(x, y, z) = x^3 - y^2z$, entonces $\partial P/\partial x = 3x^2$, $\partial P/\partial y = 2yz$, y $\partial P/\partial z = y^2$. De aquí se deduce que $x = 0, y = 0$ y z puede tomar cualquier valor, entonces el único punto singular está dado por $[0, 0, 1]$. Ahora veamos que f es un homeomorfismo. Mostremos primero que f es inyectiva, entonces supongamos que $f[s_1, t_1] = f[s_2, t_2]$, luego $[s_1^2 t_1, s_1^3, t_1^3] = [s_2^2 t_2, s_2^3, t_2^3]$ de donde obtenemos las ecuaciones

$$s_1^2 t_1 = \lambda s_2^2 t_2 \quad (4.7)$$

$$s_1^3 = \lambda s_2^3 \quad (4.8)$$

$$t_1^3 = \lambda t_2^3 \quad (4.9)$$

Para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, ahora si $t_2 = 0$ de la ecuación (4.9) tenemos que $t_1 = 0$ y entonces debe suceder que $s_1, s_2 \neq 0$, luego basta tomar $\alpha = \frac{s_1}{s_2}$ y así $t_1 = \alpha t_2$ y $s_1 = \alpha s_2$. Ahora supongamos que $t_2 \neq 0$ como $\lambda \neq 0$ de la ecuación (4.9) tenemos que $t_1 \neq 0$ de la ecuación (4.7) se tiene

$$\frac{s_1^2 t_1}{t_2} = \lambda s_2^2,$$

y de la ecuación (4.8) tenemos

$$s_1^3 = \lambda s_2^2 s_2 = \frac{t_1}{t_2} s_1^2 s_2.$$

En este caso, basta tomar $\alpha = \frac{t_1}{t_2}$. Si $s_1 = 0$, entonces $s_1 = \alpha s_2$ y $t_1 = \alpha t_2$ si $s_1 \neq 0$, entonces de esta última ecuación $s_1 = \left(\frac{t_1}{t_2}\right) s_2$ y así $s_1 = \alpha s_2$ y $t_1 = \alpha t_2$.

Por lo tanto, en cualquiera de los casos tenemos que $[s_1, t_1] = [s_2, t_2]$. Para la suprayectividad, sea $[x, y, z] \in D$, entonces $y^2 z = x^3$, por lo cual $x = y^{2/3} z^{1/3}$ así que, basta tomar $s = y^{1/3}$ y $t = z^{1/3}$, pues $f[s, t] = [y^{2/3} z^{1/3}, y, z] = [x, y, z]$, entonces tenemos que f es una biyección. En virtud de que la composición $\pi \circ g$ donde $g(s, t) = (s^2 t, s^3, t^3)$ y $\pi(x, y, z) = [x, y, z]$ es continua concluimos que $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow D$ es continua, ahora bien, como \mathbb{P}^1 es compacto y D es Hausdorff concluimos que f es un homeomorfismo. En primer lugar, sólo hemos definido el género para curvas proyectivas no singulares, aún así, si se pudiera aplicar la fórmula del grado-género, entonces la curva D tendría género 1, es decir, sería una esfera con una asa (i.e. un toro) y puntos identificados a saber $\pi^{-1}([0, 0, 1])$ pero este espacio como demostramos es homeomorfo a \mathbb{P}^1 es decir, una esfera, lo cual evidentemente no puede ocurrir. \square

Ejemplo 4.27. Muestre que existe un homeomorfismo dado por $[s, t, 0] \mapsto [st^3, (s+t)^4, t^4]$ de la línea en \mathbb{P}^2 definida por $z = 0$ sobre una curva cuártica en \mathbb{P}^2 ¿Por qué esto no contradice el ejemplo 4.24?

Demostración. Sea $\phi[s, t, 0] = [st^3, (s+t)^4, t^4]$, supongamos que $\phi[s_1, t_1, 0] = \phi[s_2, t_2, 0]$, esto nos lleva a las ecuaciones

$$s_1 t_1^3 = \lambda s_2 t_2^3 \quad (4.10)$$

$$(s_1 + t_1)^4 = \lambda(s_2 + t_2)^4 \quad (4.11)$$

$$t_1^4 = \lambda t_2^4 \quad (4.12)$$

Ahora supongamos que $s_2 \neq 0$ entonces también debe de ocurrir que $s_1 \neq 0$, pues si $s_1 = 0$, esto nos llevaría a que $s_2 = 0$, así sea $\alpha = s_1/s_2$. Si $t_1 = 0$, entonces $t_2 = 0$ y así $t_1 = \alpha t_2$ y $s_1 = \alpha s_2$, si $t_1 \neq 0$ de las ecuaciones (4.10),(4.11) y (4.12) llegamos a que

$$t_1^4 = \frac{s_1}{s_2} t_1^3 t_2,$$

de donde $t_1 = \frac{s_1}{s_2} t_2 = \alpha t_2$ y $s_1 = \alpha s_2$. Si $s_2 = 0$, entonces $t_1 \neq 0$, luego $t_2 \neq 0$ así basta tomar $\alpha = t_1/t_2$, pues $s_1 = \alpha s_2$ y $t_1 = \alpha t_2$. Por lo tanto tenemos que ϕ es inyectiva. Antes de ver la suprayectividad veamos cual es el polinomio que define la curva cuártica, para ello hagamos $x = st^3$, $y = (s+t)^4$ y $z = t^4$, entonces $x+z = st^3+t^4 = t^3(s+t)$ que al elevar a la cuarta tenemos $(x+z)^4 = (t^3)^4(s+t)^4 = (t^4)^3(s+t)^4$ o bien $(x+z)^4 = z^3y$. Ahora veamos la suprayectividad, sea D la curva cuártica definida por el polinomio $P(x, y, z) = (x+z)^4 - z^3y$, sea $[x, y, z] \in D$ entonces $(x+z)^4 = z^3y$ así basta tomar $s = x/z^{3/4}$ y $t = z^{1/4}$, pues así se tiene que $\phi[s, t, 0] = [x, y, z]$ asumiendo que $z \neq 0$. Ahora bien, en virtud de que el mapa $(s, t, 0) \mapsto [st^3, (s+t)^4, t^4]$ es continuo se sigue el mapa $[s, t, 0] \mapsto [st^3, (s+t)^4, t^4]$ es continuo. Finalmente de la compacidad de \mathbb{P}^1 y del hecho de que D es Hausdorff tenemos que ϕ es un homeomorfismo. Ahora veamos que la curva D definida por $P(x, y, z)$ es singular, tenemos que $P(x, y, z) = (x+z)^4 - z^3y$, entonces $\partial P/\partial x = 4(x+z)^3$, $\partial P/\partial y = -z^3$ y $\partial P/\partial z = 4(x+z)^3 - 3z^2y$. De aquí se tiene que $z = 0$ lo que implica que $x = 0$ y y puede tomar cualquier valor, entonces D tiene un único punto singular en $[0, 1, 0]$ y como el ejemplo 4.24 sólo se aplica a curvas no singulares esto no lo contradice, pues el grado de D es 4 mientras que el grado de la curva lineal es 1 y tenemos un homeomorfismo. □

Capítulo 5

Superficies de Riemann

En el capítulo 4 vimos que una curva proyectiva compleja no singular C en \mathbb{P}^2 es topológicamente una esfera con g asas, esto es lo que conocemos como una superficie, es decir, cualquier punto de C tiene una vecindad la cual es homeomorfa a un subconjunto abierto de plano euclideo \mathbb{R}^2 . Sin embargo una curva compleja no singular C es un tipo muy especial de superficie, tiene mucha más estructura que la únicamente dada por su topología. En particular tiene sentido hablar sobre funciones holomorfas y hacer análisis complejo sobre C , lo que significa que C es lo que se ha de llamar una *superficie de Riemann*. El lector interesado en estudiar con más detalle las superficies de Riemann quizá pueda consultar [7] donde por ejemplo puede encontrar temas como acciones de grupos sobre superficies de Riemann.

Vamos a dar la definición de una superficie de Riemann en la siguiente sección. Antes vamos a recordar algunos importantes resultados (las demostraciones de estos resultados pueden consultarse en [13]) y definiciones que vamos a necesitar de análisis complejo y vamos a ilustrarlos usando una función la cual será importante más adelante: la función \wp de Weierstrass.

5.1. La función \wp de Weierstrass

El teorema fundamental relativo a integrales de funciones holomorfas a lo largo de trayectorias en \mathbb{C} es el que se enuncia a continuación.

Teorema 5.1 (Teorema de Cauchy). *Sea γ un contorno en \mathbb{C} y sea f una función la cual es holomorfa dentro y sobre γ . Entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Una consecuencia del teorema de Cauchy es

Teorema 5.2 (Teorema del residuo de Cauchy). *Sea γ un contorno en \mathbb{C} y sea f una función meromorfa dentro y sobre γ con polos en a_1, \dots, a_t dentro de γ y ningún polo sobre γ . Entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_{j=1}^t \operatorname{res}\{f; a_j\}.$$

Existe un recíproco parcial del teorema de Cauchy

Teorema 5.3 (Teorema de Morera). *Si $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua sobre un subconjunto abierto W de \mathbb{C} y si*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

para todas las trayectorias cerradas suaves a trozos en subconjuntos abiertos convexos de W , entonces f es holomorfa en W .

Usando estos teoremas es posible probar el siguiente resultado el cual es muy útil para construir funciones holomorfas y meromorfas.

Teorema 5.4. *Sea $(f_n : W \rightarrow \mathbb{C})_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas definidas sobre un conjunto abierto W de \mathbb{C} las cuales convergen uniformemente a una función $f : W \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa sobre W , y la sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente a f' sobre W .*

Una aplicación directa de este resultado es el criterio M de Weierstrass.

Teorema 5.5 (Criterio M de Weierstrass). *Sea $(f_n : W \rightarrow \mathbb{C})_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas definidas sobre un subconjunto abierto W de \mathbb{C} . Supongase que existe una sucesión de números reales positivos M_n tal que la serie*

$$\sum_{n \geq 1} M_n,$$

converge y $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in W$. Entonces la serie

$$\sum_{n \geq 1} f_n(z),$$

converge uniformemente sobre W a una función holomorfa $f(z)$ tal que,

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} f'_n(z).$$

Observación 5.6. Desde luego el correspondiente resultado es cierto si tenemos una sucesión doble

$$(f_{n,m} : W \rightarrow \mathbb{C})_{n \geq 1, m \geq 1},$$

de funciones holomorfas sobre W .

La aplicación más importante de esto para nuestros propósitos es definir la función \wp de Weierstrass. Sean ω_1 y ω_2 dos números complejos los cuales son linealmente independientes sobre \mathbb{R} (esto es, su cociente ω_1/ω_2 no es un número real.) Sea

$$\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Entonces Λ es una retícula en \mathbb{C} . Esto es, Λ es un subgrupo aditivo de \mathbb{C} el cual es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Primero necesitamos un lema antes de garantizar la existencia de la función \wp de Weierstrass

Lema 5.7. *Dados ω_1 y ω_2 números complejos linealmente independientes, entonces existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$|x\omega_1 + y\omega_2| \geq \delta\sqrt{x^2 + y^2},$$

para todos los números reales x y y .

Demostración. La función $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\theta) = |(\cos \theta)\omega_1 + (\sin \theta)\omega_2|$ es continua. Ahora bien, en virtud que el intervalo $[0, 2\pi]$ es compacto, f está acotada y alcanza sus cotas. Más aún, $f(\theta) > 0$ para toda $\theta \in [0, 2\pi]$ desde que ω_1 y ω_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Por lo tanto existe algún $\delta > 0$ tal que $f(\theta) > \delta$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Se sigue que $|x\omega_1 + y\omega_2| \geq \delta\sqrt{x^2 + y^2}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. \square

Proposición 5.8. *Existe una función meromorfa $\wp(z)$ sobre \mathbb{C} definida por*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

y con derivada dada por

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in \Lambda} -2 \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Demostración. Note primero que la suma de una función holomorfa y una función meromorfa sobre un subconjunto abierto de \mathbb{C} es una función meromorfa. Por lo tanto, por el criterio M de Weierstrass, para mostrar que $\wp(z)$ es una función meromorfa bien definida sobre \mathbb{C} y que su derivada puede ser obtenida por diferenciar la serie término a término, es suficiente mostrar que para cualquier $R > 0$ existe un subconjunto finito Λ_R de Λ tal que la serie

$$\sum_{\omega \in \Lambda - \Lambda_R} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

converge absolutamente de manera uniforme sobre el disco

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Por el lema anterior, sea $\Lambda_R = \{\omega \in \Lambda : |\omega| \geq 2R\}$. Entonces

$$\Lambda_R \subseteq \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}, n^2 + m^2 \leq 4R^2\delta^{-2}\},$$

y por lo tanto Λ_R es finito. Más aún, si

$$\omega = n\omega_1 + m\omega_2 \in \Lambda - \Lambda_R,$$

y $|z| \leq R$, entonces $|z| \leq \frac{1}{2}|\omega|$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |(z - \omega)^{-2} - \omega^{-2}| &= |z(2\omega - z)(z - \omega)^{-2}\omega^{-2}| \\ &\leq (5R|\omega|/2)/(|\omega|^4/4) \\ &= 10R/|\omega|^3 \\ &\leq 10R\delta^{-3}(n^2 + m^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

El resultado se sigue ahora por comparación.

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} (n^2 + m^2)^{-3/2} &= \sum_{k \geq 1} \sum_{\max(|n|, |m|) = k} (n^2 + m^2)^{-3/2} \\ &= 8 \sum_{k \geq 1} k^{-2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

Definición 5.9. $\wp(z)$ es llamada la función \wp de Weierstrass asociada a la retícula Λ .

Lema 5.10. $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z + \zeta)$ para todo z en \mathbb{C} y ζ en Λ .

Demostración. Primero note que si $\zeta \in \Lambda$ entonces

$$\wp'(z + \zeta) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z + \zeta - \omega)^3} \right).$$

Dado que el final de la cola de esta serie converge absolutamente y desde que $\omega - \zeta$ corre sobre Λ conforme ω corre sobre Λ , podemos reorganizar la serie y sustituir ω por $\omega - \zeta$ para obtener

$$\wp'(z + \zeta) = \wp'(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Esto implica que

$$\wp(z + \zeta) = \wp(z) + c(\zeta),$$

donde $c(\zeta)$ depende sólo de ζ y no de z . Sustituyendo $z = \frac{1}{2}\zeta$ obtenemos

$$c(\zeta) = \wp\left(\frac{1}{2}\zeta\right) - \wp\left(-\frac{1}{2}\zeta\right).$$

Ahora observemos que

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

y podemos reorganizar esta serie, remplazar ω por $-\omega$ para obtener

$$\wp(-z) = \wp(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

En particular $c(\zeta) = \wp(\frac{1}{2}\zeta) - \wp(-\frac{1}{2}\zeta)$ por lo tanto

$$\wp(z + \zeta) = \wp(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

□

Definición 5.11. Si una función f sobre \mathbb{C} satisface que

$$f(z + \zeta) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}, \forall \zeta \in \Lambda,$$

o equivalentemente

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2), \forall z \in \mathbb{C}.$$

entonces diremos que f es *doblemente periódica* con período la retícula Λ (o con periodos ω_1 y ω_2). De esto concluimos que la función \wp de Weierstrass es una función meromorfa sobre \mathbb{C} doblemente periódica.

Ahora veamos un teorema de análisis complejo el cual se puede consultar [13], éste nos será de utilidad para demostrar el lema que le sigue.

Teorema 5.12 (Teorema de Liouville). *Si f es una función holomorfa sobre \mathbb{C} la cual está acotada, entonces es constante.*

Lema 5.13. *Si f es una función holomorfa la cual es doblemente periódica sobre \mathbb{C} , entonces debe ser una constante.*

Demostración. Tenemos que f es holomorfa luego f es continua, además por la proposición 2.17 está acotada sobre cualquier subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{C} tal como el paralelogramo

$$P = \{s\omega_1 + t\omega_2 : s, t \in [0, 1]\}.$$

Pero dado $z \in \mathbb{C}$ podemos encontrar $\zeta \in \Lambda$ tal que $z + \zeta \in P$, pero como f es doblemente periódica tenemos $f(z + \zeta) = f(z)$. Por lo tanto f está acotada sobre \mathbb{C} así que la conclusión se sigue del teorema de Liouville.

□

Usando el anterior lema podemos probar una identidad de mucha importancia relacionada con la función \wp de Weierstrass.

Lema 5.14. Sea Λ una retícula, entonces

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

donde

$$g_2 = g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^4} \quad y \quad g_3 = g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Demostración. La función

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

se anula en cero y se restringe a una función holomorfa en una vecindad abierta de 0 en \mathbb{C} . Más aún, es una función par de z por lo que sus derivadas impares se anulan en 0 y por lo tanto su expansión en serie de Taylor sobre 0 involucra sólo potencias pares de z . Por lo tanto cerca de 0 podemos escribir

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \lambda z^2 + \mu z^4 + z^6 h(z),$$

donde $h(z)$ es una función holomorfa de z definida cerca de $z = 0$. Entonces

$$\wp'(z) = -2\frac{1}{z^3} + 2\lambda z + 4\mu z^3 + 6z^5 h(z) + z^6 h'(z).$$

Consideremos la función

$$k(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

donde $g_2 = 20\lambda$ y $g_3 = 28\mu$. Usando la fórmulas para $\wp(z)$ y $\wp'(z)$ podemos probar que $k(z)$ se restringe a una función holomorfa de z en una vecindad de 0 la cual se anula en 0. Pero \wp y \wp' son ambas funciones meromorfas sobre \mathbb{C} las cuales son holomorfas sobre $\mathbb{C} - \Lambda$ y satisfacen

$$\wp(z + \zeta) = \wp(z) \quad \wp'(z + \zeta) = \wp'(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\zeta \in \Lambda$. Esta periodicidad muestra que $k(z)$ es holomorfa en una vecindad de cada $\zeta \in \Lambda$, y por lo tanto $k(z)$ es una función doblemente periódica sobre \mathbb{C} . Así que, por el lema 5.13, $k(z)$ tiene que ser una función constante, entonces $k(z) = k(0) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Finalmente, para obtener las expresiones de serie para $g_2 = 20\lambda$ y $g_3 = 28\mu$ note que 2λ y 24μ es la segunda y la cuarta derivada en 0 de la función

$$\sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

la cual puede ser diferenciada término a término en $z = 0$. □

Proposición 5.15. La función \wp de Weierstrass $\wp : \mathbb{C} - \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ es suprayectiva. También $\wp(z) = \wp(w)$ si, y sólo si $w \in \Lambda \pm z$.

Demostración. Tomemos cualquier $c \in \mathbb{C}$ y sea $f(z) = \wp(z) - c$. Entonces tenemos que la función $f'(z)/f(z)$ es meromorfa sobre \mathbb{C} con polos simples de residuo $-m$ donde f tiene polos de multiplicidad m y polos simples de residuo m donde f tiene ceros de multiplicidad m , y no otros polos. Por lo tanto por el teorema del residuo de Cauchy (teorema 5.2) si γ es un contorno en \mathbb{C} que no pasa por ningún cero o polo de f entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

donde Z y P son el número de ceros y polos de f dentro de γ contando según sus multiplicidades. Tomemos γ como la frontera del paralelogramo $P(a)$ definido por $P(a) = \{a + s\omega_1 + t\omega_2 : s, t \in [0, 1]\}$, donde a se elige de tal manera que la frontera de $P(a)$ no pase a través de ningún cero o polo de f . En particular esto significa que existe un punto reticular $\zeta \in \Lambda$ dentro de γ . Por la doble periodicidad de f tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

ya que las integrales a lo largo de los lados opuestos del paralelogramo se anulan. Por lo tanto $Z = P$. Pero f , al igual que \wp , tienen polos de multiplicidad dos en todos los puntos reticulares $\zeta \in \Lambda$ y no otros así que $P = 2$.

Por lo tanto $Z = 2$, y entonces existe algún $w_0 \in P(a)$ tal que $f(w_0) = 0$ esto es, $\wp(w_0) = c$. Desde que c fue arbitraria esto demuestra que $\wp : \mathbb{C} - \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ es suprayectiva.

Debido a que $\wp(z)$ es par y doblemente periódica tenemos $\wp(z) = \wp(w_0) = c$ para todo $z \in \Lambda \pm w_0$. Existe algún $w_1 \in \Lambda - w_0$ que pertenece al paralelogramo $P(a)$ y entonces ambos w_0 y w_1 son ceros de f dentro de γ . Así que, si $w_0 \neq w_1$ estos representan los dos ceros de f dentro de γ y por lo tanto los únicos ceros de f son dados por $z \in \Lambda \pm w_0$. Por lo tanto, resta demostrar que si $w_0 = w_1$, entonces f tiene un cero de multiplicidad al menos dos en w_0 , esto es, $f'(w_0) = 0$. Pero, como antes, todos los ceros de f dentro de γ serán contabilizados. Si $w_0 = w_1$ entonces $\Lambda + w_0 = \Lambda - w_0$ y así como $\wp'(w_0) = -\wp'(-w_0) = -\wp'(w_0)$. Por lo tanto $\wp'(w_0) = 0$ y así $f'(w_0) = 0$ como se pedía. \square

Definición 5.16. Sea C_{Λ} la curva proyectiva en \mathbb{P}^2 definida por el polinomio

$$Q_{\Lambda}(x, y, z) = y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3,$$

donde $g_2 = g_2(\Lambda)$ y $g_3 = g_3(\Lambda)$ son definidas como en el lema 5.14.

Lema 5.17. La curva cúbica C_{Λ} es no singular.

Demostración. Sean

$$\alpha = \wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right), \beta = \wp\left(\frac{1}{2}\omega_2\right), \gamma = \wp\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right).$$

Para mostrar que C_{Λ} es no singular es suficiente demostrar que α, β y γ son números complejos distintos y que $Q_{\Lambda}(x, y, z) = y^2z - 4(x - \alpha z)(x - \beta z)(x - \gamma z)$. El hecho que α, β y γ sean distintos es una consecuencia inmediata de la proposición 5.15. Desde que \wp es una función doblemente periódica par,

su derivada es una función doblemente periódica impar con los mismos períodos. Por lo tanto, como en la prueba (5.15), obtenemos

$$\wp' \left(\frac{1}{2}\omega_1 \right) = \wp' \left(\frac{1}{2}\omega_1 - \omega_1 \right) = \wp' \left(-\frac{1}{2}\omega_1 \right) = -\wp' \left(\frac{1}{2}\omega_1 \right),$$

y así

$$\wp' \left(\frac{1}{2}\omega_1 \right) = 0.$$

Por el lema 5.14 tenemos

$$4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3 = \wp' \left(\frac{1}{2}\omega_1 \right)^2 = 0,$$

y así α y similarmente β y γ son raíces del polinomio $4x^3 - g_2x - g_3$. De esto se sigue que

$$Q_\Lambda(x, y, z) = y^2z - 4(x - \alpha z)(x - \beta z)(x - \gamma z),$$

con α, β y γ distintos y por tanto la curva C_Λ definida por $Q_\Lambda(x, y, z)$ es no singular. \square

Observación 5.18. Si consideramos la retícula Λ como un subgrupo aditivo de \mathbb{C} entonces podemos formar el grupo cociente

$$\mathbb{C}/\Lambda = \{\Lambda + a : a \in \mathbb{C}\},$$

como es usual dos clases laterales $\Lambda + a$ y $\Lambda + b$ son iguales si, y sólo si $a - b \in \Lambda$. Este grupo cociente tiene una topología natural (la topología cociente) inducida de la topología estandar sobre \mathbb{C} como sigue. Sea $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ el mapa suprayectivo definido por $\pi(a) = \Lambda + a$. Entonces un subconjunto U de \mathbb{C}/Λ es abierto en la topología cociente sobre \mathbb{C}/Λ si, y sólo si su imagen inversa $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C} .

Afirmamos que $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ es un *mapa abierto*. En efecto, pues si V es un conjunto abierto de \mathbb{C} , entonces

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\zeta \in \Lambda} (V + \zeta),$$

es la unión de traslaciones de V en \mathbb{C} donde $V + \zeta = \{v + \zeta : v \in V\}$, todas las cuales son conjuntos abiertos de \mathbb{C} .

Notemos que \mathbb{C}/Λ es compacto en virtud de la propiedad 2.12 (i) y (ii) ya que la restricción de π al paralelogramo

$$P = \{s\omega_1 + t\omega_2 : s, t \in [0, 1]\},$$

es suprayectiva.

Topológicamente \mathbb{C}/Λ es un toro (ver figura 5.1). Esto es porque podemos identificar \mathbb{C}/Λ topológicamente con el espacio cociente del paralelogramo P identificando sus lados opuestos. Al pegar un par de los lados obtenemos un cilindro y pegando los extremos del cilindro juntos dá como resultado un toro.

Vamos a referirnos a \mathbb{C}/Λ como un *toro complejo*.

En virtud de los lemas 5.10 y 5.14 podemos garantizar la existencia de una función que a continuación definimos.

Definición 5.19. Sea $u : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_\Lambda$ definida por

$$u(\Lambda + z) = \begin{cases} [\wp(z), \wp'(z), 1], & \text{si } z \notin \Lambda \\ [0, 1, 0], & \text{si } z \in \Lambda \end{cases}$$

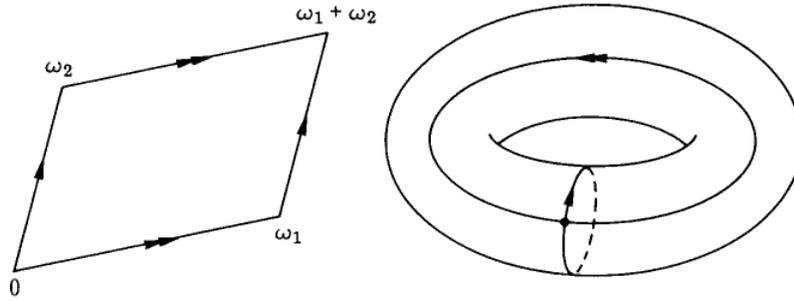


Figura 5.1: \mathbb{C}/Λ es un toro.

Proposición 5.20. El mapa $u : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_\Lambda$ es un homeomorfismo.

Demostración. Primero probemos que u es inyectiva. Supongamos que $z, w \in \mathbb{C} - \Lambda$ y $u(z) = u(w)$. Entonces $\wp(z) = \wp(w)$, así que, por la proposición 5.15, sabemos que $z \in \Lambda \pm w$. Queremos demostrar que $z \in \Lambda + w$. Supongamos que $z \in \Lambda - w$. Entonces, desde que \wp' es una función doblemente periódica impar tenemos $\wp'(z) = -\wp'(w)$. Pero $u(z) = u(w)$ así que $\wp'(z) = \wp'(w) = 0$. Pero la prueba del lema 5.17 muestra que si $\wp'(w) = 0$, entonces $\wp(w)$ es igual a α, β o γ donde

$$\alpha = \wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right), \beta = \wp\left(\frac{1}{2}\omega_2\right), \gamma = \wp\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right),$$

y entonces (5.15) implica que $w \in 1/2\Lambda$, esto es, $\Lambda + w = \Lambda - w$. Así que, $z \in \Lambda + w$ y esto muestra la inyectividad de u .

Ahora mostremos que u es suprayectiva. Supongamos que $[a, b, c] \in C_\Lambda$. Si $c = 0$ entonces la ecuación que define a C_Λ fuerza a que $a = 0$ y así $[a, b, c] = [0, 1, 0]$ el cual está en la imagen de u . De otra manera asumamos que $c = 1$. Entonces por 5.15 existe algún $z \in \mathbb{C}$ tal que $\wp(z) = a$. Por el lema 5.14 y la hipótesis de que $[z, b, c] \in C_\Lambda$ tenemos

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 4a^3 - g_2a - g_3 = b^2,$$

así que $\wp'(z) = \pm b$. Como \wp es una función par y \wp' es una función impar se sigue que o bien $u(\Lambda + z) = [a, b, 1]$ ó $u(\Lambda - z) = [a, b, 1]$. Por lo tanto u es suprayectiva.

Desde que \wp y \wp' son holomorfas y por lo tanto continuas sobre $\mathbb{C} - \Lambda$ es claro que u es continua excepto posiblemente en $\Lambda + 0$. Puesto que \wp y \wp' tienen polos de multiplicidad dos y tres en 0, cerca de 0 podemos escribir

$$\wp(z) = \frac{g(z)}{z^2} \quad \text{y} \quad \wp'(z) = \frac{h(z)}{z^3},$$

donde g y h son funciones holomorfas cerca de 0 y $g(0)$ y $h(0)$ son no cero. Así que, si z está cerca de cero, pero no es igual a cero, entonces $u(\Lambda + z) = [\wp(z), \wp'(z), 1] = [zg(z), h(z), z^3]$ lo cual tiende a $[0, 1, 0]$ conforme z tiende a 0. Esto demuestra que u es continua en $\lambda + 0$.

Ya hemos mostrado que $u : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_\Lambda$ es una biyección continua. Ahora bien, por la observación 5.18 tenemos que \mathbb{C}/Λ es compacto y por el lema 2.29 C_Λ es Hausdorff, luego entonces concluimos que u es un homeomorfismo. \square

Observación 5.21. Vamos a demostrar después que u y su inversa no solo son continuas de hecho son funciones holomorfas. Sin embargo antes de demostrar esto debemos decir lo que significa que una función entre superficies de Riemann sea holomorfa.

Notemos también que la proposición 5.20 concuerda con la fórmula del grado-género, la cual nos dice que topológicamente C_Λ es una esfera con una asa, es decir, un toro.

5.2. Superficies de Riemann

Definición 5.22. Una *superficie* es un espacio topológico S Hausdorff el cual el localmente homeomorfo a \mathbb{C} (o equivalentemente a \mathbb{R}^2).

Aquí localmente homeomorfo a \mathbb{C} significa que cualquier $x \in S$ tiene una vecindad abierta U en S la cual es homeomorfa a un subconjunto abierto V de \mathbb{C} .

Un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ entre un subconjunto abierto U de S y un subconjunto V de \mathbb{C} es llamada una *carta* (o *mapeo de coordenadas* locales) sobre S . Un *atlas* Φ para la superficie S es una colección de cartas sobre S , $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$, indexado por un conjunto $A \neq \emptyset$, tal que

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Si $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ y $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ son cartas entonces $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, es un conjunto abierto de V_α el cual es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Si $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ es un atlas para S entonces los homeomorfismos

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

entre subconjuntos abiertos de \mathbb{C} son llamadas las *funciones de transición* de el atlas, vease la figura 5.2. El atlas es llamado *holomorfo* si todas sus funciones de transición son holomorfas en el sentido usual como funciones de subconjuntos abiertos de \mathbb{C} a subconjuntos abiertos de \mathbb{C} .

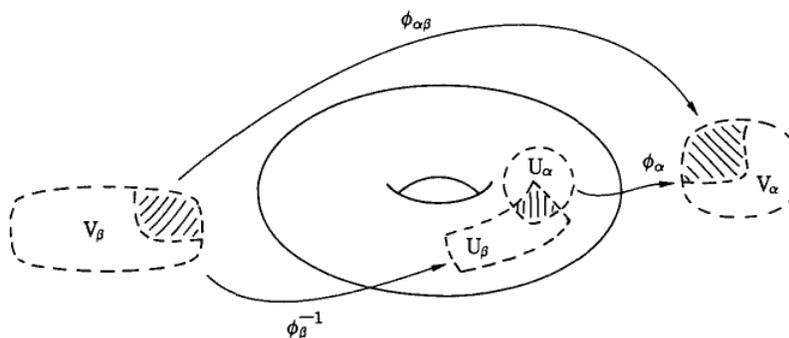


Figura 5.2: Una función de transición.

Ejemplo 5.23. Si U es un subconjunto abierto de \mathbb{C} entonces el mapa identidad $\{1_U : U \rightarrow U\}$ es un atlas holomorfo sobre U . Así que es el conjunto de todas las funciones holomorfas con inversas holomorfas de subconjuntos abiertos de U a subconjuntos abiertos de \mathbb{C} .

Las curvas complejas no singulares son el ejemplo más importante de superficies con atlas holomorfos desde el punto de vista de este trabajo.

Proposición 5.24. Si C es una curva algebraica compleja en \mathbb{C}^2 definida por un polinomio $P(x, y)$, entonces $C - \text{Sing}(C)$ tienen un atlas holomorfo.

Demostración. Supongamos que $(a, b) \in C$, esto es, $P(a, b) = 0$ y que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

por el teorema de la función implícita para polinomios de análisis complejo tenemos que existen vecindades abiertas V y W de a y b en \mathbb{C} y una función holomorfa $g : V \rightarrow W$ tal que si $x \in V$ y $y \in W$ entonces $P(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$. Desde que $C - \text{Sing}(C)$ es un conjunto abierto de C (note que esto se sigue de la definición de la topología cociente de \mathbb{P}^2), por elegir V y W lo suficientemente pequeñas podemos asumir que

$$U = \{(x, y) \in C : x \in V, y \in W\},$$

es una vecindad abierta de (a, b) en $C - \text{Sing}(C)$. Entonces el mapa definido por $\phi(x, y) = x$ es una función continua con inversa continua dada por $x \mapsto (x, g(x))$. Similarmente si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \neq 0,$$

existe una vecindad U de (a, b) en $C - \text{Sing}(C)$ tal que el mapa $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $\psi(x, y) = y$ es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de V de \mathbb{C} con inversa $y \mapsto (h(y), y)$ donde $h(y)$ es una función holomorfa de y . Por lo tanto existe un atlas sobre $C - \text{Sing}(C)$ tal que cualquier carta es una de

las dos formas ϕ ó ψ Las funciones de transición son o bien el mapa identidad o composiciones de la forma $x \mapsto (x, g(x)) \mapsto g(x)$ ó $y \mapsto (h(y), y) \mapsto h(y)$, donde h y g son funciones holomorfas. Por lo tanto tenemos un atlas holomorfo. \square

Resulta que tenemos un resultado análogo para curvas proyectivas que a continuación describimos en la siguiente proposición.

Proposición 5.25. *Si C es una curva proyectiva en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ entonces $C - \text{Sing}(C)$ tiene un atlas holomorfo.*

Demostración. Supongamos que $[a, b, c] \in C$, luego $P(a, b, c) = 0$ y que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0.$$

Por la relación de Euler

$$a \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) + b \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) + c \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0,$$

así que $a = c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ lo que no puede ocurrir por definición de \mathbb{P}^2 . Asumamos que $c \neq 0$. Entonces por la homogeneidad de P

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a/c, b/c, 1) = c^{-(d-1)} \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0,$$

donde d es el grado de P . El teorema de la función implícita aplicado al polinomio $P(x, y, 1)$ en x y y nos dice que existen vecindades abiertas V y W de a/c y b/c en \mathbb{C} y una función holomorfa $g : V \rightarrow W$ tal que si $x \in V$ y $y \in W$, entonces $P(x, y, 1) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$. Ahora bien, si V y W son lo suficientemente pequeñas entonces

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in C : z \neq 0, x/z \in V, y/z \in W\} \\ &= \{[x, y, 1] \in C : x \in V, y \in W\}, \end{aligned}$$

es una vecindad abierta de $[a, b, c]$ en $C - \text{Sing}(C)$. El mapa $\phi : U \rightarrow V$ definido por

$$\phi[x, y, z] = x/z,$$

es un homeomorfismo con inversa $w \mapsto [w, g(w), 1]$. Similarmente, si $[a, b, c] \in C$ y $\partial P/\partial y(a, b, c) \neq 0 \neq a$, ó si $\partial P/\partial x(a, b, c) \neq 0$ ó $\partial P/\partial z(a, b, c) \neq 0$, podemos encontrar un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ de una vecindad abierta U de $[a, b, c]$ en $C - \text{Sing}(C)$ sobre un subconjunto abierto V de \mathbb{C} tal que $\phi[x, y, z]$ tiene una de las siguientes expresiones

$$z/x, \quad y/z, \quad z/y, \quad x/y, \quad y/x,$$

y la inversa de ϕ tiene una de las formas

$$w \mapsto [1, g(w), w], \quad [g(w), w, 1], \quad [g(w), 1, w], \quad [w, 1, g(w)] \text{ o } [1, w, g(w)]$$

donde $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Por lo tanto obtenemos un atlas sobre $C - \text{Sing}(C)$ cuyas funciones de transición tiene una de las siguientes formas

$$w \mapsto w, \quad 1/w, \quad g(w), \quad 1/g(w), \quad w/g(w) \quad \text{ó} \quad g(w)/w,$$

tal que g es holomorfa y el denominador no se anula sobre el conjunto donde las funciones de transición son definidas. Por lo tanto tenemos un atlas holomorfo. \square

Observación 5.26. Se verifica que el complemento de un conjunto finito de puntos en una superficie es denso. Por lo tanto la afirmación en la prueba de la proposición 4.18 que el complemento de un conjunto finito de puntos de una curva proyectiva no singular es denso está ahora justificado por la proposición 5.25.

La cuestión de tener un atlas holomorfo sobre la superficie es que hace posible hablar sobre funciones holomorfas sobre ella.

Definición 5.27. Sea $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ un atlas holomorfo sobre una superficie. Un mapa continuo $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es llamado *holomorfo* con respecto a Φ en $x \in S$ si existe una carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ en Φ tal que $x \in U_\alpha$ y

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C},$$

es holomorfa en $\phi_\alpha(x)$ en el sentido usual como una función de un subconjunto abierto V_α de \mathbb{C} a \mathbb{C} . El mapa es llamado *holomorfo* con respecto a Φ si es holomorfo para cualquier $x \in S$.

La definición anterior no depende de la elección de la carta como el siguiente lema lo demuestra.

Lema 5.28. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con respecto a un atlas Φ sobre S si, y sólo si

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C},$$

es holomorfa para cualquier carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ en Φ .

Demostración. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ son cartas en Φ entonces $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un conjunto abierto de V_α que contiene a $\phi_\alpha(x)$ y

$$f \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} = (f \circ \phi_\beta^{-1}) \circ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}.$$

Desde que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ y su inversa son ambas funciones holomorfas y la composición de funciones holomorfas es holomorfa, se sigue que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\phi_\alpha(x)$ si, y sólo si $f \circ \phi_\beta^{-1}$ es holomorfa en $\phi_\beta(x)$. \square

Definición 5.29. Sean S y T superficies con atlas holomorfos Φ y Ψ . Un mapa continuo $f : S \rightarrow T$ es llamado *holomorfo* con respecto a Φ y Ψ si

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta))} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta)) \rightarrow Y_\beta,$$

es holomorfo para cualquier carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ en Φ y cualquier carta $\psi_\beta : W_\beta \rightarrow Y_\beta$ en Ψ .

Lema 5.30. Si $f : S \rightarrow T$ y $g : T \rightarrow R$ son holomorfas con respecto a atlas holomorfos Φ, Ψ, Θ sobre la superficies S, T, R , entonces $g \circ f : S \rightarrow R$ es holomorfa con respecto a los atlas holomorfos Φ, Θ sobre S y R .

Demostración. Supongamos que $x \in S$, necesitamos demostrar que $g \circ f$ es holomorfa en x . Elijamos cartas holomorfas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre S , $\psi_\beta : W_\beta \rightarrow X_\beta$ sobre T y $\theta : Y_\gamma \rightarrow Z_\gamma$ sobre R tal que $x \in U_\alpha, f(x) \in W_\beta, g(f(x)) \in Y_\gamma$. Es suficiente mostrar que $\theta_\gamma \circ g \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\phi_\alpha(x) \in V_\alpha$. Pero en la vecindad abierta

$$\phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta) \cap f^{-1}g^{-1}(Y_\gamma)),$$

de $\phi_\alpha(x)$ podemos escribir

$$\theta \circ g \circ g \circ \phi_\alpha^{-1} = (\theta \circ g \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}),$$

y esta es la composición de dos funciones holomorfas en el sentido usual de análisis complejo, así que $\theta_\gamma \circ g \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfa. \square

Definición 5.31. Dos atlas holomorfos Φ y Ψ sobre una superficie S se dicen *compatibles* si el mapa identidad $1_S : S \rightarrow S$ es holomorfo tanto como un mapa de S con atlas Φ a S con atlas Ψ y como un mapa de S con atlas Ψ a S con atlas Φ .

Se verifica que el ser compatibles es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los atlas holomorfos sobre una superficie S .

Ejemplo 5.32. Los atlas $\{1_S : S \rightarrow S\}$ y

$$\{h : U \rightarrow V : U, V \text{ abiertos en } \mathbb{C}, h \text{ holomorfa con inversa holomorfa}\},$$

sobre \mathbb{C} son compatibles. Estos atlas no son compatibles con el atlas holomorfo sobre \mathbb{C} que consiste de una sola carta definida por $\phi(z) = \bar{z}$.

Observación 5.33. Se sigue de el lema 5.30 por considerar la composición $1_T \circ f \circ 1_S$ con apropiados atlas y que si Φ y Ψ son atlas holomorfos compatibles sobre una superficie S y $\bar{\Phi}$ y $\bar{\Psi}$ son atlas holomorfos sobre una superficie T entonces una función continua $f : S \rightarrow T$ es holomorfa con respecto a Φ y $\bar{\Phi}$ si, y sólo si es holomorfa con respecto a Ψ y $\bar{\Psi}$.

Bajo las condiciones anteriores podemos dar la definición de una superficie de Riemann.

Definición 5.34. Una *superficie de Riemann* es una superficie S junto con una clase de equivalencia \mathcal{H} de atlas holomorfos sobre S . En otras palabras una superficie de Riemann es dada por una superficie S con un atlas holomorfo sobre S y dos atlas holomorfos sobre S definen la misma superficie de Riemann si, y sólo si ellos son compatibles uno con el otro.

Si (S, \mathcal{H}) y (T, \mathcal{F}) son superficies de Riemann y $f : S \rightarrow T$ es continua entonces por la observación 5.33 podemos decir que f es un mapa *holomorfo* entre las superficie de Riemann (S, \mathcal{H}) y (T, \mathcal{F}) si es

holomorfo a cualquiera (o equivalentemente a todos) de los atlas holomorfos $\Phi \in \mathcal{H}$ sobre S y $\Psi \in \mathcal{F}$ sobre T .

Usualmente denotamos una superficie de Riemann (S, \mathcal{H}) por el mismo símbolo que el de la superficie, a menos que surja alguna confusión.

Definición 5.35. Dos superficies de Riemann son llamadas *biholomorfas* si existe una biyección holomorfa $f : S \rightarrow T$ cuya inversa es holomorfa.

Ejemplo 5.36. (a) Cualquier subconjunto abierto U de \mathbb{C} con el atlas holomorfo $\{1_U : U \rightarrow U\}$ es una superficie de Riemann.

(b) Si S es una superficie de Riemann con atlas holomorfo $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$, y si W es un subconjunto abierto de S entonces el atlas holomorfo

$$\Phi|_W = \{\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap W} : U_\alpha \cap W \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap W) : \alpha \in A\},$$

hace de W una superficie de Riemann.

(c) La proposición 5.24 nos dice que cualquier curva compleja no singular C en \mathbb{C}^2 puede ser considerada como una superficie de Riemann en una manera muy natural. La restricción a C de las coordenadas x y y sobre \mathbb{C} son entonces funciones holomorfas sobre \mathbb{C} . Como son todas las funciones polinomiales de x y y . Similarmente se sigue de la proposición 5.24 y 5.25 que si C es una curva afín o proyectiva entonces $C - \text{Sing}(C)$ es una superficie de Riemann.

(d) La *esfera de Riemann* $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde $z \in \mathbb{C}$ se identifica con $[z, 1]$ e ∞ con $[1, 0]$.

Sean $U = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ y $V = \mathbb{P}^1 - \{0\}$. Definamos $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\phi[x, y] = x/y, \quad \psi[x, y] = y/x,$$

Entonces $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ forman un atlas holomorfo sobre \mathbb{P}^1 con las funciones de transición

$$\phi \circ \psi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\},$$

ambas dadas por $z \mapsto \frac{1}{z}$. Recordemos que si U es un subconjunto abierto de \mathbb{C} , entonces una función meromorfa sobre U es una función $f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que si $a \in U$ existe un $\epsilon > 0$ tal que en el disco ajereado $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \epsilon\}$ la función f soló toma valores finitos y tiene una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k \geq -m} c_k (z - a)^k,$$

para algún entero m . Si esta serie de potencias es idénticamente cero, entonces $f(a) = 0$. De otra manera podemos asumir que $c_{-m} \neq 0$ y entonces

$$f(a) = \begin{cases} \infty & \text{si } m > 0, \\ C_0 & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

Cuando $f(a) = \infty$ decimos que f tiene un polo de orden m en a .

Equivalentemente, podemos escribir $f(z) = (z - a)^{-m}h(z)$, donde

$$h(z) = \sum_{k \geq 0} c_{k-m}(z - a)^k,$$

es holomorfa y $h(a) \neq 0$. Por lo tanto, f es meromorfa en una vecindad de a con polo en a si, y sólo si

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z - a)^m}{h(z)},$$

es holomorfa cerca de a con valor 0 en a . Esto significa que una función meromorfa sobre U es holomorfa en el sentido de superficies de Riemann como un mapa de U a $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Recíprocamente, cualquier función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{P}^1$ la cual no toma el valor constante ∞ sobre cualquier componente conexa de U define una función meromorfa sobre U .

Tenemos un último ejemplo importante de superficies de Riemann.

Ejemplo 5.37. El toro complejo. Como en §5.1 sean ω_1 y ω_2 números complejos los cuales son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Entonces la retícula $\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ en \mathbb{C} es un subgrupo aditivo de \mathbb{C} . Ya hemos notado en la observación 5.18 que el grupo cociente \mathbb{C}/Λ tiene una topología natural, la topología cociente inducida por el mapa $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ la cual mapea $z \mapsto \Lambda + z$. Se sigue inmediatamente del lema 5.7 que existe $\delta > 0$ tal que

$$|n\omega_1 + m\omega_2| \geq \delta,$$

para todos los pares de enteros n, m no ambos cero. Por lo tanto si $a \in \mathbb{C}$ la restricción de π al disco abierto

$$U_a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \frac{1}{2}\delta\},$$

es un homeomorfismo sobre el subconjunto abierto $\pi(U_a)$ de \mathbb{C}/Λ . Ahora bien si $\pi(U_a) \cap \pi(U_b) \neq \emptyset$, entonces existe un único $n\omega_1 + m\omega_2 \in \Lambda$ tal que $|n\omega_1 + m\omega_2 + a - b| < \frac{1}{2}\delta$ y entonces

$$(\pi|_{U_b})^{-1} \circ \pi|_{U_a \cap \pi^{-1}(\pi(U_b))} : U_a \cap \pi^{-1}(\pi(U_b)) \rightarrow U_b,$$

es dada por medio de la traslación de $n\omega_1 + m\omega_2$. Por lo tanto las cartas

$$\phi_a = (\pi|_{U_a})^{-1} : \pi(U_a) \rightarrow U_a,$$

para $a \in \mathbb{C}$ forman un atlas holomorfo sobre \mathbb{C}/Λ .

Para demostrar que este atlas hace de \mathbb{C}/Λ una superficie de Riemann resta demostrar que \mathbb{C}/Λ es un

espacio Hausdorff. Esto se puede probar directamente usando el lema 5.7 pero esto también se sigue inmediatamente de la existencia de un homeomorfismo $u : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_\Lambda$ donde C_Λ es una curva proyectiva no singular y usando el hecho que C_Λ es Hausdorff.

Si S es otra superficie de Riemann entonces una función f de \mathbb{C}/Λ a S es holomorfa si, y sólo si la composición $f \circ \pi$ de \mathbb{C} a S es holomorfa. Por lo tanto funciones holomorfas f de \mathbb{C}/Λ a S corresponde exactamente a funciones holomorfas g de \mathbb{C} a S con la propiedad que $g(z + \omega_1) = g(z) = g(z + \omega_2)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Funciones con esta propiedad son llamadas funciones *doblemente periódicas* con períodos ω_1 y ω_2 .

Proposición 5.38. *El homeomorfismo $u : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_\Lambda$ definido por*

$$u(\Lambda + z) = \begin{cases} [\wp(z), \wp'(z), 1] & \text{si } z \notin \Lambda, \\ [0, 1, 0] & \text{si } z \in \Lambda. \end{cases}$$

es holomorfo. Así como también su inversa $u^{-1} : C_\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$.

Demostración. Para demostrar que u es holomorfa tenemos que probar que si $\Lambda + w \in \mathbb{C}/\Lambda$, entonces

$$\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi(U_\alpha \cap u^{-1}(W_\beta)) \rightarrow Y_\beta,$$

es holomorfa en el sentido usual de análisis complejo para algunas cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre \mathbb{C}/Λ y $\psi_\beta : W_\beta \rightarrow Y_\beta$ sobre C_Λ tal que $\Lambda + w \in U_\alpha$ y $u(\Lambda + w) \in W_\beta$. Como en el ejemplo 5.37 podemos tomar a ϕ_α como la inversa de $\pi : V_\alpha \rightarrow U_\alpha = \pi(V_\alpha)$, donde V_α es un disco abierto lo suficientemente pequeño en \mathbb{C} . Por lo tanto, $\phi_\alpha^{-1} = \pi : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$. Si $w \notin \Lambda$, entonces $u(\Lambda + w) = [\wp(z), \wp'(z), 1]$ así que por la prueba de la proposición 5.25 podemos tomar ψ_β o bien $[x, y, z] \mapsto x/z$ ó $[x, y, z] \mapsto y/z$. Por lo tanto $\psi_\beta \circ u \circ \phi_\alpha^{-1}$ es la restricción de \wp ó \wp' , las cuales ambas son holomorfas cerca de w . Si $w \in \Lambda$ entonces $u(\Lambda + w) = [0, 1, 0]$ y la prueba de la proposición 5.25 podemos tomar ψ_β como el mapa $[x, y, z] \mapsto x/y$ desde que

$$\frac{\partial Q_\Lambda}{\partial z}(0, 1, 0) \neq 0,$$

(ver definición 5.16). Por lo tanto

$$\psi_\beta \circ u \circ \phi_\alpha^{-1}(z) = \begin{cases} \wp(z)/\wp'(z), & \text{si } z \notin \Lambda, \\ 0, & \text{si } z \in \Lambda. \end{cases}$$

Esta función es holomorfa cerca del cero (y por lo tanto cerca de cualquier punto de Λ por la doble periodicidad) desde que cerca de 0 podemos escribir

$$\wp(z) = \frac{g(z)}{z^2} \quad \text{y} \quad \wp'(z) = \frac{h(z)}{z^3},$$

donde g y h son funciones holomorfas cerca de 0 y $g(0)$ y $h(0)$ son no cero.

Esto completa la prueba de que u es holomorfa. Para demostrar que u^{-1} es holomorfa tenemos que verificar que

$$\phi_\alpha \circ u^{-1} \circ \psi_\beta^{-1} = (\psi_\beta \circ u \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1},$$

es holomorfa para cualesquiera cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre \mathbb{C}/Λ y $\psi_\beta : W_\beta \rightarrow Y_\beta$ sobre C_Λ . Esto puede ser probado directamente como se hizo para u , pero también se sigue inmediatamente del teorema de la función inversa de análisis complejo, el cual nos dice que si $f : U \rightarrow V$ es una función holomorfa biyectiva entre subconjuntos abierto de \mathbb{C} entonces $f^{-1} : V \rightarrow U$ también es holomorfa. \square

5.3. Ejemplos

Ejemplo 5.39. El teorema de el mapa abierto de análisis complejo dice que si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante de un subconjunto abierto conexo U a \mathbb{C} , entonces $f(U)$ es abierto en \mathbb{C} . Use esto para demostrar que si $f : R \rightarrow S$ es un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann y si R es conexo, entonces $f(R)$ es un subconjunto abierto de S .

Demostración. Sea $y \in f(R)$, entonces existe $x \in R$ tal que $y = f(x)$. Sean $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ carta para x y $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ carta para y . Sea $D \subseteq U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta)$ un conjunto conexo que contiene a x , entonces $\phi_\alpha(D)$ es un conjunto abierto conexo de V_α ahora tomemos la función

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(D) \rightarrow V_\beta,$$

esta es una función holomorfa no constante sobre $\phi_\alpha(D)$, de otro modo f sería constante sobre D y por la conexidad de R y el principio de continuidad analítica para superficies de Riemann tendríamos que f es constante en todo R , lo que no puede ocurrir, así que f no es constante sobre D y por lo tanto la función

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(D)} : \phi_\alpha(D) \rightarrow V_\beta,$$

es una función holomorfa no constante sobre $\phi_\alpha(D)$ y como $\phi_\alpha(D)$ es abierto y conexo de el teorema de el mapa abierto tenemos que $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(D))$ es abierto en V_β o sea que

$$W = \psi \circ f(D) = \psi(f(D)),$$

es abierto y como ψ_β es un homomorfismo se sigue que $f(D)$ es un subconjunto abierto de S y tal que $y \in f(D) \subseteq f(R)$. Por lo tanto $f(R)$ es un conjunto abierto de S . \square

Ejemplo 5.40. Demuestre que una función holomorfa no constante $f : R \rightarrow S$ entre superficies de Riemann conexas R y S tal que S es compacto es suprayectiva. Deduzca que S es compacto.

Demostración. Tenemos que demostrar que $f(R) = S$, supongamos que $R \neq \emptyset$, luego $f(R) \neq \emptyset$ ahora bien por el ejemplo 5.39 como R es conexo tenemos que $f(R)$ es un conjunto abierto. Por otra parte como R es compacto y $f : R \rightarrow S$ es continua tenemos que $f(R)$ es compacto y como S es Hausdorff se tiene que un compacto en un Hausdorff siempre es cerrado, así $f(R)$ es cerrado. Por lo tanto $f(R)$ es abierto y cerrado en S y como S es conexo debe suceder que $f(R) = S$, finalmente como la imagen continua de un compacto es compacta se sigue S es compacto. \square

Ejemplo 5.41. Demuestre que si R es una superficie de Riemann compacta y conexa entonces no existen funciones holomorfas no constantes $f : R \rightarrow \mathbb{C}$.

Demostración. Supongase por el contrario que exista $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa no constante, como R es compacta y conexa y \mathbb{C} es un conjunto conexo del ejemplo 5.40 concluimos que $f(R) = \mathbb{C}$, luego entonces \mathbb{C} sería un conjunto compacto, lo cual es imposible. Por lo tanto no existen funciones holomorfas no constantes $f : R \rightarrow \mathbb{C}$. \square

Ejemplo 5.42. Use el teorema de los ceros aislados de análisis complejo para demostrar que si $f : R \rightarrow S$ es un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann conexas, entonces cualquier $x \in R$ tiene una vecindad abierta U en R tal que $f(y) \neq f(x)$ para todo $y \in U - \{x\}$.

Demostración. Sean $x \in R$, $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ una carta para x , $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ carta para $f(x)$ y D un disco centrado en x (que puede ser un conjunto abierto conexo que contiene a x) tal que $D \subseteq U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta)$. Entonces la función

$$\psi \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta)) \rightarrow V_\beta,$$

no puede ser constante en $\phi_\alpha(D)$ de otra manera f sería constante en D y por la conexidad de R sería constante en R ; lo que no puede ocurrir, así $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ no es constante en $\phi_\alpha(D)$. Ahora sea $w = \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(x))$ entonces la función $g(z) = \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(z) - w$ no es constante en $\phi_\alpha(D)$ además es holomorfa y como $g(\phi_\alpha(x)) = 0$ del teorema de ceros aislados tenemos que existe un $r > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in B(\phi_\alpha(x), r) - \{\phi_\alpha(x)\}$. Sea $U' = \phi_\alpha^{-1}(B(\phi_\alpha(x), r) - \{\phi_\alpha(x)\}) = U - \{x\}$ donde $U = \phi_\alpha^{-1}(B(\phi_\alpha(x), r))$, entonces tenemos que

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(z) \neq \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(x)), \text{ para todo } z \in B(\phi_\alpha(x), r) - \{\phi_\alpha(x)\},$$

o equivalentemente

$$\psi_\beta(f(y)) \neq \psi_\beta(f(x)) \quad \forall y \in U - \{x\},$$

pero como ψ_β es inyectiva esto pasa si, y sólo si

$$f(x) \neq f(y) \quad \forall y \in U - \{x\}.$$

□

Ejemplo 5.43. El teorema de la función inversa de análisis complejo dice que si $f : U \rightarrow V$ es un mapa holomorfo biyectivo entre subconjuntos abiertos de \mathbb{C} , entonces $f' \neq 0$ para todo $z \in U$ y $f^{-1} : V \rightarrow U$ es holomorfa. Deduzca que si $f : R \rightarrow S$ es un mapa holomorfo biyectivo entre superficies de Riemann entonces $f^{-1} : S \rightarrow R$ es holomorfo.

Demostración. Sea $y \in S$ y $x = f^{-1}(y)$, entonces $y = f(x)$. Ahora consideremos $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ una carta para x y $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ carta para y , queremos demostrar que $\phi_\alpha \circ f^{-1} \circ \psi_\beta$ es holomorfa en ψ_β . Ahora bien, sea D un subconjunto abierto conexo de $U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta)$ con $x \in D$, entonces $\phi_\alpha(D)$ es un conjunto abierto y conexo, ahora sea

$$f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(U_\beta)) \rightarrow V_\beta.$$

Dado que $f_{\beta\alpha} : \phi_\alpha(D) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante (pues f es biyectiva) y $\phi_\alpha(D)$ es un conjunto abierto y conexo se sigue que del teorema del mapa abierto que $f_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(D))$ es un conjunto abierto, así pues, tenemos un mapa $f_{\beta\alpha} : \phi_\alpha(D) \rightarrow f_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(D))$ holomorfo biyectivo entre subconjuntos

abiertos de \mathbb{C} , luego por el teorema de la función inversa de análisis $f_{\beta\alpha}^{-1} : f_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(D)) \rightarrow \phi_\alpha(D)$ es holomorfa, pero esto significa que

$$\phi_\alpha \circ f \circ \psi_\beta^{-1} : f_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(D)) \rightarrow \phi_\alpha(D),$$

es holomorfa y como $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(x)) = \psi_\beta \circ f(x) = \psi_\beta(y) \in f_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(D))$ concluimos que $f^{-1} : S \rightarrow R$ es holomorfa. \square

Ejemplo 5.44. (a) Demuestre que la unión de dos atlas holomorfos compatibles sobre una superficie S es un atlas holomorfo.

(b) Un atlas sobre una superficie es llamado *completo* si contiene a cualquier atlas holomorfo el cual es compatible con este. Muestre que en cualquier clase de equivalencia \mathcal{H} de atlas holomorfos compatibles sobre S existe un único atlas holomorfo completo.

Demostración. (a) Sean Φ y Ψ dos atlas holomorfos sobre S , entonces $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ y $\Psi = \{\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta : \beta \in B\}$ y sea $\Phi \cup \Psi = \{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow V_\gamma : \gamma \in A \cup B\}$ donde

$$f_\gamma = \begin{cases} \phi_\alpha, & \text{si } \gamma = \alpha \\ \psi_\beta, & \text{si } \gamma = \beta. \end{cases}$$

Veamos que $\Phi \cup \Psi$ es un atlas holomorfo. Sean $\alpha, \beta \in A \cup B$, si $\alpha, \beta \in A$ ó $\alpha, \beta \in B$ de la holomorfia de Φ y Ψ , tenemos $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ ó $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ son mapas holomorfos. Así pues supongamos que $\alpha \in A$ y $\beta \in B$ y tomemos las cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ y $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ y tenemos que demostrar que

$$\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cup U_\beta),$$

es un mapa holomorfo. Ahora bien, de la compatibilidad de Φ y Ψ se tiene que $1_S : (S, \Psi) \rightarrow (S, \Phi)$ es holomorfo así que para las cartas dadas $\phi_\alpha \circ 1_S \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cup U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es holomorfo, pero este mapa no es otro más que $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$. Por lo tanto $\Phi \cup \Psi$ es un atlas holomorfo. Por otra parte es fácil notar que $\Phi \cup \Psi$ es un atlas holomorfo compatible con Φ y Ψ .

(b) Sea

$$\Phi_c = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{H}} \Phi.$$

Afirmamos que Φ_c es un atlas holomorfo compatible a cada $\Phi \in \mathcal{H}$. Veamos primero que Φ_c es un atlas holomorfo. Sean $f \in \Phi$ y $g \in \Psi$ para algunos atlas $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$, al ser Φ y Ψ compatibles del inciso (a) tenemos que $\Phi \cup \Psi$ es un atlas holomorfo por lo cual $g \circ f^{-1}$ es holomorfo y por lo tanto Φ_c es un atlas holomorfo. Ahora veamos que Φ_c es un atlas compatible con todo atlas $\Phi \in \mathcal{H}$. Para esto tenemos que demostrar que $1_S : (S, \Phi) \rightarrow (S, \Phi_c)$ y $1_S : (S, \Phi_c) \rightarrow (S, \Phi)$ son funciones holomorfas, pero esto se sigue inmediatamente del hecho de que todas los atlas en \mathcal{H} son compatibles con Φ . Esto demuestra que Φ_c es un atlas holomorfo completo, veamos que es el único, supongase que Ψ_c

es otro atlas holomorfo completo el cual es compatible con cualquier atlas que lo contiene, por una parte $\Psi_c \in \mathcal{H}$, luego por la definición de Ψ_c debe ocurrir que $\Psi_c \subseteq \Phi_c$, por otra parte de la completés de Ψ se sigue que $\Phi_c \subseteq \Psi_c$. Por lo tanto $\Phi_c = \Psi_c$. \square

Ejemplo 5.45. Sea S una superficie con subconjuntos abiertos V y W tal que $S = V \cup W$. Suponga que V y W tienen atlas holomorfos Φ y Ψ tal que los atlas holomorfos $\Phi|_{V \cap W}$ y $\Psi|_{V \cap W}$ son compatibles sobre $V \cap W$. Demuestre que $\Phi \cup \Psi$ es un atlas holomorfo sobre S .

Demostración. Tenemos primero que

$$\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\} \text{ con } \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = V,$$

y

$$\Psi = \{\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta : \beta \in B\} \text{ con } \bigcup_{\beta \in B} U_\beta = W.$$

Tenemos que demostrar que $\Phi \cup \Psi = \{f_\gamma : U_\gamma \rightarrow V_\gamma : \gamma \in A \cup B\}$ es un atlas holomorfo de S donde

$$f_\gamma = \begin{cases} \phi_\alpha & \text{si } \gamma = \alpha, \\ \psi_\beta & \text{si } \gamma = \beta. \end{cases}$$

Notemos que

$$\bigcup_{\gamma \in A \cup B} U_\gamma = S,$$

desde que $S = V \cup W$, primero demostremos que los mapas de transición son holomorfos, sean $\alpha, \beta \in A \cup B$ si $\alpha, \beta \in A$ ó $\alpha, \beta \in B$ como (V, Φ) y (W, Ψ) son atlas holomorfos las funciones de transición $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ ó $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ serían holomorfos, así pues supongamos que $\alpha \in A$ y $\beta \in B$ y consideremos las cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ y $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ y queremos demostrar que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un mapa holomorfo, pero tenemos que $\Phi|_{V \cap W}$ y $\Psi|_{V \cap W}$ son compatibles sobre $U \cap W$ y además $U_\alpha \cap U_\beta \subseteq V \cap W$ así que $\psi_\beta \circ 1_{U \cap W} \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un mapa holomorfo, pero $\psi \circ 1_{V \cap W} \circ \phi_\alpha^{-1} = \psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ de donde concluimos que $\psi \circ \phi_\alpha^{-1}$ es holomorfo y por lo tanto $\Phi \cup \Psi$ define un atlas holomorfo en S . \square

Ejemplo 5.46. De esta sección use el ejemplo 5.41 y de §5.2 el ejemplo 5.37 para demostrar que no hay funciones holomorfas no constantes doblemente periódicas.

Demostración. Recordemos que una función $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow S$ donde S es una superficie de Riemann es holomorfa si, y sólo si la composición $h \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow S$ es holomorfa. Así que, las funciones h de \mathbb{C}/Λ a S corresponden exactamente a funciones holomorfas g de \mathbb{C} a S las cuales son doblemente periódicas, esto es, $g(z + \omega_1) = g(z) = g(z + \omega_2)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $S = \mathbb{C}$ y supongamos por el contrario que existe una función doblemente periódica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no constante, entonces por la observación anterior a esta función le corresponde una función $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde $f = h \circ \pi$ y h tiene que ser

una función no constante, pues si h es constante, esto no llevaría a que f es constante, lo cual no puede ocurrir, así tenemos $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante, por otra parte \mathbb{C}/Λ es una superficie de Riemann compacta y conexa, pero esto contradice el hecho de que no existen funciones $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas y no constantes donde R es una superficie de Riemann compacta y conexa. \square

Ejemplo 5.47. Sea $\wp(z)$ la función \wp de Weierstrass asociada con la retícula Λ en \mathbb{C} . Explique por qué la función

$$\bar{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

definida por $\bar{\wp}(\Lambda + z) = \wp(z)$ es holomorfa en el sentido de superficies de Riemann.

Demostración. Por la observación del ejemplo anterior tenemos que $\bar{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ es holomorfa si, y sólo si $\bar{\wp} \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es holomorfa, sea $g = \bar{\wp} \circ \pi$, note que g es doblemente periódica. Ahora bien, $g(z) = \bar{\wp} \circ \pi(z) = \bar{\wp}(\Lambda + z) = \wp(z)$ es una función meromorfa sobre \mathbb{C} y por las observaciones posteriores al ejemplo 5.37 es una función holomorfa $\bar{\wp} \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ y por lo tanto se concluye que $\bar{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ es una función holomorfa entre superficies de Riemann. \square

Ejemplo 5.48. Sea Λ una retícula en \mathbb{C} . Demuestre que $g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2 \neq 0$.

Demostración. Consideremos la ecuación polinomial $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ o bien $x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4} = 0$ que tiene por discriminante

$$\Delta = -4 \left(-\frac{g_2}{4} \right)^3 - 27 \left(-\frac{g_3}{4} \right) = \frac{g_2^3}{4^2} - 27 \frac{g_3^2}{4^2}.$$

Ahora bien como sabemos

$$\alpha = \wp \left(\frac{1}{2}\omega_1 \right), \beta = \wp \left(\frac{1}{2}\omega_2 \right), \gamma = \wp \left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \right),$$

son tres raíces distintas del polinomio $x^3 - \frac{g_2}{4}x - \frac{g_3}{4} = 0$, así que el discriminante no puede ser cero, pues en caso contrario tendríamos raíces repetidas, por lo tanto

$$\Delta = \frac{g_2^3}{4^2} - 27 \frac{g_3^2}{4^2} \neq 0,$$

o bien

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

\square

Capítulo 6

El teorema de Riemann-Roch

En este capítulo vamos a ver que el *género* g de una curva proyectiva no singular C en \mathbb{P}^2 , el cual definimos en el capítulo 4 usando las propiedades topológicas de C , también puede ser caracterizado en términos de la estructura holomorfa de C . De hecho g es la dimensión de el espacio vectorial de las diferenciales holomorfas sobre C . Este es un caso especial de el famoso teorema de Riemann-Roch el cual relaciona las dimensiones de espacios vectoriales de funciones meromorfas con polos prescritos y ceros sobre C . El teorema de Riemann-Roch tiene algunas muy útiles consecuencias, incluida una prueba fácil de la ley de asociatividad para la estructura de grupo aditivo sobre una curva cúbica (ver teorema 3.38) y una prueba que cualquier función meromorfa sobre una curva proyectiva no singular es racional. En el camino a probar el teorema de Riemann-Roch vamos a encontrar otra caracterización del género g de C , el cual es que el número de ceros menos el número de polos (contando con multiplicidades) de cualquier diferencial meromorfa sobre C es $2g - 2$. Concluimos este capítulo enunciando el teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas, que son superficies de Riemann compactas con una condición adicional sobre su campo global de funciones meromorfas y damos algunas aplicaciones de esta versión más general para superficies de Riemann compactas, esto se hace con el espíritu de que el lector se interese por el caso general para superficies de Riemann compactas del teorema de Riemann-Roch, pues no se pretende dar la prueba de este resultado lo que si veremos es como aplicar este resultado a proposiciones bastante útiles.

6.1. Diferenciales holomorfas

La definición de una trayectoria suave a trozos en \mathbb{C} tiene una generalización obvia para superficies de Riemann que a continuación establecemos en la siguiente definición.

Definición 6.1. Una *trayectoria suave a trozos* en una superficie de Riemann S es un mapa continuo γ del intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R} a S tal que si $\phi : U \rightarrow V$ es una carta holomorfa sobre un subconjunto

abierto U de S y $[c, d] \subseteq \gamma^{-1}(U)$ entonces $\phi \circ \gamma : [c, d] \rightarrow V$, es una trayectoria suave a trozos en el subconjunto abierto V de \mathbb{C} . La trayectoria es *cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Las definiciones de las diferenciales holomorfas y meromorfas sobre una superficie de Riemann no son tan inmediatas y necesitan una cierta motivación. Primero necesitamos decir lo que entendemos por funciones meromorfas en una superficie de Riemann.

Recordemos del ejemplo 5.36(d) que una función meromorfa sobre un subconjunto abierto W de \mathbb{C} puede ser interpretada como una función $W \rightarrow \mathbb{P}^1$ la cual es holomorfa en el sentido de superficies de Riemann (y no es idénticamente ∞ sobre cualquier componente conexa de W). Aquí como es usual identificamos \mathbb{P}^1 con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Por lo tanto es razonable hacer la siguiente definición.

Definición 6.2. Una *función meromorfa* sobre una superficie de Riemann S es una función $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ la cual es holomorfa en el sentido de superficies de Riemann y no es idénticamente ∞ sobre cualquier componente conexa de S .

Definición 6.3. Sean f y g funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann S . Entonces decimos que fdg , es una *diferencial meromorfa* sobre S , y si \bar{f} y \bar{g} son también funciones meromorfas sobre S , decimos que

$$fdg = \bar{f}d\bar{g},$$

si, y sólo si para cualquier carta holomorfa $\phi : U \rightarrow V$ sobre un subconjunto abierto U de S tenemos que

$$(f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})' = (\bar{f} \circ \phi^{-1})(\bar{g} \circ \phi^{-1})'.$$

Note que la composición de f, g, \bar{f} y \bar{g} con ϕ^{-1} son funciones meromorfas sobre el subconjunto abierto V de \mathbb{C} , así que podemos diferenciarlas y multiplicarlas juntas punto a punto en la forma usual.

Observación 6.4. (i) Formalmente una diferencial meromorfa sobre S es una clase de equivalencia de un par (\bar{f}, \bar{g}) de funciones meromorfas sobre S tal que dos pares (f, g) y (\bar{f}, \bar{g}) son equivalentes si, y sólo si para cualquier carta holomorfa $\phi : U \rightarrow V$ sobre S y para cualquier $z \in V$ tenemos

$$f \circ \phi^{-1}(z)(g \circ \phi^{-1})'(z) = \bar{f} \circ \phi^{-1}(z)(\bar{g} \circ \phi^{-1})'(z).$$

(ii) Para obtener alguna idea de por que esta definición puede ser útil, consideremos la siguiente pregunta.

¿Tiene sentido diferenciar una función meromorfa sobre una superficie de Riemann S ?

Note que si $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ es un atlas holomorfo sobre S , entonces una función meromorfa $g : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ está determinada por la colección de funciones meromorfas

$$\{g \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \alpha \in A\},$$

y recíprocamente una colección de funciones meromorfas

$$\{G_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \alpha \in A\},$$

define una función meromorfa g sobre S tal que $G_\alpha = g \circ \phi_\alpha^{-1}$ para cada $\alpha \in A$ si, y sólo si

$$G_\alpha(\phi_\alpha(u)) = G_\beta(\phi_\beta(u)) \quad \forall u \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

cuando $\alpha, \beta \in A$.

Podemos desde luego diferenciar las funciones meromorfas $g \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ para obtener funciones meromorfas $(g \circ \phi_\alpha^{-1})' : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sin embargo, estas no definen funciones meromorfas sobre S desde que las composiciones $(g \circ \phi_\alpha^{-1})' \circ \phi_\alpha$ y $(g \circ \phi_\beta^{-1})' \circ \phi_\beta$ no necesariamente coinciden sobre $U_\alpha \cap U_\beta$. En su lugar la regla de la cadena nos dice que si $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ entonces

$$\begin{aligned} (g \circ \phi_\alpha^{-1})'(\phi_\alpha(u)) &= ((g \circ \phi_\beta^{-1}) \circ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}))'(\phi_\alpha(u)) \\ &= (g \circ \phi_\beta^{-1})'(\phi_\beta(u))(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})'(\phi_\alpha(u)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(g \circ \phi_\alpha^{-1})' \circ \phi_\alpha$ y $(g \circ \phi_\beta^{-1})' \circ \phi_\beta$ difieren por un factor de $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1} \circ \phi_\alpha$ donde $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ son las funciones transición de el atlas.

Esto significa que si “diferenciamos” la función meromorfa g sobre S por diferenciar todas las funciones meromorfas $g \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ las cuales son definidas sobre subconjuntos abiertos de \mathbb{C} y luego las transferimos de nuevo para obtener funciones meromorfas $(g \circ \phi_\alpha^{-1})' \circ \phi_\alpha$ sobre los subconjuntos abiertos U_α los cuales cubren a S no obtenemos una función sobre S . En su lugar, obtenemos un objeto abstracto llamado una diferencial (meromorfa) escrita por dg . Multiplicamos diferenciales por funciones meromorfas f sobre S para obtener nuevas diferenciales escritas por fdg . Dos diferenciales meromorfas fdg y $\bar{f}d\bar{g}$ serán entonces iguales si las funciones meromorfas $(f \circ \phi_\alpha^{-1})(g \circ \phi_\alpha^{-1})'$ y $(\bar{f} \circ \phi_\alpha^{-1})(\bar{g} \circ \phi_\alpha^{-1})'$ que los representan sobre U_α via la carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ son iguales para todo $\alpha \in A$.

Estas ideas nos llevan a la siguiente definición alternativa de una diferencial meromorfa.

Definición 6.5. Sea $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$ un atlas holomorfo sobre una superficie de Riemann. Entonces una diferencial meromorfa η sobre S es dada por una colección

$$\{\eta_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \alpha \in A\},$$

de funciones meromorfas sobre los subconjuntos abiertos V_α de \mathbb{C} tal que si $\alpha, \beta \in A$ y $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ entonces

$$\eta_\alpha(\phi_\alpha(u)) = \eta_\beta(\phi_\beta(u))(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})'(\phi_\alpha(u)).$$

Dadas dos funciones meromorfas f y g sobre S podemos definir una diferencial meromorfa fdg sobre S en este sentido por $fdg = \eta$ donde

$$\eta_\alpha = (f \circ \phi_\alpha^{-1})(g \circ \phi_\alpha^{-1})'.$$

Observación 6.6. Si η y ζ son diferenciales meromorfas de acuerdo a esta definición y ζ no es idénticamente cero sobre cualquier componente conexa de S , entonces las razones η_α/ζ_α definen funciones meromorfas sobre subconjuntos abiertos V_α de \mathbb{C} que satisfacen

$$\eta_\alpha(\phi_\alpha(u))/\zeta_\alpha(\phi_\alpha(u)) = \eta_\beta(\phi_\beta(u))/\zeta_\beta(\phi_\beta(u)),$$

para todo $u \in U_\alpha$ o equivalentemente $\eta = f\zeta$. Por lo tanto para demostrar que cualquier diferencial meromorfa η en el sentido de la definición 6.5 es una diferencial meromorfa de la forma $f dg$ es suficiente demostrar que existe al menos una función meromorfa no constante g sobre cualquier superficie de Riemann.

Observación 6.7. Note que cuando S es el plano complejo \mathbb{C} cualquier diferencial meromorfa $f dg$ sobre S puede ser expresada únicamente en la forma $h dz$ donde $h = fg'$ es meromorfa y z denota la función identidad sobre \mathbb{C} . Por lo tanto las diferenciales meromorfas sobre \mathbb{C} pueden identificarse naturalmente con las funciones meromorfas sobre \mathbb{C} .

Observación 6.8. La cosa más importante a recordar sobre una diferencial meromorfa $f dg$ es que está representada sobre el rango de una carta holomorfa $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ mediante la función meromorfa $(f \circ \phi_\alpha^{-1})(g \circ \phi_\alpha^{-1})'$.

Definición 6.9. Decimos que la diferencial meromorfa $f dg$ tiene un *polo* en un punto p en S si la función meromorfa $(f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})'$ tiene un polo en $\phi(p)$ cuando $\phi : U \rightarrow V$ es una carta holomorfa sobre una vecindad abierta U de p en S . Llamamos $f dg$ una *diferencial holomorfa* si no tiene polos.

Nuestra razón para introducir las diferenciales holomorfas es que ellas son los objetos naturales a integrar sobre una superficie de Riemann

Definición 6.10. Sea S una superficie de Riemann. Si $f dg$ es una diferencial holomorfa sobre S , entonces la *integral* de $f dg$ a lo largo de la trayectoria suave a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ es

$$\int_\gamma f dg = \int_a^b f \circ \gamma(t)(g \circ \gamma)'(t) dt.$$

Observación 6.11. Se verifica que si $f dg = \bar{f} d\bar{g}$, entonces

$$\int_a^b f \circ \gamma(t)(g \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b \bar{f} \circ \gamma(t)(\bar{g} \circ \gamma)'(t) dt,$$

por lo tanto la definición anterior tiene sentido.

Observación 6.12. Si $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es un mapa suave a trozos entre los intervalos $[c, d]$ y $[a, b]$, entonces $\gamma \circ \psi : [c, d] \rightarrow S$ es una trayectoria suave a trozos en S y al hacer la sustitución $t = \psi(s)$ encontramos que

$$\int_\gamma f dg = \int_a^b f \circ \gamma \circ \psi(s)(g \circ \gamma)'(\psi(s))\psi'(s) ds = \int_{\gamma \circ \psi} f dg,$$

Esto nos dice que la integral de una diferencial a lo largo de una trayectoria es independiente de la parametrización de la trayectoria.

Definición 6.13. Si $\psi : S \rightarrow R$ es un mapa holomorfo entre superficies de Riemann S y R y si $f dg$ es una diferencial holomorfa sobre R entonces definimos una diferencial holomorfa $\psi^*(f dg)$ sobre S por

$$\psi^*(f dg) = (f \circ \psi)d(g \circ \psi).$$

Entonces si $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ es una trayectoria suave a trozos en S , tenemos

$$\int_{\gamma} \psi^*(f dg) = \int_a^b f \circ \psi \circ \gamma(t)(g \circ \psi \circ \gamma)'(t) dt = \int_{\psi \circ \gamma} f dg.$$

6.2. El teorema de Riemann-Roch

Con el fin de establecer el teorema de Riemann-Roch es conveniente introducir algo de nueva terminología.

Definición 6.14. Un *divisor* D sobre C es una suma formal

$$D = \sum_{p \in C} n_p \cdot p \quad (6.1)$$

tal que $n_p \in \mathbb{Z}$ para cualquier $p \in C$ y $n_p = 0$ para todos excepto un número finito de $p \in C$. El *grado* de D es entonces

$$\deg(D) = \sum_{p \in C} n_p.$$

Si $n_p = 0$ para $p \notin \{p_1, \dots, p_k\}$ entonces también podemos escribir

$$D = m_1 \cdot p_1 + \dots + m_k \cdot p_k,$$

donde $m_j = n_{p_j}$. Por convención, podemos omitir cualquier m_j igual a 1 y escribir p en lugar de $1 \cdot p$. Si $n_p = 0$ para todo $p \in C$; escribimos

$$D = 0.$$

Sumamos y restamos divisores y los multiplicamos por enteros en la manera obvia. Así el conjunto de todos los divisores sobre C llega a ser un grupo abeliano, denotado por $\text{Div}(C)$, y el grado define un homomorfismo de $\text{Div}(C)$ a \mathbb{Z} .

Si $n_p \geq 0$ para todo $p \in C$ escribimos $D \geq 0$ y decimos que D es *efectivo* (o positivo). Escribimos $D \geq D'$ si $D - D' \geq 0$. Note que si $D \geq D'$, entonces

$$\deg D \geq \deg D'.$$

Sea f una función meromorfa sobre C la cual no es idénticamente cero. Si $p \in C$ podemos elegir una carta holomorfa $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre C tal que $p \in U_\alpha$. Entonces $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es una función meromorfa sobre el subconjunto abierto V_α de \mathbb{C} . Si m es un entero positivo decimos que f tiene un polo o un cero de

multiplicidad m en p si $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ tiene un polo o un cero de multiplicidad m en $\phi_\alpha(p)$, es decir cerca de $\phi_\alpha(p)$ podemos escribir

$$f \circ \phi_\alpha^{-1}(z) = (z - \phi_\alpha(p))^{-m} g(z),$$

o

$$f \circ \phi_\alpha^{-1}(z) = (z - \phi_\alpha(p))^m g(z),$$

donde $g(z)$ es holomorfa y no se anula en $\phi_\alpha(p)$. Esto es independiente de la elección de la carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, ya que si $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$ es otra carta holomorfa sobre C tal que $p \in U_\beta$, entonces la función de transición satisface

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(z) = \phi_\alpha(p) + (z - \phi_\beta(p))h(z),$$

donde $h(z)$ es una función holomorfa la cual no se anula en $\phi_\beta(p)$.

Similarmente si $\omega = fdg$ es una diferencial meromorfa sobre C la cual no es idénticamente cero decimos que ω tiene un polo o un cero de multiplicidad m en p si la función meromorfa $(f \circ \phi_\alpha^{-1})(g \circ \phi_\alpha^{-1})'$ la cual representa ω sobre V_α tiene un polo o cero de multiplicidad m en $\phi_\alpha(p)$. Nuevamente esto es independiente de la elección de la carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$.

Definición 6.15. El *divisor de una función meromorfa* f la cual no es idénticamente cero sobre C es

$$(f) = \sum_{p \in C} n_p \cdot p,$$

donde n_p es $-m$ si f tiene un polo de multiplicidad m en p , es m si f tiene un cero de multiplicidad m en p y cero en otro caso. Note que $(fg) = (f) + (g)$ y $\left(\frac{f}{g}\right) = (f) - (g)$. Un divisor el cual es el divisor de alguna función meromorfa es llamado un *divisor principal*. Dos divisores D y D' se dicen *linealmente equivalentes* lo que escribimos $D \sim D'$ si $D - D'$ es un divisor principal.

Si ω es una diferencial meromorfa sobre C la cual no es idénticamente cero, entonces definimos el divisor (ω) de ω usando las multiplicidades de los polos y ceros de ω en exactamente la misma forma como definimos el divisor de una función meromorfa. El divisor de una diferencial meromorfa es llamado un *divisor canónico* y es usualmente escrito por κ . Ya hemos notado en la observación 6.6 que si η es otra diferencial meromorfa sobre C la cual no es idénticamente cero entonces existe una función meromorfa f sobre C tal que $\eta = f\omega$, y por lo tanto $(\eta) = (f) + (\omega) \sim (\omega)$. Así que, cualesquiera dos divisores canónicos son linealmente equivalentes.

A continuación daremos la prueba de un resultado el cual estableceremos para superficies de Riemann compactas en general.

Proposición 6.16. *Un divisor principal sobre una superficie de Riemann compacta X tiene grado cero en símbolos $\deg(f) = 0$; esto es, una función meromorfa sobre X la cual no es idénticamente cero tiene el mismo número de ceros y polos, contando con multiplicidades.*

Para establecer este resultado necesitamos dar ciertas definiciones y lemas que a continuación enunciamos.

Series de Laurent Sea f una función definida en una vecindad aujerada de $p \in X$. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta sobre X con $p \in U$. Pensando a z como la carta local sobre X cerca de p , así que $z = \phi(x)$ para x cerca de p , ahora bien tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad de $z_0 = \phi(p)$. Por lo tanto podemos expandir en serie de Laurent sobre z_0 :

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Esta es llamada la *serie de Laurent para f con respecto a ϕ* (o con respecto a la coordenada local z). Los coeficientes $\{c_n\}$ de la serie de Laurent son llamados los *coeficientes de Laurent*.

Uno puede usar series de Laurent sin embargo para demostrar la naturaleza de la singularidad de f en p . Esto esta basado sobre el criterio usual para funciones de una variable compleja y se tiene como una aplicación de este.

Lema 6.17. *Con la notación de arriba, f tiene una singularidad removible en p si, y sólo si su serie de Laurent no tiene términos negativos. La función f tiene un polo en p si, y sólo si su serie de Laurent tiene un número finito de términos negativos. La función f tiene una singularidad esencial en p si, y sólo si su serie de Laurent tiene un número infinito de términos negativos.*

Definición 6.18. Sea f una función meromorfa en p , de cuya serie de Laurent en la coordenada local z es $\sum_n c_n (z - z_0)^n$. El *orden de f en p* denotado por $\text{ord}_p(f)$, es el mínimo exponente que aparece (con coeficiente no cero) en la serie de Laurent:

$$\text{ord}_p(f) = \text{mín}\{n : c_n \neq 0\}.$$

Se verifica que $\text{ord}_p(f)$ está bien definido, esto es, es independiente de la elección de la coordenada local que se elija en la serie de Laurent.

La siguiente proposición de cuya prueba deberá consultarse en [7], nos dice que un mapa holomorfo entre superficies de Riemann tiene una forma normal estandar en alguna coordenada local: esencialmente, cualquier mapa tiene el aspecto de un mapa de potencia.

Proposición 6.19. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapa holomorfo definido en $p \in X$ el cual no es constante. Entonces existe un único entero $m \geq 1$ el cual satisface la siguiente propiedad: para cualquier carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sobre Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sobre X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

Definición 6.20. La *multiplicidad* de F en p , denotada por $\text{mult}_p(F)$ es el único entero m tal que existen coordenadas locales cerca de p y $F(p)$ donde F tiene la forma $z \mapsto z^m$.

Observación 6.21. Antes de establecer el siguiente lema hagamos la observación siguiente sea f una función meromorfa sobre una superficie de Riemann X como vimos en la definición 6.2 esto significa que $f : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$ es holomorfa como superficies de Riemann, esto lo podemos decir de la siguiente manera. Sea f una función meromorfa sobre X . Los valores los cuales f puede tomar son

números complejos, lejos de los polos de f . En un polo de f el “valor” natural es ∞ . Para ser más preciso, definimos una función $F : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & \text{si } x \text{ no es un polo de } f, \\ \infty & \text{si } x \text{ es un polo de } f. \end{cases}$$

Es fácil ver que este mapa F es holomorfo.

Lema 6.22. *Sea f una función holomorfa sobre una superficie de Riemann X , con mapa asociado $F : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

a) *Si $p \in X$ es un cero de f , entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$.*

b) *Si $p \in X$ es un polo de f , entonces $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.*

La siguiente proposición de cuya prueba remitimos al lector a consultar en [7] establece una de las propiedades más importantes de los mapas holomorfos definidos en superficies de Riemann compactas.

Proposición 6.23. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$, definimos $d_y(F)$ como la suma de las multiplicidades de F en los puntos de X que son mapeados a y :*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Entonces $d_y(F)$ es constante, independientemente de y .

La proposición de arriba motiva la siguiente definición.

Definición 6.24. *Sea $F : X \rightarrow Y$ un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. El grado de F , denotado $\text{deg}(F)$, es el entero $d_y(F)$ para cualquier $y \in Y$.*

Corolario 6.25. *Un mapa holomorfo entre superficies de Riemann compactas es un biholomorfismo si, y sólo si tiene grado uno.*

Demostración. Observe que cuando F tiene grado uno, esto significa que el mapa es inyectivo ahora bien por el ejemplo 5.40 dado que estamos trabajando con superficies compactas se tiene que F es sobre así que tenemos un holomorfismo biyectivo y por el ejemplo 5.43 se sigue que F^{-1} también es holomorfo, luego F es un biholomorfismo. \square

Demostración de la proposición 6.16. Sea f una función meromorfa no constante sobre una superficie de Riemann compacta X , entonces note que con la notación ya introducida necesitamos demostrar que

$$(f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

Sea $F : X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el mapa asociado a la esfera de Rieman (vease observación 6.21). Sean $\{x_i\}$ los puntos de X mapeados a 0, y sean $\{y_j\}$ los puntos de X mapeados a ∞ ; esto es, los x_i 's son exactamente los ceros de f , y los y_j 's son sus polos. Sea d el grado del mapa F .

Por definición del grado, tenemos que

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \quad \text{y} \quad d = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F).$$

Ahora los únicos puntos de X que tiene ordenes no cero son sus ceros y polos, los cuales son los puntos x_i y y_j , por el lema 6.22 tenemos que

$$\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f) \quad \text{y} \quad \text{mult}_{y_j}(F) = -\text{ord}_{y_j}(f).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

desde que ambas sumas son iguales a el grado d . □

La proposición 6.16 tiene un corolario inmediato.

Corolario 6.26. *Dos divisores linealmente equivalentes sobre C tienen el mismo grado. En particular los divisores canónicos sobre C todos tienen el mismo grado.*

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la proposición 6.16. □

Proposición 6.27. *Si κ es un divisor canónico sobre C entonces $\deg \kappa = 2g - 2$.*

Demostración. Por el corolario 6.26 es suficiente mostrar que existe una diferencial meromorfa ω sobre C , no idénticamente cero tal que $\deg(\omega) = 2g - 2$. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d el cual define a C . Podemos asumir que hemos elegido coordenadas tal que $[0, 1, 0] \notin C$, esto es, el coeficiente de y^d en $P(x, y, z)$ es no cero. Entonces desde que $P(x, y, z)$ es irreducible y $\partial P / \partial y$ no es idénticamente cero, por la forma débil del teorema de Bézout (3.9) existe solo un número finito de puntos en C los cuales se anulan en $\partial P / \partial y$. Como $[0, 1, 0] \notin C$ entonces x o z no son ambos cero en estos puntos. Por lo tanto por aplicar una transformación proyectiva de la forma $x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto \alpha x + z$, podemos asumir que si $[a, b, c] \in C$ y $\partial P / \partial y(a, b, c) = 0$, entonces $c \neq 0$.

Ahora sea ω la diferencial $d(x/z)$ de la función meromorfa x/z sobre C . Cerca de los puntos $[a, b, c] \in C$ con $c \neq 0$ y $\partial P / \partial y(a, b, c) \neq 0$ podemos tomar x/z como una carta local sobre C (ver la prueba de la proposición 5.25) y por lo tanto ω no tiene polos ni ceros en tales puntos.

En cualquier punto $[a, b, c] \in C$ tal que $c = 0$ tenemos que $a \neq 0$ y $\partial P/\partial y(a, b, c) \neq 0$, por nuestra elección de coordenadas tenemos que $v = z/x$ es una carta local sobre C y

$$\omega = d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}dv,$$

tiene un polo de multiplicidad dos. Más aún al asumir que $\partial P/\partial y(a, b, c) \neq 0$ cuando $[a, b, c] \in C$ y $c = 0$, indica que la línea $z = 0$ nunca es tangente a C así que por el corolario 3.25 del teorema de Bézout esta línea corta a C en precisamente d puntos. Estos puntos contribuyen $-2d$ a el grado del divisor (ω) .

Finalmente consideremos los puntos $[a, b, c] \in C$ tales que $\partial P/\partial y(a, b, c) = 0$. Estos puntos son precisamente los puntos de ramificación del mapa $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, definido por $\phi[x, y, z] = [x, z]$ (vease observación 4.4). En estos puntos c es diferente de cero por nuestra elección de coordenadas, y por lo tanto $\partial P/\partial x(a, b, c)$ también, pues de lo contrario de la relación de Euler (2.2) $\partial P/\partial z(a, b, c) = 0$ sería también cero y esto no puede pasar desde que C es no singular. Por lo tanto $u = y/z$ es una carta holomorfa sobre C cerca de estos puntos, y localmente x/z es una función holomorfa $f(u)$ de u que satisface $P(f(u), u, 1) = 0$. Diferenciando esta identidad m veces se demuestra que si $f^{(k)}(u_0) = 0$ para $1 \leq k < m$ entonces

$$f^{(m)}(u_0) = -\frac{\partial^m P}{\partial y^m}(u_0, f(u_0), 1) / \frac{\partial P}{\partial x}(u_0, f(u_0), 1).$$

Se sigue que el entero positivo más pequeño m tal que $f^{(m)}(u_0) \neq 0$ es igual al entero positivo más pequeño m tal que $\partial^m P/\partial y^m(u_0, f(u_0), 1) \neq 0$. Desde que $\omega = d(f(u)) = f'(u)du$, esto nos dice que la multiplicidad del cero de ω en un punto de ramificación de $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ es precisamente uno menos que el índice de ramificación de ϕ en el punto (ver definición 4.3). Por el lema 4.7 y 4.8 podemos asumir que nuestras coordenadas han sido elegidas de tal manera que existen exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación y ω tiene un cero de multiplicidad uno en cada uno de ellos. Por lo tanto estos puntos contribuyen en $d(d-1)$ a el grado del divisor (ω) .

Esto muestra que

$$\deg(\omega) = d(d-1) - 2d = d(d-3).$$

Se sigue de la fórmula del grado-género (§4.1) que

$$\deg(\omega) = 2g - 2,$$

como se pedia. □

Observación 6.28. Desde luego que esta proposición nos da una caracterización alternativa del género de C ; es uno más la mitad del número de ceros menos el número de polos contando con multiplicidades de cualquier diferencial meromorfa sobre C la cual no es idénticamente cero.

Los espacios vectoriales de funciones meromorfas sobre C los cuales aparecen en el argumento del teorema de Riemann-Roch son definidos como sigue.

Definición 6.29. Sea $D = \sum_{p \in C} n_p \cdot p$ un divisor sobre C ; entonces $\mathcal{L}(D)$ es el conjunto de funciones meromorfas sobre C que satisfacen $(f) + D \geq 0$ junto con la función cero. En otras palabras una función meromorfa f sobre C pertenece a $\mathcal{L}(D)$ si primeramente f es holomorfa excepto para aquellos puntos $p \in C$ para los cuales $n_p > 0$ y ahí el orden del polo es a lo más n_p , y segundo f tiene un cero de orden al menos $-n_p$ en cualquier $p \in C$ tal que $n_p < 0$.

Es facil verificar que $\mathcal{L}(D)$ es un espacio vectorial complejo. Definimos

$$l(D) = \dim \mathcal{L}(D).$$

Tenemos otro corolario de la proposición 6.16.

Corolario 6.30. Si $\deg D < 0$ entonces $l(D) = 0$.

Demostración. Si f es una función meromorfa sobre C , no idénticamente cero, tal que $(f) + D \geq 0$ entonces $\deg D = \deg((f) + D) \geq 0$. \square

Lema 6.31. Si $D \sim D'$ entonces $l(D) = l(D')$.

Demostración. Notemos simplemente que si $D = D' + (g)$ donde g es una función meromorfa sobre C , entonces $f \mapsto fg$ define un isomorfismo entre $\mathcal{L}(D)$ y $\mathcal{L}(D')$. \square

Calculo de $\mathcal{L}(D)$ para la esfera de Riemann. Supongase que D es un divisor sobre la esfera de Riemann con $\deg(D) \geq 0$. Antes de continuar denotaremos a la esfera de Riemann por \mathbb{C}_∞ y por la identificación natural de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con \mathbb{P}^1 , escribiremos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$. Escribimos

$$D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty,$$

con λ_i distintos en \mathbb{C} , tales que $\sum_i e_i + e_\infty \geq 0$. Ahora consideremos la función

$$f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-e_i}.$$

Proposición 6.32. Con la notación de arriba, el espacio $\mathcal{L}(D)$ es exactamente el espacio

$$\mathcal{L}(D) = \{g(z)f_D(z) : g(z) \text{ es un polinomio de grado a lo más } \deg(D)\}.$$

Demostración. Fijemos un polinomio $g(z)$ de grado d notemos primero que $(g) \geq -d \cdot \infty$. Ahora bien, el divisor de f_D es exactamente

$$\sum_i -e_i \cdot \lambda_i + \left(\sum_i e_i \right) \cdot \infty,$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned} (g(z)f_D(z)) + D &= (f) + (g) + (D) \\ &\geq \left(\sum_i e_i + e_\infty - d \right) = (\deg(D) - d) \cdot \infty, \end{aligned}$$

el cual es al menos 0 si $d \leq \deg(D)$. Esto prueba que el espacio dado es un subespacio de $\mathcal{L}(D)$.

Ahora tomemos cualquier función $h \in \mathcal{L}(D)$, y consideremos $g = h/f_D$. Tenemos

$$(g) = (h) - (f_D) \geq -D - (f_D) = \left(-\sum_i e_i - e_\infty \right) \cdot \infty = -\deg(D) \cdot \infty,$$

lo cual muestra que g no tiene polos en la parte finita de \mathbb{C} y que tiene un polo de orden a lo más $\deg(D)$ en ∞ . Esto fuerza a que g tenga que ser un polinomio de grado a lo más $\deg(D)$. □

Este calculo explícito dá inmediatamente la dimensión del espacio $\mathcal{L}(D)$:

Corolario 6.33. *Sea D un divisor sobre la esfera de Riemann. Entonces $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{P}^1$.*

$$l(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } \deg(D) < 0, \\ 1 + \deg(D) & \text{si } \deg(D) \geq 0. \end{cases}$$

Calculo de $\mathcal{L}(D)$ para el toro complejo. Sea $X = \mathbb{C}/\Lambda$ el toro complejo. Vamos a calcular la dimensión de $\mathcal{L}(D)$ para cualquier divisor D sobre X .

Proposición 6.34. *Sea \mathbb{C}/Λ el toro complejo y sea D un divisor de \mathbb{C}/Λ .*

- a) Si $\deg(D) < 0$, entonces $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.
- b) Si $\deg(D) = 0$ y $D \sim 0$ entonces $l(D) = 1$.
- c) Si $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$ entonces $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.
- d) Si $\deg(D) > 0$, entonces $l(D) = \deg(D)$.

Demostración. La prueba del inciso a) se tiene del corolario 6.30. La prueba del inciso b) es un resultado que de hecho es verdadero para superficies de Riemann compactas en general. En efecto, supongamos que D es un divisor tal que $\deg(D) = 0$ y $D \sim 0$ entonces de este último enunciado tenemos que D es un divisor principal, es decir, es el divisor de alguna función meromorfa, esto es, $D = (f)$, ahora sea $g \in \mathcal{L}(D)$ entonces $(gf) = (g) + (f) = (g) + D \geq 0$, pero esto significa que gf es una función holomorfa sobre X y dado que X es compacta por el ejemplo 5.41 tenemos que gf es constante, esto es, $gf = c$ donde c es una constante, luego $g = c/f$ con lo cual tenemos que $\mathcal{L}(D) = \langle 1/f \rangle$ donde $\langle 1/f \rangle$ representa el espacio lineal generado por $1/f$, de aquí deducimos que $l(D) = 1$. Para el inciso

c) supongamos que D es un divisor de X tal que $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$ y supongamos por el contrario que $\mathcal{L}(D) \neq 0$, esto es, existe una función meromorfa f no nula tal que $(f) + D \geq 0$. Afirmamos que $D = -(f)$, en efecto supongamos que $D = m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 + \cdots + m_k \cdot p_k$ y $(f) = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + \cdots + n_k \cdot p_k$ por hipótesis tenemos que $\deg(D) = 0$ y de la proposición 6.16 tenemos que $\deg(f) = 0$ así que

$$\sum_{i=1}^k m_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k n_i = 0,$$

ahora bien, tenemos que $D \geq -(f)$ esto significa que $m_i \geq -n_i$ para todo $k \geq i \geq 1$ pero de hecho debe de ocurrir que $m_i = -n_i$ para todo $k \geq i \geq 1$ de lo contrario existiría un $k \geq i_0 \geq 1$ tal que $m_i > -n_i$ y como $m_i \geq -n_i$ para todo $k \geq i \geq 1$ tendríamos que

$$0 = \sum_{i=1}^k m_i = 0 > - \left(\sum_{i=1}^k n_i \right) = -0 = 0,$$

lo que no puede ocurrir así que $m_i = -n_i$ para todo $k \geq i \geq 1$ y así $D = -(f)$ pero esto no puede ocurrir pues tenemos que $D \not\sim 0$ es decir D no es un divisor principal.

Finalmente probemos el inciso d) esto lo haremos por inducción sobre $\deg(D)$ así que veamos que el argumento es cierto para $\deg(D) = 1$, se puede demostrar que si $\deg(D) = 1$ entonces D es linealmente equivalente a un divisor positivo, vease [7], así que podemos asumir que $D = p$ para algún $p \in X$. Es claro que las funciones constantes están en $\mathcal{L}(D)$, así que $\mathcal{L}(D)$ tiene dimensión al menos uno. Por otra parte supongamos que $\mathcal{L}(D)$ contiene una función meromorfa no constante f . Esta función meromorfa tiene que tener un polo; sin embargo los polos de f están acotados por p así que f tiene un polo simple en p y no otros polos. Por lo tanto el mapa asociado $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty = \mathbb{P}^1$ tiene grado 1 luego por el corolario 6.25 tenemos que f es un biholomorfismo lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{L}(D)$ consiste de únicamente las funciones constantes y tiene dimensión 1 si $\deg(D) = 1$.

Ahora asumamos que $\deg(D) = d > 1$. Escribimos $D = D_1 + p$ para algún divisor D_1 de grado $d - 1$ y algún punto p . Por hipótesis de inducción tenemos que $l(D_1) = d - 1$. Se puede demostrar, vease [7], que existe un divisor positivo E tal que $E \sim D$ y $E(p) = 0$, ahora bien como $D \sim E$ tenemos que existe una función meromorfa f tal que $(f) = E - D$, con esto es claro que $f \in \mathcal{L}(D)$. También tenemos que $(f) + D_1 = E - D + D_1 = E - p$ el cual no es no negativo y por lo tanto $f \notin \mathcal{L}(D_1)$. Esto prueba que $\mathcal{L}(D_1) \neq \mathcal{L}(D)$ y como $\mathcal{L}(D_1) \subset \mathcal{L}(D)$ sucede que $l(D) \geq d$.

Para ver que la dimensión de $\mathcal{L}(D)$ es exactamente d elijamos una carta local z centrada en p y supongamos que $D(p) = n$. Entonces cualquier $f \in \mathcal{L}(D)$ tiene una serie de Laurent en z de cuyo término menor posible es z^{-n} . Ahora consideremos el mapa lineal $\tau : \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada f le asigna el coeficiente del término z^{-n} en su serie de Laurent en z . El kernel de τ es exactamente $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D_1)$. Por lo tanto $l(D)$ tiene dimensión a lo más una más que $l(D_1)$. Desde que estos espacios tienen dimensiones diferentes, tenemos que tener que $l(D) = l(D_1) + 1 = d$ \square

Note que $l(\kappa)$ es la dimensión del espacio de todas las diferenciales holomorfas sobre C para cualquier divisor canónico κ , desde que, si f es una función meromorfa y ω es una diferencial meromorfa,

entonces $(f) + (\omega) \geq 0$ si, y sólo si $f\omega$ es una diferencial holomorfa sobre C .

Ahora podemos establecer el teorema de Riemann-Roch para curvas proyectivas no singulares en \mathbb{P}^2 .

Teorema 6.35 (Riemann-Roch). *Si D es cualquier divisor sobre una curva proyectiva no singular C de género g en \mathbb{P}^2 y κ es un divisor canónico sobre C , entonces*

$$l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D) + 1 - g \quad (6.2)$$

Podemos deducir inmediatamente la segunda definición alternativa que hemos prometido del género g de C .

Corolario 6.36. *El género de una curva proyectiva no singular C en \mathbb{P}^2 es igual a la dimensión $l(\kappa)$ del espacio vectorial de todas las diferenciales holomorfas sobre C .*

Demostración. El teorema de Riemann-Roch con $D = 0$ nos dice que

$$l(0) - l(\kappa) = 1 - g,$$

pero $l(0)$ es la dimensión de el espacio vectorial $\mathcal{L}(0)$ de funciones holomorfas sobre C y cualquier función holomorfa sobre C es constante por el ejemplo 5.41, así que $l(0) = 1$. Por lo tanto $l(\kappa) = g$. \square

Este corolario nos dice en particular existe una diferencial holomorfa no cero sobre cualquier curva proyectiva C de género $g > 0$.

Verificación del teorema de Riemann-Roch para la esfera de Riemann $X = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{P}^1$. Sea D un divisor tal que $\deg(D) < 0$ y sea κ un divisor canónico de X , entonces por la proposición 6.27 como $g = 0$ tenemos que $\deg(\kappa) = -2$, así que $\deg(\kappa - D) = -2 - \deg(D)$, ahora bien, $-2 - \deg(D) < 0$ si, y sólo si $\deg(D) = -1$, así que si $\deg(D) = -1$ tenemos que $\deg(D) < 0$ y $\deg(\kappa - D) < 0$, luego por el corolario 6.30 se tiene que $l(D) = 0$ y $l(\kappa - D) = 0$ así que $l(D) - l(\kappa - D) = 0$, por otra parte Riemann-Roch nos dice que esta diferencia tiene que ser igual a $\deg(D) + 1 - g = -1 + 1 - 0 = 0$, así que cuando $\deg(D) = -1$ se tiene la fórmula, ahora veamos que sucede cuando $\deg(\kappa - D) = -2 - \deg(D) \geq 0$, es decir para $\deg(D) \leq -2$, para este caso $l(D) = 0$ y $l(\kappa - D) = 1 + \deg(\kappa - D) = 1 - 2 - \deg(D) = -1 - \deg(D)$ esto se tiene por el corolario 6.33, así que la diferencia $l(D) - l(\kappa - D) = 0 + 1 + \deg(D) = 1 + \deg(D)$, por otra parte Riemann-Roch nos dice que esta diferencia es igual a $\deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1$. Resta verificar la fórmula para cuando D es un divisor tal que $\deg(D) \geq 0$, en este caso siempre $\deg(\kappa - D) = -2 - \deg(D) < 0$ pues $\deg(D) \geq 0$, así que para este caso tenemos que por el corolario 6.33, $l(D) = 1 + \deg(D)$ y $l(\kappa - D) = 0$, por lo que $l(D) - l(\kappa - D) = 1 + \deg(D)$, por otra parte Riemann-Roch nos dice que esta diferencia tiene que ser igual a $\deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1$, así que hemos verificado el teorema de Riemann-Roch en el caso de la esfera de Riemann.

Verificación del teorema de Riemann-Roch para el toro complejo $X = \mathbb{C}/\Lambda$. Supongamos que D es un divisor sobre X tal que $\deg(D) < 0$, entonces por la proposición 6.34, $l(D) = 0$ ahora se κ un divisor canónico sobre X , entonces $\deg(\kappa - D) = 2g - 2 - \deg(D) = -\deg(D) > 0$ desde que $\deg(D) < 0$, así que por la proposición 6.34, $l(\kappa - D) = \deg(\kappa - D) = -\deg(D)$, por lo cual tenemos que $l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D)$, por otra parte el teorema de Riemann-Roch nos dice que esta diferencia es igual a $\deg(D) + 1 - g = \deg(D)$, ahora supongamos que D es un divisor tal que $\deg(D) = 0$ y $D \sim 0$, entonces por la proposición 6.34 $l(D) = 1$, ahora bien $\deg(\kappa - D) = 0$ así que tenemos dos posibles casos que $\kappa - D \sim 0$ o $\kappa - D \not\sim 0$, pero veamos que el único caso que puede ocurrir es que $\kappa - D \sim 0$, en efecto se debe tener que $\kappa \sim 0$ pues de lo contrario por la proposición 6.34 tendríamos que $l(\kappa) = 0$ pero por otra parte el corolario 6.36 nos dice que $l(\kappa) = g = 1$, entonces debe ocurrir que $\kappa \sim 0$, así tenemos pues que $\kappa \sim 0$ y $-D \sim 0$ por lo que es fácil ver que $\kappa - D \sim 0$, entonces por la proposición 6.34 tenemos que $l(\kappa - D) = 1$, así que $l(D) - l(\kappa - D) = 1 - 1 = 0$, por otra parte Riemann-Roch nos dice que esta diferencia es igual a $\deg(D) + 1 - g = 0 + 1 - 1 = 0$, ahora supongamos que D es un divisor tal que $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$, entonces $l(D) = 0$, luego $\deg(\kappa - D) = 0$ así que nuevamente tenemos dos casos $\kappa - D \sim 0$ o $\kappa - D \not\sim 0$, pero si $\kappa - D \sim 0$, entonces $\kappa \sim D$, luego por el lema 6.31 $l(\kappa) = l(D)$, pero esto es un absurdo pues el corolario 6.36 establece que $l(\kappa) = g = 1$, entonces debe ocurrir que $\kappa - D \not\sim 0$ y así por la proposición 6.34 tenemos que $l(\kappa - D) = 0$, por lo cual la diferencia $l(D) - l(\kappa - D) = 0$ y por otra parte la fórmula de Riemann-Roch nos dice que esta diferencia es igual a $\deg(D) + 1 - g = 0 + 1 - 1 = 0$. Resta probar el caso cuando D es un divisor tal que $\deg(D) > 0$ por la proposición 6.34 tenemos que $l(D) = \deg(D)$, ahora bien $\deg(\kappa - D) = -\deg(D) < 0$, por lo cual $l(\kappa - D) = 0$, así que $l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D)$, por otra parte el teorema de Riemann-Roch nos dice que esta diferencia es igual a $\deg(D) + 1 - g = \deg(D)$.

Ahora veamos como el teorema de Riemann-Roch se aplica para demostrar la ley de asociatividad para la estructura de grupo aditivo sobre una curva cúbica no singular. Si el lector está interesado en otro tipo de aplicaciones del teorema de Riemann-Roch puede consultar [12].

Teorema 6.37. *Sea C una curva proyectiva no singular de grado 3 en \mathbb{P}^2 y sea p_0 un punto de inflexión sobre C . Existe una única estructura de grupo aditivo sobre C tal que p_0 es el elemento cero y tal que si $p, q, r \in C$ entonces*

$$p + q + r = 0,$$

si, y sólo si p, q y r son los tres puntos de intersección (contando multiplicidades) de C con una línea en \mathbb{P}^2 .

Demostración. Ya hemos probado este teorema excepto por la ley de asociatividad sobre C (ver teorema 3.38).

Sean p, q, r puntos de C y pongamos $a = p + q, b = a + r = (p + q) + r, c = q + r$ y $d = p + c = p + (q + r)$. Deseamos mostrar que $b = d$. Desde que p, q y $-a$ son colineales existe un polinomio lineal homogéneo en x, y, z el cual se anula en p, q y $-a$. Similarmente existe un polinomio lineal homogéneo en x, y, z el cual se anula en $a, -a$ y p_0 . La razón de estos polinomios define una función meromorfa ϕ sobre C con ceros en p y q y polos en a y p_0 (contando multiplicidades). Por el mismo argumento existe una función

meromorfa ψ sobre C con ceros en a y en r y polos en b y p_0 . Entonces $\phi\psi$ es una función meromorfa sobre C con ceros en p, q y r y polos en p_0 (con multiplicidad dos) y b . Similarmente existe una función meromorfa sobre C con ceros en p, q y r y polos en p_0 (con multiplicidad dos) y d . Si $b \neq d$ la razón de estas funciones es una función meromorfa sobre C con un cero simple en d y un polo simple en b y ningún otro polo o cero.

Por la fórmula del grado-género el género de C es uno, así que si consideramos el punto b de C como un divisor y si κ es un divisor canónico se sigue de la proposición 6.27 y el corolario 6.30 que

$$l(\kappa - b) = 0,$$

así que por el teorema de Riemann-Roch

$$l(b) = \deg(b) + 1 - g = 1.$$

Esto significa que las únicas funciones meromorfas sobre C con al menos un polo simple en b son las funciones constantes. Por lo tanto $b = d$ como se pedía. \square

Ejemplo 6.38. Sea

$$H = \sum_{p \in C} I_p(C, L) \cdot p,$$

donde $I_p(C, L)$ es la multiplicidad de intersección en p de C con una línea en \mathbb{P}^2 definida por un polinomio lineal homogéneo $R(x, y, z)$. Vamos a considerar qué surge del teorema de Riemann-Roch al tomar el divisor mH para algún entero positivo m .

Por el teorema de Bézout H es un divisor de grado d sobre C donde d es el grado de C . Por lo tanto

$$\deg(\kappa - mH) = \deg \kappa - md,$$

lo cual es estrictamente negativo si m es lo suficientemente grande. Así que, si m es lo suficientemente grande entonces $l(\kappa - mH) = 0$, por el corolario 6.30.

Ahora si $Q(x, y, z)$ es cualquier polinomio homogéneo de grado m entonces

$$\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)^m},$$

define una función meromorfa f sobre C tal que

$$(f) + mH \geq 0,$$

es decir es un elemento de $\mathcal{L}(mH)$. Más aún, dos tales polinomios definen la misma función sobre C si, y sólo si su diferencia es divisible por el polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ de grado d el cual define C .

Por lo tanto si $\mathbb{C}_k[x, y, z]$ denota el espacio de los polinomios homogéneos de grado k en x, y, z entonces

$$\begin{aligned}
 l(mH) &\geq \dim \mathbb{C}_m[x, y, z]/P(x, y, z)\mathbb{C}_{m-d}[x, y, z] \\
 &= \dim \mathbb{C}_m[x, y, z] - \dim \mathbb{C}_{m-d}[x, y, z] \\
 &= \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}(m-d+1)(m-d+2) \\
 &= md + \frac{1}{2}d(3-d) \\
 &= md + 1 - g,
 \end{aligned}$$

por la fórmula del grado-género. Por lo tanto hemos probado que

$$l(mH) - l(\kappa - mH) \geq \deg(mH) + 1 - g,$$

cuando m es lo suficientemente grande. El teorema de Riemann-Roch nos dice que tenemos de hecho la igualdad o equivalentemente cualquier función meromorfa f sobre C que satisfice

$$(f) + mH \geq 0,$$

es de la forma

$$\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)^m},$$

para algún $Q(x, y, z) \in \mathbb{C}_m[x, y, z]$, y en particular es racional. El mismo argumento demuestra que si L_1, \dots, L_m son líneas en \mathbb{P}^2 y

$$H_j = \sum_{p \in C} I_p(C, L_j) \cdot p,$$

para $1 \leq j \leq m$, entonces si m es lo suficientemente grande cualquier función meromorfa f sobre C satisfice

$$(f) + H_1 + \dots + H_m \geq 0,$$

es racional. Pero es facil ver que cualquier función meromorfa f sobre C satisfice

$$f + H_1 + \dots + H_m \geq 0,$$

para algunos H_1, \dots, H_m . Por lo tanto hemos probado que el siguiente caso especial del teorema de Chow es una consecuencia del teorema de Riemann-Roch.

Teorema 6.39. *Todas las funciones meromorfas sobre una curva proyectiva no singular en \mathbb{P}^2 son racionales.*

Con el fin de probar el teorema de Riemann-Roch necesitamos dos lemas de cuyas pruebas se pueden consultar en [1].

Lema 6.40. *Dado cualquier divisor D sobre C y cualquier entero positivo m_0 existe $m \geq m_0$ y puntos p_1, \dots, p_k de C (no necesariamente distintos) tal que*

$$D + p_1 + \dots + p_k \sim mH,$$

donde H es definida como en el ejemplo 6.38.

Lema 6.41. Si D es cualquier divisor sobre C , κ un divisor canónico y p es cualquier punto de C entonces

$$0 \leq l(D + p) - l(\kappa - D - p) - l(D) + l(\kappa - D) \leq 1.$$

De estos dos lemas obtenemos la mitad de la prueba de el teorema de Riemann-Roch.

Corolario 6.42 (Teorema de Riemann). Si D es cualquier divisor sobre C entonces

$$l(D) - l(\kappa - D) \geq \deg(D) - g + 1.$$

Demostración. Vimos en el ejemplo 6.38 que existe un entero positivo m_0 tal que si $m \geq m_0$ entonces

$$l(mH) - l(\kappa - mH) \geq \deg(mH) - g + 1.$$

Por el lema 6.40 podemos elegir $m \geq m_0$ y puntos p_1, \dots, p_k de C tal que

$$D + p_1 + \dots + p_k \sim mH.$$

Por lo tanto, por el corolario 6.26 se tiene

$$\deg(mH) = \deg(D + p_1 + \dots + p_k) = \deg(D) + k,$$

y por el lema 6.31

$$l(mH) - l(\kappa - mH) = l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(\kappa - D - p_1 - \dots - p_k).$$

También por el lema 6.41 e inducción sobre k tenemos

$$l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(\kappa - D - p_1 - \dots - p_k) - l(D) + l(\kappa - D) \leq k.$$

Combiando estas desigualdades e igualdades obtenemos

$$\begin{aligned} l(D) - l(\kappa - D) &\geq l(D + p_1 + \dots + p_k) - l(\kappa - D - p_1 - \dots - p_k) - k \\ &= l(mH) - l(\kappa - mH) - k \\ &\geq \deg(mH) - g + 1 - k \\ &= \deg(D) - g + 1, \end{aligned}$$

como se pedia. □

De esto podemos probar el teorema de Riemann-Roch el cual dice que de hecho la igualdad se tiene en 6.42.

Demostración. del teorema 6.35 (Riemann-Roch). Sea D cualquier divisor sobre C y sea κ un divisor canónico. Por la proposición 6.18 $\deg \kappa = 2g - 2$. Por el corolario 6.42 aplicado primero a D y luego a $\kappa - D$ tenemos

$$l(D) - l(\kappa - D) \geq \deg(D) - g + 1,$$

y

$$\begin{aligned} l(\kappa - D) - l(D) &\geq \deg(\kappa - D) - g + 1 \\ &= 2g - 2 - \deg D - g + 1 \\ &= -\deg(D) + g - 1. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que la igualdad se tiene, esto es, el teorema de Riemann-Roch es cierto. \square

6.3. Breve descripción del Teorema de Riemann-Roch para Superficies de Riemann compactas

Terminamos este trabajo, a forma de motivación para el lector, enunciando el teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas (y de hecho para cualquier superficie de Riemann compacta por el teorema 6.58) que son superficies de Riemann compactas X en el cual su campo global de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ satisfacen una condición que enunciamos en la definición 6.54. Recalamos que la exposición es con el espíritu que el lector vea que el teorema también es válido para superficies de Riemann compactas y las distintas aplicaciones que este tiene, pues no se intenta dar la prueba de este ni de otros resultados, para ello remitimos a el lector a consultar [7], solo demostraremos los resultados que tiene que ver con la forma de aplicar el teorema de Riemann-Roch, por ejemplo que toda curva algebraica y por tanto toda superficie de Riemann compacta puede ser encajada de manera holomorfa en algún espacio proyectivo.

Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 6.43. Sea D un divisor sobre una superficie de Riemann X el sistema lineal completo de D denotado por $|D|$, es el conjunto de todos los divisores no negativos $E \geq 0$ los cuales son linealmente equivalentes a D :

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) : E \sim D \text{ y } E \geq 0\}.$$

Recordemos que la proyectivización de $\mathbb{P}(V)$ para un espacio vectorial complejo V ; es el conjunto de subespacios lineales de dimensión uno de V . Tomemos el espacio vectorial $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ definamos una función

$$S : \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \rightarrow |D|,$$

que asigna el espacio generado por una función $f \in \mathcal{L}(D)$ a el divisor $(f) + D$. Desde que $(\lambda f) = (f)$ para cualquier constante λ , el mapa anterior esta bien definido.

Definición 6.44. Un sistema general lineal es un subconjunto de un sistema lineal completo $|D|$, el cual corresponde (via el mapa S) a un subespacio lineal de $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$, es decir, $Q \subset |D|$ si, y sólo si existe un subespacio lineal $Q_{\mathcal{L}}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ tal que $S(Q_{\mathcal{L}}) = Q$. El espacio lineal es un subespacio lineal obviamente, así que cualquier sistema lineal completo es un sistema lineal. La *dimensión* de un sistema lineal es la dimensión de el subespacio lineal de $|D|$ considerado como un espacio proyectivo.

Definición 6.45. Sea X una superficie de Riemann. Un mapa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ es *holomorfo* en un punto $p \in X$ si existen funciones holomorfas g_0, g_1, \dots, g_n definidas sobre X cerca de p , no todas cero en p , tal que $\phi(x) = [g_0(x), g_1(x), \dots, g_n(x)]$ para x cerca de p . Decimos que ϕ es un *mapa holomorfo* si es holomorfo en todos los puntos de X .

Note que si alguna de las g_i 's es no cero en p , entonces será no cero en una vecindad de p , y así el mapa $\phi(x) = [g_0(x), g_1(x), \dots, g_n(x)]$ estará bien definido para x cerca de p .

Antes de continuar sera necesaria una definición sobre divisores.

Definición 6.46. Sean D_1, D_2, \dots, D_n un conjunto de divisores sobre una superficie de Riemann X , definimos el *mínimo* del conjunto de divisores D_1, D_2, \dots, D_n , denotado por $\text{mín}\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ como el divisor tal que en cada punto p el entero que le corresponde es el mínimo de los valores de los divisores dados en ese punto, esto es,

$$\text{mín}\{D_1, D_2, \dots, D_n\}(p) = \text{mín}\{D_1(p), D_2(p), \dots, D_n(p)\}.$$

El sistema lineal de un mapa holomorfo. Sea $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ un mapa holomorfo a el espacio proyectivo. Para cualquier mapa holomorfo ϕ podemos asociarle un sistema lineal el cual describimos a continuación.

Escribimos $\phi = [f_0, f_1, \dots, f_n]$ donde cada f_i es una función meromorfa sobre X . Sea $D = -\text{mín}_i\{(f_i)\}$ el inverso del divisor mínimo de los divisores de las funciones. Por lo tanto, para cada $p \in X$ tenemos que $-D(p)$ es la cantidad mínima de los ordenes de f_i en p , y así $-D(p) \leq \text{ord}_p(f_i)$ para cada i .

Por lo tanto $-D \leq (f_i)$ para cada i , y tenemos entonces que $f_i \in \mathcal{L}(D)$ para cada i . Así que si llamamos a V_f el subespacio lineal complejo generado por las funciones $\{f_i\}$, esto es, el conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_i a_i f_i$ con $a_i \in \mathbb{C}$, tenemos que $V_f \subseteq \mathcal{L}(D)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(D)$.

Por lo tanto el conjunto de divisores $|\phi| = \{(g) + D : g \in V_f\}$ forma un sistema lineal sobre X un subsistema del sistema lineal completo $|D|$ de todos los divisores positivos linealmente equivalentes a D .

Claramente la construcción de D depende sobre la elección de las funciones meromorfas $\{f_i\}$ usadas para definir ϕ . Pero de hecho el sistema lineal depende solo de ϕ como lo indica el siguiente lema.

Lema 6.47. *El sistema lineal $|\phi|$ esta bien definido, independientemente de la elección de las funciones $\{f_i\}$ usadas para definir a ϕ .*

Definición 6.48. Dado un mapa holomorfo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ con imagen no degenerada, esto es, que las funciones coordenadas $\{f_i\}$ sean linealmente independientes, el sistema lineal definido arriba es llamado el *sistema lineal del mapa ϕ* .

Note que si ϕ mapea a X a \mathbb{P}^n con imagen no degenerada, entonces la dimensión del sistema lineal $|\phi|$ es exactamente n , desde que la dimensión del espacio vectorial asociado de las funciones es $n + 1$.

Definición 6.49. Sea Q un sistema lineal sobre una superficie de Riemann. Un punto p es un *punto base* del sistema lineal Q si cualquier divisor $E \in Q$ contiene a p (i.e., cualquier $E \in Q$ satisface $E \geq p$). Un sistema lineal Q se dice *libre* si no tiene puntos base.

Definición de un mapa holomorfo via un sistema lineal. Ahora veremos un resultado el cual indica que la propiedad de ser libre de un sistema lineal de un mapa holomorfo caracteriza a tales sistemas.

Proposición 6.50. Sea $Q \subset |D|$ un sistema lineal libre de dimensión n sobre una superficie de Riemann compacta X . Entonces existe un mapa holomorfo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $Q = |\phi|$. Más aún ϕ es único salvo la elección de coordenadas en \mathbb{P}^n .

Por lo tanto tenemos una correspondencia uno a uno entre {sistemas lineales libres de dimensión n } \leftrightarrow {mapas holomorfos $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ con imagen no degenerada, bajo cambios lineales de coordenadas}.

Dado un divisor D con $|D|$ libre, denotamos por ϕ_D a el mapa holomorfo asociado a el sistema completo $|D|$.

Criterio para que ϕ_D sea un encaje. La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente bajo la cual dado un divisor D sobre una superficie de Riemann compacta X de cuyo sistema lineal completo es libre, su mapa holomorfo asociado ϕ_D es un biholomorfismo sobre su imagen, mas precisamente.

Proposición 6.51. Sea X una superficie de Riemann compacta, y sea D un divisor de cuyo sistema lineal $|D|$ es libre. Entonces ϕ_D es un mapa holomorfo inyectivo y es un biholomorfismo en su imagen (lo cual nos dice que la superficie de Riemann está encajada en \mathbb{P}^n), si, y sólo si para cualquier p y q en X tenemos que $l(D - p - q) = l(D) - 2$.

Definición 6.52. Cuando el mapa ϕ_D es un biholomorfismo sobre su imagen, decimos que es un *encaje*. Un divisor D tal que $|D|$ es libre y su mapa asociado ϕ_D es un encaje es llamado un divisor *muy amplio*.

Observación 6.53. Sea X el toro complejo. Entonces cualquier divisor D de grado $d \geq 3$ o más es muy amplio y nos da un encaje holomorfo. Desde que $l(D) = \deg(D) = d$ (vease proposición 6.34), en este caso vemos que ϕ_D mapea X a \mathbb{P}^{d-1} , sobre una curva suave de grado d .

Cuando $d = 3$, tenemos un encaje de X en el plano \mathbb{P}^2 . Este encaje mapea X a una curva cúbica proyectiva no singular.

Definición 6.54. Sea S un conjunto de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta X . Decimos que S *separa puntos* de X si para cualquier par de puntos distintos p y q en X existe una función meromorfa $f \in S$ tal que $f(p) \neq f(q)$. Decimos que S *separa tangentes* de X si para cualquier punto $p \in X$ existe una función meromorfa la cual tiene un polo simple en p . Una superficie de Riemann compacta X se dice una *curva algebraica* si el campo global de funciones meromorfas $\mathcal{M}(X)$ separa los puntos y tangentes de X .

Ejemplo 6.55. La esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ es una curva algebraica.

Ejemplo 6.56. El toro complejo \mathbb{C}/Λ es una curva algebraica.

Ejemplo 6.57. Cualquier curva proyectiva no singular es una curva algebraica.

Este teorema de cuya prueba esta fuera del alcance de esta tesis será de fundamental importancia.

Teorema 6.58. *Cualquier superficie de Riemann compacta es una curva algebraica.*

Presentamos el teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas, como mencionamos al principio de esta sección no se pretende dar la prueba de este teorema pues no se cuentan con las herramientas necesarias para su demostración, más bien se le presenta al lector con el espíritu de que vea que el teorema de Riemann-Roch también es válido para curvas algebraicas y por el teorema 6.58 para superficies de Riemann compactas en general.

Teorema 6.59 (El teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas). *Sea X una curva algebraica de género g . Entonces para cualquier divisor D y cualquier divisor canónico κ , tenemos*

$$l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D) + 1 - g. \quad (6.3)$$

Observación 6.60. Note que en virtud del teorema 6.58 tenemos que el teorema de Riemann-Roch se tiene establecido para superficies de Riemann compactas en general porque si X es una superficie de Riemann compacta entonces es una curva algebraica y luego por el teorema 6.59 es válido el teorema de Riemann-Roch.

Aplicaciones del teorema de Riemann-Roch. Para terminar esta sección damos unas aplicaciones del teorema de Riemann-Roch en esta forma más general.

Proposición 6.61. *Sea X una curva algebraica de género g y supongase que D es un divisor sobre X tal que $\deg(D) > g$, entonces existe una función meromorfa no constante y no cero sobre X .*

Demostración. Tenemos por hipótesis que D es un divisor tal que $\deg(D) > g$ ahora bien de (6.3) tenemos que

$$l(D) \geq l(D) - l(\kappa - D) = \deg(D) + 1 - g > 1,$$

luego $l(D) > 1$ así que existe una función meromorfa no constante en $\mathcal{L}(D)$. □

Observación 6.62. Hay que señalar que la proposición 6.27 para superficies de Riemann compactas también es un resultado que se tiene, al igual que el corolario 6.30 también es verdadero que de hecho la prueba es la misma, para superficies de Riemann compactas.

Como se había comentado el teorema 6.58 requiere de herramientas de análisis y análisis funcional para su prueba que quedan fuera del alcance de esta tesis pero si le añadimos la hipótesis que el teorema de Riemann-Roch sea válido para cualquier divisor entonces tenemos la conclusión, esto es;

Proposición 6.63. *Si X es una superficie de Riemann compacta la cual satisface el teorema de Riemann-Roch para cualquier divisor D , entonces X es una curva algebraica.*

Demostración. Por la definición 6.54 hay que demostrar que $\mathcal{L}(X)$ separa puntos y tangentes de X . Primero veamos que $\mathcal{M}(X)$ separa puntos de X . Sean p y q dos puntos de X , y consideremos el divisor $D = (g+1) \cdot p$ por la desigualdad de Riemann vemos que $l(D) \geq \deg(D) + 1 - g = 2$; por lo tanto existe una función meromorfa no constante $f \in \mathcal{L}(D)$. Esta función tiene que tener un polo, y los únicos polos permitidos de f son en p , así que f tiene un polo en p y no otros polos. En particular f no tiene un polo en q , y así f separa los puntos p y q .

Ahora demostremos que $\mathcal{M}(X)$ separa las tangentes de X . Fijemos un punto $p \in X$ y consideremos los divisores $D_n = n \cdot p$, para n lo suficientemente grande $\deg(\kappa - D_n) = 2g - 2 - n < 0$ y $l(\kappa - D) = 0$ por la observación 6.62, así que para n lo suficientemente grande $l(D_n) = n + 1 - g$, por lo tanto existen funciones en $\mathcal{L}(D_{n+1})$ las cuales no se encuentran en $\mathcal{L}(D_n)$ para n grande. Esto implica que para n grande, existen funciones f_n con un polo de orden exactamente n en p y no otros polos. La razón f_{n+1}/f_n tiene un polo simple en p . □

Criterio para que un Divisor sea muy amplio. Usando el Teorema de Riemann-Roch, podemos dar un criterio sencillo en términos del grado de un divisor D para que el mapa ϕ_D a el espacio proyectivo sea un encaje.

Para la prueba de esta proposición necesitamos el siguiente lema.

Lema 6.64. *Sea D un divisor D de grado al menos $2g - 1$ sobre una curva algebraica y sea κ un divisor canónico entonces $l(\kappa - D) = 0$.*

Proposición 6.65. *Sea X una curva algebraica de género g entonces cualquier divisor de género g con $\deg(D) \geq 2g + 1$ es muy amplio, esto es, el sistema lineal completo $|D|$ es libre y el mapa holomorfo asociado ϕ_D a el espacio proyectivo es un encaje holomorfo sobre una curva proyectiva suave de grado igual a $\deg(D)$.*

Demostración. Por la proposición 6.51 necesitamos demostrar que $l(D - p - q) = l(D) - 2$ para cualesquiera puntos p y q en X . Primero notemos que tanto D como $D - p - q$ tienen grado al menos $2g - 1$ luego por el lema 6.64 tenemos que $l(\kappa - D) = l(\kappa - D - p - q) = 0$, luego $l(D) = \deg(D) + 1 - g$ y $l(D - p - q) = \deg(D) - 2 + 1 - g$, de aquí se sigue que $l(D - p - q) = l(D) - 2$. □

Proposición 6.66. *Cualquier curva algebraica X (y por lo tanto cualquier superficie de Riemann por el teorema 6.58) puede ser encajada de manera holomorfa dentro de un espacio proyectivo.*

Demostración. Para demostrar esto simplemente requerimos construir un divisor D muy amplio sobre X y por la proposición 6.65 solo necesitamos encontrar un divisor de grado al menos $2g + 1$, donde g es el género de la curva X . Así elijamos un cualquier punto de $p \in X$ y usamos el divisor $D = (2g + 1) \cdot p$ □

Curvas de género cero son biholmorfas a la esfera de Riemann. Vamos a demostrar que existe una única estructura compleja sobre la esfera de dimensión dos.

Lema 6.67. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Supongase que para algún $p \in X$, $\mathcal{L}(p)$ tiene dimensión mayor que uno. Entonces X es biholomorfo a la esfera de Riemann.*

Demostración. La hipótesis implica que existe una función meromorfa no constante f en $\mathcal{L}(p)$. Esta función tiene que tener polos, pero el único polo el cual es permitido es un polo simple en p . Por lo tanto f tiene un polo simple en p y no otros polos. En este caso el mapa holomorfo asociado $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tiene grado uno y por el corolario 6.25 define un biholomorfismo. \square

Proposición 6.68. *Sea X una curva algebraica de género 0. Entonces X es biholomorfa a la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ .*

Demostración. Fijemos un punto $p \in X$ y sea κ un divisor canónico sobre X , entonces (por la observación 6.62) $\deg(\kappa - p) = 2g - 2 - 1 = -3 < 0$ y así $l(\kappa - p) = 0$. Aplicando el teorema de Riemann-Roch a el divisor p , encontramos que

$$l(p) = \deg(p) + 1 - g = 2 > 1.$$

Concluimos del lema 6.67 que X es biholomorfa a la esfera de Riemann. \square

Curvas de género uno son curvas proyectivas cúbicas. Si aplicamos el criterio de la proposición 6.65 a una curva X de género uno vemos que cualquier divisor de grado 3 es muy amplio. Por Riemann-Roch si $\deg(D) = 3$, entonces $l(D) = 3$ así por la observación 6.53 vemos que el mapa holomorfo ϕ_D mapea X a el plano \mathbb{P}^2 y como $\deg(D) = 3$ la imagen es una curva proyectiva cúbica no singular, así que hemos probado:

Proposición 6.69. *Cualquier curva algebraica de género uno es biholomorfa a una curva proyectiva no singular de grado 3.*

Bibliografía

- [1] Frances Kirwan *Complex Algebraic Curves*. Cambridge University Press. 1992.
- [2] Keith Kending *A Guide to Plane Algebraic Curves*. The Mathematical Association of America. 2011.
- [3] Isaac Newton *Enumeración de las curvas de tercer grado*. 1797.
- [4] John B. Fraleigh *Algebra Abstracta*. Addison-Wesley. 1987.
- [5] Keith Kending *Elementary Algebraic Geometry*. Springer-Verlag. 1977.
- [6] M.F. Atiyah y I.G. Macdonald *Commutative algebra*. Addison-Wesley. 1969.
- [7] Rick Miranda *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. American Mathematical Society. 1995.
- [8] E. Brieskorn y H. Knorrer *Plane algebraic curves*. Birkhauser-Verlag. 1986.
- [9] C.H. Clemens *A scrapbook of complex curve theory*. Plenum. 1980.
- [10] H. Farkas y I. Kra *Riemann surfaces*. Springer-Verlag. 1980.
- [11] W. Fulton *Algebraic curves* Benjamin-Cummings. 2008.
- [12] P.A. Griffiths *Introduction to algebraic curves* Transactions of mathematical monographs 76, American Mathematical Society. 1989.
- [13] J.E. Marsden y M.J. Hoffman *Análisis básico de variable compleja* Trillas. 1996.
- [14] Faltings Gerd *Finiteness theorems for abelian varieties over number fields* Inventiones Mathematicae 73 (3): 349–366. 1983.
- [15] B. Riemann *Gesammelte Mathematische Werke*. 1892.

Índice alfabético

- índice de ramificación, 73
- asíntotas, 30
- asintóticas, 24
- astroide, 16
- atlas, 97
 - holomorfo, 97
- biholomorfas, 102
- cónica, 46
- cúbica
 - cuspidal, 6
 - no singular, 6
 - nodal, 6
- caracol de Pascal, 16
- caras, 75
- cardioide, 16
- carta, 97
- cicloide, 17
- compacto, 23, 26, 29
- compatibles, 101
- componente, 22, 28
- concoide, 15
- coordenadas
 - homogéneas, 25
 - no homogéneas, 26
- cubierta ramificada, 74
- curva
 - afín, 29
 - algebraica compleja en \mathbb{C}^2 , 1, 19
 - algebraica real, 1, 13
 - de Fermat, 7
 - proyectiva, 28, 29
- deltoide, 17
- diferencial
 - holomorfa, 113, 116
 - meromorfa, 111, 112
- divisor, 114
 - canónico, 115
 - de una función meromorfa, 115
 - efectivo, 114
 - principal, 115
- doblemente periódicas, 92, 104
- efectivo, 114
- enlace, 7
- epicicloide, 16
- esfera con g asas, 65
- esfera de Riemann, 6, 26, 102
- espacio proyectivo complejo, 25
- estructura de grupo abeliano, 59, 117
- fórmula
 - de Noether, 66
 - de Riemann-Hurwitz, 83
 - del grado-género, 65, 83
- factores no repetidos, 28
- factores repetidos, 19, 20
- función
 - holomorfa multi-valuada, 11, 69
 - meromorfa, 102, 111
 - par, 93

- racional, 12
- género, 65, 66, 77, 110, 116
- grado, 20, 114
- Hausdorff, 29
- hessiana, 54
- Hexágono místico de Pascal, 47
- hiperplano, 27
- hipocicloide, 16
- hipotrocicloide, 16
- holomorfo, 88, 100
 - atlas, 97
 - función multi-valuada, 11, 69
- homogéneo, 20
- integral
 - abeliana, 13
 - elíptica, 13
 - hiperelíptica, 13
- irreducible, 22, 28
- línea
 - proyectiva compleja, 25
 - tangente, 15, 22, 29, 32
- lados, 75
- linealmente equivalentes, 115
- lugar geométrico ramificado, 74
- multiplicidad, 20, 21, 115
- multiplicidad de intersección, 41, 47
- número de Euler, 76
- nefroide, 17
- no singular, 20, 29
- nudo, 7
 - trébol, 9
- plano proyectivo complejo, 25
- polo, 102, 113
- punto
 - de inflexión, 54, 73
 - de ramificación, 73
 - doble, 22
 - ordinario, 22
- punto singular, 20, 29
 - doble, 22
 - ordinario, 22
 - triple, 22
- puntos al infinito, 24
- puntos de ramificación, 71
- relación de Euler, 31
- resultante, 42
- retícula, 90
- serie de Laurant, 102
- singularidad, 20
- singularidades, 7
- superficie de Riemann, 88, 101
- teoría de números, 7
- teorema
 - de Bézout, 41, 45
 - de Cauchy, 88
 - de Chow, 119
 - de los ceros de Hilbert, 14
 - de Morera, 89
 - de Riemann-Roch, 110
 - de Riemann, 119
 - de Riemann-Roch, 116
 - del residuo de Cauchy, 88
- topología cociente, 25
- toro complejo, 95, 103
- transformación proyectiva, 27
- trayectoria suave a trozos, 110