Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

Operadores Integrales Singulares

TESIS QUE PRESENTA

Franco Ramírez José Luis

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE

Matemáticas

Director de tesis: **Dr.Enrique Ramírez de Arellano**

Ciudad de México Febrero, 2019

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, familiares y amigos por siempre apoyarme. Agradezco también a mi director de tesis, mis sinodales y mis profesores.

Por último gracias al Conacyt por otorgarme mi beca para continuar mis estudios.

Muchas gracias.

Abstract

One of the main applications of singular integral operators is to provide a solution to integral equations, given a function ψ, find φ that satisfies: $a\varphi + bS_{\Gamma}\varphi = \psi$ here a and b are continuous functions and S_{Γ} is Cauchy singular operator. Finding a solution to the aforementioned integral equation is finding a solution to the equation $(cP + dQ)\varphi = \psi$, for certain operators P and Q, and certain functions c and d that can be proposals solving a system of two equations. As is usually done in mathematics, the case where c and d are rational functions will be worked first. It will be helpful to decompose rational functions, depending on where their poles are with respect to the Γ curve, this also allows us to define the index of a rational function, this index will give us very important information about the equation.

By concentrating on the Cauchy operator, it is discovered that it has the important property of being idempotent (under some conditions) and it is this quality that allows P and Q to become projections in some spaces, obtaining a decomposition for the space in question, providing us with a method to find solutions. All this will be worked on Lyaponov curves which will be defined. On the other hand, we will see: how the Cauchy operator relates to the Hilbert transformation, what happens when working in the Lp space with weight, as the adjunct operator behaves, which is an operator with a weak kernel, which is the abstract operator, among other topics. In addition to giving basic concepts that help us to better understand the results. Our objective is to give a clear explanation of this type of operators and highlight their importance

Resumen

Una de las principales aplicaciones de los operadores integrales singulares es la de proporcionar solución a ecuaciones integrales, dada una función ψ, encontrar φ que satisfaga: $a\varphi + bS_{\Gamma}\varphi = \psi$ Aquí a y b son funciones continuas y S_{Γ} es el operador singular de Cauchy. Encontrar solución a la ecuación integral mencionada es encontrar solución a la ecuación $(cP + dQ)\varphi = \psi$, para ciertos operadores P y Q, y ciertas funciones c y d que pueden ser propuestas resolviendo un sistema de dos ecuaciones. Como usualmente se hace en matemáticas se trabajará primero el caso en que c y d sean funciones racionales. Será de gran ayuda descomponer funciones racionales, según donde queden sus polos con respecto a la curva Γ, esto nos permite además definir el índice de una función racional, dicho índice nos dará información muy importante sobre la ecuación.

Al concentrarse en el operador de Cauchy, se descubre que posee la importante propiedad de ser idempotente (bajo algunas condiciones) y es esta cualidad la que permite que P y Q se conviertan en proyecciones en algunos espacios, obteniendo una descomposición para el espacio en cuestión, proporcionándonos un método para encontrar soluciones. Todo esto será trabajado sobre curvas de Lyapunov las cuales serán definidas. Por otra parte, veremos: cómo se relaciona el operador de Cauchy con la trasformada de Hilbert, qué pasa al trabajar en el espacio Lp con peso, como se comporta el operador adjunto, que es un operador con núcleo débil, que es el operador abstracto, entre otros temas. Además de dar conceptos básicos que nos ayuden a entender mejor los resultados. Nuestro objetivo es dar una explicación clara de este tipo de operadores y resaltar su importancia.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el análisis matemático se presentan frecuentemente operaciones integrales, llamadas "transformadas", como lo son por ejemplo las de Fourier, Cauchy, Hilbert, Mellin, etc., usualmente en el contexto de la solución de ecuaciones integrales e integrodiferenciales y que también son útiles en la caracterización de espacios de funciones L_p, H_p, etc. y en el estudio de álgebras de Banach de funciones. El ejemplo más conocido de estos operadores integrales singulares es el de Fourier y Plancherel y su relación con los espacios L_2 y L_1. En este trabajo estudiamos desde un punto de vista general las integrales singulares definidas sobre curvas en el plano complejo consideradas como operadores lineales sobre espacios de funciones.

El contenido de esta tesis está conformado por 4 capítulos. En el capítulo 2 se exponen conceptos básicos como son: el índice, el regularizador de un operador, el símbolo de un anillo de operadores, entre otros. Además de resultados importantes, que serán de gran ayuda y se retomarán a lo largo de los capítulos posteriores.

El operador singular de Cauchy y sus propiedades principales son vistas en el capítulo 3, se definen las curvas de Lyapunov sobre las que se va a trabajar, se probará que dicho operador es acotado, además de la fórmula de Poincaré-Bertrand y se estudian las proyecciones generadas por la integral singular.

En el capítulo 4, se estudian los operadores singulares abstractos, los operadores apareados y se concluye con una aplicación a las ecuaciones integrales, incluyendo ejemplos prácticos

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1. Regularización de Operadores

En lo que sigue X, Y, Z denotan espacios de Banach y A es un operador lineal actuando de X en Y; es decir, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Denotamos por $D(A) \subset X$ el dominio de A y por $Im(A) \subset Y$ el espacio imagen o rango de A.

El conjunto de todos los $x \in X$ tales que $Ax = 0$ es llamado el núcleo del operador A y es denotado por $Ker(A)$.

El espacio $\dfrac{Y}{Im\,(A)}$ es referido como el conúcleo de A y es denotado por $Coker(A)$.

Las dimensiones $\alpha\,(A) = dimKerA$, $\beta\,(A) = dimCokerA$. Son llamados la nulidad y la deficiencia de A, respectivamente. Si al menos uno de estos enteros es finito, es posible calcular su diferencia a la que llamamos Índice de A, denotado por $Ind(A)$;

$$Ind(A) = \alpha\,(A) - \beta\,(A)$$

Asumiremos que $D(A)$ es denso en X, luego podemos definir A^*, actuando de Y^* en X^*. Donde Y^* y X^* son los espacios duales de Y y X respectivamente. Si A es acotado

$\|A\| = \|A^*\|$.

Un operador $P \in \mathscr{L}(X)$ (aquí $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X, X)$), es llamado proyección si es idempotente, es decir $P^2 = P$. Se tiene que $Q = I - P$ es también una proyección y Q es referida como la proyección complementaria de P. Dado que $ImP = KerQ$, el rango de una proyección es siempre cerrado.

Sea un operador lineal A de X en Y con dominio denso $D(A)$. Para que la ecuación

$$Ax = y \ con \ y \in Y$$

tenga una solución $x \in D(A)$ es necesario que y sea ortogonal a $Ker(A^*)$ (esto es, $(y, f) = 0$ $\forall f \in Ker(A^*)$). En efecto, si x es una solucion de $Ax = y$, luego para $f \in Ker(A^*)$ se tiene que: $(y, f) = (Ax, f) = (x, A^*(f)) = (x, 0) = 0$.

Definición 2.1.1. A se dice que es soluble normalmente si la condición de ortogonalidad apenas mencionada es también suficiente para que $Ax = y$ tenga solución $x \in X$

Teorema 2.1.2 (Lema de Haussdorff)**.** *El operador A es soluble normalmente si y solo si ImA es cerrada.*

Demostración. Basta mostrar que A es soluble normalmente si ImA es cerrada. Tome un elemento $y_0 \in Y$ tal que $y_0 \notin ImA$. La afirmación se sigue si probamos que existe un funcional $f_0 \in kerA^*$ con $(y_0, f_0) \neq 0$. Para concluir esto, primero defina f_0 por $(y + \lambda y_0, f_0) = \lambda$ en el subespacio cerrado $Y_0 = ImA \oplus \lambda y_0$. Luego f_0 es un funcional continuo lineal en Y_0, y por el teorema de Hahn-Banach puede extenderse continuamente a todo el espacio Y. □

Teorema 2.1.3 (Banach-Hausdorff)**.** *Para un operador lineal $A : X \to Y$ con dominio denso, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *ImA es cerrada.*

(*b*) *A es soluble normalmente, esto es:*

$ImA = \{y \in Y \mid (y, f) = 0, \forall f \in kerA^*\}$.

(c) A^* *es soluble normalmente, esto es:*

$ImA^* = \{f \in X^* \mid (x, f) = 0, \forall x \in kerA\}$.

(d) ImA^* *es cerrada en* X^*.

La demostración de este teorema se encuentra en [5].

Definición 2.1.4. Sea A un operador lineal de $X \to Y$. Decimos que A es un operador compacto si cada sucesión acotada $\{x_n\} \in X$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ tal que $\{A(x_{n_k})\}_k$ converge en Y.

Definición 2.1.5. Sea A un operador lineal de $X \to Y$. El operador A se dice regularizable por la izquierda si existe un operador $R_l \in \mathscr{L}(Y, X)$ tal que, $R_l A = I_x + T_x$ donde I_x es el operador identidad en X y T_x es un operador compacto en X. R_l se dice el regularizador de A. El operador A admite una regularización por la derecha si existe $R_r \in \mathscr{L}(Y, X)$ tal que $ImR_l \subset D(A)$ y $AR_r = I_y + T_y$ con I_y el operador identidad en Y y T_y un operador compacto en Y. R_r es un regularizador derecho de A. Si A admite ambos regularizadores, uno izquierdo y uno derecho se dice que A es regularizable por ambos lados.

Proposición 2.1.6. 1.– *Si A admite una regularización izquierda (derecha), entonces A^* admite una regularización derecha (izquierda).* $A^* {R_l}^* = {I_x}^* + {T_x}^*$, ${R_r}^* A^* = {I_y}^* + {T_y}^*$.

2.– *Si R_l y R_r son regularizadores izquierdo y derecho de A, entonces $R_l - R_r$ es compacto, esto se comprueba multiplicando por R_r a la derecha de $R_l A = I_x + T_x$ y multiplicando por R_l a la izquierda de $AR_r = I_y + T_y$. Restando las igualdades obtenidas se obtiene:* $I_x R_r + T_x R_r - R_l T_y - R_l T_y = 0 \Rightarrow R_r - R_l = R_l T_y - T_x R_r$.

3.– *Si R es un regularizador izquierdo (derecho) para $A \in \mathscr{L}(Y, X)$ entonces para cada compacto T, $R+T$ es un regularizador izquierdo (derecho) de A. Esto implica en particular, que si un operador acotado es regularizable por ambos lados puede asumirse que $R_r = R_l$.*

Teorema 2.1.7. *Si un operador admite un regularizador izquierdo (derecho) entonces su nulidad (deficiencia) es finita.*

Demostración. Sea R_l regularizador izquierdo de A. Dado que cada solución de $Ax = 0$ es también solución de $R_l Ax = 0$, tenemos que $\alpha(A) \leq \alpha(R_l A)$. Pero $\alpha(R_l A) = \alpha(I_x + T_x) < \infty$ luego la nulidad de A es finita. $\square$

Teorema 2.1.8. *Si un operador cerrado admite una regularización izquierda o derecha, entonces es soluble normalmente.*

Para demostrar este último teorema necesitamos el siguiente resultado:

Lema 2.1.9. *Para que un operador cerrado $A : X \to Y$ sea soluble normalmente y tenga nulidad finita es necesario y suficiente que exista un operador compacto $T : X \to Z$ y una constante $C > 0$ tal que:*

$$\|x\| \leq C(\|Ax\| + \|Tx\|),\ \forall x \in D(A).$$

Demostración. Suficiencia: Suponga que se tiene $\|x\| \leq C(\|Ax\| + \|Tx\|)$, $\forall x \in D(A)$. Dado $x \in KerA$ tenemos que: $\|x\| \leq C\|Tx\|$. De esto vemos que la bola unitaria es un subconjunto compacto de $KerA$. Luego por Teorema de Riesz $KerA$ tiene dimensión finita. Ahora probaremos que el rango ImA es cerrado. Sea $y_n = Ax_n \to y$. Descomponemos X en suma directa $X = X_1 \oplus KerA$; claramente x_n puede elegirse en X_1. Primero veremos que los $\|x_n\|$ son uniformemente acotados. Supongamos que no lo son. Luego (tomando una subsucesión si fuera necesario) $\|x_n\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Ponga $x'_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, tenemos que $Ax'_n \to 0$. Dado que $\|x'_n\| = 1$, existe la subsucesion x'_{n_k} tal que Tx'_{n_k} es una sucesión de Cauchy, y tiene un límite $x \in X_1$, con $\|x\| = 1$. Pero por otro lado, $x \in D(A)$ y $Ax = 0$, dado que A es cerrado. Tomando en cuenta que $X_1 \cap KerA = \{0\}$, tenemos que $x = 0$. Esta contradicción muestra que $\|x\| \leq M$ para alguna $M > 0$. En virtud de que $\|x\| \leq C(\|Ax\| + \|Tx\|)$ y de la compacidad de T, uno puede de nuevo escoger una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$. Pero si $x_{n_k} \to x$ y $Ax_{n_k} \to y$, entonces $x \in D(A)$ y $y = Ax \in ImA$. Esto implica que ImA es cerrada y hemos probado que A es soluble normalmente.

Necesidad: Suponga ahora que A es soluble normalmente y que su núcleo tiene dimensión finita. Descomponemos X en suma directa $X = X_1 \oplus KerA$, denote por P la proyección de $KerA$ paralela a X_1, y defina A_1 como la restricción del operador A a X_1. Luego $KerA_1 = \{0\}$ e $ImA_1 = ImA$. El inverso A^{-1} es un operador cerrado en el espacio de Banach ImA y por lo tanto es acotado, entonces uno puede encontrar $C' > 0$ constante tal que $\|x_1\| \leq C'\|A_1x_1\|$, $\forall x_1 \in X_1$. Ahora dado que $x \in D(A)$, tenemos que: $x = x_1 + x_2$ con $x_1 = (I - P)x \in X_1$ y $x_2 = Px \in KerA$. El operador $T = P$ tiene rango finito y es por lo tanto compacto. De $Ax = A_1x_1$, obtenemos $\|x\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq C(\|Ax\| + \|Tx\|)$ con $C = max\{1, C'\}$. □

Demostración. (del Teorema (2.1.8)): Sea R_l un regularizador del operador A. En virtud del lema anterior tenemos que: $\|x\| \leq C'(\|(I_x + T_x)x\| + \|Tx\|)$, $\forall x \in X$; aquí T es un operador compacto en X. Pero esto y $R_lA = I_x + T_x$ nos dan $\|x\| \leq C(\|Ax\| + \|Tx\|)$ tomando $C = C'max(1, \|R_l\|)$, y esto prueba que A es soluble normalmente. Si A admite una regularización derecha, entonces A^* admite una regularización por la izquierda. En consecuencia, A^* es soluble normalmente y el Teorema de Banach-Hausdorff implica que A es soluble normalmente. □

Observación 2.1.10. Para un operador $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ se tienen las siguientes condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una regularización izquierda o derecha.
1.− El operador A admite una regularización izquierda si y solo si es soluble normalmente, tiene nulidad finita y existe una proyección de Y en ImA.
2.− El operador A admite una regularización derecha si y solo si es soluble normalmente, tiene deficiencia finita y existe una proyección de X en $KerA$.

2.2. Regularizadores equivalentes

Si el regularizador es conocido, la ecuación $Ax = y$ puede tomar la forma $x + Tx = R_ly$ para un regularizador izquierdo o $z + Tz = AR_rz = y$ para un regularizador derecho. A esto se le llama regularización de la ecuación y las ecuaciones resultantes son conocidas como ecuaciones de Riesz-Schauder o de segundo tipo.

Definición 2.2.1. Si $y \in Y$, cada solución de $Ax = y$ lo es para $x + Tx = R_l y$.Recíprocamente, si $y \in Y$ cada $x \in X$ solución de $x + Tx = R_l y$ lo es de $Ax = y$,y entonces R_l se llama un regularizador izquierdo equivalente de A.

Puede verse que un regularizador izquierdo R_l de un operador A es un regularizador izquierdo equivalente si y solo si tiene las siguientes dos propiedades:

1.− $KerR_l = \{0\}$.

2.− Si $x \in X$ es una solución de $x + Tx = R_l y$, entonces $x \in D(A)$.

Con respecto a la ecuación $z + Tz = AR_r z = y$ primero note lo siguiente: Si z es una solución de esta ecuación, entonces $x = R_r z$ es una solución de la ecuación original, sin embargo esta puede seguir teniendo otras soluciones. Si para $y \in ImA$ cada solución de $Ax = y$ puede ser obtenida vía $x = R_r z$ (es decir $ImR_r = D(A)$), entonces se dice que R_r es un regularizador derecho equivalente de A.

Teorema 2.2.2. *Para que un operador cerrado admita una regularización izquierda equivalente es necesario y suficiente que sea soluble normalmente y que tenga un índice finito no negativo.*

Demostración. Necesidad: Sea R_l un regularizador izquierdo equivalente del operador $A : X \to Y$ cerrado. Por los Teoremas (2.1.7) y (2.1.8), A tiene nulidad finita y es soluble normalmente. Dado que $Ax = y$ y $x + Tx = R_l y$ son equivalentes, $Ax = y$ es soluble si y solo si $(y, R_l^* \varphi_j) = 0$, con $j \in \{1, 2, ..., n\}$ donde $n = \beta(I + T) = \alpha(A)$ y $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ denotan las soluciones linealmente independientes de la ecuación adjunta homogénea $\varphi + T^*\varphi = 0$. Pero entonces los funcionales $\psi_j = R_l^* \varphi_j$ pertenecen a $KerA^*$ y lo generan. Entonces, $\alpha(A^*) \leq n = \alpha(A)$ y por lo tanto $IndA \geq 0$. Suficiencia: Sea ahora A cerrado y soluble normalmente, con índice finito no negativo. Descomponga X en suma directa $X = X_1 \oplus KerA$ y a Y en suma directa $Y = ImA \oplus Y_1$, donde Y_1 es un subespacio de dimensión $n = \beta(A)$. Sea $y_1, y_2, ..., y_n$ una base en Y_1 y $x_1, x_2, ..., x_m$ una base en $KerA$. Suponga que $m \geq n$. Sea P la proyección finito dimensional de X en $KerA$ paralela a X_1 y defina A_1 como restricción de A a X_1. Entonces A_1^{-1} está definida y es acotada en el subespacio ImA y se tiene que $A_1^{-1}A = I - P$ y $AA_1^{-1} = I$. Si $n = 0$, es decir $ImA = Y$, entonces $A_1^{-1} = A^{-1}$ es el operador inverso de A y es por lo tanto un regularizador equivalente. En el caso en que $n \geq 1$ podemos extender A_1^{-1} a un operador $B \in L(Y, X)$ al elegir $By_j = x_j$ con $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Las identidades $BA = A_1^{-1}A = I - P$ implican que B es un regularizador izquierdo de A. Nuestro objetivo es mostrar que B es incluso un regularizador equivalente, es decir, que cada solución de $x - Px = By$ satisface $Ax = y$. Note primero que $ImB \subset D(A)$, y por lo tanto cada solución $x \in X$ pertenece a $D(A)$. Luego, sea x solución y escribamos $y = y' + y''$ con $y' \in ImA$ y $y'' \in Y_1$. Entonces $x - Px - A_1^{-1}y' = By''$ con la parte izquierda en $kerP$ y la derecha en ImP, dado que $KerP \cap ImP = \{0\}$, $By'' = 0$ y luego $y'' = 0$. Entonces $x - Px - A_1^{-1}y' = 0 \Rightarrow Ax = y' = y$, obteniendo lo deseado. $\square$

Teorema 2.2.3. *Para que un operador cerrado admita una regularización derecha equivalente es necesario y suficiente que sea soluble normalmente y que tenga índice finito y no positivo.*

Demostración. Necesidad: Sea R_r un regularizador derecho equivalente del operador cerrador $A : X \to Y$. Debido a los Teoremas (2.1.7) y (2.1.8) A tiene deficiencia finita y es soluble normalmente. Dado que $ImR_r = D(A)$, deducimos que $\alpha(A) \leq \alpha(AR_r)$, $ImA = ImAR_r$ y entonces $\beta(AR_r) = \beta(A)$. Porque $AR_r = I + T$, finalmente tenemos que $\alpha(AR_r) = \beta(AR_r)$. Luego $\alpha(A) \leq \beta(A)$, esto es $IndA \leq 0$.

Suficiencia: Ahora sea A un operador cerrado soluble normalmente con índice finito y no positivo. Usamos las relaciones introducidas en la prueba de la suficiencia del teorema anterior. Si $n = \beta(A) = 0$, entonces $KerA\{0\}$, dado que $\alpha(A) \leq \beta(A)$. Entonces, $ImA_1^{-1} = D(A)$ y $A^{-1} = A_1^{-1}$ es por lo tanto un regularizador derecho equivalente de A.

Ahora asuma que $n \leq 1$. El operador A_1^{-1} se extiende a un operador $B \in L(X,Y)$ al poner

$$By_j = \begin{cases} x_j, & \text{j=1,2,...,m-1} \\ x_m, & \text{j=m,...,n} \end{cases}$$

Afirmamos que B es un regularizador derecho equivalente para A. Sea K la proyección de Y en Y_1 paralela a ImA. Entonces

$$B = A_1^{-1}(I-K) + BK,$$

y dado que $ImBK \subset KerA$, esto nos da

$$AB = AA_1^{-1}(I-K) = I-K.$$

Entonces, B es un regularizador derecho de A, dado que K es compacto por tener rango finito. Falta probar que $ImB = D(A)$. Cada elemento $x \in D(A)$ tiene una representación única $x = x' + x''$, con $x' \in KerA$ y $x'' \in D(A) \cap KerP = D(A_1)$, $x' = \sum_1^m \alpha_j x_j$. Ponga $y' = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j$, $y'' = A_1 x''$, $y = y' + y''$. Luego $y' \in Y_1$, $Y'' \in ImA$, y

$$By = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j + A_1^{-1} A_1 x'' = x$$

Consecuentemente, $D(A) \subset ImB$. Dado que claramente se tiene que $ImB \subset D(A)$ la prueba esta completa. □

2.3. Operadores de Fredholm y semi-Fredholm en espacios de Banach.

A lo largo de esta sección X, Y, Z serán espacios de Banach. Todos los operadores se supondrán acotados.

Un operador soluble normalmente A es llamado de Fredholm o, un ϕ-operador si tiene índice finito. Se dice que es un operador de semi-Fredholm si α o β es finito. Un operador semi-Fredholm es referido como un ϕ_+-operador si $\alpha(A) < \infty$ y como un ϕ_--operador si $\beta < \infty$. La colección de todos los ϕ (respectivamente $\phi+$ o ϕ_-)-operadores $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ es denotado por $\Phi(X,Y)$ (respectivamente $\Phi_+(X,Y)$ o $\Phi_-(X,Y)$). $\Phi(X,X) = \Phi(X)$ contiene por ejemplo a todos los operadores de la forma $I + T$ con T un operador compacto. Note que $Ind(I+T) = 0$. Por el Teorema de B-Hausdorff, $A \in \Phi \pm (X,Y)$ si y solo si $A^* \in \Phi \pm (Y^*, X^*)$. Además, en ese caso $IndA = -IndA^*$. Observe que el lema (2.1.9) proporciona una condición necesaria y suficiente para que un operador sea un ϕ_+-operador. En virtud de los teoremas (2.1.7) y (2.1.8) cada operador que admita un regularizador por ambos lados es un ϕ-operador. La recíproca también es cierta. En efecto; sea $A \in \Phi(X,Y)$. Traemos de vuelta los operadores A_1, P, K introducidos en la prueba de los teoremas (2.2.2) y (2.2.3), y tenemos que $B = A_1^{-1}(I_y - K) \in L(Y,X)$ y

$$BA = I_x - P, \;\; AB = I_y - K \tag{2.1}$$

Entonces B es un regularizador derecho e izquierdo de A. El operador B apenas construido es también un inverso generalizado del operador A. Este término es usado para cada operador $A^{(-1)} \in \mathscr{L}(X,Y)$ tal que $A(A^{(-1)})A = A$. Si $A^{(-1)}$ es un inverso generalizado de A, entonces:

$$KerA = KerA^{(-1)}A, \;\; ImA = ImAA^{(-1)}.$$

El siguiente Teorema resume los resultados anteriores:

Teorema 2.3.1. *Para un operador $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) A es un ϕ-operador.

(ii) A admite un regularizador por ambos lados.

(iii) Existe un regularizador $B \in \mathscr{L}(X,Y)$ tal que, $BA - I_x$ y $AB - I_y$ son finito dimensionales.

Para continuar necesitamos la definición de traza para un operador. Sea $K \in \mathscr{L}(X,Y)$ un operador finito dimensional y denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sus valores propios distintos de cero (no necesariamente distintos). Similar al caso de una matriz, le llamaremos traza a la suma de sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ del operador K y la denotaremos por SpK:

$$SpK = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n.$$

Es sencillo verificar que la traza de una proyección n-dimensional es igual a n.

Dos propiedades importantes de la traza pueden establecerse como sigue: (i) Si $K_1, K_2 \in \mathscr{L}(X,Y)$ son operadores finito-dimensionales, entonces:

$$Sp(K_1 + K_2) = SpK_1 + SpK_2$$

(ii) Si $K \in \mathscr{L}(X,Y)$ es finito dimensional y si $A \in \mathscr{L}(Y,X)$ entonces:

$$SpAK = SpKA.$$

Teorema 2.3.2. *Sea $A \in \Phi(X,Y)$ y suponga $R \in \mathscr{L}(Y,X)$ es un regularizador de A tal que $RA - I_x$ y $AR - I_y$ tienen ambos rango finito, entonces:*

$$IndA = Sp(I_x - RA) - Sp(I_y - AR)$$

Demostración. En el caso en que $R = A^{(-1)}$ es un inverso generalizado de A en vista de (2.1):

$$Sp(I_x - A^{(-1)}A) = dimP = \alpha(A) Sp(I_y - AA^{(-1)}) = dimK = \beta(A),$$

y esto prueba lo deseado. Si R es un regularizador arbitrario entonces:

$$R - A^{(-1)} = RK - (I_x - RA)A^{(-1)},$$

lo cual implica que $R - A^{(-1)}$ es finito-dimensional. Debido a la propiedad (ii) para la traza tenemos:

$$Sp((R - A^{(-1)})A) = Sp(A(R - A^{(-1)})),$$

y esto combinado con la propiedad (i) nos da:

$$Sp(I_x - A^{(-1)}A) - Sp(I_x - RA) = Sp(I_y - AA^{(-1)}) - Sp(I_y - AR),$$

luego

$$Sp(I_x - RA) - Sp(I_y - AR) = Sp(I_x - A^{(-1)}A) - Sp(I_y - AA^{(-1)}) = IndA.$$

$\square$

Teorema 2.3.3. *(Atkinson) Si $A \in \Phi(X, Y)$ y $B \in \Phi(Y, Z)$, entonces $BA \in \Phi(X, Z)$ e $IndBA = IndA + IndB$.*

Demostración. Sean $A^{(-1)}$ y $B^{(-1)}$ inversos generalizados de A y B, respectivamente (o cualquier otro regularizador tal que los operadores$A^{(-1)}A - I_x, AA^{(-1)} - I_y, B^{(-1)}B - I_y, BB^{(-1)} - I_z$ tengan rango finito). Entonces los operadores $A^{(-1)}B^{(-1)}BA - I_x$ y $BAA^{(-1)}B^{(-1)} - I_z$ son finito dimensionales, y entonces se tiene que $BA \in \Phi(X, Z)$ (por Teorema (2.3.1)). De $IndA = Sp(I_x - RA) - Sp(I_y - AR)$ y de la propiedad (i) obtenemos que:

$$d = IndBA - IndA - IndB$$

igual a

$$d = Sp(A^{(-1)}A - A^{(-1)}B^{(-1)}BA) + Sp(BAA^{(-1)}B^{(-1)} - BB^{(-1)}) + Sp(B^{(-1)}B - AA^{(-1)})$$

En virtud de la propiedad (ii).

$$Sp(A^{(-1)}A - A^{(-1)}B^{(-1)}BA) = SpA^{(-1)}(I_y - B^{(-1)}B)A = Sp(I_y - B^{(-1)}B)AA^{(-1)}$$

y análogamente

$$Sp(BAA^{(-1)}B^{(-1)} - BB^{(-1)}) = SpB(AA^{(-1)} - I_y)B^{(-1)} = SpB^{(-1)}B(AA^{(-1)} - I_y).$$

Entonces, una vez mas tomando en cuenta la propiedad (i), tenemos que :

$$d = Sp[(I_y - B^{(-1)}B)AA^{(-1)} + B^{(-1)}B(AA^{(-1)} - I_y) + B^{(-1)}B - AA^{(-1)}] = sp0 = 0$$

□

Teorema 2.3.4. *Sea $A \in \Phi(X,Y)$ y suponga $T : X \to Y$ es compacto, entonces $A+T \in \Phi(X,Y)$ e $Ind(A+T) = IndA$.*

Demostración. El teorema (2.3.1) implica la existencia de un regularizador R por ambos lados del operador A. Puesto que A puede verse como un regularizador por ambos lados de R, deducimos que $R \in \Phi(Y,X)$. Y por el teorema (2.3.3):

$$IndA + IndR = IndRA = 0$$

esto es

$$IndA = -IndR$$

Pero R es también un regularizador pos ambos lados para $A+T$, y entonces, análogamente, $Ind(A+T) = -IndR$. Luego

$$Ind(A+T) = IndA.$$

□

Teorema 2.3.5. *Para cada operador $A \in \Phi(X,Y)$ existe $\rho > 0$ tal que $C \in \mathscr{L}(X,Y)$ y $||C|| < \rho$ implica que $A+C \in \Phi(X,Y)$ e $Ind(A+C) = IndA$.*

Demostración. Por el teorema (2.3.1) existe un regularizador bilateral R de A, esto es

$RA = I + T_1$, $AR = I + T_2$ con T_1, T_2 operadores compactos. La afirmación es válida para $\rho = \|R\|^{-1}$. Si $\|C\| < \rho$, entonces $\|RC\| \le \|R\|\|C\| < 1$. Consecuentemente, por un teorema de Banach, el inverso $(I + RC)^{-1} \in L(X)$ existe. Luego,

$$R(A + C) = I + T_1 + RC = (I + RC)(I + T),$$

donde $T = (I + RC)^{-1}T_1$ es compacto en X. Ahora, con $R_1 := (I + RC)^{-1}R$, obtenemos:

$$R_1(A + C) = I + T.$$

Entonces, R_1 es un regularizador izquierdo para $A + C$. Se demuestra de forma análoga que $R_2 = R(I + CR)^{-1}$ es un regularizador derecho de $A + C$. □

Teorema 2.3.6. *Si* $A \in \Phi \pm (X, Y)$ *y* $B \in \Phi \pm (Y, Z)$ *entonces* $BA \in \Phi \pm (X, Z)$.

Demostración. Probaremos el teorema para Φ_+-operadores. Para Φ_--operadores la afirmación sigue de tomar adjuntos. Sean $A \in \Phi_+(X, Y)$ y $B \in \Phi_+(Y, Z)$. Del lema (2.1.9) tenemos que existen T_j y $C_j > 0$ con $j \in \{1, 2\}$ tales que:

$$\|x\| \le C_1(\|Ax\| + \|T_1x\|), \forall x \in X$$

$$\|y\| \le C_2(\|By\| + \|T_2x\|), \forall y \in Y$$

De tomar $y = Ax$

$$\|x\| \le C_1C_2(\|BAx\| + \|C_2^{-1}T_1x\| + \|T_2Ax\|),\ \forall x \in X.$$

Pero $C_2^{-1}T_1$ y T_2A son compactos, entonces aplicando el lema (2.1.9) vemos que $BA \in \Phi_+(X, Z)$. □

Teorema 2.3.7. *Sea* $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $B \in \mathscr{L}(Y, Z)$, *y* $BA \in \Phi_+(X, Z)$, *(respectivamente* $BA \in \Phi_-(Y, Z)$*). Entonces* $A \in \Phi_+(X, Y)$ *(respectivamente* $B \in \Phi_-(Y, Z)$*).*

Demostración. Sea $BA \in \Phi_+(X, Z)$. Por el lema (2.1.9) existe un operador compacto T y una constante positiva C tal que:

$$||x|| \leq C(||BAx|| + ||Tx||) \leq C'(||Ax|| + ||Tx||)\, \forall x \in X.$$

Aqui $C' = Cmax\,(1, ||B||)$, esta ultima desigualdad combinada con el lema (2.1.9) implica que $A \in \Phi_+(X, Y)$. La afirmación para ϕ_--operadores se sigue de tomar adjuntos. □

Teorema 2.3.8. *Sea $A \in \Phi \pm (X, Y)$ y suponga $T : X \to Y$ es compacto. Entonces $A + T \in \Phi \pm (X, Y)$ e $Ind(A + T) = IndA$.*

Demostración. Sea $A \in \Phi_+(X, Y)$, entonces se tiene que por el lema (2.1.9):

$$\|x\| \leq C_1(\|Ax\| + \|T_1x\|), \forall x \in X$$

con T_1 compacto y $C_1 > 0$. $\Rightarrow$

$$||x|| \leq C_1(||(A + T)x|| + ||T_1x|| + ||Tx||),\ \forall x \in X$$

De donde se deduce aplicando lema (2.1.9) que $A + T \in \Phi_+(X, Y)$, si $\beta(A) = \infty$ (recordemos que $\beta = dimCoker$), entonces por el Teorema (2.3.4), $\beta(A + T) = \infty$ y entonces $Ind(A + T) = IndA$. Si $\beta(A) < \infty$, entonces $A \in \Phi(X, Y)$ aplicando el teorema (2.3.4), tenemos lo deseado. Para ver la afirmación en los ϕ_-operadores basta tomar adjuntos. □

Teorema 2.3.9. *Para cada operador $A \in \Phi \pm (X, Y)$ existe $\rho > 0$ tal que si $C \in L(X, Y)$ con $||C|| < \rho$ entonces: $A + C \in \Phi\pm(X, Y)$, $\alpha(A + C) \leq \alpha(A)$, $\beta(A + C) \leq \beta(A)$ e $Ind(A + C) = IndA$.*

Demostración. Suponga primero $A \in \Phi_+(X, Y)$. De la prueba del lema (2.1.9) se sigue que existe un operador finito dimensional $T \in L(X)$ tal que $dimImT = \alpha(A)$ y

$$||x|| \leq \gamma(||Ax|| + ||Tx||), \forall x \in X$$

Aquí $\gamma > 0$ es constante. Ponga $\rho = \frac{1}{\gamma}$, si $||C|| < \rho$, la ultima desigualdad nos da la siguiente estimación:

$$||x|| \leq \gamma'(||(A+C)x|| + ||Tx||), \ \forall x \in X,$$

donde $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\gamma||C||}$. Luego $A+C \in \Phi_+(X,Y)$ y, por lo tanto, los espacios finito dimensionales $X_0 = Ker(A+C)$ e $Im(T|_{X_0})$ son isomorfos. En consecuencia $\alpha(A+C) \leq \alpha(A)$. Sea ahora $A \in \Phi_-(X,Y)$. Otra vez como en las pruebas anteriores, pasar a los adjuntos muestra que $A+C \in \Phi_-(X,Y)$ y que $\beta(A+C) \leq \beta(A)$ solo si $||C|| < \rho$. Tomando en cuenta el Teorema 3.5 nos falta probar que $IndA = \infty \Rightarrow Ind(A+C) = \infty$ cuando $||C|| < \rho$. Se dará la demostración para el caso en que $X = Y = H$ es un espacio de Hilbert. Sea $A \in \Phi_+(H)$. Por ser H de Hilbert, el subespacio ImA tiene un complemento ortogonal en H. A además posee un regularizador izquierdo R, elegimos $\rho = \frac{1}{2||R||}$ y sea $||C|| < \rho$. Exactamente como en la prueba del teorema (2.3.5) se tiene que $R_1(A+C) = I+T$ y uno puede concluir que $A+C \in \Phi_+(H)$ al aplicar el teorema (2.3.7). Ahora suponga que $\beta(A+C)$ es finito y afirmamos que $\beta(A)$ debe ser finito también. Luego, $A+C \in \Phi(H)$. Recordando el Teorema (2.3.1) concluimos que el operador $R_1 = (I+RC)^{-1}R$ es también un regularizador derecho de $A+C$, esto es:

$$AR_1 = (I - CR_1) + T_1$$

con T_1 compacto. Por definición de R_1, $||R_1|| \leq 2||R||$, luego el operador $I - CR_1$ es invertible y por lo tanto $R_1(I - CR_1)^{-1}$ es un regularizador derecho de A. Del teorema (2.1.7) deducimos que $\beta(A) < \infty$. Análogamente se puede probar que $Ind(A+C) = \infty$ si $A \in \Phi_-(H)$ e $IndA = \infty$. $\square$

2.4. La traza

En el caso de espacios de Hilbert separables, la traza puede ser definida no solo para operadores finito dimensionales, sino también para los operadores nucleares:

Definición 2.4.1. Un operador $A \in \mathscr{L}(H)$ se dice nuclear si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(Ae_k, e_k)$$

converge para todas las bases ortonormales $e_1, e_2, ...,$ de H. Note que un operador nuclear es necesariamente compacto y la suma no depende de la elección de $e_1, e_2, ...,$ y coincide con la suma de los valores propios de A (no necesariamente distintos). Esta última suma es referida como la traza del operador nuclear y se denotara por SpA. Además esta posee las propiedades $(i), (ii)$ de la sección anterior. Al repetir los argumentos del teorema (2.3.2) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. *Sea $A \in \Phi(H_1, H_2)$. Suponga $R \in L(H_2, H_1)$ es un regularizador de A tal que $RA - I_1$ y $AR - I_2$ son operadores nucleares. Entonces:*

$$IndA = Sp(I_1 - RA) - Sp(I_2 - AR).$$

Observación 2.4.3. Para $H_1 = H_2 = H$, se tiene que :

$$IndA = Sp(AR - RA).$$

Definición 2.4.4. Los operadores $A_0, A_1 \in \mathscr{L}(X, Y)$ se dicen ser homotópicos (en la clase $\Phi(X, Y)$) si existe una función continua $A : [0, 1] \to L(X, Y)$ que posee las siguientes dos propiedades: (i) $A(t) \in \Phi(X, Y),\ \forall t \in [0, 1]$ (ii) $A(0) = A_0,\ A(1) = A_1$.

Proposición 2.4.5. *Operadores homotopicos entre si tienen el mismo índice.*

Demostración. Se sigue del Teorema (2.3.9) que para cada $t \in [0, 1]$ existe $\rho_t > 0$ tal que $IndB = IndA(t)$ cuando $B \in \mathscr{L}(X,Y)$ y $||B - A(t)|| < \rho_t$. La continuidad de la función A implica que existe $\delta_t > 0$ tal que $||A(t' - A(t)|| < \rho_t$ si $|t' - t| < \delta_t$ y $t' \in [0,1]$. Luego, para t' se tiene que $IndA(t') = IndA(t)$. En consecuencia cada punto $t \in [0,1]$ esta en un intervalo abierto para el cual $IndA(t)$ es constante. Por el Teorema de Heine-Borel, el intervalo $[0,1]$ se puede cubrir con una cantidad finita de intervalos abiertos, $I_0, I_1, ..., I_k$, con $0 \in I_0$, $1 \in I_1$ e $I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$ con $j = 0, 1, ..., k-1$. Entonces el índice $IndA$ es constante en las intersecciones $I_j \cap I_{j+1}$ y por lo tanto en todo $[0,1]$. En particular $IndA(0) = IndA(1)$. $\square$

Lema 2.4.6. *Si un operador $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ es invertible sólo por la izquierda (respectivamente solo por la derecha), entonces $B \in \mathscr{L}(X,Y)$ con $||B - A|| < ||A^{(-1)||^{-1}}$ es solo invertible por la izquierda (derecha), y $dimKerB = dimKerA$, $dimCokerB = dimCokerA$.*

Demostración. B se puede representar como $B = [I - (A - B)A^{(-1)}]A$ si A es invertible por la izquierda, y como $B = A[I - A^{(-1)}(A - B)]$ si A es invertible por la derecha, y note que los operadores en los corchetes son invertibles. $\square$

2.5. El símbolo

Sea $\mathscr{R}$ un anillo de operadores lineales actuando en un espacio lineal X y suponga que existe un homomorfismo suprayectivo del anillo $\mathscr{R}$ en otro anillo τ. Entonces, a cada elemento de $\mathscr{R}$ le corresponde un único elemento de τ y cada elemento de τ le corresponde al menos uno de $\mathscr{R}$ tal que, si a y b en τ le corresponden A y B de $\mathscr{R}$, entonces $a + b$ y ab corresponden con $A + B$ y AB respectivamente. Si se da esta situación a τ le llamaremos un **anillo símbolo del anillo** $\mathscr{R}$. Cuando $a \in \tau$ corresponde a A, a se dice ser el **símbolo** del operador A y escribimos:

$$a = SmbA$$

El anillo símbolo esta determinado de manera única. Si τ_1 es cualquier anillo tal que τ puede ser mapeado en τ_1 mediante un homomofismo suprayectivo, entonces τ_1 puede ser también tomado como anillo símbolo de $\mathscr{R}$. Excluímos los caso triviales:

a) $\tau = \mathscr{R}$.

b) $\tau = \{0\}$, entonces el símbolo de un operador seria el cero.

Se tiene que para cada ideal (respectivamente ideal maximal) en el anillo de operadores hay un ideal (respectivamente ideal maximal) que le corresponde en el anillo símbolo y viceversa. En particular, la colección de todos los operadores en $\mathscr{R}$ cuyo símbolo es cero forma un ideal en el anillo $\mathscr{R}$. Llamaremos a este ideal el ideal cero del anillo $\mathscr{R}$. Claramente, si la correspondencia entre operadores y símbolos es inyectiva, el ideal cero es el trivial, es decir el cero del anillo $\mathscr{R}$.

Suponga que $\mathscr{R}$ contiene al operador identidad I. Denotamos su símbolo como i. Si a es un elemento arbitrario del anillo símbolo y A es cualquier operador con símbolo a, entonces la identidad $A = AI = IA$ implica que $a = ai = ia$ y en consecuencia, i es el elemento identidad del anillo símbolo. Por lo tanto, el símbolo del operador identidad es siempre la identidad del anillo símbolo. Si un elemento a en el anillo símbolo es no invertible y si $A \in \mathscr{R}$ es un operador con símbolo a, A no pude ser invertible. En efecto, suponga $B \in \mathscr{R}$ tal que $BA = AB = I$ y b denota el símbolo de B. Entonces $ab = ba = i$ lo cual contradice que a no es invertible. Ahora sea $a \in \tau$ un elemento invertible y sean A y R operadores en $\mathscr{R}$ cuyos símbolos son a y a^{-1}, respectivamente. De $aa^{-1} = i = a^{-1}a$ tenemos que $AR = I + T$ y $RA = I + T_1$ con ciertos operadores T y T_1 en el ideal cero de $\mathscr{R}$. Sea X un espacio de Banach, $\mathscr{R}$ un anillo de operadores acotados en X, y suponga que el ideal cero de $\mathscr{R}$ contiene solo a los operadores compactos. Entonces si $A \in \mathscr{R}$ con símbolo invertible a y si R es cualquier operador con símbolo a^{-1}, R es un regularizador por ambos lados de A.

Ejemplo 2.5.1. Ponga $X = C^{\infty}[a, b]$, con a y b números reales y sea $\mathscr{R}$ el anillo de operadores lineales diferenciales de la forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

con a_k coeficientes constantes y n número natural. Como el anillo τ uno puede tomar el anillo de polinomios en una nueva variable ξ con las operaciones de suma y multiplicación usuales de los polinomios. Entonces el símbolo de un operador en $\mathscr{R}$ puede definirse como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k$$

En este caso el ideal cero es trivial.

Ejemplo 2.5.2. En el mismo conjunto $C^{\infty}[a,b]$ considere el anillo de operadores de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

con $a_k \in C^{\infty}[a,b]$. Como antes el anillo símbolo será de polinomios en ξ cuyos coeficientes dependen de x, con la adición usual, pero la multiplicación definida de la siguiente forma.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\xi^k \sum_{l=0}^{m} b_l(x)\xi^l = \sum_{k=0}^{n+m} c_k(x)\xi^k,$$

donde

$$c_k = \sum_{p=0}^{n} \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} a_p(x) b_{k-r}^{(p-r)}(x)$$

con $b_{k-r}(x) = 0$ si $k - r > m$ o $k - r < 0$. El símbolo para estos operadores esta definido como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\xi^k$$

Note que la multiplicación no es conmutativa y que el ideal cero es trivial.

Ejemplo 2.5.3. Sea $\mathscr{R}$ el anillo de operadores de la forma

$$(Au)(x) = a(x)u(x) + (Tu)(x)$$

definidos en un espacio de Banach X de funciones definidas en un subconjunto G medible del espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$. Aquí $a(x)$ corre a lo largo de cierto anillo de funciones definidas en G y genera operadores de multiplicación acotados en X, mientras que T corre a lo largo de los operadores compactos en X. Los operadores A forman un anillo. Como el anillo símbolo de este operador A tomaremos la función $a(x)$. Luego , en este caso el símbolo de un operador compacto es el cero, y el ideal cero consiste de los operadores compactos.

Ejemplo 2.5.4. Denotamos por $\mathscr{I}$ el espacio numerable normado de todas las funciones infinito diferenciables, las cuales están definidas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y todas sus derivadas convergen a cero cuando $|x| \to \infty$ mas rápido que cualquier potencia de $|x|^{-1}$. Por $\mathscr{I}'$ denotamos el espacio de funcionales continuos lineales en $\mathscr{I}$: Estas son llamadas distribuciones temperadas. Consideramos la clase de operadores de convolución $\mathscr{F}$ sobre $\mathbb{R}^m$ que son de la forma:

$$(Ku)(x) = (K * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x-y)u(y)dy$$

donde K y u pertenecen a una subclase de $\mathscr{I}'$. Daremos un ejemplo de dicha subclase. La transformada de Fourier, definida para $\mathscr{I}$ por:

$$(Fu)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i(\xi,x)}u(x)dx$$

F es un operador continuo en $\mathscr{I}$ y su inverso (en $\mathscr{I}$) está dado por:

$$(F^{-1}\upsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2\pi i(\xi,x)}\upsilon(\xi)d\upsilon$$

Para una distribución $u \in \mathscr{I}'$ definimos Fu y $F^{-1}u$ por:

$$(\varphi, Fu) = (F\varphi, u),\ \varphi \in \mathscr{I}$$

$$(\varphi, F^{-1}u) = (F^{-1}\varphi, u),\ \varphi \in \mathscr{I}$$

Luego Fu, $F^{-1}u \in \mathscr{I}'$para todo $u \in \mathscr{I}'$. Denote por Φ la colección de todas las distribuciones $u \in \mathscr{I}'$ cuya transformada de Fourier no crece mas rápido que un polinomio. Dadas distribuciones K y u en Φ, la convolución puede definirse como:

$$(\varphi(x), K * u) = ((\varphi(x+y), u_y), K_x) \ \textit{con}\ \varphi \in \mathscr{I}$$

Luego $K * u \in \mathscr{I}$ y

$$F(K * u) = FKFu$$

$$K * u = F^{-1}(FKFu)$$

Por lo tanto, para n suficientemente grande.

$$w(\xi) := \frac{\widehat{u}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^n}\ \in L_2 = L_2(\mathbb{R}^m)$$

Consecuentemente,

$$u(x) = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^n v(x),\ v \in L_2,\ \widehat{v}(\xi) = w(\xi),$$

donde Δ denota el Laplaciano. Sea $\{v_j\}$ una sucesión de funciones infinito diferenciables con soporte compacto tal que $v_j \xrightarrow{L_2} v$ cuando $j \to \infty$. Ponga

$$u_j(x) = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^n v_j(x)$$

De la misma manera construimos una sucesión $\{K_j\}$ para la distribución $K \in \Phi$. Luego es fácil ver que $u_j \xrightarrow{\mathscr{I}'} u,\ K_j \xrightarrow{\mathscr{I}'} K,\ K_j * u_j \xrightarrow{\mathscr{I}'} K * u$. De la continuidad del operador F en $\mathscr{I}'$ concluimos que $F(K_j * u_j) \xrightarrow{\mathscr{I}'} F(K * u)$. Tomando en cuenta la relación $F(\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)) = 2\pi i\xi_k\widehat{u}\xi$ deducimos que $FK_j \to FK$ y $Fu_j \to Fu$ en la norma de $L_2(\Omega)$, donde $\Omega \in \mathbb{R}^m$ es una región acotada, al tomar límite $j \to \infty$ en la igualdad $F(K_j * u_j) = FK_jFu_j$ obtenemos $F(K * u) = FKFu$.

Ejemplo 2.5.5. Considere el operador

$$(Au)(x) = au(x) + \frac{b}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)}{y-x}dy, \ -\infty < x < \infty \tag{2.2}$$

donde a y b son constantes. Esta integral será entendida en el sentido del valor principal de Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)}{y-x}dy = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|<\epsilon}\frac{u(y)}{y-x}$$

El operador (2.2) puede escribirse como una convolución,

$$(Au(x)) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[a\delta(x-y) - \frac{b}{\pi i(x-y)}\right]u(y)dy \tag{2.3}$$

donde δ es la delta de Dirac. La transformada de Fourier del núcleo de la integral (2.3) es

$$\left(F(a\delta(x) - \frac{b}{\pi i x})\right)(\xi) = a(F\delta(x))(\xi) - \frac{b}{\pi i}(F\frac{1}{x})(\xi)$$

y donde

$$(F\delta(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-2\pi x\xi}dx = 1;$$

$$\left(F\frac{1}{x}\right)(\xi) = \int_{\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ix\xi}}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{e^{-2\pi ix\xi}}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ix\xi}}{x}dx\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{e^{-2\pi ix\xi} - e^{2\pi ix\xi}}{x}dx = -2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x\xi}{x}dx = i\pi sign\xi$$

Luego, como el símbolo del operador (2.2) tomamos:

$$a + bsign\xi \tag{2.4}$$

con ξ una variable real diferente de cero. El símbolo (2.4) puede simplificarse. Ponga $sign\xi = \theta$. Luego θ solo tomará los valores $+1$ y -1. Entonces la función de la variable θ esta dada por:

$$\Phi_A(\theta) = a + b\theta \ ; \ \theta = \pm 1 \tag{2.5}$$

La correspondencia entre los operadores (2.2) y los símbolos (2.5) es inyectiva. Se tiene lo siguiente:

1. El símbolo del operador S definido por:

   $$(Su)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y - x} dy$$

   es θ. Dado que $SmbS^2 = \theta^2 = 1$ y dado que a cada símbolo le corresponde un operador, tenemos que:

   $$S^2 = I \tag{2.6}$$

   o, en otras palabras

   $$-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t - x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y - t} dy = u(x) \tag{2.7}$$

   (2.7) es un caso especial de la formula de Poincaré-Bertrand y la veremos mas adelante.

2. El anillo de los símbolos (2.5) tiene dos ideales maximales: el conjunto de funciones

   $$a \cdot (1 - \theta) \ y \ a \cdot (1 + \theta) \ con \ a \ una \ constante. \tag{2.8}$$

   Por lo tanto el anillo de operadores también posee dos ideal maximales: el conjunto de todos los operadores de la forma $a(I - S)$ y los de la forma $a(I + S)$.

3. Cada elemento del anillo símbolo que no pertenece a los ideales (2.8) es invertible,

por lo tanto, si $a \neq \pm b$,

$$(a+b\theta)\left(\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{b\theta}{a^2-b^2}\right)=\frac{a^2-b^2\theta^2}{a^2-b^2}=1$$

Consecuentemente, si $a \neq b$, entonces el operador A dado por (2.2) es invertible y obtenemos:

$$(A^{-1}u)(x)=\frac{a}{a^2-b^2}u(x)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)}{y-x}dy \tag{2.9}$$

Capítulo 3

El operador integral singular de Cauchy

3.1. La integral singular y sus propiedades

Definición 3.1.1. Una curva de Jordan (sin puntos de intersección y rectificable) Γ orientada en el plano complejo $\mathbb{C}$ es llamada una curva Lyapunov si satisface la condición de Lyapunov, es decir; si para cada $t \in \Gamma$ existe una recta tangente a la curva y si el ángulo $\theta_\Gamma(t)$ formado entre la tangente y el eje x, medido contra reloj cumple la siguiente condición:

$$|\theta_\Gamma(t_1) - \theta_\Gamma(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^\alpha$$

Aquí $t_1, t_2 \in \Gamma$, c es una constante positiva y $0 < \alpha < 1$.

Definición 3.1.2. A una colección finita de curvas abiertas o cerradas de Lyapunov que no tengan puntos en común le llamaremos sistema de curvas de Lyapunov.

Definición 3.1.3. Se denomina un sistema de Lyapunov a trozos a una colección finita de curvas $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ de Lyapunov abiertas, si las curvas $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ tienen una cantidad finita de puntos en común y además cumplen lo siguiente: Si Γ_j y Γ_k tienen un punto t_0 en común (al que llamaremos punto singular), entonces o $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ es una curva de Lyapunov o las tangentes para Γ_j y Γ_k en t_0 no coinciden. Los puntos extremos de una o mas curvas son llamados nodos del sistema $\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j=1}^{n}$. Todos los demás puntos los llamaremos puntos regulares. Finalmente si un nodo es el extremo de solo una curva es llamado extremo del sistema de curvas, mientras que un nodo extremo de al menos dos curvas es llamado punto esquina.

Definición 3.1.4. Un sistema de Lyapunov a trozos Γ se dice que es un sistema cerrado de curvas si divide al plano complejo cerrado en dos conjuntos abiertos no vacíos, D_Γ^+ y D_Γ^- tal que Γ es la frontera de dichos conjuntos.

Sean Γ y Γ' sistemas de Lyapunov a trozos. Denotaremos por $C(\Gamma)$ el álgebra de Banach de todas las funciones continuas φ en Γ con la norma: $||\varphi||_{C(\Gamma)} = \max_{t\in\Gamma} |\varphi(t)|$. $H^\nu(\Gamma)$, donde $0 \leq \nu \leq 1$, denotará la colección de todas las funciones φ que satisfacen una condición de Hölder con exponente ν, esto s $\forall\ t_1,\ t_2 \in \Gamma$

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\nu$$

con A una constante mayor que cero (que depende de φ). $H^{\nu,\mu}(\Gamma\times\Gamma')$, donde $0 < \nu, \mu \leq 1$, se define como la colección de todas las funciones de dos variables $\varphi(t,\tau)$, las cuales están definidas en $\Gamma \times \Gamma'$ y satisfacen la condición de Hölder:

$$|\varphi(t_1,\tau_1) - \varphi(t_2,\tau_2)| \leq A\left[|t_1 - t_2|^\mu + |\tau_1 - \tau_2|^\nu\right]\ \forall(t_j,\tau_j) \in \Gamma \times \Gamma'\ j = 1, 2.$$

A una función $\varphi \in H^\mu(\Gamma)$ le asignamos la norma

$$||\varphi_{H^\mu(\Gamma)}|| = ||\varphi||_{C(\Gamma)} + \sup_{t_1,t_2\in\Gamma} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\nu}$$

H^μ provisto de esta norma forma un álgebra de Banach.

Definición 3.1.5. Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov a trozos y φ una función definida e integrable en Γ. Para $\epsilon > 0$ y para $t \in \Gamma$, sea $\Gamma_\epsilon = \{t \in \Gamma \mid |\tau - t| \geq \epsilon\}$. El valor principal de Cauchy de la integral:

$$(S_\Gamma \varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} \quad con\ t \in \Gamma$$

En caso de existir, es llamada la integral singular (o la integral singular de Cauchy) de la función φ tomada a lo largo de Γ. La función φ es referida como la densidad de la integral singular y la expresión $\frac{d\tau}{\tau - t}$ como el núcleo de Cauchy.

Lema 3.1.6. *Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov y suponga $\varphi \in H^\mu(\Gamma)$ $(0 \leq \mu \leq 1)$. Entonces la integral singular $(S_\Gamma \varphi)(t)$ existe para cada t punto regular en Γ.*

Demostración. Un sistema de Lyapunov se compone de una cantidad finita de curvas así que basta probar la afirmación para el caso en que Γ es una curva abierta de Lyapunov y t no es un extremo en Γ.

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{d\tau}{\tau - t}$$

Dado que

$$\left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \right| \leq \frac{A|\tau - t|^\mu}{|\tau - t|} = A|\tau - t|^{\mu - 1}$$

El límite de la primer integral en la derecha existe y es igual a la integral impropia: $\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}$. Considere la segunda integral, cortamos el plano complejo a lo largo de una línea que una $\tau = t$ y $\tau = \infty$ y que caiga a la derecha de Γ. Elegimos ϵ suficientemente pequeño tal que $B(t, \epsilon) \cap \Gamma = \{t_1, t_2\}$. Considere a y b los puntos extremos de Γ.

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln(\tau - t)|_{\tau = a}^{\tau = t_1} + \ln(\tau - t)|_{\tau - t_2}^{r = b} = \ln \frac{b - t}{a - t} + \ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t}$$

Dado que $|t_1 - t| = |t_2 - t| = \epsilon$,

$$\ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t} = i \left[arg(t_1 - t) - arg(t_2 - t) \right] \to i\pi$$

cuando $\epsilon \to 0$. Luego $(S_\Gamma \varphi(t)) < \infty$ y se mostró que:

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \left[ln \frac{b-t}{a-t} + \pi i \right].$$

$\square$

Corolario 3.1.7. *Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov cerrado y $t \in \Gamma$ un punto regular, entonces:*

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \pi i \varphi(t).$$

En particular

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = \pi i.$$

Demostración. En la demostración del corolario anterior ponga $a = b$. $\square$

Observación 3.1.8. Elija $t_1, t_2 \in \Gamma$ en una vecindad de un punto regular t y sea el arco $arc(t_1, t_2) \subset \Gamma$ con puntos finales t_1 y t_2 conteniendo a t, se tiene que $\lim_{t_1 \to t, t_2 \to t} \left| \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \right| = 1$ Luego bajo las hipótesis del lema anterior $\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{t_1 \to t, t_2 \to t} \int_{\Gamma \setminus (t_1, t_2)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$

Por $R(\Gamma)$ denotaremos el conjunto de todas las funciones racionales sin polos en la curva Γ, note que por el Teorema de Runge $R(\Gamma)$ es denso en $C(\Gamma)$. Para un sistema de curvas cerrado Γ sea $R^{\pm}(\Gamma)$ el conjunto de todas las funciones en $R(\Gamma)$ con polos fuera de $D_\Gamma^{\pm}$.

Teorema 3.1.9. *Sea Γ un sistema de curvas cerrado de Lyapunov a trozos, $r_+ \in R^+(\Gamma)$, $r_- \in R^-(\Gamma)$, y $r_-(\infty) = 0$. Luego, para un punto regular $t \in \Gamma$:*

$$(S_\Gamma r_+)(t) = r_+(t), \ (S_\Gamma r_-)(t) = -r_-(t).$$

Demostración. $\frac{r_+(\tau) - r_+(t)}{\tau - t}$ es una función analítica de τ en D_Γ^+.Luego

$$\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = 1, \quad t \in \Gamma$$

Se tiene cuando Γ es cerrado.

$$(S_\Gamma r_+)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{r_+(\tau)-r_+(t)}{r-t}d\tau + \frac{r_+(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = r_+(t)$$

Sea $r(t) = (t-a)^{-n},\ a \in D^+ \ y\ n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\frac{r(\tau)-r(t)}{\tau - t} = -\sum_{k=0}^{n-1}(t-a)^{k-n}(\tau - a)^{-k-1} = \frac{r(\tau-a)^{-n}-(t-a)^n}{(\tau - t)}$$

Luego

$$(S_\Gamma r)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{r(\tau)-r(t)}{\tau - t}d\tau + \frac{r(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = -2r(t) + r(t) = -r(t).$$

□

Corolario 3.1.10. *Sea Γ un sistema de curvas cerrado de Lyapunov y $r \in R(\Gamma)$. Entonces para cada $t \in \Gamma$ regular, $(S_\Gamma^2 r)(t) = r(t)$, donde $(S_\Gamma^2 r)(t) = (S_\Gamma(S_\Gamma r))(t)$.*

Demostración. Dado $r \in R(\Gamma)$, se tiene una representación como $r = r_+ + r_-$ con $r_\pm \in R^\pm(\Gamma)$ y $r_-(\infty) = 0$, aplicando el teorema anterior: $(S_\Gamma r)(t) = r_+(t) - r_-(t)$, $(S_\Gamma^2 r)(t) = (S_\Gamma r_+)(t) - (S_\Gamma r_-)(t) = r_+(t) + r_-(t)$ □

Teorema 3.1.11. *Sea Γ y Γ' curvas de Lyapunov y $\tau = \alpha(\zeta)$ una función inyectiva de Γ' en Γ. Suponga que $\alpha'(\zeta)$ existe y satisface la condición de Hölder en Γ', y no anula en Γ'. Si $\varphi \in H^\mu(\Gamma)$ con $0 < \mu \leq 1$, entonces:*

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_{\Gamma'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}d\zeta$$

donde $t = \alpha(\xi)$.

Demostración.

$$\int_{\Gamma'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}d\zeta = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}d(\zeta)$$

donde $\Gamma'_\epsilon = \left\{\zeta \in \Gamma' \middle| |\zeta - \xi|\right\}$ sobre la sustitución de $\tau = \alpha(\zeta)$ en la integral, se tiene que la integral derecha se puede escribir como:

$$\lim_{t_1 \to t, t_2 \to t} \int_{\Gamma \setminus (t_1, t_2)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

donde $t_j = \alpha(\xi_j)$ con $j \in 1, 2$ y ξ_j son puntos de la intersección de la curva Γ' y el circulo $|\zeta - \xi| = \epsilon$. Una aplicación de la formula de Taylor nos lo muestra. □

3.2. Acotamiento de los Operadores Integrales Singulares en el espacio $L_p(\Gamma)$.

Para un sistema de curvas de Lyapunov Γ , sea $L_p(\Gamma)$ con $1 \leq p < \infty$ el espacio de Banach de todas las funciones φ medibles en Γ las cuales son absolutamente integrables a la p-ésima potencia.

$$||\varphi||_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}}$$

Donde $|dt|$ es la diferencial de la medida de arco. Por $L_\infty(\Gamma)$ denotaremos el conjunto de todas las funciones medibles esencialmente acotadas en Γ,

$$||\varphi||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Gamma} |\varphi(t)| = \min\{M \geq 0 \mid |\varphi| \leq M \ c.t.p.\}$$

.

Teorema 3.2.1. *Sea un operador A es acotado en los espacios $L_{p_0}(\Gamma)$ y $L_{p_1}(\Gamma)$ con $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$. Si $p_0 < p < p_1$, entonces A es también acotado en $L_p(\Gamma)$. Más aún, la norma del operador A cumple:*

$$||A||_p \leq ||A||_{p_0}^{1-t} ||A||_{p_1}^t$$

con $\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{p_0} + \frac{t}{p_1}$, $0 < t < 1$.

Teorema 3.2.2. *Si Γ es una curva cerrada de Lyapunov, el operador S_Γ es acotado en los espacios L_p para cada p tal que $1 < p < \infty$.*

Para la demostración de este teorema necesitamos los siguientes dos resultados.

Lema 3.2.3. *Sea Γ_0 el círculo unitario $|t| = 1$ y suponga $1 < p < \infty$. El operador $S_0 = S_{\Gamma_0}$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$.*

Demostración. Sea $|t| = 1$ y $m = 0, \pm 1, ...$ por el teorema (3.1.9)

$$S_0 t^m = t^m$$

para cada $m \geq 0$ y $S_0 t^m = -t^m$ para cada $m < 0$. Pero $\{t^m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ forma una base ortogonal del espacio $L_2(\Gamma_0)$ de Hilbert, y el operador S_0 definido en este base es acotado en $L_2(\Gamma)$ y $||S_0|| = 1$. Sea ahora $\varphi(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k t^k$ un polinomio. Ponga $\varphi_+(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^N$ y $\varphi_-(t) = \sum_{k=-N}^{-1} a_k t^k$. Luego $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, $S_0\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.. $\varphi^2 + (S_0\varphi)^2 = 2(\varphi_+^2 + \varphi_-^2) = 2S_0(\varphi_+^2 - \varphi_-^2) = 2S_0(\varphi S_0 \varphi)$.

$$||(S_0\varphi)^2||_p \leq ||2S_0(\varphi S_0\varphi)||_p + ||\varphi^2||_p$$

tomando en cuenta $||\varphi^2||_p = ||\varphi||_{2p}^2$, $\Rightarrow$ $||\varphi\psi|| \leq ||\varphi||_{2p}||\psi||_{2p}$ Obtenemos

$$||S_0\varphi||_{2p}^2 \leq 2||S_0||_p||\varphi||_{2p}||S_0\varphi||_{2p} + ||\varphi||_{2p}^2$$

Si S_0 es acotada en $L_p(\Gamma_0)$ $\Rightarrow$

$$||S_0||_{2p} \leq \left(||S_0||_p + \sqrt[2]{1 + ||S_0||_p^2}\right) ||\varphi||_{2p}$$

$\Rightarrow$

$$||S_0||_{2p} \leq ||S_0||_p + \sqrt[2]{1 + ||S_0||_{2p}^2}$$

S_0 es acotado en todos los espacios $L_{2^n}(\Gamma)$ con $n \in \mathbb{N}$.

$$||S_0||_{2^{n+1}} \leq ||S_0||_{2^n} + \sqrt[2]{1 + ||S_0||_{2^n}^2}$$

Finalmente el teorema (3.2.1) nos dice que S_0 es acotado en $L_p(\Gamma_0)$ para p tal que $2 \leq p < \infty$. Sea $1 < p < 2$, tenemos que $q = p(p-1)^{-1} > 2$. Sean $\varphi(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k t^k$, $\phi(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k t^k$, tenemos:

$$\int_{\Gamma_0} \varphi(t)\overline{(S_0\varphi)(t)}|dt| = \sum_{k=-N}^{N} \epsilon_k a_k \overline{b_k} = \int_{\Gamma_0} (S_0\varphi)(t)\overline{\phi(t)}|dt|$$

con $\epsilon_k = 2\pi$ si $k \leq 0$ y $\epsilon_k = -2\pi$ si $k < 0$. Esto nos muestra que $S_0 \in \mathscr{L}(L_q(\Gamma_0))$ y su adjunto $S_0{}^*$ toman los mismos valores en el conjunto denso $R(\Gamma_0)$ de $L_p(\Gamma_0)$. Luego S_0 es acotado en $L_p(\Gamma_0)$ si $1 < p < 2$. □

Lema 3.2.4. *Sea Γ una curva simple cerrada y $t = \beta(z)$ un mapeo conforme del disco unitario T en el dominio D_Γ^+, el cual se supone acotado y cuya frontera es una curva de Lyapunov Γ. Luego*

$$k(\zeta, z) = \frac{\beta'(\zeta)}{\beta(z) - \beta(\zeta)} - \frac{1}{z - \zeta}$$

con $|\zeta| = 1,\ |z| \leq 1$, admite una estimación:

$$|k(\zeta, z)| \leq \frac{c}{|\zeta - z|^\mu}$$

donde c y μ son constantes con $0 < \mu < 1$.

Demostración. Sean $z, \zeta \in T$; $z = e^{\pi\theta_1}$, $\zeta = e^{i\theta_0}$ y suponga $\theta_0 < \theta_1$, sin pérdida de generalidad.

Tomaremos $\theta_1 - \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Sea $u := e^{\pi\theta}$ con $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ y $r = |u - \zeta|$. Luego $|du| = d\theta \leq 2r$. Dado que la curva Γ es Lyapunov, la derivada $\beta'(z)$ cumple en T una condición de Hölder con un exponente α, con $0 < \alpha < 1$, es decir;

$$|\beta'(u) - \beta'(z)| \leq Mr^{\alpha}$$

Luego

$$|\beta(z) - \beta(\zeta) - \beta'(\zeta)(z-\zeta)| = \left| \int_{\gamma} (\beta'(u) - \beta'(\zeta))du \right| \leq M \int_0^{|\zeta - z|} r^{\alpha} 2dr = M_1 |z-\zeta|^{\alpha+1}$$

donde γ es un arco circular que conecta z y ζ. Dado que para un mapeo conforme la condición $\beta'(\zeta)0$ con $\zeta \in T$ se satisface, tenemos:

$$\left| \frac{\beta(\zeta) - \beta(z)}{\zeta - z} \right| \geq M_2 > 0$$

combinando las dos ultimas desigualdades tenemos lo deseado.

$$\frac{|\beta'(\zeta)(z-\zeta) - \beta(z) - \beta(\zeta)|}{|(z-\zeta)(\beta(z) - \beta(\zeta)|} \leq \frac{|M_1||z-\zeta|^{\alpha+1}}{|z-\zeta|(|\beta(z) - \beta(\zeta)|} \leq \frac{M_1|z-\zeta|^{\alpha-1}}{M_2}$$

□

Ya podemos demostrar el teorema (3.2.2):

Demostración. Dado que Γ es una curva cerrada Lyaponnov existe una función uno-a-uno diferenciable $\tau = \alpha(\zeta)$ que napea el circulo unitario Γ_0 en Γ tal que su derivada satisface la condición de Hölder y no se anula en Γ_0. Ponga

$$k(\xi, \zeta) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} - \frac{1}{\zeta - \xi} \right)$$

con $\xi, \zeta \in \Gamma_0$. Del lema anterior (3.2.4):

$$|k(\xi, \zeta)| \leq \frac{c}{|\xi - \zeta|^{\lambda}}$$

con $0 \leq \lambda < 1$ y c una constante mayor que cero. El operador K definido en $L_p(\Gamma_0)$ con $1 < p < \infty$ por:

$$(K\Psi)(\xi) = \int_{\Gamma_0} k(\xi, \zeta)\Psi(\zeta)d\zeta$$

es un operador integral singular débil, por lo tanto compacto. Sea A el operador lineal de $L_p(\Gamma)$ en $L_p(\Gamma_0)$ dado por $(A\varphi)(\zeta) = \varphi(\alpha(\zeta))$. A es uno-a-uno. por el teorema (3.1.11) $S_\Gamma\varphi = A^{-1}(K + S_0)A\varphi$ para cada $\varphi \in R(\Gamma)$. Pero S_0 es acotado en $L_p(\Gamma_0)$ en virtud del lema (3.2.3) $\rightarrow S_\Gamma$ es acotado en $L_p(\Gamma)$. □

Corolario 3.2.5. *Sea Γ una curva de Lyapunov cerrada y sea $\varphi \in L_p(\Gamma)$ con $1 < p < \infty$. Entonces el límite*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

existe para casi todo $t \in \Gamma$ y es igual a $(S_\Gamma\varphi)(t)$.

Demostración. Elegimos $r_n \in R(\Gamma)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $||r_n - \varphi||_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego

$$||S_\Gamma r_n - S_\Gamma\varphi||_p \to 0$$

por el teorema (3.2.2), $r_n = r_n^+ + r_n^-$ con $r_n^+ \in R^+(\Gamma)$, $r_n^- \in R^-(\Gamma)$ y $r_n^-(\infty) = 0$. Ponga $\varphi^+ = P_\Gamma\varphi$ y $\varphi^- = Q_\Gamma\varphi$, donde $P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$, $Q_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$. Por el teorema (3.1.9) $P_\Gamma r_n = r_n^+$, $Q_\Gamma r_n = r_n^-$ y $||r_n^\pm - \varphi^\pm|| \to 0$. Luego

$$\int_\Gamma r_n^+(t)t^k dt = 0$$

con $k = 0, 1, ...$

$$\int_\Gamma r_n^-(t)t^{-k} dt = 0$$

con $k = 1, 2, ... \Rightarrow$

$$\int_\Gamma \varphi^+(t)t^k dt = 0$$

y

$$\int_\Gamma \varphi^-(t)t^{-k}dt = 0$$

Para $\varphi = \varphi^+$ (respectivamente $\varphi = \varphi^-$) el límite existe casi en todos los puntos $t \in \Gamma$ y es igual a $\varphi^+(t)$ (respectivamente $-\varphi^-(t)$). Para completar la prueba resta notar que $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$ y $S_\Gamma\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. □

Corolario 3.2.6. *Sea Γ una curva abierta de Lyapunov. Luego el operador integral singular S_Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$ con $1 < p < \infty$.*

Demostración. Sea $\tilde{\Gamma}$ una curva cerrada de Lyapunov tal que $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$. Por el teorema (3.2.2) $S_{\tilde{\Gamma}}$ es acotado en $L_p(\tilde{\Gamma})$ con $1 < p < \infty$. Entonces, con $\chi(t)$ la función característica del conjunto $\tilde{\Gamma}$, concluimos que:

$$||S_\Gamma r||_{L_p(\Gamma)} = ||\chi S_{\tilde{\Gamma}} \chi r||_{L_p(\tilde{\Gamma})} \leq ||S_{\tilde{\Gamma}}||_{L_p(\tilde{\Gamma})} ||r||_{L_p(\Gamma)}$$

Para toda $r \in R(\Gamma)$. □

Teorema 3.2.7. *Sea Γ un sistema de Lyapunov a trozos. Entonces el operador S_Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$ para cada p tal que $1 < p < \infty$.*

Primero veremos el siguiente lema.

Lema 3.2.8. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos curvas abiertas de Lyapunov las cuales tienen un punto z_0 en común. Suponga que las tangentes en z_0 no coinciden, entonces el operador S_{Γ_1,Γ_2} definido como:*

$$(S_{\Gamma_1,\Gamma_2}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

con $t \in \Gamma_2$ es acotado de $L_p(\Gamma_1)$ en $L_p(\Gamma_2)$ con $1 < p < \infty$.

Demostración. Primero suponga Γ_1 y Γ_2 son segmentos rectos de linea. Sin pérdida de generalidad asuma que $z_0 = 0$ y $\Gamma_1 \subset [0, \infty)$. Elija un complejo ζ tal que Γ_2 este en el rayo ζy con $0 \leq y < \infty$. Sea $\varphi \in L_p(\Gamma_1)$ una función y $\psi \in L_q(\Gamma_2)$, una función que es idénticamente cero en una vecindad del origen, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Extendemos las funciones, tomándolas como la función cero en los rayos enteros $[0, \infty)$ y ζy respectivamente. Luego

$$\left| \int_{\Gamma_2} \overline{\psi(t)} |dt| \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} \right| \leq |\zeta| \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{|\psi(\zeta y)\varphi(x)|}{|x - \zeta y|} dx$$

Hacemos el cambio de variable $x = sy$

$$= |\zeta| \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{|\psi(\zeta y)\varphi(sy)|}{|sy - \zeta y|} |y| ds = |\zeta| \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{|\psi(\zeta y)\varphi(sy)|}{|s - \zeta|} ds$$

$$= |\zeta| \int_0^\infty \frac{ds}{|s - \zeta|} \int_0^\infty |\psi(\zeta y)\varphi(sy)| dy$$

A esta ultima expresión le aplicamos la desigualdad de Hölder con $L_p(\Gamma_2)$ y $L_q(\Gamma_2)$:

$$|\zeta| \int_0^\infty \frac{ds}{|s - \zeta|} \left(\int_0^\infty |\varphi(sy)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty |\psi(\zeta y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= |\zeta| \int_0^\infty \frac{ds}{|s - \zeta|} \left[\frac{1}{s^{\frac{1}{p}}} ||\varphi||_p \right] \left[\frac{1}{\zeta^{\frac{1}{q}}} ||\psi||_q \right]$$

$$= |\zeta|^{\frac{1}{p}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{p}} |s - \zeta|} ||\psi||_q ||\varphi||_p$$

Dado que las funciones acotadas ψ forman un subconjunto de $L_q(\Gamma_2)$, la ultima desigualdad muestra que el operador $S_{\Gamma_1, \Gamma_2} : L_p(\Gamma_1) \to L_p(\Gamma_2)$ es acotado.

Ahora considere el caso general. Sean G_1 y G_2 dos segmentos en las tangentes a las curvas Γ_1 y Γ_2 en el punto z_0. Sea $t = \alpha(\xi)$ un napeo uno a uno de $G = G_1 \cup G2$ en $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.Dado que nuestras curvas son de Lyapunov, la función $\alpha(\xi)$ puede escogerse tal que su derivada satisfaga la condición de Hölder, y por lo tanto no se anula.

Considere los operadores $A_k : L_p(\Gamma_k) \to L_p(\Gamma_k)$, con $k = 1, 2$ definido como $(A_k \varphi)(\xi) =$

$\varphi(\alpha(\xi))$. Se tiene que

$$K = A_2 S_{\Gamma_1,\Gamma_2} A_1^{-1} - S_{G_1,G_2}$$

es un operador integral con núcleo

$$k(\xi,\zeta) = \frac{1}{\pi i}\left[\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)} - \frac{1}{\zeta-\xi}\right]$$

con $\zeta \in G_1$ y $\xi \in G_2$. Recordando que $|k(\xi,\zeta)| \leq \frac{c}{|\xi-\zeta|^{\lambda}}$, $0 \leq \lambda < 1$, se tiene que $K : L_p(G_1) \to L_p(G_2)$ es acotado. La afirmación es consecuencia de la identidad $S_{\Gamma_1,\Gamma_2} = A_2^{-1}(K + S_{G_1,G_2})A_1$. □

Ya podemos demostrar el teorema (3.2.7).

Demostración. Sea $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k=1}^{n}$ con las siguientes condiciones. Γ_j y Γ_k tienen a lo mas un punto común, un posible extremo t_0, si Γ_j y Γ_k tienen a t_0 en común, $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ es de Lyapunov o sus tangentes no coinciden en t_0.

Probaremos que $S_{\Gamma_j,\Gamma_k} : L_p(\Gamma_j) \to L_p(\Gamma_k)$ es acotado. Para $j = k$ se sigue del corolario (3.2.6). Suponga $j \neq k$, si Γ_j y Γ_k tienen un punto común y la unión $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ no es de Lyapunov, entonces S_{Γ_j,Γ_k} es acotado por el lema anterior. Luego suponga que la unión si es Lyapnov, entonces S_{Γ_j,Γ_k} es acotado por el corolario (3.2.6) y tenemos:

$$||S_{\Gamma_1,\Gamma_2}\varphi||_{L_p(\Gamma_k)} \leq ||S_{\Gamma_j,\Gamma_k}\tilde{\varphi}||_{L_p(\Gamma_j,\Gamma_k)} \leq ||S_{\Gamma_j,\Gamma_k}||||\varphi||_{Lp(\Gamma_j)}$$

donde $\tilde{\varphi}$ denota la función obtenida de una función $\varphi \in L_p(\Gamma_j)$ al extenderla como cero a toda la curva Γ_{jk}. Esta última desigualdad implica que S_{Γ_j,Γ_k} es acotado.

Finalmente, si Γ_j y Γ_k no tienen puntos en común S_{Γ_j,Γ_k} es un operador integral con núcleo continuo acotado. Denote por χ_j la función característica de $\Gamma_j \subset \Gamma$. Luego

$$S_\Gamma = \sum \chi_j S_\Gamma \chi_k I$$

$$||\chi_j S_\Gamma \chi_k \varphi||_{L_p(\Gamma)} \leq ||S_{\Gamma_j,\Gamma_k}||||\varphi||_{L_p(\Gamma)}$$

lo cual prueba que S_Γ está acotado. □

Ejemplo 3.2.9. Se tiene que el teorema (3.2.7) no es necesariamente cierto para el caso en que $p = \infty$ o $p = 1$, aun si Γ es la circunferencia unitaria. Se sigue de que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln(n)}(t^n - t^{-n})$$

es una función continua en Γ, mientras que la función conjugada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln(n)}(t^n + t^{-n})$$

es continua para $t \neq 1$ y no es acotada para $t = 1$.

Teorema 3.2.10. *Si Γ es un sistema de Lyapunov a trozos cerrado, se tiene que $S_\Gamma^2\varphi = \varphi$ para $\varphi \in L_p(\Gamma)$ con $1 < p < \infty$.*

3.3. El operador Integral Singular con peso.

Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov, sean $t_1, ..., t_m$ puntos en Γ, sean también $\beta_1, ..., \beta_m$ números reales, y defina:

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - t_k|^{\beta_k}$$

$L_p(\Gamma, \rho)$ sera el espacio de Banach de todas las funciones medibles φ en Γ para las cuales $\varphi\rho \in L_p(\Gamma)$; la norma de $L_p(\Gamma, \rho)$ estará dada por:

$$||\varphi||_{L_p(\Gamma,\rho)} = ||\varphi\rho||_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho^p(t)|dt|\right)^{\frac{1}{p}}$$

.

Se tiene que $L_\infty(\Gamma) \subset L_p(\Gamma, \rho)$ si $\beta_k > \frac{-1}{p}$ y $L_p(\Gamma, \rho) \subset L_1(\Gamma)$, si $\beta < 1 - \frac{1}{p}$.

Lema 3.3.1. *Si $\beta_k > \frac{-1}{p}$ con $k = 1, ..., m$ se tiene que el conjunto de funciones continuas $C(\Gamma)$ es denso en $L_p(\Gamma, \rho)$.*

Demostración. Si $\beta_k > -\frac{1}{p}$ con $k = 1, ..., m$ luego $\rho \in L_1(\Gamma)$ y $C(\Gamma) \subset L_p(\Gamma, \rho)$. Ahora dada $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ podemos aproximar la función $\varphi\rho \in L_p(\Gamma)$ por una sucesión de funciones continuas ψ_n, las cuales, se anulan en vecindades de los puntos $t_1, ..., t_m$. Luego $\varphi_n = \psi_n \rho^{-1}$ son funciones continuas en Γ y tenemos:

$$||\varphi - \varphi_n||_{L_p(\Gamma,\rho)} = ||\varphi\rho - \psi||_{L_p(\Gamma)} \to_{n\to\infty} 0$$

□

Corolario 3.3.2. *Si $\beta_k > -\frac{1}{p}$ con $k = 1, ..., m$ entonces el conjunto $R(\Gamma)$ es denso en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.*

Demostración. Para ver esto considere que $C(\Gamma)$ esta metido y es denso en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$, cada función continua puede aproximarse por funciones racionales como se desee.

□

Corolario 3.3.3. *Si $\beta_k > -\frac{1}{p}$ con $k = 1, ..., m$ y si Γ_0 es la circunferencia unitaria, entonces el sistema de funciones lineales generado por $\{t^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ $(|t| = 1)$ es denso en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$.*

Es sencillo describir funcionales en $L_p(\Gamma, \rho)$. Sea $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ y $\psi \in L_q(\Gamma, \rho^{-1})$, donde $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego por desigualdad de Hölder:

$$\int_\Gamma \varphi\overline{\psi(t)}|dt| = \int_\Gamma \varphi(t)\rho(t)\overline{\psi(t)}\rho^{-1}(t)|dt| \leq ||\varphi||_{L_p(\Gamma,\rho)}||\psi||_{L_q(\Gamma,\rho^{-1})} \tag{3.1}$$

y entonces el teorema de Riesz en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ tiene la forma:

$$\Psi(\varphi) = \int_\Gamma \varphi(t)\overline{\psi(t)}|dt| =: (\varphi, \psi)$$

donde $\psi \in L_q(\Gamma, \rho^{-1})$ y $||\psi||_{L_p^*(\Gamma,\rho)} = ||\psi||_{L_q\Gamma,\rho^{-1}}$ Es decir $L_p^*(\Gamma, \rho) = L_q(\Gamma, \rho^{-1})$

3.4. S_Γ es acotado en $L_p(\Gamma, \rho)$

El objetivo de esta sección es obtener el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1. *Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov y suponga $p, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ son números reales que cumplen $1 < p < \infty$, $\frac{-1}{p} < \beta_k < 1 - \frac{1}{p}$ con $k = 1, ..., m$. Entonces el operador singular S_Γ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$. Si Γ es un sistema cerrado, entonces $S_\Gamma^2 = I$*

Primero demostraremos dos lemas.

Lema 3.4.2. *Suponga $t_0 \in \Gamma$, $1 < p < \infty$, y sea α un real tal que $\frac{-1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego el operador definido como*

$$(B\varphi)(t) = \int_\Gamma \frac{|\tau - \tau_0|^\alpha - |t - t_0|^\alpha}{|\tau - t||t - t_0|^\alpha} \varphi(\tau)|d\tau|$$

con $t \in \Gamma$ es acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$

Demostración. Suponga que $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p}$ y sea δ un número real tal que $\alpha(p-1) < p\delta < min(p-1, 1-\alpha)$. Entonces, para $\varphi \in C(\Gamma)$, la desigualdad de Hölder implica que:

$$|(B\varphi)(t)| \leq c \int_\Gamma \frac{|\varphi(\tau)||d\tau|}{|t - t_0|^\alpha |\tau - t|^{1-\alpha}} = \frac{c}{|t - t_0|} \int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^\delta |\varphi(\tau)|d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha}|\tau - t_0|^\delta}$$

$$\leq \frac{c}{|t - t_0|^\alpha} \left(\int_\Gamma \frac{|\tau - t_0|^{\delta p} |\varphi(\tau)|^p |d\tau|}{|\tau - t|^{1-\delta}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^{1-\delta} |\tau - t_0|^{\delta q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Luego, si β y γ son números reales tales que $\beta < 1$, $\gamma < 1$, $\beta + \gamma > 1$, al sustituir $\tau - t = \zeta(t - t_0)$ se consigue

$$\int_\Gamma \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^\beta |\tau - t_0|^\gamma} \leq \frac{c}{|t - t_0|^{\beta+\gamma-1}} \tag{3.2}$$

Luego

$$|(B\varphi)(t)| \leq \frac{c}{|t-t_0|^{\delta+\frac{\alpha}{p}}}\left(\int_\Gamma \frac{|\tau-t_0|^{\delta p}|\varphi(\tau)|^p|d\tau|}{|\tau-t||^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

y por lo tanto

$$||B\varphi||_p^p \leq c_2\int_\Gamma \frac{|dt|}{|t-t_0|^{\alpha+\delta p}}\int_\Gamma \frac{|\tau-t_0|^{\delta p}|\varphi(\tau)|^p|d\tau|}{|\tau-t||^{-\alpha}} = c_2\int_\Gamma \frac{|\varphi(\tau)|^p|d\tau|}{|\tau-t_0|^{-\delta p}}\int_\Gamma \frac{|dt|}{|t-t_0|^{\alpha+\delta p}|\tau-t||^{-\alpha}}$$

utilizamos ((3.2)) en la integral a la derecha

$$\leq c_2\int_\Gamma c\frac{|\varphi(\tau)|^p|d\tau|}{|\tau-t_0|^{-\delta p}|\tau-t_0|^{\delta p}} \leq c_3||\varphi||_p^p$$

Sea ahora $\frac{-1}{q}<\alpha<0$. Ponga $\beta=-\alpha$. Del modo probado el operador C definido como

$$(C\psi)(t) = \int_\Gamma \frac{|\tau-t_0|^\beta-|t-t_0|^\beta}{|\tau-t||t-t_0|^\beta}\psi(\tau)|d\tau|$$

es acotado en el espacio $L_q(\Gamma)$. Pero $C^*=B$, luego B es acotado en $L_p(\Gamma)$. □

Lema 3.4.3. *Sean $t_1,...,t_m\in\Gamma$ y suponga $p,\alpha_1,...,\alpha_m$ son números reales tales que $1<p<\infty$, $\frac{-1}{q}<\alpha_k<\frac{1}{p}$ con $k=1,...,m$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Defina*

$$h(t)=\prod_{k=1}^m |t-t_k|^{\alpha_k}$$

con $t\in\Gamma$. Luego $A=h^{-1}S_\Gamma hI$ está acotado en el espacio $L_p(\Gamma)$.

Demostración. Elija arcos abiertos $\Gamma_k\subset\Gamma$ con $t_k\in\Gamma_k$, pero $t_j\notin\Gamma_k$ si $j\neq k$. La distancia entre dos puntos t_j sera positiva. Ponga $\Gamma_0=\Gamma\setminus\bigcup_{k=1}^\infty\Gamma_k$ y denote por R_k al operador definido por $(R_k\varphi)(t)=\chi_k(t)\varphi(t)$, donde χ_k es la función característica del conjunto Γ_k. Luego el operador A puede representarse en la forma

$$A=\left(\sum_{j=0}^m R_j\right)A\left(\sum_{k=0}^m R_k\right)=\sum_{j,k=0}^m R_jAR_k$$

resta probar que cada operador es acotado, para hacerlo consideramos cuatro casos:

1.- $j = k \neq 0$. Entonces $R_k A R_k = g A_k f I$, donde

$$g(t) = \chi_k(t) h^{-1}(t) |t - t_k|^{\alpha_k}, \; f(t) = \chi_k(t) h(t) |t - t_k|^{-\alpha_k},$$

$A_k = |t - t_k|^{-\alpha_k} S_\Gamma |t - t_k|^{\alpha_k} I$. El operador $A_k - S_\Gamma$ es acotado en $L_p(\Gamma)$ por el lema (3.4.2) y S_Γ lo es por el teorema (3.2.7). Luego A también es un operador acotado en $L_p(\Gamma)$. Esto y que f y g son funciones acotadas en Γ implica que $R_k A R_k$ es acotado en $L_p(\Gamma)$.

2.- $k \neq j$, $k \neq 0$, $j \neq 0$. En este caso

$$|(R_j A R_k \varphi)(t)| = \frac{\chi_j(t)}{\pi h(t)} \left| \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(t) h(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| \leq \frac{||\varphi||_p ||h||_q}{\pi d h(t)}$$

donde d denota la distancia entre Γ_j y Γ_k. Dado que $h \in L_q(\Gamma)$ y $h^{-1} \in L_p(\Gamma)$, tenemos que:

$$||R_j A R_k \varphi||_p \leq (\pi d)^{-1} ||h^{-1}||_p ||h||_q ||\varphi||_p$$

y entonces $R_j A R_k$ esta acotado.

3.- $k \neq j$, $k = 0$ o $j = 0$. Luego $R_j A R_k = R_j R A R R_k$ con $R = R_j + R_k$. RAR es acotado por el primer caso y $R_j A R_k$ sera acotado.

4.- $k = j = 0$. $R_0 A R_0$ es acotado por el teorema (3.2.7) □

Ya podemos demostrar el teorema

Demostración. Note que ρI es un isomorfismo isométrico de $L_p(\Gamma, \rho)$ en $L_p(\Gamma)$. Luego S_Γ está acotado en $L_p(\Gamma, \rho)$ si y solo si el operador $\rho S_\Gamma \rho^{-1} I$ esta acotado en $L_p(\Gamma)$. Pero con $h = \rho^{-1}$ se satisface el lema (3.4.3). □

Para lo que queda de la sección considere $\Gamma = \mathbb{R}$ y el peso dado por $\rho_\infty = |t - i|^\beta \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\beta_k}$, donde $t_1, ..., t_m$ son m puntos en la recta real y $\beta, \beta_1, ..., \beta_m$ son números reales.

Teorema 3.4.4. *Sean $p,\beta,\beta_1,...,\beta_m$ tales que: $1<p<\infty$, $\frac{-1}{p}<\beta_k<1-\frac{1}{p}$ con $k=1,...,m$, y $\frac{-1}{p}<\beta+\sum_{k=1}^m\beta_k<1-\frac{1}{p}$. Luego el operador singular integral S_∞ dado por:*

$$(S_\infty\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

con $-\infty<t<\infty$ es acotado en $L_p(\mathbb{R},\rho_\infty)$.

Demostración. Sea Γ_0 el círculo unitario y ponga $\zeta_k=(t_k+i)(t_k-i)^{-1}$, $\zeta_0=1$, $\beta_0=1-\frac{2}{p}-\beta-\sum_{k=1}^m\beta_k$, $\rho_0=\prod_{k=0}^m|\zeta-\zeta_k|^{\beta_k}$ El operador definido por

$$(B\varphi)(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-1)}\varphi\left(i\frac{(\zeta+1)}{(\zeta-1)}\right)$$

es un operador lineal acotado de $L_p(\mathbb{R},\rho_\infty)$ en $L_p(\Gamma_0,\rho_0)$. Dada $\varphi\in L_p(\mathbb{R},\rho_\infty)$ tenemos

$$||B\varphi||^p_{L_p(\Gamma_0,\rho_0)}=\int_{\Gamma_0}\left|\varphi\left(i\frac{(\zeta+1)}{(\zeta-1)}\right)\right|^p\rho_0^p(\zeta)|\zeta-\zeta_0|^{-p}|d\zeta|=C\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\tau)|^p\rho_\infty^p(\tau)d\tau$$

con c una constante mayor que cero. El operador B es invertible y

$$(B^{-1}\psi)(t)=\frac{2i}{t-1}\psi\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$$

Las hipótesis para p y los β_k garantizan que $1<p<\infty$, y $\frac{-1}{p}<\beta_k<1-\frac{1}{p}$. Por el teorema (3.4.1), $S_0=S_{\Gamma_0}$ esta acotado en $L_p(\Gamma_0,\rho_0)$ y luego $B^{-1}S_0B$ es acotado en $L_p(\mathbb{R},\rho_\infty)$ Sea φ una función continuamente diferenciable con soporte finito definido en la recta real. Aplicamos teorema de cambio de variable:

$$(B^{-1}S_0B\varphi)(t)=\frac{2}{\pi(t-i)}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi\left(i\frac{(\zeta+1)}{(\zeta-1)}\right)}{(\zeta-1)\left(\zeta-\frac{t+1}{t-1}\right)}d\zeta=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=(S_\infty\varphi)(t)$$

La función $\varphi\left(i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)$ se anula en alguna vecindad de $\zeta=1$. Dado que el conjunto de funciones φ es denso en $L_p(\mathbb{R},\rho_\infty)$ se tiene que S_∞ es acotado en $L_p(\mathbb{R},\rho_\infty)$. $\square$

3.5. Operadores Singulares con núcleo débil

Sea $k(t,\tau)$ una función medible en $\Gamma \times \Gamma$ y que cumple con:

$$|k(t,\tau)| \leq c|t-\tau|^{-\mu}$$

con c constante y $0 \leq \mu < 1$. Una función con estas características es llamada un núcleo singular débil y

$$(T\varphi)(t) = \int_{\Gamma} k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

con $t \in \Gamma$ será el operador integral singular débil, y este es compacto en $L_p(\Gamma)$. Con el teorema (3.4.1) se puede ver que es compacto en $L_p(\Gamma,\rho)$.

Teorema 3.5.1. *Si $p, \beta_1, ..., \beta_m$ satisfacen las propiedades del teorema (3.4.4), entonces el operador T es compacto en $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demostración. Basta probar para el operador $K = h^{-1}ThI$ está $L_p(\Gamma)$ donde h satisface las hipótesis del lema (3.4.3) para n natural.

$$k_n(t,\tau) = \begin{cases} k(t,\tau), & si\ |t-\tau| \geq \frac{1}{n} \\ 0, & si\ |t-\tau| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Denote por A, A_n y K_n los operadores con núcleos $h^{-1}(t)k(t,\tau)h(\tau) - k(t,\tau)$, $h^{-1}(t)k_n(t,\tau)h(\tau) - k_n(t,\tau)$ y $h^{-1}(t)k_n(t,\tau)h(\tau)$ respectivamente. Dado que $h \in L_q(\Gamma)$, $h^{-1} \in L_p(\Gamma)$ y que $k_n(t,\tau)$ es un núcleo acotado, se tiene que:

$$\int_{\Gamma} |dt| \left(\int_{\Gamma} |h^{-1}(t)k_n(t,\tau)h(\tau)|^q |d\tau| \right)^{p-1} < \infty$$

y consecuentemente, k_n y también A_n son compactos en $L_p(\Gamma)$. Probaremos que $\lim_{n\to\infty} ||A - A_n||_p = 0$. Claramente A seria compacto, luego K lo seria en $L_p(\Gamma)$.

Ponga $M_n = A - A_n$ y sea $m_n(t,\tau)$ el núcleo del operador M_n. Del lema (3.4.3)

$$(B\varphi)(t) = \int_\Gamma \left| \frac{h^{-1}(t)h(\tau)}{\tau - t} - \frac{1}{\tau - t} \right| \varphi(\tau)|d\tau|$$

esta acotado en $L_p(\Gamma)$. Con $b(t,\tau)$ el núcleo de B se tiene que:

$$|m_n(t,\tau)| \leq cn^{\mu-1}b(t,\tau), \ ||M_n||_p \leq cn^{\mu-1}||B||_p$$

luego $||M_n||_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

3.6. Dos teoremas del conmutador

Teorema 3.6.1. *Si a es una función continua en Γ, entonces el conmutador $T = aS_\Gamma - S_\Gamma a$ es compacto en $L_p(\Gamma, \rho)$.*

Demostración. Si $a \in R(\Gamma)$, entonces T es un operador integral con núcleo continuo, luego compacto. Si $a \in C(\Gamma)$ es una función continua, elegimos $a_n \in R(\Gamma)$ tal que $||a - a_n||_{C(\Gamma)} \to_{n\to\infty} 0$ luego $T_n = a_nS_\Gamma - S_\Gamma a_n$ es compacto y

$$||T - T_n|| \leq 2||S_\Gamma||||a - a_n||_{C(\Gamma)}$$

$\Rightarrow T$ es compacto en $L_p(\Gamma, \rho)$. □

Teorema 3.6.2. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos sistemas a trozos de Lyapunov y sea $\tau = \alpha(\zeta)$ un mapeo uno a uno de Γ_2 en Γ_1 con derivada α' la cual satisface la condición de Hölder y no se anula en Γ_2. Defina:*

$$\rho_1(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - t_k|^{\beta_k}, \ \rho_2(\xi) = \prod_{k=1}^{m} |\xi - \xi_k|^{\beta_k}$$

$t_k = \alpha(\xi_k)$ y denote por S_{Γ_1} y S_{Γ_2} los operadores integrales en los espacios $L_p(\Gamma_1, \rho_1)$ y

$L_p(\Gamma_2, \rho_2)$ *respectivamente. Entonces*

$$S_{\Gamma_2} = BS_{\Gamma_1}B^{-1} + T$$

donde T *es un operador compacto en* $L_p(\Gamma_2, \rho_2)$ *y* B *denota el operador lineal invertible de* $L_p(\Gamma_1, \rho_1)$ *en* $L_p(\Gamma_2, \rho_2)$ *dado por* $(B\varphi)(\zeta) = \varphi(\alpha(\zeta))$.

Demostración. Sea $r \in R(\Gamma_2)$, $\varphi = B^{-1}r$, y $T = S_{\Gamma_2} - BS_{\Gamma_1}B^{-1}$ luego

$$(T_r)(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{r(\zeta)d\zeta}{\zeta - \xi} - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - \alpha(\xi)} = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\left(\frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)}\right) r(\zeta)d\zeta$$

y el núcleo de este operador es débil, T es entonces compacto en $L_p(\Gamma_2, \rho_2)$ □

3.7. La fórmula de Poincaré-Bertrand

Teorema 3.7.1. *Sean* $\phi \in L_p(\Gamma, \rho)$ *y* $\psi \in L_q(\Gamma, \rho^{-1})$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$ *Entonces:*

$$\int_\Gamma \psi(t)dt \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \int_\Gamma \frac{\psi(t)}{\tau - t}dt$$

Demostración. S_Γ es acotado en $L_p(\Gamma, \rho).\rho^{-1}(t) = \prod_{t=1}^{m} |t - t_k|^{-\beta_k}$ y tenemos que $-\frac{1}{q} < -\beta_k < 1 - \frac{1}{q} \Rightarrow S_\Gamma$ es también acotado en $L_q(\Gamma, \rho^{-1})$. Para $\tau \in \Gamma$ y t variable en Γ ponga:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(\tau) & , si\ |\tau - t| \le \frac{1}{n} \\ 0 & , si\ |\tau - t| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Luego $||\varphi - \varphi_n||_{L_p(\Gamma,\rho)} \to 0$ y luego $||f - f_n||_{L_p(\Gamma,\rho)} \to 0$ cuando $n \to \infty$ donde $f(t) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ f_n = \int_\Gamma \frac{\varphi_n(\tau)}{\tau - t}d\tau$ con $\tau \in \Gamma$ y por la sección anterior (ver (3.1)) nos da

$$\int_\Gamma \psi(t)f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \varphi(t)f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \varphi(t)dt\int_\Gamma \frac{\varphi_n(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

En la ultima desigualdad el orden de integración puede ser cambiado y $\psi(t)\varphi_n(t) = \varphi(t)\psi_n(t)$, tenemos :

$$\int_\Gamma \psi(t)f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \int_\Gamma \frac{\psi_n(t)}{\tau - t}dt = \int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \int_\Gamma \frac{\psi(t)}{\tau - t}dt$$

probando lo deseado.

□

Teorema 3.7.2. *Suponga* $K(t,\tau) = k(t,\tau)|t-\tau|^{-\mu}$ *donde* $k(t,\tau) \in H^\lambda(\Gamma\times\Gamma)$ *con* $0 \leq \mu < 1,\ 0 < \lambda \leq 1$. *Entonces si* $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$ *con* $1 < p < \infty$

$$\int_\Gamma \frac{dt}{\tau - t_0}\int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \int_\Gamma \frac{K(t,\tau)}{t-t_0}dt$$

Note que las dos integrales de arriba no necesariamente conmutan, en efecto, si Γ es una curva de Lyapunov cerrada y φ una función en $L_p(\Gamma,\rho)$, entonces por el teorema (2.3.1)

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = -\pi^2\varphi(t_0)$$

con $t_0 \in \Gamma$. Mientras que:

$$\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \int_\Gamma \frac{dt}{(t-t_0)(\tau - t)} = 0$$

dado que el producto interior integral es igual a

$$\frac{1}{\tau - t_0}\left(\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0} - \int_\Gamma \frac{dt}{t-\tau}\right) = 0$$

Teorema 3.7.3. *Sea* $\varphi(t,\tau) \in H^\lambda(\Gamma\times\Gamma)$ *con* $0 < \lambda \leq 1$ *y sea* t_0 *un punto regular del sistema de curvas* Γ. *La fórmula de Poincaré-Bertrand se satisface:*

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int \frac{\varphi(t,\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_\Gamma d\tau \int_\Gamma \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-t_0)(\tau - t)}dt - \pi^2\varphi(t_0,t_0)$$

Demostración.

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t,\tau)}{\tau-t}d\tau =$$

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t,\tau)-\varphi(t,t)}{\tau-t}d\tau+\int_\Gamma \frac{\varphi(t,t)-\varphi(t_0,t_0)}{t-t_0}dt\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau-t}+\varphi(t_0,t_0)\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau-t}$$

Usando los teoremas (3.7.1) y (3.7.2). Luego

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t,\tau)}{\tau-t}d\tau =$$

$$\int_\Gamma d\tau\int_\Gamma \frac{\varphi(t,\tau)dt}{(t-t_0)(\tau-t)}+\varphi(t_0,t_0)\left[\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau-t}-\int_\Gamma d\tau\int_\Gamma \frac{dt}{(t-t_0)(\tau-t)}\right]$$

Si Γ es un sistema de curvas cerrado, la primera integral en el paréntesis cuadrado es $-\pi^2$, mientras que la segunda es cero.

Ahora suponga que el sistema de curvas Γ no es cerrado. Basta considerar el caso en que Γ es una sola curva abierta.

Sea $\tilde{\Gamma}$ una curva cerrada tal que $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ y ponga $\Gamma' = \tilde{\Gamma}\backslash\Gamma$ es visible que en las integrales

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_{\Gamma'} \frac{d\tau}{\tau-t},\ \int_{\Gamma'} \cdots \int_\Gamma \cdots,\ \int_{\Gamma'} \cdots \int_{\Gamma'} \cdots$$

el orden de integración puede ser cambiado.

El termino en los paréntesis cuadrados es igual a

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{dt}{t-t_0}\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{d\tau}{\tau-t}-\int_{\tilde{\Gamma}} d\tau\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{dt}{(t-t_0)(\tau-t)} = -\pi^2$$

□

3.8. La integral singular en el espacio $H^\mu(\Gamma)$

Teorema 3.8.1. *Sea Γ un sistema cerrado de curvas de Lyapunov. Entonces el operador S_Γ está acotado en el espacio $H^\mu(\Gamma)$ con $0 \leq \mu < 1$.*

Demostración. Por el teorema de Plemelj y Privalev, $S_\Gamma\varphi \in H^\mu(\Gamma)$ para cada $\varphi \in H^\mu(\Gamma)$.

Que S_Γ sea acotado en $L_2(\Gamma)$ implica que, es un operador cerrado en el espacio $H^\mu(\Gamma)$. Finalmente, dado que S_Γ está definido en todo $H^\mu(\Gamma)$, deducimos del teorema de la gráfica cerrada que el operador S_Γ es acotado en $H^\mu(\Gamma)$. □

Teorema 3.8.2. *Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov cerrado y sea $a \in H^\mu(\Gamma)$ con $0 < \mu < 1$. Entonces el conmutador $T = aS_\Gamma - S_\Gamma a$ es compacto de H^ν en H^μ*

3.9. Operadores relacionados con la integral singular de Cauchy

Sea $t \in \Gamma$, se tiene que $dt = h_\Gamma(t)|dt|$, $h_\Gamma = e^{i\theta_\Gamma(t)}$ donde $\theta_\Gamma(t)$ denota el ángulo entre la tangente a Γ en el punto t y el eje x, esta función esta definida en todos los puntos regulares de Γ y es continua acotada a trozos.

Teorema 3.9.1. *Para el operador S^*_Γ adjunto en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{-1})$ tenemos:*

$$S^*_\Gamma = -H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma \tag{3.3}$$

donde H_Γ es el operador actuando en el espacio $L_q(\Gamma, \rho^{-1})$ por la regla:

$$(H_\Gamma\varphi)(t) = \overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}$$

Demostración. Sea $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ y sea $\psi \in L_q(\Gamma, \rho^{-1})$. Aplicar el teorema (3.7.1) nos da:

$$(S_\Gamma\varphi, \psi) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\psi(t)}|dt| \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau =$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi(\tau)h_\Gamma(\tau)|d\tau|\int_\Gamma \frac{\overline{\psi(t)}h_\Gamma^{-1}(t)}{\tau-t}dt = (\varphi, -H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma \psi)$$

implican (3.3) □

Corolario 3.9.2. *Sea Γ una circunferencia, un arco circular, o un intervalo, entonces $S_\Gamma^* = S_\Gamma$*

Ejemplo 3.9.3. Sea Γ un arco o un circunferencia. Luego $\tau = t_0 + Re^{i\theta}$, $d\tau = Re^{i\theta}d\theta = i(\tau - t_0)|d\tau|R^{-1}$. En consecuencia $h(\tau) = i(\tau - t_0)/R$:

$$(S_\Gamma^*\varphi)(t) = \frac{-(\bar{t}-\overline{t_0})}{\pi R^2}\int_\Gamma \frac{i(\tau - t_0)\varphi(\tau)d\tau}{\overline{\tau}-\bar{t}} = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = (S_\Gamma\varphi)(t)$$

.

Ejemplo 3.9.4. Analogamente, si $\Gamma = [a,b]$, entonces $|d\tau| = dr$, $h_\Gamma(t) = 1$ y $S_\Gamma^* = S_\Gamma$.

Teorema 3.9.5. *Sea Γ un sistema de curvas de Lyapunov y S_Γ^* el adjunto del operador $S_\Gamma \in \mathscr{L}(L_p(\Gamma.\rho))$. Luego $T = S_\Gamma^* - S_\Gamma$ es compacto en $L_q(\Gamma, \rho^{-1})$.*

Demostración. 1.– Suponga que Γ es una curva Lyapunov cerrada, entonces existe una función $\tau = \alpha(\zeta)$ que mapea la circunferencia unitaria Γ_0 uno a uno con Γ y tiene derivada α', la cual satisface la condición de Hölder y se anula fuera de Γ_0. Del teorema (3.6.2) sabemos que $S_\Gamma = B^{-1}S_0B + t_1$, donde T_1 es compacto, $S_0 = S_{\Gamma_0}$, y B es el operador acotado invertible dado por $(B\varphi)(\zeta) = \varphi(\alpha(\zeta))$. Se tiene que $B^* = |\beta'|B^{-1}$ con $\beta = \alpha'$ y que $(B^{-1})^* = |\alpha'|B$. En virtud del teorema (3.6.1) el conmutador $S_0|\alpha^{-1}| - |\alpha^{-1}|S_0$ es compacto y debido al corolario (3.9.2) se tiene que $S_0^* = S_0$.

Luego $S_\Gamma^* - S_\Gamma = |\beta'|B^{-1}S_0|\alpha'|B + T_1^* - B^{-1}S_0B - T_1 = |\beta'||\alpha'\circ\beta|B^{-1}S_0B - B^{-1}S_0B + T_2 = T_2$ donde $(\alpha'\circ\beta)(\tau) = \alpha'(\beta(\tau))$ y T_2 es un operador compacto.

2.– Sea Γ una curva Lyapunov abierta. Elegimos $\tilde{\Gamma}$ con $\gamma \subset \tilde{\Gamma}$ y denote por $\xi(t)$ con $t \in \Gamma$ la función característica de Γ. Entonces el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ puede ser identificado con $L_p(\tilde{\Gamma}, \rho)$ el cual consiste de todas las funciones de la forma $\xi\tilde{\varphi}$ con $\tilde{\varphi} \in L_p(\tilde{\Gamma}, \rho)$.

Este subespacio es invariante bajo el operador $A = \xi S_{\tilde{\Gamma}} \xi I$ y tenemos $A|_{L_p(\Gamma,\rho)} = S_\Gamma$. Por el paso 1, $T = S^*_{\tilde{\Gamma}} - S_{\tilde{\Gamma}}$ es compacto. Pero $A^* = \xi(S_{\tilde{\Gamma}} + T)\xi I$ y por lo tanto $S^*_\Gamma - S_\Gamma$ es también compacto.

3.− Finalmente, consideramos el caso general, donde Γ es un sistema Lyapunov de curvas cerradas o abiertas $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$. Denote por $\xi_j(t)$ $t \in \Gamma$ la función característica del conjunto Γ_j $(j = 1, ..., n)$ y sea R_j el operador definid en $L_p(\Gamma, \rho)$ como $R_j = \xi_j I$. Entonces $S_\Gamma = \sum_{j,k=1}^n R_j S_\Gamma R_k$, el operador $R_j = \xi_j I$ con $j \neq k$ tiene núcleo continuo, por lo tanto compacto. La restricción del operador $R_j S_\Gamma R_j$ al subespacio $L_p(\Gamma_j, \rho) = R_j(L_p(\Gamma, rho))$ coincide con S_Γ. Por lo que fue probado $(R_j S_\Gamma R_j)^* = R_j S_\Gamma R_j + T_j$ con un operador compacto T_j. Luego $S'_\Gamma - S_\Gamma$ es compacto. □

3.10. La integral Singular con núcleo de Hilbert

Una integral relacionada a la integral singular de Cauchy es la integral singular de Hilbert, dada por:

$$(H\varphi)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \varphi(\sigma) d\sigma \ \ con \ 0 \leq s \leq 2\pi \tag{3.4}$$

Esta integral es entendida en el sentido del valor principal de Cauchy. Puede verificarse que (3.4) existe para cada s y para cada $\varphi \in H^\mu[0, 2\pi]$ con $0 < \mu \leq 1$, además satisface $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. En este sentido

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \varphi(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} [\varphi(\sigma) - \varphi(s)] d\sigma$$

Sea Γ_0 la circunferencia unitaria con representación paramétrica $t(s) = e^{is}$ $(0 \leq s \leq 2\pi)$. Entonces la diferencia entre $\frac{d\tau}{\tau - t}$ y $\frac{1}{2} cot \frac{\sigma - s}{2}$ es

$$\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2} cot \frac{\sigma - s}{2} d\sigma = \frac{1}{2} \frac{d\tau}{\tau}$$

. Una manera de comprobar esto ultimo es expresar la cotangente en términos de e. Finalmente al elegir $\varphi(s) := \varphi[t(s)] = \varphi(t)$ llegamos a la siguiente relación:

$$(H\varphi)(s) = i(S_{\Gamma_0}\varphi)(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau \tag{3.5}$$

Combinamos esto último con los teoremas (3.4.1) y (3.8.1) y nos da:

Teorema 3.10.1. *El operador H esta acotado e los espacios $L_p(\Gamma_0, \rho)$ con $1 < p < \infty$ y $H^\mu(\Gamma_0)$ con $0 < \mu < 1$.*

Tomando en cuenta (3.4) y (3.5)

$$(H^2\varphi)(s) = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma$$

Además si $\varphi \in L_p(\Gamma_0)$ tiene expresión en serie de Fourier $\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k t^k$ con $|t| = 1$, entonces

$$(S_\Gamma\varphi)(t) = \sum_{0}^{\infty} c_k t^k - \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k$$

$$(H\varphi)(t) = i\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k - i\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k$$

3.11. Proyecciones generadas por la integral singular

Aquí Γ será un sistema a trozos de Lyapunov cerrado, entonces $S^2 = I$ y $P_\Gamma := \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$, $Q_\Gamma := \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$ definen en $L_p(\Gamma, \rho)$ proyecciones complementarias, es decir: $P_\Gamma - Q_\Gamma = S_\Gamma$, $P_\Gamma Q_\Gamma = Q_\Gamma P_\Gamma = 0$, y sabemos que $S_\Gamma^* = -H_\Gamma S_\Gamma H_\Gamma$ con $(H_\Gamma\varphi)(t) = \overline{h_\Gamma(t)\varphi(t)}$, luego: $P_\Gamma^* = H_\Gamma Q_\Gamma H_\Gamma$, $Q_\Gamma^* = H_\Gamma P_\Gamma H_\Gamma$.

Definimos $L_p^+(\Gamma, \rho) := ImP_\Gamma$, $\mathring{L}_p^-(\Gamma, \rho) := ImQ_\Gamma$.

Sea $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ y considere la integral tipo Cauchy $\Phi_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ con $z \in \mathfrak{C}\backslash\Gamma$. Dado que $\varphi \in L_1(\Gamma)$, $\Phi_\Gamma(z)$ es una función analítica en $D_\Gamma^\pm$, tenemos $\Phi_\varphi(\infty) = 0$ y los límites no tangenciales:

$$\Phi_{\varphi}^{+}(t) := \lim_{z\to t, z\in D_{\Gamma}^{+}} \Phi_{\varphi}(z),\ \ \Phi_{\varphi}^{-}(t) := \lim_{z\to t, z\in D_{\Gamma}^{-}} \Phi_{\varphi}(z)$$

existen en casi todas partes en Γ y son iguales a: $\Phi_{\varphi}^{+}(t) = (P_{\Gamma}\varphi)(t),\ \ \Phi_{\varphi}^{-}(t) = -(Q_{\Gamma})\varphi)(t)$ Además se tiene que una función $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$ esta en el subespacio $L_p^{+}(\Gamma,\rho)$ (resp. $\mathring{L}_p^{-}(\Gamma,\rho)$) si y solo si $S_{\Gamma}\varphi = \varphi$ (resp. $S_{\Gamma}\varphi = -\varphi$).

Al tomar: $R(\Gamma) \cup L_p^{+}(\Gamma,\rho) = R^{+}(\Gamma),\ \ R(\Gamma) \cup \mathring{L}_p^{-}(\Gamma,\rho) = R^{-}$ con $\mathring{R}^{-}(\Gamma)$ la colección de funciones en $R^{-}(\Gamma)$ tales que $\varphi(\infty) = 0$. De lo anterior podemos decir que $L_p^{+}(\Gamma,\rho)$ y $\mathring{L}_p^{-}(\Gamma,\rho)$ tienen a $R^{+}(\Gamma)$ y $R^{-}(\Gamma)$ como subespacios densos respectivamente.

Denotemos por $D_1^{+},...,D_m^{+}$ y $D_1^{-},...,D_k^{-}$ las (máximas) componentes conexas de los conjuntos D_{Γ}^{+} y D_{Γ}^{-} respectivamente. Luego $L_p^{+}(\Gamma,\rho)$ y $\mathring{L}_p^{-}(\Gamma,\rho)$ pueden caracterizarse como sigue:

Teorema 3.11.1. *Para una función $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\varphi \in L_p^{+}(\Gamma,\rho)$;

ii) $\exists' n\ \alpha_j^{-} \in D_j^{-}$ *con tales que:*

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^{-})} = 0 \tag{3.6}$$

$j = 1,...,k;\ \ n = 1,2,...$

iii) (3.6) *se tiene para* $\alpha_j^{-} \in D_j^{-}$ *con* $j = 1,...,k$.

Demostración. La función $\Phi_{\varphi}(z)$ es analítica en D_{Γ}^{-} y puede ser por lo tanto expresada en una serie de Taylor en una vecindad de cada $\alpha_j^{-} \in D_j^{-}$:

$$\Phi_{\varphi}(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha_j^{-})^{l}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^{-})^{l+1}}$$

i) $\Rightarrow$ *iii)*

Sea $\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$. Entonces $Q_\Gamma\varphi = 0$ y, consecuentemente, los limites no tangenciales ϕ_φ^- se anulan en casi todo punto en Γ. El conocido teorema de unicidad de Luzin-Privalov nos implica que $\Phi_\varphi(z) = 0$ en D_Γ^-. Entonces si $\alpha_j^- \in D_j^-$ con $j = 1, ..., k$ son puntos arbitrarios, obtenemos lo deseado.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* Inmediata.

ii) $\Rightarrow$ *i)* De $\Phi_\varphi(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha_j^-)^l}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\alpha_j^-)^{l+1}}$ se deduce que $\Phi_\varphi(z)$ se aula idénticamente en una vecindad de cada punto α_j^- y dado que $\phi_\varphi(z)$ es analítica, obtenemos $\Phi_\varphi(z) = 0$ en D_Γ^-. Luego $Q_\Gamma\varphi = 0$, esto es $\varphi = P_\Gamma\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$. $\square$

El siguiente teorema se prueba de forma análoga.

Teorema 3.11.2. *Para una función $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\varphi \in \mathring{L}_p^-(\Gamma,\rho)$;

ii) $\exists' n$ $\alpha_j^+ \in D_j^+$ *con tales que:*

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - \alpha_j^+)} = 0 \tag{3.7}$$

$j = 1, ..., m;\ n = 1, 2, ...$

iii) (3.7) *se tiene para* $\alpha_j^+ \in D_j^+$ *con* $j = 1, ..., m$.

Al expandir $\phi_\varphi(z)$ en serie de Taylor en una vecindad de infinito, similar a lo ya probado, obtenemos lo siguiente:

Teorema 3.11.3. *Sea Γ una curva cerrada de Lyapunov, entonces una función $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$ está en $L_p^+(\Gamma,\rho)$ si y solo si*

$$\int_\Gamma \varphi(t)t^n dt = 0 \tag{3.8}$$

con $n = 0, 1, 2, ...,$

A partir de ahora , denotamos por $L_p^-(\Gamma,\rho)$ el subespacio de todas las funciones de la forma $\varphi = \varphi_1 + c$, donde $\varphi_1 \in \mathring{L}_p^-(\Gamma,\rho)$ y c es una constante. Además, sea $L_\infty^\pm(\Gamma)$ el conjunto de todas las funciones analíticas y acotadas en $D_\Gamma^\pm$. Note que $L_\infty^\pm$ puede ser identificado con el subespacio de todas las funciones $\varphi \in L_\infty(\Gamma)$ las cuales coinciden en casi todo punto con las límites no tangenciales de una función $\varphi(z)$ analítica y acotada en $D_\Gamma^\pm$. De hecho por un teorema de Fatou cada función $\varphi \in L_\infty^\pm(\Gamma)$ posee un límite no tangencial $\text{lím}\, \varphi^\pm(t)$ en casi todo punto de Γ y la función cota pertenece a $L_\infty(\Gamma)$. Vice versa, debido al teorema de unicidad de Luzin-Privalov la función $\varphi \in L_\infty^\pm(\Gamma)$ esta determinanda de manera única por su función frontera $\varphi^\pm \in L_\infty(\Gamma)$.

Teorema 3.11.4. *Se tiene lo siguiente:*

$$L_\infty^+(\Gamma) \subset L_p^+(\Gamma,\rho), \quad L_\infty^-(\Gamma) \subset L_p^-(\Gamma,\rho).$$

Demostración. Sea $\varphi \in L_\infty^+(\Gamma)$, entonces $\varphi \in L_p(\Gamma,\rho)$. Considere una sucesión de sistemas de curvas de Lyapunov cerradas $\Gamma_n \subset D_n^+$ con $n = 1, 2, ...$ aproximando al sistema de curvas Γ cuando $n \to \infty$. Sea $\beta_n(t) : D_\Gamma^+ \to D_{\Gamma_n}^+$ mapeos conformes tal que $\beta_n(t) \to t$ con $t \in \Gamma$ cuando $n \to \infty$. Entonces, para cada $\alpha \in D_\Gamma^-$ y para $N \in \mathfrak{N}$, defina $f_n(t) = \varphi(B_n(t))(t-\alpha)^{-N}$. Dado que f_n es analítica en $\overline{D_\Gamma^+}$, tenemos que:

$$\int_\Gamma f_n(\tau)d\tau = 0 \tag{3.9}$$

Dado que $f_n(\tau)$ con $n = 1, 2, ...$ es una sucesión uniformemente acotada y converge a la función $\varphi(t)(t-\alpha)^{-N}$ en casi todo punto de Γ, por el teorema de Lebesgue podemos intercambiar el límite $n \to \infty$ con la integral (3.9). Luego, la función φ satisface (3.6) y aplicando el teorema (3.11.1) se concluye que $\varphi \in L_p^+(\Gamma,\rho)$. Si $\varphi \in L_\infty^-(\Gamma)$, entonces de forma análoga la función $\varphi_1 = \varphi - \varphi(\infty)$ satisface (3.7) y por lo tanto $\varphi_1 \in \mathring{L}_p^-(\Gamma,\rho)$ y $\varphi \in L_p^-(\Gamma,\rho)$ □

Teorema 3.11.5. *Si* $a_+ \in L_\infty^+(\Gamma)$ *y* $a_- \in L_\infty^-$ *entonces:* $P_\Gamma a_+ P_\Gamma = a_+ P_\Gamma$, $Q_\Gamma a_- Q_\Gamma = a_- Q_\Gamma$.

Demostración. Sea $r \in R(\Gamma)$, entonces $a_+ P_\Gamma r = a_+ r_+ \in L_\infty^+(\Gamma)$, y del teorema (3.11.4) se deduce que $P_\Gamma a_+ P_\Gamma r = a_+ P_\Gamma r$. Esto prueba la primer igualdad, de forma análoga: $a_- Q_\Gamma r = a_- r_- \in L_\infty^-(\Gamma)$. Dado que $a_-(\infty) r_-(\infty) = 0$, tenemos $a_- Q_\Gamma r \in \mathring{L}_\infty^-(\Gamma)$ y por lo tanto $Q_\Gamma a_- Q_\Gamma r = a_- Q_\Gamma r$. $\square$

Denote por $C^\pm(\Gamma)$ el conjunto de todos las funciones $\varphi \in C(\Gamma)$ que admiten una extensión analítica en $D_\Gamma^\pm$ y continua en $\overline{D}_\Gamma^\pm$. Los teoremas (3.11.1) y (3.11.2) implican inmediatamente que $C^+(\Gamma) \subset L_p^+(\Gamma, \rho)$, $C^-(\Gamma) \subset L_p^-(\Gamma, \rho)$.

Capítulo 4

Ecuaciones Integrales Singulares

4.1. Operadores Singulares Abstractos

Definición 4.1.1. Sea X un espacio de Banach, $P \in \mathscr{L}(X)$ una proyección y $Q = I - P$ la proyección complementaria. Un operador de la forma $AP + BQ$ o $PA + QB$ con $A, B \in \mathscr{L}(X)$ se llama operador apareado.

Los operadores apareados $AP + BQ$ y $PB + QA$ son llamados traspuestos uno al otro, mientras que $AP + BQ$ y $PA + QB$ son llamados duales.

Considere el caso especial en el cual uno de los coeficientes es el operador identidad, por ejemplo $B = I$. Entonces:

$$AP + Q = (PAP + Q)(I + QAP) \tag{4.1}$$

Dado que el operador $(QAP)^2 = 0$, el operador $I + QAP$ es invertible y su inversa es:

$$(I + QAP)^{-1} = I - QAP \tag{4.2}$$

No es difícil notar que el operador $PAP+Q$ es un $\Phi_{\pm}-$operador o un operador invertible por un lado en X si y solo su PAP restringido al subespacio ImP tiene la propiedad correspondiente. Claramente, los argumentos anteriores son también validos con los papeles de P y Q intercambiados:

$$PA+Q=(I+PAQ)(PAP+Q) \tag{4.3}$$

$$(I+PAQ)^{-1}=I-PAQ \tag{4.4}$$

Si A y B son operadores invertibles. Ponga $AP+BQ=BB^{-1}(AP+BQ)=B(B^{-1}AP+Q)$, al aplicar la ecuación (4.1) nos proporciona:

$$AP+BQ=B(PB^{-1}AP+Q)(I+QB^{-1}AP) \tag{4.5}$$

Ponga $AP+BQ=AP+AA^{-1}BQ=A(P+A^{-1}BQ)$, aplicamos (4.1) (se aplica asi: $A^{-1}BQ+P=(QA^{-1}BQ+P)(I+PA^{-1}BQ)$) nos proporciona:

$$AP+BQ=A(P+QA^{-1}BQ)(I+PA^{-1}BQ) \tag{4.6}$$

Esto junto con los argumentos de arriba implican el siguiente resultado:

Teorema 4.1.2. *Si $A\in\mathscr{L}(X)$ y $B\in\mathscr{L}(X)$ son operadores invertibles entonces:*

$$dimKer(AP+BQ)=dimKer(PB^{-1}AP|ImP)=dimKer(QA^{-1}BQ|ImQ) \tag{4.7}$$

$$dimCoker(AP+BQ)=dimCoker(PB^{-1}AP|ImP)=dimCoker(QA^{-1}BQ|ImQ) \tag{4.8}$$

Relaciones análogas se pueden obtener para los operadores apareados $PA+QB$. Luego uno tiene las siguientes representaciones: $PA+QB=(I+PAB^{-1}Q)(PAB^{-1}P+Q)B$ y $PA+QB=(I+QBA^{-1}P)(P+QBA^{-1}Q)A$, de donde se obtiene lo siguiente:

Teorema 4.1.3. *Sea $A\in\mathscr{L}(X)$ y $B\in\mathscr{L}(X)$ operadores invertibles y suponga $AB=$*

BA, entonces $C_1(AP+BQ)C_2 = PA+QB$ con $C_1 = (I+PAB^{-1}Q)B^{-1}$, $C_2 = (I - QAB^{-1}P)B$ operadores invertibles.

Corolario 4.1.4. *Sea $A \in \mathscr{L}(X)$ y $B \in \mathscr{L}(X)$ operadores invertibles y suponga que $AB = BA$. Entonces para que el operador $AP+BQ$ sea un $\Phi_+(\Phi_-)$-operador o admita una regularización izquierda (derecha) es necesario y suficiente que el operador $PA+QB$ tenga la propiedad correspondiente. Además uno tiene,*

$$dimKer(AP+BQ) = dimKer(PA+QB),\ dimCoker(AP+BQ) = dimCoker(PA+QB).$$

Teorema 4.1.5. *Sea $A \in \mathscr{L}(X)$ y $B \in \mathscr{L}(X)$ con $AB = BA$.*
a) Si $KerA \cap KerB = \{0\}$, entonces $dimKer(AP+BQ) \geq dimKer(PA+QB)$
b) Si hay dos operadores A' y B' en $\mathscr{L}(X)$ tal que $AA'+BB' = I$ y si A' y B' conmutan con A y B, entonces: $dimKer(AP+BQ) = dimKer(PA+QB)$

Demostración. $a)$ Sea $(PA+QB)\varphi = 0$ con $\varphi \in X$, entonces $PA\varphi = -QB\varphi$ y dado que $PQ = QP = 0$, vemos que $PA\varphi = QB\varphi = 0$ (aplicando $PPA\varphi = PQB\varphi = 0$) Ponga $\psi = B\varphi - A\varphi$, luego $P\psi = B\varphi$ y $Q\psi = -A\varphi$. Por lo tanto $(AP+BQ)\psi = 0$

Si $\psi = 0$, entonces $\varphi \in Ker \cap KerB$ y $\varphi = 0$, esto prueba $a)$.
$b)$ Si $AA'+BB' = I$, entonces $KerA \cap KerB = \{0\}$ y por lo tanto se tiene por $a)$ que si $x \in KerA$, $(AA'+BB')x = x$ entonces $BB'x = x$

Veamos la desigualdad contraria. Sea $AP\varphi + BQ\varphi = 0$, ponga $\psi = B'P\varphi - A'Q\varphi$. Es sencillo ver que $A\psi = -Q\varphi$, $B\varphi = P\varphi$ y por lo tanto $(PA+QB)\psi = 0$. Pero si $\psi = 0$, $\rightarrow$ $\varphi = 0$ y entonces $dimKer(AP+BQ) \geq dimKer(PA+QB)$. □

En lo sucesivo asumiremos que los coeficientes de los operadores apareados pertenecen a alguna subálgebra $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}(X)$ sujeta a la siguiente condición: (A) El conmutador $[P,A] = PA - AP$ es compacto en X para cada operador $A \in \mathscr{M}$. Note que si la condición

(A) se satisface, los operadores $[Q, A], PAQ, QAP$ son compactos también. Esto se sigue de las identidades $[Q, A] = [A, P]$, $PAQ = P[A, Q] = [P, A]Q$

Definición 4.1.6. Un operador de la forma $C := AP + BQ + T$, donde $A, B \in \mathscr{M}$ y T es un operador compacto en X, es llamado un operador Singular Abstracto

Los operadores A y B son a veces referidos como los coeficientes del operador. $\tilde{\mathscr{M}}$ denotará la colección de los operadores singulares en la forma del operador C. $\tilde{\mathscr{M}}$ es un álgebra, al ser lineal nos resta probar que el producto es cerrado.

Sean $C_1 = A_1P + B_1Q + T_1$ y $C_2 = A_2P + B_2Q + T_2$ dos operadores de $\tilde{\mathscr{M}}$. Luego $C_1C_2 = A_1A_2P + B_1B_2Q + T$ con $T = A_1[P, A_2]P + B_1[Q, B_2]Q + A_1PB_2Q + B_1QA_2P + C_1T_2 + T_1C_2 - T_1T_2$ En vista de la propiedad (A) el operador T es compacto, por lo tanto C_1C_2 está en $\tilde{\mathscr{M}}$.

El operador singular abstracto se dice que es un operador de tipo normal si sus coeficientes son invertibles. Es inmediato que el producto de operadores de tipo normal es de nuevo de tipo normal.

Teorema 4.1.7. *Sea el álgebra $\mathscr{M}$ que satisfaga la condición (A). Entonces si el operador singular C es de tipo normal $\Rightarrow$ el operador $R = A^{-1}P + B^{-1}Q$ es un regularizador por ambos lados para C.*

Demostración. Efectuando el producto de C y R, obtenemos: $RC = P + Q + T' = I + T'$, con T' algún operador compacto. Análogamente al intercambiar papeles de A y A' (resp. B y B') tenemos $CR = I + T''$ con algún operador T''. $\square$

Corolario 4.1.8. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, C es un ϕ-operador*

Demostración. Inmediata. $\square$

Corolario 4.1.9. *Sean $A_1, B_1 \in \mathscr{L}(X)$ y $A_2B_2 \in \mathscr{M}$, entonces $(A_1P + B_1Q)(A_2P + B_2Q) = A_1A_2P + B_1b_2Q + T$ donde T es un operador compacto.*

Demostración. Inmediata. □

4.2. Operadores Integrales Singulares con Coeficientes Racionales

A lo largo de esta sección y la siguiente Γ denotará siempre un sistema a trozos de Lyapunov cerrado y ρ será la función peso:

$$\rho(t) = \prod_{j=1}^{m} |t - t_j|^{\beta_j}$$

donde $t_j \in \Gamma$, $\frac{-1}{p} < \beta_j < 1 - \frac{-1}{p}$ con $j = 1, ..., m$ y $1 < p < \infty$.
$i)$ Ejemplos importantes de operadores apareados en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ son los operadores de $A = cI + dS_\Gamma$ y $B = cI + S_\Gamma d$, donde $c, d \in L_\infty(\Gamma)$. Los operadores A y B son llamados operadores singulares integrales en el sistema de curvas Γ. Estos se pueden escribir de la forma:

$$A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma, \; B = P_\Gamma a + Q_\Gamma b$$

donde $a = c + d$, $b = c - d$, $P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$, $Q_\Gamma = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$ con: $||A||, ||B|| \geq ||a||_{L_\infty(\Gamma)}||P_\Gamma|| + ||b||_{L_\infty(\Gamma)}||Q_\Gamma||$.

Para los operadores adjuntos A^* y B^*, actuando en $L_q(\Gamma, \rho^{-1})$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tenemos $A^* = P_\Gamma^* \overline{a} + Q_\Gamma^* \overline{b}$, $B^* = \overline{a} P_\Gamma^* + \overline{b} Q_\Gamma^*$. y en consecuencia, tomando en cuenta las relaciones (Capítulo 2, sección 2.11):

$$A^* = H_\Gamma (P_\Gamma b + Q_\Gamma a) H_\Gamma \tag{4.9}$$

$$B^* = H_\Gamma (b P_\Gamma + a Q_\Gamma) H_\Gamma \tag{4.10}$$

Las siguientes identidades nos serán de fundamental importancia:

$$(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)(f_+ P_\Gamma + f_- Q_\Gamma) = af_+ P_\Gamma + bf_- Q_\Gamma \tag{4.11}$$

$$(P_\Gamma f_- + Q_\Gamma f_+)(P_\Gamma a + Q_\Gamma b) = P_\Gamma a f_- + Q_\Gamma b f_+ \tag{4.12}$$

Aquí $a, b \in L_\infty(\Gamma)$ y $f_\pm \in L_\Gamma^\pm(\Gamma)$. Estas identidades son consecuencia inmediata de las relaciones vistas en el Capítulo 2 (Teorema (3.11.5)).

Estudiaremos ahora los operadores A y B para el caso en que $a, b \in R(\Gamma)$.

ii) Considere el operador:

$$C_{n;\lambda} = (t-\lambda)^n P_\Gamma + Q_\Gamma$$

donde $n = \pm1, \pm2, ...$ y $\lambda \in \Gamma$. De (4.11) es sencillo ver que: $C_{n;\lambda} = C_{1;\lambda}^n$ y $C_{-n;\lambda} C_{n;\lambda} = I$. Si $\lambda \in D_\Gamma^-$, los factores en el lado izquierdo conmutan. Sin embargo si $\lambda \in D_\Gamma^+$, los factores a la izquierda no conmutan, pues el operador $C_{1;\lambda}$ no es invertible por la derecha. Luego, tenemos:

$$ImC_{1;\lambda} = \{f \in L_p(\Gamma, \rho) |\ (P_\Gamma f)(\lambda) = 0\}$$

y por lo tanto $ImC_{1;\lambda} \neq L_p(\Gamma, \rho)$.

Teorema 4.2.1. *El operador $C_{n;\lambda}$ con $n = 1, 2, ...$ es invertible si $\lambda \in D_\Gamma^-$ y es invertible solo por la izquierda si $\lambda \in D_\Gamma^+$. La inversa (inversa izquierda) es $C_{-n;\lambda}$.*

Para $\lambda \in D_\Gamma^+$ tenemos

$$KerC_{-n;\lambda} = \mathscr{L}\{(t-\lambda)^{n-1} - \frac{1}{t-\lambda}, (t-\lambda)^{n-2} - \frac{1}{(t-\lambda)^2}, ..., 1 - \frac{1}{(t-\lambda)^n} \tag{4.13}$$

$$dimKerC_{-n;\lambda} = n,\ dimCokerC_{n;\lambda} = n \tag{4.14}$$

Si $\lambda \in \Gamma$, entonces $C_{n;\lambda}$ no son Φ_+ ni Φ_-- operadores y en particular, no son invertible por un lado.

Demostración. La primera parte del teorema se sigue de (4.12). Veamos (4.13). Suponga $C_{-n;\lambda}\varphi = 0$ con $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$, esto es

$$P_\Gamma \varphi + (t-\lambda)^n Q_\Gamma \varphi = 0 \tag{4.15}$$

Del teorema (3.11.2), se puede ver que existe P_{n-1} polinomio de grado a lo mas $n-1$ tal que $(t-\lambda)^n Q_\Gamma \varphi + P_{n-1} \in \mathring{L}_p^-(\Gamma, \rho)$. Dejamos actuar P_Γ en ambos lados de (4.15) y vemos que:

$$P_\Gamma \varphi = P_{n-1}$$

$$Q_\Gamma \varphi = -\frac{P_{n-1}}{(t-\lambda)^n}, \; \varphi(t) = P_{n-1}(t)\left[1 - \frac{1}{(t-\lambda)^n}\right]$$

Tenemos lo deseado al escribir el polinomio como $p_{n-1}(t) = a_0 + a_1(t-\lambda) + ... + a_{n-1}(t-\lambda)^{n-1}$. Para terminar sea $\lambda_0 \in \Gamma$ y suponga $C_{n;\lambda_0}$ es un $\Phi_\pm$-operador. Dado que en cada vecindad de λ_0 hay puntos de $\lambda \in D_\Gamma^-$ y $\lambda \in D_\Gamma^+$ concluimos que en cada vecindad el operador $C_{n:\lambda_0}$ contiene ambos operadores invertibles $C_{n;\lambda}$ (con $\lambda \in D_\Gamma^-$) e invertible por un lado pero no por ambos (con $\lambda \in D_\Gamma^+$). Esto es una contradicción del teorema (2.3.9) del Capítulo 1. □

El siguiente teorema es análogo.

Teorema 4.2.2. *El operador $D_{n;\lambda} = P_\Gamma + (1-\lambda t^{-1})^n Q_\Gamma$ con $n = 1, 2, ...$ es invertible si $\lambda \in D_\Gamma^+$ e invertible por la izquierda si $\lambda \in D_\Gamma^-$. La inversa (inversa izquierda) de $D_{n;\lambda}$ es*

$$D_{-n;\lambda} = P_\Gamma + (1-\lambda t^{-1})^n Q_\Gamma$$

Para $n = 1, 2, ...,$ y $\lambda \in D_\Gamma^-$ tenemos:

$$kerD_{-n;\lambda} = \mathscr{L}\{gt^{-1}, \; gt^{-2}, ..., \; gt^{-n}\} \tag{4.16}$$

con $g(t) = \frac{t^n}{(t-\lambda)^n} - 1$ y $dimKerD_{-n;\lambda} = n$, $dimCokerD_{n;\lambda} = n$. Si $\lambda \in \Gamma$, entonces $D_{n;\lambda}$ ($n = \pm 1, \pm 2, ...$) no son ni Φ_+ ni Φ_- y en particular no son invertibles lateralmente.

Note que $D_{n:\lambda} = D_{1;\lambda}^n$ con $n = 1, 2...,$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, el operador $P_\Gamma(t-\lambda)^n + Q_\lambda$ y $P_\Gamma + Q_\Gamma(1-\lambda t^{-1})$, los cuales son operadores duales de $C_{n;\lambda}$ y $D_{n;\lambda}$, respectivamente, pueden ser estudiados análogamente.

Necesitaremos una representación especial para las funciones racionales. Dada $r \in R(\Gamma)$, esto es r racional sin polos en Γ. Además supondremos que r no tiene ceros en Γ.

Sea $r = \frac{q_1}{q_2}$, donde q_1 y q_2 son polinomios. Denote por t_j^+ con $j = 1, ..., k^+$ y t_j^- con $j = 1, ..., k^-$ los ceros del polinomio $q_1 \in D_\Gamma^+$ y D_Γ^-, respectivamente, cada cero cuenta según su multiplicidad.

Análogamente, sea τ_j^+ con $j = 1, ..., l^+$ y τ_j^- con $j = 1, ..., l^-$ los ceros del polinomio q_2 en D_Γ^+ y D_Γ^-, respectivamente. Luego r puede representarse en la forma:

$$r = r_- t^\kappa r_+ \tag{4.17}$$

donde

$$r_-(t) = \gamma \frac{\prod_{j=1}^{k^+}(1 - t^{-1}t_j^+)}{\prod_{j=1}^{l^+}(1 - t^{-1}\tau_j^+)}$$

$$r_+(t) = \frac{\prod_{j=1}^{k^-}(t - t_j^-)}{\prod_{j=1}^{l^-}(t - \tau_j^-)}$$

$\kappa = k^+ - l^+$ y $\gamma \in \mathbb{C}$. El entero κ es llamado el índice de la función r y es denotado por $Indr$. La representación (4.17) es llamada factorización de la función r con respecto al sistema de curvas de Lyapunov Γ. Claramente $r_\pm$ y $1/r_\pm$ son analíticas en $D_\Gamma^\pm$.

Teorema 4.2.3. *Sean $a, b \in R(\Gamma)$. Entonces para que el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ (resp. $B = P_\Gamma a + Q_\Gamma b$) sea un Φ_+ o Φ_- operador en $L_p(\Gamma, \rho)$ es necesario y suficiente que:*

$$a(t) \neq 0, \ b(t) \neq 0 \ con \ t \in \Gamma \tag{4.18}$$

Si esta ultima condición se tiene, entonces A (resp. B) es invertible, solo por la izquierda, o solo por la derecha , si el entero $\kappa = ind(a/b)$ es cero, positivo, o negativo respectivamente.

Si $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ y si $c = c_- t^\kappa c_+$ es la factorización de la función $c = a/b$ con respecto *a* Γ*, entonces los inversos correspondientes o inversos laterales son:*

$$A^{-1} = (c_+^{-1}P_\Gamma + c_-Q_\Gamma)(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)c_-^{-1}b^{-1} \tag{4.19}$$

$$B^{-1} = c_+^{-1}b^{-1}(P_\Gamma t^{-\kappa} + Q_\Gamma)(P_\Gamma c_-^{-1} + Q_\Gamma c_+) \tag{4.20}$$

Demostración. 1.− Suponga que (4.18) se satisface. Usamos la factorización $c = c_- t^\kappa c_+$ y la identidad (4.11) tenemos que:

$$A = bc_-(t^\kappa c_+ P_\Gamma + c_-^{-1}Q_\Gamma) = bc_-(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)(c_+P_\Gamma + c_-^{-1}Q_\Gamma) \tag{4.21}$$

Los operadores bc_-I y $c_+P_\Gamma + c_-^{-1}Q_\Gamma$ son invertibles y

$$(bc_-I)^{-1} = b^{-1}c_-^{-1}I, \ (c_+P_\Gamma + c_-^{-1}Q_\Gamma)^{-1} = c_+^{-1}P_\Gamma + c_-Q_\Gamma$$

Por el teorema (4.2.1), el operador $t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma$ es solo invertible por la izquierda si $\kappa > 0$ y si $\kappa < 0$ es invertibles por la derecha. La inversa correspondiente es $t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma$. Esto y (4.21) implican (4.19).

Aplicando la identidad (4.12) tenemos

$$B = (P_\Gamma c_- + Q_\Gamma c_+^-)(P_\Gamma t^\kappa + Q_\Gamma)c_+b$$

y esto nos da (4.20).

2.− Resta probar que la condición (4.18) es una condición necesaria para que A y B sean Φ_+ o Φ_-.

Sea A un $\Phi_\pm$-operador, considere el caso $b = 1$, y suponga que $a(t_0) = 0$ para algún punto $t_0 \in \Gamma$. Luego, $a(t) = (t - t_0)u(t)$ y $a(t) = (t^- - t_0^{-1})v(t)$ con $u, v \in R(\Gamma)$. Usando las relaciones vistas en el capítulo 2 (teorema (3.11.5)), nos da las siguientes representaciones para A:

$$A = (uP_\Gamma + Q_\Gamma)((t - t_0)P_\Gamma + P_\Gamma) \tag{4.22}$$

$$A = ((t^{-1} - t_0^{-1})P_\Gamma + Q_\Gamma)(P_\Gamma vP_\Gamma + (t^{-1} - t_0^{-1})Q_\Gamma vP_\Gamma + Q_\Gamma) \tag{4.23}$$

Si A es un Φ_+-operador , entonces (4.22) implica que $(t - t_0)P_\Gamma + Q_\Gamma$ es también un Φ_+-operador. Por otro lado, si A es un Φ_--operador, entonces (4.23) muestra que $(t^{-1} - t_0^{-1})P_\Gamma + Q_\Gamma$ es Φ_-- operador también. Esto sin embargo contradice los teoremas (4.2.1) y (4.2.2).

Análogamente se puede probar que $P_\Gamma + bQ_\Gamma$ es un $\Phi_\pm$-operador solo si $b(t) \neq 0$, con $t \in \Gamma$.

Ahora considere el caso general: $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$, elegimos $f, g \in R(\Gamma)$ tales que $f(t)g(t) \neq 0$, con $t \in \Gamma$, $fa \in R^+(\Gamma)$ y $gb \in R^-(\Gamma)$. Entonces

$$A = f^{-1}(P_\Gamma + fbQ_\Gamma)(faP_\Gamma + Q_\Gamma)$$

y

$$A = g^{-1}(gaP_\Gamma + Q_\Gamma)(P_\Gamma + gbQ_\Gamma)$$

Si A es un Φ_+ o Φ_- operador, entonces $faP_\Gamma + Q_\Gamma$ y $gaP_\Gamma + Q_\Gamma$ son Φ_--operadores. Como fue probado antes, esto implica (4.18).

Finalmente, suponga B es un $\Phi_\pm$-operador, por el teorema (3.6.1), el operador $T = A - B$ es compacto en $L_p(\Gamma, \rho)$ y luego, A también es un $\Phi_\pm$- operador, y esto nos da lo deseado. $\square$

Teorema 4.2.4. *Sean $a, b \in R(\Gamma)$ que satisfacen (4.18) y suponga que $c = c_- t^\kappa c_+$ es la factorización de la función $c = a/b$. Entonces si $\kappa = Ind(c) < 0$,*

$$Ker(aP_\Gamma + bQ_\Gamma) = \mathscr{L}\{g, gt, ..., gt^{|\kappa|-1}\} \tag{4.24}$$

donde $g = c_+^- - c_- t^\kappa$. *En caso de que* $\kappa > 0$*:*

$$Coker(aP_\Gamma + bA_\Gamma) = \mathscr{L}(bc_-, bc_-t, ..., bc_-t^{\kappa-1}) \tag{4.25}$$

y la ecuación $aP_\Gamma\varphi + bQ_\Gamma\varphi = f$ *tiene solución si y solo si*

$$\int_\Gamma f(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-j}dt = 0 \tag{4.26}$$

con $j = 1, ..., \kappa$.

Demostración. Sea $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$. Primero suponga que $\kappa < 0$. De (4.21) deducimos que

$$KerA = (c_+^{-1}P_\Gamma + c_-Q_\Gamma)Ker(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)$$

y del teorema (4.2.1) tenemos que:

$$KerA = \mathscr{L}\{g_1, g_2, ..., g_{|\kappa|}\}$$

con $g_j = (c_+^{-1}P_\Gamma + c_-Q_\Gamma)(t^{|\kappa|-j} - t^{-j})$ con $j = 1, ..., |\kappa|$. Pero, $g_j = (c_+^{-1}t^{|\kappa|-j} - c_-t^{-j})$ y esto prueba (4.24).

Ahora sea $\kappa > 0$. Entonces (4.21) implica que $ImA = bc_-Im(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)$ y esto nos da (4.25), dado que $Im(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)$ consiste de todas las funciones $\varphi \in L_p(\Gamma, \rho)$ para las cuales $P_\Gamma\varphi$ tiene un cero de orden a lo mas κ en el punto $t = 0$. Además, A es un inverso lateral izquierdo y Φ-operador, entonces $A\varphi = f$ tiene solución si y solo si

$$\int_\Gamma f(t)\overline{y_j(t)}|dt| = 0 \tag{4.27}$$

con $j = 1, ..., m$ Aquí $y_1, ..., y_m$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación adjunta homogénea $A^*y = 0$ en $L_q(\Gamma, \rho^{-1})$.

Sean $z_j = H_\Gamma(c_-^{-1} b^{-1} t^{-j})$ con $j = 1, ..., \kappa$ tomando en cuenta (4.9) tenemos que:

$$H_\Gamma A^* z_j = (P_\Gamma b + Q_\Gamma a) c_-^{-1} b^{-1} t^{-j} = P_\Gamma c_-^{-1} t^{-j} + Q_\Gamma c_+ t^{\kappa - j} = 0$$

y entonces $z_j \in KerA^*$. Pero las funciones z_j son linealmente independientes, y dado que $dimKerA^* = dimCokerA = \kappa$ (por (4.25)), concluimos que $m = \kappa$ y $z_j = y_j$ $\forall j$. Mas aun $\overline{y_j(t)}|dt| = h_\Gamma(t) c_-^{-1}(t) b^{-1}(t) t^{-j} |dt| = c_-^{-1}(t) b^{-1}(t) t^{-j} dt$, y consecuentemente (4.26) y (4.27) coinciden. Esto concluye la demostración. □

El teorema siguiente se prueba de forma análoga.

Teorema 4.2.5. *Dadas las condiciones del teorema anterior si $\kappa < 0$, entonces*

$$Ker(P_\Gamma a + Q_\Gamma b) = \mathscr{L}\{b^{-1} c_+^{-1}, b^{-1} c_+^{-1} t, ..., b^{-1} c_+^{-1} t^{|\kappa| - 1}\}.$$

Si $\kappa > 0$, entonces

$$Coker(P_\Gamma a + Q_\Gamma b) = \mathscr{L}\{P_\Gamma c_-, P_\Gamma(c_- t), ..., P_\Gamma(c_- t^{\kappa - 1})$$

y la ecuación $P_\Gamma a\varphi + Q_\Gamma b\varpi = f$ tiene solución si y solo si

$$\int_\Gamma f(t)(c_-^{-1}(t) - c_+(t)t)t^{-j} dt = 0$$

con $j = 1, ..., \kappa$.

4.3. Operadores Integrales Singulares con Coeficientes Continuos

Nuestra primera preocupación es definir el índice de una función continua $a \in C(\Gamma)$.

Definición 4.3.1. Suponga $a(t) \neq 0$ para $t \in \Gamma$. Si Γ es una curva cerrada de Jordán, el índice de la función a estará definido como el entero:

$$Ind(a) = \frac{1}{2\pi}[arg(a(t))]_\Gamma$$

Aquí $[.]_\Gamma$ denota el incremento de la expresión en los corchetes como resultado de recorrer Γ en la dirección positiva (anti- horaria). Si Γ consiste de n curvas cerradas Γ_j, el índice estará dado por:

$$Ind(a) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}[arg(a(t))]_{\Gamma_j}$$

.

Se tienen las siguientes propiedades para $Ind(a)$. 1.– $Ind(a) = \frac{1}{2\pi}[lna(t)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma dln(a(t))$ 2.– Si $a_1.a_2 \in C(\Gamma)$ y $a_1(t)a_2(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$, entonces $Ind(a_1a_2) = Ind(a_1) + Ind(a_2)$. 3.– Si $a, x \in C(\Gamma)$ y $max_{t\in\Gamma}|x(t)/a(t)| < 1$, entonces $Ind(a + x) = Ind(a)$, en otras palabras el mapeo $G : C(\Gamma) \to \mathbb{Z}$, $G(a) = Ind(a)$ es continuo.

Finalmente el índice definido aquí coincide con el definido anteriormente para las funciones racionales.

En lo sucesivo Γ y ρ denotaran lo mismo que en la sección anterior.

Teorema 4.3.2. *Sean $a, b \in C(\Gamma)$. Entonces para que el operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ (resp. $A = P_\Gamma a + Q_\Gamma b$) sea un Φ_+ o Φ_-- operador en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ es necesario y suficiente que $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ con $t \in \Gamma$.*

Si esto último se cumple, entonces A es invertible, solo por la izquierda o solo por la derecha si el entero $\kappa = Ind(a/b)$ es cero, positivo o negativo, respectivamente. Además, $dimKerA = max(-\kappa, 0)$, $dimCokerA = max(\kappa, 0)$.

Demostración. Primero considere $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$. Suponga que $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ se cumple. Elegimos $r \in R(\Gamma)$ la cual aproxima a $c = a/b$ lo suficiente, nombremos

$max_{t\in\Gamma}|dt| < \frac{1}{||P_\Gamma||}$ donde $d = (c/r) - 1$. Entonces $c = r(1+d)$ y dado que $||P_\Gamma|| \geq 1$, de las propiedades 1 y 2 del índice tenemos que $\kappa = Ind(c) = Ind(r)$ Sea $r = r_- t^\kappa r_+$ la factorización de la función racional r.

Suponga ahora que $\kappa \geq 0$, entonces $A = br_-(I + dP_\Gamma)(r_+P_\Gamma + r_-^{-1}Q_\Gamma)(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)$. Los primeros tres factores a la derecha son operadores invertibles (note que $||dP_\Gamma|| < 1$). El operador $t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma$ es invertible si $\kappa = 0$ y solo por la izquierda si $\kappa > 0$ (teorema (4.2.1)). Lo mismo es cierto para A.

Sea $\kappa < 0$. Entonces el operador $B = at^{-\kappa}P_\Gamma + bQ_\Gamma$ es invertible, dado que $Indct^{-\kappa} = 0$. Pero $B = A(t^{-\kappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)$, luego $A^{-1} = (t^{-\kappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)B^{-1}$ es un inverso derecho de A. Además, combinando los argumentos anteriores con el teorema (4.2.1) tenemos lo deseado.

Resta probar la necesidad de la condición $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$. Suponga que A es un $\Phi_\pm$-operador, pero que a o b tenga al menos un cero en Γ. Eliga funciones $r_1, r_2 \in R(\Gamma)$ las cuales aproximen lo suficiente a las funciones a y b en la norma uniforme. Las funciones r_1 y r_2 se pueden escoger de manera que al menos una tenga un cero en Γ.

Como $||r_1P_\Gamma + r_2Q_\Gamma - A||$ es suficientemente pequeño, $r_1P_\Gamma + r_2Q_\Gamma$ es también un $\Phi_\pm$-operador. Esto sin embargo contradice el teorema (4.2.3).

Finalmente, considere $A' = P_\Gamma a + Q_\Gamma b$. Dado que $A - A'$ (con $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$) es compacto, por el teorema (3.6.1) los operadores A y A' son ambos $\Phi_\pm$- operadores o no lo son, $IndA = IndA'$.

Esto nos da la necesidad de $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ para A'. Por otro lado si $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, del teorema (4.1.3) muestra que $dimKerA = dimKerA'$ y en consecuencia $dimCokerA = dimCokerA'$. Esto implica todas las afirmaciones del teorema para el operador A'. □

Tomando $a = b$ en el teorema (4.3.2), obtenemos:

Corolario 4.3.3. *El operador de multiplicación por una función continua $a \in C(\Gamma)$ dado* *por:*

$$(a\varphi)(t) = a(t)\varphi(t)$$

con $t \in \Gamma$ *es invertible en el espacio* $L_p(\Gamma, \rho)$ *si y solo si* $a(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$.

Corolario 4.3.4. *La norma del operador de multiplicación en* $L_p(\Gamma, \rho)$ *es igual a*

$$||a|| = \max_{t \in \Gamma} |a(t)|$$

Considere ahora operadores de la forma

$$A := aP + bQ + T \tag{4.28}$$

Aquí $a, b \in C(\Gamma)$ y T es un operador compacto en $L_p(\Gamma, \rho)$. Un operador de la forma (4.28) es llamado operador integral singular en el sistema de curvas Γ. Note que $\mathscr{M} = C(\Gamma)$ satisface la condición (A) de la sección 3.2.

Definición 4.3.5. Diremos que el operador (4.28) es de tipo normal si $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$

Sabemos además que la colección de los operadores de la forma (4.28) forma un álgebra. La función

$$A(t, \Theta) := a(t)\frac{1+\Theta}{2} + b(t)\frac{1-\Theta}{2} \tag{4.29}$$

con $t \in \Gamma$ y $\Theta = \pm 1$, dos variables independientes, será referida como el símbolo del operador A.

Este símbolo produce un homomofismo del álgebra de todos los operadores de la forma (4.28) en el álgebra de todas las funciones de la forma (4.29).

Las condición $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$ se cumple, si y solo si, el símbolo $A(t, \Theta) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$ y $\Theta \in \{-1, 1\}$.

Finalmente, note que el operador integral singular (4.28) puede escribirse como $A = cI + dS + T$, donde $c = \frac{(a+b)}{2}$, $d = \frac{(a-b)}{2}$ y el símbolo como $A(t,\Theta) = c(t) + \Theta d(t)$.

Al considerar los teoremas (4.1.7) y (4.3.2) con el teorema (2.3.8) llegamos al siguiente resultado:

Teorema 4.3.6. *Un operador de la forma $A := aP + bQ + T$ es un Φ_+ o Φ_--operador en $L_p(\Gamma,\rho)$, si y solo si, $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$.*

Demostración. Si esta ultima condición se tiene, entonces A es un Φ-operador en $L_p(\Gamma,\rho)$, esto es $Ind(A) = Ind(b/a)$, y el operador $R = a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma$ es un regularizador por ambos lados de A.

□

Además:

Teorema 4.3.7. *Sea A un operador de la forma (4.28) en $L_p(\Gamma,\rho)$, entonces*

$$\max_{t\in\Gamma,\Theta=\pm 1} |A(t,\Theta)| \leq ||A||$$

Demostración. Probaremos que $|a(t)| \leq ||A||$ $\forall t \in \Gamma$. Suponga lo contrario, es decir, existe $t_0 \in \Gamma$ tal que $|a(t_0)| > ||A||$. Ponga $\lambda = \frac{1}{a(t_0)}$ y considere el operador $B = I - \lambda A$. Entonces $||\lambda A|| = |\lambda|||A|| < 1$, luego B es invertible y un Φ-operador. Luego el operador $B + \lambda T = (1-\lambda a)P_\Gamma + (1-\lambda b)Q_\Gamma$ es un Φ-operador también. Pero esto contradice la primer afirmación del teorema (4.3.2), dado que $1 - \lambda a(t)$ se anula en t_0. Entonces $|a(t)| \leq ||A||$ $\forall t \in \Gamma$. Uno puede probar lo mismo para $b(t)$, y esto nos da lo deseado. □

4.4. Factorización de funciones continuas

Definición 4.4.1. Sea Γ un sistema cerrado a trozos de Lyapunov. Dada una función continua $a \in C(\Gamma)$, una representación de la forma

$$a = a_- t^\kappa a_+ \tag{4.30}$$

es llamada una factorización de la función a con respecto a Γ si κ es un entero y si $a_\pm$ posee una extensión analítica en $D_\Gamma^\pm$ y continua en $\overline{D_\Gamma^\pm}$ tal que $a_+(t) \neq 0$ (con $t \in \overline{D_\Gamma^+}$) y $a_-(t) \neq 0$ (con $t \in \overline{D_\Gamma^-}$). Dado que $Ind(a_+) = Ind(a_-) = 0$, el entero κ esta determinado únicamente por $Ind(a)$.

En (4.30) el factor t^κ puede reemplazarse por cualquier factor de la forma:

$$[(t - t^-)/(t - t^+)]^\kappa \tag{4.31}$$

donde $t^\pm \in D_\Gamma^\pm$. Esto debe hacerse si $0 \in \Gamma$ o $\infty \in \Gamma$.

En lo sucesivo denotaremos por $C^\pm(\Gamma)$ la cerradura del conjunto $R^\pm(\Gamma)$ en la norma de $C(\Gamma)$. $C^\pm(\Gamma)$ forma una subálgebra (cerrada) de $C(\Gamma)$ y $C^\pm(\Gamma)$ es justo el conjunto de todas las funciones continuas en Γ con extensión analítica en $D_\Gamma^\pm$ y continuas en $\overline{D_\Gamma^\pm}$. Finalmente $\mathring{C}^-(\Gamma)$ denota la subálgebra de funciones $a \in C^-(\Gamma)$ con $a(\infty) = 0$.

Definición 4.4.2. Sea $\mathscr{U}$ un álgebra de Banach, formada por todas las funciones continuas tales que:

a) $\mathscr{U}$ contiene al conjunto $R(\Gamma)$.

b) Si $a \in \mathscr{U}$ y $a(t) \neq 0$ con $t \in \Gamma$, entonces $1/a \in \mathscr{U}$. Ponga $\mathscr{U}^\pm := \mathscr{U} \cap C^\pm(\Gamma)$, $\mathring{\mathscr{U}}^- := \mathscr{U} \cap \mathring{C}^-(\Gamma)$.

Un álgebra que cumple las propiedades *a*) y *b*) y además tiene a $R(\Gamma)$ como subconjunto denso sera llamada R-álgebra.

El álgebra $\mathscr{U}$ es llamada un álgebra de descomposición si se separa como suma directa de sus subalgebras $\mathscr{U}^+$ y $\mathring{\mathscr{U}}^-$

Note que $\mathscr{U}$ es un álgebra de descomposición si y solo si, $S_\Gamma \in \mathscr{L}(\Gamma)$. En efecto, si $\mathscr{U}$ es un álgebra de descomposición, entonces $P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$ es la proyección de $\mathscr{U}$ sobre $\mathscr{U}^+$ paralela a $\overline{\mathscr{U}}^-$. Ahora suponga que $S_\Gamma \in \mathscr{L}(\mathscr{U})$, entonces $P_\Gamma(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}^+$ y $Q_\Gamma(\mathscr{U}) \subset \mathring{U}^-$. Pero dado que $P_\Gamma + Q_\Gamma = I$, deducimos que $P_\Gamma(\mathscr{U}) = U^+$ y $Q_\Gamma(\mathscr{U}) = \mathring{\mathscr{U}}^-$.

Lema 4.4.3. *Sea $\mathscr{R}$ un álgebra de Banach con identidad y sean $\mathscr{R}^\pm$ dos subálgebras tal que $\mathscr{R} = \mathscr{R}^+ \oplus \mathscr{R}^-$. Denote por P la proyección de $\mathscr{R}$ en $\mathscr{R}^+$ y ponga $Q = I - P$.*

Si $a \in \mathscr{R}$ y si

$$||a|| < \text{mín}(||P||^{-1}, ||Q||^{-|}) \tag{4.32}$$

entonces $e + a$ admite una factorización

$$e + a = (e + a_-)(e + a_+) \tag{4.33}$$

con $a_\pm \in \mathscr{R}^\pm$ y $(e + a_\pm^{-1} - e \in \mathscr{R}^\pm)$

Demostración. En virtud de (4.32), $x + Pax = e$ tiene una única solución $x \in \mathscr{R}$. Se tiene que, $x = e + x_+$ con $x_+ \in \mathscr{R}$. Luego (4.33) nos da

$$(e + a)(e + x_+) = e + a_- \tag{4.34}$$

Similarmente, considere $x + Qxa = e$ Obtenemos que $(e + x_-)(e + a) = e + a_+$ con $x_- \in \mathscr{R}^-, a_+ \in \mathscr{R}^+$ o equivalentemente

$$(e + a_+)(e + a)^{-1} = e + x_- \tag{4.35}$$

Multiplicando estas dos últimas expresiones, llegamos a $a_+ + x_+ + a_+ x_+ = x_- + a_- + x_- a_-$.

Pero dado que $\mathscr{R}^+$ y $\mathscr{R}^-$ solo poseen el cero en común, ambos lados son cero. Luego:

$$(e + a_+)(e + x_+) = (e + x_-)(e + a_-) = e \tag{4.36}$$

En caso de que $\mathscr{R}$ no sea conmutativa (de serlo la prueba termina), entonces (4.36) implica que $e + a_\pm$ es invertible por un lado. Para probar que son invertibles, note primero que los argumentos anteriores aplican también al cambiar a por λa con $0 \leq \lambda \leq 1$. Los elementos $a_\pm$ deben reemplazarse por funciones analíticas $a_\pm(\lambda)$ y el elemento $e + a_+(\lambda)$ (resp. $e + a_-(\lambda)$) es derecho (izquierdo) invertible para λ. Pero $e + a_\pm(0) = e$ es invertible y entonces $e + a_\pm = e + a_\pm(1)$ es invertible. $\square$

Teorema 4.4.4. *Sea $\mathscr{U}$ un R-álgebra. Entonces cada $a \in \mathscr{U}$ con $a(t) \neq 0$ con $t \in \Gamma$ admite una factorización (4.30) con $a_\pm \in \mathscr{U}^\pm$ si y solo si, $\mathscr{U}$ es un álgebra de descomposición.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ un R-álgebra de descomposición y $a \in \mathscr{U}$ una función que no se anula en Γ. Elija $r \in R(\Gamma)$ entonces para $b = ar^{-1} - 1$ la desigualdad

$$||b||_{\mathscr{U}} < \text{mín}(||P||^{-1}, ||Q||^{-1}) \tag{4.37}$$

se cumple, aquí P denota la proyección sobre $\mathscr{U}^+$ Aplicando el lema anterior a las álgebras $\mathscr{R} = \mathscr{U}$, $\mathscr{R}^+ = \mathscr{U}^+$, $\mathscr{R}^- = \mathring{U}^-$ nos da una factorización de la función $1 + b$, esto es , una representación de la forma $ar^{-1} = b_- b_+$, donde $b_\pm \in \mathscr{U}^\pm$, $b_\pm(t) \neq 0$ con $t \in \overline{D_\Gamma^\pm}$. En virtud de que $||a||_{C(\Gamma)} \leq ||a||_{\mathscr{U}}$ tenemos $\text{máx}_{t\in\Gamma} |a(t)r^{-1}(t) - 1| \leq ||b||_{\mathscr{U}} < 1$. De donde $r(t) \neq 0$ con $t \in \Gamma$, $Ind(r) = Ind(a) = \kappa$. Luego la función $r \in R(\Gamma)$ se factoriza como $r = r_- t^\kappa r_+$, con $r_\pm \in R^\pm(\Gamma)$, $r_\pm(t) \neq 0$. Obteniendo la factorización deseada para a.

Ahora probaremos la necesidad. Dada una función $a \in \mathscr{U}$, ponga $b = e^a$. Luego $b(t) \neq 0$ con $t \in \Gamma$ e $Ind(b) = 0$. Por lo tanto b admite una factorización como $b = b_- b_+$, dado que $Ind(b) = 0$, el teorema de Shilov implica que $a_\pm = ln(b_\pm) \in \mathscr{U}$, $a_- \in \mathring{\mathscr{U}}^-$. Pero luego $a = a_+ + a_-$. $\square$

Teorema 4.4.5. *Sean a y b funciones continuas en Γ y suponga $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ con $t \in \Gamma$. Ponga $\kappa = Ind(a/b)$ y sea $a/b = c_- t^\kappa c_+$ la factorización de la función a/b. Entonces el inverso lateral (resp. bilateral) del operador $A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ en el espacio $L_p(\Gamma, \rho)$ toma la forma:*

$$A^{-1} = (t^{-\kappa} P_\Gamma + Q_\Gamma)(c_+^- P_\Gamma + c_- Q_\Gamma) c_-^{-1} b^{-1} \tag{4.38}$$

Si $\kappa < 0$,

$$Ker A = \mathscr{L}\{g, gt, ..., gt^{|\kappa|-1}\} \tag{4.39}$$

con $g = c_+^{-1} - c_- t^\kappa$.

Si $\kappa > 0$

$$Coker A = \mathscr{L}\{bc_-, bc_- t, ..., bc_- t^{\kappa-1}\} \tag{4.40}$$

y la ecuación $A\varphi = f$ tiene solución si y solo si,

$$\int_\Gamma f(t) b^{-1}(t) c_-^{-1}(t) t^{-j} dt = 0 \tag{4.41}$$

con $j = 1, ..., \kappa$.

Demostración. Sea $\kappa = 0$. Entonces A es invertible (teorema (4.3.2)). Probaremos que

$$A^{-1} = (c_+^{-1} P_\Gamma + c_- Q_\Gamma) c_-^{-1} b^{-1} \tag{4.42}$$

Se tiene que este operador es acotado en $L_p(\Gamma, \rho)$. Sea $r \in R(\Gamma)$ una función racional. Luego

$$(c_+^{-1} P_\Gamma + c_- Q_\Gamma) c_-^{-1} b^{-1} A r = (c_+^{-1} P_\Gamma + c_- Q_\Gamma)(c_+ r_+ + c_-^{-1} r_-) \tag{4.43}$$

donde $r - + = P_\Gamma r$, $r_- = Q_\Gamma r$. Dado que $c_+ r_+ \in L_p^+(\Gamma, \rho)$ y $c_-^{-1} r_- \in \mathring{L}_p^-(\Gamma, \rho)$; la parte derecha de (4.43) es igual a r.

Luego $A^{-1} A r = r$.

Si $\kappa > 0$, el operador puede representarse en la forma

$$A = b(ab^{-1}t^{-\kappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)(t^\kappa P_\Gamma + Q_\Gamma)$$

y por lo que ya probamos el operador definido en (4.38) es el inverso izquierdo de A.

Ahora $\kappa < 0$, luego el operador

$$B = b(ab^{-1}t^{-\kappa}P_\Gamma + Q_\Gamma) = A(t^{-\kappa}P_\Gamma + Q_\Gamma)$$

es invertible y el inverso B^{-1} puede ser obtenido por (4.42).

La descripción del núcleo y las condiciones de solubilidad, pueden probarse de forma análoga al teorema (4.2.4) (ver demostración).

Nos falta probar (4.40) para $\kappa < 0$. Ponga $f_i = bc_- t^{j-1}$ con $j = 1, ..., \kappa$. Luego

$$\int_\Gamma f_j(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-j}dt = \int_\Gamma \frac{dt}{t} \neq 0$$

y por lo tanto $f_j \notin ImA$. Esto combinado con la igualdad $dimCokerA = \kappa$ implican (4.40). $\square$

Escribimos el operador $(aP_\Gamma + bQ_\Gamma)^{-1} = x(a^{-1}P_\Gamma + b^{-1}Q_\Gamma)x^{-1}$ con $x = bc_-$. En otra notación: Si $A = gI + hS_\Gamma$ con $g, h \in C(\Gamma)$, $g^2(t) - h^2(t) \neq 0$ en Γ, y la ecuación $\frac{g+h}{g-h} = c_- t^\kappa c_+$ da una factorización generalizada de $(g+h)(g-h)^{-1}$, entonces uno de los operadores inversos de A (del lado que corresponda) estará dado por

$$(gI + hS_\Gamma)^{-1} = \frac{g}{g^2 - h^2}I - \frac{h}{g^2 - h^2}xS_\Gamma x^{-1}I$$

con $x = (g - h)c_-$

Para ilustrar considere:

$\Psi \in L_p(T)$. Encuentre todas las funciones $\varphi \in L_p(T)$ que satisfagan la relación

$$cosh\frac{3(t+1)}{2t^2+5t+2}\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}senh\frac{3(t+1)}{2t^2+5t+2}\int\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \Psi(t) \tag{4.44}$$

La función $r(t) = 3(t+1)(2t^2+5t+2)^{-1}$ se puede expresar como $r(t) = \frac{1}{t+2} + \frac{1}{2t+1}$. No es difícil ver que

$$c(t) = \frac{coshr(t) + senhr(t)}{cosh(t) - senhr(t)}$$

admite la factorización $c(t) = r_-(t)c_+(t)$, donde $c_-(t) = exp\frac{2}{2t+1} \in C^-(T)$, $c_+(t) = exp\frac{2}{t+2} \in C^+(T)$. Aquí el índice es igual a cero, de la ecuación (4.44)

$$\varphi(t) = cosh\frac{3(t+1)}{2t^2+5t+2} - \frac{1}{\pi i}sinh\frac{3(t+1)}{2t^2+5t+2}exp\frac{1-t}{2t^2+5t+2}\int_T exp\frac{\tau - 1}{2\tau^2+5\tau+2}\frac{\Psi(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

Los resultados probados se trasfieren en:

$$g(t)\varphi(t) + \frac{h(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(s)ds}{s-t} = \Psi(t) \tag{4.45}$$

y

$$g(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{h(s)\varphi(s)ds}{s-t} = \Psi(t) \tag{4.46}$$

con g y h continuas en el compacto $\overline{\mathbb{R}}$. $g(\infty) = g(-\infty)$, $h(\infty) = h(-\infty)$. Usando

$$(B\varphi)(\zeta) = \frac{1}{\zeta - 1}\varphi\left(i\frac{\zeta+1}{1-\zeta}\right) \tag{4.47}$$

nos da un isomorfismo entre los espacios $L_p(T,\rho)$ y $L_p(\mathbb{R},\rho)$ donde

$$BS_{\mathbb{R}}B^{-1} = S_0, \quad BgB^{-1} = \tilde{g}I \tag{4.48}$$

con $\tilde{g}(\zeta) = g\left(i\frac{\zeta+1}{1-\zeta}\right)$ Aquí la ecuación $c(t) = c_-(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa} c_+(t)$ aparece como análoga de la generalización de c, con $c_-^{\pm 1} \in L_p^-(\mathbb{R})$, $c_+^{\pm} \in L_p^+(\mathbb{R})$ y el operador $c_+^{-1}P_{\mathbb{R}}c_-^{-1}$ es acotado en $L_p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$.

Note que si para la función $c \in C(\overline{\mathbb{R}})$ la ecuación

$$c\left(i\frac{\zeta+1}{1-\zeta}\right) = c_-^-(\zeta)\zeta^\kappa c_+^-(\zeta)$$

nos provee una factorización con respecto al círculo Γ_0, entonces $c(t) = c_-(t)t^\kappa c_+(t)$ con $c_\pm(t) = c_\pm^-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)$ nos da una factorización de c con respecto al eje real.

Teorema 4.4.6. *Para que A (A_1) definido como la parte izquierda de la ecuación (4.45) ((4.46)) sea invertible por un lado en $L_p(\Gamma,\rho)$ es necesario y suficiente que la condición*

$$g(t)^2 - h(t)^2 \neq 0 \tag{4.49}$$

con $t \in \overline{\mathbb{R}}$ se satisfaga. Sea (4.49) satisfecha, y la ecuación

$$c(t) = c_-(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^\kappa c_+(t)$$

da una factorización de

$$c(t) = \frac{g(t)+h(t)}{g(t)-h(t)}$$

Para $\kappa < 0$, A y A_1 son invertibles por la derecha

$$KerA = \mathscr{L}\{u, uz, ..., uz^{|\kappa|-1}\}$$

$$KerA_1 = \mathscr{L}\{v, vz, ..., vz^{|\kappa|-1}\}$$

con $z(t) = \frac{t-i}{t+i}$, $u(t) = \frac{1-c(t)}{(t+i)c_+(t)}$, $v(t) = \frac{1}{(g(t)-h(t))c_+(t)(t+i)}$

Las ecuaciones

$$A^{-1} = \frac{g}{g^2-h^2}I - \frac{h}{g^2-h^2}xS_{\mathbb{R}}x^{-1}I \tag{4.50}$$

$$A_1^{-1} = \frac{g}{g^2-h^2}I - y^{-1}S_{\mathbb{R}}y\frac{h}{g^2-h^2}I \tag{4.51}$$

con $x = (g-h)c_-$ y $y = (h-g)c_+$ definen inversos derechos para A y A_1, respectivamente.

Si $\kappa \geq 0$, A *y* A_1 *son invertibles por la izquierda. Para que las ecuaciones* $A\varphi = \Phi$ *y* $A\varphi = \Phi_1$ *tengan solución es necesario y suficiente que* Φ *y* Φ_1 *cumplan*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(t)z(t)^l dt}{(g(t)-h(t))c_-(t)(t-i)} = 0$$

con $-\kappa < l \leq 0$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_1(t)z(t)^l(1-c(t))}{(g(t)-h(t))c_-(t)(t-i)} = 0$$

con $-\kappa < l \leq 0$.

Demostración. Es análoga a la del teorema anterior. $\square$

El teorema anterior nos brinda un método efectivo para la resolución de ecuaciones integrales singulares.

Ejemplos

1.– Resolver

$$\frac{t^2+10}{t^2+4}\varphi(t) + \frac{6}{\pi i(t^2+4)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s)ds}{s-t} = \Psi(t)$$

y

$$\frac{t^2+10}{t^2+4}\varphi(t) + \frac{6}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s)ds}{(s^2+4)(s-t)} = \Psi(t)$$

en $L_p(\Gamma, \rho)$.

Como $c(t)$ admite la factorización

$$c(t) = \frac{t^2+16}{t^2+4} = \frac{t-4i}{t-2i}\frac{t+4i}{t+2i} = c_-c_+$$

con índice cero. Las ecuaciones por lo tanto tienen solución única por los lados derechos de Ψ y éstas son de la forma:

$$\varphi(t) = \frac{t^2+10}{t^2+16}\Psi(t) - \frac{6}{\pi i(t-2i)(t+4i)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(s-2i)\Psi(s)ds}{(s-4i)(s-t)}$$

y

$$\varphi_1(t) = \frac{t^2+10}{t^2+16}\Psi(t) - \frac{6(t+2i)}{\pi i(t+4i)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(s)ds}{(s-4i)(s-2i)(s-t)}$$

respectivamente.

2.− Resolver

$$\frac{t}{t-i}\varphi(t) + \frac{1}{\pi(t-i)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(s)ds}{s-t} = \Psi(t) \tag{4.52}$$

$$\frac{t}{t+i}\varphi(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(s)ds}{(s+i)(s-t)} = \Psi(t) \tag{4.53}$$

En la ecuación (4.52) $c(t) = \frac{t+i}{t-i}$, $c_-(t) = c_+(t) = 1$, $\kappa = -1$, $KerA = \mathscr{L}\{\frac{1}{t^2+1}\}$. Luego la ecuación se resuelve por el lado derecho y tiene solución general

$$\varphi(t) = \frac{t}{t+i}\Psi(t) + \frac{1}{\pi(t+i)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(s)ds}{s-t} + \frac{\alpha}{t^2+1}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Para (4.53) tenemos $c(t) = \frac{t-i}{t+i}$, $c_-(t) = c_+(t) = 1$, $\kappa = 1$, luego la ecuación tiene solución si y solo si $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(t)}{t^2+i}dt = 0$. Si esto se satisface la solución tiene la forma:

$$\varphi(t) = \frac{t\Psi(t)}{t-i} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(s)ds}{(s-i)(s-t)}$$

.

Referencias

[1] Solomon G.Mikhlin y Siegfried Prössdrf *Singular Integral Operators* Springer-Verlag, Alemania, 1980.

[2] Israel Gohberg y Naum Krupnik *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations* Volume I, Birkhäuser Basel, Rusia, 1992.

[3] *N.1. Muskhelishvili Singular Integral Equations* Springer, Paises Bajos, 1972.

[4] Victor G. Kravchenko y Georgii S. Litvinchuk *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift.* Springer, Paises Bajos, 1994.

[5] Yosida K *Functional analysis* Springer-Verlag, Alemania, 1965.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$: el conjunto de los números reales, complejos y naturales respectivamente.

$\mathscr{L}(X,Y)$: el espacio de operadores lineales de X en Y. Cuando $X=Y$ escribimos $\mathscr{L}(X)$.

$\mathscr{L}\{a_1,\ a_2,\ ...\}$: el espacio lineal generado por los elementos $a_1,\ a_2,\ ...$.

$||a||_X$: la norma en el espacio X.

$||A||$: la norma de un operador.

X^*: el espacio dual de X.

A^*: el operador adjunto del operador A.

$A|X_0$: la restricción del operador A al espacio X_0.

(x,y): el producto interno usual.

$X \oplus Y$: suma directa.

$X \times Y$: producto cartesiano de dos conjuntos X y Y.

$\alpha(A)$: la dimensión de $KerA$.

$\beta(A)$: la dimensión de $CokerA$.

$sign\xi$: el signo $(=\pm 1)$ del elemento ξ.

$[A, B]$: el conmutador $AB - BA$.