



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional**

Unidad Zacatenco  
Departamento de Matemáticas

## **Delta-wye reducibilidad de grafos no planos**

Tesis que presenta

**Gustavo Antonio Sandoval Angeles**

para obtener el Grado de  
**Maestro en Ciencias**  
en la Especialidad de  
**Matemáticas**

Director de Tesis: Dr. Isidoro Gitler Goldwain

Ciudad de México

Julio, 2016



A mis padres  
Ma. Leticia Quiroz y José A. Sandoval



Libres son quienes crean no quienes copian,  
y libres son quienes piensan, no quienes obedecen.  
Enseñar, es enseñar a dudar.

Eduardo Galeano.



# AGRADECIMIENTOS

---

A mis padres Maria Leticia de Lourdes Angeles Quiroz y José Antonio Sandoval Pizano, por quererme tal y como soy, por su amor y confianza, que espero poder transmitir no como pagando una deuda si no como siendo consecuente con lo aprendido. A mis hermanas Lucia y Ana por las risas.

Al Dr. Isidoro Gitler por el tiempo, la atención y el intercambio de argumentos a lo largo del desarrollo de este trabajo, sin los cuales esta tesis no se hubiera logrado.

A los Doctores Juan Antonio Vega Garfias, Enrique Reyes Espinoza, Feliú D. Sagols Troncoso y Francisco Zaragoza por las correcciones y opiniones que me ayudaron a hacer un mejor trabajo. Así como a todos los profesores que me enseñaron cosas bonitas en el área de las matemáticas.

A todos los amigos que he tenido la dicha de conocer, por nombrar algunos: Emanuel, Aby, Mario, Carlos, Ricardo, Angélica, Arreola, Hugo, Irving, Checo, Dora, Chequito, Julio, Óscar, Lalo, Óscar Vieira, Francesca, Citlalli, al entrenador Popoca, Diego, Martín, Ivan, Nacho, Juan sin, Daniel, Arturo, Víctor, Jesús, Julian etc. Por las risas, las aventuras, los proyectos (conclusos e inconclusos), el amor, partidos de basquet, los veintiunos que mostraron nuestra competitividad sin llegar a convertirse en rencor, rodadas, abrazos, fiestas, bailes, lágrimas, por la confianza que nos hemos tenido, por los oídos atentos y discusiones. Que generaron un conocimiento mutuo. Así como comprensión por las veces que no hemos podido estar.

Gracias a ustedes me he podido construir y deconstruir. Espero poder sembrar amistades largas y duraderas y que podamos todos(as) ser todos(as) uno(a) con nuestras diferencias.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT por el apoyo económico otorgado sin el cual este trabajo posiblemente no se habría logrado, y al fomento a la ciencia que realizan con diversas actividades y dinámicas.

Al proyecto ABACUS, CONACyT, México, EDOMEX-2011-C01-165873.

Al CINVESTAV por sus recursos y espacios, así como al apoyo administrativo, secretarial, de vigilancia, mantenimiento y de intendencia por que su labor es muy valiosa.





# RESUMEN

---

Un grafo  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a otro grafo  $H$  si  $H$  se puede obtener de  $G$  por medio de las reducciones serie-paralelo y las transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  (delta-wye); si  $H$  es sólo un vértice diremos que  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible. Un grafo no plano  $G$  es casi-plano si para cualquiera de sus aristas  $e$ , al menos uno de los grafos  $G \setminus e$  (borrado de  $e$ ) y  $G/e$  (contracción de  $e$ ) es plano. En 1996 Gubser [37] caracteriza estos grafos, y en 2016 Ding, Fallon y Marshall [23] dan una prueba simple y corrigen errores de Gubser. En esta tesis mostramos que todo grafo casi-plano es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible (Teorema 4.2.1).

Un problema más difícil es mostrar que una clase de grafos es reducible con la condición de que todo grafo en la secuencia de reducción pertenece a la clase. Wagner [84] mostró que un grafo casi-plano  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a  $K_{3,3}$  a través de una secuencia de reducción donde todos los grafos son casi-planos. Nosotros damos dos pruebas más simples y algorítmicas a este problema (Teorema 4.2.2, Sección 4.2.4).

Gitler [30] probó que los grafos libres de  $K_5$  (grafos sin  $K_5$  como menor) o  $K_{3,3}$  son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles; en este trabajo simplificamos esta prueba. Mohar [60] da otra definición de grafo casi-plano, que en la tesis llamamos grafo M-casi-plano; un grafo  $G$  es M-casi-plano si es no plano y existe una arista  $e$  en  $G$  tal que el grafo  $G \setminus e$  es plano. Los terminales son vértices que no se pueden eliminar por las reducciones serie-paralelo y las transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ . Un grafo es  $k$ -terminal si tiene  $k$  vértices terminales, y si además es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a un grafo cuyos vértices son sólo los terminales, diremos que es  $k$ -terminal reducible. En esta tesis mostramos:

- Los grafos reducibles no necesariamente son 1-terminal reducibles (Ejemplos 2.4.1 y 2.4.2).
- Los grafos casi-planos son 2-terminal reducibles (Corolario 4.3.6).
- Los grafos casi-planos con 3-terminales son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles a un subgrafo de  $K_3$  o a  $K_6$  sin las aristas de uno de sus triángulos (Teorema 4.3.5).
- Los grafos libres de  $K_{3,3}$  son 2-terminal reducibles (Corolario 4.3.17).
- Los grafos libres de  $K_5$  y M-casi-planos son 1-terminal reducibles (Corolario 4.3.15 y Teorema 4.3.1, respectivamente).
- En general los grafos M-casi-planos y libres de  $K_5$  no son 2-terminal reducibles (Ejemplos 4.3.1 y 4.3.2, respectivamente).
- En general los grafos libres de  $K_{3,3}$  no son 3-terminal reducibles (Ejemplo 4.3.3).
- Los grafos toroidales con representatividad mayor que cinco no son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles (Teorema 4.3.19).



# ABSTRACT

---

A graph  $G$  is  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible to a graph  $H$  if  $H$  is obtained of  $G$  by a sequence of series-parallel reductions and  $\Delta \leftrightarrow Y$  transformations; if  $H$  is only a simple vertex we say that  $G$  is  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible or reducible. A nonplanar graph  $G$  is called almost-planar if for every edge  $e$  of  $G$ , at least one of  $G \setminus e$  (delete  $e$ ) and  $G/e$  (contract  $e$ ) is planar. In 1996, Gubser [37] characterized these graphs, and in 2016 Ding, Fallon and Marshall [23] give a simple proof and corrected Gubser errors. On this thesis we prove that a almost-planar graph is  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible (Theorem 4.2.1).

A harder problem is to show that a class of graphs is reducible with the condition that all graphs in the reduction sequence are in the same class. Wagner [84] proves that an almost-planar graph  $G$  is  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible to  $K_{3,3}$ , through a reduction sequence formed only by almost-planar graphs. We give two simpler and algorithmic proofs to this problem (Theorem 4.2.2, Section 4.2.4).

Gitler [30] proved that  $K_5$ -free graphs (graphs with no  $K_5$  minor) and  $K_{3,3}$ -free graphs are  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible; in this work we simplify this proof. Mohar [60] give another definition of almost-planar graphs, that in the thesis we call M-almost-planar graphs; a graph  $G$  is a M-almost-planar graph if  $G$  is nonplanar and there exists an edge  $e$  in  $G$  such that  $G \setminus e$  is planar. The terminals are vertices that cannot be deleted by series-parallel reductions and  $\Delta \leftrightarrow Y$  transformations. A graph is  $k$ -terminal if it has  $k$  terminal vertices, and if it is also  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible to a graph that only has terminal vertices, then we say that  $G$  is  $k$ -terminal reducible. In this thesis we prove:

- Delta-wye reducible graphs are not necessarily 1-terminal reducible (Examples 2.4.1 and 2.4.2).
- Almost-planar graphs are 2-terminal reducible (Corollary 4.3.6).
- Almost-planar graphs with 3-terminal are  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible to a subgraph of  $K_3$  or to  $K_6$  with the edges of one of its triangles deleted (Theorem 4.3.5).
- $K_{3,3}$ -free graphs are 2-terminal reducible (Corollary 4.3.17).
- $K_5$ -free and M-almost-planar graphs are 1-terminal reducible (Corollary 4.3.15 and Theorem 4.3.1, respectively).
- Not all M-almost-planar and  $K_5$ -free graphs are 2-terminal reducible (Examples 4.3.1 and 4.3.2, respectively).
- Not all  $K_{3,3}$ -free graphs are 3-terminal reducible (Example 4.3.3).
- Toroidal graphs with representativity greater than five are not  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible (Theorem 4.3.19).



# ÍNDICE GENERAL

---

RESUMEN	VII
ABSTRACT	IX
ÍNDICE GENERAL	X
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2 PRELIMINARES</b>	<b>5</b>
2.1 DEFINICIONES . . . . .	5
2.2 GRAFOS PLANOS . . . . .	9
2.3 OPERACIONES $\Delta \leftrightarrow Y$ Y REDUCIBILIDAD . . . . .	11
2.4 REDUCIBILIDAD CON VÉRTICES TERMINALES . . . . .	18
2.4.1 REDUCIBILIDAD DE GRAFOS PLANOS CON TERMINALES . . . . .	19
<b>3 APLICACIONES DE LAS OPERACIONES <math>\Delta \leftrightarrow Y</math></b>	<b>21</b>
3.1 ÁRBOLES GENERADORES . . . . .	24
3.2 LÍMITE TERMODINÁMICO EN ALGUNAS MALLAS . . . . .	26
3.3 EL MODELO DE ISING . . . . .	29
3.4 EMPAREJAMIENTOS PERFECTOS . . . . .	32
<b>4 <math>\Delta \leftrightarrow Y</math> REDUCIBILIDAD DE GRAFOS NO PLANOS</b>	<b>33</b>
4.1 GRAFOS CASI-PLANOS . . . . .	33
4.2 $\Delta \leftrightarrow Y$ REDUCIBILIDAD DE GRAFOS CASI-PLANOS . . . . .	39
4.2.1 EJEMPLOS . . . . .	40
4.2.2 DEMOSTRACIÓN 1 DEL TEOREMA 4.2.2 . . . . .	43
4.2.3 DEMOSTRACIÓN 2 DEL TEOREMA 4.2.2 . . . . .	54
4.2.4 ALGORITMO . . . . .	62
4.2.5 DEMOSTRACIÓN DE WAGNER DEL TEOREMA 4.2.2 . . . . .	67
4.3 REDUCIBILIDAD DE GRAFOS NO PLANOS CON TERMINALES . . . . .	73
4.3.1 GRAFOS CASI-PLANOS Y M-CASI-PLANOS . . . . .	73
4.3.2 GRAFOS LIBRES DE $K_5$ O $K_{3,3}$ Y GRAFOS TOROIDALES . . . . .	80
<b>5 CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS</b>	<b>89</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>93</b>
<b>ÍNDICE</b>	<b>98</b>



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

---

Una variedad de resultados muestran que una clase de grafos se puede reducir a una forma canónica, aplicando repetidamente ciertas operaciones. Por ejemplo, Tutte (Teorema IV58 en [83], 1984) muestra que todo grafo 3-conexo se construye a partir de una rueda y dos operaciones: desdoblamiento de vértices y adición de aristas. Este tipo de resultados son importantes porque caracterizan una propiedad fundamental, como la conexidad, de una forma en que se pueden utilizar en pruebas por inducción o para determinar propiedades estructurales de familias de grafos.

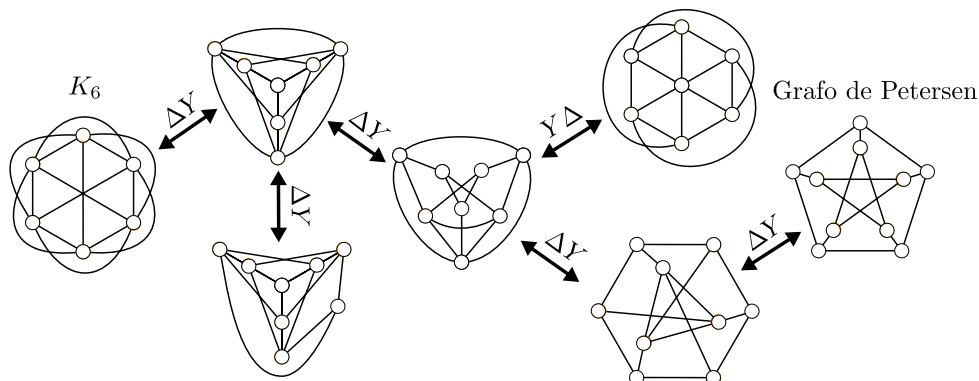
En esta tesis estudiamos las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , las cuales son: eliminación de aristas colgantes, lazos, aristas en serie, aristas en paralelo, transformación  $\Delta \rightarrow Y$  y  $Y \rightarrow \Delta$ . Diremos que un grafo es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible, o simplemente reducible, si se puede reducir a un vértice usando estas operaciones. Dos grafos son  $\Delta Y$  equivalentes si podemos transformar uno a partir del otro usando transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ .

Akers (1960) [1] y Lehman (1963) [54] conjeturaron que cualquier grafo plano se puede reducir; Epifanov (1966) [25] probó esta conjetura; se han obtenido una variedad de pruebas más simples, por ejemplo: Feo [27] (1985), Truemper [80] (1989), Feo y Provan [26] (1993), y Nakahara y Takahashi [61] (1996).

Para el problema de reducir un grafo plano, una prueba constructiva ya está implícita en 1916, en la prueba de Steinitz [74, 75] donde muestra que todo grafo plano 3-conexo es el 1-esqueleto de un polítopo convexo en tres dimensiones. Grünbaum [36] (1967) describe la prueba de Steinitz con más detalle y esclarece el uso de las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  en dicha prueba.

No todos los grafos son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles. Por ejemplo, un grafo simple con grado mínimo cuatro y sin triángulos no admite ninguna operación, este es el caso de  $K_{4,4}$ . La familia de Petersen son los siete grafos  $\Delta Y$  equivalentes a  $K_6$ , entre ellos está el grafo de Petersen (ver Figura 1.1). Aunque era folclore en la literatura que esta familia era un conjunto de grafos no reducibles, no fue hasta 1988 que Warkentyne [88] probó que  $K_6$  no es reducible y por lo tanto la familia de Petersen tampoco lo es.

Otra familia interesante es la de los grafos ápex, que son aquellos que al quitar un vértice se hacen planos; y los grafos no-ápex son aquellos que al quitar cualquiera de sus vértices obtenemos un grafo no plano. Pierce en 2014 [64] dio un algoritmo que construye la familia de los grafos  $\Delta Y$  equivalentes a un grafo dado y lo usó para encontrar menores prohibidos minimales para los grafos no-ápex; él encontró 157 menores prohibidos minimales.



**Figura 1.1:** La familia de Petersen.

Es muy conocido el resultado de que todo grafo es encajable en  $\mathbb{R}^3$  sin cruce de aristas. Sin embargo un problema importante era decidir si esto era posible sin tener ciclos enlazados. Un grafo está en la familia de los grafos encajables en  $\mathbb{R}^3$  de forma desenlazada si, se puede encajar en el espacio  $\mathbb{R}^3$  sin que tenga dos ciclos enlazados. Nešetřil y Thomas [62] (1985) muestran que esta familia es cerrada bajo menores; en 1993, Robertson, Seymour y Thomas [67] muestran que la familia es cerrada bajo transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  y en 1995 [65], muestran que los grafos en la familia de Petersen, son los menores prohibidos para los grafos encajables en  $\mathbb{R}^3$  de forma desenlazada.

Truemper [80] (1989) mostró que la familia de grafos reducibles es cerrada bajo menores. Yu [89] en 2004, mostró una inesperada cota de 57,587 menores prohibidos. Dos años después, Yu [90] probó la sorprendente cota de al menos 68,897,913,659 menores prohibidos. Encontrar otros menores prohibidos es muy difícil. Una búsqueda extensiva por computadora no ha dado ningún nuevo grafo. Se conjetura que la lista de Yu es la lista completa de los menores prohibidos.

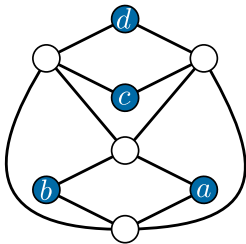
También se han estudiado estas operaciones en grafos no planos. En 1989, Robertson y Vitray [68] utilizan las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  para caracterizar los grafos proyectivos de representatividad menor o igual a tres. Un grafo  $G$  es libre de otro grafo  $H$  si,  $H$  no es menor de  $G$ . Gitler [30] mostró que los grafos libres de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  son reducibles. Primero Gitler [30] (1991) y luego de forma simplificada Archdeacon, Colbourn, Gitler y Provan [3] (2000), caracterizaron los grafos planos-proyectivos reducibles y además probaron que grafos con número de cruce uno son reducibles. Wagner [84] (2015) demostró que un grafo casi-plano (según la definición de Gubser [37], también ver [23]) es reducible, más aún hay una secuencia de reducción por medio de grafos casi-planos. En esta tesis damos dos pruebas más simples que la de Wagner, y de hecho nuestras pruebas son esencialmente algorítmicas.

Truemper [81, 82] (1992) utilizando las transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  caracterizó los matroides casi- regulares, logrando como consecuencia la determinación de las matrices míni-



mas obstructoras para la unimodularidad total. A su vez son la herramienta principal en el estudio emprendido por Oxley, Semple y Vertigan [63], concerniente al problema de representación de matroides  $k$ -regulares, que son matroides que generalizan a los matroides regulares (representables sobre cualquier campo).

Una variación sobre estas operaciones es, prohibir la eliminación de algunos vértices por las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , llamados vértices terminales; a un grafo con  $k$  vértices terminales le decimos  $k$ -terminal; decimos que un grafo  $G$  es  $k$ -terminal reducible si, es  $k$ -terminal y  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a un grafo con sólo los vértices terminales. Akers [1] (1960) conjeturó que los grafos planos son 2- y 3- terminal reducibles; Epifanov [25] (1966) demostró en positivo esta conjetura para grafos planos con 2-terminales; pruebas constructivas simples fueron dadas por Feo [27] (1985), Truemper [80, 82] (1989), Feo y Provan [26] (1993), y Nakahara y Takahashi [61] (1996). Treinta años después de que Akers formulara su conjetura, Gitler [30] mostró que es cierta para grafos planos con 3-terminales, también probó la reducibilidad con cuatro terminales sujeto a que tres de los terminales estén en una cara en común, así como el caso de  $k$ -terminales cuando todos los terminales estén en una cara en común.



**Figura 1.2:** Grafo plano, 4-terminal no reducible.

Si hay grafos que no son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles, no es de extrañar que existan grafos  $k$ -terminales no reducibles. Por ejemplo, el grafo de la Figura 1.2 con los vértices  $a, b, c$  y  $d$  como terminales no es reducible, ya que no se le puede aplicar ninguna operación. En el trabajo de Epifanov [25] ya se conocían grafos con cuatro terminales no reducibles. Podemos encontrar más ejemplos en los trabajos de Gitler [30] y, Feo y Provan [26]. Recientemente, Demasi y Mohar [20] (2015) dan una caracterización de grafos planos, 3-conexos con 4-terminales.

Un problema importante es el desarrollo de algoritmos para reducir un grafo. Provan y Feo [26] (1993) dieron un algoritmo de tiempo cuadrático para reducir un grafo plano 2-terminal. Gitler y Sagols [33] (2011) dan un algoritmo para reducir grafos planos con tres terminales. Demasi y Mohar [20] (2015) presentan un algoritmo que reduce un grafo plano con 4-terminales o bien regresa una obstrucción a la reducción.

Gitler [30] y, Feo y Provan [26] sugieren que “existen razones de peso para pensar que  $\mathcal{O}(|V|^{3/2})$  es el menor orden posible para reducir un grafo plano”. Chang y Erickson [11] (2015) probaron que al menos se necesita  $\Omega(|V|^{3/2})$  operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  en el peor de los casos para reducir un grafo plano.

En los preliminares, Capítulo 2 Sección 2.1, establecemos las definiciones que usaremos. En la Sección 2.3 damos la definición de las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , así como teoremas relacionados con estas operaciones y desarrollamos el teorema que garantiza que

todo menor de un grafo  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible es también  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

En el Capítulo 3 describimos las siguientes aplicaciones de las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ : el conteo de árboles generadores (Sección 3.1), calculo del límite termodinámico en algunas mallas (Sección 3.2), el modelo de Ising (Sección 3.3) y el conteo de emparejamiento perfectos (Sección 3.4).

Un grafo  $G$  es casi-plano si no es plano y para cada arista  $e$  de  $G$  al menos uno de los grafos  $G/e$  o  $G \setminus e$  es plano (Gubser [37], también ver [23]).  $G$  es M-casi-plano si no es plano y tiene una arista que al borrarla obtenemos un grafo plano (Mohar [60]). En el Capítulo 4 estudiamos a los grafos casi-planos y M-casi-planos.

Wagner [84] mostró que un grafo casi-plano  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a  $K_{3,3}$  a través de una secuencia de reducción donde todos los grafos son casi-planos. En la Sección 4.2.5 analizamos la demostración de Wagner [84]. En la Sección 4.2.1 damos ejemplos de un grafo casi-plano que se reduce a  $K_{3,3}$  por medio de una secuencia de reducción donde no todos los grafos son casi-planos. En las Secciones 4.2.3, 4.2.5 y 4.2.4 damos dos pruebas más simples y algorítmicas a la de Wagner.

En la Sección 4.3 se estudia el caso de grafos no planos con vértices terminales y mostramos lo siguiente.

- Los grafos reducibles no necesariamente son 1-terminal reducibles (Ejemplos 2.4.1 y 2.4.2).
- Los grafos casi-planos son 2-terminal reducibles (Corolario 4.3.6).
- Los grafos casi-planos con 3-terminales son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles a un subgrafo de  $K_3$  o a  $K_6$  sin las aristas de uno de sus triángulos (Teorema 4.3.5).
- Los grafos libres de  $K_{3,3}$  son 2-terminal reducibles (Corolario 4.3.17).
- Los grafos libres de  $K_5$  y M-casi-planos son 1-terminal reducibles (Corolario 4.3.15 y Teorema 4.3.1, respectivamente).
- En general los grafos M-casi-planos y libres de  $K_5$  no son 2-terminal reducibles (Ejemplos 4.3.1 y 4.3.2, respectivamente).
- En general los grafos libres de  $K_{3,3}$  no son 3-terminal reducibles (Ejemplo 4.3.3).
- Los grafos toroidales con representatividad mayor que cinco no son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles (Teorema 4.3.19).

Por último, en el Capítulo 5 damos algunos problemas abiertos.

En este capítulo se definen los conceptos y términos concernientes a esta tesis.

## 2.1 DEFINICIONES

Un *grafo*  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste de un conjunto  $V(G)$  de *vértices* y un conjunto  $E(G)$ , diferente de  $V(G)$ , de *aristas*, junto con una *función de incidencia*  $\phi_G$  que asocia a cada arista de  $E(G)$  un subconjunto  $X$  de  $V(G)$  tal que  $1 \leq |X| \leq 2$ ; intuitivamente  $\phi_G$  asocia cada arista de  $E(G)$  con uno o dos vértices distintos de  $V(G)$ . Un grafo con un sólo vértice lo llamamos *grafo trivial*. Si  $e$  es una arista de  $E(G)$  tal que  $\phi_G(e) = \{u, v\}$ , entonces decimos que la arista  $e$  une los vértices  $u$  y  $v$ , y los vértices  $u$  y  $v$  son los *extremos* de  $e$ ; usualmente  $e$  se escribe como  $uv$  (o  $vu$ ). Decimos que los vértices  $u$  y  $v$  son *incidentes* a la arista  $uv$  y la arista  $uv$  es incidente con  $u$  y  $v$ . Dos vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  son *adyacentes*, o *vecinos*, si  $uv$  es una arista de  $G$ . Dos aristas  $e \neq e'$  son *adyacentes* si ellas comparten un extremo. Una arista con sus dos extremos idénticos se llama *lazo*. A dos aristas que comparten sus extremos les llamamos *aristas paralelas*.

El *grado*  $d_G(v) = d(v)$  de un vértice  $v$  es el número de aristas incidentes con  $v$ . Un vértice de grado 0 es un *vértice aislado*. Un lazo contribuye en 2 al grado de un vértice. Una arista  $e$  es *colgante* si uno de sus extremos tiene grado igual a 1, y dos aristas  $e \neq e'$  están en *serie* si comparten exactamente uno de sus extremos y éste tiene grado igual a 2.

Una *bipartición* de los vértices de un grafo  $G$  es una partición de  $V(G)$  en dos conjuntos disjuntos no vacíos  $X$  y  $Y$ ; denotamos esta bipartición por  $(X, Y)$ .

Un grafo  $G$  es *conexo* si para cada bipartición  $(X, Y)$  de  $V(G)$  existe al menos una arista de  $G$  con un extremo en  $X$  y el otro extremo en  $Y$ ; en caso contrario  $G$  es *disconexo*.

Si  $X \subset V(G)$  es cualquier conjunto de vértices de  $G$ , escribimos  $G \setminus X$  para el grafo obtenido de  $G$  por el *borrado* de todos los vértices en  $X$  y sus aristas incidentes. Si  $X = \{v\}$  consiste de un vértice  $v$  de  $G$ , escribimos  $G \setminus v$  en lugar de  $G \setminus \{v\}$ . El *borrado* de una arista  $e$  de  $G$  resulta en el nuevo grafo  $G \setminus e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ .

**Definición 2.1.1** Sean  $P$  y  $C$  dos grafos conexos.

- $P$  es un *camino* si tiene al menos dos vértices y cada vértice de  $P$  tiene grado igual a 2, excepto dos de sus vértices que tienen grado igual a 1; los vértices de grado 1 se dicen los *extremos* de  $P$ , y los de grado 2 *vértices internos* de  $P$ . La *longitud* de  $P$  es el número de aristas que tiene, y denotamos a  $P$  como  $v_1v_2 \cdots v_n$  con  $|V(P)| = n$  y  $v_i$  los vértices de  $P$ . Dos caminos son *internamente disjuntos* si no comparten vértices internos.
- $C$  es un *ciclo* si cada vértice de  $C$  tiene grado igual a 2. La *longitud* de  $C$  es igual al número de sus aristas, un ciclo de longitud 1 es un lazo, un ciclo de longitud 2 es un *biciclo* (aristas paralelas), y un ciclo de longitud igual a 3 se un *triángulo*, y hacemos referencia a este último ciclo con el símbolo  $\Delta$ .

Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo y  $e = uv$  una de sus aristas,  $G \cup e$  es el grafo obtenido de agregar la arista  $e$  al conjunto de aristas de  $G$ . Por  $G/e$  denotamos al grafo obtenido de  $G$  por la *contracción* de la arista  $e$  en un nuevo vértice  $v_e$ , el cual resulta ser adyacente a todos los vecinos de  $u$  y  $v$ . Formalmente,  $G/e$  es el grafo  $(V', E')$  con conjunto de vértices  $V' = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{v_e\}$ , donde  $v_e$  es el 'nuevo' vértice, *i. e.*,  $v_e \notin V(G) \cup E(G)$  y el conjunto de aristas es

$$E' = \left\{ xy \in E(G) \mid \{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset \right\} \cup \left\{ v_e y \mid uy \in E(G) \setminus \{e\} \text{ o } vy \in E(G) \setminus \{e\} \right\}.$$

A un conjunto de aristas no adyacentes  $M$  en un grafo  $G$  le llamamos *emparejamiento*. Si además cada vértice de  $G$  es incidente a una arista de  $M$ , decimos que  $M$  es un *emparejamiento perfecto*.

**Definición 2.1.2** Sean  $G$  y  $H$  dos grafos.

- $H$  es un *subgrafo* de  $G$  si  $H$  se obtiene de  $G$  por medio del borrado de vértices y/o aristas de  $G$ , *i. e.*  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .
- $H$  es un *subgrafo inducido* de  $G$  si  $H$  se obtiene de  $G$  por medio del borrado de vértices de  $G$ . Si  $X$  es un conjunto de vértices de  $G$  al subgrafo  $M$  inducido tal que  $V(M) = X$  lo denotamos como  $G(X)$ .
- $H$  es un *subgrafo generador* de  $G$  si  $H$  se obtiene de  $G$  por medio del borrado de aristas de  $G$ .
- $H$  es un *menor* de  $G$  si,  $H$  se puede construir mediante una sucesión de contracciones o borrado de aristas de  $G$  y el borrado de vértices aislados.
- $H$  es *subdivisión* de  $G$  si,  $H$  es obtenido a partir de  $G$  mediante la sustitución de algunas aristas de  $G$  por nuevos caminos entre sus extremos, de modo que ninguno de estos caminos tiene un vértice interno en  $V(G)$  o en otro nuevo camino.

A los vértices originales de  $G$  en  $H$  les llamaremos vértices de *ramificación* y a los vértices introducidos los llamaremos vértices de *subdivisión*. Tengamos en cuenta que los vértices de ramificación conservan el grado que tenían en  $G$ . Diremos que un grafo  $G$  tiene a otro grafo  $N$  como *subdivisión* si  $G$  tiene un subgrafo  $M$  que es una subdivisión de  $N$ .

- $H$  y  $G$  son *isomorfos* si, existe una biyección  $f$  entre los conjuntos de sus vértices  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv$  es arista de  $G$  si y sólo si  $f(u)f(v)$  es arista de  $H$ .
- $G$  es *libre* de  $H$  si  $H$  no es menor de  $G$ .

**Definición 2.1.3** Sea  $G$  un grafo y  $H$  un subgrafo de  $G$ .

- $H$  es un *camino en*  $G$  si  $H$  es isomorfo a un camino.
- $H$  es un *ciclo en*  $G$  si  $H$  es isomorfo a un ciclo.
- Un camino o ciclo en  $G$ , es *hamiltoniano* si contiene a  $V(G)$ .
- El grafo  $H$  es una *componente* de  $G$  si,  $H$  es conexo y no existe otro subgrafo conexo de  $G$  que lo contenga *i. e.*,  $H$  es maximal con la propiedad de conexidad.

**Definición 2.1.4** Sea  $G$  un grafo.

- $G$  es *simple* si no tiene lazos ni aristas paralelas.
- $G$  es  *$n$ -regular* si es simple y cada uno de sus vértices tiene grado  $n$ .
- Supongamos que  $G$  es simple. Si para todo par de vértices distintos de  $G$  existe una arista incidente a ellos, entonces  $G$  es *completo* y se denota por  $K_n$ , donde  $n$  es el número de vértices de  $G$ .
- $G$  es *bipartito* si existe una bipartición  $(X, Y)$  del conjunto de vértices  $V(G)$  tal que cada arista de  $G$  tiene un extremo en  $X$  y el otro extremo en  $Y$ .
- Si  $G$  es simple y tiene una bipartición  $\{X, Y\}$ , tal que cada vértice de  $X$  es adyacente a todos los vértices de  $Y$ , entonces  $G$  es un *grafo bipartito completo*, y lo denotamos como  $K_{n,m}$  donde  $n$  y  $m$  son el número de vértices en  $X$  y  $Y$ , respectivamente.
- $G$  es *euleriano* si el grado de cada uno de sus vértices es par.
- $G$  es *hamiltoniano* si contiene algún ciclo hamiltoniano.
- $G$  es  *$k$ -conexo* si tiene al menos  $k$  vértices y para cualquier subconjunto  $X$  de vértices con menos de  $k$  elementos,  $G \setminus X$  es conexo.
- $G$  es un *bosque* si no tiene ciclos.

- $G$  es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. Un vértice de grado uno en un árbol se llama *hoja*.
- $G$  es *ápex* si tiene un vértice  $v$  tal que  $G \setminus v$  es plano;  $v$  es un vértice *ápex* de  $G$ .

Decimos que hay un *encaje* de un grafo  $G$  en una superficie  $\Sigma$ , si existe una función inyectiva  $\Phi : V(G) \rightarrow \Sigma$  y para cada arista  $uw$  de  $G$  existe un conjunto  $X$  llamado *arco del encaje* en  $\Sigma$  tal que, existe un homeomorfismo  $f$  entre  $X$  y  $[0, 1]$ ; y  $\{f(0), f(1)\}$  es igual a  $\{\Phi(u), \Phi(w)\}$ . Entenderemos como *homeomorfismo* entre  $X$  y  $[0, 1]$ , a una biyección  $f$  entre  $[0, 1]$  y  $X$  que es continua y su inversa es continua.

Diremos que dos aristas  $e$  y  $f$  de un grafo  $G$  se *crucan*, si para algún encaje de  $G$  en el plano,  $e$  y  $f$  se cruzan en un punto diferente de sus extremos, y el *número de cruce* de  $G$  es el mínimo número de cruces de aristas de  $G$  para cualquier encaje en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ).

**Definición 2.1.5** Sea  $G$  un grafo.

- $G$  es *plano* si se puede encajar en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ) sin que dos aristas se crucen. A los conjuntos conexos del complemento de la unión de los puntos y arcos, de un encaje en  $\mathbb{R}^2$  sin cruces de un grafo plano conexo, les llamamos *caras*, al conjunto de las caras lo denotamos como  $F(G)$ . Decimos que un vértice o arista es *adyacente a una cara* si está en la frontera de la cara.
- $G$  es *periplano* si tiene un encaje en el plano sin cruces en el que todos sus vértices son adyacentes a una misma cara.

Diremos que una familia  $\mathcal{G}$  de grafos es *cerrada bajo menores*, si para todo grafo  $G$  en  $\mathcal{G}$ , todos los menores de  $G$  también están en  $\mathcal{G}$ . En 1970 Wagner [87] conjeturó que cualquier familia de grafos cerrada bajo menores se puede caracterizar por una cantidad finita de *menores prohibidos*. En otras palabras, el conjunto de grafos menor-mínimos que no están en la familia es finita. La conjetura de Wagner fue verificada 30 años después de ser formulada por Robertson y Seymour en 2004, en una serie de veinte artículos, el último siendo [66]. Por ejemplo, la familia de los bosques es cerrada bajo menores y su menor prohibido es  $K_3$  (para grafos simples), o la familia de grafos periplanos, que tiene como menores prohibidos a  $K_4$  y  $K_{2,3}$  [22].

Un  *$n$ -clique* de un grafo  $G$  es un conjunto  $X$  de  $n$  vértices tal que el subgrafo inducido por  $X$  es isomorfo a  $K_n$ .

**Definición 2.1.6 ([59])** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos grafos con vértices distintos, y  $S_i$  un  $k$ -clique de  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ). Sea  $G$  el grafo obtenido por una identificación de  $S_1$  y  $S_2$  y borrando algunas (posiblemente todas, posiblemente ninguna) de las aristas entre los vértices de la identificación; diremos que  $G$  es una  *$k$ -suma* de  $G_1$  y  $G_2$ , y a los conjuntos  $S_i$  les

llamaremos *sumandos*.

La definición que usamos de  $k$ -suma se puede realizar entre grafos no simples y dar origen a aristas paralelas entre los vértices de los sumandos.

## 2.2 GRAFOS PLANOS

Los grafos planos son uno de los objetos matemáticos más estudiados. Recordemos que el grafo del problema de los puentes de Königsberg es plano y no euleriano, que encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo plano es NP-completo [29], o el teorema de los cuatro colores. En esta sección recordaremos algunos resultados importantes sobre grafos planos.

**Lema 2.2.1** Sea  $G$  un grafo entonces la suma de los grados de los vértices de  $G$  es igual a dos veces la cantidad de aristas de  $G$ .

**Teorema 2.2.2 (Fórmula de Euler [22])** Sea  $G$  un grafo plano y conexo, y sean  $E$ ,  $V$  y  $F$  el número de aristas, vértices y caras, respectivamente, entonces  $V - E + F = 2$ .

Sean  $G = (V, E)$  y  $G^* = (V^*, E^*)$  grafos planos y conexos con un encaje cada uno, sean  $F = F(G)$  y  $F^* = F(G^*)$ , decimos que  $G^*$  es *dual* de  $G$  si hay biyecciones:  $v^* : F \rightarrow V^*$ ,  $g : E \rightarrow E^*$ , y,  $f^* : V \rightarrow F^*$ , que satisfacen:

- I)  $v^*(f) \in f$  para toda cara  $f \in F$ .
- II)  $g(e)$  y  $e$  intersecan exactamente una vez a  $G$  y  $G^*$ , respectivamente. Además esta intersección no es en los extremos de las aristas.
- III)  $v \in f^*(v)$  para todo vértice  $v \in V$ .

Notemos que el dual depende del encaje que hagamos del grafo, y que  $G$  también es dual de  $G^*$ . El dual de un grafo plano siempre existe.

**Lema 2.2.3** Sea  $G$  grafo plano, conexo y simple.

1. Si  $|V(G)| \geq 3$ , entonces  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ .
2. Si  $|V(G)| \geq 3$  y para algún encaje de  $G$  cada cara es adyacente a al menos cuatro aristas, entonces  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ .

**Demostración.** Demostraremos el inciso 2. Sea  $G$  un grafo plano, simple y para algún encaje  $f$  cada cara de  $G$  es adyacente a al menos a cuatro aristas, tomemos a  $G^*$  como el dual de  $G$  para este encaje.

Notemos que  $d(v) \geq 4$  para cada vértice  $v$  de  $G^*$ , por que  $G$  es simple y el encaje  $f$  tiene caras con al menos cuatro lados;  $|E(G)| = |E(G^*)|$ ;  $|F(G)| = |V(G^*)|$ ;  $|V(G)| = |F(G^*)|$ ; y por el Lema 2.2.1:

$$4|V(G^*)| \leq \sum_{v \in V(G^*)} d(v) = 2|E(G^*)|,$$

entonces

$$|V(G^*)| \leq \frac{|E(G^*)|}{2}.$$

Aplicando estas observaciones a la fórmula de Euler de  $G^*$ , tenemos:

$$|V(G^*)| - |E(G^*)| + |F(G^*)| = 2 \leq -\frac{|E(G)|}{2} + |V(G)|,$$

entonces

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

El inciso 1 es análogo. ■

**Teorema 2.2.4 ([22])** Los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planos.

**Demostración.**  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planos por el Lema 2.2.3 incisos 1 y 2, respectivamente. ■

La familia de grafos planos es cerrada bajo menores y el Teorema de Kuratowski [22] nos da sus menores prohibidos:

**Teorema 2.2.5 (Kuratowski [22])** Un grafo es plano si y sólo si no tiene a  $K_{3,3}$  ni a  $K_5$  como subdivisión.

En 1937, Wagner [22] dio el siguiente resultado del Teorema de Kuratowski.

**Teorema 2.2.6 (Wagner [22])** Un grafo es plano si y sólo si no tiene a  $K_{3,3}$  ni a  $K_5$  como menor.

En la práctica, es difícil de utilizar el criterio de Kuratowski o Wagner para decidir rápidamente si un grafo dado es plano. Sin embargo, existen algoritmos rápidos para este problema *i. e.*, para un grafo, es posible determinar en tiempo lineal si es o no es plano (ver [41]).

Concluimos esta sección con un lema y el Teorema de Hall [38] que, nos será útil más adelante.

**Lema 2.2.7 ([22])** Si el grafo  $H$  es un menor del grafo  $G$  tal que  $d(v) \leq 3$  entonces  $G$  tiene a  $H$  como subdivisión.

**Teorema 2.2.8 (Hall [38])** Si  $G$  es un grafo no plano, 3-conexo con al menos seis vértices, entonces  $G$  tiene a  $K_{3,3}$  como menor.



### 2.3 OPERACIONES $\Delta \leftrightarrow Y$ Y REDUCIBILIDAD

Unas de las reducciones más importantes en teoría de grafos son las reducciones *serie-paralelo*. Las cuatro reducciones son:

**Reducción de arista colgante (RAC):** Cuando a  $G$  le borramos una arista colgante.  
**Reducción en serie (RS):** Cuando a  $G$  le contraemos una arista en serie.



**Reducción en paralelo (RP):** Cuando a  $G$  le borramos una arista paralela.  
**Reducción de lazo (RL):** Cuando a  $G$  le borramos un lazo.



Cada una de estas reducciones disminuye el número de aristas en un grafo. Un grafo conexo es *serie-paralelo reducible* si puede ser reducido a un sólo vértice por una secuencia de estas operaciones. Algunos autores no permiten reducciones de arista colgante ni de lazo en sus reducciones de serie-paralelo. Estas restricciones cambian la clase de grafos serie-paralelo reducibles, pero las dos clases son equivalentes si el grafo es simple, 2-conexo, ésta última es cerrada bajo menores y su menor prohibido es  $K_4$  [22].

A las siguientes operaciones les llamamos **transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$** :

**Transformación  $Y \rightarrow \Delta$  ( $Y\Delta$ ):** Sea  $v$  un vértice de grado tres en  $G$ , asumamos que no hay lazos ni aristas paralelas incidentes a  $v$ . Construimos  $G'$  al agregar a  $G \setminus v$  tres nuevas aristas que formen un ciclo con los vecinos de  $v$ . Así, los vecinos forman un triángulo de  $G'$ . Entonces decimos que,  $G'$  es obtenido de  $G$  por una **transformación  $Y \rightarrow \Delta$**  (ver Figura 2.1a).

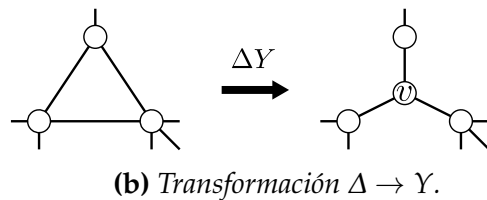
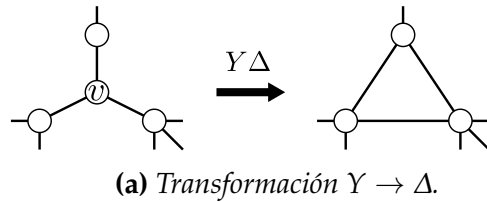


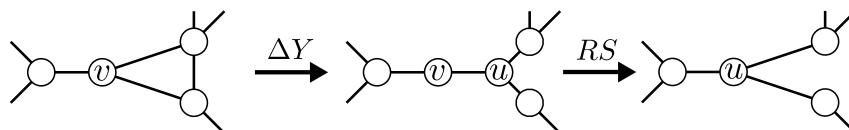
Figura 2.1: Transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$

**Transformación  $\Delta \rightarrow Y$  ( $\Delta Y$ )** : Sea  $\Delta$  un triángulo en  $G$ . Construimos  $G'$  agregando un vértice  $v$  a  $G \setminus E(\Delta)$  y haciéndolo adyacente a los vértices de  $\Delta$ . Entonces decimos que,  $G'$  es obtenido de  $G$  por una **transformación  $\Delta \rightarrow Y$**  (ver Figura 2.1b).

Entenderemos como **operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$**  a las reducciones serie-paralelo junto con las transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ .

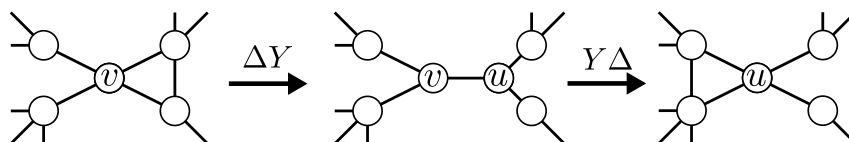
Truemper [80] introdujo las operaciones  $OP1$  y  $OP2$  consecuencia de las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , que son útiles para reducir grafos.

La  **$OP1$**  es el borrado de una arista opuesta a un vértice  $v$  de grado tres ( $v$  no es incidente a aristas paralelas ni a lazos y pertenece a un triángulo  $\Delta$ ). Para esto se aplica una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  a  $\Delta$  seguida de una reducción en serie sobre  $v$  (ver Figura 2.2). A  $v$  le llamamos **centro**.



**Figura 2.2:**  $OP1$  de Truemper

La  **$OP2$**  consiste de mover una arista a través de un vértice  $v$  de grado cuatro ( $v$  no es incidente a aristas paralelas ni a lazos y pertenece a un triángulo  $\Delta$ ). Primero se aplica una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  a  $\Delta$  seguida de una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $v$  (ver Figura 2.3). A  $v$  le llamamos **centro**.



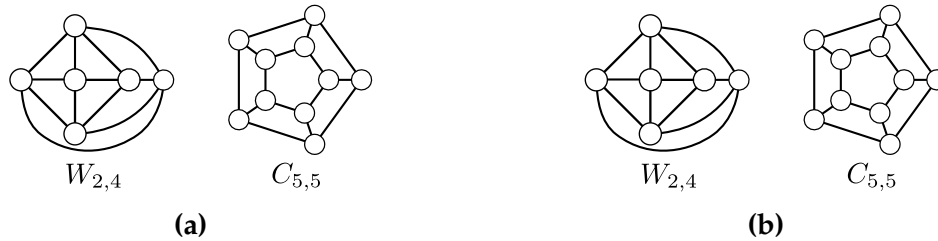
**Figura 2.3:**  $OP2$  de Truemper

De forma abreviada escribimos  $OP1 = \Delta Y + RS$  y  $OP2 = \Delta Y + Y\Delta$ . Al aplicar las operaciones de Truemper el centro de  $OP1$  y  $OP2$  se cambia por otro vértice. En general omitiremos este cambio de vértice, es decir el nuevo vértice se llamará igual que el centro de la operación aplicada, esto es para facilitar la exposición.

Sean  $G$  y  $H$  dos grafos conexos.  $G$  es  **$\Delta Y$  equivalente** a  $H$ , si  $H$  es obtenida de  $G$  mediante transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ .  $G$  es  **$\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a un grafo  $H$**  si existe una secuencia de grafos, iniciando en  $G$  y terminando en  $H$ , tal que cada grafo, diferente de  $G$ , es obtenido de su predecesor por una operación  $\Delta \leftrightarrow Y$ ; tal secuencia se llama **secuencia de reducciones**. Si  $H$  es sólo un vértice, decimos que  $G$  es  **$\Delta \leftrightarrow Y$  reducible** o **reducible**; y si  $G$  no es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible diremos que es  **$\Delta \leftrightarrow Y$  irreducible** o **irreducible**. En el caso de que  $G$  sea desconexo,  $G$  será reducible si cada componente conexa es reducible.

Akers (1960) [1] y Lehman (1963) [54] conjeturaron que cualquier grafo plano se puede reducir; Epifanov (1966) [25] probó esta conjetura; una prueba simple fue dada por Feo [27] (1985), Truemper [80] (1989), Feo y Provan [26] (1993), y Nakahara y Takahashi [61] (1996).

En 1990, Colbourn y El-Mallah [24] definen un grafo  $\Delta \rightarrow Y$  *reducible* si se puede reducir a una arista con casi todas las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  excepto la transformación  $Y \rightarrow \Delta$ , y es  $Y \rightarrow \Delta$  *reducible* si en lugar de usar la transformación  $\Delta \rightarrow Y$  usamos la transformación  $Y \rightarrow \Delta$ . Los autores encontraron una caracterización por menores prohibidos:  $W_{2,4}$ ,  $W_{2,5}$ ,  $C_{5,5}$  y  $C_{4,4}$  que se ilustran en la Figura 2.4.



**Figura 2.4:** a) Menores prohibidos de grafos  $Y \rightarrow \Delta$  reducibles.  
b) Menores prohibidos de grafos  $\Delta \rightarrow Y$  reducibles

**Teorema 2.3.1 (Colbourn y El-Mallah [24])** Un grafo plano y conexo es  $Y \rightarrow \Delta$  reducible si y sólo si no tiene a  $W_{2,4}$  o  $C_{5,5}$  como menor.

El dual del teorema anterior es:

**Teorema 2.3.2 (Colbourn y El-Mallah [24])** Un grafo plano y conexo es  $\Delta \rightarrow Y$  reducible si y sólo si no tiene a  $W_{2,5}$  o  $C_{4,4}$  como menor.

Notemos que  $K_5$  no es  $Y \rightarrow \Delta$  reducible, ya que es 4-regular. Además  $K_5$  no tiene a  $W_{2,4}$  ni a  $C_{5,5}$  como menor, pues tiene cinco vértices. Por lo tanto, esta caracterización no se cumple para grafos no planos.

El siguiente teorema junto con la  $\Delta Y$  equivalencia, entre grafos, exhibe una familia de grafos menores minimales  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducibles.

**Teorema 2.3.3 (Warkentyne [88], 1988)**  $K_6$  es menor minimal  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducible.

**Corolario 2.3.4** Cualquier grafo  $\Delta Y$  equivalente a  $K_6$  es menor minimal  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducible.

A la familia formada por los grafos del corolario anterior se le llama *familia de Petersen*, ya que el grafo de Petersen está en la familia (ver Figura 2.5).

La siguiente definición nos será útil en varias demostraciones.

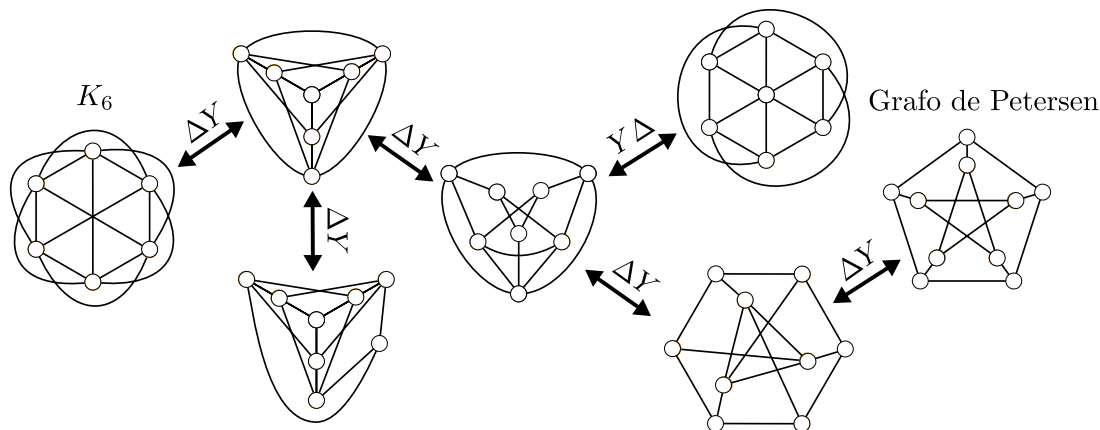


Figura 2.5: La familia de Petersen

**Definición 2.3.1** Sea  $M$  un menor de un grafo  $G$ , podemos particionar las aristas de  $G$  en tres conjuntos, dependiendo de su uso cuando formamos a  $M$ , de la siguiente forma:  $D$  es el conjunto de aristas borradas,  $C$  es el conjunto de aristas contraídas, y  $R$  es el conjunto de las aristas correspondientes a las de  $M$ . A esta partición la llamamos *partición de  $G$  por  $M$* .

Truemper [80] (1989) mostró que la familia de grafos reducibles es cerrada bajo menores. Gitler [30] y luego Archdeacon, Colbourn, Gitler y Provan [3] dieron explícitamente la secuencia de reducción para un menor, que desarrollaremos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.5 ( $\Delta \leftrightarrow Y$ -menor, Archdeacon et al. [3], Gitler [30])** Supongamos que  $H$  es menor de  $G$ . Si  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible, entonces  $H$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Demostración.** Supongamos que  $H$  es menor de  $G$ ; y  $G'$  es obtenida a partir de  $G$  mediante una operación  $\Delta \leftrightarrow Y$  que denotaremos como  $OP$ . Si encontramos un menor  $H'$  de  $G'$  tal que  $H$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a  $H'$  entonces, el resultado se sigue aplicando inducción sobre el número de operaciones que reducen a  $G$ .

Para esto usaremos la operación  $OP$  y los grafos  $G$  y  $H$ . Tomemos la partición  $\{D, C, R\}$  de  $G$  por  $H$  (ver Figura 2.6), donde  $D$  son las líneas punteadas,  $C$  son las líneas con dos flechas y  $R$  son líneas continuas.

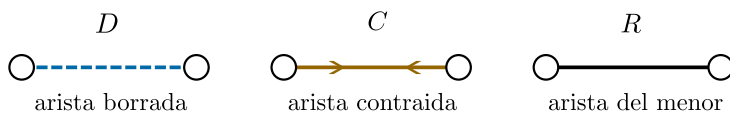


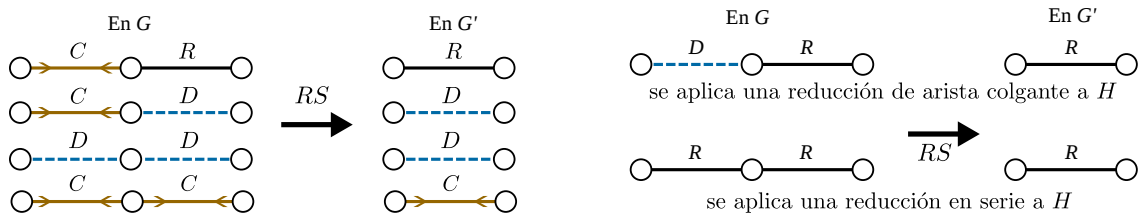
Figura 2.6: Tipos de aristas en  $G$

Si  $OP$  es una reducción de lazo de una arista en  $C$  o  $D$ , entonces  $H' = H$ . Si la arista

está en  $R$ , entonces  $H'$  es formada por reducción de lazo sobre  $H$ .

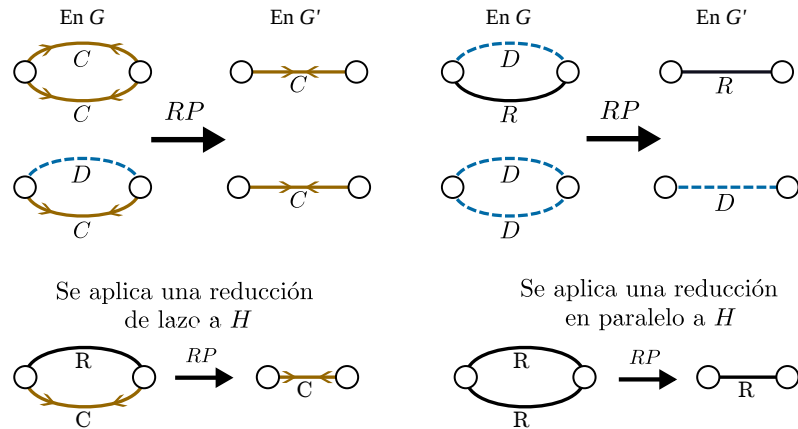
Similarmente, si  $OP$  es una reducción de arista colgante sobre una arista en  $D$  o  $C$ , entonces  $H' = H$ . Si la arista está en  $R$ , entonces formamos  $H'$  aplicando una reducción de arista colgante a  $H$ .

Si  $OP$  es una reducción en serie y alguna de las aristas en serie está en  $C$  o si las dos están en  $D$ , entonces  $H' = H$ . Para los casos restantes formamos a  $H'$  aplicando una reducción en serie o de arista colgante en  $H$  (ver Figura 2.7).



**Figura 2.7:**  $OP$  es reducción en serie

Si  $OP$  es una reducción en paralelo con al menos una arista en  $D$ , entonces  $H' = H$ , y en los casos restantes, se aplica una reducción en paralelo o de lazo a  $H$  para formar  $H'$  (ver Figura 2.8).



**Figura 2.8:**  $OP$  es reducción en paralelo

Si  $OP$  es una transformación  $\Delta \rightarrow Y$ , y cualquier arista del triángulo  $\Delta$  está en  $D$ , entonces  $H' = H$  (ver Figura 2.9). Ahora, si dos aristas de  $\Delta$  están en  $C$  y una en  $R$ , entonces  $\Delta$  crea un vértice simple con un lazo en  $H$ . Así  $H'$  se obtiene de quitar ese lazo de  $H$ . Por último, si una o ninguna de las aristas de  $\Delta$  está en  $C$  y las otras están en  $R$ , entonces  $H'$  se construye al aplicar una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  o una reducción en paralelo, respectivamente, a  $H$  (ver Figura 2.10).

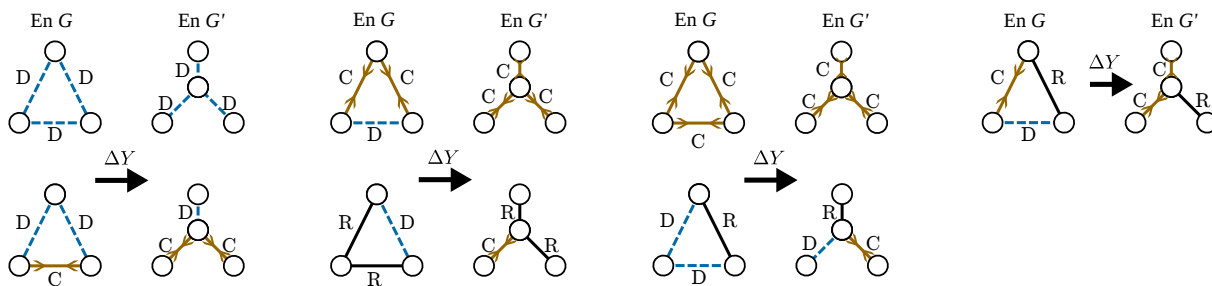


Figura 2.9:  $OP$  es transformación  $\Delta \rightarrow Y$

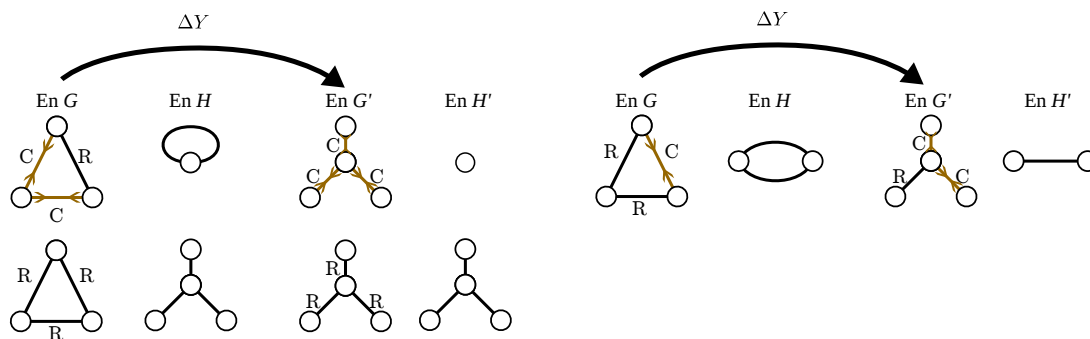


Figura 2.10:  $OP$  es transformación  $\Delta \rightarrow Y$ .

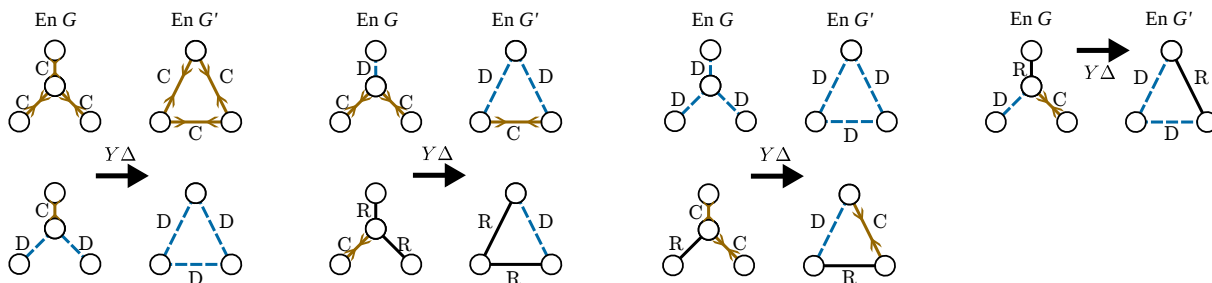
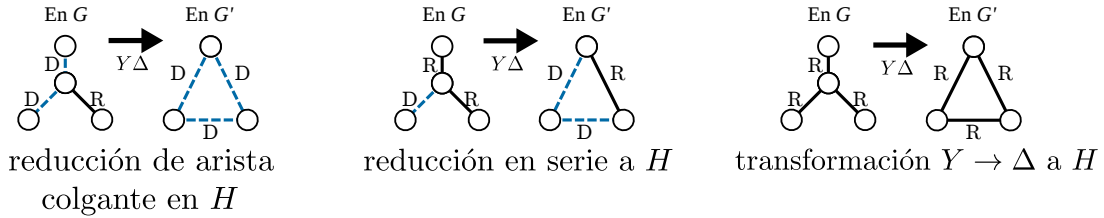


Figura 2.11:  $OP$  es transformación  $Y \rightarrow \Delta$ .

Finalmente, si  $OP$  es una transformación  $Y \rightarrow \Delta$ , y si cualquier arista en  $Y$  está en  $C$ , entonces  $H' = H$ . Lo mismo pasa si las tres aristas de  $Y$  están en  $D$  (ver Figura 2.11). Ahora, si exactamente dos o una arista de  $Y$  está en  $D$ , entonces el vértice central corresponde a un vértice de grado uno o grado dos de  $H$ . Construimos  $H'$  mediante una reducción de arista colgante o de serie, respectivamente, aplicada a  $H$ . Finalmente, si las tres aristas de  $Y$  están en  $R$ , entonces obtenemos a  $H'$  por la transformación  $Y \rightarrow \Delta$  aplicada a  $H$  (ver Figura 2.12).

En todos los casos,  $H'$  es un menor de  $G'$ , como se requería. Y el resultado se sigue por inducción sobre el número de operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  que reducen a  $G$ .



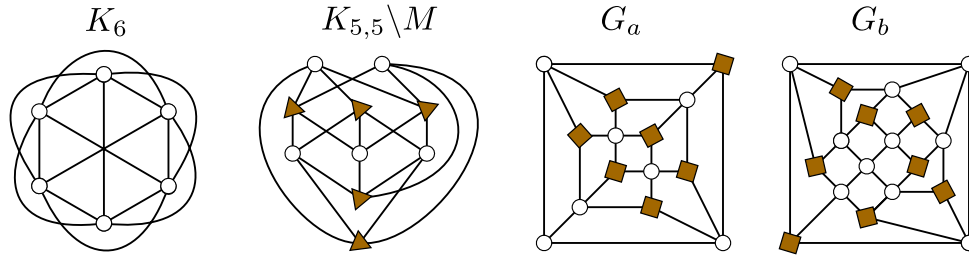


**Figura 2.12:**  $OP$  es transformación  $Y \rightarrow \Delta$ .

Yu [89] en 2004, mostró una inesperada cota de 57,587 menores prohibidos  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducibles. Dos años después, Yu [90] probó la sorprendente cota de al menos 68,897,913,659 menores prohibidos. Estos grafos se encuentran en 20 familias como se indica en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.6 (Yu [90])** Hay al menos 68,897,913,659 grafos menores minimales  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducibles que forman 20 familias de grafos  $\Delta \leftrightarrow Y$  equivalentes.

Los grafos  $K_6$ ,  $K_{5,5} \setminus M$  (donde  $M$  es un emparejamiento perfecto),  $G_a$  y  $G_b$  de la Figura 2.13 son menores minimales  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducibles; los grafos  $G_a$  y  $G_b$  son ápex, en la Figura 2.13 los vértices cuadrados son adyacentes al vértice ápex de cada grafo, que no se ha incluido en la Figura 2.13. El grafo  $K_6$  genera a la familia de Petersen; la familia  $\Delta Y$  equivalente al grafo  $G_a$  tiene 57,578 grafos. A diferencia de los grafos  $K_{5,5} \setminus M$  y  $G_b$  a los que no se les puede aplicar ninguna operación  $\Delta \leftrightarrow Y$ .



**Figura 2.13:** Grafos que usa Yu [90]. Los vértices triangulares representan una partición de  $K_{5,5}$  y  $M$  es un emparejamiento perfecto. Los grafos  $G_a$  y  $G_b$  son ápex, y los vértices cuadrados van a un vértice ápex que no está en la figura.

**Teorema 2.3.7 (Gitler [30] y Archdeacon, Colbourn, Gitler, Provan [3])** Si  $G$  es un grafo con número de cruce igual a uno, entonces es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

## 2.4 REDUCIBILIDAD CON VÉRTICES TERMINALES

Decimos que un vértice  $v$  es *terminal* si no se puede eliminar al aplicar las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , es decir, si  $v$  es un vértice terminal entonces no le podemos aplicar reducción de arista colgante, reducción en serie, ni transformación  $Y \rightarrow \Delta$ . Notemos que, las operaciones  $OP1$  y  $OP2$  no se pueden aplicar cuando su centro es un vértice terminal. Recordemos que, omitimos el cambio de vértice  $v$  al aplicar estas operaciones, esto es para facilitar la exposición.

Decimos que un grafo es *n-terminal* si tiene  $n$  vértices terminales, si además es reducible a un grafo  $H$  y  $H$  tiene a los  $n$  vértices terminales de  $G$ , decimos que es *n-terminal reducible a H*; en el caso de que  $H$  sólo tenga a los  $n$  vértices terminales de  $G$ , sólo decimos que  $G$  es *n-terminal reducible*.

Gitler [30] probó que la clase de grafos *n-terminal reducibles* es cerrada bajo menores. Una demostración más simple la podemos encontrar en [3].

**Definición 2.4.1** Sea  $G$  un grafo *n-terminal* y  $H$  un menor de  $G$ .  $H$  es *menor terminal* de  $G$  si al formar  $H$  no se contrae ninguna arista con extremos terminales. Así  $H$  también es *n-terminal*.

**Teorema 2.4.1 (Gitler [30], Archdeacon et al. [3])** Sea  $H$  menor-terminal de  $G$ . Si  $G$  es *n-terminal reducible* entonces  $H$  también lo es.

Es natural preguntarse si todo grafo reducible es 1-terminal reducible. Ahora damos dos ejemplos de grafos  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles pero no 1-terminal reducibles.

**Ejemplo 2.4.1** Tomemos al grafo menor minimal  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducible  $G_b$  que dio Yu [90] (ver Figura 2.13). Recordemos que  $G_b$  es ápex, sea  $e$  una arista de  $G_b$  con un extremo en el vértice ápex, entonces  $G_b \setminus e$  es reducible. Además, no tiene triángulos y sólo un vértice  $v$  tiene grado tres, los demás tienen grado al menos cuatro. Si tomamos como terminal a  $v$  entonces  $G_b \setminus e$  es irreducible ya que no se le puede aplicar ninguna operación. Por lo tanto  $G_b \setminus e$  sí es reducible pero no es 1-terminal reducible.

**Ejemplo 2.4.2** Recordemos que  $G_a$  (ver Figura 2.14a) es un grafo menor minimal irreducible [90]. Usando a  $G_a$  y los vértices  $d$  e  $i$ , que se muestran en la Figura 2.14a, y el vértice ápex  $j$  de  $G_a$ , construimos el grafo  $G'_a = (G_a \cup \{dg, ig\}) \setminus ij$  donde  $g$  no es un vértice de  $G_a$  (ver Figura 2.14b). Resulta que  $G'_a$  es reducible y no es 1-terminal reducible al tomar  $g$  como terminal. Sea  $G''_a$  el grafo obtenido al aplicar la reducción en serie a  $G'_a$ , cabe notar que  $G_a$  y  $G''_a$  tienen la misma cantidad de vértices y aristas y que ambas son ápex, sin embargo  $G''_a$  sí es reducible.



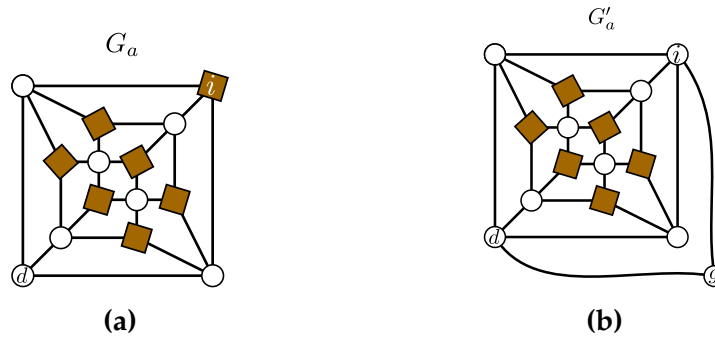


Figura 2.14

### 2.4.1 REDUCIBILIDAD DE GRAFOS PLANOS CON TERMINALES

Akers [1] (1960) conjeturó que los grafos planos son 2- y 3- terminal reducibles; Epifanov [25] (1966) demostró en positivo esta conjetura para grafos planos con 2-terminales; pruebas constructivas simples fueron dadas por Feo [27] (1985), Truemper [80, 82] (1989), Feo y Provan [26] (1993), y Nakahara y Takahashi [61] (1996). Treinta años después de que Akers formulara su conjetura, Gitler [30] mostró que es cierta para grafos planos con 3-terminales.

**Teorema 2.4.2 (Feo y Provan [26], Truemper [80])** Todo grafo plano, conexo es 2-terminal reducible a una arista.

**Teorema 2.4.3 (Gitler [30])** Un grafo plano 2-conexo con  $k$ -terminales adyacentes a una misma cara, es  $k$ -terminal reducible al grafo  $I_k$  que se muestra en la Figura 2.15.

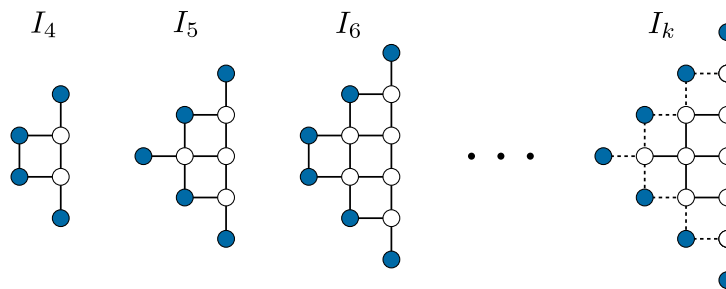


Figura 2.15: La sucesión de los grafos  $I_k$  donde los vértices en gris son terminales.

**Teorema 2.4.4 (Archdeacon et al. [3], Gitler [30])** Sea  $G$  un grafo plano con 4-terminales de los cuales al menos tres adyacentes a una misma cara. Entonces  $G$  es 4-terminal reducible.

**Teorema 2.4.5 (Gitler [30]; Gitler y Sagols [33])** Si  $G$  es un grafo plano, conexo y 3-terminal, entonces  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a un subgrafo conexo de  $K_3$ .

**Definición 2.4.2** Sea  $G$  un grafo y,  $t_1, t_2, t_3$  y  $t_4$  cuatro de sus vértices. Por un *menor  $K_{2,4}$  anclado* nos referimos a la colección de seis subgrafos conexos disjuntos a pares  $T_1, T_2, T_3, T_4$  y  $S_1, S_2$  de  $G$  tales que  $t_i$  es vértice de  $T_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $T_i$  es adyacente a  $S_1$  y  $S_2$ ; es decir, el menor  $H$  está anclado a los vértices  $t_1, t_2, t_3$  y  $t_4$ .

**Teorema 2.4.6 (Demasi y Mohar [20])** Sea  $G$  un grafo plano, 3-conexo con 4-terminales. Entonces  $G$  es 4-terminal reducible si y sólo si no tiene un menor  $K_{2,4}$  anclado a los terminales.

En 1993, Feo y Provan [26] dan un algoritmo de tiempo cuadrático para reducir un grafo con dos terminales. Gitler y Sagols [33] también dan un algoritmo ahora para grafos con 3-terminales. Demasi y Mohar [20] presentan un algoritmo que reduce un grafo plano con 4-terminales o bien regresa una obstrucción a la reducción.

## APLICACIONES DE LAS OPERACIONES

$$\Delta \leftrightarrow Y$$

---

En general las aplicaciones requieren de un grafo con pesos y una regla para cada operación  $\Delta \leftrightarrow Y$ , que defina los pesos del grafo resultante. Los pesos del grafo pueden representar números, funciones, elementos de un álgebra, probabilidades, longitudes, resistencias eléctricas, etc.

El uso en redes eléctricas se remonta a finales del siglo *XIX*, por ejemplo, el trabajo de Kennelly [50]; su trabajo dio la respuesta definitiva a si es mejor tener las tres resistencias en una red dispuesta como una estrella de tres picos o como un triángulo.

Akers [1], en 1960, usó las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  en los problemas de camino más corto y flujo máximo (véase también Hobbs [40]). Lehman [54], en 1963, las utilizó para estimar la confiabilidad en redes.

En 1988, Frank y Lobb [28] hicieron un algoritmo que utiliza las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  para el cálculo de la conductancia de algunas mallas de resistencias aleatorias de dos dimensiones.

En el universo de los nudos y enlaces, Jones [48] (1989), introdujo la construcción de un invariante de enlaces basado en el concepto de modelo spin, de Mecánica Estadística. Y vía las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  dio un método de evaluación para la función de partición. Jones sólo estudió el caso simétrico; Kawagoe, Munemasa y Watatani [49] (1994) lo generalizaron quitando la condición de simetría; Eiichi Bannai y Etsuko Bannai [4] (1995) dieron otra generalización más, usando cuatro funciones en el modelo, que representan pesos.

En 1992, Jaeger [43] estudió la relación entre los modelos spin y esquemas de asociación (álgebras de Bose-Mesner). Los esquemas de asociación, una estructura de Combinatoria Algebraica, son importantes en varias áreas de la Combinatoria, por ejemplo, distancia regular de grafos, códigos, teoría de diseño, etc. En 1994, Jaeger [44] mostró que el cálculo de la función de partición se puede realizar mediante el uso de reducciones serie-paralelo del grafo adecuado junto con operaciones en el álgebra de Bose-Mesner; para el caso de grafos planos usó las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  pero restringió su atención a una clase especial de álgebras de Bose-Mesner que les llamó, exactamente triplemente regular. En 2004, Gitler y Lopéz [31, 32] generalizaron el resultado para grafos sin  $K_5$  o  $K_{3,3}$  como menores; extendieron las álgebras exactamente triplemente regular de Bose-Mesner y las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  para evaluar la función de partición de un mo-

delo spin topológico, extendiendo las transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  a las transformaciones  $\Delta_m \leftrightarrow Y_m$  que, transforma una estrella de  $m$  picos a un ciclo de longitud  $m$ .

Aldous [56] en 1992 conjeturó que, la brecha espectral (spectral gap) del proceso de intercambio en un grafo con pesos no dirigido es igual a la distancia espectral de la caminata al azar en este grafo. Dieker [21] (2009) dio una demostración de la conjetura para unos casos especiales; en particular utilizó las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  para demostrar la conjetura sobre varios grafos (grafos de tipo ruedas, todos los grafos con cuatro vértices, ciertos grafos no planos, algunos grafos con varios ciclos de longitud arbitraria). Caputo, Liggett y Richthammer [10] (2010) probaron la conjetura de Aldous, usando una estrategia recursiva basada en la reducción de una red eléctrica.

En 1993, Goldman y Kauffman [34] utilizaron las operaciones en el estudio de invariantes para enlaces. En el mismo año, Feo y Provan [26] dan un algoritmo de tiempo cuadrático para reducir un grafo plano con dos terminales. Tres años después Chari, Feo y Provan [12] utilizan las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  para la mejora de la heurística de un problema para la fiabilidad en redes planas con dos terminales.

Colbourn, Provan y Vertigan [13] (1995), con ayuda de estas operaciones y una función de partición, contaron los árboles generadores y emparejamientos perfectos de un grafo, además calcularon la energía del modelo de Ising (modelo combinatorio clásico en física estadística). Teufl y Wagner [77], en el 2010, con ideas similares a Colbourn, Provan y Vertigan, contaron árboles generadores de varias mallas.

Un problema interesante en el que también se usan las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , es el problema inverso para redes eléctricas [16]: supongamos que una red eléctrica se encuentra dentro de una caja negra. El interior de la caja consta de nodos unidos por conductores. Los nodos son los vértices, y los conductores son las aristas de un grafo  $G$ . El problema inverso consiste en encontrar la conductancia de cada arista en  $G$  a partir de mediciones de tensiones y corrientes en los nodos frontera. Éste lo estudiaron en detalle: Verdière, Gitler y Vertigan [17] [18], utilizando la medial de un grafo y las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , entre 1994 y 1996; por otro lado Curtis, Ingerman y Morrow [14, 15, 16], utilizando métodos algebraicos, entre 1994 y 2000; vea también Kenyon [51]. Lam y Pylyavskyy [53] (2012) generalizaron el problema a redes eléctricas cilíndricas. Otros resultados al respecto son: [2, 47, 76].

En Robótica, Staffetti y Thomas [72] (2002) extendieron su propio método ([73]) del análisis kinestatic de manipuladores en serie y paralelo, introduciendo las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  al grafo de restricciones cinemáticas del manipulador, permitiéndoles el análisis de las configuraciones que no se pueden llevar a cabo sólo con reducciones en serie y paralelo. Cabe mencionar que también usaron el formalismo del álgebra de Grassmann-Cayley.

Usando las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , Loh y Carlson [57], en 2006, presentaron un algoritmo eficiente para calcular las propiedades del modelo de Ising en dos dimensiones, situado en la base de spin, sin la necesidad de mapeo a los modelos de fermiones (fermion) o dímero (dimer). Un año después, Loh, Carlson y Tan [58], extendieron el algoritmo para, calcular directamente las funciones termodinámicas aplicando el algoritmo a los derivados de la función de partición, obteniendo expresiones explícitas para esta transformación, nuevamente usando estas operaciones y una generalización de las transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , llamadas transformaciones estrella-malla, que transforman una estrella a un grafo completo formado por los picos de la estrella y quitando el centro de la estrella. Esta transformación es diferente a la usada por Gitler y Lopéz [32].

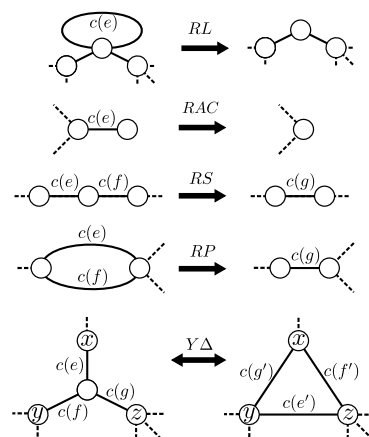
Zohar y Geiger [92], en 2007, trabajaron con el problema de estimación de flujo más probable (MPFE), y utilizan las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  en un algoritmo llamado  $\Delta Y$ -MPFE para resolver el problema MPFE.

Más aplicaciones se pueden encontrar en: [70, 78, 79, 35].

A manera de ejemplo describimos, una serie de problemas combinatorios donde se emplean las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ . Para tal fin, al conjunto de aristas de un grafo  $G$  le asociamos una función real  $c$ . Así, para cada arista  $e$ , el número real  $c(e)$  es el *peso* de la arista y decimos que  $G$  es un **grafo con pesos**. Cada aplicación contará con la explicación del problema y el conjunto de ecuaciones relacionadas con los pesos y la operación  $\Delta \leftrightarrow Y$  (ver Figura 3.1).

Debería ser claro que la secuencia de reducciones de un grafo no es única, *i. e.* hay muchas maneras en que podemos reducir un grafo mediante estas operaciones. No importa qué secuencia de operacioneselijamos, el resultado final será el mismo.

Los ejemplos: árboles generadores, el modelo de Ising y emparejamientos perfectos, fueron hechos por Colbourn, Provan y Vertigan [13].



**Figura 3.1:** Pesos para las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ .

### 3.1 ÁRBOLES GENERADORES

En esta sección desarrollamos un método para contar los árboles generadores de un grafo usando operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ . Este número puede calcularse de varias maneras, una es usando el teorema de Kirchhoff, que se reduce a calcular un cofactor de la matriz Laplaciano del grafo [52, 71], y otro es usando el polinomio de Tutte [7].

De hecho, resolveremos un problema más general. Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Para cada arista  $e$  de  $G$  asociamos dos pesos reales positivos  $i(e)$  y  $o(e)$ , los llamamos pesos de *inclusión* y *exclusión* de la arista  $e$ , respectivamente. Para cualquier árbol  $T$  de  $G$ , definimos el *peso* de  $T$  como  $\prod_{e \in E(T)} i(e) \prod_{e \in E \setminus E(T)} o(e)$ . Entonces, el *peso total* del grafo está dado por:

$$W = \sum_T \prod_{e \in E(T)} i(e) \prod_{e \in E \setminus E(T)} o(e),$$

donde la suma se toma sobre todos los árboles generadores de  $G$ . Cuando todos los pesos de inclusión y exclusión son iguales a uno, el peso total de  $G$  es igual al número de árboles generadores de  $G$ .

Observemos que:

$$W = \sum_T \prod_{e \in E(T)} \frac{i(e)}{o(e)} \prod_{e \in E} o(e) = \prod_{e \in E} o(e) \sum_T \prod_{e \in E(T)} \frac{i(e)}{o(e)}.$$

Así podemos suponer que el peso de exclusión es igual a uno y el peso de inclusión es  $w(e) = i(e)/o(e)$ , y para mantener el mismo peso sólo hay que multiplicar por el factor  $\prod_{e \in E} o(e)$ , que le llamaremos *escala general*.

A continuación veremos cómo los pesos de las aristas son actualizados después de aplicar cada una de las seis operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ :

Sea  $G$  el grafo con peso  $w$  y escala general  $d$ , y sea  $G'$  el grafo con peso  $w'$  y escala general  $d'$ , resultante de aplicar alguna operación  $\Delta \leftrightarrow Y$  a  $G$ .

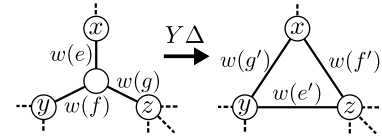
Si la operación es una reducción de lazo, entonces  $d' = d$  y los pesos quedan igual.

Si la operación es una reducción de arista colgante  $e$ , entonces  $d' = w(e)d$  y los pesos quedan igual.

Si la operación es una reducción en paralelo de las aristas  $e$  y  $f$ , en  $G$ , a la arista  $g$  en  $G'$ , entonces  $d' = d$ ,  $w'(g) = w(e) + w(f)$  y los pesos restantes quedan igual.

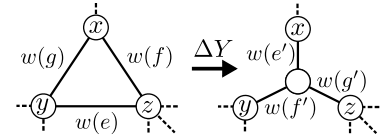
Si la operación es una reducción en serie de las aristas  $e$  y  $f$ , en  $G$ , a la arista  $g$  en  $G'$ , entonces  $d' = (w(e) + w(f))d$ ,  $w'(g) = w(e)w(f)/(w(e) + w(f))$  y los pesos restantes quedan igual.

Si la operación es una transformación  $Y \rightarrow \Delta$ , de las aristas  $e, f$  y  $g$ , que forman una  $Y$  en  $G$ , a las aristas  $e', f'$  y  $g'$  en  $G'$ , que forman un triángulo ( $\Delta$ ) en  $G'$ , entonces:



$$\begin{pmatrix} w'(e') \\ w'(f') \\ w'(g') \end{pmatrix} = \frac{w(e)w(f)w(g)}{w(e) + w(f) + w(g)} \begin{pmatrix} 1/w(e) \\ 1/w(f) \\ 1/w(g) \end{pmatrix}, \text{ y } d' = d(w(e) + w(f) + w(g)). \quad (3.1)$$

Si la operación es una transformación  $\Delta \rightarrow Y$ , del triángulo ( $\Delta$ ) formado por las aristas  $e, f$  y  $g$  en  $G$  a la  $Y$  en  $G'$  formada por las aristas  $e', f'$  y  $g'$ , entonces:

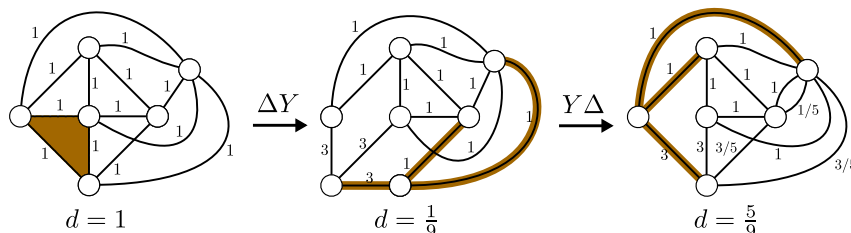


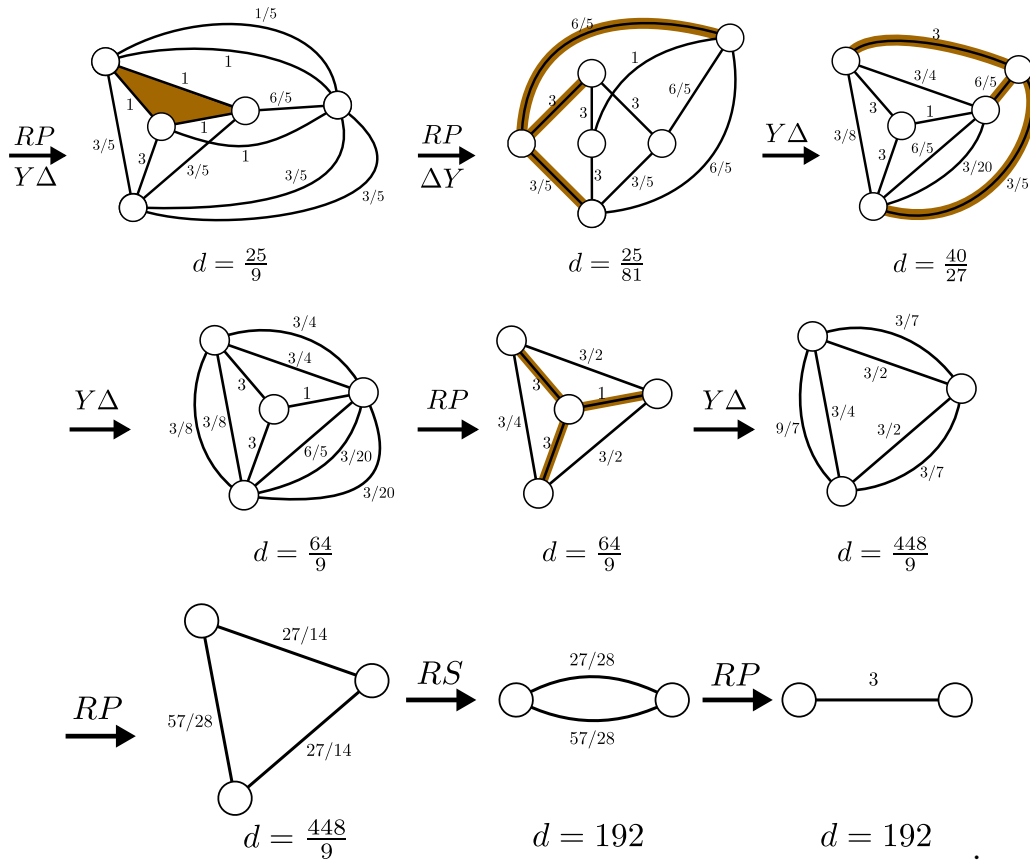
$$\begin{pmatrix} w'(e') \\ w'(f') \\ w'(g') \end{pmatrix} = (w(e)w(f) + w(e)w(g) + w(f)w(g)) \begin{pmatrix} 1/w(e) \\ 1/w(f) \\ 1/w(g) \end{pmatrix},$$

$$\text{y } d' = \frac{d}{(w(e)w(f) + w(e)w(g) + w(f)w(g))(1/w(e) + 1/w(f) + 1/w(g))}.$$

Si tenemos una familia de grafos  $\mathcal{F}$ , con un algoritmo que  $\Delta \leftrightarrow Y$  reduzca cualquier grafo con  $n$  vértices de  $\mathcal{F}$  en una sola arista en a lo más  $f(n)$  transformaciones, obtenemos un algoritmo que usa  $O(f(n))$  operaciones aritméticas para contar los árboles generadores de un grafo en la familia. Por ejemplo, utilizando el algoritmo de Feo y Provan [26] podemos contar los árboles generadores de grafos planos usando  $O(n^2)$  operaciones aritméticas. Este algoritmo está estrechamente relacionado con el método estándar para el cálculo de la resistencia de una red eléctrica usando operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  [8, 26].

**Ejemplo 3.1.1** Ahora veamos un ejemplo de cómo calcular la cantidad de árboles generadores de un grafo, en particular este grafo no es plano:





Por lo tanto, este grafo tiene 576 árboles generadores.

### 3.2 LÍMITE TERMODINÁMICO EN ALGUNAS MALLAS

En esta sección resumimos cómo Teufl y Wagner usaron las operaciones  $Y \leftrightarrow \Delta$  para calcular el límite termodinámico de algunas mallas [77].

Sea  $\mathcal{L}$  una malla, si  $G$  es un grafo que se puede encajar en  $\mathcal{L}$ , decimos que  $G$  es una *sección finita* de  $\mathcal{L}$ . Sea  $G$  un grafo con peso  $c$  y escala general  $d$ , denotamos como:

$$W(G, c, d) = d \sum_T \prod_{e \in E(T)} c(e)$$

al peso total de  $G$ , la suma es sobre todos los árboles generadores  $T$  de  $G$ . Si  $c$  es constante igual a uno, y  $d$  también es uno entonces, sólo escribimos  $W(G)$ . Recordemos que  $W(G)$  es la cantidad de árboles generadores de  $G$ . Resulta que  $W(G)$  tiene un



crecimiento exponencial asintóticamente, sea  $z_{\mathcal{L}}$  el resultado del límite:

$$z_{\mathcal{L}} = \lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{\log(W(G))}{|V(G)|}.$$

Este límite se conoce como *masa*, o el *límite termodinámico*. A continuación, un resultado que nos ayudará a calcular  $z_{\mathcal{L}}$ .

**Teorema 3.2.1** Sean  $f$  y  $g$  dos pesos y  $d$  escala general de un grafo  $G$ . Supongamos que existe un subconjunto  $F$  de aristas de  $G$ , tal que  $f(e) = g(e)$  para toda arista que no esté en  $F$  y  $0 < g(e)/f(e) < +\infty$  para toda aristas  $e$ . Sea

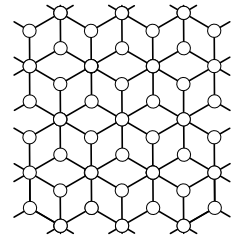
$$m = \min \left\{ \frac{g(e)}{f(e)} \mid e \in E(G) \right\} \quad \text{y} \quad M = \max \left\{ \frac{g(e)}{f(e)} \mid e \in E(G) \right\},$$

entonces,

$$\min\{m, 1\}^k W(G, f, d) \geq W(G, g, d) \geq \max\{M, 1\}^k W(G, f, d),$$

donde  $k = \min\{|F|, |V(G)| - 1\}$ .

Ahora calculemos el límite termodinámico de una malla muy particular llamada *malla cúbica*  $\mathcal{L}_{cub}$  (ver Figura 3.2). Primero tomemos una sección  $G$  triangular de la malla cúbica  $\mathcal{L}_{cub}$ , como en la Figura 3.3 (a). Supongamos que  $G$  tiene peso  $w$  igual a uno para cada arista, y escala general  $d$  también uno. Las reglas que usaremos para saber como cambian los pesos de las aristas son las mismas que se usaron en la sección anterior.

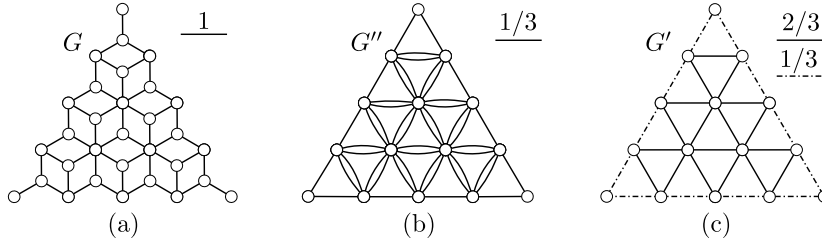


**Figura 3.2:** Malla cúbica.

Construimos a  $G'$ , con su peso  $w'$  y escala general  $d'$ , al aplicar transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  a cada vértice de grado tres de  $G$ , y  $G''$ , con su peso  $w''$  y escala general  $d''$ , se obtiene al aplicar todas las posibles reducciones en paralelo a  $G'$ . Además,  $G''$  es una sección triangular de la malla triangular  $\mathcal{L}_{tria}$ , con pesos  $1/3$  para las aristas punteadas y  $2/3$  para las aristas negras en la Figura 3.3 (c).

Sea  $k$  el número de aristas en cada lado del triángulo exterior de  $G''$ , y por el Teorema 3.2.1:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} W\left(G'', \frac{2}{3}, 1\right) \leq W(G'', w'', 1) \leq W\left(G'', \frac{2}{3}, 1\right), \quad (3.2)$$



**Figura 3.3:** Reducción de una sección de la malla en cubitos.

donde  $W(G'', 2/3, 1)$  es el peso total de  $G''$  cuando todas las aristas tienen el mismo peso  $2/3$  y escala general uno. Es claro que:

$$W\left(G'', \frac{2}{3}, 1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{|V(G'')|-1} W(G'').$$

Para construir  $G'$  se utilizaron  $k^2$  transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  por lo tanto  $d' = 3^{k^2} d$  y como la reducción en paralelo no cambia la escala general y  $d = 1$  tenemos:

$$W(G) = W(G'', w'', d'') = 3^{k^2} W(G'', w'', 1).$$

Con estos resultados tenemos:

$$z_{cub} = \lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{\log(3^{k^2} W(G'', w'', 1))}{|V(G)|} = \lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{k^2 \log 3 + \log W(G'', w'', 1)}{|V(G)|},$$

y por la desigualdad (3.2):

$$\lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{k^2 \log 3 + \log \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} W\left(G'', \frac{2}{3}, 1\right) \right)}{|V(G)|} \leq z_{cub}, \quad (3.3)$$

$$z_{cub} \leq \lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{k^2 \log 3 + \log W\left(G'', \frac{2}{3}, 1\right)}{|V(G)|}, \quad (3.4)$$

Desarrollando la desigualdad 3.3 obtenemos:

$$\lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{k^2 \log 3 + 3k \log \frac{1}{2} + \log \left( \left(\frac{2}{3}\right)^{|V(G'')|-1} W(G'') \right)}{|V(G)|} \leq z_{cub},$$

$$\lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{k^2 \log 3 + 3k \log \frac{1}{2} + (|V(G'')| - 1) \log \frac{2}{3} + \log W(G'')}{|V(G)|} \leq z_{cub},$$

$$\lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{k^2 \log 3 + 3k \log \frac{1}{2} + (|V(G'')| - 1) \log \frac{2}{3} + \log W(G'')}{|V(G)|} \leq z_{cub},$$

$$\lim_{|V(G)| \rightarrow \infty} \frac{|V(G'')|}{|V(G)|} \left( \frac{k^2 \log 3 + 3k \log \frac{1}{2} + (|V(G'')| - 1) \log \frac{2}{3} + \log W(G'')}{|V(G'')|} \right) \leq z_{cub}.$$

Como  $G$  tiene  $(3/2)k^2 + (3/2)k + 1$  vértices y  $G''$  tiene  $(1/2)k^2 + (3/2)k + 1$ :

$$\frac{1}{3} (z_{tria} + \log 6) \leq z_{cub}.$$

Usando la desigualdad 3.4 tenemos:

$$z_{cub} \leq \frac{1}{3} (z_{tria} + \log 6).$$

El valor de  $z_{tria}$  se puede encontrar en [69]:

$$z_{tria} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} \mp \dots \right) = 1,615329 \dots$$

Así podemos calcular el valor de  $z_{cub}$ . Este método se puede aplicar a diferentes mallas como lo hacen Teufl y Wagner en [77].

### 3.3 EL MODELO DE ISING

El modelo de Ising es un modelo combinatorio clásico en Física Estadística. Éste fue introducido por Lenz [55] e Ising [42]. La versión del modelo tratado aquí es el modelo “campo externo cero”.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, cada vértice puede estar en uno de dos *estados* diferentes, que denotamos por  $+1$  o  $-1$ . Supongamos que  $G$  tiene  $n$  vértices enumerados del 1 al  $n$ ; ahora elegimos un estado  $\sigma(i)$  para cada vértice  $i$  y nos queda un estado para el grafo  $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$  a éste le llamaremos *configuración*. Cada arista  $(i, j)$  del grafo tiene asociada una *energía*  $w(i, j)$ . La *energía del sistema* para  $G$  está dada por la *función de partición de Ising*:

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{(i,j) \in E} e^{-w(i,j) \sigma(i) \sigma(j)},$$

donde la suma es tomada sobre todas las configuraciones  $\sigma$  de  $G$ . Para grafos generales, el problema de calcular la función de partición de Ising ha demostrado ser NP-completo [5, 45, 46], aunque hay un algoritmo aleatorizado, que la aproxima en tiempo polinomial cuando todas las energías  $w(i, j)$  son no negativas [46].

Ahora calculamos la función de partición de Ising usando las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , para esto aplicamos una técnica similar al conteo de árboles generadores. Sea  $v_1(i, j) = e^{-w(i, j)}$  y  $v_2(i, j) = e^{w(i, j)}$  entonces, podemos escribir:

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{\{(i, j) \in E \mid \sigma(i) \neq \sigma(j)\}} v_1(i, j) \prod_{\{(i, j) \in E \mid \sigma(i) = \sigma(j)\}} v_2(i, j).$$

Sea  $X$  el subconjunto de vértices  $i$  tales que  $\sigma(i) = +1$ , así que  $\bar{X} = V \setminus X$  es el subconjunto de vértices  $i$  tales que  $\sigma(i) = -1$ . Definimos el *corte*  $(X, \bar{X})$  como el conjunto de aristas  $\{(i, j) \mid i \in X, j \in \bar{X}\}$ . Entonces la función de partición de Ising se puede escribir:

$$Z = \sum_{X \subset E} \prod_{e \in (X, \bar{X})} v_1(e) \prod_{e \in E \setminus (X, \bar{X})} v_2(e).$$

Podemos escalar  $Z$  con el factor de escala  $S = \prod_{e \in E} v_2(e)$ , usando un sólo peso normalizado  $w(e) = v_1(e)/v_2(e)$  para cada arista. Entonces la función de partición queda:

$$Z = S \sum_{X \subset E} \prod_{e \in (X, \bar{X})} w(e). \quad (3.5)$$

Ahora veremos cómo cambian los pesos y la escala al aplicar cada una de las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ . Para esto, sea  $G$  el grafo con peso  $w$  y escala  $d$  antes de aplicar la operación  $\Delta \leftrightarrow Y$ , y sea  $G'$  el grafo con peso  $w'$  y escala  $d'$  resultante de aplicar la operación.

Si la operación es una reducción de lazo, entonces no cambian ni los pesos ni la escala en  $G'$ .

Si la operación es una reducción de arista colgante  $e$ , entonces  $d' = (1 + w(e))d$  y los pesos no cambian.

Si la operación es una reducción en paralelo de las aristas  $e$  y  $f$  en  $G$ , por  $g$  en  $G'$ , entonces  $w(g) = w(e)w(f)$ ,  $d' = d$  y los demás pesos quedan igual.

Si la operación es una reducción en serie de las aristas  $e$  y  $f$  en  $G$ , por la arista  $g$  en  $G'$ , entonces  $w(g) = (w(e) + w(f))/(1 + w(e)w(f))$ ,  $d' = (1 + w(e)w(f))d$  y los pesos restantes quedan igual.

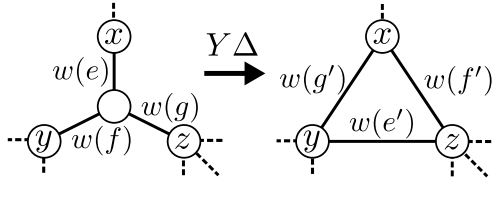
Si la operación es una transformación  $Y \rightarrow \Delta$ , de las aristas  $e, f$  y  $g$ , que forman una  $Y$  en  $G$ , y las aristas  $e', f'$  y  $g'$  en  $G'$ , que forman un triángulo ( $\Delta$ ) en  $G'$ . Para calcular los

pesos  $w'(e')$ ,  $w'(f')$  y  $w'(g')$  usaremos los valores auxiliares:

$$A = w(e) + w(f)w(g), \quad B = w(f) + w(e)w(g),$$

$$C = w(g) + w(e)w(f), \quad D = 1 + w(e)w(f)w(g),$$

ahora, con los valores auxiliares tenemos:



$$w'(e') = \sqrt{\frac{BC}{AD}}, \quad w'(f') = \sqrt{\frac{AC}{BD}},$$

$$w'(g') = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad \text{y } d' = dD.$$

Por último, para la transformación  $\Delta \rightarrow Y$ , del triángulo ( $\Delta$ ) formado por las aristas  $e$ ,  $f$  y  $g$  en  $G$ , a la  $Y$  en  $G'$  formada por las aristas  $e'$ ,  $f'$  y  $g'$ . También usaremos valores auxiliares:

$$\bar{A} = w(f)w(g) - w(e)w(g) - w(e)w(f) + 1,$$

$$\bar{B} = -w(f)w(g) + w(e)w(g) - w(e)w(f) + 1,$$

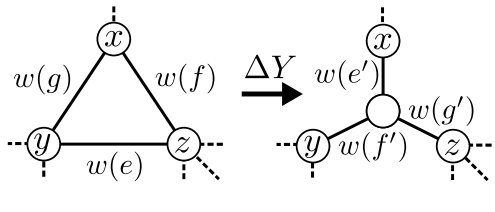
$$\bar{C} = -w(f)w(g) - w(e)w(g) + w(e)w(f) + 1,$$

$$\bar{D} = w(f)w(g) + w(e)w(g) + w(e)w(f) + 1,$$

con estos valores auxiliares generamos otros valores auxiliares:

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\bar{B}\bar{C}}{\bar{A}\bar{D}}}, \quad \hat{B} = \sqrt{\frac{\bar{A}\bar{C}}{\bar{B}\bar{D}}}, \quad \hat{C} = \sqrt{\frac{\bar{A}\bar{B}}{\bar{C}\bar{D}}}.$$

Ahora podemos calcular  $w'(e')$ ,  $w'(f')$  y  $w'(g')$ :



$$w'(e') = \frac{1 - \hat{A}}{1 + \hat{A}}, \quad w'(f') = \frac{1 - \hat{B}}{1 + \hat{B}},$$

$$w'(g') = \frac{1 - \hat{C}}{1 + \hat{C}},$$

y para calcular  $d$  usamos los valores de  $w'(e')$ ,  $w'(f')$  y  $w'(g')$ , así

$$d = \frac{d'}{(1 + w'(e')w'(f')w'(g'))}.$$

Notemos que para calcular la función de partición de Ising con este método, sólo utilizamos operaciones aritméticas básicas y raíces cuadradas. Del mismo modo que en la Sección 3.1, usando el algoritmo de Feo-Provan[26] calculamos la función de partición de Ising en  $O(n^2)$  operaciones aritméticas, para grafos planos.

### 3.4 EMPAREJAMIENTOS PERFECTOS

En esta sección nuestro objetivo es contar emparejamientos perfectos de un grafo, para esto supongamos que  $G$  es plano conexo y tiene una cantidad par de vértices y sólo vértices de grado impar (cuando  $G$  tiene vértices de grado par ver [13], páginas 127 y 128). Sea  $M$  un emparejamiento perfecto de  $G$  se sigue que el grafo  $G \setminus M$  es euleriano con  $k = |E(G)| - |V(G)|/2$  aristas, por lo tanto contar emparejamientos perfectos es equivalente a contar subgrafos eulerianos de  $G$ . Ahora sea  $G'$  un dual de  $G$ . Contar subgrafos eulerianos con  $k$  aristas es equivalente a contar cortes  $(X, \bar{X})$  en  $G'$  de cardinalidad  $k$ .

Para contar cortes de  $G'$ , usaremos una versión de la función de partición de Ising (3.5), con pesos  $w(e) = 2^m$ , donde  $m = |E(G)|$ , y escala  $S = 1$ . La función resulta ser:

$$Z = \sum_{X \subseteq E} \prod_{e \in (X, \bar{X})} 2^m = \sum_{X \subseteq E} 2^{|(X, \bar{X})|m}.$$

Los coeficientes de  $2^{im}$  son exactamente dos veces el número de cortes de cardinalidad  $i$  (porque se cuenta  $(X, \bar{X})$  y  $(\bar{X}, X)$ ). Como el número de cortes de cada cardinalidad no excede  $2^m$ , y cada corte de cardinalidad  $i$  contribuye con al menos  $2^m$  veces más que un corte de menor cardinalidad entonces, el número de cortes de máxima cardinalidad (y por lo tanto el número de emparejamientos perfectos de  $G$ ) es exactamente:

$$\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{Z}{2^{km}} \right\rfloor.$$

Recordemos que este método usa la dualidad que en grafos planos es fácil de calcular. Así tenemos un algoritmo de  $O(|V(G)|^2)$  operaciones aritméticas y raíces cuadradas.

# $\Delta \leftrightarrow \Upsilon$ REDUCIBILIDAD DE GRAFOS NO PLANOS

## 4.1 GRAFOS CASI-PLANOS

Sea  $G$  un grafo,  $\mathcal{C}(G)$  es el conjunto de aristas  $e$  de  $G$  tales que  $G/e$  es plano,  $\mathcal{D}(G)$  son las aristas  $f$  de  $G$  tales que  $G \setminus f$  es plano, y  $\mathcal{S}(G)$  es la intersección de  $\mathcal{C}(G)$  y  $\mathcal{D}(G)$ . Decimos que un grafo  $G$  es *casi-plano*, si  $G$  no es plano y el conjunto  $E(G)$  es igual a la unión de  $\mathcal{C}(G)$  y  $\mathcal{D}(G)$  i.e., para cada arista  $e$  de  $G$  al menos uno de los grafos  $G/e$  o  $G \setminus e$  es plano. Claramente  $K_{3,3}$  y  $K_5$  son grafos casi-planos.

En 1996 Gubser [37] dio dos caracterizaciones de los grafos casi-planos. Una descripción de su estructura (Teorema 4.1.2), y un criterio de exclusión por menores minimales no planos ni casi-planos (Teorema 4.1.3). Recientemente Ding, Fallon y Marshall [23] dan pruebas simples de los resultados de Gubser y corrigen errores que aparecen en el artículo [37] de Gubser. En particular corrigen la caracterización por menores prohibidos de los grafos casi-planos.

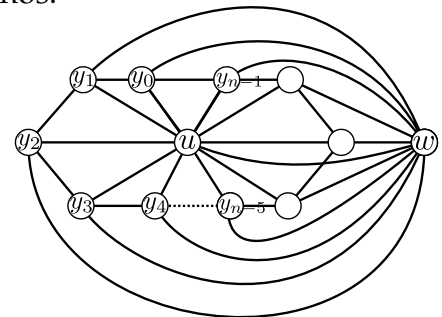


Figura 4.1: Bi-rueda

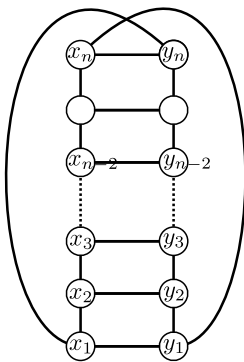


Figura 4.2: Banda de Möbius

Para presentar la caracterización de los grafos casi-planos dada por Gubser y Ding et al. necesitamos algunas definiciones.

Una *rueda* de tamaño  $n \geq 3$ , denotada como  $W(n)$ , es el grafo obtenido de la unión de un ciclo de longitud  $n$  llamado *aro*, y un vértice  $v$  adyacente a todos los vértices del aro,  $v$  es el *centro* de la rueda. Una *bi-rueda* de tamaño  $n \geq 3$ , denotada como  $B(n)$ , es el grafo obtenido de la unión de un ciclo  $y_0 y_1 \cdots y_{n-1}$ , llamado *aro*, y una arista  $f$ , junto con las aristas de los extremos de  $f$  a cada vértice del aro (ver Figura 4.1). Denotaremos como  $\mathcal{B}$  a la familia de todas las bi-ruedas.

Una *banda de Möbius* de longitud  $n \geq 3$ , denotada como  $M(n)$ , es obtenida de un ciclo  $x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_n x_1$  y la unión de los vértices opuestos en el ciclo por medio de una arista, a saber  $x_i y_i$  (ver Figura 4.2). Nos referimos como  $\mathcal{M}$  a la familia de estos

grafos.

La familia de grafos  $\mathcal{W}$  está formada por todos los grafos construidos por la identificación de tres triángulos de tres ruedas distintas. En otras palabras, cada grafo  $G$  en  $\mathcal{W}$  admite una partición  $\{V_0, V_1, V_2, V_3\}$  de sus vértices tal que  $G(V_0)$  es un triángulo,  $G(V_0 \cup V_i)$  es una rueda para  $i = 1, 2, 3$ , y  $G$  no tiene otras aristas entre estas tres ruedas.

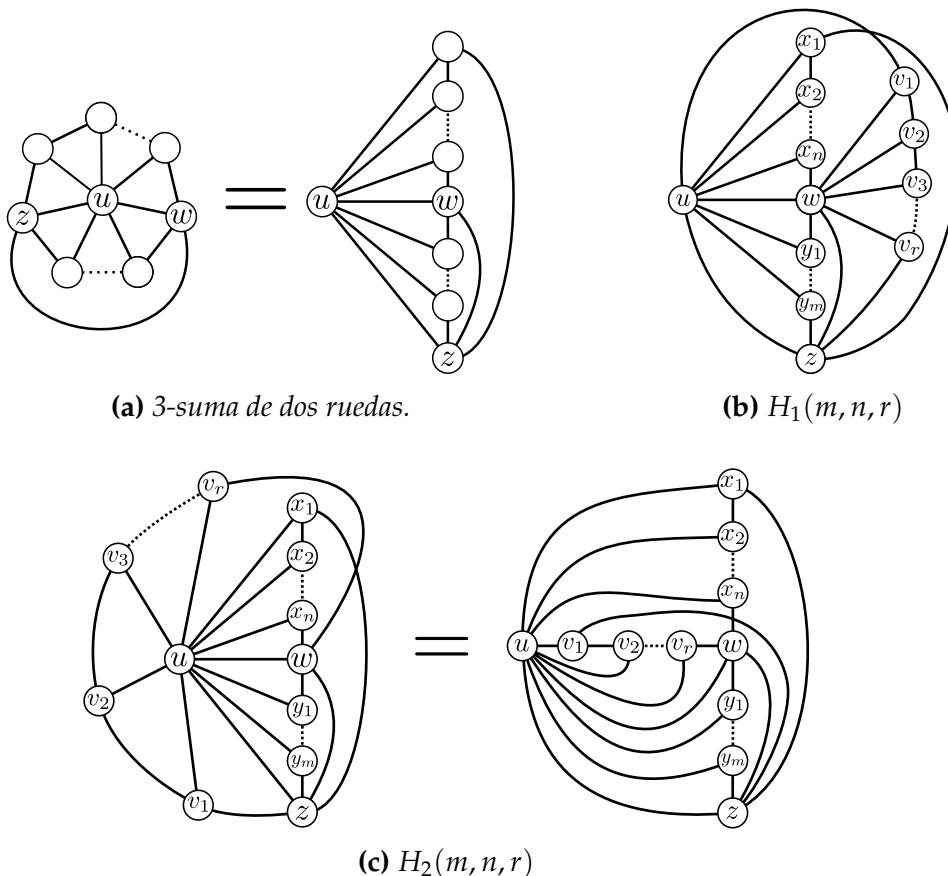
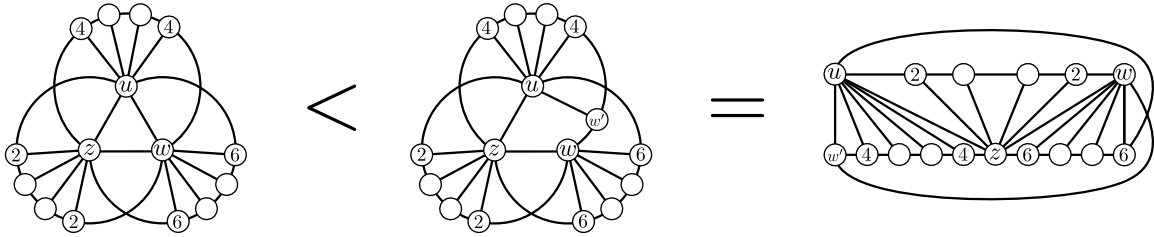


Figura 4.3: Los grafos  $M(n)$ ,  $H_1(m, n, r)$  y  $H_2(m, n, r)$ .

Notemos que  $\mathcal{W}$  puede dividirse de forma natural en tres subfamilias. Sea  $G$  un grafo en  $\mathcal{W}$  y  $S = \{u, w, z\}$  el conjunto de vértices resultado de la identificación de las ruedas  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ , que forman a  $G$ . Si los tres centros de  $G_i$  coinciden en un vértice de  $S$  entonces,  $G$  es un grafo del tipo  $H_2(m, n, r)$  (ver Figuras 4.3a y 4.3c), a la familia de estos grafos la denotamos como  $\mathcal{H}_2$ . Si exactamente dos centros de  $G_i$  coinciden en un vértice de  $S$  entonces,  $G$  es un grafo del tipo  $H_1(m, n, r)$  (ver Figuras 4.3a y 4.3b), a la familia de estos grafos la denotamos como  $\mathcal{H}_1$ . Estas notaciones las usó Gubser en su caracterización. Si ninguno de los centros de las ruedas  $G_i$  es identificado entre sí, entonces el grafo resultante es un menor de alguna banda de Möbius (ver Figura 4.4).





**Figura 4.4:** Algunos grafos de  $\mathcal{W}$  son menores de bandas de Möbius

**Lema 4.1.1 (Ding et al. [23], Gubser [37])** Las familias  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  están formadas por grafos casi-planos.

**Demostración.**

Bi-ruedas.  $B(n)$  no es plano, ya que  $B(n) \setminus \{uy_i, wy_i | i = 3, \dots, n - 1\}$  es una subdivisión de  $K_5$  y  $B(n)$  es casi-plano dado que  $\mathcal{C}(B(n)) = \{uw, vy_i | v = u, w, i = 0, \dots, n - 1\}$  y  $\mathcal{D}(B(n)) = \{uw, y_0y_n, y_{i-1}y_i | i = 1, \dots, n - 1\}$ .

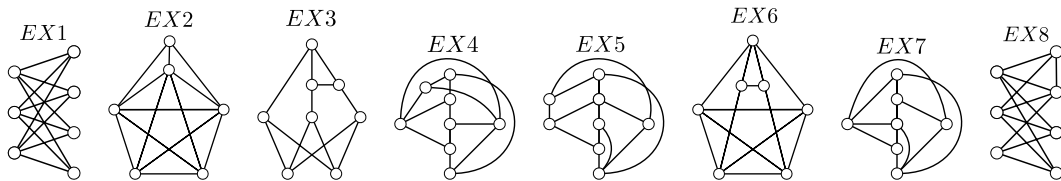
Bandas de Möbius.  $M(n)$  no es plano ya que,  $M(n) \setminus \{x_iy_i | i = 4, \dots, n\}$  es una subdivisión de  $K_{3,3}$  y dado que  $\mathcal{C}(M(n)) = \{x_iy_i \in E(M(n)) | i = 1, \dots, n\}$  y  $\mathcal{D}(M(n)) = E(M(n)) \setminus \mathcal{C}(M(n))$  concluimos que  $M(n)$  es casi-plano.

La familia  $\mathcal{H}_1$ .  $H_1(m, n, r)$  no es plano, ya que  $H_1(m, n, r) \setminus \{uw, wz, uz, ux_i, uy_j, wv_k | 1 < i \leq m, 1 < j \leq n, 1 < k \leq r\}$  es subdivisión de  $K_{3,3}$ . Como  $\mathcal{C}(H_1(m, n, r)) = \{wz, uq \in E(G) | q \in V(G) - v_1\} \cup \{wq \in E(G) | q \in V(G) - \{x_m, y_1\}\}$  y  $\mathcal{D}(H_1(m, n, r))$  es el complemento de  $\mathcal{C}(H_1(m, n, r))$  es claro que  $H_1(m, n, r)$  es casi-plano.

La familia  $\mathcal{H}_2$ .  $H_2(m, n, r)$  es no plano, ya que  $H_2(m, n, r) \setminus \{uw, wz, uz, ux_i, uy_j, wv_k | 1 < i \leq m, 1 < j \leq n, 1 < k \leq r\}$  es subdivisión de  $K_{3,3}$ . Como  $\mathcal{C}(H_2(m, n, r)) = \{uq \in E(G) | q \in V(G)\} \cup \{wz\}$  y  $\mathcal{D}(H_2(m, n, r))$  es el complemento de  $\mathcal{C}(H_2(m, n, r))$  es claro que  $H_2(m, n, r)$  es casi-plano. ■

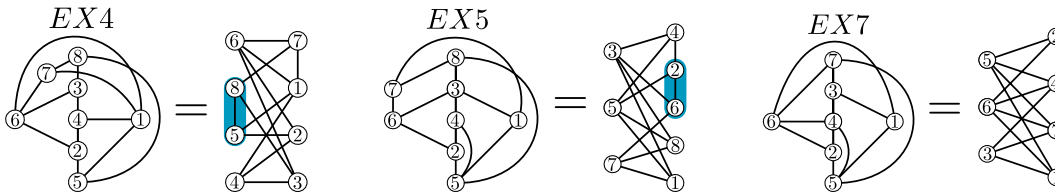
**Teorema 4.1.2 (Ding et al. [23], Gubser [37])** Sea  $G$  un grafo simple, casi-plano y 3-conexo. Entonces existe un grafo  $G'$  en  $\mathcal{B} \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{M}$  tal que  $G$  es menor de  $G'$ .

**Teorema 4.1.3 (Ding et al. [23], Gubser [37])** Un grafo es casi-plano, 3-conexo si y sólo si es libre de los grafos en  $\mathcal{F} = \{EX1, EX2, EX3, EX6, EX8\}$  (ver Figura 4.5).



**Figura 4.5:** La familia  $\mathcal{EX}$  de grafos, 3-conexos no casi-planos

Originalmente Gubser en [37] usa a los ocho grafos de la Figura 4.5, pero Ding et al. [23] se dan cuenta que  $EX4$ ,  $EX5$  y  $EX7$  tienen como menor a  $EX8$  (ver Figura 4.6). También mencionan que los grafos  $EX1$ ,  $EX2$  y  $EX8$  no son mínimos casi-planos (es decir tiene menores que no son casi-planos), aunque sí son mínimos casi-planos, 3-conexos. De hecho Ding et al. dan los menores prohibidos para los grafos casi-planos.



**Figura 4.6:**  $EX4$ ,  $EX5$  y  $EX7$  como menores de  $EX8$

Para cada grafo  $G$  en  $\{K_5, K_{3,3}\}$ . Definimos como  $G^+$  al grafo obtenido de agregar a  $G$  una arista colgante; a  $G \oplus e$  como el grafo obtenido de agregar una arista  $e$  a  $G$  donde los extremos de  $e$  no son vértices de  $G$ ; y a  $G^*$  el grafo obtenido de  $G$  al borrar todos los vértices aislados (vértices no adyacentes a una arista).

**Teorema 4.1.4 (Ding, Fallon, Marshall [23])** Los siguientes incisos son equivalentes para cualquier grafo  $G$  simple, no plano.

- El grafo  $G$  es casi-plano.
- El grafo  $G^*$  es obtenido de un grafo simple, casi-plano, 3-conexo  $H$  por subdivisiones de aristas en  $\mathcal{D}(H)$ .
- El grafo  $G$  es libre de  $\mathcal{F}' = \{K_5^+, K_{3,3}^+, EX3, EX6, K_5 \oplus e, K_{3,3} \oplus e\}$ .

Un grafo  $G$  es *extensión serie-paralelo* de un grafo  $H$  si, hay una secuencia de grafos  $H_1, H_2, \dots, H_n$  tal que  $H_1 = H$ ,  $H_n = G$ , y  $H_i$  puede ser obtenida de  $H_{i-1}$  agregando una arista paralela o por la subdivisión de una arista.

A continuación algunos resultados de Gubser [37]:

**Corolario 4.1.5 (Gubser [37])** Si  $G$  es un grafo casi-plano, conexo, entonces  $G$  es extensión serie-paralelo de un grafo simple, casi-plano, 3-conexo.

**Corolario 4.1.6 (Gubser [37])** Si  $G$  es un grafo casi-plano, desconexo, entonces  $G$  es unión de un grafo casi-plano, conexo y vértices aislados.

**Lema 4.1.7 (Gubser [37])** Si  $G$  es grafo casi-plano y  $H$  es un menor no-plano de  $G$ , entonces  $H$  es casi-plano.

**Corolario 4.1.8 (Gubser [37])** Cualquier subgrafo, no plano de un grafo conexo, casi-plano debe ser generador.

**Lema 4.1.9 (Gubser [37])** Si  $G$  es grafo simple, 3-conexo, casi-plano, y  $G \setminus X/Y$  no es plano, entonces  $\mathcal{S}(G \setminus X/Y)$  contiene a  $\mathcal{S}(G)$ .

Del Teorema 2.2.8, Corolario 4.1.8 y Lema 2.2.7 se sigue el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.10 (Gubser [37])** Cualquier grafo casi-plano, 3-conexo con al menos seis vértices tiene un subgrafo generador que es una subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Los siguientes lemas los utilizaremos más adelante.

**Lema 4.1.11** Sea  $G$  grafo casi-plano y  $e$  una de sus aristas:

1. Si  $e$  está en  $\mathcal{C}(G)$ , entonces sí agregamos aristas paralelas a  $e$  conservamos la casi-planaridad.
2. Si  $e$  está en  $\mathcal{D}(G)$ , entonces sí subdividimos a  $e$  conservamos la casi-planaridad.

**Demostración.** Supongamos que  $e$  está en  $\mathcal{C}(G)$ . Sea  $G'$  el grafo obtenido de  $G$  al agregar aristas paralelas a  $e$ . Vamos a demostrar que  $G'$  es casi-plano. Es claro que  $G'$  no es plano, ya que tiene a  $G$  como subgrafo. Sea  $f$  arista de  $G'$  diferente y no paralela a  $e$ , como  $f$  está en  $\mathcal{C}(G)$  o en  $\mathcal{D}(G)$  entonces,  $f$  está en  $\mathcal{C}(G')$  o en  $\mathcal{D}(G')$ , respectivamente; ahora sea  $f$  arista paralela a  $e$  o  $e$  misma, como  $e$  está en  $\mathcal{C}(G)$ , se sigue que  $G'/f$  es  $G/e$  con algunos lazos extra y por lo tanto es plano,  $f$  está en  $\mathcal{C}(G')$  y  $G'$  es casi-plano.

Supongamos que  $e$  está en  $\mathcal{D}(G)$ . Sea  $G'$  el grafo obtenido de  $G$  al sustituir  $e$  por el camino  $P$  ( $P$  no tiene vértices en  $G$ ). Vamos a demostrar que  $G'$  es casi-plano. Es claro que  $G'$  no es plano ya que tiene a  $G$  como menor. Sea  $f$  arista de  $G'$  que no esté en  $P$ , como  $f$  está en  $\mathcal{C}(G)$  o en  $\mathcal{D}(G)$  entonces,  $f$  está en  $\mathcal{C}(G')$  o en  $\mathcal{D}(G')$ , respectivamente; ahora sea  $f$  arista en  $P$ , y,  $D$  e  $I$  los subcaminos de  $P \setminus f$ , como  $e$  está en  $\mathcal{D}(G)$ , se sigue que  $G' \setminus f$  es  $G \setminus e$  con los subcaminos  $D$  e  $I$  pegados a extremos distintos de  $e$  por lo tanto  $G' \setminus f$  es plano,  $f$  está en  $\mathcal{D}(G')$  y  $G'$  es casi-plano. ■

**Lema 4.1.12** Si  $G$  es grafo conexo, casi-plano, entonces  $G \setminus v$  es plano para cualquier vértice  $v$  de  $G$ .

**Demostración.** Si  $G \setminus v$  es no plano, entonces por el Teorema 2.2.5 de Kuratowski  $G \setminus v$  tiene una subdivisión  $K$  de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ . Es claro que  $K$  es no plano. Entonces  $G$  tiene a un subgrafo  $K$  que no es plano ni generador, ya que  $v$  no está en  $K$ , lo cual contradice al Corolario 4.1.8. Por lo tanto  $G \setminus v$  es plano. ■

Este lema es interesante, ya que si el recíproco fuera cierto tendríamos una definición equivalente de grafo casi-plano. Pero el recíproco no es cierto, ya que el grafo  $EX3$  de la familia  $\mathcal{EX}$  (ver Figura 4.5) cumple que  $EX3 \setminus v$  es plano para todo vértice  $v$  de  $EX3$  y el Teorema 4.1.3 nos garantiza que no son casi-planos, lo mismo pasa con  $EX6$ . Los grafos restantes de  $\mathcal{EX}$  no cumplen esta propiedad (ver Figura 4.7).

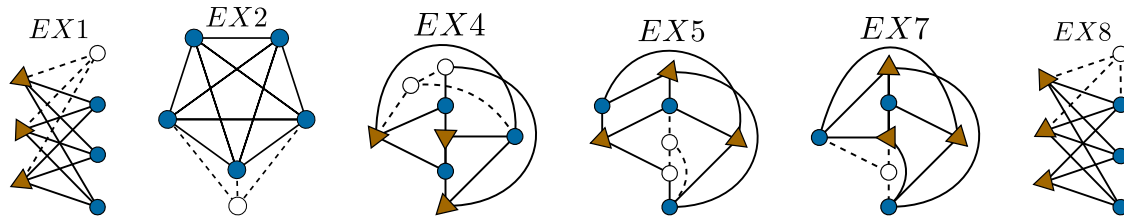


Figura 4.7: Los Grafos de  $\mathcal{EX}$  que no cumplen la necesidad del Lema 4.1.12.

Un grafo  $G$  es *W-casi-plano* si  $G$  es no plano y  $G \setminus v$  es plano para todo v3rtice  $v$  de  $G$ . En 1967 Wagner [86] determina por completo a los grafos W-casi-planos.

Mohar [60] estudi3 que otra definici3n de grafo casi-plano, que en esta tesis llamamos M-casi-plano. Un grafo  $G$  es *M-casi-plano* si no es plano y existe una arista  $e$  en  $G$  tal que  $G \setminus e$  es plano.

Los grafos M-casi-planos son interesantes ya que tienen n3mero de cruce m3nimo arbitrariamente grande [39]. Es decir, para cualquier n3mero natural  $k \geq 1$  existe un grafo M-casi-plano con n3mero de cruce  $k$ . Podemos encontrar algunos ejemplos en [39, 9, 60].

**Lema 4.1.13** Todo grafo casi-plano es M-casi-plano.

**Demostraci3n.** Sea  $G$  un grafo casi-plano. Por los Corolarios 4.1.5 y 4.1.6 podemos suponer que  $G$  es simple, casi-plano, 3-conexo. Si  $|V(G)| = 5$  entonces  $G$  es isomorfo a  $K_5$  y por tanto M-casi-plano. Gubser [37] prob3 que todos los grafos casi-planos con seis v3rtices son subgrafos de los grafos  $K'''_{3,3}$  y  $K''^+_{3,3}$  exhibidos en la Figura 4.8. Es f3cil ver que  $K'''_{3,3}$  y  $K''^+_{3,3}$  son M-casi-planos y por tanto todo grafo casi-plano con seis v3rtices es M-casi-plano.

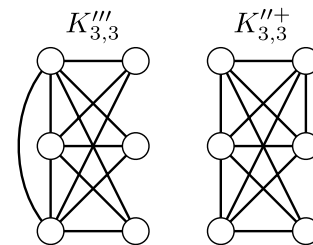


Figura 4.8: Grafos casi-planos  $K'''_{3,3}$  y  $K''^+_{3,3}$ .

Por 3ltimo, si  $|V(G)| > 6$ . El Teorema 2.2.8 de Hall nos garantiza que  $G$  tiene un  $K_{3,3}$  como menor; y existe una arista  $f$  en  $G$  tal que  $G/f$  no es plano, ya que  $|V(G)| > 6$ . Como  $G$  es casi-plano  $G \setminus f$  es plano. ■

Es claro que el rec3proco del lema anterior no es cierto, ya que al menos los grafos  $EX3$ ,  $EX5$ ,  $EX6$  y  $EX7$  son M-casi-planos y no son casi-planos.

## 4.2 $\Delta \leftrightarrow Y$ REDUCIBILIDAD DE GRAFOS CASI-PLANOS

Wagner [84] menciona que los grafos casi-planos son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles, a continuación damos una prueba de esto.

**Teorema 4.2.1** Los grafos casi-planos son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles.

**Demostración.** Sea  $G$  un grafo casi-plano. Por el Corolario 4.1.6  $G$  es unión de vértices aislados y una componente  $G'$  conexa. El Corolario 4.1.5 nos garantiza que, con reducciones en serie y en paralelo podemos reducir  $G'$  a un grafo  $G''$  simple, casi-plano y 3-conexo. Ahora por el Teorema 4.1.2, existe  $H$  grafo en alguna de las familias de Gubser  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ , o  $\mathcal{M}$ , tal que  $G''$  es menor de  $H$ . Por el Teorema 2.3.7 y dado que  $H$  tienen número de cruce uno,  $H$  es reducible. Entonces por el Teorema 2.3.5  $G''$  también es reducible. ■

De hecho podemos decir más acerca de la reducción de los grafos casi-planos.

**Teorema 4.2.2 (Wagner [84])** Sea  $G$  un grafo simple casi-plano, entonces  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a  $K_{3,3}$ . Más aun hay una secuencia de reducciones en la que todo grafo es casi-plano.

En esta tesis damos otras dos pruebas más simples y algorítmicas. El siguiente lema nos va a servir para hacer inducción sobre grafos casi-planos. Sean  $n$  e  $i$  dos números enteros, denotamos como  $i \bmod n$  al residuo de la división entera de  $i$  entre  $n$ .

**Lema 4.2.3** Los siguientes incisos son ciertos.

- I) Sea  $i$  uno o dos,  $n$ ,  $m$  o  $r$  mayor o igual a dos. A partir de  $H_i(m, n, r)$  aplicando una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  y dos reducciones en paralelo podemos construir  $H_i(m-1, n, r)$ ,  $H_i(m, n-1, r)$  o  $H_i(m, n, r-1)$ .
- II) De una banda de Möbius  $M(n)$ , con  $n > 3$ . Aplicando una transformación  $Y \rightarrow \Delta$ , dos operaciones de Truemper  $OP1$  y una reducción en serie, podemos construir una banda más chica  $M(n-1)$ .
- III) Si tomamos una bi-rueda  $B(n)$ , con  $n > 3$  y le aplicamos una transformación  $\Delta \rightarrow Y$ , dos transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  y tres reducciones en paralelo, podemos construir una bi-rueda  $B(n-1)$ .

El orden de aplicación de las transformaciones es el mismo en que se mencionan.

**Demostración.**

- I) Sea  $i$  uno o dos,  $G$  un grafo en la familia  $\mathcal{H}_i$ , con  $m$ ,  $n$  o  $r$  al menos dos. Tomemos un vértice  $s$  en  $V(G) \setminus \{u, w, z, x_1, y_1, v_1\}$ ,  $s$  existe ya que  $m$ ,  $n$  o  $r$  es mayor a uno.

Aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  a  $s$  y obtenemos  $G_1$ , seguida de dos reducciones en paralelo aplicadas a las aristas  $\{up, uq\}$  o  $\{wp, wq\}$  adyacentes a  $us$  o  $ws$ , según sea el caso, llamemos  $G_2$  y  $G_3$  a los grafos resultantes.  $G_3$  es isomorfo a  $H_i(m-1, n, r)$ ,  $H_i(m, n-1, r)$  o  $H_i(m, n, r-1)$ , dependiendo de la elección de  $s$ . De la misma forma podemos eliminar a  $x_1, y_1$  o  $v_1$ , pero si eliminamos a todos los vértice  $\{x_j\}$ ,  $\{y_k\}$  o  $\{v_l\}$  el grafo resultante no está en  $\mathcal{H}_i$ .

- II) Sea  $M(n)$  una banda de Möbius, con  $n > 3$ . Vamos a quitar los vértices  $x_n$  y  $y_n$ . Primero aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $x_n$ , que nos regresa un triángulo  $\Delta = x_{n-1}y_ny_1x_{n-1}$ . Luego la operación de Truemper  $OP1$  dos veces, una para quitar la arista  $x_{n-1}y_n$  con centro  $y_{n-1}$  y la otra para quitar la arista  $y_1y_n$  con centro  $x_1$ . Por último quitamos a  $y_n$  con una reducción en serie, obteniendo un grafo isomorfo a  $M(n-1)$ . Notemos que estas operaciones se pueden realizar para quitar cualquier par de vértices  $\{x_i, y_i\}$ .
- III) Sea  $B(n)$  una bi-rueda, con  $n > 3$ , y  $y_i$  un vértice en  $B(n) \setminus \{u, w\}$ . Aplicando una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  sobre el triángulo  $uy_iy_{i+1} \pmod n$ , seguida de otras dos transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_i$  y  $y_{i+1} \pmod n$ , por último aplicamos tres reducciones en paralelo, obtenemos un grafo isomorfo a  $B(n-1)$ . ■

En la siguiente sección escribimos tres ejemplos de que el resultado del teorema no es trivial. En la Sección 4.2.2 damos una prueba de este teorema basada en, caracterizar a todos los menores (modelos) de  $K_{3,3}$  en cada una de las familias de Gubser y usando esta caracterización controlar las operaciones para que no perdamos la casi-planaridad, cabe mencionar que esta prueba da origen a un algoritmo para reducir un grafo casi-plano. En la Sección 4.2.3 damos otra demostración del mismo teorema, en donde primero damos una caracterización por medio de 3-sumas de los grafos casi planos, para esto nos basamos fuertemente en el artículo de Ding, Fallon y Marshall [23], y usando esta descripción probamos el teorema. Esta prueba puede dar origen a un algoritmo que decida si un grafo es casi-plano o no, y luego dé la secuencia de reducciones formada por grafos casi-planos. Por último en la Sección 4.2.5 resumiremos la prueba de este teorema que dio Wagner [84].

### 4.2.1 EJEMPLOS

**Ejemplo 4.2.1** En este ejemplo reducimos  $B(6)$  a  $K_{3,3}$ . Para abreviar solo escribimos  $B$  en lugar de  $B(6)$ .  $B$  es casi-plano por el Lema 4.1.1. Primero le aplicamos una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  sobre el triángulo  $\{u, w, y_4\}$  insertando el vértice  $a$ . Después aplicamos la  $OP2$  con centro  $y_1$  para mover la arista  $y_0u$  a  $wy_2$  que quitamos con una reducción en paralelo (ver Figura 4.9).

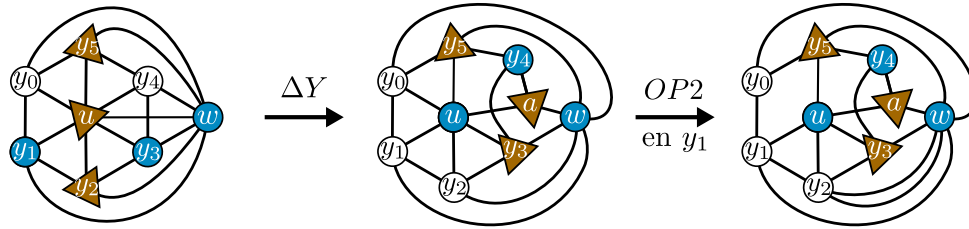


Figura 4.9: Ejemplo 4.2.1.

Los nuevos grafos son no planos, como se ve en la Figura 4.9, tampoco son casi-planos ya que al contraer o quitar la arista  $y_1y_2$  no modificamos al  $K_{3,3}$  que tiene el grafo.

Usamos la  $OP2$  con centro  $y_2$  para mover la arista  $y_1u$  a la arista  $y_3w$  que quitamos con una reducción en paralelo. Ahora aplicamos dos transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_0$  y  $y_1$  aplicando reducciones en paralelo cuando se pueda (ver Figura 4.10).

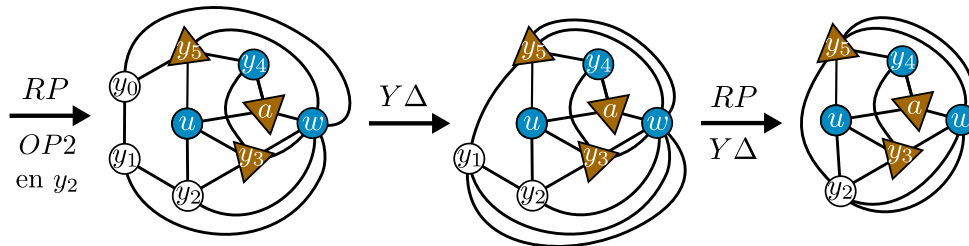


Figura 4.10: Ejemplo 4.2.1.

Seguimos conservando la no planaridad y la no casi-planaridad por la arista  $uy_2$ .

Aplicamos dos  $OP2$  con centros  $u$  y  $y_3$  moviendo las arista  $y_5y_2$  y  $y_2w$  a las aristas  $ay_3$  y  $ua$ , respectivamente. Estos grafos no son planos ni casi-planos por la arista  $y_2y_3$ . Para terminar, aplicamos: una reducción en serie al vértice  $y_2$ ; las reducciones en paralelo posibles; y una  $OP1$  con centro  $w$  para quitar la arista  $y_3a$  (ver Figura 4.11). Así hemos llegado a  $K_{3,3}$ .

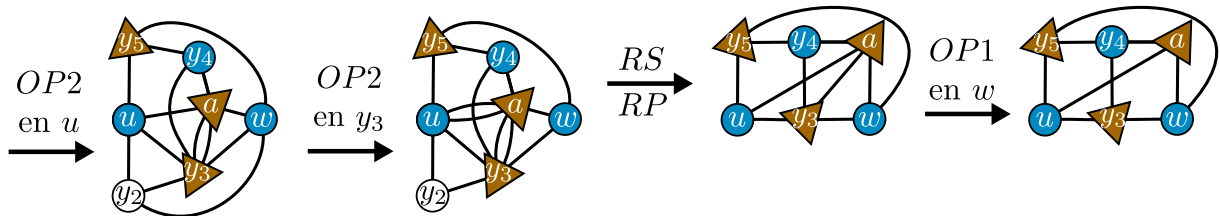


Figura 4.11: Ejemplo 4.2.1.

Este es un ejemplo en el que todos los grafos de la secuencia de reducciones son no planos y casi todos no son casi-planos. Podemos concluir, que hay que tener cuidado

con las operaciones que se aplican para obtener el resultado del Teorema 4.2.2.

**Ejemplo 4.2.2** En este ejemplo empezamos con un grafo casi-plano, y en la secuencia de reducciones casi todos los grafos son planos. Empezamos con un grafo  $G$  que es  $H_2(2, 2, 1)$  sin las aristas  $uz$ ,  $uw$  y  $wz$ , que como no es plano no le queda otra más que ser casi-plano. Primero aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre el vértice  $v_1$ , luego otra transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $x_2$ , quitando aristas paralelas con reducciones en paralelo (ver Figura 4.12).

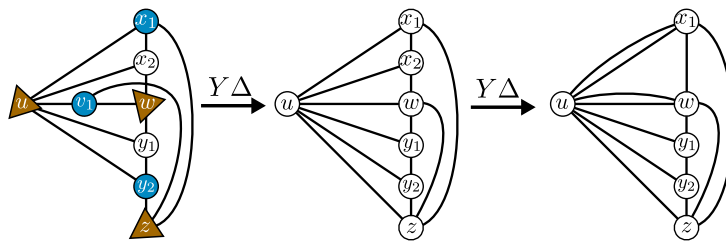


Figura 4.12: Ejemplo 4.2.2.

Para terminar aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_1$ , quitando aristas paralelas, con reducciones en paralelo. Luego, una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  sobre el triángulo  $\{u, z, w\}$ , y hemos obtenido el  $K_{3,3}$ , ver Figura 4.13. Note que casi todos los grafos son planos.

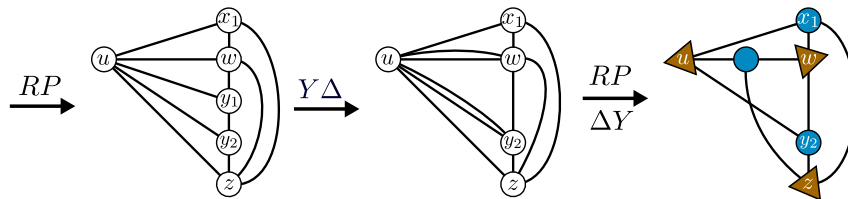


Figura 4.13: Ejemplo 4.2.2.

**Ejemplo 4.2.3** Este ejemplo pretende responder una pregunta: ¿Cuántos cruces podemos generar, en un grafo casi-plano, con operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ ? Para esto hay que aplicar dichas transformaciones de forma “tonta”. Sea  $G$  igual a  $H_1(n, n, n)$ , con  $n$  mayor a uno. Claramente  $G$  es casi-plano.

Primero aplicamos una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  para quitar el triángulo  $\{u, w, z\}$ . Luego, hacemos tres transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$ , sobre  $y_n$ ,  $x_n$  y  $v_n$ , y eliminamos las aristas paralelas, con reducciones en paralelo, ver Figura 4.14.

De nuevo tenemos el triángulo  $\{u, w, z\}$  entonces, seguimos aplicando las mismas transformaciones, siempre eliminando los vértices con mayor subíndice, excepto a  $x_1$ ,  $y_1$  y  $v_1$ . Notemos que los vértices que agregamos al quitar el triángulo  $\{u, w, z\}$  tienen



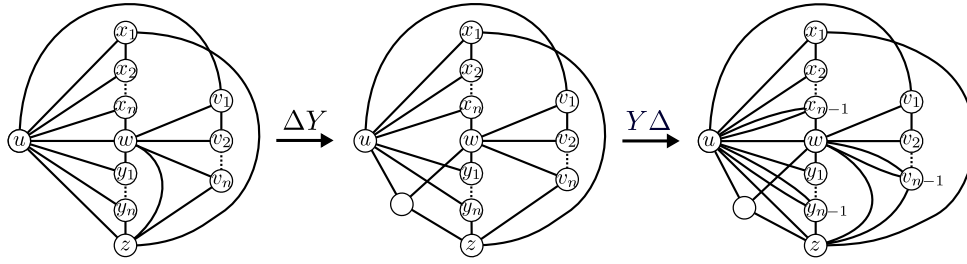


Figura 4.14: Ejemplo 4.2.3.

grado tres y sus vecinos son  $u$ ,  $w$  y  $z$ . Por lo tanto hemos construido a  $K_{3,n+3}$ . Zaran-kiewicz [91] conjetura que su número de cruce es:  $\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ , es decir tenemos un número cuadrático de cruces.

#### 4.2.2 DEMOSTRACIÓN 1 DEL TEOREMA 4.2.2

**Definición 4.2.1** Un *modelo* de un menor  $H$  en  $G$  es un mapeo  $\phi$  de  $H$  a  $G$  donde los vértices de  $H$  se mapean a subgrafos disjuntos y conexos de  $G$  y las aristas de  $H$  son mapeadas a aristas de  $G$  tales que para toda arista  $uv$  de  $H$ ,  $\phi(uv)$  es una arista que une un vértice en  $\phi(u)$  con uno en  $\phi(v)$ . El modelo  $\phi$  induce una partición de  $G$  por  $H$ , a saber:  $R = \phi(E(H))$ ,  $C = \cup_{v \in V(H)} E(\phi(v))$  y  $D = E(G) \setminus (R \cup C)$ ; a esta partición la llamaremos *partición de  $G$  por  $\phi$* .

Recalquemos que un modelo  $\phi$  de  $H$  en  $G$ , nos dice una forma en que  $H$  está como menor en  $G$ . Es decir, sea  $R$ ,  $D$  y  $C$  la partición de  $G$  por  $\phi$ . El grafo  $G'$  resultante de contraer y borrar las aristas en  $C$  y  $D$ , respectivamente, es isomorfo a  $H$ .

Para demostrar el Teorema 4.2.2, primero caracterizaremos los modelos de cualquier  $K_{3,3}$  en  $H_1(m, n, r)$ ,  $H_2(m, n, r)$ ,  $B(n)$  y  $M(n)$ .

**Lema 4.2.4** Sea  $G$  un grafo conexo, casi-plano,  $H$  un grafo no plano y  $\phi$  un modelo de  $H$  en  $G$ , entonces:

1.  $\cup_{v \in V(H)} V(\phi(v)) = V(G)$ .
2.  $E(\phi(v)) \cap C(G) = \emptyset$  para todo  $v$  vértice de  $H$ .
3.  $D(G) \subset \cup_{v \in V(H)} E(\phi(v)) \cup \phi(E(H))$

**Demostración.** Inciso 1. Supongamos que existe un vértice  $w$  de  $G$  tal que  $w$  no está en  $\cup_{v \in V(H)} V(\phi(v))$ , entonces  $V(\phi(V(H)))$  es subconjunto de  $V(G \setminus w)$ . El conjunto  $\phi(E(H))$  es un subconjunto de  $E(G \setminus w)$ , si no es así existe una arista  $\alpha\beta$  en  $H$  tal que

$\phi(\alpha\beta) = wu$ , y por definición de modelo  $w$  está en  $\phi(\alpha)$  o en  $\phi(\beta)$ , lo cual es una contradicción a la elección de  $w$ . Ahora notemos que  $E(G \setminus w)$  es un subconjunto de  $E(G \setminus uw)$  y  $E(G/uw)$ ; y que  $V(G \setminus w)$  es un subconjunto de  $V(G \setminus uw)$  y  $V(G/uw)$ . Por lo tanto  $\phi$  es un modelo de  $H$  en  $G \setminus uw$  y en  $G/uw$ , esto es una contradicción a la definición de casi-plano de  $G$  ya que  $H$  no es plano.

Inciso 2. Si para un vértice  $v$  de  $H$ , existe una arista  $e$  en  $E(\phi(v)) \cap \mathcal{C}(G)$  entonces,  $H$  es menor de  $G/e$  y por lo tanto  $G/e$  no es plano. Esto es una contradicción al hecho de que  $e$  está en  $\mathcal{C}(G)$ .

Inciso 3. Si existe una arista  $e$  en  $\mathcal{D}(G)$  que no este en  $\cup_{v \in V(H)} E(\phi(v)) \cup \phi(E(H))$ , entonces  $\phi$  es un modelo de  $H$  en  $G \setminus e$ . Esto es una contradicción ya que  $H$  no es plano y  $G \setminus e$  si es plano. ■

El Teorema 2.2.8 nos garantiza que existe un modelo de  $K_{3,3}$  en  $M(n)$ ,  $H_1(m, n, r)$ ,  $H_2(m, n, r)$  y  $B(n)$  (si  $|V(B(n))| > 5$ ). Los siguientes lemas caracterizan a estos modelos.

**Lema 4.2.5** Tomemos una banda de Möbius  $M(n)$  y  $\phi$  un modelo arbitrario de  $K_{3,3}$  en  $M(n)$ . Denotemos como  $\{\{a, b, c\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$  a la bipartición de  $K_{3,3}$  y a  $S$  el ciclo  $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n x_1$  de  $M(n)$ . Entonces  $\phi(v)$  es un camino del ciclo  $S$  para  $v$  en  $V(K_{3,3})$ ; además existen tres números diferentes  $j < k < l$  tales que:  $x_j \in \phi(a)$ ,  $x_k \in \phi(\alpha)$ ,  $x_l \in \phi(b)$ ,  $y_j \in \phi(\beta)$ ,  $y_k \in \phi(c)$ ,  $y_l \in \phi(\gamma)$ ,  $x_j y_j \in \phi(a\beta)$ ,  $x_k y_k \in \phi(\alpha c)$  y  $x_l y_l \in \phi(b\gamma)$  (ver Figura 4.15).

**Demostración.** Sea  $v$  vértice de  $K_{3,3}$ . Recordemos que  $\mathcal{C}(M(n)) = \{x_i y_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  y  $\mathcal{D}(M(n)) = E(M(n)) \setminus \mathcal{C}(M(n))$ . Por el Lema 4.2.4 inciso 2  $\phi(v)$  es un camino de  $S$ , dado que  $\phi(v)$  es conexo y ninguna arista de  $S$  está en  $\mathcal{C}(M(n))$ . Por lo tanto, existen solo dos aristas  $f_1$  y  $f_2$  en  $\mathcal{D}(M(n))$  tales que, solo uno de sus extremos está en  $\phi(v)$ .

Además, por los incisos 1 y 3 del Lema 4.2.4,  $f_1$  y  $f_2$  son imágenes bajo  $\phi$  de dos aristas de  $K_{3,3}$ . Por definición de modelo, existen dos vértices  $w$  y  $x$  en  $K_{3,3}$  tales que, solo un extremo de  $f_1$  y  $f_2$  está en  $\phi(w)$  y  $\phi(x)$ , respectivamente. Por lo tanto  $w$  y  $x$  están en una partición de  $K_{3,3}$  diferente a la de  $v$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $v = a$ ,  $x = \alpha$  y  $w = \gamma$ . Entonces la arista  $\phi(a\beta)$  es una arista de  $\mathcal{C}(M(n))$  i. e.,  $\phi(a\beta) = x_j y_j$ . De forma análoga existen  $k$  y  $l$  que cumplen con lo requerido en el lema. ■

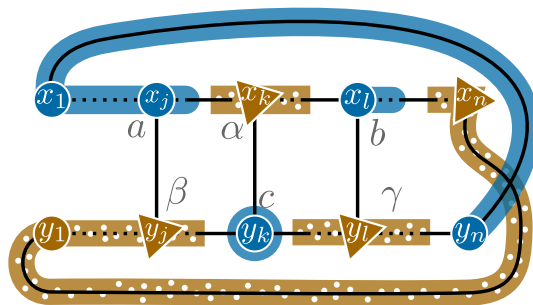
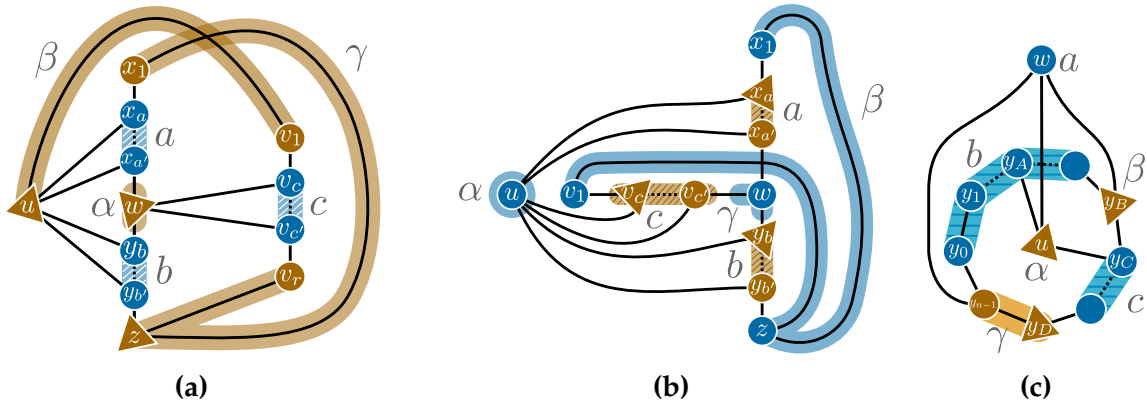


Figura 4.15: El modelo de  $K_{3,3}$  en  $M(n)$ .

**Lema 4.2.6** Sea  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) un grafo de alguna de las familias  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{B}$ , respectivamente, y  $\phi_i$  un modelo de  $K_{3,3}$  en  $F_i$ . Denotemos como  $\{\{a, b, c\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$  a la bipartición de  $K_{3,3}$ . Tenemos los siguientes casos:

- A) Para  $F_1$  los grafos  $\phi(a), \phi(b), \phi(c), \phi(\alpha)$  y  $\phi(\beta)$  son subcaminos disjuntos de los caminos  $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m, v_1 \cdots v_r, x_2 \cdots x_n z y_1 \cdots y_{m-1}$  y  $u v_1 \cdots v_{r-1}$ , respectivamente, y  $\phi(\gamma)$  es un grafo conexo donde el conjunto de sus vértices es un subconjunto de  $\{y_2, \dots, y_m, z, x_1, \dots, x_{n-1}, v_2, \dots, v_r\}$ . Además  $u, w$  y  $z$  son vértices de  $\phi(\beta), \phi(\alpha)$  y  $\phi(\gamma)$ , respectivamente (ver Figura 4.16a).
- B) Para  $F_2$  el grafo  $\phi(\alpha)$  es el vértice  $u$ , los grafos  $\phi(a), \phi(b)$  y  $\phi(c)$  son subcaminos disjuntos de los caminos  $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m$  y  $v_1 \cdots v_r$ , respectivamente,  $\phi(\beta)$  y  $\phi(\gamma)$  son subgrafos conexos donde el conjunto de sus vértices es un subconjunto de  $\{y_2, \dots, y_m, z, x_1, \dots, x_{n-1}, v_1, \dots, v_{r-1}\}$  y  $\{y_1, \dots, y_{m-1}, w, x_2, \dots, x_n, v_2, \dots, v_r\}$ , respectivamente. Además  $w$  y  $z$  son vértices de  $\phi(\gamma)$  y  $\phi(\beta)$ , respectivamente (ver Figura 4.16b).
- C) Para  $F_3$  el grafo  $\phi(a)$  es el vértice  $w$  y  $\phi(\alpha)$  es el vértice  $u$ , los grafos  $\phi(b), \phi(\beta), \phi(c)$  y  $\phi(\gamma)$  son caminos disjuntos del ciclo  $y_0 y_1 \cdots y_{n-1} y_0$  (ver Figura 4.16c).



**Figura 4.16:** a) el modelo de  $K_{3,3}$  en  $H_1(m, n, r)$ ; b) el modelo de  $K_{3,3}$  en  $H_2(m, n, r)$ ; c) el modelo de  $K_{3,3}$  en  $B(n)$ .

**Demostración 1 del Lema 4.2.6.** Sea  $G_i$  el subgrafo de  $F_i$  que solo tiene los vértices y las aristas de  $\mathcal{D}(F_i) \setminus \mathcal{C}(F_i)$ . Por el inciso 2 del Lema 4.2.4 y la definición de modelo,  $\phi_i(v)$  es subgrafo conexo de  $G_i$ . Tenemos los siguientes casos:

- A) Recordemos que  $\mathcal{C}(F_1)$  es la unión de los conjuntos  $\{wz, uq | q \in V(F_1) - v_1\}$  y  $\{wq | q \in V(F_1) \setminus \{x_m, y_1\}\}$ ;  $\mathcal{D}(F_1)$  es el complemento de  $\mathcal{C}(F_1)$ . Por lo tanto  $G_1$  es la unión del ciclo  $S_1 = z y_m \cdots y_1 w x_n \cdots x_1 z$  y el camino  $P_1 = z v_r \cdots v_1 u$ .

Por los incisos 1 y 3 del Lema 4.2.4, el ciclo  $S_1$  está en la imagen bajo  $\phi_1$  de un vértice

$w$  o de un ciclo  $C_1$ ; y  $P_1$  está en la imagen de un camino  $Q_1$ . Ya que  $K_{3,3}$  es simple y bipartito,  $C_1$  es de longitud cuatro o seis.

Si  $S_1$  está en  $\phi_1(w)$ , entonces  $F_1/E(S_1)$  tiene un modelo de  $K_{3,3}$ . Esto es una contradicción ya que  $F_1/E(S_1)$  es plano.

Si la longitud de  $C_1$  es seis, entonces  $Q_1$  es solo un vértice  $v$  y  $P_1$  está en  $\phi_1(v)$ , por lo tanto hay un modelo de  $K_{3,3}$  en  $F_1/E(P_1)$ . Lo cual es una contradicción ya que  $F_1/E(P_1)$  es plano.

Si la longitud de  $C_1$  es cuatro, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $C_1 = aab\gamma a$  y que  $z$  es vértice de  $\phi_1(\gamma)$ . Entonces  $Q_1 = \gamma c\beta$ ;  $\phi_1(c)$  y  $\phi_1(\beta)$  son subcaminos de  $P_1$ ; y el vértice  $u$  está en  $\phi_1(\beta)$ . Por último  $w$  está en  $\phi_1(\alpha)$ , ya que por definición la arista  $\phi_1(\alpha c)$  tiene un extremo en  $\phi_1(\alpha)$  y el otro en  $\phi_1(c)$  y las únicas aristas que cumplen esto son las  $\{wv_j\}$ . Por lo tanto el inciso es cierto (ver Figura 4.16a).

- B) Recordemos que  $\mathcal{C}(F_2)$  es el conjunto  $\{wz, uq \mid q \in V(F_2)\}$  y  $\mathcal{D}(F_2)$  es el complemento de  $\mathcal{C}(F_2)$ . Por lo tanto  $G_2$  es la unión del ciclo  $S_2 = zx_1 \cdots x_n w v_r \cdots v_1 z$  y el camino  $P_2 = wy_1 \cdots y_r z$ . El Lema 4.2.4 inciso 1 nos garantiza que existe  $v$  en  $K_{3,3}$  tal que  $u \in \phi_2(v)$  y del inciso 2 deducimos que  $V(\phi_2(v)) = \{u\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $v = \alpha$ . Por lo tanto  $V(G_2)$  es imagen bajo  $\phi_2$  de cinco vértices de  $K_{3,3}$ .

Además, por lo incisos 1 y 3 del Lema 4.2.4, y ya que  $K_{3,3}$  es simple y bipartito, el ciclo  $S_2$  está en la imagen bajo  $\phi_2$  de un vértice  $w$  o de un ciclo  $C_2$  de longitud cuatro.

Si  $S_2$  está en  $\phi_2(w)$ , entonces  $F_2/E(S_2)$  tiene un modelo de  $K_{3,3}$ . Esto es una contradicción ya que  $F_2/E(S_2)$  es plano.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $C_2 = \beta a \gamma c \beta$  y que  $z$  es vértice de  $\phi_2(\beta)$ . Por lo tanto  $\phi_2(b)$  es un subcamino de  $P_2$  entonces,  $w$  está en  $\phi_2(\gamma)$ . Así el inciso B) es cierto (ver Figura 4.16b).

- C) Recordemos que  $\mathcal{C}(F_3)$  es el conjunto  $\{wu, vy_i \mid i = 0, \dots, n-1, v = u, w\}$  y  $\mathcal{D}(F_3)$  es el conjunto  $\{uw, y_i y_{i+1} \pmod n \mid i = 0, \dots, n-1\}$ .

Entonces  $G_3$  es el ciclo  $y_0 y_1 \cdots y_{n-1} y_0$ . Por los incisos 1 y 2 del Lema 4.2.4 podemos suponer que  $V(\phi_3(\alpha)) = \{u\}$  y  $V(\phi_3(a)) = \{w\}$ . Por lo tanto el ciclo  $G_3$  es imagen bajo  $\phi_3$  del ciclo  $b\beta c\gamma$  y el inciso es cierto (ver Figura 4.16c). ■

**Demostración 2 del Lema 4.2.6.** Procedemos por inducción sobre  $|V(F_i)|$ .

- A) Recordemos que  $\mathcal{C}(F_1)$  es la unión de los conjuntos:  $\{ux_i | i = 1, \dots, n\}$ ,  $\{uy_i | i = 1, \dots, m\}$ ,  $uw$ ,  $uz$ ,  $zw$  y  $\{wv_i | i = 1, \dots, r\}$  y  $\mathcal{D}(F_1)$  es igual a  $E(F_1) \setminus \mathcal{C}(F_1)$ .

Si  $|V(F_1)| = 6$ , entonces ninguna arista de  $F_1$  se contrae para formar al menor  $K_{3,3}$  del modelo  $\phi_1$ . Además, por el inciso 3 (Lema 4.2.4), para cada arista  $f$  en  $\mathcal{D}(F_1)$  existe una arista  $g$  en  $K_{3,3}$  tal que  $f = \phi_1(g)$ . Dado que  $\{x_1w, wy_1, y_1z, zv_1, v_1u\} \subset \mathcal{D}(F_1)$ , concluimos que  $\{x_1, y_1, v_1\}$  es imagen bajo  $\phi_1$  de una partición de  $K_{3,3}$  y  $\{w, u, z\}$  es imagen de la otra partición de  $K_{3,3}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\phi(\alpha) = w$ ,  $\phi(\beta) = u$ ,  $\phi(\gamma) = z$ ,  $\phi(a) = x_1$ ,  $\phi(b) = y_1$  y  $\phi(c) = v_1$  y el resultado se sigue para  $|V(F_1)| = 6$ .

Supongamos el resultado para  $|V(F_1)| \leq n$ .

Si  $6 < |V(F_1)| = n + 1$ , entonces por el inciso 1 (Lema 4.2.4) existe un vértice  $v$  en  $K_{3,3}$  y al menos una arista  $f$  en  $F_1$  tal que  $f$  es arista de  $\phi_1(v)$ . Por el inciso 2 del Lema 4.2.4  $f$  está en  $\mathcal{D}(F_1)$ . Notemos que  $F_1/f$  (quitando aristas paralelas) es isomorfo a un grafo  $F'_1$  en  $\mathcal{H}_1$  con  $n$  vértices. Aplicando inducción a  $F'_1$  se tiene el resultado para  $F_1$ .

- B) El conjunto  $\mathcal{C}(F_2)$  es la unión de  $\{ux_i | i = 1, \dots, n\}$ ,  $\{uy_i | i = 1, \dots, m\}$ ,  $uz$ ,  $uw$ ,  $zw$  y  $\{wv_i | i = 1, \dots, r\}$ , y  $\mathcal{D}(F_2)$  es el complemento de  $\mathcal{C}(F_2)$ .

Si  $|V(F_2)| = 6$ , entonces ninguna arista de  $F_2$  se contrae para formar al menor  $K_{3,3}$  del modelo  $\phi_2$ . Además, por el inciso 3 del Lema 4.2.4, para cada arista  $f$  en  $\mathcal{D}(F_2)$  existe una arista  $g$  en  $K_{3,3}$  tal que  $f = \phi_2(g)$ . Dado que  $\{v_1w, wy_1, y_1z, zv_1\} \subset \mathcal{D}(F_2)$ , concluimos que  $\{x_1, y_1, v_1\}$  es imagen bajo  $\phi_2$  de una partición de  $K_{3,3}$  y  $\{w, u, z\}$  es imagen de la otra partición de  $K_{3,3}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\phi(\alpha) = u$ ,  $\phi(\beta) = z$ ,  $\phi(\gamma) = w$ ,  $\phi(a) = x_1$ ,  $\phi(b) = y_1$  y  $\phi(c) = v_1$ , y el resultado se tiene para  $|V(F_2)| = 6$ .

El paso de inducción es análogo al caso de  $F_1$ , ya que si  $f$  es arista de  $\mathcal{D}(F_2)$ , entonces  $F_2/f$  (quitando aristas paralelas) es isomorfo a un grafo más pequeño en  $\mathcal{H}_2$ .

- C) El conjunto  $\mathcal{C}(F_3)$  es  $\{uw, uy_i, wy_i | i = 0, \dots, n - 1\}$  y  $\mathcal{D}(B(n))$  es igual a  $\{uw, y_i y_{i+1 \text{ mód } n} | i = 0, \dots, n - 1\}$ .

Si  $|V(F_3)| = 6$ , ninguna arista de  $F_3$  se contrae para formar al menor  $K_{3,3}$  del modelo  $\phi_3$ . Además del inciso 3 (Lema 4.2.4) se sigue que, para cada arista  $f$  en  $\mathcal{D}(F_2)$  existe una arista  $g$  en  $K_{3,3}$  tal que  $f = \phi_3(g)$ . Dado que  $\{uw, y_i y_{i+1 \text{ mód } 4}\} \subset \mathcal{D}(F_3)$ , concluimos que  $\{u, y_1, y_3\}$  es imagen bajo  $\phi_3$  de una partición de  $K_{3,3}$  y  $\{w, y_0, y_2\}$  es imagen de la otra partición de  $K_{3,3}$ .

El paso de inducción es análogo al caso de  $F_1$ , ya que para cualquier arista  $f$  en  $\mathcal{D}(F_3) \setminus uv$  el grafo  $F_3/f$  (quitando aristas paralelas) es isomorfo a un grafo más pequeño en  $\mathcal{B}$ . ■

**Definición 4.2.2** Para un modelo  $\psi$  de  $M$  en  $G$  y un subgrafo  $K$  de  $M$  entendemos que:

$$\psi(K) := \bigcup_{v \in V(K)} \psi(v) \bigcup \bigcup_{e \in E(K)} \psi(e).$$

Además sea  $\phi$  un modelo de  $H$  en  $M$ . Definimos la *composición de modelos* como el mapeo  $\omega$  de  $H$  en  $G$  tal que:  $\omega(v) = \psi(\phi(v))$  para  $v$  vértice de  $H$  y  $\omega(e) = \psi(\phi(e))$  para  $e$  arista de  $H$ .

**Lema 4.2.7** La composición  $\omega$  de los modelos  $\psi$  y  $\phi$  es un modelo de  $H$  en  $G$ .

**Demostración.** Sea  $uv$  una arista de  $H$ , como  $\phi$  es un modelo, la arista  $u'v' = \phi(uv)$  es tal que  $u'$  está en  $\phi(u)$  y  $v'$  está en  $\phi(v)$ ; por la misma razón existe la arista  $u''v'' = \psi(u'v')$  tal que  $u''$  y  $v''$  están en  $\psi(u')$  y  $\psi(v')$ , respectivamente. Por lo tanto,  $\omega(uv)$  es la arista  $u''v''$  tal que tiene un extremo en  $\psi(\phi(v)) = \omega(v)$  y el otro en  $\psi(\phi(u)) = \omega(u)$ . Por lo tanto la condición para aristas se cumple.

Por definición es claro que  $\omega(v)$  es un subgrafo de  $G$ . Solo resta probar que  $\omega(v)$  es conexo. Sean  $x$  y  $y$  dos vértices de  $\omega(v) = \psi(\phi(v))$ . Por la definición tenemos dos casos:

Caso 1. Existe  $x'$  en  $\phi(v)$  tal que  $x$  y  $y$  están en  $\psi(x')$ . Entonces hay un camino en  $G$  que une  $x$  con  $y$ , ya que  $\psi(x')$  es conexo.

Caso 2. Existen  $x'$  y  $y'$  vértices distintos en  $\phi(v)$  tales que  $x$  está en  $\psi(x')$  y  $y$  está en  $\psi(y')$ . Dado que  $\phi(v)$  es conexo, existe un camino  $x'z_1z_2 \dots z_ny'$ . Para obtener el resultado aplicaremos inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 0$  entonces  $x'y'$  es una arista de  $\phi(v)$ . Dado que  $\psi$  es un modelo, la arista  $x''y'' = \psi(x'y')$  es una arista de  $G$  tal que  $x''$  es vértice de  $\psi(x')$  y  $y''$  es vértice de  $\psi(y')$ . Además, como  $\psi(x')$  y  $\psi(y')$  son conexos, existen caminos  $P$  y  $Q$  que unen  $x''$  con  $x$  y  $y''$  con  $y$ , respectivamente. Entonces uniendo los caminos  $P$  y  $Q$  con la arista  $x''y''$  construimos un camino que une  $x$  con  $y$  en  $G$ .

Supongamos el resultado para  $n \leq s$ .

Si  $n = s + 1$ . Sea  $z$  vértice de  $\psi(z_n)$ . Por hipótesis de inducción existe un camino que une  $x$  con  $z$  en  $G$  y otro camino que une  $z$  con  $y$  en  $G$ . El resultado se sigue uniendo estos caminos.

Por lo tanto  $\omega(v)$  es conexo y  $\omega$  es un modelo de  $H$  en  $G$ . ■

Ahora pasaremos a probar el Teorema 4.2.2.

**Demostración 1 del Teorema 4.2.2.** Por el Corolario 4.1.5 usando reducciones en serie y paralelo podemos reducir  $G$  a un grafo, simple, casi-plano, 3-conexo. Entonces, supongamos que  $G$  es un grafo, simple, casi-plano, 3-conexo. Por el Teorema 4.1.2, existe un grafo  $G'$  en alguna de las familias de Gubser  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  o  $\mathcal{M}$  tal que existe un modelo  $\psi$  de  $G$  en  $G'$ . Sean  $R_G$ ,  $D_G$  y  $C_G$  la partición de las aristas de  $G'$  por el modelo  $\psi$ .

A) Del Lema 4.2.4 inciso 3), tenemos que  $D_G \cap \mathcal{D}(G') = \emptyset$ .

B) Del Lema 4.2.4 inciso 2), tenemos que  $C_G \cap \mathcal{C}(G') = \emptyset$ .

Aplicaremos inducción sobre  $|V(G')|$ , si  $|V(G')| = 5$ , entonces  $G$  es  $K_5$  y el resultado se sigue fácilmente. Supongamos que  $|V(G')| \geq 6$ .

Primero tenemos tres observaciones que se siguen de la demostración del Teorema 2.3.5  $\Delta \leftrightarrow Y$ -menor:

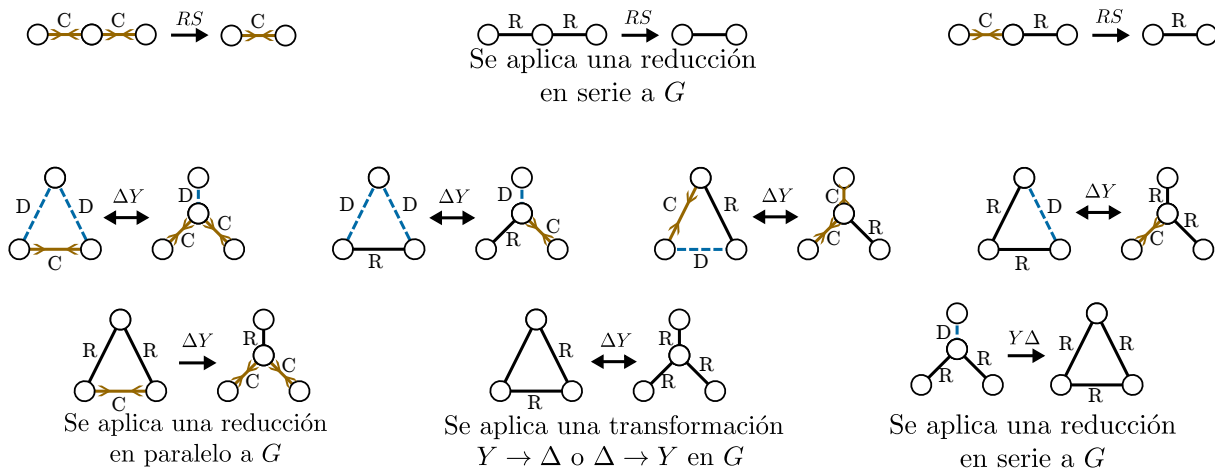
- C) Si tenemos un vértice  $a$  de grado dos con aristas  $\alpha = ab$  y  $\beta = ac$  tales que  $\alpha$  y  $\beta$  están en  $R_G$  o  $C_G$ , y aplicamos una reducción en serie (RS) sobre  $a$  en  $G'$  obtenemos la arista  $\alpha' = bc$  que está en  $C_G$  o  $R_G$ .
- D) Si tenemos un triángulo  $T$  con aristas  $\alpha = ab$ ,  $\beta = bc$  y  $\gamma = ca$  y las aristas  $\alpha$  y  $\beta$  están en  $R_G$  o  $D_G$ , y  $\gamma$  está en  $C_G$  o  $R_G$ , entonces al aplicar una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  a  $T$  en  $G'$  obtenemos un vértice  $d$  de grado tres con aristas  $\alpha' = ad$ ,  $\beta' = bd$  y  $\gamma' = cd$ , entonces  $\beta'$  está en  $R_G$  o  $D_G$ , y  $\alpha'$  y  $\gamma'$  están en  $C_G$  o  $R_G$ .
- E) El opuesto al inciso D). Si tenemos un vértice  $d$  de grado tres con aristas  $\alpha = ad$ ,  $\beta = bd$  y  $\gamma = cd$ , y  $\beta$  está en  $R_G$  o  $D_G$ , y  $\alpha$  y  $\gamma$  están en  $C_G$  o  $R_G$ , entonces al aplicar una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $d$  en  $G'$  obtenemos un triángulo con aristas  $\alpha' = ab$ ,  $\beta' = bc$  y  $\gamma' = ca$  con las aristas  $\alpha'$  y  $\beta'$  en  $R_G$  o  $D_G$ , y  $\gamma'$  en  $C_G$  o  $R_G$  (ver Figura 4.17).

Estas observaciones nos dicen como las aristas cambian de conjunto en la partición  $R_G$ ,  $C_G$  y  $D_G$  al aplicar reducción en serie, transformación  $\Delta \rightarrow Y$  o  $Y \rightarrow \Delta$ . Es decir, sabemos como se traducen las operaciones de  $G'$  a  $G$ .

Si  $|V(G)| = 5$ , entonces  $G$  es  $K_5$  y el resultado se sigue fácilmente.

Si  $|V(G)| \geq 6$ . El Teorema 2.2.8 de Hall nos asegura que  $G$  tiene un modelo  $\phi$  de  $K_{3,3}$ . Sea  $\omega$  la composición de modelos  $\phi$  y  $\psi$ , por el Lema 4.2.7  $\omega$  es un modelo de  $K_{3,3}$  en  $G'$ .

- F) Sea  $e$  una arista de  $K_{3,3}$ , entonces  $\omega(e)$  es una arista de  $R_G$ . Esto es claro ya que  $\psi(E(G)) = R_G$  y  $\phi(E(K_{3,3})) \subset E(G)$ .



**Figura 4.17:** Observaciones C), D) y E)

A continuación construimos otro grafo  $G'_h$  en alguna de las familias de Gubser  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{M}$  tal que  $|V(G'_h)| < |V(G')|$ . Para esto sea  $\{\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{a, b, c\}\}$  la bipartición de  $K_{3,3}$ , tenemos los siguientes casos:

I)  $G'$  es una banda de Möbius  $M(n)$ .

a) Aplicando el Lema 4.2.5 al modelo  $\omega$ , sabemos que existe un conjunto de vértices  $A = \{x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l | j < k < l\}$  tal que  $\omega(a\beta) = x_j y_j$ ,  $\omega(a\gamma) = x_k y_k$ ,  $\omega(b\gamma) = x_l y_l$  y para cada camino  $Q$  en  $\{x_j \cdots x_k, x_k \cdots x_l, y_j \cdots y_k, y_k \cdots y_l, y_l \cdots y_n x_1 \cdots x_j, x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_j\}$  hay una arista  $e$  en  $K_{3,3}$  tal que  $\omega(e)$  está en  $Q$ .

b) Además, los vértice en  $A$  son los vértices de ramificación de un grafo  $K^0$ , en  $G'$ , que es subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Si  $|V(G')| = 6$  entonces  $G'$  y  $G$  son  $K_{3,3}$ . Supongamos que,  $|V(G')| > 6$  entonces existe  $i$  diferente de  $j, k$  y  $l$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $j < i < k$ , ya que si no fuera así bastaría con renombrar a los vértices de  $G'$ .

Por el Lema 4.2.3 inciso II) podemos reducir  $G'$  a una banda de Möbius más pequeña, quitando los vértices  $x_i, y_i$ . Para lograr esto, a  $G'$  le aplicamos las operaciones:  $Y\Delta + OP1 + OP1 + RS$  que es igual a  $Y\Delta$  en  $y_i + \Delta Y$  en el triángulo  $x_{i-1} x_i y_{i-1} x_{i-1} + RS$  en  $x_{i-1} + \Delta Y$  en el triángulo  $x_{i+1} x_i y_{i+1} x_{i+1} + RS$  en  $x_{i+1} + RS$  en  $x_i$ . Sean  $G'_h$ , con  $h = 1, \dots, 6$ , la secuencia de reducciones obtenida.

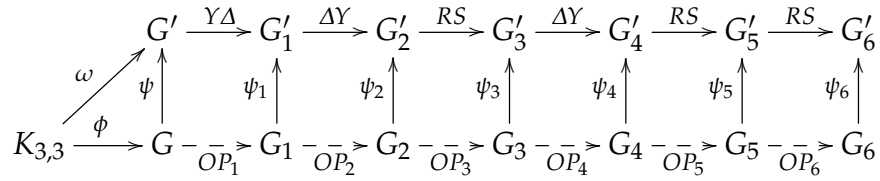
Nombremos como  $z$  y  $w$  a los vértices introducidos al aplicar la primer y segunda transformación  $\Delta \rightarrow Y$ , respectivamente. Si  $i - 1 = j$ , entonces renombramos al vértice  $z$  como  $x_j$  y a  $x_j$  como  $z$  en  $G'_h$ , para  $h = 2, 3, 4, 5, 6$ . Si  $i + 1 = k$ , entonces renombramos al vértice  $w$  como  $x_k$  y a  $x_k$  como  $w$  en  $G'_h$ , para  $h = 4, 5, 6$ .



Es claro que  $G'_h$  es menor de alguna banda de Möbius. Por la renombración de  $z$  y  $w$ , y la elección de  $i$ , el grafo  $G'_h$  tiene al conjunto de vértices  $A$ .  $G'_h$  no es plano ya que los vértices en  $A$  son vértices de ramificación de una subdivisión  $K^h$  de  $K_{3,3}$  en  $G'_h$ . Así Por el Lema 4.1.7  $G'_h$  es casi-plano, para  $h = 1, \dots, 6$ .

Las aristas de  $G'_h$  están particionadas en  $D_G^h$ ,  $R_G^h$  y  $C_G^h$  en base a las operaciones que las forman y a las observaciones C), D) y E). Sean  $G_h$  los grafos resultantes de contraer y quitar, de  $G'_h$ , las aristas en  $C_G^h$  y  $D_G^h$ , respectivamente; esto nos define el modelo  $\psi_h$  de  $G_h$  en  $G'_h$ . Los grafos  $G_h$  son la secuencia de reducción de  $G$ .

Hemos construido el siguiente diagrama donde  $OP_i$  son operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , que dependen de las observaciones C), D) y E).



Ahora veremos que  $G_h$  es casi-plano. Como  $G_h$  es menor de  $G'_h$  y  $G'_h$  es casi-plano, por el Lema 4.1.7 solo nos resta ver que  $G_h$  no es plano. Para esto tenemos las siguientes observaciones:

- c) De la observaciones F) y Ia) se sigue que  $x_j y_j$ ,  $x_k y_k$  y  $x_l y_l$  de  $G'$  están en  $R_G$ . Junto con las observaciones A), B), C), D) y E) se sigue que, las aristas  $x_j y_j$ ,  $x_k y_k$  y  $x_l y_l$  están en  $R_G^h$ . Por lo tanto existe arista  $x'_s y'_s$  ( $s = j, k, l$ ) en  $G_h$  tal que  $\psi_h(x'_s y'_s) = x_s y_s$  y definimos a  $B_h = \{x'_s y'_s | s = j, k, l\}$ .
- d) Para  $h = 0, 1 \dots 6$ , nombramos como  $P_s^h$  ( $s = 1, \dots, 6$ ) a los caminos en  $K^h \setminus \{x_j y_j, x_k y_k, x_l y_l\}$  tales que ninguno de sus vértices internos es de ramificación. Por el inciso Ia)  $|P_s^0 \cap R_G| \geq 1$ . La observación A) nos garantiza que  $P_s^0 \cap D_G = \emptyset$ . De las observaciones A), B), C), D) y E) se sigue que,  $|P_s^h \cap R_G^h| \geq 1$  para  $h = 1, \dots, 6$  y  $P_s^h \cap D_G^h = \emptyset$ .
- e) Supongamos que  $P_s^0$  es internamente disjunto de  $P_r^0$ , sea  $x_m y_m$  una arista en  $G'$ , tal que  $y_m$  y  $x_m$  son vértices internos de  $P_s^0$  y  $P_r^0$ , respectivamente. La observación B) nos garantiza que, la arista  $x_m y_m$ , está en  $D_G$  o en  $R_G$ .

Por esto y las observaciones A), B), C), D) y E). Si  $P_s^h$  es internamente disjunto de  $P_r^h$ , entonces toda arista  $xy$ , tal que  $y$  y  $x$  son vértices internos de  $P_s^h$  y  $P_r^h$ , respectivamente, está en  $D_G^h$  o en  $R_G^h$ .

Por la observación Id)  $P_s^h$  genera un camino  $Q_s^h$  en  $G_h$  que une a  $x'_j$  con  $x'_k$ , o  $x'_k$  con  $x'_l$ , o  $x'_l$  con  $y'_j$ , o  $y'_j$  con  $y'_k$ , o  $y'_k$  con  $y'_l$ , o  $y'_l$  con  $x'_j$ . La observación Ie)) nos

garantiza que los caminos  $Q_s^h$  son internamente disjuntos. Y dado que existen las aristas  $x'_s y'_s$  ( $s = j, k, l$ ) en  $G_h$  (observación Ic) los vértices de  $B_h$  son vértices de ramificación de una subdivisión de  $K_{3,3}$  en  $G_h$ . Por lo tanto  $G_h$  no es plano y es casi-plano.

II)  $G'$  está en  $\mathcal{H}_1$ . Si  $|V(G')| = 6$  entonces solo resta quitar las aristas  $uw$ ,  $wz$  y  $zu$  (si es que están en  $G$ ), para esto usamos la operación  $OP1$  con centro  $x_1$ . Es fácil ver que los grafos en esta secuencia de reducción son casi-planos. Supongamos que  $|V(G')| > 6$ .

a) Aplicando el inciso A) del Lema 4.2.6 al modelo  $\omega$ , obtenemos un conjunto de vértices  $A = \{u, w, z, x_a, y_b, v_c\}$  tal que  $\omega(\beta a) = ux_a$ ,  $\omega(\beta b) = uy_b$ ,  $\omega(\alpha c) = wv_c$  y para cada camino  $Q$  en  $\{zx_1 \cdots x_a, x_a \cdots x_n w, wy_1 \cdots y_b, y_b \cdots y_m z, zv_r \cdots v_c, v_c \cdots v_1 u\}$  hay una arista  $e$  en  $K_{3,3}$  tal que  $\omega(e)$  está en  $Q$ .

b) Además, los vértice en  $A$  son los vértices de ramificación de un grafo  $K^0$ , en  $G'$ , que es subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Dado que  $|V(G')| > 6$ , podemos tomar un vértice  $r$  en  $V(G') \setminus A$ . Por el Lema 4.2.3 inciso I podemos reducir  $G'$  a un grafo  $G'_3$  más pequeño en  $\mathcal{H}_1$ ; quitando el vértice  $r$ . Esto lo logramos aplicado las operaciones:  $Y\Delta + RP + RP$ . Sean  $G'_h$ , para  $h = 1, 2, 3$ , la secuencia de reducción obtenida.

Notemos que  $G'_h$  es menor de algún grafo en  $\mathcal{H}_1$ . Por la elección de  $r$ ,  $G'_h$  tiene a los vértices de  $A$ , que forman una subdivisión  $K^h$  de  $K_{3,3}$  en  $G'_h$ . Usando el Lema 4.1.7 concluimos que  $G'_h$  es casi-plano, para  $h = 1, 2, 3$ .

Las aristas de  $G'_h$  están particionadas en  $D_G^h$ ,  $R_G^h$  y  $C_G^h$  en base a las operaciones que las forman y a las observaciones C), D) y E). Sean  $G_h$  los grafos resultantes de contraer y quitar, de  $G'_h$ , las aristas en  $C_G^h$  y  $D_G^h$ , respectivamente. Los grafos  $G_h$  son la secuencia de reducción de  $G$ . Igualmente que en el caso anterior  $G_h$  es casi-plano, para  $h = 1, 2, 3$ , ya que se cumplen las observaciones IIa) y IIb).

III)  $G'$  está en  $\mathcal{H}_2$ . Si  $|V(G')| = 6$  entonces solo resta quitar las aristas  $uw$ ,  $wz$  y  $zu$  (si es que están en  $G$ ), para esto usamos la operación  $OP1$  con centro  $x_1$ . Es fácil ver que los grafos en esta secuencia de reducción son casi-planos. Supongamos que  $|V(G')| > 6$ .

a) Aplicando el inciso B) del Lema 4.2.6 al modelo  $\omega$ , obtenemos un conjunto de vértices  $A = \{u, w, z, x_a, y_b, v_c\}$  tal que  $\omega(\alpha a) = ux_a$ ,  $\omega(\alpha b) = uy_b$ ,  $\omega(\alpha c) = uv_c$  y para cada camino  $Q$  en  $\{zx_1 \cdots x_a, x_a \cdots x_n w, wy_1 \cdots y_b, y_b \cdots y_m z, zv_1 \cdots v_c, v_c \cdots v_r w\}$  hay una arista  $e$  en  $K_{3,3}$  tal que  $\omega(e)$  está en  $Q$ .

b) Además, los vértice en  $A$  son los vértices de ramificación de un grafo  $K^0$ , en  $G'$ , que es subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Tenemos el resultado de forma similar que el inciso anterior, aplicando el Lema 4.2.3 inciso I y las observaciones IIIa) y IIIb).

IV)  $G'$  es una bi-rueda  $B(n)$ .

- a) Aplicando el inciso C) del Lema 4.2.6 al modelo  $\omega$ , obtenemos un conjunto de vértices  $A = \{u, w, y_j, y_k, y_l, y_m\}$  tal que  $\omega(a\alpha) = uw$ ,  $\omega(a\gamma) = wy_m$ ,  $\omega(a\beta) = wy_k$ ,  $\omega(b\alpha) = uy_j$ ,  $\omega(c\alpha) = uy_l$  y para cada camino  $Q$  en  $\{y_j \cdots y_k, y_k \cdots y_l, y_l \cdots y_m, y_m \cdots y_j\}$  hay una arista  $e$  en  $K_{3,3}$  tal que  $\omega(e)$  está en  $Q$ .
- b) Además, los vértice en  $A$  son los vértices de ramificación de un grafo  $K^0$ , en  $G'$ , que es subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Si  $|V(G')| = 6$  entonces solo resta quitar las aristas (si es que están en  $G$ )  $wy_j, wy_l, uy_k$  y  $uy_m$ ; las cuales podemos quitar con operaciones  $OP1$  y  $OP2$ , es fácil ver que los grafos en la secuencia de reducción son casi-planos.

Si  $|V(G')| > 6$ , entonces existe  $i$  diferente de  $j, k, l$  y  $m$  tal que  $y_i$  es un vértice de  $G'$ .

Por el Lema 4.2.3 inciso III podemos reducir  $G'$  a una bi-rueda más pequeño. Las operaciones usadas son:  $\Delta Y$  en  $y_i y_{i+1} u y_i$  agregando el vértice  $z + Y\Delta$  en  $y_i + Y\Delta$  en  $y_{i+1} + RP$  en  $y_{i-1} w + RP$  en  $wz + RP$  en  $y_{i+1} w$ . Sean  $G'_h$ , con  $h = 1, \dots, 6$ , la secuencia de reducciones.

Si  $i + 1 = j, k, l$  o  $m$ , entonces renombramos  $z$  como  $y_{i+1}$  y  $y_{i+1}$  como  $z$ , en  $G'_h$  para  $h = 3, 4, 5, 6$ .

Es claro que  $G'_h$  es menor de algún grafo en  $\mathcal{B}$ . Por la elección de  $i$ ,  $G'_h$  tiene al conjunto de vértices  $A$  que forman una subdivisión  $K^h$  de  $K_{3,3}$ . Por el Lema 4.1.7  $G'_h$  es casi-plano para  $h = 1, \dots, 6$ .

Las aristas de  $G'_h$  están particionadas en  $D_G^h, R_G^h$  y  $C_G^h$  en base a las operaciones que las forman y a las observaciones C), D) y E). Sean  $G_h$  los grafos resultantes de contraer y eliminar, de  $G'_h$ , las aristas en  $C_G^h$  y  $D_G^h$ , respectivamente. Los grafos  $G_h$  son la secuencia de reducción de  $G$ . De forma análoga que en el inciso I  $G_h$  es casi-plano, para  $h = 1, \dots, 6$ , ya que tenemos las observaciones IVa) y IVb).

Así hemos construido una secuencia de reducciones de  $G$  a  $G_h$  por grafos casi-planos. Y a un grafo  $G'_h$  en alguna de las familias de Gubser tal que  $G_h$  es menor de  $G'_h$  y  $|V(G'_h)| < |V(G')|$ . Entonces, por inducción se sigue el resultado. ■

### 4.2.3 DEMOSTRACIÓN 2 DEL TEOREMA 4.2.2

En esta prueba utilizamos una descripción completa de los grafos casi-planos que recientemente dieron Ding, Fallon y Marshall en [23].

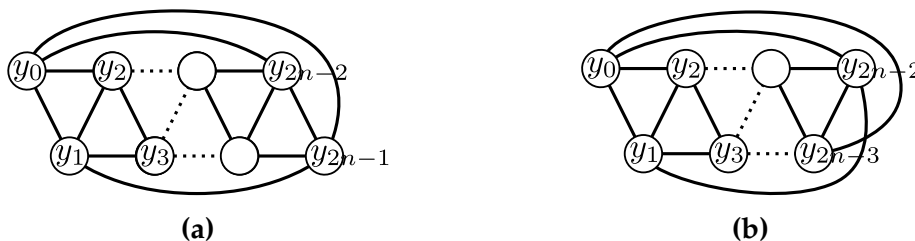
**Teorema 4.2.8 (Ding et al. [23])** Sea  $G$  un grafo simple, 3-conexo, no plano. Entonces tenemos las siguientes equivalencias.

- I)  $G$  es casi-plano.
- II)  $G$  es menor de una bi-rueda, banda de Möbius o un grafo en  $\mathcal{W}$ .
- III)  $G$  es libre de los grafos en  $\mathcal{F} = \{EX1, EX2, EX3, EX6, EX8\}$  que se muestran en la Figura 4.5.
- IV)  $G$  es libre de  $K_5^+$ ,  $K_{3,3}^+$ ,  $EX3$  y  $EX6$ .

**Definición 4.2.3** Sea  $k \geq 0$  un entero. Una  $k$ -separación de un grafo  $G$  es un par ordenado  $\{G_1, G_2\}$  de subgrafos inducidos propios no vacíos de  $G$  tales que  $G_1 \cup G_2 = G$  y  $|V(G_1) \cap V(G_2)| = k$ .

Un grafo 3-conexo con  $|V(G)| \geq 5$  es *internamente 4-conexo* si para cualquier 3-separación  $\{G_1, G_2\}$ , exactamente uno de  $G_1$  o  $G_2$  es  $K_{1,3}$ . Note que en un grafo internamente 4-conexo ningún vértice de grado tres está en un triángulo. Esta propiedad es muy usada por Ding et al.

Sea  $C_n^2$  el grafo obtenido de un ciclo  $C = y_0y_1 \cdots y_{n-1}y_0$  y la unión de todos los pares de vértices que estén a distancia dos sobre el ciclo  $C$  (ver Figura 4.18). Diremos que  $G$  es un grafo de la familia  $\mathcal{C}^{2*}$  si existe un grafo  $C_{2n-1}^2$  ( $n \geq 3$ ) y una sucesión de grafos simples  $G_0, G_1, \dots, G_m = G$  tales que,  $G_0 = C_{2n-1}^2$  y  $G_{i+1}$  es el resultado de una 3-suma de  $G_i$  y una rueda  $W_i$  donde el sumando de  $G_i$  es el triángulo  $y_iy_{i+1} \text{ mód } 2n-1y_{i-1} \text{ mód } 2n-1y_i$ , el centro de  $W_i$  coincide con  $y_i$  y la arista  $y_{i-1} \text{ mód } 2n-1y_{i+1} \text{ mód } 2n-1$  no está en  $G_{i+1}$  (si  $m = 0$ , entonces  $G = C_{2n-1}^2$ ).



**Figura 4.18:** a) el grafo  $C_{2n}^2$  y b) el grafo  $C_{2n-1}^2$

Notemos que si  $G$  es un grafo en  $\mathcal{W}$  entonces  $G$  se puede ver como la 3-suma de tres ruedas sobre un mismo triángulo  $\Delta$  y  $\Delta$  está en  $G$ . Definimos a  $\mathcal{W}^*$  como los grafos

simples resultantes de la 3-suma de tres ruedas sobre el mismo triángulo. Es claro que  $\mathcal{W}$  es subfamilia de  $\mathcal{W}^*$ , de hecho si  $G$  es un grafo que está en  $\mathcal{W}^* \setminus \mathcal{W}$  entonces,  $G$  no tiene al triángulo  $\Delta$ , solo tiene ninguna o algunas aristas de  $\Delta$ .

Una *bi-rueda alternante* de longitud  $2n$  ( $n \geq 2$ ), denotada por  $AW(n)$ , es obtenida de un ciclo  $C = y_0y_1 \cdots y_{2n-1}$  y la adición de una arista  $uw$  donde  $u$  y  $w$  no están en  $C$ , y las aristas  $uy_{2j+1}$  y  $wy_{2j}$  con  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , a la familia de ruedas alternantes la denotamos  $\mathcal{AW}$ .

$G$  es un grafo de  $\mathcal{B}^*$  si existe una bi-rueda  $B(n)$  y una sucesión de grafos simples  $G_0, G_1, \dots, G_m = G$  tales que,  $G_0 = B(n)$  y  $G_{i+1}$  es el resultado de una 3-suma de  $G_i$  y una rueda  $W_i$ , donde el sumando de  $G_i$  es el triángulo  $uy_iy_{i+1} \pmod n^u$  o  $wy_iy_{i+1} \pmod n^w$ , el centro de  $W_i$  coincide con  $u$  o  $w$ , y la arista  $y_iy_{i+1} \pmod n$  no está en  $G_{i+1}$  (si  $m = 0$ , entonces  $G = B(n)$ ).

Sea  $\{G_1, G_2\}$  una 3-separación de  $G$ . Para  $i = 1, 2$  definimos  $G_i^\Delta$  como el grafo obtenido de  $G_i$  por la adición de todas las aristas que no estén entre vértices de  $G_1 \cap G_2$ , y al grafo  $G_i^Y$  como el grafo obtenido de  $G_i$  por la adición a  $G_i$  de un nuevo vértice  $v_i$  y las aristas entre  $v_i$  y los tres vértices de  $G_1 \cap G_2$ .

Para probar el Teorema 4.2.8 Ding et al. usaron los siguientes lemas.

**Lema 4.2.9 (Ding et al. [23])** Sea  $G$  un grafo simple, 3-conexo y libre de  $K_{3,3}^+$  y EX3. Si  $\{G_1, G_2\}$  es una 3-separación de  $G$  tal que  $G_1^Y$  no es plano, entonces  $G_2^\Delta$  es una rueda.

**Lema 4.2.10 (Ding et al. [23])** Sea  $G$  un grafo simple, conexo y libre de  $K_{3,3}^+$  y EX6. Si  $G$  contiene a  $M(4)$  como menor, entonces  $G$  es menor de una banda de Möbius  $M(n)$  ( $n \geq 4$ ).

**Lema 4.2.11 (Ding et al. [23])** Si  $G$  es un grafo simple, no plano, internamente 4-conexo y libre de  $K_5^+, K_{3,3}^+, EX3$  y EX6, entonces  $G$  es isomorfo a  $M(n), C_{2n-1}^2, B(n)$  o  $AW(n)$  para algún  $n \geq 3$ .

Durante la prueba del Teorema 4.2.8 Ding, Fallon y Marshall casi prueban el siguiente lema, solo les faltó el caso de  $C_{2n-1}^2$  ya que lo resolvieron usando el Lema 4.2.10. A continuación reescribimos la prueba hasta este caso y lo modificamos para obtener el resultado.

**Lema 4.2.12** Sea  $G$  un grafo simple, 3-conexo, no plano.  $G$  es libre de  $K_{3,3}^+, K_5^+, EX3$  y EX6 si y sólo si  $G$  está en  $\mathcal{M}, \mathcal{W}^*, \mathcal{B}^*$  o  $\mathcal{C}^{2*}$ .

**Demostración.** Supongamos que  $G$  está en  $\mathcal{M}, \mathcal{W}^*, \mathcal{B}^*$  o  $\mathcal{C}^{2*}$ . Por el Lema 4.1.1 los grafos en  $\mathcal{M}, \mathcal{B}$  y  $\mathcal{W}$  son casi-planos, y por el Lema 4.1.7 los grafos en  $\mathcal{W}^*, \mathcal{B}^*$ , y  $\mathcal{C}^{2*}$  son casi-planos, ya que son no planos y son menores de grafos en  $\mathcal{W}, \mathcal{B}$  y  $\mathcal{M}$ ,

respectivamente. Por lo tanto  $G$  es libre de  $K_{3,3}^+$ ,  $K_5^+$ ,  $EX3$  y  $EX6$ .

Ahora, supongamos que  $G$  es libre de  $K_{3,3}^+$ ,  $K_5^+$ ,  $EX3$  y  $EX6$ .

Si  $G$  tiene tres vértices tales que al borrarlos el grafo resultante tiene más de dos componentes. Como  $G$  es libre de  $K_{3,3}^+$ , hay exactamente tres componentes y  $G$  puede ser expresado como 3-sumas de tres grafos  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  sobre un triángulo en común. Sea  $i = 1, 2, 3$ , usando el Lema 4.2.9 para la 3-separación de  $G$  determinada por  $\{G_j \cup G_k, G_i\}$ , donde  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , concluimos que  $G_i$  es una rueda, por lo tanto  $G$  está en  $\mathcal{W}^*$ . En el resto de la prueba asumiremos que cualquier tercia de vértices de  $G$  lo separa en a lo más dos componentes, y diremos que tal grafo es *fuertemente conexo*. Por contradicción vamos a probar que:

- a)  $G$  tiene un menor no plano, internamente 4-conexo  $G'$  tal que  $G$  es obtenido de  $G'$  por 3-sumas de ruedas en distintos triángulos de  $G'$ .

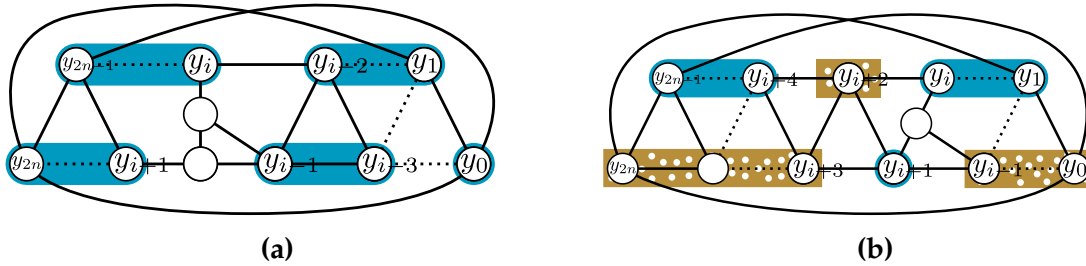
Sea  $|V(G)|$  el menor número posible en donde no ocurra a). Como en los grafos internamente 4-conexos siempre ocurre a),  $G$  tiene una 3-separación  $\{G_1, G_2\}$  tal que ninguna de las partes es  $K_{1,3}$ . Como  $G$  no es plano, al menos uno de los grafos  $G_1^Y$  o  $G_2^Y$  es no plano. Sin pérdida de generalidad supongamos que,  $G_1^Y$  no es plano. Escojamos la separación de tal forma que  $|V(G_1^Y)|$  sea el menor número posible. Dado que  $G_2$  no es  $K_{1,3}$  el grafo  $G_1^A$  es un menor, 3-conexo de  $G$ . Notemos que  $G_1^A$  también es fuertemente conexo, si no lo fuera entonces  $G$  tampoco lo sería. Más aun,  $G_1^A$  no es plano, en caso contrario, como  $G_1^Y$  no es plano, el triángulo  $xyzx$  común de  $G_1^A$  y  $G_2^A$  no es frontera de una cara en  $G_1^A$ , esto implica que  $G \setminus \{x, y, z\}$  tiene más de dos componentes, contradiciendo la fuertemente conexidad de  $G$ . Por lo tanto  $G_1^A$  cumple con todas las hipótesis que necesita el inciso ??) y es más pequeño que  $G$ . Entonces  $G_1^A$  tiene un menor  $G'$  no plano, internamente 4-conexo, tal que  $G_1^A$  se puede obtener por 3-sumas de ruedas en distintos triángulos de  $G'$ . Por la minimalidad de  $G_1$ , el triángulo  $xyzx$  está en  $G'$  y así  $G$  también es obtenido de  $G'$  por 3-sumas de ruedas en distintos triángulos de  $G'$ , ya que  $G_2^A$  es una rueda, por el Lema 4.2.9. Así el inciso a) es verdadero.

Por el Lema 4.2.11, sabemos que  $G'$  es  $M(n)$ ,  $C_{2n-1}^2$ ,  $B(n)$  o  $AW(n)$  para algún  $n \geq 3$ . Así el lema es cierto si  $G = G'$ , ya que  $AW(n)$  se puede obtener de una bi-rueda  $B(n)$  por medio de 3-sumas de ruedas  $W(3)$ , por lo tanto  $AW(n)$  es un elemento de  $\mathcal{B}^*$ . Ahora, supongamos que al menos una rueda es 3-sumada a  $G'$ . Como  $M(n)$  y  $AW(n)$  no tienen triángulos, solo necesitamos considerar todas las posibles formas de 3-sumar una rueda a  $C_{2n-1}^2$  y  $B(n)$ .

Supongamos que  $G' = C_{2n+1}^2$  ( $n \geq 3$ ). Ding et al. en la página 7 de su artículo [23] resuelven este caso usando el Lema 4.2.10, ya que una 3-suma de  $G'$  y una rueda da como resultado un grafo que tiene a  $M(4)$  como menor, y por hipótesis el grafo resultante es libre de  $K_{3,3}^+$  y  $EX6$ . Pero nosotros necesitamos probar que la 3-suma da

como resultado un grafo en  $\mathcal{C}^{2*}$ . Sea  $C$  el ciclo  $y_0y_1 \cdots y_{2n}$  tal que  $G'$  es formado al unir los pares de vértices a distancia dos sobre  $C$ . Los únicos triángulos de  $G'$  son  $T = y_iy_{i+1} \text{ mód } 2n+1 y_{i-1} \text{ mód } 2n+1 y_i$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i - 1 \text{ mód } 2n + 1$  es par. Sea  $H$  el resultado de 3-sumar  $G'$  con una rueda  $W(k)$  donde el sumando de  $G'$  es  $T$ , y llamemos  $c$  al centro de  $W(k)$ . Tenemos dos observaciones:

- b) El vértice  $c$  es identificado con  $y_i$  al construir  $H$ . Supongamos que  $k > 3$ , ya que si  $k = 3$  cualquier vértice de  $W(k)$  puede ser su centro. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c$  es identificado con  $y_{i-1} \text{ mód } 2n+1$ . Tomemos a los siguientes caminos  $P_1 = y_1y_3 \cdots y_{i-4} \text{ mód } 2n+1 y_{i-2} \text{ mód } 2n+1$ ,  $P_2 = y_2y_4 \cdots y_{i-3} \text{ mód } 2n+1 y_{i-1} \text{ mód } 2n+1$ ,  $P_3 = y_iy_{i+2} \text{ mód } 2n+1 \cdots y_{2n-1}$ ,  $P_4 = y_{i+1} \text{ mód } 2n+1 y_{i+3} \text{ mód } 2n+1 \cdots y_{2n}$ . Entonces el grafo resultante de contraer los caminos  $P_i$  en  $H$  tiene a  $EX_6$  como menor (ver Figura 4.19a), lo cual es una contradicción.
- c) La arista  $y_{i-1} \text{ mód } 2n+1 y_{i+1} \text{ mód } 2n+1$  no está en  $H$ . Supongamos que sí está. Tomemos a los siguientes caminos  $P_1 = y_0y_2 \cdots y_{i-5} \text{ mód } 2n+1 y_{i-3} \text{ mód } 2n+1 y_{i-1} \text{ mód } 2n+1$ ,  $P_2 = y_1 y_3 \cdots y_{i-4} \text{ mód } 2n+1 y_{i-2} \text{ mód } 2n+1 y_i$ ,  $P_3 = y_{i+3} \text{ mód } 2n+1 y_{i+5} \text{ mód } 2n+1 \cdots y_{2n}$ ,  $P_4 = y_{i+4} \text{ mód } 2n+1 y_{i+6} \text{ mód } 2n+1 \cdots y_{2n-1}$ . Entonces el grafo resultante de contraer los caminos  $P_i$  en  $H$  tiene a  $K_{3,3}^+$  como menor (ver Figura 4.19b), lo cual es una contradicción.



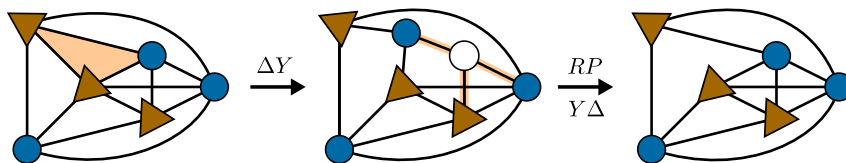
**Figura 4.19:** a) El grafo  $H$  cuando el centro de la rueda es  $y_{i-1} \text{ mód } 2n+1$ .  
 b) El grafo  $H$  cuando la arista  $y_{i-1} \text{ mód } 2n+1 y_{i+1} \text{ mód } 2n+1$  está en  $H$ .

Por lo tanto  $H$  y  $G$  son grafos de  $\mathcal{C}^{2*}$ .

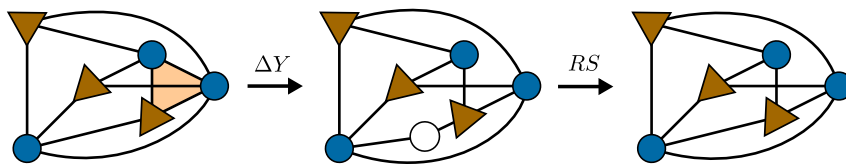
Cuando  $G' = B(n)$  ( $n \geq 4$ ) fue tratado por Ding et al. en la página 7 del artículo [23], y llego a la conclusión de que  $G$  está en  $\mathcal{B}^*$ .

Para el caso de que  $G' = K_5 = B(3) = C_5^2$ , también fue tratado por Ding et al. en la página 8 del artículo [23]. Llegaron a la conclusión de que  $G$  está en  $\mathcal{B}^*$  o en  $\mathcal{C}^{2*}$ . Esto prueba el lema. ■

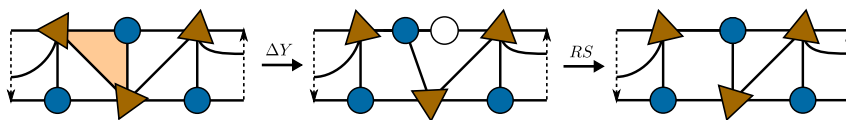
**Demostración 2 del Teorema 4.2.2.** Por el Corolario 4.1.5 podemos suponer que  $G$  es un grafo simple, casi-plano, 3-conexo. Procederemos por inducción en  $|V(G)|$ . Si  $|V(G)| = 5$ , entonces  $G$  es  $K_5$  y el resultado se sigue fácilmente. Si  $|V(G)| = 6$ , entonces  $G$  es  $K_{3,3}$  con más aristas. Es fácil ver que se pueden eliminar estas aristas sin perder la casi-planaridad (ver Figuras 4.20, 4.21 y 4.22).



**Figura 4.20:** Reducción de  $K_{3,3}$  con aristas extra



**Figura 4.21:** Reducción de  $K_{3,3}$  con aristas extra



**Figura 4.22:** Reducción de  $K_{3,3}$  con aristas extra en la banda de Möbius

Supongamos que  $|V(G)| > 6$ . Por el Teorema 4.2.8  $G$  es libre de  $K_{3,3}^+$ ,  $K_5^+$ ,  $EX3$  y  $EX6$  y por el Lema 4.2.12 resta estudiar los siguientes casos:

A) El grafo  $G$  es una banda de Möbius  $M(n)$ .

Por el Lema 4.2.3 inciso II podemos quitar a  $x_n$  y  $y_n$  ( $n > 3$ ), y obtener una banda de Möbius más pequeña  $M(n - 1)$ . Para lograr esto, a  $G$  le aplicamos las operaciones:  $Y\Delta + OP1 + OP1 + RS = Y\Delta + \Delta Y + RS + \Delta Y + RS + RS$ . Sean  $G_h$ , con  $h = 1, \dots, 6$ , la secuencia de reducciones (ver Figura 4.23) y el grafo  $G_6$  es isomorfo a  $M(n - 1)$ .

Por el Lema 4.1.7 cada uno de los grafos  $G_h$  en la reducción es casi-plano, ya que tiene a  $K_{3,3}$  como subdivisión y es menor de alguna banda de Möbius. Y el resultado se sigue por inducción.



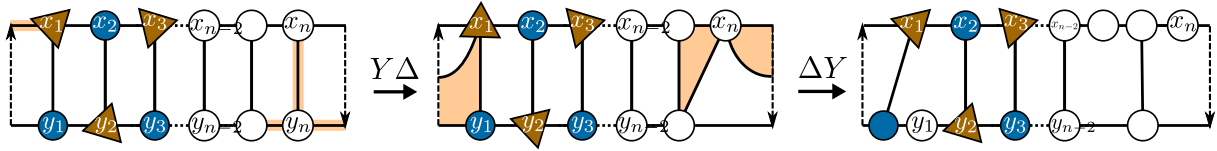


Figura 4.23: Reducción de  $G = M(n)$ .

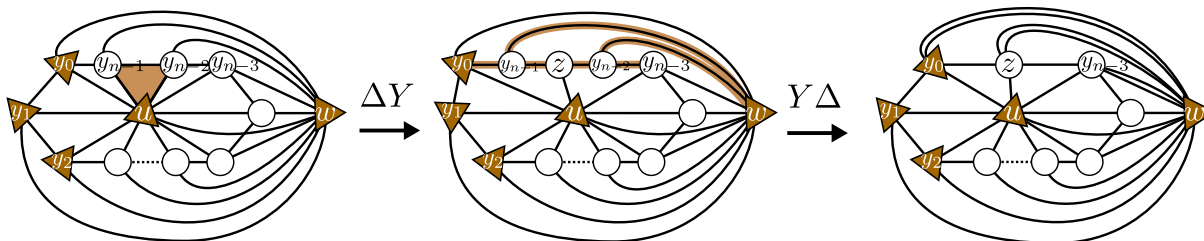
- B) Si  $G$  está en  $\mathcal{W}^*$ , entonces existen tres ruedas  $W(n)$ ,  $W(m)$  y  $W(r)$  con vértices  $\{c_x, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $\{c_y, y_1, \dots, y_m\}$  y  $\{c_v, v_1, \dots, v_r\}$ , respectivamente, los vértices  $c_x$ ,  $c_y$  y  $c_v$  son los centros de las ruedas, tales que al 3-sumar  $W(n)$  y  $W(m)$  a través de la identificación de los triángulos  $\Delta_1 = c_x x_{n-1} x_n c_x$  y  $\Delta_2 = c_y y_{m-1} y_m c_y$  construimos el grafo  $H$  con vértices  $\{x_1, \dots, x_{n-2}, y_1, \dots, y_{m-2}, u', w', z'\}$  donde  $u'$ ,  $w'$  y  $z'$  son los vértices resultantes de la identificación de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  y forman un triángulo  $\Delta_3$  en  $H$ . Entonces  $G$  se obtiene de una 3-suma de  $H$  y  $W(r)$  por medio de los triángulos  $\Delta_3$  y  $\Delta_4 = c_v v_{r-1} v_r c_v$ , y los vértices de  $G$  son  $\{x_1, \dots, x_{n-2}, y_1, \dots, y_{m-2}, v_1, \dots, v_{r-2}, u, w, z\}$  donde  $u, w$  y  $z$  son resultado de la identificación de  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$ .

Sea  $A = \{\{x_1, y_1, v_1\}, \{u, w, z\}\}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $u$  y  $w$  son los vértices identificados con  $c_x$  y  $x_{n-1}$ , respectivamente. Dado que  $|V(G)| > 6$  al menos uno de  $n, m$ , o  $r$  es mayor que tres, supongamos que  $n > 3$ . Vamos a quitar  $x_{n-2}$  de  $G$ , primero obtenemos  $G_1$  aplicando una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $x_{n-2}$ , después sean  $G_2$  y  $G_3$  los grafos resultantes de aplicar reducciones en paralelo de las aristas  $ux_{n-3}$  y si es necesario a  $uw$ , respectivamente. Notemos que  $G_3$ , es 3-sumas de las ruedas  $W(n-1)$ ,  $W(m)$  y  $W(r)$  sobre el mismo triángulo  $uwzu$ , por lo tanto  $G_3$  está en  $\mathcal{W}$ . Por el Teorema 4.2.8  $G_3$  es casi-plano, y las aristas  $ux_{n-3}$  y  $uw$  están en  $\mathcal{C}(G_3)$ , ya que  $G_3$  es casi-plano y, los grafos  $G_3 \setminus ux_{n-3}$  y  $G_3 \setminus uw$  tienen una subdivisión de  $K_{3,3}$  con bipartición  $A$ . En virtud del Lema 4.1.11  $G_1$  y  $G_2$  son casi-planos. Y el resultado se sigue por inducción.

- C)  $G$  es un grafo en  $\mathcal{B}^*$ . Entonces existe una bi-rueda  $B(n)$  y  $m$  ruedas  $W(n_1), W(n_2), \dots, W(n_m)$  tales que  $G$  se obtiene de 3-sumas de las ruedas  $W(n_i)$  en triángulos distintos que pueden ser  $uy_j y_{j+1} \text{ mód } n^u$  o  $wy_j y_{j+1} \text{ mód } n^w$  de  $B(n)$ , el centro de  $W(n_i)$  coincide con  $u$  o  $w$  y la arista  $y_j y_{j+1} \text{ mód } n$  no está en  $G$ .

Si  $m = 0$ , entonces  $G$  es isomorfo a  $B(n)$ . El número  $n > 4$  ya que  $|V(G)| > 6$ . Aplicando operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  quitaremos el vértice  $y_{n-1}$  de  $G$ . Sea  $G_1$  el grafo obtenido al aplicar una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  al triángulo  $T = uy_{n-2} y_{n-1} u$ , obteniendo el nuevo vértice  $z$ ;  $G_2$  al transformar  $Y \rightarrow \Delta$  a  $y_{n-1}$ ;  $G_3$  al transformar  $Y \rightarrow \Delta$  a  $y_{n-2}$ ; los grafos  $G_4, G_5$  y  $G_6$  son los resultantes de reducir en paralelo a las aristas  $wy_0, wz$  y  $wy_{n-3}$ , respectivamente (ver Figura 4.24).

Ahora veamos que los grafos  $G_1, \dots, G_6$  son casi-planos. El grafo  $G_6$  es isomorfo a  $B(n-1)$ . Por el Lema 4.1.1  $G_6$  es casi-plano. Las aristas  $wy_0, wz$  y  $wy_{n-3}$  están en



**Figura 4.24:** Reducción de una bi-rueda

$\mathcal{C}(G_6)$ , y del Lema 4.1.11 se sigue que los grafos  $G_5$ ,  $G_4$  y  $G_3$  son casi-planos. Por el Lema 4.1.7 y dado que  $G_1$  y  $G_2$  son menores no planos de  $B(n+1)$ , los grafos  $G_1$  y  $G_2$  son casi-planos.

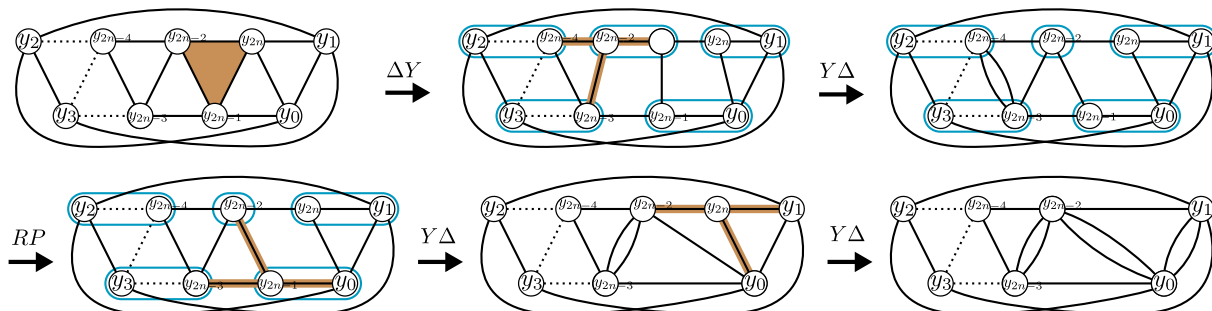
Supongamos que  $m > 0$ . Sea  $G'$  el grado resultante de las 3-sumas de  $B(n)$  y las ruedas  $W(n_1), W(n_2), \dots, W(n_{m-1})$  de tal forma que  $G$  es obtenido de una 3-suma de  $G'$  y la rueda  $W(n_m)$ , y sean  $x_0, x_1, \dots, x_{n_m-1}$  los vértices del aro de  $W(n_m)$  y  $c$  su centro. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los sumandos de la 3-suma de  $B(n)$  y  $W(n_m)$  son  $uy_j y_{j+1} \pmod n u$  y  $x_0 x_{n_m-1} c x_0$ , respectivamente, por lo tanto  $c$  es identificado con  $u$ . Supongamos que los vértices  $u, y_j, y_{j+1} \pmod n$  están en  $G$  (i. e. en la identificación de la suma se quedaron esos nombres). Usando operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  eliminaremos el vértice  $x_1$  de  $G$ . El grafo  $G_1$  es obtenido al aplicar una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $x_1$ , el grafo  $G_2$  al reducir en paralelo  $uy_j$  o  $uy_{j+1} \pmod n$ , esto depende de la forma en que se hace la 3-suma (puede que esta operación no sea necesaria, ya que al hacer la 3-suma estas aristas pudieron ser borradas) y el grafo  $G_3$  se obtiene al reducir en paralelo  $ux_2$  (si  $n_m > 4$ ), o  $uy_j$  o  $uy_{j+1} \pmod n$  (si  $n_m = 4$ ).

Si  $n_m > 4$  el grafo  $G_3$  es obtenido de una 3-suma de  $G'$  y la rueda  $W(n_m - 1)$  de lo contrario  $G_3$  es isomorfo a  $G'$ . En cualquiera de los dos casos  $G_3$  está en  $\mathcal{B}^*$  y es casi-plano. Las aristas  $ux_2, uy_j$  y  $uy_{j+1} \pmod n$  están en  $\mathcal{C}(G_3)$ , ya que los grafos  $G_3 \setminus ux_2, G_3 \setminus uy_j$  y  $G_3 \setminus uy_{j+1} \pmod n$  no son planos, dado que tienen a  $B(n)$  como menor. Del Lema 4.1.11 se sigue que los grafos  $G_1$  y  $G_2$  son casi-planos. Así el resultado se sigue por inducción dado que  $|V(G_3)| < |V(G)|$ .

- D) Por último, si  $G$  es un grafo en  $\mathcal{C}^{2*}$ , entonces existe un grafo  $C_{2n+1}^2$  ( $n \geq 2$ ) y  $m$  ruedas  $W(n_1), W(n_2), \dots, W(n_m)$  tales que  $G$  se obtiene de 3-sumas de  $C_{2n+1}^2$  y las ruedas  $W(n_j)$  en diferentes triángulos  $y_i y_{i+1} \pmod{2n+1} y_{i-1} \pmod{2n+1} y_i$  de  $C_{2n+1}^2$ , el centro de  $W(n_j)$  coincide con  $y_i$  y la arista  $y_{i-1} \pmod{2n+1} y_{i+1} \pmod{2n+1}$  no está en  $G$ .

Si  $m = 0$ , entonces  $G$  es isomorfo a  $C_{2n+1}^2$ , y dado que  $|V(G)| > 6$  el número  $n$  es mayor que dos. Reducimos  $G$  a  $C_{2n-1}^2$  quitando los vértices  $y_{2n}$  y  $y_{2n-1}$ . Los grafos  $G_1$  y  $G_2$  se obtienen de aplicar la OP2 con centro en  $y_{2n-2}$  para mover la

alista  $y_{2n-1}y_{2n}$  a  $y_{2n-3}y_{2n-4}$ , es decir  $G_1$  y  $G_2$  son obtenidos de una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  y  $Y \rightarrow \Delta$ , respectivamente, luego aplicamos una reducción en paralelo en la arista  $y_{2n-3}y_{2n-4}$  obteniendo  $G_3$ , ahora obtenemos a  $G_4$  y  $G_5$  aplicando dos transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  una a  $y_{2n-1}$  y otra a  $y_{2n}$ , para terminar aplicamos tres reducciones en paralelo sobre las aristas  $y_{2n-3}y_{2n-2}$ ,  $y_{2n-2}y_0$  y  $y_0y_1$  a los grafos obtenidos los llamaremos  $G_6$ ,  $G_7$  y  $G_8$ , respectivamente (ver Figura 4.25).



**Figura 4.25:** Reducción de  $C_{2n-1}^2$  a  $C_{2n-2}^2$ .  
 $K_5$  es menor de cada grafo como lo muestran los círculos.

Ahora probemos que los grafos  $G_i$  son casi-planos. Notemos que  $G_8$  es isomorfo a  $C_{2n-1}^2$  que por el Lema 4.2.12 y el Teorema 4.2.8 es casi-plano, además las aristas  $y_{2n-3}y_{2n-2}$ ,  $y_{2n-3}y_0$  y  $y_0y_1$  están en  $\mathcal{C}(G_8)$ , ya que si  $n > 3$ , entonces  $G_8 \setminus y_0y_1$ ,  $G_8 \setminus y_{2n-3}y_0$  y  $G_8 \setminus y_{2n-3}y_{2n-2}$  no son planos, porque tienen a  $C_5^2 = K_5$  como menor (ver Figura 4.25), y si  $n = 3$ , entonces  $G_8$  es isomorfo a  $K_5$ . Del Lema 4.1.11 se sigue que  $G_5$ ,  $G_6$  y  $G_7$  son casi-planos. Es claro que  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  y  $G_4$  no son planos, ya que  $n > 2$ . Sea  $G'_4$  el grafo resultante de aplicar una reducción en paralelo a la arista  $y_{2n-3}y_{2n-2}$  de  $G_4$ . Notemos que  $G$  es menor de una banda de Möbius a saber  $M(2(2n+1))$ , de forma análoga  $G_1$ ,  $G_3$  y  $G'_4$  son menores de esa misma banda y por tanto casi-planos, además  $y_{2n-3}y_{2n-4} \in \mathcal{C}(G_3)$ , ya que  $G_3 \setminus y_{2n-3}y_{2n-4}$  no es plano, y  $y_{2n-3}y_{2n-2} \in \mathcal{C}(G'_4)$  ya que  $G'_4 \setminus y_{2n-3}y_{2n-2}$  no es plano. En virtud del Lema 4.1.11  $G_2$  y  $G_4$  son casi-planos.

Para el caso cuando  $m > 0$  se resuelve de forma análoga al caso anterior. Así el resultado se sigue por inducción. ■

#### 4.2.4 ALGORITMO

Las demostraciones 1 y 2 nos dan explícitamente las operaciones que tenemos que aplicar para reducir un grafo casi-plano a  $K_{3,3}$ , incluyendo los vértices y aristas en donde se aplican. En esta sección escribimos en pseudocódigo un algoritmo que aplique las operaciones que se describen en la prueba 2 del Teorema 4.2.2. Para esto tenemos las siguientes funciones auxiliares.

Función.	Descripción.
LoopR( $G, e$ )	Si $e$ es un lazo de $G$ , entonces regresa el grafo obtenido al borrar $e$ de $G$ .
EdgeR( $G, e$ )	Si $e$ es una arista colgante de $G$ , entonces regresa el grafo obtenido al borrar $e$ de $G$ .
SeriesR( $G, e$ )	Si $e$ es una arista en serie de $G$ , entonces sea $G'$ el grafo obtenido de $G$ al aplicar una reducción en serie y $u$ el vértice resultante de la contracción de $e$ . La función regresa $(G', u)$ . entonces regresa el grafo $G'$ obtenido al contraer $e$ en $G$ , y el vértice generado al contraer se llama $u$ .
ParallelR( $G, e$ )	Si $e$ es una arista en paralelo de $G$ , entonces regresa el grafo obtenido al borrar $e$ de $G$ .
WyeToDelta( $G, v$ )	Si $v$ es un vértice de grado tres en $G$ y no adyacente a lazos ni a aristas paralelas, entonces regresa el grafo obtenido al borrar $v$ de $G$ y agregar un triángulo en los vértices adyacentes a $v$ (esta función puede agregar aristas en paralelo).
DeltaToWye( $G, v, u, w$ )	Si $G$ tiene un triángulo $T$ formado por los vértices $v, u$ y $w$ , entonces sea $G'$ el grafo obtenido de $G$ al aplicar la transformación $\Delta \rightarrow Y$ y $v'$ el nuevo vértice. La función regresa $(G', v')$ .

Sea  $G$  un grafo casi-plano, por el Corolario 4.1.5 para reducir a  $G$  primero aplicamos todas las reducciones en serie y paralelo posibles y obtenemos un grafo simple, casi-plano, 3-conexo. Así, podemos suponer que  $G$  es simple, casi-plano, 3-conexo. Como en la demostración 2 por el Lema 4.2.12, el algoritmo se divide en cuatro algoritmos dependiendo si  $G$  está en  $\mathcal{M}, \mathcal{W}^*, \mathcal{B}^*$  o  $\mathcal{C}^{2*}$ .

Si  $G$  es una banda de Möbius, entonces  $V(G) = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$  y  $E(G) = \{x_i y_i, x_j x_{j+1}, y_j y_{j+1}, x_1 y_n, x_n y_1 \mid i = 1, \dots, n \ j = 1, \dots, n-1\}$ . En el Algoritmo 4.1 damos los pasos para reducir  $G$  a  $K_{3,3}$  por medio de grafos casi-planos.

Si  $G$  está en  $\mathcal{W}^*$ , entonces existen tres ruedas  $W(n(1)), W(n(2))$  y  $W(n(3))$  con vértices

**Algoritmo 4.1:** Reducción de  $G$  cuando  $G$  es banda de Möbius.

**Data:**  $G$  es una banda de Möbius  $M(n)$  con  $V(G)$  y  $E(G)$  como se indica en descripción.

**Result:** Secuencia de reducción de  $G$  a  $K_{3,3}$  por medio de grafos casi-planos.

```

1  $S \leftarrow []$  // Inicialización de la secuencia de reducciones;
2 for  $i \leftarrow n$  to 4 do
3    $G_1 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G, y_i);$ 
4    $(G_2, a) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G_1, x_i, x_{i-1}, y_{i-1})$  //  $a$  es el nuevo vértice;
5    $(G_3, b) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G_2, x_i, y_1, x_1);$ 
6    $(G_4, c) \leftarrow \text{SeriesR}(G_3, x_{i-1}a);$ 
7    $(G_5, d) \leftarrow \text{SeriesR}(G_4, x_i b);$ 
8    $(G_6, e) \leftarrow \text{SeriesR}(G_5, y_1 d);$ 
9    $c$  y  $e$  reciben el nombre de  $x_{i-1}$  y  $x_1$  en  $G_6$ , respectivamente;
10   $S \leftarrow S \cup [G_i | i = 1, \dots, 6];$ 
11   $G \leftarrow G_6;$ 
12 return  $S$ 

```

$\{c^1, x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n(1)}^1\}$ ,  $\{c^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n(2)}^2\}$  y  $\{c^3, x_1^3, x_2^3, \dots, x_{n(3)}^3\}$ , respectivamente, los vértices  $c^i$  son los centros de las ruedas, tales que al 3-sumar  $W(n(1))$  y  $W(n(2))$  a través de la identificación de los triángulos  $\Delta_1 = c^1 x_{n(1)-1}^1 x_{n(1)}^1 c^1$  y  $\Delta_2 = c^2 x_{n(2)-1}^2 x_{n(2)}^2 c^2$  construimos el grafo  $H$  con vértices  $\{x_1^1, \dots, x_{n(1)-2}^1, x_1^2, \dots, x_{n(2)-2}^2, u', w', z'\}$  donde  $u', w'$  y  $z'$  son los vértices resultantes de la identificación de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  y forman un triángulo  $\Delta_3$  en  $H$ . Entonces  $G$  se obtiene de una 3-suma de  $H$  y  $W(r)$  por medio de los triángulos  $\Delta_3$  y  $\Delta_4 = c^3 x_{n(3)-1}^3 x_{n(3)}^3 c^3$ , y los vértices de  $G$  son  $\{x_1^1, \dots, x_{n(1)-2}^1, x_1^2, \dots, x_{n(2)-2}^2, x_1^3, \dots, x_{n(3)-2}^3, u_1, u_2, u_3\}$  donde  $u_i$  son resultado de la identificación de  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$ . En el Algoritmo 4.2 damos la reducción de  $G$  en estas condiciones por medio de grafos casi-planos.

Si  $G$  es un grafo en  $\mathcal{B}^*$ . Entonces existe una bi-rueda  $B(n)$ ;  $m$  ruedas  $W(n(1)), W(n(2)), \dots, W(n(m))$  con vértices  $\{c^1, x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n(1)}^1\}$ ,  $\{c^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n(2)}^2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{c^m, x_1^m, x_2^m, \dots, x_{n(m)}^m\}$ , respectivamente,  $c^i$  es el centro de  $W(n(i))$ ; y una sucesión de grafos simples  $G_0 = B(n)$ ,  $G_1, \dots, G_m = G$  tal que  $G_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) se obtiene de una 3-suma de  $G_{i-1}$  y  $W(n(i))$  con sumandos  $\Delta_i$  y  $\Delta'_i = c^i x_{n(i)-1}^i x_{n(i)}^i c^i$ , respectivamente, donde  $\Delta_i$  es uno de los triángulos  $u y_{j(i)} y_{j(i)+1 \pmod n} u$  o  $w y_{j(i)} y_{j(i)+1 \pmod n} w$  de  $B(n)$ , el centro  $c^i$  de  $W(n(i))$  se identifica con  $u$  o  $w$  y la arista  $y_{j(i)} y_{j(i)+1 \pmod n}$  no está en  $G_i$ . Suponemos que  $V(G) = V(B(n)) \cup \bigcup_i (V(W(n(i))) \setminus \{c^i, x_{n(i)}^i, x_{n(i)-1}^i\})$ . En el Algoritmo 4.3 damos la reducción de  $G$  a  $K_5$  en estas condiciones por medio de grafos casi-planos.

Si  $G$  es un grafo en  $\mathcal{C}^{2*}$ , entonces existe un grafo  $C_{2n+1}^2$  ( $n \geq 3$ );  $m$  ruedas  $W(n(1))$ ,  $W(n(2))$ ,  $\dots$ ,  $W(n(m))$  con vértices  $\{c^1, x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n(1)}^1\}$ ,  $\{c^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n(2)}^2\}$ ,  $\dots$ ,  $\{c^m, x_1^m, x_2^m, \dots, x_{n(m)}^m\}$ , respectivamente,  $c^i$  es el centro de  $W(n(i))$ ; y una sucesión de grafos simples  $G_0 = B(n)$ ,  $G_1, \dots, G_m = G$  tal que  $G_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) se obtiene de una 3-suma de  $G_{i-1}$  y  $W(n(i))$  con sumandos  $\Delta_i = y_{j(i)}y_{j(i)+1} \pmod{2n+1} y_{j(i)-1} \pmod{2n+1} y_{j(i)}$  y  $\Delta'_i = c^i x_{n(i)}^i x_{n(i)-1}^i c^i$ , respectivamente, el centro  $c^i$  de  $W(n(i))$  se identifica con  $y_{j(i)}$  y la arista  $y_{j(i)-1} \pmod{2n+1} y_{j(i)+1} \pmod{2n+1}$  no está en  $G_i$ . Suponemos que  $V(G) = V(C_{2n+1}^2) \cup_i (V(W(n(i))) \setminus V(\Delta'_i))$ . En el Algoritmo 4.4 damos la reducción de  $G$  a  $K_5$  en estas condiciones por medio de grafos casi-planos.

Usando los Algoritmos 4.3 y 4.4 podemos reducir  $G$  a  $K_5$  según sea el caso. Ahora solo resta reducirlo a  $K_{3,3}$ , supongamos que  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  (ver Algoritmo 4.5).

---

**Algoritmo 4.2:** Reducción de  $G$  cuando  $G$  está en  $\mathcal{W}$ .

---

**Data:**  $G$  es un grafo en  $\mathcal{W}$  con  $V(G)$  y  $E(G)$  como se indica en la descripción.

**Result:** Secuencia de reducción de  $G$  a  $K_{3,3}$ , por medio de grafos casi-planos.

```

1  $S \leftarrow []$  // Inicialización de la secuencia de reducciones;
2 for  $j \leftarrow 1$  to 3 do
3    $a$  es el vértice de  $\{u_1, u_2, u_3\}$  que es identificado con  $c^j$ ;
4    $b$  es el vértice de  $\{u_1, u_2, u_3\}$  que es identificado con  $x_{n(j)-1}^j$ ;
5   for  $i \leftarrow (n - 2)$  to 1 do
6      $G_1 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G, x_i^j)$ ;
7      $G_2 \leftarrow \text{ParallelR}(G_1, x_{i-1}^j a)$ ;
8      $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, ab)$ ;
9      $S \leftarrow S \cup [G_1, G_2, G_3]$ ;
10     $G \leftarrow G_3$ ;

// Así  $|V(G)| = 6$ , solo resta quitar las aristas del triángulo
//  $uwzu$ , usamos la  $OP1$  para tal fin.
11 for  $i \leftarrow 0$  to 2 do
12   if  $u_i u_{i+1} \pmod{3} \in E(G)$  then
13      $(G_1, a) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G, x_1^i, u_i, u_{i+1} \pmod{3})$ ;
14      $(G_2, b) \leftarrow \text{SeriesR}(G_1, x_1^i a)$ ;
15      $S \leftarrow S \cup [G_1, G_2]$ ;
16      $G \leftarrow G_2$ ;
17 return  $S$ 

```

---

---

**Algoritmo 4.3:** Reducción de  $G$  cuando  $G$  está en  $\mathcal{B}^*$ .

---

**Data:**  $G$  es un grafo en  $\mathcal{B}^*$  con  $V(G)$  y  $E(G)$  como se indica en la descripción.

**Result:** Secuencia de reducción de  $G$  a  $K_5$  por medio de grafos casi-planos.

```

1  $S \leftarrow []$  // Inicialización de la secuencia de reducciones;
2 for  $j \leftarrow m$  to 1 do
3   for  $i \leftarrow (n(j) - 2)$  to 1 do
4     if  $x_i^j$  es adyacente a  $u$  en  $G$  then
5        $a \leftarrow u$ ;
6     else
7        $a \leftarrow w$ ;
8      $G_1 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G, x_i^j)$ ;
9     // Puede que alguna o ambas de las siguientes reducciones no
10    sean necesarias
11     $G_2 \leftarrow \text{ParallelR}(G_1, y_{j(i)+1} \bmod n^a)$ ;
12    if  $i = 1$  then
13       $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, y_{j(i)} a)$ ;
14    else
15       $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, x_{i-1}^j a)$ ;
16     $S \leftarrow S \cup [G_1, G_2, G_3]$ ;
17     $G \leftarrow G_3$ ;
18
19    // En este punto  $G$  es isomorfo a una bi-rueda  $B(n)$ 
20    for  $i \leftarrow (n - 1)$  to 3 do
21       $(G_1, a) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G, u, y_i, y_{i-1})$ ;
22       $G_2 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G_1, y_{i-1})$ ;
23       $G_3 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G_2, y_i)$ ;
24       $G_4 \leftarrow \text{ParallelR}(G_3, y_0 w)$ ;
25       $G_5 \leftarrow \text{ParallelR}(G_4, a w)$ ;
26       $G_6 \leftarrow \text{ParallelR}(G_5, y_{i-2} w)$ ;
27      Renombramos  $a$  como  $y_{i-1}$  en  $G_6$ ;
28       $S \leftarrow S \cup [G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6]$ ;
29       $G \leftarrow G_6$ ;
30
31 return  $S$ 

```

---

**Algoritmo 4.4:** Reducción de  $G$  cuando  $G$  está en  $\mathcal{C}^{2*}$ .**Data:**  $G$  es un grafo en  $\mathcal{C}^{2*}$  con  $V(G)$  y  $E(G)$  como se indica en la descripción.**Result:** Secuencia de reducción de  $G$  a  $K_5$  por medio de grafos casi-planos.

```

1  $S \leftarrow []$  // Inicialización de la secuencia de reducciones;
2 for  $j \leftarrow m$  to 1 do
3   for  $i \leftarrow (n(j) - 2)$  to 1 do
4      $G_1 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G, x_i^j);$ 
5      $G_2 \leftarrow \text{ParallelR}(G_1, y_{j(i)}y_{j(i)+1} \bmod 2n+1);$ 
6     if  $i == 1$  then
7        $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, y_{j(i)}y_{j(i)-1} \bmod 2n+1);$ 
8     else
9        $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, y_{j(i)}x_{i-1}^j);$ 
10     $S \leftarrow S \cup [G_1, G_2, G_3];$ 
11     $G \leftarrow G_3;$ 
    // En este punto  $G$  es isomorfo a  $\mathcal{C}_{2n+1}^2$ 
12  $G_8 \leftarrow G;$ 
13 for  $i \leftarrow n$  to 3 do
14    $(G_1, a) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G_8, y_0, y_{2i}, y_{2i-1});$ 
15    $G_2 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G_1, y_0);$ 
16    $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, y_1y_3);$ 
17    $G_4 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G_3, y_{2i});$ 
18    $G_5 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G_4, y_{2i-1});$ 
19    $G_6 \leftarrow \text{ParallelR}(G_5, ay_1);$ 
20    $G_7 \leftarrow \text{ParallelR}(G_6, ay_{2i-2});$ 
21    $G_8 \leftarrow \text{ParallelR}(G_7, y_{2i-2}y_{2i-3});$ 
22   Renombramos al vértice  $a$  como  $y_0$  en  $G_8;$ 
23    $S \leftarrow S \cup [G_j | j = 1, \dots, 8];$ 
24 return  $S;$ 

```

**Algoritmo 4.5:** Reducción de  $K_5$  a  $K_{3,3}$ .**Data:**  $G$  es isomorfo a  $K_5$ .**Result:** Secuencia de reducción de  $G$  a  $K_{3,3}$  por medio de grafos casi-planos.

```

1  $(G_1, f) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G, b, d, e);$ 
2  $G_2 \leftarrow \text{WyeToDelta}(G_1, e);$ 
3  $G_3 \leftarrow \text{ParallelR}(G_2, ac);$ 
4  $(G_4, g) \leftarrow \text{DeltaToWye}(G_3, a, f, c);$ 
5 return  $[G_1, G_2, G_3, G_4];$ 

```



Usando los Algoritmos 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 podemos reducir un grafo casi-plano a  $K_{3,3}$  por medio de una secuencia de reducciones formada por grafos casi-planos. Sería muy bueno tener un algoritmo que decida si un grafo es o no casi-plano, tal vez la caracterización que brinda el Lema 4.2.12 nos podría servir para este problema.

#### 4.2.5 DEMOSTRACIÓN DE WAGNER DEL TEOREMA 4.2.2

Hay otra demostración del Teorema 4.2.2 en el artículo Delta-Wye Reduction of Almost-Planar Graphs de Wagner [84]. Esta demostración da otra forma de reducir un grafo casi-plano a  $K_{3,3}$ , tal que, en la secuencia de reducciones todo grafo es casi-plano. A continuación, daremos la idea de cómo ir reduciendo un grafo  $G$  conexo, casi-plano ( $G$  no tiene que ser simple), que se obtiene de la prueba de Wagner:

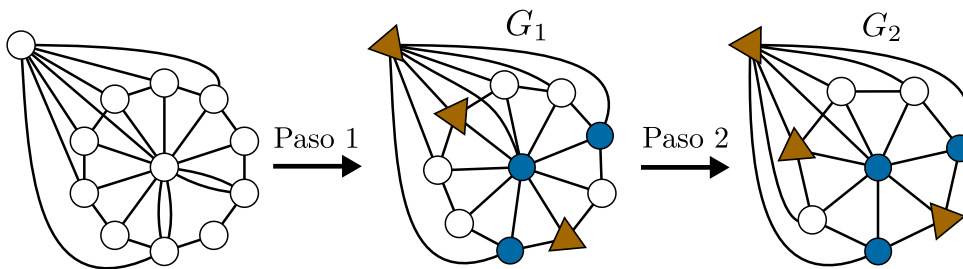
Primero una definición. Sea  $H$  un subgrafo de un grafo conexo  $G$ . Una arista  $e$  de  $G$  es una *cuerda* de  $H$ , si  $e$  no es arista de  $H$  y los extremos de  $e$  están en  $H$ . Una observación fácil es que  $H$  es generador si y sólo si todas las aristas de  $G$  que no están en  $H$  son cuerdas.

- 1) Ya sabemos que,  $G$  es extensión serie-paralelo de un grafo  $G_1$  simple, casi-plano, 3-conexo. Entonces  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a  $G_1$ , específicamente por reducciones en serie y paralelo.
- 2) Si  $|G_1| = 5$ , entonces  $G_1$  es isomorfo a  $K_5$  y es fácil reducirlo a  $K_{3,3}$ .
- 3) Si  $|G_1| > 5$ , entonces  $G_1$  tiene una subdivisión  $K'$  de  $K_{3,3}$ . Ahora quitamos a todos los vértices de subdivisión de  $K'$ , con grado tres en  $G_1$ , usando transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  y reducciones en paralelo. Así creamos a  $G_2$  y  $K''$ , que es una subdivisión de  $K_{3,3}$  (ya que solo le quitamos los vértices de subdivisión a  $K'$ ) en la que todos sus vértices de subdivisión tienen grado al menos cuatro en  $G_2$ .
- 4) Puede que algún vértice de ramificación de  $K''$  tenga grado tres en  $G_2$ . En este caso  $G_2$  tiene otra subdivisión de  $K_{3,3}$ , en la que algún vértice de subdivisión tiene grado tres en  $G_2$ . Encontramos esta subdivisión (le seguiremos llamando  $K''$ ), y regresamos al punto 3.
- 5) Ahora podemos suponer que  $G_2$  tiene grado mínimo al menos cuatro y  $|G_2| > 6$ , (si  $|G_2| = 6$ , es fácil reducirlo a  $K_{3,3}$ ). Ahora, solo podemos aplicar la transformación  $\Delta \rightarrow Y$ .

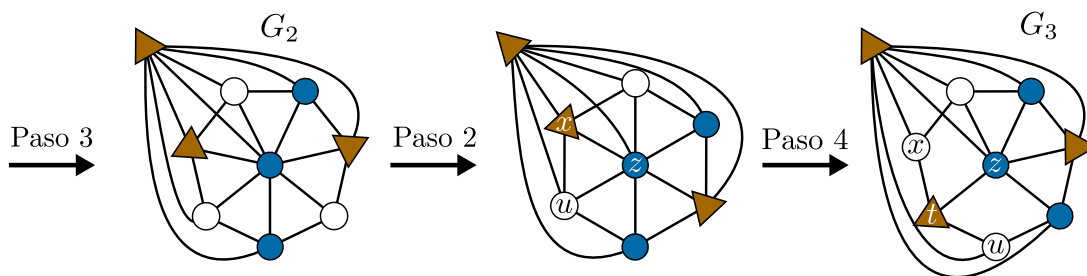
Uno de los lemas de Wagner nos garantiza que existe un triángulo  $T = \{u, x, z\}$  en  $G_2$ , tal que,  $u$  es vértice de subdivisión de  $K''$ ;  $z$  y  $x$  son vértices de ramificación de  $K''$ ;  $u$  y  $x$  tienen grado cuatro en  $G_2$ ; las aristas  $ux$  y  $xz$  están en  $K''$ ; y la arista  $uz$  es una cuerda de  $K''$ .

Aplicamos una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  a  $G_2$ , para quitar a  $T$  y agregar el vértice  $t$ , obteniendo  $G_3$ . Ahora  $u$  y  $x$  tienen grado tres en  $G_3$ . Sea  $K'''$  el grafo que se obtiene de  $K''$  al subdividir una vez la arista  $ux$ , agregando  $t$ , la arista  $tz$  y quitando las aristas  $xz$  y  $uz$ . Note que  $K'''$  sigue siendo subdivisión de  $K_{3,3}$ , y es subgrafo de  $G_3$ , además  $u$  y  $x$  son vértices de subdivisión de  $K'''$ , con grado tres en  $G_3$ . Regresamos al punto 3 con  $G_3$  y  $K'''$ .

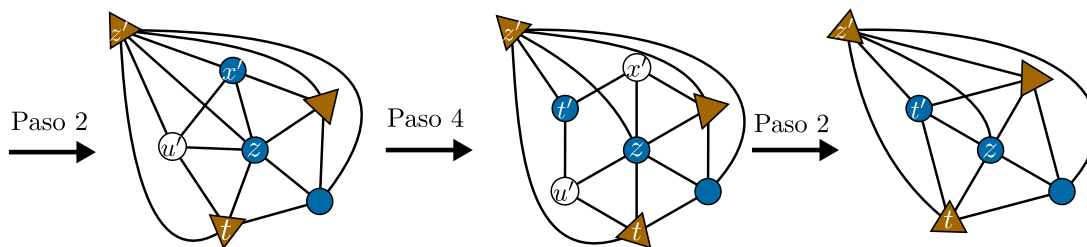
**Ejemplo 4.2.4** Ahora veamos un ejemplo donde se aplican estas ideas a un grafo casi-plano:



Aplicamos el paso 4 a  $G_2$  para “encontrar” otra subdivisión de  $K_{3,3}$ :



En este momento hemos regresado al paso 3 con  $G_3$ :



Para continuar con la presentación enunciaremos unos lemas y definiciones que utiliza D. Wagner [84].

Sea  $G$  un grafo. Una *clase serie* de  $G$  es un conjunto de aristas, que es máxima con respecto a la propiedad de que existe una ordenación del conjunto, tal que para cualesquiera dos aristas consecutivas en la ordenación, existe un vértice de grado dos en  $G$ , al cual son adyacentes ambas aristas.

Sea  $G$  un grafo 2-conexo y no un ciclo entonces, cada subgrafo de  $G$  inducido por una clase serie es un camino de  $G$ . Estos caminos son los *arcos* de  $G$ . Como los arcos son caminos, heredan la noción de *vértices finales* y *vértices internos*. Dos arcos de  $G$  son adyacentes si comparten un vértice final. Sea  $A$  un arco de  $G$  con nodos finales  $y$  y  $x$ . Entonces,  $A$  es un *xy-arco*. Además, el vértice de  $A$  que es adyacente a  $x$  en  $A$  es el vértice *x-penúltimo* de  $A$ . En particular un arco para una subdivisión de  $K_{3,3}$  es el camino de vértices de subdivisión que une a dos vértices de ramificación.

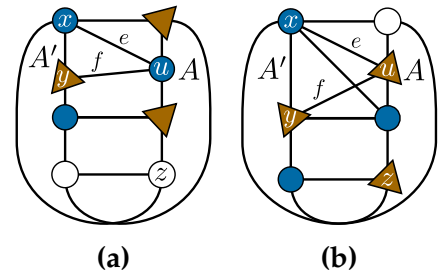
**Lema 4.2.13** Sea  $G$  grafo casi-plano, con una subdivisión  $K$  de  $K_{3,3}$ . Si  $K$  tiene un arco  $A$  con un vértice interno  $u$  que es incidente a dos cuerdas  $e = ux$  y  $f = uy$ , entonces existe un arco  $A'$  de  $K$ , diferente y no adyacente al arco  $A$ , que contiene a  $x$  y  $y$ .

En el paso 4, para “encontrar” otra subdivisión de  $K_{3,3}$ , basta con revisar la demostración de uno de los lemas de Wagner [84]:

**Lema 4.2.14** Sea  $G$  un grafo simple casi-plano, con una subdivisión  $K$  de  $K_{3,3}$ . Supongamos que  $K$  tiene un vértice subdivisor de grado al menos cuatro en  $G$  y un vértice de ramificación de grado tres en  $G$ . Entonces,  $G$  tiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  con un vértice subdivisor de grado tres en  $G$ .

**Demostración.** Sea  $u$  un vértice subdivisor de  $K$  con grado al menos cuatro en  $G$  entonces, existen dos cuerdas  $e = ux$  y  $f = uy$  de  $K$ . Sea  $A$  el arco que contiene a  $u$ . Por el Lema 4.2.13 hay un arco  $A'$  distinto y no adyacente a  $A$  que contiene a  $y$  y  $x$ . Llamemos  $z$  un vértice de ramificación de  $K$  con grado tres en  $G$ .

Supongamos que  $x$  está en el interior de  $A'$ , claramente en el grafo generado por  $E(K) \cup \{e\}$  hay una subdivisión de  $K_{3,3}$  en la que  $z$  es vértice subdivisor (ver Figura 4.26a). Así podemos suponer que  $y$  y  $x$  son extremos de  $A'$ , por lo tanto  $z$  no es extremo de  $A'$ . Si algún extremo de  $A$  tiene grado tres en  $G$  entonces, fácilmente del grafo inducido por  $E(K) \cup \{e, f\}$  obtenemos una subdivisión de  $K_{3,3}$ , que tiene a éste como vértice subdivisor (ver Figura 4.26b). Podemos suponer que los extremos de  $A$  tienen grado al menos cuatro en  $G$  entonces,  $z$  no es extremo de  $A$  ni de  $A'$ .



**Figura 4.26:** Casos del Lema 4.2.14.

Ahora, suponga que  $K$  tiene un vértice subdivisor  $v$  diferente de  $u$ . Note que  $v$  tiene una arista  $g$  en  $K$  que no es adyacente a  $z$ . Considere el grafo simple  $G'$  obtenido de  $G$  por la contracción de  $g$  (quitando aristas paralelas y lazos que pudieran aparecer). El grafo  $G'$  es no plano ya que tiene una subdivisión de  $K_{3,3}$ , específicamente  $K' = K/g$ . Por el Lema 4.1.7,  $G'$  es casi-plano. Más aun  $u$  tiene grado al menos cuatro en  $G'$  y es

vértice subdivisor de  $K'$ , y  $z$  es vértice de ramificación de  $K'$  y tiene grado tres en  $G'$ . Así  $G'$  y  $K'$  satisfacen las hipótesis del lema. Si mostramos que  $G'$  tiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  que tenga a  $z$  como vértice subdivisor, entonces  $G$  tiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  que tiene a  $z$  como vértice subdivisor. Así podemos suponer que  $u$  es el único vértice subdivisor de  $K$ . En otras palabras  $G$  tiene solo siete vértices.

Sea  $w$  el extremo de  $A$  que tiene como vecino a  $z$  en  $K$ . Como  $w$  tiene grado al menos cuatro en  $G$  entonces, existe una cuerda, digamos  $h$ , de  $K$  incidente a  $w$ . Como  $G$  es simple,  $h$  no es paralela a ninguna arista de  $K$  incidente a  $w$ . Como  $G$  es casi-plano, los extremos de  $h$  no pueden coincidir con los de  $A$ . Por lo tanto, el otro extremo de  $h$  es uno de los otros dos vecinos de  $z$  en  $G$ . Es fácil ver que el subgrafo de  $G$  inducido por  $E(K) \cup \{e, f, h\}$  contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  en la que  $z$  es vértice subdivisor. ■

Si quisiéramos hacer un algoritmo a partir de esta prueba podíamos reducirnos a un grafo con solo siete vértices. Analizaremos un poco más el caso cuando  $G$  tiene siete vértices y ambos extremos de  $A$  tienen grado cuatro. Sea  $v$  el otro extremo de  $A$ . Si  $v$  tiene grado cuatro en  $G$ , entonces existe una cuerda  $o$  de  $K$  incidente a  $v$ . Como  $v$  ya es vecino de  $u$  y no puede ser vecino de  $z$  ni de  $w$ , solo queda una posibilidad, que sea vecino del vecino de  $w$  que no es  $z$  ni  $u$ . Así solo tenemos dos grafos  $H_0$  y  $H_1$  inducidos por  $E(K) \cup \{e, f, h, o\}$  (ver Figura 4.27). En la misma figura podemos ver que el grafo  $H_1$  no es casi-plano, entonces solo podemos llegar a  $H_0$ . Del lema podemos concluir que no es trivial encontrar la subdivisión del  $K_{3,3}$  que nos sirva y que posiblemente un algoritmo no sea eficiente.

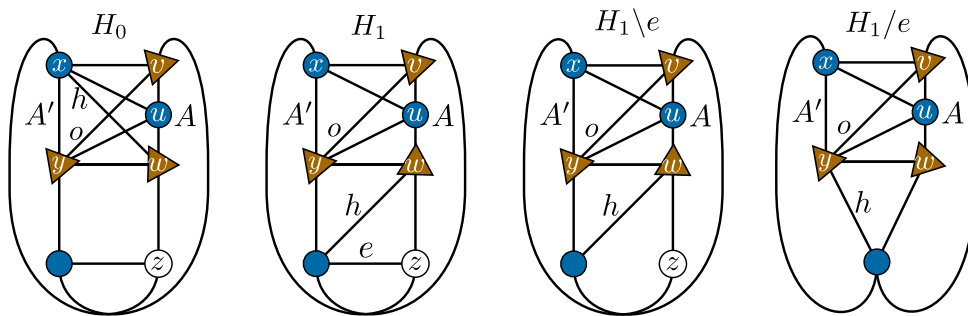


Figura 4.27: Los posibles grafos.

Cabe notar que, en la demostración de Wagner, en la página 6 de su artículo [84], el Lema 10 dice:

**Lema 4.2.15** Sea  $G$  un grafo simple casi-plano en el que todo vértice tiene grado al menos cuatro. Además  $G$  tiene una subdivisión  $K$  de  $K_{3,3}$ , y  $K$  tiene al menos un vértice subdivisor. Entonces,  $G$  tiene un triángulo  $T = \{u, x, z\}$  que cumple las siguientes propiedades:

- 1)  $u$  es vértice subdivisor de  $K$ .

- II)  $z$  y  $x$  son vértices de ramificación de  $K$ .
- III)  $u$  y  $x$  tienen grado cuatro en  $G$ .
- IV) Las aristas  $ux$  y  $xz$  están en  $K$ .
- V) La arista  $uz$  es una cuerda de  $K$ .

Para demostrarlo él usa cuatro hechos, que demuestra en la misma prueba del lema:

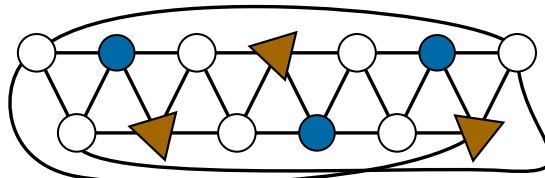
**Hecho 1:** Sea  $A$  un arco de  $K$  con extremos  $y$  y  $x$ . Si  $A$  tiene un vértice interno, entonces para el  $x$ -penúltimo vértice  $u$  de  $A$ , existe una cuerda  $e = uz$  de  $K$ , donde  $z$  es un vértice de ramificación de  $K$  diferente de  $y$  y  $x$ , y  $x$  y  $z$  son los extremos de un arco de  $K$ .

**Hecho 2:** Si un arco  $A$  de  $K$  tiene vértices internos, entonces los extremos de  $A$  tienen grado cuatro en  $G$ .

**Hecho 3:** Si un arco  $A$  de  $K$  tiene un nodo interno, entonces  $G$  tiene un triángulo que satisface I-V o existen dos arcos de  $K$ , ambos adyacentes al arco  $A$ , pero no entre sí, que tienen un vértice interno.

**Hecho 4:** A lo más cuatro arcos de  $K$  tienen vértices internos.

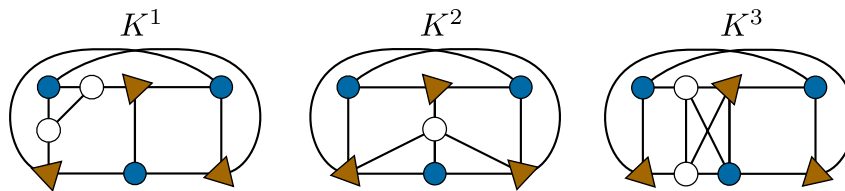
Pero, lo que dice el hecho 4 no es cierto como se ve en el grafo de la Figura 4.28. Este grafo es casi-plano ya que es menor no plano de una banda de Möbius. Además este grafo cumple los hecho 1, 2 y 3.



**Figura 4.28:** Grafo casi-plano con una subdivisión de  $K_{3,3}$ .

A continuación daré otra posible demostración para este lema:

El siguiente lema utiliza los grafos que se muestran en la Figura 4.29.



**Figura 4.29:** Grafos no planos ni casi-planos

**Lema 4.2.16 (Wagner [84])** Los grafos  $K^1$ ,  $K^2$  y  $K^3$  no son casi-planos.

**Lema 4.2.17 (Wagner [84])** Sea  $G$  grafo conexo simple casi-plano, y suponga que  $G$  tiene una subdivisión  $K$  de  $K_{3,3}$ . Si todo vértice subdivisor de  $K$  tiene grado al menos cuatro en  $G$ , entonces todo vértice subdivisor de  $K$  tiene grado cuatro en  $G$ .

**Demostración del Lema 4.2.15.** Para la demostración usaremos los siguientes hechos:

**Hecho 1:** Sea  $A$  un arco de  $K$  con extremos  $y$  y  $x$ . Si  $A$  tiene un vértice interno, entonces para el  $x$ -penúltimo vértice  $u$  de  $A$ , existe una cuerda  $e = uz$  de  $K$ , donde  $z$  es un vértice de ramificación de  $K$  diferente de  $y$  y  $x$ , y  $x$  y  $z$  son los extremos de un arco de  $K$ .

Sabemos que  $u$  tiene grado al menos cuatro en  $G$  entonces, existen dos cuerdas  $e = uz$  y  $f = uw$  de  $K$ . Por el Lema 4.2.13 existe un arco  $A'$  distinto y no adyacente a  $A$  que contiene a  $z$  y  $w$ . Sean  $y'$  y  $x'$  los extremos de  $A'$ , donde  $y'$  y  $x$  son extremos de un arco en  $K$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $w$  está en el subcamino  $x'z$  de  $A'$ .

Supongamos que  $z$  es vértice interior de  $A'$ . Como  $z$  tiene grado al menos cuatro en  $G$  entonces, hay dos cuerdas adyacentes a  $z$ : una es  $e$  y la otra llamémosla  $g = zv$ . Por el Lema 4.2.13,  $v$  está en  $A$ .

Si  $v$  está en el subcamino  $uy$  de  $A$ , entonces el grafo inducido por  $E(K) \cup \{e, f, g\}$  tiene como menor a  $K^3$ , lo cual es una contradicción en virtud de los Lemas 4.1.7 y 4.2.16. Surgen dos posibilidades:  $v$  tiene que ser  $x$ , o  $z$  tiene que ser  $y'$ , en el último caso ya habríamos terminado la demostración.

Supongamos que  $v$  es  $x$  y que en el subcamino  $y'z$  de  $A'$  hay vértices internos, sea  $a$  uno de ellos, como  $a$  tiene grado al menos cuatro en  $G$  entonces, existen dos cuerdas de  $K$ , digamos  $i = ab$  y  $j = ac$ , por el Lema 4.2.13,  $b$  y  $c$  pertenecen a un arco  $B$  diferente y no adyacente a  $A'$ . Ahora fijémonos en el grafo inducido por  $E(K) \cup \{e, g, i, j\}$ . Es fácil ver que tiene a  $K^2$  o  $K^3$ , si  $B$  es diferente de  $A$  o si  $B$  es igual a  $A$ , respectivamente, lo cual es una contradicción, por lo tanto no hay vértices internos en el subcamino  $y'z$ .

Por último resta renombrar a los vértices y el arco que aparecen en el texto del hecho 1 de la siguiente manera:  $A$  va a ser  $A'$ ,  $u$  va a ser  $z$ ,  $x$  va a ser  $y'$  y  $z$  va a ser  $x$ .

**Hecho 2:** Si un arco  $A$  de  $K$  tiene vértices internos, entonces los extremos de  $A$  tienen grado cuatro en  $G$ .

Sea  $u$  un vértice interno de  $A$  y,  $y$  y  $x$  los extremos de  $A$ , como  $u$  tiene grado al menos cuatro en  $G$  entonces, existen dos cuerdas  $e = uz$  y  $f = uw$  de  $K$ . Por el Lema 4.2.13 existe un arco distinto y no adyacente a  $A$  que contiene a  $z$

y  $w$ . En el grafo inducido por  $E(K) \cup \{e, f\}$  hay una subdivisión de  $K_{3,3}$  que tiene a  $x$  como vértice subdivisor, y por el Lema 4.2.17  $x$  tiene grado cuatro en  $G$ . Análogamente para  $y$ .

Para terminar la demostración. Por el hecho 1, tenemos los vértices  $u, x, y, z$  y la arista  $uz$ , tales que  $uz$  es cuerda de  $K$ ,  $y$  y  $x$  son los extremos de  $A$ ,  $u$  es  $x$ -penúltimo vértice de  $A$ , y  $x$  y  $z$  son los extremos de un arco de  $K$ , denotemos este arco como  $B$ .

Si  $B$  no tiene vértice interno, entonces los vértices  $u, x, y, z$  inducen un triángulo  $T$  en  $G$ . Por el hecho 2,  $x$  tiene grado cuatro en  $G$ , y por el Lema 4.2.17,  $u$  tiene grado cuatro en  $G$ . De ello se deduce que  $T$  es el triángulo requerido.

Supongamos que  $B$  tiene vértice interno, sea  $e$  una arista de  $B$  entonces,  $K/e$  sigue siendo subdivisión de  $K_{3,3}$ . Por otro lado, notemos que el grafo inducido por  $E(K \setminus e) \cup \{uz\}$  tiene una subdivisión de  $K_{3,3}$ . Se sigue que  $G/e$  y  $G \setminus e$  no son planos, lo cual es una contradicción. Así  $B$  no puede tener vértices internos. ■

## 4.3 REDUCIBILIDAD DE GRAFOS NO PLANOS CON TERMINALES

En esta sección estudiamos la reducibilidad de grafos casi-planos,  $M$ -casi-planos, libres de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , y toroidales con terminales.

### 4.3.1 GRAFOS CASI-PLANOS Y $M$ -CASI-PLANOS

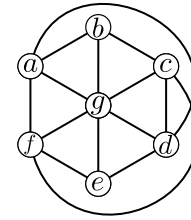
**Teorema 4.3.1** Un grafo conexo  $M$ -casi-plano es 1-terminal reducible.

**Demostración.** Sea  $G$  grafo conexo  $M$ -casi-plano con un terminal  $v$ . Por definición, existe arista  $e = uv$  tal que  $G \setminus e$  es plano. Ahora, tomemos como terminales a  $v, u$  y  $w$  del grafo  $G \setminus e$ . Por el Teorema 2.4.5 podemos reducir  $G \setminus e$  a un grafo  $H$  que tenga solo los vértices terminales. Como  $u$  y  $w$  son terminales de  $G \setminus e$ , las operaciones aplicadas a  $G \setminus e$  se pueden aplicar a  $G$  para reducirlo a  $H \cup e$ . Es claro que  $H \cup e$  se reduce a  $v$ , entonces  $G$  también se reduce a  $v$ . ■

El siguiente ejemplo muestra que en general la familia de grafos M-casi-planos no es 2-terminal reducible.

**Ejemplo 4.3.1** Sea  $G$  el grafo formado por los vértices  $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  y las aristas  $E = \{ab, bc, cd, de, ef, fa, ga, gb, gc, gd, ge, gf, ad, fc\}$  (ver Figura 4.30).  $G$  no es plano ya que el subgrafo  $G \setminus \{gb, ge\}$  es una subdivisión de  $K_5$ , y  $G \setminus ad$  es plano, por lo tanto  $G$  es M-casi-plano. Si  $G$  fuera 2-terminal reducible, y tomamos como vértices terminales a  $b$  y  $e$ , entonces  $G \cup \{be\}$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible. Esto es una contradicción al Corolario 2.3.4, ya que  $G \cup \{be\}$  es un grafo de la familia de Petersen (ver Figura 2.5).

El grafo  $G$  de la prueba anterior no es casi-plano, ya que  $G \setminus ge$  tiene una subdivisión de  $K_5$  y  $G/ge$  tiene un subgrafo isomorfo a  $K_{3,3}$ .



**Figura 4.30:**  
Grafo  
M-casi-plano no  
2-terminal  
reducible.

**Lema 4.3.2** Los siguientes grafos son 3-terminal reducibles:

- I)  $K_5$ .
- II)  $K_{3,3}$ .
- III) Banda de Möbius con 8 vértices  $M(4)$ .
- IV) Banda de Möbius con 10 vértices  $M(5)$ .
- V) Las bi-ruedas  $\mathcal{B}$ .

### Demostración.

- I) Si  $K_5$  tiene tres terminales, entonces existen dos vértices que no son terminales, digamos  $v$  y  $w$ , ambos con grado cuatro y vecinos entre sí entonces, con uno de los dos le podemos quitar una arista al otro aplicando la operación  $OP2$  y una reducción en paralelo. Así obtenemos un grafo plano, y por el Teorema 2.4.5 tenemos el resultado.
- II) Si  $K_{3,3}$  tiene tres terminales, entonces existe un vértice  $v$  de  $K_{3,3}$  que no es terminal. Aplicamos a  $v$  una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  y obtenemos un grafo con cinco vértices y nueve aristas por lo tanto es plano y por el Teorema 2.4.5 es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible con 3-terminales.
- III) Como solo hay tres terminales en  $M(4)$ , existe una arista  $x_i y_i$ , tal que ninguno de sus extremos es terminal. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $i = 2$ , además al menos uno de los vértices  $x_1, x_3, y_1$  o  $y_3$  no es terminal, supongamos que es  $x_3$ . Procedamos a reducirlo, primero apliquemos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_2$ , seguida de una  $OP1$  con centro  $x_3$  para quitar la arista  $x_2 y_3$ , luego



aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre el vértice  $x_2$  seguida de una reducción en paralelo en la arista  $x_1y_1$ . Ahora tenemos seis vértices de los cuales dos tienen grado cuatro y tres son terminales, entonces existe uno de grado tres que no es terminal, a éste le aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$ . Así hemos obtenido un grafo plano o a  $K_5$  (ver Figura 4.31), que por el Teorema 2.4.5 o el inciso I son 3-terminal reducibles.

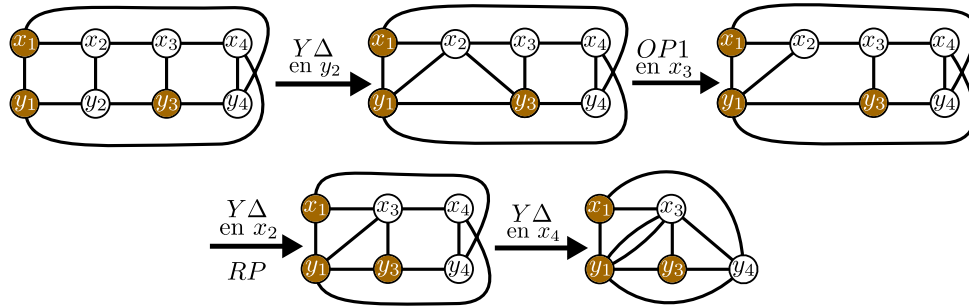


Figura 4.31: Reducción de  $M(4)$  con 3-terminales.

IV) Nota. Por el Lema 4.2.3 inciso II solo necesitamos que  $M(5)$  tenga un vértice donde sus vecinos y él no sean terminales para, poder reducirlo a  $M(4)$ . A este vértice le llamaremos **bueno**.

Dado que  $M(5)$  tiene diez vértices y tres terminales, existe una arista  $x_iy_i$ , tal que ninguno de sus extremos es terminal, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $i = 2$ , los siguientes casos se siguen de la nota de arriba:

- Si  $\{x_1, x_3\}$  o  $\{y_1, y_3\}$  no son terminales, entonces  $x_2$  o  $y_2$  es un vértice bueno, respectivamente.
- Si  $x_1$  y  $y_3, y, y_4$  o  $y_5$  son terminales, entonces  $x_5$  o  $x_4$  es un vértice bueno, respectivamente.
- Si  $x_3$  y  $y_1, y, x_4$  o  $x_5$  son terminales, entonces  $y_5$  o  $y_4$  es un vértice bueno, respectivamente.
- Como  $M(5)$  tiene diez vértices y cada terminal solo puede evitar que cuatro vértices sean buenos (estando en algún vértice bueno o en un vecino de un vértice bueno) entonces, para cualquier terna de terminales del conjunto  $\{x_1, x_3, y_1, y_3\}$  siempre existe un vértice bueno.

Ejemplo, si  $x_1, x_3$  y  $y_1$  son terminales, entonces  $y_4$  es el bueno.

Sólo restan los casos cuando  $x_1, y_3$  y  $x_5$  o  $x_4$  son terminales y cuando  $y_1, x_3$  y  $y_5$  o  $y_4$  son terminales.

Supongamos que  $x_1, y_3$  y  $x_4$  son terminales. Vamos a eliminar a  $x_2$  y  $y_2$ , aplicando una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_2$ , seguida de una  $OP1$  para quitar la arista  $x_2y_3$  con centro  $x_3$ , luego aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre el vértice  $x_2$ , y quitamos la arista paralela  $x_1y_1$  (ver Figura 4.32). Igualmente quitamos  $x_5$  y  $y_5$  obtenemos el primer grafo de la Figura 4.33. Ahora le aplicamos dos operaciones  $OP2$  una con centro  $y_4$  para mover la arista  $y_1x_1$  a  $x_4y_3$ , y la otra con centro  $y_1$  para mover la arista  $x_4y_4$  a  $x_3y_3$  (ver Figura 4.33). Este grafo es plano y por el Teorema 2.4.5 se sigue el resultado.

De forma similar se resuelven los casos restantes.

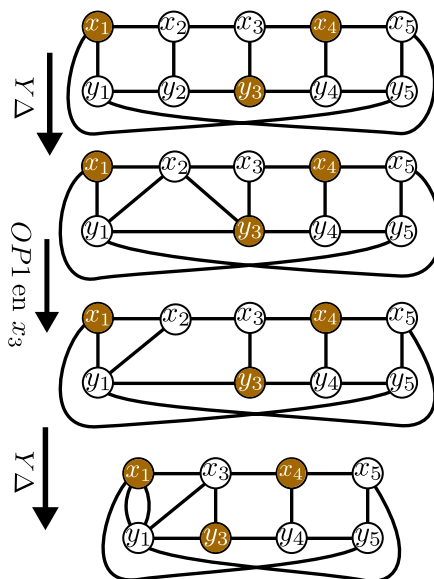


Figura 4.32: Reducción de  $M(5)$  con 3-terminals.

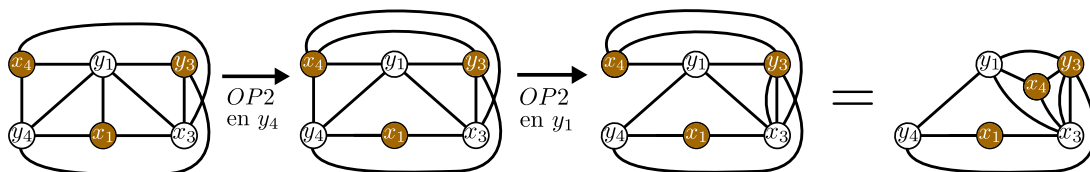


Figura 4.33: Reducción de  $M(5)$  con 3-terminals.

- v) Sea  $B(n)$  una bi-rueda. Procederemos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 3$ , entonces  $B(3)$  es  $K_5$ ; el resultado se sigue del inciso I.

Nota 1. El Lema 4.2.3 inciso III nos dice como reducir  $B(n)$  a  $B(n - 1)$ , solo necesitamos tener una arista  $y_iy_{i+1 \pmod n}$  con extremos no terminales; le llamaremos arista **buena**.

Nota 2. Cada vértice terminal solo puede impedir que a lo más dos aristas  $y_iy_{i+1 \pmod n}$  no sean buenas (colocándose en alguno de sus extremos).

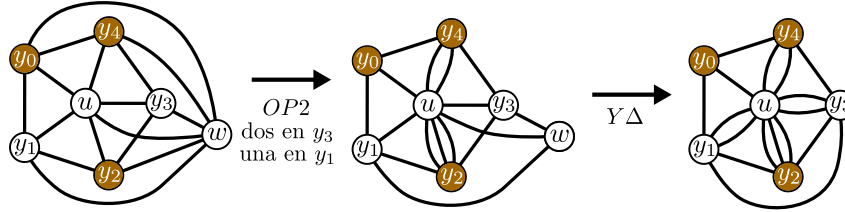
Siempre que encontremos una arista buena podremos aplicar el Lema 4.2.3 y luego por inducción tendremos el resultado. En los casos en donde no hay arista buena daremos la reducción explícita.

Si  $n = 4$ , entonces  $B(4)$  tiene cuatro aristas  $y_iy_{i+1 \pmod 4}$ . Sea  $C$  el ciclo  $y_0y_1y_2y_3y_0$  de  $B(4)$ . Por la nota 2, los siguientes casos son los únicos en los que  $B(4)$  no tiene

arista buena:

- Caso 1: hay tres vértices terminales en  $C$ . Sea  $y_i$  el único vértice no terminal en  $C$ . Usando la  $OP2$  con centro  $y_i$  cambiamos la arista  $uw$  por  $y_{i-1} \text{ mód } 4 y_{i+1} \text{ mód } 4$ ; sea  $G'$  el grafo obtenido.  $G'$  es isomorfo a  $B(4)$  y los vértices  $y_{i-1} \text{ mód } 4$ ,  $y_{i+1} \text{ mód } 4$  son ahora los de grado cinco y son terminales entonces,  $G'$  tiene arista buena y lo podemos reducir como dice la nota 1.
- Caso 2:  $y_0$  y  $y_2$ , o,  $y_1$  y  $y_3$  son terminales. Se resuelve de forma análoga al caso 1.

Si  $n = 5$ , entonces  $B(5)$  tiene cinco aristas  $y_i y_{i+1} \text{ mód } 5$ . Sea  $C$  el ciclo  $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_0$ , por la nota 2 el único caso en que  $B(5)$  no tiene arista buena es cuando hay tres vértices terminales en  $C$  y uno de ellos no es adyacente a ningún terminal. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $y_0, y_4$  y  $y_2$  son terminales. Aplicamos tres  $OP2$ ; dos con centro en  $y_3$  y una en  $y_1$  para mover las aristas  $wy_2, wy_4$  y  $wy_0$  a  $uy_4, uy_2$  y  $uy_2$ , respectivamente. Ahora  $w$  tiene grado tres y sus vecinos son  $y_3, y_1$  y  $u$ . Si aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $w$  obtenemos un grafo plano, que por el Teorema 2.4.5 es 3-terminal reducible (ver Figura 4.34).



**Figura 4.34:** Reducción de  $B(5)$  con 3-terminales.

Si  $n = 6$ , entonces  $B(6)$  tiene seis aristas  $y_i y_{i+1} \text{ mód } 6$ . Sea  $C$  el ciclo  $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_0$ , por la nota 2 el único caso en que  $B(6)$  no tiene arista buena es cuando hay tres vértices terminales en  $C$  y no son adyacente entre ellos; están bien distribuidos. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $y_0, y_2$  y  $y_4$  son terminales. Aplicamos cuatro  $OP2$  con centros: tres en  $y_5$  y uno en  $y_1$ , para mover las aristas  $wy_0, wy_4, uw$  y  $wy_2$  a  $uy_4, uy_0, y_0 y_4$  y  $uy_0$  respectivamente. Así  $w$  tiene grado tres, le aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  obteniendo el triángulo  $\{y_1, y_3, y_5\}$ . Además generamos los triángulos  $\{y_0, y_1, y_5\}$  y  $\{y_3, y_4, y_5\}$ , les aplicamos una transformación  $\Delta \rightarrow Y$ . En este momento  $y_5$  tiene grado tres, le aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  obteniendo un grafo plano (ver Figura 4.35). Por el Teorema 2.4.5 se sigue el resultado.

Si  $n \geq 7$ , entonces  $B(n)$  tiene al menos siete aristas  $y_i y_{i+1} \text{ mód } n$ . Por la nota 2 los tres terminales solo bloquearían a lo más seis aristas  $y_i y_{i+1} \text{ mód } n$  entonces,

siempre existe una arista buena en  $B(n)$ . Por la nota 1 e inducción se sigue el resultado.

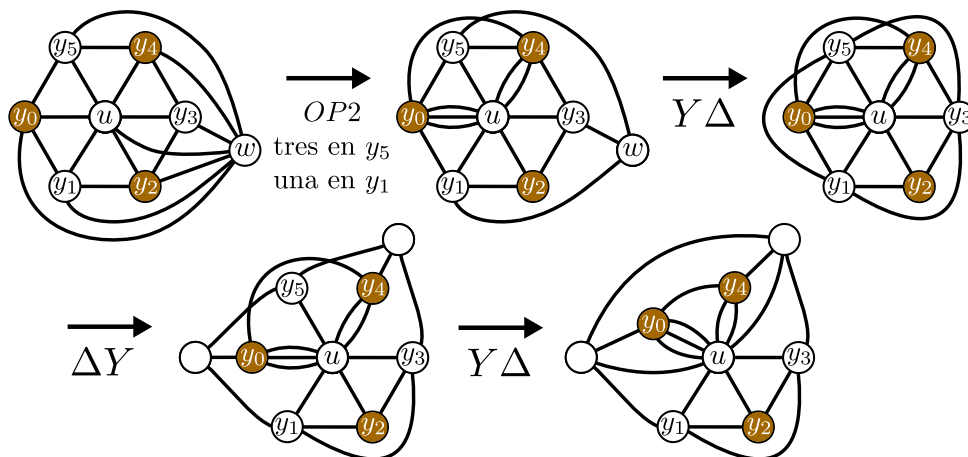


Figura 4.35: Reducción de  $B(6)$  con 3-terminales.

**Definición 4.3.1** Sean  $a, b, c, d, e$  y  $f$  los vértices de un  $K_6$ . Definimos al grafo  $\widetilde{K}_6$  como  $K_6 \setminus \{ab, bc, ca\}$ .

**Lema 4.3.3** El grafo  $\widetilde{K}_6$  no es 3-terminal reducible y es minimal con esta propiedad.

**Demostración.** Supongamos que  $\widetilde{K}_6$  es 3-terminal reducible; marquemos  $a, b$  y  $c$  como terminales. Entonces  $\widetilde{K}_6$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a un grafo  $G$  que tiene como vértices  $a, b$  y  $c$ . Se sigue que el grafo  $\widetilde{K}_6 \cup \{ab, bc, ca\}$  también es reducible a  $G$ , ya que las aristas  $ab, bc$  y  $ca$  tienen como extremos a vértices terminales de  $\widetilde{K}_6$  y las operaciones usadas para reducir a  $\widetilde{K}_6$  no se ven afectadas en  $\widetilde{K}_6 \cup \{ab, bc, ca\}$ , si acaso se agrega alguna reducción en paralelo aplicada a alguna de las aristas  $ab, bc$  y  $ca$ . Así es claro que  $\widetilde{K}_6 \cup \{ab, bc, ca\}$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible. Esto es una contradicción ya que  $\widetilde{K}_6 \cup \{ab, bc, ca\}$  es isomorfo a  $K_6$  que por el Teorema 2.3.3 de Warkentyne no es reducible y es minimal con esta propiedad. ■

**Lema 4.3.4** Los siguientes grafos con 3-terminales son reducibles a  $\widetilde{K}_6$  o son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles:

- I) Los grafos en las familias  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ .
- II) Las bandas de Möbius  $M(n)$  para  $n \geq 6$ .

**Demostración.**

- I) Sea  $i$  uno o dos. Recordemos que los vértices de  $H_i(m, n, r)$  son  $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots,$

$y_m, v_1, \dots, v_r, u, w, z\}$ . Tomemos los conjuntos de vértices:  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $B = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  y  $C = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ .

Supongamos que, alguno de los conjuntos  $A$ ,  $B$  o  $C$  no tiene vértice terminal. Sin pérdida de generalidad sea  $C$  tal conjunto. Aplicando el Lema 4.2.3 inciso I, las veces necesarias, podemos reducir  $H_i(m, n, r)$  a  $H_i(m, n, 1)$ . Usando la transformación  $Y \rightarrow \Delta$  en el vértice  $v_1$  de  $H_i(m, n, 1)$  obtenemos un grafo plano y por el Teorema 2.4.5 éste es 3-terminal reducible.

Solo resta el caso cuando cada uno de los conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  tiene un terminal. De nuevo por el Lema 4.2.3 inciso I podemos reducir  $H_i(m, n, r)$  a un grafo  $G$  isomorfo a  $H_i(1, 1, 1)$ . El inciso es cierto dado que  $H_i(1, 1, 1)$  es isomorfo a  $\widetilde{K}_6$ .

- ii) El Lema 4.2.3 inciso II nos dice como reducir  $M(n + 1)$  a  $M(n)$ ; solo necesitamos que exista un vértice donde él y sus vecinos no sean terminales, a estos vértices les llamamos *buenos*. Procedemos por inducción sobre  $n$ .

Si  $M(6)$  tiene al menos un vértice bueno se puede reducir a  $M(5)$  que por el Lema 4.3.2 inciso IV es 3-terminal reducible. El único caso en que  $M(6)$  no tiene vértice bueno es cuando  $x_1, y_3$  y  $x_5$  son terminales, salvo isomorfismos. Tratamos este caso aplicando las siguientes operaciones: cuatro transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_2, y_4, x_3$  y  $x_6$ ; dos reducción en paralelo en  $x_2y_3$  y  $x_4y_3$ ; una transformación  $\Delta \rightarrow Y$  sobre el triángulo  $\{x_2, y_3, x_4\}$  que nos regresa el vértice  $x_3$ ; dos transformaciones  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $x_2$  y  $x_4$ ; dos reducciones en paralelo en  $x_1y_1$  y  $x_5y_5$ ; una  $OP2$  con centro en  $y_5$  para mover la arista  $x_5y_6$  a  $x_3y_3$ ; una reducción en paralelo en  $x_3y_3$ ; una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $y_6$ ; y una reducción en paralelo en  $x_1y_1$  (ver Figura 4.36). El grafo obtenido es isomorfo a  $\widetilde{K}_6$ . Así el resultado es cierto para  $M(6)$ .

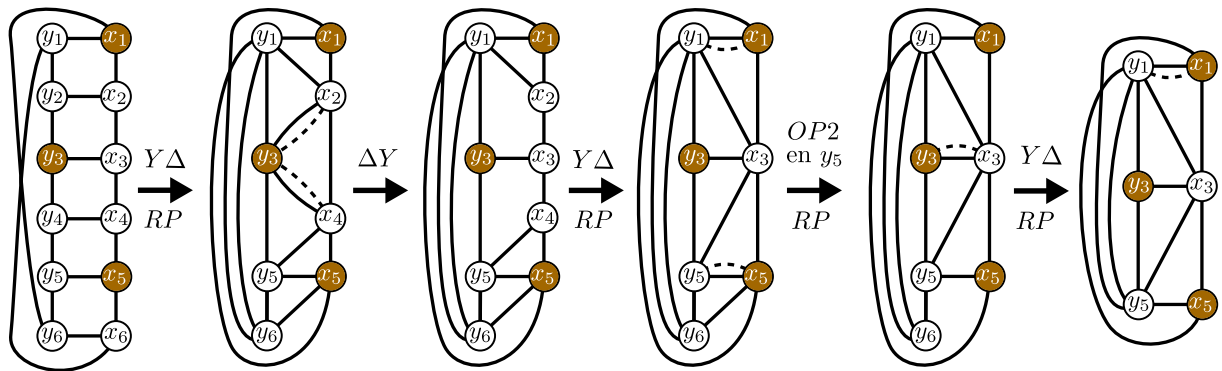


Figura 4.36: Reducción de  $M(6)$  con 3-terminales.

Supongamos el resultado para  $n \geq 6$ .

Es claro que  $M(n+1)$  tiene al menos catorce vértices buenos y cada terminal solo puede evitar que cuatro vértices en  $M(n+1)$  sean buenos. Por lo tanto existe al menos un vértice  $v$  bueno en  $M(n+1)$ . Usando  $v$  y el Lema 4.2.3 inciso II reducimos  $M(n+1)$  a  $M(n)$  y el resultado se sigue por inducción. ■

**Teorema 4.3.5** Si  $G$  es un grafo conexo, casi-plano con 3-terminales, entonces es 3-terminal reducible a  $\widetilde{K}_6$  o a un subgrafo de  $K_3$  con sus vértices terminales.

**Demostración.** Por el Corolario 4.1.5 podemos suponer que  $G$  es un grafo simple, casi-plano y 3-conexo. Por el Teorema 4.1.2, existe un grafo  $G'$  en alguna de las familias de Gubser  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  o  $\mathcal{M}$  tal que  $G$  es menor de  $G'$ . Tenemos lo siguientes casos:

Si  $G'$  es una bi-rueda, entonces por el Lema 4.3.2 inciso v  $G'$  es 3-terminal reducible.

Si  $G'$  está en  $\mathcal{H}_i$  para  $i$  igual a uno o dos. Por el Lema 4.3.4  $G'$  es 3-terminal reducible a  $\widetilde{K}_6$  o es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

Si  $G'$  es una banda de Möbius  $M(n)$ . Por el Lema 4.3.2 incisos II, III y IV  $G'$  es 3-terminal reducible para  $n < 6$ , y por el Lema 4.3.4  $G'$  es 3-terminal reducible a  $\widetilde{K}_6$  o es 3-terminal reducible para  $n \geq 5$ .

Por el Teorema 2.4.1 se sigue el resultado para  $G$ . ■

En el teorema anterior, en caso de que una grafo conexo casi-plano, 3-terminal sea reducible a  $\widetilde{K}_6$ . Los vértices de grado tres en  $\widetilde{K}_6$  serán los terminales.

**Corolario 4.3.6** Los grafos conexos, casi-planos son 2-terminal reducibles.

**Demostración.** Sea  $G$  grafo conexo, casi-plano con 2-terminales. Por el teorema anterior  $G$  es 2-terminal reducible o es 2-terminal reducible a  $\widetilde{K}_6$ . Recordemos que  $\widetilde{K}_6$  tiene tres vértices de grado tres. Como solo tenemos dos terminales,  $\widetilde{K}_6$  tiene un vértice  $v$  de grado tres no terminal. Aplicamos una transformación  $Y \rightarrow \Delta$  sobre  $v$  y obtenemos un grafo con cinco vértices. El resultado se sigue del Teorema 2.4.1 y del Lema 4.3.2 inciso I. ■

### 4.3.2 GRAFOS LIBRES DE $K_5$ O $K_{3,3}$ Y GRAFOS TOROIDALES

Recordemos que, un grafo es libre de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  si no tiene a  $K_5$  o  $K_{3,3}$  como menor, respectivamente. A continuación dos teoremas que caracterizan a los grafos libres de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ ; estos grafos no tienen que ser conexos.

**Teorema 4.3.7 (Wagner [85])** Un grafo es libre de  $K_{3,3}$  si y sólo si puede ser obtenido de grafos planos y  $K_5$  por medio de 0-,1- y 2- sumas.

**Teorema 4.3.8 (Wagner [85])** Un grafo es libre de  $K_5$  si y sólo si puede ser obtenido de grafos planos y  $M(4)$  por medio de 0-,1-, 2- y 3- sumas.

Con ayuda de la caracterización de Wagner para grafos libres de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , y de la que damos nosotros en el Lema 4.2.12 para grafos casi-planos, tenemos el siguiente lema.

**Lema 4.3.9** 1) Los grafos en  $\mathcal{W}^*$  son libres de  $K_5$ .

2) Los siguientes grafos tienen a  $K_5$  y  $K_{3,3}$  como menores:

- a) Las bandas de Möbius  $M(n)$  con  $n \geq 5$ .
- b) Las bi-ruedas  $B(m)$  con  $m \geq 4$ .
- c) Los grafos  $C_{2l+1}^2$  con  $l \geq 3$

**Demostración.** El inciso 1 se sigue del Teorema 4.3.8 y de que cualquier elemento de  $\mathcal{W}^*$  es 3-suma de tres ruedas.

Por el Teorema 2.2.8  $M(n)$  ( $n \geq 5$ ),  $B(m)$  ( $m \geq 4$ ) y  $C_{2l+1}^2$  ( $l \geq 3$ ) tienen a  $K_{3,3}$  como menor, ya que son no-planos, 3-conexos y tienen al menos 6 vértices.  $M(n)$  ( $n \geq 5$ ),  $B(m)$  ( $m \geq 4$ ) y  $C_{2l+1}^2$  ( $l \geq 3$ ) tienen a  $K_5$  como menor ya que: el grafo  $M(5)$  tiene a  $K_5$  como menor al contraer de forma alternada las aristas del ciclo  $x_1x_2 \cdots x_5y_1 \cdots y_5x_1$ ; La bi-rueda  $B(3)$  y  $C_5^2$  son isomorfos a  $K_5$ . ■

A continuación probaremos el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.10 (Gitler [30])** Todo grafo conexo libre de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

Para esto necesitamos el siguiente lema.

Sea  $G$  el grafo obtenido de una  $l$ -suma de  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son los sumandos de  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente, y sea  $S$  el conjunto de vértices de  $G$  en el que se identifican  $S_1$  y  $S_2$ .

**Lema 4.3.11** Si  $G_1$  es  $l$ -terminal reducible y  $G_2$  es reducible entonces,  $G$  es reducible.

**Demostración.** Tomemos como terminales a  $S_1$  en  $G_1$  entonces  $G_1$  es reducible a un grafo  $G'_1$  tal que  $V(G'_1) = S_1$ . Por definición de  $l$ -suma, el subgrafo  $H$  de  $G$  inducido por  $(V(G_1) \setminus S_1) \cup S$  es isomorfo a un subgrafo generador de  $G_1$ . De hecho la diferencia entre  $H$  y  $G_1$  son las aristas que se quitan entre los vértices  $S_1$  al hacer la  $l$ -suma. Por el Teorema 2.4.1 y dado que  $G_1$  es  $l$ -terminal reducible,  $H$  es reducible a un subgrafo de  $G$  que solo tiene a los vértices  $S$ .

La secuencia de reducción de  $H$  se puede heredar a todo  $G$  ya que,  $H$  es subgrafo inducido y los únicos vértices que son adyacentes a aristas que no están en  $H$  son los vértices de  $S$ .

Por lo tanto  $G$  es reducible a un subgrafo  $M$  que tiene como vértices al conjunto  $(V(G_2) \setminus S_2) \cup S$ , y como aristas a la unión de  $E(G_2 \setminus S_2)$  con las aristas que se generaron o se quitaron entre los vértice de  $S$  al reducir a  $H$ , y las aristas entre  $S$  y  $G_2 \setminus S_2$ . Notemos que  $M$  es isomorfo a un subgrafo inducido de  $G_2$ , dado que  $S_2$  genera un  $l$ -clique en  $G_2$ .

Por el Teorema 2.3.5 y dado que  $G_2$  es reducible  $M$  también es reducible. Así se obtiene el resultado ■

**Teorema 4.3.12 (Gitler [30])** Todo grafo conexo y libre de  $K_{3,3}$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Demostración.** Sea  $G$  grafo libre de  $K_{3,3}$ . Aplicamos inducción sobre la cantidad de las 0-, 1- y 2-sumas del Teorema 4.3.7.

Si no hay sumas, entonces  $G$  es plano o isomorfo a  $K_5$  y el resultado se sigue por el Teorema 2.4.2, o por el Lema 4.3.2 inciso I, respectivamente.

Supongamos el resultado para  $n$  sumas.

Si  $G$  es resultado de  $n + 1$  sumas. Entonces existen dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  tales que  $G$  es 0-, 1-, o 2- suma de  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $G_2$  es libre de  $K_{3,3}$  y  $G_1$  es plano o isomorfo a  $K_5$ . Esto implica que  $G_2$  es formado por  $n$  sumas y como  $G$  es conexo no es 0-suma.

Por el Teorema 2.4.2, o por el Lema 4.3.2 inciso I  $G_1$  es 1 o 2-terminal reducible y por hipótesis de inducción  $G_2$  es reducible. Así el resultado se sigue del Lema 4.3.11. ■

**Teorema 4.3.13 (Gitler [30])** Todo grafo conexo libre de  $K_5$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Demostración.** Sea  $G$  un grafo conexo libre de  $K_5$ , procedemos por inducción sobre la cantidad de las 0-, 1-, 2- y 3-sumas del Teorema 4.3.8.

Si no hay sumas, entonces  $G$  es plano o isomorfo a  $M(4)$  y el resultado se sigue del Teorema 2.4.2 o del Lema 4.3.2 inciso III, respectivamente.

Supongamos el resultado para  $n$  sumas.

Si  $G$  es obtenido por  $n + 1$  sumas. Entonces, existen dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  tales que  $G$  es 0-, 1-, 2- o 3-suma de  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $G_2$  es libre de  $K_5$  y  $G_1$  es plano o isomorfo a  $M(4)$ , y como  $G$  es conexo no es 0-suma.

Por el Teorema 2.4.2, o por el Lema 4.3.2 inciso III  $G_1$  es 1, 2 o 3-terminal reducible y por hipótesis de inducción  $G_2$  es reducible. Así el resultado se sigue del Lema 4.3.11. ■



Ahora estudiamos el caso cuando un grafo libre de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  tiene terminales. Para esto necesitamos dos definiciones.

**Definición 4.3.2** Sea  $G$  un grafo conexo. Una *descomposición en árbol* de  $G$  es un par  $(X, T)$ , donde  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  es una familia de subconjuntos de  $V(G)$ , y  $T$  es un árbol cuyos vértices son los subconjuntos  $X_i$ , de tal forma que se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) La unión de todos los conjuntos  $X_i$  es igual a  $V(G)$ .
- 2) Para cada arista  $vw$  de  $G$ , hay un subconjunto  $X_i$  que contiene los vértices  $v$  y  $w$ .
- 3) Si  $X_i$  y  $X_j$  contienen ambos un vértice  $v$ , entonces todos los nodos  $X_k$  del árbol en el camino (único) entre  $X_i$  y  $X_j$  también contienen a  $v$ .

Para una de subconjuntos  $X$  el árbol de descomposición  $(X, T)$  no es único. El grafo  $G$  puede ser obtenido por  $l$ -sumas de subgrafos inducidos  $G(X_i)$ . En este caso estamos quitando la restricción de que en una  $l$ -suma los vértices de los grafos involucrados tienen que ser distintos.

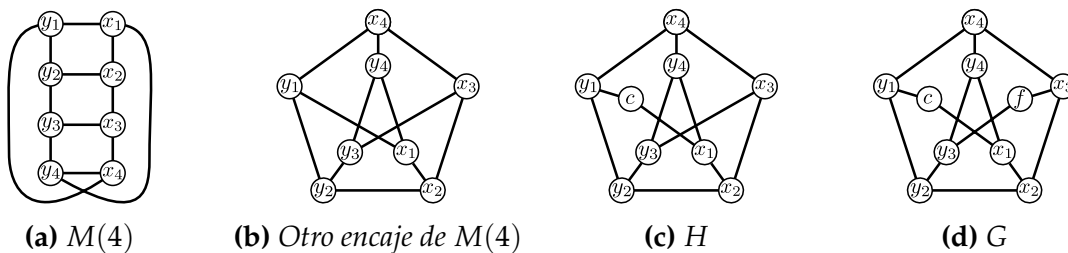
Sea  $G$  el grafo obtenido de una  $l$ -suma de  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son los sumandos de  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente, y sea  $S$  el conjunto de vértices de  $G$  en el que se identifican  $S_1$  y  $S_2$ . De esta  $l$ -suma podemos generar un árbol de descomposición  $(X, T)$  de  $G$ , donde  $X = \{ (V(G_1) \setminus S_1) \cup S, (V(G_2) \setminus S_2) \cup S \}$  y  $E(T)$  es solo una arista que representa la  $l$ -suma de los grafos  $G_1$  y  $G_2$ . Para facilitar la exposición sustituimos  $(V(G_i) \setminus S_i) \cup S$  por el conjunto  $V(G_i)$  y  $E(T)$  se deduce de dicha sustitución. De esta forma si tenemos un grafo  $H$  que es resultado de  $l$ -sumas de una familia de grafos  $H_1, H_2, \dots, H_n$  entonces, a los vértices  $X$  del árbol de descomposición  $(X, T)$  formado por estas  $l$ -sumas lo denotamos por  $\{V(H_i) \mid i = 1, \dots, n\}$  y cada arista de  $E(T)$  representa una  $l$ -suma entre sus extremos.

**Definición 4.3.3** El *ancho de árbol* de un grafo  $G$  es el menor número  $k$ , tal que  $G$  tiene una descomposición en árbol  $(X, T)$  en donde  $X_i \in X$  tiene a lo más  $k + 1$  vértices de  $G$ . De forma equivalente  $G$  puede ser obtenido por  $l$ -sumas de grafos con a lo más  $k + 1$  elementos.

El siguiente ejemplo nos muestra que no todos los grafos libres de  $K_5$  son 2-terminal reducibles.

**Ejemplo 4.3.2** Sea  $H$  el resultado de la 2-suma de  $M(4)$  y  $K_3 = (V(K_3), E(K_3))$  con  $V(K_3) = \{a, b, c\}$  y  $E(K_3) = \{ab, bc, ca\}$ , y los sumandos  $X_1 = \{x_1, y_1\}$  y  $X_2 = \{a, b\}$ , respectivamente; a la hora de sumar vamos a quitar las aristas  $x_1y_1$  y  $ab$ , respectivamente (ver Figuras 4.37a, 4.37b y 4.37c).

Ahora sea  $G$  el resultado de la 2-suma de  $H$  y  $K'_3 = (V(K'_3), E(K'_3))$  con  $V(K'_3) =$



**Figura 4.37:** Un grafo libre de  $K_5$  2-terminal irreducible.

$\{d, e, f\}$  y  $E(K_3') = \{de, ef, fd\}$ , y los sumandos  $Y_1 = \{x_3, y_3\}$  y  $Y_2 = \{d, e\}$ , respectivamente; a la hora de sumar vamos a quitar las aristas  $x_3y_3$  y  $de$ , respectivamente (ver Figura 4.37d).

Por el Teorema 4.3.8 de Wagner,  $G$  es libre de  $K_5$ . Supongamos que  $G$  es 2-terminal reducible. Tomemos como vértices terminales a  $c$  y  $f$ . Entonces  $G \cup fc$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible. Esto es una contradicción al Corolario 2.3.4, ya que  $G \cup fc$  es isomorfo al grafo de Petersen (ver Figuras 2.5 y 4.37d).

El grafo  $G$  del ejemplo anterior es  $M$ -casi-plano ya que es una subdivisión de  $M(4)$  y no es casi-plano ya que  $G/y_1c$  y  $G \setminus y_1c$  tienen una subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Tal vez no todos los grafos libres de  $K_5$  son 2-terminal reducibles, pero sí podemos decir:

**Teorema 4.3.14** Sea  $G$  un grafo conexo libre de  $K_5$  y  $X$  un  $n$ -clique ( $n = 1, 2, 3$ ) de  $G$ . Entonces  $G$  con  $X$  como terminales es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Demostración.** Por el Teorema 4.3.8 de Wagner existen grafos  $G_1, \dots, G_k$  planos o isomorfos a  $M(4)$ , tal que  $G$  es obtenido de  $l$ -sumas de éstos, con  $l = 1, 2$  o  $3$ . Procederemos por inducción sobre  $k$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $G$  es plano o isomorfo a  $M(4)$ , y el resultado se sigue del Teorema 2.4.5 o el Lema 4.3.2 inciso III, respectivamente.

Supongamos el resultado para  $k \leq n$ .

Ahora para  $k = n + 1$ . Sea  $(Y, T)$  el árbol de descomposición de  $G$  formado por las  $l$ -sumas, recordemos que  $Y$  es el conjunto  $\{V(G_1), \dots, V(G_{n+1})\}$ .  $T$  tiene al menos dos hojas ya que es un árbol, supongamos que  $V(G_i)$  y  $V(G_j)$  son dos hojas de  $T$ .

Sea  $m$  un número definido como:

$$m = \begin{cases} i & \text{Si } X \subset V(G_i) \cap V(G_j) \text{ o si } X \not\subset V(G_i) \\ j & \text{Si } X \not\subset V(G_j). \end{cases}$$

Sea  $H$  el resultado de las  $l$ -sumas de los grafos  $\{G_1, \dots, G_{k+1}\} \setminus G_m$ . Entonces  $G$  es obtenido de una  $l$ -suma de  $H$  y  $G_m$  con los sumandos  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Por la elección de  $m$  el conjunto  $X$  está en  $V(H)$ .

Tomemos como terminales a los vértices de  $X_2$  en  $G_m$ . Por el Teorema 2.4.5 o el Lema 4.3.2 inciso III,  $G_m$  es reducible a un grafo con vértices  $X_2$ . Por la elección de  $m$  los vértices de  $X$  son iguales a  $X_2$  o no están en  $G_m$ . Así podemos heredar la reducción de  $G_m$  a  $X_2$  a una reducción de  $G$  a  $H$  (como en el Lema 4.3.11). Por hipótesis de inducción  $H$  con  $X$  como terminales es reducible y se tiene el resultado. ■

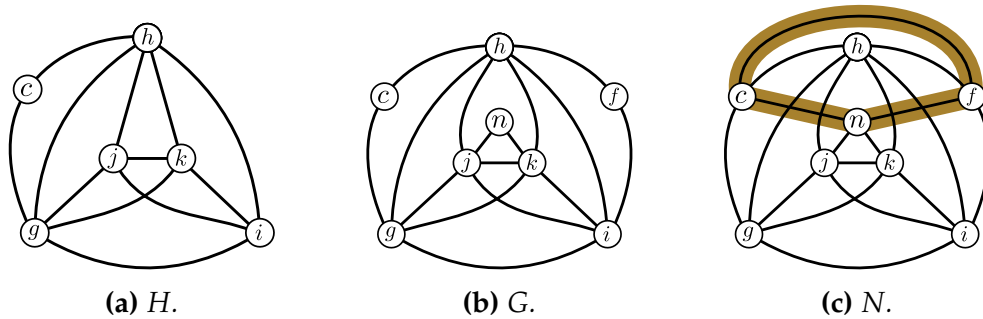
**Corolario 4.3.15** Los grafos libres de  $K_5$  son 1-terminal reducibles.

**Demostración.** El resultado se sigue del teorema anterior al tomar  $X$  como cualquier vértice. ■

Ahora damos un ejemplo de un grafo libre de  $K_{3,3}$  con 3-terminales que no es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Ejemplo 4.3.3** Sea  $H$  el resultado de la 2-suma de  $K_5 = (V(K_5), E(K_5))$  y  $K_3 = (V(K_3), E(K_3))$  con  $V(K_5) = \{g, h, i, j, k\}$ ,  $E(K_5) = \{xy | x \neq y \wedge x, y \in V(K_5)\}$ ,  $V(K_3) = \{a, b, c\}$  y  $E(K_3) = \{ab, bc, ca\}$ , y los sumandos  $X_1 = \{g, h\}$  y  $X_2 = \{a, b\}$ , respectivamente; a la hora de sumar vamos a quitar la arista  $ab$  de  $K_3$  (ver Figura 4.38a).

Ahora sea  $M$  el resultado de la 2-suma de  $H$  y  $K'_3 = (V(K'_3), E(K'_3))$  con  $V(K'_3) = \{d, e, f\}$  y  $E(K'_3) = \{de, ef, fd\}$ , y los sumandos  $Y_1 = \{h, i\}$  y  $Y_2 = \{d, e\}$ , respectivamente; a la hora de sumar vamos a quitar la arista  $ed$  de  $K'_3$ .



**Figura 4.38:** Un grafo libre de  $K_{3,3}$  3-terminal irreducible.

Por último construimos a  $G$ , haciendo una 2-suma de  $M$  y  $K''_3 = (V(K''_3), E(K''_3))$  con  $V(K''_3) = \{l, m, n\}$  y  $E(K''_3) = \{lm, mn, nl\}$ , y los sumandos  $Z_1 = \{j, k\}$  y  $Z_2 = \{l, m\}$ , respectivamente; a la hora de sumar vamos a quitar la arista  $lm$  de  $K''_3$  (ver Figura 4.38b).

Por el teorema de Wagner 4.3.7  $G$  es libre de  $K_{3,3}$ . Supongamos que  $G$  es 3-terminal reducible. Tomemos como terminales  $c, f$  y  $n$ . Entonces  $N = G \cup \{cf, fn, nc\}$  es  $\Delta \leftrightarrow$

$Y$  reducible. Esto es una contradicción ya que,  $N/\{cf, fn, nc\}$  es isomorfo a  $K_6$  (ver Figura 4.38c), que por el Teorema 2.3.3 no es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Teorema 4.3.16** Sea  $G$  un grafo conexo libre de  $K_{3,3}$ ,  $e = uv$  una de sus aristas y  $v$  uno de sus vértices. Entonces  $G$  con  $u, v$  y  $w$  como terminales es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible.

**Demostración.** Por el teorema de Wagner 4.3.7 existen grafos  $G_1, \dots, G_k$  planos o isomorfos a  $K_5$ , tal que  $G$  es obtenido de  $l$ -sumas de éstos, con  $l = 1$  o  $2$ . Aplicamos inducción sobre  $k$ .

Si  $k$  es uno, entonces  $G$  es plano o isomorfo a  $K_5$  el resultado se sigue por el Teorema 2.4.5 o por el Lema 4.3.2 inciso I, respectivamente.

Supongamos el resultado para  $k \leq n$ .

Si  $k$  es igual a  $n + 1$ . Sea  $(X, T)$  el árbol de descomposición de  $G$  formado por las  $l$ -sumas, recordemos que  $X$  es el conjunto  $\{V(G_1), \dots, V(G_{n+1})\}$ . Dado que  $T$  es un árbol  $T$  tiene al menos dos hojas. Sean  $V(G_i)$  y  $V(G_j)$  son hojas de  $T$ , tomemos a  $m$  un número definido como:

$$m = \begin{cases} i & \text{Si } e, v \notin G_i \\ i & \text{Si } e \in E(G_i) \cap E(G_j) \text{ y } v \notin V(G_i) \\ j & \text{Si } e \in E(G_i) \cap E(G_j) \text{ y } v \notin V(G_j) \end{cases}$$

Notemos que si  $e \in E(G_i) \cap E(G_j)$  entonces  $e$  es el sumando de  $G_i$  y  $G_j$  lo mismo sucede con  $v$ , así no puede ocurrir que  $e, v \in G_i \cap G_j$  ya que solo se permiten 1- y 2-sumas. Por la misma razón el único caso en que  $m$  no se puede definir es cuando  $T$  solo tiene dos hojas  $G_i$  y  $G_j$  ( $T$  es un camino) tales que,  $v \in G_i, e \in G_j$  y  $e \notin E(G_i) \cap E(G_j)$ , este caso lo dejaremos para el final de la prueba.

Sea  $H$  el resultado de las  $l$ -sumas de los grafos  $\{G_1, \dots, G_{n+1}\} \setminus G_m$ , por lo tanto  $H$  es libre de  $K_{3,3}$ . Entonces  $G$  es obtenido de una  $l$ -suma de  $H$  y  $G_m$  con los sumandos  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Tomemos como terminales a los vértices de  $X_2$  en  $G_m$ . Por el Teorema 2.4.2 o el Lema 4.3.2 inciso I,  $G_m$  con  $X_2$  como terminales es reducible. Por esto y la elección de  $m$  podemos heredar la reducción de  $G_m$  a una reducción de  $G$  a  $H$  (como en el Lema 4.3.11), y por hipótesis de inducción se tiene el resultado cuando podemos definir a  $m$ .

Solo resta el caso, cuando  $T$  tiene solo dos hojas  $V(G_j)$  y  $V(G_i)$  ( $T$  es un camino) tales que  $e$  es arista de  $G_j$ ,  $v$  es vértice de  $G_i$  y  $e \notin E(G_i) \cap E(G_j)$ . Tomemos al único vecino  $V(G_m)$  de  $V(G_i)$  en  $T$ ;  $m$  puede ser igual a  $j$ . Los grafos  $H$  y  $M$  son el resultado de las  $l$ -sumas de los grafos  $\{G_1, \dots, G_{n+1}\} \setminus G_i$  y  $\{G_1, \dots, G_{n+1}\} \setminus \{G_i, G_m\}$ , respectivamente. (si  $j$  es igual a  $m$  el grafo  $M$  no existe, es vacío.) Entonces  $G$  es obtenido de una  $l$ -suma

de  $H$  y  $G_i$  con los sumandos  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente, y  $H$  es obtenida de una  $l$ -suma de  $M$  y  $G_m$  con los sumandos  $Y_1$  y  $Y_2$ , respectivamente.

Por el Teorema 2.4.5 o el Lema 4.3.2, podemos reducir  $G_i$  con  $X_2 \cup \{v\}$  como terminales, obteniendo el grafo  $G'_i$ .

Si  $v$  está en  $X_2$ , entonces  $G$  se puede reducir a  $H$  y el resultado se sigue por inducción (como en el caso de que  $m$  se pueda definir).

Si  $v$  no está en  $X_2$ , tenemos los siguientes casos:

Caso 1,  $G_m$  es un grafo plano: Entonces el grafo resultante  $G'_m$  de la  $l$ -suma de  $G_m$  y  $G'_i$ , con los sumandos  $X_1$  y  $X_2$ , también es plano, ya que  $G'_i$  es un subgrafo de  $K_3$ . Al sumar  $M$  y  $G'_m$  por medio de los sumandos  $Y_1$  y  $Y_2$ , obtenemos el grafo  $H'$  libre de  $K_{3,3}$ , éste solo necesita de  $n$  grafos  $(\{G_1, \dots, G_{n+1}\} \cup \{G'_m\}) \setminus \{G_i, G_m\}$  planos o isomorfos a  $K_5$ , para construirse. Además la reducción de  $G_i$  a  $G'_i$  se puede heredar a  $G$  (como en el Lema 4.3.11) por lo tanto  $G$  es  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a  $H'$  y,  $v$  y  $e$  están en  $H'$ . Por hipótesis de inducción se sigue el resultado.

Caso 2,  $G_m$  es isomorfo a  $K_5$ : La  $l$ -suma de  $G_m$  y  $G'_i$ , con los sumandos  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente, nos da el grafo  $G''_m$ . El grafo  $G''_m$  tiene al menos un vértice  $w \neq v$  de grado cuatro en  $G$ , que no está en  $X_2$  ni en  $Y_2$ , ya que:  $T$  solo tiene dos hoja,  $l$  es uno o dos y  $G_m$  es isomorfo a  $K_5$ . El vértice  $w$  es adyacente a todos los vértices que forman al subgrafo isomorfo a  $K_5$  en  $G''_m$ . Aplicando la OP2 con centro en  $w$ , en  $G''_m$ , podemos mover una arista  $f$  que no tiene sus dos extremos en  $X_2$  ni en  $Y_2$ ; sea  $G'''_m$  el grafo obtenido.  $G'''_m$  es plano ya que la OP2 movió una arista  $f$  del subgrafo isomorfo a  $K_5$  y  $G'_i$  es subgrafo de  $K_3$ . Estas operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$  se heredan a todo  $G$  ya que  $w$  no está en  $X_2$  ni en  $Y_2$ . El resultado se sigue del caso 1 utilizando el grafo  $G'''_m$  en lugar de  $G'_m$ . ■

El siguiente corolario se sigue del teorema anterior.

**Corolario 4.3.17** Los grafos libres de  $K_{3,3}$  son 2-terminal reducibles.

**Definición 4.3.4** Un grafo  $G$  es *toroidal* si  $G$  se puede encajar en el toro sin que un par de sus aristas se crucen, salvo en sus extremos.

Para cualquier grafo encajado en una superficie  $S$ , el *ancho de cara* o *representatividad*  $r(G)$  es la menor cardinalidad de  $|C \cap G|$ , donde  $C$  corre sobre todas las curvas cerradas no homotópicas a un punto.

Sea  $k \geq 3$ , la  $k$ -cuadrícula toroidal es el producto  $C_k \times C_k$  de dos ciclos  $C_k$  de longitud  $k$  i. e.,  $C_k \times C_k$  tiene los vértices  $(i, j)$  para  $0 \leq i, j \leq k - 1$ , donde  $(i, j)$  es adyacente a  $(i', j')$  si  $i = i'$  y  $j = j' \pm 1 \pmod k$  o  $j = j'$  y  $i = i' \pm 1 \pmod k$ .

Claramente cualquier  $k$ -cuadrícula toroidal es toroidal. Por último veremos un resultado interesante sobre grafos toroidales y  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibilidad.

**Teorema 4.3.18 (Degraaf y Schrijver [19])** Cualquier grafo toroidal con representatividad  $r(G) \geq 5$  tiene una  $\lfloor 2r(G)/3 \rfloor$ -cuadrícula toroidal como menor.

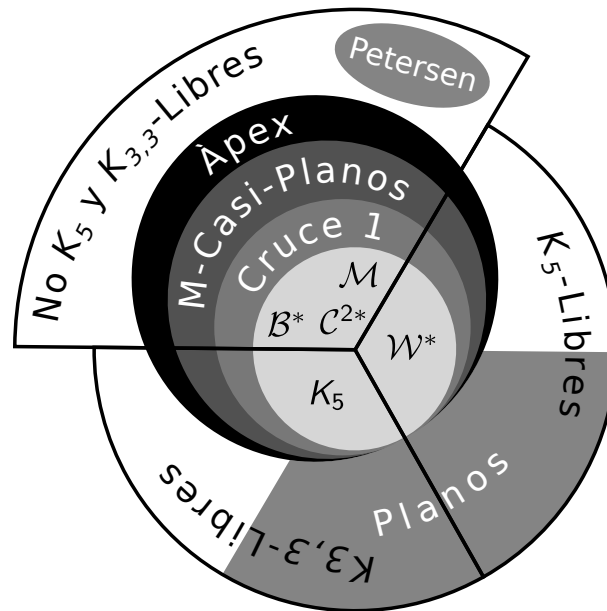
Para concluir esta sección y la tesis daremos un resultado sobre grafos toroidales y reducibilidad:

**Teorema 4.3.19** Todo grafo toroidal con representatividad mayor a cinco es  $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducible.

**Demostración.** Sea  $G$  un grafo toroidal tal que  $r(G) > 5$ . Entonces por el Teorema 4.3.18 de Degraaf y Schrijver  $G$  tiene una 4-cuadrícula toroidal  $H$  como menor.  $H$  es irreducible, dado que es cuatro regular y no tiene triángulos. En virtud del Teorema 2.3.5  $G$  es irreducible. ■

# CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

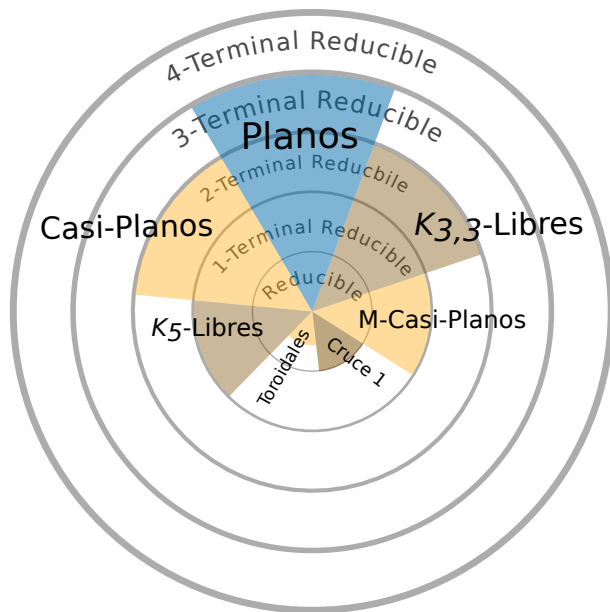
En la Figura 5.1 siguiente resumimos las contenciones entre las familias de los grafos: planos, casi-planos, de cruce uno, ápex, de Petersen, libres de  $K_5$ , libres de  $K_{3,3}$  y grafos con  $K_5$  y  $K_{3,3}$  como menores.



**Figura 5.1:** Se muestra que las contenciones entre algunas familias de grafos.

En términos de la  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibilidad con y sin terminales podemos concluir que (ver Figura5.2):

- Los grafos planos son 3-terminal reducibles.
- Los grafos casi-planos y libres de  $K_{3,3}$  son 2-terminal reducibles.
- Los grafos libres de  $K_5$  y  $M$  – casi – planos son 1-terminal reducibles.
- En general los grafos toroidales no son reducibles.



**Figura 5.2:** *Que tan reducible es una familia de grafos con terminales.*

Es útil estudiar las operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , los grafos  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles y los grafos  $k$ -terminal reducibles por las diversas aplicaciones que tienen. Al menos todas las aplicaciones que hay para estas operaciones se heredan a las familias de grafos libres de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ , casi-planos y  $M$ -casi-planos, por ello es interesante determinar algunas otras familias de grafos  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles con y sin terminales que enriquecerían el acervo de aplicaciones.

En general para una clase de grafos con terminales es interesante caracterizar a que grafos son  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibles. Como lo hicieron Demasi y Mohar [20] en el Teorema 2.4.6, o nosotros para grafos conexos, casi-planos con 3-terminales (Teorema 4.3.5). También queda abierto el problema de encontrar un algoritmo que decida si un grafo es o no es casi-plano y que lo caracterice, para luego poder aplicar los algoritmos de la Sección 4.2.4.

Dado que en general los grafos reducibles no son 1-terminal reducibles, definimos a los grafos pseudo-reducibles como, los grafos reducibles que no son 1-terminal reducibles. Un problema es caracterizar estos grafos.

Otro problema interesante es mostrar que una clase de grafos con o sin terminales, es reducible con la condición de que todo grafo en la secuencia de reducción pertenece a la clase. Por ejemplo, el Teorema 4.2.2 que garantiza que cada grafo conexo, casi-plano es reducible a  $K_{3,3}$  a través de una secuencia de reducciones donde todos los grafos son casi-planos.

En grafos planos podemos estudiar la  $\Delta \leftrightarrow Y$  reducibilidad tomando algunas caras



y vértices como terminales. También podemos investigar que pasa con los grafos que son encajados en alguna superficie y si son o no reducibles. Por ejemplo, el Teorema 4.3.18 nos garantiza que los grafos toroidales con representatividad mayor que cinco son irreducibles. Esto nos da pie a un problema: caracterizar a los grafos toroidales, reducibles con representatividad menor o igual a cinco.



# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Sheldon B Akers Jr, *The use of wye-delta transformations in network simplification*, operations research **8** (1960), no. 3, 311–323.
- [2] Joshua Alman, Carl Lian, and Brandon Tran, *Circular planar electrical networks: Posets and positivity*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **132** (2015), 58–101.
- [3] Dan Archdeacon, Charles J Colbourn, Isidoro Gitler, and J Scott Provan, *Four-terminal reducibility and projective-planar wye-delta-wye-reducible graphs*, Journal of Graph Theory **33** (2000), no. 2, 83–93.
- [4] Eiichi Bannai and Etsuko Bannai, *Generalized spin models (four-weight spin models)*, Pacific Journal of Mathematics **170** (1995), no. 1, 1–16.
- [5] Francisco Barahona, *On the computational complexity of ising spin glass models*, Journal of Physics A: Mathematical and General **15** (1982), no. 10, 3241.
- [6] Rodney J Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Courier Corporation, 2007.
- [7] Norman Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge university press, 1993.
- [8] B'ela Bollob'as, *Graph theory: an introductory course*, vol. 63, Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Sergio Cabello and Bojan Mohar, *Crossing number and weighted crossing number of near-planar graphs*, Algorithmica **60** (2011), no. 3, 484–504.
- [10] Pietro Caputo, Thomas Liggett, and Thomas Richthammer, *Proof of aldous' spectral gap conjecture*, Journal of the American Mathematical Society **23** (2010), no. 3, 831–851.
- [11] Hsien-Chih Chang and Jeff Erickson, *Electrical reduction, homotopy moves, and defect*, arXiv preprint arXiv:1510.00571 (2015).
- [12] Manoj K Chari, Thomas A Feo, and J Scott Provan, *The delta-wye approximation procedure for two-terminal reliability*, Operations Research **44** (1996), no. 5, 745–757.
- [13] Charles J Colbourn, J Scott Provan, and Dirk Vertigan, *A new approach to solving three combinatorial enumeration problems on planar graphs*, Discrete Applied Mathematics **60** (1995), no. 1, 119–129.
- [14] Edward Curtis, Edith Mooers, and James Morrow, *Finding the conductors in circular networks from boundary measurements*, RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique **28** (1994), no. 7, 781–814.

- [15] Edward B Curtis, David Ingerman, and James A Morrow, *Circular planar graphs and resistor networks*, *Linear algebra and its applications* **283** (1998), no. 1, 115–150.
- [16] Edward B Curtis and James A Morrow, *Inverse problems for electrical networks*, vol. 13, World Scientific, 2000.
- [17] Yves Colin De Verdière, *Réseaux électriques planaires i*, *Commentarii Mathematici Helvetici* **69** (1994), no. 1, 351–374.
- [18] Yves Colin de Verdiere, Isidoro Gitler, and Dirk Vertigan, *Reseaux électriques planaires ii*, *Commentarii Mathematici Helvetici* **71** (1996), no. 1, 144–167.
- [19] Maurits Degraaf and Alexander Schrijver, *Grid minors of graphs on the torus*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **61** (1994), no. 1, 57–62.
- [20] Lino Demasi and Bojan Mohar, *Four terminal planar delta-wye reducibility via rooted  $k$  2, 4 minors*, *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, 2015, pp. 1728–1742.
- [21] AB Dieker, *Interlacings for random walks on weighted graphs and the interchange process*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **24** (2010), no. 1, 191–206.
- [22] Reinhard Diestel, *Graph theory: Springer graduate text gtm 173*, vol. 173, Reinhard Diestel, 2012.
- [23] Guoli Ding, Joshua Fallon, and Emily Marshall, *On almost-planar graphs*, arXiv preprint arXiv:1603.02310 (2016).
- [24] Ehab S El-Mallah and Charles J Colbourn, *On two dual classes of planar graphs*, *Discrete mathematics* **80** (1990), no. 1, 21–40.
- [25] GV Epifanov, *Reduction of a plane graph to an edge by a star-triangle transformation*, *Soviet Math. Doklady*, vol. 7, 1966, pp. 13–17.
- [26] Thomas A Feo and J Scott Provan, *Delta-wye transformations and the efficient reduction of two-terminal planar graphs*, *Operations Research* **41** (1993), no. 3, 572–582.
- [27] Thomas Aurelio Feo, *I. a lagrangian relaxation method for testing the infeasibility of certain vlsi routing problems. ii. efficient reduction of planar networks for solving certain combinatorial problems*, Tech. report, Ph. D. thesis, California Univ., Berkeley (USA), 1985.
- [28] DJ Frank and CJ Lobb, *Highly efficient algorithm for percolative transport studies in two dimensions*, *Physical Review B* **37** (1988), no. 1, 302.
- [29] Michael R Garey and David S Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of np-completeness*. 1979, San Francisco, LA: Freeman (1979).

- [30] Isidoro Gitler, *Delta-woye-delta transformations: algorithms and applications*, University of Waterloo, 1991.
- [31] Isidoro Gitler and Isaias López, *Spin models, association schemes and  $\Delta$ -Y transformations*, *Morfismos* **3** (1999), no. 2, 31–55.
- [32] ———, *On topological spin models and generalized  $\Delta$ -Y transformations*, *Advances in Applied Mathematics* **32** (2004), no. 1–2, 263 – 292, Special Issue on the Tutte Polynomial.
- [33] Isidoro Gitler and Feliú Sagols, *On terminal delta-woye reducibility of planar graphs*, *Networks* **57** (2011), no. 2, 174–186.
- [34] Jar R Goldman and Louis H Kauffman, *Knots, tangles, and electrical networks*, *Advances in Applied mathematics* **14** (1993), no. 3, 267–306.
- [35] Keith D Gremban, *Combinatorial preconditioners for sparse, symmetric, diagonally dominant linear systems*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 1996.
- [36] Branko Grünbaum, *Convex polytopes*, *Monographs in Pure and Applied Mathematics XVI*. John Wiley & Sons (1967).
- [37] Bradley S Gubser, *A characterization of almost-planar graphs*, *Combinatorics, Probability and Computing* **5** (1996), no. 03, 227–245.
- [38] Dick Wick Hall, *A note on primitive skew curves*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **49** (1943), no. 12, 935–936.
- [39] Petr Hliněný and Gelasio Salazar, *On the crossing number of almost planar graphs*, *Graph Drawing*, Springer, 2007, pp. 162–173.
- [40] Arthur M Hobbs, *Letter to the editor—remarks on network simplification*, *Operations Research* **15** (1967), no. 3, 548–551.
- [41] John Hopcroft and Robert Tarjan, *Efficient planarity testing*, *Journal of the ACM (JACM)* **21** (1974), no. 4, 549–568.
- [42] Ernst Ising, *Beitrag zur theorie des ferromagnetismus*, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **31** (1925), no. 1, 253–258.
- [43] François Jaeger, *Strongly regular graphs and spin models for the kauffman polynomial*, *Geometriae Dedicata* **44** (1992), no. 1, 23–52.
- [44] ———, *On spin models, triply regular association schemes, and duality*, *Journal of Algebraic Combinatorics* **4** (1995), no. 2, 103–144.
- [45] Mark Jerrum, *Two-dimensional monomer-dimer systems are computationally intractable*, *Journal of Statistical Physics* **48** (1987), no. 1-2, 121–134.

- [46] Mark Jerrum and Alistair Sinclair, *Polynomial-time approximation algorithms for the ising model*, SIAM Journal on computing **22** (1993), no. 5, 1087–1116.
- [47] Will Johnson, *Circular planar resistor networks with nonlinear and signed conductors*, arXiv preprint arXiv:1203.4045 (2012).
- [48] Vaughan FR Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models*, Pacific J. Math **137** (1989), no. 2, 311–334.
- [49] Kenichi Kawagoe, Akihiro Munemasa, and Yasuo Watatani, *Generalized spin models*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **3** (1994), no. 04, 465–475.
- [50] Arthur E Kennelly, *The equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks*, Electrical world and engineer **34** (1899), no. 12, 413–414.
- [51] Richard Kenyon, *The laplacian on planar graphs and graphs on surfaces*, arXiv preprint arXiv:1203.1256 (2012).
- [52] William Kocay and Donald L Kreher, *Graphs, algorithms, and optimization*, CRC Press, 2004.
- [53] Thomas Lam and Pavlo Pylyavskyy, *Inverse problem in cylindrical electrical networks*, SIAM Journal on Applied Mathematics **72** (2012), no. 3, 767–788.
- [54] Alfred Lehman, *Wye-delta transformation in probabilistic networks*, Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics **11** (1963), no. 3, 773–805.
- [55] Wilhelm Lenz, *Beitrag zum verständnis der magnetischen erscheinungen in festen körpern*, Z. Phys. **21** (1920), 613–615.
- [56] David Asher Levin, Yuval Peres, and Elizabeth Lee Wilmer, *Markov chains and mixing times*, American Mathematical Soc., 2009.
- [57] YL Loh and EW Carlson, *Efficient algorithm for random-bond ising models in 2d*, Physical review letters **97** (2006), no. 22, 227205.
- [58] YL Loh, EW Carlson, and MYJ Tan, *Bond-propagation algorithm for thermodynamic functions in general two-dimensional ising models*, Physical Review B **76** (2007), no. 1, 014404.
- [59] László Lovász, *Graph minor theory*, Bulletin of the American Mathematical Society **43** (2006), no. 1, 75–86.
- [60] Bojan Mohar, *On the crossing number of almost planar graphs*, Informatica **30** (2006), no. 3.
- [61] Hiroyuki NAKAHARA and Hiromitsu TAKAHASHI, *An algorithm for the solution of a linear system by  $\delta$ -y transformations*, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals

- of Electronics, Communications and Computer Sciences **79** (1996), no. 7, 1079–1088.
- [62] Jaroslav Nešetřil and Robin Thomas, *A note on spatial representation of graphs*, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* **26** (1985), no. 4, 655–659.
- [63] James Oxley, Charles Semple, and Dirk Vertigan, *Generalized  $\Delta$ -Y exchange and  $k$ -regular matroids*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **79** (2000), no. 1, 1–65.
- [64] Mike Pierce, *Searching for and classifying the finite set of minor-minimal non-apex graphs*, Ph.D. thesis, Honours thesis, California State University, Chico, 2014, <http://www.csuchico.edu/tmattman/mpthesis.pdf>, 2014.
- [65] Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas, *Sachs' linkless embedding conjecture*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **64** (1995), no. 2, 185–227.
- [66] Neil Robertson and Paul D Seymour, *Graph minors. xx. wagner's conjecture*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **92** (2004), no. 2, 325–357.
- [67] Neil Robertson, Paul D Seymour, and Robin Thomas, *A survey of linkless embeddings*, *Contemporary Mathematics* **147** (1993), 125–125.
- [68] Neil Robertson and Richard Vitray, *Representativity of surface embeddings*, *Forschungsinst. für Diskrete Mathematik*, 1989.
- [69] Robert Shrock and Fa Yueh Wu, *Spanning trees on graphs and lattices in  $d$  dimensions*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **33** (2000), no. 21, 3881.
- [70] C Singh and S Asgarpoor, *Reliability evaluation of flow networks using delta-star transformations*, *Reliability, IEEE Transactions on* **35** (1986), no. 4, 472–477.
- [71] Xiaohuan Song, *Implementation issues for feo and provan's delta-wye-delta reduction algorithm*, Ph.D. thesis, University of Victoria, 2001.
- [72] Ernesto Staffetti and Federico Thomas, *Kinestatic analysis of serial and parallel robot manipulators using grassmann-cayley algebra*, *Advances in Robot Kinematics*, Springer, 2000, pp. 17–26.
- [73] ———, *Analytic formulation of the kinestatics of robot manipulators with arbitrary topology*, *Robotics and Automation*, 2002. Proceedings. ICRA'02. IEEE International Conference on, vol. 3, IEEE, 2002, pp. 2848–2855.
- [74] Ernst Steinitz, *Polyeder und raumeinteilungen*, Teubner, 1916.
- [75] ———, *Vorlesungen über die theorie der polyeder: unter einschluss der elemente der topologie*, vol. 41, Springer-Verlag, 2013.
- [76] Yi Su, *Electrical network and lie theory*, *DMTCS Proceedings* (2014), no. 01, 369–380.

- [77] E Teufl and S Wagner, *On the number of spanning trees on various lattices*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **43** (2010), no. 41, 415001.
- [78] Lorenzo Traldi, *On the star—delta transformation in network reliability*, Networks **23** (1993), no. 3, 151–157.
- [79] ———, *A note on delta-woye-delta reductions of plane graphs*, Congressus Numerantium (2002), 213–220.
- [80] Klaus Truemper, *On the delta-woye reduction for planar graphs*, Journal of graph theory **13** (1989), no. 2, 141–148.
- [81] ———, *A decomposition theory for matroids. vi. almost regular matroids*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **55** (1992), no. 2, 253–301.
- [82] ———, *Matroid decomposition*, Academic Press Boston, 1992.
- [83] William Thomas Tutte, *Graph theory, volume 21 of encyclopedia of mathematics and its applications*, 1984.
- [84] Donald K Wagner, *Delta-woye reduction of almost-planar graphs*, Discrete Applied Mathematics **180** (2015), 158–167.
- [85] Klaus Wagner, *Über eine eigenschaft der ebenen komplexe*, Mathematische Annalen **114** (1937), no. 1, 570–590.
- [86] ———, *Fastplättbare graphen*, Journal of Combinatorial Theory **3** (1967), no. 4, 326–365.
- [87] ———, *Graphentheorie*, vol. 248/248a, B. J. Hochschultaschenbucher, Mannheim, 1970.
- [88] H.M.K. Warkentyne,  *$\Delta$ -Y reduction. m.math. thesis*, University of Waterloo (1988).
- [89] Yaming Yu, *Forbidden minors for wye-delta-woye reducibility*, Journal of Graph Theory **47** (2004), no. 4, 317–321.
- [90] ———, *More forbidden minors for wye-delta-woye reducibility*, the electronic journal of combinatorics **13** (2006), no. 1, R7.
- [91] Casimir Zarankiewicz, *On a problem of p. turán concerning graphs*, Fundamenta Mathematicae **1** (1955), no. 41, 137–145.
- [92] Ron Zohar and Dan Geiger, *Estimation of flows in flow networks*, European journal of operational research **176** (2007), no. 2, 691–706.



# ÍNDICE ALFABÉTICO

---

- $AW(n)$ , 55
- $C_n^2$ , 54
- $E(G)$ , 5
- $F(G)$ , 8
- $G(X)$ , 6
- $G \cup e'$ , 6
- $G \oplus e$ , 36
- $G^*$ , 36
- $G^+$ , 36
- $G_i^\Delta$ , 55
- $G_i^Y$ , 55
- $H_1(m, n, r)$ , 34
- $H_2(m, n, r)$ , 34
- $K_n$ , 7
- $K_{n,m}$ , 7
- $M(n)$ , 33
- $OP1$ , 12
  - centro, 12
- $OP2$ , 12
  - centro, 12
- $V(G)$ , 5
- $W(G, c, d)$ , 26
- $\mathcal{B}$ , 33
- $\mathcal{B}^*$ , 55
- $\mathcal{C}(G)$ , 33
- $\mathcal{D}(G)$ , 33
- $\mathcal{H}_1$ , 34
- $\mathcal{H}_2$ , 34
- $\mathcal{M}$ , 33
- $\mathcal{S}(G)$ , 33
- $\mathcal{W}$ , 34
- $\mathcal{W}^*$ , 54
  - mód , 39
- $k$ -separación, 54
- $k$ -suma, 8
- árbol, 8
  - hoja, 8
  - peso, 24
- arco, 69
  - $xy$ -arco, 69
  - vértice final, 69
  - vértice interno, 69
- arco del encaje, 8
- arista, 5
  - adyacente, 5
  - borrado, 5
  - buena, 76
  - cuerda, 67
  - energía, 29
  - extremos, 5
  - incidente, 5
  - peso, 23
  - peso de exclusión, 24
  - peso de inclusión, 24
- aristas paralelas, 5
- banda de Möbius, 33
- bi-rueda, 33
  - aro, 33
- bi-rueda alternante, 55
- biciclo, 6
- bipartición, 5
- bosque, 7
- camino, 6
  - camino en, 7
  - hamiltoniano, 7
  - internamente disjunto, 6
  - longitud, 6
  - vértices extremos, 6
  - vértices internos, 6
- cara, 8
- cerrada bajo menores, 8
- ciclo, 6
  - ciclo en, 7
  - hamiltoniano, 7
- clase serie, 68
- cruce de aristas, 8
- emparejamiento, 6
  - perfecto, 6
- encaje, 8

- escala general, 24  
 extensión serie-paralelo, 36  
 familia de Petersen, 13  
 fuertemente conexo, 56  
 función de incidencia, 5  
 función de partición de Ising, 29  
 generador, subgrafo, 6  
 grafo, 5  
    $Y \rightarrow \Delta$  reducible, 13  
    $\Delta \leftrightarrow Y$  equivalente, 12  
    $\Delta \leftrightarrow Y$  irreducible, 12  
    $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible, 12  
    $\Delta \leftrightarrow Y$  reducible a un grafo, 12  
    $\Delta \rightarrow Y$  reducible, 13  
    $n$ -terminal, 18  
    $n$ -terminal reducible a, 18  
   ápex, 8  
   árbol, 8  
     hoja, 8  
   ancho de árbol, 83  
   bi-rueda, 33  
   bipartito, 7  
     completo, 7  
   bosque, 7  
   casi-plano, 33  
   completo, 7  
   componente, 7  
   con pesos, 23  
   conexo, 5  
   configuración  $\sigma$ , 29  
   corte, 30  
   descomposición en árbol, 82  
   disconexo, 5  
   dual, 9  
   energía del sistema, 29  
   euleriano, 7  
   hamiltoniano, 7  
   isomorfismo, 7  
    $k$ -conexo, 7  
   libre, 7  
   lire de  $K_5$ , 80  
   lire de  $K_{3,3}$ , 80  
    $M$ -casi-plano, 38  
    $n$ -regular, 7  
   periplano, 8  
   peso total, 24  
   plano, 8  
   rueda, 33  
     centro, 33  
   serie-paralelo reducible, 11  
   simple, 7  
   subdivisión, 6  
   trivial, 5  
    $W$ -casi-plano, 38  
 homeomorfismo, 8  
 inducido, subgrafo, 6  
 internamente 4-conexo, 54  
 lazo, 5  
 malla  
    $z_{\mathcal{L}}$ , 27  
   cubica, 27  
   límite termodinámico, 27  
   masa, 27  
   sección finita, 26  
   triangular, 27  
 menor, 6  
 menor  $K_{2,4}$  anclado, 20  
 menor terminal, 18  
 menores prohibidos, 8  
 modelo, 43  
   composición de modelos, 48  
 número de cruce, 8  
 operaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , 12  
 partición de  $G$  por  $M$ , 14

- reducción de arista colgante, 11
- reducción de lazo, 11
- reducción en paralelo, 11
- reducción en serie, 11
- rueda, 33
  - centro, 33
  
- secuencia de reducciones, 12
- serie-paralelo, reducción, 11
- subdivisión, 6
- subgrafo, 6
- sumandos, 9
  
- transformación  $\Delta \rightarrow Y$ , 12
- transformación  $Y \rightarrow \Delta$ , 11
- transformaciones  $\Delta \leftrightarrow Y$ , 11
- triángulo, 6
  
- vértice, 5
  - adyacente, 5
  - adyacente a cara, 8
  - aislado, 5
  - borrado, 5
  - estado, 29
  - grado, 5
  - incidente, 5
  - ramificación, 7
  - subdivisión, 7
  - terminal, 18
  - un ápex, 8