



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Teorema de Carathéodory y variedades de
contacto**

Tesis que presenta

Pablo Cesar Cruz Martinez

Para Obtener el Grado de
Maestro en Ciencias
En la Especialidad de
Matemáticas

Director de la Tesis: Dr. Ernesto Lupercio Lara

Ciudad de México

Febrero, 2019

A Sofía Cruz, mi hija.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	IX
Abstract	XI
Introducción	XIII
1. Formas diferenciales y variedades diferenciables	1
1.1. Formas diferenciales en \mathbb{R}^n	1
1.2. Rudimentos de geometría diferencial	5
1.3. Termodinámica desde el punto de vista de Carathéodory y Born	10
2. Teorema de Carathéodory y variedades de contacto	15
2.1. Mecánica estadística	15
2.2. Teorema de Carathéodory	23
2.3. Variedades de contacto	24
2.4. Definición de termodinámica usando variedades de contacto	30
Bibliografía	33

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo. También a cada persona que me acompañó en la realización de este trabajo: al doctor Ernesto Lupercio Lara, por permitirme desarrollar bajo su dirección y orientación este trabajo de grado; además, quiero agradecerle de manera especial a Jenifer Viafara por su apoyo y compañía.

RESUMEN

La geometría diferencial juega un papel muy importante en la física. El conjunto de estados de equilibrio de un sistema termodinámico se puede pensar como una variedad diferenciable, con coordenadas locales $(\theta, x_1, \dots, x_n)$, donde θ es la temperatura empírica y x_1, \dots, x_n las variables de configuración. El teorema de Carathéodory garantiza que sobre estas variedades tengamos temperatura y entropía. Una variedad de contacto es una variedad diferenciable de dimensión impar junto con una estructura de contacto, esto da una manera de definir termodinámica que es más rigurosa que la anterior. En este trabajo se darán los detalles matemáticos de las dos formas de describir termodinámica mencionadas anteriormente.

ABSTRACT

Differential geometry plays a very important role in physics. The set of equilibrium states of a thermodynamic system can be thought of as a differentiable manifold, with local coordinates $(\theta, x_1, \dots, x_n)$, where θ is the empirical temperature and x_1, \dots, x_n the configurational variables. The theorem of Carathéodory guarantees that on these manifolds we have temperature and entropy. A contact manifold is a differentiable manifold of odd dimension together with a contact structure, this gives a thermodynamic definition that is more rigorous than the previous one. In this work the mathematical details of the two forms of thermodynamic description mentioned above will be given.

INTRODUCCIÓN

Si tenemos una 1-forma diferencial α podemos pensar localmente que ésta es un vector; luego le podemos asociar un espacio nulo, el cual será de dimensión uno menos que la variedad donde esté definida. De aquí, podemos extraer algunos resultados como el teorema de Carathéodory. También podemos pensar en otras propiedades sobre esta forma diferencial; habrá alguna que cumpla con la condición $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$; con esto, podemos definir una variedad de contacto.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar una de las relaciones que hay entre la termodinámica y la geometría diferencial; en especial, la relación con las variedades de contacto. En el primer capítulo, definiremos los conceptos funciones k -lineales alternantes, k -forma exterior, k -formas diferenciales en \mathbb{R}^n , derivada exterior y una proposición que nos servirá para el segundo capítulo. También daremos las nociones básicas de geometría diferencial, es decir, variedad diferenciable, espacio tangente a un punto, funciones diferenciales, k -formas diferenciales sobre una variedad, diferencial de una aplicación, campo vectorial y mostraremos algunos ejemplos. A continuación, describiremos la termodinámica desde el punto de vista de Carathéodory donde mostraremos contacto diatérmico, temperatura empírica, variables de configuración, variedad de estados de equilibrio, interacción adiabática, cerradura adiabática, curva adiabática, primera Ley de la Termodinámica, energía interna, trabajo, calor su-

ministrado y diferencial de calor.

En el segundo capítulo empezaremos con mecánica estadística y hablaremos de σ -álgebra, espacio medible, medida, medida de probabilidad, espacio de medida, funciones medibles, integral de Lebesgue, valor esperado, observable de un sistema, estado de un sistema, estados de equilibrio, función de partición y función de Massieu. Luego, introduciremos las nociones de curva nula, teorema de Carathéodory, curva reversible adiabática, segunda Ley de la Termodinámica (desde el punto de vista de Carathéodory), función bilineal alternante no degenerada, 2-forma no degenerada, elemento de contacto, punto de contacto, distribución diferenciable, variedad de contacto, estructura de contacto. Finalmente, utilizaremos estos conceptos para definir termodinámica utilizando variedades de contacto.

1

FORMAS DIFERENCIALES Y VARIETADES DIFERENCIABLES

En este capítulo definiremos nociones básicas como formas diferenciales, variedades diferenciales, haz tangente, espacio medible, función medible y más. Además, describiremos la termodinámica.

1.1 FORMAS DIFERENCIALES EN \mathbb{R}^n

Sea e_1, e_2, \dots, e_n una base de \mathbb{R}^n . Denotaremos por $(\mathbb{R}^n)^*$ el espacio dual de \mathbb{R}^n y dx_1, dx_2, \dots, dx_n la base dual asociada a la base canónica. Ahora definamos $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$; éste será el conjunto de todas las *funciones k -lineales alternates*

$$\phi: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R};$$

alternante quiere decir que si intercambiamos dos argumentos consecutivos de ϕ tenemos que ϕ cambia de signo. El conjunto de todas

2 Formas diferenciales y variedades diferenciables

las funciones k -lineales alternates con las operaciones usuales es un espacio vectorial. Si tomamos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k \in (\mathbb{R}^n)^*$, podemos construir un elemento de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ dado por

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\phi_i(v_j)), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Esta manera de construir nuevos elementos de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ nos ayuda a determinar una base para este espacio vectorial. Este hecho se refleja en la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *El conjunto*

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} : i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

es una base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^$.*

Demostración. Veamos que el conjunto

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} : i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

es linealmente independiente. Tomemos

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0;$$

si evaluamos en

$$(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) \quad \text{con} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k \quad j_l \in \{1, \dots, n\},$$

obtenemos

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) = a_{j_1 \dots j_k} = 0,$$

pues

$$\det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(e_{j_1}) & \cdots & dx_{i_1}(e_{j_k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{i_k}(e_{j_1}) & \cdots & dx_{i_k}(e_{j_k}) \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{si } i_l \neq j_l \text{ para algún } l = 1, \dots, k \\ 1 & \text{si } i_l = j_l \text{ para todo } l = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Ahora veamos qué genera todo el conjunto de funciones k -lineales alternantes. Sea $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, si tomamos

$$g = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

es claro que $g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$, para todo $i_1 < i_2 < \dots < i_k$; por lo tanto $g = f$. \square

Una k -forma exterior en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*.$$

Si tomamos $p \in \mathbb{R}^n$, entonces, por la proposición anterior $\omega(p)$, elemento de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, lo podemos escribir como

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

donde cada $a_{i_1 \dots i_k}$ es una función real en \mathbb{R}^n . Cuando cada $a_{i_1 \dots i_k}$ es una función diferenciable, entonces ω la llamaremos una k -forma diferencial. Si tenemos una k -forma $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ donde $I = i_1 \dots i_k$ con $i_1 < \dots < i_k$ y $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ y una l -forma $\beta = \sum_J b_J dx_J$, entonces podemos definir un *producto exterior* dado por

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I, J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Utilizando cambio de base se puede demostrar que la definición anterior no depende de la base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ que se escoja. El siguiente

resultado será muy útil para el capítulo 2.

Proposición 1.2. Sean $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ y $\eta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)^*$, entonces tenemos la siguiente igualdad

$$\omega \wedge \eta(x_1, x_2, \dots, x_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} \text{sgn}\sigma \omega(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \eta(x_{\sigma(k+1)}, x_{\sigma(k+2)}, \dots, x_{\sigma(k+l)}).$$

Demostración. Sólo tenemos que probar este resultado para elementos de las bases de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ y $\Lambda^l(\mathbb{R}^n)^*$ pues se puede extender con éstas. Sean $\omega = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ y $\eta = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$. Asumamos que $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l$ son todos distintos pues, en el otro caso, tendríamos $\omega \wedge \eta = 0$. Podemos ordenar los números anteriores de tal manera que estén de menor a mayor $m_1 < m_2 < \dots < m_{k+l}$ y tendremos una permutación τ , la cual es la que los organizó de esa manera; luego

$$\omega \wedge \eta = \text{sgn}\tau dx_{m_1} \wedge dx_{m_2} \wedge \dots \wedge dx_{m_{k+l}}.$$

De aquí que

$$\omega \wedge \eta(e_{m_1}, e_{m_2}, \dots, e_{m_{k+l}}) = \text{sgn}\tau.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} \text{sgn}\sigma \omega(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(k)}) \eta(e_{\sigma(k+1)}, e_{\sigma(k+2)}, \dots, e_{\sigma(k+l)})$$

es exactamente $\text{sgn}\tau$. Para $(e_{m_1}, e_{m_2}, \dots, e_{m_{k+l}})$, el resultado queda demostrado. Como para otro elemento de la forma $(e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_{k+l}})$, el valor es cero, entonces, la prueba ya está hecha. \square

Si tenemos $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una 0-forma diferencial, entonces el *diferencial exterior*

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i,$$

es una 1-forma. Esto induce una operación que toma k -formas y las transforma en $k + 1$ -formas. Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k -forma; luego el *diferencial exterior* $d\omega$ de ω está dado por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Al igual que en el producto exterior la definición no depende de la base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$.

Ejemplo 1.3. Sea $\omega = xydx + yzdy + (x + z)dz$, luego

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xy) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x + z) \wedge dz \\ &= ydx \wedge dx + xdy \wedge dx + zdy \wedge dy + ydz \wedge dy + dx \wedge dz + dz \wedge dz \\ &= xdy \wedge dx + ydz \wedge dy + dx \wedge dz. \end{aligned}$$

1.2 RUDIMENTOS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Una *variedad diferenciable de dimensión n* es un espacio topológico Hausdorff y 2-contable M junto con unas aplicaciones $\varkappa_\alpha: U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ homeomorfismos sobre su imagen tales que:

- (1) $\bigcup_\alpha \varkappa_\alpha(U_\alpha) = M$
- (2) Si $\varkappa_\alpha(U_\alpha) \cap \varkappa_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, entonces $\varkappa_\beta^{-1} \circ \varkappa_\alpha$, donde este definido, es un difeomorfismo sobre su imagen.
- (3) La colección $\{(U_\alpha, \varkappa_\alpha)\}$ es maximal con respecto a las condiciones (2) y (3).

El par $(U_\alpha, \varkappa_\alpha)$ con $p \in \varkappa_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una *parametrización de M en p* ; \varkappa_α^{-1} es llamada *coordenadas locales* de M . Una familia $\{(U_\alpha, \varkappa_\alpha)\}$ es llamada una *estructura diferenciable* sobre M si cumple las condiciones anteriores.

6 Formas diferenciales y variedades diferenciables

Una aplicación $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ entre dos variedades diferenciables es diferenciable en $p \in M_1$ si, dada una parametrización $y: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ en $\varphi(p)$, existe una parametrización $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ en p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ y la aplicación

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$.

Ahora sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es llamada una *curva diferenciable* en M . Supongamos que $\alpha(0) = p$ y sea D el conjunto de funciones reales sobre M que son diferenciables en p . El vector tangente de la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0): D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D.$$

Esto nos sirve para introducir la noción de *vector tangente en $p \in M$* , el cual será un vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p lo denotaremos por $T_p M$. Si tomamos una parametrización $x: U \rightarrow M$ en $p = x(0)$, podemos caracterizar $T_p M$ de la siguiente manera. Con la parametrización que tomamos una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ y una curva $\alpha \in T_p M$ se expresan como

$$f \circ x(q) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

luego

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f.$$

Esto quiere decir que $\alpha'(0)$ puede ser expresada en la parametrización x por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0.$$

Se puede demostrar que el conjunto $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right\}$ es una base de $T_p M$.

Dada una aplicación $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ entre variedades diferenciables, para cada $p \in M_1$ podemos definir *diferencial de φ en p* como la aplicación lineal

$$d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2,$$

dada por $d\varphi_p(\alpha'(0)) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$. Se puede demostrar fácilmente que es una transformación lineal y que, además, no depende de la escogencia de α .

Sea $f: N \rightarrow M$ una aplicación diferenciable entre variedades; diremos que es *un encaje* si esta aplicación es inyectiva y, además, su diferencial $df_p: T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ también es inyectivo para todo $p \in N$. Con esto, tendremos que, si $N \subset M$ con la inclusión $i: N \rightarrow M$ un encaje, entonces llamaremos a N una subvariedad de M .

Unos ejemplos importantes de variedades diferenciables son los siguientes.

Ejemplo 1.4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . El *haz tangente* de M , $TM = \{(p, q): p \in M, q \in T_p M\}$ es una variedad diferenciable con la siguiente estructura. Si $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable sobre M , entonces podemos definir

$$y_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

8 Formas diferenciales y variedades diferenciables

dada por

$$y_\alpha(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\in U_\alpha}, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\in \mathbb{R}^n}) = (x_\alpha(x_1, \dots, x_n), dx_\alpha(q_1, \dots, q_n));$$

con esto, se puede demostrar fácilmente que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, y_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable sobre TM .

Ejemplo 1.5. Una *Superficie regular en \mathbb{R}^n* es la generalización de una superficie regular en \mathbb{R}^3 . Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie regular de dimensión k si para cada punto $p \in M$ existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación $x: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap V$ de un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $M \cap V$ tales que

- (1) x es homeomorfismo diferenciable.
- (2) $dx_q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectivo para todo $q \in U$.

Dadas estas condiciones se puede demostrar que una superficie regular en \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable.

Un teorema importante de la geometría diferencial es el de la imagen inversa de un valor regular. Para esto debemos introducir primero una definición, sea $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable de un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea $y \in F(U)$, diremos que y es un *valor regular* si para todo $p \in F^{-1}(y)$ tenemos que dF_p es sobreyectivo.

Teorema 1.6. Sea $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable y a un valor regular de F . Entonces $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie regular de dimensión $n - m = k$.

Sea M una variedad de dimensión n . Una k -forma exterior ω en M es una escogencia para cada $p \in M$ de un elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p M)^*$, donde $\Lambda^k(T_p M)^*$ denota el espacio de aplicaciones k -lineales alternantes del espacio tangente $T_p M$. Si escogemos una parametrización

$\mathfrak{x}: U_\alpha \rightarrow M$ en p tenemos una *representación de ω* , como la exterior k -forma ω_α en $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\omega_\alpha(v_1, v_2, \dots, v_k) = \omega(dx_\alpha(v_1), dx_\alpha(v_2), \dots, dx_\alpha(v_k)),$$

con $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Si tomamos otra parametrización \mathfrak{x}_β en p tenemos una relación entre las representaciones ω_α y ω_β la cual es

$$(\mathfrak{x}_\beta^{-1} \circ \mathfrak{x}_\alpha)^* \omega_\beta = \omega_\alpha,$$

donde la operación $*$ está definida como

$$f^* \omega(p)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \omega(df_p v_1, df_p v_2, \dots, df_p v_k).$$

Con esto podemos decir que una *k -forma diferencial* sobre variedad M es una k -forma exterior tal que, en alguna parametrización, su representación es diferenciable. Además, si ω es una k -forma diferencial sobre M , el *diferencial exterior* $d\omega$ es la $k + 1$ -forma diferencial sobre M cuya representación local es $d\omega_\alpha$, para la parametrización \mathfrak{x}_α .

Ahora daremos una definición de un concepto importante en la geometría diferencial. Un *campo vectorial* X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_p M$. En términos de aplicaciones, X es una aplicación de M en el haz tangente TM . El campo vectorial es diferenciable si la aplicación $X: M \rightarrow TM$ es diferenciable. Considerando una parametrización $\mathfrak{x}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ en p , podemos escribir el campo vectorial al evaluar en p como

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sobre U y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ es la base asociada a \mathfrak{x} . De aquí que X es diferenciable si y sólo si las funciones a_i son diferenciables para alguna parametrización.

10 Formas diferenciales y variedades diferenciables

En la siguiente sección daremos un ejemplo de variedad diferenciable fundamental en este trabajo.

1.3 TERMODINÁMICA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE CARATHÉODORY Y BORN

Como es común en física, tenemos una porción aislada del universo la cual queremos estudiar. A esta porción la llamaremos *sistema*. El sistema puede existir en varios *estados*. Entre todos los estados posibles del sistema existe una clase distinguida de estados llamados *estados de equilibrio*. Si todas las interacciones del sistema con el resto del universo se mantienen constantes, entonces el sistema pasará por varios estados hasta llegar a un estado de equilibrio definitivo.

Ahora vamos a describir una forma de interacción especial entre dos sistemas llamada *contacto diatérmico*. En esta forma de interacción no se observa la existencia de movimiento macroscópico o de cualquier material entre los dos sistemas. Esta interacción crea un nuevo sistema que será el producto directo de los dos sistemas dados donde los estados del nuevo sistema serán pares de estados (ρ_1, ρ_2) con ρ_1 como un estado del primer sistema y ρ_2 como un estado del segundo sistema. En el contacto diatérmico los estados de equilibrio del sistema combinado será un subconjunto del conjunto de pares de estados de equilibrio de los sistemas originales. Si ρ_1 es un estado de equilibrio del primer sistema y ρ_2 un estado de equilibrio del segundo sistema, cuando estos dos sistemas son traídos en contacto diatérmico entonces el sistema combinado no estará necesariamente en equilibrio, pero tenderá a un estado de equilibrio definitivo (ρ_1, ρ_2) donde ρ_1 es un nuevo estado de equilibrio del primer sistema y ρ_2 un nuevo estado de equilibrio del segundo sistema. Cuando el sistema combinado está en equilibrio en el estado (ρ_1, ρ_2) , diremos que el primer sistema en estado ρ_1 está en *equilibrio térmico* con el segundo sistema en ρ_2 .

Termodinámica desde el punto de vista de Carathéodory y Born 11

Una ley de la naturaleza observada es que el equilibrio térmico es una relación de equivalencia, en el sentido de que, si tenemos tres sistemas y si ρ_1, ρ_2, ρ_3 son estados de equilibrio de éstos, el primer sistema en estado ρ_1 está en equilibrio térmico con el segundo sistema en ρ_2 y el segundo sistema en estado ρ_2 está en equilibrio térmico con el tercer sistema en ρ_3 , entonces el primer sistema en estado ρ_1 está en equilibrio térmico con el tercer sistema en ρ_3 . Las clases de equivalencia de todos los sistemas en equilibrio térmico se llama *temperatura abstracta*. Ahora podemos fijar un sistema definitivo y una función numérica θ de los estados de equilibrio de este sistema la cual toma valores distintos sobre los estados que viven en temperaturas abstractas diferentes. Es decir que obtenemos una función numérica definida sobre los estados de equilibrio de todos los sistemas llamada *temperatura empírica*. La escogencia del sistema con esta función numérica es llamada un *termómetro*. En la descripción de cada sistema existen ciertas funciones que juegan un papel importante. Como, por ejemplo, si el sistema consiste de un gas en un contenedor, el volumen será una de tales funciones. Estas funciones son llamadas *variables de configuración*. Cada sistema tendrá un número finito n de variables de configuración definidas sobre el conjunto de estados de equilibrio, el número de funciones depende del sistema pero, en cualquier sistema, tenemos $n \geq 1$. Las variables de configuración junto con la función θ formarán unas coordenadas locales para el conjunto de estados de equilibrio, que llamaremos *variedad de estados de equilibrio*. Con esto podemos decir que la variedad de estados de equilibrio es de dimensión $n + 1$.

Existe una clase de interacción importante de un sistema con el resto del universo llamada *interacción adiabática*. Éstas tienen la propiedad de que, para tales interacciones, el equilibrio no es perturbado a menos que exista algún cambio en las variables de configuración. Si por un periodo de tiempo todas las interacciones del sistema son adia-

báticas, diremos que el sistema está en una *cerradura adiabática*.

Antes de introducir la primera Ley de la Termodinámica debemos definir lo siguiente. Una curva diferenciable que une dos estados ρ_1 y ρ_2 mientras el sistema está en una cerradura adiabática se llama una *curva adiabática*. La *primera Ley de la Termodinámica* dice que un sistema en una cerradura adiabática es traído de un estado ρ a otro estado ρ' aplicando trabajo externo, la cuenta de este trabajo es siempre la misma sin importar como es aplicado este trabajo. Luego existe una función U sobre la variedad de estados de equilibrio llamada *energía interna* tal que $W = U(\rho') - U(\rho)$ representa la cuenta de trabajo hecha sobre el sistema cuando el sistema es movido de ρ a ρ' a lo largo de cualquier curva adiabática.

Si el sistema no está en una cerradura adiabática y es traído de un estado ρ a un estado ρ' por alguna curva, entonces, el trabajo externo total aplicado no necesariamente es igual a $U(\rho') - U(\rho)$. La diferencia $U(\rho') - U(\rho) - W = Q$ es llamada *calor suministrado* al sistema por el proceso donde el trabajo hecho y el calor suministrado dependen del proceso y no sólo del estado inicial y final.

Una curva diferenciable γ es llamada *reversible* si para cada t el estado $\gamma(t)$ es un estado de equilibrio, podemos ver que la curva va de un intervalo de \mathbb{R} a la variedad de estados de equilibrio. Recordemos que $x_\beta^{-1} = (\theta, x_1, \dots, x_n)$ son unas coordenadas locas sobre la variedad de estados de equilibrio. Existe una 1-forma diferencial ω que, en coordenadas locales, se escribe como $\omega_\beta = v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n$ tal que el trabajo hecho sobre el sistema a lo largo de cualquier curva reversible γ es igual a la integral de la forma ω_β a lo largo de γ_β ; es decir,

$$W(\gamma) = \int_{\gamma_\beta} \omega_\beta;$$

luego el calor suministrado a lo largo del camino γ está dado por la

Termodinámica desde el punto de vista de Carathéodory y Born **13**

integral

$$Q(\gamma) = \int_{\gamma_\beta} \alpha,$$

donde $\alpha = dU_\beta - \omega_\beta$ y α es llamado el *diferencial de calor*.

2

TEOREMA DE CARATHÉODORY Y VARIETADES DE CONTACTO

En este capítulo hablaremos de mecánica estadística. Luego mostraremos el teorema de Carathéodory junto con algunos ejemplos de su utilidad y también definiremos variedad de contacto.

2.1 MECÁNICA ESTADÍSTICA

Antes de hablar de mecánica estadística debemos introducir algunas nociones básicas de probabilidad, así que empezaremos con esto.

Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de Ω . Diremos que \mathcal{A} es una σ -álgebra si cumple las siguientes propiedades.

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
- (iii) Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ es una sucesión de conjuntos en \mathcal{A} , entonces $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$.

16 Teorema de Carathéodory y variedades de contacto

Podemos deducir fácilmente, de la definición de σ -álgebra, que $\emptyset \in \mathcal{A}$ y si $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ es una sucesión en \mathcal{A} entonces $\bigcap A_n \in \mathcal{A}$. El par (Ω, \mathcal{A}) lo llamaremos un *espacio medible* y cada elemento $A \in \mathcal{A}$ \mathcal{A} -medible. Cuando estamos hablando de probabilidad Ω , lo llamamos *espacio muestral* o *evento seguro* y \mathcal{A} una familia de eventos; además, a cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ le diremos *evento* y, por último, *evento imposible* a \emptyset .

Ahora tomemos (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible y $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Una medida sobre \mathcal{A} es una función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu(A) \geq 0$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos a pares entonces

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Cuando tenemos tal función decimos que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un *espacio de medida*. Al valor de $\mu(A)$ lo llamamos *medida del conjunto* $A \in \mathcal{A}$ con respecto a μ . En particular, tenemos una *medida de probabilidad* cuando $\mu(\Omega) = 1$.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{A} -medible si $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ para cada abierto $U \subset \mathbb{R}$. Si μ es una medida de probabilidad, llamamos a la función f una *variable aleatoria*.

Antes de definir integración, debemos incorporar a la teoría la *función indicadora de un conjunto* $A \in \mathcal{A}$ la cual es

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Tomemos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Si $f = I_A$ es la función indicadora de un conjunto $A \in \mathcal{A}$ definimos

la *integral de Lebesgue* de f con respecto a μ como

$$\int_{\Omega} f d\mu = \mu(A).$$

Si f es una función simple, es decir f toma un número finito de valores distintos $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces tomamos

$$A_i = \{x \in \Omega | f(x) = a_i\}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n,$$

luego f se puede escribir como

$$f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}.$$

Con esto definimos su integral de Lebesgue con respecto a μ dada por

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Otro caso es cuando f es no negativa. Para ésta definimos su integral con respecto a μ como

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} h d\mu | h \text{ es simple y } 0 \leq h \leq f \right\}.$$

Por último, tomemos una función medible arbitraria f y consideremos su parte positiva

$$f^+(x) = \{f(x), 0\} \text{ para todo } x \in \Omega$$

y su parte negativa

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Con esto $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Además, las funciones f^+ y f^-

18 Teorema de Carathéodory y variedades de contacto

son no negativas, de aquí que sus integrales están bien definidas. Si sus integrales son finitas, definimos la integral de f como

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu,$$

y decimos que f es *integrable con respecto a μ* . Cuando μ es una medida de probabilidad a la integral de f , la llamamos la *esperanza o valor esperado*.

Con este resumen ya podemos definir los conceptos básicos de mecánica estadística. Un espacio de medida (M, \mathcal{A}, μ) lo llamaremos un *sistema*. Cuando tenemos un sistema, podemos definir lo que es un *estado* de este, el cual es una función no negativa integrable ρ tal que

$$\int_M \rho d\mu = 1.$$

Esta definición induce una nueva medida sobre M que podemos denotar por $\rho\mu$ dada por

$$\rho\mu(A) = \int_A \rho d\mu.$$

Un *observable* del sistema es una función medible $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Estos observables normalmente depende de las variables de configuración. Como, por ejemplo, un gas en un contenedor con k pistones, pues al mover estos, podemos cambiar las condiciones del gas.

Sea J un observable y ρ un estado. Para cada intervalo $[a, b]$ podemos considerar $J^{-1}[a, b]$ y con esto la integral

$$\int_{J^{-1}[a, b]} \rho d\mu.$$

Esto es solo el tamaño del conjunto $J^{-1}[a, b]$ con respecto a la medida de probabilidad $\rho\mu$. En otras palabras, ésta es la probabilidad que un punto de M viva en $J^{-1}[a, b]$ cuando asignamos probabilidades de acuerdo con la medida de probabilidad $\rho\mu$. O bien, lo cual es sólo una

manera diferente de decir esto, es la probabilidad que el observable J tome valores en el intervalo $[a, b]$ cuando el sistema está en el estado ρ . Escribimos esto como

$$\text{prob}(J \in [a, b]; \rho) = \int_{J^{-1}[a, b]} \rho d\mu.$$

Podemos ver que un observable y un estado juntos dan una asignación de probabilidad sobre la recta real. La probabilidad asignada a cualquier intervalo siendo la probabilidad dada midiendo el observable J en el intervalo cuando el sistema está en el estado ρ es la integral anterior. Cuando tomamos todo M lo que tenemos, en realidad, es el valor esperado de la función J con respecto a la medida de probabilidad $\rho\mu$, es decir

$$E(J; \rho) = \int_M J \rho d\mu.$$

Cuando el observable que estamos considerando es interpretado como la energía, H , entonces la *energía interna* del estado ρ está definida por $E(H; \rho)$. En otras palabras, la energía interna es el valor esperado de la energía en un estado dado. La energía es una función fija sobre M y hay varios estados diferentes, ρ , que dan valores diferentes para $E(H; \rho)$, lo que quiere decir que la energía interna U depende del estado ρ , es decir

$$U(\rho) = E(H; \rho).$$

Algo importante de medir en estos sistemas es qué tan dispersos molecularmente están en cada estado que se encuentren; la manera de hacerlo es la siguiente: si tenemos un sistema, entonces, la *entropía* en un estado ρ es

$$\text{Ent}(\rho) = - \int_M \rho \ln \rho d\mu,$$

siempre y cuando la integral converja.

20 Teorema de Carathéodory y variedades de contacto

Ahora podemos pensar que tenemos varios observables J_1, \dots, J_k del sistema (M, \mathcal{A}, μ) ; con estos plantearemos unos aspectos generales de esta teoría. Denotemos por $J = (J_1, J_2, \dots, J_k)$. Podemos pensar en

$$E(J; \rho) = (E(J_1; \rho), E(J_2; \rho), \dots, E(J_k; \rho));$$

queremos encontrar para cualquier vector \bar{J} , valor esperado de J , los posibles estados que maximizan la entropía, es decir, los ρ tal que

$$E(J; \rho) = \bar{J},$$

que maximicen la entropía. Como J es una función de M en \mathbb{R}^k , entonces, podemos tomar un elemento $\gamma \in (\mathbb{R}^k)^*$. Definimos la *función de partición*

$$F(\gamma) = \int_M \exp(-\gamma(J)) d\mu.$$

Los estados que maximizan la entropía están dados por

$$\rho_\gamma = \frac{1}{F(\gamma)} \exp(-\gamma(J)).$$

En la referencia se pueden ver los detalles del porqué estos estados maximizan la entropía. Es fácil ver que $\int_M \rho_\gamma d\mu = 1$. Esto quiere decir que, para cada γ tal que $F(\gamma) < \infty$, tendremos un estado; a éstos los llamaremos *estados de equilibrio*. Con esto vemos que, en los estados de equilibrio, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} - \int_M \rho_\gamma \ln \rho_\gamma d\mu &= - \int_M \rho_\gamma (-\ln F(\gamma) - \gamma(J)) d\mu \\ &= \int_M \rho_\gamma \ln F(\gamma) d\mu + \int_M \rho_\gamma \gamma(J) d\mu \\ &= \ln F(\gamma) + \gamma(E(J; \rho_\gamma)), \end{aligned}$$

o bien

$$\text{Ent}(\rho_\gamma) = Z + \gamma(\bar{J}),$$

donde $Z = \ln F(\gamma)$ es llamada la *función de Massieu*. Podemos ver que la función de Massieu describe todo el problema; esto lo obtenemos al calcular sus derivadas parciales, tanto respecto a las variables de configuración como de las componentes de γ .

Ejemplo 2.1. Éste es un ejemplo de un espacio finito con igual probabilidad a priori. Tomaremos $M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(M)$ y $\mu(\{e_i\}) = 1$. Esto describe la situación donde hay un número finito de alternativas y no tenemos razón para preferir una sobre cualquier otra alternativa. Ahora tomemos $V = \mathbb{R}$ y sea el observable $J: M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(e_i) = r_i$, donde cada r_i es un número real (los cuales se pueden pensar como niveles de energía). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir las etiquetas de los elementos de M tales que $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k$.

Sabemos que $V^* = (\mathbb{R})^*$, luego, para cualquier $\beta \in V^*$, tenemos

$$F(\beta) = \sum_{i=1}^k \exp(-\beta r_i),$$

de aquí que los estados de equilibrio están dados por

$$\rho_\beta(e_i) = \frac{\exp(-\beta r_i)}{\sum_{p=1}^k \exp(-\beta r_p)}.$$

Ésta es conocida como la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Recordemos que el valor esperado de la energía es

$$\bar{J} = E(J; \rho_\beta) = \frac{\sum_i r_i \exp(-\beta r_i)}{\sum_i \exp(-\beta r_i)},$$

o bien

$$\bar{J} = -\frac{\partial \ln F(\beta)}{\partial \beta}.$$

22 Teorema de Carathéodory y variedades de contacto

Luego

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{J}}{\partial \beta} &= \frac{\sum_i r_i^2 \exp(-\beta r_i)}{\sum_i \exp(-\beta r_i)} - \left(\frac{\sum_i r_i \exp(-\beta r_i)}{\sum_i \exp(-\beta r_i)} \right)^2 \\
 &= \int \|\mathcal{J}\|^2 \rho_\beta d\mu - \left(\int \mathcal{J} \rho_\beta d\mu \right)^2 \\
 &= \int (\mathcal{J} - \bar{J})^2 \rho_\beta d\mu \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Con la desigualdad estricta a menos que todos los r_i sean iguales (si todos los r_i son iguales sólo hay un posible valor de \mathcal{J} el cual daría como resultado que $\rho_\beta = \frac{1}{k}$ para todo β), si $r_1 \neq r_k$ entonces $E(\mathcal{J}; \rho_\beta)$ es una función de β estrictamente decreciente. Dado que

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} E(\mathcal{J}; \rho_\beta) = r_1 \text{ y } \lim_{\beta \rightarrow \infty} E(\mathcal{J}; \rho_\beta) = r_k,$$

tenemos que \mathcal{J} toma valores entre r_1 y r_k para un único β y esto implica que \bar{J} depende de que \mathcal{J} cumpla lo anterior. Ahora calculemos la entropía de este sistema. Para cualquier valor de β tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{Ent}(\rho_\beta) &= -\rho_\beta \ln \rho_\beta(e_i) \\
 &= -\sum_{i=1}^k \frac{\exp(-\beta r_i)}{\sum_{p=1}^k \exp(-\beta r_p)} \left[\ln(\exp(-\beta r_i)) - \ln \left(\sum_{j=1}^k \exp(-\beta r_j) \right) \right] \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^k \beta r_i \exp(-\beta r_i)}{\sum_{p=1}^k \exp(-\beta r_p)} + \ln F(\beta) \\
 &= \beta \bar{J} + \ln F(\beta)
 \end{aligned}$$

2.2 TEOREMA DE CARATHÉODORY

Sea α una 1-forma diferencial sobre una variedad M . Diremos que γ es una curva nula de α si $\alpha(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$. Notemos que si γ es una curva nula de α , entonces, tenemos que

$$\int_{\gamma} \alpha = 0.$$

Otro hecho que podemos ver aquí es que si tenemos que $\alpha = df$ con f una función diferenciable, entonces, si γ es una curva nula de α uniendo P y Q , tenemos

$$0 = \int_{\gamma} \alpha = f(P) - f(Q);$$

de aquí $f(Q) = f(P)$. Si $df \neq 0$; y $f(P)$ es un valor regular, por el teorema del valor regular, el conjunto $\{X : f(X) = f(P)\}$ es una variedad $n-1$ -dimensional. Es decir, que Q debe vivir en esta variedad. Lo mismo se tiene cuando $\alpha = gdf$, donde g es una función no cero y $df \neq 0$; esto es porque γ es una curva nula de α si y sólo si γ es una curva nula de df . Con esta terminología, podemos enunciar el teorema fundamental de este capítulo.

Teorema 2.2. *Sea M una variedad diferenciable y sea α una 1-forma diferencial sobre M con la propiedad que para cualquier punto P existen puntos Q arbitrariamente cercanos a P los cuales no pueden ser unidos a P por una curva nula de α . Entonces, localmente existen funciones f y g tales que*

$$\alpha = f dg.$$

El siguiente ejemplo es una aplicación del teorema anterior. Para esto será útil la descripción de termodinámica dada en el primer capítulo. Antes de esto, debemos introducir algo más sobre la termodinámica. Decimos que una curva γ sobre el conjunto de estados de equi-

librio la cual es una curva nula del diferencial de calor $\alpha = dU_\beta - \omega_\beta$, es llamada *curva reversible adiabática*. Esta definición nos permite establecer la *segunda Ley de la Termodinámica*, la cual dice que cerca de cualquier estado de equilibrio ρ de cualquier sistema existen estados de equilibrio arbitrariamente cercanos los cuales no pueden ser unidos a ρ por curvas reversibles adiabáticas.

Ejemplo 2.3. Dado que el diferencial de calor α es una 1-forma diferencial y, por la segunda Ley de la Termodinámica, dado un estado de equilibrio ρ , podemos encontrar puntos arbitrariamente cercanos a ρ que no pueden ser unidos a él por una curva nula, entonces podemos aplicar el teorema de Carathéodory y concluir que

$$\alpha = f dg$$

con f y g funciones reales en el conjunto de estados de equilibrio.

Observación 2.4. Con esto se muestra que existe una escala de temperatura absoluta universal T determinada, salvo multiplicación, por una constante. Fijando esta constante y la T , se determina una función S en el conjunto de estados de equilibrio de cada sistema. Esta función está determinada salvo la suma de una constante y se llama entropía. Este hecho se puede revisar detalladamente en la referencia [1].

2.3 VARIEDADES DE CONTACTO

Antes de empezar con el tema principal de este capítulo, necesitamos algunas nociones más. Sea ω una función bilineal alternante de un espacio vectorial V de dimensión finita. Diremos que ω es *no degenerada* si la aplicación

$$\tilde{\omega}: V \rightarrow V^*,$$

dada por $\tilde{\omega}(v) = \omega(v, -)$ es un isomorfismo. Con lo anterior, una 2-forma η sobre una variedad M es *simpléctica* si para cada $p \in M$ tenemos que $\eta(p)$ es no degenerada y $d\eta = 0$, es decir *cerrada*. El siguiente teorema es de mucha utilidad para estas funciones.

Teorema 2.5. *Sea ω una función bilineal alternante sobre un espacio vectorial V . Entonces existe una base*

$$\{k_1, k_2, \dots, k_r, u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

de V tal que

$$\begin{aligned} \omega(k_i, v) &= 0 && \text{para todo } i, j \text{ y todo } v \in V \\ \omega(u_i, u_j) &= \omega(v_i, v_j) = 0 && \text{para todo } i, j \\ \omega(u_i, v_j) &= \delta_{ij} && \text{para todo } i, j \end{aligned}$$

Con este teorema podemos deducir que si ω es una función bilineal alternante no degenerada entonces V tiene dimensión par, pues $\ker \tilde{\omega} = \text{span}\{k_1, k_2, \dots, k_r\} = \{0\}$ es decir que $r = 0$.

Corolario 2.6. *Sea V un espacio vectorial $2n$ -dimensional y sea ω una función bilineal alternante sobre V . Entonces ω es no degenerada si y sólo si $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0$.*

Demostración. Primero supongamos que ω es degenerada, es decir, existe $v \neq 0$ tal que $\omega(v, w) = 0$ para todo $w \in V$. Si completamos una base con v entonces si $\{v, v_2, \dots, v_{2n-1}\}$ es tal base tenemos

$$\omega^n(v, v_2, \dots, v_{2n-1}) = 0.$$

Ahora demostraremos la otra implicación. Entonces supongamos que ω es no degenerada, luego tenemos una base $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V que cumple lo que dice el teorema anterior, con esto definimos la

26 Teorema de Carathéodory y variedades de contacto

siguiente aplicación lineal

$$\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$$

dada por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i.$$

Esta transformación es un isomorfismo y, además, tiene la propiedad de que

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

es fácil ver que la n -ésima potencia de esa función es $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$, por lo que ω^n es diferente de cero. \square

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y p un punto de M . Un *elemento de contacto* de M con *punto de contacto* p es un subespacio vectorial Δ_p de $T_p M$ de dimensión $n - 1$.

Ejemplo 2.7. Retomemos la variedad de estados de equilibrio y denotemos esta por M . Sabemos que

$$\varkappa: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

dada por $\varkappa(p) = (\theta(p), x_1(p), \dots, x_n(p))$ son unas coordenadas locales. En la construcción del diferencial de calor α podemos obtener que este es una combinación lineal de $\{d\theta, dx_1, \dots, dx_n\}$, es decir que α vive en $(T_p M)^*$. Luego el espacio nulo de α es un subespacio vectorial de $T_p M$ que tiene dimensión n . Por lo tanto, el espacio nulo de α es un elemento de contacto de M con punto de contacto p . En otras palabras el conjunto de puntos que se pueden unir a p por curvas reversibles adiabáticas es un elemento de contacto de M con punto de contacto p .

Otro ejemplo se puede mencionar con la mecánica estadística como

mostraremos a continuación.

Ejemplo 2.8. Ahora trabajaremos con la variedad de estados de equilibrio y las herramientas de mecánica estadística. Sea (M, \mathcal{A}, μ) un sistema (un espacio de medida). Supongamos que H es un observable interpretado como energía. Luego H depende de las variables de configuración x_1, x_2, \dots, x_n . Supongamos que movemos suavemente una variable de configuración x_i . La fuerza generalizada F_i es $-\frac{\partial H}{\partial x_i}$. Por lo tanto en un estado ρ , el valor esperado de la fuerza generalizada es:

$$E\left(-\frac{\partial H}{\partial x_i}; \rho\right).$$

Entonces la representación de la forma de trabajo en las coordenadas (β, x_1, \dots, x_n) está dada por

$$\omega = E\left(-\frac{\partial H}{\partial x_1}; \rho\right) dx_1 + \dots + E\left(-\frac{\partial H}{\partial x_n}; \rho\right) dx_n.$$

Con esta 1-forma de trabajo y la definición estadística de energía interna, entonces, tenemos el diferencial de calor

$$\alpha = d(E(H; \rho)) - \omega,$$

definido sobre la variedad de estados de equilibrio. Podemos ver que la entropía cumple que $S = Z + \beta U$ luego

$$\begin{aligned} dS &= dZ + \beta dU + U d\beta \\ &= \frac{\partial Z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial Z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} dx_n + \beta dU + U d\beta \\ &= -U d\beta + \beta dU + (-\beta \omega) + U d\beta \\ &= \beta dU - \beta \omega \end{aligned}$$

Con esto podemos ver que

$$\begin{aligned}\alpha &= dU - \omega \\ &= \frac{1}{\beta}(\beta dU - \beta\omega) \\ &= \frac{1}{\beta}(dS).\end{aligned}$$

Al igual que en el caso macroscópico, el diferencial de calor nos da puntos de contacto junto con sus respectivos elementos de contacto.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea $n \leq m$. Supongamos que para cada $x \in M$, asignamos un subespacio vectorial n -dimensional $\Delta_x \subset T_x M$ de tal manera que, para una vecindad $N_x \subset M$ de x , existen n campos vectoriales diferenciables linealmente independientes X_1, \dots, X_n tal que para cada $y \in N_x$, el generado por $\{X_1(y), \dots, X_n(y)\}$ es igual a Δ_y . La colección de todos los Δ_x para todo $x \in M$ la llamaremos una *distribución diferenciable* de dimensión n sobre M .

Una *variedad de contacto* es una variedad diferenciable M dotada de una *estructura de contacto*, la cual es una distribución diferenciable ξ de elementos de contacto, tal que para cualquier 1-forma α tal que localmente $\xi = \ker \alpha$ tenemos que $d\alpha|_{\xi \times \xi}$ es no degenerada. Normalmente la denotamos por el par (M, ξ) .

De esta definición podemos deducir algunas cosas. En cada punto $p \in M$ tenemos un hiperplano de contacto Δ_p y dado que $d\alpha|_{\xi \times \xi}$ es no degenerado entonces podemos concluir por el primer teorema de esta sección que Δ_p tiene dimensión par. Con lo anterior, dado que $T_p M$ tiene dimensión uno más que Δ_p , entonces $T_p M$ tiene dimensión impar y así también M . Es decir, que las variedades de contacto son de dimensión impar. El siguiente resultado da una herramienta para determinar cuando una variedad es de contacto.

Proposición 2.9. *Sea ξ una distribución diferenciable de elementos*

de contacto sobre M . Entonces ξ es una estructura de contacto si y sólo si para cada α tal que localmente $\xi = \ker \alpha$ se tiene que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ en cada punto del entorno.

Demostración. Supongamos que ξ es una estructura de contacto. En cada punto $p \in M$ tenemos que un elemento de contacto Δ_p generado por los campos vectoriales X_1, X_2, \dots, X_{2n} , luego podemos construir la uno forma α_p la cual tiene como kernel al conjunto generado por $X_1(p), X_2(p), \dots, X_{2n}(p)$. Por la definición de variedad de contacto tenemos que $d\alpha_p$ es no degenerado en Δ_p , y por el primer corolario de esta sección, tenemos que $(d\alpha_p)^n \neq 0$ en Δ_p . Luego sabemos que existe un v tal que $X_1(p), X_2(p), \dots, X_{2n}(p)$ junto con v es una base de T_pM por lo que α no es cero en el generado por v . Por lo tanto, $\alpha_p \wedge d\alpha_p \neq 0$. Ahora supongamos que localmente $\xi = \ker \alpha$ y $\alpha \wedge (d\alpha)^k \neq 0$. Tomamos una trivialización local $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, x\}$ de $TM = \ker \alpha \oplus R$ tal que $\ker \alpha = \text{span}\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$ y $R = \text{span}\{x\}$. Sabemos que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n(u_1v_1, \dots, u_nv_n, x) = \alpha(x)(d\alpha)^n(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).$$

Por lo tanto, $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ si y sólo si $(d\alpha)|_{\xi \times \xi}^n \neq 0$, es decir $d\alpha|_{\xi \times \xi}$ es no degenerado □

Ahora pasaremos a dar un ejemplo de variedades de contacto.

Ejemplo 2.10. Tomemos $M = \mathbb{R}^{2k+1}$. Si tenemos sus coordenadas como $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, z)$, entonces la 1-forma diferencial $\alpha = dz - \sum_{i=1}^k y_i dx_i$ da una estructura de contacto sobre M .

30 Teorema de Carathéodory y variedades de contacto

2.4 DEFINICIÓN DE TERMODINÁMICA USANDO VARIEDADES DE CONTACTO

El ejemplo 2.10 es muy importante para la termodinámica, pues éste es la base para una formulación bastante formal. Veamos la descripción de esta formulación.

Sea (M, ξ) una variedad de contacto de dimensión $2k + 1$. Sabemos que localmente existe α tal que $\ker \xi = \alpha$. Sea N una variedad de dimensión k y $\Phi: N \rightarrow M$ un encaje. Diremos que Φ es *un sistema suave en equilibrio termodinámico* si

$$\Phi^*(\alpha) = 0.$$

En este caso a la variedad (M, ξ) la llamaremos *espacio de fase termodinámico* y α la llamaremos *1-forma de Gibbs*. Veamos como esto se aplica a la termodinámica.

Tomemos $M = \mathbb{R}^{2k+1}$ como espacio fase termodinámico y etiquetemos sus coordenadas de esta manera

$$(U, T, S, P, V, y_1, x_1, \dots, y_{k-2}, x_{k-2}),$$

esta manera de etiquetar es por cuestiones de entendimiento físico, y definamos la 1-forma de Gibbs como

$$\alpha = dU - TdS - PdV - \sum_i^{k-2} y_i dx_i.$$

Sabemos por el ejemplo 2.10 que α define una estructura de contacto. Si tomamos $\Phi: N \rightarrow M$ un sistema suave en equilibrio termodinámico tal que $\{\Phi^*(P), \Phi^*(V), \Phi^*(x_1), \Phi^*(x_2), \dots, \Phi^*(x_{k-2})\}$ es una base de $(TN)^*$ entonces, por el teorema de la función implícita, tenemos que

$\Phi(N)$ tiene la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} (P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}) \mapsto & (U(P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}), \\ & T(P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}), \\ & S(P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}), \\ & y_1(P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}), \dots, \\ & y_{k-2}(P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}), P, V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}) \end{aligned}$$

Además, la condición $\Phi^*(\alpha) = 0$ da como resultado

$$TdS = dU - PdV - \sum_i^{k-2} y_i dx_i.$$

sobre la variedad $\Phi(N)$. Esto muestra que $\Phi(N)$ es la variedad de estados de equilibrio de un sistema con variables de configuración $V, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}$ y cambiando la primer coordenada local por P .

BIBLIOGRAFÍA

- [1] PAUL BAMBERG AND SHLOMO STERNBERG. *A course in mathematics for students of physics 2*. Cambridge University press, 1990.
- [2] MANFREDO P. DO CARMO. *Differential forms and applications*. Springer-Verlag, 1994.
- [3] ANA CANNAS DA SILVA. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer-Verlag, 1997.
- [4] DUSSA MCDUFF AND DIETMAR SALAMON. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University press, 2017.
- [5] ROBERT HERMANN. *Geometry, Physics and Systems*. Marcel Dekker, 1973.
- [6] FRANK W. WARNER. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [7] MANFREDO P. DO CARMO. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1993.
- [8] SHIGEYUKI MORITA. *Geometry of Differential Forms*. American Mathematical Society, 1998.

- [9] HERBERT B. CALLEN. *Thermodynamics, an introduction to the physical theories of equilibrium thermostatics and irreversible thermodynamics*. John Wiley & sons, 1960.