CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

"Cálculo Funcional"

T E S I S

QUE PRESENTA

ALONSO DELFÍN ARES DE PARGA

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICAS

DIRECTOR DE TESIS: **DR. ENRIQUE RAMIREZ DE ARELLANO ÁLVAREZ**

CIUDAD DE MÉXICO. AGOSTO, 2016

Dedicado a Rafael E. Morones Escobar (1945-2015),
por ser el primero en introducirme al cálculo funcional.

Agradecimientos

Antes que nada agradezco a mi asesor, el Dr. Enrique Ramírez de Arellano, por su colaboración en la escritura y revisión de esta tesis, además quiero agradecerle sus valiosos consejos y guía durante mis dos años en el Cinvestav. Quiero agradecer profundamente a mis sinodales, la Dra. Maribel Loaiza y el Dr. Carlos G. Pacheco, no sólo por sus valiosos comentarios al revisar este trabajo, si no también por los cursos que tomé con ambos, los cuales me dejaron muy bien preparado para escribir este trabajo. Aprovecho para mencionar que mi motivación para realizar esta tesis surgió en gran parte por mi interés de llenar los detalles del curso *Temas en Teoría de Operadores*, impartido por el Dr. Pacheco.

Quiero agradecer al Cinvestav por sus recursos y espacios, principalmente al Departamento de Matemáticas junto con el personal administrativo Norma Acosta, Adriana Aranda, Anabel Lagos, Roxana Martínez, Laura Valencia, José Luis Enriquez y Omar Hernández; al igual que a todo el personal de vigilancia, mantenimiento y de intendencia. Quiero agradecerle en especial al Dr. Eduardo Santillán por sus cursos de *Variable Compleja*, al igual que a el Dr. Egor Maximenko del Departamento de Matemáticas de la ESFM del IPN, con quien estoy en deuda, pues me permitió inscribirme a su curso de *Álgebra Lineal Numérica*, gracias al cual pude no abandonar uno de mis grandes gustos en matemáticas, la programación. Agradezco también a todos mis compañeros del Cinvestav, en especial a todos aquellos con los que tomé algún curso y nos apoyamos mutuamente para sacarlo adelante.

No quiero dejar de agradecer a todo el Departamento de Matemáticas de mi alma mater, el ITAM, ya que no me queda duda que me prepararon de forma excelente para afrontar mis estudios de posgrado en matemáticas puras. Principalmente quiero mencionar al Dr. Guillermo Grabinsky, quien continua como un mentor para mi y con quien estaré siempre agradecido. Quiero además agradecer al Dr. Carlos Bosch, pues en los inicios de esta tesis me presto el libro [2], el cual resulto ser de gran utilidad para el desarrollo del Capítulo 3.

Un agradecimiento muy especial es para Antonella Onofrietti, a quien tendré la dicha de llamar mi esposa para cuando esta tesis se publique, pues estuvo siempre a mi lado durante estos dos años de maestría, tanto en la buenas como en la malas y sobre todo aguantando mis desveladas y malos humores que surgieron durante la elaboración de este trabajo. Estoy seguro que sin ella a mi lado este logro, y muchos otros más, no serían posibles.

Tengo mucha suerte de tener a mis papas, Luisa Ares de Parga y Fernando Delfín, quienes nunca han dudado en apoyarme en mi elección de carrera y en motivarme a continuar con mis estudios; me han guiado en el camino dándome más herramientas de las que cualquier hijo podría pedir, y por eso estoy eternamente agradecido con ellos. Me siento orgulloso de haber elegido la misma profesión que mi mamá y aprovecho este espacio para agradecerle por toda la ayuda que me ha dado en las matemáticas, aún después de más de 25 años de no hacer matemáticas todavía puede ayudarme a resolver problemas; si logro llegar a ser la mitad de bueno que mi mamá me daré por bien pagado. Tengo más suerte aún por tener a mis dos hermanos, María Fernanda Delfín (Duca) y Luis Eduardo Delfín (Toco), quienes siempre han estado ahí para mi, preguntándome constantemente por cómo van mis exámenes, mi tesis, etc, y quiero que sepan lo importante que es para mi tenerlos y que son siempre para mi un motor para seguir trabajando.

Terminar un grado académico no es solamente un trabajo individual, es por eso que se prepara una sección de agradecimientos en la tesis, sin embargo, no puedo agradecer únicamente a la gente que me apoyo de manera directa a lo largo de la maestría, pues la gente que me acompaña en el día a día influye considerablemente, quizás de manera indirecta, en mi trabajo académico. Es por eso que quiero agradecer a mi familia, en especial a mis tíos y primos maternos y a todos mis amigos, su presencia en mi vida es invaluable.

Finalmente quiero agradecer al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría, es gracias este tipo de becas que es posible que México tenga instituciones que ofrecen posgrados con programas de calidad internacional como lo hace el Cinvestav.

Índice general

Glosario de símbolos

$\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \{\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \mid \mathrm{T} \text{ es lineal } \}$ **(p.4)**

$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \{\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \mid \mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \|\mathrm{T}\| < \infty\}$ **(p.5)**

$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{U} \text{ es un operador unitario } \}$ **(p.61)**

$\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua } \}$ **(p.6)**

$\mathcal{B}^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es acotada y medible en } \mathfrak{B}(\Omega) \}$ **(p.49)**

$\mathbb{C}[\lambda] = \{p : K \to \mathbb{C} \mid p \text{ es polinomio } \}$ **(p.6)**

$\mathcal{C}^{n}(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \mid \exists\, f^{(k)} \text{ y es continua en } K\ \forall k = 0, 1, \cdots, n.\}$ **(p.6)**

$H(G, \mathbb{C}) = \{f : G \to \mathbb{C} : \ f \text{ es holomorfa}\}$ **(p.73)**

$H(G, \mathcal{X}) = \{f : G \to \mathcal{X} : \ f \text{ es fuertemente holomorfa}\}$ **(p.70)**

$\mathrm{GL}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : x \text{ es invertible } \}$ **(p.14)**

$\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \mathbf{1} \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})\right\}$ **(p.17)**

$\hom(\mathcal{A}) = \{\omega \in \mathcal{A}^{*} : \omega(xy) = \omega(x)\omega(y)\}$ **(p.22)**

$\mathrm{sp}(\mathcal{A}) = \{\omega \in \hom(\mathcal{A}) : \omega \neq 0\}$ **(p.22)**

$B_r(x) = \{y \in \mathcal{X} : \|y - x\| < r\}$ **(p.16)**

$\mathcal{N}(f) = \{w \in \mathrm{Dom}(f) : f(w) = 0\}$ **(p.24)**

$\ell^{2}(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ **(p.40)**

$\ell^{\infty}(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$ **(p.40)**

$\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ **(p.68)**

$\mathrm{int}(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) : \mathrm{Ind}_{\gamma}(\lambda) = 1\}$ **(p.68)**

$\mathrm{ext}(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) : \mathrm{Ind}_{\gamma}(\lambda) = 0\}$ **(p.68)**

$\mathrm{Ind}_{\gamma}(\lambda_0)$ Indice de γ alrededor de $\lambda_0 \notin \gamma([a, b])$ **(p.68)**

Γ Colección de curvas rectificables **(p.68)**

$\mathfrak{B}(\Omega)$ Borelianos del espacio topólogico Ω **(p.11)**

$\mathtt{C}(T)$ Álgebra conmutante de la representación T **(p.62)**

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ Matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ **(p.6)**

$M(\Omega)$ Espacio de medidas complejo valuadas y regulares en $\mathfrak{B}(\Omega)$ **(p.49)**

$\mathcal{P}$	Medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$; $\mathcal{P} : \mathfrak{B}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$	**(p.48)**
$\lvert\mu\rvert$	Variación total de la medida $\mu \in M(\Omega)$	**(p.49)**
$\mathcal{X}$	Espacio de Banach	**(p.3)**
$\mathcal{A}$	Álgebra de Banach	**(p.13)**
$\mathcal{X}^*, \mathcal{A}^*$	Espacios duales de $\mathcal{X}, \mathcal{A}$, i.e. los funcionales lineales acotados	**(p.18)**
$\mathcal{H}$	Espacio de Hilbert	**(p.6)**
K	Espacio topologico de Haussdorff compacto	**(p.6)**
$\widehat{x}$	Mapeo de Gelfand	**(p.23)**
x^*	Involución de x	**(p.24)**
$\int_\Omega f \mathrm{d}\mathcal{P}$	Integral espectral de f con respecto a $\mathcal{P}$	**(p.51)**
$\oplus$	Suma directa	**(p.43)**
χ_E	Función Característica; $\chi_E(w) := \begin{cases} 1 & \text{si } w \in E \\ 0 & \text{si } w \notin E \end{cases}$	**(p.42)**

Resumen

En este trabajo se presenta un tratamiento detallado de distintos cálculos funcionales así como de algunas de sus aplicaciones. Se desarrolla primero el cálculo funcional continuo para elementos normales de un álgebra C^*, un caso particular es por supuesto el cálculo funcional continuo para operadores normales y acotados en un espacio de Hilbert. En segunda instancia se presenta una aplicación del cálculo funcional continuo para demostrar el teorema espectral sobre diagonalización de operadores normales y acotados en un espacio de Hilbert. Luego, se presenta el clásico teorema espectral para operadores normales, basado en el desarrollo de la teoría de medidas espectrales, el cual da lugar a una extensión del cálculo funcional continuo, el llamado cálculo funcional boreliano. En este caso se presentan diversas aplicaciones entre las cuales se encuentra una caracterización de los eigenvalores de operadores normales en términos de su resolución de la identidad y una caracterización completa de operadores unitarios; más aún se demuestra un caso particular de un resultado de teoría de representación de grupos usando las herramientas del cálculo funcional boreliano. Finalmente se detalla el tratamiento del calculo funcional holomorfo para un elemento arbitrario de un álgebra de Banach, empezando por extender la noción de holomorfía a funciones que toman valores en espacios de Banach, para concluir así con una aplicación al caso en que el espectro de un elemento se expresa como una unión disjunta de dos conjuntos. Un total de 3 apéndices son presentados para hacer el trabajo lo más autocontenido posible.

Abstract

In this work we present a fully detailed treatment of distinct functional calculi and of some of its applications. We first developed the continuous functional calculus for normal elements of a C^* algebra, a special case of this is of course the continuous functional calculus for normal and bounded operators on a Hilbert space. We then present an application of the continuous functional calculus to prove the spectral theorem on diagonalization of normal and bounded operators on a Hilbert space. After that, we deal with the classical spectral theorem, based of the theory of spectral measures, which gives raise to an extension of the continuous functional calculus called the Borel functional calculus. In this last case, we present several applications such as a characterization of the eigenvalues of normal operators using the resolution of the identity and a full characterization of unitary operators; moreover we prove a particular case of a classic result from group representation theory using the tools of the Borel functional calculus. Finally we give a full treatment of the holomorphic functional calculus for an arbitrary element of a Banach algebra, beginning by extending the concept of holomorphic functions to Banach valued functions, concluding with an application for the case the spectrum of an element is seen as the disjoint union of two sets. A total of three appendixes are presented to make the thesis as most self contained as possible.

Introducción

En esta tesis se presenta un tratamiento detallado del Cálculo Funcional. Se trató, en la medida de lo posible, que la tesis fuera autocontenida y que las pruebas estuvieran lo más detalladas posibles. El lector encontrará en las referencias que, debido a que las demostraciones son laboriosas, en general se omiten muchos detalles. Un ejemplo claro de esto se encuentra en una aplicación clásica del cálculo funcional: la demostración del Primer Teorema Espectral 3.10, que por ser menos clásico en la literatura que el Segundo Teorema Espectral 3.26, su demostración no se encuentra muy detallada. En esta tesis detallamos toda la prueba del Primer Teorema Espectral siguiendo las sugerencias que da Halmos en [12] y la estructura propuesta por Averson en [1]. De hecho en [12] Halmos escribe *"It is unfortunate therefore that even the bare statement of the spectral theorem is widely regarded as somewhat mysterious and deep, and probably inaccessible to the nonspecialist. [...] Another reason the spectral theorem is thought to be hard is that its proof is hard"* [1].

Se enfatiza, haciendo constantes comparaciones, que el cálculo funcional es una generalización de lo visto desde un curso de Álgebra Lineal. De hecho, en el Capítulo 1 se desarrolla el tratamiento básico del caso finito dimensional y se muestra un aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales. El lector notará que todo lo que se presenta en el primer capítulo, tiene una generalización al caso infinito dimensional, la cual se presenta más adelante. En los siguientes capítulos se desarrolla el cálculo funcional en abstracto, volviendo en las aplicaciones al caso de operadores en un espacio de Banach.

A grandes rasgos, en [15] Kisil y Ramírez de Arellano describen que un cálculo funcional es un homomorfismo de álgebras $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$, donde $\mathcal{F}$ es un álgebra de funciones y $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach (el caso de más interés es cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $\mathcal{X}$ un espacio de Banach). Kisil y Ramírez de Arellano enuncian dos procedimientos para construir a Φ:

1) Consiste en empezar por definir a Φ en alguna subálgebra densa $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$. El álgebra $\mathcal{F}_0$ debe de tener una estructura algebraica simple para poder definir fácilmente el homomorfismo ($\mathcal{F}_0$ suele ser el álgebra de polinomios). Después, se extiende Φ a todo $\mathcal{F}$ por densidad.

[1] *"Es lamentable, por tanto, que incluso el simple enunciado del teorema espectral sea ampliamente considerado como algo misterioso y profundo, y probablemente inaccesible para el no especialista. [...] Otra razón por la cual el teorema espectral es pensado como difícil es por que su demostración es difícil. "*

2) Se considera una fórmula, que reproduce los valores de las funciones f en $\mathcal{F}$ (por ejemplo la fórmula integral de Cauchy), de la forma

$$f(\lambda) = \int \kappa(\lambda, t) f(t) \mathrm{d}t$$

de tal forma que si el kernel $\kappa(\lambda, t)$ se puede extender de manera natural a $\kappa(x, t)$, para algún $x \in \mathcal{A}$, entonces si extendemos la teoría de integración a espacios de Banach, podemos definir

$$\Phi(f) := \int \kappa(x, t) f(t) \mathrm{d}t$$

En esta tesis, se siguen ambos procedimientos, el primero en el Capítulo 2 y el segundo en el Capítulo 4 con la fórmula integral de Cauchy. Se analiza la profunda relación que existen entre ambos así como las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

Finalmente, a lo largo de la tesis, presentamos varias aplicaciones de los distintos tipos de cálculo funcional analizados. Las aplicaciones son muy variadas, pues son dentro del mismo análisis funcional como en la teoría de operadores o la teoría espectral hasta una de corte más algebraico, que es un caso particular del Lema de Schur de teoría de representación de grupos.

La tesis se compone de 4 Capítulos. El primero pretende introducir qué es un cálculo funcional para un operador y mostrar el desarrollo de este mismo en el caso finito dimensional. En el segundo capítulo presentamos las bases de álgebras de Banach y álgebras C^* que se necesitan para poder desarrollar el cálculo funcional continuo para un elemento normal de un álgebra C^*. Por lo mismo, el desarrollo de este cálculo funcional es muy general y al final presentamos un par de aplicaciones a la teoría de operadores. El Capítulo 3 es, a mi juicio, el más interesante; es en este Capítulo donde demostramos el Primer Teorema Espectral usando el cálculo funcional continuo. En una segunda sección introducimos una extensión del cálculo funcional continuo para el caso de operadores normales, llamado el cálculo funcional Boreliano, que depende del concepto de medidas espectrales y que da pie al segundo Teorema Espectral del cual se desprenden numerosas aplicaciones. Finalmente concluimos extendiendo la noción de funciones holomorfas para funciones valuadas en un espacio de Banach, que da pie al tratamiento clásico del cálculo funcional holomorfo.

Al final, el lector encontrará 3 apéndices cuya función es hacer la tesis lo más autocontenida posible. El primero consta de los enunciados de Teoremas clásicos (vistos normalmente en los cursos básicos del CINVESTAV) de Análisis Funcional, Variable Compleja y Análisis Real, que se usaron durante el desarrollo de la tesis. El segundo apéndice introduce lo necesario sobre Ideales y Cocientes para poder demostrar un Teorema clave en la construcción del cálculo funcional continuo. Por último, presentamos un tercer apéndice que establece lo necesario para enunciar los Teoremas de representación de Riesz-Markov, los cuales son vitales en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Necesidad del Cálculo Funcional

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach complejo y $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un operador lineal. Consideremos $G \subseteq \mathbb{C}$ y a las funciones $f : G \to \mathbb{C}$ complejo valuadas. La pregunta que nos interesa en esta tesis es saber para qué clase de operadores T podemos definir un operador denotado $f(\mathrm{T})$, donde f está en cierta clase de funciones, generalmente relacionada con las funciones continuas. La construcción de dicho operador es lo que llamamos un cálculo funcional para el operador T. Es decir, que un cálculo funcional de un operador T es una transformación, $f \mapsto f(\mathrm{T})$, de cierto espacio de funciones al espacio de operadores lineales en un espacio de Banach.

Veremos que para que un cálculo funcional tenga sentido, la transformación $f \mapsto f(\mathrm{T})$ debe de ser un homomorfismo de álgebras, es por ello que dedicamos gran parte del Capítulo 2 al estudio de álgebras de Banach. Además, es bastante lógico pedir las siguientes propiedades en un cálculo funcional:

i) Si $f \equiv 1$ entonces $f(\mathrm{T}) = \mathrm{I}$, donde I es el operador identidad en $\mathcal{X}$.

ii) Si $f(\lambda) = \lambda$ para toda $\lambda \in G$, entonces $f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

Es deseable, que en caso de ser T un operador acotado, exista cierta relación entre la norma $\|f(\mathrm{T})\|$ y $\|f\|$, donde la primer norma es la usual de los operadores lineales, asociada al álgebra de operadores lineales acotados, y la segunda es la asociada al álgebra de funciones en la cual estemos considerando a f. De tener dicha relación, suele estar dada por la existencia de una constante $C > 0$, tal que

$$\|f(\mathrm{T})\| \leq C\|f\|. \tag{1.1}$$

En algunos casos tendremos que $\|f(\mathrm{T})\| = \|f\|$. Deseamos que se cumpla la ecuación (1.1), ya que ésta implica que si tenemos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a f con respecto a la norma del álgebra de funciones, entonces se tiene que $(f_n(T))_{n=1}^{\infty}$ converge al operador $f(\mathrm{T})$ con la norma de operadores. La convergencia anterior denota consistencia en un cálculo funcional, por lo que aunque no se tenga (1.1), buscaremos verificarla directamente.

Los párrafos anteriores nos presentan una version axiomática de lo que esperamos de un cálculo funcional. Sin embargo, si nos restringimos a ciertos espacios de Banach, el concepto de cálculo funcional no debería de ser nuevo. Veremos en las siguientes secciones las situaciones más sencillas donde usamos el cálculo funcional y algunas de sus aplicaciones, todo esto como motivación a por qué surge la necesidad de desarrollar el cálculo funcional en situaciones más generales.

1.1. Cálculo Funcional Polinomial

Sea $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ el espacio de los operadores lineales de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ y tomemos a $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Consideremos el polinomio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de grado m, dado por

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Claramente $\mathrm{T}^k \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y pongamos $\mathrm{T}^0 := \mathrm{I}$ como el operador identidad, por lo que podemos definir a $p(\mathrm{T}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ como

$$p(\mathrm{T}) := \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{T}^k. \tag{1.2}$$

Notemos que si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y p, q son polinomios de grado m_1, m_2 respectivamente (s.p.g $m_1 \geq m_2$), dados como

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{m_1} a_k \lambda^k \,, \quad q(\lambda) := \sum_{k=0}^{m_2} b_k \lambda^k$$

entonces $\alpha p + \beta q$ es un polinomio de grado m_1 dado por

$$(\alpha p + \beta q)(\lambda) = \sum_{k=0}^{m_1} d_k \lambda^k$$

con $d_k := \alpha a_k + \beta b_k$ para cada $k \in \{1, \cdots, m_1\}$ y poniendo $b_k := 0$ siempre que $k > m_2$. Mientras que pq es un polinomio de grado $m := m_1 \cdot m_2$, dado como

$$(pq)(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} c_k \lambda^k$$

donde para cada $k \in \{1, \cdots, m\}$, c_k se define como

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

pensando que $a_j := 0$ para $j > m_1$ y $b_j = 0$ para $j > m_2$. Por lo tanto, se tiene que la asignación $p \mapsto p(\mathrm{T})$ que va de la clase de polinomios complejos al espacio $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ es un homomorfismo, ya que gracias a lo anterior

$$\alpha p(\mathrm{T}) + \beta q(\mathrm{T}) = \alpha \sum_{k=0}^{m_1} a_k \mathrm{T}^k + \beta \sum_{k=0}^{m_2} b_k \mathrm{T}^k = \sum_{k=0}^{m_1} d_k \mathrm{T}^k = (\alpha p + \beta q)(\mathrm{T})$$

y

$$p(\mathrm{T})q(\mathrm{T}) = \left(\sum_{k=0}^{m_1} a_k \mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m_2} b_k \mathrm{T}^k\right) = \sum_{k=0}^{m} c_k \mathrm{T}^k = (pq)(\mathrm{T})$$

Además, trivialmente, se sigue de la ecuación (1.2) que si $p \equiv 1$, entonces $p(\mathrm{T}) = \mathrm{I}$, mientras que si $p(\lambda) = \lambda$, entonces $p(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$. Entonces podemos llamar a la asignación $p \mapsto p(\mathrm{T})$ un cálculo funcional de T para la clase de polinomios complejos. Llamamos a dicho cálculo funcional, el **cálculo funcional polinomial** de un operador $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Observación 1.1. Es de vital importancia notar, que cualquier otro cálculo funcional de un operador T debe de ser una extensión del polinomial. Se entiende dicha extensión en el sentido que si construimos un cálculo funcional de cierto operador T para cierta clase de funciones $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ debe de contener a los polinomios para que así, cuando $f \in \mathcal{F}$ sea un polinomio, la formulación de $f(\mathrm{T})$ coincida con la del cálculo funcional polinomial.

Veremos que al aumentar la clase de funciones para las que queremos definir el cálculo funcional, se disminuirá los tipos de operadores T para los cuales se puede construir $f(\mathrm{T})$. Por ejemplo, el mismo cálculo funcional polinomial nos permite dar una extensión para la clase de funciones enteras, es decir funciones analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en todo $\mathbb{C}$, pues dichas funciones admiten una representación en series de potencias de la forma

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \;\forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

por lo que es intuitivo poner

$$f(\mathrm{T}) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{T}^k,$$

pero, esta definición de $f(\mathrm{T})$ tiene sentido únicamente cuando $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ (el subespacio de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ de todos los operadores lineales acotados). En dicho caso, en efecto $f(\mathrm{T}) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ya que

$$\|f(\mathrm{T})\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|\mathrm{T}\|^k < \infty,$$

donde la desigualdad estricta es debida a que la serie que define a $f(\|\mathrm{T}\|)$ es absolutamente convergente. Notamos que las hipótesis en f para definir $f(\mathrm{T})$ se pueden relajar, basta con tomar funciones analíticas cuya serie de MacLaurin tenga radio de convergencia $R > \|\mathrm{T}\|$.

Otra extension que podemos tomar del cálculo funcional polinomial es hacia la clase de funciones continuas, el llamado **cálculo funcional continuo**. Para ello tomemos a $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto en $\mathbb{C}$ y denotemos por $\mathcal{C}(K)$ a las funciones continuas $f : K \to \mathbb{C}$, y por $\mathbb{C}[\lambda] \subset \mathcal{C}(K)$ al conjunto de los polinomios $p : K \to \mathbb{C}$, usando la norma del supremo en $\mathcal{C}(K)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in K} |f(\lambda)| \,,$$

por el Teorema de Stone-Weierstrass se tiene que

$$\overline{\mathbb{C}[\lambda]} = \mathcal{C}(K)$$

Entonces si $f \in \mathcal{C}(K)$, sabemos que existe $(p_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}[\lambda]$ tal que $p_n \to f$ con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.Pero, como para cada p_n podemos definir $p_n(\mathrm{T})$ con el cálculo funcional polinomial, tiene sentido definir

$$f(\mathrm{T}) := \lim_{n \to \infty} p_n(\mathrm{T}).$$

Sin embargo no es tan fácil, ya que hay que asegurarnos que el límite anterior siempre exista con respecto a la norma de operadores, para ello no sólo basta que $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. De hecho, hay que incluir varias restricciones más, será necesario que $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert , sea un operador normal ($\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^*$). Además el compacto K no es arbitrario, pues necesitaremos que $K = \sigma(\mathrm{T})$ (el espectro del operador T), resaltanto así la estrecha relación que hay entre la definición de un cálculo funcional y el espectro del operador. Finalmente los polinomios $p_n : K \to \mathbb{C}$ se tomarán en realidad en $\mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]$, donde de nuevo el Teorema de Stone-Weierstrass asegura que $\overline{\mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]} = \mathcal{C}(K)$. Veremos todo esto con detalle en el Capítulo 2, más aún lo veremos en un panorama general, el de las álgebras C^*, del cual $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un caso particular.

En las siguiente sección exploraremos el cálculo funcional en el caso finito dimensional (Álgebra Lineal). Será de gran importancia tener en mente los siguientes resultados a lo largo de la lectura, pues al desarrollar el caso infinito dimensional se podrán apreciar grandes similitudes.

1.2. Funciones de una Matriz

En este caso tomamos a $\mathcal{X} := \mathbb{C}^n$, donde cada $z \in \mathbb{C}^n$ se piensa como un vector columna con n entradas $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Como cada operador lineal actuando en $\mathbb{C}^n$ es acotado y se representa como una matriz de tamaño $n \times n$ que actúa sobre los vectores en $\mathbb{C}^n$, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$).

Si $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es cualquier matriz, gracias al cálculo funcional polinomial introducido en la sección anterior, ya sabemos que para cualquier $p \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que $p(\mathrm{T}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Analizaremos a continuación como extender el cálculo funcional a una clase más grande de funciones, veremos que en caso de que la matriz T tenga ciertas propiedades, la formulación de $f(\mathrm{T})$ puede ser bastante sencilla.

El siguiente desarrollo se basa básicamente en lo expuesto en [8] y [13]. Tomemos entonces $\sigma(\mathrm{T}) := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los distintos eigenvalores de la matriz T (que en este caso coincide con el espectro de T) supongamos que cada eigenvalor λ_j tiene multiplicidad $\mathrm{mult}(\lambda_j) \in \mathbb{N}$, por lo que $\mathrm{mult}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{mult}(\lambda_k) = n$.

Sea ψ_T el polinomio mínimo de T, es decir se cumple la propiedad $\psi_\mathrm{T}(\mathrm{T}) = 0$ y ψ_T es el polinomio de grado mínimo que cumple tal propiedad. Por lo que

$$\psi_\mathrm{T}(\lambda) := \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}, \tag{1.3}$$

donde $1 \leq m_j \leq \mathrm{mult}(\lambda_j)$ para cada $j \in \{1, \cdots, k\}$, así el grado del polinomio ψ_T está dado por $m := m_1 + \cdots + m_k \leq n$. Entonces ψ_T divide a cualquier otro polinomio p con la propiedad $p(\mathrm{T}) = 0$, en particular por el Teorema de Cayley-Hamilton, ψ_T divide al polinomio característico de T dado por $p_\mathrm{T}(\lambda) := \det(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})$. Supongamos ahora que tenemos dos polinomios g, h tales que

$$g(\mathrm{T}) = h(\mathrm{T}), \tag{1.4}$$

entonces el polinomio diferencia $d = g - h$, es un polinomio de grado mayor o igual a m que cumple que $d(\mathrm{T}) = 0$, entonces ψ_T divide a d, por lo que existe un polinomio q tal que $d = \psi_\mathrm{T} \cdot q$. Luego, al derivar d, es claro que gracias a (1.3)

$$d(\lambda_j) = 0,\ d'(\lambda_j) = 0, \cdots,\ d^{(m_j - 1)}(\lambda_j) = 0 \ \ \forall\, j \in \{1, \cdots, k\},$$

como $d = g - h$, lo anterior implica que

$$g(\lambda_j) = h(\lambda_j),\ g'(\lambda_j) = h'(\lambda_j), \cdots,\ g^{(m_j - 1)}(\lambda_j) = h^{(m_j - 1)}(\lambda_j) \ \ \forall\, j \in \{1, \cdots, k\}. \tag{1.5}$$

Recíprocamente, si se cumple (1.5) se cumple (1.4), por lo que para cualquier polinomio p, la matriz $p(\mathrm{T})$ está únicamente determinada por los valores

$$p(\lambda_j),\ p'(\lambda_j), \cdots,\ p^{(m_j - 1)}(\lambda_j) \ \ \forall\, j \in \{1, \cdots, k\}.$$

Entonces, dada una matriz T con espectro $\sigma(\mathrm{T}) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ y con polinomio mínimo dado como en (1.3), si queremos definir $f(\mathrm{T})$, es suficiente con que f sea al menos de clase $\mathcal{C}^M(K)$ con $M := \max m_j$ y con $\sigma(\mathrm{T}) \subset K$. Ya que, en dicho caso tendrá sentido hablar de las derivadas de f en puntos de $\sigma(\mathrm{T})$. Además si existe un polinomio ℓ que cumple

$$\ell(\lambda_j) = f(\lambda_j),\ \ell'(\lambda_j) = f'(\lambda_j), \cdots,\ \ell^{(m_j - 1)}(\lambda_j) = f^{(m_j - 1)}(\lambda_j) \ \ \forall\, j \in \{1, \cdots, k\},$$

podemos definir

$$f(\mathrm{T}) := \ell(\mathrm{T}).$$

Dicho polinomio ℓ es un polinomio de interpolación, que interpola los valores de f en el espectro y que también interpola a cada una de las derivadas de f hasta cierto orden relacionado con la multiplicidad del elemento del espectro cuyo valor se está interpolando. Más aún para cada $f \in \mathcal{C}^M(K)$ siempre existe un único polinomio interpolador de grado menor a m y se construye con la formula de interpolación de Lagrange-Sylvester:

$$\ell(\lambda) := \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{m_j-1} f^{(i)}(\lambda_j) e_{j,i}(\lambda) \right)$$

donde cada $e_{j,i}(\lambda)$ es el único polinomio que satisface

$$e_{j,i}^{(l)}(\lambda_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; j = s \;\&\; i = l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo:
Considerar la matriz $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dada por

$$\mathrm{T} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

en este caso se tiene que $\sigma(\mathrm{T}) = \{0\}$ y que $\psi_{\mathrm{T}}(z) = z^n$, por lo tanto si $f \in \mathcal{C}^{n-1}(K)$ con $0 \in K$, se tiene que

$$\ell(\lambda) = f(0) + f'(0)\lambda + \frac{f''(0)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}$$

es el único polinomio de grado menor a n que interpola los valores $f(0), f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$.

Luego

$$\begin{aligned} f(\mathrm{T}) &:= \ell(\mathrm{T}) \\ &= f(0)\mathrm{I} + f'(0)\mathrm{T} + \frac{f''(0)}{2!}\mathrm{T}^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\mathrm{T}^{n-1} \\ &= \begin{bmatrix} f(0) & f'(0) & \frac{f''(0)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & f'(0) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(0) & f'(0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

♦

Se tienen un par de propiedades interesantes de este cálculo funcional asociado al polinomio de interpolación ℓ; las cuales enunciamos y verificamos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sea* $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *una matriz con espectro* $\sigma(\mathrm{T}) \subset K$ *y con polinomio mínimo dado como en (1.3). Si además* $f \in \mathcal{C}^M(K)$*, se cumplen los siguientes incisos*

1) *Sea*[1] $\mathrm{S} := \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}$, *entonces* $f(\mathrm{S}) = \mathrm{P}^{-1}f(\mathrm{T})\mathrm{P}$

2) *Si* $\mathrm{T} = \mathrm{diag}[\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_j]$ *es diagonal a bloques entonces* $f(\mathrm{T}) = \mathrm{diag}[f(\mathrm{T}_1), \cdots, f(\mathrm{T}_j)]$

Demostración:
1) Del hecho que $\mathrm{S}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{T}^k\mathrm{P}$ y que $\mathrm{T}^k = \mathrm{PS}^k\mathrm{P}^{-1}$ se desprende que las matrices T y S tienen el mismo polinomio mínimo. Entonces $f(\mathrm{T}) := \ell(\mathrm{T})$ y $f(\mathrm{S}) := \ell(\mathrm{S})$, con ℓ el polinomio de Lagrange-Sylvester que interpola a los valores de f y el de sus derivadas en el espectro $\sigma(\mathrm{T}) = \sigma(\mathrm{S})$. Por lo tanto, como ℓ es un polinomio

$$f(\mathrm{S}) := \ell(\mathrm{S}) = \ell(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}) = \mathrm{P}^{-1}\ell(\mathrm{T})\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}f(\mathrm{T})\mathrm{P}.$$

2) En primer lugar, notemos que

$$f(\mathrm{T}) := \ell(\mathrm{T}) = \ell(\mathrm{diag}[\mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_j]) = \mathrm{diag}[\ell(\mathrm{T}_1), \cdots, \ell(\mathrm{T}_j)].$$

Ahora es claro que para cada $k \in \{1, \cdots, j\}$, $\psi_T(\mathrm{T}_k) = 0$, así que f y ℓ (junto con sus derivadas de orden adecuado) toman los mismos valores en el espectro de cada T_k y por lo tanto $f(\mathrm{T}_k) = \ell(\mathrm{T}_k)$ para cada k, es decir que en efecto $f(\mathrm{T}) = \mathrm{diag}[f(\mathrm{T}_1), \cdots, f(\mathrm{T}_j)]$. ■

[1] Cuando existe una matriz P invertible tal que $\mathrm{S} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}$ se dice que S y T son matrices ***semejantes***

Ejemplo:
Una consecuencia inmediata de la propiedad **2)** anterior, es que si

$$\Lambda := \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$f(\Lambda) = \mathrm{diag}[f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)] = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

siempre que f esté bien definida en el espectro $\sigma(\Lambda) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. Por lo tanto si T es una matriz semejante a Λ (i.e. T es diagonalizable), entonces $\mathrm{T} = \mathrm{P}\Lambda\mathrm{P}^{-1}$. Usando ahora ***1)*** de la última proposición, $f(\mathrm{T}) = \mathrm{P}^{-1}f(\Lambda)\mathrm{P}$. Tenemos entonces que $f(\mathrm{T})$ es semejante a la matriz $f(\Lambda)$, que representa al operador de multiplicación por f, en el sentido que para cualquier $x \in \mathbb{C}^n$

$$f(\Lambda)x = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1)x_1 \\ \vdots \\ f(\lambda_n)x_n \end{bmatrix}$$

♦

Finalmente concluimos esta sección con una fórmula, la cual guarda gran relación con el Teorema Espectral del Capítulo 3, pues, en la observación que sigue después de la demostración, se ejemplifica cómo es que dicha fórmula es en realidad un caso particular del Teorema Espectral.

Teorema 1.3. *(La Fórmula de Sylvester) Sea* T *una matriz diagonalizable y* $f \in \mathcal{C}(K)$ *de tal forma que* $\sigma(\mathrm{T}) := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\} \subset K$*. Entonces*

$$f(\mathrm{T}) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\mathrm{P}_j$$

donde cada P_j *está dada como*

$$\mathrm{P}_j := \prod_{i \neq j}^{k} \left(\frac{\mathrm{T} - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$$

Demostración:
Es un ejercicio típico de Álgebra Lineal verificar que cuando T es una matriz diagonalizable con espectro $\sigma(\mathrm{T}) := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ (aquí $k \leq n$), el polinomio mínimo de T está dado como

$$\psi_{\mathrm{T}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j),$$

en tal caso tendremos que el polinomio interpolador de Lagrange-Sylvester, el único de grado menor a k que interpola los valores $f(\lambda_j)$ para $j \in \{1, \cdots, k\}$, es

$$\ell(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) \prod_{i \neq j}^{k} \left(\frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right).$$

Pero, ya sabemos que $f(\mathrm{T}) = \ell(\mathrm{T})$, por lo que en efecto

$$f(\mathrm{T}) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) \prod_{i \neq j}^{k} \left(\frac{\mathrm{T} - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) \mathrm{P}_j$$

■

Observación 1.4. Notemos que $\mathrm{P}_j^2 = \mathrm{P}_j$ y que $\mathrm{P}_j \mathrm{P}_i = 0$ para $i \neq j$. En realidad cada P_j es la matriz proyección al eigenespacio generado por λ_j. Más aún si $\mathcal{P} : \mathfrak{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una función definida en los borelianos de $\mathbb{C}$, $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$, que es σ-aditiva tal que $\operatorname{supp}(\mathcal{P}) = \sigma(\mathrm{T})$ y $\mathcal{P}(\{\lambda_j\}) = \mathrm{P}_j$, entonces se verifica que para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^n$ la función $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dada como

$$\mu_{z,w}(A) := \langle \mathcal{P}(A) z, w \rangle$$

es una medida complejo valuada, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{C}^n$, es decir

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$$

Se verifica además, con el Teorema anterior, que para toda $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$\langle f(\mathrm{T}) z, w \rangle = \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mu_{z,w}.$$

La matriz $f(\mathrm{T})$ se denotará como

$$f(\mathrm{T}) = \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}, \tag{1.6}$$

que es otra manera de expresar la fórmula de Sylvester, pues sabemos que $\mathcal{P}(\{\lambda_j\}) = \mathrm{P}_j$. La función conjuntista $\mathcal{P}$ pertenece a lo que llamaremos medidas espectrales, las cuales analizaremos con generalidad en el Capítulo 3. Para un operador normal, la generalización de la fórmula anterior es la segunda versión de lo que llamaremos el Teorema Espectral.

1.3. Aplicación: Ecuaciones Diferenciales

Consideremos la exponencial de una matriz $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Gracias a la extensión del cálculo funcional polinomial para funciones enteras sabemos que

$$e^{\mathrm{T}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{T}^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Vemos que el cálculo funcional para series de potencias también satisface las dos propiedades de la Proposición 1.2. Además en el caso particular de la exponencial, se tiene que $e^0 = \mathrm{I}_n$ y que $e^{\mathrm{T}+\mathrm{S}} = e^{\mathrm{T}} \cdot e^{\mathrm{S}}$ siempre que $\mathrm{TS} = \mathrm{ST}$, de donde se sigue que $(e^{\mathrm{T}})^{-1} = e^{-\mathrm{T}}$. Tenemos entonces que calcular la exponencial de una matriz es bastante sencillo, sobretodo si dicha matriz es diagonalizable o conocemos su forma canónica de Jordan.

Además, la exponencial de una matriz es de gran utilidad para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Para ello es necesario ver el siguiente resultado:

Proposición 1.5. *Si* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* $t \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\mathrm{A}t} = \mathrm{A} \cdot e^{\mathrm{A}t} = e^{\mathrm{A}t} \cdot \mathrm{A}.$$

Demostración:
Sea $\mathrm{T} = \mathrm{A}t$, cuando vimos el cálculo funcional polinomial, obtuvimos que la serie que define a e^{T} converge absoluta y uniformemente con respecto a la norma de operadores. Luego, esta serie se puede derivar término a término obteniendo que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{k!} \mathrm{A}^k t^k \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{A}^k k t^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \mathrm{A}^k t^{k-1} \\
&= \mathrm{A} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \mathrm{A}^{k-1} t^{k-1} \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \mathrm{A}^{k-1} t^{k-1} \right) \mathrm{A} \\
&= \mathrm{A} \cdot e^{\mathrm{A}t} = e^{\mathrm{A}t} \cdot \mathrm{A}
\end{aligned}$$

■

Concluimos con la aplicación de nuestro interés, que muestra cómo resolver un sistema de ecuaciones diferenciales usando la exponencial de una matriz

Teorema 1.6. *Sean* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y consideremos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales dado por*

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \mathrm{A}x(t) \\
x(0) &= x_0.
\end{aligned}$$

Entonces la solución del sistema es $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *definida como* $x(t) := e^{\mathrm{A}t} x_0$.

Demostración:
Notemos primero que $x(0) = e^{\mathrm{A}0} x_0 = \mathrm{I}_n x_0 = x_0$. Ahora por la proposición anterior

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\mathrm{A}t} x_0 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\mathrm{A}t} \right) x_0 = \left(\mathrm{A} \cdot e^{\mathrm{A}t} \right) x_0 = \mathrm{A}x(t).$$

Por lo que en efecto, $x(t) = e^{\mathrm{A}t} x_0$ es la solución del sistema. ■

Capítulo 2

Cálculo Funcional Continuo

En el primer Capítulo vimos el interés de desarrollar formalmente un cálculo funcional para operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, el espacio de operadores lineales acotados en un espacio de Banach, que es un ejemplo de un álgebra de Banach. Más aún, comentamos que para desarrollar el cálculo funcional continuo debemos tomar operadores normales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert, el cual es un ejemplo de un álgebra C^*. Por lo tanto, vamos a desarrollar un cálculo funcional continuo para elementos normales de cualquier álgebra C^*, el caso de operadores se seguirá como caso particular. Así pues, antes de introducir el cálculo funcional presentamos todas las herramientas de álgebras de Banach y álgebras C^* que son un caso especial de las últimas. La mayoría de las definiciones y argumentos de este Capítulo fueron tomados de [1].

2.1. Álgebras de Banach

Definición 2.1. *Un **álgebra** sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ (sobre $\mathbb{K}$) con multiplicación que lo vuelve anillo, en el cual*

$$\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y,$$

para toda $x, y \in \mathcal{A}$ y toda $\lambda \in \mathbb{K}$. Es decir, para toda $x, y, z \in \mathcal{A}$ se cumple

i) $x(y+z) = xy + xz$ ***(ley distributiva por la derecha)**,*

ii) $(x+y)z = xz + yz$ ***(ley distributiva por la izquierda)**,*

iii) $x(yz) = (xy)z$ ***(multiplicación asociativa)**.*

En esta tesis nos interesa únicamente cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en cuyo caso se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja. Todas las álgebras que consideremos serán complejas.

Definición 2.2. *Se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ **tiene unidad** si hay **identidad multiplicativa (neutro multiplicativo)**, el cual es denotado como $\mathbf{1}$, es decir que existe $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ tal que*

$$x\mathbf{1} = \mathbf{1}x = x \ \ \forall\, x \in \mathcal{A}$$

Definición 2.3. *Un **álgebra normada** es un álgebra $\mathcal{A}$ con una norma $\|\cdot\|$ para la cual se cumple la propiedad sub-multiplicativa:*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \ \ \forall\, x, y \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

*Si además $\mathcal{A}$ tiene unidad $\mathbf{1}$, entonces la norma debe cumplir que $\|\mathbf{1}\| = 1$. Una álgebra normada completa con respecto a su norma es llamada **álgebra de Banach**; es **conmutativa** si la multiplicación lo es. Trivialmente cualquier álgebra de Banach es un espacio de Banach.*

Observación 2.4. Notemos que la desigualdad (2.1) implica que la función multiplicación $(x, y) \mapsto xy$ es continua, ya que si $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\left\|x_n y_n - xy\right\| = \left\|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\right\| \leq \|x_n - x\|\left\|y_n\right\| + \|x\|\left\|y_n - y\right\|$$

de donde se sigue que $x_n y_n \to xy$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo:

i) Los números complejos forman una álgebra de Banach conmutativa con unidad.

ii) Sea K compacto y de Hausdorff, entonces $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ forma un álgebra de Banach conmutativa con unidad, donde la suma y multiplicación de funciones están definidas puntualmente.

iii) Sea $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, entonces $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ es una álgebra de Banach conmutativa con unidad, la suma y multiplicación de funciones están definidas puntualmente. La norma es $\left\|f\right\|_{L^\infty} := \sup\left\{c > 0 : \mu\{w \in \Omega : \left|f(w)\right| > c\} > 0\right\}$.

iv) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ forma un álgebra de Banach con unidad dada por el operador identidad, $\mathbf{1} = \mathrm{I}$. La multiplicación de operadores está dada por la composición y la suma es puntual. La propiedad submultiplicativa se sigue de la definición de la norma en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$

$$\|\mathrm{T}\| := \sup_{\|x\|=1} \|\mathrm{T}x\|$$

♦

Definición 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad* [1]*. Un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice **invertible** si existe un elemento $y \in \mathcal{A}$ tal que*

$$xy = \mathbf{1} = yx.$$

Dicho elemento de denota por x^{-1}, se lee "el inverso de x". Además el conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{A}$ se denota por $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$, es decir

$$\mathrm{GL}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : x \text{ es invertible }\}$$

[1] Siempre que hablemos de elementos invertibles, el álgebra se considera con unidad.

Proposición 2.6. *(Propiedades de* $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$*)*

i) *Un inverso es único*

ii) $0 \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})$

iii) *Si* $x, y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ *entonces* $xy \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$

iv) *Si* $x, xy \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ *entonces* $y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$

v) *Si* $xy, yx \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ *entonces* $x, y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$

Demostración:
i) Sea $x \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ y supongamos que existen $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$ inversos de x. Entonces

$$y_1 = y_1 \cdot \mathbf{1} = y_1 \cdot (x \cdot y_2) = (y_1 \cdot x) \cdot y_2 = \mathbf{1} \cdot y_2 = y_2.$$

Por lo que en efecto el inverso es único.
ii) Supongamos ahora que $0 \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces

$$0 = 0 \cdot 0^{-1} = \mathbf{1}$$

una contradicción.
iii) Si $x, y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces existen sus inversos $x^{-1}, y^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Luego

$$\begin{aligned}(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x \cdot \mathbf{1} \cdot x^{-1} = xx^{-1} = \mathbf{1} \\ (y^{-1}x^{-1})(xy) &= y^{-1} \cdot \mathbf{1} \cdot y = y^{-1}y = \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $xy \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ y más aún se tiene que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
iv) Si $x, xy \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ entonces existen sus inversos $x^{-1}, (xy)^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Definamos el elemento $z := y(xy)^{-1}x$, entonces al multiplicar por x por la izquierda se tiene que $xz = x$, entonces si multiplicamos por x^{-1} por la izquierda se tiene que $z = \mathbf{1}$, es decir que

$$y(xy)^{-1}x = \mathbf{1}.$$

Claramente $(xy)^{-1}xy = \mathbf{1}$, por lo que en efecto $y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ y además $y^{-1} = (xy)^{-1}x$.
v) Si $xy, yx \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ entonces existen sus inversos $(xy)^{-1}, (yx)^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Claramente se tiene $x \cdot y(xy)^{-1} = \mathbf{1} = y \cdot x(yx)^{-1}$. Sea $z := y(xy)^{-1}x$ entonces $xz = x$ lo que implica que $xzy(xy)^{-1} = \mathbf{1}$, es decir que $xzy = xy$, de donde se obtiene que $z = \mathbf{1}$, o sea

$$y(xy)^{-1} \cdot x = \mathbf{1}.$$

De manera similar obtenemos que $x(yx)^{-1} \cdot y = \mathbf{1}$. Concluimos entonces que $x, y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ con $x^{-1} = y(xy)^{-1}$ y $y^{-1} = x(yx)^{-1}$. ∎

Proposición 2.7. *Sea $y \in \mathcal{A}$ tal que $\|y\| < 1$, entonces $\mathbf{1} - y$ es invertible y de hecho*

$$(\mathbf{1} - y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k.$$

Además,

$$\|(\mathbf{1} - y)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|y\|}.$$

Demostración:
Notemos que $z_n := \sum_{k=0}^{n} y^k$ converge absolutamente, ya que $\left\|y^k\right\| \leq \|y\|^k$ y $\|y\| < 1$, así como $\mathcal{X}$ es completo se tiene que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente. Además

$$z_n(\mathbf{1} - y) = (\mathbf{1} - y)z_n = \mathbf{1} - y^{n+1},$$

pero $\left\|y^{n+1}\right\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\|z_n(1 - y) - \mathbf{1}\| = \|(1 - y)z_n - \mathbf{1}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir que en efecto

$$\lim_{n\to\infty} z_n = (\mathbf{1} - y)^{-1}.$$

Más aún,

$$\left\|(\mathbf{1} - y)^{-1}\right\| = \|\lim_{n\to\infty} z_n\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|y\|^k = \frac{1}{1 - \|y\|}.$$

■

Corolario 2.8. *Se tiene que*
i) *Elementos en la bola de radio 1 centrada en $\mathbf{1}$ son invertibles, $B_1(\mathbf{1}) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{A})$*
ii) *Para cualquier $x \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, si $r := \|x^{-1}\|^{-1}$, entonces $B_r(x) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{A})$.*

Demostración:
i) Notemos que

$$B_1(\mathbf{1}) = \{x \in \mathcal{A} : \|x - \mathbf{1}\| < 1\} = \mathbf{1} + \{x \in \mathcal{A} : \|x\| < 1\} = \mathbf{1} + B_1(0).$$

Por lo que si $x \in B_1(\mathbf{1})$ entonces existe una $y \in B_1(0)$ (i.e. $\|y\| < 1$) tal que $x = \mathbf{1} - y$, entonces por la Proposición anterior $x \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$.
ii) Tomemos ahora a cualquier $y \in B_r(x)$, es decir que $\|x - y\| \leq \|x^{-1}\|^{-1}$ o bien que $\|x^{-1}\|\|x - y\| \leq 1$. Entonces

$$\|\mathbf{1} - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x - y)\| \leq \|x^{-1}\|\|x - y\| \leq 1$$

Así, por la Proposición anterior $\mathbf{1} - (\mathbf{1} - x^{-1}y) = x^{-1}y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Pero como $x^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces por la Proposición 2.6 *iv)* se sigue que también $y \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. ■

Observación 2.9. El inciso ***ii)*** del corolario anterior implica que $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathcal{A}$

Proposición 2.10. *El mapeo* $\operatorname{inv} : x \mapsto x^{-1}$ *es un homeomorfismo de* $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$*.*

Demostración:
Claramente $\operatorname{inv}(x) = \operatorname{inv}(y)$ implica que $x^{-1} = y^{-1}$ y por lo tanto que $x = y$. Más aún, si $x \in \mathrm{GL}(A)$ entonces $\operatorname{inv}(x^{-1}) = x$. Por lo tanto, tenemos que inv es una función biyectiva.

Para verificar que es continua y que su inversa también lo es, tomemos cualquier punto $x \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \to x$, entonces existe una $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq M$ se tiene

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|} \tag{2.2}$$

Notemos ahora que si $n \geq M$ entonces

$$\|x_n^{-1}\| - \|x^{-1}\| \leq \|x_n^{-1} - x^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x - x_n)x^{-1}\| \leq \|x_n^{-1}\|\|x - x_n\|\|x^{-1}\| \overset{(2.2)}{\leq} \frac{\|x_n^{-1}\|}{2},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2}\|x_n^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \tag{2.3}$$

Por lo tanto para $n \geq M$ se tiene que

$$\|x_n^{-1} - x^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x - x_n)x^{-1}\| \leq \|x_n^{-1}\|\|x - x_n\|\|x^{-1}\| \overset{(2.3)}{\leq} 2\|x^{-1}\|\|x - x_n\|,$$

y gracias a que $\|x^{-1}\| < \infty$, lo anterior implica que $\|x_n^{-1} - x^{-1}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así que en efecto $\operatorname{inv} : x \mapsto x^{-1}$ es continua, como $\operatorname{inv}^{-1} = \operatorname{inv}$, entonces su inversa también tiene que ser continua. Concluimos entonces que el mapeo $\operatorname{inv} : \mathrm{GL}(\mathcal{A}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ es un homeomorfismo de $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ en sí mismo. ∎

En el Capítulo 1, alcanzamos a notar que al definir un cálculo funcional de un operador T hay necesidad de conocer el espectro $\sigma(\mathrm{T})$. La noción de espectro se puede extender a álgebras de Banach y será de gran utilidad para definir el cálculo funcional continuo en elementos normales de un álgebra C^*. Continuamos entonces con definiciones y resultados sobre el espectro de un elemento en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$:

Definición 2.11. ***i)*** *El* ***espectro*** *de* $x \in \mathcal{A}$ *es*

$$\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda\mathbf{1} \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})\right\}.$$

ii) *El* ***radio espectral*** *de* x *es*

$$r(x) := \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

En caso de que $\sigma(x) := \emptyset$*, ponemos* $r(x) = 0$*.*

iii) *El* ***conjunto resolvente*** *de* x *es*

$$\rho(x) := \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$$

Observación 2.12. A partir de ahora, abusamos de notación al denotar $x - \lambda := x - \lambda\mathbf{1} \in \mathcal{A}$.

Ejemplo:
En el Capítulo 1 usamos que cuando $\mathcal{A} := \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, para $\mathrm{T} \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\sigma(\mathrm{T}) = \{\text{valores propios de} \mathrm{T}\}$$

♦

Ya podemos ir adivinando, gracias al Capítulo 1, que el cálculo funcional de un elemento $x \in \mathcal{A}$ se define bien para funciones $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$, pero para que $\|f\|_\infty < \infty$, es necesario que $\sigma(x) \subset \mathbb{C}$ sea un conjunto compacto. En efecto lo es, como se muestra a en la siguiente proposición

Proposición 2.13. *Sea $x \in \mathcal{A}$ entonces $r(x) \leq \|x\|$ y más aún $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.*

Demostración:
Sea $\lambda > \|x\|$, entonces

$$\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda} \in B_1(\mathbf{1}) \subset \mathrm{GL}(\mathcal{A}),$$

de donde se obtiene que $x - \lambda \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ y por lo tanto que $\lambda \notin \sigma(x)$. Tenemos entonces que en efecto $r(x) \leq \|x\|$. Además lo anterior nos dice que $\sigma(x) \subset B_{\|x\|}(0) \subset \overline{B_{\|x\|}(0)}$, lo que implica que $\sigma(x)$ es acotado. Definamos ahora la función $g_x : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ como $g_x(\lambda) := x - \lambda$. Claramente g_x es continua y por lo tanto $g_x^{-1}\left(\mathrm{GL}(\mathcal{A})\right)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Se sigue entonces que $\mathbb{C} \setminus g_x^{-1}\left(\mathrm{GL}(\mathcal{A})\right)$ es un cerrado en $\mathbb{C}$, pero

$$\mathbb{C} \setminus g_x^{-1}\left(\mathrm{GL}(\mathcal{A})\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} : g_x(\lambda) \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})\} = \sigma(x)$$

Entonces $\sigma(x)$ es cerrado y acotado, es decir un compacto de $\mathbb{C}$. ■

Proposición 2.14. *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}^*$, el espacio dual de $\mathcal{A}$ de funcionales lineales acotados, y cualquier $x \in \mathcal{A}$, la función $H : \rho(x) \to \mathbb{C}$, dada por*

$$H(\lambda) := \varphi\left((\lambda - x)^{-1}\right),$$

es una función holomorfa en todo $\rho(x)$.

Demostración:
Gracias al Teorema de Goursat A.7, basta verificar que H es una función diferenciable en todo el abierto $\rho(x)$. Para ello tomemos cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \rho(x)$ y notemos que gracias a

que $\varphi \in \mathcal{A}^*$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{H(\lambda') - H(\lambda)}{\lambda' - \lambda} &= (\lambda' - \lambda)^{-1} \left[\varphi \left((\lambda' - x)^{-1} \right) - \varphi \left((\lambda - x)^{-1} \right) \right] \\
&= \varphi \left((\lambda' - \lambda)^{-1} \left[(\lambda' - x)^{-1} - (\lambda - x)^{-1} \right] \right) \\
&= \varphi \left((\lambda' - \lambda)^{-1} \left[(\lambda' - x)^{-1} \left((\lambda - x) - (\lambda' - x) \right) (\lambda - x)^{-1} \right] \right) \\
&= \varphi \left((\lambda' - x)^{-1} (\lambda - x)^{-1} \right)
\end{aligned}$$

Luego, usando que φ e inv son funciones continuas se tiene que

$$H'(\lambda) = \lim_{\lambda' \to \lambda} \frac{H(\lambda') - H(\lambda)}{\lambda' - \lambda} = \lim_{\lambda' \to \lambda} \varphi \left((\lambda' - x)^{-1} (\lambda - x)^{-1} \right) = \varphi \left((\lambda - x)^{-2} \right)$$

Es decir que en efecto H' existe en todo $\rho(x)$ y es una función continua. ■

Teorema 2.15. *(Fórmula del Radio Espectral) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Para toda $x \in \mathcal{A}$ se tiene que*

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \|x\|^{1/n} .$$

Demostración:
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, definamos $z, v, u \in \mathcal{X}$ como

$$z := x^n - \lambda^n, \quad v := x - \lambda, \quad u := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k x^{n-k-1}$$

Se verifica de inmediato que $z = vu = uv$. Supongamos ahora que $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$, entonces $z \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, pero como $z = vu = uv$, entonces $\mathbf{1} = (z^{-1}u)v = v(uz^{-1})$ y además

$$z^{-1}u = z^{-1}u\mathbf{1} = z^{-1}uv(uz^{-1}) = z^{-1}z(uz^{-1}) = uz^{-1}$$

Por lo que $v \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ con $v^{-1} = z^{-1}u = uz^{-1}$. Como $v = x - \lambda$, entonces $\lambda \notin \sigma(x)$. Tenemos demostrado entonces, que si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ y así de la Proposición 2.13, se extrae que

$$|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|x^n\|, \text{ es decir que } |\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$$

Por lo tanto tenemos un lado de la desigualdad, ya que tomando supremo sobre $\{\lambda \in \sigma(x)\}$ y el límite cuando $n \to \infty$ concluimos

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \leq \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Para obtener la otra desigualdad, notemos que si $\lambda \in G := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \lambda < (r(x))^{-1}\right\}$, entonces $\left|\lambda^{-1}\right| < r(x)$, lo que implica que $\lambda^{-1} \in \rho(x)$. Así que para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}^*$ se tiene, gracias a la Proposición anterior, que

$$\lambda \mapsto \varphi\left((\mathbf{1} - \lambda x)^{-1}\right) = \lambda^{-1}\varphi\left((\lambda^{-1} - x)^{-1}\right),$$

es una función holomorfa en todo G. Por otro lado, si λ es tal que $|\lambda| < \|x\|^{-1}$, entonces $\lambda \in G$ (pues $\|x\|^{-1} < (r(x))^{-1}$) y $\|\lambda x\| < 1$, por lo que gracias a la Proposición 2.7 se tiene que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}^*$, se cumple

$$\varphi\left((\mathbf{1} - \lambda x)^{-1}\right) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda x)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left((\lambda x)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(x^k\right)\lambda^k$$

Por la unicidad de la Serie de Laurent, la expansión anterior es válida para cualquier $\lambda \in G$. Entonces necesariamente, para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}^*$, se tiene que $\varphi\left((\lambda x)^k\right) \to 0$ si $k \to \infty$, es decir que $\left((\lambda x)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente al 0 y es entonces una sucesión acotada (gracias al Teorema de Banach-Steinhaus A.1). Así que existe una $M \in (0, \infty)$ tal que $\|(\lambda x)^k\| \leq M$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k\|^{1/k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{M^{1/k}}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}\ \forall\, \lambda \in G \implies \lim_{k\to\infty} \|x^k\|^{1/k} \leq \inf_{\lambda\in G}\left|\frac{1}{\lambda}\right| = r(x).$$

Obteniendo así la otra desigualdad. ■

Para terminar con la sección de álgebras de Banach, presentamos la teoría de Gelfand que presenta importantes resultados sobre el espectro del un elemento $x \in \mathcal{A}$. Principalmente nos interesa el último resultado (Teorema 2.27 que relaciona el espectro de un elemento con el mapeo de Gelfand) ya que es fundamental para definir el cálculo funcional continuo. Sin embargo, la demostración de dicho resultado depende fuertemente del concepto de ideales en un álgebra, por lo que, para hacer esta tesis auto contenida, en el Apéndice B se presenta lo necesario para comprender la demostración. Para llegar al resultado final veamos primero que el espectro de un elemento nunca es vacío y las consecuencias que esto tiene.

Teorema 2.16. *(de Gelfand) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces se tiene que para cualquier $x \in \mathcal{A}$*

$$\sigma(x) \neq \emptyset$$

Demostración:
Supongamos, en busca de una contradicción, que existe un $x \in \mathcal{A}$ tal que $\sigma(x) = \emptyset$. En tal caso tendremos que $\rho(x) = \mathbb{C}$, luego por la Proposición 2.14 la función $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$H(\lambda) := \varphi\left((x - \lambda)^{-1}\right),$$

es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}^*$. Como para $|\lambda| > \|x\|$ se tiene que $\|x/\lambda\| < 1$, entonces usando la Proposición 2.7, obtenemos

$$\left\|(x-\lambda)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \|x/\lambda\|} \underset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es decir que, $\lambda \mapsto (x-\lambda)^{-1} \in \mathcal{A}$ es una función acotada en $\{\lambda : |\lambda| > \|x\|\}$, por lo que existe $M_1 \in (0,\infty)$ tal que $\left\|(x-\lambda)^{-1}\right\| \leq M_1$ para toda $|\lambda| > \|x\|$. Definamos M_2 como

$$M_2 := \text{ máx}\left\{\|(x-\lambda)^{-1}\| : |\lambda| \leq \|x\|\right\}$$

Claramente $M_2 \in (0,\infty)$ pues $\{\lambda : |\lambda| \leq \|x\|\}$ es compacto en $\mathbb{C}$. Luego, si $M := \text{máx}\{M_1, M_2\}$, tenemos que para toda $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\left|H(\lambda)\right| = \left|\varphi\left((x-\lambda)^{-1}\right)\right| \leq \|\varphi\| \, \|(x-\lambda)^{-1}\| \leq \|\varphi\| M < \infty$$

Es decir que H es una función acotada que es entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$), entonces por el Teorema de Liouville A.8, H tiene que ser una función constante $C \in \mathbb{C}$. Pero como

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} H(\lambda) = \lim_{|\lambda|\to\infty} \varphi\left((x-\lambda)^{-1}\right) = \varphi\left(\lim_{|\lambda|\to\infty}(x-\lambda)^{-1}\right) = \varphi(0) = 0,$$

entonces $C = 0$. Tenemos entonces que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}^*$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene $\varphi\left((x-\lambda)^{-1}\right) = 0$. Además, por un corolario del Teorema de extensión de Hahn-Banach A.2, para cada $x_\lambda := (x-\lambda)^{-1}$ existe un $F_\lambda \in \mathcal{A}^*$ tal que $F_\lambda(x_\lambda) = \|x_\lambda\|$, pero por lo anterior se tiene que

$$0 = F_\lambda\left((x-\lambda)^{-1}\right) = \|(x-\lambda)^{-1}\| \;\forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

una contradicción, pues ningún elemento invertible puede tener norma 0. ■

Definición 2.17. *Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ dos álgebras de Banach. Decimos que $\theta : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ es un **isomorfismo** entre $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ si*

i) θ es una biyección lineal.

ii) θ preserva la estructura algebraica. Es decir que para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathcal{A}_1$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\theta(x_1 + \lambda x_2) = \theta(x_1) + \lambda\theta(x_2), \quad \theta(x_1 \cdot x_2) = \theta(x_1)\cdot\theta(x_2)$$

iii) θ preserva la topología, es decir es un homeomorfismo.

*iv) Si además $\|\theta(x)\| = \|x\|$ para toda $x \in \mathcal{A}_1$, diremos que θ es **isométrico**.*

Corolario 2.18. *(Teorema de Gelfand-Mazur) Cualquier álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ con unidad, que cumpla que* $\mathrm{GL}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, *es isométricamente isomorfa a* $\mathbb{C}$.

Demostración:
Proponemos a $\theta : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ dada por

$$\theta(\lambda) := \lambda \cdot \mathbf{1}.$$

Entonces la imagen de θ es

$$\theta(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1} = \{\lambda \cdot \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Además se verifica de inmediato que θ es un isomorfismo isométrico sobre su imagen, por lo que resta únicamente verificar que en realidad $\theta(\mathbb{C}) = \mathcal{A}$.

Para ello notemos que, gracias al Teorema de Gelfand, para cualquier $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $\sigma(x) \neq \emptyset$, por lo que necesariamente existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x - \lambda \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, o bien tal que $x - \lambda \in \mathcal{A} \setminus \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Pero por hipótesis $\mathcal{A} \setminus \mathrm{GL}(\mathcal{A}) = \{0\}$, y por lo tanto $x - \lambda = 0$, o sea que $x = \lambda \cdot \mathbf{1} \in \theta(\mathbb{C})$. Probamos entonces que

$$\mathcal{A} \subset \theta(\mathbb{C}) \subset \mathcal{A},$$

es decir que en efecto $\theta(\mathbb{C}) = \mathcal{A}$. ■

El corolario anterior se usa en el Apéndice B, el cual recordemos establece las bases para probar el Teorema 2.27. En vías de enunciar y demostrar dicho Teorema es necesario definir los conceptos de espectro y mapeo de Gelfand, los cuales dependen a su vez del conjunto $\hom(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$ de homomorfismos en un álgebra. Recordemos que el dual $\mathcal{A}^*$ de un álgebra de Banach, es un espacio topológico equipado con la topología débil-$*$.

Definición 2.19. *Un **homomorfismo** en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un funcional lineal $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que preserva multiplicación, i.e. que para todo $x, y \in \mathcal{A}$, $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. El conjunto de homomorfismos en $\mathcal{A}$ es denotado por* $\hom(\mathcal{A})$.

Definición 2.20. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Se define el **espectro de Gelfand** como*

$$\mathrm{sp}(\mathcal{A}) := \big\{\omega \in \hom(\mathcal{A}) : \omega \neq 0\big\} \subset \mathcal{A}^*$$

Observación 2.21. Cualquier elemento de $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ cumple que $\omega(1) = 1$ y además si $x \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$

$$\omega(x^{-1}) = \frac{1}{\omega(x)}$$

Proposición 2.22. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$. Entonces $\|\omega\| = 1$.*

Demostración:
Sea $x \in \mathcal{A}$ con $\omega(x) \neq 0$, entonces

$$\omega\left(1 - \frac{x}{\omega(x)}\right) = \omega(1) - \frac{\omega(x)}{\omega(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Luego, de la Observación anterior se sigue que

$$1 - \frac{x}{\omega(x)} \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A}),$$

por lo que $\|x/\omega(x)\| \geq 1$, es decir $\|x\| \geq |\omega(x)|$ y por lo tanto que ω es acotado. Además como $|\omega(1)| = 1$, entonces es claro que $\|\omega\| = 1$. ■

Teorema 2.23. *El subconjunto* $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ *es compacto en* $\mathcal{A}^*$.

Demostración:
Veamos primero que $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathcal{A}^*$. Para ello tomemos $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ tal que $\omega_n \xrightarrow{*} \omega \in A^*$ y verifiquemos que en efecto $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$, i.e. que $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. Como ω_n converge débilmente a ω, entonces para cualquier $\varphi \in (\mathrm{sp}(\mathcal{A}))^*$ se tiene que $\varphi(\omega_n) \to \varphi(\omega)$ y como además ya vimos en la Observación 2.4 que la función $M(x,y) := xy$ es continua, entonces definiendo el funcional φ_x como $\varphi_x(\omega) = \omega(x)$ se tiene que $\varphi_x \in (\mathrm{sp}(\mathcal{A}))^*$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\omega(xy) = \varphi_{M(x,y)}(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{M(x,y)}(\omega_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \omega_n(M(x,y)) \\
&= \lim_{n\to\infty} M\left(\omega_n(x), \omega_n(y)\right) \\
&= M\left(\lim_{n\to\infty} (\omega_n(x), \omega_n(y))\right) \\
&= M\left(\lim_{n\to\infty} (\varphi_x(\omega_n), \varphi_y(\omega_n))\right) = M\left(\omega(x), \omega(y)\right) = \omega(x)\omega(y),
\end{aligned}$$

de donde se sigue que en efecto $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es cerrado en $\mathcal{A}^*$. Ahora, por el Teorema de Banach-Alaoglu A.3 tenemos que $\{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ es compacto en $\mathcal{A}^*$. Pero gracias a la Proposición anterior $\mathrm{sp}(\mathcal{A}) \subset \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| \leq 1\}$, por lo que en efecto $\mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es compacto, ya que es un subconjunto cerrado de un espacio compacto. ■

Definición 2.24. *Se define el* ***mapeo de Gelfand*** *como* $\mathcal{A} \ni x \mapsto \widehat{x} \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$ *donde la función* $\widehat{x}$ *está dada por*

$$\widehat{x}(\omega) := \omega(x) \ \ \forall\, \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$$

Observación 2.25. El mapeo de Gelfand está bien definido, ya que en efecto $\widehat{x} \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$, pues si $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ es tal que $\omega_n \xrightarrow{*} \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$, entonces por definición de convergencia débil, notando que $\widehat{x} \in (\mathrm{sp}(\mathcal{A}))^*$, se tiene que $\widehat{x}(\omega_n) \to \widehat{x}(\omega)$.

Observación 2.26. Se verifica que el mapeo de Gelfand $x \mapsto \widehat{x}$ preserva la estructura algebraica, ya que

$$\widehat{x + \lambda y} = \widehat{x} + \lambda\, \widehat{y}, \ \ \& \ \ \widehat{xy} = \widehat{x}\, \widehat{y},$$

además $\widehat{\mathbf{1}} = 1$. Por lo tanto tenemos que el mapeo de Gelfand es un homomorfismo a una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$.

Terminamos la sección con el importante resultado que nos dice como calcular el espectro de un elemento usando el mapeo de Gelfand. Ya mencionamos que el cálculo funcional continuo se basa en este resultado.

Teorema 2.27. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$ se tiene que*

$$\sigma(x) = \{\widehat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})\} =: \widehat{x}\left(\operatorname{sp}(\mathcal{A})\right).$$

Demostración:
Basta demostrar que $x \in \mathcal{A}$ es invertible si y sólo si $\widehat{x}$ nunca se anula. Ya que, en tal caso tendremos que un elemento $y \in \mathcal{A}$ no es invertible si y sólo si existe un $\omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})$ tal que $\widehat{y}(\omega) = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(x) &\Longleftrightarrow y := x - \lambda \notin \operatorname{GL}(\mathcal{A}) \\ &\Longleftrightarrow \widehat{(x-\lambda)}(\omega) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \omega(x-\lambda) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \omega(x) = \lambda \\ &\Longleftrightarrow \widehat{x}(\omega) = \lambda \Longleftrightarrow \lambda \in \widehat{x}\left(\operatorname{sp}(\mathcal{A})\right) \end{aligned}$$

Probando así el resultado deseado.

Veamos entonces que en efecto $x \in \operatorname{GL}(\mathcal{A})$ si y sólo si $\widehat{x}$ nunca se anula:

($\Longrightarrow$) Sea $x \in \operatorname{GL}(\mathcal{A})$, entonces para cualquier $\omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})$ se tiene que

$$1 = \omega(\mathbf{1}) = \omega(xx^{-1}) = \widehat{(xx^{-1})}(\omega) = \widehat{x}(\omega)\widehat{x^{-1}}(\omega)$$

Lo que implica que en efecto $\widehat{x}(\omega) \neq 0$ para toda $\omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})$.
($\Longleftarrow$) Si ahora $x \notin \operatorname{GL}(\mathcal{A})$, buscamos exhibir un $\omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})$ tal que $\widehat{x}(\omega) = \omega(x) = 0$. Para ello definamos

$$\mathcal{I} := \{xy : y \in \mathcal{A}\},$$

claramente $\mathcal{I}$ es un ideal e $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$ pues $\mathbf{1} \notin \mathcal{I}$, así que existe un ideal maximal $\mathcal{J}$ con $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Pero por el Teorema B.7 *ii)*, existe un $\omega \in \operatorname{sp}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{J} = \mathcal{N}(\omega)$. Luego como $x \in \mathcal{I}$ se tiene que $x \in \mathcal{J}$ y por lo tanto que $\omega(x) = 0$ como queríamos. ■

2.2. Álgebras C^*

Definición 2.28. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Decimos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra-$*$ de Banach** si existe una transformación*

$$x \mapsto x^* \in \mathcal{A}$$

*llamada **involución**, que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente*

i) $x^{**} := (x^*)^* = x$

ii) $(xy)^* = y^* x^*$

iii) $(x + \lambda y)^* = x^* + \overline{\lambda} y^*$

iv) $\|x^*\| = \|x\|$

si además

v) $\|xx^*\| = \|x\|^2$

*entonces decimos que $\mathcal{A}$ es un **álgebra** $\mathbf{C}^*$*

Ejemplo:

i) El álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con la involución dada por la matriz transpuesta conjugada forma un álgebra C^*.

ii) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, junto con la involución dada por el operador adjunto, es un álgebra C^*. Esta álgebra no es conmutativa y es sobre la cual aplicaremos el cálculo funcional que se desarrolla al final de este capítulo.

iii) Sea K compacto y de Hausdorff. Entonces el espacio de funciones $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra C^* con involución dada por $f \mapsto \overline{f}$. Más aún esta es un álgebra conmutativa.

♦

Definición 2.29. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$ de Banach. Decimos que $x \in \mathcal{A}$ es un elemento **autoadjunto** si*

$$x = x^*$$

Definición 2.30. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra-$*$ de Banach. Decimos que $x \in \mathcal{A}$ es un elemento **normal** si*

$$xx^* = x^* x$$

Claramente cualquier elemento autoadjunto es normal pero no al revés. También es claro que $y = x^* x$ y $z = xx^*$ siempre son autoadjuntos. En la siguiente sección veremos que el cálculo funcional continuo se define para los elementos normales de un álgebra C^*.

Definición 2.31. *Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ dos álgebras-$*$ de Banach con involuciones $*_1$, $*_2$ respectivamente. Un isomorfismo $\theta : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se llama **isomorfismo-$*$** entre $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ si para toda $x \in \mathcal{A}_1$*

$$\theta\left(x^{*_1}\right) = \left(\theta(x)\right)^{*_2}$$

A continuación demostramos el Teorema Espectral Abstracto, la clave en la demostración es usar el Teorema 2.27. Aunque el siguiente Teorema es únicamente válido en álgebras C^* conmutativas, éste será la clave para definir el cálculo funcional continuo en cualquier álgebra C^*, aun si no es conmutativa como el caso de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Teorema 2.32. *(Teorema Espectral Abstracto) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa con unidad. Entonces el mapeo de Gelfand es un isomorfismo-$*$ isométrico de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$.*

Demostración:
Ya sabemos que el mapeo de Gelfand es un homomorfismo inyectivo. Veamos en 3 pasos que en efecto preserva la involución, es una isometría y es suprayectivo.

Paso 1: Para ver que el mapeo de Gelfand preserva la involución (i.e. $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$), tomemos $x \in \mathcal{A}$ y definamos x_1, x_2 como sigue

$$x_1 := \frac{x + x^*}{2}, \quad x_2 := \frac{-ix - (ix)^*}{2}$$

Entonces $x = x_1 + ix_2$, y ademas $x_1^* = x_1$ y $x_2^* = x_2$, es decir que ambos son elementos autoadjuntos. Supongamos ahora que para $j = 1, 2$ la función $\widehat{x}_j \in \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$ es real valuada, en cuyo caso se tendrá que

$$\widehat{x}_j = \overline{\widehat{x}_j}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{x^*} &= (\widehat{x_1 + ix_2})^* \\
&= \widehat{x_1 - ix_2} \\
&= \widehat{x}_1 - i\widehat{x}_2 \\
&= \overline{\widehat{x}_1} - i\overline{\widehat{x}_2} \\
&= \overline{\widehat{x}_1} + \overline{i\widehat{x}_2} \\
&= \overline{\widehat{x_1 + ix_2}} \\
&= \overline{\widehat{x}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, nos basta con ver que las funciones $\widehat{x}_j$ son real valuadas para $j = 1, 2$. Verifiquemos que, en general, al aplicar el mapeo de Gelfand a cualquier elemento autoadjunto, se define una función real valuada. Para ello tomemos cualquier $y \in \mathcal{A}$ autoadjunto y definamos

$$u_t := e^{ity} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} y^n \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

En el Capítulo 1 vimos que la serie anterior está bien definida ya que la función exponencial es entera. Gracias a la propiedad *iv)* de una involución, tenemos que $x \mapsto x^*$ es continua y por lo tanto, usando también que y es autoadjunto, obtenemos que

$$u_t^* = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(it)^n}{n!} y^n \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} (y^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} y^n = e^{-ity} = u_{-t},$$

como además $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa, entonces se tiene que $e^{x+y} = e^x e^y$, de donde se sigue que

$$u_t^* u_t = u_t u_t^* = e^0 = \mathbf{1}$$

que a su vez implica que $\|u_t\|^2 = \left\|u_t u_t^*\right\| = \|\mathbf{1}\| = 1$, pues $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*. Así, para cualquier $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ tendremos que

$$\left|\omega(u_t)\right| \leq \|\omega\| \|u_t\| = 1.$$

Por otro lado,

$$\omega(u_t) = \omega\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} y^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \left(\omega(y)\right)^n = e^{it\omega(y)} \in \mathbb{C}$$

Entonces para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$1 \geq \left|\omega(u_t)\right| = \left|e^{it\omega(y)}\right| = e^{\mathfrak{Re}(it\omega(y))} = e^{-t\mathfrak{Im}(\omega(y))},$$

por lo que forzosamente $\mathfrak{Im}(\omega(y)) = 0$, ya que de lo contrario se tiene una contradicción pues podríamos hallar una t tal que $\left|\omega(u_t)\right| > 1$. Probamos entonces que $\widehat{y}(\omega) = \omega(y) = \mathfrak{Re}(\omega(y)) \in \mathbb{R}$ para cualquier $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$, por lo que en efecto $\widehat{y}$ es real valuada. Como x_1, x_2 son autoadjuntos, concluimos entonces que $\widehat{x_1}, \widehat{x_2}$ son funciones real valuadas como queríamos verificar.

Paso 2: Veamos ahora que en efecto el mapeo es una isometría (i.e. Pd: $\|x\| = \left\|\widehat{x}\right\|_\infty$). Notemos en primer lugar que, si $z = z^*$ entonces al ser $\mathcal{A}$ un álgebra C^* se tiene que $\|z\|^2 = \|z^* z\| = \|z^2\|$, más aún como $\mathcal{A}$ es conmutativa esto no sólo se cumple para los elementos autoadjuntos, ya que como x^*x es autoadjunto obtenemos que

$$\|x^2\| = \sqrt{\left\|(x^2)^* x^2\right\|} = \sqrt{\|x^* x^* x x\|} = \sqrt{\|x^* x x^* x\|} = \sqrt{\left\|(x^* x)^2\right\|} = \left\|x^* x\right\| = \|x\|^2$$

Remplazando x por x^2 tenemos que $\|x^4\| = \left\|x^2\right\|^2 = \|x\|^4$, inductivamente se sigue que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. Entonces $\|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \|x\|$, así que por la fórmula del radio espectral tendremos que

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$$

Pero, como $\mathcal{A}$ es álgebra de Banach conmutativa con unidad, entonces por definición de $r(x)$ y por el Teorema 2.27, que dice que $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$, se tiene que

$$\|x\| = r(x) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\right\} = \sup\left\{\left|\widehat{x}(\omega)\right| : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})\right\} = \left\|\widehat{x}\right\|_\infty$$

es decir que en efecto el mapeo de Gelfand es una isometría.

Paso 3: Finalmente, para probar que el mapeo es suprayectivo, notamos que su imagen

$$\widehat{\mathcal{A}} := \{\widehat{x} : x \in \mathcal{A}\},$$

es una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$, que separa puntos, ya que, para $\omega_1 \neq \omega_2 \in \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ existe un $x \in \mathcal{A}$ tal que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$, es decir que existe un $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{A}}$ de tal forma que $\widehat{x}(\omega_1) \neq \widehat{x}(\omega_2)$. Como además la función constante $1 \in \widehat{\mathcal{A}}$, entonces se sigue del Teorema de Stone-Weierstrass A.12 que $\widehat{\mathcal{A}}$ es denso en $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$. Por el *Paso 2* tenemos que para toda $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{A}}$ se tiene que $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|$, así que como $\mathcal{A}$ es completo con $\|\cdot\|$ entonces $\widehat{\mathcal{A}}$ es completo con $\|\cdot\|_\infty$, así que $\widehat{\mathcal{A}}$ es cerrado y entonces por densidad $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}))$. ■

Además de dar lugar al cálculo funcional continuo, el Teorema anterior tiene dos corolarios de vital importancia para el estudio de la teoría espectral. Notemos que en tales Corolarios no se pide que el álgebra C^* sea conmutativa.

Corolario 2.33. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad. Entonces si $x \in \mathcal{A}$ es autoadjunto se tiene que*

$$\sigma(x) \subset \mathbb{R}$$

Demostración:
Sea $x \in \mathcal{A}$ autoadjunto y definamos $\mathcal{A}_1$ como

$$\mathcal{A}_1 := \overline{\left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k : n \in \mathbb{N} \, ; \, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\}}$$

Tenemos que $\mathcal{A}_1$ es una subálgebra C^* de $\mathcal{A}$, por lo que para cualquier $y \in \mathcal{A}_1$

$$\sigma(y) = \sigma_{\mathcal{A}}(y) \subset \sigma_{\mathcal{A}_1}(y) \tag{2.4}$$

Además $\mathcal{A}_1$ es conmutativa, contiene a la unidad y como en particular $x \in \mathcal{A}_1$ es autoadjunto, del *Paso 1* de la demostración del teorema anterior, obtenemos que la función $\widehat{x}$ es real valuada en todo $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$, es decir $\widehat{x}(\omega) = \omega(x) \in \mathbb{R}$ para toda $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$. Por lo tanto por el Teorema 2.27

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(x) = \widehat{x}\left(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)\right) \subset \mathbb{R}$$

así que (2.4) implica que en efecto $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. ■

Corolario 2.34. *(Permanencia Espectral: "Baby Spectral Theorem") Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad. Si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ es una subálgebra C^* de $\mathcal{A}$ que contiene la unidad, entonces para todo $x \in \mathcal{A}_1$*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$$

Demostración:
Claramente $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$, por lo que basta demostrar que $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \supset \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$, que es equivalente a verificar que $\rho_{\mathcal{A}}(x) \subset \rho_{\mathcal{A}_1}(x)$. Para ello tomemos cualquier $z \in \mathcal{A}_1 \cap \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces

como $(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$ se tiene también que $z^* \in \mathcal{A}_1 \cap \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Claramente $[(z^*z)^{-1}z^*]z = \mathbf{1}$, pero $z^{-1} \in \mathcal{A}$ entonces necesariamente

$$z^{-1} = (z^*z)^{-1}z^*$$

Así para tener que $z^{-1} \in \mathcal{A}_1$, basta ver que $(z^*z)^{-1} \in \mathcal{A}_1$, ya se tiene que $z^* \in \mathcal{A}_1$. Para verlo, tomemos en general a $y \in \mathcal{A}_1 \cap \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ autoadjunto, entonces $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(y)$ y además por el corolario anterior $\sigma_{\mathcal{A}_1}(y) \subset \mathbb{R}$. Notemos que el 0 podría pertenecer a $\sigma_{\mathcal{A}_1}(y)$, pero para ver que no, basta tomar $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ con $\mathfrak{Im}(\lambda_n) \neq 0$, $\lambda_n \to 0$ y $\lambda_n \notin \sigma_{\mathcal{A}_1}(y)$, para que así $(y - \lambda_n)^{-1} \in \mathcal{A}_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto como $\mathcal{A}_1$ es cerrado se tendrá que

$$y^{-1} = \lim_{n\to\infty} (y - \lambda_n)^{-1} \in \mathcal{A}_1$$

Tomando el elemento autoadjunto $y := z^*z$ lo anterior implica que $(z^*z)^{-1} \in \mathcal{A}_1$, lo cual ya vimos que implica que $z^{-1} \in \mathcal{A}_1$. Concluimos entonces que, para $x \in \mathcal{A}_1$, si $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(x)$, entonces $z := x - \lambda \in \mathcal{A}_1 \cap \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ y por lo anterior que $z^{-1} = (x - \lambda)^{-1} \in \mathcal{A}_1$, lo que implica que $x - \lambda \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}_1)$, es decir que $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}_1}(x)$ como queríamos verificar en un principio. ■

2.3. El Cálculo Funcional Continuo y Aplicaciones

Finalmente concluimos el Capítulo con la construcción del cálculo funcional continuo. Antes es necesario introducir el concepto de álgebra C^* generada por un subconjunto.

Definición 2.35. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $S \subset \mathcal{A}$. La intersección de todas las álgebras C^* que contienen a S se llama el **álgebra C^* generada por** S y se denota por $C^*(S)$, es decir*

$$C^*(S) := \bigcap \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ es álgebra } C^* \text{ con } S \subset \mathcal{V}\}$$

Observación 2.36. $C^*(S)$ es la cerradura del conjunto de combinaciones lineales de elementos de la forma $x_1, \cdots, x_n$ con $x_j \in S \cup S^*$ para $j = 1, \cdots, n$ y con $S^* := \{s^* : s \in S\}$, i.e.

$$C^*(S) = \overline{\mathrm{span}(S \cup S^*)}$$

Teorema 2.37. *(Cálculo Funcional Continuo) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* unitaria y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces existe un único isomorfismo-* isométrico $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$ que cumple que $\Phi(\imath) = x$, donde*[2] *$\imath : \sigma(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión $\imath(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in \sigma(x)$.*

Demostración:

[2] es claro que $\imath \in \mathcal{C}(\sigma(x))$

Consideremos los conjuntos

$$A_1 := \left\{ \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, x^j (x^*)^k : n \in \mathbb{N}\,;\, c_{j,k} \in \mathbb{C}\ \forall\, (j,k) \in \{0, \cdots, n\}^2 \right\} \subset \mathcal{A}$$

$$A_2 := \left\{ \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \lambda^j\, (\overline{\lambda})^k :\ n \in \mathbb{N}\,;\, c_{j,k} \in \mathbb{C}\ \forall\, (j,k) \in \{0, \cdots, n\}^2 \right\} \subset \mathcal{C}(\sigma(x))$$

Definamos $\mathcal{A}_1 := \overline{A_1}$ y $\mathcal{A}_2 = \overline{A_2}$. Se sigue de la Observación anterior que $C^*(\{\mathbf{1}, x\}) = \mathcal{A}_1$ y además como A_2 es una subálgebra de $\mathcal{C}(\sigma(x))$ que contiene a la función 1 y que separa puntos, por el Teorema de Stone Weierstrass A.12 tenemos que $\mathcal{C}(\sigma(x)) = \mathcal{A}_2$. Para ver la existencia del isomorfismo-$*$ notemos primero que $\mathcal{A}_1$ es un álgebra C^* **conmutativa** con unidad, ya que como x es normal, entonces para cualesquiera $j_1, k_1, j_2, k_2 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left[x^{j_1}(x^*)^{k_1}\right]\left[x^{j_2}(x^*)^{k_2}\right] &= \underbrace{x\cdots x}_{j_1}\underbrace{x^*\cdots x^*}_{k_1}\underbrace{x\cdots x}_{j_2}\underbrace{x^*\cdots x^*}_{k_2} \\
&= \underbrace{x\cdots x}_{j_2}\underbrace{x^*\cdots x^*}_{k_2}\underbrace{x\cdots x}_{j_1}\underbrace{x^*\cdots x^*}_{k_1} \\
&= \left[x^{j_2}(x^*)^{k_2}\right]\left[x^{j_1}(x^*)^{k_1}\right]
\end{aligned}$$

Entonces por el Teorema Espectral Abstracto, Teorema 2.32, se tiene que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1))$ son isométricamente $*$-isomorfos bajo el mapeo de Gelfand $x \mapsto \widehat{x}$. Recordemos que, del Corolario 2.34 (Permanencia Espectral), se tiene $\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$. Veamos ahora que $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ y $\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$ son homeomorfos. Para ello recordemos que gracias al Teorema 2.27 se tiene que

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(x) = \widehat{x}\left(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)\right) = \left\{\omega(x) : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)\right\} \tag{2.5}$$

Por lo que de manera natural proponemos $\theta : \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1) \to \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$ como

$$\theta(\omega) := \omega(x) \in \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$$

Verifiquemos que en efecto θ es un homeomorfismo:

• Notemos que gracias a (2.5) se tiene que $\theta\left(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)\right) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$, por lo tanto θ es suprayectiva.

• Para ver que es continua tomemos una sucesión $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ tal que $\omega_n \to \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$, es decir que para todo $\varphi \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)^*$ se tiene que $\varphi(\omega_n) \to \varphi(\omega) \in \mathbb{C}$, en particular $\theta \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)^*$ por lo que en efecto es continua.

• La inyectividad de θ se obtiene al tomar $\omega_1 \neq \omega_2 \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$. En primer lugar notemos que existe un $y \in \mathcal{A}_1$ de la forma

$$y = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k} x^j (x^*)^k$$

y tal que $\omega_1(y) \neq \omega_2(y)$, ya que de lo contrario si $\omega_1(y) = \omega_2(y)$ para toda y de la forma anterior, entonces por definición de $\mathcal{A}_1$ se tendría que $\omega_1(a) = \omega_2(a)$ para toda $a \in \mathcal{A}_1$, que es imposible pues $\omega_1 \neq \omega_2$. Por el Teorema Espectral Abstracto, Teorema 2.32, $\omega(x^*) =: \widehat{x^*}(\omega) = \overline{\widehat{x}}(\omega) = \overline{\omega(x)}$, así que para cualquier $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ se tiene que

$$\omega(y) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \omega\left(x^j\right) \omega\left((x^*)^k\right) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \omega\,(x)^j\, \overline{\omega\,(x)^k}$$

en particular como $\omega_1(y) \neq \omega_2(y)$ se tiene que

$$\sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \omega_1\,(x)^j\, \overline{\omega_1\,(x)^k} \neq \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \omega_2\,(x)^j\, \overline{\omega_2\,(x)^k}$$

de donde se sigue que necesariamente $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$, es decir que $\theta(\omega_1) \neq \theta(\omega_2)$ y por lo tanto que en efecto θ es inyectiva.

• Finalmente resta ver que θ^{-1} es una función continua. Para ello tomemos cualquier cerrado K en $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$, como $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ es compacto entonces K también lo es, pero como θ es continua entonces $\theta(K)$ es compacto en $\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$ y por lo tanto es cerrado. Hemos probado que si K es cerrado en $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$, entonces la imagen inversa de K bajo θ^{-1} es un cerrado en $\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$, es decir que θ^{-1} es en efecto continua.

Como $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ y $\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$ son homeomorfos bajo el homemorfismo $\theta : \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1) \to \sigma_{\mathcal{A}_1}(x)$, entonces si definimos $\Psi : \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)) \to \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x))$ por $\Psi(f) := f \circ \theta^{-1}$, así $\Psi^{-1}(g) = g \circ \theta$ para $g \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x))$, entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \arrow[r, "x \mapsto \widehat{x}"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)) \arrow[d, "\Psi"] \\
& \mathcal{C}\left(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)\right)
\end{tikzcd}$$

Con $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}\left(\sigma_{\mathcal{A}_1}(x)\right) = \mathcal{A}_2$, dado por $\phi(a) := \widehat{a} \circ \theta^{-1}$ para $a \in \mathcal{A}_1$. Entonces veamos que el isomorfismo-$*$ isométrico buscado es $\Phi := \phi^{-1} : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$, pues si $\mathcal{C}(\mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)) \ni \varphi \mapsto \widetilde{\varphi} \in \mathcal{A}_1$ representa la inversa del mapeo de Gelfand, entonces

$$\Phi(\imath) = \widetilde{\Psi^{-1}(\imath)} = \widetilde{\imath \circ \theta} = \widetilde{\theta} = x,$$

ya que como $\theta(\omega) = \omega(x)$ entonces $\widetilde{\theta} = x$. La unicidad del isomorfismo se sigue por supuesto de la propiedad anterior y del hecho que $\overline{A_1} = \mathcal{A}_1$ y $\overline{A_2} = \mathcal{A}_2$ (Observación 2.38). ■

Observación 2.38. Es claro que cuando nos restringimos al conjunto A_2, $\Phi : A_2 \to A_1$ es una biyección, ya que gracias a que $\Phi(\imath) = x$, y a que Φ es un isomorfismo-$*$ se tiene que

$$\Phi\left(\sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \lambda^j\, (\overline{\lambda})^k\right) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, x^j\, (x^*)^k \tag{2.6}$$

Observación 2.39. Si $x \in \mathcal{A}$ es normal, la asignación $f \mapsto \Phi(f)$ con $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ es el cálculo funcional continuo para x, por lo que ponemos $f(x) := \Phi(f)$ y vemos fácilmente que $f(x)$ cumple lo deseado para la consistencia de un cálculo funcional, a saber que $1(x) = \mathbf{1}$, $\imath(x) = x$. Además al ser Φ un isomorfismo-$*$ isométrico, tenemos

$$\|f(x)\| = \|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty,$$

la importancia de la igualdad anterior ya fue mencionada al inicio del Capítulo 1.

Observación 2.40. Finalmente notemos que $A_2 = \mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]$ con $\lambda, \overline{\lambda} \in \sigma(x)$. Así el cálculo funcional continuo se puede definir primero para elementos en A_2 i.e. $\Phi : A_2 \to A_1$ de manera natural como muestra a fórmula (2.6) y como por el Teorema de Stone-Weierstrass A.12 se tiene que $\overline{\mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]} = \mathcal{C}(\sigma(x))$, entonces Φ se extiende por densidad a todo $\mathcal{C}(\sigma(x)$ para ser el único isomorfismo-* isométrico $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, x\})$ del teorema anterior.

Aplicaciones

Pensemos, similar al Capítulo 1, en el cálculo funcional poliniomial para cualquier álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con unidad, es decir para $x \in \mathcal{A}$, si p es el polinomio

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{m} c_k \lambda^k, \ \ c_k \in \mathbb{C}.$$

entonces ponemos $p(x) \in \mathcal{A}$ como

$$p(x) := \sum_{k=0}^{m} c_k x^k.$$

Claramente cuando $\mathcal{A}$ es álgebra C^* y x es normal, la asignación anterior $p \mapsto p(x)$ coincide con el cálculo funcional continuo $p \mapsto \Phi(p)$. Entonces se tiene el siguiente resultado conocido como la propiedad del mapeo espectral para polinomios

Teorema 2.41. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $x \in \mathcal{A}$. Entonces si $p \in \mathbb{C}[\lambda]$ se tiene que*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$$

Demostración:
Si p es un polinomio constante $p(\lambda) = c_0 \in \mathbb{C}$, entonces $p(\sigma(x)) = \{c_0\}$ y como claramente $p(x) = c_0\mathbf{1}$, entonces también $\sigma(p(x)) = \{c_0\}$. Cuando el polinomio p no es constante, es decir que $c_m \neq 0$, entonces si $\alpha \in \mathbb{C}$, sabemos por el Teorema Fundamental del Álgebra que existen constantes $\lambda_0, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, con $\lambda_0 \neq 0$, tales que

$$p(\lambda) - \alpha = \lambda_0(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m)$$

es decir

$$p(x) - \alpha = \lambda_0(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)$$

por lo que $p(x)-\alpha \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$ si y sólo si para toda $j=1,\cdots,m$, $(x-\lambda_j)\in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$. Por lo tanto $\alpha \in \sigma(p(x))$ si y sólo si para alguna j se tiene que $\lambda_j \in \sigma(x)$, pero como $p(\lambda_j)-\alpha = 0$ entonces $p(\lambda_j)=\alpha$ y así $\alpha \in p(\sigma(x))$; luego en efecto $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$. ■

El resultado anterior depende únicamente de las herramientas de la Sección 2.1, sin embargo es interesante presentarlo hasta este momento, ya que se generaliza al caso en que $\mathcal{A}$ es álgebra C^* y x es normal y $f(x)$ se define por el cálculo funcional continuo de x para funciones $f \in \sigma(x)$:

Teorema 2.42. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces para $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ se tiene que*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$$

Más aún, si $g \in \mathcal{C}(\sigma(f(x)))$, entonces

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

es decir que $\Phi_x(g\circ f) = \Phi_{f(x)}(\Phi_x(f))$ donde Φ_y representa el cálculo funcional continuo para cualquier elemento normal $y \in \mathcal{A}$.

Demostración:
Sean A_1 y A_2 como en la demostración del Teorema 2.37, y $\mathcal{A}_1 = C^*(\{x,\mathbf{1}\})$. Entonces notemos que para $p \in A_2$ de la forma

$$p(\lambda) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \lambda^j \,(\overline{\lambda})^k,$$

si $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$, entonces por la Observación 2.38,

$$\omega\left(p(x)\right) = \omega\left(\sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, x^j\,(x^*)^k\right) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\,\omega(x)^j\,(\overline{\omega(x)})^k = p(\omega(x))$$

es decir que $\omega\left(p(x)\right) = p(\omega(x))$ para toda $p \in A_2$, pero como $\overline{A_2} = \mathcal{C}(\sigma(x))$ entonces $\omega\left(f(x)\right) = f(\omega(x))$ para toda $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Luego usando lo anterior y el Teorema 2.27 dos veces concluimos

$$\sigma(f(x)) = \{\omega(f(x)) : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)\} = \{f(\omega(x)) : \omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)\} = f(\sigma(x))$$

Ahora para ver que $(g\circ f)(x) = g(f(x))$, notemos primero que $f(x)$ es también normal y por lo tanto se le puede asociar un cálculo funcional, en efecto si $\Phi_x : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1},x\})$ define el cálculo funcional continuo para x, entonces

$$f(x)^*f(x) = \Phi(f)^*\Phi(f) = \Phi\left(\overline{f}\cdot f\right) = \Phi\left(f\cdot\overline{f}\right) = \Phi(f)\Phi(f)^* = f(x)f(x)^*$$

Así pues existe un único isomorfismo-$*$ isométrico $\Phi_{f(x)} : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to C^*(\{\mathbf{1}, f(x)\})$ que define el cálculo funcional continuo para $f(x)$. Luego si ponemos $\mathcal{E} := C^*(\{\mathbf{1}, f(x)\})$ claramente $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_1$ y así para cualquier $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$ la restricción $\omega_{\mathcal{E}} \in \mathrm{sp}(\mathcal{E})$. Recordemos que

$$\omega\left(f(x)\right) = f(\omega(x)) \; \forall\, f \in \mathcal{C}(\sigma(x)),$$

y similarmente se tiene que si $y = f(x)$ entonces

$$\omega_{\mathcal{E}}\left(g(y)\right) = g(\omega_{\mathcal{E}}(y)) \; \forall\, g \in \mathcal{C}(\sigma(y)).$$

Así, si $g \in \mathcal{C}(\sigma(f(x)))$ tenemos que $(g \circ f) \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ y entonces para cualquier $\omega \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_1)$

$$\omega\left((g \circ f)(x)\right) = (g \circ f)(\omega(x)) = g\left(\omega_{\mathcal{E}}(f(x))\right) = \omega\left(g(f(x))\right)$$

por lo que en efecto $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. ■

Finalmente concluimos el Capítulo con una aplicación del cálculo funcional continuo a la Teoría de Operadores, a saber queremos demostrar que todo elemento no nulo del espectro de un operador normal y compacto en un espacio de Hilbert separable, es un eigenvalor del operador. Para ello consideremos el álgebra C^* dada por $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, como ya vimos en este caso la involución está dada por el operador adjunto y la identidad $\mathbf{1} = \mathrm{I}$ es el operador identidad. Veamos primero un par de Lemas que nos llevaran al resultado deseado, es importante notar que el uso del cálculo funcional está en el primero de los Lemas, que por si solo es un resultado bastante interesante, pues nos dice que el comportamiento del espectro de un operador normal es en cierto sentido como el de los eigenvalores:

Lema 2.43. *Sea* $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *un operador normal (i.e.* $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^*$*) y* $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$. *Entonces existe una sucesión* $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *de elementos con norma* 1, *tal que*

$$(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})\xi_n \to 0 \in \mathcal{H}$$

Demostración:
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda = 0$, ya que de lo contrario cambiamos T por $\mathrm{L} := \mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}$ y tenemos que L es un operador normal con $0 \in \sigma(\mathrm{L})$. Ahora bien tomemos, como en el Teorema anterior, a $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T})) \to C^*(\{\mathrm{I}, \mathrm{T}\})$ el isomorfismo-$*$ que define al cálculo funcional continuo. Definamos a $f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T}))$ como la función $\imath$, es decir $f(\lambda) := \lambda$ para $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$, entonces se tiene que $\Phi(f) = f(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$. Tomemos ahora una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T}))$ de tal manera que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(0) = 1, \; \left|f_n(\lambda)\right| \leq 1, \; f_n(\lambda) = 0 \; \forall\, |\lambda| > \frac{1}{n}$$

Claramente para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f_n\right\|_{\infty} = 1$ pues $\left|f_n(\lambda)\right| \leq 1$ y $f(0) = 1$. Además como Φ es un isomorfismo isométrico entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi(f)\Phi(f_n)\right\| &= \left\|\Phi(f\cdot f_n)\right\| \\
&= \left\|f\cdot f_n\right\|_\infty \\
&= \sup_{\lambda\in\sigma(\mathrm{T})}\left|f(\lambda)\cdot f_n(\lambda)\right| \\
&= \sup_{\lambda\in\sigma(\mathrm{T})}\left|z\cdot f_n(\lambda)\right| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por otro lado, como además $\left\|\Phi(f_n)\right\| = \left\|f_n\right\|_\infty = 1$, entonces podemos construir una sucesión $(u_n)_{n=1}^\infty$ acotada tal que $\xi_n := [\Phi(f_n)]u_n \in \mathcal{H}$ tenga norma 1 y cumpla lo deseado. En efecto, como

$$\left\|\Phi(f_n)\right\| = \sup_{\|v\|=1}\left\|[\Phi(f_n)]v\right\|$$

entonces para cada $n \in N$ podemos tomar $(v_k^{(n)})_{k=1}^\infty$ de tal forma que

$$\left\|[\Phi(f_n)]v_k^{(n)}\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left\|\Phi(f_n)\right\|,$$

definiendo ahora $\eta_n := [\Phi(f_n)]v_n^{(n)}$, se tiene que si $\xi_n := \eta_n/\|\eta_n\|$ entonces la sucesión$(\xi_n)_{n=1}^\infty$ es de elementos con norma 1 y si

$$u_n := \frac{v_n^{(n)}}{\|\eta_n\|}$$

se tiene que $(u_n)_{n=1}^\infty$ es acotada y es claro que $\xi_n = [\Phi(f_n)]u_n$. Por lo tanto por (2.7) y como $(u_n)_{n=1}^\infty$ es acotada, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{T}\xi_n\| &= \left\|[\Phi(f)]\xi_n\right\| \\
&= \left\|[\Phi(f)\Phi(f_n)]u_n\right\| \\
&\leq \left\|\Phi(f)\Phi(f_n)\right\|\|u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Por lo que en efecto existe tal sucesión $(\xi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$. ■

Lema 2.44. *Sea* $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *un operador normal. Si* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *son eigenvalores de* T*, entonces los eigenvectores asociados* v_1, v_2 *(i.e.* $v_j \neq 0$ *y* $\mathrm{T}v_j = \lambda_j v_j$ *para* $j = 1, 2$*) son ortogonales.*

Demostración:
Notemos primeo que si L es normal entonces para cualquier $v \in \mathcal{H}$

$$\|\mathrm{L}v\|^2 = \langle \mathrm{L}v, \mathrm{L}n\rangle = \langle v, \mathrm{L}^*\mathrm{L}n\rangle = \langle v, \mathrm{L}\mathrm{L}^*n\rangle = \langle \mathrm{L}^*v, \mathrm{L}^*n\rangle = \|\mathrm{L}^*v\|^2$$

En particular como T es normal, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ el operador $\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}$ también es normal pues

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})^* &= (\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})(\mathrm{T}^*-\overline{\lambda}\mathrm{I}) \\
&= \mathrm{T}^*\mathrm{T} - \overline{\lambda}\mathrm{T} - \lambda\mathrm{T}^* + |\lambda|^2\,\mathrm{I} \\
&= \mathrm{T}\mathrm{T}^* - \lambda\mathrm{T}^* - \overline{\lambda}\mathrm{T} + |\lambda|^2\,\mathrm{I} \\
&= (\mathrm{T}^*-\overline{\lambda}\mathrm{I})(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I}) \\
&= (\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})^*(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})
\end{aligned}$$

Luego para $j = 1, 2$ sabemos que $\mathrm{T}v_j = \lambda_j v_j$, es decir que

$$\left\|(\mathrm{T}-\lambda_j)v_j\right\|^2 = 0 \iff \left\|(\mathrm{T}-\lambda_j)^*v_j\right\|^2 = 0 \iff \|(\mathrm{T}^*-\overline{\lambda_j})v_j\|^2 = 0$$

por lo que $\mathrm{T}^*v_j = \overline{\lambda_j}v_j$, osea que $\overline{\lambda_j}$ son eigenvalores de T^* con eigenvectores v_j. Por lo tanto se tiene que

$$\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \langle \mathrm{T}v_1, v_2\rangle = \langle v_1, \mathrm{T}^*v_2\rangle = \langle v_1, \overline{\lambda_2}v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$$

por lo que necesariamente $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, ya que de lo contrario se tendría que $\lambda_1 = \lambda_2$, que es imposible por hipótesis. ■

Concluimos entonces con el siguiente Teorema, que depende de los Lemas anteriores y por lo tanto del cálculo funcional continuo. Además es un Teorema que volveremos a usar en el siguiente capítulo.

Teorema 2.45. *Sea $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador compacto y normal. Entonces todo elemento no nulo del espectro, i.e. de $\sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$, es eigenvalor. Además no hay puntos de acumulación en $\sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$.*

Demostración:
Sea $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$ y tomemos la sucesión $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ dada por el Lema 2.43. Ahora como $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada y T es compacto entonces $(\mathrm{T}\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente digamos a $\eta_\lambda \in \mathcal{H}$:

$$\mathrm{T}\xi_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta_\lambda$$

Pero como por construcción de $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, se tiene $(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{I})\xi_n \to 0$, entonces

$$\lambda\xi_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta_\lambda$$

entonces se tiene también que que

$$\mathrm{T}\xi_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{T}\frac{\eta_\lambda}{\lambda}$$

por lo que $\mathrm{T}(\eta_\lambda/\lambda) = \eta_\lambda$, lo que implica que en efecto λ es eigenvalor.

Ahora supongamos al contrario que si hay puntos de acumulación, es decir que existe $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$ tal que $\lambda_n \to \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$. Entonces si $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ son los eigenvectores asociados, los cuales podemos tomar con norma 1, del Lema anterior se sigue que entonces dichos eigenvectores son ortonormales. Por lo tanto, al ser T compacto existe una subsucesión de $(\mathrm{T}v_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente, es decir que $(\lambda_n v_n)_{n=1}^{\infty}$ también admite una subsucesión que converge, digamos a y,

$$\lambda_n v_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y,$$

entonces claramente

$$v_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{y}{\lambda},$$

pero esto una contradicción ya que como $\|v_n\| = 1$ y $v_n \perp v_m$ para cualesquiera $m \neq n$ se tiene

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2$$

entonces $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ no puede admitir subsucesiones convergentes. ■

Capítulo 3

El Teorema Espectral

En Teoría de Operadores una de las aplicaciones más importantes del cálculo funcional continuo es el Teorema Espectral para operadores normales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dicho Teorema se presenta en dos formas distintas, la primera indica que todo operador normal T es diagonalizable en un sentido que en breve definimos; la segunda forma indica que el operador $f(\mathrm{T})$ puede ser representado como la integral de f con respecto a una medida espectral extendiendo en cierta forma la fórmula (1.6) vista para el caso matricial. En este Capítulo nos dedicamos a demostrar ambas formas así como presentar todos los preliminares necesarios.

3.1. Operadores Diagonalizables y Primer Teorema Espectral

Para motivar el Primer Teorema Espectral, consideremos a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con involución dada por la matriz transpuesta conjugada, si $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz normal, entonces existe una matriz unitaria U (i.e. $\mathrm{U}^*\mathrm{U} = \mathrm{U}\mathrm{U}^* = \mathrm{I}$) y una matriz diagonal $\Lambda := \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ (los valores λ_j son los eigenvalores de T es decir $\sigma(\mathrm{T}) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$) tal que

$$\mathrm{T} = \mathrm{U}\Lambda\mathrm{U}^*$$

Esto quiere decir que el operador T es diagonalizable pues es semejante a la matriz diagonal Λ. Notemos que $\mathrm{U}^*\mathrm{T}\mathrm{U} = \Lambda$ es un operador de multiplicación en el sentido que aplicarlo a un vector $z \in \mathbb{C}^n$ es lo mismo que multiplicar las componentes de z por la diagonal de Λ

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{bmatrix}$$

Lo anterior se generaliza para operadores normales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, pues el Primer Teorema Espectral afirma cualquier operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es semejante vía un operador unitario a un operador de multiplicación, lo que pronto definiremos como diagonalizable.

Antes de definir formalmente a los operadores de multiplicación y el concepto de operador diagonalizable, veamos que la conclusión del Primer Teorema Espectral se obtiene fácilmente en un caso muy especifico

Ejemplo:
Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal con espectro discreto $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, con $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N})$, consistente únicamente de eigenvalores con eigenvectores dados por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ que forman una base ortonormal del espacio separable $\mathcal{H}$ (este podría ser el caso cuando T es un operador compacto, ver Teorema 2.45). En efecto, definamos $U : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}$ como

$$Ux = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad \text{para} \quad x := (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Un cálculo directo muestra que $U^* : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{N})$ está dado por

$$U^* y = (\langle y, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \quad \text{para} \quad y \in \mathcal{H}.$$

Además para toda $y \in \mathcal{H}$, por el Teorema A.4

$$(UU^*)y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n = y$$

y para toda $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, como $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ es ortonormal

$$(U^*U)x = \left(\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, e_n \rangle \right)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x$$

por lo que en efecto U es un operador unitario. Más aún, como $Te_k = \lambda_k e_k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, entonces el operador $M : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ dado por $M := U^*TU$ es tal que para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$Mx = (U^*T)\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right) = U^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k e_k \right) = \left(\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k e_k, e_n \rangle \right)_{n=1}^{\infty} = (x_n \lambda_n)_{n=1}^{\infty},$$

es decir que M es un operador de multiplicación, pues multiplica cada elemento de la sucesión x por cada eigenvalor del operador T. Al ser T equivalente a M, en el sentido que $T = UMU^*$, necesariamente T es un operador normal, ya que como para $x, z \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\langle Mx, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n \overline{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{z_n \overline{\lambda_n}} = \langle x, M^* z \rangle,$$

entonces $(M^*M)x = (x_n \lambda_n \overline{\lambda_n})_{n=1}^{\infty} = (MM^*)x$, es decir que M es normal y entonces

$$T^*T = (UMU^*)^*UMU^* = UM^*U^*UMU^* = UM^*MU^* = UMM^*U^* = UMU^*UM^*U^* = TT^*.$$

♦

Lo anterior muestra que los operadores equivalentes a un operador de multiplicación son necesariamente normales, ya que , como veremos a continuación, los operadores de multiplicación lo son. El ejemplo anterior es un caso particular del Primer Teorema Espectral y la facilidad de llegar a la conclusión está en que el espectro es numerable y consiste únicamente de eigenvalores, lo interesante es que la conclusión es válida para cualquier operador normal sin importar su espectro, continuemos entonces con los preliminares para poder demostrarlo.

Definición 3.1. *Sea* $(\Omega, \mu) := (\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ *un espacio con medida* σ*-finita. Dado* $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$*, definimos* ***el operador de multiplicación*** M_f *en* $L^2(\Omega, \mu)$*, como sigue*

$$\left(\mathrm{M}_f g\right)(w) := f(w)g(w), \ \forall\, g \in L^2(\Omega, \mu), \ \forall\, w \in \Omega.$$

Observación 3.2. En efecto el operador M del ejemplo anterior es uno de multiplicación ya que coincide con M_f cuando $f \in L^\infty(\mathbb{N}, \nu)$, con ν la medida de conteo, y $f(n) := \lambda_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación 3.3. Claramente $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$ ya que para cualquier $g \in L^2(\Omega, \mu)$

$$\left\|\mathrm{M}_f g\right\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |fg|^2 \mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2} < \infty$$

Propiedades 3.4. *(del operador de multiplicación* M_f*) Sean* $f, f_1, f_2 \in L^\infty(\Omega, \mu)$
i) M_f *es lineal, acotado y normal.*
ii) $\mathrm{M}_{f_1+f_2} = \mathrm{M}_{f_1} + \mathrm{M}_{f_2}$.

Demostración:
i) Sean $g, h \in L^2(\Omega, \mu)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$(\mathrm{M}_f(g+\lambda h))(w) = f(w)(g+\lambda h)(w) = f(w)g(w) + \lambda f(w)h(w) = (\mathrm{M}_f g)(w) + \lambda(\mathrm{M}_f h)(w),$$

por lo que $\mathrm{M}_f(g+\lambda h) = \mathrm{M}_f g + \lambda \mathrm{M}_f h$, así que en efecto es lineal. En la Observación anterior vimos que $\|\mathrm{M}_f g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2}$, es decir que M_f es acotado con $\|\mathrm{M}_f\| \leq \|f\|_{L^\infty}$. Finalmente, como

$$\langle \mathrm{M}_f g, h\rangle = \int_\Omega fg\,\overline{h}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g\,\overline{\overline{f}h}\,\mathrm{d}\mu = \langle g, \overline{f}h\rangle,$$

es decir que $(\mathrm{M}_f)^* = \mathrm{M}_{\overline{f}}$, lo que implica que M_f es normal, pues

$$\left((\mathrm{M}_f)^*\mathrm{M}_f g\right)(x) = \overline{f(w)}f(w)g(w) = f(w)\overline{f(w)}g(w)\ \left(\mathrm{M}_f(\mathrm{M}_f)^* g\right)(w)$$

ii) Trivialmente $\mathrm{M}_{f_1+f_2} = \mathrm{M}_{f_1} + \mathrm{M}_{f_2}$, ya que

$$\left(\mathrm{M}_{f_1+f_2} g\right)(w) = (f_1+f_2)(w)g(w) = f_1(w)g(w) + f_2(w)g(w) = \left(\mathrm{M}_{f_1} g\right)(w) + \left(\mathrm{M}_{f_2} g\right)(w)$$

■

Teorema 3.5. *Para toda $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$, se tiene que $\|\mathrm{M}_f\| = \|f\|_{L^\infty}$. Más aún la transformación $f \mapsto \mathrm{M}_f$ es un isomorfismo-$*$ isométrico de $L^\infty(\Omega,\mu)$ sobre una álgebra C^* conmutativa $\mathcal{M}$. Es claro que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}\left(L^2(\Omega,\mu)\right)$ y se le conoce como el álgebra de multiplicación del espacio (Ω,μ).*

Demostración:
Para ver que es isométrico, como vimos en la demostración anterior que $\|\mathrm{M}_f\| \leq \|f\|_{L^\infty}$, entonces sólo falta demostrar que $\|\mathrm{M}_f\| \geq \|f\|_{L^\infty}$. Para ello supongamos que $\|f\|_{L^\infty} > 0$, de lo contrario el resultado es trivial, y sea $c \geq 0$ tal que $c < \|f\|_{L^\infty}$. Definamos

$$A := \left\{ w \in \Omega : \left|f(w)\right| > c \right\}.$$

Entonces $\mu(A) > 0$ y como μ es σ-finita, existe $B \subset A$ con $\mu(B) < \infty$. Luego, $\chi_B \in L^2(\Omega,\mu)$ y

$$\left\|\mathrm{M}_f(\chi_B)\right\|_{L^2} = \left(\int_B |f|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \geq c\sqrt{\mu(B)} = c\left\|\chi_B\right\|_{L^2},$$

de donde se obtiene que para toda $c < \|f\|_{L^\infty}$

$$\frac{\left\|\mathrm{M}_f(\chi_B)\right\|_{L^2}}{\left\|\chi_B\right\|_{L^2}} \geq c$$

es decir que $\|\mathrm{M}_f\| \geq c$ para toda $c < \|f\|_{L^\infty}$ y por lo tanto al tomar supremo sobre todas las c obtenemos que en efecto

$$\|f\|_{L^\infty} := \sup\left\{ c > 0 : \mu\{w \in \Omega : \left|f(w)\right| > c\} > 0 \right\} \leq \|\mathrm{M}_f\|$$

El hecho de que $f \mapsto \mathrm{M}_f$ es un isomorfismo-$*$ es consecuencia de las propiedades ***i)*** y ***ii)*** recién demostradas, ya que también vimos que preserva la involución al ver $(\mathrm{M}_f)^* = \mathrm{M}_{\overline{f}}$. Así, $\mathcal{M} := \{\mathrm{M}_f : f \in L^\infty(X,\mu)\}$ es en efecto un álgebra C^*, ya que como $L^\infty(\Omega,\mu)$ es un espacio de Banach entonces $\mathcal{M}$ es cerrada con la norma de operadores. ■

Definición 3.6. *(Operador Diagonalizable) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Decimos que T es **diagonalizable** si existen*

1) *Un espacio $(\Omega,\mu) := (\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ con medida σ-finita y tal que $L^2(\Omega,\mu)$ es separable;*

2) *Una función $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$;*

3) *Un operador unitario $\mathrm{U} : L^2(\Omega,\mu) \to \mathcal{H}$,*

tal que

$$\mathrm{UM}_f = \mathrm{TU}$$

con $\mathrm{M}_f : L^2(\Omega,\mu) \to L^2(\Omega,\mu)$ el operador de multiplicación por f. Es decir, se tiene que T es equivalente al operador de multiplicación en el sentido que $\mathrm{T} = \mathrm{UM}_f\mathrm{U}^*$.

Antes de enunciar y demostrar el Primer Teorema Espectral, es necesario un Lema algo técnico y un par definiciones que se usaran en el Lema:

Definición 3.7. *Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \cdots$ espacios de Hilbert separables, se define la suma directa como*

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots := \left\{ (x_1, x_2, \cdots) : x_n \in \mathcal{H}_n \ ; \sum_{n=1,2\cdots} \|x_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty \right\}$$

Se tiene que $\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert separable con el producto interno que asigna a $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in \mathcal{H}$ el complejo

$$\langle x, y \rangle_{\oplus} := \langle x_1, y_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} + \cdots$$

Por lo que cada $\mathcal{H}_n$ se puede pensar como un subconjunto de $\mathcal{H}$ con $\mathcal{H}_j \perp \mathcal{H}_k$ para toda $j \neq k$.

Definición 3.8. *Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \cdots$ y $\mathcal{H}$ como en la definición anterior. Si para cada $n = 1, 2, \cdots$, T_n es un operador en $\mathcal{H}_n$, se define el operador $\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots$ en $\mathcal{H}$ como*

$$(\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots)(x_1, x_2, \cdots) = (\mathrm{T}_1 x_1, \mathrm{T}_2 x_2, \cdots)$$

Lema 3.9. *Sea $(\mathrm{T}_n)_{n=1,2,\cdots}$ una sucesión (finita o infinita) de operadores donde $\mathrm{T}_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ con $\mathcal{H}_n$ un espacio de Hilbert separable y $\sup_{n=1,2,\cdots} \|\mathrm{T}_n\| < \infty$. Si $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \cdots$ son todos operadores diagonalizables, entonces la suma directa $\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots$ es diagonalizable en $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots$*

Demostración:
Por hipótesis, para cada $n = 1, 2, \cdots$, existe un espacio (Ω_n, μ_n) con medida σ-finita, una función $f_n \in L^\infty(\Omega_n, \mu_n)$ y un operador unitario $\mathrm{U_n} : L^2(\Omega_n, \mu_n) \to \mathcal{H}_n$ tal que

$$\mathrm{U}_n \mathrm{M}_{f_n} = \mathrm{T}_n \mathrm{U}_n, \ \ n = 1, 2, \cdots .$$

Como cada U_n es unitario, entonces $\|\mathrm{U}_n\| = \|\mathrm{U}_n^*\| = 1$, así para cada $n = 1, 2, \cdots$, si $x \in \mathcal{H}_n$

$$\|\mathrm{T}_n x\|_{\mathcal{H}_n} = \|(\mathrm{U}_n \mathrm{M}_{f_n} \mathrm{U}_n^*) x\|_{\mathcal{H}_n} \leq \|\mathrm{U}_n \mathrm{M}_{f_n}\| \|\mathrm{U}_n^* x\|_{L^2} \leq \|\mathrm{M}_{f_n}\| \|x\|_{\mathcal{H}_n}$$

es decir que $\|\mathrm{T}_n\| \leq \|\mathrm{M}_f\|$, y por otro lado si $g \in L^2(\Omega_n, \mu_n)$

$$\|\mathrm{M}_{f_n} g\|_{L^2} = \|(\mathrm{U}_n^* \mathrm{T}_n \mathrm{U}_n) g\|_{L^2} \leq \|\mathrm{U}_n^* \mathrm{T}_n\| \|\mathrm{U}_n g\|_{\mathcal{H}_n} \leq \|\mathrm{T}_n\| \|g\|_{L^2}$$

así que en realidad $\|\mathrm{T}_n\| = \|\mathrm{M}_{f_n}\|$ para toda $n = 1, 2, \cdots$. Pero, del Teorema 3.5 se sigue que $\|f_n\|_{L^\infty} = \|\mathrm{M}_{f_n}\|$ y entonces

$$\sup_{n=1,2,\cdots} \|f_n\|_{L^\infty} = \sup_{n=1,2,\cdots} \|\mathrm{M}_{f_n}\| = \sup_{n=1,2,\cdots} \|\mathrm{T}_n\| < \infty. \tag{3.1}$$

Para encontrar el espacio de medida, definamos al espacio Ω como

$$\Omega := \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \cdots ,$$

donde $\Omega_j \sqcup \Omega_k$ se entiende como la unión disjunta obtenida como se describe a continuación, indexando los elementos de cada Ω_j como $\Omega_j = \{w_\gamma(j)\}_{\gamma \in I_j}$, para que cuando un elemento $w \in \Omega_j \cap \Omega_k$ con $j \neq k$, entonces el mismo elemento w debe de estar representado por $w_\gamma(j)$ para alguna $\gamma \in I_j$ y por $w_\delta(k)$ para alguna $\delta \in I_k$, consideramos ambas representaciones como distintas para que así en efecto $\Omega_j \sqcap \Omega_k = \emptyset$ para toda $j \neq k$ (se puede pensar que los elementos en Ω se repiten según multiplicidades, i.e. según cuantas veces aparezcan en cada Ω_j). Dotando a Ω con una σ-álgebra que contenga todos los subconjuntos de Ω de la forma $E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup \cdots$, con cada E_n un subconjunto medible en Ω_n, podemos definir una medida μ en Ω como sigue

$$\mu(E) := \mu_1(E_1) + \mu_2(E_2) + \cdots$$

Claramente μ es σ-finita ya que cada una de las medidas μ_n lo son. Ahora viene la parte más técnica de este Lema que consiste en "identificar" el espacio $L^2(\Omega, \mu)$ con el definido por la suma directa $\bigoplus_n L^2(\Omega_n, \mu_n) := L^2(\Omega_1, \mu_1) \oplus L^2(\Omega_2, \mu_2) \oplus \cdots$. Para ello, definamos el operador $\mathrm{V} : \bigoplus_n L^2(\Omega_n, \mu_n) \to L^2(\Omega, \mu)$ como sigue: si $h := (h_1, h_2, \cdots) \in \bigoplus_n L^2(\Omega_n, \mu_n)$ y $w \in \Omega$, entonces existe una única j tal que $w \in \Omega_j$, por lo que ponemos $(\mathrm{V}h)(w) := h_j(w)$. Notemos que V es un operador lineal y además es una isometría ya que

$$\|\mathrm{V}h\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |\mathrm{V}h|^2 \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1,2,\cdots} \int_{\Omega_n} |h_n|^2 \mathrm{d}\mu_n = \sum_{n=1,2,\cdots} \|h_n\|_{L^2}^2 = \|h\|_\oplus^2.$$

Más aún, V es suprayectivo, ya que para cualquier $g \in L^2(\Omega, \mu)$, para cada n definimos $h_n := g \restriction_{\Omega_n}$ y $h := (h_1, h_2, \cdots)$, entonces $\mathrm{V}h = g$ y $h \in \bigoplus_n L^2(\Omega_n, \mu_n)$, puesto que

$$\sum_{j=1,2\cdots} \|h_j\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1,2\cdots} \int_{\Omega_j} |h_j|^2 \mathrm{d}\mu_j = \sum_{j=1,2\cdots} \int |h_j|^2 \chi_{\Omega_j} \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g|^2 \mathrm{d}\mu = \|g\|_{L^2}^2$$

donde la penúltima igualdad se sigue del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue A.13, pues $\sum_{j=1}^m |h_j|^2 \chi_{\Omega_j} \nearrow |g|^2$ cuando $m \to \infty$. Es decir que V es una isometría suprayectiva y por lo tanto es un operador unitario y el adjunto $\mathrm{V}^* : L^2(\Omega, \mu) \to \bigoplus_n L^2(\Omega_n, \mu_n)$ es tal que $\mathrm{V}^* = \mathrm{V}^{-1}$. Luego, si definimos el operador $\mathrm{U} : L^2(\Omega, \mu) \to \bigoplus_n \mathcal{H}_n$ como

$$\mathrm{U} := (\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots)\mathrm{V}^*,$$

entonces U es unitario. Finalmente definamos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ como $f(w) := f_n(w)$ si $w \in \Omega_n$, gracias a (3.1) tenemos que $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Sea $g \in L^2(\Omega, \mu)$, por suprayectividad existen $h_n \in L^2(\Omega_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, tal que $\mathrm{V}^* g = (h_1, h_2, \cdots) \in \bigoplus_n L^2(\Omega_n, \mu_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{UM}_f g &= (\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots)\mathrm{V}^*(fg) \\
&= (\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots)(f_1 h_1, f_2 h_2, \cdots) \\
&= (\mathrm{U}_1 \mathrm{M}_{f_1} h_1, \mathrm{U}_2 \mathrm{M}_{f_2} h_2, \cdots) \\
&= (\mathrm{T}_1 \mathrm{U}_1 h_1, \mathrm{T}_2 \mathrm{U}_2 h_2, \cdots) \\
&= (\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots)(\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots)(h_1, h_2, \cdots) \\
&= (\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots)(\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \cdots)\mathrm{V}^* g = (\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots)\mathrm{U}g,
\end{aligned}$$

es decir que en efecto el operador $\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots$ es diagonalizable en $\bigoplus_n \mathcal{H}_n$. ■

Finalizamos la sección con el Primer Teorema Espectral, es precisamente en el paso clave de la demostración donde se usa el cálculo funcional continuo.

Teorema 3.10. *(Primer Teorema Espectral) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal, entonces T es diagonalizable.*

Demostración:
Pongamos $\mathcal{A} := C^*(\{\mathrm{I}, \mathrm{T}\})$ .La demostración será en tres pasos:
Paso 1: Veamos que $\mathcal{H}$ se puede descomponer en la suma directa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots$ (finita o infinita) tal que para cada $n = 1, 2, \cdots$ existe un vector $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ tal que

$$\overline{\mathcal{A}\xi_n} := \overline{\{\mathrm{A}\xi_n : \mathrm{A} \in \mathcal{A}\}} = \mathcal{H}_n.$$

Para ello, como $\mathcal{H}$ es separable podemos encontrar un subespacio $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ denso en $\mathcal{H}$. Sea $\xi_1 := u_1$ y $\mathcal{H}_1 := \overline{\mathcal{A}\xi_1}$. Ahora tomemos el primer natural $n_2 > 1$ tal que $u_{n_2} \notin \mathcal{H}_1$, sabemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}$, por lo tanto existen únicos $v_1 \in \mathcal{H}_1$, $v_2 \in \mathcal{H}_1^{\perp}$ de tal forma que $u_{n_2} = v_1 + v_2$. Ponemos ahora $\xi_2 := v_2$ y $\mathcal{H}_2 := \overline{\mathcal{A}\xi_2}$. Observemos que si $\mathrm{A}_1\xi_1 \in \mathcal{A}\xi_1$ y $\mathrm{A}_2\xi_2 \in \mathcal{A}\xi_2$, claramente $\mathrm{A}_2^*\mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $\mathrm{A}_2^*\mathrm{A}_1\xi_1 \in \mathcal{H}_1$, entonces

$$\langle \mathrm{A}\xi_1, \mathrm{A}_2\xi_2 \rangle = \langle \mathrm{A}_2^*\mathrm{A}_1\xi_1, \xi_2 \rangle = 0$$

pues $\xi_2 := v_2 \in \mathcal{H}_1^{\perp}$, demostrando así que $\mathcal{A}\xi_1 \perp \mathcal{A}\xi_2$, lo que implica que $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$. De nuevo tomamos el primer natural $n_3 > n_2$ tal que $u_{n_3} \notin \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, luego definimos a ξ_3 como la parte ortogonal de u_{n_3} a $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y ponemos $\mathcal{H}_3 := \overline{\mathcal{A}\xi_3}$. Continuando de esta manera, gracias a que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso, encontramos un conjunto de indices $\mathbb{J} := \{1, 2, \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ (puede que $\mathbb{J}$ sea finito, ya que es posible el caso en que ya no existe un $n_j > n_{j-1}$ tal que $u_{n_j} \notin \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{j-1}$), vectores $\{\xi_n : n \in \mathbb{J}\}$ y de tal manera que el conjunto de subespacios $\{\mathcal{H}_n = \overline{\mathcal{A}\xi_n} : n \in \mathbb{J}\}$ es tal que $\mathcal{H}_j \perp \mathcal{H}_k$ para $k \neq j$ y que en efecto $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_n$.

Paso 2: Definamos T_n como la restricción del operador T al espacio $\mathcal{H}_n$, es decir que el operador T se descompone en la suma directa $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots$ actuando sobre $\bigoplus_{n \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_n$. Claramente como T es normal, cada T_n es normal. En este paso demostraremos que cada T_n es un operador diagonalizable en $\mathcal{H}_n$. Fijemos cualquier $n \in \mathbb{J}$ y pongamos $\Omega_n := \sigma(\mathrm{T}_n)$ y usando el cálculo funcional continuo del Teorema 2.37 y el vector ξ_n del *Paso 1*, definimos el funcional $\varphi_n : \mathcal{C}(\Omega_n) \to \mathbb{C}$ como $\varphi_n(f) := \langle f(\mathrm{T}_n)\xi_n, \xi_n \rangle$. Debido a que para cualquier $f \in \mathcal{C}(\Omega_n)$

$$\varphi_n(|f|^2) = \varphi_n(\overline{f}f) = \langle f(\mathrm{T}_n)^* f(\mathrm{T}_n)\xi_n, \xi_n \rangle = \langle f(\mathrm{T}_n)\xi_n, f(\mathrm{T}_n)\xi_n \rangle = \|f(\mathrm{T}_n)\xi_n\|^2 \geq 0,$$

se tiene que φ_n es un funcional positivo; como Ω_n es un compacto de $\mathbb{C}$, claramente $\mathcal{C}_c(\Omega_n) = \mathcal{C}(\Omega_n)$ y así por el Teorema de Representación de Riesz-Markov C.7 existe una medida de Borel regular y positiva μ_n en Ω_n tal que

$$\varphi_n(f) = \langle f(\mathrm{T}_n)\xi_n, \xi_n \rangle = \int_{\Omega_n} f \, \mathrm{d}\mu_n,$$

más aún el espacio (Ω_n, μ_n) es de medida finita ya que Ω_n es compacto. Si tomamos $f, g \in \mathcal{C}(\Omega_n) \subset L^2(\Omega_n, \mu_n)$ entonces

$$\langle f(\mathrm{T}_n)\xi_n, g(\mathrm{T}_n)\xi_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \langle g(\mathrm{T}_n)^* f(\mathrm{T}_n)\xi_n, \xi_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \varphi_n(\overline{g}f) = \int_{\Omega_n} \overline{g}f \, \mathrm{d}\mu_n = \langle f, g\rangle_{L^2_n},$$

es decir que $\|f(\mathrm{T}_n)\xi_n\|_{\mathcal{H}_n} = \|f\|_{L^2_n}$, por lo que el operador U_n definido por $\mathrm{U}_n f := f(\mathrm{T}_n)\xi_n$, para $f \in \mathcal{C}(\Omega_n)$, es una isometría de $\mathcal{C}(\Omega_n)$ sobre $\{f(\mathrm{T}_n)\xi_n : f \in \mathcal{C}(\Omega_n)\}$ y es por lo tanto un operador unitario. Si $\mathcal{A}_n = \mathrm{C}^*(\{\mathrm{I}, \mathrm{T}_n\})$, gracias al isomorfismo del Teorema 2.37 tenemos que

$$\{f(\mathrm{T}_n)\xi_n : f \in \mathcal{C}(\Omega_n)\} = \{\mathrm{A}\xi_n : \mathrm{A} \in \mathcal{A}_n\} = \mathcal{A}_n\xi_n,$$

y además se sabe que $\mathcal{C}(\Omega_n)$ un subespacio denso de $L^2(\Omega_n, \mu_n)$ con respecto a la norma de este último. Entonces por densidad, el operador $\mathrm{U}_n : \mathcal{C}(\Omega_n) \to \mathcal{A}_n\xi_n$ se extiende a todo $\overline{\mathcal{C}(\Omega_n)} = L^2(\Omega_n, \mu_n)$ y toma valores sobre $\overline{\mathcal{A}_n\xi_n} = \overline{\mathcal{A}\xi_n} = \mathcal{H}_n$ (como $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ entonces $\mathcal{A}_n\xi_n = \mathcal{A}\xi_n$) y así $\mathrm{U}_n : L^2(\Omega_n, \mu_n) \to \mathcal{H}_n$ define un operador unitario. Para cualquier $f \in \mathcal{C}(\Omega_n)$ y cualquier $g \in L^2(\Omega_n, \mu_n)$, por densidad existe $(g_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\Omega_n)$ tal que $g_k \to g$ en $L^2(\Omega_n, \mu_n)$, así como para cada k

$$\mathrm{U}_n\mathrm{M}_f g_k = \mathrm{U}_n(f g_k) = f(\mathrm{T}_n)g_k(\mathrm{T}_n)\xi_n = f(\mathrm{T}_n)\mathrm{U}_n g_k,$$

se sigue por densidad que $\mathrm{U}_n\mathrm{M}_f g = f(\mathrm{T}_n)\mathrm{U}_n g$ y por lo tanto que $\mathrm{U}_n\mathrm{M}_f = f(\mathrm{T}_n)\mathrm{U}_n$ para cualquier $f \in \mathcal{C}(\Omega_n)$. En particular para $f := \imath_n : \sigma(\mathrm{T}_n) \hookrightarrow \mathbb{C}$, dada como $\imath_n(\lambda) = \lambda$, tenemos que

$$\mathrm{U}_n\mathrm{M}_{\imath_n} = \mathrm{T}_n\mathrm{U}_n.$$

Como trivialmente $\imath_n \in L^\infty(\Omega_n, \mu_n)$, la ecuación anterior nos dice que cada operador T_n es diagonalizable en $\mathcal{H}_n$.

Paso 3: Finalmente, como $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots$ entonces $\sup_{n=1,2,\cdots} \|\mathrm{T}_n\| < \infty$. Luego, como gracias al paso anterior se tiene cada operador T_n es diagonalizable en $\mathcal{H}_n$, el Lema 3.9 asegura que T es diagonalizable en $\mathcal{H}$. ■

Observación 3.11. El Primer Teorema espectral afirma que si $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal, entonces existe un espacio de medida (Ω, μ), una función $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ y un operador unitario $\mathrm{U} : L^2(\Omega, \mu) \to \mathcal{H}$, tal que

$$\mathrm{U}\mathrm{M}_f = \mathrm{T}\mathrm{U}.$$

Es importante notar que la función f no tiene por que ser la identidad. De hecho, siguiendo las ideas y notaciones de la demostración anterior y de la del Lema 3.9, vemos que cuando $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_2 \oplus \cdots$ entonces Ω es la unión "disjunta" de los espectros $\sigma(\mathrm{T}_n)$, es decir que Ω se piensa como $|\mathbb{J}|$ "copias" de $\mathbb{C}$, por lo que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ no puede ser la identidad, pues Ω no es un subconjunto de $\mathbb{C}$. Aun así f está muy relacionada con la identidad, pues si $w \in \Omega$ entonces existe una única $j \in \mathbb{J}$ tal que w está representada por $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}_j)$ y f está dada por $f(w) = \imath_j(\lambda) = \lambda$.

Más aún tanto el primer ejemplo de la sección como el siguiente muestran que un operador se puede diagonalizar de manera directa, es decir sin hacer uso del procedimiento descrito en la prueba anterior, mostrando así que la descomposición $\mathrm{UM}_f = \mathrm{TU}$ no es única.

Ejemplo:
Veamos que el operador $\mathrm{T} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ dado por

$$\mathrm{T}x := (x_{n-1} + x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{para} \quad x := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

es diagonalizable. Para ello consideremos $\partial\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ y el espacio con medida $(\partial\mathbb{D}, \mathfrak{B}(\partial\mathbb{D}), \mu)$ donde μ es la medida de Lebesgue normalizada en $\partial\mathbb{D} \simeq [0, 2\pi]$, es decir $\mathrm{d}\mu := \mathrm{d}\theta/2\pi$ para que así

$$\mu(\partial\mathbb{D}) = \int_{\partial\mathbb{D}} 1\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\theta = 1.$$

Así $(\partial\mathbb{D}, \mu)$ es un espacio de medida finita. Consideremos $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ la base ortonormal de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mu)$, donde para cada $n \in \mathbb{Z}$ la función u_n está dada por

$$u_n(e^{i\theta}) := e^{in\theta}.$$

Definamos $\mathrm{U} : L^2(\partial\mathbb{D}, \mu) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ como

$$\mathrm{U}g = \left(\int_{\partial\mathbb{D}} g\overline{u_n}\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

entonces el adjunto $\mathrm{U}^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\partial\mathbb{D}, \mu)$ es tal que para cualquier $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$(\mathrm{U}^*x)(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n u_n(e^{i\theta})$$

De manera análoga al primer ejemplo de la sección se verifica que $\mathrm{UU}^*x = x$ y también que $\mathrm{U}^*\mathrm{U}g = g$ por lo que U define un operador unitario. Consideremos ahora la función $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ dada como $f(e^{i\theta}) = 2\cos(\theta)$, como $|f| \leq 2$ entonces $f \in L^\infty(\partial\mathbb{D}, \mu)$. Para cualquier $g \in L^2(\partial\mathbb{D}, \mu)$ tenemos que, como $f = u_1 + u_{-1}$, entonces

$$\mathrm{UM}_f g = \mathrm{U}(u_1 g + u_{-1} g) = \left(\int_{\partial\mathbb{D}} (u_1 g + u_{-1} g)\overline{u_n}\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

y por otro lado

$$\mathrm{TU}g = \mathrm{T}\left(\int_{\partial\mathbb{D}} g\overline{u_n}\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\int_{\partial\mathbb{D}} g\overline{u_{n-1}}\mathrm{d}\mu + \int_{\partial\mathbb{D}} g\overline{u_{n+1}}\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

pero como $\overline{u_{n-1}} = u_1\overline{u_n}$ y $\overline{u_{n+1}} = u_{-1}\overline{u_n}$ concluimos que $\mathrm{UM}_f g = \mathrm{TU}g$ y por lo tanto que $\mathrm{UM}_f = \mathrm{TU}$, es decir que en efecto T es diagonalizable. ♦

Observación 3.12. Si sabemos que T es diagonalizable (i.e. equivalente a M_f con $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$), entonces es fácil encontrar el espectro de T, pues $\sigma(\mathrm{T}) = \sigma(\mathrm{UM}_f\mathrm{U}^*) = \sigma(\mathrm{M}_f) = \overline{f(\Omega)}$. En el primer ejemplo claramente $\overline{f(\mathbb{N})} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. En el segundo ejemplo, como $\overline{f(\partial\mathbb{D})} = [-2, 2]$, concluimos que $\sigma(\mathrm{T}) = [-2, 2]$.

3.2. Medidas Espectrales y Segundo Teorema Espectral

En esta sección abarcamos la forma más usual del Teorema Espectral, la cual llamamos el Segundo Teorema Espectral. Consiste en expresar $f(\mathrm{T})$, para $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, como una integral con respecto a una medida espectral, lo cual definiremos con detalle a continuación. Una ventaja es que dicha fórmula integral es válida no sólo para $f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T}))$, si no que también para las funciones medibles y acotadas en $\sigma(\mathrm{T})$ con respecto a la σ-álgebra $\mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{T}))$, es decir para una clase de funciones más grande. Así, en cierto sentido, el Segundo Teorema Espectral extiende el cálculo funcional continuo dado en el capítulo anterior. Comencemos entonces por presentar todo los preliminares necesarios para culminar con la demostración y aplicaciones de la segunda versión del Teorema Espectral.

Notación 3.13. Un operador $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es **positivo** si para toda $x \in \mathcal{H}$ se cumple que $\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0$ y se denota por $\mathrm{T} \geq 0$. Por supuesto escribimos $\mathrm{T} \leq \mathrm{L}$ siempre que $\mathrm{L} - \mathrm{T} \geq 0$.

Definición 3.14. *Un operador $\mathrm{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es llamado **proyección** si es autoadjunto e idempotente, i.e.* $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P} = \mathrm{P}^*$.

Definición 3.15. *Sea Ω un espacio compacto de Haussdorff, $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\Omega)$ los borelianos de Ω y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una **medida espectral** en $(\Omega, \mathcal{H})$ es una función $\mathcal{P} : \mathfrak{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que*

i) El operador $\mathcal{P}(E)$ es una proyección para toda $E \in \mathfrak{B}$;

ii) $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$, $\mathcal{P}(\Omega) = \mathrm{I}$;

iii) Si $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B}$ es una sucesión disjunta de conjuntos, entonces

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_n)$$

iv) Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}$ las funciones $\mathcal{P}_{x,y} : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\mathcal{P}_{x,y}(E) := \langle \mathcal{P}(E)x, y\rangle$$

son medidas complejo valuadas y regulares en $(\Omega, \mathfrak{B})$.

Verifiquemos las propiedades que debe cumplir una medida espectral.

Proposición 3.16. *Sea $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$.*

(1) Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F)$.

(2) Si $E, F \in \mathfrak{B}$ son tales que $E \cap F = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(E) \perp \mathcal{P}(F)$.

(3) Para todos $E, F \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E)\mathcal{P}(F)$

Demostración:
(1) Para toda $x \in \mathcal{H}$, como $\mathcal{P}(F \setminus E)$ es una proyección, tenemos

$$\langle \mathcal{P}(F \setminus E)x, x\rangle = \langle \mathcal{P}(F \setminus E)^2 x, x\rangle = \langle \mathcal{P}(F \setminus E)x, \mathcal{P}(F \setminus E)^* x\rangle = \|\mathcal{P}(F \setminus E)x\|^2 \geq 0,$$

es decir que $\mathcal{P}(F \setminus E) \geq 0$. Pero, como $E \subset F$, entonces $F = E \cup (F \setminus E)$ es una unión disjunta y así por *iii)* de la definición anterior se tiene que $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E) + \mathcal{P}(F \setminus E)$ y por lo tanto que en efecto $\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F)$.

(2) Claramente $\Omega = E \cup (\Omega \setminus E)$, por lo que $\mathrm{I} = \mathcal{P}(E) + \mathcal{P}(\Omega \setminus E)$, además $F \subset (\Omega \setminus E)$, así que por *(1)*, $\mathcal{P}(F) \leq \mathcal{P}(\Omega \setminus E) = \mathrm{I} - \mathcal{P}(E)$, por lo que para cualquier $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(F)\mathcal{P}(E)x\|^2 &= \langle \mathcal{P}(F)\mathcal{P}(E)x, \mathcal{P}(F)\mathcal{P}(E)x\rangle \\ &= \langle \mathcal{P}(F)\mathcal{P}(E)x, \mathcal{P}(E)x\rangle \\ &\leq \langle (\mathrm{I} - \mathcal{P}(E))\mathcal{P}(E)x, \mathcal{P}(E)x\rangle = 0, \end{aligned}$$

que implica que $\mathcal{P}(E)\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F)\mathcal{P}(E) = 0$, es decir que $\mathcal{P}(E) \perp \mathcal{P}(F)$.

(3) Claramente $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \setminus F)$ y $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(F \setminus E)$, por lo que

$$\mathcal{P}(E)\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \cap F)\mathcal{P}(F \setminus E) + \mathcal{P}(E \setminus F)\mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \setminus F)\mathcal{P}(F \setminus E).$$

Pero, como $(E \cap F) \cap (F \setminus E) = (E \setminus F) \cap (E \cap F) = (E \setminus F) \cap (F \setminus E) = \emptyset$, entonces por *(2)* tenemos que $\mathcal{P}(E \cap F)\mathcal{P}(F \setminus E) = \mathcal{P}(E \setminus F)\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E \setminus F)\mathcal{P}(F \setminus E) = 0$ y así en efecto $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E)\mathcal{P}(F)$. ■

Observación 3.17. La serie en *iii)* de la definición de medida espectral se interpreta como el límite puntual de las sumas parciales. Notemos que gracias a *(2)* de la proposición anterior las proyecciones $\mathcal{P}(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, son mutuamente ortogonales, por lo tanto el límite puntual de las sumas parciales existe y es una proyección.

Notación 3.18. Denotamos por $M(\Omega)$ al espacio de Banach de todas las medidas complejo valuadas y regulares en $(\Omega, \mathfrak{B})$. La norma con la que equipamos a $M(\Omega)$ se define a través de la variación total de μ, que es una medida $|\mu|$ en $\mathfrak{B}$, dada por

$$|\mu|(E) := \sup \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de E, es decir sobre todos los $E_1, \cdots, E_n$ tales que $E_j \cap E_k = \emptyset$, siempre que $j \neq k$ y $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Así, para cada $\mu \in M(\Omega)$ su norma está definida como

$$\|\mu\| := |\mu|(\Omega) < \infty$$

Notación 3.19. Ponemos $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ como el álgebra C^* de todas las funciones complejo valuadas, medibles en $(\Omega, \mathfrak{B})$ y acotadas. Aquí la norma es la del supremo y la involución está dada por el conjugado complejo $f \mapsto \overline{f}$. Claramente si Ω es compacto $\mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{B}^\infty(\Omega)$.

Teniendo aclarada la notación, desarrollaremos ahora la teoría de integrales espectrales que nos permitirá, con el Segundo Teorema Espectral, extender el cálculo funcional continuo para funciones en $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$, dando lugar al *cálculo funcional de Borel.*

Lema 3.20. *Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Supongamos que para toda $x, y \in \mathcal{H}$, hay $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$, y que para cada $E \in \mathfrak{B}$ la función $\varphi_E : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi_E(x, y) := \mu_{x,y}(E)$ es un funcional bilineal. Entonces para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ la función $\varphi_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$\varphi_f(x, y) := \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y}$$

es un funcional bilineal.

Demostración:
Supongamos primero que s es una función simple, es decir que existen $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ y $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{B}$, disjuntos dos a dos, tal que

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k},$$

luego

$$\varphi_s(x, y) = \int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \sum_{k=1}^n c_k \int_\Omega \chi_{E_k} \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \sum_{k=1}^n c_k \, \mu_{x,y}(E_k) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_{E_k}(x, y),$$

por lo tanto en este caso, al ser φ_s combinación lineal de funcionales bilineales, entonces tiene que ser un funcional bilineal. Si ahora $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ es arbitraria, entonces existe una sucesión $(s_n)_{n=1}^\infty$ de funciones simples en $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ que tienden a f con la norma del supremo. Entonces, como para toda $x, y \in \mathcal{H}$

$$\left| \int_\Omega (f - s_n) \, \mathrm{d}\mu_{x,y} \right| \leq \int_\Omega |f - s_n| \, \mathrm{d}|\mu_{x,y}| \leq \|f - s_n\|_\infty \|\mu_{x,y}\|$$

se sigue que

$$\varphi_f(x, y) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{s_n}(x, y)$$

por lo tanto φ_f es un funcional bilineal, pues es límite de funcionales bilineales. ■

Proposición 3.21. *Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$, entonces para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ el funcional bilineal[1] $\varphi_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dado por*

$$\varphi_f(x, y) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}$$

es acotado y más aún $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty$.

[1]El hecho que sea un funcional bilineal se sigue del Lema anterior, pues $\mathcal{P}_{x,y}(E) := \langle \mathcal{P}(E)x, y\rangle$.

Demostración:
Sean $E_1, \cdots, E_n \in \mathfrak{B}$ tal que $E_j \cap E_k = \emptyset$, siempre que $j \neq k$ y $\Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_n$. Entonces para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se tiene, usando las propiedades de una medida espectral, que

$$\|x\|^2 = \|\mathcal{P}(\Omega)x\|^2 = \langle \mathcal{P}(\Omega)x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathcal{P}(E_k)x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|\mathcal{P}(E_k)x\|^2$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (primero para la norma en $\mathcal{H}$ y luego para la norma usual en $\mathbb{R}^n$) y finalmente la igualdad anterior, para cada $x, y \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\mathcal{P}_{x,y}(E_k)| &= \sum_{k=1}^{n} |\langle \mathcal{P}(E_k)x, y\rangle| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\langle \mathcal{P}(E_k)x, \mathcal{P}(E_k)y\rangle| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|\mathcal{P}(E_k)x\| \|\mathcal{P}(E_k)y\| \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|\mathcal{P}(E_k)x\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|\mathcal{P}(E_k)y\|^2\right)^{1/2} \\
&= \|x\| \|y\|,
\end{aligned}$$

por lo que tomando supremo sobre todas particiones de Ω se sigue que $\|\mathcal{P}_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$ para cualquier $x, y \in \mathcal{H}$. Por lo tanto,

$$\left|\varphi_f(x,y)\right| = \left|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}\right| \leq \|f\|_\infty \|\mathcal{P}_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \|x\| \|y\|$$

es decir que en efecto $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty$. ■

Teorema 3.22. *Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$. Entonces para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ existe un único $\mathrm{T}_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que para toda $x, y \in \mathcal{H}$*

$$\langle \mathrm{T}_f x, y\rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}$$

Demostración:
Por la proposición anterior el funcional bilineal φ_f es acotado, luego por el Teorema A.5, en efecto existe un único operador $\mathrm{T}_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\varphi_f(x,y) = \langle \mathrm{T}_f x, y\rangle$. ■

Observación 3.23. El operador T_f, cuya existencia asegura el Teorema anterior, se llama ***la integral espectral de f con respecto a $\mathcal{P}$*** y se denotará a partir de ahora por

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P} := \mathrm{T}_f.$$

Para cualquier $E \in \mathfrak{B}$, $\int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, ya que $\langle \mathcal{P}(E)x, y\rangle = \mathcal{P}_{x,y}(E) = \int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}$.

Teorema 3.24. *Sea Ω un espacio compacto de Hausdorff, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{P}$ una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$. Entonces la función $\theta : \mathcal{B}^\infty(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por*

$$\theta(f) := \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P},$$

es un homomorfismo-$*$.

Demostración:
Sean $f, g \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces, por el Teorema anterior, para cualquier $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle \theta(f+\alpha g)x, y\rangle = \int_\Omega (f+\alpha g) \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y} + \alpha \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y} = \langle \theta(f)x, y\rangle + \alpha \langle \theta(g)x, y\rangle$$

lo que implica que $\theta(f+\alpha g) = \theta(f) + \alpha\theta(g)$, es decir que θ es lineal. Además, para cualquier $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$, por el Teorema A.5 sabemos que $\|\mathrm{T}_f\| = \|\varphi_f\|$, así que junto con la Proposición 3.21 tenemos que

$$\|\theta(f)\| = \left\| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right\| = \|\mathrm{T}_f\| = \|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty.$$

También notemos que $\theta(1) = \mathcal{P}(\Omega) = \mathrm{I}$, por lo que θ también preserva la identidad. Por lo tanto, para ver que θ es un homomorfismo-$*$ resta sólo ver que $\theta(fg) = \theta(f)\theta(g)$ y que $\theta(\overline{f}) = (\theta(f))^*$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$. Sin embargo, como las funciones simples son densas en $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$, basta verificarlo para $f = \chi_E$ y $g = \chi_F$ con $E, F \in \mathfrak{B}$. En efecto

$$\begin{aligned}
\theta(fg) &= \int_\Omega \chi_E \chi_F \, \mathrm{d}\mathcal{P} \\
&= \int_\Omega \chi_{E\cap F} \, \mathrm{d}\mathcal{P} \\
&= \mathcal{P}(E \cap F) \\
&= \mathcal{P}(E)\mathcal{P}(F) \\
&= \left(\int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) \left(\int_\Omega \chi_F \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) = \theta(f)\theta(g)
\end{aligned}$$

y como $\overline{\chi_E} = \chi_E$, entonces

$$\theta(\overline{f}) = \int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E)^* = \left(\int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right)^* = \big(\theta(f)\big)^*$$

pues, las proyecciones son autoadjuntas. ■

El siguiente resultado es de vital importancia, pues el Segundo Teorema espectral se obtiene de inmediato como corolario. La prueba es algo larga pero sigue las ideas presentadas arriba. Esencialmente lo que nos dice es que cualquier homomorfismo-$*$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se ve como una integral espectral.

Teorema 3.25. *Sea* Ω *un espacio compacto de Hausdorff,* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Tomemos a* $\theta : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *cualquier homomorfismo-* $*$ *que cumpla que* $\theta(1) = \mathrm{I}$. *Entonces existe una única medida espectral* $\mathcal{P}$ *en* $(\Omega, \mathcal{H})$*, tal que para toda* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\theta(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}.$$

Más aún si $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*, entonces* $\mathrm{T}\theta(f) = \theta(f)\mathrm{T}$ *para toda* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ *si y sólo si* $\mathrm{T}\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E)\mathrm{T}$ *para toda* $E \in \mathfrak{B}$.

Demostración:
Notemos primero que como $\theta(1) = \mathrm{I}$ entonces para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\rho(f) \subset \rho(\theta(f))$, es decir que $\sigma(\theta(f)) \subset \sigma(f)$, que implica que $r(\theta(f)) \leq r(f)$. Recordando que en la demostración del Teorema 2.32, en el *Paso 2*, vimos que la norma de cualquier elemento autoadjunto coincide con su radio espectral, tenemos

$$\|\theta(f)\|^2 = \|\theta(f)\theta(f)^*\| = r\left(\theta(f)\theta(f)^*\right) = r(\theta(f\overline{f})) \leq r(f\overline{f}) = \|f\overline{f}\|_\infty = \|f\|_\infty^2$$

es decir que $\|\theta\| \leq 1$ y como $\theta(1) = \mathrm{I}$ en realidad $\|\theta\| = 1$. Para cada $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ definimos la función $\tau_{x,y} : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathbb{C}$ como

$$\tau_{x,y}(f) := \langle \theta(f)x, y \rangle.$$

Claramente $\tau_{x,y}$ es un funcional lineal y además

$$|\tau_{x,y}(f)| = |\langle \theta(f)x, y \rangle| \leq \|\theta(f)x\|\|y\| \leq \|\theta(f)\|\|x\|\|y\| \leq \|\theta\|\|f\|_\infty\|x\|\|y\| = \|f\|_\infty\|x\|\|y\|,$$

es decir que $\|\tau_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$ y por lo tanto que cada $\tau_{x,y}$ es un funcional acotado. Entonces por el Teorema C.9, para cada $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ existe una única medida $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$ tal que

$$\tau_{x,y}(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y}, \ \forall \, f \in \mathcal{C}(\Omega),$$

con $\|\mu_{x,y}\| = \|\tau_{x,y}\|$. Claramente $(x, y) \mapsto \langle \theta(f)x, y \rangle$ es un funcional bilineal, entonces por lo anterior, el funcional $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}$ también es bilineal. Por lo tanto para cada $E \in \mathfrak{B}$ se tiene que cada función $\varphi_E(x, y) := \mu_{x,y}(E)$ es un funcional bilineal. Por lo tanto por el Lema 3.20 se sigue que, para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ la función $\varphi_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definida como

$$\varphi_f(x, y) := \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y}$$

es un funcional bilineal. Más aún, como

$$|\varphi_f(x, y)| = \left| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty\|\mu_{x,y}\| = \|f\|_\infty\|\tau_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty\|x\|\|y\|,$$

entonces $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty$. Entonces, gracias al Teorema A.5, para cada $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ existe un operador, digamos $\Psi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que

$$\varphi_f(x, y) = \langle \Psi(f)x, y \rangle \ \forall \, x, y \in \mathcal{H}; \quad \text{con } \|\Psi(f)\| = \|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty.$$

Veamos que la asignación $\mathcal{B}^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \Psi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es un homomorfismo-$*$ que extiende a θ a todas las funciones en $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$.

• Para ello notemos en primer lugar, que Ψ coincide con θ en $\mathcal{C}(\Omega)$. Tomemos pues $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, entonces para toda $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \varphi_f(x,y) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \tau_{x,y}(f) = \langle \theta(f)x, y\rangle$$

por lo que en efecto $\Psi(f) = \theta(f)$ para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

• En segundo lugar, veamos que para toda $f \in \mathcal{B}^\infty$ se cumple que $\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^*$. Supongamos primero que f es real y continua en Ω, entonces $\theta(f) = \theta(\overline{f}) = \theta(f)^*$, así por el Teorema A.6 tenemos que

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,x} = \langle \theta(f)x, x\rangle \in \mathbb{R}$$

entonces para toda x tenemos que $\mu_{x,x}$ es una medida real valuada. Si ahora f es real pero pertenece a $\mathcal{B}^\infty$ entonces necesariamente

$$\langle \Psi(f)x, x\rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,x} \in \mathbb{R}$$

lo que implica, de nuevo por el Teorema A.6, que $\Psi(f)$ es un operador autoadjunto siempre que f sea real. Finalmente si $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ es arbitraria y u, v son su parte real e imaginaria respectivamente, entonces como $\Psi(u), \Psi(v)$ son autoadjuntos tenemos que en efecto Ψ preserva involuciones, ya que

$$\Psi(f)^* = \Psi(u+iv)^* = \big(\Psi(u) + i\Psi(v)\big)^* = \Psi(u) - i\Psi(v) = \Psi(u-iv) = \Psi(\overline{f}).$$

• En tercer lugar, probemos que $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$. Para ello basta verificar que para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se cumple que $\langle \Psi(fg)x, x\rangle = \langle \Psi(f)\Psi(g)x, x\rangle$ para toda $f, g \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$. Notemos que para toda $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ se satisface lo siguiente $\Psi(fg) = \Psi(gf) = \theta(gf) = \theta(g)\theta(f) = \Psi(g)\Psi(f)$, por lo que

$$\langle \Psi(fg)x, x\rangle = \langle \Psi(g)\Psi(f)x, x\rangle$$

lo que implica que para toda $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$,

$$\int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu_{x,x} = \langle \Psi(g)\Psi(f)x, x\rangle = \langle \Psi(f)x, \Psi(\overline{g})x\rangle = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(\overline{g})x}$$

así que fijando $g_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$, tenemos que para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\int_\Omega f g_0 \, \mathrm{d}\mu_{x,x} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(\overline{g_0})x}$$

y por lo tanto que las medidas regulares $g_0 \mathrm{d}\mu_{x,x}$ y $\mathrm{d}\mu_{x,\Psi(\overline{g_0})x}$ son iguales para cualquier $g_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$. Entonces para $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ se cumple que

$$\langle \Psi(fg)x, x\rangle = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu_{x,x} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(\overline{g})x} = \langle \Psi(f)x, \Psi(\overline{g})x\rangle = \langle \Psi(g)\Psi(f)x, x\rangle$$

es decir que para toda $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ se tiene que $\langle \Psi(fg)x, x\rangle = \langle \Psi(g)\Psi(f)x, x\rangle$, poniendo conjugados también se tiene que $\langle \Psi(\overline{fg})x, x\rangle = \langle \Psi(\overline{g})\Psi(\overline{f})x, x\rangle$, o bien

$$\langle \Psi(fg)x, x\rangle = \overline{\langle \Psi(\overline{fg})x, x\rangle} = \overline{\langle \Psi(\overline{g})\Psi(\overline{f})x, x\rangle} = \langle \Psi(f)\Psi(g)x, x\rangle$$

para toda $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{C}(\Omega)$. Fijando ahora $f_0 \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ lo anterior es equivalente a decir que

$$\int_\Omega g f_0 \, \mathrm{d}\mu_{x,x} = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(\overline{f_0})x}$$

se satisface para toda $g \in \mathcal{C}(\Omega)$, lo que implica que las medidas regulares $f_0 \mathrm{d}\mu_{x,x}$ y $\mu_{x,\Psi(\overline{f_0})x}$ son iguales para cualquier $f_0 \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ se cumple que

$$\langle \Psi(fg)x, x\rangle = \int_\Omega gf \mathrm{d}\mu_{x,x} = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(\overline{f})x} = \langle \Psi(f)\Psi(g)x, x\rangle$$

como queríamos verificar.

• Por ultimo, por construcción de Ψ es claro que $\Psi(f + \alpha g) = \Psi(f) + \alpha\Psi(g)$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ y toda $\alpha \in \mathbb{C}$. Junto con los puntos anteriores tenemos que en efecto $\Psi : \mathcal{B}^\infty(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es un homomorfismo-$*$ que extiende a θ.

Definamos ahora la función $\mathcal{P} : \mathfrak{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como

$$\mathcal{P}(E) := \Psi(\chi_E); \;\; E \in \mathfrak{B}.$$

Como $\mathcal{P}(E)^* = \Psi(\chi_E)^* = \Psi(\overline{\chi_E}) = \Psi(\chi_E) = \mathcal{P}(E)$, tenemos que $\mathcal{P}(E)$ es autoadjunto y como también $\mathcal{P}(E)^2 = \Psi(\chi_E)\Psi(\chi_E) = \Psi(\chi_E \chi_E) = \Psi(\chi_E) = \mathcal{P}(E)$, entonces $\mathcal{P}(E)$ es una proyección. Más aún, $\mathcal{P}(\emptyset) = \Psi(0) = 0$ y $\mathcal{P}(\Omega) = \Psi(1) = \theta(1) = \mathrm{I}$. Si $(E_n)_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{B}$ es una sucesión disjunta de conjuntos, entonces

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \Psi\left(\chi_{\cup_{n=1}^\infty E_n}\right) = \Psi\left(\sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}\right) = \sum_{n=1}^\infty \Psi(\chi_{E_n}) = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{P}(E_n)$$

Además $\mathcal{P}_{x,y}(E) = \langle \Psi(\chi_E)x, y\rangle = \int_\Omega \chi_E \mathrm{d}\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(E)$, entonces $\mathcal{P}_{x,y} = \mu_{x,y} \in M(\Omega)$. Todo lo anterior implica que $\mathcal{P}$ es una medida espectral en $(\Omega, \mathcal{H})$. Si $E \in \mathfrak{B}$ entonces para toda $x, y \in \mathcal{H}$

$$\left\langle \left(\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}\right) x, y \right\rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle \Psi(f)x, y\rangle \, .$$

Por lo que $\Psi(f) = \int_\Omega f \, d\mathcal{P}$ para toda $f \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$. En particular si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, entonces en efecto se tiene que

$$\theta(f) = \int_\Omega f \, d\mathcal{P}.$$

Para ver la unicidad de la medida espectral $\mathcal{P}$ supongamos que existe otra medida espectral $\mathcal{P}'$ en $(\Omega, \mathcal{H})$ tal que $\theta(f) = \int_\Omega f \, d\mathcal{P}'$ para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Entonces para todas $x, y \in \mathcal{H}$

$$\int_\Omega f \, d\mathcal{P}_{x,y} = \langle \theta(f)x, y \rangle = \int_\Omega f \, d\mathcal{P}'_{x,y}$$

entonces las medidas regulares $\mathcal{P}_{x,y}$ y $\mathcal{P}'_{x,y}$ son iguales y por lo tanto para toda $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\langle \mathcal{P}(E)x, y \rangle = \langle \mathcal{P}'(E)x, y \rangle,$$

lo que claramente implica que $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

Finalmente, existe un $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\mathrm{T}\theta(f) = \theta(f)\mathrm{T}$ para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, si y sólo si

$$\int_\Omega f \, d\mathcal{P}_{\mathrm{T}x,y} = \langle \theta(f)\mathrm{T}x, y \rangle = \langle \mathrm{T}\theta(f)x, y \rangle = \langle \theta(f)x, \mathrm{T}^*y \rangle = \int_\Omega f \, d\mathcal{P}_{x,\mathrm{T}^*y}$$

se cumple para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, es decir si y sólo si $\mathcal{P}_{\mathrm{T}x,y} = \mathcal{P}_{x,\mathrm{T}^*y}$ y por lo tanto si y sólo si para todo $E \in \mathfrak{B}$

$$\langle \mathcal{P}(E)\mathrm{T}x, y \rangle = \langle \mathcal{P}(E)x, \mathrm{T}^*y \rangle = \langle \mathrm{T}\mathcal{P}(E)x, y \rangle$$

es decir, si y sólo si $\mathcal{P}(E)\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathcal{P}(E)$ para todo $E \in \mathfrak{B}$. ■

Como caso especial del Teorema anterior tenemos el segundo Teorema Espectral

Teorema 3.26. *(Segundo Teorema Espectral) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y T un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe una única medida espectral $\mathcal{P}$ en $(\sigma(\mathrm{T}), \mathcal{H})$, tal que*

$$\mathrm{T} = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, d\mathcal{P}$$

donde $\imath : \sigma(\mathrm{T}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión dada por $\imath(\lambda) := \lambda$.

Demostración:
Sea $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T})) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es cálculo funcional continuo de T dado por el Teorema 2.37. Sabemos que Φ es un homomorfismo-$*$, así que por el Teorema anterior existe una única medida medida espectral $\mathcal{P}$ en $(\sigma(\mathrm{T}), \mathcal{H})$ tal que para toda $f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T}))$

$$\Phi(f) = \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, d\mathcal{P}$$

en particular si $f = \imath$ entonces $\Phi(\imath) = \imath(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$, así que en efecto

$$\mathrm{T} = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, d\mathcal{P}.$$

Si ademas $\mathcal{P}'$ es otra medida espectral en $(\sigma(\mathrm{T}), \mathcal{H})$ que cumple el Teorema, entonces

$$\int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \mathrm{T} = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P}' \quad \text{y} \quad \int_{\sigma(\mathrm{T})} \bar{\imath} \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \mathrm{T}^* = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \bar{\imath} \, \mathrm{d}\mathcal{P}'$$

Como $\imath(\lambda) = \lambda$ y $\bar{\imath}(\lambda) = \overline{\lambda}$, lo anterior implica que

$$\int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}'$$

para toda $f \in \mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]$ con $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$ y entonces también para toda $f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{T})) = \overline{\mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]}$, por lo que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$. ■

Observación 3.27. A la medida espectral $\mathcal{P}$ del Teorema anterior se le conoce como la ***resolución de la identidad*** del operador normal T. Además, gracias a lo ya visto podemos definir $f(\mathrm{T})$ como

$$f(\mathrm{T}) := \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P}$$

para toda $f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$, extendiendo así el cálculo funcional continuo a todo $\mathcal{B}^\infty(\Omega)$. El homomorfismo-$*$, $f \mapsto f(\mathrm{T})$ de $\mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$ a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es llamado ***el cálculo funcional boreliano o medible*** del operador T. Es importante notar que no sabemos si el cálculo funcional boreliano es una isometría, sin embargo si sabemos que para cualquier $f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$

$$\|f(\mathrm{T})\| = \left\| \int_{\sigma(\mathrm{T})} f \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right\| \leq \|f\|_\infty.$$

La desigualdad anterior una de las propiedades deseables para la consistencia de un cálculo funcional vistas en el primer capítulo.

Contrario al Teorema 2.42, el cálculo funcional boreliano no tiene la propiedad del mapeo espectral, sin embargo una contención si se cumple

Teorema 3.28. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert,* T *un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y $f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$, entonces*

$$\sigma(f(\mathrm{T})) \subset f(\sigma(\mathrm{T}))$$

Demostración:
Sea $\lambda_0 \in \sigma(f(\mathrm{T}))$, entonces el operador $f(\mathrm{T}) - \lambda_0 \mathrm{I}$ no es invertible. Si $h(\lambda) := f(\lambda) - \lambda_0$ para $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$, entonces claramente $h \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$ y gracias a que $f \mapsto f(T)$ es un homomorfismo, $h(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) - \lambda_o \mathrm{I}$ no es invertible. Entonces necesariamente existe una $\lambda_1 \in \sigma(\mathrm{T})$ tal que $\lambda_0 = f(\lambda_1)$, ya que de lo contrario la función $g(\lambda) := (f(\lambda) - \lambda_0)^{-1}$ estaría bien definida en $\sigma(\mathrm{T})$ y como $h(\lambda)g(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda) = 1$, entonces $g(\mathrm{T})$ sería el operador inverso de $h(\mathrm{T})$, así que en efecto $\lambda_0 = f(\lambda_1) \in f(\sigma(\mathrm{T}))$. ■

Por otro lado, si componemos con funciones continuas entonces si se tiene la composición del cálculo funcional boreliano, como mostramos a continuación

Teorema 3.29. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert,* T *un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con resolución de la identidad $\mathcal{P}$, y $f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$. Entonces para cualquier $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(\mathrm{T})))$ se cumple que*

$$(g \circ f)(\mathrm{T}) = g(f(\mathrm{T}))$$

Demostración:
Notemos antes que nada que si $\lambda_0 \in f(\sigma(\mathrm{T}))$ entonces $|\lambda_0| = |f(\lambda_1)| \leq \|f\|_\infty$ y por lo tanto

$$f(\sigma(\mathrm{T})) \subset K := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|f\|_\infty\}.$$

y claramente $K \subset \mathbb{C}$ es un compacto. Supongamos primeo que $g \in \mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]$ de la forma

$$g(\lambda) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k}\, \lambda^j\, (\overline{\lambda})^k, \text{ con } \lambda \in K.$$

Entonces $g \circ f \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$, y así

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\mathrm{T}) &= \int_{\sigma(\mathrm{T})} (g \circ f)\, \mathrm{d}\mathcal{P} \\ &= \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k} \int_{\sigma(\mathrm{T})} \left((\imath \circ f)^j\, (\overline{\imath \circ f})^k\right) \mathrm{d}\mathcal{P} \\ &= \sum_{j,k=0}^{n} c_{j,k} (f(\mathrm{T}))^j\, (f(\mathrm{T})^*)^k \\ &= g(f(\mathrm{T})),\end{aligned}$$

es decir que el resultado se cumple para cualquier $g \in \mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]$ con $\lambda \in K$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass A.12, sabemos que $\mathcal{C}(f(\sigma(\mathrm{T}))) \subset \mathcal{C}(K) = \overline{\mathbb{C}[\lambda, \overline{\lambda}]}$, entonces en efecto el resultado se cumple para cualquier $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(\mathrm{T})))$. ■

Terminamos la sección, y con esto el capítulo, presentando aplicaciones del cálculo funcional boreliano. La primera de ellas es de sumo interés pues caracteriza los eigenvalores de un operador normal

Teorema 3.30. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y* T *un operador normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con resolución de la identidad $\mathcal{P}$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma(\mathrm{T})$ es un eigenvalor si y sólo si $\mathcal{P}(\{\lambda_0\}) \neq 0$.*

Demostración:
($\Longrightarrow$) Si λ_0 es un eigenvalor, entonces $\mathrm{T}x = \lambda_0 x$ con $x \neq 0$ su eigenvector. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a las funciones

$$f_n(\lambda) := \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda - \lambda_0} & \text{si } |\lambda - \lambda_0| > \frac{1}{n} \\[2ex] 0 & \text{si } |\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Cada $f_n \in \mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$. Además si

$$E_n := \left\{ \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) : |\lambda - \lambda_0| > \frac{1}{n} \right\}$$

entonces cada $E_n \in \mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{T}))$ y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left\{ \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) : \lambda \neq \lambda_0 \right\}.$$

Notemos que $f_n(\lambda)(\lambda - \lambda_0) = \chi_{E_n}(\lambda)$ y por lo tanto

$$f_n(\mathrm{T})(\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I}) = \chi_{E_n}(\mathrm{T}) = \mathcal{P}(E_n)$$

Así pues, como $\mathrm{T}x - \lambda_0 x = 0$, para cada n se tiene que

$$\mathcal{P}(E_n)x = f_n(\mathrm{T})(\mathrm{T} - \lambda_0 \mathrm{I})x = f_n(\mathrm{T})(\mathrm{T}x - \lambda_0 x) = 0 \in \mathcal{H}.$$

Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E_{n+1}$, entonces

$$\mathcal{P}\left(\left\{ \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) : \lambda \neq \lambda_0 \right\} \right) x = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) x = \lim_{n \to \infty} \mathcal{P}(E_n) x = 0 \in \mathcal{H}$$

y por ende que $\mathcal{P}(\{\lambda_0\})x = x$, ya que

$$\mathcal{P}(\{\lambda_0\})x = \mathcal{P}\left(\sigma(\mathrm{T}) \setminus \left\{ \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) : \lambda \neq \lambda_0 \right\} \right) x = \mathrm{I}x - \mathcal{P}\left(\left\{ \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) : \lambda \neq \lambda_0 \right\} \right) x = x.$$

Como $x \neq 0$, lo anterior implica que en efecto $\mathcal{P}(\{\lambda_0\}) \neq 0$.

($\Longleftarrow$) Si $\mathcal{P}(\{\lambda_0\}) \neq 0$, sea $\mathrm{P} := \mathcal{P}(\{\lambda_0\})$, como P es una proyección no nula, podemos fijar un $x \neq 0$ en $\mathrm{P}(\mathcal{H})$ y claramente $\mathrm{P}x = x$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}x = \mathrm{TP}x &= \left(\int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) \mathrm{P}x \\
&= \left(\int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) \mathcal{P}(\{\lambda_0\})x \\
&= \left(\int_{\sigma(\mathrm{T})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) \left(\int_{\sigma(\mathrm{T})} \chi_{\{\lambda_0\}} \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) x \\
&= \left(\int_{\{\lambda_0\}} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} \right) x \\
&= (\lambda_0 \mathrm{P})\, x \\
&= \lambda_0 x
\end{aligned}$$

así que $\mathrm{T}x = \lambda_0 x$, es decir que λ_0 es eigenvalor con eigenvector x. ■

Las siguientes aplicaciones caracterizan por completo a los operadores unitarios.

Teorema 3.31. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador normal* $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es unitario si y sólo si*

$$\sigma(\mathrm{T}) \subset \partial\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Si T es unitario, entonces $\|T\| = 1$, por lo que $\sigma(\mathrm{T}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\| = 1\}$. Tomando cualquier $\lambda \neq 0$ con $|\lambda| < 1$, tenemos que $(1/\lambda) \notin \sigma(\mathrm{T}^*)$ ya que también $\sigma(\mathrm{T}^*) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, luego usando que $\mathrm{TT}^* = \mathrm{I}$, tenemos

$$(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) \left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{I} - \mathrm{T}^*\right)^{-1} (\lambda\mathrm{T})^{-1} = \mathrm{I}$$

es decir que $\lambda \notin \sigma(\mathrm{T})$. Como $0 \notin \sigma(\mathrm{T})$, entonces lo anterior implica que $\sigma(\mathrm{T}) \subset \partial\mathbb{D}$.

($\Longleftarrow$) Si ahora $\sigma(\mathrm{T}) \subset \partial\mathbb{D}$ y $\mathcal{P}$ es la resolución de la identidad del operador T, entonces para $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle \mathrm{TT}^* x, y\rangle = \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T} x, y\rangle = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \lambda\overline{\lambda}\, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}(\lambda) = \int_{\sigma(\mathrm{T})} 1\, \mathrm{d}\mathcal{P}_{x,y}(\lambda) = \langle \mathrm{I}x, y\rangle$$

es decir que $\mathrm{TT}^* = \mathrm{I}$ y por lo tanto que T es unitario. ■

Observación 3.32. Notemos que, en la demostración anterior, la implicación ($\Longrightarrow$) no usa en ningún momento el cálculo funcional boreliano. Aunque la implicación ($\Longleftarrow$) si lo usa, no es necesario usar la extensión a $\mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$, ya que si Φ es el isomorfismo-$*$ del cálculo funcional continuo dado en el Teorema 2.37, entonces si $\sigma(\mathrm{T}) \subset \partial\mathbb{D}$ tenemos necesariamente que $\imath(\lambda)\bar{\imath}(\lambda) = \lambda\overline{\lambda} = 1$ para cualquier $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$. Luego

$$\mathrm{TT}^* = \Phi(\imath)\Phi(\imath)^* = \Phi(\imath\bar{\imath}) = \Phi(1) = \mathrm{I}$$

análogamente $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{I}$, por lo que se concluye que T es unitario, sin necesidad de usar el cálculo funcional en $\mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{T}))$.

En el siguiente resultado no ocurre lo anterior, pues en la demostración, es vital aplicar el cálculo funcional a una función en $\mathcal{B}^\infty(\sigma(\mathrm{U}))$ como se muestra a continuación

Teorema 3.33. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador* $\mathrm{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *es unitario si y sólo si*

$$\mathrm{U} = e^{i\,\mathrm{T}}$$

para algún operador autoadjunto $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Consideremos la función $g : [0, 2\pi) \to \partial\mathbb{D}$ dada por $g(t) = e^{it}$. Entonces g es biyectiva y continua y por lo tanto tiene una inversa $f : \partial\mathbb{D} \to [0, 2\pi)$, claramente $f \in \mathcal{B}^\infty(\partial\mathbb{D})$.

Si U es un operador unitario, es normal y tiene resolución de la identidad $\mathcal{P}$. Además por el Teorema anterior, $\sigma(\mathrm{U}) \subset \partial\mathbb{D}$, así definiendo $\mathrm{T} := f(\mathrm{U})$, tenemos que, gracias a que f toma valores reales en $[0, 2\pi)$, entonces

$$\mathrm{T}^* = f(\mathrm{U})^* = \left(\int_{\sigma(\mathrm{U})} f \,\mathrm{d}\mathcal{P}\right)^* = \int_{\sigma(\mathrm{U})} \overline{f} \,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int_{\sigma(\mathrm{U})} f \,\mathrm{d}\mathcal{P} = f(\mathrm{U}) = \mathrm{T}$$

es decir que T es autoadjunto. Como $(g \circ f)(\lambda) = \lambda$ para toda $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ entonces junto con el Teorema 3.29 tenemos que

$$\mathrm{U} = (g \circ f)(\mathrm{U}) = g(f(\mathrm{U})) = g(\mathrm{T}) = e^{i\,\mathrm{T}}$$

como queríamos.

($\Longleftarrow$) Sea $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto (y por ende normal) con resolución de la identidad $\mathcal{P}'$, así pues

$$\left(e^{i\,\mathrm{T}}\right)\left(e^{i\,\mathrm{T}}\right)^* = \left(\int_{\sigma(\mathrm{T})} e^{i\lambda} \,\mathrm{d}\mathcal{P}'(\lambda)\right)\left(\int_{\sigma(\mathrm{T})} \overline{e^{i\lambda}} \,\mathrm{d}\mathcal{P}'(\lambda)\right) = \int_{\sigma(\mathrm{T})} 1 \,\mathrm{d}\mathcal{P}'(\lambda) = \mathcal{P}'(\sigma(\mathrm{T})) = \mathrm{I}$$

por lo que $e^{i\,\mathrm{T}}$ es un operador unitario. ■

Una última aplicación del cálculo funcional boreliano es de corte más algebraico, para ello hay que definir un par de conceptos tanto de análisis funcional como de teoría de representación

Definición 3.34. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial normado, Decimos que $\mathcal{Y}$ es un* ***subespacio invariante bajo un operador*** $\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *si:*

i) *$\mathcal{Y}$ es un subespacio vectorial no vacío contenido en $\mathcal{X}$.*

ii) *$\mathcal{Y}$ es cerrado en $\mathcal{X}$.*

iii) $\mathrm{T}(\mathcal{Y}) := \{\mathrm{T}y : y \in \mathcal{Y}\} \subset \mathcal{Y}$.

Si además $\mathcal{Y} \neq \{0\}$ y $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$ decimos que $\mathcal{Y}$ es un ***subespacio invariante no trivial de*** T.

Notación 3.35. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ al subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que consiste únicamente de los operadores unitarios.

Definición 3.36. *Sea G un grupo y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una* ***representación unitaria*** *de G en $\mathcal{H}$ es un homomorfismo $T : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Para cada $g \in G$, $T(g)$ es un operador unitario, el cual denotamos como $\mathrm{T}_g \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, es decir $\mathrm{T}_g := T(g)$. Decimos que T es una representación unitaria* ***irreducible*** *de G, si para cada $g \in G$ los únicos subespacios invariantes bajo T_g son los triviales.*

Definición 3.37. *Sea T una representación unitaria de G. Definimos* ***el álgebra conmutante de*** T *como*

$$\mathtt{C}(T) := \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \mathrm{T}_g\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{T}_g \ \forall\, g \in G\}.$$

Es claro que siempre $\mathrm{I} \in \mathtt{C}(T)$.

La aplicación en cuestión consiste en caracterizar todas las representaciones irreducibles a través de su álgebra conmutante.

Teorema 3.38. *Una representación unitaria T del grupo G es irreducible si y sólo si para todo operador* $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ *existe un* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{A} = \lambda_0\mathrm{I}$.

Demostración:
($\Longrightarrow$) Supongamos primero que T es irreducible y tomemos cualquier $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ que sea además un operador autoadjunto, i.e. $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}$. Por el Corolario 2.33 se sigue que $\sigma(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{P}$ la resolución de la identidad de A (que al ser autoadjunto, es normal), entonces

$$\mathrm{A} = \int_{\sigma(\mathrm{A})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P}$$

Para cualquier $p \in \mathbb{C}[\lambda]$ con $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$, se tiene que, como $\mathrm{A} \in \mathtt{C}(T)$ entonces $p(\mathrm{A}) \in \mathtt{C}(T)$ y así para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\int_{\sigma(\mathrm{A})} p \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{T}_g x, y} = \langle p(\mathrm{A})\mathrm{T}_g x, y\rangle = \langle \mathrm{T}_g p(\mathrm{A})x, y\rangle = \langle p(\mathrm{A})x, (\mathrm{T}_g)^* y\rangle = \int_{\sigma(\mathrm{A})} p \, \mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{T}_g x, y}$$

Por el Teorema de Stone-Weierstrass A.12 lo anterior vale para toda $f \in \mathcal{C}(\sigma(\mathrm{A})) = \overline{\mathbb{C}[\lambda]}$, es decir que las medidas regulares $\mathcal{P}_{\mathrm{T}_g x, y}$ y $\mathcal{P}_{\mathrm{T}_g x, y}$ son iguales. Así, para toda $x, y \in \mathcal{H}$ y cualquier $E \in \mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{A}))$, se tiene

$$\langle \mathcal{P}(E)\mathrm{T}_g x, y\rangle = \langle \mathcal{P}(E)x, (\mathrm{T}_g)^* y\rangle = \langle \mathrm{T}_g\mathcal{P}(E)x, y\rangle$$

que implica que $\mathcal{P}(E)\mathrm{T}_g = \mathrm{T}_g\mathcal{P}(E)$ para toda $g \in G$ y toda $E \in \mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{A}))$, es decir que $\mathcal{P}(E) \in \mathtt{C}(T)$ para toda $E \in \mathfrak{B}(\sigma(\mathrm{A}))$. Lo anterior implica necesariamente que existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(\mathrm{A}) = \{t_0\}$, ya que de lo contrario podemos descomponer al espectro de A como $\sigma(\mathrm{A}) = E_1 \cup E_2$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $E_1, E_2 \neq \emptyset$; si ponemos $\mathrm{P}_j := \mathcal{P}(E_j)$ (para $j = 1, 2$), entonces $\mathrm{P}_j \neq 0$, $P_j \in \mathtt{C}(T)$ y $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathcal{P}(\emptyset) = 0$, así si definimos

$$\mathcal{Y} := \{x \in \mathcal{H} : \mathrm{P}_1 x = 0\}$$

entonces $\mathcal{Y}$ es cerrado, $\mathcal{Y} \neq \{0\}$, pues para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se tiene que $\mathrm{P}_2 x \in \mathcal{Y}$ y también $\mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$, ya que $\mathrm{P}_1 \neq 0$; sin embargo para cualquier $y \in \mathcal{Y}$ se tiene que $\mathrm{T}_g y \in \mathcal{Y}$, ya que $\mathrm{P}_1\mathrm{T}_g y = \mathrm{T}_g\mathrm{P}_1 y = 0$; entonces para toda $g \in G$ se tiene que $\mathrm{T}_g(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}$, es decir que $\mathcal{Y}$ es un subespacio invariante no trivial bajo cada T_g, contradiciendo así la irreductibilidad de T. Entonces $\sigma(\mathrm{A}) = \{t_0\}$, por lo que

$$\mathrm{A} = \int_{\sigma(\mathrm{A})} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_{\{t_0\}} \imath \, \mathrm{d}\mathcal{P} = t_0\mathcal{P}(\{t_0\}) = t_0\mathcal{P}(\sigma(\mathrm{A})) = t_0\mathrm{I}$$

Si ahora $A \in \mathtt{C}(T)$ es arbitrario, entonces

$$A_1 := \frac{A + A^*}{2}, \quad A_2 := \frac{A - A^*}{2i}$$

son ambos autoadjuntos y pertenecen a $\mathtt{C}(T)$. Así, por lo anterior, para cada A_j, $j = 1,2$, existe un $t_j \in \mathbb{R}$ tal que $A_j = t_j I$ y por lo tanto

$$A = A_1 + iA_2 = t_1 I + it_2 I = (t_1 + it_2)\, I.$$

Es decir que $A = \lambda_0 I$ con $\lambda_0 = t_1 + it_2 \in \mathbb{C}$, como queríamos verificar.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora, en busca de probar la contrapositiva, que T es reducible. Es decir que existe un subespacio $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}$ que es invariante no trivial bajo cada T_g. Como $\mathcal{Y}$ es cerrado, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$; así cualquier $x \in \mathcal{H}$ se expresa como $x = y_x + w_x$ con $y_x \in \mathcal{Y}$ y $w_x \in \mathcal{Y}^\perp$. Definamos a P como la proyección sobre $\mathcal{Y}$, es decir que $Px = y_x$ para toda $x \in \mathcal{H}$. Por invarianza, para toda $g \in G$ tenemos que $T_g y_x \in \mathcal{Y}$, entonces para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$PT_g x = PT_g y_x + PT_g w_x = T_g y_x = T_g P x$$

es decir que $P \in \mathtt{C}(T)$, pero claramente no es un múltiplo escalar de I, ya que $\mathcal{Y} \neq \mathcal{H}$. Como el hecho de que T sea reducible implica que existe un $P \in \mathtt{C}(T)$ con $P \neq \lambda I$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo tanto hemos probado que si para todo operador $A \in \mathtt{C}(T)$ existe un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $A = \lambda_0 I$, entonces T es irreducible. ■

Observación 3.39. En Teoría de Representación, la generalización de la implicación ($\Longrightarrow$) en el Teorema anterior es conocida como el *Lema de Schur para operadores acotados*. El lector puede consultar una prueba en [10], y aunque no usa el Teorema espectral, tomamos algunas ideas de esa prueba para la demostración que damos aquí del caso particular.

Capítulo 4

Cálculo Funcional Holomorfo

Hasta ahora, hemos presentado de manera detallada al cálculo funcional para elementos normales. Surge la pregunta de si es posible desarrollar un cálculo funcional para cualquier elemento de un álgebra de Banach, como vimos por ejemplo en el Capítulo 1 para las funciones enteras o holomorfas cuya serie de MacLaurin tenga radio de convergencia mayor a la normal del elemento. La respuesta es que sí, el costo a pagar es que la clase de funciones para las cual se puede hacer, es más restrictiva que las funciones continuas en el espectro, pues será la clase de funciones holomorfas en una vecindad del espectro (por su puesto esto es más general que sólo las holomorfas alrededor del origen como vimos en el Capítulo 1). El cálculo funcional para elementos arbitrarios de un álgebra de Banach con unidad es llamado ***cálculo funcional holomorfo***, y está basado en la fórmula integral de Cauchy de variable compleja, por lo que para poder desarrollarlo es necesario primero presentar la teoría de integración en espacios de Banach.

4.1. Integración en espacios de Banach

La idea es generalizar la noción de integral de Riemann para las funciones continuas $g : [a, b] \to \mathcal{X}$, donde $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach y $a < b$ números reales.

Definición 4.1. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $g : [a, b] \to \mathcal{X}$ una función continua, definimos* ***la integral definida*** *de g con respecto a t sobre $[a, b]$ como*

$$\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

El límite anterior siempre existe por que $t \mapsto \|g(t)\|$ es una función continua de $[a, b]$ a $\mathbb{R}$, y por lo tanto las sumas parciales son absolutamente convergentes.

Observación 4.2. Notemos que la definición anterior es simplemente la generalización de la integral de Riemann usual con una partición uniforme del intervalo $[a, b]$.

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $g : [a, b] \to \mathcal{X}$ una función continua, entonces*

$$\left\| \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\ \mathrm{d}t$$

Demostración:
Por la continuidad de la norma y la desigualdad del triangulo tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \right\| &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \left\| \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k(b-a)}{n}\right) \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left\| g\left(\frac{k(b-a)}{n}\right) \right\| \\
&= \int_a^b \|g(t)\|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

En el caso en que $\mathcal{X}$ sea un álgebra de Banach, la multiplicación "entra" a la integral como muestra la siguiente proposición

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, $g : [a, b] \to \mathcal{A}$ una función continua y $x \in \mathcal{A}$, entonces*

$$x\left(\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right) = \int_a^b xg(t)\ \mathrm{d}t \quad \& \quad \left(\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right)x = \int_a^b g(t)x\ \mathrm{d}t$$

Demostración:
Por la linealidad del límite y la suma,

$$\begin{aligned}
x\left(\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right) &= x\left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} xg\left(\frac{k(b-a)}{n}\right) \\
&= \int_a^b xg(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La otra igualdad se verifica análogamente. ■

Con lo anterior podemos definir la integral de linea de una función continua $f : G \to \mathcal{X}$ para $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, sobre una curva rectificable (i.e. de variación acotada) $\gamma : [a, b] \to G$, como una generalización de la integral de Riemann-Stieltjes, como muestra la siguiente definición.

Definición 4.5. *Sea $f : G \to \mathcal{X}$ una función continua y $\gamma : [a,b] \to G$ una curva rectificable. Definimos **la integral de linea** de f sobre γ como*

$$\oint_{\gamma} f := \oint_{\gamma} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)] f(\gamma(t_k))$$

donde cada $t_k := k(b-a)/n$, es decir $\{t_1, \cdots, t_n\}$ es una partición uniforme de $[a,b]$.

Observación 4.6. Cuando $f : G \to \mathcal{X}$ es una función continua y $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b])$, entonces

$$\oint_{\gamma} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t,$$

donde la integral del lado derecho se calcula en el sentido de la Definición 4.1 con la función continua $g : [a,b] \to \mathcal{X}$, dada por $g(t) := f(\gamma(t))\gamma'(t)$.

La siguiente propiedad, de la integral de linea recién definida, es de vital importancia para extender los teoremas de variable compleja a las funciones valuadas en un espacio de Banach, que es lo que hacemos en la siguiente sección.

Proposición 4.7. *Sea $f : G \to \mathcal{X}$ una función continua y $\gamma : [a,b] \to G$ una curva rectificable, entonces para toda $\varphi \in \mathcal{X}^*$ se tiene que*

$$\varphi\left(\oint_{\gamma} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda\right) = \oint_{\gamma} \varphi\Big(f(\lambda)\Big)\, \mathrm{d}\lambda$$

donde la integral de la derecha es la integral usual de linea para funciones complejo valuadas.

Demostración:
Por la linealidad y continuidad de cada φ se tiene directamente que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\oint_{\gamma} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda\right) &= \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)] f(\gamma(t_k))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)] \varphi\Big(f(\gamma(t_k))\Big) \\
&= \oint_{\gamma} \varphi\Big(f(\lambda)\Big)\, \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

■

4.2. Variable Compleja en espacios de Banach

Ahora usamos los resultados y definiciones de la sección anterior para extender ciertos resultados clásicos de variable compleja, pero ahora para funciones que toman valores en un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Pero antes, es necesario recordar varias de definiciones sobre curvas rectificables y el indice de éstas.

Definición 4.8. *Una curva rectificable $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es **cerrada** si $\gamma(a) = \gamma(b)$. El **indice** de una curva rectificable cerrada γ, al rededor de un punto $\lambda_0 \notin \gamma([a,b]) := \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$, está dado por*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_0}$$

Siempre se tiene que $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) \in \mathbb{Z}$, y dicho entero representa el número de vueltas que le da γ al punto λ_0, donde las vueltas en sentido contrario a las manecillas del reloj se cuentan negativamente.

Observación 4.9. Si pensamos a $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$ como una función, entonces se tiene que Ind_γ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ y que vale cero en la componente no acotada.

Definición 4.10. *Sea γ una curva rectificable cerrada, decimos que está **orientada positivamente** si $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])) = \{0,1\}$. En cuyo caso el **interior** de γ es*

$$\mathrm{int}(\gamma) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) : \mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = 1\}$$

*y su **exterior** es*

$$\mathrm{ext}(\gamma) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) : \mathrm{Ind}_\gamma(\lambda) = 0\}.$$

Claramente $\mathbb{C} = \mathrm{int}(\gamma) \cup \gamma([a,b]) \cup \mathrm{ext}(\gamma)$

Definición 4.11. *Sea γ una curva rectificable, decimos que es **simple** si no se auto intersecta, es decir siempre que $\gamma(t) = \gamma(s)$ es por que $t = s$, o bien por que $\{s,t\} = \{a,b\}$. Gracias al Teorema de la curva de Jordan, si γ es cerrada y simple entonces $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ tiene dos componentes conexas que tienen como frontera a $\gamma([a,b])$.*

Definición 4.12. *Dada una colección de curvas cerradas rectificables $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, definimos la integral de linea de una función f (ya sea complejo valuada o valuada en un espacio de Banach) sobre Γ como*

$$\oint_\Gamma f := \sum_{k=1}^m \oint_{\gamma_k} f$$

*La **traza** de la colección de curvas Γ es*

$$\Gamma([a,b]) := \bigcup_{k=1}^m \gamma_k([a,b]).$$

*Decimos que Γ está **orientada positivamente** si*

i) $\gamma_j([a,b]) \cap \gamma_k([a,b]) = \emptyset$ *siempre que* $j \neq k$.

ii) *Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma([a,b])$ se tiene que*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\lambda) := \sum_{k=1}^m \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(\lambda) \in \{0,1\}$$

iii) Cada γ_k es una curva cerrada simple.

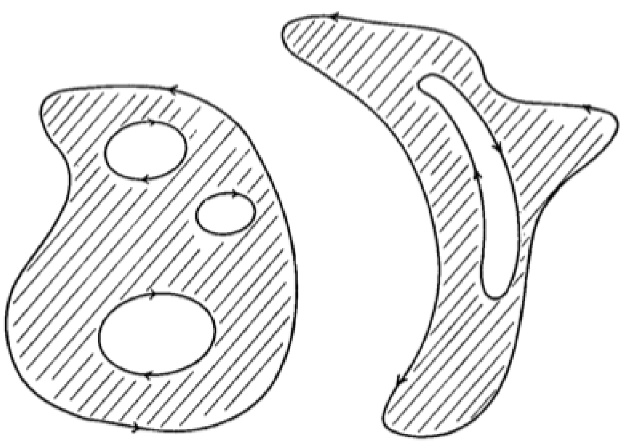
*Similarmente el **interior** de Γ es*

$$\operatorname{int}(\Gamma) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma([a,b]) : \operatorname{Ind}_\Gamma(\lambda) = 1\}$$

*y su **exterior** es*

$$\operatorname{ext}(\Gamma) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma([a,b]) : \operatorname{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0\}.$$

En la siguiente figura se ejemplifica una colección $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_6\}$ orientada positivamente. El interior, $\operatorname{int}(\Gamma)$*, está marcado con rayas diagonales y el exterior,* $\operatorname{ext}(\Gamma)$*, en blanco:*



En la figura anterior notamos que la colección de curvas $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_6\}$ es tal que $\operatorname{Int}(\Gamma)$ encierra una región acotada de $\mathbb{C}$. El siguiente Teorema, el cual únicamente enunciamos, dice que cualquier compacto $K \subset \mathbb{C}$ puede ser encerrado por una colección finita Γ. Para una prueba el lector puede consultar [3].

Teorema 4.13. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y $K \subset G$ compacto. Entonces existe una colección de curvas $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, con cada $\gamma_k([a,b]) \subset G \setminus K$, tal que*

$$K \subset \operatorname{int}(\Gamma) \ \& \ \mathbb{C} \setminus G \subset \operatorname{ext}(\Gamma).$$

Más aún, cada curva $\gamma_k \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$.

Observación 4.14. En la siguiente sección usaremos el Teorema anterior para $K = \sigma(x)$ con x un elemento de un álgebra de Banach. Es gracias a éste resultado que se puede definir cálculo funcional holomorfo.

Después del breve recordatorio, continuamos con el propósito principal de esta sección, es decir extender resultados de variable compleja a funciones valuadas en un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Comenzamos por definir que entendemos por una función "holomorfa" valuada en $\mathcal{X}$.

Definición 4.15. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : G \to \mathcal{X}$. Decimos que f es **una función fuertemente holomorfa** si para cualquier $\lambda \in G$ existe un $x_\lambda \in \mathcal{X}$ tal que*

$$\left\| \frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h} - x_\lambda \right\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.1}$$

Definimos la función $f' : G \to \mathcal{X}$ como $f'(\lambda) := x_\lambda$, la cual se llama la derivada de f. Al conjunto de todas las funciones fuertemente holomorfas de G a $\mathcal{X}$, lo denotamos por $H(G, \mathcal{X})$.

Proposición 4.16. *Sea $f : G \to \mathcal{X}$ fuertemente holomorfa, entonces para todo $\varphi \in \mathcal{X}^*$ la función $(\varphi \circ f) : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa y más aún $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$.*

Demostración:
Sea $\varphi \in \mathcal{X}^*$ arbitrario. Como $\|\varphi\| < \infty$ y φ es lineal, entonces para cualquier $\lambda \in G$ se tiene

$$\begin{aligned}\left| \frac{\varphi\Big(f(\lambda+h)\Big)-\varphi\Big(f(\lambda)\Big)}{h} - \varphi\Big(f'(\lambda)\Big) \right| &= \left| \varphi\left(\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h} - f'(\lambda) \right) \right| \\ &\le \|\varphi\| \left\| \frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h} - f'(\lambda) \right\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

puesto que f es fuertemente holomorfa. Así que en efecto $\varphi \circ f$ es holomorfa y como acabamos de ver que

$$\left| \frac{(\varphi\circ f)(\lambda+h)-(\varphi\circ f)(\lambda)}{h} - (\varphi\circ f')(\lambda) \right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

entonces en efecto $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$. ■

Observación 4.17. Cuando $f : G \to \mathcal{X}$ es un función tal que para todo $\varphi \in \mathcal{X}^*$ la función $(\varphi \circ f) : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa, decimos que f es **débilmente holomorfa**. La proposición anterior demuestra que fuertemente holomorfa implica débilmente holomorfa, el siguiente Teorema muestra que la otra implicación también es cierta, aunque su prueba no es nada trivial, al contrario de la de la Proposición anterior.

Teorema 4.18. *Si $f : G \to \mathcal{X}$ es débilmente holomorfa, entonces $f \in H(G, \mathcal{X})$.*

Demostración:
Fijemos cualquier $\lambda_0 \in G$. Elijamos a $\gamma : [a, b] \to G$ una curva rectificable y cerrada de tal

forma que $\lambda_0 \notin \gamma([a,b])$, $\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) = 1$, $\mathrm{int}(\gamma) \cup \gamma([a,b]) \subset G$. Como para cualquier $\varphi \in \mathcal{X}^*$, se tiene que $\varphi \circ f$ es holomorfa, entonces del Teorema A.10 se sigue que

$$\varphi(f(\lambda_0)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(f(\lambda))}{\lambda - \lambda_0} \mathrm{d}\lambda. \tag{4.2}$$

Sea $G_0 \subset G$ un dominio con $\lambda_0 \in G_0$ y $\overline{G_0} \subset \mathrm{int}(\gamma)$. Definamos ahora

$$V := \{h \in \mathbb{C} : \lambda_0 + h \in G_0\}$$

entonces la ecuación (4.2) se cumple para cualquier $\lambda_0 + h$ con $h \in V$, por lo tanto si $h, k \in V$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h-k} &\left(\frac{\varphi(f(\lambda_0 + h)) - \varphi(f(\lambda_0))}{h} - \frac{\varphi(f(\lambda_0 + k)) - \varphi(f(\lambda_0))}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(f(\lambda))}{(\lambda - \lambda_0 - h)(\lambda - \lambda_0 - k)(\lambda - \lambda_0)} \mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Por construcción de γ, tenemos que $d := \mathrm{dist}(G_0, \gamma([a,b])) > 0$, por lo que es claro que $|\lambda - \alpha| > d$, para todo $\lambda \in \gamma([a,b])$ y todo $\alpha \in G_0$. Entonces, si $|\gamma|$ representa la longitud de la curva γ, se tiene que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(f(\lambda))}{(\lambda - \lambda_0 - h)(\lambda - \lambda_0 - k)(\lambda - \lambda_0)} \mathrm{d}\lambda \right| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi d^3} \max_{\lambda \in \gamma([a,b])} |\varphi(f(\lambda))| < \infty$$

Como el lado derecho de la desigualdad anterior no depende de h, k entonces, para cada $\varphi \in \mathcal{X}^*$, se tiene lo siguiente

$$\sup_{h,k \in V} \frac{1}{|h-k|} \left| \frac{\varphi(f(\lambda_0 + h)) - \varphi(f(\lambda_0))}{h} - \frac{\varphi(f(\lambda_0 + k)) - \varphi(f(\lambda_0))}{k} \right| < \infty,$$

junto con una aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus A.1, la última desigualdad implica que

$$\sup_{h,k \in V} \frac{1}{|h-k|} \left\| \frac{f(\lambda_0 + h) - f(\lambda_0)}{h} - \frac{f(\lambda_0 + k) - f(\lambda_0)}{k} \right\| =: M < \infty.$$

Sean ahora $m > n$ de tal forma que $k := m^{-1}, h := n^{-1} \in V$, lo anterior implica que

$$\left\| \frac{f(\lambda_0 + n^{-1}) - f(\lambda_0)}{n^{-1}} - \frac{f(\lambda_0 + m^{-1}) - f(\lambda_0)}{m^{-1}} \right\| \leq M \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \xrightarrow[m,n \to \infty]{} 0,$$

que implica que la sucesión $\left(n[f(\lambda_0 + n^{-1}) - f(\lambda_0)] \right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por lo tanto converge a un $x_{\lambda_0} \in \mathcal{X}$, ya que $\mathcal{X}$ es de Banach. Como tomamos a cualquier $\lambda_0 \in G$, tenemos que en efecto, para toda $\lambda \in G$, se cumple la ecuación (4.1) y por lo tanto que $f \in H(G, \mathcal{X})$. ■

Observación 4.19. Gracias al Teorema 4.18 y a la Proposición 4.16, cuando pongamos que $f \in H(G, \mathcal{X})$, usaremos sin preocuparnos tanto la definición de fuertemente holomorfa como de débilmente holomorfa.

Los siguientes dos Teoremas son la extensión de A.9 y A.10 , de hecho usamos éstos dos últimos junto con las proposición 4.7 para demostrarlos.

Teorema 4.20. *(Teorema de Cauchy) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $f \in H(G, \mathcal{X})$ y $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, una colección de curvas cerradas rectificables tal que cada $\gamma_k([a,b]) \subset G$ e $\operatorname{Ind}_\Gamma(\mathbb{C} \setminus G) = \{0\}$. Entonces*

$$\oint_\Gamma f = 0$$

Demostración:
Por la proposición 4.7 tenemos que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{X}^*$,

$$\varphi\left(\oint_\Gamma f\right) = \oint_\Gamma (\varphi \circ f)(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

pero sabemos que la función $\varphi \circ f : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa, así que por el Teorema A.9 se tiene que

$$\oint_\Gamma (\varphi \circ f)(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Es decir que $\varphi\left(\oint_\Gamma f\right) = 0 = \varphi(0)$ para todo $\varphi \in \mathcal{X}^*$, y como $\mathcal{X}^*$ separa puntos de $\mathcal{X}$, lo último implica que

$$\oint_\Gamma f = 0.$$

■

Teorema 4.21. *(Fórmula Integral de Cauchy) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $f \in H(G, \mathcal{X})$ y γ una curva cerrada rectificable con $\operatorname{Ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus G) = \{0\}$. Entonces para cualquier $\lambda_0 \in G$ y cualquier $k = 0, 1, 2, \cdots$ se tiene que*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(\lambda_0) \cdot f^{(k)}(\lambda_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} \mathrm{d}\lambda$$

Demostración:
Sabemos, por la Proposición 4.16, que para toda $\varphi \in \mathcal{X}^*$, la función $\varphi \circ f$, es holomorfa y que $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$, y además, al ser holomorfa, también la función $\varphi \circ f'$ es holomorfa, así por el Teorema 4.18 la función f' pertenece a $H(G, \mathcal{X})$; más aún de nuevo por la Proposición 4.16 se tiene que existe una función f'' tal que $(\varphi \circ f')' = \varphi \circ f''$. Continuando de esta forma se sigue que f es infinitamente diferenciable en $H(G, \mathcal{X})$, sus derivadas son funciones $f^{(k)} \in H(G, \mathcal{X})$ y además para todo $\varphi \in \mathcal{X}^*$ se cumple que $(\varphi \circ f)^{(k)} = \varphi \circ f^{(k)}$. Entonces,

para cualquier $k = 0, 1, 2, \cdots$ y cualquier $\lambda_0 \in G$, usando el Teorema A.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) \cdot f^{(k)}(\lambda_0)\Big) &= \mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) \cdot \varphi(f^{(k)}(\lambda_0)) \\
&= \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\varphi(f(\lambda))}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} \mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \varphi\left(\frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}\right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \varphi\left(\frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} \mathrm{d}\lambda\right),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la Proposición 4.7. De nuevo, como $\mathcal{X}^*$ separa puntos de $\mathcal{X}$, la última ecuación implica el resultado buscado. ■

La gran ventaja de los dos últimos Teoremas es que cualquier Teorema que se pruebe con los Teoremas A.9 y A.10 para funciones $g \in H(G, \mathbb{C})$ se extiende de inmediato a funciones $f \in H(G, \mathcal{X})$. Un ejemplo de lo anterior es cuando $G = \mathbb{C}$ y se tiene el Teorema de Liouville:

Teorema 4.22. *(Teorema de Liouville). Sea $f \in H(\mathbb{C}, \mathcal{X})$, acotada en el sentido de que existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(\lambda)\| \leq M \;\forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Entonces f is constante.

Demostración:
Supongamos, en busca de una contradicción, que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tales que $f(\lambda_1) \neq f(\lambda_2)$. Como $\mathcal{X}^*$ separa puntos de $\mathcal{X}$, entonces existe un $\varphi \in \mathcal{X}^*$ tal que $\varphi(f(\lambda_1)) \neq \varphi(f(\lambda_2))$. Notemos que

$$|\varphi(f(\lambda))| \leq \|\varphi\| \|f(\lambda)\| \leq M\|\varphi\|, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

Luego, como $\varphi \circ f$ es holomorfa y acabamos de ver que es acotada, por el Teorema A.8 tiene que ser constante, contradiciendo que $\varphi(f(\lambda_1)) \neq \varphi(f(\lambda_2))$. Por lo tanto en efecto f es constante. ■

4.3. El Cálculo Funcional Holomorfo y Aplicaciones

En esta última sección consideramos $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Haremos uso de las dos secciones anteriores para definir el cálculo funcional holomorfo y presentar sus propiedades y aplicaciones.

Definición 4.23. *Sea $x \in \mathcal{A}$ y $G \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de $\sigma(x)$. Para cada $f \in H(G, \mathbb{C})$ definimos*

$$f(x) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

donde Γ es la colección de curvas dada por el Teorema 4.13, para $K = \sigma(x)$.

Mostraremos que la asignación $f \mapsto f(x)$, llamada el **cálculo funcional holomorfo**, cumple en efecto con las propiedades esperadas de un cálculo funcional para x. Pero antes, hay que ver que dicha asignación está bien definida:

Proposición 4.24. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, $x \in \mathcal{A}$, $G \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de $\sigma(x)$ y $f \in H(G,\mathbb{C})$. Si $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_k\}$ son dos colecciones de curvas cerradas rectificables y positivamente orientadas que cumplen que $\sigma(x) \subset \operatorname{int}(\Gamma), \mathbb{C} \setminus G \subset \operatorname{ext}(\Gamma)$ y $\sigma(x) \subset \operatorname{int}(\Delta), \mathbb{C} \setminus G \subset \operatorname{ext}(\Delta)$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Delta f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda$$

Demostración:
Sin pérdida de generalidad parametrizamos todas las curvas en $[0,1]$. Definamos, para cada $j = 1, \cdots, k$, las curvas $\gamma_{m+j}(t) := \delta_j(1-t)$ para $t \in [0,1]$. Si $\lambda \notin U := G \setminus \sigma(x)$, entonces cuando $\lambda \in \mathbb{C} \setminus G$,

$$\sum_{j=1}^{m+k} \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(\lambda) = \operatorname{Ind}_\Gamma(\lambda) - \operatorname{Ind}_\Delta(\lambda) = 0 - 0 = 0$$

y cuando $\lambda \in \sigma(x)$,

$$\sum_{j=1}^{m+k} \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(\lambda) = \operatorname{Ind}_\Gamma(\lambda) - \operatorname{Ind}_\Delta(\lambda) = 1 - 1 = 0$$

Entonces $\Gamma' := \{\gamma_1, \cdots, \gamma_{m+k}\}$ es una colección de curvas cerradas rectificables y positivamente orientada con $\operatorname{Ind}_{\Gamma'}(\lambda) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$. La función $g : U \to \mathcal{A}$ definida por $g(\lambda) = f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$ pertenece a $H(U, \mathcal{A})$ (ver Proposición 2.14) y por lo tanto gracias al Teorema 4.20 se tiene que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda - \frac{1}{2\pi i} \oint_\Delta f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda.$$

Probando así la igualdad deseada. ■

Antes de continuar con las propiedades del cálculo funcional holomorfo, desviamos la atención para probar rápidamente un lema técnico de álgebras de Banach, que nos será de utilidad para las propiedades en cuestión.

Lema 4.25. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $x \in \mathcal{A}$. Si $\alpha, \beta \in \rho(x)$ entonces*

$$(\alpha\mathbf{1} - x)^{-1} - (\beta\mathbf{1} - x)^{-1} = (\beta - \alpha)(\alpha\mathbf{1} - x)^{-1}(\beta\mathbf{1} - x)^{-1} = (\beta - \alpha)(\beta\mathbf{1} - x)^{-1}(\alpha\mathbf{1} - x)^{-1}$$

Demostración:
Notemos que cuando $u, v \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces

$$u^{-1} - v^{-1} = u^{-1}(v - u)v^{-1} = v^{-1}(v - u)u^{-1}.$$

El resultado se sigue entonces al remplazar $u := \alpha\mathbf{1} - x$ y $v := \beta\mathbf{1} - x$. ■

Teorema 4.26. *(Propiedades del Cálculo Funcional Holomorfo) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad, $x \in \mathcal{A}$, $G \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de $\sigma(x)$, entonces*

i) La asignación $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo de álgebras entre $H(G,\mathbb{C})$ y $\mathcal{A}$.

ii) Si $f(\lambda) \equiv 1$, entonces $f(x) = \mathbf{1}$.

iii) Si $\imath : G \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión canónica ($\imath(\lambda) = \lambda$), entonces $\imath(x) = x$.

iv) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset H(G,\mathbb{C})$, tal que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de G, entonces

$$\|f_n(x) - f(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

v) Si $f : G \to \mathbb{C}$ tiene expansión en serie de potencias

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$$

con radio de convergencia $R > r(x)$, entonces $f \in H(G,\mathbb{C})$ y

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathcal{A}.$$

Demostración:
i) Sean $f, g \in H(G,\mathbb{C})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ una colección de curvas cerradas rectificables, positivamente orientada de tal forma que $\sigma(x) \subset \operatorname{int}(\Gamma)$, entonces si

$$\begin{aligned}
(f+\alpha g)(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(f+\alpha g)(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(f(\lambda)+\alpha g(\lambda))(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda + \alpha\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} g(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= f(x) + \alpha g(x)
\end{aligned}$$

Estableciendo así la linealidad. Si ahora además, $\Delta = \{\delta_1, \cdots, \delta_k\}$ es una colección de curvas cerradas rectificables, positivamente orientada tal que $\operatorname{int}(\Gamma) \cup \Gamma([a,b]) \subset \operatorname{int}(\Delta)$, entonces

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Delta} g(\zeta)(\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\zeta\right) \\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\left(\oint_{\Gamma}\oint_{\Delta} f(\lambda)g(\zeta)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}(\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\lambda\right)
\end{aligned}$$

Pero gracias al Lema 4.25, tenemos que

$$(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}(\zeta\mathbf{1}-x)^{-1} = \frac{1}{\zeta-\lambda}(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1} - (\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \frac{-1}{4\pi^2}\left(\oint_\Gamma\oint_\Delta \frac{f(\lambda)g(\zeta)}{\zeta-\lambda}[(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}-(\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}]\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\lambda\right)\\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\left(\oint_\Gamma\oint_\Delta \frac{f(\lambda)g(\zeta)}{\zeta-\lambda}(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\lambda - \oint_\Gamma\oint_\Delta \frac{f(\lambda)g(\zeta)}{\zeta-\lambda}(\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\lambda\right)\\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\left(\oint_\Gamma f(\lambda)\left[\oint_\Delta \frac{g(\zeta)}{\zeta-\lambda}\mathrm{d}\zeta\right](\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda - \oint_\Delta g(\zeta)\left[\oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\zeta-\lambda}\mathrm{d}\lambda\right](\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\zeta\right)
\end{aligned}
$$

donde el intercambio en el orden de integración del segundo sumando se justifica usando que $\varphi(\oint_\Gamma\oint_\Delta) = \varphi(\oint_\Delta\oint_\Gamma)$ para toda $\varphi \in \mathcal{A}^*$. Ahora notemos que, gracias a cómo tomamos las colecciones Γ y Δ, si $\lambda \in \Gamma([a,b])$ entonces $\lambda \in \operatorname{int}(\Delta)$ y por lo tanto por la Fórmula de Cauchy usual A.10, se tiene que

$$\oint_\Delta \frac{g(\zeta)}{\zeta-\lambda}\mathrm{d}\zeta = 2\pi i g(\lambda)$$

Mientras que, si $\zeta \in \Delta([a,b])$ entonces $\zeta \in \operatorname{ext}(\Gamma)$, por lo que por el Teorema de Cauchy usual A.9 tenemos que

$$\oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\zeta-\lambda}\mathrm{d}\lambda = 0$$

Luego, en efecto

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \frac{-1}{4\pi^2}\oint_\Gamma f(\lambda)\Big[2\pi i g(\lambda)\Big](\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda - 0\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)g(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (fg)(\lambda)(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\
&= (fg)(x)
\end{aligned}
$$

ii) y *iii)* Definamos $f : G \to \mathbb{C}$ como $f(\lambda) := \lambda^k$ con $k \in \mathbb{N}$, claramente cuando $k = 0$ tenemos que $f \equiv 1$ y cuando $k = 1$, $f \equiv \imath$. Sea $\gamma : [0,1] \to G$ dada por $\gamma(t) := Re^{2\pi i t}$ con $R > \|x\|$, para que así $\sigma(x) \subset \operatorname{int}(\gamma)$. Como $\|x/\lambda\| < 1$ para toda $\lambda \in \gamma([0,1])$, por el Teorema 2.7, se tiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^k(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^{k+1}\left(\mathbf{1}-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^{k+1}\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\lambda^n}\right)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty\left(\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{n-k+1}}\right)x^n,
\end{aligned}
$$

donde el cambio de la serie por la integral en la última igualdad se justifica por que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/\lambda^n$ converge uniformemente para toda $\lambda \in \gamma([0,1])$. Por el Teorema de Cauchy A.9, la integral dentro del paréntesis vale 0 para toda $n \neq k$ y por la Fórmula Integral de Cauchy A.10, vale $2\pi i$ cuando $n = k$. Por lo tanto tenemos que $f(x) = x^k$. Entonces concluimos que $1(x) = x^0 = \mathbf{1}$ y que $\imath(x) = x^1 = x$.

iv) Tomando Γ igual que en *i)*, tenemos que para $k = 1, \cdots, m$ fija y parametrizando cada $\gamma_k : [0,1] \to G$, tenemos que $t \mapsto (\gamma_k(t)\mathbf{1} - x)^{-1}$ es continua en el compacto $[0,1]$, y por lo tanto está acotada por alguna $M_k > 0$

$$\begin{aligned}
\left\| \oint_{\gamma_k} \Big[f_n(\lambda) - f(\lambda) \Big] (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda \right\| &= \left\| \int_0^1 \Big[(f_n - f)(\gamma_k(t)) \Big] (\gamma_k(t)\mathbf{1} - x)^{-1} \gamma_k'(t) \mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \int_0^1 |(f_n - f)(\gamma_k(t))| \left\| (\gamma_k(t)\mathbf{1} - x)^{-1} \right\| |\gamma_k'(t)| \mathrm{d}t \\
&\leq \|(f_n - f) \circ \gamma_k\|_\infty M_k |\gamma_k|
\end{aligned}$$

pero como $f_n \to f$ uniformemente en compactos de G, entonces $\|(f_n - f) \circ \gamma_k\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por lo que, aplicando la desigualdad del triangulo obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - f(x)\| &= \left\| \oint_\Gamma f_n(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda - \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left\| \oint_{\gamma_k} f_n(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda - \oint_{\gamma_k} f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda \right\| \\
&= \sum_{k=1}^m \left\| \oint_{\gamma_k} \Big[f_n(\lambda) - f(\lambda) \Big] (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^m \|(f_n - f) \circ \gamma_k\|_\infty M_k |\gamma_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

v) Finalmente definamos a p_n como los polinomios

$$p_n(\lambda) := \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$$

Gracias a la linealidad del cálculo funcional holomorfo y a que $f(x) = x^k$ si $f(\lambda) = \lambda^k$, tenemos que

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

Como $p_n \to f$ en los compactos $\{\lambda : |\lambda| < R\}$, pues $R > \sigma(x)$, entonces por el último inciso $\|p_n(x) - f(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por lo que en efecto se sigue el resultado. ■

Observación 4.27. Notemos que la demostración del inciso *v)* muestra que el cálculo funcional holomorfo coincide con el polinomial definido desde el primer capítulo, por lo que se puede pensar como una extension de este último.

Observación 4.28. En la literatura el cálculo funcional holomorfo también recibe el nombre de ***cálculo funcional de Riesz-Dunford***, debido a que fue introducido por M.Riesz y desarrollado a profundidad por N. Dunford (ver [6]).

A continuación vemos que la asignación $f \mapsto f(x)$ es la única que cumple las propiedades del Teorema anterior.

Proposición 4.29. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad, $x \in \mathcal{A}$, $G \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de $\sigma(x)$ y supongamos que $\Phi : H(G,\mathbb{C}) \to \mathcal{A}$ es un homomorfismo de álgebras que cumple $\Phi(1) = \mathbf{1}$, $\Phi(\imath) = x$, si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset H(G,\mathbb{C})$, tal que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de G, entonces $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ en $\mathcal{A}$. Entonces $\Phi(f) = f(x)$.*

Demostración:
Notemos primero que si $f(\lambda) := \lambda^k$ entonces $\Phi(f) = \Phi(\imath)^k = x^k$; por lo que $\Phi(p) = p(x)$ para cualquier polinomio en $\mathbb{C}[\lambda]$ con $\lambda \in G$. Sea q otro polinomio sin ceros en G, entonces $1/q \in H(G,\mathbb{C})$ y

$$\mathbf{1} = \Phi(1) = \Phi\left(q\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)\Phi\left(\frac{1}{q}\right) = q(x)\Phi\left(\frac{1}{q}\right)$$

por lo que $q(x)^{-1} = \Phi(q^{-1})$, pero por otro lado $q(x)^{-1} = (q^{-1})(x)$, lo que implica que $\Phi(q^{-1}) = (q^{-1})(x)$. Sea ahora f cualquier función racional en G, entonces $f = p/q$ con p y q polinomios tal que q no se anula en G, entonces

$$\Phi(f) = \Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \Phi(p)\Phi(q^{-1}) = p(x)(q^{-1})(x) = f(x)$$

Finalmente tomemos cualquier $f \in H(G,\mathbb{C})$, entonces por el Teorema de Runge A.11 existe una sucesión de funciones racionales $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, sin polos en $\sigma(x)$, tal que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de G, así por propiedades de Φ tenemos que, como cada f_n es racional, entonces

$$f_n(x) = \Phi(f_n) \to \Phi(f)$$

pero por *iv)* del Teorema anterior $f_n(x) \to f(x)$, por lo que en efecto $\Phi(f) = f(x)$. ■

En relación con el Teoremas 2.42 y los Teoremas 3.28 y 3.29, del cálculo funcional continuo y el boreliano respectivamente, el cálculo funcional holomorfo tiene la propiedad del mapeo espectral y la composición está bien definida, como mostramos en el siguiente resultado

Teorema 4.30. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad, $x \in \mathcal{A}$ y G una vecindad abierta de $\sigma(x)$. Entonces para $f \in H(G,\mathbb{C})$ se tiene que*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$$

Más aún, si $g \in H(G',\mathbb{C})$, donde G' es una vecindad abierta de $f(\sigma(x))$ elegida de tal forma que $(g \circ f) \in H(G \cap f^{-1}(G'),\mathbb{C})$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Demostración:
Veamos la propiedad del mapeo espectral. Si $\lambda_0 \notin f(\sigma(x))$, y definimos $h : G \to \mathbb{C}$ como

$$h(\lambda) := (f(\lambda) - \lambda_0)^{-1}$$

entonces $h \in H(G,\mathbb{C})$ y $h(x)(f(x) - \lambda_0) = \mathbf{1}$, lo que implica que $\lambda_0 \notin \sigma(f(x))$, probando así que $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$. Si ahora $\lambda_0 \in \sigma(x)$, tomemos $h \in H(G,\mathbb{C})$ tal que

$$(\lambda - \lambda_0)h(\lambda) = f(\lambda) - f(\lambda_0),$$

supongamos que $f(\lambda_0) \notin \sigma(f(x))$, entonces $(f(x) - f(\lambda_0))^{-1} = [(x - \lambda_0)h(x)]^{-1}$ lo que implica que $(x - \lambda_0)^{-1} = h(x)(f(x) - f(\lambda_0))^{-1}$ contradiciendo el hecho que $\lambda_0 \in \sigma(x)$. Por lo tanto necesariamente $f(\lambda_0) \in \sigma(f(x))$ cuando $\lambda_0 \in \sigma(x)$, lo que implica contención faltante $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$.

Para ver la composición, pongamos $U = f^{-1}(G')$ y sea Γ una colección de curvas cerradas en U, positivamente orientada y tal que $\sigma(x) \subset U \subset \operatorname{int}(\Gamma)$. Sea también Δ una colección de curvas cerradas en G', positivamente orientada, tal que $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)) \subset \operatorname{int}(\Delta)$ y qué además $\operatorname{Ind}_\Delta(\beta) = 1$ para toda $\beta \in f(\Gamma([a,b]))$, así pues poniendo $\beta := f(\lambda)$ con $\lambda \in \Gamma([a,b])$, por el Teorema A.10 tenemos que

$$g\Big(f(\lambda)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Delta \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)}\mathrm{d}\zeta \tag{4.3}$$

Además para cada $\zeta \in \Delta([a,b])$, la función $\lambda \mapsto (\zeta - f(\lambda))^{-1}$ pertenece a $H(G,\mathbb{C})$, aplicando el cálculo funcional holomorfo a esta última función se tiene

$$(\zeta\mathbf{1} - f(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\zeta - f(\lambda))^{-1}(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}}{\zeta - f(\lambda)}\mathrm{d}\lambda \tag{4.4}$$

Así que en efecto

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (g\circ f)(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma g\Big(f(\lambda)\Big)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&\overset{(4.3)}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Delta \frac{g(\zeta)}{\zeta - f(\lambda)}\mathrm{d}\zeta\right)(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\Delta g(\zeta)\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}}{\zeta - f(\lambda)}\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\zeta \\
&\overset{(4.4)}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma g(\zeta)(\zeta\mathbf{1} - f(x))^{-1}\mathrm{d}\zeta \\
&= g(f(x)).
\end{aligned}$$

donde el cambio en el orden de integración de la cuarta linea, se justifica de nuevo usando que $\varphi(\oint_\Gamma \oint_\Delta) = \varphi(\oint_\Delta \oint_\Gamma)$ para toda $\varphi \in \mathcal{A}^*$. ∎

Concluimos la sección con una aplicación del cálculo funcional holomorfo, pero antes es necesario un Lema que establece cierta preservación de la conmutatividad, al estilo de la establecida al final en las hipótesis del Teorema 3.25 para el cálculo funcional boreliano.

Lema 4.31. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, $x, y \in \mathcal{A}$ y $G \subset \mathbb{C}$ una vecindad abierta de $\sigma(x)$. Si $xy = yx$ entonces $f(x)y = yf(x)$ para toda $f \in H(G, \mathbb{C})$.*

Demostración:
Sea primero $f = p/q$ una función racional, con q un polinomio que no se anula en $\sigma(x)$, entonces como $p(x)$ y $q(x)$ son "polinomios" en x y $xy = yx$ se tiene que $p(x)y = yp(x)$ y $q(x)y = yq(x)$ y por lo tanto que también $y(q(x))^{-1} = (q(x))^{-1}y$, así que

$$f(x)y = (pq^{-1})(x)y = p(x)(q(x))^{-1}y = yp(x)(q(x))^{-1} = y(pq^{-1})(x) = yf(x).$$

Es decir que el resultado se tiene siempre que f sea racional. Entonces si $f \in H(G, \mathbb{C})$, por el Teorema de Runge A.11 existe una sucesión de funciones racionales $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, sin polos en $\sigma(x)$, tal que $f_n \to f$ en subconjuntos compactos de G, como para cada n se tiene que $f_n(x)y = yf_n(x)$, entonces en efecto $f(x)y = yf(x)$. ∎

Teorema 4.32. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$ de tal forma que $\sigma(x) = K_1 \cup K_2$ con K_1, K_2 compactos, no vacíos y disjuntos. Entonces existe un $e \in \mathcal{A}$ tal que*

(1) Es un elemento idempotente, i.e. $e^2 = e$.

(2) Si $y \in \mathcal{A}$ tal que $xy = yx$, entonces $ey = ye$.

(3) Si $x_1 := xe$ y $x_2 := x(\mathbf{1} - e)$, entonces $x = x_1 + x_2$ y $x_1x_2 = 0 = x_2x_1$.

(4) Para $j = 1, 2$, $\sigma(x_j) = K_j \cup \{0\}$

(5) Se tiene que $e \neq 0$ y $e \neq \mathbf{1}$.

Demostración:
Sean G_1, G_2 dos subconjuntos disjuntos y abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $K_j \subset G_j$, $j = 1, 2$. Sea Γ una colección de curvas cerradas en G_1 y positivamente orientada tal que $K_1 \subset \operatorname{int}(\Gamma)$ y $K_2 \subset \operatorname{ext}(\Gamma)$. Definamos $f : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ como

$$f(\lambda) := \chi_{G_1}(\lambda)$$

Como G_1 y G_2 son disjuntos, entonces $f \in H(G_1 \cup G_2, \mathbb{C})$. Definimos entonces $e := f(x)$, como $\chi_{G_1}^2 = \chi_{G_1}$ entonces $e^2 = e$, probando así *(1)*. Si $xy = yx$, por el Lema anterior se tiene $ey = f(x)y = yf(x) = ye$, por lo que se cumple *(2)*. Es obvio que $x = x_1 + x_2$, para tener todo *(3)*, vemos que, como por lo anterior $ex = xe$ y $e^2 = e$, entonces

$$x_1x_2 = xe(x(\mathbf{1} - e)) = xe(x - ex) = xex - xe^2x = 0$$

y análogamente

$$x_2x_1 = x(\mathbf{1} - e)xe = (x - xe)ex = xex - xe^2x = 0$$

Definamos ahora $f_1, f_2 : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ como

$$f_1(\lambda) := \lambda f(\lambda)$$
$$f_2(\lambda) := \lambda(1 - f(\lambda)),$$

entonces

$$f_1(x) = xf(x) = xe = x_1 \;\&\; f_2(x) = x(\mathbf{1} - f(x)) = x(\mathbf{1} - e) = x_2$$

Entonces, por la Propiedad del mapeo espectral 4.30 tenemos que

$$\sigma(x_1) = \sigma(f_1(x)) = f_1(\sigma(x)) = f_1(K_1 \cup K_2) = \imath(K_1) \cup \{0\} = K_1 \cup \{0\}$$

y notando que $f_2 = \imath - f_1$, 4.30 también implica que

$$\sigma(x_2) = \sigma(f_2(x)) = f_2(\sigma(x)) = (\imath - f_1)(K_1 \cup K_2) = \imath(K_2) \cup \{0\} = K_2 \cup \{0\},$$

probando así *(4)*. Supongamos ahora que $e = 0$, entonces $x_1 = 0$ y por *(4)* se tiene que $K_1 \cup \{0\} = \sigma(x_1) = \sigma(0) = \{0\}$, lo que implica que $K_1 = \emptyset$, y entonces se contradice la hipótesis. Similarmente, si $e = \mathbf{1}$, entonces $x_2 = 0$ y ahora *(4)* implica que $K_2 = \emptyset$, contradiciendo de nuevo la hipótesis. Así que en efecto se tiene *(5)*. ■

Apéndice A

Teoremas Básicos

Análisis Funcional: [4], [19]

Teorema A.1. *(Banach-Steinhaus) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $\mathcal{Y}$ un espacio vectorial normado. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una familia de operadores acotados tal que para cualquier $x \in \mathcal{X}$ se tiene que*

$$\sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \left\|\mathrm{T}(x)\right\|_{\mathcal{Y}} < \infty.$$

Entonces

$$\sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \|\mathrm{T}\| < \infty.$$

Teorema A.2. *(Corolario de Hahn-Banach) Sea $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $x_0 \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$. Entonces existe un $F \in \mathcal{X}^*$ tal que $F(x_0) = \|x_0\|$ y $\|F\| = 1$.*

Teorema A.3. *(Teorema de Banach-Alaoglu) Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. Entonces la bola unitaria cerrada en $\mathcal{X}^*$, i.e. $\{\varphi \in \mathcal{X}^* : \|\varphi\| \leq 1\}$, es compacta con la topología débil-$*$.*

Teorema A.4. *(Parseval) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de $\mathcal{H}$, entonces para cualquier $y \in \mathcal{H}$ se tiene*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle e_n; \qquad \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle y, e_n\rangle\right|^2$$

Teorema A.5. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ una forma bilineal acotada. Entonces existe un único operador $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que*

$$\varphi(x, y) = \langle \mathrm{T}x, y\rangle \ \forall\, x, y \in \mathcal{H}.$$

Más aún $\|\mathrm{T}\| = \|\varphi\|$.

Teorema A.6. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces*

$$\langle \mathrm{T}x, y\rangle = \overline{\langle \mathrm{T}y, x\rangle} \ \forall\, x, y \in \mathcal{H}$$

si y sólo si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$.

Variable Compleja: [3]

Teorema A.7. *(Teorema de Goursat) Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y $f : G \to \mathbb{C}$ una función diferenciable; entonces f es holomorfa en G.*

Teorema A.8. *(Teorema de Liouville) Si f es una función entera y acotada, entonces f es constante.*

Teorema A.9. *(Teorema de Cauchy) Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $g : G \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$, una colección de curvas cerradas rectificables tal que cada $\gamma_k([a,b]) \subset G$ e $\mathrm{Ind}_\Gamma(\mathbb{C} \setminus G) = \{0\}$. Entonces*

$$\oint_\Gamma g = 0$$

Teorema A.10. *(Fórmula Integral de Cauchy) Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa y γ una curva cerrada rectificable con $\mathrm{Ind}_\gamma(\mathbb{C} \setminus G) = \{0\}$. Entonces para cualquier $\lambda_0 \in G$ y cualquier $k = 0, 1, 2, \cdots$ se tiene que*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda_0) \cdot f^{(k)}(\lambda_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} \mathrm{d}\lambda$$

Teorema A.11. *(Teorema de Runge) Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto y $E \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ que intersecta todas las componentes de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Si f es holomorfa en una vecindad de K, entonces existen funciones racionales f_n, cuyos únicos polos están en E, tales que $f_n \to f$ uniformemente en K.*

Análisis: [22]

Teorema A.12. *(Teorema de Stone–Weierstrass) Sea K un espacio de Hausdorff compacto y sea $\mathcal{U}$ un subespacio de $\mathcal{C}(K)$ que separa puntos. Entonces el álgebra-$*$ unitaria generada por $\mathcal{U}$ es densa en $\mathcal{C}(K)$.*

Teorema A.13. *(Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue) Sea $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones complejo valuadas y medibles tal que*

$$f(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(w)$$

existe para toda $w \in \Omega$. Si existe una $g \in L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ para toda $n = 1, 2, \cdots$ entonces $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$$

Apéndice B

Ideales y Cocientes

Esta sección es para introducir conceptos que son fundamentales para demostrar el Teorema 2.27. El material aquí presentado fue tomado en su mayoría de [1] y [19].

Definición B.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Un* ***ideal*** *en $\mathcal{A}$ es un subespacio lineal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$, tal que para toda $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$, $\mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}$.*

Hay dos ideales triviales, que son $\mathcal{I} = \{0\}$ e $\mathcal{I} = \mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{A}$ es llamada un álgebra simple si estos son los únicos ideales que existen. Un ideal es propio si no es todo $\mathcal{A}$.

Ejemplo:
Considere $\mathcal{A} := \mathcal{C}([0,1])$ y $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$. Un ideal en $\mathcal{A}$ es

$$\mathcal{I} := \{f \in \mathcal{A} : f(t_j) = 0, j = 1, \ldots, n\}.$$

♦

En lo sucesivo $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad.

Proposición B.2.
i) *Si $\mathcal{I}$ es ideal propio de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{I} \cap \mathrm{GL}(\mathcal{A}) = \emptyset$ (es decir que los ideales propios no tienen elementos invertibles).*
ii) *Si $\mathcal{I}$ es un ideal propio de $\mathcal{A}$, entonces su cerradura $\overline{\mathcal{I}}$ también es un ideal propio.*

Demostración:
i) Supongamos que existe $y \in \mathcal{I} \cap \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces, como $\mathcal{I}$ es ideal, $yy^{-1} = \mathbf{1} \in \mathcal{I}$, lo que implica que cualquier elemento de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{I}$, pero esto es una contradicción, ya que $\mathcal{I}$ está contenido propiamente.
ii) Verifiquemos la propiedad de ideal. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ con $a_n \to a \in \overline{\mathcal{I}}$. Entonces también, para cualquier $x \in \mathcal{A}$, se tiene que $xa_n \to xa$ y $a_n x \to ax$, por lo tanto ax y xa están en $\overline{\mathcal{I}}$. Veamos que $\overline{\mathcal{I}} \subset \mathcal{A}$ propiamente. Sea $a \in \overline{\mathcal{I}}$, y $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}$ tal que $a_n \to a$. Como, por *i)*, cada $a_n \notin \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, entonces $\|\mathbf{1} + a_n\| \geq 1$, así cuando hacemos $n \to \infty$ obtenemos que $\|\mathbf{1} + a\| \geq 1$, lo cual prueba que la contención es propia. ■

Definición B.3. *Un ideal de $\mathcal{A}$ es **maximal** si no está contenido en ningún otro ideal más que en $\mathcal{A}$. El conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$ contenidos propiamente es denotado $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Observación B.4.
i) De la proposición anterior tenemos que todo ideal maximal es cerrado, pues $\mathcal{I} \subset \overline{\mathcal{I}}$.
ii) Es consecuencia del Lema de Zorn que cualquier ideal propio de $\mathcal{A}$ está contenido en un ideal maximal.

Para los siguientes resultados recordemos el concepto de espacio cociente. Si $\mathcal{V}$ es un subespacio lineal del álgebra $\mathcal{A}$, definimos el espacio cociente como las clases de equivalencia dadas por la relación $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $x_1 - x_2 \in \mathcal{V}$, es decir

$$\mathcal{A}/\mathcal{V} := \{x + \mathcal{V} : x \in \mathcal{A}\}$$

La norma en $\mathcal{A}/\mathcal{V}$ se define como

$$\|x + \mathcal{V}\| := \operatorname{ínf}\{\|x + y\| : y \in \mathcal{V}\}.$$

Se sabe que el espacio cociente es un espacio lineal normado con la suma y la multiplicación por escalar definidas de manera natural (ver [4]). Más aún, es de Banach cuando $\mathcal{A}$ lo es y $\mathcal{V}$ es cerrado.

Teorema B.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, si $\mathcal{I}$ es un ideal propio y cerrado de $\mathcal{A}$, entonces*

i) El espacio cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach.

ii) Si $\mathcal{A}$ tiene unidad, también $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.

iii) El mapeo $\varpi : x \mapsto x + \mathcal{I}$ es un homomorfismo complejo suprayectivo y con $\mathcal{N}(\varpi) = \mathcal{I}$.

Demostración:
Definamos la multiplicación en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ como $(x + \mathcal{I})(y + \mathcal{I}) := xy + \mathcal{I}$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Para *i)* ya sabemos que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un espacio de Banach. Se pueden verificar las propiedades distributivas y asociativas de la multiplicación en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Ahora queremos verificar la propiedad de la norma en las álgebras, es decir que

$$\|(x + \mathcal{I})(y + \mathcal{I})\| \leq \|x + \mathcal{I}\|\|y + \mathcal{I}\|.$$

Sean $u, v \in \mathcal{I}$, luego $(x + u)(y + v) = xy + xv + uy + uv$, pero $xv + uy + uv \in \mathcal{I}$. Entonces,

$$\|(x + \mathcal{I})(y + \mathcal{I})\| \leq \|xy + xv + uy + uv\| \leq \|x + u\|\|x + v\|.$$

Tomando ínfimos sobre u y v se obtiene la desigualdad requerida. Por lo tanto $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach.
Para ver *ii)*, notemos $\mathbf{1} + \mathcal{I}$ cumple la condición de ser neutro multiplicativo. Además se tiene que $\|\mathbf{1} + \mathcal{I}\| \leq \|\mathbf{1}\| = 1$. Más aún, no existe $x \in \mathcal{I}$ con $\|\mathbf{1} - x\| < 1$, de lo contrario $x \in GL(\mathcal{A})$ que contradice a *i)* de la Proposición B.2, por lo que podemos concluir que $\|\mathbf{1} + \mathcal{I}\| = 1$.

Para *iii)*, ya sabemos que tal mapeo es suprayectivo y lineal. Además

$$\|\varpi(x)\| = \|x + \mathcal{I}\| \leq \|x\|,$$

por lo tanto ϖ es acotada. Claramente $\mathcal{N}(\varpi) = \mathcal{I}$, y como

$$\varpi(xy) = xy + \mathcal{I} = (x + \mathcal{I})(y + \mathcal{I}) = \varpi(x)\varpi(y),$$

se tiene entonces la propiedad multiplicativa. ■

Teorema B.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja, conmutativa y con unidad, y sea $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración:
Ya sabemos que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach con unidad. Entonces por el Teorema 2.18 de Gelfand-Mazur basta probar que todo elemento en $\mathcal{A}/\mathcal{I} \setminus \{0 + \mathcal{I}\}$ es invertible. Tomemos $x + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ con $x \notin \mathcal{I}$, i.e. $x + \mathcal{I} \notin \{0 + \mathcal{I}\}$. Definamos

$$\mathcal{J} = \{xz + y : z \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{I}\} = x\mathcal{A} + \mathcal{I}.$$

Notemos que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ y que para cualquier $z \in \mathcal{A}$ se tiene que $z\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ y $\mathcal{J}z \subset \mathcal{J}$ por lo que $\mathcal{J}$ es un ideal que contiene propiamente a $\mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ es maximal, $\mathcal{J} = \mathcal{A}$, por lo que existen $u \in \mathcal{A}$ y $v \in \mathcal{I}$ tal que $ux + v = \mathbf{1} = xu + v$ (usando la conmutatividad). Así,

$$(x + \mathcal{I})(u + \mathcal{I}) = (u + \mathcal{I})(x + \mathcal{I}) = \mathbf{1} + \mathcal{I}.$$

Por lo que $(x + \mathcal{I})^{-1} = (u + \mathcal{I})$, es decir que en efecto cualquier elemento de $\mathcal{A}/\mathcal{I} \setminus \{0 + \mathcal{I}\}$ es invertible. ■

Teorema B.7. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja, conmutativa y con unidad. Entonces,*
i) Para toda $\omega \in \hom(\mathcal{A})$, se tiene que $\mathcal{N}(\omega) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$
ii) Para todo $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, existe $\omega \in \hom(\mathcal{A})$ con $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{I}$.

Demostración:
i) Como $\mathcal{N}(\omega) = \omega^{-1}(\{0\})$ y ω es continua, entonces $\mathcal{N}(\omega)$ es un subespacio cerrado y podemos ver que es un ideal, pues $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y) = 0$ para todo $y \in \mathcal{N}(\omega)$ y $x \in \mathcal{A}$. Definiendo la función $\omega' : \mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega) \to \mathbb{C}$ como

$$\omega'\left(x + \mathcal{N}(\omega)\right) = \omega(x)$$

se tiene que $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega)$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$, es decir que $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega)$ es un campo. Supongamos que existe un ideal $\mathcal{I}$ con $\mathcal{N}(\omega) \subset \mathcal{I}$, si $a \in \mathcal{I}$ pero $a \notin \mathcal{N}(\omega)$ entonces por ser $\mathcal{A}/\mathcal{N}(\omega)$ campo, existe un b tal que $(ab + \mathcal{N}(\omega)) = (a + \mathcal{N}(\omega))(b + \mathcal{N}(\omega)) = (\mathbf{1} + \mathcal{N}(\omega))$ por lo que $\mathbf{1} - ab \in \mathcal{N}(\omega) \subset \mathcal{I}$ y como además $ab \in \mathcal{I}$ se sigue que $\mathbf{1} \in \mathcal{I}$, entonces $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ y por lo tanto $\mathcal{N}(\omega)$ tiene que ser un ideal maximal.
ii) Sea $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Sea $\theta : \mathcal{A}/\mathcal{I} \to \mathbb{C}$ el isomorfismo isométrico del Teorema anterior y sea $\varpi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ el del Teorema B.5 *iii)*. Entonces $\omega := \theta \circ \varpi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ cumple que $\omega \in \hom(\mathcal{A})$ y que $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{I}$. ■

Apéndice C

Teorema de Riesz-Markov

En este apéndice damos los preliminares necesarios de Teoría de la Medida para poder enunciar el Teorema de Representación de Riesz-Markov, del cual dependen ambos Teoremas Espectrales presentados en esta tesis. El material aquí presentado así como una prueba de ambos Teoremas pueden ser consultados en [22].

Definición C.1. *Sea Ω un espacio topológico, decimos que*

i *$K \subset \Omega$ es **compacto** si cualquier cubierta abierta de K admite una subcubierta finita. Si Ω es compacto decimos que Ω es un **espacio compacto**.*

ii) *Ω es un espacio de **Hausdorff** si para todo $p, q \in \Omega$ con $p \neq q$ existen vecindades U_p y V_q de p y q respectivamente tales que $U_p \cap V_q = \emptyset$.*

iii) *Ω es **localmente compacto** si cualquier punto de Ω tiene una vecindad U tal que $\overline{U}$ es compacto. Claramente cualquier espacio compacto es localmente compacto.*

Definición C.2. *Sea Ω un espacio topológico, la menor σ-álgebra que contiene todos los abiertos de Ω es llamada la **σ-álgebra de Borel**, la cual denotamos por $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega)$, los elementos de $\mathfrak{B}$ son llamados los **borelianos** de Ω. Si Ω es de Hausdorff, y $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra de Ω con $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$ entonces una medida μ definida en el espacio medible $(\Omega, \mathfrak{M})$ es llamada **medida de Borel**.*

Definición C.3. *Sea μ una medida positiva de Borel en $(\Omega, \mathfrak{M})$, decimos que μ es **regular** si para cualquier $E \in \mathfrak{M}$ se tiene que*

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subset V;\ V \text{ es abierto}\},$$

y que para cualquier E abierto y para cualquier $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) < \infty$ se tiene

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E;\ K \text{ es compacto}\}.$$

Definición C.4. *Sea $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio con medida. Decimos que μ es una **medida completa** cuando para $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) = 0$, si $A \subset E$ entonces $A \in \mathfrak{M}$.*

Definición C.5. *Sea Ω un espacio topológico y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se define el* ***soporte*** *de f como*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{w \in \Omega : f(w) \neq 0\}}$$

La colección de funciones en Ω complejo valuadas que tienen soporte compacto es denotada por $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Por supuesto cuando Ω es compacto $\mathcal{C}_c(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$.

Definición C.6. *Un funcional lineal $\varphi : \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{C}$ es llamado* ***positivo*** *si para $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset [0, \infty)$ se tiene que $\varphi(f) \in [0, \infty)$.*

Con todas las definiciones anteriores tenemos lo necesario para enunciar el teorema de interés:

Teorema C.7. *(Teorema de Representación de Riesz-Markov) Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sea φ un funcional lineal positivo en $\mathcal{C}_c(\Omega)$, entonces existe una única medida completa de Borel regular μ en Ω, con $\mu(K) < \infty$ para cualquier $K \subset X$ compacto, tal que para toda $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$*

$$\varphi(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$$

Una modificación del Teorema anterior elimina la necesidad de que el funcional positivo, pero ahora el funcional tiene que ser acotado y tiene que estar definido para funciones que se desvanecen en el infinito. Si Ω es un espacio de Hausdorff localmente compacto, decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se ***desvanece en el infinito*** si para toda $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{w \in \Omega : |f(w)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. Denotamos al conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que se desvanecen en el infinito por $\mathcal{C}_0(\Omega)$. De nuevo cuando Ω es compacto, $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$.

Definición C.8. *Una medida complejo valuada es* ***regular*** *cuando su variación total $|\mu|$ es una medida regular.*

Teorema C.9. *Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sea τ un funcional lineal acotado en $\mathcal{C}_0(\Omega)$, entonces existe una única medida complejo valuada y regular μ en Ω, tal que para toda $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$*

$$\tau(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Más aún $\|\tau\| = |\mu|(\Omega)$, donde $|\mu|$ es la variación total de μ.

Bibliografía

[1] William Arveson. *A Short Course on Spectral Theory*. Springer, 2001.

[2] Carlos Bosch and Charles Swartz. *Functional Calculi*. World Scientific, 2013.

[3] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Graduate Texts in Mathematics, vol.11. Springer, 2nd edition, 1978.

[4] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, vol.96. Springer, 2nd edition, 1990.

[5] E. Brian Davies. *Spectral Theory and Differential Operators*. Cambridge University Press, 1995.

[6] Nelson Dunford. *Uniformity in Linear Spaces*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 44: pp. 305–356, 1938.

[7] Kurt O. Friedrichs. *Spectral Theory of Operators in Hilbert Space*. Applied Mathematical Sciences, vol.9. Springer, 1973.

[8] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices, Vol. 1*. American Mathematical Society, 2000.

[9] Marcos López García. *El problema del subespacio invariante*. Miscelánea Matemática, vol. 58: pp. 111–124, 2014.

[10] Paul Garrett. *Unitary Representations of Topological Groups*. School of Mathemtics, University of Minnesota, 2014.

[11] Guillermo Grabinsky. *Teoría de la Medida*. Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2009.

[12] Paul R. Halmos. *What Does the Spectral Theorem Say?* The American Mathematical Monthly, vol. 70-3: pp. 241–247, 1963.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1994.

[14] Brian R. Jefferies. *Spectral Properties of Noncommuting Operators*. Lecture notes in mathematics, vol.1843. Springer, 2004.

[15] Vladimir K. Kisil and Enrique Ramírez de Arellano. *The Riesz-Clifford Functional Calculus for Non-Commuting Operators and Quantum Field Theory*. Mathematical Methods in Applied Sciences, vol. 19: pp. 593–605, 1996.

[16] Carlos S. Kubrusly. *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*. Birkhäuser Basel, 2012.

[17] Alan McIntosh. *Operator Theory - Spectra and Functional Calculi*. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, 2010.

[18] Rafael E. Morones. *Cálculo de la función exponencial de una matriz*. Dept. de Matemáticas, ITAM, 2012.

[19] Gerald J. Murphy. *C^*–Algebras and Operator Theory*. Academic Press, 1990.

[20] Jacob T. Schwartz Nelson Dunford. *Linear Operators, Part I: General Theory*. Wiley-Interscience, 1988.

[21] Sam Raskin. *Spectral Measures and the Spectral Theorem*. University of Chicago R.E.U., 2006.

[22] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.

[23] Danna P. Williams. *Lecture Notes on the Spectral Theorem*. Department of Mathematics, Dartmouth College, 2011.

[24] Kosaku Yosida. Functional Analysis. Springer-Verlag, 6th edition, 1980.