CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Haces Vectoriales Sobre Espacios de Configuraciones

T E S I S

QUE PRESENTA

ISAAC ORTIGOZA SUÁREZ

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MIGUEL ALEJANDRO XICOTÉNCATL MERINO

CIUDAD DE MÉXICO. AGOSTO, 2016

Índice general

A mis padres

José Luis Ortigoza
y
Lucia Teresa Suárez

A mi esposa Lupita Reyes

A mi hija Regina Ortigoza

Agradecimientos

En esta ocasión quiero dividir los agradecimientos en cuatro grandes partes, que han sido pilares, que me sostienen y me alientan a seguir superándome: Mi familia, las instituciones que me han formado y a las que espero contribuir, los maravillosos amigos que he conocido en esta etapa de mi vida, y mi razón de ser quienes me alientan con su presencia a seguir superándome, así pues, en ese orden, antes que nada quiero agradecer a mi familia:

> A José Luis Ortigoza te extraño mucho papá, en gran medida, este logro es por ti. Siempre extrañaré esos momentos en los que platicábamos de matemáticas. El amor que le tengo a esta ciencia es gracias a ti.
>
> A Lucía Teresa Suárez, porque me has dado amor, consejos, apoyo, comprensión a pesar de los momentos difíciles que hemos pasado y por haber sido un ejemplo en mi vida.

Ambos me han formado como un ser de valores y principios, lo que considero, es la parte más difícil en la educación.

> A mi hermana: Ingrid Ortigoza a quien admiro por sus logros, quien siempre me ha dado su apoyo de manera incondicional.
>
> A mi cuñado: Francisco Saavedra por el apoyo que le ha dado a mi familia, principalmente a mi hermana.
>
> A mi tía Tey, por su ayuda en diversos aspectos de mi vida, por sus comentarios constructivos; por haber sido siempre un ejemplo de esfuerzo y determinación.

A mi tío Mauricio Ortigosa quien, en cierto modo, es mi hermano mayor, quien ha sido un modelo de éxito y desarrollo integral.

A Adriana Paredes una gran amiga y ahora parte muy importante de mi familia, quien siempre tiene esa actitud positiva y llena de energía que nos contagia a todos.

Al resto de mi familia por sus contribuciones a mi formación brindadas a lo largo de los años.

Mi agradecimiento a los académicos, las instituciones y a las personas que las integran, quienes contribuyeron para formar profesionistas de gran calidad que puedan ayudar a resolver algunas de las problemáticas del país, gracias por haber depositado su confianza en mí:

A Miguel A. Xicoténcatl, quien fue un excelente maestro que supo motivarme y entusiasmarme por la topología algebraica, así como por su apoyo para la elaboración de esta tesis.

Quiero agradecer a Jesús González, Iakov Mostovoi, por sus consejos, su tiempo y por los conocimientos complementarios a este trabajo, ya que sin ellos no habría notado ni disfrutado muchas de las posibles conexiones y ramificaciones del mismo.

Además no puedo dejar de mencionar a Ruy Fabila Monroy, José Martínez Bernal, Carlos G. Pacheco, y Aldo Guzmán por ser mis maestros, y quienes me ayudaron a descubrir, jugar y gozar las matemáticas en esta etapa.

Al Cinvestav por sus recursos y espacios, así como al apoyo administrativo, de secretaría (Norma Acosta, Anabel Lagos, Roxana Martínez, Adriana Aranda, Laura Valencia y Omar Hernández) de vigilancia, mantenimiento y de intendencia porque su labor es muy valiosa.

A Conacyt por el apoyo económico otorgado sin el cual este trabajo posiblemente no se habría logrado, y al fomento a la ciencia que realizan con diversas actividades y dinámicas.

A esos hermanos que la vida ha puesto en mi camino, y cuya influencia ha sido muy importante.

A mis grandes amigos que se convirtieron en hermanos Rex (Daniel Vázquez), Roberto Fierros, Duck (Francisco Leandro), Yannick de Icaza, Anaid Rosas, con quienes crecí y con quienes me gustaría tratar el resto de mi vida.

A mis amigos del Cinvestav: Nestor Colin, Alejandro González, Oscar A. Méndez, Max E. Mitre, Yulieth K. Prieto, Fabiola Rodríguez, Rodolfo Salinas, Raul Alvarez, Miguel E. Uribe, Wincy A. Guerra, Bárbara M. Gutiérrez, Jonathan J. Gutiérrez, Isidro Morales, Christopher J. Roque, Carlos E. Vivares, Carlos Castro, Alejandra Fonseca, Hugo Corrales, Alejandro Avilés con ellos he aprendido, platicado y reído matemáticas, de no ser por ellos la vida matemática no tendría el sentido que tiene.

Al Acapulco (Jesus Angel Lara Rivera), Julio Cesar Salazar, Eduardo López, Alonso Delfín y en especial a Natalia Cadavid Aguilar con quienes he compartido, no sólo pláticas interesantes de matemáticas, también cine, teatro, vacaciones, etcétera; ellos son, quienes para mí, le dan vida al departamento.

Quiero agradecer de manera muy especial a Nadia Huerta Sánchez por todo, no sólo ha sido una amiga, si no que se ha convertido en la compañera de muchas aventuras, siempre ha estado ayudándome en muchos aspectos, sin mencionar los momentos tan agradables que hemos compartido cafeteando matemáticas.

También quiero agradecer de manera muy especial a Álvaro Martínez Ramírez por ser un gran amigo y compañero en la vida, con él aprendí que a los matemáticos les gustan los polinomios, pero sólo hasta cierto grado.

Por último quiero agradecer a las dos personas más importantes en mi vida, a quienes me motivan, e inspiran para seguir superándome en todos los aspectos.

Quiero expresarle mi más sincera gratitud a mi esposa Lupita Reyes, por ser un breve cielo en la tierra, por ser el amor de mi vida y con quien espero compartir el resto de nuestros años en el mundo.

A mi hija Regina Ortigoza Reyes que es la luz de mis ojos y el motivo de éste y todos mis esfuerzos.

Resumen

En esta tesis se presentan los conceptos básicos de teoría de homotopía necesarios para demostrar el teorema de F. R. Cohen, R. L. Cohen, N. J. Kuhn y J. L. Neisendorfer acerca del orden del haz vectorial canónico

$$\xi_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \to F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$$

sobre el espacio de configuraciones desordenadas de k puntos distintos en $\mathbb{R}^n$, así como las relaciones básicas de periodicidad entre los espacios de Thom asociados $Th(\xi_{n,k})$.
A saber, presentamos el argumento dado en [18] sobre el cálculo del orden de $\xi_{n,k}$ con respecto a la suma de Whitney.

La motivación original de este problema reside en la descomposición estable de Snaith [50]:

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k \geqslant 0} F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k},$$

donde $F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k}$ es el espacio de Thom de r-veces la suma de Whitney del haz vectorial $\xi_{n,k}$.

Los métodos incluyen: el uso de la fibración de James asociada a la sucesión EHP, los teoremas de Selick, Cohen-Moore-Neisendorfer sobre el exponente de la componente p-primaria de los grupos de homotopía de S^{2n+1} y el teorema de Kahn-Priddy.

Abstract

In this thesis are presents necessary basic concepts of homotopy theory to prove the theorem of F. R. Cohen, R. L. Cohen, N. J. Kuhn and J. L. Neisendorfer about the order of the canonical vector bundle $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$

$$\xi_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \to F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$$

over the configuration space of unordered k distint points in $\mathbb{R}^n$, and basic relations of the periodicity from the Thom spaces $Th(\xi_{n,k})$.
Namely, we present the argument given in [18] about the calculation of the order of $\xi_{n,k}$ with respect to the Whitney sum.

The original motivation of this problem lies in the stable decomposition of Snaith [50]:

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k \geqslant 0} F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k},$$

where $F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k}$ is the Thom space of r-fold Whitney sum of the vector bundle $\xi_{n,k}$.

Methods include: the use of James fibration associated with EHP sequence, the theorems of Selick, Cohen-Moore-Neisendorfer on the exponent of the p-primary component of the homotopy groups of S^{2n+1}, and the Kahn-Priddy theorem.

Introducción

Sea $F_k(\mathbb{R}^n)$ el espacio de configuración de k-tuplas ordenadas de puntos distintos en $\mathbb{R}^n$ y considérese el haz vectorial canónico sobre $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$

$$\xi_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \to F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k.$$

En este trabajo presentamos el argumento dado por F. R. Cohen, R. L. Cohen, N. J. Kuhn y J. L. Neisendorfer en [18] sobre el calculo del orden de $\xi_{n,k}$ con respecto a la suma de Whitney.

El estudio de la homotopía estable para los espacios $\Omega^n S^{n+r}$ ha recibido mucha atención [12, 23, 38]. El punto de inicio para este estudio fue la descomposición estable de Snaith [50]:

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k \geqslant 0} F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k},$$

donde $F_k(\mathbb{R}^n)_+$ es el espacio de configuración junto con un punto-base distinto, $(S^r)^{\wedge k}$ es el k-veces el producto reducido de S^r con sigo mismo, Σ_k es el grupo simétrico de k letras, y donde $\simeq_s$ denota la equivalencia homotópica estable.

El espacio $F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k}$ es el espacio de Thom de r-veces la suma de Whitney del haz vectorial $\xi_{n,k}$. Si denotamos por $Th(r\ \xi_{n,k})$ al espacio de Thom asociado, entonces el teorema de Snaith da la siguiente equivalencia

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k\geqslant 0} Th(r\ \xi_{n,k}).$$

Ahora bien, si $\phi_{n,k}$ es el orden estable de $\xi_{n,k}$, entonces tenemos la periodicidad obvia

$$Th((r+\phi_{n,k})\xi_{n,k}) \simeq \Sigma^{k\phi_{n,k}} Th(r\xi_{n,k}).$$

Esto, junto con el teorema de Snaith, da claras relaciones entre los tipos estables de homotopía de los espacios $\Omega^n S^{n+r}$ conforme r varía.

El caso $n = 2$ esta resuelto por el trabajo de F. Cohen, M. Mahowald y R. J. Milgram [19], quienes probaron que $\phi_{2,k} = 2$ para toda k. La periodicidad resultante en el tipo de homotopía de los espectros Thom asociados fue usada por M. Mahowald [38] y R. Cohen [23] para construir nuevas familias infinitas en el anillo homotópico estable π_*^s.

El propósito de esta tesis es presentar en detalle el cálculo de los órdenes $\phi_{n,k}$ para n y k generales, según F. R. Cohen, R. L. Cohen, N. J. Kuhn y J. L. Neisendorfer, usando técnicas estándares de teoría de homotopía. El resultado principal puede ser establecido como sigue. Sea

$$a_{n,k} = 2^{\rho(n-1)} \prod_{3\leq p\leq k} p^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$$

donde p denota un primo impar, y donde $\rho(m)$ es igual al número de enteros positivos menores que m que son congruentes con $0, 1, 2,$ o 4 mód 8.

Teorema
Si $n \not\equiv 0$ mód 4, entonces $\phi_{n,k} = a_{n,k}$. Además, si $n \equiv 0$ mód 4, entonces $a_{n,k} \mid \phi_{n,k}$ y $\phi_{n,k} \mid 2a_{n,k}$.

En el capitulo 1 se presentan algunos resultados sobre la teoría de homotopía que serán usados en el capitulo 3.

1. En la sección 1 se estudia la p-localización de grupos abelianos y CW-complejos junto con las propiedades del funtor $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes (\quad)$. También se da una construcción explicita de la $\mathcal{P}$-localización de S^n.

2. En la sección 2 se estudia la sucesión EHP. El resultado principal dice que cualquier mapeo $H : \Omega S^{n+1} \longrightarrow \Omega S^{2n+1}$ que induzca epimorfismo en $H_{2n}(\ \ , \mathbb{Z})$ tiene a S^n como fibra al localizar en 2.

3. En la sección 3 se estudia el teorema de Selick, el cual dice que si p es un número primo impar, entonces p elimina la p-componente de $\pi_k(S^3)$ con $k > 3$.

4. En la sección 4 se estudian los teoremas de Cohen-Moore y Neisendorfer los cuales generalizan el teorema de Selick, usando a este como base de inducción, el resultado más importante dice que si p es un número primo impar, entonces S^{2n+1} tiene exponente p^{n+1}.

5. En la sección 5 se estudia al funtor Q, los resultados en esta sección son necesarios para el resto de la tesis.

6. En la sección 6 se presenta el teorema de Kahn-Priddy junto con la prueba de G. Segal.

En el capitulo 2 se presenta el teorema de aproximación de J. P May y el teorema de descomposición de Snaith. El capitulo 3 se presenta el resultado principal de la tesis.

1. En la sección 1 se expone la relación que hay entre el teorema de descomposición de Snaith y el espacio de Thom de los haces vectoriales $\xi_{n,k}$. Se demuestra un resultado parcial del teorema principal [19].

2. En la sección 2 se enuncia el teorema principal y se da la idea de la demostración. También se da el enunciado de la proposición (3.6), este junto con el resultado de S. W. Yang [55] tienen como corolario el resultado principal.

3. En la sección 3 se demuestra el teorema (3.6) usando los resultados de Selick, Cohen, Moore, Neisendorfer y G. Segal vistos en el capitulo 1.

Capítulo 1

Elementos de teoría de homotopía

1.1. Localización

Definición 1.1 Sea A un anillo conmutativo con 1, sea S un subconjunto multiplicativo de A. Se define la ***localización de*** S como el conjunto

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A \text{ y } s \in S \right\},$$

donde $\frac{a}{s}$ es la clase de equivalencia sobre el conjunto $A \times S$, de la siguiente relación;

$$(a, s_1) \sim (b, s_2) \text{ si y solo si existe } s \in S \text{ tal que } (as_2 - bs_1)s = 0.$$

Proposición 1.2
Sea A un anillo conmutativo con uno, y S multiplicativo.

1. $S^{-1}A$ es un anillo conmutativo con uno bajo las siguientes operaciones

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{r} = \frac{ar + bs}{sr}, \qquad \frac{a}{s}\frac{b}{r} = \frac{ab}{rs}.$$

   Donde el neutro aditivo es $\frac{0}{1}$ y el neutro multiplicativo es $\frac{1}{1}$.

2. La función $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ definida como $f(a) = \frac{a}{1}$ es un morfismo de anillos

con 1 que satisface las siguientes propiedades.

a) La imagen de los elementos de S bajo f son unidades.

b) Si A es un dominio entero, f es inyectiva.

c) Si A es un campo, f es un isomorfismo.

3. Si A es un dominio entero, entonces

a) $\frac{a}{s} = \frac{b}{r}$ si y solo si $ar = bs$.

b) $S^{-1}A$ es dominio entero.

c) Si $S = A \setminus \{0\}$, entonces $S^{-1}A$ es un campo y éste se conoce como el campo de cocientes de A.

El morfismo $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ caracteriza a $S^{-1}A$ por medio del siguiente teorema y se le conoce como el ***morfismo de localización***.

Teorema 1.3 (Propiedad Universal $S^{-1}A$.)
Sea A un anillo conmutativo con uno, S multiplicativo y $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ su morfismo de localización. Si $g : A \longrightarrow R$ es un morfismo de anillos conmutativos con uno tal que $f(S) \subset Uni(R)$, entonces existe un único homomorfismo de anillos $\widetilde{g} : S^{-1}A \longrightarrow R$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & R \\
& S^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\exists!\ \widetilde{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

Cuadro 1.1: Propiedad universal de $S^{-1}A$.

Demostración. (*Existencia*)Se define $\widetilde{g} : S^{-1}A \longrightarrow R$ como $\widetilde{g}(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$. (*Unicidad*) Para cada y en S se tiene que $g(y) = g'f(y) = g'\left(\frac{y}{1}\right)$. Entonces

$g'\left(\dfrac{1}{y}\right) = g(y)^{-1} = \widetilde{g}\left(\dfrac{1}{y}\right)$ ■

Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativo. En este caso denotamos $S^{-1}A$ como $A_{\mathfrak{p}}$.

Proposición 1.4
El conjunto cuyos elementos son de la forma $\dfrac{a}{s}$ con a en $\mathfrak{p}$, forma un ideal $\mathfrak{m}$ en $A_{\mathfrak{p}}$. Además $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{m})$ es un anillo local.

Demostración. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal en $A_{\mathfrak{p}}$ y $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{a}$ tiene una unidad, por lo que $\mathfrak{a}$ es igual a todo el anillo. ■

Es claro que si $f : A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ es el morfismo de localización, entonces $f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$, por ésto se le conoce como el anillo de localización.

Para el caso en el que $A = \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$, con p un número primo, entonces denotamos $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}_{(p)}$.

Esta construcción puede se puede generalizar para A-módulos.

Definición 1.5 Sea A un anillo conmutativo con uno y S un conjunto multiplicativo. Si M es un A-módulo se define la siguiente relación de equivalencia

$$(u, s_1) \sim (v, s_2) \text{ si y solo si existe } s \in S \text{ tal que } s(s_2 u - s_1 v) = 0.$$

Se denota $\dfrac{v}{s}$ como la clase de equivalencia bajo esta relación. $S^{-1}M$ denota la colección de las clases de equivalencia.
$S^{-1}M$ es un $S^{-1}A$-módulo, donde las operaciones están definidas de la manera obvia.

Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ un ideal primo, entonces denotamos $S^{-1}M = M_{\mathfrak{p}}$. Si $A = \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$, con p un número primo, y G un grupo abeliano entonces denotamos $G_{(p)}$ a la ***p-localización*** de G como $\mathbb{Z}$-módulo.

Proposición 1.6
Sea A un anillo conmutativo con uno y S un subconjunto multiplicativo. Entonces $S^{-1}(\ ) : A\text{-mód} \longrightarrow S^{-1}A\text{-mód}$ es un funtor covariante. El cual esta definido de la

siguiente manera, sean M y N son A-módulos y $h : M \longrightarrow N$ es A-lineal. Definimos al morfismo

$$S^{-1}h : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N \text{ el cual esta definido como } S^{-1}h\left(\frac{v}{s}\right) = \frac{h(v)}{s}.$$

La demostración se sigue manera rutinaria y notando el hecho de que $S^{-1}(h_1 \circ h_2) = S^{-1}h_1 \circ S^{-1}h_2$.

Proposición 1.7
El funtor S^{-1} es exacto, es decir; si

$$M' \xrightarrow{\quad h_1 \quad} M \xrightarrow{\quad h_2 \quad} M''$$

es exacta en M, entonces

$$S^{-1}M' \xrightarrow{\quad S^{-1}h_1 \quad} S^{-1}M \xrightarrow{\quad S^{-1}h_2 \quad} S^{-1}M''$$

es exacta en $S^{-1}M$.

Demostración. Dado que $h_2 \circ h_1 = 0$, se tiene que $S^{-1}h_2 \circ S^{-1}h_1 = 0$, entonces $Im(S^{-1}h_1) \subset Ker(S^{-1}h_2)$.
Para demostrar la otra inclusión, sea $\frac{v}{s} \in Ker(S^{-1}h_2)$, entonces $\frac{h_2(v)}{s} = 0$ en $S^{-1}M''$, entonces existe r en S, tal que $rh_2(v) = 0 \in M$. Entonces $h_2(rv) = 0$ por lo que $rv \in Ker(h_2) = Im(h_1)$. De lo que se sigue que $f(v') = rv$ para algún $v' \in M'$. Entonces $\frac{v}{s} = \frac{h_1(v')}{rs} = \left(S^{-1}h_1\right)\left(\frac{v'}{rs}\right)$, de donde se concluye la otra contención. Entonces la sucesión es exacta en M. ■

Teorema 1.8
Sea M un A-módulo. Entonces los $S^{-1}A$-módulos $S^{-1}M$ y $S^{-1}A \bigotimes_A M$ son isomorfos; de manera más precisa, existe un único isomorfismo $f : S^{-1}A \bigotimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$

para el cual

$$f\left(\left(\frac{a}{s}\otimes v\right)\right)=\frac{av}{s}\qquad \text{para toda } a\in A,\ v\in M \text{ y } s\in S.$$

Demostración. El mapa $S^{-1}A\times M\longrightarrow S^{-1}M$ definido como

$$\left(\frac{a}{s},v\right)\mapsto\frac{av}{s}$$

es A-bilineal, por la propiedad universal del producto tensorial induce un único A-homomorfismo

$$f:S^{-1}A\otimes_A M\longrightarrow S^{-1}M$$

el cual cumple

$$f\left(\left(\frac{a}{s}\otimes v\right)\right)=\frac{av}{s}.$$

Claramente f es suprayectiva.
Sea $\sum_i(\frac{a_i}{s_1}\otimes m_i)$ un elemento cualquiera de $S^{-1}A\bigotimes_A M$. Se definen $s=\prod_i s_i\in S$ y $t_i=\prod_{j\neq i}s_j$. Entonces

$$\sum_i\left(\frac{a_i}{s_1}\otimes m_i\right)=\sum_i\left(\frac{a_it_i}{s}\otimes m_i\right)=\sum_i\left(\frac{1}{s}\otimes a_jt_jm_j\right)=\frac{1}{s}\otimes\sum_i a_it_im_i$$

Sea $v=\sum_i a_it_im_i$, entonces todos los elementos del producto tensorial se pueden reducir a elementos de la forma $\frac{1}{s}\otimes v$, por lo que $f(\sum_i(\frac{a_i}{s_1}\otimes m_i))=f(\frac{1}{s}\otimes v)=\frac{v}{s}$.
Para la inyectividad, supongamos que $f\left(\frac{1}{s}\otimes v\right)=0$, entonces $\frac{v}{s}=0$, por lo que existe $r\in S$ tal que $rv=0$. Así que

$$\frac{1}{s}\otimes v=\frac{r}{rs}\otimes v=\frac{1}{rs}\otimes rv=\frac{1}{rs}\otimes 0=0.$$

Entonces el $Ker(f)=0$, por lo que f es inyectiva. ■

Corolario 1.9

Si A es un grupo abeliano y p es un número primo. Entonces la ***p-localización*** de

A es isomorfa a

$$\mathbb{Z}_{(p)} \otimes A \cong A_{(p)}.$$

Donde $\mathbb{Z}_{(p)}$ es el anillo de los enteros p localizados, el cual resulta ser un subanillo de $\mathbb{Q}$, que a su vez consiste de todas las fracciones cuyo denominador es primo relativo con p.

Teorema 1.10
Sean M, N A-módulos, entonces existe un único isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $f : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}(M \otimes_A N)$ tal que

$$f\left(\frac{v}{s} \otimes \frac{u}{t}\right) = \frac{v \otimes u}{st}.$$

En particular para cualquier ideal primo $\mathfrak{p}$, se tiene que

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}}$$

como $A_{\mathfrak{p}}$-módulos.

$\mathcal{P}$ y p-localización de grupos abelianos

Para un grupo abeliano finitamente generado A, consideramos el producto tensorial, $Z_{(p)} \otimes A$ que tiene el efecto eliminar la torsión de orden primo relativo a p, en A y sin afectar la p-torsión del mismo.

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de números primos, posiblemente vacío, y consideremos $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ el subanillo de $\mathbb{Q}$ tal que los denominadores de estas fracciones no son divisibles por cada p en $\mathcal{P}$.

Definición 1.11 Si A es un grupo abeliano, llamamos al grupo $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \bigotimes A$ como la ***$\mathcal{P}$-localización*** de A. Además si el ***morfismo de $\mathcal{P}$-localización*** definido $\pi_{\mathcal{P}} : A \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \bigotimes A$ como $\pi_{\mathcal{P}}(a) = 1 \otimes a$, es isomorfismo entonces se dice que A es un ***grupo $\mathcal{P}$-local***.

Proposición 1.12
Supongamos que A es un grupo abeliano y $\mathcal{P}$ es un conjunto de números primos posiblemente vacío. Entonces

1. El grupo $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \bigotimes A$ es un $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-módulo

2. El mapeo de localización $A \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \bigotimes A$ es un isomorfismo si y solo si la estructura de A como $\mathbb{Z}$-módulo es la restricción de una estructura de A como $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-módulo.

3. $(\ )_{\mathcal{P}} : GrAb \longrightarrow GrAb$ es un funtor covariante donde $GrAb$ denota la categoría de grupos abelianos.

4. $\mathcal{P}$-localización preserva sucesiones exactas.

5. $\mathcal{P}$-localización manda funciones inyectivas en inyectivas.

6. $\mathcal{P}$-localización manda funciones suprayectivas en suprayectivas.

La demostración de cada punto es inmediata excepto tal vez la 2, pero se sigue de (1.8) donde esta proposición se lee a que en A existe una división única por primos que no estén en $\mathcal{P}$

Recordemos que si A es un grupo abeliano y $a \in A$ es de torsión si y solo si es de orden finito. El subgrupo de torsión T es el subgrupo que consiste de todos los elementos que tienen orden finito. Para cada número p primo el subgrupo

$$A_{T_p} = \{g \in A \mid \exists n \in \mathbb{N},\ p^n g = 0\}$$

es conocido como el ***subgrupo de p-torsión***. El subgrupo de torsión es isomorfo a la suma directa de los subgupos de p-torsión sobre todos los primos:

$$T \cong \bigotimes_p A_{T_p}.$$

Teorema 1.13
Sea p un número primo y T un grupo de p-torsión de un grupo abeliano. Entonces

$$T_{\mathcal{P}} \cong \begin{cases} T & si \quad p \in \mathcal{P}, \\ 0 & si \quad p \notin \mathcal{P}. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $p \notin \mathcal{P}$, sea $\frac{g}{s} \in T_{\mathcal{P}}$. Entonces $g \in T$ y $s \in \mathcal{P}$. Por ser g un elemento de T entonces existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n g = 0$, pero dado que $p \notin \mathcal{P}$, esto implica que $p^n \in \mathbb{Z} \setminus \langle \mathcal{P} \rangle = S$. Entonces $\frac{g}{s} = 0$

Razonando de manera análoga se tiene que $\pi_p : T \longrightarrow T_p$ es un monomorfismo de grupos. Pero es claro que π_p es suprayectiva, lo cual implica que es un isomorfismo.
■

Localización de CW-complejos

Queremos generalizar la idea de localización de grupos en el siguiente sentido. Localizar espacios es la realización topológica de los homomorfismos de localización $A \mapsto A_p$, esto es asociar a todo espacio X un espacio $X_{(p)}$ junto con un mapeo $X \longrightarrow X_{(p)}$ de tal modo que los homomorfismos inducidos

$$\pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(X_{(p)}) \quad \text{y} \quad H_*(X) \longrightarrow H_*(X_{(p)}).$$

Sean precisamente las localizaciones algebraicas

$$\pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(X)_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \pi_*(X) \quad \text{y} \quad H_*(X) \longrightarrow H_*(X)_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes H_*(X).$$

Sin embargo ciertas restricciones de la acción de $\pi_1(X)$ sobre los grupos de homotopía $\pi_n(X)$ son necesarias para llevar a cabo esta teoría.

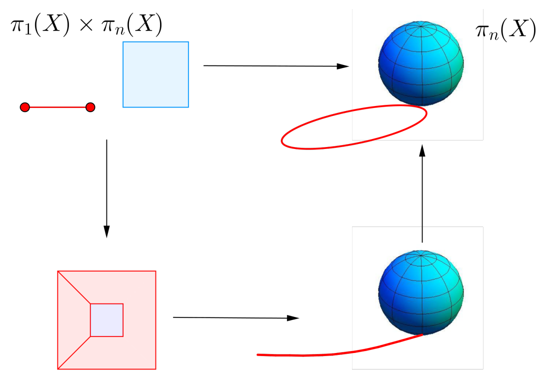

Figura 1.1: Acción de $\pi_1(X)$ en $\pi_n(X)$

Definición 1.14 Decimos que ***un espacio*** X ***es abeliano*** si es arcoconexo y la acción de $\pi_1(X)$ sobre $\pi_n(X)$ es la trivial si $1 \leqslant n$.

La condición de ser abeliano es suficiente para la mayoría de las aplicaciones usuales, tales como aquellas que involucran espacios simplemente conexos y H-espacios. Sin embargo, no es difícil desarrollar una teoría mas general para espacios nilpotentes, esto es cuando $\pi_1(X)$ es nilpotente con acción nilpotente sobre $\pi_n(X)$ para toda n como se hace en [25] y en [28].

Podemos llevar a cabo la construcción de la localización topológica usando $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ ó $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{Z}$. Para este último caso se produce un mapeo de "racionalización" $X \longrightarrow X_{\mathbb{Q}}$ el cual tiene el efecto de cancelar toda la torsión en $\pi_*(X)$ y $H_*(X)$ al tensorisar por $\mathbb{Q}$, y al mismo tiempo se conserva la información libre de torsión.

Definición 1.15 Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de números primos posiblemente vacío.

1. Decimos que un espacio abeliano X es un ***espacio*** $\mathcal{P}$***-local*** si $\pi_n(X)$ es un grupo $\mathcal{P}$-local en el sentido algebraico (1.11), para toda n en los números naturales. Esto es equivalente a decir que $\pi_n(X)$ es un $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-módulo.

2. Supongamos que X y X' son espacios abelianos y $h : X \longrightarrow X'$ es continua. Decimos que h es una $\mathcal{P}$***-localización de*** X si: X' es $\mathcal{P}$-local y el mapeo h

induce un isomorfismo en el siguiente sentido

$$Id_{\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}} \otimes h_* : \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \otimes \pi_*(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \otimes \pi_*(X') \cong \pi_*(X')_{(p)}.$$

3. Sea p un número primo. Decimos que un mapeo $f : X \longrightarrow Y$ es una ***p*-equivalencia** si induce isomorfismo para todos los subgrupos de homología módulo p, es decir

$$f_* : H_*(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(Y; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

Tomando aproximaciones CW podemos suponer que X y X' son CW-complejos.

Teorema 1.16 (***Existencia de la $\mathcal{P}$ localización***)

1. Para todo espacio abeliano X existe una $\mathcal{P}$-localización $h : X \longrightarrow X_{\mathcal{P}}$.

2. Un función continua $h : X \longrightarrow X'$ de espacios abelianos es una $\mathcal{P}$-localización si y sólo si $\widetilde{H_*}(X)$ es un $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-módulo y el morfismo inducido

$$Id_{\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}} \otimes h_* : \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \bigotimes \widetilde{H_*}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} \bigotimes \widetilde{H_*}(X') \cong \widetilde{H_*}(X')$$

es un isomorfismo.

3. La $\mathcal{P}$-localización es un funtor covariante homotópico y además es natural con respecto al funtor identidad, es decir: Dados X y Y espacios abelianos y $\mathcal{P}$-localizaciones $h_1 : X \longrightarrow X'$ y $h_2 : Y \longrightarrow Y'$ y una función continua $f : X \longrightarrow Y$, entonces existe una función continua $f' : X' \longrightarrow Y'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & Y \arrow[d, "h_2"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

4. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una p-equivalencia entonces $f' : X' \longrightarrow Y'$ es una equivalencia homotópica.

Proposición 1.17
Sea X un espacio abeliano. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. X es $\mathcal{P}$-local.
2. $\pi_*(X)$ es un $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-módulo.
3. $H_*(X)$ es un $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$-módulo.

Demostración

1.$\Leftrightarrow$ 2. Por la definición.

1.$\Rightarrow$ 3. Eso es aplicando (1.16.2).

3.$\Rightarrow$ 2. Esto se sigue de (1.16.4). ■

Definición 1.18 . El ***espacio telescópico*** T de una sucesión de espacios topológicos basados y funciones continuas basadas

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

es el colímite de los mapeos cilíndricos M_{f_n} basados con la identificación de X_n en M_{f_n} y $M_{f_{n-1}}$ identificados para toda $n \geqslant 1$.

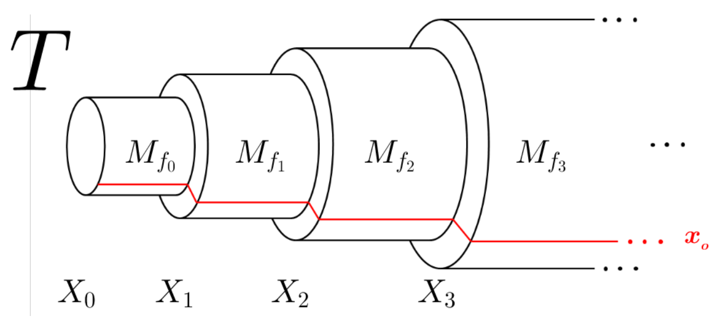

Figura 1.2: Espacio telescópico

De manera formal, T esta definido como

$$T = \operatorname*{colím}_{n\in\mathbb{N}} \left(\coprod_{m=0}^{n} X_m \times [m, m+1] \right) \Big/ \sim \; = \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times [n, n+1] \right) \Big/ \sim$$

donde la identificación esta dada por $(x_m, m+1) \sim (f_m(x_m), m+1)$ para toda m y $(x_m, m+1) \in X_m \times [m, m+1]$ y $(f_m(x_m), m+1) \in X_{m+1} \times [m+1, m+2]$, e identificando todos los puntos de la forma $(*, t)$ donde " $*$ " es el punto base de alguno de los espacios.

Teorema 1.19

Sea una sucesión de espacios topológicos bien basados y funciones continuas basadas

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots .$$

Entonces para toda $p \geqslant 0$, se tiene que

$$H_p(T) \cong \operatorname*{colím}_{n\in\mathbb{N}} H_p(X_n)$$

donde el colímite esta tomado con respecto a la sucesión de los morfismos inducidos por los mapeos de la sucesión, es decir: $\{(f_i)_* \mid i \in \mathbb{N}\}$.

La $\mathcal{P}$-localización de S^n construcción de $S^n_{\mathcal{P}}$

Sean $k_1, k_2, \ldots$ el conjunto de números naturales, primos relativos a $\mathcal{P}$, es decir, los denominadores en $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$. Definimos a $S^n_{\mathcal{P}}$ como:

$$S^n_{\mathcal{P}} = \left(\bigvee_{i=0}^{\infty} S^n_i \right) \bigcup_h \left(\coprod_{j=1}^{\infty} D^{n+1}_j \right)$$

donde D^{n+1}_j es pegado por su frontera con el mapeo de $S^n \longrightarrow S^n_{j-1} \vee S^n_j$ el cual esta representado por la clase de homotopía $[S^n_{j-1}] - k_j[S^n_j]$. Aquí $[S^n_j]$ denota la imagen de la clase fundamental bajo la inclusión $S^n_j \hookrightarrow \bigvee_i S^n_j$

Al espacio $S^n_{\mathcal{P}}$ se le conoce como la n-esfera $\mathcal{P}$-localizada y al cono de este espacio

$$D^{n+1}_{\mathcal{P}} = C(S^n_{\mathcal{P}}) = \left(S^n_{\mathcal{P}} \times I\right)/(S^n_{\mathcal{P}} \times \{1\})$$

se llama el disco $\mathcal{P}$-local de dimensión $(n+1)$.

Si calculamos la homología de $S^n_{\mathcal{P}}$ por el teorema (1.19) obtenemos

$$\widetilde{H}_q(S^n_{\mathcal{P}};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} & \text{si} \quad q = n, \\ 0 & \text{si} \quad q \neq n. \end{cases}$$

Ésto debido a que los mapeos inducidos en los grupos de homología son para el caso en el que $q = n$

$$Z \xrightarrow{\times k_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times k_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times k_3} \cdots,$$

por lo que el colímite es de esta sucesión es $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$. Y para el caso $q \neq 0$, se tiene que

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

Ahora por el teorema (1.17) $S^n_{\mathcal{P}}$ es $\mathcal{P}$-local y por (1.16) se tiene que es la $\mathcal{P}$-localización de S^n.

Proposición 1.20
$H_*(X;\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}) \cong H_*(X) \bigotimes \mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$.

Demostración. Se tiene la prueba del teorema de coeficientes universales y el hecho de que $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ es libre por lo que $Tor(A,\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}) = 0$. ∎

1.2. La sucesión EHP

I.M. James [32, 34] probó que existe una sucesión exacta larga que relaciona a las componentes 2-primarias de los grupos de homotopía dada por

$$\cdots \longrightarrow \pi_q(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{q+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{q+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{q-1}(S^n) \longrightarrow \cdots .$$

Cuadro 1.2: Sucesión exacta EHP.

Esta sucesión exacta se obtiene a partir de la conocida descomposición de James

$$\Sigma\Omega\Sigma X \simeq \Sigma\left(\bigvee_{k\geq 1} X^{\wedge k}\right).$$

A saber, poniendo $X = S^n$ y proyectando sobre el k-ésimo sumando, obtenemos mapeos de la forma $\Sigma\Omega S^{n+1} \to S^{nk+1}$ que inducen epimorfismo en H_{nk+1} y tales que sus mapeos adjuntos $\Omega S^{n+1} \to \Omega S^{nk+1}$ inducen epimorfismo en H_{nk}. En particular, para $k = 2$ obtenemos un mapeo $H : \Omega S^{n+1} \to \Omega S^{2n+1}$ que induce epimorfismo en homología en dimensión $2n$. En el resto de esta sección supondremos que todos los espacios son 2-locales, a menos que se diga lo contrario.

Teorema 1.21
Sea $H : \Omega S^{n+1} \longrightarrow \Omega S^{2n+1}$ cualquier mapeo que induzca epimorfismo en $H_{2n}(\ ;\mathbb{Z})$. Entonces hay una fibración 2-local

$$S^n \xrightarrow{E} \Omega S^{n+1} \xrightarrow{H} \Omega S^{2n+1} \tag{1.1}$$

donde E es la suspensión de Freudenthal, y la sucesión EHP (1.2) es exacta larga en homotopía para esta fibración.

Demostración. Sea Y la fibra homotópica del mapeo H, entonces basta probar que $Y \simeq S^n$. La demostración que presentamos aquí se debe a J.C. Moore. Hay que considerar 2 casos, a saber cuando $n \equiv 1 \pmod 2$ y $n \equiv 0 \pmod 2$. Trataremos el caso $n \equiv 0 \pmod 2$ y señalamos que el caso $n \equiv 1 \pmod 2$ es muy similar.

Recordemos que por el teorema de Bott-Samelson [11] $H_*(\Omega S^{2n+1};\mathbb{Z}) \cong T[x_{2n}]$ como álgebras de Hopf, donde $T[V]$ denota el álgebra tensorial generada por V. Notemos que x_{2n} es primitivo. Luego $H^*(\Omega S^{2n+1};\mathbb{Z})$ es isomorfa a $\Gamma[y_{2n}]$, el álgebra de potencias divididas generada por y_{2n}.

El mapeo $H : \Omega S^{2n+1} \to \Omega S^{4n+1}$ induce un morfismo de álgebras

$$H^* : H^*(\Omega S^{4n+1}; \mathbb{Z}) \to H^*(\Omega S^{2n+1}; \mathbb{Z})$$

tal que $H^*(y_{4n}) = \gamma_2(y_{2n})$. Recordemos que $\gamma_p(y_{2n})\gamma_q(y_{2n}) = (p,q)\gamma_{p+q}(y_{2n})$ donde $(p,q) = \frac{(p+q)!}{p!q!}$, si $p, q \geq 0$. Luego

$$H^*(\gamma_q(y_{4n})) = H^*\left(\frac{1}{q!}\,\gamma_1(y_{4n})^q\right) = \frac{1}{q!}\,\gamma_2(y_{2n})^q = \frac{(2q)!}{q!2^q}\,\gamma_{2q}(y_{2n}).$$

Como $\dfrac{(2q)!}{q!2^q} \equiv 1 \pmod 2$, se sigue que el morfismo en cohomología con coeficientes $\mathbb{Z}_{(2)}$

$$H^* : H^*(\Omega S^{4n+1}; \mathbb{Z}_{(2)}) \to H^*(\Omega S^{2n+1}; \mathbb{Z}_{(2)})$$

satisface $H^*(\gamma_q(y_{4n})) = u{\cdot}\gamma_{2q}(y_{2n})$ donde u es una unidad en $\mathbb{Z}_{(2)}$. Así, $H^*(\Omega S^{2n+1}; \mathbb{Z}_{(2)})$ es isomorfa a

$$H^*(\Omega S^{4n+1}; \mathbb{Z}_{(2)}) \;\oplus\; \gamma_1(y_{2n}) \cdot H^*(\Omega S^{4n+1}; \mathbb{Z}_{(2)})$$

como $H^*(\Omega S^{4n+1}; \mathbb{Z}_{(2)})$-módulos y por lo tanto es un $H^*(\Omega S^{4n+1}; \mathbb{Z}_{(2)})$-módulo libre en dos generadores, 1 y $\gamma_1(y_{2n})$.

Finalmente, consideremos la sucesión espectral de Eilenberg-Moore para la fibración 2-local $Y \to \Omega S^{2n+1} \to \Omega S^{4n+1}$. El término E_2 está dado por

$$Tor_{H^*(\Omega S^{4n+1};\mathbb{Z}_{(2)})}\left(\mathbb{Z}_{(2)}\;;\; H^*(\Omega S^{2n+1}; \mathbb{Z}_{(2)})\right)$$

el cual es isomorfo a un álgebra exterior en una clase de dimensión $2n$, por las observaciones anteriores. Claramente, $E_2 = E_\infty$ y el levantamiento g dado por

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ S^{2n} \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "E"] & \Omega S^{2n+1} \end{tikzcd}$$

Cuadro 1.3: Levantamiento de E.

induce un isomorfismo en $H^*(\quad;\mathbb{Z}_{(2)})$. Luego, g es una equivalencia 2-local y el resultado del Teorema se sigue. ■

1.3. El teorema de Selick sobre $\pi_*(S^3)$

En 1956 H. Toda demostró [52] que existe una relación entre las componentes p-primarias de los grupos de homotopía para las esferas S^{n-1}, S^{n+1}, S^{pn-1} y S^{pn+1} cuando p es un número primo impar y n es par, el cual es en cierto sentido similar al resultado de James [35], para el caso en el que $p = 2$. H. Toda centra su trabajo en el estudio de la doble suspensión

$$E^2 : \pi_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1}).$$

Entre las aplicaciones del teorema principal demostró que el cokernel de E^2 tiene un elemento de orden p^3 y por lo tanto deduce que los grupos de homotopía de S^{n+1} no contienen elementos de orden p^{n+1}, de ahí, si α pertenece a la componente p-primaria de $\pi_k(S^3)$, con $k > 3$ y p un número primo impar, entonces $p^2\alpha = 0$.

Teorema 1.22
Sea p un primo impar. Entonces en la p-componente de $\pi_k(S^3)$ con $k > 3$ todos los elementos distintos de cero tienen orden p.

Este resultado fue conjeturado por M. Barratt inspirado en el exponente de p^2 dado por Toda en [52].

La técnica que se usa epara esta prueba consiste en probar que si $k > 3$, $\pi_k(S^3)_{(p)}$ es un retracto de $\pi_{k+1}(S^{2p+1}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Esto se consigue construyendo un mapa de

$$\Omega^2 S^3\langle 3\rangle_{(p)} \longrightarrow \Omega^2 S^{2p+1}\{p\},$$

donde $S^3\langle 3\rangle$ es la cubierta 3-conexa sobre S^3, $S^{2p+1}\{p\}$ es la fibra homotópica del mapa de grado p de la esfera S^{2p+1} en ella misma, y un mapa de regreso. Después demostrando que la composición de estos mapeos es una equivalencia homotópica haciendo el cálculo en homología.

El mapa de regreso de $\Omega^2 S^{2p+1}\{p\}$ en $\Omega^2 S^3\langle 3\rangle_{(p)}$ es el mapa de lazos dobles descrito por J. C. Moore en [46]. El mapa de $\Omega^2 S^3\langle 3\rangle_{(p)}$ en $\Omega^2 S^{2p+1}\{p\}$ se construye a través del levantamiento de la composición

$$\Omega^2 S^3\langle 3\rangle_{(p)} \longrightarrow \Omega^2 S^3_{(p)} \xrightarrow{\Omega H} \Omega^2 S^{2p+1}_{(p)}$$

donde H es el mapeo invariante de Hopf. Con el fin de realizar el cálculo de homología, es necesario demostrar que se puede escoger un levantamiento el cual sea un H-morfismo. Esto involucra algunas propiedades de la construcción de J. Milnor para el espacio clasificante [45] de un grupo topológico. Procediendo de manera inductiva con una modificación del método de usado por F. R. Cohen, J. C. Moore y J. A. Neisendorder en [22].

F. R. Cohen, J. C. Moore y J. A. Neisendorder en [22] demostraron que si $p > 3$, entonces p^n es un exponente de $\pi_k(S^{2n+1})$ si $k > 2n + 1$, mejorando el exponente dado por H. Toda en [52].

Para el caso en el que $p = 2$ fue resuelto por James el cual demuestra que 2^{2n} es el mejor exponente posible [35].

1.4. Los teoremas de Cohen-Moore-Neisendorfer

Definición 1.23 Sea p un número primo. Un espacio X simplemente conexo se dice que tiene ***exponente*** p^r ***en el primo*** p si p^r elimina la componente p-primaria de los grupos de homotopía $\pi_*(X)$.

Denotemos por $P^n(p^r)$ al espacio de Moore dado por $S^{n-1} \cup_{p^r} e^n$ donde e^n es la celda de dimension n y el pegado esta dado por el mapeo de grado p^r entre $S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$.

El siguiente es un resultado de F. R. Cohen, J. C. Moore y J. A. Neisendorfer[22] el cual relaciona al espacio de Moore $P^n(p^r)$ con la fibra homotópica del mapa de grado p^r en la esfera S^n denotada como $S^n\{p^r\}$.

Teorema 1.24
Si p es un número primo impar y n es un entero positivo, existe una equivalencia homotópica

$$\phi_{2n+2} : S^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega \left(\bigvee_{m \geqslant 0} P^{4n+2nm+3}(p^r) \right) \longrightarrow \Omega P^{2n+2}(p^r).$$

Se sigue del teorema de Hilton-Milnor [44] y de los dos siguientes lemas, que $P^n(p^r)$ con n un número par mayor que 4 y r fijo, tiene exponente. Si n es impar y r fijo $P^n(p^r)$ tiene un único exponente acotado.

Lema 1.25
Si p es un número primo impar y $n \geqslant 1$, el espacio $S^{2n+1}\{p^r\}$ tiene exponente p^r.

Lema 1.26
Si p es un número primo impar y $n,\ m \geqslant 2$, entonces existe una equivalencia homotópica

$$\alpha_{n,m} : P^{n+m}(p^r) \vee P^{n+m-1}(p^r) \longrightarrow P^n(p^r) \wedge P^m(p^r).$$

Teorema 1.27
Sea p un primo mayor a 3 y $n > 1$. Si k es mayor que 0, entonces $\pi_{2np^k-1}(P^{2n+1}(p^r))$ y $\pi_{4np^k-2p^k-1}(P^{2n}(p^r))$ contienen sumandos de la forma $\mathbb{Z}/p^{r+1}\mathbb{Z}$.

Por el teorema anterior se deduce, que los espacios de Moore $P^n(p^r)$ no tienen exponente p^r.

La descomposición de $\Omega P^{2n}(p^r)$ en el teorema (1.24) implica la existencia de más sumandos de la forma $\mathbb{Z}/p^{r+1}\mathbb{Z}$ que los que se indican aquí.

Sea $q_n : P^n(p^r) \longrightarrow S^n$ la identificación dada por colapsar S^{n-1} a un punto en $P^n(p^r) = S^{n-1} \cup_{p^r} e^n$. Denotamos por $F^n\{p^r\}$ a la fibra homotópica de está identificación.

$$P\left(\sum_i a_i(t); p^r\right) = \bigvee_i (\vee_{j=1}^{a_i} P(t^i; p^r)) \quad \text{donde} \quad P(t^n; p^r) = P^n(p^r).$$

Teorema 1.28
Sea p un número primo mayor que 3 y $n > 1$. Entonces existe un equivalencia homotópica de espacios p localizados

$$\psi_{2n+1} : S^{2n-1} \times \prod_{k\geqslant 1} S^{2np^k-1}\{p^{r+1}\} \times \Omega P\left(\frac{t^2 - t^2\chi_{2n+1}}{1+t}; p^r\right) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}.$$

donde

$$\chi_{2n+1} = \frac{1 - t^{2n} - t^{4n-2} - t^{4n-1}}{1 - t^{2n}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + t^{2np^k-1}}{1 - t^{2np^k-2}}.$$

Teorema 1.29
Sea p un número primo mayor que 3 y $n > 1$. Entonces existe una equivalencia homotopica de espacios p localizados

$$\psi_{2n} : \Omega S^{2n-1} \times S^{4n-3} \times \prod_{k\geqslant 1} S^{4np^k-2p^k-1}\{p^{r+1}\} \times \Omega P\left(\frac{t^2 - t^2\chi_{2n}}{1+t}; p^r\right) \longrightarrow \Omega F^{2n}\{p^r\}$$

donde

$$\chi_{2n} = \frac{1 - t^{2n-2} - t^{2n-1}}{1 - t^{2n-1}} \cdot \frac{1 + t^{4n-3}}{1 - t^{2n-2}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + t^{4np^k-2p^k-1}}{1 - t^{4np^k-2p^k-2}}.$$

Es necesario notar que todos los $P^m(p^r)$ que se producen en la descomposición de $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ satisfacen que $m \geqslant 4n$ y los que se producen en la descomposición de $\Omega F^{2n}\{p^r\}$ satisfacen $m \geqslant 6n - 3$.

Por el Teorema(1.28), para $r=1$ se tiene

$$\psi_{2n+1} : S^{2n-1} \times \prod_{k\geqslant 1} S^{2np^k-1}\{p^2\} \times \Omega P\left(\frac{t^2 - t^2\chi_{2n+1}}{1+t}; p\right) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p\}.$$

Sea $\Sigma^2 : S^{2n-1} \longrightarrow \Omega S^{2n+1}$ el mapa inducido por la doble suspensión. Sea ψ_{2n+1}^{-1} la inversa homotópica de ψ_{2n+1} y la composición de $\pi_1\psi_{2n+1}^{-1} : \Omega F^{2n+1}\{p\} \longrightarrow S^{2n-1}$, donde π_1 es la proyección del producto en su primer factor.

Consideremos la fibracion $\Omega S^{2n+1} \xrightarrow{s} F^{2n+1}\{p\} \xrightarrow{r} P^{2n+1}(p)$, aplicando el funtor Ω, obtenemos el mapa $\Omega s : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow F^{2n+1}\{p\}$. Localizando en p obtenemos el siguiente mapeo

$$\pi = (\pi_1)(\psi_{2n+1}^{-1})(\Omega s) : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n-1}.$$

con el cual observamos lo siguiente.

Corolario 1.30
Sea p un número primo mayor que 3 y $n \geqslant 1$, entonces el mapa $\pi : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n-1}$ es tal que la composición $\pi \circ \Sigma^2$ es homotópico $\Omega^2 p$, donde p es el mapeo de grado p en la esfera S^{2n-1}.

H. Toda demostró que p^2 veces $\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})$ se queda contenida en la imagen de $(\Sigma^2)_* : \pi_*(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_*(\Omega S^{2n+1})$ cuando p es un número primo impar [52]. Usando el corolario anterior y el resultado de H. Toda se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.31
Si p es un número primo mayor que 3 y $n \geqslant 1$, entonces localizando en p se tiene que p^3 veces $\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})_{(p)}$ esta contenido en p^2 veces la imagen

$$(\Sigma^2)_* : \pi_*(S^{2n-1})_{(p)} \longrightarrow \pi_*(\Omega S^{2n+1})_{(p)}.$$

Demostración. Dado que el espacio S^{2n+1} p-localizado es un H-espacio cuando p es un número primo impar, y el grado de p esta definido como p veces la identidad. Se tiene que este mapeo induce multiplicación por p en los grupos de homotopía.

Sea α un elemento de $\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})$. Por el Teorema de H. Toda [52], $p^2\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})$ se queda contenido en la imagen de $(\Sigma^2)_*$ cuando p es un número primo impar. Sea $n > 1$ y sea γ en $\pi_*(S^{2n-1})$ tal que $p^2\alpha = (\Sigma^2)_*(\gamma)$. Entonces notemos que

$$\pi_*\Sigma_*^2(\gamma) = \pi_*(p^2\alpha) = p^2\pi_*(\alpha).$$

Por otro lado, $\pi_*\Sigma_*^2(\gamma) = (\pi\Sigma^2)_*(\gamma) = p\gamma$. Entonces,

$$p^3\alpha = (\Sigma^2)_*(p\gamma) = (\Sigma^2)_*(p^2\pi_*(\alpha)) = p^2(\Sigma^2)_*(\pi(\alpha)).$$

Lo cual quiere decir que $p^3\alpha$ se encuentra en p^3 veces la imagen de $(\Sigma^2)_*$ ■

Para p es un número primo impar, la esferea S^{2n+1} es un H-espacio [1, 30] y para cualquier entero d, el mapa de grado d de $d : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ induce multiplicacion por d en $\pi_*(S^{2n+1})$.

Teorema 1.32
Si p es un número primo mayor que 3, entonces S^{2n+1} tiene exponente p^{n+1} y S^{2n} tiene exponente p^{2n-1} en p.

Demostración. Por el Teorema de Selick(1.22), p elimina la componente p-primaria de $\pi_*(S^3)$, haciendo inducción sobre el Corolario (1.31). Supongamos que p^{n-1} elimina la componente p-primaria de $\pi_*(S^{2n-1})$. Por el teorema (1.31) se tiene que

$$p^3\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})_{(p)} \subset p^2(\Sigma^2)_*(\pi_*(S^{2n-1})_{(p)}),$$

de lo que se sigue que

$$p^{n-3}(p^3\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})_{(p)}) \subset p^{n-3}(p^2(\Sigma^2)_*(\pi_*(S^{2n-1})_{(p)})).$$

Pero $p^{n-3}(p^2(\Sigma^2)_*(\pi_*(S^{2n-1})_{(p)})) = (\Sigma^2)_*(p^{n-1}\pi_*(S^{2n-1})_{(p)}) = 0$, entonces

$$p^n\pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})_{(p)} = 0.$$

Por lo que $p^n\pi_{*-2}(S^{2n+1})_{(p)} = 0$, pero los primeros grupos de homotopía de la esfera S^{2n+1} son iguales a 0 con lo que tenemos el resultado.

El resultado para S^{2n} se sigue del resultado para esferas de dimension par y el hecho que ΩS^{2n} tiene los mismos grupos de homotopía que $S^{2n-1} \times \Omega S^{4n-1}$ cuando se localiza en un primo impar. Además del hecho de que

$$\pi_*(\Omega S^{2n})_{(p)} \cong \pi_*(S^{2n-1})_{(p)} \times \pi_*(\Omega S^{4n-1})_{(p)}.$$

Por lo que se tiene el resultado del teorema. ■

Para la prueba se usó que S^3 tiene exponente p por el teorema de Selick (1.22) y se procedió de manera inductiva y el corolario (1.31) pero se usó fuertemente que p es mayor a 3. Los autores en su articulo señalan que este resultado sería cierto para $p = 3$ si los productos de Samelson tienen estructura de álgebra de Lie.

En el articulo [21] F. R. Cohen, J. C. Moore y J. A. Neisendorfer utilizan la existencia de productos de Samelson relativos. Si $A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ es una fibración de espacios 2-conexos, entonces se tienen una relación izquierda (y derecha) de productos de Samelson relativos

$$[\ \ ,\ \ ] : \pi_*(\Omega(A); \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \bigotimes \pi_*(\Omega A'; \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_*(\Omega A'; \mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})$$

donde t es un entero positivo no mayor que el mínimo entre r y s. Estos productos relativos son funtoriales y compatibles con el producto de Samelson en $\pi(\Omega A; \mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})$. Los productos de Samelson relativos satisfacen las identidades para ser un álgebra de Lie graduada; es decir, son antisimétricos y satisfacen la identidad de Jacobi.

Realizando un pequeña modificación a la técnica anterior y usando el Teorema de Selick (1.22) se tiene una version mas fuerte del corolario (1.31).

Corolario 1.33

Sea p un primo impar, y n es mayor que 1, entonces el kernel y el cokernel del mapa

$$(\Sigma^2)_* : \pi_*(S^{2n-1})_{(p)} \longrightarrow \pi_*(\Omega^2 S^{2n+1})_{(p)}$$

son eliminados al multiplicar por p.

Esta nueva version del corolario (1.31) es más fuerte y permite extender la prueba del Teorema (1.32)

Teorema 1.34
Si p es un número primo impar, entonces S^{2n+1} tiene exponente p^n y S^{2n} tiene exponente p^{2n-1} en p.

Demostración. La prueba es completamente análoga al la hecha en el teorema (1.32). ■

1.5. La construcción QX

Para esta sección supondremos que los espacios topológicos son compactamente generados.

Definición 1.35 Sea X un espacio topológico con punto base. Supongamos además que nuestros espacios son compactamente generados y Hausdorff. Definimos

$$QX = \Omega^\infty(\Sigma^\infty X) = \operatorname*{colím}_n \Omega^n\Sigma^n X$$

Aquí el colímite tiene la propiedad usual de que cualquier compacto $K \to QX$ factoriza a través de mapas en los espacios $\Omega^n\Sigma^n X$, y de hecho el espacio de los mapeos basados $Map(K, QX)$ es homeomorfo al colímite de los espacios mapas basados $Map(K, \Omega^n\Sigma^n X)$ para justificar este hecho se puede ver [51], es decir,

$$Map(K, QX) \cong \operatorname{colím} Map(K, \Omega^n\Sigma^n X).$$

Definición 1.36 Una familia P de espacios basados $\{P_n\}$ junto con mapas $\sigma_n : \Sigma P_n \longrightarrow P_{n+1}$ (donde los mapas adjuntos $\widehat{\sigma_n} : P_n \longrightarrow \Omega P_{n+1}$ no son necesariamente una equivalencia homotópica débil) es llamado ***pre-espectro***, si los mapas adjuntos

$\widehat{\sigma_n}$ son homeomorfismos entonces decimos que P es un ***espectro*** Identificamos a esta familia con el $\operatorname{colím}_n P_n = P$.

Observación 1.37 Q es un funtor en la categoría de espacios basados, el cual se obtiene al aplicar Σ^∞ para obtener un espectro, seguido de Ω^∞ para aterrizar de regreso en los espacios.

Proposición 1.38
Los grupos de homotopía $\pi_k(QX)$ son los grupos de homotopía estables de X

Demostración. Los grupos de homotopía estables de X, están definidos como

$$\pi_k^{estable}(X) = \pi_k^s(X) = \operatorname*{colím}_n \pi_{n+k}(\Sigma^n X) = \operatorname*{colím}_n \pi_k(\Omega^n \Sigma^n X)$$

■

En particular, si hacemos $X = S^0$ entonces los grupos de homotopía de QS^0 son los grupos de homotopía estables de esferas.

Proposición 1.39
Cada homotopía de mapeos basados $X \to Y$ induce una homotopía de mapeos basados $QX \to QY$. Por lo que el funtor Q es un funtor homotópico.

El funtor Q preserva las equivalencias de homotopías basadas, así que Q desciende a un funtor "derivado" en la categoría homotópica de espacios con punto base. Formalmente, este nuevo funtor reemplaza cada espacio con un complejo CW y luego aplica Q a ese complejo.

Si X, Y tienen puntos base no degenerados y $X \to Y$ es una equivalencia homotópica débil, entonces $\Sigma^n X \to \Sigma^n Y$ es una equivalencia homotópica débil por el Teorema de Whitehead. Es claro que si $\Omega^n\Sigma^n X \to \Omega^n\Sigma^n Y$ es una equivalencia homotópica débil, $QX \to QY$ también lo es.

Proposición 1.40
Existe una transformación natural $X \to QX$ dada por el mapa identidad de X en el nivel 0 del sistema de colímite para QX.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ QX \arrow[r, "Qf"] & QY \end{tikzcd}$$

Cuadro 1.4: Q es natural con respecto al funtor identidad.

Notemos que al aplicar π_* obtenemos el homeomorfismo de los grupos de homotopía de X en los grupos de homotopía estables de X. Así como la relación que hay entre el homomorfismo inducido en los grupos de homotopía y los grupos de homotopía estable.

$$\begin{tikzcd} \pi_*(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \pi_*(Y) \arrow[d] \\ \pi_*^s(X) \arrow[r, "f_*^s"] & \pi_*^s(Y) \end{tikzcd}$$

Definición 1.41 Decimos que Y es un espacio de lazos infinito si tiene desenlazamientos $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $Y_0 = Y$ y homeomorfismos $\omega_n : Y_n \longrightarrow \Omega Y_{n+1}$.

Teorema 1.42
QX es un espacio de lazos infinito.

Específicamente, existe un homeomorfismo entre QX y $\Omega Q(\Sigma X)$. Esto implica inmediatamente que QX tiene infinitos desenlazamientos, por ello $Q(\Sigma^n X) \cong \Omega Q(\Sigma^{n+1} X)$.

Proposición 1.43
Sea X un espacio compactamente generado con punto base no degenerado, entonces QX y $\Omega Q(\Sigma X)$ son homemorfos.

Demostración. La idea de la demostración consiste en ver que

$$\Omega Q(\Sigma X) = \operatorname*{colím}_n \Omega(\Omega^n \Sigma^n(\Sigma X)).$$

Al comparar los dos sistemas de colímites.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] & \Omega\Sigma X \arrow[r] & \Omega^2\Sigma^2 X \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & QX,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega\Sigma X \arrow[r, "\Omega(\eta_{\Sigma X})"] & \Omega^2\Sigma^2 X \arrow[r] & \Omega^3\Sigma^3 X \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \Omega Q\Sigma X.
\end{tikzcd}$$

Notamos que basta construir homeomorfismos entre ambos sistemas de manera diagonal, de tal forma que los paralelogramos conmuten y finalmente usar la propiedad universal del colímite.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] & \Omega\Sigma X \arrow[r] & \Omega^2\Sigma^2 X \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & QX \arrow[d, leftrightarrow] \\
\Omega\Sigma X \arrow[r, "\Omega(\eta_{\Sigma X})"] \arrow[ur, leftrightarrow] & \Omega^2\Sigma^2 X \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & \Omega^3\Sigma^3 X \arrow[r] \arrow[ur, leftrightarrow] & \ldots \arrow[r] & \Omega Q\Sigma X
\end{tikzcd}$$

Para un n fijo es necesario definir un mapa de $\Omega^n\Sigma^n X$ en si mismo. Lo hacemos de la siguiente manera, $\Omega^n\Sigma^n X = Map(S^n, \Sigma^n X) = Map(S^n, S^n \wedge X)$, tomamos un mapa $S^n \to \Sigma^n X$ y precomponemos con una permutación de n-letras $S^n \to S^n$, la cual al componer con el sistema colímite hace conmutar los paralelogramos y esquemáticamente hace lo siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega\Omega\Omega\Sigma\Sigma\Sigma X \\
\Omega\Omega\Omega\Sigma\Sigma\Sigma X \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}$$

donde hemos coloreado las coordenadas de la esfera para indicar la permutación. Componiendo con el sistema colímite:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\eta_X"] & \Omega\Sigma X \arrow[d, "\Omega(\eta_{\Sigma X})"] \\
\Omega\Sigma X \arrow[d] \arrow[ur, leftrightarrow] & \Omega\Omega\Sigma\Sigma X \arrow[d] \\
\Omega\Omega\Sigma\Sigma X \arrow[d] \arrow[ur, leftrightarrow] & \Omega\Omega\Omega\Sigma\Sigma\Sigma X \arrow[d] \\
\Omega\Omega\Omega\Sigma\Sigma\Sigma X \arrow[d] \arrow[ur, leftrightarrow] & \vdots \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
QX \arrow[r, leftrightarrow] & \Omega Q\Sigma X
\end{tikzcd}$$

El homeomorfismo se tiene por la propiedad universal del colímite. ■

De cualquier modo, esto muestra que QX es un espacio de lazos infinito, y el operad de cubitos infinitos actúa directamente sobre QX (es decir, QX es un espacio E_∞).

Teorema 1.44
El funtor Q manda cuñas finitas en productos finitos.

$$Q\left(\bigvee_{i=1}^{n} X_i\right) \cong \prod_{i=1}^{n} QX_i$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Q\left(\bigvee_{i=1}^{n} X_i\right) &= \operatorname*{colím}_n \Omega^n\Sigma^n\left(\bigvee_{i=1}^{n} X_i\right)\\
&\cong \operatorname*{colím}_n \Omega^n\left(\bigvee_{i=1}^{n} \Sigma^n X_i\right)\\
&\simeq \operatorname*{colím}_n \Omega^n\left(\prod_{i=1}^{n} \Sigma^n X_i\right)\\
&\cong \operatorname*{colím}_n \left(\prod_{i=1}^{n} \Omega^n\Sigma^n X_i\right)\\
&\simeq \prod_{i=1}^{n} \operatorname*{colím}_n \Omega^n\Sigma^n X_i\\
&= \prod_{i=1}^{n} QX_i
\end{aligned}$$

La primera equivalencias débil viene del hecho de que una cuña finita de espectros se queda contenida en un producto finito, inclusión que es una equivalencia homotópica estable. Por lo tanto induce una equivalencia homotópica débil entre los espacios de lazos infinitos de los dos espectros. Para la segunda equivalencia homotopíca se tiene de intercambiar el producto finito con el colímite. Existe ciertamente un mapa entre los dos, se puede verificar que este es una equivalencia homotópica débil escogiendo cualquier punto base y usando el hecho de que los mapas en estos espacios de esferas conmutan con el colímite y el producto. También cabe resaltar que todas estas equivalencias son naturales, así que su composición $Q(\vee_{i=1}^n X_i) \simeq \prod_i QX_i$ también es natural. ∎

El Teorema (1.44) se puede generalizar a cuñas infinitas y productos infinitos usando una aproximación CW para el producto infinito a través de todos los productos de celdas finitos y usando el Teorema de Hilton-Milnor[29, 44] para la segunda equivalencia homotópica débil.

1.6. El teorema de Kahn-Priddy

El propósito de esta sección es exponer algunas ideas detrás del siguiente teorema de Kahn y Priddy [48] :

Teorema 1.45
Existen mapeos $s : Q\mathbb{R}P^\infty \longrightarrow QS^0$ y $j : QS^0 \longrightarrow Q\mathbb{R}P^\infty$ tales que $s \circ j : QS^0 \longrightarrow QS^0$ induce un isomorfismo en las componentes 2-primarias de los grupos de homotopía.

Este resultado implica en particular que la homotopía estable de $\mathbb{R}P^\infty$ se mapea de manera suprayectiva sobre los grupos de homotopía estables de las esferas. En [48] G. Segal esboza un enfoque muy elegante del Teorema de Kahn-Priddy y cuyas ideas principales se exponen a continuación.

De acuerdo a Segal, el resultado se sigue de la existencia de ciertas operaciones en teoría de cohomotopía estable descritas en el Teorema (1.46).

Denotemos por $\pi_s^q(X)$ la cohomotopía estable de un espacio X, es decir,

$$\pi_s^q(X) = [X; \operatorname*{colím}_n \Omega^n \Sigma^{n+q}],$$

donde $[\;\;;\;\;]$ denota el conjunto de clases de homotopía de mapeos (no basados). De manera más general, definimos $\pi_s^q(X;Y)$ por $[X, \operatorname*{colím}_n \Omega^n S^{n+q}(Y_+)]$ donde Y_+ es la unión disjunta de Y y un punto base externo. Nótese que un cualquier mapa $Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Y_3$ induce

$$\pi_s^p(X;Y_1) \otimes \pi_s^q(X;Y_2) \longrightarrow \pi_s^{p+q}(X;Y_3).$$

Aquí nos interesaremos únicamente en el caso $Y = B\Sigma_n$, el espacio clasificante del n-esismo grupo simétrico y los mapeos $B\Sigma_k \times B\Sigma_{k'} \longrightarrow B\Sigma_{k+k'}$ inducidos por la yuxtaposición de permutaciones. Para toda k existe una transformación "de olvido" (forgetful) entre teorías de cohomología:

$$\phi_k : \pi_s^*(\;\;; B\Sigma_k) \longrightarrow \pi_s^*(\;\;)$$

$$\phi_k : [\quad ; \operatorname*{colím}_n \Omega^n \Sigma^{n+*}(B\Sigma_k)] \longrightarrow [\quad ; \operatorname*{colím}_n \Omega^n \Sigma^{n+*}]$$

que será definido a continuación

Teorema 1.46

Para $n \geq 0$, existen transformaciones naturales entre los funtores $\pi_s^0(\ \ )$ y $\pi_s^0(\ \ ; B\Sigma_n)$ tales que para toda X

$$\theta^n : \pi_s^0(X) \longrightarrow \pi_s^0(X; B\Sigma_n)$$

tales que:

1. $\theta^0(x) = 1$ para toda x,
2. $\theta^1(x) = x$ para toda x,
3. $\theta^r(x+y) = \sum_{i=0}^{r} \theta^i(x)\theta^{r-i}(y)$ para toda $x,\ y$ donde el producto en el lado derecho es el inducido por la yustaposición natural $B\Sigma_i \times B\Sigma_{k-i} \longrightarrow B\Sigma_k$,
4. $\phi_r \circ \theta^r(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$.

La demostración de este teorema está fuera del alcance de esta tesis, pero puede consultare se en [48]. A continuación indicamos como probar el Teorema (1.45) a partir del Teorema (1.46).

Las transformaciones θ^2 y ϕ_2 corresponden a mapas

$$QS^0 \xrightarrow{\theta^2} Q(B\Sigma_2)_+ \xrightarrow{\phi_2} QS^0.$$

De acuerdo a la propiedad (1.46.4), la composición de estos mapeos es la función $x \mapsto x^2 - x$ de $\pi_s^0(X)$ en si mismo. Si X es una suspensión y x está en $\widetilde{\pi}_s^0$ el cual se define como el $ker : \pi_s^0(X) \longrightarrow \pi_s^0(*)$, se tiene que $x^2 = 0$, entonces la composición se simplifica como $x \mapsto -x$, el cual es un isomorfismo. En particular $\phi_2 \circ \theta^2$ induce un isomorfismo en los grupos de homotopía, por lo que tiene que ser una equivalencia homotópica. Pero $B\Sigma_2 = \mathbb{R}P^\infty$, y $Q(\mathbb{R}P^\infty{}_+) = Q\mathbb{R}P^\infty \times QS^0$. El mapa $\phi_2 : [X; Q\mathbb{R}P^\infty] \times [X; QS^0] \longrightarrow [X; QS^0]$ es de la forma $\phi_2(x, y) = s(x) + 2y$

por la definición de ϕ_2; por lo que si $\theta^2 = j \circ x\gamma : QS^0 \longrightarrow Q\mathbb{R}P^\infty \times QS^0$ entonces $(s \circ j)(x) = \phi_2 \circ \theta^2(x) + 2\gamma(x)$. Así $s \circ j$ es un isomorfismo en las componetes 2-primarias si y solo si $\phi_2\theta^2$ lo es, lo que demuestra el Teorema (1.45).

Sea $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$ el espacio de los subconjuntos de cardinalidad k en $\mathbb{R}^n$, el espacio de configuraciones desordenadas en $\mathbb{R}^n$. Así por ejemplo $F_2(\mathbb{R}^n)/\Sigma_2$ es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{R}P^{n-1}$. Uno puede pensar al espacio $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$ como su encaje en $F_k(\mathbb{R}^{n+1})/\Sigma_k$ y este último en el siguiente y así consecutivamente, para un k fijo.

$$\cdots \hookrightarrow F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \hookrightarrow F_k(\mathbb{R}^{n+1})/\Sigma_k \hookrightarrow F_k(\mathbb{R}^{n+2})/\Sigma_k \hookrightarrow \cdots$$

los cuales se encajan en

$$\operatorname*{colím}_n F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k = \bigcup F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k = F_k(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_k = B\Sigma_k.$$

Entonces el teorema 1.46 se puede generalizar de la siguiente manera.

Teorema 1.47
Para cada k y n se tienen transformaciones entre los funtores $[\ ;\Omega^n S^n]$ y $\pi_s^0(\ ; F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k)$ definidas

$$\theta_n^k : [\ ;\Omega^n S^n] \longrightarrow \pi_s^0(\ ; F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k)$$

tales que:

1. si $n \leqslant r$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n S^n \arrow[r] \arrow[d, "\theta_n^k"] & \Omega^r S^r \arrow[r] \arrow[d, "\theta_r^k"] & QS^0 \arrow[d, "\theta^k"] \\
Q(F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k)_+ \arrow[r] & Q(F_k(\mathbb{R}^r)/\Sigma_k)_+ \arrow[r] & Q(B\Sigma_k)_+
\end{tikzcd}$$

2. $\theta_n^k(x+y) = \sum_{i=0}^{k} \theta_n^i(x)\theta_n^{k-i}(y)$, con $x \in F_i(\mathbb{R}^n)/\Sigma_i$ y $y \in F_{i-k}(\mathbb{R}^n)/\Sigma_{i-k}$ bajo el encaje de $F_i(\mathbb{R}^n)/\Sigma_i \times F_{i-k}(\mathbb{R}^n)/\Sigma_{i-k} \longrightarrow F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$ el cual esta dado por cualquier encaje abierto fijo de $\mathbb{R}^n \bigsqcup \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

La prueba de este teorema se demuestra de manera similar al Teorema(1.46) en el artículo de G. Segal [48]. De donde se deduce la existencia de los mapeos $j_n : \Omega_0^n S^n \longrightarrow Q\mathbb{R}P^{n-1}$ los cuales filtran al mapeo j.

Corolario 1.48
Para cada n, la restricción de j a $\Omega_0^n S^n \subset Q_0(S^0)$ factoriza a través de un mapeo

$$j_n : \Omega_0^n S^n \longrightarrow Q(\mathbb{R}P^{n-1}).$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_0^n S^n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "j_n"] & Q_0 S^0 \arrow[d, "j"] \\
Q\mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, hook] & Q\mathbb{R}P^{\infty}.
\end{tikzcd}$$

Capítulo 2

La geometría de los espacios de lazos iterados

2.1. El operad de n-cubitos $\mathcal{C}_*(n)$

Definición 2.1 Dado un espacio M definimos el ***espacio de configuración*** (*ordenado*) de k-tuplas ordenadas de puntos de distintos en M, es decir;

$$F_k(M) = \{(m_1, \ldots, m_k) \in M^k \mid m_i \neq m_j \ si \ i \neq j\}.$$

El grupo simétrico en k letras Σ_k actúa permutando coordenadas. Escribimos

$$F_k(M)/\Sigma_k$$

para el ***espacio de configuración sin orden*** de k-tuplas de puntos distintos desordenados en M, con la topología dada por la acción de Σ_k.

Estos espacios fueron introducidos por E. Fadell y L. Neuwirth en [24] y han sido intensamente estudiados desde entonces por su relación con topología de bajas dimensiones y teoría de homotopía. Por ejemplo, el espacio $F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k$ es un espacio Eilenberg-MacLane de tipo $K(B_k, 1)$ donde B_k denota los grupos de trenzas de Artin en k hilos. Los espacios $F_k(\mathbb{R}^N)/\Sigma_k$ no son $K(\pi, 1)$ si $2 < N < \infty$ mientras que la unión $\bigcup_N F_k(\mathbb{R}^N)/\Sigma_k = F_k(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_k$ es $K(\pi, 1)$ donde π es el grupo simétrico en k letras [24, 26].

El caso $M = \mathbb{R}^n$ es especial y nos ayuda con otros espacios de configuración de manera natural. Este tipo de espacios de configuraciones en espacios euclidianos son homotopicamente equivalentes a ciertos espacios de encajes introducidos por Boardman y Vogt [9].

Definición 2.2 Denotamos por $I = [0, 1]$. Un ***n-cubito*** c es un encaje afín que preserva orientación $c : I^n \longrightarrow I^n$ de la forma $c = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$, donde cada $f_i : I \longrightarrow I$ esta definida como $f_i(t) = a_i t + b_i$ con $0 < a_i$, $0 \leqslant b_i$ y $a_i + b_i \leqslant 1$ (ver figura 2.1).

No vamos a hacer distinción en la notación entre un n-cubito y su imagen.

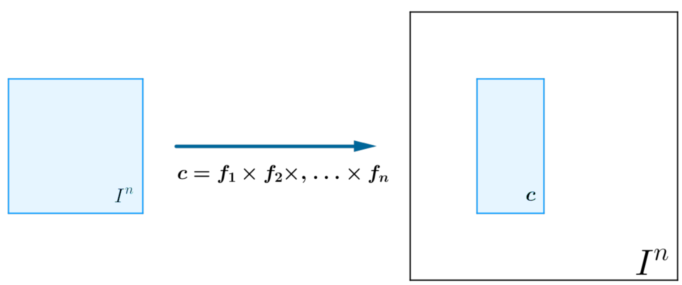

Figura 2.1: n-cubito

Definición 2.3 ***El espacio de k n-cubitos***. Sea $\mathcal{C}_n(k)$ el conjunto de las k-tuplas, $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$, de n-cubitos tales que los interiores de las imágenes de los $c_j : I^n \longrightarrow I^n$ son disjuntos (ver figura 2.2). Además notemos que $(c_1, c_2, \ldots, c_k) : \coprod^k I^n \longrightarrow I^n$, es una función continua que esta definida de manera natural. La topología que recibe este espacio es la topología compacto-abierto. Denotamos a $\mathcal{C}_n(0) = (\ )$ como un punto,

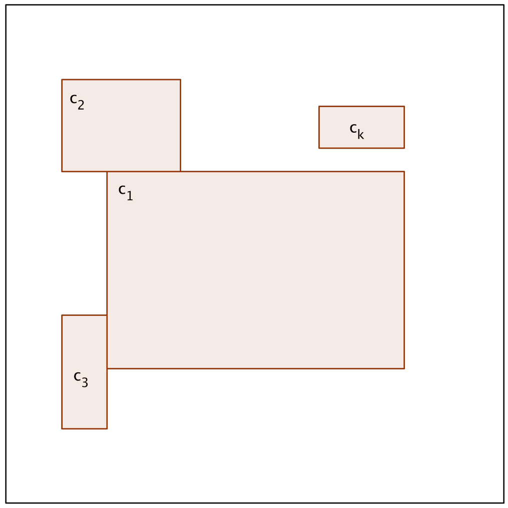

Figura 2.2: n-cubitos

$$\mathcal{C}_n(k) = \left\{ (c_1, \ldots, c_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Cada } c_i \text{ es un } n\text{-cubito.} \\ int(c_i) \text{ y } int(c_j) \text{ son disjuntos si } i \neq j. \end{array} \right\}.$$

Definición 2.4 Sea (X, x_0) un espacio basado y su punto base no degenerado. Definimos

$$\mathcal{C}_n X = \left(\coprod_{k \geqslant 0} \mathcal{C}_n(k) \times_{\Sigma_k} X^k \right) \Big/ \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por

$$[\langle c_1, c_2, \ldots, c_k \rangle; x_1, x_2, \ldots, x_k] \sim [\langle c_1, c_2, \ldots, c_{k-1} \rangle; x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]$$

si y solo si $x_k = *$, el punto base.

$$\mathcal{C}_n(k) \times_{\Sigma_k} X^k$$

Es el conjunto de clases de equivalencia bajo la acción del grupo simétrico Σ_k. Donde conjunto $\langle c_1, c_2, \ldots, c_k \rangle$ denota la clase de equivalencia de $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ bajo esta acción.

Existe un mapa de evaluación

$$ev : \mathcal{C}_n(k) \to F_k(\mathbb{R}^n)$$

dado por enviar c_i a su centro; haciendo así $z = (1/2, \ldots, 1/2) \in I^n$, definimos

$$ev(c_1, c_2 \ldots, c_k) = (c_1(z), c_2(z) \ldots, c_k(z)).$$

El siguiente resultado se observó en el trabajo de Broadman y Vogt [9] mientras que una prueba aparece en el libro de J.P. May, "The geometry of iterated loop spaces" [40].

Lema 2.5
El mapa ev conmuta con la acción natural de grupo simétrico Σ_k y es también una equivalencia homotópica.

Composición de funciones da un mapa continuo

$$\gamma : \mathcal{C}_n(k) \times \mathcal{C}_n(j_1) \times \cdots \times \mathcal{C}_n(j_k) \to \mathcal{C}_n(j_1 + \cdots + j_k)$$

La estructura de estas composiciones que tienen origen en el trabajo de Mac Lane y de Stasheff son explotadas y abstraídas en el libro de J.P. May, "The geometry of iterated loop spaces" por la notación de un operad.

2.2. El teorema de aproximación

El espacio $\mathcal{C}_nX$esta filtrado por conjuntos de la forma $F_j(\mathcal{C}_nX)$ definidos como la imagen del siguiente mapa

$$\left[\coprod_{k=0}^{j} \mathcal{C}_n(k) \times X^k \longrightarrow \mathcal{C}_nX\right]$$

dado por la composición de la inclusión y la proyección al cociente.

Las propiedades más importantes de $\mathcal{C}_nX$ que usaremos en el resto del trabajo se detallan a continuación. El lector puede referirse al libro de J.P. May[40] para las pruebas.

Proposición 2.6
La construcción de $\mathcal{C}_n(\ )$ es un funtor homotópico de la categoría de k-espacios Hausdorff con punto base no degenerado en la misma categoría el cual preserva colímites.

Teorema 2.7 (Teorema de aproximación de J. P. May)
Para cada $n \geqslant 0$, si X es arcoconexo con punto base x_0 . Entonces existe una equivalencia homotópica débil

$$\alpha_n : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \Omega^n\Sigma^n X.$$

definida como:

$$\alpha_n[\langle c_1, \dots c_k\rangle; x_1, \dots x_k]\,([u]) = \begin{cases} [c_i^{-1}] \wedge x_i & \text{si} \qquad u \in int(c_i)), \\ \\ \quad x_0 & \text{si} \quad u \notin int(c_i) \text{ para toda } i. \end{cases}$$

donde $[u]$ denota una clase en $I^n/\partial I^n \cong S^n$ (ver figura 2.3). Dado que el funtor $\mathcal{C}_n(\ )$ preserva colímites entonces se sigue

$$\alpha_\infty : \mathcal{C}_\infty(X) \longrightarrow \Omega^\infty\Sigma^\infty X = QX.$$

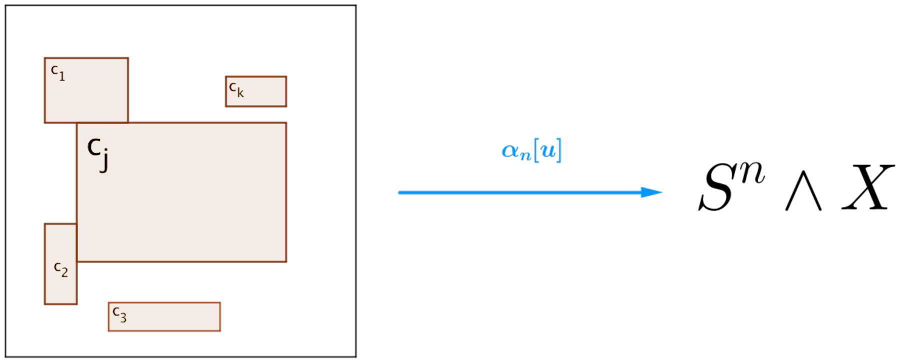

Figura 2.3: Construcción de J.P. May $\alpha_n[u]$.

Para la prueba del teorema de aproximación de J. P. May (2.7) se requiere el uso de los espacios $E_n X$, los cuales se definen a continuación y se explican sus propiedades elementales.

Definición 2.8 Sea (X, A) una pareja en la categoría de espacios topológicos basados. Se define el subespacio $\mathcal{E}_n(k; X, A)$ de $\mathcal{C}(k) \times X^k$ de la siguiente forma

$$(\langle c_1, c_2, \ldots, c_k\rangle; x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad \Leftrightarrow \quad \text{si } x_j \in A, \text{ y } c_j \text{ puede ser “extendido”},$$

donde “extendido” o “extendido a la derecha” significa lo siguiente:

Definición 2.9 La configuración $c = \langle c_1, c_2, \ldots, c_k\rangle \in \mathcal{C}_n(k)$ sea j entre 1 y k se dice que c_j puede ser ***extendido a la derecha*** si la intersección en I^n del conjunto $(c_j'(-1), 1) \times c_j''(I^{n-1})$ y $c_s(I)$ es vacía para toda $s \neq j$ y $c_j = c_j' \times c_j''$ donde $c_j' : I \longrightarrow I$ y $c_j'' : I^{n-1} \longrightarrow I^{n-1}$ (ver figura 2.4).

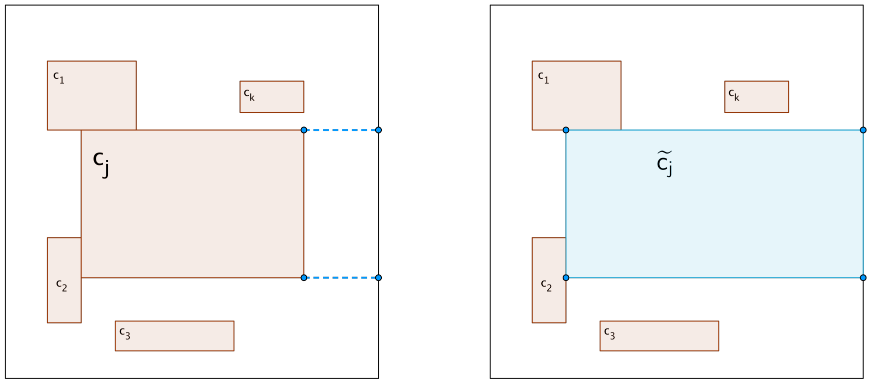

Figura 2.4: Extender a la derecha a c_j .

Además se define el espacio

$$E_n(X, A) = \left(\coprod_{k \geqslant 0} \mathcal{E}_n(k; X, A)/\Sigma_k \right) \Big/ \sim$$

donde $\sim$ es la restricción de la relación definida para $\mathcal{C}_n(X)$.

Teorema 2.10
Sea (X, A) una pareja *NDR*en la categoría de k-espacios Hausdorff. Si X es contraible, entonces $E_n(X, A)$ es aesférico. Más aun, $E_n(X, A)$ es contraible si se cumplen las siguientes:

1. X es contraible.

2. X es compacto o si X es el cono de A o si $n = 1$.

Teorema 2.11
Sea (X, A) una pareja *NDR* en la categoría de k-espacios Hausdorff, y supongamos que A es arcoconexo. Si $\pi : X \longrightarrow X/A$ es la proyección al cociente, entonces el mapeo $\pi_n : E_n(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X/A)$ esta dado por

$$\pi_n[\langle c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, \ldots, d_l \rangle; x_1, x_2, \ldots, x_k, a_1, a_2, \ldots, a_l],$$

$$\pi_n[\langle c,d\rangle ,x,a] = [c,\pi^k(x)] = [\langle c_1,\dots c_k\rangle ;\pi(x_1),\dots \pi(x_k)].$$

es una cuasifibración con fibra $\mathcal{C}_n A$.

Dado que $x_i \in X \setminus A$, $a_j \in A$ y los c_i se pueden extender, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant j \leqslant l$. Puesto que los c_i se pueden extender a la derecha tienen la forma $c_i = c_i' \times c_i''$ y son tales que

$$\langle c_i'', c_2'', \dots c_k''\rangle \in \mathcal{C}_{n-1}(k)$$

y puesto que $\pi(a_j) = *$, se tiene que la función esta bien definida.

Definición 2.12 Definimos $E_n(X)$ como el espacio contraible $E_n(C(X),X)$ donde $C(X)$ denota el cono de X.

Teorema 2.13
Para cada espacio X en la categoría de k-espacios y $n \geqslant 1$, se tienen mapas $\pi_n : E_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{n-1}\Sigma X$ y $\widetilde{\alpha_n} : E_n(X) \longrightarrow P\Omega^{n-1}\Sigma^n X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_n X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha_n"] & E_n X \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\widetilde{\alpha_n}"] & \mathcal{C}_{n-1}\Sigma X \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \\
\Omega^n\Sigma^n X \arrow[r, hook] & P\Omega^{n-1}\Sigma^n X \arrow[r] & \Omega^{n-1}\Sigma^n X
\end{tikzcd}$$

donde la fila de abajo es la fibración de trayectorias y lazos de $\Omega^{n-1}\Sigma^n X$ y la fila de arriba es una cuasifibración por el teorema anterior.

2.3. La descomposición estable de Snaith

Definición 2.14 Sea M una variedad de dimensión m y X un CW-complejo con punto base x_0 no degenerado. El espacio de configuraciones etiquetadas en X se define como

$$\mathcal{C}(M,X) = \left(\coprod_{k\geqslant 0} F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^k \right) \Big/ \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por

$$[m_1, m_2 \dots m_k; x_1, x_2, \dots, x_k] \sim [m_1, m_2, \dots, m_{k-1}; x_1, x_2, \dots, x_{k-1}]$$

si y solo si $x_k = x_0$ el punto base.

De manera similar al procedimiento realizado con n-cubitos $\mathcal{C}(X)$ el espacio $\mathcal{C}(M, X)$ es filtrado por subespacios cerrados de la forma

$$\mathcal{C}_k(M; X) = \left(\coprod_{j=0}^{k} F_j(M) \times_{\Sigma_j} X^j \right) \Big/ \sim .$$

Proposición 2.15
Sea X un CW-complejo y $n \geqslant 1$ el espacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X)$ es homotópicamente equivalente al espacio $\Omega^n \Sigma^n X$, este hecho es cierto aún cuando $n = \infty$, es decir $\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; X) \approx Q(X)$.

Demostración. Por el lema (2.5) el espacio de cubitos es del mismo tipo de homotopía que el espacio de configuraciones de k puntos desordenados en $\mathbb{R}^n$. Además

$$\mathbb{R}^\infty = \operatorname*{colím}_n \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \qquad F_k(\mathbb{R}^\infty) = \operatorname*{colím}_n F_k(\mathbb{R}^n)$$

y por el Teorema de J. P. May (2.7) se tiene el resultado. ∎

Se denota $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k(M; X)$ al cociente de la filtración $\mathcal{C}_k(M; X)/\mathcal{C}_{k-1}(M; X)$ y denotamos por conveniencia a $\mathcal{C}(M; X)$ como la clase de equivalencia de pares (S, f) donde S es un conjunto finito de M, $f : S \longrightarrow X$ con la relación de equivalencia generada por $(S, f) \sim (S \setminus \{q\}, f|_{S\setminus\{q\}})$ si $f(q) = x_0$.

De manera similar a lo visto anteriormente $\mathcal{C}(M, X)$ esta filtrado por conjuntos de la forma $F_j\mathcal{C}(M, X)$ iguales al subespacio de $\mathcal{C}(M, X)$ donde las clases $[S, f]$ son tales que S tiene cardinalidad a lo más j (es decir, justo la filtración explicada anteriormente).

Definimos el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)$ como

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X) = \bigvee_{k\geqslant 0} \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X)$$

Teorema 2.16 (Descomposición estable de Snaith)
El espacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X)$ es del mismo tipo de homotopía estable que $\bigvee_{k\geqslant 0} \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X)$, es decir;

$$Q\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \simeq Q\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X).$$

Por lo tanto:

$$\Omega^n \Sigma^n X \simeq_s \bigvee_{k\geqslant 0} D_k(R^n; X).$$

Demostración. Reproducimos aquí la prueba dada por F. Cohen en [15]. Consideremos dado un encaje encaje de $\mathcal{C}(R^n, S^0) = \coprod F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$ en $\mathbb{R}^\infty$ Para todo subconjunto finito S de $\mathbb{R}^n$, se define $P_S = \{T \mid T \neq \emptyset \text{ y } T \subset S\}$ el cual es un subconjunto finito de $\mathbb{R}^\infty$. Por simplicidad supondremos que $\mathcal{C}(R^n, S^0)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^\infty$. Sea definen

$$h_k : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \longrightarrow \mathcal{C}(F_k(\mathbb{R}^n/\Sigma_k), \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X)) \quad \text{como}$$

$$h_k(S, f) = (\{T\}, g),$$

y

$$H : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)) \quad \text{como}$$

$$H([S, f]) = [P_s, g].$$

Donde $g : P_S \longrightarrow \mathcal{D}$ esta definida como $g(\{T\}) = (T, f|_T)$. Es claro que h_k y H son funciones continuas. Notemos que $\prod_{k\geqslant 0} \mathcal{C}(F_k(\mathbb{R}^n/\Sigma_k), \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X))$ es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty.\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X))$ y H es la composición de las

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \xrightarrow{\delta} \prod_0^\infty \mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \xrightarrow{\pi\circ h_k} \prod \mathcal{C}(F_k(\mathbb{R}^n/\Sigma_k),\ \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X)) \xrightarrow{i} \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)).$$

Más aún, notemos que H restringida a las filtraciones de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X)$

$$\begin{tikzcd}
F_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, X) \arrow[r, "H|_{F_{j-1}}"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; F_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)) \arrow[d, "i"] \\
F_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; F_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)) \arrow[r, "H|_{F_j}"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; F_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)).
\end{tikzcd}$$

Sea p la identificación dada por colapsar el espacio $F_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)$ a un punto en el espacio $F_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)$, entonces existe una función $\phi : \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X) \longrightarrow C(\mathbb{R}^\infty; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X))$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
F_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n; X) \arrow[r, "H|_{F_{j-1}}"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; F_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)) \arrow[d, "i"] \\
F_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)) \arrow[r, "H|_{F_j}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; F_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X)) \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X) \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; X)).
\end{tikzcd}$$

Ahora bien la función ϕ es homotópicamente equivalente a la inclusión estandar $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n; X) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; X)$. Ahora usando el teorema de J. P. May (2.7)$\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty; Z)$ y $\Omega^\infty\Sigma^\infty Z$ son del mismo tipo de homotopía por lo que podemos remplazar todos los espacios y así obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X) \arrow[r] \arrow[d] & QF_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)) \cdot \arrow[d] \\
F_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[r] \arrow[d] & QF_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[d] \\
\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X) \arrow[r] & Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X)
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor Q al lado izquierdo del diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
QF_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X) \arrow[r] \arrow[d] & QF_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)) \cdot \arrow[d] \\
QF_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[r] \arrow[d] & QF_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[d] \\
Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X) \arrow[r] & Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X)
\end{tikzcd}$$

donde la flecha de abajo es una equivalencia homotópica. Pero $F_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,X) \hookrightarrow F_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,X)$ es una cofibración con cofibra $\mathcal{D}_j(\mathbb{R}^n;X)$ [20]. Pero $F_0\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,X)$ y $F_0\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,X)$ son iguales un punto, y la flecha de abajo es una equivalencia homotópica, entonces

$$Q(F_1\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,X)) \longrightarrow Q(F_1\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,X))$$

induce isomorfismo en los grupos de homotopía.

Ahora bien, de manera inductiva supongamos que

$$Q(F_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, X)) \longrightarrow Q(F_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, X))$$

es una equivalencia homotópica, es decir, induce isomorfismo en todos los grupos de homotopía y dado que el lado izquierdo del diagrama es una quasifibración tenemos por la sucesión exacta de la pareja

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \pi_{n+1}(Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[d] \\
\pi_n(QF_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \pi_n(QF_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X))) \arrow[d] \\
\pi_n(QF_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X))) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(QF_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X))) \arrow[d] \\
\pi_n(Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \pi_n(Q\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[d] \\
\pi_{n-1}(QF_{j-1}\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X)) \arrow[r, "\cong"] & \pi_{n-1}(QF_{j-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X))).
\end{tikzcd}$$

Por el lema del quinto se tiene que para toda n $\pi_n(QF_j\mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X))) \cong \pi_n(QF_j\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X)))$, entonces es una equivalencia homotópica para toda j. Por lo que

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;X) \simeq_s \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;X) = \bigvee_{k\geqslant 0} \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n;X).$$

lo cual demuestra el teorema de descomposición de Snaith. ■

Una modificación al argumento anterior permite obtener la siguiente version homológica del Teorema de descomposición de Snaith:

Teorema 2.17

$$\widetilde{H}_*(\Omega^n\Sigma^n X) = \bigoplus \widetilde{H}_*(D_k(\mathbb{R}^n; X))$$

La demostración es similar a la del Teorema (2.16) y no sera incluida aquí. La idea básica es usar el funtor $SP^\infty(\quad)$ en lugar de $Q(\quad)$.

Proposición 2.18
Sea M una variedad, y X un CW-complejo con punto base x_0

$$\mathcal{D}_k = F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^{\wedge k} \Big/_{F_k(M)/\Sigma_k} = F_k(M)_+ \wedge_{\Sigma_k} X^{\wedge k}.$$

Corolario 2.19
Supongamos que $X = S^r$, entonces

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k\geqslant 0} F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} S^{rk}.$$

Demostración. La demostración es inmediata del teorema de Snaith (2.16). ■

Se tiene una importante aplicación al teorema de Snaith en terminos del espacio de Thom asociado a ciertos haces vectoriales. Se define el $\xi_{n,k}$ como

$$\xi_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \to F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k.$$

el cual es un $\mathbb{R}$-haz vectorial sobre $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$

Teorema 2.20
El espacio de Thom asociado al haz vectorial $r\ \xi_{n,k}$ es homeomorfo a $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; S^r)$, donde $r\ \xi_{n,k}$ denota la suma de Whitney de $\xi_{n,k}$ r-veces.

Demostración. Usando la definición de $\mathcal{D}_k$ con $X = S^r$ y considerando a $S^r = \mathbb{R}^{r*}$ como la compactificación de $\mathbb{R}^r$ por un punto, "el punto base de la esfera", tenemos

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; S^r) = \mathcal{C}_k(\mathbb{R}^n; S^r) \Big/ {}_{\mathcal{C}_{k-1}(\mathbb{R}^n; S^r)},$$

pero esto no es otra cosa que

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; S^r) = \frac{\left(\coprod_{j=0}^{k} F_j(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_j} (\mathbb{R}^{r*})^{\wedge j}\right) \Big/ \sim}{\left(\coprod_{j=0}^{k-1} F_j(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_j} (\mathbb{R}^{r*})^{\wedge j}\right) \Big/ \sim},$$

luego

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; S^r) = \left(F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{R}^{r*})^{\wedge k} \bigcup \mathcal{C}_{k-1}(\mathbb{R}^n; S^r)\right) \Big/ \sim$$

donde esta última relación está dada al identificar $\mathcal{C}_{k-1}(\mathbb{R}^n; S^r)$ con el punto base de S^r. Recordemos que $X^{\wedge k} \cong \dfrac{X^k}{FatW_k(X)}$, así

$$(\mathbb{R}^{r*})^{\wedge k} = \frac{(\mathbb{R}^{r*}) \times (\mathbb{R}^{r*}) \times \cdots \times (\mathbb{R}^{r*})}{(\{*\} \times (\mathbb{R}^{r*})^{k-1}) \cup (\mathbb{R}^{r*} \times \{*\} \times (\mathbb{R}^{r*})^{k-2}) \cup \cdots \cup ((\mathbb{R}^{r*})^{k-1} \times \{*\})},$$

pero el punto base $\{*\}$ esta relacionado con $\mathcal{C}_{k-1}(\mathbb{R}^n; S^r)$ en $\mathcal{D}_k$, el cual es un punto de acumulación en este espacio. Por lo tanto

$$\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; S^r) = \left(F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{R}^{kr}) \bigcup \mathcal{C}_{k-1}\mathbb{R}^n; S^r\right) \Big/ \sim,$$

esto es, $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n; S^r)$ es el espacio de Thom del haz $r\ \xi_{n,k}$. ■

Corolario 2.21

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k \geqslant 0} Th(r\ \xi_{n,k})$$

Capítulo 3

Haces vectoriales sobre espacios de configuraciones

3.1. Haces sobre espacios de configuraciones

Definimos el haz vectorial $\xi_{n,k}$ como

$$\xi_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \to F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k.$$

Estamos interesados en calcular el orden estable de $\phi_{n,k}$ de estos haces vectoriales bajo la suma de Whitney. es decir el entero más pequeño tal que $\phi_{n,k}\xi_{n,k}$ es el haz trivial. J. P. May demostró en [40] que $F_k(\mathbb{R}^n)$ es del tipo de homotopía de un CW complejo finito y del trabajo de R. J. Milgram [43] se deduce que el orden de estos haces vectoriales es finito.

El objetivo de este capítulo y el resultado más importante de este trabajo es calcular los órdenes $\phi_{n,k}$ para n y k generales y presentamos el argumento dado por Cohen, Cohen, Kuhn y Neisendorfer [18]. Algunas aplicaciones al estudio de los espacios lazos iterados de esferas también se discuten en este capítulo. Parte del interés de encontrar el orden de estos haces está motivado por el Teorema de la descomposición estable de Snaith (2.19) el cual dice que

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k\geqslant 0} F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k}.$$

El espacio $F_k(\mathbb{R}^n)_+ \wedge_{\Sigma_k} (S^r)^{\wedge k}$ es el espacio de Thom de r-veces la suma de Whitney del haz vectorial $\xi_{n,k}$. Si denotamos por $Th(r\ \xi_{n,k})$ al espacio de Thom asociado, entonces el teorema de Snaith da la siguiente equivalencia (2.21)

$$\Omega^n S^{n+r} \simeq_s \bigvee_{k\geqslant 0} Th(r\ \xi_{n,k}).$$

Ahora bien, si $\phi_{n,k}$ es el orden estable de $\xi_{n,k}$, entonces tenemos la periodicidad obvia

$$Th((r+\phi_{n,k})\xi_{n,k}) \simeq \Sigma^{k\phi_{n,k}} Th(r\xi_{n,k}).$$

Esto, junto con el teorema de Snaith, da claras relaciones entre los tipos estables de homotopía de los espacios $\Omega^n S^{n+r}$ conforme r varía.

El caso $n=2$ es fácil de analizar usando el determinante de Vandermonde.

Teorema 3.1
El haz vectorial $2\xi_2, k = \xi_{2,k} \oplus_W \xi_{2,k}$ es isomorfo al haz trivial sobre $F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k$.

Demostración. El espacio total de $2\xi_{2,k}(E) = F_k(\mathbb{R}^2) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \oplus_W F_k(\mathbb{R}^2) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k = \{(e_1,e_2) \in (F_k(\mathbb{R}^2) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k)^2 \mid \xi_{2,k}(e_1) = \xi_{2,k}(e_2)\}$. Si $e_1 = [w_1, w_2, \ldots w_k;\ x_1, x_2, \ldots x_k]$ y $e_2 = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \ldots, \widetilde{w}_k;\ \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_k]$ entonces existe $\sigma \in \Sigma_k$ tal que $w_i = \widetilde{w}_{\sigma(i)}$ para toda i y denotamos por $y_i = \widetilde{y}_{\sigma(i)}$ para toda i. Entonces

$$2\xi_{2,k} = \{[w_1, w_2, \ldots, w_k; (x_1, x_2, \ldots, x_k), (y_1, y_2, \ldots, y_k)] \mid w_i \in \mathbb{R}^2 \text{ y } x_i,\ y_i \in \mathbb{R}\}.$$

Agrupando adecuadamente y usando el hecho de que $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ se sigue que

$$2\xi_{2,k} = \{[w_1, w_2, \ldots, w_k; (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)] \mid w_i \in \mathbb{C} \text{ y } (x_i, y_i) \in \mathbb{C}\}.$$

Ahora bien se define

$$\nu : F_k(\mathbb{R}^2) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{R}^2)^k \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^k$$

donde para cada $[w] = [w_1, w_2, \ldots, w_k] \in F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k$, la de ν está definida como

$$\nu([w; z_1, z_2, \ldots, z_k]) = \left(\sum_{i=1}^{k} z_i, \sum_{i=1}^{k} w_i z_i, \sum_{i=1}^{k} w_i^2 z_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k} w_i^{k-1} z_i \right)$$

donde $z_i = (x_i, y_i)$ y el producto de $w_i^j z_i$ es el producto en los complejos. La función ν está bien definida ya que si $\sigma \in \Sigma_k$ entonces $\sum_{i=0}^{k} w_i^j z_i = \sum_{i=0}^{k} w_{\sigma(i)}^j z_{\sigma(i)}$, es lineal en fibras y continua. Además para todo $[w] \in F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k$ la matriz asociada a la transformación lineal es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_k \\ w_1^2 & w_2^2 & \ldots & w_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1^{k-1} & w_2^{k-1} & \ldots & w_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

y el determinante de esta matriz es igual a $\prod_{i<j}(w_j - w_i)$, el cual es distinto de cero, dado que $(w_i, w_2, \ldots, w_k) \in F_k(\mathbb{R}^2)$.

Por lo que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
2(F_k(\mathbb{R}^2) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "\xi_{2,k}"] & & F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k \times (\mathbb{R}^2)^k \arrow[dl, "\pi_1"'] \\
& F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k &
\end{tikzcd}$$

donde $\boldsymbol{\nu} : 2(F_k(\mathbb{R}^2) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k) \longrightarrow F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k \times (\mathbb{R}^2)^k$ está definida como

$$\boldsymbol{\nu}([w; z_1, z_2, \ldots, z_k]) = ([w], \nu([w; z_1, z_2, \ldots, z_k]))\,.$$

Entonces $\boldsymbol{\nu}$ es la trivialización de $\xi_{2,k}$. ■

Este resultado aunque parcial tiene implicaciones importantes [19]. Notemos que el espacio de Thom de estos haces vectoriales muestra la siguiente periodicidad:

$$Th(r\ \xi_{2,k}) = \begin{cases} \Sigma^{kr}((F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k)_+), & \text{si} \quad r \text{ es par,} \\ \\ \Sigma^{k(r-1)} Th(\xi_{2,k}), & \text{si} \quad r \text{ es impar.} \end{cases}$$

Este resultado nos da una periodicidad en los sumandos estables del espacio de lazos $\Omega^2 S^{2+r}$. Es importante recordar que $F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k$ es un espacio de Eilenber-Mac Lane, de tipo $K(B_k, 1)$ y su grupo fundamental es el grupo de trenzas de Artin.

Para el cálculo general del orden del $\xi_{n,k}$ definimos

$$a_{n,k} = 2^{\rho(n-1)} \prod_{3 \leq p \leq k} p^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$$

donde p denota un primo impar, y donde $\rho(m)$ es igual al número de enteros positivos menores que m que son congruentes con $0, 1, 2,$ o 4 módulo 8. Notemos que $\rho(m)$ está relacionado con el número de campos vectoriales de Adams, $\widehat{\rho}(m)$, por medio del siguiente teorema [31].

Teorema 3.2 (Adams)
Sea $c_k = 2^{\rho(k+1)}$, y sea $\widehat{\rho}(n) = \text{máx} = \{k + 1 \mid c_k \text{ divide a } n\}$. El número de campos linealmente independientes en esfera redonda de dimension $n - 1$ es $\widehat{\rho}(n) - 1$.

El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Teorema 3.3

Si $n \not\equiv 0$ mód 4, entonces $\phi_{n,k} = a_{n,k}$. Además, si $n \equiv 0$ mód 4, entonces $a_{n,k} \mid \phi_{n,k}$ y $\phi_{n,k} \mid 2a_{n,k}$, es decir $\phi_{n,k} = a_{n,k}$ ó $\phi_{n,k} = 2a_{n,k}$.

Observación 3.4

1. Se puede ver fácilmente que el haz $\xi_{n,2}$ es isomorfo de manera estable al haz de líneas canónico sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$, así que el hecho de que $\phi_{n,2} = 2^{\rho(n-1)}$ es el resultado clásico de Adams [2].

2. Usando la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch convergente a la teoría KO de $F_p(\mathbb{R}^n)/\Sigma_p$, S. W. Yang el orden de $\xi_{n,p}$ y probó que $a_{n,k}|\phi_{n,k}$ [54, 55].

3. La conjetura de $\phi_{n,k} = a_{n,k}$ fue hecha por S. W. Yang, M. Mahowald y F. Cohen.

La idea esencial en la prueba de es notar que el mapa clasificante

$$f_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \to BO$$

de $\xi_{n,k}$ factoriza como una composición de mapas, uno de los cuales es la inclusión natural

$$i_n : \Omega_0^n S^n \hookrightarrow Q_0 S^0,$$

donde $QX = \operatorname{colím}_{m\to\infty} \Omega^m \Sigma^m X$ y donde $\Omega_k^n S^n$ denota el componente de $\Omega^n S^n$ conteniendo mapas de grado k. Estudiamos entonces el orden de i_n localizado en un primo p, utilizando los resultados de F. Cohen, J. Moore y J. Neisendorfer [22, 21, 47] y de H. Toda [53].

3.2. Idea de la demostración del Teorema 3.3

Se define

$$a_{n,k} = 2^{\rho(n-1)} \prod_{3 \leq p \leq k} p^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$$

donde p denota un primo impar, y donde $\rho(m)$ es igual al número de enteros positivos menores que m que son congruentes con $0, 1, 2,$ o 4 módulo 8.

Teorema 3.3
Si $n \not\equiv 0$ mód 4, entonces $\phi_{n,k} = a_{n,k}$. Además, si $n \equiv 0$ mód 4, entonces $a_{n,k} \mid \phi_{n,k}$ y $\phi_{n,k} \mid 2a_{n,k}$, es decir, $\phi_{n,k} = a_{n,k}$ ó $\phi_{n,k} = 2a_{n,k}$.

Prueba del Teorema 3.3.
Nuestro primer objetivo es identificar los mapas clasificantes de los haces $\xi_{n,k}$. Esto se hace fácilmente recordando primero que $F_k(\mathbb{R}^\infty) = \operatorname{colím}_{n\to\infty} F_k(\mathbb{R}^n)$ es un espacio contráctil, actuado libremente por Σ_k y por lo tanto $F_k(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_k = B\Sigma_k$. Para una prueba de esto, vea por ejemplo [40].
Así, el haz

$$\xi_{\infty,k} : F_k(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \to F_k(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_k = B\Sigma_k$$

está clasificado por el mapa

$$f_k : B\Sigma_k \to BO(k)$$

inducido por la representación regular de Σ_k en $O(k)$. Más aún, dado que el haz $\xi_{n,k}$ es el pull-back de $\xi_{\infty,k}$ bajo la inclusión $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \hookrightarrow F_k(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_k$, $\xi_{n,k}$ está clasificado por el mapa

$$f_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \subset F_k(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_k = B\Sigma_k \xrightarrow[f_k]{} BO(k).$$

El orden estable $\phi_{n,k}$ de $\xi_{n,k}$ es el orden de la clase determinada por $f_{n,k}$ en el grupo abeliano $[F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k, BO]$. A fin de determinar $\phi_{n,k}$ usaremos los métodos de espacios de lazos iterados de J. P. May [40].

Recordemos que el espacio de configuraciones etiquetadas $\mathcal{C}_nX$ es un espacio que aproxima a $\Omega^n\Sigma^nX$ en el sentido de que existe una equivalencia homotópica débil

$$\alpha_n : \mathcal{C}_nX \to \Omega^n\Sigma^nX$$

si X es conexo. Para $X = S^0$,

$$\mathcal{C}_nS^0 \simeq \amalg_k F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$$

y el mapa $\alpha_n : \amalg_k F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \to \Omega^nS^n$ lleva $F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k$ en $\Omega^n_kS^n$.
Ahora consideremos el mapa

$$\beta : \amalg_k BO(k) \to BO \times \mathbb{Z}$$

que incluye a $BO(k)$ en $BO \times \{k\}$ en el modo obvio. Sea $\eta : QS^0 \to BO \times \mathbb{Z}$ el mapa de lazos infinitos inducido por el mapa $S^0 \to BO \times \mathbb{Z}$ que manda el 0 al punto base en $BO \times \{0\}$ y el 1 al punto base en $BO \times \{1\}$. Tenemos entonces el siguiente Lema.

Lema 3.5
El siguiente diagrama conmuta salvo homotopía para todos los enteros positivos n y k.

$$\begin{tikzcd}
F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \arrow[r, hook] & \amalg_j F_j(\mathbb{R}^n)/\Sigma_j \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \amalg_j F_j(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_j \arrow[r, "\amalg_j f_j"] \arrow[d, "\alpha_\infty"] & \amalg_j BO(j) \arrow[d, "\beta"] \\
 & \Omega^nS^n \arrow[r, "l_n"] \arrow[d, "*[-k]"] & QS^0 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "*[-k]"] & BO \times \mathbb{Z} \arrow[d, "*[-k]"] \\
 & \Omega^nS^n \arrow[r, "i_n"] & QS^0 \arrow[r, "\eta"] & BO \times \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

donde $*[-k]$ traslada las componentes por $-k$.

Demostración. Esto se sigue directamente de los métodos de espacios de espacios de lazos iterados de J. P. May, y una prueba explícita se encuentra en [14]. ■

Notemos que el mapa clasificante $f_{n,k} : F_k(\mathbb{R}^n)/\Sigma_k \to BO = BO \times \{0\} \subset BO \times \mathbb{Z}$ de $\xi_{n,k}$ es la composición de los mapas de la fila superior y la columna derecha del diagrama de el Lema (3.5). Ahora, dado que η es un mapa de espacios de lazos infinitos y por lo tanto como i_n es un H-mapa, el Lema (3.5) implica que la potencia de p en la factorización prima de $\phi_{n,k}$ está acotada por el orden de la localización en p de $i_n \in [\Omega_0^n S^n, Q_0 S^0]$ y usando el resultado de S. W. Yang (3.4.2) se tiene la otra cota.

Teorema 3.6
Para un primo p, sea $i_{n(p)} : \Omega_0^n S^n_{(p)} \to Q_0 S^0_{(p)}$ la localización de i_n. Entonces en $[\Omega_0^n S^n_{(p)}, Q_0 S^0_{(p)}]$ el orden de $i_{n,p}$ divide a p^q, donde

$$q = \begin{cases} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor & \text{si} \quad p \text{ es primo impar,} \\ \rho(n-1) & \text{si} \quad p = 2 \text{ y } n \not\equiv 0 \bmod 4, \\ \rho(n-1)+1 & \text{si} \quad p = 2 \text{ y } n \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

Notemos que el Teorema (3.3) es un corolario del Teorema (3.6) en vista de los resultados de S. W. Yang [55] (vea la segunda observación (3.4.2) siguiendo la declaración del Teorema (3.3)), y el hecho de que si $k < p$, $F(\mathbb{R}^\infty_k)/\Sigma_k = B\Sigma_k$ es homológicamente p-equivalente a un punto.

3.3. Demostración del Teorema 3.6

Caso 1: p impar y n impar

Como n es impar supongamos que $n = 2m+1$. El Teorema Selick visto en el Teorema (1.22) y el Teorema de Cohen, Moore y Neisendorfer (1.34) implican que el elemento identidad $1 \in [\Omega_0^{2m+1} S_{(p)}^{2m+1}, \Omega_0^{2m+1} S_{(p)}^{2m+1}]$ tiene orden p^m. Dado que i_n es un H-mapa, el resultado se sigue. A saber, si $\gamma \in \Omega^{2m+1} S^{2m+1}$ entonces

$$p^m i_{2m+1}(\gamma) = i_{2m+1}(p^m \gamma) = i_m(0) = 0,$$

por lo que $p^m i_{2m+1} = 0$, es decir $\left(p^{\frac{n-1}{2}}\right) i_n = 0$.

Caso 2: $p = 2$, n impar

Para verificar este caso debemos usar el teorema de Kahn-Priddy visto en (1.45).

Teorema 1.45
Existen mapas $s : Q\mathbb{R}P^\infty \to Q_0 S^0$ y $j : Q_0 S^0 \to Q\mathbb{R}P^\infty$ tales que cuando se localizan en el primo 2, $s \circ j$ es una equivalencia homotópica.

En el corolario (1.48) se muestra que cuando se restringe a $\Omega_0^n S^n \subset Q_0 S^0$, j se factoriza a través de un mapa $j_n : \Omega_0^n S^n \to Q\mathbb{R}P^{n-1}$.

En [13], J. Caruso, F. R. Cohen, J. P. May y L. R. Taylor también dieron una prueba del teorema de Kahn-Priddy, obteniendo la factorización de Segal y en la cual se dan fórmulas explícitas para los mapas j_n, j y s. Usando las fórmulas de [13], N. Kuhn verificó en su tesis doctoral que los mapas j_n y j son de la forma $\Omega j'_n$ y $\Omega j'$, para una prueba de este hecho se puede consultar la tesis doctoral de N. Kuhn [36] o el articulo [37].

Utilizando estos resultados, debemos considerar el siguiente diagrama homotópicamente conmutativo de espacios 2-localizados.

$$\begin{tikzcd}
\Omega_0^n S^n \arrow[rr, "i_n"] \arrow[d, "j_n"] & & Q_0S^0 \arrow[dl, "j"] \\
Q\mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, hook] & Q\mathbb{R}P^\infty \arrow[r, "s"] & Q_0S^0 \arrow[u, "(s\circ j)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

donde $(s \circ j)^{-1}$ es una inversa homotópica de $s \circ j$. Dado que s es una mapa lazos infinito y j son los lazos de algún mapa, $s \circ j$ y $(s \circ j)^{-1}$ nuevamente están inducidas por el el funtor Ω.

Si N es el orden de la identidad en $Q\mathbb{R}P^{n-1}$, implica que $Ni_n = 0$. Esto se verifica de la siguiente forma. Sea ζ en $\Omega_0^n S^n$, entonces

$$\begin{aligned}
Ni_n(\zeta) = &\ N((s \circ j)^{-1} \circ s \circ j_n)(\zeta), \\
= &\ ((s \circ j)^{-1} \circ s \circ j_n)(N\zeta), \\
= &\ (s \circ j)^{-1} \circ s(Nj_n(\zeta)), \\
= &\ (s \circ j)^{-1} \circ s(0), \qquad\qquad \text{(por que } j_n(\zeta) \in Q\mathbb{R}P^{n-1}) \\
= &\ 0.
\end{aligned}$$

Así, el orden de i_n localizado en 2 divide el orden de la identidad de $Q\mathbb{R}P^{n-1}$. H. Toda mostró que el orden de $Id_{Q\mathbb{R}P^{n-1}}$ es $2^{\rho(n-1)}$ cuando n es impar [53]. Esto prueba la proposición en este caso.

Caso 3: n par

Sea $n = 2m$. Consideremos la siguente fibración de James (1.1).

$$S^{2m-1} \xrightarrow{E} \Omega S^{2m} \xrightarrow{H} \Omega S^{4m-1}$$

Esta fibración produce la clásica sucesión EHP en grupos de homotopía. Apliquemos Ω^{2m-1} a esta fibración y consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{2m-1}S^{2m-1} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "e"] & \Omega^{2m-1}S^{2m-1} \arrow[d, "e"] & \\
\Omega_0^{2m}S^{2m} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"] & \Omega_0^{2m}S^{2m} \arrow[r, "i_{2m}"] \arrow[d, "h"] & Q_0S^0 \\
\Omega^{2m}S^{4m-1} \arrow[r, "T"] \arrow[ur, "{[i,i]'}"] & \Omega^{2m}S^{4m-1} &
\end{tikzcd}$$

donde T es dos veces la identidad, es decir $T = Id + Id$ y $[i,i]' = \Omega^{2m}[i,i]$, donde $[i,i] : S^{4m-1} \to S^{2m}$ es el producto Whitehead de la identidad consigo misma.

Lema 3.7
En el contexto del diagrama anterior se tiene

1. Ambos cuadrados conmutan.

2. El triángulo inferior conmuta.

3. $i_{2m} \circ [i,i]'$ es homotópicamente nula.

Demostración.

1. La conmutatividad de ambos cuadrados es obvia.

2. La conmutatividad del triángulo inferior se sigue del hecho estándar de que el invariente de Hopf de $[i,i]$ es 2.

3. El hecho de que $i_{2m} \circ [i,i]' \simeq 0$ se sigue del hecho estándar de que el producto Whitehead $[i,i]$ se estabiliza a cero.

■

Corolario 3.8
Existe un mapa $g : \Omega_0^{2m} S^{2m} \to \Omega_0^{2m-1} S^{2m-1}$ tal que $T \simeq [i,i]' \circ h + e \circ g$.

Demostración. Por el lema (3.7), se tiene que $h \circ T - T \circ h \simeq 0$, $T \simeq h \circ [i,i]'$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Omega_0^{2m-1} S^{2m-1} \arrow[d, "e"] \\
\Omega_0^{2m} S^{2m} \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"] & \Omega_0^{2m} S^{2m} \arrow[d, "h"] \\
\Omega^{2m} S^{4m-1} \arrow[ur, "{[i,i]'}"] \arrow[r, "T"] & \Omega^{2m} S^{4m-1}
\end{tikzcd}
$$

Sabemos que h es un H-morfismo de H-grupos abelianos, y sustituyendo tenemos que $h \circ (T - [i,i]' \circ h)$ es homotópicamente nulo y por lo cual $T - [i,i]' \circ h$ se levanta a un mapa en la fibra $g : \Omega_0^{2m} S^{2m} \to \Omega_0 S^{2m-1}$ el cual satisface $T - [i,i]' \circ h \simeq e \circ g$. ■

Ahora estamos listos para probar el Teorema (3.6) en este último caso. Localizando en 2, tenemos que

$$
\begin{aligned}
2^{\rho(2m-2)+1} i_{2m} &= 2^{\rho(2m-2)}(2\ i_{2m}), \\
&= 2^{\rho(2m-2)}(i_{2m} \circ Id + i_{2m} \circ Id), \\
&= 2^{\rho(2m-2)}(\ i_{2m} \circ (Id + Id)), \\
&= 2^{\rho(2m-2)}(i_{2m} \circ T), \\
&\simeq 2^{\rho(2m-2)}(i_{2m} \circ ([i,i]' \circ h + e \circ g)), \quad \text{por (3.8)}, \\
&= 2^{\rho(2m-2)}(i_{2m} \circ [i,i]' \circ h + i_{2m} \circ e \circ g).
\end{aligned}
$$

Por la parte 3 de el lema (3.7) se tiene que $i_{2m} \circ [i,i]' \simeq 0$. Entonces

$$2^{\rho(2m-2)+1} i_{2m} = 2^{\rho(2m-2)}(i_{2m} \circ e \circ g).$$

$$\begin{tikzcd}
& \Omega_0^{2m-1}S^{2m-1} \arrow[d, "e"] \arrow[dr, "i_{2m-1}"] & \\
\Omega_0^{2m}S^{2m} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"] \arrow[ur, dotted, "g"] & \Omega_0^{2m}S^{2m} \arrow[r, "i_{2m}"] & Q_0S^0 \\
\Omega^{2m}S^{4m-1} \arrow[ur, "{[i,i]'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado $i_{2m-1} = i_{2m} \circ e$, entonces

$$2^{\rho(2m-2)+1} i_{2m} = 2^{\rho(2m-2)}(i_{2m-1} \circ g)$$

Pero $2^{\rho(2m-2)} i_{2m-1}$ es homotópicamente nulo por el resultado en el caso 2. Debemos por lo tanto concluir que

$$2^{\rho(2m-2)+1} i_{2m} = 0. \tag{3.1}$$

Similarmente, localizándolos en p impar y utilizando el resultado del caso 1, obtenemos que $2p^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} i_{2m}$ es homotópicamente nulo y por lo tanto también lo es $p^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} i_{2m}$. Así, hemos probado la proposición cuando p es impar.

Ahora resumiendo los resultados para el caso $p = 2$, tenemos:

$$\begin{array}{lll} 2^{\rho(n-1)} i_n = 0 & \text{si } n \text{ es impar,} & \text{(por el caso 2)} \\ 2^{\rho(n-2)+1} i_n = 0 & \text{si } n \text{ es par} & (3,1). \end{array}$$

Dado que i_{2m} se factoriza a través de i_{2m+1} como se puede ver en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_0^{2m}S^{2m} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "1_{2m}"'] & \Omega_0^{2m+1}S^{2m+1} \arrow[d, "i_{2m+1}"] \\ & Q_0S^0 \end{tikzcd}$$

se tiene que

$$2^{\rho(n)}i_n = 0 \quad \text{si } n \text{ es par.}$$

Notemos que si $n \equiv 2$ mód 8, $\rho(n-1) = \rho(n-2)+1$ y por lo tanto $2^{\rho(n-1)}i_n = 0$. Si $n \equiv 6$ mód 8, $\rho(n-1) = \rho(n)$ así que $2^{\rho(n-1)}i_n = 0$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} 2^{\rho(n-2)+1}i_n & = & 2^{\rho(n-1)}i_n = 0 \quad \text{si } n \equiv 2 \text{ mód } 8, \\ 2^{\rho(n)}i_n & = & 2^{\rho(n-1)}i_n = 0 \quad \text{si } n \equiv 6 \text{ mód } 8. \end{array}$$

Por lo tanto, si $n \not\equiv 0$ mód 4, $2^{\rho(n-1)}i_n$ es nulo homotópicamente.

Ahora bien, si $n \equiv 0$ mód 4, $\rho(n-1) = \rho(n-2)$, entonces $2^{\rho(n-1)+1}i_n = 0$.

Ésto completa la prueba del Teorema (3.6) y por lo tanto el Teorema (3.3). ■

Apéndice A

Teoremas básicos de teoría de homotopía

H-espacio y H-grupo

Definición A.1 Sean X y Y espacios topológicos, se denota como $[X, Y]$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $X \longrightarrow Y$, es decir, de clases de equivalencia de mapas $X \longrightarrow Y$ bajo la relación $\simeq$.

En general vamos a estar interesados únicamente en espacios basados y aplicaciones punteadas, por lo que se pide en general que las homotopías que definen las clases también estén punteadas, se especifica en la sección de Kahn-Priddy que las clases de homotopía no son basadas.

Definición A.2 Un X espacio topológico es un ***H-espacio*** si es un espacio punteado provisto de una aplicación continua

$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$

llamada ***H-multiplicación,*** tal que si $e : X \longrightarrow X$ es la constante con valor el punto base, $e(X) = x_0$, entonces es una ***identidad salvo homotopía*** o una ***H-identidad***, es decir, las composiciones

$$X \xrightarrow{(e,Id_X)} X \times X \xrightarrow{\mu} X, \quad X \xrightarrow{(Id_X,e)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

son homotópicas a la identidad en X.

1. Decimos que X es ***homotópicamente asociativo*** o H***-asociativo*** si las composiciones

$$\mu \circ (\mu \times Id_X), \quad \mu \circ (Id_X \times \mu) : X \times X \times X \longrightarrow X$$

son homotópicas; es decir, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times Id_X"] \arrow[d, "Id_X \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X \end{tikzcd}$$

Cuadro A.1: H-asociativo.

2. Una aplicación $j : X \longrightarrow X$ determina ***inversos salvo homotopía***, o H***-inversos***, si las composiciones

$$X \xrightarrow{(j,Id_X)} X \times X \xrightarrow{\mu} X, \quad X \xrightarrow{(Id_X,j)} X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

son ambas homotópicas a $e : X \longrightarrow X$.

Definición A.3 Un H-espacio el cual es H-asociativo provisto de una aplicación continua que determina H-inversos se llama H***-grupo***.

Un H-espacio o un H-grupo, X es ***homotópicamente abeliano*** o H***-abeliano***, si para cuales quiera x, x' en X se tiene

$$\mu(x, x') \simeq \mu(x', x).$$

Definición A.4 Si X y Y son H-espacios (H-grupos) y $h : X \longrightarrow Y$ es continua, decimos que h es un ***H-homomorfismo*** o ***H-morfismo*** si las composiciones

$$X \times X \xrightarrow{\mu} X \xrightarrow{h} Y, \quad X \times X \xrightarrow{h\times h} Y \times Y \xrightarrow{\mu'}$$

son homotópicas; es decir, si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "h\times h"'] & X \arrow[d, "h"] \\
Y \times Y \arrow[r, "\mu'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Cuadro A.2: H-morfismo.

conmuta salvo homotopía.

Sea Y un espacio con punto base y_0. Se dice que $[\ \ ,Y]$ tiene una ***estructura de grupo natural*** si cumple las siguientes condiciones.

1. Para todo espacio punteado X, $[X,Y]$ tiene estructura de grupo tal que la clase $[e]$ de la aplicación constante $e : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es la identidad del grupo.

2. Para todo mapa de espacios basados $f : X \longrightarrow W$, la función inducida $f^* : [W,Y] \longrightarrow [X,Y]$ es un homomorfismo de grupos. La cual esta definida como

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f.$$

Proposición A.5
Sea Y un H-grupo (abeliano) con punto base y_0. Entonces $[X,Y]$ tiene una estructura de grupo natural en X (y además es abeliano).

El reciproco es cierto y para una demostración se puede consultar [6].

Proposición A.6
Sea $h : Y \longrightarrow Y'$ un H-morfismo de H-espacios, entonces para todo X, es un homomorfismo.

$$h_* : [X, Y] \longrightarrow [X, Y']$$

Definición A.7 Sea (X, x_0) un espacio basado, se define

$$\Omega X = \{\alpha : [0,1] \longrightarrow X \mid \alpha \text{ es continua y } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

De manera más general

$$\Omega^n X = Map(I^n, \partial I^n; X, x_0).$$

Donde $Map(Y, A; X, B)$ es la colección de funciones continuas en la categoría de parejas. La topología de estos espacios es la compacto abierto.

Observación A.8 Sea (X, x_0) un espacio topológico basado. $\Omega^n X \cong Map(S^n, *; X, x_0)$

Definición A.9 Si Y es un espacio basado con punto base y_0, entonces su espacio de lazos ΩY tiene una estructura de H-grupo, como sigue. Sea

$$\mu : \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$$

tal que para lazos $\alpha,\ \beta \in \Omega Y$

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \\ \beta(2t-1), & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Observación A.10 Si (Y, y_0) es un espacio basado, entonces $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ es una función continua.

Demostración. Sea U^K un subbásico de la topología de ΩY. Definimos $K_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap K$ y $K_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap K$ los cuales claramente son compactos en $[0,1]$. Notemos que si $\alpha' \in U^{K_1}$ y $\beta' \in U^{K_2}$, entonces $\mu(\alpha', \beta') \in U^K$. Por lo que μ es continua. ■

Lema A.11
Si (Y, y_0) es un espacio basado, entonces $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ es un H-multiplicación, H-asociativa y $j : \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ definida como $j(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$ determina H-inversos.

La demostración del lema se puede consultar en [6].

Teorema A.12
Supongamos que Y, Y' son espacios basados y $g : Y \longrightarrow Y'$ es un mapeo. Entonces $\Omega g : \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ definida como

$$\Omega g(\alpha) = g \circ \alpha$$

es un H-morfismo. A Ωg se le conoce como ***los lazos de*** g**.**

Demostración. Sean α, $\beta \in \Omega Y$, entonces

$$\Omega g(\mu(\alpha,\beta))(t) = g \circ (\mu(\alpha,\beta))(t) \begin{cases} g \circ \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \\ g \circ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Pero

$$\mu'(\Omega g(\alpha), \Omega g(\beta))(t) = \begin{cases} g \circ \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \\ g \circ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Por lo que se cumple la igualdad. Para la continuidad de Ωg, tomamos $U'^{K'}$ un subbásico de la topología de $\Omega Y'$. Definimos $U = g^{-1}(U')$ y $K = K'$, claramente se tiene que $(\Omega g)^{-1}(U'^{K'}) = U^K$. ■

Teorema A.13
$\Omega(\quad)$ es un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos basados a la categoría de H-grupos. Al iterar este funtor se obtiene $\Omega^n(\quad) = \Omega \circ \Omega^{n-1}(\quad)$ es un funtor entre las mismas categorías.

Demostración. Para demostrar que $\Omega(\ \ )$ es un funtor es necesario demostrar las siguientes

1. Manda objetos en objetos por (A.11).

2. Manda flechas en flechas por (A.12).

3. *Respeta la regla de composición.* Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ mapas en la categoría. Al aplicar Ω se obtienen los mapas $\Omega f : \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ y $\Omega g : \Omega Y \longrightarrow \Omega Z$, si $\alpha \in \Omega X$, entonces

   $$\Omega g \circ \Omega f(\alpha) = \Omega g(\Omega f(\alpha)) = \Omega g(f \circ \alpha)) = g \circ (f \circ \alpha) = (g \circ f) \circ \alpha = \Omega(g \circ f)(\alpha).$$

   Por lo que respeta la regla de composición.

4. *Manda la identidad en la identidad.* Sea X un espacio topológico con punto base x_0. Entonces $\Omega Id_X : \Omega X \longrightarrow \Omega X$ y $Id_{\Omega X} : \Omega X \longrightarrow \Omega X$ tienen el mismo dominio y el mismo codominio, si $\alpha \in \Omega X$

   $$\Omega Id_X(\alpha) = Id_X \circ \alpha = \alpha = Id_{\Omega X}(\alpha).$$

Por lo que Ω es un funtor entre la categoría de espacios topológicos basados y la categoría de H-grupos. La composición de funtores es un funtor. Por lo que Ω^n es un funtor entre las categorías mencionadas. ■

Definición A.14 Si $f : \Omega X \longrightarrow \Omega Y$ es un mapa de espacios basados, decimos que f ***se desenlaza***, si existe $g : X \longrightarrow Y$ tal que $\Omega g = f$. Si $X = \Omega Z$, entonces decimos que Z es un ***desenlazamiento*** de X. Estas definiciones se extiende a Ω^n. Esta definición en la literatura se encuentra como "*delooping*".

Teorema A.15
Para cada espacio basado (Y, y_0), ΩY es un H-grupo y con ello para cada espacio X, $[X, \Omega Y]$ es un grupo. Si $f : X \longrightarrow X'$ es continua, entonces

$$f^* : [X', \Omega Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$$

es un homomorfismo, el cual esta definido como $f*([\alpha]) = [\alpha \circ f]$. Finalmente si $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y_0')$ es un mapa, entonces $(\Omega g)_* : [X, \Omega Y] \longrightarrow [X, \Omega Y']$ es un homomorfismo, el cual esta definido como $(\Omega g)_*([\beta]) = [g \circ \beta]$.

Demostración. La demostración es rutinaria y se sigue del Teorema(A.12). ■

Definición A.16 Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados. Definimos el ***producto reducido*** o la ***cuña*** de X y Y como el subespacio de $X \times Y$,

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ ó } y = y_0\}$$

es decir, $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$.

De forma dual al producto, la cuña tiene la siguiente propiedad: Dadas aplicaciones punteadas $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$, entonces estas definen un mapa punteado

$$f \vee g : X \vee Y \longrightarrow Z$$

tal que

$$f \vee g(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad y = y_0, \\ g(y) & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases}$$

H-coespacio y H-cogrupo

Definición A.17 Un espacio topológico X es un H***-coespacio*** si es un espacio punteado provisto de una aplicación continua

$$\nu : X \longrightarrow X \times X,$$

llamada H***-comultiplicación***, tal que si $e : X \longrightarrow X$ es la función constante con valor el punto base x_0, $e(X) = x_0$, entonces es una ***coidentidad*** salvo homotopía o una H*coidentidad*, es decir, las composiciones

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{Id_X \vee e} X, \quad X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{e \vee Id_X} X,$$

son homotópicas a la identidad en X.

1. Decimos que X es ***homotópicamente coasociativo***, o H***-coasociativo*** si las composiciones

$$(\nu \vee Id_X) \circ \nu, \quad (Id_X \vee \nu) \circ \vee : X \longrightarrow X \vee X \vee X$$

son homotópicas; es decir, si conmuta salvo homotopía el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\nu"'] & X \vee X \arrow[d, "\nu \vee Id_X"] \\ X \vee X \arrow[r, "Id_X \vee \nu"'] & X \vee X \vee X. \end{tikzcd}$$

Cuadro A.3: H-coasociativo.

2. Una aplicación $j : X \longrightarrow X$ determina ***coinversos salvo homotopía*** o H-***coinversos***, si las composiciones

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{j \vee Id_X} X, \quad X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{Id_X \vee j} X$$

son ambas homotópicas a $e : X \longrightarrow X$.

Definición A.18 Un H-coespacio H-coasociativo provisto de una aplicación que determina H-coinversos se llama H-***cogrupo***.

Un H-coespacio, o un H-cogrupo, es ***homotópicamente coabeliano***, o H-***coabeliano***, si las aplicaciones ν, $T \circ \nu : X \longrightarrow X \vee X$ son homotópicas, donde $T : X \vee X \longrightarrow X \vee X$ definida como $T(x \vee x') = x' \vee x$.

Definición A.19 Si X y X' son H-coespacios y $k : X' \longrightarrow X$ es continua, diremos que k es un H***-cohomomorfismo*** si las composiciones

$$X' \xrightarrow{k} X \xrightarrow{\nu} X \vee X, \quad X' \xrightarrow{\nu'} X' \vee X' \xrightarrow{k \vee k} X \vee X$$

son homotópicas; es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "k"'] & X' \vee X' \arrow[d, "k \vee k"] \\
X \arrow[r, "\nu"'] & X \vee X.
\end{tikzcd}$$

Cuadro A.4: H-cohomomorfismo.

conmuta salvo homotopía.

Definición A.20 Sea X un espacio con punto base x_0. Se dice que $[X, \ ]$ tiene un ***estructura de grupo natural*** en Y, si cumple las siguientes condiciones.

1. Para todo espacio punteado Y, $[X, Y]$ tiene una estructura de grupo tal que la clase $[e]$ de la aplicación constante $e : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es la identidad del grupo.

2. Para toda aplicación punteada $f : Y \longrightarrow Y'$, la función inducida $f_* : [X, Y] \longrightarrow [X, Y']$ es un homomorfismo de grupos. La cual esta definida como

$$f_*(\alpha) = f \circ \alpha.$$

Proposición A.21
Sea X un H-cogrupo (abeliano) con punto base x_0. Entonces $[X, Y]$ tiene una estructura de grupo natural (y además es abeliano).

Teorema A.22
Sea X un espacio con punto base x_0. Entonces $[X, \ ]$ tiene estructura de grupo natural si y solo si X es un H-cogrupo.

Proposición A.23
Sean X, X' H-cogrupos. Si $k : X' \longrightarrow X$ es un H-cohomomorfismo de H-cogrupos,

entonces para todo espacio basado Y,

$$k^* : [X, Y] \longrightarrow [X', Y]$$

es un homomorfismo de grupos.

Definición A.24 Sea (X, x_0) un espacio basado, definimos su ***suspensión reducida*** ΣX como el cociente

$$\Sigma X = X \times I \Big/ _{(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})\cup(\{x_0\}\times I)},$$

que nuevamente es un espacio basado cuyo punto base es el que resulta de colapsar $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$.

Denotamos por $x \wedge t$ a la clase de $(x, t) \in X \times I$. Así, el punto base es $\overline{x_0} = x_0 \wedge t = x \wedge 0 = x \wedge 1$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapa basado, entonces $f \times Id_I$ induce un mapeo continuo de espacios basados

$$\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y,$$

que esta definida como $\Sigma f(x \wedge t) = f(x) \wedge t$.

Definición A.25 Se define un comultiplicación

$$\nu : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$$

por

$$\nu(x \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge 2t, \overline{x_0}), & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \\ (\overline{x_0}\ , x \wedge (2t-1)), & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Teorema A.26
Sea (X, x_0) un espacio basado. Entonces $(\Sigma X, \nu)$ es un H-grupo.

Para la prueba de este teorema se puede consultar [6].

Teorema A.27
Si (X, x_0) y (Y, y_0) son espacios basados y $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un mapa continuo. Entonces $\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ es un H-cohomomorfismo.

Demostración. Supongamos que $x \wedge t$ es un elemento en ΣX. Entonces

$$\nu' \circ \Sigma f(x \wedge t) = \nu'(\Sigma f(x \wedge t)) = \nu'(f(x) \wedge t),$$

por lo que

$$\nu' \circ \Sigma f(x \wedge t) = \begin{cases} (f(x) \wedge 2t, \overline{y_0}), & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ (\overline{y_0}\ , f(x) \wedge (2t-1)), & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Por otro lado $(\Sigma f \vee \Sigma f) \circ \nu(x \wedge t) = \Sigma f \vee \Sigma f(\nu(x \wedge t))$, así

$$\begin{aligned} (\Sigma f \vee \Sigma f) \circ \nu(x \wedge t) &= \begin{cases} \Sigma f \vee \Sigma f(x \wedge 2t, \overline{x_0}), & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \Sigma f \vee \Sigma f(\overline{x_0}\ , x \wedge (2t-1)), & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\Sigma f(x \wedge 2t), \Sigma f(\overline{x_0})), & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ (\Sigma f(\overline{x_0}\ ), x \wedge \Sigma f(2t-1)), & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f(x) \wedge 2t, \overline{y_0}), & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ (\overline{y_0}\ , f(x) \wedge (2t-1)), & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces hemos probado que $\nu' \circ \Sigma f = (\Sigma f \vee \Sigma f) \circ \nu$, por lo que Σf es un H-cohomomorfismo. ■

Teorema A.28
$\Sigma(\quad)$ es un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos basados a la

categoría de espacios H-cogrupos. Al iterar este funtor se obtiene $\Sigma^n(\ ) = \Sigma \circ \Sigma^{n-1}(\ )$ es un funtor entre las mismas categorías.

Demostración. Por el Teorema (A.26) manda $\Sigma(\ \ )$ objetos en objetos, y por el Teorema anterior (A.27) $\Sigma(\ \ )$ manda mapas continuos en H-cohomomorfismos. El resto de la prueba es rutinaria. ■

Teorema A.29
Para cada espacio basado X, ΣX es un H-cogrupo, y con ello para cada espacio Y, $[\Sigma X, Y]$ es un grupo. Si $g : Y \longrightarrow Y'$ es una función continua, entonces

$$g_* : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [\Sigma X, Y]$$

es un homomorfismo. Si $f : X \longrightarrow X'$ es un mapeo continuo basado, entonces $\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X'$ es un H-cohomomorfismo y así

$$(\Sigma f)^* : [\Sigma X', Y] \longrightarrow [\Sigma X, Y]$$

es un H-homomorfismo de grupos.

Teorema A.30 (Funtor Adjunto)
Sean X y Y cualesquiera espacios basados. Hay un homeomorfismo

$$Map(\Sigma X; Y) \cong Map(X; \Omega Y)$$

tal que la biyección inducida

$$[\Sigma X, Y] \equiv [X, \Omega Y]$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $g : \Sigma X \longrightarrow Y$, definimos $\widehat{g} : X \longrightarrow \Omega Y$ tal que

$$\widehat{g}(x, t) = g(x \wedge t).$$

De manera dual si $f : X \longrightarrow \Omega Y$, se define $\check{f} : \Sigma X \longrightarrow Y$ tal que

$$\check{f}(x \wedge t) = f(x)(t).$$

Estas correspondencias inducen el homeomorfismo y su inverso entre $Map(\Sigma X; Y)$ y $Map(X; \Omega Y)$. La continuidad es una consecuencia de la ley exponencial.

El homeomorfismo establece una biyección de componentes por trayectorias, es decir, esta biyección nos da un isomorfismo el isomorfismo de grupos entre $[\Sigma X, Y]$ y $[X, \Omega Y]$. ■

Corolario A.31
Sea X un espacio basado, y $n \geqslant k \geqslant 0$, entonces

$$\pi_n(X) \cong \pi_k(\Omega^{n-k} X).$$

Demostración. Dado que $\pi_n(X) = [S^n, X] = [\Sigma^{n-k} S^k, X] \cong [S^k, \Omega^{n-k} X]$. ■

Lema A.32
Sea G un conjunto con dos operaciones $*$ y $\bullet$ de tal forma que cumplen las siguientes condiciones:

1. $*$ y $\bullet$ tienen una identidad bilateral común.

2. $*$ y $\bullet$ son mutuamente distributivas.

Entonces $*$ y $\bullet$ coinciden, son conmutativas y asociativas.

Demostración. Sean $w,\ x,\ y,\ z \in G$ y sea $e \in G$ la identidad en común. Por las condiciones impuestas a las operaciones $*$ y $\bullet$ se cumplen las siguientes propiedades:

a) $e * x = x * e = x = e \bullet x = x \bullet e$.

b) $(w * x) \bullet (y * z) = (w \bullet y) * (x \bullet z)$.

Así

$$x * y = (x \bullet e) * (e \bullet y) = (x * e) \bullet (e * y) = x \bullet y$$

y por lo tanto $*$ y $\bullet$ coinciden. Para ver la conmutatividad, se tiene que si

$$x * y = (e \bullet x) * (y \bullet e) = (e * y) \bullet (x * e) = y \bullet x = y * \bullet x.$$

Finalmente la asociatividad se tiene por que

$$x * (y * z) = (x \bullet e) * (y \bullet z) = (x * y) \bullet (e * z) = (x * y) * z.$$

■

Lema A.33
Si X es un H-cogrupo y Y es un H-grupo, entonces $[X, Y]$ tiene estructura de grupo abeliano.

Demostración. Las dos estructuras satisfacen las condiciones de lema(A.32) por lo que se tiene el resultado. ■

Corolario A.34
Sea $n \geqslant 2$. Entonces los grupos isomorfos $[\Sigma^n X, Y] \cong [X, \Omega^n Y]$ son abelianos.

Corolario A.35
Sea X un espacio basado y $n \geqslant 2$, entonces $\pi_n(X)$ es un grupo abeliano.

Apéndice B

El orden de un homomorfismo

Definición B.1 Sea A un conjunto y supongamos que $(B, +)$ es un conjunto con una operacion binaria. Entonces se define una operación binaria para el conjunto de las funciones de A en B el cual denotamos de la siguiente forma B^A:

$$+ : B^A \times B^A \longrightarrow B^A$$

como

$$f + g : A \longrightarrow B$$

la cual esta definida como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Teorema B.2
Sea A es un conjunto y $(B, +)$ es un conjunto con una operación binaria.

1. Si $(B, +)$ es asociativo, entonces $(B^A, +)$ es asociativo.

2. Si $(B, +)$ es conmutativo, entonces $(B^A, +)$ es conmutativo.

3. Si $(B, +)$ tiene neutro e, entonces $\vec{e} : A \longrightarrow B$ definida como $\vec{e}(x) = e$ es el elemento neutro de $(B^A, +)$.

4. Si $(B, +)$ tiene neutro y además inversos, entonces $(B^A, +)$ tiene inversos.

Corolario B.3
Supongamos que $(B, +)$ es un grupo (o un grupo abeliano). Entonces para cualquier conjunto A se tiene que $(B^A, +)$ es un grupo (o un grupo abeliano).

Definición B.4 Sea G un grupo (abeliano) y A un conjunto, supongamos que $f \neq 0$ es un elemento del grupo $(G^A, +)$ y supongamos que existe un entero positivo m tal que para toda $a \in A$ se cumple $mf(a) = 0$. Al entero positivo más pequeño con esta propiedad se le conoce como el ***orden de*** f.

$$o(f) = \text{mín}\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{para toda } a \in A,\ mf(a) = 0\}$$

Observación B.5 Supongamos que A y B son conjuntos y G es un grupo (abeliano). Sea $h : A \longrightarrow B$ y $f_1,\ f_2 : B \longrightarrow G$, entonces

$$(f_1 + f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h$$

Demostración. Claramente $(f_1 + f_2) \circ h$ y $f_1 \circ h + f_2 \circ h$ tienen el mismo dominio y el mismo codominio, por lo que solo falta ver que tienen la misma regla de correspondencia. Pero esto es inmediato de la definición ya que si $a \in A$, entonces

$$(f_1 + f_2) \circ h(a) = (f_1 + f_2)(h(a)) = f_1(h(a)) + f_2(h(a)) = (f_1 \circ h + f_2 \circ h)(a).$$

Lo cual termina la demostración. ■

Esta observación nos dice que la composición siempre abre operaciones por la izquierda.

Corolario B.6
Supongamos que A y B son conjuntos y G es un grupo (abeliano). Sea $h : A \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow G$, entonces el orden de f es dividido por el orden de $f \circ h$.

Demostración. Supongamos que $n = o(f)$, entonce $nf = 0$. Por lo que se sigue que

$$n(f \circ h) = f \circ h + f \circ h + \cdots + f \circ h = (nf) \circ h = 0.$$

y dado que $o(f \circ h)$ es el entero positivo más pequeño con esta propiedad se tiene el resultado. ■

Existe un resultado similar para el otro lado de la composición pero esta necesita una hipótesis adicional.

Proposición B.7
Supongamos que A es un conjunto, H y G son grupos (abelianos). Sea $h : A \longrightarrow H$ y $f : H \longrightarrow G$ un morfismo de grupos, entonces el orden de h es dividido por el orden de $f \circ h$.

Demostración. Supongamos que $m = o(h)$, y sea $a \in A$,

$$\begin{aligned} m(f \circ h)(a) = & \quad m(f(h(a))) \\ = & \quad f(m(h(a))) \\ = & \quad f((mh)(a)) \\ = & \quad f(0) \\ = & \quad 0. \end{aligned}$$

Y dado que $o(f \circ h)$ es el entero positivo más pequeño que anula a $f \circ h$, se tiene que $o(f \circ h) \mid o(h)$. ■

Corolario B.8
Supongamos que A es un conjunto, H y G son grupos (abelianos). Sea $h : A \longrightarrow H$ y $f : H \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Supongamos que $n = o(f)$ y $m = o(h)$, entonces $o(f \circ h) \mid n,\ m$.

Corolario B.9
Supongamos que A es un conjunto, H y G son grupos (abelianos). Sea $h : A \longrightarrow H$ y $f : H \longrightarrow G$ un monomorfismo de grupos, entonces el orden de h es igual al orden de $f \circ h$.

Demostración. Sea $N = o(f \circ h)$, entonces para toda a en A se tiene que $N(f \circ h)(a) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 = N(f \circ h)(a) = & \; N(f(h(a))) \\ = & \; f(N(h(a))) \\ = & \; f((Nh)(a)). \\ f((Nh)(a)) = & \; 0. \end{aligned}$$

Pero como f es inyectiva, esto implica que $Nh(a) = 0$, para toda a en A. Entonces $o(h) \mid N$. Pero por el corolario (B.7) se tiene que $N \mid o(h)$, de lo que se sigue que $o(h) = N$. ■

Bibliografía

[1] J. F. Adams. The sphere, considered as an H-space mod p. *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2)*, 12:52–60, 1961.

[2] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. of Math. (2)*, 75:603–632, 1962.

[3] J. F. Adams. *Algebraic topology—a student's guide*. Cambridge University Press, London-New York, 1972. London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 4.

[4] J. F. Adams. *Infinite loop spaces*, volume 90 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.

[5] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995. Reprint of the 1974 original.

[6] M. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002. Translated from the Spanish by Stephen Bruce Sontz.

[7] M. F. Atiyah. *K-theory*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edition, 1989. Notes by D. W. Anderson.

[8] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[9] J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[10] C. F. Bödigheimer. Stable splittings of mapping spaces. In *Algebraic topology (Seattle, Wash., 1985)*, volume 1286 of *Lecture Notes in Math.*, pages 174–187. Springer, Berlin, 1987.

[11] R. Bott and H. Samelson. On the Pontryagin product in spaces of paths. *Comment. Math. Helv.*, 27:320–337 (1954), 1953.

[12] E. H. Brown, Jr. and F. P. Peterson. On the stable decomposition of $\Omega^2 S^{r+2}$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 243:287–298, 1978.

[13] J. Caruso, F. R. Cohen, J. P. May, and L. R. Taylor. James maps, Segal maps, and the Kahn-Priddy theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 281(1):243–283, 1984.

[14] F. R. Cohen. Braid orientations and bundles with flat connections. *Invent. Math.*, 46(2):99–110, 1978.

[15] F. R. Cohen. The unstable decomposition of $\Omega^2\Sigma^2 X$, and its applications. *Math. Z.*, 182(4):553–568, 1983.

[16] F. R. Cohen. A course in some aspects of classical homotopy theory. In *Algebraic topology (Seattle, Wash., 1985)*, volume 1286 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–92. Springer, Berlin, 1987.

[17] F. R. Cohen. On configuration spaces, their homology, and Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 100(1-3):19–42, 1995.

[18] F. R. Cohen, R. L. Cohen, N. J. Kuhn, and J. L. Neisendorfer. Bundles over configuration spaces. *Pacific J. Math.*, 104(1):47–54, 1983.

[19] F. R. Cohen, M. E. Mahowald, and R. J. Milgram. The stable decomposition for the double loop space of a sphere. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, pages 225–228. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.

[20] F. R. Cohen, J. P. May, and L. R. Taylor. Splitting of certain spaces CX. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 84(3):465–496, 1978.

[21] F. R. Cohen, J. C. Moore, and J. A. Neisendorfer. The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres. *Ann. of Math. (2)*, 110(3):549–565, 1979.

[22] F. R. Cohen, J. C. Moore, and J. A. Neisendorfer. Torsion in homotopy groups. *Ann. of Math. (2)*, 109(1):121–168, 1979.

[23] R. L. Cohen. Odd primary infinite families in stable homotopy theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 30(242):viii+92, 1981.

[24] E. Fadell and L. Neuwirth. Configuration spaces. *Math. Scand.*, 10:111–118, 1962.

[25] Y. Félix, S. Halperin, and J. C. Thomas. *Rational homotopy theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[26] H. Freudenthal. Der Einfluss der Fundamentalgruppe auf die Bettischen Gruppen. *Ann. of Math. (2)*, 47:274–316, 1946.

[27] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[28] P. Hilton, G. Mislin, and J. Roitberg. *Localization of nilpotent groups and spaces*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975. North-Holland Mathematics Studies, No. 15, Notas de Matemática, No. 55. [Notes on Mathematics, No. 55].

[29] P. J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. *J. London Math. Soc.*, 30:154–172, 1955.

[30] H. Hopf. Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. *Ann. of Math. (2)*, 42:22–52, 1941.

[31] Dale Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.

[32] I. M. James. Reduced product spaces. *Ann. of Math. (2)*, 62:170–197, 1955.

[33] I. M. James. On the suspension triad. *Ann. of Math. (2)*, 63:191–247, 1956.

[34] I. M. James. The suspension triad of a sphere. *Ann. of Math. (2)*, 63:407–429, 1956.

[35] I. M. James. On the suspension sequence. *Ann. of Math. (2)*, 65:74–107, 1957.

[36] N. J. Kuhn. Ph. D. Structure of the James-Hopf maps. *University of Chicago*, pages 467–483, 1980.

[37] N. J. Kuhn. A Kahn-Priddy sequence and a conjecture of G. W. Whitehead. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 92(3):467–483, 1982.

[38] M. Mahowald. A new infinite family in ${}_2\pi_*{}^s$. *Topology*, 16(3):249–256, 1977.

[39] C. L. Malkiewich. Some facts about QX. *Technical Expository Writings.*, pages 1–6, 2011.

[40] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.

[41] J. P. May. *A concise course in algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[42] J. P. May and K. Ponto. *More concise algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012. Localization, completion, and model categories.

[43] R. J. Milgram. Group representations and the Adams spectral sequence. *Pacific J. Math.*, 41:157–182, 1972.

[44] J. W. Milnor. On the construction FK. In *Algebraic topology—a student's guide, by Adams, John Frank*, pages pp. 118–136,. London Math Soc. Lecture Note Series, No. 4. Cambridge Univ. Press, London, 1956.

[45] J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes.* Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[46] J. C. Moore. The double suspension and p-primary components of the homotopy groups of spheres. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 1:28–37, 1956.

[47] J. A. Neisendorfer. 3-primary exponents. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 90(1):63–83, 1981.

[48] G. Segal. Operations in stable homotopy theory. In *New developments in topology Rev. M. Mahowald (Proc. Sympos. Algebraic Topology, Oxford, 1972)*, pages 105–110. London Math Soc. Lecture Note Ser., No. 11. Cambridge Univ. Press, London, 1974.

[49] P. Selick. Odd primary torsion in $\pi_k(S^3)$. *Topology*, 17(4):407–412, 1978.

[50] V. P. Snaith. A stable decomposition of $\Omega^n S^n X$. *J. London Math. Soc. (2)*, 7:577–583, 1974.

[51] N. P. Strickland. The category of $CGWH$ spaces. *Course notes of Compactly generated weak hausdorff spaces.*, pages 1–23, 2008.

[52] H. Toda. On the double suspension E^2. *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A.*, 7:103–145, 1956.

[53] H. Toda. Order of the identity class of a suspension space. *Ann. of Math. (2)*, 78:300–325, 1963.

[54] S. W. Yang. Ph. D. Order of the canonical vector bundle on $C_n(k)/\Sigma_k$. *Brandeis University*, pages 1–29, 1978.

[55] S. W. Yang. Order of the canonical vector bundle on $C_n(k)/\Sigma_k$. *Illinois J. Math.*, 25(1):136–146, 1981.