Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman pluriarmónico en $\mathbb{B}^n$.

Tesis que presenta

Mario Alberto Moctezuma Salazar

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemáticas

Directora de Tesis: Dra. Maribel Loaiza Leyva

México, D.F. de 2015

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo.

Contenido

Introducción

Durante las últimas décadas se han estudiado amoliamente los operadores de Toeplitz en espacios de Hilbert. Estos operadores fueron introducidos por el matemático alemán Otto Toeplitz en el año 1911.

En esta tesis nos dedicaremos a estudiar los operadores de Toeplitz con símbolos radiales, cuasihomogéneos, separadamente radiales y separadamente cuasihomogéneos actuando en el espacio de Bergman pluriarmónico. De estos estudiaremos cuando el producto es igual a cero, cuando el producto es de nuevo un operador de Toeplitz y cuando es que conmutan.
La tesis está basada en los siguientes artículos: *Algebraic Properties of Toeplitz Operators on Pluriharmonic Bergman Space* [?] y *Algebraic Properties of Quasihomogeneous and Separately Quasihomogeneous Toeplitz Operators On the Pluriharmonic Bergman Space* [?].

El espacio de Bergman armónico se expresa en términos del espacio de Bergman analítico y del espacio de Bergman anti-analítico. Por ello en el Capítulo 1 estudiaremos estos dos últimos espacios y algunos operadores importantes que actúan en ellos. En la última sección de este capítulo estudiaremos el espacio de Bergman pluriarmónico en la bola unitaria $\mathbb{B}^n$ el cual está relacionado con el espacio de Bergman analítico y con el espacio de Bergman anti-analítico. La proyección de $L^2(\mathbb{B}^n, dV)$ sobre el espacio pluriarmónico la escribiremos en términos de las proyecciones de Bergman y anti-Bergman.

El Capítulo 2 se centrará en estudiar un tipo particular de operadores de Toeplitz: los operadores de Toeplitz con símbolo radial. Los cuales son diagonales con respecto a las bases canónicas del espacio de Bergman analítico y de el espacio de Bergman armónico.
En este capítulo usaremos algunos resultados del libro *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space* [?] y del artículo *Algebraic Properties of Toeplitz Operators with Radial Symbols on the Bergman Space of the Unit Ball* [?].

En el último capítulo analizaremos los operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo, primero actuando en el espacio de Bergman analítico y posteriormente actuando en el espacio de Bergman pluriarmónico. Además estudiaremos una generalización de operadores de Toeplitz con símbolo radial para el espacio de Bergman pluriarmónico, dicha generalización son los operadores de Toeplitz con símbolo separadamente radiales. Estos operadores de Toeplitz, al igual que los operadores de Toeplitz con símbolo radial, son diagonales con respecto a la base canónica del espacio de Bergman pluriarmónico.

El último tipo de operadores de Toeplitz que analizaremos son los operadores de Toeplitz con símbolos separadamente cuasihomogéneos. Estos operadores ya no son diagonales con respecto a la base usual del espacio de Bergman pluriarmónico.

Para finalizar el capítulo abordaremos el problema de cuándo el producto de operadores de Toeplitz, con símbolos previamente estudiados, es cero. Así como las condiciones para que el producto de operadores de Toeplitz con este tipo de símbolos sea conmutativo.

Capítulo 1

Espacios de Bergman

En este capítulo analizaremos algunas propiedades importantes de los espacios de Bergman analítico y anti-analítico en el disco unitario $\mathbb{D}$ del plano complejo. Estos espacios están relacionados de manera directa con el espacio de funciones armónicas. Este último será el espacio donde estudiaremos operadores de Toeplitz con un tipo especial de símbolo.

Si consideramos al disco unitario $\mathbb{D}$ en el plano complejo $\mathbb{C}$, con la medida de área $d\mu$, el espacio de Bergman analítico $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) := A^2(\mathbb{D}, d\mu)$ formado por las funciones analíticas cuadrado integrables es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}) := L^2(\mathbb{D}, d\mu)$. De la misma manera $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D}) = \{f \in L^2(\mathbb{D}) : \overline{f} \ \textit{es analítica}\}$, el espacio anti-Bergman, es también un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$. El espacio armónico, $b^2(\mathbb{D})$, está formado por las funciones complejas armónicas cuadrado integrables en $\mathbb{D}$. Este espacio es, al igual que $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$, cerrado en $L^2(\mathbb{D})$ y está relacionado con el espacio de Bergman de funciones analíticas y anti-analíticas de la siguiente forma

$$b^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) + \widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D}).$$

Hay varias maneras de extender el concepto de función armónica definida en el plano complejo a $\mathbb{C}^n$. En este capítulo nos enfocaremos en la extensión a la bola unitaria $\mathbb{B}^n$ que está relacionada, de manera más directa con el espacio de Bergman y con el espacio anti-Bergman en varias variables complejas. El concepto que estudiaremos es el de función pluriarmónica. Veremos que el espacio $b^2(\mathbb{B}^n) := b^2(\mathbb{B}^n, dV)$, que consiste de funciones pluriarmónicas en $L^2(\mathbb{B}^n) := L^2(\mathbb{B}^n, dV)$, es cerrado.

Es en este espacio donde estudiaremos operadores de Toeplitz cuyos símbolos son radiales, separadamente radiales, cuasihomogéneos y separadamente cuasihomogéneos.

1.1 Espacio de Bergman analítico y anti-analítico

El siguiente lema nos ayudará a establecer la completez de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Lema 1.1. *Sea $K \subset \mathbb{D}$ un conjunto compacto. Existe una constante C_K, que depende de K, tal que*

$$\sup_K |f(z)| \leq C_K \|f\|_2. \tag{1.1}$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $\delta(K) = \frac{1}{2} d(K, \partial\mathbb{D})$. Fijemos un punto $a \in K$, entonces $\overline{B_{\delta(K)}(a)} \subset \mathbb{D}$ y en esta bola, la función f tiene un desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k, \ \textit{donde } a_0 = f(a). \tag{1.2}$$

En coordenadas polares, $z - a = re^{i\theta}$ $(0 \leq r \leq \delta(K), \quad 0 \leq \theta < 2\pi)$, tenemos

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k \overline{a_l} r^{k+l} e^{i(k-l)\theta}.$$

Por ello

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu \geq \int_{\overline{B_{\delta(K)}(a)}} |f(z)|^2 d\mu \\ &= \int_0^{\delta(K)} \int_0^{2\pi} r \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k \overline{a_l} r^{k+l} e^{i(k-l)\theta} d\theta dr. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dado que la serie de Taylor (**??**) es uniformemente convergente

$$\|f\|_2^2 \geq \int_0^{\delta(K)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} r a_k \overline{a_l} r^{k+l} e^{i(k-l)\theta} dr d\theta.$$

Notando que

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\geq 2\pi \int_0^{\delta(K)} \sum_{k,l=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k+1} dr = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2 \delta(K)^{2k+2}}{k+1} \\ &= \pi\delta(K)^2 |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2 \delta(K)^{2k+2}}{k+1} \geq \pi\delta(K)^2 |f(a)|^2, \end{aligned}$$

de lo cual vemos que $\pi\delta(K)^2|f(a)|^2 \leq \|f\|_2^2$ y $|f(a)| \leq \dfrac{\|f\|_2}{\delta(K)\sqrt{\pi}}$. Si hacemos $C_K = \dfrac{1}{\delta(K)\sqrt{\pi}}$ obtenemos el resultado deseado. □

Proposición 1.2. *El espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ que converge en $L^2(\mathbb{D})$ a cierta función f. Por el lema anterior, para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$ y $z \in K$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq C_K \|f_n - f_m\|_2.$$

Esto implica que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f sobre todo subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Por lo tanto f es analítica en $\mathbb{D}$. □

El Lema **??** también es válido si se sustituye $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ por $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$. Del Lema **??**, $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$, es también un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.

1.1.1 Núcleos reproductores y proyecciones ortogonales

Para $z \in \mathbb{D}$ el operador evaluación $\varphi_z : f \mapsto f(z)$ es lineal y, por el Lema **??**, es acotado. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento $k_z \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tal que $\varphi_z =< \cdot, k_z >$. Esto es,

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{k_z(\zeta)}d\mu(\zeta).$$

A $K(z,\zeta) := \overline{k_z(\zeta)}$ se le llama el núcleo reproductor analítico de $\mathbb{D}$.

Usando una base ortonormal del espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ podemos dar la forma explícita del núcleo reproductor $K_{\mathbb{D}}(z,\zeta)$. De hecho, si $\{e_n(z)\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$

$$K(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_z, e_n \rangle e_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(\zeta)}.$$

En particular, para la base $e_n(z) = \sqrt{n} z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

$$K(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n} z^{n-1}\right)\left(\sqrt{n}\ \overline{\zeta}^{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(z\overline{\zeta})^{n-1} = \frac{1}{(1 - z\overline{\zeta})^2}.$$

Podemos ver también que el núcleo $K_{\mathbb{D}}(z,\zeta)$ es antisimétrico. Pues

$$\overline{K(z,\zeta)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(\zeta)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)}e_n(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(\zeta)\overline{e_n(z)} = K(\zeta, z).$$

Ahora bien, dado que $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$ existe la proyección ortogonal $B_{\mathbb{D}}$, de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Teorema 1.3. *La representación de la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ denotada por $B_{\mathbb{D}}$ está dada por*

$$(B_{\mathbb{D}}f)(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta)f(\zeta)d\mu(\zeta). \tag{1.4}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(B_{\mathbb{D}}f)(z) &= \langle B_{\mathbb{D}}f, k_z\rangle = \langle f, B_{\mathbb{D}}k_z\rangle = \langle f, k_z\rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{k_z(\zeta)}d\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} K(z,\zeta)f(\zeta)d\mu(\zeta).\end{aligned}$$

□

Utilizando el Lema **??** con $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$ en lugar de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, podemos mostrar que la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$, denotada por $\widetilde{B}_{\mathbb{D}}$, está dada por

$$(\widetilde{B}_{\mathbb{D}}f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \widetilde{K}(z,\zeta)f(\zeta)d\mu(\zeta), \tag{1.5}$$

donde $\widetilde{K}(z,\zeta) = \frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2}$.

1.2 Espacio de Bergman armónico

Sea G un subconjunto abierto y simplemente conexo del plano complejo. Una función $u : G \to \mathbb{C}$ se llama **armónica** si las segundas derivadas parciales de u existen, son continuas y su laplaciano es igual a cero

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Sea $z = x + iy$, entonces $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$. Si consideramos a f como una función de z y $\overline{z}$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{-i}{2}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{-i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

De donde tenemos $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, una función analítica f cumple

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{1.6}$$

Por otro lado si f es anti-analítica se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1.7}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Usando (**??**) y (**??**) tenemos que tanto las funciones analíticas, como las anti-analíticas son funciones armónicas.

Teorema 1.4. *Una función armónica u definida en un dominio simplemente conexo $G \subset \mathbb{C}$ tienen la representación*

$$u = f + \overline{g}, \tag{1.9}$$

donde f y g son funciones analíticas. Esta representación es única salvo adición de constantes.

Demostración. Dado que u es armónica, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$, por lo que la función $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ es analítica. Sea f una función analítica, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$. Sea $z_1 \in G$ y $\gamma : [0,1] \to G$ una curva suave que une 0 y z_1, entonces $f(z_1) = \displaystyle\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Tomemos $g = \overline{u} - \overline{f}$. Observemos que

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} - \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} = 0,$$

esto implica que g es analítica y por lo tanto $u - f = \overline{g}$. Tenemos también que $u - f = \overline{g}$ donde f y g son analíticas.

Para demostrar la unicidad de la representación (??), supongamos que $u = f_1 + \overline{g_1}$, donde $f_1,\ g_1$ son analíticas. Tenemos entonces $f_1 + \overline{g_1} = f + \overline{g}, \quad f_1 - f = \overline{g_1} - \overline{g}$. Como $f_1 - f$ es analítica y $\overline{g_1} - \overline{g}$ es anti-analítica, $f_1 - f$ debe de ser constante, por lo que $f_1 = f + k_1, \quad g_1 = g + k_2$, o bien, $f_1 + \overline{g_1} = f + \overline{g} + k$. Esto muestra que la representación es única salvo adición de constantes. $\square$

La siguiente proposición es conocida como la identidad de Green.

Proposición 1.5. *Consideremos las funciones $u,\ v$ de clase $\mathcal{C}^2$ en $B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$, entonces*

$$\int_{B_r(z)} (u\Delta v - v\Delta u) dm(z) = \int_{\partial B_r(z)} (u\nabla v \cdot \overrightarrow{n} - v\nabla u \cdot \overrightarrow{n}) ds,$$

donde $dm(z) = \frac{1}{\pi r^2} dxdy$, ds la medida de longitud y $\overrightarrow{n}$ un vector normal.

Demostración. Calculemos, por un lado,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (u\nabla v) &= \frac{\partial}{\partial x}(u\nabla v) + \frac{\partial}{\partial y}(u\nabla v) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(u \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&= \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.
\end{aligned}$$

De la misma forma, calculemos $\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$. Al restar ambas expresiones obtenemos $\nabla \left(u\nabla v - v\nabla u\right) = u\Delta v - v\Delta u$. $\square$

Una vez teniendo esta identidad podemos dar paso al principio del valor medio.

Proposición 1.6 (Principio del valor medio)**.** *Para una función armónica u en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}$, se tiene*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta. \tag{1.10}$$

Demostración. Consideremos $\varepsilon \in (0, 1)$, $\Omega = \{z = x + iy : \varepsilon < |z| < 1\}$, la función armónica $v(z) = log|z|$ y el vector normal $\overrightarrow{n} = \left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right)$.

Primero notemos que $\nabla v \cdot \overrightarrow{n} = \left(\frac{x}{|z|^2}, \frac{y}{|z|^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right) = \frac{1}{|z|}$ y que $\Delta u = \Delta v = 0$.
Usando la identidad de Green (Proposición **??**) como $\int_{B_r(z)}(u\Delta v - v\Delta u)dm(z) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Omega} (u\nabla v \cdot \overrightarrow{n} - v\nabla u \cdot \overrightarrow{n})\, ds = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{1}{|z|} - log|z|\nabla u \cdot \overrightarrow{n}\right) ds \\
&= \int_{\partial\mathbb{D}} u\frac{1}{|z|}ds - \int_{\varepsilon\partial\mathbb{D}} u\frac{1}{|z|}ds - \int_{\partial\mathbb{D}} log|z|\nabla u \cdot \overrightarrow{n} ds + \int_{\varepsilon\partial\mathbb{D}} log|z|\nabla u \cdot \overrightarrow{n} ds \\
&= \int_{\partial\mathbb{D}} u\frac{1}{|z|}ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\mathbb{D}} uds.
\end{aligned}$$

La última igualdad se da, dado que $log|z| = 0$ en $\partial\mathbb{D}$ y $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \overrightarrow{n} ds = 0$. Tenemos, para $w \in \partial\mathbb{D}$

$$\int_{\partial\mathbb{D}} u(w)ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\mathbb{D}} u(w)ds = \int_{\partial\mathbb{D}} u(\varepsilon w)ds.$$

Notemos que $u(\varepsilon w)$ converge uniformemente a $u(w)$ cuando $\varepsilon \to 1$. Tomando coordenadas polares y $\varepsilon \to 0$,

$$u(0) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta.$$

□

El principio del valor medio para funciones armónicas motiva la definición de la integral de Poisson.

Definición 1.7 (Integral de Poisson)**.** *Sea u una función continua en $\overline{B_R(0)}$. La integral de Poisson de u, denotada por $P[u]$, es la función definida en $B_R(0)$ por:*

$$P[u](z) = \int_{\partial B_R(0)} u(w)P_R(z,w)dw \quad \text{para } z \in B_R(0), \quad w \in \partial B_R(0). \tag{1.11}$$

Donde $P_R(z,w) = \dfrac{R^2 - |z|^2}{|w-z|^2}$ *es llamado el núcleo de Poisson.*

Es fácil demostrar que el núcleo de Poisson $P_R(z,w)$ es una función armónica con respecto a la variable z.
Tenemos que

$$\Delta P[u](z) = \int_{B_R(0)} u(w)\Delta P_R(z,w)dw = 0,$$

esto es, la integral de Poisson de una función continua en $\mathbb{D}$, es una función armónica.

Proposición 1.8. *Toda función armónica u en $B_R(0)$, con $R \leq 1$, $z_0 \in B_R(0)$ y continua en $\overline{B_R(0)}$, se puede representar como*

$$u(z_0) = \int_{\partial B_R(0)} P_R(z_0, w)u(w)dw. \tag{1.12}$$

Demostración. Para $z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$. Podemos tomar la transformación $z = T(\zeta) = \dfrac{R(R\zeta + z_0)}{\zeta\overline{z_0} + R}$, la cual mapea $\{|w| < 1\} \mapsto \{|z| < R\}$ y $0 \mapsto z_0$. Si tomamos $\tilde{u} = u \circ T$, esto es $\tilde{u}(\zeta) = u(z)$, es fácil ver que $\tilde{u}$ es armónica por la propiedad del valor medio,

$$u(z_0) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\phi})d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{d\phi}{d\theta}d\theta.$$

Consideremos $e^{i\phi} = \zeta = \dfrac{w - z_0}{-\overline{z_0}w + 1}$, donde $w = e^{i\theta}$, luego $d\zeta = i\zeta d\phi$, $\quad dw = iwd\theta$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\theta} &= \frac{d\zeta}{dw}\frac{w}{\zeta} = \frac{R(R - |z|^2)}{(-\overline{z_0}w + R^2)^2} \cdot w \cdot \frac{R^2 - \overline{z_0}w}{R(w - z_0)} \\
&= \frac{(R^2 - |z_0|^2)w}{(-\overline{z_0}w + w\overline{w})(w - z_0)} = \frac{R^2 - |z_0|^2}{|w - z_0|^2},
\end{aligned}$$

teniendo así el núcleo de Poisson. Notemos que con esta transformación tenemos otra representación del núcleo de Poisson en términos de z y θ

$$P_R(z, \theta) = \frac{1}{2\pi R^2}\frac{R^2 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}.$$

De donde que podemos ver

$$\begin{aligned}
u(z_0) &= u(R_0 e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - R_0^2}{|R^2 e^{i\theta} - R_0 e^{i\theta_0}|^2} u(Re^{i\theta})d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|Re^{i\theta} - z_0|^2} u(Re^{i\theta})d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} P_R(z, \theta)u(\theta)d\theta = P[u](z_0),
\end{aligned}$$

o bien

$$u(z_0) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|w - z_0|^2}u(w)dw = \int_{\partial B_R(0)} P_R(z_0, w)u(w)dw = P[u](z_0).$$

□

A partir de este resultado podemos dar el siguiente criterio de convergencia.

Proposición 1.9. *Sea (u_n) una sucesión de funciones armónicas en $\mathbb{D}$, que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ a una función u, entonces u es armónica en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Sean $z_o \in \mathbb{D}$, $r_0 > 0$ y $\mathbb{D}_0 = B_{r_0}(z_0)$ con $\overline{\mathbb{D}_0} \subset \mathbb{D}$, es suficiente probar que u es armónica en $\mathbb{D}_0$. Por (**??**) cada u_n tiene la representación

$$u_n(z) = \int_{\partial \mathbb{D}_0} u_n(w) P(z,w) d\mu(w), \tag{1.13}$$

para cada $z \in \mathbb{D}_0$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora tomando límites cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la ecuación (**??**) tenemos que

$$u(z) = \int_{\partial \mathbb{D}_0} u(w) P(z,w) d\mu(w),$$

por lo que u es armónica en $\mathbb{D}_0$. □

Denotemos por $b^2(\mathbb{D})$ al conjunto de funciones armónicas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\mathbb{D}} |u(z)|^2 d\mu \right)^{1/2} < \infty.$$

Necesitaremos una equivalencia de la propiedad del valor medio, esta vez para la cualquier bola, teniendo.

Proposición 1.10. *Sea u una función armónica en $\mathbb{D}$, para $r < 1$ y $z \in \mathbb{D}$, con $B_r(z) \subset \mathbb{D}$ se tiene*

$$u(z) = \frac{1}{r^2} \int_{B_r(z)} u(w) d\mu,$$

para $w \in B_r(z)$.

Para más detalles ver el libro *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$ [**?**].

La siguiente proposición nos muestra que para cada $z \in \mathbb{D}$, el funcional lineal $u \mapsto u(z)$ es continuo en $b^2(\mathbb{D})$.

Proposición 1.11. *Dado $z \in \mathbb{D}$, existe una constante C tal que $|u(z)| \leq C\|u\|_2$ para cada $u \in b^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $r = 1 - |z|$, aplicando la propiedad del valor medio para u en $B_r(z)$, tenemos

$$|u(z)| = \frac{1}{r^2} \int_{B_r(z)} u(w) d\mu \leq \frac{1}{r^2} \int_{B_r(z)} |u(w) \chi_{B_r(z)}(w)| d\mu.$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}|u(z)| &\leq \frac{1}{r^2}\int_{B_r(z)}|u(w)\chi_{B_r(z)}(w)|d\mu\\ &\leq \frac{1}{r^2}\left(\int_{B_r(z)}|u(z)|^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{B_r(z)}d\mu\right)^{1/2}\leq \frac{1}{r^2}\|u\|_2.\end{aligned}$$

□

Teniendo en cuenta el criterio de convergencia dado en la Proposición **??** podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 1.12. *El espacio $b^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Supongamos que (u_n) es una sucesión de funciones armónicas que convergen a una función u en $L^2(\mathbb{D})$. Sea K un conjunto compacto de $\mathbb{D}$, al ser compacto, existe $R>0$ tal que $K\subset B_R(0)$, tomando $C_K=\frac{1}{R^2}$ y por la Proposición **??**

$$|u_n(z)-u_m(z)|\leq C_K\|u_n-u_m\|_2 \tag{1.14}$$

para todo $z\in K$ y $n,m\in\mathbb{N}$. Como (u_n) es una sucesión de Cauchy en $b^2(\mathbb{D})$, la desigualdad (**??**) muestra que (u_n) es una sucesión de Cauchy en $C(K)$, por lo que converge uniformemente en K. Por otro lado sabemos que si (u_n) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ a una función v, ésta tiene que ser armónica en $\mathbb{D}$. Ahora bien como, (u_n) converge a u en $L^2(\mathbb{D})$, alguna subsucesión de (u_n) converge puntualmente a u en c.t.p. de $\mathbb{D}$.
Por lo que $u=v$ en c.t.p., esto nos dice que $u\in b^2(\mathbb{D})$. □

1.3 Preliminares de la Bola unitaria en $\mathbb{C}^n$

Para $n\geq 1$, cualquier $z\in\mathbb{C}^n$, lo escribimos como $z=(z_1,\ldots,z_n)$. Tenemos el producto interno y la norma de $\mathbb{C}^n$, definidos como $\langle z,w\rangle = z\cdot\overline{w}=z_1\overline{w_1}+\ldots+z_n\overline{w_n}$, $|z|=\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_2|^2}$, para cualesquiera $z,w\in\mathbb{C}^n$.

Sea $\mathbb{B}^n$ la bola unitaria que consiste en puntos $z\in\mathbb{C}^n$ tales que $|z|<1$. Sea dV la medida de Lebesgue de volumen normalizada en $\mathbb{B}^n$ y $d\sigma$ la medida de superficie normalizada en $\partial\mathbb{B}^n$.

Para cualquier multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y cualquier $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}^n$, escribimos

$$\begin{aligned}|\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,\\ \alpha! &= \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!,\\ z^\alpha &= z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

Para cualesquiera dos multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, usamos la notación $\alpha \succeq \beta$ si $\alpha_i \geq \beta_i$, para todo i y $\alpha \perp \beta$ si $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0$. Si $\alpha \succeq \beta$, $\alpha - \beta$ se denota por $(\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ observe que $\alpha \succeq \beta$, $|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta|$.

Veamos a continuación propiedades y relaciones de las medidas de volumen y de superficie en la bola unitaria.

Proposición 1.13. *Las medidas σ y V están relacionadas por*

$$\int_{\mathbb{B}^n} f(z)dV(z) = 2n \int_0^1 r^{2n-1} \int_{\partial\mathbb{B}^n} f(r\zeta)d\sigma(\zeta)dr. \tag{1.15}$$

Demostración. Un punto $z \in \mathbb{C}^n$, se puede escribir como $z = r \cdot \zeta$, donde $r = |z|$ y $\zeta = \frac{z}{|z|}$. Teniendo en cuenta que la medida de Lebesgue normalizada $dV = cdx_1dy_1 \cdots dx_ndy_n$, con c la constante de normalización, se escribe en coordenadas polares como $dV = 2nr^{2n-1}drd\sigma(\zeta)$, tenemos

$$\int_{\mathbb{B}^n} f(z)dV(z) = 2n \int_0^1 r^{2n-1} \int_{\partial\mathbb{B}^n} f(r\zeta)drd\sigma(\zeta).$$

□

Vamos a utilizar la identidad

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} f(z)d\sigma(z) = \int_{\mathbb{B}^{n-1}} dV(z')\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z', e^{i\theta}z_n)d\theta. \tag{1.16}$$

Tomando $z = (z', z_n)$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $z_n \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} f(z)d\sigma(z) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} f(z', z_n)d\sigma(z).$$

Al ser σ invariante ante transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} f(z)d\sigma(z) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} f(z', e^{i\theta}z_n)d\sigma(z),$$

para toda $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Integramos con respecto a $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} f(z)d\sigma(z) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} d\sigma(z')\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z', e^{i\theta}z_n)d\theta.$$

Notemos que $\int_{\partial\mathbb{B}^n} d\sigma(z')$ es independiente de z_n dado que $|z_n|^2 = 1 - |z'|^2$, entonces podemos tomar la proyección ortogonal P de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$ y tenemos

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} f \circ P d\sigma = \int_{\mathbb{B}^{n-1}} f dV_{n-1}.$$

Obteniendo así la identidad deseada.

Las siguientes dos proposiciones nos muestran integrales sobre la bola y la esfera que estaremos utilizando en secciones posteriores.

Proposición 1.14. *Si α y β son multi-índices y $\alpha \neq \beta$, entonces*

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} z^\alpha \overline{z}^\beta d\sigma = 0.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha_n \neq \beta_n$. Usando (**??**) con $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, con $f(z) = z^\alpha \overline{z}^\beta$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}^n} z^\alpha \overline{z}^\beta d\sigma &= \int_{\mathbb{B}^{n-1}} dV_{n-1}(z')\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z', e^{i\theta}z_n)^\alpha \overline{(z', e^{i\theta}z_n)}^\beta d\theta \\ &= \int_{\mathbb{B}^{n-1}} (z', z_n)\overline{(z', z_n)} dV_{n-1}(z')\frac{1}{2\pi} e^{i(\alpha_n - \beta_n)\theta} d\theta = 0.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.15. *Para todo multi-índice α,*

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma = \frac{(n-1)!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}, \tag{1.17}$$

y

$$\int_{\mathbb{B}^n} |z^\alpha|^2 dV = \frac{n!\alpha!}{(n+|\alpha|)!}. \tag{1.18}$$

Demostración. Para probar (**??**) usaremos la integral

$$I = \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-|z|^2} dm_{2n},$$

donde dm_{2n} es la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{R}^{2n}$.
Notemos que el integrando es $\prod_{j=1}^{n} |z_j|^{2\alpha_j} e^{-|z_j|^2}$. Por el Teorema de Fubini, tenemos

$$I = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^{2\alpha_j} e^{-|\lambda|^2} dm_2 = \pi^n \alpha!.$$

Escribiendo I en coordenadas polares

$$\pi^n \alpha! = c_n 2n \int_0^\infty r^{2|\alpha|+2n-1} e^{-r^2} dr \int_{\partial\mathbb{B}^n} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma.$$

Entonces

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} |\zeta^\alpha|^2 d\sigma = \frac{\pi^n \alpha!}{(n-1+|\alpha|)! n c_n}.$$

Tomando $\alpha = 0$, tenemos $c_n = \dfrac{\pi^n}{n!}$. Esto prueba (**??**). Aplicando otro cambio de coordenadas polares a (**??**) obtenemos (**??**). $\square$

1.3.1 Transformada de Mellin

La transformada de Mellin $\widehat{\varphi}$ de una función $\varphi \in L^1([0,1], rdr)$ está definida por

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_0^1 \varphi(r) r^{z-1} dr, \tag{1.19}$$

donde $z \in \{z : Re(z) > 2\}$. La transformada de Mellin es una función analítica y acotada.

Veamos un teorema de variable compleja que nos será útil al emplear la transformada de Mellin en cálculos para operadores de Toeplitz.

Teorema 1.16. *Suponga que f es una función analítica y acotada en $\{z : Re(z) > 0\}$, que se anula en los puntos $z_1, z_2, \ldots$, donde*

- $\inf\{|z_n|\} > 0$ *y*
- $\sum_{n\geq 1} Re\left(\frac{1}{z_n}\right) = \infty$.

Entonces f se anula idénticamente en $\{z : Re(z) > 0\}$.

Demostración. Para $z \in \{z : Re(z) > 0\}$ tomemos $t(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Tenemos entonces que

$$1 - |t(z)|^2 = 4\frac{Re(z)}{|z-1|^2} = \frac{4}{|1+z^{-1}|^2}Re(1/z).$$

Tomando $\delta = \inf\{|z_n|\}$, para $|z| \geq \delta$, tenemos que $|1+z^{-1}|^{-2} \geq (1+\delta^{-1})^{-2}$, entonces

$$\sum_{n\geq 1} \frac{Re(z_n)}{|1+z_n|^2} \geq \frac{1}{(1+\delta^{-1})^2} \sum_{n\geq 1} Re\left(\frac{1}{z_n}\right) = \infty.$$

La condición de Blaschke para $\{z : Re(z) > 0\}$, nos dice que $\sum \frac{Re(z_n)}{|1+z_n|^2} < \infty$ si y sólo si $z_1, z_2, \ldots$ son divisores de una función $f \neq 0$ analítica y acotada en $\{z : Re(z) > 0\}$. Por lo que f debe de ser idénticamente cero en $\{z : Re(z) > 0\}$. □

Nota 1. *Estaremos usando el Teorema* **??** *para mostrar que si* $\varphi \in L^1([0,1], rdr)$ *y si existe una sucesión* $(n_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{N}$ *tal que* $\widehat{\varphi}(n_k) = 0$ *y* $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n_k} = \infty$, *entonces* $\widehat{\varphi}(z) = 0$, *para todo* $z \in \{z : Re(z) > 2\}$ *y por ende,* $\varphi = 0$.

Si f y g están definidas en $[0,1)$, su convolución de Mellin es definida como la función

$$(f *_M g)(r) = \int_r^1 f\left(\frac{r}{t}\right) g(t)\frac{dt}{t}, \quad 0 \leq r < 1. \tag{1.20}$$

Teorema 1.17. *Si* $f, g \in L^1([0,1), rdr)$, *entonces*

$$\widehat{f *_M g}(z) = \widehat{f}(z)\widehat{g}(z). \tag{1.21}$$

Demostración. Aplicando la transformada de Mellin a $f *_M g$ tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{f *_M g}(z) &= \int_0^1 (f *_M g)(r) r^{z-1} dr = \int_0^1 \left(\int_r^1 f\left(\frac{r}{t}\right) g(t)\frac{dt}{t}\right) r^{z-1} dr \\ &= \int_0^1 \int_0^t f\left(\frac{r}{t}\right) r^{z-1} dr g(t)\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene de intercambiar las integrales. Haciendo el cambio de variable $x = \frac{r}{t}$, $dx = \frac{dr}{t}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^t f\left(\frac{r}{t}\right) r^{z-1} dr g(t)\frac{dt}{t} &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)(xt)^{z-1} dx g(t) dt \\ &= \int_0^1 f(x)x^{z-1}dx \int_0^1 g(t)t^{z-1}dt = \widehat{f}(z)\widehat{g}(z).\end{aligned}$$

Donde la última ecuación corresponde a $\widehat{f}(z)$ y $\widehat{g}(z)$, respectivamente, lo cual nos lleva al resultado deseado.
Más aún si f y g están en $L^1([0,1], rdr)$ entonces también lo está $f *_M g$. $\square$

1.4 Espacio de Bergman pluriarmónico

Cuando consideramos $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, hay varios conceptos de armonicidad, todos ellos diferentes.

Definimos el laplaciano Δu de u por

$$\Delta u = 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z}_k}.$$

Para un dominio G en $\mathbb{C}^n$ se tienen las siguientes tres definiciones

(i) Una función C^2, $f : G \to \mathbb{C}$ es **armónica** si $\Delta f = 0$ en G.

(ii) Una función C^2, $f : G \to \mathbb{C}$ es **separadamente armónica** si

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Esto es, f es armónica en cada variable.

(iii) Una función de clase C^2, $f : G \to \mathbb{C}$ es **pluriarmónica** si

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = 0 \quad \forall j, k = 1, \ldots, n.$$

De las definiciones es claro que toda función pluriarmónica es separadamente armónica y a su vez cada función separadamente armónica es armónica.

Por ejemplo la función $f(z_1, z_2) = z_1 \overline{z_2}$ es una función armónica en cada variable, es decir, separadamente armónica, sin embargo no es pluriarmónica.

Toda función pluriarmónica $u \in \mathbb{B}^n$, satisface $\Delta u = 0$. Notemos que si f y g son funciones holomorfas, entonces $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$ y $\frac{\partial \overline{g}}{\partial z_k} = 0$, por lo que ambas son pluriarmónicas. En particular $f + \overline{g}$ también lo es.

Teorema 1.18. *Una función u en $\mathbb{B}^n$ es pluriarmónica si y sólo si admite una descomposición de la forma $u = f + \overline{g}$, donde f y g son funciones analíticas en $\mathbb{B}^n$.*

Demostración. Dado que u es armónica, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right) = 0$, por lo que $\dfrac{\partial u}{\partial z_k}$ es analítica para toda k. Consideremos f analítica, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial z_k} = \dfrac{\partial u}{\partial z_k}$, para $k = 1, \ldots, n$, de esta forma tomando $\gamma : [0,1] \to G$ una curva suave de 0 a $z_1 \in G$, entonces $f(z) = \sum z_k \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z_k} dz$ y tomemos $g = \overline{u} - \overline{f}$, observemos que

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}_k} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_k} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)} - \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_k}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)} - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)} = 0,$$

para toda k, por lo que g es analítica, por lo tanto $u - f = \overline{g}$, $\;u = f + \overline{g}$, donde f y g son analíticas. □

El siguiente teorema nos da una caracterización muy interesante de las funciones pluriarmónicas. Una función es pluriarmónica si es armónica en cada plano que pase por el dominio. Esta característica fue estudiada por Forelli en 1977 [?].

Teorema 1.19 (Teorema de Forelli)**.** *Sea $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ la bola unitaria y $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}^n})$. Suponga que para cada $b \in \partial\mathbb{B}^n$ la función $u_b : \zeta \mapsto u(\zeta \cdot b)$ es armónica en $\mathbb{D}$, el disco unitario, y además $u \in \mathcal{C}^\infty$ en una vecindad del origen. Entonces u es pluriarmónica en $\mathbb{B}^n$.*

Demostración. Para cada $z \in \mathbb{B}^n$ si $\mu \in \mathbb{C}$ y $|\mu| < \frac{1}{|z|}$, por hipótesis $\mu \mapsto u(\mu z)$ es armónica, dado que $z\mu \in \mathbb{D}$, entonces, para cada $z \in \mathbb{B}^n$, existe una sucesión de coeficientes $f_k(z)$ tal que

$$u(\mu z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k}(z)\overline{\mu}^k + c_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)\mu^k. \tag{1.22}$$

La serie converge absolutamente, en particular

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k(z)| < \infty, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.23}$$

Definamos

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z), \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.24}$$

Entonces tenemos

$$u(z) = u(0) + f(z) + \overline{f(z)}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.25}$$

De (??), para $\lambda \in \mathbb{D}$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\lambda z)\mu^k = f(\lambda\mu z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)\lambda^k\mu^k.$$

Luego, para $z \in \mathbb{B}^n$, $|\lambda| \leq 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$F_k(\lambda z) = \lambda^k F_k(z). \tag{1.26}$$

Otra consecuencia de (??) es

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}z)e^{-ik\theta}d\theta. \tag{1.27}$$

Ahora, fijemos $k > 0$, por hipótesis $u \in C^k$, por lo que $F_k \in C^k$, en particular F_k es acotada, entonces (??), implica que $F_k(z) = O(|z|^k)$ cuando $z \to 0$. La expansión en serie de Taylor de F_k tiene la forma

$$F_k(z) = \sum_{r+s=k} P_{r,s}(z) + |z|^k\gamma(z), \tag{1.28}$$

donde $P_{r,s}(z)$ es un polinomio de grado r en la variable z y grado s en las variable $\overline{z}$ y $\gamma(z) \to 0$, cuando $z \to 0$. Si combinamos (??) y (??), para $\lambda > 0$ vemos que

$$\sum_{r+s=k} \lambda^k\overline{\lambda}^s P_{r,s}(z) + |\lambda z|^k\gamma(\lambda z) = \sum_{r+s=k} \lambda^k P_{r,s}(z) + \lambda^k|z|^k\gamma(z). \tag{1.29}$$

Dado que las sumas son iguales, $\gamma(\lambda z) = \gamma(z)$. Haciendo $\lambda \to 0$, podemos ver que $\gamma = 0$. Ahora dado que las sumas son iguales para $\lambda \in \mathbb{D}$, entonces $P_{r,s}(z) = 0$ salvo cuando $r = k$, $s = 0$. Esto muestra que F_k es un polinomio homogéneo de grado k.

De (??), (??) tenemos que f es una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Por (??) se tiene que u es pluriarmónica. □

Nota 2. *Si u es pluriarmónica, cumple $\Delta u = 0$, si tomamos $b \in \partial\mathbb{B}^n$, $\zeta \in \mathbb{D}$ y u_b, como en el teorema, entonces por la regla de la cadena u_b es armónica en $\mathbb{D}$.*

En la bola unitaria $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{C}^n$ tenemos el operador de Laplace-Beltrami $\tilde{\Delta}$, definido por

$$\tilde{\Delta}u = (1-|z|^2)\left[\Delta u - 4\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right],$$

donde $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$.
Toda función pluriarmónica u en $\mathbb{B}^n$, satisface $\Delta u = \tilde{\Delta}u = 0$. El siguiente teorema nos muestra que el recíproco también es cierto.

Teorema 1.20. *Si u es una función en $\mathbb{B}^n$ que satisface $\Delta u = 0$ y $\tilde{\Delta}u = 0$, entonces u es pluriarmónica.*

Demostración. Si $\Delta u = \tilde{\Delta}u = 0$, entonces de $\tilde{\Delta}u = 0$, tenemos que

$$\Delta'(u) = 4\sum_{i,j=1}^{n} z_i\overline{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} = 0. \tag{1.30}$$

Sea $b \in \partial\mathbb{B}^n$, $\mu \in \mathbb{D}$ y $z = b\mu$, $u_b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{B}^n)$. Por regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \mu}u(b\mu) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}u(b\mu)\frac{\partial z_j}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}u(b\mu)\frac{\partial \overline{z}_j}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}u(b\mu)b_j,$$

donde $b_j = \frac{\partial z_j}{\partial \mu}$ y $\frac{\partial \overline{z}_j}{\partial \mu} = 0$. Aplicando ahora la parcial con respecto a $\overline{\mu}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial \mu}u(b\mu)\right) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \overline{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}u(b\mu)\frac{\partial z_j}{\partial \mu}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \overline{\mu}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}u(b\mu)\right)\frac{\partial z_j}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial z_j}u(b\mu)\frac{\partial^2 z_j}{\partial \overline{\mu}\partial \mu}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_l \partial z_j}u(b\mu)\frac{\partial \overline{z}_j}{\partial \overline{\mu}} + \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial z_j}u(b\mu)\frac{\partial z_j}{\partial \overline{\mu}}\right]\frac{\partial z_j}{\partial \mu}\\
&= \sum_{j,l=1}^{n}\overline{b_l}b_j\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial z_j}u(b\mu).
\end{aligned}$$

Con $\overline{b_l} = \overline{\left(\frac{\partial z_j}{\partial \mu}\right)}$ y $\frac{\partial z_j}{\partial \overline{\mu}} = 0$. Entonces podemos ver que

$$\Delta' u(z) = \mu\overline{\mu}\frac{\partial^2}{\partial \overline{\mu}\partial \mu}u(b\mu) = 0. \tag{1.31}$$

Esto es u_b es armónica, del Teorema **??**, Teorema de Forelli, tenemos que u es pluriarmónica. □

Toda función pluriarmónica cumple con la propiedad del valor medio.

Proposición 1.21. *Si u es pluriarmónica en $B_r(a)$ y continua en $\overline{B_r(a)}$, entonces*

$$u(a) = \int_{\partial B_r(a)} u(a + r\zeta) d\sigma(\zeta).$$

O bien

$$u(a) = \frac{1}{V(B_r(a))} \int_{B_r(a)} u(z) dV.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_r(a) = \mathbb{B}^n$. Fijemos $\varepsilon \in (0, 1)$. Aplicando la identidad de Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - u\Delta u)\, dV = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v \cdot n - v\nabla u \cdot n)\, d\sigma,$$

con $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \varepsilon < |z| < 1\}$ y $v(z) = |z|^{2-n}$ para tener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left(u\nabla|z|^{2-n} \cdot n - |z|^{2-n}\nabla u \cdot n\right) d\sigma = |2-n| \int_{\partial\Omega} u d\sigma - \int_{\partial\Omega} |z|^{2-n}\nabla u \cdot n d\sigma \\ &= |2-n| \left[\int_{\partial\mathbb{B}^n} u d\sigma - \varepsilon^{1-n} \int_{\varepsilon\partial\mathbb{B}^n} u d\sigma\right] - \int_{\partial\mathbb{B}^n} \nabla u \cdot n d\sigma + \varepsilon^{2-n} \int_{\varepsilon\partial\mathbb{B}^n} \nabla u \cdot n d\sigma. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la identidad de Green sabemos que $\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n d\sigma = 0$, entonces los últimos términos de la ecuación son cero, teniendo así

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} u d\sigma = \varepsilon^{1-n} \int_{\varepsilon\partial\mathbb{B}^n} u d\sigma = \int_{\partial\mathbb{B}^n} u(\varepsilon\zeta) d\sigma.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ y usando la continuidad de u obtenemos

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} u d\sigma = u(0).$$

De la ecuación (**??**) podemos pasar a la bola y obtener así

$$u(0) = \int_{\mathbb{B}^n} u(z) dV.$$

□

Tenemos ahora un criterio de convergencia en sucesiones de funciones pluriarmónicas.

Proposición 1.22. *Sea (u_n) una sucesión de funciones pluriarmónicas en $\mathbb{B}^n$ y continuas en $\overline{\mathbb{B}^n}$, que converge uniformemente en conjuntos compactos de $\mathbb{B}^n$ a una función u, entonces u es pluriarmónica.*

Demostración. Para cada $b \in \partial\mathbb{B}^n$ tomemos $G_b = \{b \cdot \zeta : \zeta \in \mathbb{D}\}$, entonces cada subconjunto compacto de G_b es subconjunto compacto de $\mathbb{B}^n$, por lo que u_n converge uniformemente, entonces $u_n \to u$ en G_b, tomando $u_{b,n}$, para cada u_n, convergen a una función armónica v_b en G_b. Ahora, dado que tenemos convergencia puntual $v_b = u_b$ c.t.p. por lo que para cada $b \in \partial\mathbb{B}^n$ u_b es armónica, por el Teorema de Forelli tenemos que u es pluriarmónica. □

Denotemos por $b^2(\mathbb{B}^n)$ al espacio de Bergman pluriarmónico, el cual es un sub-espacio de $L^2(\mathbb{B}^n, dV)$ que consiste de las funciones pluriarmónicas en $\mathbb{B}^n$.

La siguiente proposición nos ayudará a ver que los funcionales evaluación son acotados en el espacio $b^2(\mathbb{B}^n)$.

Proposición 1.23. *Dado $z \in \mathbb{B}^n$, existe una constante C tal que $|u(z)| \leq C\|u\|_2$ para cada $u \in b^2(\mathbb{B}^n)$.*

Demostración. Sea $r = 1 - |z|$, sabemos que para u en $B_r(z)$, se cumple

$$|u(z)| = \frac{1}{r^{2n}} \int_{B_r(z)} u(w) d\mu \leq \frac{1}{r^{2n}} \int_{B_r(z)} |u(w)\chi_{B_r(z)}(w)| d\mu. \tag{1.32}$$

Por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} |u(z)| &\leq \frac{1}{r^2} \int_{B_r(z)} |u(w)\chi_{B_r(z)}(w)| d\mu \\ &\leq \frac{1}{r^2} \left(\int_{B_r(z)} |u(z)|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{B_r(z)} d\mu \right)^{1/2} = \frac{1}{r^2} \|u\|_2. \end{aligned}$$

Tomando $C = \dfrac{1}{r^2}$ tenemos el resultado deseado. □

Teorema 1.24. *El espacio $b^2(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{B}^n)$.*

Demostración. Supongamos que (u_n) es una sucesión de funciones pluriarmónicas que convergen a una función u en $L^2(\mathbb{B}^n)$. Sea K un conjunto compacto de $\mathbb{B}^n$, entonces existe una bola tal que $K \subset B_R(0)$, tomando $C_K = \frac{1}{R^2}$

$$|u_n(z) - u_m(z)| \leq C_K \|u_n - u_m\|_2 \tag{1.33}$$

para todo $z \in K$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Como (u_n) es una sucesión de Cauchy en $b^2(\mathbb{B}^n)$, la desigualdad (**??**) muestra que (u_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(K)$, por lo que converge uniformemente en K. Por otro lado sabemos que si (u_n) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{B}^n$ a una función v, ésta tiene que ser pluriarmónica en $\mathbb{B}^n$. Ahora bien, como (u_n) converge a u en $L^2(\mathbb{B}^n)$, alguna subsucesión de (u_n) converge puntualmente a u en c.t.p. de $\mathbb{B}^n$; por lo que $u = v$ en c.t.p., esto nos dice que $u \in b^2(\mathbb{B}^n)$. □

El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ es el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{B}^n, dV)$, que consiste de todas las funciones analíticas en $L^2(\mathbb{B}^n, dV)$. Sea P la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{B}^n, dV)$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$, entonces P se puede expresar como

$$(Pf)(z) = \langle f, K_z \rangle = \int_{\mathbb{B}^n} f(w) \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{n+1}} dV,$$

donde $K_z = \dfrac{1}{(1 - z\overline{w})^{n+1}}$ es el núcleo reproductor de Bergman.
Si $u \in L^2(\mathbb{B}^n)$, entonces tanto f como g de la descomposición de u están en $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$. Esto nos dice que $b^2(\mathbb{B}^n) = \mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n) + \overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)}$.

1.4.1 Núcleo y proyección ortogonal

Para cada $z \in \mathbb{B}^n$, la aplicación $\phi_z : u \mapsto u(z)$ es un funcional lineal acotado, esto por la Proposición **??**, en el espacio de Hilbert $b^2(\mathbb{B}^n)$. Del Teorema de Representación de Riesz existe una única función $R_z \in b^2(\mathbb{B}^n)$ tal que $\phi_z(u) = \langle u, R_z \rangle$, esto es $u(z) = \int_{\mathbb{B}^n} u(w)\overline{R_z(w)} dV(w)$ para cada $u \in b^2(\mathbb{B}^n)$. La función $R_z(w)$ se llama núcleo reproductor pluriarmónico de $\mathbb{B}^n$.

Dado que podemos dar una base ortogonal para $b^2(\mathbb{B}^n)$, podemos hallar una expresión explícita de el núcleo reproductor pluriarmónico.

Teorema 1.25. *El núcleo reproductor pluriarmónico está dado por*

$$R_z(w) = \frac{1}{(1 - \overline{z}w)^{n+1}} + \frac{1}{(1 - \overline{w}z)^{n+1}} - 1 \tag{1.34}$$

Demostración. Notemos que $\left\{ e_\alpha(z) = \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}} z^n \right\}_{\alpha \geq 0} \bigcup \left\{ \overline{e_\alpha}(z) = \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}} \overline{z^n} \right\}_{\alpha \geq 1}$ es una base ortonormal del espacio $b^2(\mathbb{B}^n)$. Entonces

$$R_z(w) = \sum_{\alpha \geq 0} \langle R_z, e_\alpha \rangle e_\alpha(w) \ + \ \sum_{\alpha \geq 1} \langle R_z, \overline{e_\alpha} \rangle \overline{e_\alpha}(w).$$

Notemos que para $\alpha \geq 0$

$$\langle R_z, e_\alpha \rangle = \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}} \int_{\mathbb{B}^n} R_z(w)\overline{e_\alpha} dV = \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}}\ \overline{z}^\alpha = \overline{\langle e_\alpha, R_z \rangle}.$$

De la misma forma $\langle R_z, \overline{e_\alpha} \rangle = \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}}\ z^\alpha$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} R_z(w) &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!} (\overline{z}w)^\alpha + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!} (z\overline{w})^\alpha \\ &= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^{n+1}} + \frac{1}{(1-z\overline{w})^{n+1}} - 1. \end{aligned}$$

□ Esto es, el núcleo de Bergman pluriarmónico R_z se puede escribir en términos

del núcleo de Bergman analítico $K_z(w)$ y su conjugado $\overline{K_z}(w)$,

$$R_z = K_z + \overline{K_z} - 1. \tag{1.35}$$

Dado que $b^2(\mathbb{B}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{B}^n)$, existe una única proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{B}^n)$ sobre $b^2(\mathbb{B}^n)$.

Definimos la proyección pluriarmónica Q para $f \in L^2(\mathbb{B}^n)$ como

$$Q(f)(z) = \int_{\mathbb{B}^n} f(w)\overline{R_z(w)} dV, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.36}$$

Teorema 1.26. *La proyección pluriarmónica Q tiene la representación*

$$Q(f)(z) = P(f)(z) + \overline{P(\overline{f})(z)} - P(f)(0), \tag{1.37}$$

donde P es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{B}^n)$ sobe $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$.

Demostración. De la ecuación (**??**) tenemos

$$\begin{aligned} Q(f)(z) &= \int_{\mathbb{B}^n} f(w)\overline{R_z(w)} dV = \int_{\mathbb{B}^n} f(w) \left(\frac{1}{(1-\overline{z}w)^{n+1}} + \frac{1}{(1-z\overline{w})^{n+1}} - 1 \right) dV \\ &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{f(w)}{(1-\overline{z}w)^{n+1}} dV + \int_{\mathbb{B}^n} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{n+1}} dV - \int_{\mathbb{B}^n} f(w) dV \\ &= P(f)(z) + \overline{P(\overline{f})(z)} - P(f)(0). \end{aligned}$$

□

Usaremos esta representación de la proyección al analizar los operadores de Toeplitz y sus propiedades en las secciones subsecuentes.

Capítulo 2

Operadores de Toeplitz con símbolo radial

En este capítulo estudiaremos operadores de Toeplitz con símbolos radiales para los espacios de Bergman. Primero lo haremos en el disco y en la última sección generalizaremos para el espacio de Bergman pluriarmónico en la bola unitaria.
Para una función $a \in L^{\infty}(\mathbb{D})$, definimos el operador de Toeplitz con símbolo a, $T_a : \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, por la relación $T_a(u) = B_{\mathbb{D}}(au)$, donde $B_{\mathbb{D}}$ es la proyección de Bergman.

Algunas propiedades de los operadores de Toeplitz son

Teorema 2.1. *Sean $\phi, \psi \in L^{\infty}(\mathbb{D})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces*

1. $\|T_{\phi}\| \leq \|\phi\|_{\infty}$,
2. $T_{\alpha\phi+\beta\psi} = \alpha T_{\phi} + \beta T_{\psi}$,
3. $T^*_{\phi} = T_{\overline{\phi}}$.

Consideraremos funciones radiales, es decir que sólo dependen del radio $f(z) = f(|z|)$, para los espacios de Bergman analítico, armónico y por último para el espacio de Bergman pluriarmónico. En todos los caso veremos que los operadores de Toeplitz con este tipo de símbolo son diagonales, una propiedad única de estos operadores.

2.1 Actuando en el espacio de Bergman analítico

Las Secciones 2.1 y 2.2 se basan en resultados del libro *Conmmutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space* de N. Vasilevski [?].

El espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ se puede describir como el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$, que consiste de las funciones que satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0.$$

En coordenadas polares $L^2(\mathbb{D})$ se descompone como

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{D}, d\mu) &= L^2\left([0,1) \times [0,2\pi), rdrd\theta\right) = L^2\left([0,1), rdr\right) \otimes L^2([0,2\pi), d\theta) \\ &= L^2([0,1), rdr) \otimes L^2\left(\partial\mathbb{D}, \frac{dt}{it}\right), \end{aligned}$$

donde $\frac{dt}{it} = |dt| = d\alpha$ es el elemento de longitud en $\partial\mathbb{D}$. En coordenadas polares

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

Introducimos el operador unitario

$$U_1 = I \otimes \mathcal{F} : L^2([0,1), rdr) \otimes L^2\left(\partial\mathbb{D}, \frac{dt}{it}\right) \to L^2([0,1), rdr) \otimes l_2(\mathbb{Z}).$$

Donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier discreta $\mathcal{F} : L^2(\partial\mathbb{D}) \to l_2(\mathbb{Z})$, dada por

$$\mathcal{F} : f \mapsto \{c_n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial\mathbb{D}} f(t) t^{-n} \frac{dt}{it},$$

y su inversa

$$\mathcal{F}^{-1} : \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n.$$

Denotemos por $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$.
El operador $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ se transforma unitariamente en el operador $(I \otimes \mathcal{F})\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)(I \otimes \mathcal{F}^{-1})$ Calculemos

$$\begin{aligned} (I \otimes \mathcal{F})\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)(I \otimes \mathcal{F}^{-1})\{c_n(r)\} &= (I \otimes \mathcal{F})\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r) t^n \\ &= (I \otimes \mathcal{F})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r}\right) c_n t^n \\ &= \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n-1}{r}\right) c_{n-1}(r)\right\} = \{d_n\}. \end{aligned}$$

Esto es

$$(I \otimes \mathcal{F})\frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}\right)(I \otimes \mathcal{F}^{-1})\{c_n(r)\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n-1}{r}\right)c_{n-1}(r)\right\}.$$

De aquí vemos que la imagen del espacio de Bergman $\mathcal{A}_1^2 = U_1(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, es el subespacio de $L^2([0,1), rdr) \otimes l_2$ que consiste de las sucesiones $\{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que satisfacen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r}\right)c_n(r) = 0 \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La solución general de cada una de estas ecuaciones, es $c_n(r) = c'_n r^n$, con $c'_n r^n = \sqrt{2(|n|+1)}c_n r^n$. Es necesario tener en cuenta que cada $c_n(r) \in L^2([0,1], rdr)$, lo cual implica que $c_n(r) = 0$ para $n < 0$. Esto es

$$c_n(r) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)}c_n r^n & si \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0 & si \quad n \in \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Más aún, tenemos $\|\{c_n(r)\}\| = \left(\sum |c_n|^2\right)^{1/2} = \|c_n\|_{l_2}$.

Ahora para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, introducimos el operador unitario

$$u_n : L^2([0,1), rdr) \to L^2([0,1), rdr),$$

definido por la relación

$$(u_n f)(r) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} f\left(r^{\frac{1}{n+1}}\right),$$

con inversa $u_n^{-1} : L^2([0,1), rdr) \to L^2([0,1), rdr)$, dada por

$$(u_n^{-1} f)(r) = \sqrt{n+1} r^n f(r^{n+1}),$$

notemos que $u_n^{-1} = u_n^*$. Por último definimos el operador unitario $U_2 : L^2([0,1), rdr) \otimes l_2 \to L^2([0,1), rdr) \otimes l_2$, dado por

$$U_2 : \{c_n(r)\} \mapsto \{(u_{|n|} c_n)(r)\}.$$

De esta forma $\mathcal{A}_2^2 = U_2(\mathcal{A}_1^2)$, coincide con el espacio de sucesiones $\{d_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $d_n(r) = u_n(\sqrt{2(n+1)}c_n r^n) = \sqrt{2}c_n$, para $n \in \mathbb{Z}_+$ y $d_n(r) = 0$ para $n \in \mathbb{Z}_-$.

Sea $l_0(r) = \sqrt{2}$, entonces tenemos $l_0(r) \in L^2([0,1), rdr)$ y $\|l_0(r)\| = 1$. Denotamos por L_0 al subespacio generado por $l_0(r)$.

Ahora, la proyección P_0 de $L^2([0,1), rdr)$ sobre L_0 tiene la forma

$$(P_0 f)(r) =< f, l_0 > \cdot l_0(r) = \sqrt{2} \int_0^1 f(r)\sqrt{2} r dt.$$

Sea $l_2^+(l_2^-)$, el subespacio de l_2 de sucesiones $\{c_n\}$ tales que $c_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_-$, y l_2^- el subespacio de l_2 de sucesiones $\{c_n\}$ tales que $c_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$, entonces $l_2 = l_2^+ \oplus l_2^-$ y $p^+(p^-)$, la proyección ortogonal de l_2 sobre $l_2^+(l_2^-)$.

Introduzcamos la sucesión $\chi_+ = \{\chi_+(n)\} \in l_\infty$, donde $\chi_+(n) = 1$ para $n \in \mathbb{Z}_+$ y $\chi_+(n) = 0$ para $n \in \mathbb{Z}_-$; entonces $p^+ = \chi_+ I$.

Ahora consideremos $\mathcal{A}_2^2 = L_0 \otimes l_2^+$ y la proyección ortogonal B_2 de $L^2([0,1), rdr) \otimes l_2$ sobre $\mathcal{A}_1^2$, la cual tene la forma $B_2 = P_0 \otimes p^+$.

De lo cual obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *El operador unitario $V = U_2 U_1$, es un isomorfismo isométrico del espacio $L^2(\mathbb{D})$ en $L^2([0,1), rdr) \otimes l_2$, bajo el cual $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es mapeado a $L_0 \otimes l_2^+$ y $B_{\mathbb{D}}$ es unitariamente equivalente a la proyección $P_0 \otimes p^+$.*

Introduzcamos el encaje isométrico $R_0 : l_2^+ \to L^2([0,1], rdr) \otimes l_2$, dado por

$$R_0 : \{c_n\} \mapsto l_0(r)\{\chi_+(n) c_n\}, \tag{2.1}$$

con el cual extendemos la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ a un elemento de l_2, tomando como $c_n = 0$ para los indices negativos $n < 0$. La imagen de R_0 coincide con el espacio $\mathcal{A}_2^2$. El operador adjunto $R_0^* : L([0,1), rdr) \otimes l_2 \to l_2^+$ está dado por

$$R_0^* : \{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left\{ \int_0^1 c_n(r)\sqrt{2} r dr \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}. \tag{2.2}$$

Ahora consideremos el operador $R = R_0^* U$ que mapea el espacio $L^2(\mathbb{D})$ a l_2^+, donde la restricción

$$R|_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})} : \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to l_2^+,$$

es un isomorfismo isométrico. El operador adjunto

$$R^* = U^* R_0 : l_2^+ \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \subset L^2(\mathbb{D}),$$

es un isomorfismo isométrico de l_2^+ al subespacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Hagamos el cálculo

$$\begin{aligned} U_1^* U_2^* R_0 \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} &= U_1^* U_2^* \{\sqrt{2} c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = U_1^* \left(\left\{ \sqrt{2(n+1} c_n r^n \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sqrt{2(n+1)} c_n (rt)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sqrt{2(n+1)} c_n z^n. \end{aligned}$$

Vemos que el operador R^* está dado por

$$R^* : \{c_n\} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{2(n+1)} c_n z^n. \tag{2.3}$$

Tomando adjuntos tenemos $R = R_0^* U_2 U_1$. El operador $R : \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to l_2^+$ está definido por

$$R : f \mapsto \left\{ \frac{\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{z}^n d\mu(z) \right\}. \tag{2.4}$$

De aquí, la restricción $R|_{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$ al espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un isomorfismo isométrico.

Calculemos

$$\begin{aligned}
RR^*\{c_n\} &= R\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{2(m+1)} c_m z^m \right) \\
&= \left\{ \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum \sqrt{2(m+1)} c_m z^m \right) \overline{z}^n d\mu(z) \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \sum \sqrt{2(m+1)} c_m z^m \sqrt{2(n+1)} \overline{z}^n d\mu(z) \right\} \\
&= \left\{ \frac{2(n+1)}{2\pi} c_n \int_{\mathbb{D}} |z|^{2n} d\mu(z) \right\} = \{c_n\}.
\end{aligned}$$

Tenemos que $RR^* = I$ en l_2^+, es fácil ver que $R^*R = B_{\mathbb{D}} : L^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.
Veamos como actúan los operadores de Toeplitz T_a bajo la composición U_2U_1.

Teorema 2.3. *Sea a una función radial. Entonces el operador de Toeplitz T_a actuando en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\gamma_a I$ actuando en l_2^+. La sucesión $\gamma_a = \{\gamma_a(n)\}$, está dada por*

$$\gamma_a(n) = \int_0^1 a(r^{\frac{1}{2(n+1)}}) dr = (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{r}) r^n dr, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.5}$$

Demostración. El operador T_a es unitariamente equivalente al operador RT_aR^*, con R definido como en (**??**) y R^* definido en (**??**), entonces

$$\begin{aligned}
RT_aR^* &= RB_{\mathbb{D}} a B_{\mathbb{D}} R^* = R(R^*R) a (R^*R) R^* \\
&= (RR^*) R a R^* (RR^*) = RaR^* \\
&= R_0^* U_2 (I \otimes \mathcal{F}) a(r) (I \otimes \mathcal{F}^{-1}) U_2^{-1} R_0 \\
&= R_0^* U_2 \{a(r)\} U_2^{-1} R_0 = R_0^* \left\{ a\left(r^{\frac{1}{n+1}} \right) \right\} R_0.
\end{aligned}$$

Ahora

$$R_0^*\left\{a\left(r^{\frac{1}{n+1}}\right)\right\}R_0\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}=\left\{\int_0^1 a\left(r^{\frac{1}{n+1}}\right)2c_n r dr\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}=\{\gamma_a(n)\cdot c_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

donde

$$\gamma_a(n)=2\int_0^1 a\left(r^{\frac{1}{n+1}}\right)rdr=\int_0^1 a\left(r^{\frac{1}{2(n+1)}}\right)dr.$$

□

Este último resultado nos dice que el operador de Toeplitz con símbolo radial T_a es un operador diagonal.

Definición 2.4. *Definamos la radialización de una función $f \in L^1(\mathbb{D})$ por*

$$rad(f)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}z)dt.$$

Es claro que una función φ es radial si y sólo si $rad(\varphi)=\varphi$. Esto nos permite mostrar lo siguiente.

Proposición 2.5. *Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Par todo $k \geq 0$ existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tal que $T_\varphi(z^k)=\lambda_k z^k$.*
2. *φ es radial.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\langle T_{rad(\varphi)}z^n, z^m\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{D}}\varphi(e^{it}z)z^n\overline{z}^m d\mu(z)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)t}dt\right)\int_{\mathbb{D}}f(w)w^n\overline{w}^m d\mu(w)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)t}dt\right)\langle T_\varphi z^n, z^m\rangle = \begin{cases}\langle T_\varphi z^n, z^m\rangle & m=n,\\ 0 & m\neq n.\end{cases}\end{aligned}$$

Esto es $T_{rad(\varphi)}=T_\varphi$ si y sólo si (1) se satisface y, $T_{rad(\varphi)}=T_\varphi$ si y sólo si $rad(\varphi)=\varphi$. □ Dado que el producto de operadores de Toeplitz no es necesariamente un operador

de Toeplitz, el siguiente teorema nos dice que si el producto de dos operadores de Toeplitz es de Toeplitz entonces el símbolo de este último debe de ser radial.

Lema 2.6. *Sean φ_1 y φ_2 dos funciones radiales tales que T_{φ_1} y T_{φ_2} son acotados. Si $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2} = T_\psi$, entonces ψ es una función radial y T_ψ es acotada.*

Demostración. Dado que T_{φ_1} y T_{φ_1} son operadores diagonales, el operador $T_{\varphi_1}T_{\varphi_2}(z^k)$ es diagonal. De la Proposición **??** vemos que ψ es radial. □

2.2 Actuando en el espacio de Bergman armónico

Denotemos por Q a la proyección de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $b^2(\mathbb{D})$. Para una función $a \in L^\infty(\mathbb{D})$, el operador de Toeplitz $\widehat{T}_a : b^2(\mathbb{D}) \to b^2(\mathbb{D})$, se define como

$$\widehat{T}_a(f) = Q(af),$$

denotaremos por $\widehat{T}_a$ al operador de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman pluriharmónico, para diferenciarlo del operador de Toeplitz actuando en el espacio ded Bergan analítico.
El espacio de Bergman armónico se puede representar como la suma directa $b^2(\mathbb{D}) = z\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \oplus \widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$.

Consideremos el operador unitario $U : \widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ dado por

$$U(f)(z) = f(\overline{z}). \tag{2.6}$$

Tomemos ahora el operador $\widetilde{U} : b^2(\mathbb{D}) = z\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \oplus \widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D}) \to z\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, dado de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.7. *El operador de Toeplitz $\widehat{T}_a$ actuando en $b^2(\mathbb{D})$ es unitariamente equivalente al operador $\widetilde{U}\widehat{T}_a\widetilde{U}^*$ actuando en $z\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Este último operador tiene la forma matricial*

$$\widetilde{U}\widehat{T}_a\widetilde{U}^* = \begin{pmatrix} T_a - (1 \otimes \overline{a}) & \Gamma_a - (1 \otimes a^*) \\ \Gamma_{\hat{a}} & T_{\hat{a}} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

donde $\hat{a}(z) = a(\overline{z})$, $\quad a^*(z) = \overline{a(\overline{z})}$ y $\Gamma_a f = B_{\mathbb{D}}(aUf)$.

Demostración. Para $f,\ g \in L^2(\mathbb{D})$ sea$f \otimes g$ el operador definido por $(f \otimes g)h = \langle g, h\rangle\, f$ para todo $h \in L^2(\mathbb{D})$. Entonces $Q = B_{\mathbb{D}} - (1 \otimes 1) + \widetilde{B_{\mathbb{D}}}$.

Si $f_1 \in z\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, por definición de $\widehat{T}_a$, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_a f_1 &= B_{\mathbb{D}}(af_1) - B_{\mathbb{D}}(af_1)(0) + \widetilde{B_{\mathbb{D}}}(af_1) \\
&= T_a f_1 - (1 \otimes \overline{a}) f_1 + UB_{\mathbb{D}}U(af_1) \\
&= T_a(f_1) - (1 \otimes \overline{a}) f_1 + UB_{\mathbb{D}}(\hat{a}Uf_1) \\
&= [T_a - (1 \otimes \overline{a})]\, f_1 + U\Gamma_{\hat{a}} f_1.
\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad la obtenemos de $B_{\mathbb{D}}(af_1)(0) = \langle af_1, 1\rangle = \langle f_1, \overline{a}\rangle = (1 \otimes \overline{a})f_1$ y la ecuación (**??**). El primer término de la última igualdad pertenece a $z\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y el segundo a $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$.
Similarmente, si $f_2 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_a U f_2 &= B_{\mathbb{D}}(aUf_2) - (1 \otimes \overline{a})Uf_2 + \widetilde{B_{\mathbb{D}}}(aUf_2) \\
&= [\Gamma_a - (1 \otimes a^*)]\, f_2 + UB_{\mathbb{D}}U(aUf_2) \\
&= [\Gamma_a - (1 \otimes a^*)]\, f_2 + UB_{\mathbb{D}}(\hat{a}U^2 f_2) \\
&= [\Gamma_a - (1 \otimes a^*)]\, f_2 + UT_{\hat{a}} f_2.
\end{aligned}$$

El primer término de la última igualdad pertenece a $z\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y el segundo a $\widetilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$.
Entonces para $(f_1, f_2)^T \in z\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, del cálculo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}\widehat{T}_a\widetilde{U}^* \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} &= \widetilde{U}\widehat{T}_a \begin{pmatrix} f_1 \\ Uf_2 \end{pmatrix} = \widetilde{U} \begin{pmatrix} [T_a - (1 \otimes \overline{a})]\, f_1 + [\Gamma_a - (1 \otimes a^*)]\, f_2 \\ U\Gamma_{\hat{a}} f_1 + UT_{\hat{a}} f_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [T_a - (1 \otimes \overline{a})]\, f_1 + [\Gamma_a - (1 \otimes a^*)]\, f_2 \\ \Gamma_{\hat{a}} f_1 + T_{\hat{a}} f_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Obteniendo así (**??**). □

Por otro lado la imagen de $z\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, bajo el operador R definido en (**??**), es un subespacio $l_{2,0}^+$ de l_2^+, que consiste de las sucesiones de la forma $\{0, c_1, c_2, \ldots\}$.

Denotemos por $\widetilde{R}$ a la restricción de R al espacio $z\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, dado por $f(z) \mapsto \{0, c_0, c_1, \ldots\}$, donde

$$c_n = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{z}^n d\mu, \quad para \quad z \in \mathbb{Z}_+.$$

La restricción $\widetilde{R}^*|_{l_{2,0}^+}$, está dada por

$$\{0, c_1, c_2, \ldots\} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{2(n+2)} c_{n+1} z^{n+1}.$$

Entonces obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Para una función radial a, el operador de Toeplitz $\widehat{T}_a$ es unitariamente equivalente al operador multiplicación*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_a & 0 \\ 0 & \gamma_a \end{pmatrix} I,$$

donde $\widetilde{\gamma}_a = \{0, \gamma_a(1), \gamma_a(2), \ldots\}$, actuando en $l^+_{2,0} \oplus l^+_2$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \widetilde{R} & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_a - (1 \otimes \overline{a}) & \Gamma_a - (1 \otimes a^*) \\ \Gamma_{\hat{a}} & T_{\hat{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{R}^* & 0 \\ 0 & R^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \widetilde{R}(T_a - (1 \otimes \overline{a}))\widetilde{R}^* & \widetilde{R}\Gamma_a - (1 \otimes a^*)R^* \\ R\Gamma_{\hat{a}}\widetilde{R}^* & RT_{\hat{a}}R^* \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora cada término. Del Teorema **??** tenemos que $RT_aR^* = \gamma_a I$, el operador $1 \otimes \overline{a}$ es transformado en

$$\begin{aligned}
R(1 \otimes \overline{a})R^*\{c_n\} &= R(1 \otimes \overline{a}) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{2(n+1)} c_n z^n \right) \\
&= R \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle \sum \sqrt{2(n+1)} c_n z^n, \overline{a(z)} \right\rangle \right) \\
&= \left\{ \frac{\sqrt{2(m+1)}}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \left\langle \sum \sqrt{2(n+1)} c_n z^n, \overline{a(z)} \right\rangle \overline{z}^m d\mu \right\} \\
&= \left\{ 2c_0 \int_0^1 a(r) r dr, 0, 0, \ldots \right\}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\widetilde{R}\left(T_a - (1 \otimes \overline{a})\right) \widetilde{R}^*\{0, c_1, c_2, \ldots\} = \{0, \gamma_a(1), \gamma_a(2), \ldots\}.$$

Analicemos ahora el término $\widetilde{R}\left(\Gamma_a - (1 \otimes a^*)\right) R^*$. Viendo sólo $\widetilde{R}\Gamma_a R^*$, tenemos

$$\widetilde{R}\Gamma_a R^* = \widetilde{R} B_{\mathbb{D}} a U R^* = \widetilde{R} R^* R a U R^*.$$

Veamos ahora

$$\begin{aligned}
RaUR^*\{c_n\} &= RaU \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{2(n+1)} c_n z^n \right) \\
&= R \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \sqrt{2(n+1)} c_n \overline{z}^n a(r) \right) \\
&= \left\{ \frac{\sqrt{2(m+1)}}{\sqrt{2\pi}} \sum \frac{\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{D}} a(r) \overline{z}^n \overline{z}^m d\mu \right\}.
\end{aligned}$$

Haciendo el cálculo de la integral

$$\int_{\mathbb{D}} a(r)\overline{z}^n\overline{z}^m d\mu = \begin{cases} 2\pi \int_0^1 a(r)rdr, & si\ m=-n, \\ 0, & de\ otro\ modo. \end{cases}$$

Entonces $\Gamma_a R^* = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^1 a(r)rdr$, lo cual implica

$$\left(\Gamma_a - (1\otimes\overline{a})\right) R^* = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 a(r)rdr - \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 a(r)rdr = 0.$$

Por lo que $\widetilde{R}\left(\Gamma_a - (1\otimes\overline{a})\right) R^* = 0$. De la misma forma podemos probar que $R\Gamma_a R^* = 0$.
Teniendo entonces

$$\begin{pmatrix} \widetilde{R}(T_a - (1\otimes\overline{a}))\widetilde{R}^* & \widetilde{R}\Gamma_a - (1\otimes a^*)R^* \\ R\Gamma_{\hat{a}}\widetilde{R}^* & RT_{\hat{a}}R^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma_a} & 0 \\ 0 & \gamma_a \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

□

2.3 Actuando en el espacio de Bergman pluriarmónico

Para una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, definimos el operador de Toeplitz, con símbolo φ, $\widehat{T}_\varphi : b^2(\mathbb{B}^n) \to b^2(\mathbb{B}^n)$, por la relación $\widehat{T}_\varphi(u) = Q(\varphi u)$ donde Q es la proyección de Bergman pluriarmónica, para detalles vea la sección 2.2

En esta sección estudiaremos operadores de Toeplitz con símbolo radial, actuando en $b^2(\mathbb{B}^n)$. Las funciones radiales, las cuales son invariantes bajo rotaciones, se caracterizan a partir de transformaciones unitarias. Para ver esto recordemos primero algunos resultados.

Definición 2.9. *El grupo de mapeos $\mathbb{C}$-lineales que preservan el ángulo entre dos vectores, es el grupo unitario $U(n)$. Este grupo está definico como*

$$U(n) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) : \langle gx, gy\rangle\ \forall x,y \in \mathbb{C}^n\} = \{g\in GL_n(\mathbb{C}) : g^*g = I_n\}.$$

Donde g^* es la matriz adjunta de g e I_n es la matriz identidad $n\times n$.

El grupo $U(n)$ contiene más elementos que sólo las rotaciones. Para caracterizar las rotaciones se necesita agregar una condición más.

Definición 2.10. *Definamos el grupo especial unitario $SU(n)$ como*

$$SU(n) = \{g \in U(n) : detg = 1\}.$$

Este grupo es el grupo de rotaciones de la bola unitaria.

Proposición 2.11. *El grupo especial unitario $SU(n)$ es transitivo en la esfera $\partial\mathbb{B}^n$, es decir, dados $x, y \in \partial\mathbb{B}^n$ existe $g \in SU(n)$ tal que $g(x) = y$.*

Demostración. Dado $x \in \partial\mathbb{B}^n$, es suficiente probar que existe $g \in SU(n)$ tal que $g(e_1) = x$, donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Primero probaremos que dado $x \in \partial\mathbb{B}^n$, existe $g \in U(n)$ tal que $ge_1 = x$, donde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{C}^n$.

Construyamos g de tal forma que la columna izquierda, de la representación matricial de g, sea x. Tomemos x y aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal $\{x, v_2, \ldots, v_n\}$ para $\mathbb{C}^n$.
La condición $g^*g = I_n$ de g nos dice que $g \in U(n)$ tal que $ge_1 = x$.

En general el determinante de g es ± 1. Para asegurar que $det(g) = 1$ reemplazamos v_n por $-v_n$, de ser necesario. Obteniendo así que $SU(n)$ mapea $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ a v_1. □

En la bola unitaria toda transformación unitaria es una rotación.

Proposición 2.12. *Una función φ es radial si y sólo si $\varphi(Uz) = \varphi(z)$, para cualquier transformación unitaria U de $\mathbb{C}^n$, es decir, $UU^* = U^*U = I$.*

Demostración. Supongamos que φ es radial, para cualquier transformación unitaria U

$$\varphi(Uz) = \varphi(|Uz|) = \varphi(\langle Uz, Uz\rangle^{1/2}) = \varphi(\langle z, z\rangle^{1/2}) = \varphi(|z|) = \varphi(z).$$

Ahora si $\varphi(Uz) = \varphi(z)$ para toda transformación unitaria $U \in SU(n)$.
Tomemos $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$, $w = |w| \cdot \frac{w}{|w|} \in \mathbb{B}^n$ tales que $|z| = |w|$. Ahora como $\frac{z}{|z|}$ y $\frac{w}{|w|}$ son de norma 1, por la Proposición **??** existe una transformación $U \in SU(n)$ tal que $U\left(\frac{z}{|z|}\right) = \frac{w}{|w|}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi\left(|z| \cdot \frac{z}{|z|}\right) = \varphi\left(U\left(|z| \cdot \frac{z}{|z|}\right)\right) \\ &= \varphi\left(|z| U\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) = \varphi\left(|w| \cdot \frac{w}{|w|}\right) = \varphi(w). \end{aligned}$$

□

Veamos una relación interesante que guarda el operador de Toeplitz con su símbolo.

Lema 2.13. *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{B}^n)$, $\widehat{T}_\varphi$ un operador de Toeplitz definido en $b^2(\mathbb{B}^n)$, entonces la función del símbolo $\varphi \mapsto \widehat{T}_\varphi$ es uno a uno.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{T}_\varphi = 0$, tenemos que $Q[\varphi f] = 0$, para toda $f \in b^2(\mathbb{B}^n)$. En particular tomemos $z^\alpha \in b^2(\mathbb{B}^n)$. Como $z^\beta \in b^2(\mathbb{B}^n)$, entonces

$$0 = \langle \varphi z^\alpha, z^\beta \rangle = \int_{\mathbb{B}^n} \varphi(z) z^\alpha \overline{z}^\beta dV.$$

Como el conjunto $\{z^\alpha \overline{z}^\beta : \alpha, \beta \ son\ cualesquiera\ multi-índices\}$ es denso en $L^2(\mathbb{B}^n)$, tenemos que $\varphi = 0$. □

El siguiente lema nos muestra que todo operador de Toeplitz con símbolo radial actuando en el espacio de Bergman pluriarmónio es diagonal con respecto a la base $\left\{ \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}} z^n, \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}} \overline{z}^n \right\}$.

Lema 2.14. *Sea φ una función radial integrable en $\mathbb{B}^n$, tal que $\widehat{T}_\varphi$ es un operador acotado, entonces para todo multi-índice α,*

$$\begin{aligned} \widehat{T}_\varphi(z^\alpha) &= 2(n+|\alpha|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|)z^\alpha, \\ \widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha) &= 2(n+|\alpha|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|)\overline{z}^\alpha. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Demostración. Para cualquier multi-índice β, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_\varphi z^\alpha, z^\beta \rangle &= \langle \varphi z^\alpha, z^\beta \rangle = \int_{\mathbb{B}^n} \varphi z^\alpha \overline{z}^\beta dV \\ &= 2n \int_{\partial\mathbb{B}^n} \zeta^\alpha \overline{\zeta}^\beta \int_0^1 \varphi(r) r^{2n-1+|\alpha|+|\beta|} dr d\sigma(\zeta) \\ &= \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta; \\ \frac{2n!\alpha!}{(n-1+|\alpha|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|) & \alpha = \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado de las Proposiciones
refiab y **??**

$$\langle z^\alpha, z^\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta; \\ \frac{n!\alpha!}{(n+|\alpha|)!} & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Lo que implica que

$$\langle \widehat{T}_\varphi z^\alpha, z^\beta \rangle = 2(n+|\alpha|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|)\langle z^\alpha, z^\beta \rangle.$$

Si $\beta \succ 0$, tenemos $\langle \widehat{T}_\varphi z^\alpha, \overline{z}^\beta \rangle = 0 = \langle z^\alpha, \overline{z}^\beta \rangle$. Esto muestra que $\langle \widehat{T}_\varphi z^\alpha, \overline{z}^\beta \rangle = \langle z^\alpha, \overline{z}^\beta \rangle$, para todo $\beta \succ 0$.
Luego

$$\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) = 2(n+|\alpha|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|)z^\alpha,$$

donde $\widehat{\varphi}$ es la transformada de Mellin de φ, definida en (**??**).
Por un argumento similar, obtenemos que $\widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha) = 2(n+|\alpha|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|)\overline{z}^\alpha$. $\square$

El siguiente teorema nos da una relación entre los operadores de Toeplitz con símbolo radial y las funciones radiales.

Teorema 2.15. *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{B}^n)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para cada multi-índice α, existe un $\lambda_{|\alpha|} \in \mathbb{C}$ que depende sólo de $|\alpha|$ tal que $\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) = \lambda_{|\alpha|} z^\alpha$, $\widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha) = \lambda_{|\alpha|}\overline{z}^\alpha$.*

2. *φ es una función radial.*

Demostración. Del Lema **??** se tiene que (2) implica (1).
Para ver que (1) implica (2) usaremos el Lema **??**. Basta probar que $\widehat{T}_\varphi = \widehat{T}_{U\circ\varphi}$, para cualquier transformación unitaria $U = (a_{i,j})$ de $\mathbb{C}^n$.
Por hipótesis $\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) = \lambda_{|\alpha|} z^\alpha$. Para cualquier trasformación unitaria U de $\mathbb{C}^n$ y $z \in \mathbb{B}^n$, tenemos $U^{-1}z \in \mathbb{B}^n$. Entonces tomando $U^{-1} = (a_1, \dots, a_n)^t = (a_{i,j}),\ 1 \le i, j \le n$

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_\varphi(U^{-1}z)^\alpha &= \widehat{T}_\varphi\Big[(a_{1,1}z_1 + \cdots + a_{1,n}z_n)^{\alpha_1} \cdots (a_{n,1}z_1 + \cdots + a_{n,n}z_n)^{\alpha_n}\Big] \\
&= \widehat{T}_\varphi\Big[\sum_{|m^1|=\alpha_1} \frac{\alpha_1!}{m^1!}(a_{1,1}z_1)^{m_1^1} \cdots (a_{1,n}z_n)^{m_n^1} \times \cdots \\
&\quad \times \sum_{|m^n|=\alpha_1} \frac{\alpha_1!}{m^n!}(a_{n,1}z_1)^{m_1^n} \cdots (a_{n,n}z_n)^{m_n^n}\Big] \\
&= \sum_{|m^1|\alpha_1} \cdots \sum_{|m^n|\alpha_n} \frac{\alpha_1!}{m^1!} \cdots \frac{\alpha_1!}{m^n!}(a_1)^{m^1} \cdots (a_n)^{m^n} \widehat{T}_\varphi\left(z^{m^1} \cdots z^{m^n}\right) \\
&= \lambda_{|\alpha|} \sum_{|m^1|\alpha_1} \cdots \sum_{|m^n|\alpha_n} \frac{\alpha_1!}{m^1!} \cdots \frac{\alpha_1!}{m^n!}(a_1)^{m^1} \cdots (a_n)^{m^n}\left(z^{m^1} \cdots z^{m^n}\right) \\
&= \lambda_{|\alpha|}\,(a_{1,1}z_1 + \cdots a_{1,n}z_n)^{\alpha_1} \cdots (a_{n,1}z_1 + \cdots a_{n,n}z_n)^{\alpha_n} \\
&= \lambda_{|\alpha|}\left(U^{-1}z\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

De la descomposición de la proyección (**??**) y de la definición de operador de Toeplitz tenemos

$$\widehat{T}_{\varphi\circ U}(z^\alpha) = P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right] + \overline{P\left[\overline{\varphi(Uz)}\overline{z}^\alpha\right]} - P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right](0).$$

Calculando la proyección sobre el espacio de Bergman

$$\begin{aligned} P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right](w) &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\varphi(Uz)z^\alpha}{(1-\langle w,z\rangle)^{n+1}}dV = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}{(1-\langle w,U^{-1}z\rangle)^{n+1}}dV \\ &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}{(1-\langle Uw,z\rangle)^{n+1}}dV = P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](Uw). \end{aligned}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} \overline{P\left[\overline{\varphi(Uz)}\overline{z}^\alpha\right]} &= P\left[\overline{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}\right](Uw), \\ P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right](0) &= P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](0). \end{aligned}$$

Podemos entonces deducir que

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\varphi\circ U}(z^\alpha)(w) &= P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](Uw) + P\left[\overline{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}\right](Uw) - P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](0) \\ &= \widehat{T}_\varphi(U^{-1}z)^\alpha(Uw) = \lambda_{|\alpha|}w^\alpha = \widehat{T}_\varphi(z^\alpha)(w). \end{aligned}$$

Entonces $\widehat{T}_{\varphi\circ U}(z^\alpha) = \widehat{T}_\varphi(z^\alpha)$. Con el mismo método obtenemos $\widehat{T}_{\varphi\circ U}(\overline{z}^\alpha) = \widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha)$, de lo cual $\widehat{T}_{\varphi\circ U} = \widehat{T}_\varphi$ en $b^2(\mathbb{B}^n)$. Por el Lema **??** tenemos $\varphi\circ U = \varphi$, por lo que φ es una función radial. □

Teniendo en cuenta que el producto de dos operadores de Toeplitz no necesariamente es un operador de Toeplitz, el siguiente corolario nos dice que si ocurre que el producto de dos operadores de Toeplitz con símbolo radial es un operador de Toeplitz, entonces su símbolo debe ser de una forma específica.

Corolario 2.16. *Sean φ_1 y φ_2 dos funciones radiales cuadrado integrables en $\mathbb{B}^n$, tales que $\widehat{T}_{\varphi_1}$ y $\widehat{T}_{\varphi_2}$ son operadores acotados. Si $\widehat{T}_{\varphi_1}\widehat{T}_{\varphi_2} = \widehat{T}_\psi$, entonces ψ es una función radial.*

Demostración. De (**??**) tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\varphi_1}\widehat{T}_{\varphi_2}(z^\alpha) &= (2n+2|\alpha|)^2\widehat{\varphi_1}(2n+2|\alpha|)\widehat{\varphi_2}(2n+2|\alpha|)z^\alpha, \\ \widehat{T}_{\varphi_1}\widehat{T}_{\varphi_2}(\overline{z}^\alpha) &= (2n+2|\alpha|)^2\widehat{\varphi_1}(2n+2|\alpha|)\widehat{\varphi_2}(2n+2|\alpha|)\overline{z}^\alpha. \end{aligned}$$

Del Teorema **??** se sigue que ψ es una función radial. □

El siguiente teorema nos da una caracterización para que el producto de dos operadores de Toeplitz con símbolo radial sea un operador de Toeplitz.

Teorema 2.17. *Sean φ_1 y φ_2 dos funciones radiales cuadrado integrables en $\mathbb{B}^n$, tales que $\widehat{T}_{\varphi_1}$ y $\widehat{T}_{\varphi_2}$ son operadores acotados. Entonces $\widehat{T}_{\varphi_1}\widehat{T}_{\varphi_2}$ es igual al operador de Toeplitz $\widehat{T}_{\psi}$ si y sólo si ψ es la solución de la ecuación*

$$1 *_M \psi = \varphi_1 *_M \varphi_2, \tag{2.10}$$

donde 1 denota la función constante igual a uno.

Demostración. Para cada multi-índice α, de (**??**) tenemos que

$$\widehat{T}_{\varphi_1}\widehat{T}_{\varphi_2}(z^\alpha) = \widehat{T}_{\psi}(z^\alpha), \quad \widehat{T}_{\varphi_1}\widehat{T}_{\varphi_2}(\overline{z}^\alpha) = \widehat{T}_{\psi}(\overline{z}^\alpha),$$

es equivalente a

$$\frac{1}{2n+2|\alpha|}\widehat{\psi}(2n+2|\alpha|) = \widehat{\varphi_1}(2n+2|\alpha|)\widehat{\varphi_2}(2n+2|\alpha|).$$

Es fácil ver que $\widehat{1}(2n+2|\alpha|) = \dfrac{1}{2n+2|\alpha|}$, entonces

$$\widehat{1 *_M \psi}(2n+2|\alpha|) = \varphi_1 \widehat{*_M} \varphi_2(2n+2|\alpha|). \tag{2.11}$$

De la Nota **??**, después del Teorema **??**, tenemos que (**??**), es equivalente a (**??**). □

Veamos que ocurre si el producto de operadores de Toeplitz con símbolo radial es cero.

Teorema 2.18. *Sean φ_i funciones radiales integrables en $\mathbb{B}^n$, tales que $\widehat{T}_{\varphi_i}$ son operadores acotados, $i = 1, \ldots, N$. Si $\widehat{T}_{\varphi_1}\cdots\widehat{T}_{\varphi_N} = 0$, entonces $\varphi_i = 0$, para algún i.*

Demostración. Suponga que $\widehat{T}_{\varphi_1}\cdots\widehat{T}_{\varphi_N} = 0$, entonces para cualquier multi-índice α tenemos

$$\widehat{T}_{\varphi_1}\cdots\widehat{T}_{\varphi_N}(z^\alpha) = 0 \quad \widehat{T}_{\varphi_1}\cdots\widehat{T}_{\varphi_N}(\overline{z}^\alpha) = 0.$$

Usando (**??**), obtenemos

$$\widehat{\varphi_1}(2n+2|\alpha|)\cdots\widehat{\varphi_N}(2n+2|\alpha|) = 0.$$

Sea $E_i = \{|\alpha| \in \mathbb{N} : \widehat{\varphi}_i(2n+2|\alpha|) = 0\}$. Notemos que $E_1 \cup \cdots \cup E_N = \mathbb{N}$, entonces existe algún i tal que $\displaystyle\sum_{|\alpha|\in E_i} \frac{1}{|\alpha|} = \infty$, luego por la Nota **??** $\widehat{\varphi}_i = 0$. □

En este momento podemos identificar cuando un operador de Toeplitz es idempotente

Corolario 2.19. *Sea φ una función radial integrable en $\mathbb{B}^n$, tal que $\widehat{T}_\varphi$ es un operador acotado. Entonces $\widehat{T}_\varphi^2 = \widehat{T}_\varphi$ si y sólo si $\varphi = 0$ o $\varphi = 1$.*

Demostración. Si $\widehat{T}_\varphi^2 = \widehat{T}_\varphi$, entonces $\widehat{T}_\varphi \left(1 - \widehat{T}_\varphi\right) = 0$, del Teorema **??** tenemos que $\varphi = 0$ o $\varphi = 1$. La otra implicación es clara. $\square$

Capítulo 3

Operadores de Toeplitz

En este capítulo revisaremos el caso de operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo y veremos algunas propiedades de estos en los espacios de Bergman analítico y pluriarmónico.

En la tercera sección veremos los operadores de Toeplitz con símbolos separadamente radiales, como generalización de los operadores de Toeplitz con símbolo radial. Por último revisaremos los operadores de Toeplitz con símbolos separadamente cuasihomogéneos y algunas propiedades en el espacio de Bergman pluriarmónico.

En la última sección, basándonos en el artículo *Algebraic Properties of Quasihomogeneous and Separatley Quasihomogeneous Toeplitz Operators on the Pluriharmonic Bergman Space* [?], estudiaremos cuándo el producto de operadores de Toeplitz es cero y, la conmutatividad de operadores de Toeplitz con símbolos cuasihomogéneos y separadamente cuasihomogéneos.

3.1 Operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo en el espacio analítico

Analizaremos primero los operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman analítico del disco unitario $\mathbb{D}$.

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario con la medida de área. Una función f se llama cuasihomogénea de grado p si

$$f(re^{i\theta}) = e^{ip\theta}\varphi(r) \tag{3.1}$$

para alguna función radial φ.

En el siguiente lema mostraremos cómo actúan los operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo en los elementos de la base de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Lema 3.1. *Sea $p \geq 0$ un entero y φ una función radial acotada. Entonces para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\begin{aligned} T_{e^{ip\theta}\varphi}(z^n) &= 2(n+p+1)\widehat{\varphi}(2n+p+2)z^{n+p}, \\ T_{e^{-ip\theta}\varphi}(z^n) &= \begin{cases} 2(n-p+1)\widehat{\varphi}(2n-p+2)z^{n-p} & n \geq p, \\ 0 & 0 \leq n \leq p-1. \end{cases} \end{aligned}$$

*donde $\widehat{\varphi}$ es la transformada de Mellin de φ, definida en la ecuación (**??**).*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_+$ entonces

$$\begin{aligned} \langle T_{e^{ip\theta}\varphi}(z^n), z^m \rangle &= \int_{\mathbb{D}} e^{ip\theta}\varphi(z^n)\overline{z}^m dz = \int_0^1 \varphi(r) r^{n+m+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(p+n-m)\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} \widehat{\varphi}(n+m+1) & m = n+p, \\ 0 & m \neq n+p. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otro lado como

$$\langle z^n, z^m \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2(n+p+1)} & m = n+p, \\ 0 & m \neq n+p. \end{cases}$$

De la ecuación (**??**) vemos que

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}(z^n) = 2(n+p+1)\widehat{\varphi}(2n+p+2)z^{n+p}.$$

□

La siguiente proposición nos muestra que si un operador de Toeplitz T_f actúa en la base canónica de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ de la misma forma que lo hace un operador de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo entonces f es cuasihomogénea.

Proposición 3.2. *Una función acotada f es cuasihomogénea de grado p si y sólo si para todo entero $n \geq 0$, existe $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que*

$$T_f(z^n) = \begin{cases} \lambda_n z^{n+p} & si\ n \geq máx(-p, 0), \\ 0 & si\ n < máx(-p, 0). \end{cases}$$

Demostración. Sea f una función cuasihomogénea de grado p, es decir $f = e^{ip\theta}\varphi$, donde φ es una función radial. Del Lema **??** tenemos que $T_f(z^n) = \lambda_n z^{n+p}$.
Ahora supongamos que $T_f(z^n) = \lambda_n z^{n+p}$ se cumple para todo $p \in \mathbb{Z}_+$. Entonces para todo $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\langle T_{\overline{z}^p f} z^n, z^m \rangle = \langle f z^n, z^{m+p} \rangle = \begin{cases} \frac{\lambda_m}{m+p+1} & m = n, \\ 0 & m \neq n, \end{cases}$$

si $p \geq 0$. Además

$$\langle T_{z^{-p} f} z^n, z^m \rangle = \langle f z^{n-p}, z^m \rangle = \begin{cases} \frac{\lambda_{n-p}}{m+1} & n = m, \\ 0 & n \neq m, \end{cases}$$

si $p < 0$. Sea

$$\varphi(z) = \begin{cases} \overline{z}^p f(z) & si\ p \geq 0, \\ z^{-p} f(z) & si\ p < 0. \end{cases}$$

Entonces para todo entero $n, m \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle T_{rad(\varphi)} z^n, z^m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \varphi(e^{it} z) z^n \overline{z}^m d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \right) \int_{\mathbb{D}} f(w) w^n \overline{w}^m d\mu(w) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \right) \langle T_\varphi z^n, z^m \rangle = \begin{cases} \langle T_\varphi z^n, z^m \rangle & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $T_{rad(\varphi)} = T_\varphi$. Esto nos dice que $rad(\varphi) = \varphi$, lo cual implica que f es una función cuasihomogénea de grado p. □

Proposición 3.3. *Sean f_1 y f_2 dos funciones acotadas cuasihomogéneas de grados p y s respectivamente. Si existe una función h tal que $T_{f_1} T_{f_2} = T_h$, entonces h es cuasihomogénea de grado $p + s$.*

Demostración. Sean φ_1 y φ_2 dos funciones radiales tales que $f_1 = e^{ip\theta}\varphi_1$ y $f_2 = e^{is\theta}\varphi_2$.
Por el Lema **??**, si $p, s \geq 0$, entonces para todo $n \geq 0$, existe $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que

$$T_{e^{ip\theta}\varphi_1} T_{e^{is\theta}\varphi_2}(z^n) = \lambda_n z^{n+p+s}.$$

Cuando $p \geq 0$ y $s < 0$, tenemos

$$T_{e^{ip\theta}\varphi_1} T_{e^{is\theta}\varphi_2}(z^n) = \begin{cases} \lambda_n z^{n+p+s} & n \geq -s, \\ 0 & n < -s. \end{cases}$$

Entonces si $T_{f_1} T_{f_2} = T_h$, por la Proposición **??**, h es una función cuasihomogénea de grado $p+s$.
Si p y s son ambos negativos, o si $p < 0$ y $s \geq 0$, entonces si consideramos el operador adjunto de $T_{f_1} T_{f_2}$, obtenemos el mismo resultado. □

El siguiente corolario nos ayuda a identificar los operadores T_f, con símbolo cuasihomogéneo que son idempotentes.

Corolario 3.4. *Si f es una función cuasihomogénea de grado distinto de 0 y si $T_f^2 = T_f$, entonces $f = 0$.*

3.2 Operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo actuando en el espacio de Bergman pluriarmónico de la bola unitaria.

En esta sección nos enfocaremos en analizar como actúanlos operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo en el espacio de Bergman pluriarmónico.

Sean $p, s \in \mathbb{N}^n$. Una función $f \in L^1(\overline{\mathbb{B}^n})$ es cuasihomogénea de grado (p, s) si f tiene la forma $\xi^p \overline{\xi}^s \varphi$, donde φ es una función radial. Esto es

$$f(r\xi) = \xi^p \overline{\xi}^s \varphi(r),$$

para cualquier ξ en la esfera unitaria $\partial\mathbb{B}^n$ y $r \in [0, 1)$.

En este caso a T_f lo llamaremos el operador de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneos de grado (p, s).

Lema 3.5. *Sean p, s dos multi-índices y sea φ una función radial integrable en $\mathbb{B}^n$, tal que $\widehat{T}_{\xi^p\varphi}$, $\widehat{T}_{\overline{\xi}^s\varphi}$ y $\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}$ son operadores acotados. Entonces para cualquier multi-índice α,*

$$\widehat{T}_{\xi^p\varphi}(z^\alpha) = 2(n + |\alpha| + |p|)\widehat{\varphi}(2n + 2|\alpha| + |p|) z^{\alpha+p}; \tag{3.3}$$

$$\widehat{T}_{\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha!(n+|\alpha|-|s|)!}{(\alpha-s)!(n-1+|\alpha|)!}\widehat{\varphi}(2n + 2|\alpha| - |s|) z^{\alpha-s} & \alpha \succeq s, \\ 0 & \alpha \not\succeq s; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{2(p+\alpha)!(n+|p|+|\alpha|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!(n-1+|\alpha|+|p|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|)z^{p+\alpha-s} & p+\alpha\succeq s, \\ \frac{2s!(n+|s|-|\alpha|-|p|)!}{(s-\alpha-p)!(n-1+|s|)!}\widehat{\varphi}(2n+|s|-|p|)\overline{z}^{s-\alpha-p} & s\succeq p+\alpha, \\ 0 & p+\alpha\not\succeq s, \\ & s\not\succeq p+\alpha. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(\overline{z}^\alpha) = \begin{cases} \frac{2(s+\alpha)!(n+|s|+|\alpha|-|p|)!}{(s+\alpha-p)!(n-1+|\alpha|+|s|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|s|-|p|)\overline{z}^{s+\alpha-p} & s+\alpha\succeq p, \\ \frac{2p!(n+|p|-|\alpha|-|s|)!}{(p-\alpha-s)!(n-1+|p|)!}\widehat{\varphi}(2n+|p|-|s|)z^{p-\alpha-s} & p\succeq s+\alpha, \\ 0 & s+\alpha\not\succeq p, \\ & p\not\succeq s+\alpha. \end{cases} \tag{3.6}$$

En particular si p, s son multi-índices no cero tales que $p\perp s$, tenemos

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2(p+\alpha)!(n+|p|+|\alpha|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!(n-1+|\alpha|+|p|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|)z^{p+\alpha-s} & \alpha\succeq s, \\ 0 & \alpha\not\succeq s. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(\overline{z}^\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2(s+\alpha)!(n+|s|+|\alpha|-|p|)!}{(s+\alpha-p)!(n-1+|\alpha|+|s|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|s|-|p|)\overline{z}^{s+\alpha-p} & \alpha\succeq p, \\ 0 & \alpha\not\succeq p. \end{cases} \tag{3.8}$$

Demostración. Para la ecuación (**??**) tenemos que

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = Q[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha] = P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha] + \overline{P[\overline{\xi}^p\xi^s\overline{\varphi z^\alpha}]} - P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha](0),$$

donde P es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{B}^n)$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$.
Tomemos α, β multi-índices, entonces

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha), z^\beta\rangle &= \langle Q[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha], z^\beta\rangle \\ &= \langle P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha], z^\beta\rangle + \langle\overline{P[\overline{\xi}^p\xi^s\overline{\varphi z^\alpha}]}, z^\beta\rangle - \langle P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha](0), z^\beta\rangle \end{aligned} \tag{3.9}$$

Para la primera parte de la última igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \langle P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha], z^\beta\rangle &= \int_{\mathbb{B}^n}\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha\overline{z}^\beta dV = \int_0^1 2nr^{2n+|\alpha|+|\beta|-1}\varphi(r)dr\int_{\partial\mathbb{B}^n}\xi^{p+\alpha}\overline{\xi}^{s+\beta}d\sigma \\ &= \begin{cases} 2n\widehat{\varphi}(2n+|\alpha|+|\beta|)\int_{\partial\mathbb{B}^n}\xi^{p+\alpha}\overline{\xi}^{s+\beta}d\sigma & p+\alpha\succeq s, \\ 0 & p+\alpha\not\succeq s. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $p+\alpha\succeq s$, tenemos

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n}\xi^{p+\alpha}\overline{\xi}^{s+\beta}d\sigma \begin{cases} \frac{(n-1)!(\alpha+p)!}{(n-1+|\alpha|+|p|)!} & \beta = p+\alpha-s, \\ 0 & \beta\succeq p+\alpha-s. \end{cases}$$

y

$$\langle z^{p+\alpha-s}, z^{\beta}\rangle = \int_{\mathbb{B}^n} z^{p+\alpha-s}\overline{z}^{\beta} dV = \begin{cases} \frac{n!(p+\alpha-s)!}{(n+|\alpha|+|p|-|s|)!} & \beta = p+\alpha-s, \\ 0 & \beta \neq p+\alpha-s. \end{cases}$$

Más aún, $\langle P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha], \overline{z}^\beta\rangle = 0 = \langle z^{p+\alpha-s}, \overline{z}^\beta\rangle$ para todo $\beta \succ 0$. Por lo tanto

$$P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha] = \begin{cases} \frac{2(p+\alpha)!(n+|p|+|\alpha|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!(n-1+|\alpha|+|p|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|)z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s. \end{cases}$$

Dado que φ es radial, $\overline{\varphi}$ también es radial y notemos que $\overline{\widehat{\varphi}(n)} = \widehat{\overline{\varphi}}(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle P\left[\overline{\xi}^p\xi^s\overline{\varphi z}^\alpha\right], z^\beta\rangle &= \int_{\mathbb{B}^n} \overline{\xi}^p\xi^s\overline{\varphi z}^\alpha\overline{z}^\beta dV \\ &= 2n\int_0^1 r^{2n-1+|\alpha|+|\beta|}\overline{\varphi(r)}dr\int_{\partial\mathbb{B}^n}\xi^s\overline{\xi}^{p+\alpha+\beta}d\sigma \\ &= \begin{cases} 2n\widehat{\overline{\varphi}}(2n+|\alpha|+|\beta|)\int_{\partial\mathbb{B}^n}\xi^s\overline{\xi}^{p+\alpha+\beta}d\sigma & s \succeq p+\alpha, \\ 0 & s \not\succeq p+\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora si $s \succeq p+\alpha$, tenemos

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n}\xi^s\overline{\xi}^{p+\alpha+\beta}d\sigma \begin{cases} \frac{(n-1)!s!}{(n-1+|s|)!} & \beta = s-p-\alpha, \\ 0 & \beta \neq s-p-\alpha. \end{cases}$$

y

$$\langle z^{s-p-\alpha}, z^\beta\rangle = \begin{cases} \frac{n!(s-p-\alpha)!}{(n+|s|-|p|-|\alpha|)!} & \beta = s-p-\alpha, \\ 0 & \beta \neq s-p-\alpha. \end{cases}$$

Entonces

$$P\left[\overline{\xi}^p\xi^s\overline{\varphi z}^\alpha\right] = \begin{cases} \frac{2s!(n+|s|-|\alpha|-|p|)!}{(s-\alpha-p)!(n-1+|s|)!}\widehat{\overline{\varphi}}(2n+|s|-|p|)z^{s-\alpha-p} & s \succeq p+\alpha, \\ 0 & s \not\succeq p+\alpha. \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) &= P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha] + \overline{P\left[\overline{\xi}^p\xi^s\overline{\varphi z}^\alpha\right]} - P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha](0) \\ &= \begin{cases} \frac{2(p+\alpha)!(n+|p|+|\alpha|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!(n-1+|\alpha|+|p|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|)z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ \frac{2s!(n+|s|-|\alpha|-|p|)!}{(s-\alpha-p)!(n-1+|s|)!}\widehat{\varphi}(2n+|s|-|p|)\overline{z}^{s-\alpha-p} & s \succeq p+\alpha, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s, \\ 0 & s \not\succeq p+\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora si $p \perp s$, sabemos que $p+\alpha \succeq s$ es equivalente a $\alpha \succeq s$. Como $p,\ s$ son no nulos, entonces existe $i \in \{1,\dots,n\}$, tal que $p_i \neq 0,\ s_i = 0$. Esto nos dice que no existe un multi-índice α, tal que $p+\alpha \preceq s$. Entonces

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2(p+\alpha)!(n+|p|+|\alpha|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!(n-1+|\alpha|+|p|)!}\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|)z^{p+\alpha-s} & \alpha \succeq s, \\ 0 & \alpha \not\succeq s. \end{cases}$$

Los otros casos se obtienen de cálculos similares. $\square$

El siguiente teorema nos ayuda a ver la relación entre los operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo y su símbolo.

Teorema 3.6. *Sean $p,\ s$ multi-índices no cero, tales que $p \perp s$ y sea f una función acotada en $\mathbb{B}^n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cualquier multi-índice α, existe un $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\widehat{T}_f(z^\alpha) = \begin{cases} \lambda_\alpha z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s. \end{cases}$$

2. *f es una función cuasihomogénea de grado (p,s).*

Demostración. Es claro que (2) implica (1).
Ahora supongamos que se cumple (1). Para cualquier multi-índice β, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_{\overline{z}^p z^s f}(z^\alpha), z^\beta\rangle &= \langle f z^{\alpha+s}, z^{p+\beta}\rangle = \langle \widehat{T}_f z^{\alpha+s}, z^{p+\beta}\rangle = \langle \lambda_{\alpha+s} z^{\alpha+p}, z^{p+\beta}\rangle \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda_{\alpha+s} n!(\alpha+p)!}{(n+|\alpha|+|p|)!} & \alpha = \beta. \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Similarmente, para $\beta \succeq 0$ y $\beta \neq 0$, tenemos que $\langle \widehat{T}_{\overline{z}^p z^s f}(z^\alpha), \overline{z}^\beta\rangle = 0 = \langle z^\alpha, \overline{z}^\beta\rangle$. De las Proposiciones **??** y **??**, se sigue que

$$\widehat{T}_{\overline{z}^p z^s f}(z^\alpha) = \frac{\lambda_{\alpha+s}(\alpha+p)!(n+|\alpha|)!}{\alpha!(n+|\alpha|+|p|)!} z^\alpha.$$

Por el Teorema **??** sabemos que $\overline{z}^p z^s f$ es una función radial. Sea $\varphi(z) = \overline{z}^p z^s f(z)$, donde φ es una función radial en $\mathbb{B}^n$. Entonces

$$f(z) = \varphi(r) r^{-(p+s)} \xi^p \overline{\xi}^s.$$

Esto implica que f es una función cuasihomogénea de grado (p,s). $\square$

Como en los casos anteriores si el producto de dos operadores de Toeplitz con símbolo cuasihomogéneo es un operador de Toeplitz, el símbolo de este último depende de los símbolos del producto, como se muestra a continuación.

Teorema 3.7. *Sean p, s dos multi-índices no cero con $p \perp s$ y sean φ_1, φ_2 dos funciones radiales integrables en $\mathbb{B}^n$, tales que $\overline{\xi}^s\varphi_1$, $\xi^p\varphi_2$ son acotadas, si existe una función acotada h, tal que $\widehat{T}_{\overline{\xi}^s\varphi_1}\widehat{T}_{\xi^p\varphi_2} = \widehat{T}_h$, entonces h es una función cuasihomogénea de grado (p, s).*

Demostración. Usando el Lema **??** para cualquier multi-índice α, obtenemos

$$\widehat{T}_h(z^\alpha) = \widehat{T}_{\overline{\xi}^s\varphi_1}\widehat{T}_{\xi^p\varphi_2}(z^\alpha) = \begin{cases} \lambda_\alpha z^{\alpha+p-s} & \alpha + p \succeq s, \\ 0 & \alpha + p \not\succeq s, \end{cases}$$

donde

$$\lambda_\alpha = \tfrac{2(\alpha)!(n+|\alpha|-|s|)!}{(\alpha-s)!(n-1+|\alpha|)!}\widehat{\varphi_1}(2n + 2|\alpha| - |s|) \cdot \tfrac{2(p+\alpha)!(n+|p|+|\alpha|)!}{(p+\alpha)!(n-1+|\alpha|+|p|)!}\widehat{\varphi_2}(2n + 2|\alpha| + |p|)$$

Del Teorema **??** se sigue que h es una función cuasihomogénea de grado (p, s). $\square$

3.3 Operadores de Toeplitz con símbolo separadamente cuasihomogéneo

Una función $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$ es separadamente radial si $\varphi(z) = \varphi(r_1, \dots, r_n)$, es decir φ depende de las coordenadas radiales de $z = (z_1, \dots, z_n) = (\xi_1 r_1, \dots, \xi_n r_n)$, donde $|\xi_i| = 1$, para $i = 1, \dots, n$.
En general a una función $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ definida en $\mathbb{B}^n$ la podemos descomponer como $f(z) = f(r\xi) = f(r_1\xi_1, \dots, r_n\xi_n)$, con $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i = |z_i|$, $i = 1, \dots, n$ y $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Lema 3.8. *Sean α, β multi-índices, con $\alpha \neq \beta$ y sea $r \in [0, 1)$. Si φ es una función acotada separadamente radial en $\mathbb{B}^n$, entonces*

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} \varphi(r\xi)\xi^\alpha\overline{\xi}^\beta d\sigma = 0.$$

Demostración. El caso $n = 1$ es claro. Supongamos que $n \geq 2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_n \neq \beta_n$. Como φ es una función separadamente radial y acotada, usando la propiedad (**??**), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}^n} \varphi(r\xi)\xi^\alpha\overline{\xi}^\beta d\sigma &= \int_{\mathbb{B}^{n-1}} dV \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(r\xi', re^{i\theta}\xi_n)(\xi', e^{i\theta}\xi_n)^\alpha\overline{(\xi', e^{i\theta}\xi_n)}^\beta d\theta \\ &= \int_{\mathbb{B}^{n-1}} \varphi(r\xi', \xi_n)(\xi', \xi_n)^\alpha\overline{(\xi', \xi_n)}^\beta dV \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\alpha_n-\beta_n)\theta}d\theta = 0.\end{aligned}$$

□

Como $z = (z_1, \ldots, z_n)$ se puede escribir como $z = r \cdot \xi = (r_1\xi_1, \ldots, r_n\xi_n)$, con $r = (r_1, \ldots, r_n) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$ y $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (z_1/|z_1|, \ldots, z_n/|z_n|)$, podemos tomar $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ como $\tau(z) = \tau(z_1, \ldots, z_n) = (|z_1|, \ldots, |z_n|) = r$ y $\tau(|z|) = |r|$, entonces $\tau(\xi) = \tau(z/|z|) = r|r|^{-1}$.

Denotemos por $\tau(\mathbb{B}^n)$ al conjunto

$$\tau(\mathbb{B}^n) = \{r = (r_1, \ldots, r_n) = (|z_1|, \ldots, |z_n|) : z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}^n\}.$$

Si φ es una función separadamente radial, tomando en cuenta que $\varphi(z)$ no depende de las coordenandas $\xi \in \partial\mathbb{B}^n$ y el hecho que $dV = n!dx_1dy_1\cdots dx_ndy_n$, tenemos

$$\int_{\mathbb{B}^n} \varphi(z)dV = 2^n n! \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)rdr, \tag{3.10}$$

donde $rdr = \prod_{i=1}^{n} r_idr_i$.

Con la definición de función separadamente radial y función cuasihomogénea, podemos dar la definición de una función separadamente cuasihomogénea.

Definición 3.9. *Sean $p, s \in \mathbb{N}^n$. Una función $f \in L^1(\mathbb{B}^n)$ es separadamente cuasihomogénea de grado (p, s) si f tiene la forma*

$$f(r\xi) = \xi^p\overline{\xi}^s\varphi(r),$$

para cualquier ξ en la esfera unitaria $\partial\mathbb{B}^n$; donde φ es una función separadamente radial.

Veamos una descomposición para $f \in L^2(\mathbb{B}^n)$. Sea

$$\mathfrak{R} = \left\{\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C} \textit{ tal que } \varphi \textit{ es separadamente radial y } \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} |\varphi(r)|^2rdr < \infty\right\}, \tag{3.11}$$

y sean $\mathfrak{R}_{p,s} = \xi^p\overline{\xi}^s\mathfrak{R},\ p,s \in \mathbb{Z}^n,\ p \perp s$. Cada $\mathfrak{R}_{p,s}$ es subespacio de $L^2(\mathbb{B}^n)$ dado que para $f \in \mathfrak{R}_{p,s},\ f(z) = f(|r|\xi) = \xi^p\overline{\xi}^s\varphi(r)$ y

$$\int_{\mathbb{B}^n} |f(z)|^2 dV = 2^n n! \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} |\xi^p\overline{\xi}^s|^2|\varphi(r)|^2 r dr = 2^n n! \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} |\xi^k|^2|\varphi(r)|^2 r dr < \infty,$$

donde $k = p - s$.
De hecho tenemos que $\mathfrak{R}_{p,s} \perp \mathfrak{R}_{q,r}$ si $(p,s) \neq (q,r)$. Todo polinomio P en z y $\overline{z}$ se puede escribir como

$$P(z,\overline{z}) = \sum_{k=-\gamma_0,}^{\gamma_0} \left(\sum_{\alpha-\beta=k} a_{\alpha,\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta \right),$$

para $k = p - s,\ p \perp s$ y algún $\gamma_0 \in \mathbb{N}^n$. La primera suma se entiende como la suma sobre todos los multi-índices k tal que $-\gamma_0 \leq k\gamma_0$. En coordenadas polares $z = r \cdot \xi$, con $r = |z|,\ \xi = \frac{z}{|z|}$, $P(z,\overline{z})$ tiene la forma

$$\begin{aligned} P(z,\overline{z}) &= \sum_{k=-\gamma_0,}^{\gamma_0} \left[\sum_{\alpha-\beta=k} a_{\alpha,\beta} r^\alpha \xi^\alpha r^\beta \overline{\xi}^\beta \right] = \sum_{k=-\gamma_0,}^{\gamma_0} \left[\sum_{\alpha-\beta=k} a_{\alpha,\beta} r^{\alpha+\beta} \xi^{\alpha-\beta} \right] \\ &= \sum_{k=-\gamma_0,}^{\gamma_0} \xi^k \left[\sum_{\alpha-\beta=k} a_{\alpha,\beta} r^{\alpha+\beta} \right]. \end{aligned}$$

Dado que la segunda suma converge, $\displaystyle\sum_{\alpha-\beta=k} a_{\alpha,\beta} r^{\alpha+\beta} \in \mathfrak{R}$, entonces

$$P(z,\overline{z}) \in \sum_{k\in\mathbb{N}^n} \xi^k \mathfrak{R} = \sum_{\substack{p,s\in\mathbb{Z}^n \\ p\perp s}} \xi^p\overline{\xi}^s\mathfrak{R}.$$

Como los polinomios $P(z,\overline{z})$ son densos en $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}^n})$ y dado que $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}^n})$ es denso en $L^2(\mathbb{B}^n)$ podemos concluir que

$$L^2(\mathbb{B}^n) = \bigoplus_{\substack{p,s\in\mathbb{N}^n \\ p\perp s}} \xi^p\overline{\xi}^s\mathfrak{R} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}^n} \xi^k\mathfrak{R}.$$

Así toda función $f \in L^2(\mathbb{B}^n)$ tiene la descomposición

$$f(r\xi) = \sum_{\substack{p,s\in\mathbb{N}^n \\ p\perp s}} \xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \xi^k f_k(r), \quad f_{p,s} = f_k \in \mathfrak{R}.$$

Si $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n) \subset L^2(\mathbb{B}^n)$, el siguiente lema nos muestra que cada $\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)$ es acotada.

Lema 3.10. *Sea* $f(z) = \sum_{\substack{p,s\in\mathbb{N}^n \\ p\perp s}} \xi^p \overline{\xi}^s f_{p,s}(r) \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ *entonces* $\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)$ *es acotada en* $\mathbb{B}^n$ *para todos los multi-índices* $p, s \in \mathbb{N}^n$, *con* $p \perp s$.

Demostración. Si U es una transformación unitaria de $\mathbb{C}^n$ con matriz diagonal, es decir $U = diag\{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\}$, tenemos

$$f(Uz) = f(r_1 e^{i\theta_1}\xi_1, \ldots, r_n e^{i\theta_n}\xi_n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{ik_1\theta_1}\cdots e^{ik_n\theta_n}\xi^k f_k(r),$$

donde $p - s = k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned}
\xi^k f_k(r) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} e^{il_1\theta_1}\cdots e^{il_n\theta_n}\xi^l f_l(r) e^{-ik_1\theta_1}\cdots e^{-ik_n\theta_n} d\theta_1\cdots d\theta_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(Uz) e^{-ik_1\theta_1}\cdots e^{-ik_n\theta_n} d\theta_1\cdots d\theta_n.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$|\xi^k f_k(r)| = |\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)| \le \sup_{z\in\mathbb{B}^n}|f(z)|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.12}$$

Por lo que las funciones $\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)$ son acotadas en $\mathbb{B}^n$. □

El siguiente lema muestra que los operadores de Toeplitz con símbolo separadamente radial, al igual que los operadores de Toeplitz con símbolo radial, son diagonales con respecto a la base $\left\{\sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}}z^n, \sqrt{\frac{(n+|\alpha|)!}{n!\alpha!}}\overline{z}^n\right\}$ de $b^2(\mathbb{B}^n)$.

Lema 3.11. *Sea* φ *una función acotada y separadamente radial en* $\mathbb{B}^n$*; entonces para cualquier multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) &= \frac{2^n(n+|\alpha|)!}{\alpha!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)}\varphi(r)r^{2\alpha}rdr\, z^\alpha, \\
\widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha) &= \frac{2^n(n+|\alpha|)!}{\alpha!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)}\varphi(r)r^{2\alpha}rdr\, \overline{z}^\alpha.
\end{aligned}$$

Demostración. Para cualquier par de multi-índices α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, de (**??**) y del Lema **??**, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{T}_\varphi z^\alpha, z^\beta\rangle &= \langle\varphi z^\alpha, z^\beta\rangle = \int_{\mathbb{B}^n}\varphi(z)z^\alpha\overline{z}^\beta dV \\
&= \begin{cases} 2^n n! \int_{\tau(\mathbb{B}^n)}\varphi(r)r^{2\alpha}rdr & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \ne \beta. \end{cases}
\end{aligned}$$

Similarmente si $\beta \succeq 0$, $\beta \neq 0$, obtenemos $\langle \widehat{T}_\varphi z^\alpha, \overline{z}^\beta\rangle = 0 = \langle z^\alpha, \overline{z}^\beta\rangle$.

$$\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) = \frac{2^n(n+|\alpha|)!}{\alpha!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2\alpha} rdr\, z^\alpha \tag{3.13}$$

De manera análoga, podemos deducir $\widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha) = \frac{2^n(n+|\alpha|)!}{\alpha!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2\alpha} rdr\, \overline{z}^\alpha$. □

Teorema 3.12. *Sean p, s dos multi-índices, $\varphi \in \mathfrak{R}$ y $\xi^p\overline{\xi}^s\varphi$ una función acotada en $\mathbb{B}^n$. Entonces para cualquier multi-índice α,*

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n(n+|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2\alpha+2p}|r|^{-(|p|+|s|)}rdr\, z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ \frac{2^n(n+|s|-|\alpha|-|p|)!}{(s-\alpha-p)!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2s}|r|^{-(|p|+|s|)}rdr\, \overline{z}^{s-\alpha-p} & s \succeq p+\alpha, \\ 0 & s \not\succeq p+\alpha \\ & p+\alpha \not\succeq s \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(\overline{z}^\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n(n+|\alpha|+|s|-|p|)!}{(s+\alpha-p)!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2\alpha+2s}|r|^{-(|p|+|s|)}rdr\, \overline{z}^{s+\alpha-p} & s+\alpha \succeq p, \\ \frac{2^n(n-|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p-\alpha-s)!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2p}|r|^{-(|p|+|s|)}rdr\, \overline{z} & p \succeq s+\alpha, \\ 0 & s+\alpha \not\succeq p, \\ & p \not\succeq s+\alpha. \end{cases} \tag{3.15}$$

Más aún si p, s son dos multi-índices tales que $p \perp s$ tenemos,

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n(n+|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2\alpha+2p}|r|^{-(|p|+|s|)}rdr\, z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s. \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\widehat{T}_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}(\overline{z}^\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n(n+|\alpha|+|s|-|p|)!}{(s+\alpha-p)!}\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r)r^{2\alpha+2s}|r|^{-(|p|+|s|)}rdr\, \overline{z}^{s+\alpha-p} & s+\alpha \succeq p, \\ 0 & s+\alpha \not\succeq p. \end{cases} \tag{3.17}$$

Demostración. Sólo probaremos (**??**) y (**??**). Para cualquier multi-índice β, si $p + \alpha \not\succeq s$, entonces existe i tal que $\alpha_i + p_i < s_i$. Luego $p+\alpha \neq \beta + s$. Del Lema **??**, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle P[\xi^p\overline{\xi}^s\varphi z^\alpha], z^\beta\rangle &= \int_{\mathbb{B}^n} \xi^p\overline{\xi}^s\varphi(z)z^\alpha\overline{z}^\beta dV \\ &= \int_0^1 2n|r|^{2n-1}|r|^{|\alpha|+|\beta|}d|r|\int_{\partial\mathbb{B}^n}\varphi(|r|\xi)\xi^{p+\alpha}\overline{\xi}^{s+\beta}d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Para $\alpha + p \succeq s$, usando el Lema ??, la ecuación (??) y las Proposiciones ?? y ??, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle P[\xi^p \overline{\xi}^s \varphi z^\alpha], z^\beta \rangle &= \int_{\mathbb{B}^n} \xi^p \overline{\xi}^s \varphi(z) z^\alpha \overline{z}^\beta dV \\
&= \begin{cases} 2^n n! \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr & \beta = p+\alpha-s, \\ 0 & \beta \neq p+\alpha-s, \end{cases} \\
\langle z^{p+\alpha-s}, z^\beta \rangle &= \begin{cases} \frac{n1!(p+\alpha-s)!}{(n+|\alpha|+|p|-|s|)!} & \beta = p+\alpha-s, \\ 0 & \beta \neq p+\alpha-s. \end{cases}
\end{aligned}$$

Para $\beta \succeq 0$, $\beta \neq 0$, tenemos $\langle P[\xi^p \overline{\xi}^s \varphi z^\alpha], \overline{z}^\beta \rangle = 0$.
Se sigue, para $p + \alpha \succeq s$, $\langle P[\xi^p \overline{\xi}^s \varphi z^\alpha], \overline{z}^\beta \rangle = \langle z^{p+\alpha-s}, \overline{z}^\beta \rangle = 0$. Deducimos que

$$P\left[\xi^p \overline{\xi}^s \varphi z^\alpha\right] = \begin{cases} \frac{2^n (n+|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr \, z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s. \end{cases}$$

Notemos que $\overline{\varphi}$ sigue siendo una función separadamente radial. Por un argumento similar, tenemos

$$P\left[\overline{\xi}^p \xi^s \overline{\varphi} z^\alpha\right] = \begin{cases} \frac{2^n (n+|s|-|\alpha|-|p|)!}{(s-\alpha-p)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \overline{\varphi}(r) r^{2s} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr \, z^{s-\alpha-p} & s \succeq p+\alpha, \\ 0 & s \not\succeq p+\alpha. \end{cases}$$

De las dos ecuaciones de arriba obtenemos

$$\widehat{T}_{\xi^p \overline{\xi}^s \varphi}(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n (n+|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr \, z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ \frac{2^n (n+|s|-|\alpha|-|p|)!}{(s-\alpha-p)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \overline{\varphi}(r) r^{2s} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr \, z^{s-\alpha-p} & s \succeq p+\alpha, \\ & s \neq p+\alpha, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s, \\ & s \not\succeq p+\alpha. \end{cases}$$

Más aún, si $p \perp s$ y p, s son multi-índices no cero, entonces extiste $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p_i > 0$ y $s_i = 0$. Esto nos implica que no existe un multi-índice α tal que $s \succeq p + \alpha$. □

El siguiente teorema caracteriza los operadores de Toeplitz diagonales.

Teorema 3.13. *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{B}^n)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Para cada multi-índice α, existe un $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) = \lambda_\alpha z^\alpha$,*

2. *φ es una función separadamente radial.*

Demostración. Del Lema **??** se sigue que (2) implica (1).
Para ver la otra implicación. Sea U una transformación unitaria con matriz diagonal y $z \in \mathbb{B}^n$. Entonces

$$\widehat{T}_\varphi (U^{-1}z)^\alpha = \lambda_\alpha (U^{-1}z)^\alpha.$$

De la descomposición de la proyección (**??**) y de la definición de operador de Toeplitz tenemos

$$\widehat{T}_{\varphi\circ U}(z^\alpha) = P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right] + \overline{P\left[\overline{\varphi(Uz)}\overline{z}^\alpha\right]} - P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right](0).$$

Haciendo el cálculo

$$\begin{aligned} P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right](w) &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\varphi(Uz)z^\alpha}{(1-\langle w, z\rangle)^{n+1}} dV = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}{(1-\langle w, U^{-1}z\rangle)^{n+1}} dV \\ &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}{(1-\langle Uw, z\rangle)^{n+1}} dV = P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](Uw). \end{aligned}$$

De la misma forma podemos calcular

$$\overline{P\left[\overline{\varphi(Uz)}\overline{z}^\alpha\right]} = P\left[\overline{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}\right](Uw),$$
$$P\left[\varphi(Uz)z^\alpha\right](0) = P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](0).$$

Deducimos entonces que

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\varphi\circ U}(z^\alpha)(w) &= P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](Uw) + P\left[\overline{\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha}\right](Uw) - P\left[\varphi(z)(U^{-1}z)^\alpha\right](0) \\ &= \widehat{T}_\varphi (U^{-1}z)^\alpha (Uw) = \lambda_\alpha w^\alpha = \widehat{T}_\varphi(z^\alpha)(w). \end{aligned}$$

Luego $\widehat{T}_{\varphi\circ U}(z^\alpha) = T_\varphi(z^\alpha)$.
Con el mismo método obtenemos $\widehat{T}_{\varphi\circ U}(\overline{z}^\alpha) = \widehat{T}_\varphi(\overline{z}^\alpha)$ y concluimos que $\widehat{T}_{\varphi\circ U} = \widehat{T}_\varphi$ en $b^2(\mathbb{B}^n)$. Por el Lema **??** tenemos $\varphi \circ U = \varphi$, así φ es una función separadamente radial. □

Teorema 3.14. *Sean p, s dos multi-índices no cero, con $p \perp s$ y sea φ una función acotada en $\mathbb{B}^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *Para cualquier α, existe $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\widehat{T}_\varphi(z^\alpha) = \begin{cases} \lambda_\alpha z^{p+\alpha-s} & p+\alpha \succeq s, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s. \end{cases}$$

2. La función φ es separadamente cuasihomogénea de grado (p, s).

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$ es claro. Ahora supongamos que se tiene 2. Entonces para cualquier multi-índice β

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{T}_{\overline{z}^p z^s \varphi}(z^\alpha), z^\beta \rangle &= \langle \varphi z^{\alpha+s}, z^{p+\beta} \rangle = \langle \widehat{T}_\varphi z^{\alpha+s}, z^{p+\beta} \rangle = \langle \lambda_{\alpha+s} z^{\alpha+p}, z^{p+\beta} \rangle \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda_{\alpha+s} n!(\alpha+p)!}{(n+|\alpha|+|p|)!} & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases}
\end{aligned}$$

De la misma manera para $\beta \succeq 0$ y $\beta \neq 0$, tenemos $\langle \widehat{T}_{\overline{z}^p z^s \varphi}(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle = 0 = \langle z^\alpha, \overline{z}^\beta \rangle$. Luego

$$\widehat{T}_{\overline{z}^p z^s \varphi}(z^\alpha) = \frac{\lambda_{\alpha+s}(\alpha+p)!(n+|\alpha|)!}{\alpha!(n+|\alpha|+|p|)!} z^\alpha.$$

Del Teorema **??**, $\overline{z}^p z^s \varphi$ es una función separadamente radial. Sea $\overline{z}^p z^s \varphi(z) = \psi(z)$, con ψ una función separadamente radial en $\mathbb{B}^n$. Se sigue que

$$\varphi(z) = \psi(r) r^{-(2p+2s)} |r|^{(|p|+|s|)} \xi^p \overline{\xi}^s,$$

por lo que φ es una función separadamente cuasihomogénea de grado (p, s). □

Los siguientes Teoremas nos dan condiciones para el símbolo de un operador de Toeplitz que es producto de operadores de Toeplitz con símbolos separadamente radiales o, es producto de operadores de Toeplitz con símbolos separadamente cuasihomogéneos.

Teorema 3.15. *Sean φ_1, φ_2 dos funciones separadamente radiales en $\mathbb{B}^n$. Si existe una función h tal que $\widehat{T}_{\varphi_1} \widehat{T}_{\varphi_2} = \widehat{T}_h$, entonces h es una función separadamente radial en $\mathbb{B}^n$.*

Demostración. Del Lema **??**, tenemos que para cualquier multi-índice α

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_h(z^\alpha) &= \widehat{T}_{\varphi_1} T_{\varphi_2}(z^\alpha) \\
&= \frac{2^n(n+|\alpha|)!}{\alpha!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_2(r) r^{2\alpha} r dr \cdot \frac{2^n(n+|\alpha|)!}{\alpha!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_1(r) r^{2\alpha} r dr \, z^\alpha
\end{aligned}$$

Entonces del Teorema **??**, tenemos que h es una función separamente radial. □

Teorema 3.16. *Sean p, s dos multi-índices distintos de cero con $p \perp s$ y φ_1, $\varphi_2 \in \mathfrak{R}$ tales que $\overline{\xi}^s \varphi_1$, $\xi^p \varphi_2 \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Si existe una función acotada h tal que $\widehat{T}_{\overline{\xi}^s \varphi_1} \widehat{T}_{\xi^p \varphi_2} = \widehat{T}_h$, entonces h es una función separadamente cuasihomogénea de grado (p, s).*

Demostración. Para todo multi-índice α, usando el Teorema **??**, obtenemos

$$\widehat{T}_h(z^\alpha) = T_{\overline{\xi}^s \varphi_1} T_{\xi^p \varphi_2}(z^\alpha) = \begin{cases} \lambda_\alpha z^{\alpha+p-s} & \alpha + p \succeq s, \\ 0 & \alpha + p \not\succeq s, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \frac{2^n(n+|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_1(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-|s|} r dr \cdot \\ & \frac{2^n(n+|\alpha|+|p|)!}{(p+\alpha)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_2(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-|p|} r dr. \end{aligned}$$

Se sigue del Teorema **??** que h es una función separadamente cuasihomogénea de grado (p, s). □

Más aún, el siguiente resultado nos dice como se relacionan los operadores de Toeplitz con símbolo separadamente radiales y los operadores de Toeplitz con símbolo separadamente cuasihomogéneas, mediante el producto.

Teorema 3.17. *Sean p, s dos multi-índices distintos de cero con $p \perp s$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{R}$ tales que $\varphi_1, \overline{\xi}^s \xi^p \varphi_2 \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Si existe una función acotada h tal que $\widehat{T}_{\varphi_1} \widehat{T}_{\overline{\xi}^s \xi^p \varphi_2} = \widehat{T}_h$, entonces h es una función separadamente cuasihomogénea de grado (p, s).*

3.4 El producto de operadores de Toeplitz

Estudiaremos ahora cuando el producto de operadores de Toeplitz es cero y, la conmutatividad de operadores de Toeplitz con símbolos cuasihomogéneos y separadamente cuasihomogéneos.

Para esto primero necesitaremos un par de resultados que serán útiles más adelante.

Definición 3.18. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{Z}^2$, decimos que E satisface la condición (I) si se cumple el siguiente resultado*

(I) existe una sucesión $\{\alpha_i^{(1)}\}$ tal que $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\alpha_i^{(1)}} = \infty$, y para cada $\alpha_i^{(1)}$ fijo, existe una sucesión $\left\{\alpha_{j(i)}^{(2)}\right\}$ tal que $\displaystyle\sum_{j(i)=1}^\infty \frac{1}{\alpha_{j(i)}^{(2)}} = \infty$, y $\left\{\left(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{j(i)}^{(2)}\right) : j(i) = 1, 2, \ldots\right\} \subset E$.

Nota 3. *De acuerdo con la Definición* **??**, *tenemos que, para un multi-índice* $\gamma \in \mathbb{N}^2$, *si* E *es un subconjunto de* $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2 : \alpha \succeq \gamma\}$ *y si* E^c *es el complemento de* E *en* $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2 : \alpha \succeq \gamma\}$, *entonces* E *o* E^c *satisfacen la condición (I).*

Ahora daremos condiciones para que una función holomorfa y acotada en $\Pi_+^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : Re(z) > 0\}$, sea idénticamente cero.

Proposición 3.19. *Sea* f *una función holomorfa y acotada en* $\Pi_+^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : Re(z) > 0\}$. *Si el conjunto* $E = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2 : f(\alpha) = 0\}$ *satisface la condición* (I), *entonces* f *es idénticamente cero en* Π_+^2.

Demostración. Si E satisface la condición (I), entonces para cualquier $\alpha_i^{(1)} \in \{\alpha_i^{(1)}\}$ fijo, existe una sucesión $\{\alpha_{j(i)}^{(2)}\} \subset \mathbb{Z}_+$ tal que $\sum 1/\alpha_{j(i)}^{(2)} = \infty$ y $f(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{j(i)}^{(2)}) = 0$. Por el Teorema **??**, tenemos

$$f\left(\alpha_i^{(1)}, z_2\right) = 0, \ \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}.$$

La condición (I) nos dice que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^{(1)}} = \infty$. Aplicando el Teorema **??** a la primera variable tenemos que $f(z_1, z_2) = 0$ en $\Pi_+^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : Re(z) > 0\}$. $\square$

Corolario 3.20. *Sean* $p,\ s \in \mathbb{N}^2$ *y* $g(r)$ *una función acotada en* $\tau(\mathbb{B}^2)$. *Si el conjunto*

$$E = \left\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2 : \alpha \succeq s \ y \ \int_{\tau(\mathbb{B}^2)} g(r) r^{2\alpha+p-s} r dr = 0\right\}$$

satisface la condición (I), *entonces* $g = 0$.

Demostración. Sea $f(z) = \int_{\tau(\mathbb{B}^2)} g(r) r^z r dr$. Entonces f es una función holomorfa y acotada en $\Pi_+^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : Re(z) > 0\}$ dado que g es acotada. De la Proposición **??**, obtenemos que $f(z) = 0$ en Π_+^2. Por lo tanto $g = 0$ en $\tau(\mathbb{B}^2)$. $\square$

3.4.1 El problema del producto cero de operadores de Toeplitz

En esta sección estudiaremos las condiciones bajo las cuales, el producto de operadores de Toeplitz es igual al operador cero.

Primero estudiaremos el problema del producto de operadores de Toeplitz igual a cero cuando uno de los símbolos es separadamente cuasihomogéneo y los demás son cuasihomogéneos. Después veremos que el producto de dos operadores de Toeplitz con ciertos símbolos tiene solución trivial en el espacio de Bergman pluriarmónico en la bola unitaria.

Teorema 3.21. *Sean $p_i,\ s_i \in \mathbb{N}^n$, $(1 \le i \le m)$, multi-índices no cero, con $p_i \perp s_i$ y sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ funciones radiales integrables y $\varphi_m \in \mathfrak{R}$ tal que $\xi^{p_i}\overline{\xi}^{s_i}\varphi_i \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Entonces*

$$T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m} = 0.$$

si y sólo si $\varphi_i = 0$ para algún i.

Demostración. Supongamos que $T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m} = 0$, entonces para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned} T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m}(z^\alpha) = 0,\\ T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m}(\overline{z}^\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Se sigue del Lema **??** y del Teorema **??** que

$$\begin{aligned} &T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m}(z^\alpha)\\ &= \begin{cases} c_\alpha z^{\alpha + \sum_{j=1}^{m-1} p_{m-j} - \sum_{j=1}^{m-1} s_{m-j}}, & \alpha + p_m \succeq s_m, \ldots, \alpha + \sum\limits_{j=1}^{m-1} p_{m-j} \succeq \sum\limits_{j=1}^{m-1} s_{m-j},\\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_\alpha = &\left(\frac{2^n(n + |\alpha| + |p_m| - |s_m|)!}{(\alpha + p_m - s_m)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_m r^{2\alpha + 2p_m} |r|^{-(p_m+s_m)} r dr \right) \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^{m-1} \left\{ \frac{\left(2\left(\alpha + \sum\limits_{j=0}^{i} p_{m-j} - \sum\limits_{j=0}^{i-1} s_{m-j}\right)! \left(n + |\alpha| + \sum\limits_{j=0}^{i} |p_{m-j}| - \sum\limits_{j=0}^{i} |s_{m-j}|\right)!\right)}{\left(\alpha + \sum\limits_{j=0}^{i} p_{m-j} - \sum\limits_{j=0}^{i} s_{m-j}\right)! \left(n - 1 + |\alpha| + \sum\limits_{j=0}^{i} |p_{m-j}| - \sum\limits_{j=0}^{i-1} |s_{m-j}|\right)!} \right. \\ &\qquad \left. \times \widehat{\varphi}_{m-i} \left(2n + 2|\alpha| + 2\sum_{j=0}^{i-1} |p_{m-j}| - 2\sum_{j=0}^{i-1} |s_{m-j}| + |p_{m-i}| - |s_{m-i}| \right) \right\} \end{aligned}$$

Si $T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m}(z^\alpha) = 0$, entonces para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $\alpha + p_m \succeq s_m, \ldots, \alpha + \sum\limits_{j=1}^{m-1} p_{m-j} \succeq \sum\limits_{j=1}^{m-1} s_{m-j}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_m r^{2\alpha + 2p_m} |r^{-(p_m+s_m)} r dr \cdot \\ &\cdot \prod_{i=1}^{m-1} \left(\widehat{\varphi}_{m-i} \left(2n + 2|\alpha| + 2\sum_{j=0}^{i-1} |p_{m-j}| - 2\sum_{j=0}^{i-1} |s_{m-j}| + |p_{m-i}| - |s_{m-i}| \right) \right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por simplicidad consideraremos el caso $n = 2$. Sea

$$E = \left\{ \alpha \succeq \sum_{j=0}^{m-1} s_{m-j} : \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_m(r) r^{2\alpha+2p_m} |r|^{-(|p_m|+|s_m|)} r dr = 0 \right\}.$$

Si E satisface la condición (I), entonces $\varphi_m = 0$ por el Corolario **??**. De otro modo de la Nota **??**, tenemos que el complemento E^c, de E en $\left\{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^2 : \alpha \succeq \sum_{j=0}^{m-1} s_{m-j} \right\}$, satisface la condición (I). Sea

$$M = \left\{ \alpha+p_m \succeq s_m, \ldots, \alpha + \sum_{j=0}^{m-1} p_{m-j} \succeq \sum_{j=0}^{m-1} s_{m-j} : \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi_m(r) r^{2\alpha+2p_m} |r|^{-(|p_m|+|s_m|)} r dr \neq 0 \right\}.$$

Entonces $M \supset E^c$, lo que implica que M satisface la condición (I). Más aún tenemos

$$\sum_{\alpha \in M} \frac{1}{|\alpha|} = \infty.$$

Tomemos

$$M_i = \left\{ \alpha+p_m \succeq s_m, \ldots, \alpha + \sum_{j=0}^{m-1} p_{m-j} \succeq \sum_{j=0}^{m-1} s_{m-j} : \widehat{\varphi_i}\left(2\left(n+|\alpha|+\sum_{j=0}^{m-i-1} |p_{m-j}| - \sum_{j=0}^{m-i-1} |s_{m-j}| + |p_i| - |s_i|\right)\right) = 0 \right\},$$

para $1 \leq i \leq m-1$. De (**??**), obtenemos $M \subset \bigcup_{i=1}^{m-1} M_i$. Entonces existe un i tal que

$$\sum_{\alpha \in M_i} \frac{1}{|\alpha|} = \infty.$$

De la Nota **??** del capítulo 1, tenemos $\varphi_i = 0$, para algún $i = 1, \ldots, m-1$. Más aún si $\varphi_i = 0$ para algún $i = 1, \ldots, m$, entonces $T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m}(\overline{z}^\alpha) = 0$. Si $\varphi_i = 0$ para algún i entonces

$$T_{\xi^{p_1}\overline{\xi}^{s_1}\varphi_1} T_{\xi^{p_2}\overline{\xi}^{s_2}\varphi_2} \cdots T_{\xi^{p_m}\overline{\xi}^{s_m}\varphi_m} = 0. \tag{3.19}$$

□

Teorema 3.22. *Sea*

$$f(z) = \sum_{\substack{p,s \in \mathbb{Z}_+^n \\ p \perp s}} \xi^p \overline{\xi}^s f_{p,s}(r) \in L^\infty(\mathbb{B}^n),$$

donde $f_{p,s}(r) \in \mathfrak{R}$. *Sea* $g(z) = \xi^{p^*} \overline{\xi}^{s^*} \varphi(r) \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, *donde* p^*, s^* *son índices no cero con* $p^* \perp s^*$ *y* $\varphi \in \mathfrak{R}$. *Entonces* $T_f T_g = 0$ *si y sólo si* $f = 0$ *o* $g = 0$.

Demostración. Por el Lema **??**, tenemos que $\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)$ es acotada para cualesquiera multi-índices $p, s \in \mathbb{N}^n,\ p \neq 0,\ s \neq 0,\ p \perp s$.
Si $T_f T_g = 0$, entonces para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n,\ T_f T_g(z^\alpha) = 0$ y $T_f T_g(\overline{z}^\alpha) = 0$. De (**??**) tenemos que

$$T_{\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)}(z^\alpha) = c(p,s,\alpha)\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{p,s}(r) r^{2\alpha+2p}|r|^{-(|p|+|s|)} r dr z^{\alpha+p-s},$$

donde

$$c(p,s,\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n(n+|\alpha|+|p|-|s|)!}{(p+\alpha-s)!} & p+\alpha \succeq s, \\ 0 & p+\alpha \not\succeq s. \end{cases}$$

Por lo que

$$T_f(z^\alpha) = \sum_{\substack{p,s\in\mathbb{N}^n \\ p\perp s}} c(p,s,\alpha)\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{p,s}(r) r^{2\alpha+2p}|r|^{-(|p|+|s|)} r dr z^{\alpha+p-s}.$$

Las condiciones $T_f T_g(z^\alpha) = 0$ y (**??**) implican que para cualquier par de multi-índices $p, s \in \mathbb{N}^n,\ p \neq 0,\ s \neq 0$ y $p \perp s$,

$$\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{p,s}(r) r^{2\alpha+2p}|r|^{-(|p|+|s|)} r dr \cdot \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\alpha+2p^*}|r|^{-(|p^*|+|s^*|)} r dr = 0 \qquad (3.20)$$

para todo $\alpha \succeq 2s^* + s$. Ahora probaremos que $\varphi = 0$ o $f_{s,p} = 0$ para $p, s \in \mathbb{N}^n$ para el caso $n = 2$. Sea

$$E_{p,s} = \left\{\alpha \in \mathbb{Z}^2_+ : \alpha \succeq 2s^* + s,\ \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{p,s}(r) r^{2\alpha+2p^*-2s^*+2p}|r|^{-(|p|+|s|)} r dr = 0\right\}.$$

Si E satisface la condición (I), notemos que

$$|f_{p,s}(r) r^{p+s}|r|^{-(|p|+|s|)}| = |\xi^p\overline{\xi}^s f_{p,s}(r)| < \infty,$$

entonces $f_{p,s} = 0$ por el Lema **??**. Supongamos que E no satisface la condición (I); entonces $E^c_{p,s}$, el complemento de $E_{p,s}$, satisface la condición (I) por la Nota **??**. De (**??**) se sigue que

$$\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\alpha+2p^*}|r|^{-(|p^*|+|s^*|)} r dr = 0, \quad \forall \alpha \in E^c_{p,s}.$$

Usando de nuevo el Lema **??**, obtenemos que $\varphi = 0$. Más aún, si $f = 0$ o $\varphi = 0$, entonces $T_f T_g(\overline{z}^\alpha)$. Por lo que $T_f T_g = 0$ implica que $f = 0$ o $\varphi = 0$.
La otra implicación es obvia. □

El siguiente corolario da condiciones para que un operador de Toeplitz con símbolo separadamente cuasihomogéneo sea idempotente.

Corolario 3.23. *Sea* $f(z) = \xi^p \overline{\xi}^s f_{p,s}(r) \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$*, donde* $p, s \in \mathbb{N}^n$*,* $p \neq 0$ $s \neq 0$*,* $p \perp s$ *y* $f_{p,s} \in \mathfrak{R}$*. Entonces* $T_f^2 = T_f$ *implica que* $f = 0$ *o* $f = 1$*.*

3.4.2 La conmutatividad de operadores de Toeplitz

Ahora consideraremos el problema de conmutatividad de dos operadores de Toeplitz con ciertos símbolos.

Teorema 3.24. *Sean* $p,\ s \in \mathbb{N}^n$ *dos multi-índices no cero, con* $p \perp s$ *y sea* $\psi \in \mathfrak{R}$ *tal que* $\xi^p \overline{\xi}^s \psi \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$*, sea* φ *una función radial en* $\mathbb{B}^n$*. Si* φ *no es constante, entonces* $T_\varphi T_{\xi^p \overline{\xi}^s \psi} = T_{\xi^p \overline{\xi}^s \psi} T_\varphi$ *si y solo si* $|p| = |s|$ *o* $\psi = 0$*.*

Demostración. Del Lema **??** y Teorema **??** tenemos que $T_\varphi T_{\xi^p \overline{\xi}^s \psi} = T_{\xi^p \overline{\xi}^s \psi} T_\varphi$ si y sólo si

$$\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \psi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr (2n + 2|\alpha| + 2|p| - |s|) \widehat{\varphi}(2n + 2|\alpha| + 2|p| - |s|)$$
$$= \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \psi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr (2n + 2|\alpha|) \widehat{\varphi}(2n + 2|\alpha|), \quad (3.21)$$

para $p + \alpha \succeq s$ y

$$\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \psi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr (2n + 2|\alpha| + 2|s| - |p|) \widehat{\varphi}(2n + 2|\alpha| + 2|s| - |p|)$$
$$= \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \psi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr (2n + 2|\alpha|) \widehat{\varphi}(2n + 2|\alpha|), \quad (3.22)$$

para $s + \alpha \succeq p$. Supongamos primero que $|p| \neq |s|$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $|p| > |s|$, si no es así podemos tomar los adjuntos de py s. Tomemos el caso $n = 2$ y sea E el conjunto

$$E = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^2 : \alpha \succeq s,\ \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \psi(r) r^{2\alpha+2p} |r|^{-(|p|+|s|)} r dr = 0 \right\}.$$

Probaremos que E satisface la condición (I), lo cual implica que $\psi = 0$ por el Corolario **??**.

Supongamos que E no satisface la condición (I). Entonces E^c, el complemento de E, debe de satisfacer la condición (I) por la Nota **??**. Más aún, tenemos

$$\sum_{\alpha \in E^c} \frac{1}{|\alpha|} = \infty.$$

Por otro lado, para cualquier $\alpha \in E^c$, (**??**) nos da

$$(2n+2|\alpha|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|) = (2n+2|\alpha|+2|p|-2|s|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+2|p|-2|s|). \quad (3.23)$$

Denotemos por

$$F(z) = \widehat{\varphi}(z+2n+2|p|-2|s|) - \frac{z+2n}{z+2n+2|p|-2|s|}\widehat{\varphi}(z+2n),$$

Entonces F es analítica y acotada en $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$. De (**??**) tenemos que

$$F(2|\alpha|) = 0, \quad \forall \alpha \in E^c. \quad (3.24)$$

De acuerdo con el Teorema **??**, F debe de ser cero, lo cual implica que

$$(z+2n+2|p|-2|s|)\widehat{\varphi}(z+2n+2|p|-2|s|) = (z+2n)\widehat{\varphi}(z+2n).$$

Tomemos $\zeta = z+2n$. Entonces la ecuación anterior indica que $\zeta \to \zeta\varphi(\zeta)$ es periódica en el semiplano derecho, entonces $\zeta\varphi(\zeta) = O(|\zeta|)$. Al ser periódica, podemos extender la función a todo el plano complejo, por lo que $\zeta\varphi(\zeta)$ es entera y periódica. Para ζ tenemos

$$|\zeta\varphi(\zeta)| \leq C_1|\zeta| + C_2.$$

Esto nos dice que $\zeta\varphi(\zeta)$ es lineal, por lo que al ser entera, debe de ser constante. Entonces $\varphi(\zeta) = \frac{c}{\zeta}$ para alguna constante c, luego φ es constante, lo cual contradice la hipótesis. De la misma manera si $|p| = |s|$ o $\psi = 0$ se tiene (**??**). Entonces que $T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi}$ y T_φ conmuten, implica que $|p| = |s|$ o $\psi = 0$.
Por otro lado, si $|p| = |s|$ o $\psi = 0$, entonces se tiene (**??**) y (**??**) y consecuentemente

$$T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi}T_\varphi(z^\alpha) = T_\varphi T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi}(z^\alpha),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, lo cual implica que $T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi}$ y T_φ conmutan. □

Veamos ahora una descripción de operadores de Toeplitz con símbolos cuasihomogéneos con el mismo grado, que conmutan.

Teorema 3.25. *Sea $p, s \in \mathbb{N}^n$ dos multi-índices no cero con $p \perp s$, $|p| \neq |s|$ y sean φ, ψ dos funciones radiales integrables en $\mathbb{B}^n$, tales que $\xi^p\overline{\xi}^s\varphi$, $\xi^p\overline{\xi}^s\psi \in L^\infty$. Entonces $T_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi} = T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi}T_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}$ si y sólo si $\varphi = C\psi$ para alguna constante C.*

Demostración. Del Lema **??** tenemos que

$$T_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi} = T_{\xi^p\overline{\xi}^s\psi}T_{\xi^p\overline{\xi}^s\varphi}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned}&\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+3|p|-3|s|)\widehat{\psi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|)\\&\quad=\widehat{\psi}(2n+2|\alpha|+3|p|-3|s|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|p|-|s|),\end{aligned}\tag{3.25}$$

para todo $\alpha+2p\succeq 2s$ y

$$\begin{aligned}&\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+3|s|-3|p|)\widehat{\psi}(2n+2|\alpha|+|s|-|p|)\\&\quad=\widehat{\psi}(2n+2|\alpha|+3|s|-3|p|)\widehat{\varphi}(2n+2|\alpha|+|s|-|p|),\end{aligned}\tag{3.26}$$

para $\alpha+2s\succeq 2p$. Si $|p|>|s|$, entonces (**??**) implica que

$$\widehat{\varphi}(z+2|p|-2|s|)\widehat{\psi}(z)=\widehat{\psi}(z+2|p|-2|s|)\widehat{\varphi}(z),\quad z\in\{z:Re(z)>0\}.$$

Tomemos $t=2(|p|-|s|)$. Si multiplicamos las k ecuaciones obtenidas de tomar $z_i=z+it$ para $i=0,1,\ldots,k-1$, tenemos

$$\widehat{\varphi}(z+kt)\widehat{\psi}(z)=\widehat{\varphi}(z)\widehat{\psi}(z+kt),\ \forall k\in\mathbb{N}.\tag{3.27}$$

Ahora tomemos $z_0\in\{z\in\mathbb{C}:Re(z)>2\}$ tal que $\widehat{\psi}(z_0)\neq 0$ y sea $E=\{k\in\mathbb{N}:\widehat{\psi}(z_0+kt)=0\}$. Si

$$\sum_{k\in E}Re\left(\frac{1}{|z_0+kt)|}\right)=\infty,$$

entonces $\widehat{\psi}=0$, lo cual contradice las hipótesis del lema. Así

$$\sum_{k\in E^c}Re\left(\frac{1}{|z_0+kt|}\right)=\infty,$$

donde E^c es el complemento de E en $\mathbb{N}$.
Ahora, la ecuación (**??**) implica que

$$\frac{\widehat{\varphi}(z+kt)}{\widehat{\psi}(z+kt)}=\frac{\widehat{\varphi}(z)}{\widehat{\psi}(z)},\quad\forall k\in E^c.$$

Aplicando el Teorema **??** a la función $\widehat{\varphi}-c\widehat{\psi}$, con $c=\frac{\widehat{\varphi}(z_0)}{\widehat{\psi}(z_0)}$, tenemos que $\widehat{\varphi}=c\widehat{\psi}$. Si se cumple esto entonces se tiene (**??**). Por otro lado si $|p|<|s|$, por un argumento similar, (**??**) implica que $\widehat{\varphi}=c\widehat{\psi}$ y se tiene (**??**).
La otra implicación es clara. □

Veamos la conmutatividad de operadores de Toeplitz con símbolo separadamente cuasihomogéneos y separadamente radiales.

Teorema 3.26. *Sea* $f(z) = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^n} \overline{\xi}^s f_s(r) \in L^\infty$*, donde* $f_s(r) \in \mathfrak{R}$*. Sea* φ *una función separadamente radial, acotada en* $\mathbb{B}^n$*. Entonces* $T_f T_\varphi = T_\varphi T_f$ *si y sólo si* $T_{\overline{\xi}^s f_s(r)} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s(r)}$ *para cada multi-índice* $s \in \mathbb{N}^n$*.*

Demostración. Usando los Lemas **??** y **??**, obtenemos que para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}
T_f T_\varphi(z^\alpha) &= \mu_\alpha \sum_{s\in\mathbb{N}^n} T_{\overline{\xi}^s f_s(r)}(z^\alpha) \\
&= \mu_\alpha \left[\sum_{\alpha\succeq s} T_{\overline{\xi}^s f_s(r)}(z^\alpha) + \sum_{\substack{s\succ\alpha \\ s\neq\alpha}} T_{\overline{\xi}^s f_s(r)}(z^\alpha) + \sum_{\substack{s\not\succeq\alpha \\ \alpha\not\succeq s}} T_{\overline{\xi}^s f_s(r)}(z^\alpha) \right] \\
&= \mu_\alpha \left[\sum_{\alpha\succeq s} \frac{2^n(n+|\alpha|-|s|)!}{(\alpha-s)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_s(r) r^{2\alpha} |r|^{-|s|} r dr \ z^{\alpha-s} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{s\succeq\alpha \\ s\neq\alpha}} \frac{2^n(n+|s|-|\alpha|)!}{(s-\alpha)!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_s(r) r^{2s} |r|^{-|s|} r dr \ \overline{z}^{s-\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Donde $\mu_\alpha = \frac{2^n(n+|\alpha|)}{\alpha!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\alpha} r dr$. Se sigue que

$$\langle T_f T_\varphi(z^\alpha), z^\beta \rangle = \begin{cases} \frac{2^n\mu_\alpha(n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha-\beta}(r) r^{2\alpha} |r|^{|\beta|-|\alpha|} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle & \alpha \succeq \beta, \\ 0 & \alpha \not\succeq \beta, \end{cases}$$

para $\beta \succeq 0$ y

$$\langle T_f T_\varphi(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle = \frac{2^n\mu_\alpha(n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha+\beta}(r) r^{2\alpha+2\beta} |r|^{-(|\beta|+|\alpha|)} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle,$$

para $\beta \succeq 0, \ \beta \neq 0$.
Por un argumento similar tenemos

$$\langle T_\varphi T_f(z^\alpha), z^\beta \rangle = \begin{cases} \frac{2^n\nu_\beta(n+|\beta|)!}{\beta!} \displaystyle\int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha-\beta}(r) r^{2\alpha} |r|^{|\beta|-|\alpha|} r dr \langle z^\alpha, z^\beta \rangle & \alpha \succeq \beta, \\ 0 & \alpha \not\succeq \beta, \end{cases}$$

para $\beta \succeq 0$ y

$$\langle T_\varphi T_f(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle = \frac{2^n\nu_\beta(n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha+\beta}(r) r^{2\alpha+2\beta} |r|^{-(|\beta|+|\alpha|)} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle,$$

para $\beta \succeq 0,\ \beta \neq 0$, donde $\nu_\beta = \frac{2^n(n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} \varphi(r) r^{2\beta} r dr$.
Ahora supongamos que $T_f T_\varphi = T_\varphi T_f$. Se sigue que $T_f T_\varphi(z^\alpha) = T_\varphi T_f(z^\alpha)$ y $T_f T_\varphi(\overline{z}^\alpha) = T_\varphi T_f(\overline{z}^\alpha)$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Usando los Lemas **??** y **??**, tenemos, para cualquier multi-índice $\beta \in \mathbb{N}^n$ y $s \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}
\langle T_{\overline{\xi}^s f_s} T_\varphi(z^\alpha), z^\beta \rangle &= \begin{cases} \frac{2^n \mu_\alpha (n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha-\beta}(r) r^{2\alpha} |r|^{|\beta|-|\alpha|} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle & \beta = \alpha - s, \\ 0 & otros, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle T_f T_\varphi(z^\alpha), z^\beta \rangle & \beta = \alpha - s, \\ 0 & otros, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle T_\varphi T_f(z^\alpha), z^\beta \rangle & \beta = \alpha - s, \\ 0 & otros, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2^n \nu_\beta (n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha-\beta}(r) r^{2\alpha} |r|^{|\beta|-|\alpha|} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle & \beta = \alpha - s, \\ 0 & otros \end{cases} \\
&= \langle T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s}(z^\alpha), z^\beta \rangle
\end{aligned}$$

y para $\beta \in \mathbb{N}^n,\ \beta \neq 0$ y $s \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}
\langle T_{\overline{\xi}^s f_s} T_\varphi(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle &= \begin{cases} \frac{2^n \mu_\alpha (n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha-\beta}(r) r^{2\alpha} |r|^{|\beta|-|\alpha|} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle & \beta = s - \alpha, \\ 0 & otros, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle T_f T_\varphi(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle & \beta = s - \alpha, \\ 0 & otros, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle T_\varphi T_f(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle & \beta = s - \alpha, \\ 0 & otros, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2^n \nu_\beta (n+|\beta|)!}{\beta!} \int_{\tau(\mathbb{B}^n)} f_{\alpha-\beta}(r) r^{2\alpha} |r|^{|\beta|-|\alpha|} r dr \langle z^\beta, z^\beta \rangle & \beta = s - \alpha, \\ 0 & otros \end{cases} \\
&= \langle T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s}(z^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle
\end{aligned}$$

Por un procedimiento similar tenemos

$$\langle T_{\overline{\xi}^s f_s} T_\varphi(\overline{z}^\alpha), z^\beta \rangle = \langle T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s}(\overline{z}^\alpha), z^\beta \rangle$$

para $\beta \in \mathbb{N}^n$ y $s \in \mathbb{N}^n$, y

$$\langle T_{\overline{\xi}^s f_s} T_\varphi(\overline{z}^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle = \langle T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s}(\overline{z}^\alpha), \overline{z}^\beta \rangle$$

Entonces $T_{\overline{\xi}^s f_s} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s}$.
Ahora si $T_{\overline{\xi}^s f_s} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\xi}^s f_s}$ es fácil ver que $T_f T_\varphi = T_\varphi T_f$. $\square$

Del hecho que $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$, tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.27. *Sea* $f(z) = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}^n} \xi^p f_p(r) \in L^\infty$, *donde* $f_p(r) \in \mathfrak{R}$. *Sea* φ *una función acotada separadamete radial en* $\mathbb{B}^n$. *Entonces* $T_f T_\varphi = T_\varphi T_f$ *si y sólo si* $T_{\xi^p f_p(r)} T_\varphi = T_\varphi T_{\xi^p f_p(r)}$ *para todo multi-índice* $p \in \mathbb{N}^n$.

Bibliografía

[1] S. Alex, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic function theory*, Graduate Text in Mathematics **137**, Springer, New York, 1992.

[2] A. Brown and P.R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math. 213, pp 89-102, 1963.

[3] Z. Cuckovic and N. V. Rao, *Mellin transform, monomial symbols and commuting Toeplitz operators*, Journal of Function Analysis, 154 vol. 1, pp. 195-214, 1998.

[4] X.-T. Dong and Z.-H. Zhou, *Algebraic Properties of Toeplitz Operators with Radial Symbols on the Bergman Space of the Unit Ball*, Integral Equations and Operator Theory, 69, pp. 137-154, 2009.

[5] X.-T. Dong and Z.-H. Zhou, *Algebraic Properties of Toeplitz Operators with Separately Quasihomogenenous Symbols on the Bergman Space of the Unit Ball*, Journal of Operator Theory, vol. 66, no. 1, pp. 193-207, 2011.

[6] F. Flanigan, *Complex Variables, Harmonic and Analytic Functions*, Dover Publications, New York, 1997.

[7] F. Forelli, *Pluriharmonicity in terms of Harmonic Slices*, Math. Scand, 41, pp. 358-364, 1977.

[8] S. Grudsky and N. Vasilevski, *Bergman-Toeplitz operators: Radial component influence*, Integral Equations and Operator Theory, 40, pp 16-33, 2001.

[9] H. Guan, L. Liu and Y. Lu, *Algebraic Properties of Quasihomogeneous and Separatley Quasihomogeneous Toeplitz Operators on the Pluriharmonic Bergman Space*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 252037, 12 pages, 2013.

[10] K. Guo and D. Zheng, *Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space*, J. Math. Anal. Appl. 276, 213-230.

[11] I. Louhichi and L. Zakariasy, *On Toeplitz operators with quasihomogeneous symbols*, Arciv der Mathematik 85, pp. 248-257, 2005.

[12] R. Quiroga-Barranco and N. Vasilevski, *Commutative algebras of Toeplitz operators on the Reinhardt domains*, Integral Equations and Operator Theory, vol. 59, no. 1, pp. 67-98, 2007.

[13] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Graduate Text in Mathematics **172**, Springer, New York, 1998.

[14] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **241**, Springer, New York Berlin, 1921.

[15] W. Rudin, *Pluriharmonic Functions in Balls*, American Mathematical Society, vol. 62, no. 1, pp. 44-46, 1977.

[16] N. Vasilevski, *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, Boston Berlin, 2008.

[17] J. Yang, L. Liu and Y. Lu, *Algebraic Properties of Toeplitz Operators on the Pluriharmonic Bergman Space*, Journal of Function Spaces and Applications, vol 2013, Article ID 578436, 12 pages, 2012.