

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Gráficas cuyos Ideales Tóricos tienen la
Propiedad de Intersección Completa**

TESIS

Que presenta

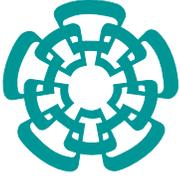
Lourdes Cruz González

para obtener el Grado de
Maestra en Ciencias
en la Especialidad de
Matemáticas

Director de Tesis: Dr. Enrique Reyes Espinoza

Ciudad de México

Agosto 2017



CENTER FOR RESEARCH AND ADVANCED
STUDIES OF THE NATIONAL POLYTECHNIC INSTITUTE

CAMPUS ZACATENCO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Graphs whose Toric Ideals have the Complete Intersection Property

A dissertation

presented by

Lourdes Cruz González

To Obtain the Degree of
Master of Science
In the Speciality of
Mathematics

Thesis Advisor: Dr. Enrique Reyes Espinoza

Mexico City

August 2017

RESUMEN

Si G es una gráfica simple entonces existen subgráficas C y R tales que C es una gráfica no bipartita, R es una gráfica bipartita y $V(G) = V(C) \cup V(R)$ con $V(C) \cap V(R) = \emptyset$. En este caso escribimos $G = [C; R]$. Esta descomposición no es única. Además si G es una gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) = \{y_1, \dots, y_m\}$, entonces el ideal tórico de G es el núcleo del morfismo de k -álgebras

$$\phi : k[y_1, \dots, y_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$$

dado por $\phi(y_r) = x_i x_j$ donde $y_r = \{x_i, x_j\}$ y k es un campo. En [6] se caracterizan las gráficas $G = [C; R]$ cuyos ideales tóricos son Intersecciones Completas para cuando C es conexa y R es 2-conexa. El objetivo de esta tesis es estudiar las gráficas $G = [C; R]$ cuyos ideales tóricos son Intersecciones Completas para cuando R es 1-conexa.

ABSTRACT

If G is a simple graph then there are subgraphs C and R such that C is a non bipartite graph, R is a bipartite graph and $V(G) = V(C) \cup V(R)$ with $V(C) \cap V(R) = \emptyset$. In this case we write $G = [C; R]$. This decomposition is not unique. Also, if G is a graph whose vertex set is $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ and whose edge set is $E(G) = \{y_1, \dots, y_m\}$, then the toric ideal of G is the kernel of the k -algebras morphism

$$\phi : k[y_1, \dots, y_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$$

given by $\phi(y_r) = x_i x_j$ where $y_r = \{x_i, x_j\}$ and k is a field. The graphs $G = [C; R]$ whose toric ideals are Complete Intersections, C is connected and R is 2-connected are characterized in [6]. The goal of this thesis is to study the graphs $G = [C; R]$ whose toric ideals are Complete Intersections when R is 1-connected.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología - CONACyT
por el apoyo otorgado durante mis estudios de maestría.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Enrique Reyes por su dirección durante la realización de ésta tesis, por medio de la cual me transmitió sus conocimientos e ideas además de su confianza y consejos gracias a los cuales esta tesis es posible.

A mis compañeros y amigos que creyeron en mí y me enriquecieron con sus consejos, entre ellos a Juan Vega por sus sugerencias y apoyo.

A mi familia por todo su apoyo y confianza a lo largo de mi formación académica y por su impulso en todos mis proyectos, en especial a mi madre y hermano por las noches de desvelo a mi lado, por toda su dedicación, paciencia y consejos sin los cuales no habría sido posible este trabajo. Sin olvidar a mi padre por su confianza y apoyo a lo largo de todos mis proyectos.

Finalmente quiero agradecer a Francisco Mercado por ser un gran ser humano, por toda su confianza, apoyo y motivación para mejorar personal y profesionalmente.

PREFACIO

Los ideales tóricos son ideales generados por binomios (diferencia de monomios) en un anillo de polinomios. El conjunto de puntos que se anulan en cada polinomio de un ideal tórico es una variedad tórica afín. Las variedades tóricas son una familia de variedades algebraicas caracterizadas por objetos combinatorios (poliedros y abanicos). Las variedades tóricas y los ideales tóricos forman una área muy activa de investigación. En su estudio hay una gran interacción entre diversas áreas de las matemáticas como: álgebra conmutativa, combinatoria y geometría, para mayor detalles ver [11], [16] y [42].

Una propiedad fundamental de las variedades en la Geometría algebraica es la propiedad de Intersección Completa. Algebraicamente, un ideal es una Intersección Completa si el número mínimo de generadores es igual a su altura. Si un ideal en un anillo de polinomios es una Intersección Completa entonces su variedad afín es una Intersección Completa. El estudio de ésta propiedad en los ideales tóricos fue iniciado por Herzog en [23], para ideales tóricos asociados a curvas monomiales en espacios 3-dimensionales. Para una nota histórica sobre estos temas, ver la introducción y referencias de [19] y [30]. Otras referencias interesantes son [8], [10] y [27]. Computacionalmente, decidir si un ideal tórico es de Intersección completa es un problema que está en la clase NP, ver [14], [28] y [37]. Por lo que es de interés encontrar familias de ideales tóricos para las cuales existen algoritmos (que corren en tiempo polinomial) que deciden si dichos ideales son intersecciones completas. Se han encontrado este tipo de algoritmos para ideales tóricos simpliciales (ver [5]) e ideales tóricos de curvas monomiales afines (ver [7]).

Por medio de su matriz de incidencia, a un objeto combinatorio (gráfica, matroide, hipergráfica simple, gráfica orientada), le podemos asociar un ideal tórico. Estos ideales tóricos han sido muy estudiados, ver las siguientes referencias: [9], [17], [20], [21], [25], [26], [33], [35], [38], [40] y [41]. Además, la propiedad de intersección completa se ha estudiado para ideales tóricos asociados a gráficas simples (ver [6] y [20]), gráficas orientadas (ver [18], [19], [20] y [34]) y matroides (ver [17]).

Las gráficas para las cuales el conjunto de vectores característicos de los ciclos inducidos es una base para el espacio de ciclos sobre \mathbb{Z}_2 , se llaman gráficas anilladas. Las gráficas anilladas han sido estudiadas en otros contextos y con otras aplicaciones (ver [1], [2] [3], y [31]). En [20] se prueba que estas gráficas pueden ser construidas por medio de sumas cliqué de vértices, aristas y/ó ciclos. Por lo tanto,

sus bloques 2-conexos (subgráficas maximales sin vértices de corte) son 2-sumas cliqué de ciclos, es decir, se pueden construir recursivamente empezando por un ciclo e identificando una arista de un nuevo ciclo con una arista de la gráfica previamente construida.

Dada una gráfica G , en [6] se da un algoritmo que en tiempo polinomial decide si G es una intersección completa (es decir, que si el ideal tórico es una intersección completa). Además se prueba que si G es intersección completa, entonces existen subgráficas inducidas disjuntas R y C de G , tales que $V(G) = V(R) \cup V(C)$, R es una gráfica anillada bipartita y C satisface una de las siguientes condiciones: $C = \emptyset$, C es un ciclo impar, C es una banda parcial impar ó C está formada por dos ciclos impares disjuntos. En [6] también se da una caracterización combinatoria efectiva para las gráficas de intersección completa para las cuales R es 2-conexo y C es conexo. En esta tesis estudiamos las gráficas Intersección Completa, para las cuales R es 1-conexo.

Esta tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera: en el primer Capítulo se dan algunos conceptos y resultados básicos de Teoría de gráficas, Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica, que se usarán en los siguientes capítulos. En el segundo Capítulo se estudian los conceptos básicos de variedades e ideales tóricos. En particular se exponen los resultados de [6] sobre ideales tóricos asociados a gráficas que se utilizarán a lo largo de esta tesis. En el Capítulo 3 se encuentran los principales resultados de esta tesis, es decir el estudio de gráficas $G = [C; R]$ intersecciones completas para cuando R es 1-conexa. Finalmente en el Apéndice, se dan pruebas alternativas a algunos resultados del Capítulo 3.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	I
ABSTRACT	III
PREFACIO	IX
TABLA DE CONTENIDO	XI
1 PRELIMINARES	1
1.1 TEORÍA DE GRÁFICAS	1
1.1.1 DEFINICIONES BÁSICAS	1
1.1.2 ALGUNAS GRÁFICAS ESPECIALES	3
1.2 ÁLGEBRA CONMUTATIVA	4
1.3 GEOMETRÍA ALGEBRAICA AFÍN	5
2 IDEALES TÓRICOS Y VARIEDADES TÓRICAS AFINES	9
2.1 IDEALES TÓRICOS Y CONJUNTOS TÓRICOS	9
2.2 VARIEDADES TÓRICAS AFINES Y CONJUNTOS TÓRICOS . .	10
2.3 IDEALES LATTICES Y ANILLOS DE SEMIGRUPO	11
2.4 IDEALES TÓRICOS ASOCIADOS A GRÁFICAS	12
3 GRÁFICAS DE INTERSECCIÓN COMPLETA	17
APÉNDICE	43
REFERENCIAS	51
NOTACIÓN	55
ÍNDICE ALFABÉTICO	57

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 TEORÍA DE GRÁFICAS

1.1.1 DEFINICIONES BÁSICAS

Una **gráfica simple** es un par ordenado $G = (V, E)$ de conjuntos finitos, donde E es un conjunto de subconjuntos no ordenados de V de cardinalidad dos, los elementos de V se llaman **vértices** y los elementos de E **aristas**, si es necesario se denotarán a los conjuntos V y E por $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente. En esta tesis todas las gráficas serán simples. Si V es el conjunto vacío y por lo tanto E también lo es, entonces la gráfica G es la **gráfica vacía**. Una gráfica con un vértice y sin aristas es llamada **trivial**.

Dos vértices $x_1, x_2 \in V$ son **adyacentes** ó **vecinos** si $e = \{x_1, x_2\} \in E$, en este caso decimos que x_1 **es incidente a** e . El conjunto de vecinos de un vértice $v \in V$ es la **vecindad de v en G** y se denota por $N_G(v)$. Además, el **grado** $deg_G(v)$ de un vértice v es el número de vecinos de v en G . Un vértice de grado cero es un **vértice aislado**. Una **gráfica completa** es aquella en la que todos sus vértices son adyacentes a pares.

Dadas dos gráficas $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$, se tiene que H es una **subgráfica de G** si $V' \subset V$ y $E' \subset E$, además se dice que H es una **subgráfica inducida** de G si $\{x_1, x_2\} \in E(H)$ para $x_1, x_2 \in V(H)$ tal que $\{x_1, x_2\} \in E(G)$, en este caso H se denota por $G[V']$. Dados $v_1, \dots, v_s \in V$ a la gráfica inducida $G[V \setminus \{v_1, \dots, v_s\}]$ se le denotará por $G \setminus \{v_1, \dots, v_s\}$.

Una sucesión de aristas $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_k, x_{k+1}\}$ es una **caminata de longitud k de x_1 a x_{k+1}** y se denota por (x_1, \dots, x_{k+1}) , además x_1, x_{k+1} son los **extremos** de la caminata. Si los vértices x_1, x_2, \dots, x_{k+1} son todos distintos se dice que la caminata es un **camino**. Dada una gráfica H un H -**camino** es un

camino P no trivial tal que los vértices de P coinciden con los vértices de H únicamente en los extremos del camino P . G es una gráfica **conexa** si dados dos vértices $a, b \in V$ existe un camino con vértices extremos a, b . Si una gráfica no es conexa, se dice que es **disconexa**. Una subgráfica maximal conexa de G es una **componente conexa de G** . Un vértice $v \in V$ es un **vértice de corte de G** si el número de componentes conexas de $G \setminus \{v\}$ es estrictamente mayor que el número de componentes conexas de G . Una **arista de corte e** de una gráfica G es una arista tal que, el número de componentes conexas de $G \setminus e$ es mayor al número de componentes conexas de G . Una gráfica **2-conexa** es una gráfica $G = (V, E)$ tal que $|V| \geq 2$ y $G \setminus X$ es conexa para todo $X \subset V$ tal que $|X| < 2$. Un **bloque** es una subgráfica maximal conexa de G sin vértices de corte.

Un **k -ciclo** ó **ciclo** es una caminata $C = (x_1, \dots, x_{k+1})$ de longitud $k \geq 3$ donde $x_1 = x_{k+1}$ y los demás vértices son diferentes. La **longitud del ciclo C** es su número de vértices y/o aristas. Un ciclo es **par (impar)** si su longitud es par (impar). Dado un ciclo $C = (x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ una cuerda es una arista $\{x_r, x_s\}$ tal que $1 \leq r < r+1 < s \leq k+1$. Si C no tiene cuerdas, entonces C es llamado un **ciclo primitivo** ó **inducido**.

Un conjunto de subgráficas G_1, \dots, G_s de una gráfica G es una **partición de G** si $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ con $i \neq j$ y $E(G) = \cup_{i=1}^s E(G_i)$. Una gráfica no vacía es **bipartita** si su conjunto de vértices puede ser particionado en dos subconjuntos disjuntos V_1, V_2 tales que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y otro extremo en V_2 . El número de componentes conexas bipartitas de G lo denotaremos por $b(G)$.

G es una **gráfica completa** si $\{x, y\} \in E(G)$ para cada par de vértices diferentes x y y . Una gráfica G es la **suma clique** de G_1 y G_2 si $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y $G[V(G_1) \cap V(G_2)] = K$ es una gráfica completa. Además si $|V(K)| = r$, entonces se dice que G es la **r -suma clique** de G_1 y G_2 .

Definición 1.1 [6, Definición 5.2] Si v es un vértice de grado 2 tal que no pertenece a un triangulo, (es decir, $N_G(v) = \{u_1, u_2\}$ y $\{u_1, u_2\} \notin E$) entonces la **contracción de G en v** , denotada por G_v^c es la gráfica con conjunto de vértices $V_v^c = (V \setminus \{u_1, u_2, v\}) \cup \{u\}$ donde u es un nuevo vértice y conjunto de aristas $E_v^c = E([G \setminus \{u_1, u_2, v\}]) \cup \{\{x, u\} \mid \{x, u_1\} \in E(G) \text{ ó } \{x, u_2\} \in E(G)\}$.

Una gráfica G es **anillada** si cada bloque de G que no sea un vértice o una arista se construye a partir de un ciclo añadiendo sucesivamente H -caminos de longitud al menos dos, que une gráficas H ya construidas en dos vértices adyacentes. Equivalentemente una gráfica es anillada si sus bloques 2-conexos se pueden construir como sumas 2-clique sucesivas de ciclos.

1.1.2 ALGUNAS GRÁFICAS ESPECIALES

Las siguientes gráficas fueron definidas en [6] y se usan para clasificar a las gráficas cuyos ideales tóricos son intersecciones completas.

Una **gráfica theta con vértices extremos** x, y es una gráfica T con $V(T) = V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2) \cup V(\mathcal{P}_3)$ donde $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ son tres caminos de longitud mayor ó igual a dos tales que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{x, y\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$. La gráfica theta T se dice que es **par (impar)** si los tres caminos son pares (impares).

Una **rueda parcial impar** es una gráfica W con conjunto de vértices $V = \{z_1, \dots, z_r, x\}$ donde $[V \setminus \{x\}]$ es un ciclo impar primitivo y existe al menos un $1 \leq i \leq r$ tal que $\{x, z_i\} \in E$. Una rueda parcial impar es una **CI-rueda-parcial-impar** si $N_W(x) = \{z_1, z_{s_2}, \dots, z_{s_k}\}$ tales que $1 < s_2 < \dots < s_k$ donde s_3, \dots, s_k son impares y $s_2 = 2$ ó s_2 es impar.

Una **CI-rueda-doble** es una gráfica conexa con conjunto de vértices $V = \{b_1, b_2\} \cup \{z_1, \dots, z_r\}$ donde $C := [V \setminus \{b_1, b_2\}]$ es un ciclo impar primitivo y su conjunto de aristas es $E = E(C) \cup \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, z_{j_1}\}, \dots, \{b_1, z_{j_s}\}, \{b_2, z_{k_1}\}, \dots, \{b_2, z_{k_t}\}\}$, donde $s, t \geq 1$, $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq k_1 < \dots < k_t \leq r$ y $j_1, \dots, j_s, k_1, \dots, k_t$ son impares.

Una **banda parcial impar** es una gráfica conexa cuyo conjunto de vértices es $V = V(C_1) \cup V(C_2)$, donde $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1})$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2})$ son dos ciclos impares disjuntos, y su conjunto de aristas es $E = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_{j_1}, b_{k_1}\}, \dots, \{a_{j_s}, b_{k_s}\}\}$, donde $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq r_1$, $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s \leq r_2$ y $j_i \equiv k_i \pmod{2}$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Una **CI-vértice-banda** es una gráfica conexa cuyo conjunto de vértices es $V = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \{c\}$ donde $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1})$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2})$ son dos ciclos impares disjuntos, y su conjunto de aristas es $E = E(C_1) \cup E(C_2) \cup$

$\{\{a_1, b_{i_1}\}, \{a_1, b_{i_2}\}, \dots, \{a_1, b_{i_k}\}, \{a_2, c\}, \{a_{r_1}, c\}\}$, donde $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r_2$, y i_1, \dots, i_k impares.

1.2 ÁLGEBRA CONMUTATIVA

Decimos que un ideal I de un anillo R es generado por a_1, \dots, a_n si todo elemento de I es una R -combinación lineal de estos elementos, en tal caso se escribe $I = (a_1, \dots, a_n)$. Se dice que $\mathcal{G} = \{a_1, \dots, a_n\}$ es un conjunto minimal de generadores de I si ningún subconjunto propio de \mathcal{G} genera al ideal I , y se dice que \mathcal{G} es **mínimo** si $|\mathcal{G}| = \min \{|A| \mid A \text{ es un conjunto de generadores de } I\}$. El **producto de dos ideales** I, J denotado por IJ es el conjunto de todas las sumas finitas $\sum a_i b_i$ donde cada $a_i \in I$ y cada $b_i \in J$. Un ideal $I \neq R$ es **primo** si $ab \in I$ implica que $a \in I$ ó $b \in R$. El conjunto de los ideales primos de R es el **espectro de** R y se denota por $\text{Spec}(R)$. El **radical** de un ideal I es el ideal $\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^m \in I \text{ para algún entero } m \geq 1\}$, además

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \\ I \subset \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$

El radical de I también se denota por $\text{rad}(I)$. El ideal I se dice **irreducible** si no puede ser escrito como la intersección de dos ideales diferentes de I , en caso contrario el ideal es **reducible**. Una **cadena ascendente (de ideales) de longitud** n es una sucesión finita estrictamente creciente de ideales $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n$. La **altura de un ideal primo** \mathfrak{p} es el supremo de las longitudes de todas la cadenas de ideales primos $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ que terminan en \mathfrak{p} y se denota por $ht(\mathfrak{p})$, si I es un ideal de R , su altura es:

$$ht(I) = \min\{ht(\mathfrak{p}) \mid I \subseteq \mathfrak{p} \text{ y } \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)\}.$$

Un anillo A es una R -**álgebra** si existe un homomorfismo de anillos $\phi : R \rightarrow A$. Notemos que A tiene una estructura de R -módulo compatible con su estructura de anillo dada por $r \cdot a = \phi(r)a$ para todos $r \in R$ y $a \in A$. Sea F un subconjunto de A , entonces se denota por $R[F]$ al **subanillo de** A generado por F y $\phi(A)$. En ocasiones $R[F]$ es llamado la R -subálgebra ó R -subanillo de A generado por F . Si F es finito y $A = R[F]$, entonces se dice que A es una R -**álgebra finitamente generada**. Por otro lado, se dice que A es una R -**álgebra finita** si A es finitamente generada como un R -módulo. Un **homomorfismo de R -álgebras** ϕ es un mapeo ϕ tal que es un homomorfismo de anillos y un homomorfismo de R -módulos.

ANILLOS DE POLINOMIOS

Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]$ un anillo de polinomios sobre un campo k . Un **monomio de** R es un elemento de la forma $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ donde $a_i \in \mathbb{N}$, y se denota por x^a con $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. El **soporte** de x^a es el conjunto $\text{supp}(x^a) = \{x_i \mid a_i > 0\}$. El conjunto de todos los monomios de R , denotado por $\text{Mon}(R)$, es una k -base para R , es decir, dado un polinomio $f \in R$ éste se puede expresar como una única combinación k -lineal de monomios. Un **binomio en** R es una diferencia de dos monomios. Un binomio $x^\alpha - x^\beta$ es **primitivo** si no existe otro binomio $x^\gamma - x^\delta$ tal que $x^\gamma \mid x^\alpha$ y $x^\delta \mid x^\beta$. Un **ideal binomial** es un ideal generado por binomios.

1.3 GEOMETRÍA ALGEBRAICA AFÍN

Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en un campo k .

1. El **espacio afín de dimensión n sobre k** denotado por \mathbb{A}_k^n es el espacio cartesiano que consiste de n copias de k , es decir $\mathbb{A}_k^n := k^n$.
2. Sea I un ideal de R , la **variedad afín de I en k^n** es el subconjunto:

$$\mathcal{V}(I) := \{a \in k^n \mid f(a) = 0 \text{ para todo } f \in I\} \quad (1.1)$$

Un subconjunto V de k^n define un ideal en R , de la siguiente forma:

$$\mathcal{I}(V) := \{f \in R \mid f(a) = 0 \text{ para todo } a \in V\} \quad (1.2)$$

Proposición 1.2 [22, Proposición 1.2] Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en el campo k , entonces se tienen las siguientes propiedades

- a) Dados $I, J \subset R$ tales que $I \subset J$, se tiene que $\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I)$.
- b) Dados $V, U \subset k^n$ tales que $V \subset U$, se tiene que $\mathcal{I}(U) \subset \mathcal{I}(V)$.
- c) Dados $U, V \subset k^n$, se tiene $\mathcal{I}(U \cup V) = \mathcal{I}(U) \cap \mathcal{I}(V)$.
- d) Si V es una variedad, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$.

- e) Si $A \subseteq R$, entonces $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(I)$, donde $I = (A)$.
- f) Sea $V \subset k^n$ cualquier subconjunto, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = \overline{V}$, la cerradura de V en la topología de Zariski.

Proposición 1.3 El siguiente conjunto

$$\mathfrak{T}_z := \{A \subset k^n \mid A^c \text{ es una variedad afín en } k^n\} \quad (1.3)$$

forma una topología para k^n . La cual llamaremos **topología de Zariski**.

Demostración. Sean $A_1, A_2 \in \mathfrak{T}_z$, entonces $A_1^c = \mathcal{V}(I_1)$ y $A_2^c = \mathcal{V}(I_2)$, con I_1, I_2 ideales en R , esto implica que $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2) = \{a \in k^n \mid f(a)g(a) = 0 \text{ para cada } f \in I_1, g \in I_2\} = \mathcal{V}(I_1 I_2)$. Entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{T}_z$.

Ahora, si $\{A_\alpha\}_\alpha \subset \mathfrak{T}_z$, entonces $A_\alpha^c = \mathcal{V}(I_\alpha)$ con I_α un ideal de R . De donde $(\bigcup_\alpha A_\alpha)^c = \bigcap_\alpha A_\alpha^c = \bigcap_\alpha \mathcal{V}(I_\alpha) = \{a \in k^n \mid f(a) = 0 \text{ para cada } f \in \bigcup_\alpha I_\alpha\} = \mathcal{V}(\bigcup_\alpha I_\alpha)$. Entonces $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathfrak{T}_z$. Finalmente $\emptyset = \mathcal{V}(R)$ y $k^n = \mathcal{V}(0)$. Por lo tanto \mathfrak{T}_z es una topología. \square

Definición 1.4 Una variedad $V \subset k^n$ es **irreducible** si no es la unión de dos subvariedades propias de V en k^n .

Proposición 1.5 Sea $V \subset k^n$ una variedad en k^n , entonces V es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(V) \subset R$ es un ideal primo.

Demostración. (\Rightarrow) Sean $f, g \in R$ dos polinomios tales que $fg \in \mathcal{I}(V)$, entonces $V \subset \mathcal{V}(fg) = \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$, así $V = (V \cap \mathcal{V}(f)) \cup (V \cap \mathcal{V}(g))$. Pero $(V \cap \mathcal{V}(f))$ y $(V \cap \mathcal{V}(g))$ son cerrados en la topología de Zariski y V es irreducible, entonces podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que $V = V \cap \mathcal{V}(f)$. Lo que implica que $V \subset \mathcal{V}(f)$ y por lo tanto $f \in \mathcal{I}(V)$. Por lo tanto $\mathcal{I}(V)$ es primo.

(\Leftarrow) Sea $P = \mathcal{I}(V) \subset R$ un ideal primo y supongamos que $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1, V_2 \subset k^n$ variedades, entonces $P = \mathcal{I}(V_1) \cap \mathcal{I}(V_2)$. Dado que P es primo, se tiene que $P = \mathcal{I}(V_1)$ ó que $P = \mathcal{I}(V_2)$. De donde $\mathcal{V}(P) = V_1$ ó $\mathcal{V}(P) = V_2$. Por lo tanto V es irreducible. \square

Teorema 1.6 (Nullstellensatz) [36, Teorema 6.102] Si I es un ideal de $R = k[x_1, \dots, x_n]$, donde k es un campo algebraicamente cerrado, entonces $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

El **anillo de coordenadas de una variedad afín** $V \subset k^n$ es $k[V] := R/\mathcal{I}(V)$. Los elementos de $k[V]$ pueden ser interpretados como las funciones polinomiales k -valuadas en V .

Observación 1.7 [11, Pag 4] Existen subconjuntos abiertos (en la topología de Zariski) de una variedad afín V que son variedades afines en sí mismos. En efecto, sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad afín y sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$. Definamos

$$V_f := \{a \in V \mid f(a) \neq 0\} = \mathcal{V}(f)^c \cap V \subset V,$$

entonces V_f es un abierto de Zariski en V , y además es una variedad afín.

IDEALES TÓRICOS Y VARIETADES TÓRICAS AFINES

2.1 IDEALES TÓRICOS Y CONJUNTOS TÓRICOS

Sea $R = k[t_1, \dots, t_q]$ un anillo de polinomios y $S = k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un anillo de Laurent, ambos sobre el campo k . Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, denotamos por x^α el monomio $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ en $k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Dada una matriz $n \times q$, con entradas enteras y columnas diferentes de cero $D = (d_i^j)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq q}}$ le asociamos el homomorfismo de k -álgebras

$$\phi : R = k[t_1, \dots, t_q] \longrightarrow k[x^{d_1}, \dots, x^{d_q}] \subseteq S \quad (2.1)$$

definido por $\phi(t_i) = x^{d_i}$, donde $d_i = (d_i^1, \dots, d_i^n)$ es la i -ésima columna de D , es decir

$$\phi(t_i) = x^{d_i} := x_1^{d_i^1} \cdots x_n^{d_i^n}. \quad (2.2)$$

El núcleo de ϕ es el **ideal tórico asociado a D** y es denotado por P_D . Un ideal tórico P_D es de **Intersección completa** si $\mu(P_D) = ht(P_D)$, donde $\mu(P_D)$ es la cardinalidad de un conjunto mínimo de generadores de P_D .

Los siguientes resultados relacionan ϕ con el homomorfismo $\psi : \mathbb{Z}^q \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ determinado por la matriz D en la base canónica de \mathbb{Z}^q y \mathbb{Z}^n .

Lema 2.1 [13] $\phi(t^\alpha) = x^{\psi(\alpha)}$ para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^q$.

Demostración. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ entonces,

$$\phi(t^\alpha) = \phi\left(\prod_{i=1}^q t_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^q \phi(t_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^q (x^{d_i})^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^q (x_1^{d_i^1 \alpha_i} \cdots x_n^{d_i^n \alpha_i})$$

$$= x_1^{\sum_{i=1}^q d_i^1 \alpha_i} \cdots x_n^{\sum_{i=1}^q d_i^n \alpha_i} = x^{(\sum_{i=1}^q d_i^1 \alpha_i, \dots, \sum_{i=1}^q d_i^n \alpha_i)}.$$

$$\text{Además } \psi(\alpha) = D_\alpha = \begin{pmatrix} d_1^1 & \cdots & d_q^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^n & \cdots & d_q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^q d_i^1 \alpha_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^q d_i^n \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\phi(t^\alpha) = x^{\psi(\alpha)}$. □

Proposición 2.2 $g = t^\alpha - t^\beta \in \ker(\phi)$ si y sólo si $\alpha - \beta \in \ker(\psi)$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $g = t^\alpha - t^\beta \in \ker(\phi)$, entonces $0 = \phi(g) = \phi(t^\alpha) - \phi(t^\beta)$. De donde $\phi(t^\alpha) = \phi(t^\beta)$. Por el Lema 2.1 tenemos que $x^{\psi(\alpha)} = x^{\psi(\beta)}$ lo que implica que $0 = \psi(\alpha) - \psi(\beta) = \psi(\alpha - \beta)$. Por lo tanto $\alpha - \beta \in \ker(\psi)$.

(\Leftarrow) Sea $\alpha - \beta \in \ker(\psi)$, entonces $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$. Así que $\phi(t^\alpha) = x^{\psi(\alpha)} = x^{\psi(\beta)} = \phi(t^\beta)$. De donde $\phi(t^\alpha - t^\beta) = 0$. Por lo tanto $t^\alpha - t^\beta \in \ker \phi$. □

El **conjunto tórico afín** determinado por la matriz D es el conjunto:

$$\Gamma^* = \{(a_1^{d_1^1} \cdots a_n^{d_1^n}, \dots, a_1^{d_q^1} \cdots a_n^{d_q^n}) \in \mathbb{A}_k^q \mid (a_1, \dots, a_n) \in (k^*)^n\}. \quad (2.3)$$

Además, si las entradas de D no son negativas, podemos definir

$$\Gamma = \{(a^{d_1}, \dots, a^{d_q}) \mid a \in k^n\}. \quad (2.4)$$

Proposición 2.3 [11, Proposición 1.1.11] Un ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_s]$ es tórico si y sólo si es primo y generado por binomios.

2.2 VARIEDADES TÓRICAS AFINES Y CONJUNTOS TÓRICOS

El **toro de dimensión** n es el subespacio abierto afín

$$(k^*)^n = k^n \setminus \mathcal{V}(x_1 \cdots x_n) \subset k^n, \quad (2.5)$$

su anillo de coordenadas es la localización de $R = k[x_1, \dots, x_n]$ en el conjunto multiplicativo de monomios, es decir $k[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n} = \{g/m \in k(V) \mid g \in R \text{ y } m \text{ es un monomio en } R\} = k[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$. Este anillo es llamado el **anillo de polinomios de Laurent**.

Un **toro** T es un variedad afín isomorfa a $(k^*)^n$, donde T hereda la estructura de grupo del isomorfismo.

Definición 2.4 [11, Definición 1.1.3] Una **variedad tórica afín** es una variedad afín irreducible V que contiene un toro $T_N \simeq (k^*)^n$ como un conjunto abierto de Zariski.

Proposición 2.5 [11, Teorema 1.1.17] Una variedad afín es tórica si y sólo si es la variedad de un ideal tórico.

2.3 IDEALES LATTICES Y ANILLOS DE SEMIGRUPO

Una **lattice** es un grupo abeliano libre de rango finito, entonces una lattice de rango n es isomorfa a \mathbb{Z}^n . Un **semigrupo** es un conjunto S con una operación binaria asociativa tal que posee identidad. Un **semigrupo afín** es un semigrupo finitamente generado (tal que puede estar encajado en una lattice M) cuya operación binaria además sea conmutativa. Un ejemplo de un semigrupo afín es $\mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$. Dada una lattice M y un subconjunto finito $\mathfrak{A} \subseteq M$ se tiene el semigrupo afín $\mathbb{N}\mathfrak{A} \subseteq M$, además bajo isomorfismo todos los semigrupos afines son de la forma anterior (ver [11]).

Dados A un grupo abeliano, k un campo y Q el semigrupo generado por un subconjunto finito $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subseteq A$, entonces el **anillo de semigrupos** $k[Q]$ de Q es la k -álgebra con k -base $\{\mathbf{t}^a \mid a \in Q\}$ y multiplicación definida por $\mathbf{t}^a \cdot \mathbf{t}^b = \mathbf{t}^{a+b}$. Sea L la sublattice de \mathbb{Z}^n definida como el kernel del homomorfismo grupos

$$f: \mathbb{Z}^n \rightarrow A$$

donde $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces $\mathbb{Z}^n/L \subseteq A$ y $Q \cong \mathbb{N}^n / \sim_L$, con \sim_L la relación de equivalencia sobre \mathbb{N}^n dada por $\mathbf{u} \sim_L \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in L$. Para más detalles ver [29].

Definición 2.6 [29, Definición 7.2] Si L es una lattice, entonces el ideal $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \text{ y } \alpha - \beta \in L \rangle$ es llamado el **ideal lattice** asociado a L .

Proposición 2.7 [11, Definición 1.1.10] Un **ideal tórico** es un ideal lattice primo.

Teorema 2.8 [29, Teorema 7.3] El anillo de semigrupo $k[Q]$ es isomorfo al cociente S/I_L .

Proposición 2.9 [29, Proposición 7.5] La dimensión de Krull de $k[Q]$ es igual a $n - \text{rango}(L)$.

2.4 IDEALES TÓRICOS ASOCIADOS A GRÁFICAS

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, conjunto de aristas $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. La **matriz de incidencia de G** es la matriz $D_G = (a_{ij})_{n \times m}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

El homomorfismo de k -álgebras asociado a D_G es denotado por ϕ_G , es decir $\phi_G : k[t_1, \dots, t_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ dado por $\phi_G(t_k) = x_i x_j$, donde $e_k = \{v_i, v_j\} \in E(G)$. Además, el **álgebra de aristas de la gráfica G** denotada por $k[G]$ es la imagen de el homomorfismo ϕ_G , entonces $k[G] = k[x_i x_j \mid \{v_i, v_j\} \in E(G)] \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Al ideal tórico P_{D_G} lo denotaremos por P_G . Entonces se tiene por [42] que $ht(P_G) = m - n + b(G)$, donde $b(G)$ es el número de componentes conexas bipartitas de G . Decimos que G es una **intersección completa** si su ideal tórico P_G es de Intersección completa.

Sea $w = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_r} = v_{i_0})$ una caminata cerrada par en G , con $e_{k_j} = \{v_{i_{j-1}}, v_{i_j}\}$, entonces el binomio asociado a w es:

$$B_w := \prod_{l=1}^r t_{k_{2l-1}} - \prod_{l=1}^r t_{k_{2l}}.$$

El conjunto de aristas de w , se puede particionar en dos conjuntos $w^+ = \{e_{i_j} \mid j \text{ es impar}\}$ y $w^- = \{e_{i_j} \mid j \text{ es par}\}$. Las aristas de w^+ son llamadas **aristas impares** del camino y las aristas correspondientes a w^- **aristas pares**.

Observemos que en el caso de un camino cerrado par, la paridad de las aristas depende únicamente del arista desde la que inicia el conteo. Un camino cerrado par $w = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{2q}})$ es **primitivo** si $B_w \neq 0$ y no existe un subcamino cerrado par ϵ de w de longitud menor tal que $\epsilon^+ \subseteq w^+$ y $\epsilon^- \subseteq w^-$. El camino w es primitivo si y sólo si el binomio B_w es primitivo (ver [35]).

Lema 2.10 [32, Lema 3.2] y [35, Teorema 2.1] Sea B_w un binomio primitivo, entonces una de las siguientes condiciones se cumple:

1. w es un ciclo par
2. w está formado por dos ciclos impares con un único vértice en común.
3. w está formado por dos ciclos C_1, C_2 impares disjuntos unidos por dos caminos que conectan un vértice $v_1 \in V(C_1)$ y un vértice $v_2 \in V(C_2)$.

El **sumidero (sink)** de un bloque B es un vértice en común entre dos aristas pares ó dos aristas impares de un camino w que pertenece al bloque B . En particular, si e es una arista de corte de un camino primitivo, entonces e aparece al menos dos veces en el camino y pertenece a w^- ó w^+ , por lo tanto, ambos vértices de e son sumideros (ver [35]).

Definición 2.11 [35, Definición 4.4] y [32] Una cuerda $f = \{v_1, v_2\}$ es llamada un **puente** de una caminata primitiva w si existen dos diferentes bloques B_1, B_2 de w tales que $v_1 \in B_1$ y $v_2 \in B_2$. Una **cuerda es par (impar)** si no es un puente y separa el camino en dos caminos pares (impares).

Observación 2.12 [35] En general, para una caminata par primitiva w puede existir al menos una cuerda f que separe a la caminata primitiva en dos caminatas pares, pero puede existir otra caminata primitiva par w' tal que $w = w'$, $B_w = B_{w'}$ y f separa w' en dos caminatas impares.

Teorema 2.13 [35, Teorema 3.2] Sea G una gráfica y w una caminata cerrada par de G . B_w es primitivo si y sólo si

1. Todo bloque de w es un ciclo o una arista de corte,
2. Cada arista múltiple de la caminata w es una arista doble de la caminata y una arista de corte de w ,

3. Todo vértice de corte de w pertenece a exactamente dos bloques y es un sumidero para ambos bloques.

Corolario 2.14 [35, Corolario 3.3] Sea G una gráfica y sea W una subgráfica conexa de G . La subgráfica W es la gráfica de un camino w con B_w primitivo si y sólo si W satisface las siguientes condiciones:

1. W es un ciclo par ó
2. W no es 2-conexa y
 - a) Todo bloque de W es un ciclo ó una arista de corte y
 - b) Todo vértice de corte de W pertenece a exactamente dos bloques y separa la gráfica en dos partes, el número total de aristas de los bloques cíclicos en cada parte es impar.

Definición 2.15 [15, Definiciones 1.1 y 1.2] Una matriz B con entradas en los enteros es llamada **mixta** si cada fila de B tiene por lo menos una entrada positiva y una entrada negativa. Decimos que B es **dominante** si no contiene ninguna submatriz mixta cuadrada. El máximo común divisor de todo menor $t \times t$ de B donde $t \leq \text{rank}(B)$ es denotado por $\Delta_t(B)$.

Teorema 2.16 [15, Teorema 2.9] y [24, Teorema 1.1] Sea P_A un ideal torico de altura r y sean $g_i = x^{\alpha_i} - x^{\beta_i} \in P_A$ con $\text{mcd}(x^{\alpha_i}, x^{\beta_i}) = 1$ para $1 \leq i \leq r$. Si B denota la matriz $r \times n$ cuya i -ésima fila está dada por $\alpha_i - \beta_i$ para $1 \leq i \leq r$, entonces

$$P_A = (g_1, \dots, g_r) \quad \text{si y sólo si} \quad B \text{ es dominante y } \Delta_r(B) = 1.$$

Lema 2.17 [6, Lema 2.5] Sea B una matriz $r \times n$ con vectores columna $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}^r$ tal que c_i tiene a lo más una entrada distinta de cero para algún $1 \leq i \leq n$, denotemos por B' a la matriz $r \times (n-1)$ cuyos vectores columna son $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n$. Entonces B es dominante si y sólo si B' es dominante.

Teorema 2.18 [6, Teorema 3.4] Toda subgráfica inducida de una gráfica de Intersección completa es de Intersección completa.

Corolario 2.19 [6, Corolario 3.5] Una gráfica es de Intersección Completa si y sólo si cada una de sus componentes es de Intersección Completa.

Teorema 2.20 [6, Corolario 3.7] Sea G una gráfica de Intersección Completa, entonces

1. $2|E(G)| + 4 \leq 3|V(G)|$ si G es bipartita
2. $2|E(G)| \leq 3|V(G)|$ si G no es bipartita.

Corolario 2.21 [6, Corolario 3.9] Si G es una Intersección Completa, entonces no contiene a $K_{2,3}$ como subgráfica.

Lema 2.22 [6, Lema 5.1] Sea G una gráfica con un vértice v de grado dos en G . Sean H_1, H_2 dos subgráficas inducidas de G tales que $v \in V(H_i)$, $\deg_{H_i}(v) = 2$ y $b(H_i \setminus \{v\}) = b(H_i)$ para $i = 1, 2$. Entonces, si G es una Intersección completa, se tiene que $b(H \setminus \{v\}) = b(H)$ donde $H = [V(H_1) \cap V(H_2)]$.

Proposición 2.23 [6, Proposición 5.3] Sea G una gráfica con un vértice v de grado dos que no pertenece a un triángulo en G . Si G es de Intersección Completa, entonces G_v^c (ver Definición 1.1) también lo es.

Teorema 2.24 [6, Teorema 5.7] Gráficas theta impares con vértices base no adyacentes y gráficas theta pares no son de Intersección Completa.

Lema 2.25 [6, Lema 6.10] Sea G una 1-suma-clique o una 2-suma-clique de una gráfica H y una gráfica anillada bipartita R . Entonces, G es una Intersección Completa si y sólo si H es una Intersección Completa.

Lema 2.26 [6, Lema 6.12] Sea W una rueda parcial impar. W es una intersección completa si y sólo si W es una CI-rueda parcial impar.

Lema 2.27 [6, Lema 6.14] Sea G una gráfica conexa con $V(G) = V(C) \cup \{b_1, b_2\}$ donde C es un ciclo primitivo impar, $\{b_1, b_2\} \in E(G)$ y $\deg_G(b_1), \deg_G(b_2) \geq 2$. Entonces, G es una intersección completa si y sólo si G es una CI-doble-rueda.

Lema 2.28 [6, Lema 6.16] Sea G una gráfica conexa con $V(G) = V(C) \cup \{c\}$ donde C es una banda parcial impar. Entonces, G es una Intersección Completa si y sólo si $\deg_G(c) = 1$ ó G es una CI-vértice-banda (ver sección 1.1.2).

Lema 2.29 [6, Lema 6.17] Sea G una gráfica conexa con $V(G) = V(C) \cup \{c_1, c_2\}$ donde C es una banda parcial impar, $\{c_1, c_2\} \in E(G)$ y c_1, c_2 tienen grado ≥ 2 . Entonces G es una Intersección Completa si y sólo si G es una 2-suma-clique de C y un 4-ciclo.

Observación 2.30 [6, Sección 6] Toda gráfica G tiene una partición (no necesariamente única) de dos subgráficas inducidas C y R donde R es un gráfica bipartita y $V(C) = V(C_1) \sqcup \dots \sqcup V(C_s)$ donde C_1, \dots, C_s son ciclos primitivos impares. En este caso denotaremos a G por $[C; R]$. Cuando G es bipartita se tiene que C es la gráfica vacía.

Corolario 2.31 [20, Corolario 3.4] Si G es una gráfica bipartita, entonces G es una Intersección Completa si y sólo si G es una gráfica anillada.

Teorema 2.32 [6, Teorema 6.5] Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa de intersección completa. Entonces R es una gráfica anillada, mientras que C satisface una de las siguientes condiciones: $C = \emptyset$, C es un ciclo impar, C es una banda parcial impar ó C está formado por dos ciclos impares disjuntos.

Teorema 2.33 [6, Teorema 6.18] Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa, donde R es 2-conexa y C es conexa. Entonces G es una Intersección Completa si y sólo si R es una gráfica anillada bipartita y se cumple una de las siguientes condiciones

1. $C = \emptyset$,
2. G es una 1-suma-clique de R con una de las siguientes gráficas
 - a) una CI-rueda parcial impar,
 - b) una 1-suma-clique de una banda parcial impar y una arista,
 - c) una CI-vértice banda,
3. G es una 2-suma-clique de R con una de las siguientes gráficas
 - a) una CI-rueda doble,
 - b) una banda parcial impar .

GRÁFICAS DE INTERSECCIÓN COMPLETA

Definición 3.1 Si C es una banda parcial impar, de tal forma que $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$, donde C_1 y C_2 son ciclos impares y sólo hay una arista entre C_1 y C_2 en C , entonces C es llamada una **1-banda parcial impar**.

Lema 3.2 Sea $G = [C; R]$ una gráfica de intersección completa con C conexa y $\deg_C(x) \geq 2$ para todo $x \in V(C)$. Si existen dos vértices distintos $z_1, z_2 \in V(C)$, tales que no existen dos caminos con diferente paridad de z_1 a z_2 , entonces C es una 1-banda parcial impar donde la única arista entre sus ciclos es $\{z_1, z_2\}$.

Demostración. Si existe un ciclo impar $C_1 \subseteq C$ tal que $z_1, z_2 \in C_1$, entonces podemos suponer que $C_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{r_1}, a_1)$ con $z_1 = a_1$ y $z_2 = a_i$. De donde $\mathcal{L}_1 = (a_1, a_2, \dots, a_i)$ y $\mathcal{L}_2 = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{r_1}, a_1)$ son dos caminos con diferente paridad. Lo cual es una contradicción, así que no existe tal ciclo impar. Entonces por el Teorema 2.32, C es una banda parcial impar y existen ciclos impares disjuntos C_2, C_3 tales que $V(C) = V(C_2) \cup V(C_3)$. Como no existe un ciclo impar que contenga a z_1 y z_2 , podemos asumir que $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2})$, $C_3 = (c_1, \dots, c_{r_3})$ con $z_1 = b_1$ y $z_2 = c_1$. Además C es conexa, entonces existe $\{b_i, c_j\} \in E(G)$. Si $i \neq 1$, entonces $\mathcal{L}'_1 = (b_1, \dots, b_i, c_j, c_{j-1}, \dots, c_1)$ y $\mathcal{L}'_2 = (b_1, \dots, b_i, c_j, c_{j-1}, \dots, c_1)$ son dos caminos con diferente paridad de b_1 a c_1 . Lo que implica que $i = 1$. Similarmente $j = 1$. Por lo tanto la única arista entre C_2 y C_3 es $\{c_1, b_1\}$. \square

Lema 3.3 Sea $G = [C; R]$ una gráfica de Intersección Completa con C conexa y $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ tres caminos en R tales que $N_G(C) \cap (\cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i)) = \{x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3}\}$ donde $\mathcal{P}_i = (x, x_i^1, \dots, x_i^{r_i})$ para $1 \leq i \leq 3$. Si $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{x\}$ para $i \neq j$ entonces existe al menos un vértice $v \in V(P) \setminus \{x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3}\}$ con $P := G[V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2) \cup V(\mathcal{P}_3)]$ tal que $\deg_P(v) = 2$.

Demostración. Tomemos $X = \{x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3}\}$ y consideremos dos casos

1. $\deg_P(x_i^{r_i}) \geq 2$ para cada $1 \leq i \leq 3$. Supongamos que $\deg_P(v) \geq 3$ para todo $v \in V(P) \setminus \{x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3}\}$, entonces

$$2|E(P)| = \sum_{v \in V(P)} \deg_P(v) = \sum_{v \in V(P) \setminus X} \deg_P(v) + \sum_{v \in X} \deg_P(v) \geq$$

$$3(|V(P)| - 3) + 2(3) = 3|V(P)| - 3,$$

entonces $2|E(P)| + 4 \geq 3|V(P)| + 1 > 3|V(P)|$. Pero $P \subseteq R$ es bipartita, entonces por el Teorema 2.20 se tiene que G no es de Intersección Completa. Lo que es una contradicción.

2. Existe al menos un $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\deg_P(x_j^{r_j}) = 1$:

Sean $X' = \{x_j^{r_j} \mid \deg_P(x_j^{r_j}) = 1\} \subseteq X$ y $P' = G[V(P) \setminus X']$, entonces $Y = N_P(X') \subseteq \{x_1^{r_1-1}, x_2^{r_2-1}, x_3^{r_3-1}\}$. Supongamos que $\deg_{P'}(v) \geq 3$ para todo $v \in V(P') \setminus (X \cup Y)$ y $\deg_{P'}(v) \geq 2$ para cada $v \in ((X \setminus X') \cup Y)$, entonces

$$2|E(P')| = \sum_{v \in V(P')} \deg_{P'}(v) = \sum_{v \in V(P') \setminus (X \cup Y)} \deg_{P'}(v) + \sum_{v \in ((X \setminus X') \cup Y)} \deg_{P'}(v) \geq$$

$$3(|V(P')| - |(X \setminus X') \cup Y|) + 2(|(X \setminus X') \cup Y|) = 3|V(P')| - |(X \setminus X') \cup Y|.$$

Además $|(X \setminus X') \cup Y| = |X \setminus X'| + |Y| = (3 - |X'|) + |X'| = 3$, así

$$2|E(P')| + 4 \geq 3|V(P')| - |(X \setminus X') \cup Y| + 4 = 3|V(P')| - 3 + 4 > 3|V(P')|,$$

Pero $P' \subseteq R$ es bipartita. Entonces G no es de Intersección Completa por el Teorema 2.20. Lo que es una contradicción.

□

Lema 3.4 Sea $G = [C; R]$ una gráfica con C conexa y $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ tres caminos en R tales que $N_G(C) \cap (\cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i)) = \{x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3}\}$, donde $\mathcal{P}_i = (x, x_i^1, \dots, x_i^{r_i})$ para $1 \leq i \leq 3$. Si $V(\mathcal{P}_j) \cap V(\mathcal{P}_k) = \{x\}$ para $1 \leq j < k \leq 3$, entonces G no es de Intersección Completa.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que si existe un camino P'_i que va de x a C , tal que $V(P'_i) \subseteq V(\mathcal{P}_i)$ entonces $V(P'_i) = V(\mathcal{P}_i)$,

para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Tomamos $H := G[\cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i) \cup V(C)]$, por el Lema 3.3, existe $x' \in \cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i)$ tal que $\deg_H(x') = 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x' \in V(\mathcal{P}_1)$. Tomemos las subgráficas $G_1 = H[V(C) \cup V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)]$ y $G_2 = H[V(C) \cup V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_3)]$, entonces $b(G_1) = b(G_2) = b(G_1 \setminus x') = b(G_2 \setminus x') = 0$ debido a que $x' \notin C \subset V(G_1) \cap V(G_2)$ y $G_i \setminus \{x'\}$ es conexa para $i = 1, 2$. Sin embargo $b(G_3) = 0$ y $b(G_3 \setminus x') = 1$ con $G_3 = G_1 \cap G_2 = H[V(C) \cup V(\mathcal{P}_1)]$. Por lo tanto G no es intersección completa, por el Lema 2.22. \square

Lema 3.5 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa tal que C es una banda parcial impar con $A = \{y_1, \dots, y_r\} \subseteq R \cap N_G(C)$ tal que $|N_G(y_i) \cap V(C)| \geq 2$ para toda $1 \leq i \leq r$. Si G es una Intersección Completa entonces se cumple una de las siguientes condiciones:

- i) $r = 0$ y $G = C$.
- ii) $r = 1$ y $G[V(C) \cup A]$ es una CI-vértice-banda.
- iii) $r = 2$ y C es una 1-banda parcial impar cuyos ciclos son $C_1 = (x_1, \dots, x_{s_1})$ y $C_2 = (z_1, \dots, z_{s_2})$ con $\{x_1, z_1\} \in E(G)$, $N_G(y_1) \cap V(C) = \{x_2, x_{s_1}\}$, $N_G(y_2) \cap V(C) = \{z_2, z_{s_2}\}$ y $\{y_1, y_2\} \notin E(G)$.

Demostración. Tomemos $G_i = G[V(C) \cup \{y_i\}]$ para cada $1 \leq i \leq r$. Por el Lema 2.28, G_i es una CI-vértice-banda. Supongamos que los ciclos de C son $C_1 = (x_1, \dots, x_{s_1})$, $C_2 = (z_1, \dots, z_{s_2})$ tales que $\{x_1, z_1\} \in E(G)$, entonces $N_G(y_i) \cap V(C) = \{x_2, x_{s_1}\}$ ó $N_G(y_i) \cap V(C) = \{z_2, z_{s_2}\}$. Si $r \geq 3$, podemos suponer que $N_G(y_1) = N_G(y_2) = \{z_2, z_{s_2}\}$. Por lo que $G[z_1, z_2, z_{s_2}, y_1, y_2]$ contiene un $K_{2,3}$ como subgráfica. Lo cual es una contradicción por el Corolario 2.21. Por lo tanto $r \leq 2$. Si $r = 0$, entonces $G = C$, porque G es conexa. Si $r = 1$ entonces $G[V(C) \cup A]$ es una CI-vértice-banda. Ahora asumimos que $r = 2$, como G no tiene un $K_{2,3}$ como subgráfica, entonces $N_G(y_1) \cap V(C) = \{x_2, x_{s_2}\}$ y $N_G(y_2) \cap V(C) = \{z_2, z_{s_2}\}$. Como G_1 y G_2 son CI-vértice-bandas, entonces $N_G(C_1) \cap V(C_2) = \{z_1\}$ y $N_G(C_2) \cap V(C_1) = \{x_1\}$. Por lo tanto C es una 1-banda-parcial-impar. Finalmente por el lema 2.29 $\{y_1, y_2\} \notin E(G)$.

Lema 3.6 Sea $G = [C; R]$ una gráfica con C una 1-banda parcial impar cuyos ciclos son $C_1 = (x_1, \dots, x_{s_1})$ y $C_2 = (z_1, \dots, z_{s_2})$. Si $V(R) = \{y_1, y_2\}$ y $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{y_1, x_2\}, \{y_1, x_{s_1}\}, \{y_2, z_2\}, \{y_2, z_{s_2}\}, \{x_1, z_1\}\}$ entonces G es una Intersección Completa.

Demostración. Se tiene que $ht(G) = |E(G)| - |V(G)| + b(G) = (s_1 + s_2 + 5) - (s_1 + s_2 + 2) + 0 = 3$. Sea $E(G) = \{e_1, \dots, e_{s_1+s_2+5}\}$, donde

$$e_i = \begin{cases} \{y_1, x_2\} & \text{si } i = 1 \\ \{y_1, x_{s_1}\} & \text{si } i = 2 \\ \{y_2, z_2\} & \text{si } i = 3 \\ \{y_2, z_{s_2}\} & \text{si } i = 4 \\ \{x_1, z_1\} & \text{si } i = 5 \\ \{x_{i-5}, x_{i-4}\} & \text{si } 6 \leq i \leq s_1 + 4 \\ \{x_{s_1}, x_1\} & \text{si } i = s_1 + 5 \\ \{z_{i-s_1-5}, z_{i-s_1-4}\} & \text{si } s_1 + 6 \leq i \leq s_1 + s_2 + 4 \\ \{z_{s_2}, z_1\} & \text{si } i = s_1 + s_2 + 5 \end{cases} .$$

Tomemos los caminos cerrados pares

$$w_i = \begin{cases} (x_1, x_2, y_1, x_{s_1}, x_1) & \text{si } i = 1 \\ (z_1, z_2, y_2, z_{s_2}, z_1) & \text{si } i = 2 \\ (x_1, \dots, x_{s_1}, x_1, z_1, \dots, z_{s_2}, z_1, x_1) & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

donde w_1, w_2 son de longitud 4 y w_3 es de longitud $s_1 + s_2 + 2$. Sea el binomio $B_{w_i} = x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^{s_1+s_2+5}$, correspondiente al ciclo par w_i , para $1 \leq i \leq 3$, y sea B la matriz $3 \times (s_1 + s_2 + 5)$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i - \beta_i$. Notemos que para $j \in \{1, \dots, s_1 + s_2 + 5\} \setminus \{6, s_1 + 5, s_1 + 6, s_1 + s_2 + 5\}$ la j -ésima columna tiene a lo más una única entrada distinta de cero. Así las únicas columnas con más de una entrada diferente de cero, son las columnas de la siguiente submatriz de B ,

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La cual es dominante, entonces por el Lema 2.17, B es dominante. Además B tiene a la identidad 3×3 como submatriz de donde $\Delta_3(B) = 1$. Finalmente por el Teorema 2.16, $P_G = (B_{w_1}, B_{w_2}, B_{w_3})$. Por lo tanto G es una Intersección Completa. \square

Lema 3.7 Sea $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ una matriz $n \times n$, cuyas entradas son

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Entonces la matriz M es dominante.

Demostración. Por inducción sobre n . Si $n = 1$, entonces M es dominante. Ahora supongamos que $n \geq 2$. Supongamos por contradicción que M tiene una submatriz cuadrada A que es mixta. Sea M' la matriz que resulta al quitar la primera columna de M . Como la primera columna solo tiene una entrada diferente de cero, entonces por el Lema 2.17 podemos asumir que A es una submatriz de M' . Sea M'' la matriz que resulta de borrar la primera fila de M' , entonces A es una submatriz de M'' porque el primer renglón de M' solo tiene una entrada diferente de cero. Pero M'' tiene la misma estructura que M . Por hipótesis de inducción M'' es dominante. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto M es dominante. \square

Lema 3.8 Sea G una gráfica conexa tal que $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2)$ y $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ donde $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1})$ es un ciclo primitivo impar y $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2})$ es un ciclo primitivo par. Entonces G es de Intersección Completa si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:

- a) $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_{i_2}, b_1\}, \dots, \{a_{i_s}, b_1\}\}$ donde $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_s$, además i_3, \dots, i_s son impares, mientras $i_2 = 2$ ó i_2 es impar.
- b) $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_{i_1}, b_1\}, \dots, \{a_{i_{s_1}}, b_1\}, \{a_{j_1}, b_2\}, \dots, \{a_{j_{s_2}}, b_2\}\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{s_1} \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s_2} \leq r_1$ y $i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2}$ son impares.

Demostración. (\Rightarrow) Como $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2)$ y $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ entonces $G = [C; R]$ donde $R = C_2$ y $C = C_1$. De donde por el Teorema 2.33, G es una 1-suma clique de $R = C_2$ con una CI-rueda parcial impar ó una 2-suma clique de $R = C_2$ con una CI-rueda doble, porque C solo tiene un ciclo impar. En el primer caso G satisface a), mientras que en el segundo caso G satisface b).

(\Leftarrow) Primero supongamos que G satisface a), entonces $G_1 = G[b_1 \cup V(C_1)]$ es una CI-rueda parcial impar. Así por el Lema 2.26, G_1 es una intersección completa. Además G es la 1-suma clique de G_1 con C_2 en el punto b_1 . Por el Lema 2.25 G es intersección completa, porque C_2 es una gráfica anillada.

Ahora, supongamos que G satisface b), entonces $G_2 = G[\{b_1, b_2\} \cup V(C_1)]$ es una CI-rueda doble. Mientras que G es la 2-suma de G_2 y C_2 es la arista $\{b_1, b_2\}$. Así por el Lema 2.27 y el Lema 2.25, G es intersección completa, porque G_2 es intersección completa. \square

Teorema 3.9 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con C conexa tal que no es el vacío ni una 1-banda parcial impar. Sea $\mathcal{L} = (z_1, \dots, z_t)$ el camino más corto en R tal que $N_G(C) \cap V(R) \subseteq V(\mathcal{L})$. Si G es de Intersección Completa, entonces \mathcal{L} es un camino sin cuerdas.

Demostración. Por la minimalidad de \mathcal{L} , se tiene que $z_1, z_t \in N_G(C)$. Supongamos que existen $i, j \in \{2, \dots, t-1\}$ tales que $i+1 < j$ y $\{z_i, z_j\} \in E(G)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el camino $\mathcal{P} = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_j)$ no tiene cuerdas. Entonces existe $z_\alpha \in N_G(C)$ con $i < \alpha < j$ pues en caso contrario $N_G(C) \cap V(R) \subseteq V(\mathcal{L}')$, donde $\mathcal{L}' = (z_1, \dots, z_i, z_j, \dots, z_t)$, lo que contradice la minimalidad de \mathcal{L} . Ahora supongamos que $z_i \notin N_G(C)$ y tomamos los caminos $\mathcal{P}_1 = (z_i, \dots, z_{j_1})$, $\mathcal{P}_2 = (z_i, \dots, z_{j_2})$ y $\mathcal{P}_3 = (z_i, z_j, \dots, z_{j_3})$ donde $j_1 = \max\{r \mid 1 \leq r < i \text{ y } z_r \in N_G(C)\}$, $j_2 = \min\{r \mid i < r \leq \alpha \text{ y } z_r \in N_G(C)\}$, $j_3 = \min\{r \mid j \leq r \text{ y } z_r \in N_G(C)\}$. Tenemos que j_1, j_2, j_3 existen porque $z_1, z_\alpha, z_t \in N_G(C)$. Pero la existencia de \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 y \mathcal{P}_3 contradice el Lema 3.4. De donde $z_i \in N_G(C)$. Similarmente $z_j \in N_G(C)$. Ahora tomemos el ciclo $C_1 = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_j, z_i)$ y $x_{k_l} \in N_G(\{z_l\}) \cap V(C)$ para $l \in \{i, \alpha, j\}$. Como R es bipartita y \mathcal{P} no tiene cuerdas, entonces C_1 es un ciclo primitivo par.

Como \mathcal{P} no tiene cuerdas y C es par, entonces $\{z_i, z_\alpha\} \notin E(G)$ o $\{z_\alpha, z_j\} \notin E(G)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{z_i, z_\alpha\} \notin E(G)$. Si $x_{k_i} \neq x_{k_\alpha}$ entonces por el Lema 3.8 existe un camino \mathcal{P}' entre x_{k_i} y x_{k_α} en C tal que $|V(\mathcal{P}')| \cong |V(\mathcal{P}_1)| \pmod{2}$ donde $\mathcal{P}_1 = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_\alpha)$. Entonces $|V(\mathcal{P}_1)| \cong |V(\mathcal{P}_2)| \cong |V(\mathcal{P}_3)| \pmod{2}$ donde $\mathcal{P}_2 = (z_i, z_j, z_{j-1}, \dots, z_\alpha)$ y $\mathcal{P}_3 = (z_i, x_{k_i}, \mathcal{P}', x_{k_\alpha}, z_\alpha)$. Lo cual es una contradicción por el Teorema 2.24. De donde $x_{k_i} = x_{k_\alpha}$. Si $\{z_\alpha, z_j\} \in E(G)$, entonces existe una theta par formada por los caminos $(z_i, z_{i+1}, \dots, z_\alpha)$, (z_i, z_{k_i}, z_α) , (z_i, z_j, z_α) . Lo cual es una contradicción por el teorema 2.24. Así $\{z_\alpha, z_j\} \notin E(G)$ y por un argumento similar al de que $x_{k_i} = x_{k_\alpha}$, obtenemos que $x_{k_\alpha} = x_{k_j}$. De donde $x = x_{k_i} = x_{k_\alpha} = x_{k_j} \in C$. Pero C es conexa, entonces por el Teorema 2.32, C es un ciclo impar o una banda parcial impar. Por lo que existe un ciclo impar primitivo $C' \subseteq C$, tal que $x \in C'$. Esto no

es posible por el Lema 3.8, porque C_1 es un ciclo primitivo par. Por lo tanto \mathcal{L} no tiene cuerdas. \square

Lema 3.10 Si G es una gráfica bipartita de Intersección Completa y H un ciclo en G , entonces $\tilde{H} = G[H]$ tiene por lo menos 4 vértices de grado 2.

Demostración. Por contradicción, supongamos que $|X| \leq 3$, donde $X = \{x \in V(\tilde{H}) \mid \deg_{\tilde{H}}(x) \leq 2\}$. Entonces

$$2|E(\tilde{H})| = \sum_{x \in V(\tilde{H})} \deg_{\tilde{H}}(x) =$$

$$\sum_{x \in V(\tilde{H}) \setminus X} \deg_{\tilde{H}}(x) + \sum_{x \in X} \deg_{\tilde{H}}(x) \geq 3(|V(\tilde{H})| - |X|) + 2|X| = 3|V(\tilde{H})| - |X|.$$

Así que $2|E(\tilde{H})| + 4 \geq 3|V(\tilde{H})| + 4 - 3 > 3|V(\tilde{H})|$. Esto es una contradicción por el Corolario 2.20. \square

Teorema 3.11 Sea $G = [C; R]$ una gráfica de Intersección Completa, con C conexa. Donde B_1, B_2, \dots, B_t son bloques diferentes de R tales que $N_G(C) \cap V(B_2 \cup \dots \cup B_{t-1}) = \emptyset$. Si a_1, \dots, a_t son vértices diferentes tales que $a_i \in V(B_{i-1}) \cap V(B_i)$ para $2 \leq i \leq t$, $a_1 \in V(B_1) \cap N_G(C)$ y $a_{t+1} \in V(B_t) \cap N_G(C)$, entonces $\{a_i, a_{i+1}\} \in E(G)$ para cada $1 \leq i \leq t$.

Demostración. Supongamos que existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\{a_i, a_{i+1}\} \notin E(G)$. Como B_i es un bloque de G , entonces B_i es 2-conexa y existen dos caminos disjuntos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ en B_i entre a_i y a_{i+1} . Podemos suponer que \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 no tienen cuerdas. Como R es bipartita por el Lema 3.10 $H_1 = G[\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2]$ tiene por lo menos 4 vértices de grado 2. Así podemos suponer que existe $x \in V(\mathcal{P}_1) \setminus \{a_i, a_{i+1}\}$, tal que $\deg_{H_1}(x) = 2$. Tomamos $H_2 = G[\mathcal{P}_1 \cup B_1 \cup \dots \cup \hat{B}_i \cup \dots \cup B_t \cup C]$, entonces $\deg_{H_2}(x) = 2$ y $H_2 \setminus x$ es conexa porque $N_G(C) \cap V(\cup_{i=1}^t B_i) = \{a_1, a_{t+1}\}$ y B_1, \dots, B_t son bloques de R . Esto implica que $b(H_1) = b(H_1 \setminus x) = 1$, $b(H_2) = b(H_2 \setminus x) = 0$. Además $H_3 = H_1 \cap H_2 = \mathcal{P}_1$, por lo que $b(H_3) = 1$ y $b(H_3 \setminus x) = 2$. Lo cual es una contradicción por el Lema 2.22. \square

Lema 3.12 Sea $G = [R; C]$ una gráfica de Intersección Completa con C gráfica conexa no vacía. Sea $\mathcal{L} = (z_1, \dots, z_r)$ un camino en R sin cuerdas tal que $N_G(C) \cap V(\mathcal{L}) = \{z_1, z_r\}$, y $|V(C) \cap N_G(\{z_1, z_r\})| \geq 2$ entonces una de las siguientes dos condiciones se cumple:

- i) z_2, \dots, z_{r-1} son puntos de corte en R .
- ii) $r = 2$, es decir $\mathcal{L} = (z_1, z_2)$.

Demostración. Supongamos que no se cumple ninguna de las dos condiciones. Entonces existe $i \in \{2, \dots, r-1\}$ tal que z_i no es un vértice de corte en R . Supongamos que z_i pertenece al bloque B . Tomemos $i_1 = \min\{j \mid 1 \leq j \text{ y } z_k \in B \text{ para } j \leq k \leq i\}$ y $i_2 = \max\{j \mid j \leq r \text{ y } z_k \in B \text{ para } i \leq k \leq j\}$. Entonces $i_1 \leq i \leq i_2$. Si $i = i_1$ ó $i = i_2$ se tiene que $z_{i-1} \notin B$ ó $z_{i+1} \notin B$ lo que implica que z_i es un vértice de corte en R . Por lo tanto $i \neq i_1$ y $i \neq i_2$. Además $z_{i_1}, z_{i_2} \in B$ son vértices de corte en R , entonces por el Teorema 3.11 se tiene que $\{z_{i_1}, z_{i_2}\} \in E(G)$. Lo cual es una contradicción, porque \mathcal{L} no tiene cuerdas. □

Proposición 3.13 Sea $G = [C; R]$ con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo impar sin cuerdas y R una grafica bipartita, tal que $R = (z_1, \dots, z_t)$ es un camino par sin cuerdas. Con $V(G) = V(C) \cup V(R)$ y $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_{j_1}, x_{k_1}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ de forma que $s \geq 1$ y $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq t$ son impares. Si G es de Intersección Completa entonces una de las siguientes condiciones se cumple

1. Todos los subíndices k_1, \dots, k_s son impares.
2. Existe $\mathcal{A} \subseteq \{1, \dots, s\}$ tal que $k_i = 2$ para todo $i \in \mathcal{A}$ y k_j es impar para todo $j \notin \mathcal{A}$.

Demostración. Como j_1, \dots, j_s son impares, entonces $N_G(z_l) = \{z_{l-1}, z_{l+1}\}$, es decir $\deg_G(z_l) = 2$ para cada l par.

Debido a que G es de intersección completa, por la Proposición 2.23 se tiene que la gráfica simple $G_1 := G_{z_2}^c$ también es de Intersección Completa, de forma inductiva se tiene que las gráficas simples $G_i := (G_{i-1})_{z_{2i}}^c$ para $2 \leq i \leq (t-1)/2$, donde $V(G_i) = V(C) \cup \{z_1, z_3, \dots, z_{2i+1}, z_{2i+2}, \dots, z_t\}$ son de Intersección Completa. Sea $H := G_{(t-1)/2}$, la cual es de Intersección Completa. Tenemos que $V(H) = V(C) \cup \{z\}$ y $E(H) = E(C) \cup \{\{z, x_{k'_1}\}, \dots, \{z, x_{k'_s}\}\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $k'_1 < k'_2 < \dots < k'_s$, con $s' \leq s$. De donde los subíndices k'_1, k'_3, \dots, k'_s son impares y $k'_2 = 2$ ó k'_2 es impar. Por lo tanto, G no satisface ninguna de las condiciones del enunciado, porque $\{k_1, \dots, k_s\} = \{k'_1, \dots, k'_s\}$. □

Proposición 3.14 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo primitivo impar, tal que $R = (z_1, \dots, z_t)$ es un camino par sin cuerdas con $V(G) = V(C) \cup V(R)$ y $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_{j_1}, x_{k_1}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ donde $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq t$ son impares. Si los subíndices k_1, \dots, k_s son impares, entonces la gráfica G es de Intersección Completa si y sólo si ninguna de las siguientes condiciones se cumple:

1. Existen vértices $x_{k_\alpha} \in V(C)$ y $z_{j_\beta} \in V(R)$ no adyacentes y de grado mayor igual a tres, tales que existen subíndices $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ y $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$, tales que para $u, v \in \{1, 2\}$ distintos, se tiene:
 - a) $\{x_{k_{\alpha_1}}, z_{j_\beta}\}, \{x_{k_\alpha}, z_{j_{\beta_u}}\}, \{x_{k_{\alpha_2}}, z_{j_{\beta_v}}\} \in E(G)$ ó
 - b) $\{x_{k_{\alpha_2}}, z_{j_\beta}\}, \{x_{k_\alpha}, z_{j_{\beta_u}}\}, \{x_{k_{\alpha_1}}, z_{j_{\beta_v}}\} \in E(G)$.
2. Existen $\gamma, \delta \in \{1, \dots, r\}$ tales que $k_\gamma \neq k_\delta$ y $\{z_{j_\theta}, z_{j_\omega}\} \subseteq N_G(x_{k_\gamma}) \cap N_G(x_{k_\delta})$, donde $z_{j_\theta} \neq z_{j_\omega}$.

Demostración. (\Leftarrow) Observemos que $ht(G) = |E(G)| - |V(G)| + b(G) = (r + s + t - 1) - (r + t) + 0 = s - 1$. Sea $E(G) = \{e_1, \dots, e_{r+s+t-1}\}$, donde

$$e_i = \begin{cases} \{x_{k_i}, z_{j_i}\} & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ \{x_{i-s}, x_{i-s+1}\} & \text{si } s+1 \leq i \leq s+r-1 \\ \{x_r, x_1\} & \text{si } i = s+r \\ \{z_{i-s-r}, z_{i-r-s+1}\} & \text{si } s+r+1 \leq i \leq s+r+t-1 \end{cases}.$$

Primero supongamos que $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_s$, entonces para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ los ciclos $w_i = (x_{k_i}, \dots, x_{k_{i+1}}, z_{j_{i+1}}, \dots, z_{j_i}, x_{k_i})$ son pares primitivos.

Sea el binomio $B_{w_i} = x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^{s+r+t-1}$, correspondiente al ciclo par w_i y sea B la matriz $(s-1) \times (s+r+t-1)$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i - \beta_i$ y notemos que para $i \in \{1, s, \dots, s+r+t-1\}$ la i -ésima columna tiene a lo más una única entrada distinta de cero, entonces por el Teorema 2.16 basta ver que la submatriz de B , $B' = b'_{ij} \in M_{(s-1) \times (s-2)}$ que consta de las columnas c_2, \dots, c_{s-1} es una matriz dominante.

En efecto, para $k \in \{2, \dots, s-2\}$, notemos que la k -ésima fila de la matriz B' tiene una entrada positiva y una negativa si y sólo si se toma la columna $(k+1)$, por lo tanto una submatriz $C = (c)_{ij} \in M_{p \times q}$ de B' , es mezclada si y sólo si está formada por las columnas $c_{k_0}, c_{k_0+1}, \dots, c_{k_0+(p+1)}$ para $k_0 \in \{2, \dots, s-2\}$ fijo, es decir $q = p+1$ y por lo tanto C no es una matriz cuadrada [15, Definición 1.2], es decir, no existe una submatriz mezclada de B' , por lo tanto B' es dominante,

lo que implica que B también es dominante por el Teorema 2.16. Por lo tanto $P_A = (B_{w_1}, \dots, B_{w_{s-1}})$.

Ahora, supongamos que existen $a, b \in \{1, \dots, s\}$ tales que $j_a < j_b$ y $k_b < k_a$ y $k_1 \leq \dots \leq k_{b-1}$, entonces $\{z_{j_a}, x_{k_b}\} \in E(G)$ pues en caso contrario los vértices $z_{a-1}, z_{j_a}, z_{j_b}$ y $x_{k_{a-1}}, x_{k_a}, x_{k_b}$ cumplen alguna de las condiciones de 1. Por otro lado, si $\{z_{j_b}, x_{k_a}\} \in E(G)$, debido a que ya se vio que $\{z_{j_a}, x_{k_b}\} \in E(G)$ se tendría la condición de 2. Entonces, sin pérdida de generalidad se tiene que $z_{j_b} = z_{j_s}$ y $x_{k_a} = x_{k_s}$ y en este caso podemos considerar que G es una 2-suma-clique de $G' = G[V(C) \cup \{z_1, \dots, z_a\}]$ y el ciclo par $C' = (z_a, \dots, z_{j_b}, x_{k_b}, \dots, x_{k_a})$ entonces por el Lema 2.25 se tiene que G es de Intersección Completa.

(\Rightarrow) Procedamos por inducción sobre $|V(G)|$. Si $V(R) = \{z_1\}$ se tiene que G es de Intersección Completa si y sólo si G es una rueda parcial impar, por lo tanto G no cumple ninguna de las condiciones mencionadas en el enunciado. Entonces supongamos que $R = (z_1, \dots, z_t)$ con $t \geq 3$, si $|V(G)| = 6$, se tiene que $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ y $R = (z_1, z_2, z_3)$, por el Corolario 2.20 el número de aristas de G debe ser menor ó igual a 9 y debido a que $|E(G)| = r + (t - 1) + s$ donde $t, r = 3$ se tiene que $s \leq 4$.

Es fácil ver que si $s \leq 3$ con G de Intersección Completa, ninguna de las condiciones del enunciado se cumplen. Por otro lado, no existe G de Intersección Completa con $s = 4$, en efecto, para este caso el conjunto de aristas de G debe estar dado por $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_1, x_1\}, \{z_1, x_3\}, \{z_3, x_1\}, \{z_3, x_3\}\}$ y para este caso es fácil ver que G no es de Intersección Completa.

Ahora supongamos que $|V(G)| > 6$ y sea $\mathcal{A} \subset \{1, \dots, t\}$ el subconjunto de los subíndices pares tales que para todo $i \in \mathcal{A}$ existen subíndices impares $j_m < i < j_{m'}$ de forma que $k_m > k_{m'}$. Si $\mathcal{A} = \emptyset$ claramente G es de Intersección Completa y además no cumple ninguna de las condiciones del enunciado.

Por otro lado, si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ tomemos $j_p < j_q$ los subíndices impares tales que $k_p > k_q$ y $j_q - j_p = \min \{j_{m'} - j_m \mid j_m < j_{m'} \text{ y } k_m > k_{m'}\}$, definimos $a := j_p + 1$ y $v := z_a$, notemos que $\deg_G(v) = 2$ y tomando la contracción de G en v , $G' := G_v^c$. Se tiene que $G' = [C; R']$ con $R' = (z'_1, \dots, z'_{t-2})$, donde z'_{a-1} corresponde al vértice que resulta de la contracción y

$$z'_i = \begin{cases} z_i & \text{si } i \leq a - 2, \\ z_{i+2} & \text{si } i \geq a \end{cases}$$

además

$$\{z'_j, x_k\} \in E(G_v^c) \iff \begin{cases} \{z_j, x_k\} \in E(G) & \text{y } j \leq a-1, \\ \{z_{j+2}, x_k\} \in E(G) & \text{y } j \geq a-1 \end{cases} .$$

Observemos que $j_p = a-1$ y probemos que si $a+1 < j_q$ entonces $N_G(z_i) = \{z_{i-1}, z_{i+1}\}$, para todo $a+1 \leq i < j_q$, en efecto, supongamos que existe $x_f \in V(C)$ tal que $\{z_i, x_f\} \in E(G)$, si $f < k_p$ se contradice la minimalidad de $j_q - j_p$ pues $i - j_p < j_q - j_p$, y si $k_q < k_p \leq f$ se tiene que $k_q < f$ con $-i < -j_p$ entonces $j_q - i < j_q - j_p$, lo que también contradice la minimalidad de $j_q - j_p$.

Ahora, supongamos que $a+1 < j_q$, y que la gráfica G cumple alguna de las condiciones del enunciado. Si G cumple la condición 2. entonces existen $\gamma, \delta \in \{1, \dots, r\}$ tales que $k_\gamma \neq k_\delta$ y $\{z_{j_\theta}, z_{j_\omega}\} \subseteq N_G(x_{k_\gamma}) \cap N_G(x_{k_\delta})$ con $z_{j_\theta} \neq z_{j_\omega}$, supongamos que $j_\theta < j_\omega$. Si $j_q \leq j_\theta$ entonces $\{z'_{j_\theta-2}, z'_{j_\omega-2}\} \subseteq N_{G'}(x_{k_\gamma}) \cap N_{G'}(x_{k_\delta})$, si $j_\omega \leq j_p$ entonces $\{z'_{j_\theta}, z'_{j_\omega}\} \subseteq N_{G'}(x_{k_\gamma}) \cap N_{G'}(x_{k_\delta})$, si $j_\theta \leq j_p < j_q \leq j_\omega$ entonces $\{z'_{j_\theta}, z'_{j_\omega-2}\} \subseteq N_{G'}(x_{k_\gamma}) \cap N_{G'}(x_{k_\delta})$. Por lo tanto, en cualquier caso, la gráfica G' cumple la condición 2. lo que contradice la hipótesis de inducción.

Si G cumple la condición 1. entonces existen vértices $x_{k_\alpha} \in V(C)$ y $z_{j_\beta} \in V(R)$ no adyacentes y de grado mayor igual a tres, tales que existen subíndices $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ y $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$, tales que:

- a) $\{x_{k_{\alpha_1}}, z_{j_\beta}\}, \{x_{k_\alpha}, z_{j_{\beta_1}}\}, \{x_{k_{\alpha_2}}, z_{j_{\beta_2}}\} \in E(G)$ ó
- b) $\{x_{k_{\alpha_2}}, z_{j_\beta}\}, \{x_{k_\alpha}, z_{j_{\beta_2}}\}, \{x_{k_{\alpha_1}}, z_{j_{\beta_1}}\} \in E(G)$.

Supongamos que se tiene el caso a). Si $j_q \leq j_{\beta_1}$ entonces $\{x_{k_{\alpha_1}}, z'_{j_\beta-2}\}, \{x_{k_\alpha}, z'_{j_{\beta_1}-2}\}, \{x_{k_{\alpha_2}}, z'_{j_{\beta_2}-2}\} \in E(G')$, si $j_{\beta_2} \leq j_p$ entonces $\{x_{k_{\alpha_1}}, z'_{j_\beta}\}, \{x_{k_\alpha}, z'_{j_{\beta_1}}\}, \{x_{k_{\alpha_2}}, z'_{j_{\beta_2}}\} \in E(G')$, si $j_\beta \leq j_p$ y $j_q \leq j_{\beta_2}$ entonces $\{x_{k_{\alpha_1}}, z'_{j_\beta}\}, \{x_{k_\alpha}, z'_{j_{\beta_1}}\}, \{x_{k_{\alpha_2}}, z'_{j_{\beta_2}-2}\} \in E(G')$, si $j_{\beta_1} \leq j_p < j_q \leq j_\beta$ entonces $\{x_{k_{\alpha_1}}, z'_{j_\beta-2}\}, \{x_{k_\alpha}, z'_{j_{\beta_1}}\}, \{x_{k_{\alpha_2}}, z'_{j_{\beta_2}-2}\} \in E(G')$. Y de forma similar se tiene lo mismo para el caso b). Por lo tanto, en cualquier caso, la gráfica G' cumple la condición 1. lo que contradice la hipótesis de inducción.

Por lo tanto $j_p = a-1$ y $j_q = a+1$. Por otro lado, definamos s como el número de aristas entre C y R y s' como el número de aristas entre C y R' y notemos que

$$s - s' = |N_G(z_{a-1}) \cap N_G(z_{a+1}) \cap V(C)| \quad (3.1)$$

Debido a que G es de Intersección Completa, por hipótesis de inducción se tiene que G' no cumple ninguna de las condiciones del enunciado, por lo que G tampoco cumple ninguna de las condiciones del enunciado a menos que:

A) $s - s' \geq 2$

En este caso, por la ecuación 3.1 existen al menos dos vértices distintos $x_d, x_e \in V(C)$ tales que $\{x_d, x_e\} \subset N_G(z_{a-1}) \cap N_G(z_{a+1})$ o equivalentemente $\{z_{a-1}, z_{a+1}\} \subset N_G(x_d) \cap N_G(x_e)$, lo que corresponde a la condición 2. Ahora definimos las subgráficas $H'_1 := [\{z_{a-1}, z_a, z_{a+1}, x_d\}]$ y $H'_2 := [\{z_{a-1}, z_a, z_{a+1}, x_e\}]$ y observemos que $b(H'_i) = 1 = b(H'_i \setminus z_a)$ para $i = 1, 2$, sin embargo $b(H') = 1$ y $b(H' \setminus z_a) = 2$ con $H' := [\{z_{a-1}, z_a, z_{a+1}\}]$, por lo tanto G no es de Intersección Completa, lo cual es una contradicción.

B) $s - s' = 0$ y existen $\alpha_1 < a - 1$ y $1 < \beta_1 < \beta < r$ tales que $\{x_{k_{\alpha_1}}, z_{a-1}\}, \{x_{k_{\alpha}}, z_{j_{\beta_1}}\}, \{x_{k_{\alpha}}, z_{a+1}\} \in E(G)$.

En este caso se tiene que $\alpha_2 = \alpha$, $\beta = a - 1$ y $\beta_2 = a + 1$ y debido a que $\alpha_1 \neq 1$, la gráfica G tiene caminos $\mathcal{L}''_1 = (x_{k_{\alpha}}, x_{k_{\alpha}-1}, \dots, x_{k_{\alpha_1}}, z_{a-1})$, $\mathcal{L}''_2 = (x_{k_{\alpha}}, z_{j_{\beta_1}}, z_{j_{\beta_1}+1}, \dots, z_{a-1})$ y $\mathcal{L}''_3 = (x_{k_{\alpha}}, z_{a+1}, z_a, z_{a-1})$ y por otro lado, la gráfica G' contiene a los caminos pares $\mathcal{L}^*_1 = (x_{k_{\alpha_1}}, x_{k_{\alpha_1}-1}, \dots, x_1, z'_1, z'_2, \dots, z'_{j_{\beta_1}})$, $\mathcal{L}^*_2 = (x_{k_{\alpha_1}}, x_{k_{\alpha_1}+1}, \dots, x_{k_{\alpha}}, z'_{j_{\beta_1}})$, $\mathcal{L}^*_3 = (x_{k_{\alpha_1}}, z'_{a-1}, \dots, z'_{j_{\beta_1}})$, por lo tanto, por el Teorema 2.24 se tiene que G' no es de Intersección Completa. □

Lema 3.15 Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa con $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ y $a := ht(G)$, para $i \in \{1, \dots, a\}$ sean $w_i = (u_{l_0}^i, u_{l_1}^i, \dots, u_{l_{2r_i}}^i)$ caminos primitivos pares distintos con $e_{k_j}^i = (u_{l_{j-1}}^i, u_{l_j}^i)$.

Si existen $p, q \in \{1, \dots, m\}$ con $p \neq q$, tales que e_p es un arista impar de los ciclos w_r, w_s y e_q es un arista par de los ciclos w_r, w_s , para $r, s \in \{1, \dots, a\}$ distintos. Entonces G no es una Intersección Completa.

Demostración. Sea $B_{w_i} = x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^m$, el binomio asociado al ciclo par w_i y $B = (b_{ij})$ la matriz $a \times m$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i - \beta_i$.

Como e_p es un arista impar de los ciclos w_r, w_s y e_q es un arista par de los ciclos w_r, w_s , es decir, $e_p \in w_r^+, w_s^+$ y $e_q \in w_r^-, w_s^-$, con $r \neq s$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b_{rp} = 1 = b_{sp}$ y que $b_{rq} = -1 = b_{sq}$, si B' es la submatriz 2×2 de B dada de la siguiente manera:

$$B' = \begin{pmatrix} b_{rp} & b_{rq} \\ b_{sp} & b_{sq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces B' es una matriz mixta cuadrada lo que implica que B no es dominante. Por lo tanto G no es una Intersección Completa por el Teorema 2.16. \square

Lema 3.16 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo primitivo impar y R con un camino sin cuerdas $\mathcal{L} = (z_1, \dots, z_t)$ tal que $V(C) \cup V(\mathcal{L}) \subseteq V(G)$ y $E(C) \cup E(\mathcal{L}) \cup \{\{x_1, z_1\}, \dots, \{x_{k_s}, z_{j_s}\}\} \subseteq E(G)$. Si existen subíndices $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, s\}$ tales que $j_\alpha \leq j_\beta \leq j_\gamma$, $k_\beta \leq k_\alpha \leq k_\gamma$, $\{x_{k_\alpha}, z_{j_\beta}\} \notin E(G)$, $k_\alpha \equiv k_\beta \pmod{2} \equiv k_\gamma \pmod{2}$ y $j_\alpha \equiv j_\beta \pmod{2} \equiv j_\gamma \pmod{2}$, entonces G no es de Intersección Completa.

Demostración. Sean $\mathcal{L}_1 = (x_{k_\alpha}, x_{k_\alpha+1}, \dots, x_{k_\gamma}, z_{j_\gamma}, z_{j_\gamma-1}, \dots, z_{j_\beta})$, $\mathcal{L}_2 = (x_{k_\alpha}, x_{k_\alpha-1}, \dots, x_{k_\beta}, z_{j_\beta})$ y $\mathcal{L}_3 = (x_{k_\alpha}, z_{j_\alpha}, z_{j_\alpha+1}, \dots, z_{j_\beta})$ tres caminos disjuntos en G . Tenemos dos casos. Si $k_\alpha \equiv j_\alpha \pmod{2}$ entonces \mathcal{L}_i es un camino impar para $i = 1, 2, 3$ por lo que los caminos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ y \mathcal{L}_3 forman una theta impar, entonces por el Teorema 2.24, G no es una Intersección Completa. Por otro lado, si $k_\alpha \not\equiv j_\alpha \pmod{2}$, el camino \mathcal{L}_i es par para $i = 1, 2, 3$, entonces los caminos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ y \mathcal{L}_3 forman una theta par. Por lo tanto G no es una Intersección Completa por el Teorema 2.24. \square

Proposición 3.17 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo primitivo impar y $R = (z_1, \dots, z_t)$ es un camino par sin cuerdas con $V(G) = V(C) \cup V(R)$ y $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_{j_1}, x_{k_1}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ donde $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq t$ son impares. Sea $\mathcal{A} = \{i \mid 1 \leq i \leq s \text{ y } k_i = 2\}$, si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ con $a = \min \mathcal{A}$ y $b = \max \mathcal{A}$, entonces la gráfica G es de Intersección Completa si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se cumple:

1. Si $\mathcal{A} \neq \{z_1\}$ entonces G es la gráfica con aristas $E(G) = \{\{x_1, z_1\}, \{x_{k_2}, z_{j_2}\}, \dots, \{x_{k_s}, z_{j_s}\}\} \cup E(C) \cup E(R)$, donde $k_\beta \in \{2, r\}$ para todo $\beta > a$ y si existe $p_1 > a$ tal que $k_{p_1} > k_{p_1+1}$ entonces $\{x_2, z_{j_{p_1}}\} \in E(G)$ y $k_\gamma = 2$ para todo $\gamma \geq p_1$.

Además, si existe $q_1 \in \{2, \dots, s\}$ tal que $j_{q_1} < j_a$, entonces $k_{q_1} = 1$, $k_\gamma = r$ para todo $\gamma > a$ ó $k_{q_1} > 2$ y $k_\gamma = 2$ para todo $\gamma > a$.

Finalmente si existe $q_2 \in \{2, \dots, s\}$ tal que $j_{q_2-1} < j_{q_2} < j_a$ y $k_{q_2-1} > k_{q_2}$ entonces $j_{q_2-1} = 1$, $k_{q_2} = 1$ y $k_{q_2-1} = 3$.

2. Si $\mathcal{A} = \{z_1\}$ entonces G es la gráfica con aristas $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_1, x_1\}, \{z_1, x_2\}, \{z_{j_3}, x_{k_3}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ donde $k_3 \leq \dots \leq k_s$ y $k_i \in \{1, 3, r\}$ para todo $i \geq 3$.

Si existe algún $\gamma \in \{3, \dots, s\}$ tal que $j_\gamma > 1$ y $k_\gamma = r$ entonces $k_i = r$ para todo $i \in \{3, \dots, r\}$.

Si existe un único $\delta \in \{3, \dots, s\}$ tal que $j_\delta > 1$, $k_\delta = 3$ y $k_\eta > 3$ para algún $\eta \in \{3, \dots, s\}$ entonces $\{x_3, z_1\} \in E(G)$.

Si existen $\alpha, \beta \in \{3, \dots, s\}$ tales que $j_\alpha, j_\beta \neq 1$, entonces $k_\alpha = 1$, $k_\beta = 3$ con $j_\alpha \leq j_\beta$ ó $k_\alpha = k_\beta$ con $\{x_{k_\alpha}, z_1\} \in E(G)$.

Demostración.

(\Rightarrow) Debido a que G es de intersección completa y a que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ por la Proposición 3.13 se tiene que k_j es impar para todo $j \notin \mathcal{A}$.

- a) Primero supongamos que $N_G(x_2) \cap V(R) \neq \{z_1\}$.

Si existe $p \in \{a+1, \dots, s\}$ tal que $k_p \neq 2, r$ y $j_a < j_p$. Tomemos las subgráficas $H_1^1 = G[V(C) \cup \{z_1, \dots, z_{j_a}\}]$ y $H_2^1 = G[V(C) \cup \{z_{j_b}, \dots, z_{j_p}\}]$, observemos que $\deg_G(x_{r-1}) = 2$ con $x_{r-1} \in V(H_i^1)$ y además $b(H_i^1 \setminus \{x_{r-1}\}) = 0 = b(H_i^1)$ para $i = 1, 2$, sin embargo $b(H^1) = 0$ y $b(H^1 \setminus \{x_{r-1}\}) = 1$ con $H^1 = H_1^1 \cap H_2^1 \subseteq G[V(C) \cup \{z_{j_a}\}]$, lo que contradice el Lema 2.22. Por lo tanto $k_i \in \{2, r\}$ para todo $i > a$.

Si existe $p_1 > a$ tal que $k_{p_1} > k_{p_1+1}$ y $\{x_2, z_{j_{p_1}}\} \notin E(G)$. Notemos que $k_{p_1} = r$ y $k_{p_1+1} = 2$, entonces los caminos disjuntos $\mathcal{L}_1^1 = (x_2, z_{j_a}, \dots, z_{j_{p_1}})$, $\mathcal{L}_2^1 = (x_2, \dots, x_{k_{p_1+1}}, z_{j_{p_1+1}}, \dots, z_{j_{p_1+1}}, z_{j_{p_1}})$ y $\mathcal{L}_3^1 = (x_2, x_1, x_r, z_{j_{p_1}})$ forman una theta impar, lo que contradice el Teorema 2.24. Por otro lado, si existe $p_2 > p_1$ tal que $k_{p_2} = r$ los caminos disjuntos $\mathcal{L}_1^2 = (x_r, z_{j_{p_2}}, \dots, z_{j_{p_1+1}})$, $\mathcal{L}_2^2 = (x_r, z_{j_{p_1}}, \dots, z_{j_{p_1+1}})$ y $\mathcal{L}_3^2 = (x_r, x_1, x_2, z_{j_{p_1+1}})$ forman una theta impar, lo que contradice el Teorema 2.24. Por lo tanto, para todo $p_1 > a$ tal que $k_{p_1} > k_{p_1+1}$ se tiene que $\{x_2, z_{j_{p_1}}\} \in E(G)$ y además $N_G(z_{j_i}) \cap V(C) = \{x_2\}$ para todo $i > p_1$. Supongamos que existen $q_1, q_2 \in \{1, \dots, s\}$ ta-

les que $j_{q_1} \leq j_a \leq j_{q_2}$ y $k_{q_1} \neq 1$, Si $k_{q_2} = r$, tomemos las subgráficas $H_1^2 = G[\{x_r, x_{r-1}, \dots, x_{k_{q_1}}\} \cup \{z_{j_{q_1}}, \dots, z_{j_a-1}, \dots, z_{j_{q_2}}\}]$ y $H_2^2 = G[\{x_{k_{q_1}}, \dots, x_{r-1}, x_r, x_1, x_2\} \cup \{z_{j_{q_1}}, \dots, z_{j_a-1}, z_{j_a}\}]$, con $z_{j_a-1} \in V(H_i^2)$ y además $\deg_{H_i^2}(z_{j_a-1}) = 2$ para $i = 1, 2$. Entonces $b(H_1^2 \setminus \{z_{j_a-1}\}) = 1 = b(H_1^2)$ y $b(H_2^2 \setminus \{z_{j_a-1}\}) = b(H_2^2)$, sin embargo $b(H^2 \setminus \{z_{j_a-1}\}) > b(H^2)$ con $V(H^2) = V(H_1^2 \cap H_2^2) \subseteq \{z_{j_a}, z_{j_a-1}, \dots, z_{j_{q_1}}, x_{k_{q_1}}, \dots, x_r\}$, lo que contradice el Lema 2.22, por lo tanto, para todos $q_1, q_2 \in \{1, \dots, s\}$ tales que $j_{q_1} < j_a \leq j_{q_2}$ y $k_{q_1} \neq 1$ se tiene que $k_{q_2} = 2$.

Si $1 < j_{q_1} < j_{q_2} \leq j_a$ y $1 < k_{q_2} < k_{q_1}$, entonces los caminos disjuntos $\mathcal{L}_1^3 = (x_{k_{q_2}}, x_{k_{q_2}+1}, \dots, x_{k_{q_1}}, z_{j_{q_1}})$, $\mathcal{L}_2^3 = (x_{k_{q_2}}, x_{k_{q_2}-1}, \dots, x_1, z_1, \dots, z_{j_{q_1}})$ y $\mathcal{L}_3^3 = (x_{k_{q_2}}, z_{j_{q_2}}, z_{j_{q_2}-1}, \dots, z_{j_{q_1}})$ forman una theta impar con vértices extremos no adyacentes, lo que contradice el Teorema 2.24. Por lo tanto, para todos $q_1, q_2 \in \{1, \dots, s\}$ tales que $1 < j_{q_1} < j_{q_2} \leq j_a$ se tiene que $k_{q_1} \leq k_{q_2}$.

Si $j_{q_1} = 1$, $k_{q_2} = 1$ y $k_{q_1} > 3$ tomemos las subgráficas $H_1^3 = G[\{x_1, \dots, x_{k_{q_1}}\} \cup \{z_1\}]$ y $H_2^3 = G[V(C) \cup \{z_{j_{q_2}}, \dots, z_{j_a}\}]$ por lo tanto $x_4 \in H_i^3$ con $\deg_{H_i^3}(x_4) = 2$ para $i = 1, 2$, entonces, $b(H_1^3 \setminus \{x_4\}) = b(H_1^3)$ y $b(H_2^3 \setminus \{x_4\}) = 0 = b(H_2^3)$, sin embargo $b(H^3) < b(H^3 \setminus \{x_4\})$ con $H^3 = H_1^3 \cap H_2^3 = G[\{z_1, \dots, x_{k_{q_1}}\}]$, lo que contradice el Lema 2.22.

b) Por otro lado, supongamos que $N_G(x_2) \cap V(R) = \{z_1\}$.

Si existe $u \in \{a+1, \dots, s\}$ tal que $3 < k_u < r$ y $j_u > 1$ tomemos las subgráficas $H_1^4 = [V(C) \cup \{z_1\}]$ y $H_2^4 = [\{x_1, \dots, x_{k_u}\} \cup \{z_{j_u}, \dots, z_1\}]$ y notemos que $\deg_G(x_4) = 2$ con $x_4 \in V(H_i)$ para $i = 1, 2$ y además $b(H_i^4) = 0 = b(H_i^4 \setminus \{x_4\})$ para $i = 1, 2$, sin embargo $b(H^4 \setminus \{x_4\}) = 1$ y $b(H^4) = 0$ con $H^4 = H_1^4 \cap H_2^4 = G[\{x_1, \dots, x_{k_u}\} \cup \{z_1\}]$, lo que contradice el Lema 2.22. Por lo tanto $k_i \in \{1, 3, r\}$ para todo i tal que $j_i > 1$.

Primero supongamos que existen $\alpha, \beta \in \{3, \dots, s\}$ distintos, tales que $j_\alpha, j_\beta > 1$ y $k_\alpha \neq k_\beta$, entonces $k_\alpha, k_\beta \in \{1, 3, r\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $k_\beta = r$, entonces $k_\alpha \in \{1, 3\}$, tomemos las subgráficas $H_1^5 = [V(C) \cup \{z_1\}]$ y $H_2^5 = [\{x_{k_\alpha}, x_{k_\alpha+1}, \dots, x_r\} \cup \{z_{j_\alpha}, \dots, z_{j_\beta}\}]$ y notemos que $\deg_G(x_4) = 2$ con $x_4 \in V(H_i^5)$ para $i = 1, 2$ y además $b(H_1^5) = 0 = b(H_1^5 \setminus \{x_4\})$ y $b(H_2^5) = b(H_2^5 \setminus \{x_4\})$, sin embargo $b(H^5 \setminus \{x_4\}) > b(H^5)$ con $H^5 = H_1^5 \cap H_2^5 = G[\{x_{k_\alpha}, x_{k_\alpha+1}, \dots, x_r\}]$, lo que contradice el Lema 2.22. Por lo tanto $k_\alpha = k_\beta$ ó $k_\alpha = 1$, $k_\beta = 3$ con $j_\alpha \leq j_\beta$.

Ahora supongamos que existe un único $\gamma \in \{3, \dots, s\}$ tal que $j_\gamma > 1$, es decir, $j_i = 1$ para todo $i \neq \gamma$. Entonces $k_\gamma \in \{1, 3, r\}$, supongamos que $k_\gamma = 3$ y que $\{x_3, z_1\} \notin E(G)$, si existe $\delta \in \{3, \dots, s\}$ tal que $k_\delta > 3$,

entonces por el lema 3.16 para los vértices x_1, x_3, x_{k_δ} y j_1, j_γ se tiene que G no es de Intersección Completa. Por lo tanto, δ no existe y en caso contrario $\{x_3, z_1\} \in E(G)$. Si $k_\gamma = r$ y existe $\eta \in \{3, \dots, s\}$ tal que $3 \leq k_\eta < r$, tomemos las subgráficas $H_1^6 = [V(C) \cup \{z_1\}]$ y $H_2^6 = [\{x_{k_\delta}, x_{k_\delta+1}, \dots, x_r\} \cup \{z_1, z_2, \dots, z_{j_\gamma}\}]$ y notemos que $\deg_G(x_{r-1}) = 2$ con $x_{r-1} \in V(H_i^6)$ para $i = 1, 2$ y además $b(H_1^6) = 0 = b(H_1^6 \setminus \{x_{r-1}\})$ y $b(H_2^6) = 1 = b(H_2^6 \setminus \{x_{r-1}\})$, sin embargo $b(H^6 \setminus \{x_{r-1}\}) = 2$ y $b(H^6) = 1$ con $H^6 = H_1^6 \cap H_2^6 = G[\{z_1\} \cap \{x_{k_\delta}, x_{k_\delta+1}, \dots, x_r\}]$, lo que contradice el Lema 2.22. Por lo tanto $k_\eta = r$.

Observemos que si $k_\gamma = 1$ no tenemos ningún tipo de restricción.

(\Leftrightarrow) Primero observemos que se tiene que $ht(G) = |E(G)| - |V(G)| + b(G) = (r + t - 1 + s) - (r + t) + 0 = s - 1$.

Sea $E(G) = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+s}, e_{r+s+1}, \dots, e_{r+s+t-1}\}$, donde

$$e_i = \begin{cases} \{x_i, x_{i+1}\} & \text{si } 1 \leq i \leq r-1 \\ \{x_r, x_1\} & \text{si } i = r \\ \{z_{j_{i-r}}, x_{k_{i-r}}\} & \text{si } r+1 \leq i \leq r+s \\ \{z_{i-r-s}, z_{i-r-s+1}\} & \text{si } r+s+1 \leq i \leq r+s+t-1. \end{cases}$$

1. Supongamos que G cumple la condición 1, entonces para $1 \leq i \leq s-1$ tomemos los ciclos pares w_i^1 dados por:

$$w_i^1 = \begin{cases} (x_{k_i}, z_{j_i}, \dots, z_{j_{i+1}}, x_{k_{i+1}}, \dots, x_{k_i}) & \text{si } 1 \leq i \leq a-2 \\ (z_{j_{a-1}}, \dots, z_{j_a}, x_{k_a} = x_2, x_3, \dots, x_r, x_1, z_{j_{a-1}}) & \text{si } i = a-1 \text{ y } k_{a-1} = 1 \\ (z_{j_{a-1}}, \dots, z_{j_a}, x_2, x_1, x_r, \dots, x_{k_{a-1}}, z_{j_{a-1}}) & \text{si } i = a-1 \text{ y } k_{a-1} > 2 \\ (x_{k_i}, z_{j_i}, \dots, z_{j_{i+1}}, x_{k_{i+1}} = x_{k_i}) & \text{si } i \geq a \text{ y } k_i = k_{i+1} \\ (x_{k_i} = x_2, z_{j_i} = z_{j_{i+1}}, x_{k_{i+1}} = x_r, x_1, x_2) & \text{si } i \geq a \text{ y } k_i < k_{i+1} \end{cases}$$

Sea el binomio $B_{w_i^1} = x^{\alpha_i^1} - x^{\beta_i^1}$ con $\alpha_i^1, \beta_i^1 \in \mathbb{N}^{r+t-1+s}$, correspondiente al ciclo par w_i^1 .

Sea B^1 la matriz $(s-1) \times (r+s+t-1)$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i^1 - \beta_i^1$ y notemos que además de las columnas c_{r+2}, \dots, c_{r+s} , a lo más una columna de las columnas c_1, c_2, c_r puede tener al menos dos entradas distintas de cero, entonces la submatriz de B^1 , $(B^1)' = (b^1)_{ij} \in M_{(s-1) \times (s-1)}$ que consta de las columnas $c_k, c_{r+2}, \dots, c_{r+s}$ con $k \in \{1, 2, r\}$ es una matriz con estructura diagonal, con $c_k = c_{r+l}$ para algún $2 \leq l \leq s$ entonces por el Lema 3.7 es dominante, lo que implica que B^1 también es dominante por el Teorema 2.16 y por lo tanto $P_A = (B_{w_1^1}, \dots, B_{w_{s-1}^1})$.

2. Supongamos que G cumple la condición 2, entonces para este caso se tiene que $k_2 = 2, j_2 = 1$ entonces definamos $w := \min \{i \mid j_i > 1\}$, $b_0 := \min \{i \mid k_i \neq 1, 2\}$ y para $1 \leq i \leq s-1$ tomemos los ciclos pares w_i^2 dados de la siguiente manera:

$$w_1^2 = \begin{cases} (x_1, z_1, x_2, \dots, x_r, x_1) & \text{si } k_3 = \dots = k_{l_0-1} = \\ & k_{l_0+1} = \dots = k_s = 3 \text{ ó } r \\ (x_1, z_1, \dots, z_{j_{b_0}}, x_{k_{b_0}}, \dots, x_1) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$w_2^2 = \begin{cases} (x_1, z_1, \dots, x_3, x_2, x_1) & \text{si } k_{b_0} = \dots = k_{l_0-1} = \\ & k_{l_0+1} = \dots = k_s = 3 \\ (x_2, z_1, \dots, z_{j_{b_0}}, x_{k_{b_0}}, \dots, x_r, x_1, x_2) & \text{si } k_{b_0} = k_s \\ (x_1, z_1, \dots, z_{j_{b_0}}, x_1) & \text{si } k_{b_0} = 1 \text{ y } j_{b_0} > 1 \end{cases}$$

$$w_i^2 = \begin{cases} (x_{k_i}, z_{j_i}, \dots, z_{j_{i+1}}, x_{k_{i+1}}, \dots, x_{k_i}) & \text{si } i \neq 1, 2, w \\ (x_1, z_1, \dots, z_{j_i}, x_{k_i}, \dots, x_1) & \text{si } i = w \end{cases}$$

Sea el binomio $B_{w_i^2} = x^{\alpha_i^2} - x^{\beta_i^2}$ con $\alpha_i^2, \beta_i^2 \in \mathbb{N}^{r+t-1+s}$, correspondiente al ciclo par w_i^2 .

Sea B^2 la matriz $(s-1) \times (r+s+t-1)$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i^2 - \beta_i^2$ y notemos que además de las columnas c_{r+2}, \dots, c_{r+s} , a lo más una columna de las columnas c_1, c_2, c_r puede tener al menos dos entradas distintas de cero, entonces la submatriz de B^2 , $(B^2)' = (b^2)'_{ij} \in M_{(s-1) \times (s-1)}$ que consta de las columnas $c_k, c_{r+2}, \dots, c_{r+s}$ con $k \in \{1, 2, r\}$ es una matriz con estructura diagonal, con $c_k = c_{r+l}$ para algún $2 \leq l \leq s$ entonces por el Lema 3.7 es dominante, lo que implica que B^2 también es dominante por el Teorema 2.16 y por lo tanto $P_A = (B_{w_1^2}, \dots, B_{w_{s-1}^2})$.

□

Notación. Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo primitivo impar y $R = (z_1, \dots, z_t)$ una gráfica bipartita, tal que $R = (z_1, \dots, z_t)$ es un camino sin cuerdas con $V(G) = V(C) \cup V(R)$ y $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_{j_1}, x_{k_1}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ y $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq t$ entonces en adelante se denotara al conjunto de vecinos de z_{j_i} en $V(C)$ por \mathcal{A}_i , es decir, $\mathcal{A}_i := N_G(z_{j_i}) \cap V(C)$, además se denotara al mínimo y máximo de los subíndices correspondientes a la vecindad de z_{j_i} en $V(C)$ por $a_i := \min \{k_l \mid x_{k_l} \in \mathcal{A}_i\}$ y $b_i := \max \{k_l \mid x_{k_l} \in \mathcal{A}_i\}$.

Lema 3.18 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo primitivo impar y $R = (z_1, \dots, z_t)$ un camino sin cuerdas con $V(G) = V(C) \cup V(R)$ y $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_{j_1}, x_{k_1}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ y $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq t$. Si existen $1 \leq i_1 \leq i_2 - 1 < i_2 \leq s$ tales que $j_{i_1} - j_{i_1 - 1} \cong 1 \pmod{2} \cong j_{i_2} - j_{i_2 - 1}$ y G es de Intersección Completa, entonces las siguientes condiciones se cumplen:

1. $(1, r) = (\min \mathcal{A}, \max \mathcal{A})$ con $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{i_1 - 1} \cup \mathcal{A}_{i_1} \cup \mathcal{A}_{i_2 - 1} \cup \mathcal{A}_{i_2}$.
2. $b_{i_1} \geq a_{i_2 - 1}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $j_{i_1 - 1} = j_{i_1} - 1$ para $l = 1, 2$ por el Teorema 2.18, para $l = 1, 2$ la gráfica $G_l = G[V(C) \cup \{z_{j_{i_1 - 1}}, z_{j_{i_1}}\}]$ es de Intersección Completa, entonces es una CI-rueda-doble y por lo tanto podemos suponer que α es impar para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea $G' = G[V(C) \cup \{z_{j_{i_1 - 1}}, z_{j_{i_1}}, z_{j_{i_2 - 1}}, z_{j_{i_2}}\}]$ subgráfica inducida de G y tomemos las subgráficas $H_1 = G'[V(C) \cup \{z_{j_{i_1 - 1}}, z_{j_{i_1}}\}]$ y $H_2 = G'[V(C) \cup \{z_{j_{i_2 - 1}}, z_{j_{i_2}}\}]$.

1. Si $(1, r) \neq (\min \mathcal{A}, \max \mathcal{A})$: Sin pérdida de generalidad supongamos que $\max \mathcal{A} < r$, entonces $\deg_{G'}(x_r) = 2$ con $x_r \in V(H_l)$ y $b(H_l) = 0 = b(H_l \setminus \{x_r\})$ para $l = 1, 2$, sin embargo $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{x_r\}) = 1$ donde $V(H) = V(H_1 \cap H_2) \subseteq V(C) \cup \{z_{j_{i_1}}\}$. Entonces por el Lema 2.22 y el Teorema 2.18 se tiene que G no es de Intersección Completa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(1, r) = (\min \mathcal{A}, \max \mathcal{A})$.
2. Si $b_{i_1} < a_{i_2 - 1}$: Notemos que $\deg_{G'}(x_{b_{i_1} + 1}) = 2$, $x_{b_{i_1} + 1} \in H_l$ y además $b(H_l) = 0 = b(H_l \setminus \{x_{b_{i_1} + 1}\})$ para $l = 1, 2$, sin embargo, $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{x_{b_{i_1} + 1}\}) = 1$ donde $V(H) = V(H_1 \cap H_2) = V(C)$. Entonces por el Lema 2.22 y el Teorema 2.18 se tiene que G no es de Intersección Completa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $b_{i_1} \geq a_{i_2 - 1}$.

□

Lema 3.19 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con $C = (x_1, \dots, x_r, x_1)$ un ciclo primitivo impar y $R = (z_1, \dots, z_t)$ un camino sin cuerdas tal que $E(G) = E(C) \cup E(R) \cup \{\{z_{j_1}, x_{k_1}\}, \dots, \{z_{j_s}, x_{k_s}\}\}$ con $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq t$. Si G es de Intersección Completa, entonces para cualesquiera $\alpha, \beta \in \{1, \dots, s\}$ tales que $j_\alpha - j_{\alpha-1} \cong 1 \pmod{2}$, $j_\beta - j_{\beta-1} \cong 0 \pmod{2}$ con $j_\beta \neq j_{\beta-1}$, se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $x_2 \notin \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$.
2. $b_{\alpha-1} \leq k \leq a_\alpha$ ó $k = a_\beta$ para todo $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x_k \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$.

Demostración.

Sea $G' = G[V(C) \cup \{z_{j_{\alpha-1}}, \dots, z_{j_\alpha}, \dots, z_{j_{\beta-1}}, \dots, z_{j_\beta}\}]$ subgráfica inducida de G . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $j_{\alpha-1} = j_\alpha - 1$, entonces, por el Teorema 2.18, las gráficas $G_\alpha = G[V(C) \cup \{z_{j_{\alpha-1}}, z_{j_\alpha}\}]$ y $G_\beta = G[V(C) \cup \{z_{j_{\beta-1}}, \dots, z_{j_\beta}\}]$ son de Intersección Completa, entonces G_α es una CI-rueda-doble y por lo tanto podemos suponer que k es impar para todo $k \in \mathcal{A}_{\alpha-1} \cup \mathcal{A}_\alpha$ y G_β es una CI-rueda-parcial impar y por lo tanto podemos suponer que k es impar ó $k = 2$ para todo $k \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$.

1. Primero supongamos que $x_2 \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$.

Supongamos que existe $q \in \{\alpha - 1, \alpha\}$ tal que $|\mathcal{A}_q| > 1$ y $j_q \notin \{j_{\beta-1}, j_\beta\}$, entonces tomemos las subgráficas $H'_1 = G_\beta$ y $H'_2 = G'[V(C) \cup \{z_{j_q}\}]$ y sea $\psi \in \{1, \dots, r\}$ subíndice par tal que $a_q < \psi < b_q$, entonces $\deg_{G'}(x_\psi) = 2$, $x_\psi \in V(H'_1) \cap V(H'_2)$ y además $b(H'_1) = 0 = b(H'_1 \setminus \{x_\psi\})$ para $l = 1, 2$, sin embargo $b(H') = 0$ y $b(H' \setminus \{x_\psi\}) = 1$ donde $V(H') = V(H'_1 \cap H'_2) = V(C)$. Entonces por el Lema 2.22 y el Teorema 2.18 se tiene que G no es de Intersección Completa, lo que es una contradicción.

Supongamos que $\{j_\alpha, j_{\alpha-1}\} \cap \{j_\beta, j_{\beta-1}\} \neq \emptyset$, y tomemos $G'' = [V(C) \cup \{y_1, y_2\}]$ la contracción de G' en los vértices $z_{j_{\beta-1}+1}, \dots, z_{j_\beta-1}$, entonces por la Proposición 2.23 se tiene que G'' es una CI-rueda doble, donde $N_{G''}(y_1) = \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta \cup \{y_2\}$ y $N_{G''}(y_2) = \mathcal{A}_p \cup \{y_1\}$ con $p \in \{\alpha - 1, \alpha\}$, lo que implica que $\{x_2\} \in N_{G''}(y_1)$, lo que contradice que G'' es una CI-rueda doble.

Finalmente, si $|\mathcal{A}_\alpha| = 1 = |\mathcal{A}_{\alpha-1}|$ y $\{j_\alpha, j_{\alpha-1}\} \cap \{j_\beta, j_{\beta-1}\} = \emptyset$, supongamos que $\mathcal{A}_{\alpha-1} \cup \mathcal{A}_\alpha \neq \{x_p, x_r\}$ con $p \in \{1, 3\}$, entonces tomemos las subgráficas $H''_1 = G'[V(C) \cup \{z_{j_{\alpha-1}}, z_{j_\alpha}\}]$ y $H''_2 = G'[V(C) \cup \{z_{j_{\beta-1}}, \dots, z_{j_\beta}\}]$ sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_r \notin \mathcal{A}_{\alpha-1} \cup \mathcal{A}_\alpha$ entonces $x_r \in V(H''_1) \cap V(H''_2)$ y además $b(H''_1) = 0 = b(H''_1 \setminus \{x_r\})$ para $l = 1, 2$, sin embargo $b(H'') = 0$ y $b(H'' \setminus \{x_r\}) = 1$ donde $V(H'') = V(H''_1 \cap H''_2) =$

$V(C)$. Entonces por el Lema 2.22 y el Teorema 2.18 se tiene que G no es de Intersección Completa, lo que es una contradicción.

2. Si $x_2 \notin \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$, entonces k es impar para todo k tal que $x_k \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\alpha-1} \cup \mathcal{A}_\alpha \cup \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$. Supongamos que existe $\omega \in \{i \mid x_{k_i} \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta\}$ tal que $k_\omega < b_{\alpha-1}$ ó $a_\alpha < k_\omega$. Sea $x_{k_\phi} \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$ tal que $0 < |k_\omega - k_\phi| \leq |k_\omega - k_i|$ con $x_{k_i} \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$ y consideremos dos casos:

a) $a_p < k_\omega < b_p$ y $x_{k_\omega} \notin \mathcal{A}_p$ para algún $p = \alpha, \alpha - 1$: Tomemos las subgráficas $H_1 = G' [\{x_{k_\omega}, \dots, x_{k_\phi}\} \cup \{z_{j_{\beta-1}}, \dots, z_{j_\beta}\}]$ y $H_2 = G' [\{x_{a_p}, \dots, x_{b_p}\} \cup \{z_{j_p}\}]$ sea $\delta \in \{a_p, \dots, b_p\}$ subíndice par tal que $x_\delta \in V(H_1)$ y notemos que $\deg_{G'}(x_\delta) = 2$ y que $b(H_1) = 1 = b(H_1 \setminus \{x_\delta\})$ para $l = 1, 2$, sin embargo $b(H) < b(H \setminus \{x_\delta\})$ donde $V(H) \subseteq \{x_{k_\omega}, \dots, x_{b_p}\} \cup \{z_{j_p}\}$, $V(H) \subseteq \{x_{a_p}, \dots, x_{k_\omega}\} \cup \{z_{j_p}\}$ ó $V(H) \subseteq \{x_{k_\omega}, \dots, x_{k_\phi}\} \cup \{z_{j_p}\}$. Entonces por el Lema 2.22 y el Teorema 2.18 se tiene que G no es de Intersección Completa, lo que es una contradicción.

b) $k_\omega < a_{\alpha-1}$ ó $b_\alpha < k_\omega$: Supongamos sin pérdida de generalidad que $b_\alpha < k_\omega$ y tomemos las subgráficas $H'_1 = G' [\{x_{k_\omega}, \dots, x_{k_\phi}\} \cup \{z_{j_{\beta-1}}, \dots, z_{j_\beta}\}]$ y $H'_2 = G' [\{x_{b_\alpha}, \dots, x_r, x_1, \dots, x_{a_{\alpha-1}}\} \cup \{z_{j_{\alpha-1}}, z_{j_\alpha}\}]$, sea $\psi \in \{k_\omega, \dots, k_\phi\}$ subíndice par tal que $\psi > b_\alpha$, entonces $\deg_{G'}(x_\psi) = 2$, $x_\psi \in V(H'_1) \cap V(H'_2)$ y además $b(H'_1) = 1 = b(H'_1 \setminus \{x_\psi\})$ para $l = 1, 2$, sin embargo $b(H') < b(H' \setminus \{x_\psi\})$ donde $V(H') = V(H'_1 \cap H'_2) \subseteq \{x_{k_\omega}, \dots, x_{k_\phi}\} \cup \{z_{j_\alpha}\}$. Entonces por el Lema 2.22 y el Teorema 2.18 se tiene que G no es de Intersección Completa, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $x_2 \notin \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$ y además $b_{\alpha-1} \leq k \leq a_\alpha$ ó $k = a_\beta$ para todo $k \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x_k \in \mathcal{A}_{\beta-1} \cup \mathcal{A}_\beta$.

□

Proposición 3.20 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa con C conexa tal que existe un vértice $y \in V(C)$ que no pertenece a ningún ciclo impar de C y $R = (z_1, \dots, z_t)$ un camino impar sin cuerdas tal que $N_G(y) \cap V(R) = \{z_1, z_t\}$. Entonces G es de Intersección Completa si y sólo si G es una banda parcial impar.

Demostración. (\Leftarrow) Se demostró en [6] que una banda parcial impar es de Intersección Completa.

(\Rightarrow) Sean C_1 el camino dado por $C_1 = (y, z_1, \dots, z_t, y)$ debido a que R es un camino impar se tiene que C_1 es un ciclo primitivo impar con $(V(C) \setminus \{y\}) \cap V(C_1) = \emptyset$, por [6, Proposición 6.1] G tiene a los más dos ciclos disjuntos, lo que implica que $C \setminus \{y\}$ contiene un único ciclo primitivo impar C_2 y debido a que $V(C_2) \cup \{y\} \subseteq V(C)$ se tiene que C es una CI-rueda parcial impar ó una CI-rueda doble.

Primero supongamos que C es una CI-rueda doble, entonces $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \{z\}$ donde $\{y, z\} \in E(G)$ y $z \in N_G(C_2)$, entonces por [6, Proposición 6.4, Lema 6.1] se tiene que G es una CI-vértice banda, debido a que $N_G(C_2) \cap V(C_1) = \{y\}$ de la definición de CI-vértice banda se tiene que $\{y, z\} \notin E(G)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto C es una CI-rueda parcial impar, entonces $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2)$ entonces por [6, Proposición 6.4] se tiene que G es una banda parcial impar. \square

Lema 3.21 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa tal que C es una banda parcial con $C_1 = (x_1, \dots, x_{r_1})$ y $C_2 = (y_1, \dots, y_{r_2})$ sus ciclos impares y $R = (z_1, \dots, z_t)$ un camino sin cuerdas. Entonces G es de Intersección Completa si y sólo si una de las siguientes condiciones se cumple:

1. t es impar, $N_G(C) \cap V(R) = \{z_1, z_t\}$ y la contracción de G en z_2, \dots, z_{t-1} es una CI-vértice banda.
2. t es par, $N_G(C) \cap V(R) = \{z_1, z_t\}$ y $N_G(z_1) \cap V(C) = \{x\}$, $N_G(z_t) \cap V(C) = \{y\}$ con $\{x, y\} \in E(G)$.
3. t es impar, $N_G(R) \cap V(C) = \{x_2, x_{r_1}\}$ con $N_G(\{x_2\}) \cap V(R) = \{z_1, \dots, z_{k_i}\}$, $N_G(\{x_{r_1}\}) \cap V(R) = \{z_{k_i+1}, \dots, z_t\}$ y la contracción de G en z_2, z_4, \dots, z_{t-1} es una CI-vértice banda.
4. t es impar, $N_G(R) \cap V(C) = \{x_2, x_{r_1}\}$ con $N_G(\{x_2\}) \cap V(R) = \{z_{k_i}\}$, $N_G(\{x_{r_1}\}) \cap V(R) = \{z_1, \dots, z_t\}$ y la contracción de G en z_2, z_4, \dots, z_{t-1} es una CI-vértice banda.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que existen $a, b \in \{1, \dots, t\}$ con la misma paridad tales que $z_a, z_b \in N_G(C) \cap V(R)$ y $z_j \notin N_G(C)$ para cada $j \in \{a+1, \dots, b-1\}$ entonces podemos tomar la contracción de G en z_{a+1}, \dots, z_{b-1} , por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $\alpha \in \{1, \dots, t-1\}$ tal que $|N_G(z_\alpha) \cap V(C)| \geq 2$, entonces por el Lema 2.26, $G[V(C) \cup \{z_\alpha\}]$ debe ser una CI-vértice-banda. Por otro lado, si existen $c, d \in \{1, \dots, t\}$ de paridad distinta tales que $z_c, z_d \in N_G(C) \cap V(R)$ y $z_j \notin N_G(C)$ para todo $j \in \{c+1, \dots, d-1\}$ podemos tomar la contracción de G en z_{c+1}, \dots, z_{d-1} , por lo que sin pérdida

de generalidad podemos suponer que existe $d = c + 1$ entonces por el Lema 2.27, $G[V(C) \cup \{z_c, z_d\}]$ debe ser una 2-suma cliqué de una banda parcial impar con un ciclo. Por lo tanto $N_G(z_c) \cap V(C) = \{x\}$ y $N_G(z_d) \cap V(C) = \{y\}$ con $\{x, y\} \in E(G)$.

Ahora, supongamos que existen $a_1, a_2, a_3 \in \{1, \dots, t\}$ subíndices impares tales que $z_{a_1}, z_{a_2}, z_{a_3} \in N_G(C) \cap V(R)$ y $z_j \notin N_G(C)$ para todo $j \in \{a_i + 1, \dots, a_{i+1} - 1\}$ para $i = 1, 2$, entonces tomando la contracción de G en $z_{a_i+1}, \dots, z_{a_{i+1}-1}$, se tiene que $G[V(C) \cap \{z'_1\}]$ con z'_1 el vértice que se obtuvo de la contracción, es una CI-vértice banda, lo que implica que $N_G(\{z_{a_i}\}) \cap V(C) \subseteq \{x_2, x_{r_1}\}$ para $i = 1, 2, 3$. Supongamos que $x_j \in N_G(\{z_{a_1}\}) \cap N_G(\{z_{a_3}\}) \cap V(C)$ y $x_j \notin N_G(\{z_{a_2}\})$ con $j \in \{2, r_1\}$ y tomemos los caminos impares $\mathcal{L}_1 = (x_j, z_{a_1}, \dots, z_{a_2})$, $\mathcal{L}_2 = (x_j, z_{a_3}, \dots, z_{a_2})$ y $\mathcal{L}_3 = (x_j, x_1, x_{(r_1-j+2)}, z_{a_2})$, entonces los caminos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ forman una theta impar con vértices extremos x_j y z_{a_2} y por el Teorema 2.24 se tiene una contradicción.

Entonces, dados $a, b \in \{1, \dots, t\}$ impares tales que $z_a, z_b \in N_G(C) \cap V(R)$ y $z_j \notin N_G(C)$ para todo $j \in \{a + 1, \dots, b - 1\}$ se puede suponer que $z_{b+1} \in N_G(C) \cap V(C)$ entonces tomando la contracción de G en z_{a+1}, \dots, z_{b-1} , se tiene que $G[V(C) \cup \{z'_b\}]$ es una CI-vértice banda, sin embargo $G[V(C) \cup \{z'_b, z_{b+1}\}]$ es una 2-suma cliqué de una banda parcial impar con una arista, es decir, $N_G(z'_b) \cap V(C) = \{x_2, x_{r_1}\}$ y por otro lado $N_G(\{z'_b, z_b\}) \cap V(C) = \{x_2, x_3\}$ lo cual es una contradicción. Entonces si $z_i \in N_G(C) \cap V(R)$ se puede suponer que $z_{i+1} \in N_G(C) \cap V(R)$.

Supongamos que $t = 3$ y que $z_1 \in N_G(C) \cap V(R)$ entonces existen $y_i \in V(C)$ tales que $\{y_1, y_2\}, \{y_2, y_3\} \in E(C)$ y que $N_G(z_i) \cap V(C) = \{y_i\}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ y notemos que y_1, y_2, y_3 son vértices que pertenecen máximo a dos ciclos generadores de C . Entonces tomemos los ciclos generadores $w_i = (y_i, z_i, z_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ para $i = 1, 2$ y tomemos las aristas de G :

$$e_i = \begin{cases} \{y_i, z_i\} & \text{si } i = 1, 2, 3 \\ \{y_{i-3}, y_{i-2}\} & \text{si } i = 4, 5 \\ \{z_{i-5}, z_{i-6}\} & \text{si } i = 6, 7 \end{cases} .$$

Sea el binomio $B_{w_i} = x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^{|E(G)|}$, correspondiente al ciclo par w_i . Sea B la matriz $s - 1 \times |E(G)|$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i - \beta_i$.

Si y_1, y_2, y_3 pertenecen a un ciclo generador, digamos $w_3 = (y_1, y_2, y_3, \mathcal{P}, y_1)$, sea B_1 la submatriz de B dada por las columnas c_2, c_4, c_5 y las tres primeras filas,

entonces

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es una submatriz mixta cuadrada de B , lo que implica que B no es dominante y por el Teorema 2.16 se tiene que G no es de Intersección Completa.

Por otro lado, si y_1, y_2, y_3 pertenecen a dos ciclos pares, digamos w_3, w_4 se tienen dos posibilidades:

1. $w_3 = (y_2, x', \mathcal{P}_1, y_1, y_2)$, $w_4 = (y_2, x', \mathcal{P}_2, y_3, y_2)$ con $e_8 = \{y_2, x'\}$. Sea B_2 la submatriz de B dada por las columnas c_2, c_4, c_5, c_8 y las cuatro primeras filas, entonces

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una submatriz mixta cuadrada de B , lo que implica que B no es dominante y por el Teorema 2.16 se tiene que G no es de Intersección Completa.

2. $w_3 = (y_2, x', \mathcal{P}_3, y_1, y_2)$, $w_4 = (y_2, y_3, \mathcal{P}_4, x', y_2)$ con $e_8 = \{y_2, x'\}$ y $e_9 = \{y_2, x'\}$ y w_5 el ciclo generador que contiene a e_8 y e_9 . Sea B_3 la submatriz de B dada por las columnas c_2, c_4, c_5, c_8, c_9 y las cinco primeras filas, entonces

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es una submatriz mixta cuadrada de B , lo que implica que B no es dominante y por el Teorema 2.16 se tiene que G no es de Intersección Completa.

(\Leftarrow) Primero supongamos que $N_G(C) \cap V(R) = \{z_1, z_t\}$, y tomemos $E(G) = E(R) \cup E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{z_1, a\}, \{z_t, b\}, \{x_{j_1}, y_{k_1}\}, \dots, \{x_{j_s}, y_{k_s}\}\}$ entonces $ht(G) = |E(G)| - |V(G)| + b(G) = (r_1 + r_2 + s + t - 1 + 2) - (r_1 + r_2 + t) + 0 = s + 1$.

Sea $E(G) = \{e_1, \dots, e_{r_1+r_2+s+t+1}\}$, donde

$$e_i = \begin{cases} \{x_{j_i}, y_{k_i}\} & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ \{x_{i-s}, x_{i-s+1}\} & \text{si } s+1 \leq i \leq s+r_1-1 \\ \{x_{r_1}, x_1\} & \text{si } i = s+r_1 \\ \{y_{i-s-r_1}, y_{i-s-r_1+1}\} & \text{si } s+r_1+1 \leq i \leq s+r_1+r_2-1 \\ \{y_{r_2}, y_1\} & \text{si } i = s+r_1+r_2 \\ \{z_{i-s-r_1-r_2}, z_{i-s-r_1-r_2+1}\} & \text{si } s+r_1+r_2+1 \leq i \leq s+r_1+r_2+t-1 \\ \{z_1, a\} & \text{si } i = s+r_1+r_2+t \\ \{z_t, b\} & \text{si } i = s+r_1+r_2+t+1 \end{cases} .$$

Y tomemos los ciclos pares w_i dados por:

$$w_i = \begin{cases} (y_{k_i}, x_{j_i}, x_{j_i+1}, \dots, x_{j_{i+1}}, y_{k_{i+1}}, y_{k_{i+1}-1}, \dots, y_{k_i}) & \text{si } 1 \leq i \leq s-1 \\ (y_{k_s}, x_{j_s}, x_{j_s+1}, \dots, x_{r_1}, x_1, \dots, x_{j_1}, y_{k_1}, \dots, y_1, y_{r_2}, \dots, y_{k_s}) & \text{si } i = s \\ (z_1, \dots, z_t, b, a, z_1) & \text{si } \begin{array}{l} i = s+1 \\ t \text{ es par} \end{array} \text{ y} \\ (z_1, \dots, z_t, x_{r_1}, x_1, x_2, z_1) & \text{si } \begin{array}{l} i = s+1 \\ t \text{ es impar} \end{array} \text{ y} \end{cases}$$

Sea el binomio $B_{w_i} = x^{\alpha_i} - x^{\beta_i}$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^{|E(G)|}$, correspondiente al ciclo par w_i y sea B la matriz $(s+1) \times (|E(G)|)$ con entradas enteras tal que la i -ésima fila está dada por $\alpha_i - \beta_i$.

1. **Si t es par:** Notemos que sólo las columnas c_1, \dots, c_s, c_{ab} con c_{ab} la columna asociada a la arista $\{a, b\}$ tienen al menos dos entradas distintas de cero, entonces la submatriz de B , $B' = (b')_{ij} \in M_{(s+1) \times (s+1)}$ que consta de las columnas c_1, \dots, c_s, c_{ab} es una matriz con estructura diagonal, entonces por el Lema 3.7 es dominante, lo que implica que B también es dominante, por el Teorema 2.16 y por lo tanto $P_A = (B_{w_1}, \dots, B_{w_{s+1}})$.
2. **Si t es impar:** En este caso, sólo las columnas $c_1, \dots, c_{s+1}, c_{s+r_1}$ tienen al menos dos entradas distintas de cero, entonces la submatriz de B , $B' = (b')_{ij} \in M_{(s+1) \times (s+2)}$ que consta de las columnas $c_1, \dots, c_{s+1}, c_{s+r_1}$ es una matriz con estructura diagonal, entonces por el Lema 3.7 es dominante, lo que implica que B también es dominante, por el Teorema 2.16 y por lo tanto $P_A = (B_{w_1}, \dots, B_{w_{s+1}})$.

Por otro lado, si t es impar, $N_G(R) \cap V(C) = \{x_2, x_{r_1}\}$ con $N_G(\{x_2\}) \cap V(R) = \{z_1, \dots, z_{k_i}\}$, $N_G(\{x_{r_1}\}) \cap V(R) = \{z_{k_{i+1}}, \dots, z_t\}$ y la contracción de G en z_2, z_4, \dots, z_{t-1} es una CI-vértice banda. Sea $H = G[V(C) \cup \{z_{k_i}, z_{k_i+1}, \dots, z_{k_{i+1}}\}]$ y $K = G[\{z_{k_{i-1}}, \dots, z_{k_i}\} \cup \{x_2\}]$ y tomemos G_1 la 2-suma-clique de H y K , debido a que se acaba de probar que H es de Intersección Completa, por el Lema 2.25 se tiene que G_1 es de Intersección Completa, por lo tanto, por inducción, se tiene que G es de Intersección Completa. \square

Lema 3.22 Sea $G = [C; R]$ una gráfica conexa tal que $C = (x_1, \dots, x_r)$ es un ciclo primitivo impar y R contiene un camino sin cuerdas (z_1, \dots, z_t) tal que $b \in V(R) \cap N_G(C)$. Si existe $z_i \notin V(R) \cap N_G(C)$ y G es de Intersección Completa, entonces $\{z_i, b\} \notin E(G)$.

Demostración. Podemos suponer que $z_1, z_t \in N_G(C_1) \cap V(R)$. Tomemos los caminos $\mathcal{L}_1 = (z_i, \dots, z_1)$, $\mathcal{L}_2 = (z_i, b)$ y $\mathcal{L}_3 = (z_i, \dots, z_t)$ entonces por el Lema 3.4 se tiene que G no es de Intersección completa, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{z_i, b\} \notin E(G)$. \square

Observación 3.23 Debido al Lema anterior, si $G = [C; R]$ es una gráfica conexa tal que $V(C_1) \cup \{a\} \subseteq V(C) \subseteq V(C_1) \cup \{a, b\}$ con $C_1 = (x_1, \dots, x_r)$ ciclo primitivo impar y $R = (z_1, \dots, z_t)$ un camino sin cuerdas tal que $|N_G(V(C) \setminus V(C_1)) \cap V(R)| = 1$ con $N_G(C_1) \cap V(R) = \emptyset$, podemos tomar $C' = C_1$ y $V(R') = V(R) \cup \{a, b\}$ entonces $G' = [C'; R']$ con C' un ciclo primitivo impar y R' un camino sin cuerdas y por lo tanto G es de Intersección Completa si y sólo si G' cumple las condiciones de los Lemas 3.14 y 3.17.

APÉNDICE

En este apéndice daremos demostraciones alternativas a algunos resultados de la Sección 3. Algunas de estas pruebas son constructivas y algunas otras podrían ayudar para futuros resultados.

Lema 3.24 Sea $G = [C; R]$ una gráfica con C conexa y tres caminos en R : $\mathcal{P}_i = (x, x_i^1, \dots, x_i^{r_i})$ para $i = 1, 2, 3$, tales que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{x\}$ para $i \neq j$ y $N_G(C) \cap (\cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i)) = \{x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3}\}$. Si $x \notin N_G(C)$ entonces G no es de Intersección Completa.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, para $i = 1, 2, 3$ podemos suponer que si existe un camino \mathcal{P}'_i que va de x a C , tal que $V(\mathcal{P}'_i) \subseteq V(\mathcal{P}_i)$ entonces $V(\mathcal{P}'_i) = V(\mathcal{P}_i)$.

Primero supongamos que existe un ciclo impar $C' = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ en C tal que $x_1^{r_1}, x_2^{r_2}, x_3^{r_3} \in N_G(C')$, entonces definamos $H := G[\cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i) \cup V(C')]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y_{i_j} \in V(C')$ tal que $y_{i_j} \in N_G(x_j^{r_j})$ para $j = 1, 2, 3$, además podemos suponer que $1 = i_1 \leq i_2 \leq i_3$ y que $i_2 - i_1 \cong i_3 - i_2 \pmod{2}$, sea $p \in \{0, 1\}$ tal que $p \cong i_2 - i_1 \pmod{2}$. Supongamos que $p \cong 0 \pmod{2}$, entonces se tienen los siguientes casos:

1. $p \cong 0 \pmod{2}$ y $r_1 \cong r_2 \cong r_3 \pmod{2}$: entonces la theta H_1 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_1) = (x, \dots, x_1^{r_1}, y_{i_1} = y_1, y_2, \dots, y_{i_2})$, $\mathcal{L}_2(H_1) = (x, \dots, x_2^{r_2}, y_{i_2})$ y $\mathcal{L}_3(H_1) = (x, \dots, x_3^{r_3}, y_{i_3}, y_{i_3-1}, \dots, y_{i_2})$ es par ó impar.
2. $p \cong 0 \pmod{2}$ y $r_1 \not\cong r_3 \pmod{2}$: entonces $r_2 \cong r_1 \pmod{2}$ ó $r_2 \cong r_3 \pmod{2}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r_2 \cong r_3 \pmod{2}$, entonces la theta H_2 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_2) = (x, x_2^1, \dots, x_2^{r_2}, y_{i_2}, y_{i_2+1}, \dots, y_{i_3})$, $\mathcal{L}_2(H_2) = (x, x_3^1, \dots, x_3^{r_3}, y_{i_3})$ y $\mathcal{L}_3(H_2) = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, y_1, y_m, y_{m-1}, \dots, y_{i_3})$ es par ó impar.
3. $p \cong 0 \pmod{2}$, $r_1 \cong r_3 \pmod{2}$ y $r_1 \not\cong r_2 \pmod{2}$: Por el Lema 3.3 se tiene que existe $x' \in \cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i)$ tal que $\deg_H(x') = 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x' \in V(\mathcal{P}_{s_1})$ con $\{s_1, s_2, s_3\} = \{1, 2, 3\}$. Tomemos las subgráficas $G_1 = H[V(C') \cup V(\mathcal{P}_{s_1}) \cup V(\mathcal{P}_{s_2})]$ y $G_2 = H[V(C') \cup V(\mathcal{P}_{s_1}) \cup V(\mathcal{P}_{s_3})]$, entonces $b(G_1) = b(G_2) = b(G_1 \setminus x') = b(G_2 \setminus x') = 0$ debido a

que $x' \notin C' \subset V(G_1) \cap V(G_2)$. Sin embargo $b(G_3) = 0$ y $b(G_3 \setminus x') = 1$ con $G_3 = G_1 \cap G_2 = H[V(C') \cup V(\mathcal{P}_{s_1})]$.

Ahora, suponiendo que $p \cong 1 \pmod{2}$ se tienen los siguientes casos:

1. $p \cong 1 \pmod{2}$ y $r_1 \cong r_2 \cong r_3 \pmod{2}$: Por el Lema 3.3 se tiene que existe $x'' \in \cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i)$ tal que $\deg_H(x'') = 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x'' \in V(\mathcal{P}_{s'_1})$ con $\{s'_1, s'_2, s'_3\} = \{1, 2, 3\}$. Tomemos las subgráficas $G'_1 = H[V(C') \cup V(\mathcal{P}_{s'_2}) \cup V(\mathcal{P}_{s'_1})]$ y $G'_2 = H[V(C') \cup V(\mathcal{P}_{s'_3}) \cup V(\mathcal{P}_{s'_1})]$, entonces $b(G'_1) = b(G'_2) = b(G'_1 \setminus x'') = b(G'_2 \setminus x'') = 0$ debido a que $x'' \notin C' \subset V(G'_1) \cap V(G'_2)$. Sin embargo $b(G'_3) = 0$ y $b(G'_3 \setminus x'') = 1$ con $G'_3 = G'_1 \cap G'_2 = H[V(C') \cup V(\mathcal{P}_{s'_1})]$.
2. $p \cong 1 \pmod{2}$, $r_1 \cong r_3 \pmod{2}$ y $r_1 \not\cong r_2 \pmod{2}$: tomemos la theta H_3 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_3) = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, y_{i_1} = y_1, y_2, \dots, y_{i_2})$, $\mathcal{L}_2(H_3) = (x, x_2^1, \dots, x_2^{r_2}, y_{i_2})$ y $\mathcal{L}_3(H_3) = (x, x_3^1, \dots, x_3^{r_3}, y_{i_3}, y_{i_3-1}, \dots, y_{i_2})$.

Por otro lado, supongamos que $z_j \in N_G(x_j^{r_j}) \cap V(C)$ para $i = 1, 2, 3$ no pertenecen a un ciclo impar de C , entonces C es una banda parcial impar con ciclos primitivos $C_1 = (a_1, \dots, a_{m_1})$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_{m_2})$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z_1, z_2 \in V(C_1)$ y $z_3 \in V(C_2)$ con $z_1 \neq z_2$, tomemos los vértices de C_1 de forma que $z_1 = a_1$ y $z_2 = a_{j_2}$ con $1 < j_2$ y que el ciclo $C_3 = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, a_1, \dots, a_{j_2}, x_2^{r_2}, \dots, x_2^1, x)$ es un ciclo par, supongamos que $z_3 = b_1$ y definamos $H' = G[\cup_{i=1}^3 V(\mathcal{P}_i) \cup V(C_1) \cup V(C_2)]$, entonces tenemos los siguientes casos:

1. Existe $j \neq 1$ tal que $\{b_j, a_{j'}\} \in E(H')$ para algún $j' \geq j_2$: Entonces, sea \mathcal{L} el camino dado por (b_1, b_2, \dots, b_j) ó $(b_1, b_{m_2}, \dots, b_j)$ de forma que al tomar la theta H_4 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_4) = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, a_1, \dots, a_{j_2})$, $\mathcal{L}_2(H_4) = (x, x_2^2, \dots, x_2^{r_2}, a_{j_2})$ y $\mathcal{L}_3(H_4) = (x, x_3^1, \dots, x_3^{r_3}, b_1, \mathcal{L}, b_j, a_{j'}, a_{j'-1}, \dots, a_{j_2})$ se satisface que $|\mathcal{L}_3(H_4)| \cong |\mathcal{L}_2(H_4)| \pmod{2}$. Por otro lado, debido a que el ciclo $\mathcal{L}_1(H_4) \cup \mathcal{L}_2(H_4) = C_3$ es par se tiene que $|\mathcal{L}_2(H_4)| \cong |\mathcal{L}_1(H_4)| \pmod{2}$ y por lo tanto H_4 es una theta par ó impar.
2. Existe $j \neq 1$ tal que $\{b_j, a_{j'}\} \in E(H')$ para algún $1 \leq j' \leq j_2$: Entonces, de forma similar al caso anterior, tomemos \mathcal{L}' el camino dado por (b_1, b_2, \dots, b_j) ó $(b_1, b_{m_2}, \dots, b_j)$ de forma que al tomar la theta H_5 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_5) = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, a_1, \dots, a_{j'})$, $\mathcal{L}_2(H_5) = (x, x_2^2, \dots, x_2^{r_2}, a_{j_2}, a_{j_2-1}, \dots, a_{j'})$ y $\mathcal{L}_3(H_5) = (x, x_3^1, \dots, x_3^{r_3}, b_1, \mathcal{L}', b_j, a_{j'})$ se satisface que $|\mathcal{L}_3(H_5)| \cong |\mathcal{L}_2(H_5)| \pmod{2}$. Por otro lado, debido a que el ciclo $\mathcal{L}_1(H_5) \cup \mathcal{L}_2(H_5) = C_3$ es par se tiene que $|\mathcal{L}_2(H_5)| \cong |\mathcal{L}_1(H_5)| \pmod{2}$ y por lo tanto

H_5 es una theta par ó impar.

3. $N_G(C_1) \cap V(C_2) = \{b_1\}$ y $N_G(z_3) \cap V(C_2) = \{b_1\}$: Sea j'' , tal que $a_{j''} \in N_G(b_1)$, y supongamos que $1 \leq j'' \leq j_2$, entonces tomemos la theta H_6 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_6) = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, a_1, a_2, \dots, a_{j''})$, $\mathcal{L}_2(H_6) = (x, x_2^2, \dots, x_2^{r_2}, a_{j_2}, a_{j_2-1}, \dots, a_{j''})$ y $\mathcal{L}_3(H_6) = (x, x_3^2, \dots, x_3^{r_3}, b_1, a_{j''})$, debido a que $\mathcal{L}_1(H_6) \cup \mathcal{L}_2(H_6) = C_3$ es un ciclo par, se tiene que $|\mathcal{L}_1(H_6)| \cong |\mathcal{L}_2(H_6)| \pmod{2}$, entonces si $|\mathcal{L}_3(H_6)| \cong |\mathcal{L}_1(H_6)| \pmod{2}$, se tiene que H_6 es una theta par ó impar.

En caso contrario, supongamos que existe un vértice $v \in V(C_2)$ tal que $\deg_{H'}(v) = 2$, observemos que $\mathcal{L}_1(H_6) \cup \mathcal{L}_3(H_6)$ y $\mathcal{L}_2(H_6) \cup \mathcal{L}_3(H_6)$ son ciclos impares, entonces tomemos las gráficas $G_1'' = H'[V(C_2) \cup V(\mathcal{L}_1(H_6) \cup \mathcal{L}_3(H_6))]$ y $G_2'' = H'[V(C_2) \cup V(\mathcal{L}_2(H_6) \cup \mathcal{L}_3(H_6))]$, y de esta forma se tiene que $b(G_1'') = b(G_2'') = b(G_1'' \setminus \{v\}) = b(G_2'' \setminus \{v\}) = 0$, pero $b(G_3'') = 0$ y $b(G_3'' \setminus \{v\}) = 1$ donde $G_3'' = G_1'' \cap G_2'' = H'[V(C_2) \cup V(\mathcal{L}_3(H_6))]$.

Por otro lado, supongamos que todos los vértices de C_2 tienen grado mayor igual a 3, y debido a que $N_G(C_1) \cap V(C_2) = \{b_1\}$ y $N_G(z_3) \cap V(C_2) = \{b_1\}$ se tiene que $V(C_2) \setminus b_1 \subset N_G(x_1^{r_1}, x_2^{r_2})$, sin embargo z_1, z_2, z_3 no están en ningún ciclo impar de C por lo tanto podemos suponer que $V(C_2) \setminus b_1 \subset N_G(x_1^{r_1})$, y por la simetría entre C_1 y C_2 se tiene que $N_G(C_1) \cap V(C_2) = \{b_1\}$ y $N_G(C_2) \cap V(C_1) = \{a_1\}$ y además $V(C_1) \cup V(C_2) \setminus \{a_1, b_1\} \subset N_G(x_1^{r_1})$, entonces todos los vértices de $H''' = G[\{x_1^{r_1}\} \cup V(C_1 \cup C_2)]$ tienen grado mayor ó igual a tres, sin embargo $\deg_{H'''}(x_1^{r_1}) \geq |V(C_1 \cup C_2)| - |\{a_1, b_1\}| \geq 4$, es decir H''' no es 3-regular y de esta forma G no es de Intersección Completa.

4. $N_G(C_1) \cap V(C_2) = \{b_1\}$ y $N_G(z_3) \cap V(C_2) = \{b_1\}$: Sea j'' , tal que $a_{j''} \in N_G(b_1)$, y supongamos que $j'' \geq j_2$, entonces tomemos la theta H_7 ó H_8 con cuerdas $\mathcal{L}_1(H_7) = (x, x_1^1, \dots, x_1^{r_1}, a_1, a_2, \dots, a_{j_2})$, $\mathcal{L}_2(H_7) = (x, x_2^2, \dots, x_2^{r_2}, a_{j_2})$ y $\mathcal{L}_3(H_7) = (x, x_3^1, \dots, x_3^{r_3}, b_1, a_{j''}, a_{j''-1}, \dots, a_{j_2})$, ó $\mathcal{L}_1(H_8) = (x, x_1^2, \dots, x_1^{r_2}, a_{j_2}, a_{j_2-1}, \dots, a_1)$, $\mathcal{L}_2(H_8) = (x, x_1^2, \dots, x_1^{r_1}, a_1)$ y $\mathcal{L}_3(H_8) = (x, x_3^1, \dots, x_3^{r_3}, b_1, a_{j''}, a_{j''+1}, \dots, a_{m_1}, a_1)$, debido a que $\mathcal{L}_1(H_7) \cup \mathcal{L}_2(H_7) = \mathcal{L}_1(H_8) \cup \mathcal{L}_2(H_8) = C_3$ es un ciclo par, se tiene que $|\mathcal{L}_1(H_7)| \cong |\mathcal{L}_2(H_7)| \pmod{2}$ y $|\mathcal{L}_1(H_8)| \cong |\mathcal{L}_2(H_8)| \pmod{2}$, por lo tanto alguna H_7 ó H_8 es una theta par ó impar, salvo en el caso en el que los ciclos $D_1 = (x, \mathcal{P}_3, x_3^{r_3}, b_1, a_{j''}, a_{j''-1}, \dots, a_{j_2}, x_2^{r_2}, \mathcal{P}_2, x)$ y $D_2 = (x, \mathcal{P}_1, x_1^{r_1}, a_1, a_{m_1}, \dots, a_{j''}, b_1, x_3^{r_3}, \mathcal{P}_3, x)$ sean ambos impares. Si existe algún $v' \in V(C_2)$ tal que $\deg_{H'}(v') = 2$, definimos las subgráficas

$G_1''' = H'[V(C_2) \cup V(D_1)]$ y $G_2''' = H'[V(C_2) \cup V(D_2)]$, entonces $b(G_1''') = b(G_2''') = b(G_1''' \setminus \{v\}) = b(G_2''' \setminus \{v\}) = 0$, pero $b(G_3''') = 0$ y $b(G_3''' \setminus \{v\}) = 1$, donde $G_3''' = G_1''' \cap G_2''' = H'[V(C_2) \cup V(\mathcal{P}_3) \cup \{a_{j''}\}]$.

□

El siguiente Lema es un caso particular del Teorema 3.11

Lema 3.25 Sea $G = [C; R]$ una gráfica de Intersección Completa, con C conexa que no es una 1– banda parcial impar además B_1, \dots, B_t son bloques de R y $\{a_1, \dots, a_{t+1}\} \subseteq V(R)$ tales que para $2 \leq i \leq t$, $a_i \in V(B_{i-1}) \cap V(B_i)$ son vértices de corte. $a_1 \in V(B_1)$ y $a_{t+1} \in V(B_t)$. Si $\{a_1, b_1\}, \{a_{t+1}, b_2\} \in E(G)$ con $b_1, b_2 \in V(C)$ y $b_1 \neq b_2$, entonces $\{a_i, a_{i+1}\} \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq t$.

Demostración. Supóngase que existe al menos un subíndice $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\{a_i, a_{i+1}\} \notin E$, sea i_0 el subíndice más pequeño con esta característica. Como $a_{i_0}, a_{i_0+1} \in B_{i_0}$ y B_{i_0} es un bloque, entonces existen dos caminos de a_{i_0} a a_{i_0+1} de longitud mayor a uno con interior disjunto \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 . Por otro lado, debido a que B_{i_0} es bipartita, los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ tienen la misma paridad p , ya que, en caso contrario se tendría un ciclo impar. Además, sea \mathcal{P}' un camino más corto de a_{i_0} a a_1 en R y \mathcal{P}'' un camino más corto de a_{t+1} a a_{i_0+1} en R . Por el Lema 3.2 existe un camino $\tilde{\mathcal{P}}$ entre b_1 y b_2 tal que $\mathcal{P}_3 = a_{i_0}\mathcal{P}'a_1b_1\tilde{\mathcal{P}}b_2a_{t+1}\mathcal{P}''a_{i_0+1}$ tiene la misma paridad que \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 . Claramente el interior de \mathcal{P}_3 y el interior de \mathcal{P}_k son disjuntos para $k \in \{1, 2\}$. Por lo tanto se tiene que $[V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2) \cup V(\mathcal{P}_3)]$ contiene una theta graph par o impar. Por lo tanto, por el Teorema 2.24, G no es de Intersección Completa. □

La demostración del siguiente Lema describe los generadores del ideal tórico P_G del Lema 3.8

Lema 3.26 Sean $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1})$ un ciclo primitivo impar y $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2})$ un ciclo primitivo par de G . Si G satisface alguna de las siguientes condiciones:

- $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_{i_2}, b_1\}, \dots, \{a_{i_s}, b_1\}\}$ donde $1 < i_2 < \dots < i_s$, además i_3, \dots, i_s son impares, mientras $i_2 = 2$ ó i_2 es impar.
- $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_{i_1}, b_1\}, \dots, \{a_{i_{s_1}}, b_1\}, \{a_{j_1}, b_2\}, \dots, \{a_{j_{s_2}}, b_2\}\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{s_1} \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s_2} \leq r_1$ y $i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2}$ son impares.

entonces G es de Intersección Completa.

Demostración. Primero veamos que $ht(G) = |E(G)| - |V(G)| + b(G) = (r_1 + r_2 + q) - (r_1 + r_2) + 0 = q$ donde q es el número de aristas entre C_1 y C_2 .

- a) Si $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{b_1, a_{i_1}\}, \dots, \{b_1, a_{i_s}\}\}$ donde $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ son impares, entonces $ht(G) = s$. Tomemos $E(C_1) = \{x_1, \dots, x_{r_1}\}$, $x_{r_1+j} = \{b_1, a_{i_j}\}$ para $j = 1, \dots, s$ y $E(C_2) = \{x_{r_1+s+1}, \dots, x_{r_1+s+r_2}\}$. Además tenemos dos posibilidades:

$a_2 \in N_G(b_1) \cap V(C_1)$: Entonces $i_2 = 2$, y tomemos los ciclos:

$$u_k := \begin{cases} (b_1, a_{i_1}, \dots, a_{i_3}, b_1) & \text{si } k = 1 \\ (b_1, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_{k+2}}, b_1) & \text{si } 2 \leq k \leq s-2 \\ (b_1, a_{i_s}, \dots, a_{r_1}, a_1, a_2, b_1) & \text{si } k = s-1 \\ (b_1, b_2, \dots, b_{r_2}, b_1) & \text{si } k = s \end{cases}$$

debido a que todos los i'_k s son impares, se tiene que los caminos que van de a_{i_k} a $a_{i_{k+1}}$ tienen longitud par, por lo tanto, el ciclo u_k tiene longitud par, para todo $k \in \{2, \dots, s-2\}$. Además el ciclo u_1 tiene longitud $(i_3 + 1)$ y el ciclo u_{s-1} tiene longitud $(r_1 - i_s + 4)$, las cuales son pares.

Sea $B_{u_k} = x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}^{r_1+r_2+s}$, el binomio asociado al ciclo par u_k , para $1 \leq i \leq s$. Sea B la matriz $s \times (r_1 + r_2 + s)$ con entradas enteras tal que la k -ésima fila está dada por $\alpha_k - \beta_k$. Supongamos que B tiene una submatriz cuadrada mixta A . Notemos que para $k \in \{1, 3, \dots, (r_1 + 2)\} \cup \{(r_1 + s + 1), \dots, (r_1 + s + r_2)\}$ la k -ésima columna tiene a lo más una única entrada distinta de cero. Entonces por el Lema 2.17, A es una submatriz de $B' = (b'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s-1}} \in M_{s \times (s-1)}$ cuyas entradas son

$$b'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \text{ con } i \in \{1, \dots, s-1\} \\ -1 & \text{si } j = i+1 \text{ con } j \in \{2, \dots, s-2\} \\ 1 & \text{si } (i, j) = (1, 2) \text{ ó } (i, j) = (s-1, 1) \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Sea B_1 la matriz que resulta de quitar las filas 1 y s de B . Como estas columnas no tienen entradas positivas y negativas, entonces A es una submatriz de B_1 . Ahora tomamos $B_2 = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq s-2 \\ 1 \leq j \leq s-2}}$ la matriz que resulta de

borrar la primera columna de B_1 . Por el Lema 2.17, A es una submatriz de B_2 , porque la primera columna de B_1 sólo tiene una entrada diferente de cero. Pero

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \text{ con } i \in \{1, \dots, s-2\} \\ -1 & \text{si } j = i+1 \text{ con } j \in \{2, \dots, s-3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por el Lema 3.6, B_2 es dominante. Lo cual es una contradicción, por lo tanto B es dominante. Además B tiene una matriz diagonal $s \times s$ cuyas entradas diferentes de cero son 1 y -1 , de donde $\Delta_s(B) = 1$. Por lo tanto P_G es intersección completa por el Teorema 2.16.

$a_2 \notin N_G(b_1) \cap V(C_1)$: Tomemos los ciclos:

$$v_k := \begin{cases} (b_1, a_{i_k}, \dots, a_{i_{k+1}}, b_1) & \text{si } 1 \leq k \leq s-1 \\ (b_1, b_2, \dots, b_{r_2}, b_1) & \text{si } k = s \end{cases}$$

Como i_k es impar, entonces el ciclo v_k es par, para todo $k \in \{2, \dots, s-1\}$.

Sea $B_{v_k} = x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}^{r_1+r_2+s}$, el binomio asociado al ciclo par v_k , para $1 \leq k \leq s$. Sea B la matriz $s \times (r_1 + r_2 + s)$ cuya k -ésima fila está dada por $\alpha_k - \beta_k$. Notemos que para $k \in \{1, \dots, (r_1 + 1)\} \cup \{(r_1 + s), \dots, (r_1 + r_2 + s)\}$ la k -ésima columna tiene a lo más una única entrada distinta de cero. Si $B' = (b'_{ij}) \in M_{(s-1) \times (s-2)}$ es la matriz que queda al quitar estas columnas de B , así como los renglones igual a cero obtenemos que

$$b'_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \text{ con } j \in \{2, \dots, s-2\} \\ 1 & \text{si } i = j+1 \text{ con } j \in \{1, \dots, s-2\}, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por el Lema 3.7 la matriz B' es dominante. Por lo tanto por el Lema 2.17, B es dominante. Lo que demuestra que $P_G = (B_{v_1}, \dots, B_{v_s})$.

- b) Si $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_{i_1}, b_\alpha\}, \dots, \{a_{i_{s_1}}, b_\alpha\}, \{a_{j_1}, b_\beta\}, \dots, \{a_{j_{s_2}}, b_\beta\}\}$ con $\{b_\alpha, b_\beta\} \in E(G)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{s_1} \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s_2} \leq r_1$ y $i_1, \dots, i_{s_1}, j_1, \dots, j_{s_2}$ son impares, entonces $ht(G) = s = s_1 + s_2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, entonces tomemos los ciclos:

$$w_k := \begin{cases} (b_1, a_{i_{s_1-1}}, \dots, a_{i_{s_1}}, b_1) & \text{si } k = 1 \\ (b_1, a_{i_{k-1}}, \dots, a_{i_k}, b_1) & \text{si } 2 \leq k \leq s_1 - 1 \\ (b_2, a_{j_{k+1-s_1}}, \dots, a_{j_{k+2-s_1}}, b_2) & \text{si } s_1 \leq k \leq s - 2 \\ (b_1, a_{i_1}, \dots, a_1, a_{r_1}, \dots, a_{j_{s_2}}, b_2, b_1) & \text{si } k = s - 1 \\ (b_1, b_2, \dots, b_{r_2}, b_1) & \text{si } k = s_1 + s_2 = s \end{cases}$$

debido a que todos los i'_k 's, j'_k 's son impares, se tiene que los caminos que van de a_{i_k} a $a_{i_{k+1}}$ y de a_{j_k} a $a_{j_{k+1}}$ tienen longitud par, por lo tanto, el ciclo w_k tiene longitud par, para todo $k \in \{1, \dots, s-2\}$, además el ciclo w_{s-1} tiene longitud $(i_1 + r_1 - j_{s_2}) + 3$, la cual es par.

Sea el binomio $B_{w_k} = x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}^s$, correspondiente al ciclo par w_k , para $1 \leq i \leq s$. Sea B la matriz $s \times (r_1 + r_2 + s)$ con entradas enteras tal que la k -ésima fila está dada por $\alpha_k - \beta_k$ notemos que para $k \in \{1, \dots, r_1\} \cup \{(r_1 + s_1), (r_1 + s_1 + 1)\} \cup \{(r_1 + s + 2), \dots, (r_1 + r_2 + s)\}$ la k -ésima columna tiene a lo más una única entrada distinta de cero, entonces por el Teorema 2.16 basta ver que la submatriz de B , $B' = (b'_{ij}) \in M_{s \times (s-1)}$ que consta de las columnas $c_{r_1+1}, \dots, c_{r_1+s_1-1}, c_{r_1+s_1+2}, \dots, c_{r_1+s+1}$ es dominante, con:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \text{ con } j \in \{2, \dots, s-1\} \\ 1 & \text{si } i = j+1 \text{ con } j \in \{1, \dots, s_1-2\} \cup \{s, \dots, s-1\} \\ 1 & \text{si } (i=1, j=s_1-1) \text{ ó } (i=s-1, j=1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

notemos que para $q \in \{2, \dots, \hat{s}_1, \dots, s-2\}$ la q -ésima fila tiene una entrada positiva y una negativa si y sólo si se toman las columnas $(q-1)$ y q . Y la $(s-1)$ -ésima fila tiene una entrada positiva y una negativa si y sólo si se toman las columnas $(s-1)$ y 1 ó $(s-1)$ y $(s-2)$. Por un argumento similar a la prueba del Lema 3.7 se tiene que la matriz B' es dominante y por lo tanto B también lo es, lo que demuestra que $P_A = (B_{w_1}, \dots, B_{w_s})$.

□

REFERENCIAS

- [1] M. Afkhami, Z. Barati y K. Khashyarmanesh, *When the unit, unitary and total graphs are ring graphs and outerplanar*, Rocky Mt. J. Math. **44 (3)**, (2014a), 705-716.
- [2] M. Afkhami, Z. Barati y K. Khashyarmanesh, *When the comaximal and zero divisor graphs are ring graphs and and outerplanar*, Rocky Mt. J. Math. **44 (6)**, (2014b), 1745-1761.
- [3] M. Afkhami y K. Khashyarmanesh, *Planar, outerplanar, and ring graph of the cozero-divisor graph of a finite commutative*, J. Algebra Appl. **11 (6)**, (2012).
- [4] M.F. Atiyah y I.G Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, (1969).
- [5] I. Bermejo, I. García-Marco, *Complete intersections in simplicial toric varieties*, J. Symb. Comput. **68**, (2015), 265-286.
- [6] I. Bermejo, I. García-Marco y E. Reyes, *Graphs and complete intersection toric ideals*, J. Algebra Appl. **14 (9)**, (2015), 1540011 (37 pages).
- [7] I. Bermejo, I. García-Marco y J.J. Salazar-González, *An algorithm for checking whether the toric ideal of an affine monomial curve is a complete intersection*, J. Symb. Comput. **42**, (2007), 971-991.
- [8] I. Bermejo, Ph. Gimenez, E. Reyes y R.H. Villarreal, *Complete intersections in affine monomial curves*, Bol. Soc. Mat Mexicana **(3) 11 (2)**, (2005), 191-203.
- [9] J. Blasiak, *The toric ideal of a graphic matroid is generated by quadrics*, Combinatorica **28 (3)**, (2008), 283-297.
- [10] E. Cattani, R. Curran, A. Dickenstein, *Complete intersection in Toric Ideals*, Proc. Am. Math. Soc. **135**, (2007), 329-335.
- [11] D. Cox, J. Little y H. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol **124**, Amer. Math. Soc., (2011).
- [12] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol **173**, Springer, 2nd ed, (2000).

- [13] S. Eliahou y R.H. Villarreal, *On systems of binomials in the ideal of a toric variety*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2), (2001), 345-351.
- [14] K. Fischer, W. Morris y J. Shapiro, *Affine semigroup ring that are complete intersections*, Proc. Am. Math. Soc. **125**, (1997), 3137-3145.
- [15] K. Fischer y J. Shapiro, *Mixed matrices and binomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **113**, (1996), 39-54.
- [16] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Ann. Math. Stud., Princeton University Press, (1997).
- [17] I. García-Marco y J.L. Ramírez, *Matroid toric ideals: complete intersection, minors and minimal systems of generators*, SIAM J. Discrete Math., **29**(4), (2015), 2267–2276.
- [18] I. Gitler, E. Reyes y J.A. Vega, *Complete intersection toric ideals of oriented graphs and chorded-theta subgraphs*, J. Algebraic Comb. **38** (3), (2013), 721-744.
- [19] I. Gitler, E. Reyes y J.A. Vega, *CIO and ring graphs: Deficiency and testing*, J. of Symb. Comp. **79**, (2017), 249-268.
- [20] I. Gitler, E. Reyes y R. H. Villarreal, *Ring graphs and complete intersection toric ideals*, Discrete Math **310** (3), (2010), 430-441.
- [21] E. Gross y S. Petrovic, *Combinatorial degree bound for toric ideals of hypergraphs*, Int. J. Algebra Comput. **23** (6), (2013), 1503-1520.
- [22] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol **52**, 1997.
- [23] J. Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscr. Math **3**, (1970), 175-193.
- [24] S. Hosten y J. Shapiro, *Primary decomposition of lattice basis ideals*, J. Symbolic Comput. **29** (4–5), (2000), 625–639.
- [25] A. Katsabekis, *On the binomial arithmetical rank of toric ideals*, J. Algebra Appl. **13** (7), (2014), 16pp.
- [26] MA. Katzman, *Bipartite graphs whose edge algebras are complete intersections*, J. Algebra **220**, (1999), 519-530.
- [27] H.H. López, R.H. Villarreal y L. Zárate, *Complete intersection vanishing ideals on degenerate tori over finite fields*, Arab. J. Math **2** (2), (2013), 189-197.
- [28] N.J. Michelacakis y A. Thoma, *On the geometry of complete intersection toric varieties*, Arch. Math. **87**, (2006), 113-123.

- [29] E. Miller y B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol **227**, Springer, New York, (2005).
- [30] M. Morales y A. Thoma, *Complete intersection lattice ideals*, J. Algebra **220**, (2005), 755-770.
- [31] U. Nagel y S. Petrovic, *Properties of cut ideals associated to ring graphs*, Commun. Algebra **1 (3)**, (2009), 547-565.
- [32] H. Ohsugi y T. Hibi, *Toric ideals generated by quadratic binomials*, J. Algebra **218**, (1999), 509-527.
- [33] S. Petrovic y D. Stasi, *Toric algebras of hypergraphs*, J. Algebraic Comb. **39 (1)**, (2014), 187-208.
- [34] E. Reyes, *Complete intersection toric ideals of oriented graphs*, Morfismos **9 (2)**, (2005), 71-82.
- [35] E. Reyes, C. Tatakis y A. Thoma, *Minimal generators of toric ideals of graphs*, Adv. Appl. Math **48 (1)**, (2012), 64–78.
- [36] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 1st ed., (2003).
- [37] G. Scheja, O. Scheja y U. Storch, *On regular sequences of binomials*, Manuscr. Math. **98**, (1999), 115-132.
- [38] A. Simis, *On the Jacobian module associated to a graph*, Proc. Am. Math. Soc. **126**, (1998), 989-997.
- [39] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, vol. **8**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1996).
- [40] C. Tatakis y A. Thoma, *On the universal Gröbner bases of toric ideals of graphs*, J. Comb. Theory, Ser. A **118**, (2011), 1540-1548.
- [41] C. Tatakis y A. Thoma, *On complete intersection toric ideals of graphs*, J. Algebraic Comb. **38**, (2013), 351-370.
- [42] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Second Edition, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman and Hall/CRC, (2015).

NOTACIÓN

- $G \setminus \{v_1, \dots, v_s\}$, Gráfica inducida por $V \setminus \{v_1, \dots, v_s\}$, 1
 $b(\cdot)$, Número de componentes bipartitas, 2
 $(k^*)^n$, Toro de dimensión n , 10
 B_w , Binomio asociado a la caminata w , 12
 D_G , Matriz de incidencia de G , 12
 $E(\cdot)$, Conjunto de aristas, 1
 G_v^c , Contracción de G en v , 2
 I_L , Ideal lattice asociado a L , 12
 $Mon(\cdot)$, Conjunto de monomios, 5
 $N_G(\cdot)$, Conjunto de vecinos de un vértice, 1
 P_D , Ideal tórico asociado a D , 9
 P_G , Ideal tórico P_{D_G} , 12
 $R[\cdot]$, Subanillo generado por un conjunto, 4
 $Spec(\cdot)$, Espectro de un anillo, 4
 $V(\cdot)$, Conjunto de vértices, 1
 V_f , Complemento del conjunto de ceros de la función f , 7
 $[C; R]$, Gráfica con partición de dos subgráficas inducidas C y R , 16
 $[\cdot]$, Subgráfica inducida, 1
 $\Delta_t(\cdot)$, Máximo común divisor de todo menor $t \times t$ de B , 14
 Γ^* , Conjunto tórico afín, 10
 \mathbb{A}_k^n , Espacio afín de dimensión n sobre k , 5
 $\mathcal{I}(\cdot)$, Ideal inducido por una variedad, 5
 $\mathcal{V}(\cdot)$, Variedad afín de un ideal en k^n , 5
 \mathfrak{T}_z , Topología de Zariski, 6
 $\mu(\cdot)$, Cardinalidad de un conjunto mínimo de generadores de P_D , 9
 $\phi(t_i)$, Homomorfismo de k -álgebras definido por $\phi(t_i) = x^{d_i}$, 9
 ϕ_G , Homomorfismo de k -álgebras asociado a la matriz D_G , 12
 \sqrt{I} , Radical de un ideal, 4
 $deg_G(\cdot)$, Grado de un vértice, 1
 $ht(\cdot)$, Altura de un ideal, 4, 12
 k -base, Base de un anillo de polinomios, 5
 $k[G]$, Álgebra de aristas de la gráfica G , 12
 w^+, w^- , Partición del conjunto de aristas de w , 12
 $x^{d_i}, x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$, 9

ÍNDICE ALFABÉTICO

- álgebra, R –álgebra, 4
 - R –subálgebra/ R –subanillo, 4
 - finita, 4
 - finitamente generada, 4
 - homomorfismo, 4
- afín
 - conjunto tórico, 10
 - espacio afín, 5
 - semigrupo, 11
 - variedad afín, 5
 - variedad tórica afín, 11
- anillo
 - de semigrupo
 - dimensión de Krull del, 12
 - de semigrupos, 11
 - espectro, 4
- arista, 1
 - de corte, 2
 - impar, 12
 - par, 13
- banda parcial impar, 3
 - 1–banda-parcial-impar, 17
- binomio, 5
 - primitivo, 5
- caminata, 1
 - extremos, 1
 - longitud, 1
- camino, 1
 - H-camino, 1
 - primitivo, 13
 - puente, 13
- CI-rueda-doble, 3
- CI-vértice-banda, 3
- ciclo, 2
 - 4-ciclo, 16
 - k -ciclo, 2
- cuerda, 2
 - par/impar, 13
- impar, 2
- longitud, 2
- par, 2
- primitivo/inducido, 2
- contracción, 2
- gráfica
 - álgebra de aristas, 12
 - 2-conexa, 2
 - anillada, 3
 - bipartita, 2
 - bloque, 2
 - sumidero (sink), 13
 - completa, 1, 2
 - componente conexa, 2
 - conexa, 2
 - disconexa, 2
 - partición, 2
 - simple, 1
 - trivial, 1
 - vacía, 1
- ideal
 - binomial, 5
 - cadena ascendente, 4
 - longitud, 4
 - generador, 4
 - irreducible, 4
 - lattice, 12
 - mínimo, 4
 - primo, 4
 - altura, 4
 - producto, 4
 - radical, 4

- reducible, 4
- tórico, 9, 12
 - Intersección Completa, 9
- intersección completa, 12
- lattice, 11
- Laurent, anillo de polinomios de, 11
- matriz
 - de incidencia, 12
 - dominante, 14
 - mixta, 14
- monomio, 5
 - soporte, 5
- rueda parcial impar, 3
 - CI-rueda-parcial-impar, 3
- semigrupo, 11
- subanillo, 4
- subgráfica, 1
 - inducida, 1
- suma clique, 2
 - r -suma clique, 2
- tórico
 - ideal, 9
- theta, gráfica, 3
- toro, 11
- toro de dimensión n , 10
- vértice, 1
 - adyacente, 1
 - aislado, 1
 - de corte, 2
 - grado, 1
 - incidente, 1
 - vecinos, 1
- variedad
 - afín, 5
 - anillo de coordenadas, 7
 - irreducible, 6
- vecindad, 1
- Zariski, topología, 6