Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

Espacios Poli-Bergman

TESIS

Que presenta

Isidro Morales García

para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

en la especialidad de

MATEMÁTICAS

Directora de la Tesis:

Dra. Maribel Loaiza Leyva

México, D.F. Agosto, 2015

Espacios Poli-Bergman

Agradecimientos

Agradezco al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACYT**) por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo.

Agradezco a mi asesora, la Dra. Maribel Loaiza Leyva, y al Dr. Carlos G. Pacheco González, por todo el apoyo que me han brindado.

Dedicado a mi familia, en especial a Emma, Tsijiari y Zyanya.
Para toda aquella persona que me ha brindado su conocimiento,
y con ello le han dado sentido a mi existencia.
Para todos mis amigos.

Resumen

En este trabajo se desarrolla a detalle la teoría de funciones polianalíticas y espacios de Bergman polianalíticos. Mediante versiones generalizadas del Teorema de Green, se realizan de forma completa las demostraciones de: la cerradura del espacio poli-Bergman $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$, existencia de conjuntos ortogonales y de bases para los espacios $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ y $L^2(\mathbb{D}, dz)$, y descomposición ortogonal de $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$ y $L^2(\Omega, dz)$. Se hace también un análisis de las proyecciones del espacio poli-Bergman, así como una descomposición de estas, mediante potencias de operadores integrales singulares.

Abstract

In this work we work out in detail the theory of polyanalytic functions and poly-Bergman spaces. Using generalized versions of Green's theorem, we prove in thorough way: the poly-Bergman spaces, $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$, are closed, the existence of orthogonal sets and basis for $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ and $L^2(\mathbb{D}, dz)$ spaces, and orthogonal decomposition of $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$ and $L^2(\Omega, dz)$. We also make an analysis of the poly-Bergman projections, as well as a decomposition of these by powers of singular integral operators.

Introducción

El estudio de las funciones polianalíticas, como lo menciona Mark Benevich Balk en su libro *Polyanalytic Functions* [14], tuvo su inicio en el año 1908, con la busqueda de un método general de resolución de problemas de elasticidad, abordado por el matemático Ruso Kolossov. Algunos de los primeros artículos importantes sobre funciones polianalíticas aparecen entre los años 1920 y 1940 (de los mencionados por Balk: Burgatti [17], Teodorescu [15], Fedorov [19]).

Es sin duda el trabajo de Balk [14], la referencia más mencionada en gran parte de los artículos sobre funciones polianalíticas y espacios de Bergman polianalíticos, pues en dicho trabajo, se hace un estudio detallado de las propiedades y similitudes de las funciones polianalíticas, con las ya conocidas funciones analíticas. En dicho libro se presentan versiones del Principio del máximo, el Teorema de Liouville, entre otros resultados clásicos de funciones analíticas.

Si Ω es un subconjunto abierto del plano complejo, entonces en este conjunto se definen los operadores de Wirtinger, los cuales son aplicados a funciones $f \in C^1(\Omega)$, y estan dados por:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que una función f sea analítica en Ω, es equivalente a que f sea solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (de manera análoga, que una función $\tilde{f}$ sea anti-analítica en Ω, es equivalente a que $\tilde{f}$ sea solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = 0$). En [8], Vekua hace un estudio completo de las soluciones de la ecuación diferencial $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$, en donde g es una función conocida.

Las funciones polianalíticas y anti-polianalíticas se definen de manera general usando potencias de los operadores (1). Esto es, si n y k son números naturales, f es polianalítica de orden n, y $\tilde{f}$ es anti-polianalítica de orden k, si cumplen respectivamente, las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} f = 0, \qquad \frac{\partial^k}{\partial z^k} \tilde{f} = 0. \tag{2}$$

En este trabajo en general, sólo se desarrolla la Teoría para funciones polianalíticas. Por las propiedades del operador conjugación y de los operadores de Wirtinger generalizados (2), los postulados análogos para las funciones anti-polianalíticas, no tendrán inconvenientes para ser analizados, y de hecho, gran parte de ellos serán consecuencia directa de los resultados aquí desarrollados.

En [3], Koshelev define el espacio de Bergman polianalítico de orden n, o espacio poli-Bergman (en el caso del disco unitario), el cual es denotado por $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, como el subconjunto de $L^2(\mathbb{D}, dz)$ (aquí dz representa la medida de Lebesgue usual) que consiste de todas las funciones polianalíticas. En dicho artículo, Koshelev dá una base ortonormal explícita y también una fórmula reducida para el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. En este trabajo, con ayuda de la Fórmula de Green, se demostrarán estos dos hechos.

Un resultado importante que se utiliza en todos los artículos de funciones polianalíticas, es que el espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es cerrado. En [2], Haimi enuncia y bosqueja (en el sentido de distribuciones) un resultado general para $L^2(\Omega, e^{-Q(z)}dz)$, donde Q es una función real y Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. En este trabajo, basados en dicho resultado, se demuestra que el espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es cerrado, y de hecho, haciendo unos arreglos, tal demostración también es válida para $L^2(\Omega, e^{-Q(z)}dz)$.

En el Capítulo 1 se introducen los resultados de variable compleja que son necesarios para desarrollar la teoría y las demostraciones de este trabajo. Se enuncian versiones más generales de la Fórmula integral de Cauchy y la definición de la métrica pseudo-hiperbólica. De los resultados más usados, y que permitirán hacer estimaciones integrales, son las Fórmulas de Green, es por ello que son enunciados aquí. Se dá la definición de núcleo reproductor para un espacio de Hilbert, pues los espacios poli-Bergman gozarán de dicha propiedad.

En el Capítulo 2 se estudia el espacio de Bergman clásico, ya que uno de los objetivos de este trabajo es analizar cuales de estos resultados siguen siendo válidos en los espacios polianalíticos. Aquí también se introducen los espacios de Bergman con peso.

En el Capítulo 3 se dá la definición de espacio polianalítico, y equivalencias para funciones polianalíticas. Se definen también los espacios poli-Bergman y se demuestra, al igual que el espacio de Bergman clásico, que este espacio es cerrado. Basados en el artículo de Ramazanov [5], se exhiben conjuntos ortonormales en $L^2(\mathbb{D}, dz)$, bases para el espacio poli-Bergman $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, y una descomposición ortogonal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ y $L^2(\mathbb{D}, dz)$. Aquí, gran parte de los resultados son de Vasilevski [16], Ramazanov [5, 4], Balk [14] y Antti [2], pero algunas demostraciones están hechas de manera distinta. Como se menciona en [3], aquí se demuestra la forma reducida del núcleo reproductor de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$.

En el Capítulo 4 se introducen los operadores singulares $T_\Omega, T_\Omega^*, S_\Omega$ y S_Ω^*, los cuales están definidos formalmente por Vekua en [8]. Se dan algunas propiedades generales de estos, pues, de acuerdo al trabajo de Vasilevski [16], y, Karlovich y Pessoa [20], los operadores $S_\mathbb{D}$ y $S_\mathbb{D}^*$, tendrán relación directa con las Proyeciones de Bergman sobre los espacios $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. Para ser más precisos, Vasilevski, Karlovich y Pessoa dan una descomposición de las Proyeciones de Bergman como potencias de los operadores $S_\mathbb{D}$ y $S_\mathbb{D}^*$. Ellos obtienen una descomposición ortogonal de $L^2(\Omega, dz)$ como suma de polianalíticos puros. En el caso del disco $\mathbb{D}$, la descomposición de $L^2(\mathbb{D}, dz)$ es como suma de imagenes de potencias del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ bajo $S_{\mathbb{D}}^*$, ó como suma de imagenes de potencias del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ bajo $S_{\mathbb{D}}$.

La descomposición de $L^2(\mathbb{D}, dz)$ hecha por Karlovich y Pessoa en [20], difiere a la descomposición de Peng, Rochberg y Wu realizada en [12]. En [12] consideran el kernel del operador $\overline{D}^k$, donde $\overline{D} = \overline{z}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, y prueban que

$$L^2(\mathbb{D}, dz) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Big\{ \ker\big(\overline{D}^{k+1}\big) + \overline{\ker\big(\overline{D}^{k+1}\big)} \Big\}.$$

En el plano superior, la descomposición de $L^2(\Pi, dz)$ hecha por Vasilevski en [16], considerando los mismos operadores de Wirtinger (2), es mediante una suma de polianalíticas puras y anti-polianalíticas puras, es decir

$$L^2(\Pi, dz) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^2_{(k)}(\Pi) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}^2_{(k)}(\Pi).$$

Índice general

Introducción **11**

1. Preliminares **17**
1.1. Las Fórmulas integrales de Cauchy . . . 17
1.2. La métrica pseudo-hiperbólica . . . 20
1.3. El Teorema de Green . . . 24
1.4. El núcleo reproductor de un espacio de Hilbert . . . 30

2. Espacios de Bergman con peso **33**
2.1. Espacios de Bergman . . . 33
2.2. Espacios de Bergman con peso . . . 37

3. El espacio de Bergman polianalítico **43**
3.1. Funciones polianalíticas . . . 43
3.2. Espacios de Bergman polianalíticos . . . 46
3.3. Conjuntos ortonormales en $L^2(\mathbb{D}, dz)$ . . . 55
3.4. Bases ortonormales de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ . . . 59
3.5. Descomposición ortogonal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ . . . 64
3.6. El núcleo reproductor de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ . . . 66
3.7. Descomposición ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dz)$ . . . 71

4. Proyecciones en el espacio de Bergman polianalítico $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ **77**
4.1. Los operadores singulares $T_\Omega, T_\Omega^*, S_\Omega$ y S_Ω^* . . . 77
4.2. Proyecciones sobre el espacio poli-Bergman $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ . . . 82
4.3. Espacios polianalíticos puros . . . 87

Bibliografía **92**

Capítulo 1

Preliminares

En este Capítulo se introducen las herramientas básicas de variable compleja que serán necesarias para el desarrollo de los temas de este trabajo. Las demostraciones de los Teoremas que son más conocidos en variable compleja serán omitidas, y solamente se incluirán las pruebas de aquellos resultados que tengan relación directa con los temas principales de este Capítulo, o con temas de los Capítulos posteriores.

En la Sección 1.1 se enuncian algunas variantes de la Fórmula integral de Cauchy (Teorema 1.1.1).

En la Sección 1.2 se dan propiedades de los automorfismos del disco, en particular se introduce la definición de la métrica pseudo-hiperbólica en el disco. Dicha métrica, por su invarianza bajo automorfismos, es muy útil cuando se realizan estimaciones en el disco.

En la Sección 1.3 se dan propiedades de los operadores $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, así como también se enuncia y demuestra el Teorema de Green en el caso complejo. Dicho resultado, junto con sus variantes, serán la base para las demostraciones del Capítulo 3.

En la Sección 1.4 se describen propiedades de los Espacios de Hilbert con núcleo reproductor, pues los espacios de Bergman polianalíticos tiene dicha propiedad.

A lo largo de este trabajo $\mathbb{N}$ representará el conjunto de números naturales $\{1, 2, \ldots\}$, y $\mathbb{N}_0$ el conjunto de los números enteros no negativos $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

1.1. Las Fórmulas integrales de Cauchy

A partir de ahora $\mathbb{D}_r(z_0)$ representará al disco en el plano complejo centrado en z_0 y de radio r; es decir,

$$\mathbb{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} .$$

En particular se denota por $\mathbb{D}$ al disco $\mathbb{D}_1(0)$ y por $\mathbb{D}_r$ al disco $\mathbb{D}_r(0)$. La parametrización natural $\gamma(z_0, r) = z_0 + re^{i\theta}$ de $\mathbb{D}_r(z_0)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se denota simplemente por $z = z_0 + re^{i\theta}$.

Uno de los resultados fundamentales de variable compleja es la Fórmula integral de Cauchy. Para su demostración puede consultarse [9, pág. 73].

Teorema 1.1.1 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en Ω. Si $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega$ y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,.$$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 1.1.1 se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.1.2 (Valor promedio). *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en Ω. Si $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ son tales que $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega$, entonces:*

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}_r(z_0)} f(z)\, dA(z).$$

Aquí $dA(z)$ denota la medida de Lebesgue de área usual.

Demostración. Utilizando el Teorema 1.1.1 con $n = 0$ y haciendo $z = z_0 + re^{i\theta}$ se cumple que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Por otro lado, al escribir en coordenadas polares la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{D}_r(z_0)} f(z)\, dA(z)$ y utilizando la representación integral anterior se tiene la igualdad

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}_r(z_0)} f(z)\, dA(z) &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^r f(z_0 + se^{i\theta}) s\, ds d\theta \\
&= 2\pi \int_0^r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \right) s\, ds \\
&= 2\pi \int_0^r f(z_0) s\, ds = \pi r^2 f(z_0).
\end{aligned}$$

$\square$

Usando la parametrización natural $z = z_0 + re^{i\theta}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}} ire^{i\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{-n} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta, \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

que en particular, bajo las condiciones del Teorema 1.1.1 se cumple la igualdad:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{-n} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \qquad (1.2)$$

Esta observación a pesar de ser muy sencilla, da una versión más general del Teorema 1.1.1 y será de gran importancia en las estimaciones integrales del Capítulo 3.

Se recuerda que si γ es una curva regular en $\mathbb{C}$, y la integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ existe, entonces se cumple la igualdad:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_\gamma \overline{f(z)}\,d\overline{z}. \tag{1.3}$$

Los siguientes tres Corolarios serán de gran utilidad para muchas estimaciones de este trabajo. Tales resultados son simplemente extensiones del Teorema 1.1.1.

Corolario 1.1.3. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en Ω. Si $k, j \in \mathbb{N}_0$ son tales que $j+k \geq 1$ y $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega$ entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{(\overline{z}-\overline{z_0})^j f(z)}{(z-z_0)^k}\,dz = \frac{r^{2j} f^{(j+k-1)}(z_0)}{(j+k-1)!}\,. \tag{1.4}$$

Demostración. Haciendo $z = z_0 + re^{i\theta}$ en la integral de la izquierda de la ecuación (1.4), utilizando (1.1) y (1.2) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{(\overline{z}-\overline{z_0})^j f(z)}{(z-z_0)^k}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(re^{-i\theta})^j f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^k} ire^{i\theta}\,d\theta \\
&= \frac{r^{2j}}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{-(j+k-1)} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{r^{2j} f^{(j+k-1)}(z_0)}{(j+k-1)!}\,.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.1.4. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en Ω. Si $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$ y $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega$ entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{\overline{z}^j f(z)}{(z-z_0)^k}\,dz = \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\frac{\overline{z}_0^{\nu} r^{2(j-\nu)} f^{(j-\nu+k-1)}(z_0)}{(j-\nu+k-1)!}\,. \tag{1.5}$$

Demostración. Como en la demostración anterior, haciendo $z = z_0 + re^{i\theta}$ en la integral de la izquierda de la ecuación (1.5) y utilizando (1.2) se cumple

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{\overline{z}^j f(z)}{(z-z_0)^k}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(\overline{z}_0+re^{-i\theta})^j f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^k} ire^{i\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\overline{z}_0^{\nu}(re^{-i\theta})^{j-\nu}\frac{f(z_0+re^{i\theta})re^{i\theta}}{(re^{i\theta})^k}\,d\theta \\
&= \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\overline{z}_0^{\nu}\frac{r^{2(j-\nu)}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^{-(j-\nu+k-1)} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \\
&= \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\frac{\overline{z}_0^{\nu} r^{2(j-\nu)} f^{(j-\nu+k-1)}(z_0)}{(j-\nu+k-1)!}\,.
\end{aligned}$$

□

Se dá ahora la versión integral del Corolario 1.1.3 con respecto a $\overline{z}$.

Corolario 1.1.5. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en Ω. Si $k, j \in \mathbb{N}_0$ y $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega$, entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{(\overline{z}-\overline{z_0})^j f(z)}{(z-z_0)^k}\, d\overline{z} = -\frac{r^{2(j+1)} f^{(j+k+1)}(z_0)}{(j+k+1)!}\,. \tag{1.6}$$

Demostración. Haciendo $z = z_0 + re^{i\theta}$ en la integral de la derecha de la ecuación (1.6), y utilizando la Fórmula integral de Cauchy se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{(\overline{z}-\overline{z_0})^j f(z)}{(z-z_0)^k}\, d\overline{z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(re^{-i\theta})^j f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^k}(-i)re^{-i\theta}\, d\theta \\
&= -\frac{r^{2(j+1)}}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{-(j+k+1)} f(z_0+re^{i\theta})\, d\theta \\
&= -\frac{r^{2(j+1)} f^{(j+k+1)}(z_0)}{(j+k+1)!}\,.
\end{aligned}$$

□

1.2. La métrica pseudo-hiperbólica

Los automorfismos analíticos del disco $\mathbb{D}$ y la métrica pseudo-hiperbólica aparecen de manera natural en este trabajo, es por ello que en esta Sección se introducen tales conceptos. Se empieza la Sección enunciando el Lema de Schwarz, para su demostración puede consultarse [18].

Teorema 1.2.1 (Lema de Schwarz). *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces:*

- (a) *$|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$,*
- (a') *si para algún $z_0 \neq 0$ se tiene que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$, de módulo 1, tal que $f(z) = \alpha z$.*
- (b) *$|f'(0)| \leq 1$,*
- (b') *si $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = f'(0)z$.*

Sea $w \in \mathbb{D}$ fijo y considere la función $\varphi_w : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ definida por:

$$\varphi_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}, \qquad z \in \mathbb{D}\,. \tag{1.7}$$

φ_w es la transformación de Möbius con un único polo simple en el punto $1/\overline{w}$. Observe que efectivamente el rango de φ_w está contenido en $\mathbb{D}$, pues:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|^2 < 1 \iff & (w-z)\overline{(w-z)} < (1-\overline{w}z)\overline{(1-\overline{w}z)} \\
\iff & |w|^2 - w\overline{z} - z\overline{w} + |z|^2 < 1 - w\overline{z} - z\overline{w} + |w|^2|z|^2 \\
\iff & |w|^2 + |z|^2 < 1 + |w|^2|z|^2 \\
\iff & |w|^2 + |z|^2(1-|w|^2) < 1 \ ,
\end{aligned}$$

y esto último claramente se satisface para $z, w \in \mathbb{D}$. Además se tiene que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$, por lo cual φ_w es un automorfismo conforme del disco. Más aún, si $|z| = 1$, entonces $z = e^{i\theta}$ para algún número real θ, y

$$|\varphi_w(z)| = \left|\frac{w - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \overline{w})}\right| = 1,$$

lo que implica que la imagen de $\partial\mathbb{D}$ bajo φ_w es $\partial\mathbb{D}$. Una consecuencia de estas observaciones y del Lema de Schwarz es el siguiente Teorema, el cual dice que todo automorfismo del disco unitario es una rotación de los automorfismos φ_w, para $w \in \mathbb{D}$.

Teorema 1.2.2. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ un automorfismo analítico del disco unitario y supongase que $f(w) = 0$. Entonces existe un número real θ tal que*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{w-z}{1-\overline{w}z} = e^{i\theta}\varphi_w(z) \ .$$

Demostración. Considere el automorfismo $h := f \circ \varphi_w^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$. Observe que $h(0) = 0$, por el Lema de Schwarz se tiene

$$|h(z)| \leq |z| \qquad \forall\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Como también la función h^{-1} es un automorfismo de $\mathbb{D}$ tal que $h^{-1}(0) = 0$, entonces

$$|z| \leq |h(z)| \qquad \forall\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Por el inciso (a') del Lema de Schwarz existe θ tal que $h(z) = e^{i\theta}z$. □

Corolario 1.2.3. *Si f es un automorfismo de $\mathbb{D}$ que deja fijo al origen, es decir, $f(0) = 0$, entonces $f(z) = e^{i\theta}z$ para un número real θ, esto es, f es una rotación.*

Se define la *métrica pseudo-hiperbólica* en $\mathbb{D}$ como:

$$\rho(w,z) := |\varphi_w(z)| = |\varphi_z(w)| = \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| \qquad z, w \in \mathbb{D}\ .$$

El siguiente Teorema afirma que las funciones analíticas son contractivas respecto a la métrica pseudo-hiperbólica ρ, más aún, los automorfismos del disco unitario $\mathbb{D}$ son invariantes bajo ρ.

Teorema 1.2.4. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función analítica en $\mathbb{D}$. Entonces se cumplen las desigualdades:*

(i) $\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w), \quad z, w \in \mathbb{D},$

(ii) $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$

Si f es un automorfismo conforme de $\mathbb{D}$, entonces (i) y (ii) son igualdades.

Demostración. (i) Sea $w \in \mathbb{D}$ arbitrario pero fijo. La condición (i) es equivalente a

$$|\varphi_{f(w)}(f(z))| \leq |\varphi_w(z)|, \qquad z \in \mathbb{D},$$

pero como $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$ en $\mathbb{D}$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$|(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(z)| \leq |z|, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Esta última desigualdad es una consecuencia directa del Lema de Schwarz pues $(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(0) = 0$. Si f es un automorfismo conforme de $\mathbb{D}$ entonces $\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w$ también lo es, y al dejar fijo al origen, por el Teorema 1.2.2 $\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w$ debe ser una rotación. Así $|(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)(z)| = |z|$ para todo valor de z.

(ii) Un cálculo directo muestra que

$$\varphi_w'(z) = \frac{|w|^2 - 1}{(1-\overline{w}z)^2}, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{1.8}$$

Aplicando nuevamente el Lema de Schwarz, se tiene que $|(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w)'(0)| \leq 1$. Esto es

$$\left| \frac{|f(w)|^2 - 1}{(1-\overline{f(w)}f(w))^2} \cdot f'(w) \cdot \frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}\cdot 0)^2} \right| \leq 1.$$

Lo cual da la desigualdad deseada. Nuevamente, si f es un automorfismo conforme de $\mathbb{D}$, $\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w$ debe ser una rotación, en este caso la igualdad se sigue directamente. $\square$

Para cada $w \in \mathbb{D}$ y $r > 0$, se define el *disco pseudo-hiperbólico* con centro en w y radio r como $\Delta(w, r) := \{z \in \mathbb{D} \mid \rho(w, z) < r\}$.

Se ha dicho que ρ es una métrica, pero hasta ahora se está en posición de demostrar la desigualdad triangular para ρ, para ello se comienza probando que

$$\Delta(w, r) = \varphi_w(\mathbb{D}_r), \qquad 0 < r < 1.$$

En efecto; si $z \in \varphi_w(\mathbb{D}_r)$ existe $\lambda \in \mathbb{D}$ tal que $z = \varphi_w(r\lambda)$. Como $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$, entonces $r\lambda = \varphi_w(z)$ y

$$|\rho(w, z)| = |\varphi_w(z)| = |r\lambda| < r.$$

Por tanto $z \in \Delta(w, r)$. Si $z \in \Delta(w, r)$ entonces $|\varphi_w(z)| < r$, y si se toma $\lambda = \dfrac{\varphi_w(z)}{r}$ se cumple que $|\lambda| < 1$ y $z = \varphi_w(r\lambda)$.

Como el automorfismo φ_w tiene un único polo en $1/\overline{w}$, la imagen $\varphi_w(\partial\mathbb{D}_r)$ es un círculo, el cual es $\partial\Delta(w,r)$. Por lo tanto $\Delta(w,r)$ es un disco. Obsérvese que la recta $\{cw \mid c \in \mathbb{R}\}$ permanece invariante bajo φ_w, pues:

$$\varphi_w(cw) = \frac{w - cw}{1 - \overline{w}cw} = w\frac{1-c}{1-c|w|^2}\,.$$

De esta forma las curvas $\{cw \mid c \in \mathbb{R}\}$ y $\partial\Delta(w,r)$ son ortogonales, por lo cual, los puntos $\varphi_w(-rw/|w|)$ y $\varphi_w(rw/|w|)$ forman un diámetro de $\Delta(w,r)$ que pasa por el cero. Por tanto, para cada $z \in \Delta(w,r)$ se tiene que

$$|z| \leq \text{máx}\{|\varphi_w(-rw/|w|)|, |\varphi_w(rw/|w|)|\}. \tag{1.9}$$

Además, mediante un cálculo directo se puede ver que $|\varphi_w(rw/|w|)| \leq |\varphi_w(-rw/|w|)|$. Haciendo los cálculos explícitos, el centro C y radio R de $\Delta(w,r)$ son:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\varphi_w(rw/|w|) + \varphi_w(-rw/|w|)}{2} = \frac{1-r^2}{1-r^2|w|^2}w, \\ R &= \left|\frac{\varphi_w(rw/|w|) - \varphi_w(-rw/|w|)}{2}\right| = \frac{1-|w|^2}{1-r^2|w|^2}r \end{aligned}$$

y la estimación (1.9) para $z \in \Delta(w,r)$, es:

$$|z| \leq \frac{|w| + r}{1 + r|w|}\,. \tag{1.10}$$

Proposición 1.2.5. *Para cualesquiera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$, se cumple la desigualdad:*

$$\rho(z_1, z_2) \leq \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2).$$

Demostración. Si $\rho(z_3, z_2) = 0$ el resultado es claro. Supóngase que $\rho(z_3, z_2) \neq 0$. Defínanse ahora $r := \rho(z_3, z_2) < 1$ y $z := \varphi_{z_3}(z_2)/\rho(z_3, z_2)$. Entonces

$$|z| = \left|\frac{\varphi_{z_3}(z_2)}{r}\right| = \frac{\rho(z_2, z_3)}{\rho(z_3, z_2)} = 1.$$

Por la desigualdad (1.10) se cumple lo siguiente

$$|\varphi_{z_3}(rz)| \leq \frac{|z_3| + \rho(z_3, z_2)}{1 + \rho(z_3, z_2)|z_3|} \leq |z_3| + \rho(z_3, z_2).$$

Como $\varphi_{z_3}(rz) = \varphi_{z_3}(\varphi_{z_3}(z_2)) = z_2$, para todo $z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ se cumple:

$$|z_2| \leq \frac{|z_3| + \rho(z_3, z_2)}{1 + \rho(z_3, z_2)|z_3|} \leq |z_3| + \rho(z_3, z_2).$$

Finalmente, por el Teorema 1.2.4 (i), se tiene

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_2) = |\varphi_{z_1}(z_2)| &\leq |\varphi_{z_1}(z_3)| + \rho(\varphi_{z_1}(z_3), \varphi_{z_1}(z_2)) \\ &= \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2)\ . \end{aligned}$$

$\square$

1.3. El Teorema de Green

El Teorema de Green permite escribir una integral doble en una región R de $\mathbb{R}^2$, como una integral de línea a lo largo de la curva cerrada γ, la cual constituye la frontera de R. El Teorema 1.3.5 es la versión compleja del Teorema de Green. Tal resultado, al igual que el Teorema de Green clásico, bajo condiciones apropiadas, permitirá expresar integrales de área en integrales de línea, las cuales en este caso al trabajar en el disco $\mathbb{D}$, serán más manejables para las estimaciones. Se inicia este Capítulo con las siguientes definiciones para poder enunciar el Teorema de Green (versión real).

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva simple de Jordan de clase C^1 por tramos. Se dice que γ es una *curva regular* si cada línea paralela al eje x y cada línea paralela al eje y, con excepción de los extremos, corta a la curva a lo más en dos puntos.

Un subconjunto acotado R de $\mathbb{R}^2$ se llama *conjunto regular* si su frontera ∂R es la imagen de una curva regular γ.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Green). *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, y P, Q dos funciones reales de clase C^1 en Ω. Sea R un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, tal que R es unión finita de conjuntos regulares y $\overline{R} \subset \Omega$. Si ∂R está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial R} P\, dx + Q\, dy\,. \tag{1.11}$$

La versión compleja del Teorema de Green es enunciado con las derivadas parciales respecto a z y $\overline{z}$ (ecuaciones (1.12)). Por ello, se empieza haciendo un análisis de estos operadores.

Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, $f = f_1 + if_2$. Si las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

existen en todo punto de su dominio, se definen los siguientes *operadores de Wirtinger* en el conjunto Ω como:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} \right). \tag{1.12}$$

Por la linealidad de las derivadas parciales, claramente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{z} &= 1 & \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\overline{z} &= 0 & \qquad \frac{\partial}{\partial z} z &= 1. \end{aligned}$$

A continuación se dan más propiedades de los operadores $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, pues estas aplicaciones aparecerán en forma natural en el Capítulo 3. El siguiente Lema muestra la relación entre tales operadores.

Lema 1.3.2. *Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo y sea $f = f_1 + if_2$ una función compleja. Si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ existen en Ω, entonces:*

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\,. \tag{1.13}$$

Demostración. Desarrollando el lado izquierdo y utilizando la definición se tiene:

$$\overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f_1 + if_2) - i\frac{\partial}{\partial y}(f_1 + if_2)\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

□

Bajo las mismas condiciones del Lema anterior, si además $f_1,\ f_2 \in C^n(\Omega)$ (como funciones de dos variables reales), inductivamente se puede ver que

$$\frac{\partial^n \overline{f}}{\partial \overline{z}^n} = \overline{\frac{\partial^n f}{\partial z^n}}\,. \tag{1.14}$$

Dadas dos funciones complejas $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$, cuyas derivadas parciales con respecto a x y y existen, se puede mostrar que los operadores $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ y $\dfrac{\partial}{\partial z}$ cumplen la regla del producto:

$$\frac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}} = f\,\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + g\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial (fg)}{\partial z} = f\,\frac{\partial g}{\partial z} + g\,\frac{\partial f}{\partial z}\,. \tag{1.16}$$

De estas dos fórmulas se sigue la Fórmula de Leibniz para $f, g \in C^n(\Omega)$

$$\frac{\partial^n (fg)}{\partial \overline{z}^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^k f}{\partial \overline{z}^k}\frac{\partial^{n-k} g}{\partial \overline{z}^{n-k}}\,, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^n (fg)}{\partial z^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}\frac{\partial^{n-k} g}{\partial z^{n-k}}\,. \tag{1.18}$$

Si f es una función analítica en Ω, se cumple

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

y

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\,.$$

Esto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f'\,,$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Los operadores de Wirtinger en general no satisfacen la regla de la cadena, pero hay una versión para poder derivar una composición de funciones. Tal resultado se enuncia en el Teorema 1.3.3. En el Corolario 1.3.4 se prueba que si alguna de las funciones en cuestión es analítica, entonces la regla de la cadena se sigue cumpliendo. Dicho Corolario se estará usando implícitamente en este trabajo.

Teorema 1.3.3. *Sean $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ dos funciones complejas y Ω, Ω' dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$. Suponga que $f_1, f_2 \in C^1(\Omega)$ y $g_1, g_2 \in C^1(\Omega')$. Entonces, en los puntos $z \in \Omega$ donde esta definida la composición $f \circ g$, se cumplen las fórmulas:*

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\big(g(z)\big)\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(g(z)\big)\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}(z) \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\big(g(z)\big)\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(g(z)\big)\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}(z) \tag{1.20}$$

Demostración. Por simplicidad, se omite en la demostración la evaluación en z. Al desarrollar cada sumando del lado derecho de (1.19) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(g)\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g) - i\frac{\partial f}{\partial y}(g)\right)\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g) - i\frac{\partial f}{\partial y}(g)\right)\frac{\partial g_2}{\partial z},\\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g)\frac{\partial \overline{g}}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g) + i\frac{\partial f}{\partial y}(g)\right)\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g) + i\frac{\partial f}{\partial y}(g)\right)\frac{\partial g_2}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Por lo cual se cumple la igualdad

$$\frac{\partial f}{\partial z}(g)\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g)\frac{\partial \overline{g}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial z}. \tag{1.21}$$

Por otro lado, utilizando la regla de la cadena (versión real), se tienen las identidades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f_1\circ g)}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (f_1\circ g)}{\partial x} - i\frac{\partial (f_1\circ g)}{\partial y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial x}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial z}\,, \qquad (1.22)\\
i\frac{\partial (f_2\circ g)}{\partial z} &= \frac{i}{2}\left(\frac{\partial (f_2\circ g)}{\partial x} - i\frac{\partial (f_2\circ g)}{\partial y}\right)\\
&= \frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\\
&= i\frac{\partial f_2}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial z} + i\frac{\partial f_2}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial z}. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (1.22) y (1.23) se concluye que

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial z}=\frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial z}+i\frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}(g)\frac{\partial g_1}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}(g)\frac{\partial g_2}{\partial z}. \tag{1.24}$$

Así, (1.19) es ahora una consecuencia directa de (1.21) y (1.24). La ecuación (1.20) resulta de aplicar (1.19) a $\overline{f}$ y el Lema 1.3.2. $\square$

Corolario 1.3.4. *Bajo las mismas condiciones del Teorema anterior, si alguna de f o g es analítica, entonces se cumple la regla de la cadena, es decir:*

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial z}(z)=\frac{\partial f}{\partial z}\big(g(z)\big)\frac{\partial g}{\partial z}(z).$$

El siguiente Teorema, junto con los Corolarios 1.3.8 y 1.3.9 serán de vital importancia en este trabajo, tales resultados son las versiones complejas del Teorema de Green. Aquí si no hay confusión se utiliza el símbolo dz para representar la medida de Lebesgue de área y de longitud.

Teorema 1.3.5 (**Teorema de Green**). *Sea R un subconjunto del plano complejo, tal que R es unión finita de conjuntos regulares. Sea $f=f_1+if_2$ una función compleja tal que f_1 y f_2 son de clase C^1 (vistas como funciones de dos variables reales) en un conjunto abierto Ω donde $\overline{R}\subset\Omega$. Si ∂R está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$\int_R\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\,dz=\frac{1}{2i}\int_{\partial R}f(z)\,dz\,. \tag{1.25}$$

Demostración. Observe primero que

$$\begin{aligned}2i\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}&=i\left(\frac{\partial(f_1+if_2)}{\partial x}+i\frac{\partial(f_1+if_2)}{\partial y}\right)\\&=-\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{1.26}$$

Sea ahora $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ una parametrización de ∂R. Por las hipótesis que se tienen, se puede aplicar el Teorema de Green a la parte real y a la parte imaginaria de la integral parametrizada del lado derecho de (1.25). Utilizando (1.26) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial R}f(z)\,dz&=\int_a^b\big[f_1+if_2\big](\gamma(t))\big[\gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t)\big]\,dt\\&=\int_a^b\big[f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)-f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big]dt+i\int_a^b\big[f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)+f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big]dt\\&=\int_R\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(z)\,dz+i\int_R\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(z)\,dz \qquad (1.27)\\&=2i\int_R\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\,dz. \qquad (1.28)\end{aligned}$$

$\square$

Como consecuencia inmediata se tiene la siguiente versión del Teorema de Green, el cual dará un método iterativo para poder expresar el Teorema de Green para el operador $\dfrac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}$.

Teorema 1.3.6. *Sea R un subconjunto del plano complejo, tal que R es unión finita de conjuntos regulares. Sean $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$ dos funciones complejas tales que f_1, f_2, g_1 y g_2 son de clase C^1 (vistas como funciones de dos variables reales) en un conjunto abierto Ω donde $\overline{R} \subset \Omega$. Si ∂R está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$\int_R \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(f(z)\overline{g(z)} \right) dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f(z)\overline{g(z)}\, dz\,.$$

Cuando se aplica el Teorema de Green a funciones analíticas, se obtiene el siguente resultado:

Corolario 1.3.7. *Sea R un subconjunto del plano complejo, tal que R es unión finita de conjuntos regulares. Sean $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$ dos funciones complejas tales que f_1, f_2, g_1 y g_2 son de clase C^1 en un conjunto abierto Ω donde $\overline{R} \subset \Omega$. Si además f y g son analíticas en Ω y si ∂R está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$\int_R f(z)\overline{g'(z)}\, dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f(z)\overline{g(z)}\, dz\,.$$

Demostración. Dado que f y g son analíticas $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z} = g'$. Por lo tanto, de la regla del producto (1.15),

$$\int_R \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(f(z)\overline{g(z)} \right) dz = \int_R \left(f(z)\, \frac{\partial \overline{g(z)}}{\partial \overline{z}} + \overline{g(z)}\, \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} \right) dz = \int_R f(z)\overline{g'(z)}\, dz\,.$$

El resultado se obtiene utilizando el Teorema anterior. $\square$

Los siguientes dos Corolarios serán los más utilizados en este trabajo, y serán de vital importancia para las demostraciones del Capítulo 3, pues en dicho Capítulo se utilizan los operadores $\dfrac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}$ y $\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}$.

Corolario 1.3.8. *Sea R un subconjunto del plano complejo, tal que R es unión finita de conjuntos regulares. Sean $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$ dos funciones complejas tales que f_1, f_2, g_1 y g_2 son de clase C^n (vistas como funciones de dos variables reales) en un conjunto abierto Ω donde $\overline{R} \subset \Omega$. Si ∂R está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$\int_R f(z) \frac{\partial^n \overline{g(z)}}{\partial \overline{z}^n} dz = (-1)^n \int_R \overline{g(z)} \frac{\partial^n f(z)}{\partial \overline{z}^n} dz + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_{\partial R} \frac{\partial^j f(z)}{\partial \overline{z}^j} \cdot \frac{\partial^{n-j-1} \overline{g(z)}}{\partial \overline{z}^{n-j-1}}\, dz\,.$$

Demostración. Para demostrar el Teorema se utilizará inducción. Primero, de (1.15) y del Teorema 1.3.6 se tiene la igualdad

$$\int_R f(z)\frac{\partial\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}}\,dz = -\int_R \overline{g(z)}\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\,dz + \frac{1}{2i}\int_{\partial R} f(z)\overline{g(z)}\,dz,$$

esto quiere decir que el caso $n = 1$ es válido. Supóngase que el resultado se cumple para n. Observe que

$$\begin{aligned}
\int_R f(z)\frac{\partial^{n+1}\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^{n+1}}dz &= \int_R f(z)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{\partial^n\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^n}dz \\
&= \int_R f(z)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\overline{\frac{\partial^n g(z)}{\partial z^n}}dz \\
&= -\int_R \overline{\frac{\partial^n g(z)}{\partial z^n}}\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\,dz + \frac{1}{2i}\int_{\partial R} f(z)\overline{\frac{\partial^n g(z)}{\partial z^n}}\,dz \\
&= -\int_R \frac{\partial^n\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^n}\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\,dz + \frac{1}{2i}\int_{\partial R} f(z)\frac{\partial^n\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^n}\,dz\,. \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $\dfrac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
-\int_R \frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\frac{\partial^n\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^n}dz &= (-1)^{n+1}\int_R \overline{g(z)}\frac{\partial^{n+1}f(z)}{\partial\overline{z}^{n+1}}dz \\
&\quad + \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\int_{\partial R}\frac{\partial^{j+1}f(z)}{\partial\overline{z}^{j+1}}\cdot\frac{\partial^{n-j-1}\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^{n-j-1}}\,dz \\
&= (-1)^{n+1}\int_R \overline{g(z)}\frac{\partial^{n+1}f(z)}{\partial\overline{z}^{n+1}}dz \\
&\quad + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\int_{\partial R}\frac{\partial^{j}f(z)}{\partial\overline{z}^{j}}\cdot\frac{\partial^{n-j}\overline{g(z)}}{\partial\overline{z}^{n-j}}\,dz\,.
\end{aligned}$$

Al sustituir esto último en (1.29) se llega a que el resultado para el paso $n+1$ es válido. □

Del Corolario 1.3.8 y (1.3) se tiene la siguiente versión del Teorema de Green,

Corolario 1.3.9. *Sea R un subconjunto del plano complejo, tal que R es unión finita de conjuntos regulares. Sean $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$ dos funciones complejas tales que f_1, f_2, g_1 y g_2 son de clase C^n (vistas como funciones de dos variables reales) en un conjunto abierto Ω donde $\overline{R} \subset \Omega$. Si ∂R está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$\int_R f(z)\frac{\partial^n g(z)}{\partial z^n}dz = (-1)^n\int_R g(z)\frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n}dz - \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\int_{\partial R}\frac{\partial^j f(z)}{\partial z^j}\cdot\frac{\partial^{n-j-1}g(z)}{\partial z^{n-j-1}}\,d\overline{z}\,.$$

1.4. El núcleo reproductor de un espacio de Hilbert

Una clase muy importante de espacios de Hilbert de funciones, son los espacios de Hilbert con núcleo reproductor. Dicha propiedad permite dar estimaciones de las funciones de $\mathcal{H}$, pues en estos espacios la evaluación puntual tiene una representación mediante el producto interno del espacio $\mathcal{H}$. En el Teorema 1.4.3 se demuestra que, para que un espacio de Hilbert de funciones tenga núcleo reproductor es necesario y suficiente que el funcional evaluación sea acotado. Los espacios que se introducirán en el Capítulo 3 serán espacios con núcleo repoductor.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones complejas sobre un conjunto X. La función compleja $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ denotada por

$$K(z, w) = K_w(z)$$

es llamada *núcleo reproductor* de $\mathcal{H}$ si satisface:

(i) Para toda $w \in X$ fija, $K_w(\cdot)$ pertenece a $\mathcal{H}$.

(ii) La propiedad reproductora: para toda $z \in X$ y toda $f \in \mathcal{H}$,

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle,$$

donde $\langle \ , \ \rangle$ denota el producto interno en $\mathcal{H}$.

Proposición 1.4.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones complejas sobre un conjunto X y K un núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}$. Entonces para todo $z \in X$,*

$$\|K_z\|^2 = K(z, z).$$

Demostración. Al aplicar la propiedad de reproducción a la función K_z en w, se obtiene

$$K_z(w) = \langle K_z, K_w \rangle,$$

basta tomar $w = z$. $\square$

Un espacio de Hilbert de funciones complejas sobre un conjunto X es llamado un *Espacio de Hilbert con núcleo reproductor* si existe un núcleo reproductor K de $\mathcal{H}$.

El siguiente Teorema dice que un espacio de Hilbert de funciones $\mathcal{H}$, tiene un único núcleo reproductor K.

Teorema 1.4.2. *Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones complejas sobre un conjunto X admite un único núcleo reproductor K.*

Demostración. Sea K' otro núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ y $w \in X$. Por la propiedad de reproducción (ii) se cumple

$$\begin{aligned} \|K_w - K'_w\|^2 &= \langle K_w - K'_w, K_w \rangle - \langle K_w - K'_w, K'_w \rangle \\ &= (K_w - K'_w)(w) - (K_w - K'_w)(w) = 0 \,. \end{aligned}$$

Esto implica que $K_w = K'_w$ para toda $w \in X$, y por lo cual $K = K'$. $\square$

El siguiente resultado dá una equivalencia para la existencia del núcleo reproductor. Esto es, para que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tenga núcleo reproductor es necesario y suficiente que el funcional evaluación sea acotado.

Teorema 1.4.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones complejas sobre un conjunto X. Entonces existe un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ si y sólo si, para todo $z \in X$ el funcional lineal evaluación $J_z : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido mediante la regla*

$$J_z(f) := f(z) \qquad \forall\ f \in \mathcal{H}.$$

es acotado.

Demostración. Supóngase que $\mathcal{H}$ admite un núcleo reproductor K. Por la propiedad de reproducción y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene para toda $z \in X$

$$|J_z(f)| = |f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| \leq \|f\|\|K_z\| = \|f\|K(z,z)^{1/2},$$

esto quiere decir que J_z es acotado.

Si para toda $z \in X$, $J_z : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ es lineal y acotado, por el Teorema de representación de Riesz existe una única función $g_z \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(z) = J_z(f) = \langle f, g_z\rangle.$$

Así, $K_z(w) := g_z(w)$ es un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. □

Corolario 1.4.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones complejas sobre un conjunto X. Si $\mathcal{H}$ posee núcleo reproductor, entonces cualquier subespacio cerrado F de $\mathcal{H}$, también posee núcleo reproductor.*

Demostración. Sea $z \in X$, por el Teorema anterior existe $C_z \geq 0$ tal que

$$|J_z(f)| \leq C_z\|f\| \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

En particular

$$|J_z(f)| \leq C_z\|f\| \qquad \forall f \in F.$$

Esto quiere decir que el funcional evaluación en F, es acotado, y nuevamente por el Teorema anterior F posee núcleo reproductor. □

A continuación, se prueba que el núcleo reproductor K está dado en términos de cualquier base de $\mathcal{H}$.

Proposición 1.4.5. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones complejas sobre un conjunto X con núcleo reproductor K. Si $\mathcal{H}$ es separable y $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces:*

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}\,. \tag{1.30}$$

Demostración. Como $K_w \in \mathcal{H}$ para cada $w \in X$, existe una sucesión $\{\lambda_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$K_w = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(w) e_n \,, \tag{1.31}$$

donde la convergencia es en $\mathcal{H}$. Por la continuidad del producto interno y por la propiedad de reproducción de K se tiene para toda $m \geq 0$,

$$e_m(w) = \langle e_m, K_w \rangle = \left\langle e_m, \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(w) e_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_m, \lambda_n(w) e_n \rangle = \overline{\lambda_m(w)} \,.$$

Basta sustituir esta última expresión en (1.31). □

El núcleo reproductor $K(z, w)$ tiene las siguientes propiedades:

(a) $\forall z \in X, \quad K(z, z) \geq 0 \,.$

(b) $\forall z, w \in X, \quad K(z, w) = \overline{K(w, z)} \,.$

(c) $\forall z, w \in X, \quad |K(z, w)|^2 \leq K(z, z) K(w, w) \,,$ (Desigualdad de Schwarz)

(d) Sea $z_0 \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) $K(z_0, z_0) = 0 \,.$
- (ii) $K(z, z_0) = 0$ para toda $z \in X$.
- (iii) $f(z_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}$.

Capítulo 2

Espacios de Bergman con peso

En este Capítulo se enuncian las propiedades clásicas del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. También se exhibe una base para el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\Omega)$, donde Ω es un subconjunto abierto propio del plano complejo. En la Sección 2.2 se introducen los espacios de Bergman con peso, y ya que muchas propiedades del espacio de Bergman clásico se siguen satisfaciendo, sólo se dan las propiedades necesarias para los fines de este trabajo. Los resultados de este Capítulo están basados en los libros de Zhu [7, 10].

2.1. Espacios de Bergman

Se inicia esta sección analizando el espacio de Bergman clásico, ya que uno de los propósitos de este trabajo es dar una generalización de éste, y sus propiedades.

$\mathcal{A}(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones analíticas en Ω y $L^p(\Omega, dz)$ denota el conjunto de funciones p-integrables en Ω, donde dz representa la medida de Lebesgue de área usual, esto es:

$$\mathcal{A}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, f \text{ es analítica}\},$$
$$L^p(\Omega, dz) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, \int_\Omega |f(z)|^p \, dz < +\infty \right\}.$$

Para $1 \leq p < +\infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, se define el *espacio de Bergman* $\mathcal{A}^p(\Omega)$ como el subespacio de $L^p(\Omega, dz)$ que consiste de todas las funciones analíticas, es decir:

$$\mathcal{A}^p(\Omega) := \mathcal{A}(\Omega) \cap L^p(\Omega, dz).$$

Cuando se está trabajando en el disco unitario $\mathbb{D}$, en general, se considera la medida de área normalizada $dA(z)$. En coordenadas rectangulares y polares, $dA(z)$ se expresa respectivamente por:

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta, \qquad z = x + iy = re^{i\theta}.$$

El siguiente Teorema muestra que el espacio de Bergman también es un espacio de Banach.

Teorema 2.1.1. *Para $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{D}, dA)$.*

Demostración. Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy contenida en $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$. Al ser $L^p(\mathbb{D})$ completo, existe $f \in L^p(\mathbb{D})$ tal que $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. Sea $0 < r < 1$ y $z \in \mathbb{D}$ con $|z| < r$, entonces $\overline{\mathbb{D}}_{1-r}(z) \subset \mathbb{D}$. Por el Teorema 1.1.2 y la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &= \left| \frac{1}{(1-r)^2} \int_{|w-z|<1-r} (f_n(w) - f_m(w))\, dA(w) \right| \\ &\leq \frac{1}{(1-r)^2} \int_{\mathbb{D}} |f_n(w) - f_m(w)|\, dA(w) \\ &\leq \frac{1}{(1-r)^2} \|f_n - f_m\|_p. \end{aligned}$$

Si ahora K es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, existe $r_K > 0$ tal que $K \subseteq \mathbb{D}_{r_K}$, y por la estimación anterior

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{(1-r_K)^2} \|f_n - f_m\|_p \,, \qquad \forall\, z \in K \,. \tag{2.1}$$

Esto es, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en K, por tanto f es analítica. □

En el caso $p = 2$ se tiene que $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert, y por lo cual tiene sentido hablar de bases ortonormales y del núcleo reproductor. La siguiente Proposición da una base del espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Proposición 2.1.2. *Una base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ para el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, está dada por:*

$$e_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Defínase $C_{n,m} := \sqrt{n+1}\sqrt{m+1}$. Utilizando coordenadas polares, cuando $n \neq m$ se tiene:

$$\langle e_n, e_m \rangle = C_{n,m} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m}\, dA(z) = \frac{C_{n,m}}{\pi} \int_0^1 r^{n+m+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 0 \,,$$

y también

$$\langle e_n, e_n \rangle = C_{n,n} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^n}\, dA = \frac{(n+1)}{\pi} \int_0^1 r^{2n+1} dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{(n+1)}{\pi} \frac{1}{2n+2} 2\pi = 1.$$

Esto quiere decir que $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal. Para ver que es maximal, supóngase que f es una función en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tal que $\langle f, e_n \rangle = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Se demostrará que esta condición implica que $f = 0$. Se recuerda que $\mathbb{D}_r$ es el disco $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < r\}$. Claramente se satisface:

$$\int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{z^n}\, dA(z) = \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{D}_r} f(z) \overline{z^n}\, dA(z) \,.$$

Por el Corolario 1.3.7, si $0 < r < 1$ se tiene la igualdad

$$\int_{\mathbb{D}_r} f(z)\overline{z^n}\, dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_r} f(z)\overline{\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)'}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r} f(z)\overline{\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)}\, dz\,.$$

Pero si $z \in \partial\mathbb{D}_r$, entonces $\overline{z} = r^2 z^{-1}$, por lo cual

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r} f(z)\overline{\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)}\, dz = \frac{r^{2(n+1)}}{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,.$$

Aplicando desarrollo de Taylor, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, y por el Teorema 1.1.1 se cumple que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = a_n$. Así

$$\begin{aligned}\langle f, e_n\rangle = \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{z^n}\, dA(z) &= \sqrt{n+1}\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}_r} f(z)\overline{z^n}\, dA(z)\\ &= \sqrt{n+1}\lim_{r\to 1^-}\frac{r^{2(n+1)}}{n+1}a_n = \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $f = 0$ y por tanto $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es completo. □

Haciendo las mismas estimaciones que en (2.1), si $z \in \mathbb{D}$ y $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, existe una constante positiva C (independiente de f), tal que

$$|f(z)| \leq C\|f\|_2\,, \qquad \forall\, f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})\,. \tag{2.2}$$

Lo anterior quiere decir que el funcional evaluación es acotado, y por el Teorema 1.4.3 el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tiene núcleo reproductor K. A este núcleo se le conoce como núcleo de Bergman. El siguiente Corolario dá una forma reducida del núcleo de Bergman.

Corolario 2.1.3. *El núcleo de Bergman $K(z,w)$ tiene la siguiente representación:*

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\,.$$

Demostración. Por la Proposición anterior $\{e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal para $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, y por el Teorema 1.4.5 se tiene

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\,.$$

□

Corolario 2.1.4. *Supóngase que $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es un automorfismo analítico de $\mathbb{D}$, entonces*

$$K(z,w) = \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}\,.$$

Demostración. Si $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es base ortonormal de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, $\{\sigma_n(z) = e_n(\varphi(z))\varphi'(z)\}_{n=0}^{\infty}$ forma otra base ortonormal de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ (Teorema 2.1.7). Entonces por el Teorema 1.4.5

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n(z)\overline{\sigma_n(w)} = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\right)\overline{\varphi'(w)} = \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}\,. \end{aligned}$$

□

Como $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D})$, entonces existe la proyección ortogonal B de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Este operador B es llamado la proyección de Bergman. El siguiente resultado demuestra que B es un operador integral.

Proposición 2.1.5. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$, se cumple*

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)\,dA(w)\,.$$

Demostración. Por la propiedad de reproducción de $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$, se tiene

$$\begin{aligned} Bf(z) &= \langle Bf, K_z\rangle = \langle f, BK_z\rangle = \langle f, K_z\rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}\,dA(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)\,dA(w)\,. \end{aligned}$$

□

En el Teorema 2.1.7 se dá una base explícita del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\Omega)$. Para demostrar éste resultado utilizaremos el *Teorema del mapeo de Riemann* (para una prueba de este, puede consultarse [9, pág. 160] o [18, pág. 299]).

Teorema 2.1.6 (Mapeo de Riemann). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto propio no vacío, abierto y simplemente conexo. Entonces Ω es conforme al disco unitario; es decir, existe un biholomorfismo $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$. Además esta aplicación es única si suponemos $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$ para algún $z_0 \in \Omega$ fijo.*

En la demostración del siguiente Teorema dz representa la medida de Lebesgue de área usual.

Teorema 2.1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto propio no vacío, abierto y simplemente conexo. Sea f una transformación conforme de Ω sobre el disco $\mathbb{D}$. Entonces, una base ortonormal $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ para $\mathcal{A}^2(\Omega)$, está dada por*

$$w_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\big(f(z)\big)^{n-1} f'(z) \qquad z \in \Omega.$$

Demostración. Sea $f = u + iv$, entonces $f' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = |f'|^2. \tag{2.3}$$

Se demuestra primero que $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal. Sea $C_{n,m} = \dfrac{\sqrt{nm}}{\pi}$, aplicando el Teorema de cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}\langle w_n, w_m\rangle &= \int_\Omega w_n(z)\overline{w_m(z)}\,dz = C_{n,m}\int_\Omega (f(z))^{n-1}\overline{(f(z))}^{m-1}|f'(z)|^2\,dz \\ &= C_{n,m}\int_{f(\Omega)} z^{n-1}\overline{z}^{m-1}\,dz = C_{n,m}\int_{\mathbb{D}} z^{n-1}\overline{z}^{m-1}\,dz\,,\end{aligned}$$

y por tanto, del Teorema 2.1.2 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal. Se prueba ahora que tal conjunto es completo. Si $h \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ y $g = f^{-1}$ por el Teorema de cambio de variable se cumple

$$\int_\Omega |h(z)|^2\,dz = \int_{g(\mathbb{D})} |h(z)|^2\,dz = \int_{\mathbb{D}} |(h\circ g)(z)|^2|g'(z)|^2\,dz = \int_{\mathbb{D}} |(h\circ g)(z)g'(z)|^2\,dz\,,$$

esto quiere decir que $(h\circ g)g' \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Nuevamente, utilizando el Teorema de cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(z)\overline{w_n(z)}\,dz &= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_\Omega h(z)\overline{(f(z))}^{n-1}\overline{f'(z)}\,dz \\ &= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{\mathbb{D}} (h\circ g)(z)\overline{(f\circ g)(z)}^{n-1}\overline{(f'\circ g)(z)}|g'(z)|^2\,dz \\ &= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{\mathbb{D}} (h\circ g)(z)\overline{z}^{n-1}\overline{(f\circ g)'(z)}g'(z)\,dz \\ &= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{\mathbb{D}} (h\circ g)(z)\overline{z}^{n-1}g'(z)\,dz\,.\end{aligned}$$

Así, si $\langle h, w_n\rangle = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la igualdad anterior y el Teorema 2.1.2 se debe tener que $(h\circ g)(z)g'(z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Como $g' \neq 0$ entonces $h(g(z)) = 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$, y esto implica que $h = 0$. $\square$

2.2. Espacios de Bergman con peso

Una variante inmediata de los espacios de Bergman es cuando se incluye un peso a $L^2(\mathbb{D}, dA(z))$. Uno de los resultados que se utilizarán de esta sección, en el Capítulo 3, es que si $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ con $p > 1$, entonces $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA(z)),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Utilizando la propiedad reproductora de K y el Corolario 2.1.3, para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ se cumple la igualdad puntual

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\, dA(w) \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{2.4}$$

Para $a \in \mathbb{D}$ defínase $k_a(z) := \dfrac{K(z,a)}{\sqrt{K(a,a)}} = \dfrac{1 - |a|^2}{(1 - z\overline{a})^2}$. Por la Proposición 1.4.1 se tiene $\|k_a\| = 1$. k_a se llama el núcleo de Bergman normalizado de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Sea φ_a el biolomorfismo de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ definido en (1.7), esto es

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De (1.8) se sigue que $\varphi_a'(z) = -k_a(z)$. Utilizando esta igualdad y (2.3), el determinante del Jacobiano real J_{φ_a}, de φ_a es:

$$J_{\varphi_a}(z) = |k_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4}. \tag{2.5}$$

Sean $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > -1$ y $dA_\alpha(z) := (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha\, dz$, donde z es la medida de Lebesgue de área usual. Se define el Espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ con peso $(\alpha+1)(1 - |z|^2)^\alpha$, como:

$$L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) = \left\{ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, \int_\Omega |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) < +\infty \right\}.$$

En el caso cuando $\Omega = \mathbb{D}$, se toma la medida de Lebesgue de área normalizada $dA(z)$. Se define el *Espacio de Bergman con peso*, denotado por $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, como

$$\mathcal{A}^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) := \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha).$$

Sea f una función que pertenece a $\mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Por la Fórmula integral de Cauchy se cumple

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f(z)\,(1 - |z|^2)^\alpha dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})(1 - r^2)^\alpha\, r dr d\theta \\
&= \int_0^1 (1 - r^2)^\alpha r \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta \right) dr \\
&= 2f(0) \int_0^1 (1 - r^2)^\alpha\, r dr = \frac{f(0)}{\alpha + 1}.
\end{aligned}$$

Esto implica que para toda $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ se cumple la igualdad

$$f(0) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} f(z)\,(1 - |z|^2)^\alpha dA(z). \tag{2.6}$$

Se recuerda que φ_a tiene las siguientes propiedades:

$$\varphi_a(a) = 0, \qquad \varphi_a(0) = a, \qquad \varphi_a^{-1} = \varphi_a,$$

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Si $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces también $f\circ\varphi_a \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. En efecto; utilizando el Teorema de cambio de variable y que la función $g(z) = |1-\overline{a}z| \leq 2$ en $\overline{\mathbb{D}}$, se cumple la estimación

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|\,(1-|z|^2)^\alpha dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi_a)(z)|\,(1-|\varphi_a(z)|^2)^\alpha \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4} dA(z) \\
&= (1-|a|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi_a)(z)| \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\overline{a}z|^{2\alpha+4}} dA(z) \\
&\geq \frac{(1-|a|^2)^{2+\alpha}}{2^{2\alpha+4}} \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi_a)(z)|\,(1-|z|^2)^\alpha dA(z).
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $f\circ\varphi_a \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Aplicando (2.6) a $f\circ\varphi_a$ y utilizando nuevamente el Teorema de cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}
f(a) &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} (f\circ\varphi_a)(z)(1-|z|)^\alpha \, dA(z) \\
&= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} f(z)(1-|\varphi_a(z)|^2)^\alpha \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4} \, dA(z) \\
&= (\alpha+1)(1-|a|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\overline{a}z|^{2\alpha+4}} \, dA(z).
\end{aligned}$$

Reemplazando ahora $f(z)$ por $f(z)(1-\overline{a}z)^{2+\alpha}$,

$$f(a)(1-|a|^2)^{2+\alpha} = (\alpha+1)(1-|a|^2)^{2+\alpha} \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-a\overline{z})^{2+\alpha}} \, dA(z).$$

Equivalentemente,

$$f(a) = (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-a\overline{z})^{2+\alpha}} \, dA(z), \tag{2.7}$$

para toda función $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Se define ahora

$$K'_\alpha(z,w) := \frac{\alpha+1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}},$$

entonces por (2.7) el operador $Q_\alpha : L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D})$ dado por:

$$Q_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K'_\alpha(z,w) \, dA_\alpha(w) \tag{2.8}$$

actúa como una proyección en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Se define también

$$K_\alpha(z,w) := (\alpha+1) \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}},$$

y con ello el operador $P_\alpha : L^1(\mathbb{D}, dA) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D})$ dado por:

$$P_\alpha f(z) := \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w) f(w) \, dA(w)\,. \tag{2.9}$$

Este operador y su adjunto serán clave para demostrar el Teorema 2.2.4. Se prueba a continuación que este operador está bien definido. Si $z \in \mathbb{D}$ es fijo, entonces la función $K(z,w)$ es acotada en el argumento w en $\overline{\mathbb{D}}$, y por la desigualdad de Hölder $|P_\alpha f(z)| < +\infty$. Sea $r_0 > 0$ tal que $\overline{\mathbb{D}_{r_0}(z)} \subseteq \mathbb{D}$ y $\{z_n\}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{D}_{r_0}(z)} \setminus \{z\}$ tal que $z_n \longrightarrow z$. De la definición de P_α se cumple la igualdad

$$\frac{P_\alpha f(z_n) - P_\alpha f(z)}{z_n - z} = \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{K_\alpha(z_n,w) - K_\alpha(z,w)}{z_n - z}\right] f(w)\, dA(w).$$

Como la función K es de clase C^∞ en $\overline{\mathbb{D}_{r_0}(z)} \times \overline{\mathbb{D}}$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial z}K(z,w)$ es uniformemente acotada en $\overline{\mathbb{D}_{r_0}(z)} \times \overline{\mathbb{D}}$, y por lo cual, existe M (independiente de w y z) y n_0 tal que:

$$\left|\frac{K_\alpha(z_n,w) - K_\alpha(z,w)}{z_n - z} f(w)\right| \leq M|f(w)|, \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Utilizando el Teorema de convergencia dominada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}P_\alpha f(z) &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{P_\alpha f(z_n) - P_\alpha f(z)}{z_n - z}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{K_\alpha(z_n,w) - K_\alpha(z,w)}{z_n - z}\right] f(w)\, dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{K_\alpha(z_n,w) - K_\alpha(z,w)}{z_n - z}\right] f(w)\, dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial}{\partial z} K_\alpha(z,w) f(w)\, dA(w).
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $P_\alpha(f) \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Ahora se quiere probar que si $p > 1, n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{D})$, también $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA)$. Para ello, se enuncian los dos siguientes resultados:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Schur). *Supóngase que (X,μ) es un espacio medible y K es una función medible no negativa en $X \times X$. Sea T el operador integral inducido por K, esto es:*

$$Tf(x) := \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y).$$

Sean $1 < p, q < +\infty$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si existe una constante $C > 0$ y una función medible y positiva h en X tal que

$$\int_X K(x,y) h(y)^q\, d\mu(y) \leq C h(x)^p \qquad c.t.p \;\; x \in X,$$

y

$$\int_X K(x,y) h(x)^p\, d\mu(x) \leq C h(y)^q \qquad c.t.p \;\; y \in X,$$

entonces T es un operador acotado en $L^p(X, d\mu)$ y además $\|T\| \leq C$.

Lema 2.2.2. *Supóngase que $z \in \mathbb{D}, c \in \mathbb{R}$ y $t > -1$. Defínase $I_{c,t} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$I_{c,t}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-z\overline{w}|^{2+t+c}}\, dA(w)\,.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

(i) Si $c < 0$, $I_{c,t}(z)$ es acotado en z.

(ii) Si $c > 0$, existen constantes positivas C_1, C_2 tales que

$$\frac{C_1}{(1-|z|^2)^c} \leq I_{c,t}(z) \leq \frac{C_2}{(1-|z|^2)^c} \qquad |z| \to 1^-$$

(iii) Si $c = 0$, existen constantes positivas C_1, C_2 tales que

$$\log \frac{C_1}{1-|z|^2} \leq I_{c,t}(z) \leq \log \frac{C_2}{1-|z|^2} \qquad |z| \to 1^-.$$

Las demostraciones del Teorema 2.2.1 y del Lema 2.2.2 pueden consultarse en [10, pág. 42, pág. 53], respectivamente. Ahora se enuncia el siguiente Teorema, el cual es importante para la demostración del Teorema 3.4.1. Una versión más completa de éste puede verse en [10, pág. 54], aquí sólo se piden las hipótesis indispensables para los fines de esta Sección.

Teorema 2.2.3. *Supóngase que $1 < p < +\infty$ y $\alpha > -1$. Si $p(\alpha+1) > 1$ entonces el operador P_α es una proyección acotada de $L^p(\mathbb{D}, dA)$ sobre $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $q \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y defínase h como

$$h(z) := \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{pq}}} \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |K_\alpha(z,w)| h(w)^q\, dA(w) &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\frac{1}{p}}}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha}}\, dA(w) \\ &= (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\frac{1}{p}}}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}}}\, dA(w). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $\alpha - \dfrac{1}{p} > -1$ y $\dfrac{1}{p} > 0$, del Lemma 2.2.2 existen $C_1 > 0$ y $0 < r_0 < 1$ tal que si z es un número complejo con $r_0 \leq |z| < 1$, se cumple

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha-\frac{1}{p}}}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}}}\, dA(w) \leq \frac{C_1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}} = C_1 h(z)^q.$$

Por (2.9) la integral del lado izquierdo de (2.10) es analítica (en el argumento z) en $\mathbb{D}$, por lo cual en $\overline{\mathbb{D}}_{r_0}$ es acotada, así existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |K_\alpha(z,w)| h(w)^q \, dA(w) \leq C_2 \leq C_2 h(z)^q.$$

Por tanto, si $C := \text{máx}\{C_1, C_2\}$ se satisface

$$\int_{\mathbb{D}} |K_\alpha(z,w)| h(w)^q \, dA(w) \leq C h(z)^q \qquad \forall \ z \in \mathbb{D}. \tag{2.11}$$

Análogamente, existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |K_\alpha(z,w)| h(z)^p \, dA(z) \leq C h(w)^p \qquad \forall \ w \in \mathbb{D}. \tag{2.12}$$

Por el Teorema de Schur, P_α es acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA)$. $\square$

En el caso cuando $p(\alpha+1) > 1$, el Teorema anterior garantiza que el operador adjunto P_α^* de P_α, es acotado. Realizando un cálculo directo se tiene que

$$P_\alpha^* f(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA(w).$$

Teorema 2.2.4. *Supóngase que* $p > 1, n \in \mathbb{N}$ *y* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{D})$. *Entonces* $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(\mathbb{D}, dA)$.

Demostración. Por (2.7), para cualquier $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{D})$, con $1 \leq p < +\infty$, se puede escribir la igualdad

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2} \, dA(w) \qquad z \in \mathbb{D},$$

y por (2.9) se puede diferenciar bajo el signo de la integral, por lo cual

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) &= (n+1)!(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^n f(w)}{(1-z\overline{w})^{n+2}} \, dA(w) \\ &= n! P_n^*\big(S_n f(z)\big),\end{aligned}$$

donde P_n es la proyección definida en (2.9), P_n^* es su adjunto, y S_n es el operador multiplicación $S_n f(z) = \overline{z}^n f(z)$. Como el operador S_n es acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA)$, y el operador P_n^* también es acotado (por el Teorema 2.2.3), entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|P_n^*\big(S_n f\big)\| \leq C\|f\|.$$

Esto quiere decir que

$$\int_{\mathbb{D}} \big|(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)\big|^p \, dA(z) \leq n!^p C^p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < +\infty.$$

$\square$

Capítulo 3

El espacio de Bergman polianalítico

En este Capítulo se introduce una generalización del espacio de Bergman clásico. Tal generalización se conoce como el espacio de Bergman polianalítico, o espacio de Bergman n-analítico (denotado por $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$), donde el parámetro n, indica el orden de derivada del operador $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$. El objetivo principal de este capítulo es desarrollar la teoría análoga a la que se tiene con el espacio de Bergman clásico, esto es, se verá que el espacio de Bergman polianalítico es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, dz)$, se dará una base explícita, y se demostrará que el funcional evaluación es acotado, y por lo cual, se podrá hablar del núcleo reproductor del espacio de Bergman polianalítico.

En la Sección 3.1 se dá la definición y equivalencias de las funciones polianalíticas. En la Sección 3.2 se define el espacio de Bergman polianalítico, se realizan estimaciones para las derivadas parciales respecto a $\overline{z}$ y z, de funciones polianalíticas, y utilizando molificadores, se prueba que el espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es cerrado.

En la Sección 3.3 se exhibe una colección de conjuntos ortonormales de $L^2(\mathbb{D}, dz)$. En particular, en la Sección 3.4 se dan bases ortonormales de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. En la Sección 3.5, se dá una descomposición de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ como suma directa de los subespacios $\mathcal{B}_n^2(\mathbb{D})$, que en particular, dicha descomposición dá una base para $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. En la Sección 3.6 se prueba la forma explícita del núcleo reproductor. Finalmente, en la Sección 3.7 se muestra una descomposición ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dz)$.

3.1. Funciones polianalíticas

Como en el capítulo anterior, Ω siempre representará un subconjunto abierto del plano complejo. Se recuerda que los operadores de Wirtinger $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, están definidos por

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^{n-j}\frac{\partial^n}{\partial x^j \partial y^{n-j}}\,. \tag{3.2}$$

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja, $f = f_1 + if_2$, donde f_1 y f_2 están en $C^n(\Omega)$. Se dice que f es *$n-$analítica* o *polianalítica de orden n* en Ω, si cumple la ecuación generalizada de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = 0\,. \tag{3.3}$$

Se denota por $\mathcal{A}_n(\Omega)$ al espacio lineal de todas las funciones n-analíticas en Ω, es decir:

$$\mathcal{A}_n(\Omega) = \left\{ f \in C^n(\Omega)\ :\ \frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = 0 \right\}.$$

De la definición, es claro que las funciones 1-analíticas son precisamente las funciones analíticas, esto es

$$\mathcal{A}_1(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega),$$

y que se satisface la siguiente cadena de contenciones

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}_1(\Omega) \subseteq \mathcal{A}_2(\Omega) \subseteq \mathcal{A}_3(\Omega) \subseteq \cdots .$$

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)^j, \tag{3.4}$$

donde cada f_j es analítica en Ω para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Como cada f_j no depende de $\overline{z}$,

$$\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(z) \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}(\overline{z} - \overline{z}_0)^j = 0\,,$$

por lo que $f \in \mathcal{A}_n(\Omega)$. El siguiente Teorema garantiza que cada función $f \in \mathcal{A}_n(\Omega)$ es de la forma (3.4).

Teorema 3.1.1. *Sean Ω un conjunto abierto del plano complejo y f una función compleja definida en Ω. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y si f es n-analítica en Ω, entonces existen funciones únicas $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ (dependiendo sólo de z_0), analíticas en Ω, tales que:*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)^j. \tag{3.5}$$

Demostración. Para demostrar la existencia de $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ se usará inducción. Como las funciones 1-analíticas son precisamente las funciones analíticas, el caso $n = 1$ es directo. Supóngase pues válido el resultado para n. Si $f \in \mathcal{A}_{n+1}(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \in \mathcal{A}_n(\Omega)$ y por la hipótesis de inducción:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)^j \qquad z \in \Omega.$$

Esto es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) - \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j(z)}{j+1} (\overline{z} - \overline{z}_0)^{j+1} \right) = 0 \,, \qquad z \in \Omega \,.$$

Entonces la función f_0 definida como

$$f_0(z) := f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j(z)}{j+1} (\overline{z} - \overline{z}_0)^{j+1}$$

es analítica en Ω, y se cumple la igualdad

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{g_{j-1}(z)}{j} (\overline{z} - \overline{z}_0)^{j}, \qquad z \in \Omega \,.$$

Para demostrar la unicidad de la representación (3.5) suponga que $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ son funciones analíticas en Ω tales que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} f_j(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)^j = \sum_{j=0}^{n-1} g_j(z)(\overline{z} - \overline{z}_0)^j.$$

Aplicando el operador $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial \overline{z}^{n-1}}$ a esta igualdad, se tiene que $f_{n-1} = g_{n-1}$ en Ω. Cancelando a ambos lados el témino $f_{n-1}(\overline{z} - \overline{z}_0)^{n-1}$, y aplicando ahora el operador $\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial \overline{z}^{n-2}}$ se tiene que $f_{n-2} = g_{n-2}$. Siguiendo este procedimiento se concluye que $f_j = g_j$ para toda $j = 1, 2, \ldots, n-1$. $\square$

En el caso cuando $\Omega = \mathbb{D}$, tomando $z_0 = 0$, el Teorema 3.1.1 se puede expresar de la siguiente forma:

Teorema 3.1.2. *Sea f una función n-analítica en $\mathbb{D}$, entonces existen funciones únicas $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ analíticas en $\mathbb{D}$, tales que:*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(z) \overline{z}^j. \tag{3.6}$$

Sea ahora F una función analítica en el abierto Ω, y defínase g en Ω por:

$$g(z) := \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{n-1} F(z) \Big\}. \tag{3.7}$$

Utilizando la Fórmula de Leibniz se tiene

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{\partial^{\nu}}{\partial z^{\nu}} (z\overline{z} - 1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1-\nu}}{\partial z^{n-1-\nu}} F(z) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} \frac{(n-1)!}{(n-1-\nu)!} (z\overline{z} - 1)^{n-1-\nu} \overline{z}^{\nu} F^{(n-1-\nu)}(z). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como el término $(z\overline{z}-1)^{n-1-\nu}\overline{z}^{\nu}$ es un polinomio en z y $\overline{z}$, cuyo grado en $\overline{z}$ es $n-1$, la igualdad (3.8) implica que g es de la forma (3.4), y por el Teorema 3.1.1 $g \in \mathcal{A}_n(\Omega)$. Tomando en particular $F(z) = z^j$ con $j \in \mathbb{N}_0$, de (3.8) se tiene

$$g(z) = (n-1)! \sum_{\nu=\text{máx}\{0,n-1-j\}}^{n-1} \binom{n-1}{\nu}\binom{j}{n-1-\nu}(z\overline{z}-1)^{n-1-\nu}\overline{z}^{\nu}z^{j-n+1+\nu}, \tag{3.9}$$

en este caso, $g(z)$ es un polinomio en z y $\overline{z}$, el cual es acotado, cuando Ω es acotado. Esto implica que si $F(z) = z^j$ y Ω es un conjunto acotado, $g \in L^p(\Omega, dz)$ para todo $p \geq 1$.

Del Teorema 3.1.1 se sigue también que una función polianalítica es de clase C^{∞} en Ω.

3.2. Espacios de Bergman polianalíticos

Se define el *espacio de Bergman polianalítico de orden n*, *espacio de Bergman n-analítico*, o *espacio poli-Bergman* en Ω, denotado por $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$, como el conjunto de funciones $n-$analíticas que son cuadrado integrables, es decir:

$$\mathcal{A}_n^2(\Omega) := \mathcal{A}_n(\Omega) \cap L^2(\Omega, dz).$$

De (3.9) se sigue que si $n \in \mathbb{N}$, las funciones

$$h_{n,j}(z) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{n-1}z^j\Big\} \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

pertenecen a $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$ para cualquier conjunto abierto y acotado Ω. Si $\Omega = \mathbb{D}$, como en el caso del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, se demostrará que el espacio lineal $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert. Para lograr dicho objetivo, primero se enuncian algunos resultados preliminares.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

f es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Para $\nu \in \mathbb{N}$, se define la función $f_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x^\nu}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

f_ν es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$ y $f_\nu^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Sean ahora $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$, se definen las funciones $f_{\nu,a}$ y $f_{\nu,b}$ en $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$f_{\nu,a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \leq a, \\ e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}} & \text{si } |z| > a, \end{cases} \qquad f_{\nu,b}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \geq b, \\ e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}} & \text{si } |z| < b. \end{cases}$$

De (3.11) se sigue que $f_{\nu,a}, f_{\nu,b}$ son funciones infinitamente diferenciables (como función de dos variables reales). Defínase $h_\nu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h_\nu(z) := \frac{f_{\nu,b}(z)}{f_{\nu,b}(z) + f_{\nu,a}(z)}. \tag{3.12}$$

La función h_ν es infinitamente diferenciable (como función de dos variables reales), y cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} h_\nu(z) &= 1 \qquad \text{si} \;\; |z| \leq a, \\ h_\nu(z) &= 0 \qquad \text{si} \;\; |z| \geq b, \\ 0 < h_\nu(z) &< 1 \qquad \text{si} \;\; a < |z| < b. \end{aligned}$$

Observe que las derivadas parciales $\dfrac{\partial^k h_\nu}{\partial \overline{z}^k}$ y $\dfrac{\partial^k h_\nu}{\partial z^k}$, con $k \in \mathbb{N}$, son iguales a cero en el disco $\overline{\mathbb{D}}_a$ y en el complemento del disco $\mathbb{D}_b$. La siguiente Proposición dá una expresión manejable de $\dfrac{\partial^k h_\nu}{\partial \overline{z}^k}$ en el conjunto $\{z \,:\, a < |z| < b\}$ para fines de estimación.

Proposición 3.2.1. *Si h_ν es la función construida en (3.12), entonces en el conjunto $\{z \,:\, a < |z| < b\}$, para $n \in \mathbb{N}$, se cumple la igualdad:*

$$\frac{\partial^n h_\nu}{\partial x^n}(z) = \sum_{j \in J_n} C_j \frac{e^{-\frac{\alpha_j}{|z|^{2\nu} - a^{2\nu}}} e^{-\frac{\beta_j}{b^{2\nu} - |z|^{2\nu}}} |z|^{2\mu_j} x^{\gamma_j}}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu} - |z|^{2\nu}}} + e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu} - a^{2\nu}}}\right)^{\delta_j} \left(|z|^{2\nu} - a^{2\nu}\right)^{\lambda_j} \left(b^{2\nu} - |z|^{2\nu}\right)^{\rho_j}}, \tag{3.13}$$

donde J_n es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ que depende de ν, C_j es una constante real (que depende de ν y n), $\alpha_j, \beta_j, \mu_j, \gamma_j, \delta_j, \lambda_j$ y ρ_j son números en $\mathbb{N}_0$ (que dependen de n) con las siguientes propiedades:

(a) *$\beta_j \geq 1$, para toda $j \in \mathbb{N}$,*

(b) *Si $\alpha_j = 0$ implica que $\lambda_j = 0$, y*

(c) *$\mu_j \geq \nu - n$ para toda j.*

Demostración. Observe que si $\alpha, \beta, \mu, \delta, \lambda, \rho \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^\mu = \mu(x^2 + y^2)^{\mu - 1} 2x, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{\alpha}{|z|^{2\nu} - a^{2\nu}}}\right) = e^{-\frac{\alpha}{|z|^{2\nu} - a^{2\nu}}} \frac{(x^2 + y^2)^{\nu - 1} 2\nu\alpha x}{(|z|^{2\nu} - a^{2\nu})^2}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{\beta}{b^{2\nu} - |z|^{2\nu}}}\right) = -e^{-\frac{\beta}{b^{2\nu} - |z|^{2\nu}}} \frac{(x^2 + y^2)^{\nu - 1} 2\nu\beta x}{(b^{2\nu} - |z|^{2\nu})^2}, \tag{3.16}$$

y también

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\left(|z|^{2\nu}-a^{2\nu}\right)^{\lambda}}\right\} = -\frac{(x^2+y^2)^{\nu-1}2\nu\lambda x}{\left(|z|^{2\nu}-a^{2\nu}\right)^{\lambda+1}}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\left(b^{2\nu}-|z|^{2\nu}\right)^{\rho}}\right\} = \frac{(x^2+y^2)^{\nu-1}2\nu\rho x}{\left(b^{2\nu}-|z|^{2\nu}\right)^{\rho+1}}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}+e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)^{\delta}}\right\} = \frac{-\delta\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)-\delta\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}+e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)^{\delta+1}}. \tag{3.19}$$

De la ecuación (3.12), en el conjunto $\{z\,:\,a<|z|<b\}$, $h_\nu(z)$ tiene la expresión:

$$g(z) = e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}\cdot\frac{1}{e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}+e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}}}, \tag{3.20}$$

por lo cual, utilizando inducción y las igualdades (3.14)-(3.19) se obtiene el resultado. □

La Proposición 3.2.1 se puede generalizar a derivadas parciales de h_ν respecto de x y y. La demostración de este hecho es análoga a la anterior.

Corolario 3.2.2. *Si h_ν es la función construida en (3.12), y $k+n\in\mathbb{N}$, entonces en el conjunto $\{z\,:\,a<|z|<b\}$ se cumple la igualdad:*

$$\frac{\partial^{k+n}}{\partial y^k\partial x^n}h_\nu(z) = \sum_{j\in J_{k,n}} C_j\frac{e^{-\frac{\alpha_j}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}}e^{-\frac{\beta_j}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}|z|^{2\mu_j}x^{\gamma_j}y^{\eta_j}}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z|^{2\nu}}}+e^{-\frac{1}{|z|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)^{\delta_j}\left(|z|^{2\nu}-a^{2\nu}\right)^{\lambda_j}\left(b^{2\nu}-|z|^{2\nu}\right)^{\rho_j}}, \tag{3.21}$$

donde $J_{k,n}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ que depende de ν, C_j es una constante real (que depende de ν, n y k), $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\mu_j,\delta_j,\lambda_j$ y ρ_j son números en $\mathbb{N}_0$ (que dependen de k y n) con las siguientes propiedades:

(a) $\beta_j\geq 1$, *para toda* $j\in\mathbb{N}$,

(b) Si $\alpha_j=0$ *implica que* $\lambda_j=0$, *y*

(c) $\mu_j\geq\nu-(n+k)$ *para toda* j.

Corolario 3.2.3. *Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $0<a<b$, y $z_0\in\mathbb{C}$. Sea $g_\nu:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g_\nu(z):=h_\nu(z-z_0)$. Entonces la función g_ν es infinitamente diferenciable (como función de dos variables reales) y cumple que:*

$$\begin{array}{rl} g_\nu(z)=1 & si\ |z-z_0|\leq a,\\ g_\nu(z)=0 & si\ |z-z_0|\geq b,\\ 0<g_\nu(z)<1 & si\ a<|z-z_0|<b. \end{array}$$

Además, en el conjunto $\{z : a < |z - z_0| < b\}$ *la derivada parcial* $\dfrac{\partial^{k+n} g_\nu}{\partial y^k \partial x^n}$*, en el punto* z *es igual a:*

$$\sum_{j \in J_{k,n}} C_j \frac{e^{-\frac{\alpha_j}{|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}}} e^{-\frac{\beta_j}{b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}}} |z-z_0|^{2\mu_j} (x-x_0)^{\gamma_j} (y-y_0)^{\eta_j}}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}}} + e^{-\frac{1}{|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)^{\delta_j} \left(|z-z_0|^{2\nu} - a^{2\nu}\right)^{\lambda_j} \left(b^{2\nu} - |z-z_0|^{2\nu}\right)^{\rho_j}}, \tag{3.22}$$

donde $J_{k,n}$ *es un subconjunto finito de* $\mathbb{N}$ *que depende de* ν, C_j *es una constante real (que depende de* ν, k *y* n*),* $\alpha_j, \beta_j, \mu_j, \gamma_j, \eta_j, \delta_j, \lambda_j$ *y* ρ_j *son números en* $\mathbb{N}_0$ *(que dependen de* k *y* n*) con las siguientes propiedades:*

(a) $\beta_j \geq 1$*, para toda* $j \in \mathbb{N}$*,*

(b) *Si* $\alpha_j = 0$ *implica que* $\lambda_j = 0$*, y*

(c) $\mu_j \geq \nu - (n+k)$ *para toda* j*.*

Observese que del Colorario anterior y (3.2) se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{\partial^k g}{\partial \overline{z}^k}(z) = \frac{\partial^k h}{\partial \overline{z}^k}(z - z_0),$$

y además da una forma explícita de $\dfrac{\partial^k g}{\partial \overline{z}^k}$ para fines de estimación. Note que aunque aquí no se resalta la dependencia de los parámetros, g_ν depende de a, b y z_0, esto es $g_\nu = g_{\nu,a,b,z_0}$.

Lema 3.2.4. *Sean* $\alpha, \beta > 0$ *y* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *la función dada por* $f(x) = x^\beta e^{-\alpha x}$*, entonces existe una constante* $M_{\alpha,\beta} > 0$ *tal que*

$$f(x) \leq M_{\alpha,\beta} \qquad \forall\, x \in [0,\infty).$$

Demostración. Observe que $f'(x) = x^{\beta-1} e^{-\alpha x}(\beta - \alpha x)$, por lo cual, f alcanza su máximo valor en el punto $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Basta tomar $M_{\alpha,\beta} = f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$. □

Lema 3.2.5. *Sean* $a, b > 0$ *y* $f : (a,b) \to [0,\infty)$ *la función dada por* $f(x) = e^{-\frac{1}{b-x}} + e^{-\frac{1}{x-a}}$*, entonces se cumple la siguiente desigualdad:*

$$e^{-\frac{2}{b-a}} \leq f(x) \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

Demostración. Observese las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{2}{b-a}} \leq e^{-\frac{1}{b-x}} + e^{-\frac{1}{x-a}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 \leq e^{\frac{2}{b-a} - \frac{1}{b-x}} + e^{\frac{2}{b-a} - \frac{1}{x-a}}, \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 \leq e^{\frac{b+a-2x}{(b-a)(b-x)}} + e^{\frac{2x-b-a}{(b-a)(x-a)}}. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se cumple pues:

$$\begin{cases} \dfrac{b+a-2x}{(b-a)(b-x)} \geq 0 & \text{si } \dfrac{b+a}{2} \geq x, \\ \dfrac{2x-b-a}{(b-a)(x-a)} \geq 0 & \text{si } \dfrac{b+a}{2} \leq x. \end{cases}$$

□

Corolario 3.2.6. *Sea g_ν la función definida en el Corolario 3.2.3 y $\nu, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $\nu > k+n$, entonces existen constantes positivas $M_{k,n}, A_{k,n}$ y $C_{k,n}$ (que dependen de ν) tales que*

$$\left|\frac{\partial^{k+n} g_\nu}{\partial y^k \partial x^n}(z)\right| \leq M_{k,n} e^{\frac{2A_{k,n}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}} |z-z_0|^{C_{k,n}}.$$

Demostración. Por el Lemma 3.2.4 existen $M_{\alpha_j,\lambda_j} > 0$ y $M_{\beta_j,\rho_j} > 0$ tales que

$$\frac{e^{-\frac{\alpha_j}{|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}}}}{\left(|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}\right)^{\lambda_j}} \leq M_{\alpha_j,\lambda_j} \quad \text{y} \quad \frac{e^{-\frac{\alpha_j}{b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}}}}{\left(b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}\right)^{\lambda_j}} \leq M_{\beta_j,\rho_j}. \tag{3.23}$$

Por el Lema 3.2.5 se tiene

$$\frac{1}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}}} + e^{-\frac{1}{|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)^{\delta_j}} \leq e^{\frac{2\delta_j}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}}, \tag{3.24}$$

además también se satisfacen las desigualdades:

$$|x-x_0| \leq |z-z_0| \quad \text{y} \quad |y-y_0| \leq |z-z_0|. \tag{3.25}$$

Por el Corolario 3.2.3, en el conjunto $\{z : a < |z-z_0| < b\}$ la derivada parcial $\dfrac{\partial^{k+n} g_\nu}{\partial y^k \partial x^n}(z)$ es igual a

$$\sum_{j \in J_{k,n}} C_j \frac{e^{-\frac{\alpha_j}{|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}}} e^{-\frac{\beta_j}{b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}}} |z-z_0|^{2\mu_j} (x-x_0)^{\gamma_j} (y-y_0)^{\eta_j}}{\left(e^{-\frac{1}{b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}}} + e^{-\frac{1}{|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}}}\right)^{\delta_j} \left(|z-z_0|^{2\nu}-a^{2\nu}\right)^{\lambda_j} \left(b^{2\nu}-|z-z_0|^{2\nu}\right)^{\rho_j}}. \tag{3.26}$$

Aplicando desigualdad triangular a la expresión anterior y utilizando las ecuaciones (3.23)-(3.25) se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{\partial^{k+n} g_\nu}{\partial y^k \partial x^n}(z)\right| \leq \sum_{j \in J_{k,n}} |C_j| M_{\alpha_j,\lambda_j} M_{\beta_j,\rho_j} e^{\frac{2\delta_j}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}} |z-z_0|^{2\mu_j+\lambda_j+\eta_j},$$

El resultado se obtiene maximizando cada una de las constantes de la última suma. □

El siguiente Teorema es fundamental para poder demostrar que el espacio $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$ es cerrado, y para probar que el funcional evaluación es acotado. Dicho resultado da una estimación para las derivadas parciales respecto a $\overline{z}$ de las funciones en $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$.

Teorema 3.2.7. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Sean $z \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{\mathbb{D}_R(z)} \subset \Omega$. Entonces para $k \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq k \leq n-1$, existe una constante $C_{n,k,R}$ (independiente de z) tal que:*

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(z)\right| \leq C_{n,k,R} \|f\| \qquad \forall\, f \in \mathcal{A}_n^2(\Omega).$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{A}_n^2(\Omega)$ y $z \in \Omega$ fijo, por el Teorema 3.1.1 existen funciones únicas $f_0(w,z), f_1(w,z), \ldots, f_{n-1}(w,z)$ analíticas (en el argumento w) en Ω, tales que:

$$f(w) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(w,z)(\overline{w} - \overline{z})^m. \tag{3.27}$$

Si $0 \leq k \leq n-1$, de la expresión de arriba se tiene que

$$\frac{\partial^k}{\partial \overline{w}^k} f(w) = \sum_{m=k}^{n-1} \frac{m!}{(m-k)!} f_m(w,z)(\overline{w} - \overline{z})^{m-k}. \tag{3.28}$$

Sea ahora $r > 0$ con $r < R$, y $g_{\nu,r,R,z}$ la función del Corolario 3.2.3, la cual por el momento se denota simplemente por g. Como $g = 1$ en $\{|w-z| \leq r\}$ y $g = 0$ en $\{R \leq |w-z|\}$ la integral

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^n}{\partial \overline{w}^n} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(w) g(w) \right\} \frac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1}}{w - z} \, dw$$

(aquí dw representa la medida de Lebesgue de área usual) es igual a la integral

$$\int_{\mathbb{D}_{r,R}} \frac{\partial^n}{\partial \overline{w}^n} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(w) g(w) \right\} \frac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1}}{w - z} \, dw, \tag{3.29}$$

donde $\mathbb{D}_{r,R} := \{r \leq |w-z| \leq R\}$. Aplicando el Teorema de Green (Corolario 1.3.8), la integral (3.29) es igual a

$$\int_{\mathbb{D}_{r,R}} \frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(w) g(w) \frac{\partial^n}{\partial \overline{w}^n} \left\{ \frac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1}}{w - z} \right\} dw \tag{3.30}$$

$$+ \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_{\partial \mathbb{D}_{r,R}} \frac{\partial^j}{\partial \overline{w}^j} \left\{ \frac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1}}{w - z} \right\} \frac{\partial^{n-j-1}}{\partial \overline{w}^{n-j-1}} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(w) g(w) \right\} dw, \tag{3.31}$$

y (3.30) es igual a cero pues $\dfrac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1}}{w - z} \in \mathcal{A}_n\big(\Omega \setminus \{z\}\big)$. Como g es igual a 1 en $\{|w-z| \leq r\}$, en dicho conjunto se cumple

$$\frac{\partial^{n-j-1}}{\partial \overline{w}^{n-j-1}} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(w) g(w) \right\} = \frac{\partial^{n-j-1+k} f}{\partial \overline{z}^{n-j-1+k}}(w).$$

Por otro lado, como g y sus derivadas se anulan en $\{|w-z| \geq R\}$, entonces (3.31) es igual a:

$$-\frac{1}{2i} \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j \int_{\partial \mathbb{D}_r(z)} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!} \frac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1-j}}{w - z} \frac{\partial^{n-j-1+k} f}{\partial \overline{z}^{n-j-1+k}}(w) \, dw. \tag{3.32}$$

Si se denota $C_j = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-j)!}$, al aplicar la fórmula (3.28) al argumento de (3.32), dicha expresión (3.32) es igual a:

$$-\frac{1}{2i} \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j \int_{\partial \mathbb{D}_r(z)} C_j \frac{(\overline{w} - \overline{z})^{n-1-j}}{w - z} \sum_{m=n-j-1+k}^{n-1} A_{m,j} f_m(w,z)(\overline{w} - \overline{z})^{m-n+j+1-k} \, dw, \tag{3.33}$$

donde $A_{m,j} = \dfrac{m!}{(m-n+j+1-k)!}$. Reduciendo un poco, utilizando el Corolario 1.1.3 y cambiando el orden de las sumas se tiene que (3.33) es igual a:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i}\sum_{j=k}^{n-1}(-1)^j C_j \sum_{m=n-j-1+k}^{n-1} A_{m,j}\int_{\partial\mathbb{D}_r(z)} f_m(w,z)\frac{(\overline{w}-\overline{z})^{m-k}}{w-z}\,dw \\
&= -\frac{1}{2i}\sum_{j=k}^{n-1}(-1)^j C_j \sum_{m=n-j-1+k}^{n-1} A_{m,j}2\pi i r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!} \\
&= -\pi\sum_{m=k}^{n-1}\sum_{j=n-m-1+k}^{n-1}(-1)^j C_j A_{m,j} r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!} \\
&= -\pi\sum_{m=k}^{n-1} r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!}\sum_{j=n-m-1+k}^{n-1}(-1)^j C_j A_{m,j},
\end{aligned}$$

si se define $M_m = \displaystyle\sum_{j=n-m-1+k}^{n-1}(-1)^j C_j A_{m,j}$, la suma anterior es igual a:

$$\begin{aligned}
&-\pi\sum_{m=k}^{n-1} M_m r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!} \\
&= -\pi(-1)^{n-1}(n-1)!k!f_k(z,z) - \pi\sum_{m=k+1}^{n-1} M_m r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!} \\
&= -\pi(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\partial^k f}{\partial\overline{w}^k}(z) - \pi\sum_{m=k+1}^{n-1} M_m r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!}.
\end{aligned}$$

Resumiendo todo lo anterior, se llega a la igualdad:

$$\int_\Omega \frac{\partial^n}{\partial\overline{w}^n}\left\{\frac{\partial^k f}{\partial\overline{w}^k}(w)g(w)\right\}\frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z}\,dw \tag{3.34}$$

$$= -\pi(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\partial^k f}{\partial\overline{w}^k}(z) - \pi\sum_{m=k+1}^{n-1} M_m r^{2(m-k)}\frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!}. \tag{3.35}$$

Por otro lado, al aplicar la Fórmula de Leibniz al argumento de la integral (3.34) se cumple:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial^n}{\partial\overline{w}^n}\left\{\frac{\partial^k f}{\partial\overline{w}^k}(w)g(w)\right\}\frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z}\,dw \\
&= \int_\Omega \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^{j+k} f}{\partial\overline{w}^{j+k}}(w)\frac{\partial^{n-j} g}{\partial\overline{w}^{n-j}}(w)\frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z}\,dw \\
&= \sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n}{j}\int_\Omega \frac{\partial^{j+k} f}{\partial\overline{w}^{j+k}}(w)\frac{\partial^{n-j} g}{\partial\overline{w}^{n-j}}(w)\frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z}\,dw.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Al aplicar el Teorema de Green a cada una de las integrales de (3.36), se cumple que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}_{r,R}} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial \overline{w}^{j+k}}(w) \frac{\partial^{n-j} g}{\partial \overline{w}^{n-j}}(w) \frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z}\, dw \\
&= (-1)^{j+k} \int_{\mathbb{D}_{r,R}} f(w) \frac{\partial^{j+k}}{\partial \overline{w}^{j+k}} \left\{ \frac{\partial^{n-j} g}{\partial \overline{w}^{n-j}}(w) \frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z} \right\} dw \\
&+ \frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{j+k-1} (-1)^m \int_{\partial \mathbb{D}_{r,R}} \frac{\partial^m}{\partial \overline{w}^m} \left\{ \frac{\partial^{n-j} g}{\partial \overline{w}^{n-j}}(w) \frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z} \right\} \frac{\partial^{j+k-m-1} f}{\partial \overline{w}^{j+k-m-1}}\, dw. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Observe que en (3.37) el menor orden de la derivada de g respecto a $\overline{w}$ es $n-j \geq 1$, por tanto (3.37) es igual a cero. Así (3.36) es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n}{j} (-1)^{j+k} \int_{\mathbb{D}_{r,R}} f(w) \frac{\partial^{j+k}}{\partial \overline{w}^{j+k}} \left\{ \frac{\partial^{n-j} g}{\partial \overline{w}^{n-j}}(w) \frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z} \right\} dw \\
&= \int_{\mathbb{D}_{r,R}} f(w) \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n}{j} (-1)^{j+k} \frac{\partial^{j+k}}{\partial \overline{w}^{j+k}} \left\{ \frac{\partial^{n-j} g}{\partial \overline{w}^{n-j}}(w) \frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z} \right\} dw. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Tomando $g = g_{\nu,r,R,z}$ se define ahora,

$$G_{\nu,r,R,z}(w) := \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n}{j} (-1)^{j+k} \frac{\partial^{j+k}}{\partial \overline{w}^{j+k}} \left\{ \frac{\partial^{n-j} g_{\nu,r,R,z}}{\partial \overline{w}^{n-j}}(w) \frac{(\overline{w}-\overline{z})^{n-1}}{w-z} \right\}.$$

Observe que al desarrollar las derivadas $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial \overline{w}^{j+k}}$ en la suma anterior, se obtienen términos con factores $\dfrac{\partial^r g}{\partial \overline{w}^r}$ con $r \geq 1$ (pues $n-j \geq 1$). Si $\nu \in \mathbb{N}$ es tal que $\nu > n$, por el Corolario 3.2.6 y (3.2), existen constantes positivas $C_{n,k}$ y $A_{n,\nu}$ (independientes de z), tales que

$$\left| G_{\nu,r,R,z}(w) \right| \leq C_{n,k} e^{\frac{2A_{n,\nu}}{R^{2\nu}-r^{2\nu}}}.$$

Entonces combinando (3.35) y (3.38), y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left| \pi(-1)^{n-1}(n-1)! \frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(z) + \pi \sum_{m=k+1}^{n-1} M_m r^{2(m-k)} \frac{f_m^{(m-k)}(z,z)}{(m-k)!} \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{D}_{r,R}} \left| f(w) G_{\nu,r,R,z}(w) \right| dw \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{D}_{r,R}} |f(w)|^2\, dw \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{D}_{r,R}} \left| G_{\nu,r,R,z}(w) \right|^2 dw \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\| \sqrt{\pi(R^2-r^2)}\, C_{n,k} e^{\frac{2A_{n,\nu}}{R^{2\nu}-r^{2\nu}}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $r \to 0$, se cumple la desigualdad

$$\left|\pi(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(z)\right| \leq \sqrt{\pi} R C_{n,k} e^{\frac{2A_{n,\nu}}{R^{2\nu}}} \|f\|.$$

□

Del Teorema anterior se desprenden inmediatamente los siguientes Corolarios.

Corolario 3.2.8. *Sea $z \in \Omega$, entonces el funcional evaluación $J_z : \mathcal{A}_n^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $J_z(f) = f(z)$, es acotado.*

En el siguiente Corolario, si no hay confusión con el núcleo reproductor, se utiliza K para subconjuntos compactos.

Corolario 3.2.9. *Sea K un subconjunto compacto de Ω y $0 \leq k \leq n-1$, entonces existe una constante positiva $C_{n,k,K}$ tal que*

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(z)\right| \leq C_{n,k,K}\|f\|, \qquad \forall\ z \in K \quad y \quad \forall\ f \in \mathcal{A}_n^2(\Omega).$$

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de Ω, y $d := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, la distancia de K a la frontera de Ω (en el caso $\Omega = \mathbb{C}$, $d := 1$). Sea $R = \dfrac{d}{2}$, entonces para todo $z \in K$ se cumple que $\overline{\mathbb{D}_R(z)} \subseteq \Omega$, y por el Teorema 3.2.7 se tiene

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial \overline{w}^k}(z)\right| \leq C_{n,k,K}\|f\| \qquad \forall\ z \in K \ \text{ y } \ \forall\ f \in \mathcal{A}_n^2(\Omega).$$

□

Corolario 3.2.10. *El espacio de Bergman polianalítico $\mathcal{A}_n^2(\Omega)$, es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, dz)$.*

Demostración. Sea $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_n^2(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Por el Teorema 3.1.2

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_{m,j}(z)\overline{z}^j,$$

donde $f_{m,0}, f_{m,1} \ldots f_{m,n-1}$ son funciones analíticas en Ω. Si $K \subset \Omega$ es compacto, aplicando el Corolario 3.2.9 con $k = n-1$, se tiene la estimación:

$$|f_{m,n-1}(z) - f_{m_1,n-1}(z)| \leq \frac{C_{n,k,K}}{(n-1)!}\|f_m - f_{m_1}\| \qquad \forall\ z \in K. \tag{3.39}$$

De (3.39) la sucesión $\{f_{m,n-1}\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente en cada conjunto compacto, por lo cual dicha sucesión converge a una función analítica f_{n-1} en Ω. Observe que

$$\frac{\partial^{n-2}(f_m(z) - f_{m_1}(z))}{\partial \overline{z}^{n-2}} = (n-2)![f_{m,n-2}(z) - f_{m_1,n-2}(z)] + (n-1)![f_{m,n-1}(z) - f_{m_1,n-1}(z)]\overline{z}.$$

Dado que la sucesión $\{\overline{z} f_{m,n-1}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en conjuntos compactos, y al utilizar el Corolario 3.2.9 con $k = n-2$, se tiene que la sucesión $\{f_{m,n-2}\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente en conjuntos compactos, por lo que dicha sucesión converge a una función analítica f_{n-2} en Ω.

De la misma forma, utilizando la identidad

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n-3}(f_m(z) - f_{m_1}(z))}{\partial \overline{w}^{n-3}} &= (n-3)![f_{m,n-3}(z) - f_{m_1,n-3}(z)] \\ &+ \frac{(n-2)!}{1!}[f_{m,n-2}(z) - f_{m_1,n-2}(z)]\overline{z} \\ &+ \frac{(n-1)!}{2!}[f_{m,n-1}(z) - f_{m_1,n-1}(z)]\overline{z}^2,\end{aligned}$$

y que las sucesiones de funciones $\{\overline{z} f_{m,n-2}(z)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\overline{z}^2 f_{m,n-1}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ convergen uniformemente en compactos, el Corolario 3.2.9 con $k = n-3$, implica que la sucesión $\{f_{m,n-3}\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente en compactos a una función analítica f_{n-3} en Ω. Siguiendo este mismo proceso se tiene que cada una de las sucesiones

$$\{f_{m,0}\}_{m=1}^{\infty}, \ \{f_{m,1}\}_{m=1}^{\infty}, \dots, \{f_{m,n-1}\}_{m=1}^{\infty}$$

converge uniformemente en conjuntos compactos a funciones $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ analíticas en Ω, respectivamente. Por lo tanto, puntualmente se cumple:

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_{m,j}(z)\overline{z}^j \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f_j(z)\overline{z}^j.$$

El resultado se sigue de la completez de $L^2(\mathbb{D}, dz)$. □

Los resultados anteriores implican en particular que el espacio de Hilbert $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, posee núcleo reproductor. En la Sección 3.6 se dá una forma explícita para tal núcleo.

3.3. Conjuntos ortonormales en $L^2(\mathbb{D}, dz)$

En esta sección se exhibe una colección de elementos ortonormales en $L^2(\mathbb{D}, dz)$, más aún, se probará que dicha colección es un conjunto completo en $L^2(\mathbb{D}, dz)$.

Por el Teorema 3.1.2, si $f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{D})$ (como ya se ha utilizado varias veces) existen f_k funciones analíticas (únicas) en $\mathbb{D}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, tales que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)\overline{z}^k.$$

Desarrollando cada f_k en serie de Taylor se tiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)\overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} z^j \overline{z}^k. \tag{3.40}$$

De la representación (3.40) para una función n-analítica, podría pensarse que al normalizar el conjunto

$$\left\{z^j\overline{z}^k \,:\, 0 \le k \le n-1,\ j \in \mathbb{N}_0\right\}, \tag{3.41}$$

se tendría una base ortonormal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, pero estas funciones no siempre son ortogonales. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\left\langle z^{j_1}\overline{z}^{k_1}, z^{j_2}\overline{z}^{k_2}\right\rangle &= \int_{\mathbb{C}} z^{j_1}\overline{z}^{k_1}\overline{z}^{j_2}z^{k_2}\,dz\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^{j_1+k_1+j_2+k_2}e^{(j_1-k_1-j_2+k_2)i\theta}r\,drd\theta\\ &= \int_0^1 r^{j_1+k_1+j_2+k_2+1}\,dr\int_0^{2\pi} e^{(j_1+k_2-(k_1+j_2))i\theta}\,d\theta,\end{aligned}$$

por lo cual si $j_1+k_2 = k_1+j_2$, $\langle z^{j_1}\overline{z}^{k_1}, z^{j_2}\overline{z}^{k_2}\rangle \neq 0$.

Al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt al conjunto (3.41) se obtendría una base ortonormal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, pero los cálculos para dicho proceso son complicados de manejar.

Cuando se encuentran los primeros vectores ortonormales (para mayor referencia puede consultarse [3]), se observa que son de la forma:

$$\sqrt{\frac{k+j}{\pi}}\frac{1}{(k-1+j)!}\frac{\partial^{k-1+j}}{\partial z^{k-1}\partial\overline{z}^j}\left\{(z\overline{z}-1)^{k-1+j}\right\}. \tag{3.42}$$

Utilizando la fórmula

$$\frac{d^m}{dx^m}x^j = \begin{cases} \dfrac{j!}{(j-m)!}x^{j-m} & \text{si } m \le j,\\ 0 & \text{si } m > j,\end{cases}$$

(3.42) se escribe como

$$\sqrt{\frac{k+j}{\pi}}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left\{(z\overline{z}-1)^{k-1}z^j\right\}. \tag{3.43}$$

Así, se demostrará de manera directa que el conjunto formado por los vectores de la forma (3.43), o su equivalente (3.42), son una base ortonormal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$.

En lo sucesivo se denota por Γ y B a las funciones clásicas Gama y Beta, respectivamente. Se recuerda que dichas funciones están dadas por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad x > 0, \tag{3.44}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \qquad x,\, y > 0, \tag{3.45}$$

y cumplen la ecuación funcional

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3.46}$$

Proposición 3.3.1. *Para $k \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}_0$ se define la función $h_{k,j}$ en $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$ como*

$$h_{k,j}(z) := \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(|z|^2 - 1)^{k-1} z^j\Big\}.$$

Entonces el conjunto $\big\{h_{k,j} \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\big\}$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{D}, dz)$. Además:

$$\|h_{k,j}\|^2 = \frac{\pi(k-1)!^2}{k+j}.$$

Demostración. Sean $(k, j), (k_1, j_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ dos parejas de índices. Por las propiedades de los operadores $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$,

$$\begin{aligned}\langle h_{k,j}, h_{k_1,j_1}\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j\Big\} \overline{\frac{\partial^{k_1-1}}{\partial z^{k_1-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k_1-1} z^{j_1}\Big\}}\, dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j\Big\} \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k_1-1} \overline{z}^{j_1}\Big\}\, dA(z). \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Sea $\mathbb{D}_R$ un disco con $R > 1$. Como $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}_R$, por el Teorema de Green (Corolario 1.3.8), la integral (3.47) es igual a:

$$\begin{aligned}&(-1)^{k-1} \int_{\mathbb{D}} (z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left\{ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k_1-1} \overline{z}^{j_1}\Big\} \right\} dA(z) \\ &- \frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k_1-1} \overline{z}^{j_1}\Big\} \underbrace{\frac{\partial^{k-m-2}}{\partial z^{k-m-2}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j\Big\}}_{(*)} d\overline{z}. \qquad (3.48)\end{aligned}$$

Se demuestra a continuación que cada uno de los sumandos de (3.48) son iguales a cero, lo cual en primera instancia es claro porque en las integrales de esta ecuación hay términos de la forma $|z|^2 - 1$. El único problema sería si hubiese términos constantes, lo que se verá es que esto no pasa.

Se hace el cálculo explícito en (3.48), pues dicho cálculo se utilizará más adelante. Al desarrollar $(*)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k-m-2}}{\partial z^{k-m-2}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j\Big\} &= \sum_{\nu=0}^{k-m-2} \binom{k-m-2}{\nu} \frac{\partial^{k-m-2-\nu}}{\partial z^{k-m-2-\nu}} (z\overline{z} - 1)^{k-1} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} z^j \\ &= \sum_{\nu=0}^{\min\{k_1-m-2, j\}} C_\nu (z\overline{z} - 1)^{m+\nu+1} \overline{z}^{k-m-2-\nu} z^{j-\nu}, \qquad (3.49)\end{aligned}$$

donde $C_\nu = \dbinom{k-m-2}{\nu} \dfrac{(k-1)!}{(m+\nu+1)!} \dfrac{j!}{(j-\nu)!}$. En esta última expresión se observa que la menor potencia del término $|z|^2 - 1$ es 1, y como dicho término se anula en $\partial\mathbb{D}$, entonces efectivamente, la suma de integrales en (3.48) es igual a cero. Así

$$\langle h_{k,j}, h_{k_1,j_1}\rangle = (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{D}} (z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left\{ \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k_1-1} \overline{z}^{j_1}\Big\} \right\} dz. \qquad (3.50)$$

Supóngase ahora que $(k, j) \neq (k_1, j_1)$. Si $k_1 \neq k$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $k_1 < k$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left\{\frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k_1-1}\overline{z}^{j_1}\Big\}\right\} &= \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k_1-1}\overline{z}^{j_1}\Big\}\right\}\\
&= \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \overline{z}^{k_1-1}}\left\{\overline{z}^{j_1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k_1-1}\Big\}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $k_1 \neq k$, implica que $\langle h_{k,j}, h_{k_1,j_1}\rangle = 0$.

Si ahora $k_1 = k$, se debe tener que $j \neq j_1$. De (3.50) se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle h_{k,j}, h_{k,j_1}\rangle &= (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{k-1}z^j\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^{j_1}\Big\}\right\}dz\\
&= (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{k-1}z^j\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big\{(k-1)!\overline{z}^{j_1+k-1}\Big\}dz\\
&= (k-1)!\frac{(j_1+k-1)!}{j_1!}\int_{\mathbb{D}}(1-z\overline{z})^{k-1}z^j\overline{z}^{j_1}\,dz\\
&= (k-1)!\frac{(j_1+k-1)!}{j_1!}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{k-1}r^{j+j_1+1}e^{(j-j_1)\theta}\,d\theta dr\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para finalizar, del cálculo anterior haciendo $u = r^2$ y utilizando (3.46)

$$\begin{aligned}
\langle h_{k,j}, h_{k,j}\rangle &= (k-1)!\frac{(j+k-1)!}{j!}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{k-1}r^{2j+1}\,d\theta dr\\
&= 2\pi(k-1)!\frac{(j+k-1)!}{j!}\frac{1}{2}\int_0^1(1-u)^{k-1}u^j\,du\\
&= \pi(k-1)!\frac{(j+k-1)!}{j!}B(j+1,k)\\
&= \frac{\pi(k-1)!^2}{k+j}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.2. *Para $k \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}_0$ se define la función $H_{k,j}$ en $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$ como*

$$H_{k,j}(z) := \frac{\partial^{k-1+j}}{\partial z^{k-1}\partial \overline{z}^j}\Big\{(|z|^2-1)^{k-1+j}\Big\}.$$

Entonces el conjunto $\Big\{H_{k,j} \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\Big\}$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{D}, dz)$. Además:

$$\|H_{k,j}\|^2 = \frac{\pi(k-1+j)!^2}{k+j}\,.$$

Demostración. Observese que

$$H_{k,j}(z) = \frac{(k-1+j)!}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}z^j\Big\} = \frac{(k-1+j)!}{(k-1)!}h_{k,j}(z),$$

por lo cual, por la Proposición 3.3.1 el conjunto

$$\Big\{H_{k,j} \,:\, k\in\mathbb{N},\; j\in\mathbb{N}_0\Big\}$$

es ortogonal en $L^2(\mathbb{D}, dz)$ y además:

$$\|H_{k,j}\|^2 = \frac{(k-1+j)!^2}{(k-1)!^2}\|h_{k,j}\|^2 = \frac{(k-1+j)!^2}{(k-1)!^2}\frac{\pi(k-1)!^2}{k+j} = \frac{\pi(k-1+j)!^2}{k+j}.$$

□

De este resultado se obtienen inmediatamente conjuntos ortonormales en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$.

Corolario 3.3.3. *El conjunto* $\{e_{k,j} : k = 1,2,\ldots,n,\ j\in\mathbb{N}_0\}$ *es ortonormal en* $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, *donde* $e_{k,j}$ *es la función* k*-analítica en* $\mathbb{D}$ *definida como:*

$$e_{k,j}(z) := \sqrt{\frac{k+j}{\pi}}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(|z|^2-1)^{k-1}z^j\Big\}.$$

Corolario 3.3.4. *El conjunto* $\{E_{k,j} : k = 1,2,\ldots,n,\ j\in\mathbb{N}_0\}$ *es ortonormal en* $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, *donde* $E_{k,j}$ *es la función* k*-analítica en* $\mathbb{D}$ *definida como:*

$$E_{k,j}(z) := \sqrt{\frac{k+j}{\pi}}\frac{1}{(k-1+j)!}\frac{\partial^{k-1+j}}{\partial z^{k-1}\partial\overline{z}^j}\Big\{(|z|^2-1)^{k-1+j}\Big\}.$$

3.4. Bases ortonormales de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

Dentro del espacio $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$ (en está Sección por conveniencia se usa k en vez de n) existe un subespacio cerrado particular, el cual es denotado por $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ y definido en (3.51). Como se podrá observar posteriormente, los elementos de estos subespacios son más manejables para fines de estimación, en particular se demostrará de una manera sencilla que el conjunto $\{e_{k,j} \,:\, j\in\mathbb{N}_0\}$ es una base de $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$. En el Capítulo 4 se verá que estos subespacios $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ coinciden con los subespacios *puros* $\mathcal{A}_{(k)}^2(\mathbb{D})$, mencionados en [20]. En la Sección siguiente se probará que el espacio $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$ se puede representar por medio de los espacios $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, y por lo cual se podrá exhibir una base de $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$.

Se define el subespacio $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, de $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$, de la siguiente manera

$$\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D}) := \left\{f \,:\, f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\Big\},\ F\in\mathcal{A}(\mathbb{D}),\ f\in\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})\right\}. \tag{3.51}$$

Esto es, los elementos del conjunto $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ son funciones en $\mathcal{A}_k^2(\mathbb{D})$ pero de la forma específica:

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\Big\}, \tag{3.52}$$

donde F es una función analítica en $\mathbb{D}$. En el siguiente Teorema se demuestra que es suficiente que $F \in L^2(\mathbb{D}, dz)$ para que la función $k-$analítica (3.52) esté en $L^2(\mathbb{D}, dz)$.

Teorema 3.4.1. *Sea $F \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, la función k-analítica*

$$f(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{k-1} F(z) \Big\}$$

pertenece al espacio $\mathcal{B}^2_k(\mathbb{D})$, si y sólo si $F \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Como F es analítica en $\mathbb{D}$, se tiene el desarrollo en serie de Taylor

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j.$$

Como la serie anterior converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{k-1} F(z) \Big\} &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \Big\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j \Big\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j (k-1)! \sqrt{\frac{\pi}{k+j}}\, e_{k,j}(z), \end{aligned} \tag{3.53}$$

donde $e_{k,j}$ es la función definida en el Corolario 3.3.3.

Suponga que $f \in \mathcal{B}^2_k(\mathbb{D})$. Por (3.53), el Corolario 3.3.3 y la desigualdad de Bessel:

$$\|f\|^2 \geq \pi (k-1)!^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b_j|^2}{k+j} \geq \pi (k-1)!^2 \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b_j|^2}{j+1}. \tag{3.54}$$

Como el conjunto $\{\sqrt{j+1} z^j\}_{j=0}^{\infty}$ es una base de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, por la identidad de Parseval se tiene:

$$\|F\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{\sqrt{j+1}} \sqrt{j+1} z^j \right\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b_j|^2}{j+1} < +\infty.$$

Por tanto $F \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Supóngase ahora que $F \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Por el Teorema 2.2.4, $(|z|^2 - 1)^\nu F^{(\nu)}(z) \in L^2(\mathbb{D})$ para toda $\nu \in \mathbb{N}_0$. Entonces de la igualdad

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big[(z\overline{z} - 1)^{k-1} F(z) \Big] \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} \frac{\partial^{k-1-\nu}}{\partial z^{k-1-\nu}} (z\overline{z} - 1)^{k-1} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} F(z) \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} \frac{(k-1)!}{\nu!} \overline{z}^{k-1-\nu} (|z|^2 - 1)^\nu F^{(\nu)}(z)\,, \end{aligned}$$

se sigue que $f \in L^2(\mathbb{D})$. $\square$

A continuación se demuestra que el subespacio $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ también es un espacio de Hilbert.

Teorema 3.4.2. *El espacio lineal $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, donde f_n es de la forma

$$f_n(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}F_n(z)\Big\}, \quad \text{y} \quad F_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,j} z^j.$$

Por ser $L^2(\mathbb{D}, dz)$ espacio de Hilbert, existe $f \in L^2(\mathbb{D}, dz)$ tal que $f_n \longrightarrow f$, y esto a su vez implica que existe $\{f_{n_m}\}$ subsucesión de $\{f_n\}$, que se denota simplemente por $\{g_m\}$, tal que $g_m \longrightarrow f$ en casi todo punto de $\mathbb{D}$, cuando $m \longrightarrow \infty$. Por la linealidad de $\dfrac{\partial}{\partial z}$, para $m, s \in \mathbb{N}$ se cumple

$$g_m(z) - g_s(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}\big[G_m(z) - G_s(z)\big]\Big\},$$

donde

$$G_m(z) = F_{n_m}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n_m,j} z^j \qquad \text{y} \qquad G_s(z) = F_{n_s}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{n_s,j} z^j.$$

Como $\{\sqrt{j+1}z^j\}_{j=0}^{\infty}$ es una base de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, por (3.54) se tiene la estimación:

$$\|g_m - g_s\|^2 \geq \pi(k-1)!^2 \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|b_{n_m,j} - b_{n_s,j}|^2}{j+1} = \pi(k-1)!^2 \frac{1}{k} \|G_m - G_s\|^2.$$

Esto quiere decir que $\{G_m\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, y al ser el espacio de Bergman cerrado, existe $F \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tal que $G_m \longrightarrow F$ en L^2. Además por (2.1) $G_m \longrightarrow F$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Entonces en casi todo punto de $\mathbb{D}$ se cumple

$$\begin{aligned} f(z) = \lim_{m\to\infty} g_m(z) &= \lim_{m\to\infty} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}G_m(z)\Big\} \\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\Big\}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $f \in \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$. □

En el Teorema 3.4.4 se dá una base de $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$. Para demostrar dicho resultado, será necesario el siguiente Lema.

Lema 3.4.3. *Sean $r \in (0,1)$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ con $\alpha \geq 1$. Si F es una función analítica en $\mathbb{D}$ se cumple que*

$$\int_{\partial\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^{\alpha} \overline{z}^{\beta} z^{\gamma} F(z)\, dz \longrightarrow 0, \tag{3.55}$$

y

$$\int_{\partial\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^{\alpha} \overline{z}^{\beta} z^{\gamma} F(z)\, d\overline{z} \longrightarrow 0, \tag{3.56}$$

cuando $r \to 1^-$.

Demostración. Aplicando los Corolarios 1.1.3 y 1.1.5 a la función analítica $G(z) = z^{\gamma+1}F(z)$ se tiene, respectivamente

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^\alpha \overline{z}^\beta z^\gamma F(z)\, dz &= \int_{\partial\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^\alpha \frac{\overline{z}^\beta}{z}\big(z^{\gamma+1}F(z)\big)\, dz \\
&= (r^2-1)^\alpha \int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{\overline{z}^\beta}{z} G(z)\, dz \\
&= (r^2-1)^\alpha \frac{r^{2\beta}G^{(\beta)}(0)}{\beta!}, \qquad (3.57)\\
\int_{\partial\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^\alpha \overline{z}^\beta z^\gamma F(z)\, d\overline{z} &= \int_{\partial\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^\alpha \frac{\overline{z}^\beta}{z}\big(z^{\gamma+1}F(z)\big)\, d\overline{z} \\
&= (r^2-1)^\alpha \int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{\overline{z}^\beta}{z} G(z)\, d\overline{z} \\
&= -(r^2-1)^\alpha \frac{r^{2(\beta+1)}G^{(\beta+2)}(0)}{(\beta+2)!}. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Como (3.57) y (3.58) tienden a cero cuando $r \to 1^-$, esto implica que (3.55) y (3.62) son válidas. □

Teorema 3.4.4. *Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{e_{k,j} : j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, donde $e_{k,j}$ es la función k-analítica en $\mathbb{D}$ definida como:*

$$e_{k,j}(z) := \sqrt{\frac{k+j}{\pi}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big[(z\overline{z}-1)^{k-1} z^j\Big].$$

Demostración. Por la Proposición 3.3.1 el conjunto $\{e_{k,j} : j \in \mathbb{N}_0\}$ es ortonormal. Se probará que tal conjunto es completo. Sea $h \in \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ tal que $\langle h, e_{k,j}\rangle = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$. Como h pertenece a $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, h es de la forma

$$h(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} F(z)\Big\}.$$

Igual que antes, se define la función $h_{k,j}$ en $\mathbb{D}$ como

$$h_{k,j}(z) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} z^j\Big\}.$$

Sea ahora $r \in (0,1)$, por el Teorema de Green (Corolario 1.3.9), la integral

$$\int_{\mathbb{D}_r} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} F(z)\Big\} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} \overline{z}^j\Big\} dA(z) \qquad (3.59)$$

es igual a la siguiente suma de integrales

$$(-1)^{k-1} \int_{\mathbb{D}_r} (z\overline{z}-1)^{k-1} F(z) \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} \overline{z}^j\Big\} \right\} dA(z) \qquad (3.60)$$

$$- \frac{1}{2i} \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \int_{\partial\mathbb{D}_r} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} \overline{z}^j\Big\} \frac{\partial^{k-m-2}}{\partial z^{k-m-2}} \Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1} F(z)\Big\} dz. \qquad (3.61)$$

Aplicando la Fórmula de Leibniz se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big\} &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big\}\\ &= \frac{(k-1)!}{(k-1-m)!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1-m}\overline{z}^{j+m}\Big\}\\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} C_\nu \frac{\partial^{k-1-\nu}}{\partial \overline{z}^{k-1-\nu}}(z\overline{z}-1)^{k-1-m}\frac{\partial^\nu}{\partial \overline{z}^\nu}\overline{z}^{j+m}, \qquad (3.62)\end{aligned}$$

donde $C_\nu = \dfrac{(k-1)!}{(k-1-m)!}\dbinom{k-1}{\nu}$, y también

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k-m-2}}{\partial z^{k-m-2}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\Big\} &= \sum_{\eta=0}^{k-m-2}\binom{k-m-2}{\eta}\frac{\partial^{k-m-2-\eta}}{\partial z^{k-m-2-\eta}}(z\overline{z}-1)^{k-1}\frac{\partial^\eta}{\partial z^\eta}F(z)\\ &= \sum_{\eta=0}^{k-m-2} M_\eta(z\overline{z}-1)^{m+\eta+1}F^{(\eta)}(z), \qquad (3.63)\end{aligned}$$

donde $M_\eta = \dbinom{k-m-2}{\eta}\dfrac{(k-1)!}{(m+\eta+1)!}$. Al sustituir (3.62) y (3.63) en (3.61), se obtiene una suma de integrales del tipo (3.55), y por el Lema 3.4.3, (3.61) tienden a cero cuando $r \to 1^-$. Así las integrales (3.59) y (3.60) son iguales en todo $\mathbb{D}$. Luego

$$\begin{aligned}\langle h, h_{k,j}\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big[(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\Big]\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big[(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big]dA(z)\\ &= (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big\}\right\}dA(z)\\ &= (-1)^{k-1}(k-1)!\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{k-1}F(z)\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\overline{z}^{k-1+j}\,dA(z)\\ &= (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{(k-1+j)!}{j!}\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^jF(z)\,dA(z).\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares se obtiene

$$\begin{aligned}\langle h, h_{k,j}\rangle &= (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{(k-1+j)!}{j!}\int_0^1\int_0^{2\pi}(r^2-1)^{k-1}(re^{-i\theta})^jF(re^{i\theta})r\,d\theta dr\\ &= (k-1)!\frac{(k-1+j)!}{j!}\int_0^1(1-r^2)^{k-1}r^{2j+1}\left(\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^{-j}F(re^{i\theta})\,d\theta\right)dr\\ &= (k-1)!\frac{(k-1+j)!}{j!}\frac{2\pi F^{(j)}(0)}{j!}\int_0^1(1-r^2)^{k-1}r^{2j+1}dr\\ &= (k-1)!\frac{(k-1+j)!}{j!}\frac{\pi F^{(j)}(0)}{j!}B(j+1,k).\end{aligned}$$

Como $\langle h, h_{k,j}\rangle = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$, $F^{(j)}(0) = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$, con lo cual $F = 0$, y de aquí que $h = 0$. $\square$

3.5. Descomposición ortogonal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

Como los espacios $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ están anidados (respecto a n), los espacios $\mathcal{B}_1^2(\mathbb{D}),\dots,\mathcal{B}_n^2(\mathbb{D})$ están contenidos en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. Lo que se demostrará a continuación es que $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es exactamente la suma de estos n espacios. Posteriormente se podrá probar que $L^2(\mathbb{D},dz)$ es la suma de todos estos espacios $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$.

Teorema 3.5.1. *Los subespacios $\{\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})\}_{k\in\mathbb{N}}$ son ortogonales a pares, y el espacio de Bergman polianalítico $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, es la suma directa de los primeros n de estos subespacios, es decir:*

$$\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}) = \mathcal{B}_1^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{B}_2^2(\mathbb{D}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n^2(\mathbb{D}).$$

Demostración. De los Teoremas 3.3.1 y 3.4.4 se sigue directamente que los subespacios $\{\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})\}_{k\in\mathbb{N}}$ son ortogonales a pares. Como los subespacios $\{\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})\}_{k=1}^n$ son cerrados y cada uno de ellos está contenido en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, entonces el espacio $\mathcal{B}_1^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{B}_2^2(\mathbb{D}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n^2(\mathbb{D})$ es cerrado y

$$\mathcal{B}_1^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{B}_2^2(\mathbb{D}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n^2(\mathbb{D}) \subseteq \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}).$$

El Teorema quedará demostrado si se prueba que la única función $\varphi \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ que es ortogonal a cada $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ con $k = 1,2,\dots,n$, es la función identicamente cero.

Supóngase que $\varphi \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ es una función ortogonal a los espacios $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, con $k = 1,2,\dots,n$, en particular si $h_{k,j}$ esta definida como antes, es decir,

$$h_{k,j} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(|z|^2-1)^{k-1}z^j\Big\},$$

se cumple que

$$\langle \varphi, h_{k,j}\rangle = 0 \qquad \forall\ j\in\mathbb{N}_0 \ \text{ y } \ \forall\ k = 1,2,\dots,n.$$

Sea $r\in\mathbb{R}$ con $0<r<1$, por el Teorema de Green,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_r} \varphi(z)\overline{h_{k,j}(z)}\,dA(z) &= \int_{\mathbb{D}_r} \varphi(z)\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big\{(|z|^2-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big\}dA(z)\\ &= (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{D}_r}(|z|^2-1)^{k-1}\overline{z}^j\frac{\partial^{k-1}}{\partial\overline{z}^{k-1}}\varphi(z)\,dA(z)\\ &+\frac{1}{2i}\sum_{m=0}^{k-2}(-1)^m\int_{\partial\mathbb{D}_r}\frac{\partial^m}{\partial\overline{z}^m}\varphi(z)\frac{\partial^{k-m-2}}{\partial\overline{z}^{k-m-2}}\Big\{(|z|^2-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big\}\,dz. \end{aligned}\tag{3.64}$$

Recuerde que por el Teorema 3.1.2, $\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(z)\overline{z}^\nu$, con $f_\nu \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, para $\nu = 1,2,\dots,n-1$, entonces, de acuerdo a la ecuación (3.28) se tiene

$$\frac{\partial^m}{\partial\overline{z}^m}\varphi(z) = \sum_{\nu=m}^{n-1}\frac{\nu!}{(\nu-m)!}f_\nu(z)\overline{z}^{\nu-m}.\tag{3.65}$$

Conjugando la ecuación (3.49), se cumple

$$\frac{\partial^{k-m-2}}{\partial \overline{z}^{k-m-2}}(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j = \sum_{\eta=0}^{\text{mín}\{k-m-2,j\}} C_\eta (z\overline{z}-1)^{m+\eta+1} z^{k-m-2-\eta}\overline{z}^{j-\eta}, \tag{3.66}$$

donde $C_\eta = \binom{k-m-2}{\eta}\frac{(k-1)!}{(m+\eta+1)!}\frac{j!}{(j-\eta)!}$. Al sustituir (3.65) y (3.66) en (3.64) se obtiene una suma de integrales del tipo (3.55), por lo cual (3.64) tiende a cero cuando $r \to 1^-$. Así

$$\int_{\mathbb{D}} \varphi(z)\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j\Big\}dA(z) = (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{k-1}\overline{z}^j\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{z}^{k-1}}\varphi(z)\,dA(z). \tag{3.67}$$

Tómese ahora $k = n$ en (3.67), aplicando coordenadas polares y la Fórmula integral de Cauchy, se tiene la igualdad

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, h_{n,j}\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(z)\frac{\partial^{n-1}}{\partial \overline{z}^{n-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{n-1}\overline{z}^j\Big\}dA(z)\\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\int_{\mathbb{D}}(z\overline{z}-1)^{n-1}\overline{z}^j f_{n-1}(z)\,dA(z)\\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\int_0^1\int_0^{2\pi}(r^2-1)^{n-1}(re^{-i\theta})^j f_{n-1}(re^{i\theta})\,r\,d\theta dr\\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\int_0^1 r^{2j+1}(r^2-1)^{n-1}\left[\int_0^{2\pi}(re^{i\theta})^{-j}f_{n-1}(re^{i\theta})\,d\theta\right]dr\\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\int_0^1 r^{2j+1}(r^2-1)^{n-1}\left[\frac{2\pi f_{n-1}^{(j)}(0)}{j!}\right]dr\\
&= (n-1)!\frac{\pi f_{n-1}^{(j)}(0)}{j!}B(j+1,n).
\end{aligned}$$

Como $\langle \varphi, h_{n,j}\rangle = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$, $f_{n-1}^{(j)}(0) = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$, y por lo cual $f_{n-1} = 0$. Se tiene por tanto

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{n-2} f_\nu(z)\overline{z}^\nu.$$

Haciendo ahora $k = n-2$ en (3.67), usando coordenadas polares y la Fórmula integral de Cauchy, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, h_{n-1,j} \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(z) \frac{\partial^{n-2}}{\partial \overline{z}^{n-2}} \Big\{ (z\overline{z}-1)^{n-2} \overline{z}^j \Big\} dA(z) \\
&= (-1)^{n-2}(n-2)! \int_{\mathbb{D}} (z\overline{z}-1)^{n-2} \overline{z}^j f_{n-2}(z)\, dA(z) \\
&= (-1)^{n-2}(n-2)! \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2-1)^{n-2} (re^{-i\theta})^j f_{n-2}(re^{i\theta})\, r\, d\theta dr \\
&= (-1)^{n-2}(n-2)! \int_0^1 r^{2j+1}(r^2-1)^{n-2} \left[\int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{-j} f_{n-2}(re^{i\theta})\, d\theta \right] dr \\
&= (-1)^{n-2}(n-2)! \int_0^1 r^{2j+1}(r^2-1)^{n-2} \left[\frac{2\pi f_{n-2}^{(j)}(0)}{j!} \right] dr \\
&= (n-2)! \frac{\pi f_{n-2}^{(j)}(0)}{j!} B(j+1, n-1),
\end{aligned}$$

de aquí, como $\langle \varphi, h_{n-1,j} \rangle = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$, $f_{n-2}^{(j)}(0) = 0$ para toda $j \in \mathbb{N}_0$, y por lo tanto $f_{n-2} = 0$. Siguiendo este procedimiento, se concluye que $f_{n-1} = 0, f_{n-2} = 0, \ldots, f_0 = 0$, y por tanto $\varphi = 0$. □

Para finalizar esta sección, se exhibe una base para el espacio de Bergman polianalítico $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. Dicho resultado es una consecuencia directa del Teorema anterior y de la descomposición de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ (Teorema 3.5.1).

Corolario 3.5.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{e_{k,j} : j \in \mathbb{N}_0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, donde $e_{k,j}$ es la función k-analítica en $\mathbb{D}$ definida como:*

$$e_{k,j}(z) := \sqrt{\frac{k+j}{\pi}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (|z|^2 - 1)^{k-1} z^j \Big\}.$$

3.6. El núcleo reproductor de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

Por el Corolario 3.2.8 se tiene que el funcional evaluación definido en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, es acotado. Por el Teorema 1.4.3 el espacio de Bergman polianalítico $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, tiene núcleo reproductor, el cual denotamos por K_n. Del Corolario 1.4.4 los subespacios $\mathcal{B}_1^2(\mathbb{D}), \ldots, \mathcal{B}_n^2(\mathbb{D})$ de $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ también tienen núcleo reproductor K_k^0. La Proposición 1.4.5 da la representación de K_k^0 en términos de la base de $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$. Utilizando la base dada en el Teorema 3.4.4 se tiene pues la representación:

$$\begin{aligned}
K_k^0(z,w) &= \sum_{j=0}^{\infty} e_{k,j}(z)\overline{e_{k,j}(w)} \\
&= \frac{1}{(k-1)!^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k+j}{\pi}\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}z^j\Big\}\frac{\partial^{k-1}}{\partial \overline{w}^{k-1}}\Big\{(w\overline{w}-1)^{k-1}\overline{w}^j\Big\} \\
&= \frac{1}{\pi(k-1)!^2}\frac{\partial^{2(k-1)}}{\partial z^{k-1}\partial \overline{w}^{k-1}}\Big\{(z\overline{z}-1)^{k-1}(w\overline{w}-1)^{k-1}\sum_{j=0}^{\infty}(k+j)(z\overline{w})^j\Big\} \\
&= \frac{1}{\pi(k-1)!^2}\frac{\partial^{2(k-1)}}{\partial z^{k-1}\partial \overline{w}^{k-1}}\left\{(z\overline{z}-1)^{k-1}(w\overline{w}-1)^{k-1}\Big\{\frac{k}{1-z\overline{w}}+\frac{z\overline{w}}{(1-z\overline{w})^2}\Big\}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi(k-1)!^2}\frac{\partial^{2(k-1)}}{\partial z^{k-1}\partial \overline{w}^{k-1}}\left\{(z\overline{z}-1)^{k-1}(w\overline{w}-1)^{k-1}\frac{(k-1)(1-z\overline{w})+1}{(1-z\overline{w})^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.5.1, la representación de K_n es:

$$K_n(z,w) = \sum_{k=1}^{n} K_k^0(z,w) \qquad z,\ w\in\mathbb{D}. \tag{3.68}$$

Apesar de que en (3.68) se tiene una forma más reducida de K_n, no se tiene todavía una expresión manejable de K_n para fines de estimación (el problema son las derivadas $\partial^{2(k-1)}/\partial z^{k-1}\partial\overline{w}^{k-1}$). En [3] se obtiene la siguiente representación del núcleo K_n,

$$K_n(z,w) = \frac{n}{\pi(1-\overline{w}z)^{2n}}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n}|1-\overline{w}z|^{2(n-1-j)}|z-w|^{2j}. \tag{3.69}$$

Observe que si φ_z es el automorfismo del disco definido en (1.7), es decir,

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w} \qquad w\in\mathbb{D},$$

se tiene la siguiente expresión equivalente de K_n:

$$K_n(z,w) = \frac{n|1-\overline{w}z|^{2(n-1)}}{\pi(1-\overline{w}z)^{2n}}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n}|\varphi_z(w)|^{2j}. \tag{3.70}$$

Como se menciona en dicho artículo, no se busca reducir la ecuación (3.68) a la forma (3.70), más bien, lo que se hace es mostrar que dicha expresión es un núcleo reproductor, y por la unicidad (Teorema 1.4.2) se tendrá la igualdad.

El siguiente Lema, es la clave para verificar la propiedad de reproducción.

Lema 3.6.1. *Sea $n\in\mathbb{N}$, entonces:*

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{m+j}\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & si\ \ m=1, \\ 0 & si\ \ m=2,3,\dots,n. \end{cases}$$

Demostración. De la igualdad

$$x^{n-1}(1-x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j x^{n+j-1},$$

se tiene

$$\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!} x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} \frac{(n+j)!}{j!} x^j,$$

por lo cual, para $m \in \mathbb{N}$ se satisface

$$x^{m-1}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} \frac{(n+j)!}{j!} x^{m+j-1}.$$

Integrando ahora de 0 a 1 se tiene

$$\int_0^1 x^{m-1}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n)} dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} \frac{(n+j)!}{j!} \int_0^1 x^{m+j-1}\, dx \quad (3.71)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} \frac{(n+j)!}{j!} \frac{1}{m+j}$$

$$= n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{m+j} \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n}. \quad (3.72)$$

Ahora, si $m = 1$, utilizando la Fórmula de Leibniz, la integral del lado izquierdo de (3.71) cumple

$$\int_0^1 \left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n)} dx = \left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n-1)} \Big|_0^1 = -(n-1)!.$$

Así, de la igualdad (3.72), en el caso cuando $m = 1$ se cumple

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{m+j} \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} = \frac{1}{n}. \quad (3.73)$$

Supóngase ahora que $m = 2, 3, \ldots, n$. Utilizando integración por partes y la Fórmula de Leibniz, la integral del lado izquierdo de (3.71) cumple

$$\int_0^1 x^{m-1}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n)} dx = x^{m-1}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n-1)} \Big|_0^1$$

$$- (m-1) \int_0^1 x^{m-2}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n-1)} dx$$

$$= -(m-1) \int_0^1 x^{m-2}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n-1)} dx.$$

Repitiendo este proceso y utilizando que $n-m \leq n-2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{m-1}\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n)}dx &= (-1)^{m-1}(m-1)!\int_0^1 \left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n-m+1)}dx \\
&= (-1)^{m-1}(m-1)!\left\{x^{n-1}(1-x)^n\right\}^{(n-m)}\Big|_0^1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, de la igualdad (3.72), en el caso cuando $m = 2, 3, \ldots, n$, se cumple

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{m+j}\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n} = 0. \tag{3.74}$$

De (3.73) y (3.74) se tiene el resultado $\square$

Proposición 3.6.2. *Sea $K' : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función dada por*

$$K'(z,w) = \frac{n}{\pi(1-\overline{w}z)^{2n}}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n}|1-\overline{w}z|^{2(n-1-j)}|z-w|^{2j},$$

entonces, K' cumple las propiedades de núcleo reproductor para $\mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$, es decir, K' satisface lo siguiente:

(i) Para toda $w \in \mathbb{D}$ fijo, $K'_w(\cdot) := K'(\,\cdot, w)$ pertenece a $\mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$.

(ii) Para toda $z \in \mathbb{D}$ y toda $f \in \mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$,

$$f(z) = \langle f, K'_z\rangle.$$

Demostración. (i) Sea $w \in \mathbb{D}$ fijo, es claro que K'_w es una función continua y acotada en $\overline{\mathbb{D}}$, por lo cual $K'_w \in L^2(\mathbb{D}, dz)$. Observe que K'_w se puede representar de la forma

$$\begin{aligned}
K'_w(z) &= \frac{n}{\pi(1-\overline{w}z)^{2n}}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n}|1-\overline{w}z|^{2(n-1-j)}|z-w|^{2j} \\
&= \frac{n}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n}\frac{(1-\overline{w}z)^{n-1-j}(z-w)^j}{(1-\overline{w}z)^{2n}}(1-w\overline{z})^{n-1-j}(\overline{z}-\overline{w})^j,
\end{aligned}$$

donde $\dfrac{(1-\overline{w}z)^{n-1-j}(z-w)^j}{(1-\overline{w}z)^{2n}}$ es una función analítica en $\mathbb{D}$ y $(1-w\overline{z})^{n-1-j}(\overline{z}-\overline{w})^j$ es un polinomio en $\overline{z}$ de grado $n-1$, esto quiere decir que $K'_w(\cdot) \in \mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$.

(ii) Primero se demuestra la igualdad cuando $z = 0$. Sea $f \in \mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$, entonces por el Teorema 3.1.2, $f(w) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(w)\overline{w}^\nu$, donde las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ son analíticas en

$\mathbb{D}$. De esta representación y la simetría de K' se tiene

$$\begin{aligned}\langle f, K_0' \rangle &= \int_{\mathbb{D}} f(w) K'(0,w)\, dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(w) \overline{w}^\nu \right] \left[\frac{n}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} |w|^{2j} \right] dA(w) \\ &= \frac{n}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} \int_{\mathbb{D}} f_\nu(w) \overline{w}^\nu |w|^{2j}\, dA(w). \end{aligned} \tag{3.75}$$

Utilizando coordenadas polares y la Fórmula integral de Cauchy se cumple

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f_\nu(w) \overline{w}^\nu |z|^{2j}\, dA(w) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2j} \left(re^{-i\theta}\right)^\nu f_\nu\left(re^{i\theta}\right) r\, d\theta dr \\ &= \int_0^1 r^{2j+2\nu+1} \left[\int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^{-\nu} f_\nu\left(re^{i\theta}\right) d\theta \right] dr \\ &= \frac{2\pi f_\nu^{(\nu)}(0)}{\nu!} \int_0^1 r^{2j+2\nu+1}\, dr \\ &= \frac{\pi f_\nu^{(\nu)}(0)}{\nu!(j+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Al sustituir esto en (3.75) y utilizando el Lema 3.6.1 se tiene

$$\begin{aligned}\langle f, K_0' \rangle &= \frac{n}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} \int_{\mathbb{D}} f_\nu(w) \overline{w}^\nu |w|^{2j}\, dA(w) \\ &= \frac{n}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} \frac{\pi f_\nu^{(\nu)}(0)}{\nu!(j+\nu+1)} \\ &= n \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f_\nu^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+\nu+1} \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} \\ &= n f_0(0) \frac{1}{n} = f(0). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$f(0) = \langle f, K_0' \rangle.$$

Sea ahora $z \in \mathbb{D}$ arbitrario, y considerese la función $g_z : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$g_z(w) := \frac{1}{(1-\overline{z}w)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(\varphi_z(w)) (\overline{z} - \overline{w})^\nu (1 - z\overline{w})^{n-1-\nu},$$

donde φ_z es el automorfismo del disco definido en (1.7). Como las funciones $f_\nu(\varphi_z(w))$ son analíticas en $\mathbb{D}$, los factores $(\overline{z} - \overline{w})^\nu (1 - z\overline{w})^{n-1-\nu}$ son polinomios en $\overline{w}$ de grado $n-1$, y como la función $\dfrac{1}{(1-\overline{z}w)^{n+1}}$ es acotada en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces utilizando el Teorema de cambio de variable se cumple que $g_z \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. Observe también que $g_z(0) = f(z)$. Denótese ahora $C_j = (-1)^j \binom{n}{j+1}\binom{n+j}{n}$, entonces utilizando el caso anterior:

$$\begin{aligned}
g(0) &= \int_{\mathbb{D}} g(w)K'(0,w)\,dA(w)\\
&= \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{1}{(1-\overline{z}w)^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(\varphi_z(w))(\overline{z}-\overline{w})^\nu(1-z\overline{w})^{n-1-\nu}\right]\left[\frac{n}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}C_j|w|^{2j}\right]dA(w).
\end{aligned}$$

Observe ahora que

$$1-\overline{z}\varphi_z(w) = \frac{1-|z|^2}{1-\overline{z}w}, \quad \overline{z}-\overline{\varphi_z(w)} = \frac{\overline{w}(1-|z|^2)}{1-z\overline{w}}, \quad \text{y} \quad 1-z\overline{\varphi_z(w)} = \frac{1-|z|^2}{1-z\overline{w}}.$$

Entonces, utilizando el Teorema de cambio de variable con $w = \varphi_z$ (recuerde que el Jacobiano real de φ_z es $\dfrac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}$), se cumple la igualdad

$$\begin{aligned}
g(0) &= \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{1}{(1-\overline{z}w)^{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(\varphi_z(w))(\overline{z}-\overline{w})^\nu(1-z\overline{w})^{n-1-\nu}\right]\left[\frac{n}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}C_j|w|^{2j}\right]dA(w)\\
&= \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(w)\frac{(1-\overline{z}w)^{n+1}\overline{w}^\nu(1-|z|^2)^{n-1}}{(1-|z|^2)^{n+1}(1-z\overline{w})^{n-1}}\right]\left[\frac{n}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}C_j|\varphi_z(w)|^{2j}\right]\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\,dA(w)\\
&= \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(w)\overline{w}^\nu\right]\left[\frac{n(1-\overline{z}w)^{n-1}}{\pi(1-z\overline{w})^{n+1}}\sum_{j=0}^{n-1}C_j|\varphi_z(w)|^{2j}\right]dA(w)\\
&= \int_{\mathbb{D}} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(w)\overline{w}^\nu\right]\left[\frac{n|1-\overline{w}z|^{2(n-1)}}{\pi(1-\overline{w}z)^{2n}}\sum_{j=0}^{n-1}C_j|\varphi_z(w)|^{2j}\right]dA(w).
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$f(z) = \langle f, K'_z\rangle, \qquad \forall\ z\in\mathbb{D},\ \ \forall\ f\in\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}).$$

□

3.7. Descomposición ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dz)$

El objetivo de esta sección es demostrar que el espacio de funciones $L^2(\mathbb{D}, dz)$ (aquí dz es la medida de Lebesgue de área usual) se puede descomponer en una suma directa de los espacios polianalíticos $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$. Más generalmente, se dá una descomposición ortogonal de $L^2\big(\mathbb{D}_R(z_0), dz\big)$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y R es un número positivo. Se recuerda que, por el

Corolario 3.5.2 el conjunto $\{e_{k,j} \ : \ j \in \mathbb{N}_0, \ k = 1, 2, \dots, n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$, donde $e_{k,j}$ es la función k-analítica en $\mathbb{D}$ definida como:

$$e_{k,j}(z) = \sqrt{\frac{k+j}{\pi}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j \Big\}. \tag{3.76}$$

Al aplicar la Fórmula de Leibniz al lado derecho de (3.76), se tiene una expresión de $e_{k,j}$ como combinación lineal de elementos del conjunto $\{\overline{z}^k z^j \ : \ k = 0, \dots, n-1, \ j \in \mathbb{N}_0\}$, pues:

$$\begin{aligned} e_{k,j}(z) &= \sqrt{\frac{k+j}{\pi}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big\{ (z\overline{z} - 1)^{k-1} z^j \Big\} \\ &= \sqrt{\frac{k+j}{\pi}} \sum_{\nu = \text{máx}\{0, k-1-j\}}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} \binom{j}{k-1-\nu} (z\overline{z} - 1)^{k-1-\nu} \overline{z}^{\nu} z^{j-k+1+\nu}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Se define $\mathcal{P}_n$ como el espacio generado por $\{\overline{z}^k z^j \ : \ k = 0, \dots, n-1, \ j \in \mathbb{N}_0\}$, es decir

$$\mathcal{P}_n := \text{ span}\{\overline{z}^k z^j \ : \ k = 0, \dots, n-1, \ j \in \mathbb{N}_0\}.$$

De la ecuación (3.77) se siguen las inclusiones

$$\text{span}\{e_{k,j} \ : \ j \in \mathbb{N}_0, \ k = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathcal{P}_n \subset \mathcal{A}^2_n(\mathbb{D}),$$

por lo cual $\overline{\mathcal{P}_n} = \mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$. Esto quiere decir que el espacio $\mathcal{P}_n$ es denso en $\mathcal{A}^2_n(\mathbb{D})$.

Para el siguiente Lema se utiliza el Teorema de Stone-Weierstrass, por tal motivo es enunciado a continuación.

Teorema 3.7.1 (Stone-Weierstrass). *Sea X un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Sea $F \subseteq C(X, \mathbb{C})$ una subálgebra autoadjunta que contiene a las funciones constantes y separa puntos. Entonces F es uniformemente densa en $C(X, \mathbb{C})$, es decir,*

$$\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C(X, \mathbb{C}).$$

En el Lema siguiente se utiliza por simplicidad la notación $g_{k,j}(z) := \overline{z}^k z^j$, para cada $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Lema 3.7.2. *Sea $F_{\overline{\mathbb{D}}}$ y $F_{\mathbb{D}}$ las subálgebras de $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ y $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ respectivamente definidas por*

$$\begin{aligned} F_{\overline{\mathbb{D}}} &:= \text{ span}\{g_{k,j} : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ k, j \in \mathbb{N}_0\}, \\ F_{\mathbb{D}} &:= \text{ span}\{g_{k,j} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ k, j \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Entonces se cumple que

$$\overline{F_{\overline{\mathbb{D}}}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\overline{\mathbb{D}}, dz) \qquad y \qquad \overline{F_{\mathbb{D}}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\mathbb{D}, dz).$$

Esto es, las álgebras $F_{\overline{\mathbb{D}}}$ y $F_{\mathbb{D}}$ son densas en $L^2(\overline{\mathbb{D}}, dz)$ y $L^2(\mathbb{D}, dz)$, respectivamente, con la norma $\| \cdot \|_2$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $f \in L^2(\overline{\mathbb{D}}, dz)$. Como $\overline{C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\overline{\mathbb{D}}, dz)$, existe $h \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ tal que

$$\|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.78}$$

Del Teorema de Stone-Weierstrass al tomar $X = \overline{\mathbb{D}}$ y $F = F_{\overline{\mathbb{D}}}$ se tiene que $\overline{F_{\overline{\mathbb{D}}}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$. Entonces, para esta $h \in C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ existe $g \in F_{\overline{\mathbb{D}}}$ tal que

$$|h(z) - g(z)| \leq \|h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}, \qquad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Luego, de la desigualdad anterior se obtiene

$$\|h - g\|_2 = \left\{ \int_{\overline{\mathbb{D}}} |h(z) - g(z)|^2 \, dA(z) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\pi}\|h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.79}$$

Por lo cual, de las ecuaciones (3.78) y (3.79) se cumple que

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Esto quiere decir que $\overline{F_{\overline{\mathbb{D}}}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\overline{\mathbb{D}}, dz)$. Si ahora $f \in L^2(\mathbb{D}, dz)$, entonces f se puede definir como cero en la frontera de $\overline{\mathbb{D}}$, para obtener una función f_0 en $L^2(\overline{\mathbb{D}})$. Por lo hecho anteriormente, existe $g_0 \in F_{\overline{\mathbb{D}}}$ tal que

$$\|f_0 - g_0\|_2 < \varepsilon.$$

Si g es la restricción de g_0 en $\mathbb{D}$, entonces $g \in C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ y

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\overline{F_{\mathbb{D}}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\mathbb{D}, dz)$. $\square$

Si $g \in F_{\mathbb{D}}$, entonces existe un subconjunto finito A de $\mathbb{N}_0^2$ tal que

$$g(z) = \sum_{(k,j) \in A} C_{k,j} g_{k,j}(z).$$

Si k_0 es la potencia mayor de los monomios $g_{k,j}(z) = \overline{z}^k z^j$, entonces g pertenece a $\mathcal{A}^2_{k_0}(\mathbb{D})$, y por lo cual g se puede aproximar con la norma $\|\cdot\|_2$ con elementos de la base de $\mathcal{A}^2_{k_0}(\mathbb{D})$. Esto quiere decir que

$$\operatorname{span}\{\overline{z}^k z^j \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\} \subset \overline{\operatorname{span}\{e_{k,j} \,:\, j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}\}}.$$

Por el Lemma 3.7.2 y la contensión anterior se cumple la igualdad:

$$\overline{\operatorname{span}\{e_{k,j} \,:\, j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}\}} = L^2(\mathbb{D}). \tag{3.80}$$

Se enuncia a continuación el Teorema principal de esta Sección.

Teorema 3.7.3. *Sean $\mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ los subespacios del espacio de Bergman polianalítico definidos en (3.51). Entonces el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, dz)$, donde dz representa la medida de Lebesgue de área usual, admite la siguiente descomposición ortogonal:*

$$L^2(\mathbb{D}, dz) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D}).$$

Demostración. Si $f \in \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, entonces $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, donde cada $f_k \in \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$, y

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 < +\infty.$$

Esto quiere decir que

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D}) \subseteq L^2(\mathbb{D}, dz). \tag{3.81}$$

Para la otra contensión observe que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{span}\{e_{m,j} \,:\, j \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{B}_m^2(\mathbb{D}) \subset \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D}),$$

luego, como $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D})$ es un espacio cerrado

$$\overline{\operatorname{span}\{e_{m,j} \,:\, j \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N}\}} \subseteq \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D}). \tag{3.82}$$

De (3.81), (3.82) y (3.80) se obtiene el resultado. □

Se concluye esta sección enunciando una descomposición ortogonal de los espacios $\mathcal{A}_n^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big)$ y $L^2\big(\mathbb{D}_R(z), dw\big)$.

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. La función compleja $g : \mathbb{D}_R(z) \longrightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$g(w) = \frac{w - z}{R}, \qquad w \in \mathbb{D}_R(z),$$

es un biolomorfismo entre $\mathbb{D}_R(z)$ y $\mathbb{D}$. Si $f \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, entonces por el Teorema 3.1.1 existen funciones analíticas (en $\mathbb{D}$) $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, tales que

$$f(w) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(w)\overline{w}^j, \qquad w \in \mathbb{D}.$$

De esto, la función $f \circ g : \mathbb{D}_R(z) \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene la siguiente expresión:

$$\big(f \circ g\big)(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \big(f_j \circ g\big)(w) \frac{(\overline{w} - \overline{z})^j}{R^j}, \qquad w \in \mathbb{D}_R(z),$$

donde las funciones $f_j \circ g$ son analíticas en $\mathbb{D}_R(z)$ y $(\overline{w} - \overline{z})^j$ es un polinomio en $\overline{w}$ de grado a lo más $n-1$. De esto se sigue que $f \circ g \in \mathcal{A}_n^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big)$. Esto implica en particular que el conjunto $\{(e_{k,j} \circ g)g' \,:\, j \in \mathbb{N}_0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ está contenido en $\mathcal{A}_n^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big)$.

Proposición 3.7.4. *Sea* $\{e_{k,j} \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\}$ *la base ortonormal de* $L^2(\mathbb{D}, dz)$ *dada por (3.76). Entonces el conjunto* $\{(e_{k,j} \circ g)g' \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\}$ *es una base ortonormal de* $L^2\big(\mathbb{D}_R(z), dw\big)$.

Demostración. De (2.3) se tiene que el determinante del Jacobiano real de g es $|g'|^2$. Para simplificar los cálculos, se define $E_{k,j} := (e_{k,j} \circ g)g'$. Aplicando el Teorema de cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}\langle E_{k,j}, E_{k_1,j_1}\rangle &= \int_{\mathbb{D}_R(z)} e_{k,j}\big(g(w)\big)\overline{e_{k_1,j_1}\big(g(w)\big)}|g'(w)|^2\, dw \\ &= \int_{\mathbb{D}} e_{k,j}(w)\overline{e_{k_1,j_1}(w)}\, dw = \langle e_{k,j}, e_{k_1,j_1}\rangle,\end{aligned}$$

por lo cual, $\{E_{k,j} \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\}$ es un conjunto ortonormal de $L^2\big(\mathbb{D}_R(z), dw\big)$. Se demuestra a continuación que este conjunto es completo. Primero, si $h \in L^2\big(\mathbb{D}_R(z), dw\big)$ y $f = g^{-1}$, por el Teorema de cambio de variable

$$\int_{\mathbb{D}_R(z)} |h(w)|^2\, dw = \int_{f(\mathbb{D})} |h(w)|^2\, dw = \int_{\mathbb{D}} |(h \circ f)(w)|^2 |f'(w)|^2\, dw.$$

esto implica que $(h \circ f)f' \in L^2(\mathbb{D}, dz)$. Utilizando nuevamente el Teorema de cambio de variable y la regla de la cadena, si $h \in L^2\big(\mathbb{D}_R(z), dw\big)$ se cumple

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}_R(z)} h(w)\overline{E_{k,j}(w)}\, dw &= \int_{\mathbb{D}_R(z)} h(w)\overline{e_{k,j}\big(g(w)\big)g'(w)}\, dw \\ &= \int_{\mathbb{D}} (h \circ f)(w)\overline{e_{k,j}\big((g \circ f)(w)\big)(g' \circ f)(w)}|f'(w)|^2\, dw \\ &= \int_{\mathbb{D}} (h \circ f)(w)\overline{e_{k,j}(w)} \cdot \overline{(g \circ f)'(w)} f'(w)\, dw \\ &= \int_{\mathbb{D}} (h \circ f)(w) f'(w)\overline{e_{k,j}(w)}\, dw\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\langle h, E_{k,j}\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_0$, por la igualdad anterior y por ser el conjunto $\{e_{k,j} \,:\, k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0\}$ completo, se debe tener que $(h \circ f)(w)f'(w) = 0$ para toda $w \in \mathbb{D}$. Como $f' \neq 0$ entonces $h(f(z)) = 0$ para toda $w \in \mathbb{D}$, y esto implica que $h(w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{D}_R(z)$. □

De manera análoga a la demostración anterior, se puede probar la siguiente Proposición para el espacio $\mathcal{A}_n^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big)$.

Proposición 3.7.5. *Sea* $\{e_{k,j} \,:\, k = 1, \ldots, n,\, j \in \mathbb{N}_0\}$ *la base ortonormal de* $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ *dada por (3.76). Entonces el conjunto* $\{e_{k,j} \circ g \cdot g' \,:\, k = 1, \ldots, n,\, j \in \mathbb{N}_0\}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{A}_n^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big)$.

En particular, si se define

$$\mathcal{B}_k^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big) := \operatorname{span}\{(e_{k,j} \circ g)g' \,:\, j \in \mathbb{N}_0\}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

por las dos Proposiciones anteriores, se tienen las siguientes descomposiciones ortogonales:

Teorema 3.7.6. *Sean $z \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Si $\mathbb{D}$ es el disco unitario y $\mathbb{D}_R(z)$ es el disco con centro en z y radio R, entonces se cumplen las siguientes descomposiciones ortogonales:*

$$\mathcal{A}_n^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big), \qquad L^2\big(\mathbb{D}_R(z), dw\big) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k^2\big(\mathbb{D}_R(z)\big).$$

Capítulo 4

Proyecciones en el espacio de Bergman polianalítico $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{C}$. Se inicia este Capítulo con un análisis de los operadores integrales singulares T_Ω y T_Ω^*, los cuales están dados por las ecuaciones (4.6) y (4.7) respectivamente. Posteriormente, se hace un estudio de los operadores S_Ω, S_Ω^*, y su relación con T_Ω. Al ser los espacios $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ y $\widetilde{\mathcal{A}}_n^2(\mathbb{D})$ (este último representa el espacio anti-poli-Bergman) cerrados, existe la proyección ortogonal sobre estos. Tales operadores se representan, respectivamente, por $B_{\Omega,n}$ y $\widetilde{B}_{\Omega,n}$. A $B_{\Omega,n}$ y $\widetilde{B}_{\Omega,n}$ se les llaman las proyecciones poli-Bergman y anti-poli-Bergman, respectivamente. Estas proyecciones, en el caso del disco unitario, tienen relación directa con potencias de los operadores S_Ω y S_Ω^*. Al final del Capítulo, se dá una descomposición ortogonal del espacio $L^2(\Omega, dz)$.

A lo largo de este Capítulo, siguiendo la notación de Pessoa y Karlovich, $dA(z)$ y dz representarán la medida de Lebesgue de área y longitud usual, respectivamente.

4.1. Los operadores singulares $T_\Omega, T_\Omega^*, S_\Omega$ y S_Ω^*

En este Capítulo se utiliza la siguiente variante del Teorema de Green. Para una demostración puede consultarse [6].

Teorema 4.1.1. *Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo, tal que Ω es unión de conjuntos regulares. Si f es una función compleja que pertenece a $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, entonces:*

$$\int_\Omega \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\, dA(z) = \frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz \tag{4.1}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial f(z)}{\partial z}\, dA(z) = -\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} f(z)\, d\overline{z} \tag{4.2}$$

Una consecuencia de este resultado es la Fórmula de *Cauchy-Pompeiu*, la cuál es una versión más general que la Fórmula integral de Cauchy.

Proposición 4.1.2 (Fórmula de Cauchy-Pompeiu). *Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo, tal que Ω es unión de conjuntos regulares. Sea f una función compleja* *tal que* $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Si* $z \in \Omega$, *y* $\partial\Omega$ *está orientada en sentido positivo, entonces:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\partial f(w)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z}\, dA(w) \tag{4.3}$$

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{\overline{w}-\overline{z}}\, d\overline{w} - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{\partial f(w)}{\partial w} \frac{1}{\overline{w}-\overline{z}}\, dA(w) \tag{4.4}$$

Demostración. Sean $z \in \Omega$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que $\overline{\mathbb{D}_{\varepsilon_0}(z)} \subset \Omega$. Por simplicidad, se denota $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \mathbb{D}_\varepsilon(z)$. Por el Teorema de Green, para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial f(w)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z}\, dA(w) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \overline{w}}\left[\frac{f(w)}{w-z}\right] dA(w) \\ &= \frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2i}\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora, como la función f es acotada en $\overline{\mathbb{D}_{\varepsilon_0}(z)}$, utilizando la parametrización natural $w = z + \varepsilon e^{i\theta}$ y el Teorema de Convergencia dominada se obtiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2i}\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(z)\, d\theta = \pi f(z).$$

Por lo tanto, si $\varepsilon \to 0$ en la ecuación (4.5), se cumple la igualdad:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(w)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z}\, dA(w) = \frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \pi f(z).$$

La ecuación (4.4) se obtiene aplicando (4.3) a $\overline{f}$, utilizando (1.13) y (1.3). $\square$

Muchos de los resultados aquí expuestos, para fines prácticos, se analizan sólo en ciertos subconjuntos densos, y después se extienden de manera continua en todo el espacio completo. En particular se utiliza que los subespacios

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \,:\, \varphi_1(x,y),\, \varphi_2(x,y) \in C^\infty(\Omega), \Omega \text{ como dominio real}\}, \\ C_0(\Omega) &= \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,:\, \varphi \text{ tiene soporte compacto en } \Omega\}, \end{aligned}$$

son densos en $L^p(\Omega, dz)$, cuando Ω es un conjunto acotado y $p \geq 1$.

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{C}$, abierto y acotado. El siguiente Teorema se utiliza para garantizar que si $f \in L^1(\Omega, dz)$, entonces los operadores integrales singulares dados por:

$$Tf(z) = T_\Omega f(z) := -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\, dA(w), \tag{4.6}$$

$$T^*f(z) = T^*_\Omega f(z) := -\frac{1}{\pi}\int_{\Omega} \frac{f(w)}{\overline{w}-\overline{z}}\, dA(w), \tag{4.7}$$

están bien definidos en Ω.

Teorema 4.1.3. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado, y sea $f \in L^p(\Omega)$. Considere $f = 0$ en el complemento de Ω. Entonces bajo estas condiciones, la función g definida por*

$$g(z) := \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{|w-z|^\lambda}\, dA(w) \qquad \lambda < 2,$$

es continua en $\mathbb{C}$ cuando $p > \frac{2}{2-\lambda}$.

Demostración. Utilizando el Teorema de cambio de variable se tiene que

$$g(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{|w-z|^\lambda}\, dA(w) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w+z)}{|w|^\lambda}\, dA(w).$$

Sea $R > 0$ tal que $\Omega + \Omega \subseteq \mathbb{D}_R$. Si q es el conjugado de p, aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\begin{aligned}|g(z_1) - g(z_2)| &\leq \int_{\mathbb{D}_R} \frac{|f(w+z_1) - f(w+z_2)|}{|w|^\lambda}\, dA(w) \\ &\leq \left\{\int_{\mathbb{D}_R} |f(w+z_1) - f(w+z_2)|^p\, dA(w)\right\}^{1/p} \left\{\int_{\mathbb{D}_R} |w|^{-q\lambda}\, dA(w)\right\}^{1/q}. \quad (4.8)\end{aligned}$$

La condición $p > \dfrac{2}{2-\lambda}$ implica que $q\lambda < 2$. Por lo tanto al aplicar coordenadas polares a la integral del lado derecho de (4.8) se cumple

$$\int_{\mathbb{D}_R} |w|^{-q\lambda}\, dA(w) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{-q\lambda+1}\, d\theta dr = \frac{R^{-q\lambda+2}}{-q\lambda+2} < +\infty.$$

Finalmente, por la continuidad de la integral, el término del lado izquierdo de (4.8) tiende a cero cuando $|z_1 - z_2| \longrightarrow 0$. □

Sea $p > 2$ y g una función arbitraria en $L^p(\Omega, dz)$. Por el Teorema 4.1.3, la función $g_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g_1(z) = \int_\Omega \frac{|g(w)|}{|w-z|} dA(w),$$

es continua en $\overline{\Omega}$. Por tanto, si $f \in L^1(\Omega, dz)$ entonces $|f| g_1 \in L^1(\Omega, dz)$. Además, utilizando el Teorema de Fubini se cumple

$$\int_\Omega |g(w)| \left[\int_\Omega \frac{|f(z)|}{|w-z|} dA(z)\right] dA(w) = \int_\Omega |f(z)| \left[\int_\Omega \frac{|g(w)|}{|w-z|} dA(w)\right] dA(z) < \infty.$$

Como lo anterior es cierto para toda función $g \in L^p(\Omega, dz)$, entonces la función f_1 definida por

$$f_1(z) := \int_\Omega \frac{|f(w)|}{|w-z|} dA(w),$$

pertenece a $L^q(\Omega, dz)$, donde q es el conjugado de p. En particular f_1 es finita casi en todo punto de Ω. Esto implica que los operadores (4.6) y (4.7) estan bien definidos.

El siguiente resultado dice que si $f \in L^1(\Omega, dz)$, entonces las funciones Tf y T^*f son derivables en el sentido de distribuciones con $\dfrac{\partial Tf}{\partial \overline{z}} = f$ y $\dfrac{\partial T^* f}{\partial z} = f$. Lo que se demostrará posteriormente es que estas derivadas existen en el sentido clásico.

Teorema 4.1.4. *Si $f \in L^1(\Omega, dz)$ entonces:*

$$\int_\Omega Tf \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}}\, dA(z) + \int_\Omega f(z)\varphi(z)\, dA(z) = 0$$
$$\int_\Omega T^* f \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\, dA(z) + \int_\Omega f(z)\varphi(z)\, dA(z) = 0$$

para toda función $\varphi \in C_0(\Omega)$.

Demostración. Si $\varphi \in C_0(\Omega)$ entonces, por las fórmulas (4.3) y (4.4), se tiene

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z}\, dA(w) = T\left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}}\right],$$
$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial \varphi(w)}{\partial w} \frac{1}{\overline{w}-\overline{z}}\, dA(w) = T^*\left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\right].$$

por lo cual, utilizando el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_\Omega Tf(z)\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}}\, dA(z) &= \int_\Omega \left[-\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{w-z}\, dA(w)\right]\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}}\, dA(z)\\ &= -\int_\Omega \left[-\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}}\frac{1}{z-w}\, dA(z)\right] f(w)\, dA(w)\\ &= -\int_\Omega f(w)\varphi(w)\, dA(w)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_\Omega T^*f(z)\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\, dA(z) &= \int_\Omega \left[-\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{\overline{w}-\overline{z}}\, dA(w)\right]\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\, dA(z)\\ &= -\int_\Omega \left[-\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\frac{1}{\overline{z}-\overline{w}}\, dA(z)\right] f(w)\, dA(w)\\ &= -\int_\Omega f(w)\varphi(w)\, dA(w).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.5. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{C}$. Si $f \in L^p(\Omega)$, $p > 2$, entonces la función $g = Tf$ satisface la condición:*

$$|g(z)| \le M_1 \|f\|_p, \qquad \forall\ z \in \Omega, \tag{4.9}$$

donde M_1 es una constante positiva que depende de p y Ω. En particular, el operador $T : L^p(\Omega, dz) \longrightarrow L^r(\Omega, dz)$ es acotado para todo $r \ge 1$.

Demostración. Por la desigualdad de Hölder se tiene

$$|g(z)| = |Tf(z)| \le \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{|f(w)|}{|w-z|}\, dA(w) \le \frac{1}{\pi}\|f\|_p \left\{\int_\Omega |w-z|^{-q}\, dA(w)\right\}^{1/q}.$$

Sea $R > 0$ tal que $\Omega + \Omega \subseteq \mathbb{D}_R$. Observe que por la hipótesis, si q es el conjugado de p, cumple que $q < 2$. Al aplicar coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w-z|^{-q}\, dA(w) &= \int_{\Omega+z} |w|^{-q}\, dA(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}_R} |w|^{-q}\, dA(w) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{-q+1}\, d\theta dr = \frac{2\pi R^{-q+2}}{-q+2} < +\infty.\end{aligned}$$

y para demostrar (4.9) basta tomar $M_1 = \dfrac{2R^{-q+2}}{-q+2}$.

Por último, si $A(\Omega)$ es la medida de Ω, de la ecuación (4.9) se cumplen las estimaciones

$$\|Tf\|_r = \left\{\int_\Omega |Tf(z)|^r\, dA(z)\right\}^{1/r} \leq A(\Omega)^{1/r} M_1 \|f\|_p \qquad \forall\ f \in L^p(\Omega) \tag{4.10}$$

$$\|Tf\|_\infty = \sup\{|Tf(z)| \,:\, z \in \Omega\} \leq M_1 \|f\|_p \tag{4.11}$$

□

Los operadores S_Ω y S_Ω^* definidos en (4.12) y (4.13) respectivamente, son de vital importancia en el artículo de Pessoa y Karlovich [20]. Como se verá en el Teorema 4.2.3, dichos operadores tienen relación con las proyecciones poli-Bergman. Para los resultados de esta sección será suficiente analizar estos operadores para funciones f en $C_0(\Omega)$, y los resultados generales serán una consecuencia de la densidad de este espacio en $L^1(\Omega, dz)$. Para $f \in C_0(\Omega)$, se definen los siguientes operadores integrales singulares:

$$(S_\Omega f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dA(w), \qquad z \in \Omega, \tag{4.12}$$

$$(S_\Omega^* f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{(\overline{w}-\overline{z})^2}\, dA(w), \qquad z \in \Omega. \tag{4.13}$$

El resultado más importante, y que dá una relación entre los operadores T_Ω y S_Ω es el siguiente Teorema. La demostración se puede encontrar en [8].

Teorema 4.1.6. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{C}$ abierto y acotado, tal que Ω es unión de conjuntos regulares. Si $f \in C^m(\overline{\Omega})$, entonces la función $h := T_\Omega f$ pertenece a $C^{m+1}(\overline{\Omega})$. Además:*

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f + S_\Omega f, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = -if + iS_\Omega f. \tag{4.14}$$

Una de las primeras consecuencias del Teorema anterior, es que los operadores (4.12) y (4.13) están bien definidos. Observe que de (4.14), si $f \in C^m(\overline{\Omega})$, se cumplen las ecuaciones:

$$\frac{\partial T_\Omega f}{\partial \overline{z}} = f, \qquad \frac{\partial T_\Omega f}{\partial z} = S_\Omega f. \tag{4.15}$$

En particular, combinando los Teoremas 4.1.5 y 4.1.6, se concluye que el operador $S_\Omega f : C^\infty(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega, dz)$ es acotado, y por lo tanto se puede extender de manera continua a $L^1(\Omega, dz)$.

De las ecuaciones (4.15) se sigue también que

$$\frac{\partial S_\Omega f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial S_\Omega^* f}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} \qquad \forall\ f \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{4.16}$$

4.2. Proyecciones sobre el espacio poli-Bergman $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$

En esta Sección se hace un análisis de las proyecciones de Bergman en los espacios polianalíticos $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$. En particular se dá la descomposición de las proyecciones $B_{\mathbb{D},n}$ y $\widetilde{B}_{\mathbb{D},n}$ en términos de los operadores $S_\mathbb{D}$ y $S_\mathbb{D}^*$. Los resultados aquí expuestos están basados en los trabajos de Vasilevski [16], Pessoa y Karlovich [20].

En [1], Dzhuraev muestra que si Ω es un dominio acotado y regular, entonces las proyecciones poli-Bergman y anti-poli-Bergman de orden n, tienen la siguiente representación:

$$B_{\Omega,n} = I - S_{\Omega,-n} S_{\Omega,n} + K_n, \qquad \widetilde{B}_{\Omega,n} = I - S_{\Omega,n} S_{\Omega,-n} + \widetilde{K}_n, \tag{4.17}$$

donde $S_{\Omega,n}$, con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, es el operador integral singular definido por:

$$\big(S_{\Omega,n} f\big)(z) = \frac{(-1)^n |n|}{\pi} \int_\Omega \frac{(w-z)^{n-1}}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}} f(w)\, dA(w) \qquad f \in L^2(\Omega, dz), \tag{4.18}$$

y K_n, $\widetilde{K}_n$ son operadores compactos en el espacio $L^2(\Omega, dz)$. Si $z \in \mathbb{C}$ y R es un número positivo, en el caso particular $\Omega = \mathbb{D}_R(z)$ se demostrará que $K_n = \widetilde{K}_n = 0$.

En el primer Lema de esta Sección se utiliza el Teorema de los residuos, por lo cual se enuncia a continuación.

Teorema 4.2.1. *Si f tiene un polo de orden n en z_0, entonces*

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \big[(z-z_0)^n f(z)\big].$$

Además, si f es analítica en una región Ω salvo en las singularidades aisladas $z_1, \ldots, z_m$, y si γ es una curva de Jordan cerrada contenida en Ω orientada positivamente, y que no contiene a ningún punto z_j, entonces se cumple:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f; z_k).$$

Igual que en el Capítulo anterior, sea $F_\mathbb{D}$ el conjunto generado por las funciones $g_{k,m}(z) = \overline{z}^k z^m$ para $k, m \in \mathbb{N}_0$. Como $F_\mathbb{D}$ es denso en $L^2(\mathbb{D}, dz)$, podrán extenderse los resultados a todo el espacio $L^2(\mathbb{D}, dz)$.

Lema 4.2.2. *Para cada $k, m \in \mathbb{N}_0$, y para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple*

$$\big(S_\mathbb{D}^* g_{k,m}\big)(z) = \frac{k}{m+1} \overline{z}^{k-1} z^{m+1} + \frac{\min\{0, m+1-k\}}{m+1} \overline{z}^{k-m-2}. \tag{4.19}$$

Demostración. Sean $z \in \mathbb{D}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\overline{\mathbb{D}_\varepsilon(z)} \subset \mathbb{D}$. Por el Teorema de Green (ecuaciones (4.1) y (4.2)) se tiene

$$
\begin{aligned}
\left(S_{\mathbb{D}}^* g_{k,m}\right)(z) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)} \frac{\overline{w}^k w^m}{(\overline{w}-\overline{z})^2}\, dA(w) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\varepsilon(z)} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\left(\frac{\overline{w}^k w^m}{\overline{w}-\overline{z}}\right) - \frac{k}{m+1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\overline{w}^{k-1} w^{m+1}}{\overline{w}-\overline{z}}\right)\right] dA(w) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^k w^m}{\overline{w}-\overline{z}}\, dw - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{\overline{w}^k w^m}{\overline{w}-\overline{z}}\, dw\right] \\
&+ \frac{k}{2\pi i(m+1)}\left[\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^{k-1} w^{m+1}}{\overline{w}-\overline{z}}\, d\overline{w} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{\overline{w}^{k-1} w^{m+1}}{\overline{w}-\overline{z}}\, d\overline{w}\right].
\end{aligned}
$$

Observe ahora que al aplicar la parametrización $w = e^{i\theta}$ se tiene la igualdad

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^{k-1} w^{m+1}}{\overline{w}-\overline{z}}\, d\overline{w} &= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-i\theta})^{k-1}(e^{i\theta})^{m+1}}{e^{-i\theta}-\overline{z}}(-i)e^{-i\theta}\, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{(e^{-i\theta})^{k}(e^{i\theta})^{m}}{e^{-i\theta}-\overline{z}} i e^{i\theta}\, d\theta = -\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^k w^m}{\overline{w}-\overline{z}}\, dw.
\end{aligned}
$$

Utilizando el hecho de que $\overline{w} = w^{-1}$ para todo $w \in \partial\mathbb{D}$, se cumple lo siguiente

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^k w^m}{\overline{w}-\overline{z}}\, dw + \frac{k}{2\pi i(m+1)}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^{k-1} w^{m+1}}{\overline{w}-\overline{z}}\, d\overline{w} = \left[1 - \frac{k}{m+1}\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{w^{m-k+1}}{1-w\overline{z}}\, dw.
$$

Cuando $m-k+1 \geq 0$, la función $\dfrac{w^{m-k+1}}{1-w\overline{z}}$ es analítica (en el argumento w) en el disco $\mathbb{D}_{1/|z|}$, por lo cual

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{w^{m-k+1}}{1-w\overline{z}}\, dw = 0. \tag{4.20}
$$

Si $m-k+1 < 0$, por el Teorema de los residuos se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{w^{m-k+1}}{1-w\overline{z}}\, dw &= \frac{1}{(k-m-2)!}\lim_{w\to 0}\frac{d^{k-m-2}}{dz^{k-m-2}}\left[w^{k-m-1}\frac{w^{m-k+1}}{1-w\overline{z}}\right] \\
&= \frac{1}{(k-m-2)!}\lim_{w\to 0}\left[(k-m-2)!\frac{\overline{z}^{k-m-2}}{(1-w\overline{z})^{k-m-1}}\right] \\
&= \overline{z}^{k-m-2}.
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

De (4.20) y (4.21) se concluye que

$$
\left[1 - \frac{k}{m+1}\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{w^{m-k+1}}{1-w\overline{z}}\, dw = \frac{\min\{0, m+1-k\}}{m+1}\overline{z}^{k-m-2}. \tag{4.22}
$$

Además, al hacer la parametrización $w = z+\varepsilon e^{i\theta}$, y utilizando el Teorema de convergencia dominada, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{\overline{w}^k w^m}{\overline{w}-\overline{z}}\,dw &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} (\overline{z}+\varepsilon e^{-i\theta})^k (z+\varepsilon e^{i\theta})^m i e^{2i\theta}\,d\theta \\
&= \overline{z}^k z^m i\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\,d\theta = 0. \qquad (4.23)\\
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{\overline{w}^{k-1} w^{m+1}}{\overline{w}-\overline{z}}\,d\overline{w} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} (\overline{z}+\varepsilon e^{-i\theta})^{k-1} (z+\varepsilon e^{i\theta})^{m+1}(-i)\,d\theta \\
&= 2\pi i\overline{z}^{k-1}z^{m+1}. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

De (4.22), (4.23) y (4.24) se concluye el resultado. □

De las igualdades (4.16), se cumple que si $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $S_\Omega f, S_\Omega^* f\in C^\infty(\overline{\Omega})$ y son válidas las fórmulas

$$\frac{\partial S_\Omega f}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial S_\Omega^* f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial\overline{z}} \qquad \forall\ z\in\overline{\Omega}. \tag{4.25}$$

Teorema 4.2.3. *Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario, entonces para toda $n\in\mathbb{N}$ se cumplen las Fórmulas de Dzhuraev:*

$$B_{\mathbb{D},n} = I-(S_\mathbb{D})^n(S_\mathbb{D}^*)^n, \qquad \widetilde{B}_{\mathbb{D},n} = I-(S_\mathbb{D}^*)^n(S_\mathbb{D})^n. \tag{4.26}$$

Demostración. Sea $g_{k,m}\in\mathcal{P}_n$, es decir, $g_{k,m}(z)=\overline{z}^k z^m$ con $0\le k\le n-1$ y $m\in\mathbb{N}_0$. Observe que si $m+1\ge k$, entonces, del Lema 4.19 se cumple que

$$\big(S_\mathbb{D}^* g_{k,m}\big)^j(z) = \frac{k(k-2)\cdots(k-j+1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+j)}\overline{z}^{k-j}z^{m+j}.$$

Dado que $0\le k\le n-1$, si $j=n$ se tiene que

$$\big(S_\mathbb{D}^* g_{k,m}\big)^n(z)=0.$$

De una manera similar, se puede mostrar que si $m+1<k$, entonces la igualdad anterior también es válida. Por la densidad de $\mathcal{P}_n$ en $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, se tiene que

$$(S_\mathbb{D}^*)^n f = 0 \qquad \forall\ f\in\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}). \tag{4.27}$$

Para $n\in\mathbb{N}$, se define el operador P_n como

$$P_n := I-(S_\mathbb{D})^n(S_\mathbb{D}^*)^n.$$

Se probará primero la siguiente contensión:

$$P_n\big(L^2(\mathbb{D})\big)\subset\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}) \qquad \text{para cada } \ n\in\mathbb{N}. \tag{4.28}$$

Por la densidad de $C^\infty(\mathbb{D})$ en $L^2(\mathbb{D})$, por la continuidad de P_n y puesto que el espacio $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$ cerrado, es suficiente mostrar (4.28) para funciones en $C^\infty(\mathbb{D})$. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{D})$, por (4.25) se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\Big[(S_{\mathbb{D}})^n(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big] &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial \overline{z}^{n-1}}\Big[\frac{\partial}{\partial \overline{z}}S_{\mathbb{D}}\big((S_{\mathbb{D}})^{n-1}(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\big)\Big] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \overline{z}^{n-1}}\Big[\frac{\partial}{\partial z}\big((S_{\mathbb{D}})^{n-1}(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\big)\Big]\\ &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{n-1}}{\partial \overline{z}^{n-1}}\Big[(S_{\mathbb{D}})^{n-1}(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big].\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\Big[(S_{\mathbb{D}})^n(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big] &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{n-1}}{\partial \overline{z}^{n-1}}\Big[(S_{\mathbb{D}})^{n-1}(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big] = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial \overline{z}^{n-2}}\Big[(S_{\mathbb{D}})^{n-2}(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big]\\ &= \cdots = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big[(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big].\end{aligned} \tag{4.29}$$

Al aplicar nuevamente (4.25),

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big[(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big] = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\Big[(S_{\mathbb{D}}^*)^{n-1} f\Big] = \cdots = \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} f. \tag{4.30}$$

Entonces, de las ecuaciones (4.29) y (4.30), y por la definición de P_n se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\Big[P_n f\Big] = \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\Big[f - (S_{\mathbb{D}})^n(S_{\mathbb{D}}^*)^n f\Big] = \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} f - \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} f = 0.$$

Esto implica que (4.28) es válida.

De las relaciones (4.28) y (4.27), se tiene la identidad:

$$P_n^2 = \big(I - (S_{\mathbb{D}})^n(S_{\mathbb{D}}^*)^n\big)P_n = P_n.$$

Utilizando propiedades del operador adjunto, se tiene también que $P_n^* = P_n$, esto quiere decir que P_n es una proyección ortogonal en $L^2(\mathbb{D}, dz)$. La definición de P_n y (4.27) implican que $P_n f = f$ para $f \in \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$, que combinando con (4.28) implican que $P_n = B_{\mathbb{D},n}$. $\square$

La igualdad (4.19) se utiliza en el siguiente Corolario, en el cual se demuestra que los operadores $S_{\mathbb{D},n}$ y $S_{\mathbb{D},-n}$ definidos en (4.18), son respectivamente, potencias de los operadores $S_{\mathbb{D}}$ y $S_{\mathbb{D}}^*$.

Corolario 4.2.4. *En $L^2(\mathbb{D}, dz)$ se cumplen las siguientes relaciones*

$$S_{\mathbb{D},-n} = (S_{\mathbb{D}})^n, \qquad S_{\mathbb{D},n} = (S_{\mathbb{D}}^*)^n. \tag{4.31}$$

Demostración. Se demostrará este resultado por inducción. Por definición $S_{\mathbb{D}}^* = S_{\mathbb{D},1}$. Supóngase que $(S_{\mathbb{D}}^*)^n = S_{\mathbb{D},n}$. Se analiza a continuación el paso $n+1$. Sean $f \in C^\infty(\Omega)$ y $z \in \mathbb{D}$.

Si se escribe $w = e^{i\theta}$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{(w-z)^n}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(w)\, d\overline{w} &= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta}-z)^n}{(e^{-i\theta}-\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(e^{i\theta})(-i)e^{-i\theta}\, d\theta \\ &= -\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{(e^{i\theta}-z)^n(e^{i\theta})^{n-1}}{(1-e^{i\theta}\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(e^{i\theta})\, ie^{i\theta}\, d\theta \\ &= -\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{(w-z)^n w^{n-1}}{(1-w\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(w)\, dw. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Aplicando la identidad $\dfrac{\partial}{\partial w} S_{\mathbb{D}}^* f = \dfrac{\partial}{\partial \overline{w}} f$, el Teorema de Green, y la ecuación (4.32) se cumple la igualdad

$$\begin{aligned}&\big(S_{\mathbb{D},n+1}f\big)(z) - \big((S_{\mathbb{D}}^*)^{n+1}f\big)(z) = \big(S_{\mathbb{D},n+1}f\big)(z) - \big(S_{\mathbb{D},n}S_{\mathbb{D}}^* f\big)(z) \\ &\quad= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\left[(n+1)\frac{(w-z)^n}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+2}}f(w) + n\frac{(w-z)^{n-1}}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(w)\right] dA(w) \\ &\quad= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\Big[\frac{(w-z)^n}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}}f(w)\Big] - \frac{\partial}{\partial w}\Big[\frac{(w-z)^n}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(w)\Big]\right] dA(w) \\ &\quad= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\left[\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(w-z)^n}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}}f(w)\, dw + \int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(w-z)^n}{(\overline{w}-\overline{z})^{n+1}}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(w)\, d\overline{w}\right] \\ &\quad= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(w-z)^n w^{n+1}}{(1-w\overline{z})^{n+1}}\big[f(w) - w^{-2}\big(S_{\mathbb{D}}^* f\big)(w)\big]\, dw. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Se demostrará a continuación que al aplicar la igualdad anterior a $g_{k,m} = \overline{z}^k z^m$ con $k, m \in \mathbb{N}_0$, (4.33) es igual a cero. Del Lema 4.2.2 se sigue que

$$\big(S_{\mathbb{D}}^* g_{k,m}\big)(w) = \frac{\text{mín}\{k, m+1\}}{m+1} w^{m-k+2},$$

por lo cual se cumple

$$g_{k,m}(w) - w^{-2}\big(S_{\mathbb{D}}^* g_{k,m}\big)(w) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{k}{m+1}\right) w^{m-k} & \text{si } \ k = 0, 1, \ldots, m, \\ 0 & \text{si } \ k = m+1, m+2, \ldots \end{cases}$$

Se afirma que para todo $k, m \in \mathbb{N}_0$ se satisface la igualdad:

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{(w-z)^n w^{n+1}}{(1-w\overline{z})^{n+1}}\big[g_{k,m}(w) - w^{-2}\big(S_{\mathbb{D}}^* g_{k,m}\big)(w)\big]\, dw = 0. \tag{4.34}$$

En efecto; si $g_{k,m}(w) - w^{-2}\big(S_{\mathbb{D}}^* g_{k,m}\big)(w) = 0$ esto es claro, y si

$$g_{k,m}(w) - w^{-2}\big(S_{\mathbb{D}}^* g_{k,m}\big)(w) = \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) w^{m-k}.$$

Dado que la función

$$\frac{(w-z)^n w^{n+1}}{(1-w\overline{z})^{n+1}}\left(1 - \frac{k}{m+1}\right) w^{m-k}$$

es analítica en $\mathbb{D}_{1/|z|}$, la Fórmula integral de Cauchy implica (4.34). Utilizando (4.33) y (4.34) se cumple que

$$S_{\mathbb{D},n+1}(g_{k,m}) = (S_{\mathbb{D}}^*)^{n+1}(g_{k,m}) \qquad \forall\ k,m \in \mathbb{N}_0.$$

Finalmente, por el Lemma 3.7.2 se tiene que

$$S_{\mathbb{D},n+1}(f) = (S_{\mathbb{D}}^*)^{n+1}(f) \qquad \forall\ f \in L^2(\mathbb{D},dz).$$

□

En el siguiente Lema se denota por $N_{j,k}$ al subespacio finito-dimencional de $L^2(\mathbb{D},dz)$ generado por las funciones $g_{s,l}$, con $l = 0,1,\dots,j-1$ y $s = 0,1,\dots,k-1$. $P_{N_{j,k}}$ denotará la proyección ortogonal en dicho espacio. Una consecuencia del Teorema 3.7.3 es el siguiente resultado.

Lema 4.2.5. *Si $j,k \in \mathbb{N}$, entonces $\widetilde{B}_{\mathbb{D},j} B_{\mathbb{D},k} = P_{N_{j,k}}$. En particular, las proyecciones $\widetilde{B}_{\mathbb{D},j}$ y $B_{\mathbb{D},k}$ conmutan.*

4.3. Espacios polianalíticos puros

En esta sección se analizan los resultados sobre espacios polianalíticos puros realizados por Pessoa y Karlovich en su artículo [20]. En particular, ellos obtienen una descomposición ortogonal más general que la hecha para $L^2(\mathbb{D},dz)$. Para ser más precisos, ellos demuestran la siguiente descomposición para $L^2(\Omega,dz)$, cuando Ω es una región abierta y acotada de $\mathbb{C}$,

$$L^2(\Omega,dz) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^2_{(n)}(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}^2_{(n)}(\Omega).$$

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y si N_1, N_2 son subespacios de $\mathcal{H}$, se define la resta del espacio N_1 menos el espacio N_2 como:

$$N_1 \ominus N_2 := N_1 \cap \left[N_2\right]^{\perp}.$$

Para un subconjunto del plano complejo Ω, abierto y conexo, se define el *espacio poli-Bergman puro*, o *espacio de Bergman polianalítico puro*, denotado por $\mathcal{A}^2_{(n)}(\Omega)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2_{(n)}(\Omega) &:= \mathcal{A}^2_n(\Omega) \ominus \mathcal{A}^2_{n-1}(\Omega) \qquad \text{para } n > 1, \\ \mathcal{A}^2_{(1)}(\Omega) &:= \mathcal{A}^2_1(\Omega) = \mathcal{A}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Análogamente, se define el *espacio anti-poli-Bergman puro*, o *espacio de Bergman anti-polianalítico puro*, denotado por $\widetilde{\mathcal{A}}^2_{(n)}(\Omega)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}^2_{(n)}(\Omega) &:= \widetilde{\mathcal{A}}^2_n(\Omega) \ominus \widetilde{\mathcal{A}}^2_{n-1}(\Omega) \qquad \text{para } n > 1, \\ \widetilde{\mathcal{A}}^2_{(1)}(\Omega) &:= \widetilde{\mathcal{A}}^2_1(\Omega) = \widetilde{\mathcal{A}}^2(\Omega). \end{aligned}$$

De la definición, se cumple la siguiente descomposición ortogonal:

$$\mathcal{A}_n^2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{A}_{(k)}^2(\Omega), \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\mathcal{A}}_n^2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{n} \widetilde{\mathcal{A}}_{(k)}^2(\Omega).$$

De manera equivalente, las proyecciones de Bergman sobre los espacios $\mathcal{A}_{(n)}^2(\Omega)$ y $\widetilde{\mathcal{A}}_{(n)}^2(\Omega)$, están dadas por

$$\begin{aligned} B_{\Omega,(n)} &= B_{\Omega,n} - B_{\Omega,n-1}, && \text{para } n > 1, \\ B_{\Omega,(1)} &= B_{\Omega,1} = B_{\Omega}, \\ \widetilde{B}_{\Omega,(n)} &= \widetilde{B}_{\Omega,n} - \widetilde{B}_{\Omega,n-1}, && \text{para } n > 1, \\ \widetilde{B}_{\Omega,(1)} &= \widetilde{B}_{\Omega,1} = \widetilde{B}_{\Omega}. \end{aligned}$$

y satisfacen las igualdades

$$B_{\Omega,n} = \sum_{k=1}^{n} B_{\Omega,(n)}, \qquad \widetilde{B}_{\Omega,n} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{B}_{\Omega,(n)}. \tag{4.35}$$

En el caso $\Omega = \mathbb{D}$, el espacio de Bergman polianalítico puro $\mathcal{A}_{(n)}^2(\Omega)$, coincide con el espacio $\mathcal{B}_n^2(\mathbb{D})$ introducido por Ramazanov en [5]. En efecto; por el Teorema 3.5.1 se tiene la descomposición ortogonal para $\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D})$,

$$\mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}) = \mathcal{B}_1^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{B}_2^2(\mathbb{D}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_{n-1}^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{B}_n^2(\mathbb{D}).$$

Por definición $\mathcal{A}_{(n)}^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_n^2(\mathbb{D}) \cap \left[\mathcal{A}_{n-1}^2(\mathbb{D})\right]^{\perp}$, entonces, necesariamente se debe tener que $\mathcal{B}_n^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_{(n)}^2(\mathbb{D})$.

Se definen a continuación los subespacios uno-dimensionales L_k y $\widetilde{L}_k$, de $L^2(\mathbb{D}, dz)$, de la siguiente manera:

$$L_k := \{\lambda \overline{z}^{k-1} \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{y} \quad \widetilde{L}_k := \{\lambda z^{k-1} \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Como

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}\Big\{(z\overline{z} - 1)^{k-1}\lambda\Big\} = (k-1)!\lambda\overline{z}^{k-1}$$

y $\lambda \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, entonces por el Teorema 3.4.1 $L_k \subset \mathcal{B}_k^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_{(k)}^2(\mathbb{D})$. De manera análoga $\widetilde{L}_k \subset \widetilde{\mathcal{B}}_k^2(\mathbb{D}) = \widetilde{\mathcal{A}}_{(k)}^2(\mathbb{D})$. En el siguiente Teorema se dan isomorfismos entre los espacios de Bergman polianalíticos puros, mediante los operadores $S_{\mathbb{D}}$ y $S_{\mathbb{D}}^*$.

Teorema 4.3.1. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, los operadores*

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{D}}^* &: \mathcal{A}_{(k+1)}^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{A}_{(k)}^2(\mathbb{D}) \ominus L_k, \\ S_{\mathbb{D}} &: \mathcal{A}_{(k)}^2(\mathbb{D}) \ominus L_k \longrightarrow \mathcal{A}_{(k+1)}^2(\mathbb{D}), \\ S_{\mathbb{D}}^* &: \widetilde{\mathcal{A}}_{(k)}^2(\mathbb{D}) \ominus \widetilde{L}_k \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{(k+1)}^2(\mathbb{D}), \\ S_{\mathbb{D}} &: \widetilde{\mathcal{A}}_{(k+1)}^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_{(k)}^2(\mathbb{D}) \ominus \widetilde{L}_k, \end{aligned}$$

son isomorfismos isométricos. Adicionalmente,

$$S_{\mathbb{D}}^* : \mathcal{A}_{(1)}^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \{0\}, \qquad S_{\mathbb{D}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{(1)}^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \{0\}.$$

Sea Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen los operadores

$$D_{\Omega,n} := I - S_{\Omega,-n}S_{\Omega,n}, \qquad \widetilde{D}_{\Omega,n} := I - S_{\Omega,n}S_{\Omega,-n}, \tag{4.36}$$

donde $S_{\Omega,n}$, para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, es el operador integral definido en (4.18). Utilizando el Teorema de cambio de variable, y las relaciones (4.31), se tiene una versión más general de dichas identidades (4.31) para cualquier disco $\mathbb{D}_\delta(z)$, donde $z \in \mathbb{C}$ y δ es un número positivo. Más precisamente, se cumple

$$S_{\mathbb{D}_\delta(z),-n} = \big(S_{\mathbb{D}_\delta(z)}\big)^n, \qquad S_{\mathbb{D}_\delta(z),n} = \big(S^*_{\mathbb{D}_\delta(z)}\big)^n. \tag{4.37}$$

Si $f \in C^\infty \cap L^2(\Omega, dz)$. Utilizando el molificador del Corolario 3.2.3 y algunos resultados de [8], Pessoa y Karlovich en [20], demuestran la identidad

$$\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} S_{\Omega,-n}S_{\Omega,n} f = \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n} f. \tag{4.38}$$

En consecuencia, por la densidad de $C^\infty \cap L^2(\Omega, dz)$ en $L^2(\Omega, dz)$, se concluye de las ecuaciones (4.36) y (4.38) lo siguiente:

Para cualquier subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, se cumplen las contensiones

$$\mathrm{Im} D_{\Omega,n} \subset \mathcal{A}^2_n(\Omega), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{4.39}$$

$$\mathrm{Im} \widetilde{D}_{\Omega,n} \subset \widetilde{\mathcal{A}}^2_n(\Omega), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.40}$$

Teorema 4.3.2. *Sea Ω un subconjunto arbitrario de $\mathbb{C}$, abierto y acotado. Entonces se cumplen las siguientes fórmulas puntuales en el espacio $L^2(\Omega, dz)$:*

$$\lim_{n\to\infty} D_{\Omega,n} = I, \qquad \lim_{n\to\infty} \widetilde{D}_{\Omega,n} = I. \tag{4.41}$$

Demostración. Sea R positivo tal que $\Omega \subseteq \mathbb{D}_R(0)$. Si $f \in L^2\big(\mathbb{D}_R(0), dz\big)$, por el Teorema 3.7.6 se cumple la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_{\mathbb{D}_R(0),n} f\| = 0.$$

Observe que $I - B_{\mathbb{D}_R(0),n}$ es una proyección ortogonal en el espacio $L^2\big(\mathbb{D}_R(0), dz\big)$, y que $S_{\mathbb{D}_R(0),-n} = S^*_{\mathbb{D}_R(0),n}$. De la igualdad anterior, el Teorema 4.2.3 y el Corolario 4.2.4 se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \|f - B_{\mathbb{D}_R(0),n} f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle f - B_{\mathbb{D}_R(0),n} f, f\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle S_{\mathbb{D}_R(0),-n} S_{\mathbb{D}_R(0),n} f, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \|S_{\mathbb{D}_R(0),n} f\|^2. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Por otro lado, en [8] se demuestra que $\|S_\Omega\| \leq 1$, y por el Corolario 4.2.4 se cumple que $\|S_{\Omega,-n}\| \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por la definición de $D_{\Omega,n}$, si $f \in L^2(\Omega, dz)$ se cumple

$$\|f - D_{\Omega,n} f\| = \|S_{\Omega,-n}S_{\Omega,n} f\| \leq \|S_{\Omega,n} f\|. \tag{4.43}$$

Además, si χ_Ω es la función característica de Ω, también se satisface la desigualdad

$$\|S_{\Omega,n} f\| \leq \|\chi_\Omega S_{\mathbb{D}_R(0),n} \chi_\Omega f\| \leq \|S_{\mathbb{D}_R(0),n} \chi_\Omega f\|. \tag{4.44}$$

Combinando (4.42), (4.43) y (4.44), se tiene $\lim_{n\to\infty} D_{\Omega,n} f = f$. □

Corolario 4.3.3. *Sea Ω un subconjunto arbitrario de $\mathbb{C}$, abierto y acotado. Entonces se cumplen las siguientes fórmulas puntuales en el espacio $L^2(\Omega, dz)$:*

$$\lim_{n\to\infty} B_{\Omega,n} = I, \qquad \lim_{n\to\infty} \widetilde{B}_{\Omega,n} = I. \tag{4.45}$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \widetilde{B}_{\Omega,n} B_{\Omega,m} = I. \tag{4.46}$$

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega, dz)$. Por la ecuación (4.39) y por ser $B_{\Omega,n}$ proyección se obtiene

$$\begin{aligned}
\|B_{\Omega,n}f - f\| &= \|B_{\Omega,n}(f - D_{\Omega,n}f + D_{\Omega,n}f) - f\| \\
&\leq \|B_{\Omega,n}(f - D_{\Omega,n}f)\| + \|B_{\Omega,n}D_{\Omega,n}f - f\| \\
&\leq \|f - D_{\Omega,n}f\| + \|D_{\Omega,n}f - f\|.
\end{aligned}$$

Por el Teorema anterior, $\|B_{\Omega,n}f - f\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Finalmente, (4.46) se obtiene de la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{B}_{\Omega,n}B_{\Omega,m}f - f\| &\leq \|\widetilde{B}_{\Omega,n}(B_{\Omega,m}f - f)\| + \|\widetilde{B}_{\Omega,n}f - f\| \\
&\leq \|B_{\Omega,m}f - f\| + \|\widetilde{B}_{\Omega,n}f - f\|.
\end{aligned}$$

□

Combinando el Corolario anterior, junto con las fórmulas (4.45) y (4.35), se tiene la siguiente descomposición ortogonal de $L^2(\Omega, dz)$.

Teorema 4.3.4. *Para todo $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, dz)$, donde dz es la medida de Lebesgue usual de área, admite la siguiente descomposición ortogonal:*

$$L^2(\Omega, dz) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^2_{(k)}(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}^2_{(k)}(\Omega).$$

En particular, si $\Omega = \mathbb{D}$ se tiene la descomposición ortogonal:

$$L^2(\mathbb{D}, dz) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_{\mathbb{D}}^k\big(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})\big) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (S_{\mathbb{D}}^*)^k\big(\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})\big).$$

Como última observación, la descomposición de $L^2(\Pi, dz)$, donde Π es el semiplano superior, hecha por Vasilevski en [16], es distinta a la presentada en el Teorema 4.3.4. Dicha descomposición de $L^2(\Pi, dz)$ es mediante las funciones polianalíticas puras y las anti-polianalíticas puras, es decir,

$$L^2(\Pi, dz) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^2_{(k)}(\Pi) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}^2_{(k)}(\Pi).$$

Bibliografía

[1] A. Dzhuraev. *Methods of Singular Integral Equations.* Longman Scientific and Technical, 1992.

[2] A. Haimi. *Polyanalytic Bergman Kernels.* Doctoral Thesis. Stockholm, Sweden 2013.

[3] A.D. Koshelev. *On kernel functions for the Hilbert space of polyanalytic functions in the disk.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR [Soviet Math. Dokl.] 232, 277-279 (1977).

[4] A. K. Ramazanov. *On the Structure of Spaces of Polyanalytic Funtions.* Mathematical Notes, Vol. 72, N. 5, 2002.

[5] A. K. Ramazanov. *Representation of the Space of Polyanalytic Functions as a Direct Sum of Orthogonal Subspaces. Application to Rational Approximations.* Mathematical Notes, Vol. 66, N. 5, 1999.

[6] G. D. Villa. *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables Reales.* Departamento de Control Automático, Cinvestav. Vol. 2, 2003.

[7] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. *Theory of Bergman Spaces.* Springer-Verlag. New York, 2000.

[8] I. N. Vekua. *Generalized Analytic Functions.* Pergamon Tress, Oxford, 1962.

[9] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable.* Second Edition. Springer-Verlag, 1995.

[10] K. Zhu. Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, Inc. New York, 1990.

[11] L. D. Abreu and H. G. Feichtinger. *Function Spaces of Polyanalytic Functions.* Universidade de Coimbra, 2013.

[12] L. Peng, R. Rochberg and Z. Wu. *Orthogonal Polynomials and Middle Hankel Operators on Bergman Spaces.* 1991.

[13] L. V. Pessoa. *Dzhuraev's Formulas and Poly-Bergman Kernels on Domains Möbius Equivalent to a Disk.* Complex Anal. Oper. Theory, 2013.

[14] M. B. Balk, *Polyanalytic Functions,* Akad. Verlag, Berlin, 1991.

[15] N. Teodorescu. *La Derivée Aréolaire et ses Applications á la Physique Mathématique.* Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[16] N. L. Vasilevski. *On the Structure of Bergman and Poly-Bergman Spaces.* Integral Equations and Operator Theory. V. 33, 1999.

[17] P. Burgatti. *Sulla Funzioni Analitiche D'ordini n.* Boll. Unione Mat. Ital. 1922.

[18] S. Lang. *Complex Analysis.* Springer-Verlag, 1999.

[19] V. S. Fedorov. *About the Fourier-coefficients.* Math. Sb. 1940.

[20] Y. I. Karlovich and L. V. Pessoa. *Poly-Bergman Projections and Orthogonal Descompositions of L^2-spaces Over Bounded Domains.* Operator Theory. Advances and Applications, Vol. 181, 263-282.