

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**La homología de los espacios de
configuraciones**

T E S I S

Que presenta

Nestor Colin Hernandez

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias
en la especialidad de Matemáticas**

Director de la tesis: **Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino**

Ciudad de México

Septiembre, 2017.

Agradecimientos

De manera muy especial quisiera agradecer al Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino por la paciencia, las enseñanzas, el tiempo y todo el apoyo que me brindó para concluir este trabajo. A mis sinodales Dr. Jesús González, Dr. Juan Manuel Burgos y Dr. Iakov Mostovoi por tomarse el tiempo de revisar la presente tesis, las atenciones recibidas y sus valiosos comentarios, así como también quiero agradecer al Dr. Enrique Ramírez de Arellano quien en este último año me brindó el apoyo necesario para poder terminar este trabajo. También quisiera agradecer a Isaac Ortigoza y Cristhian Hidber por las valiosas charlas que tuvimos, algunas partes de esta tesis fueron solventadas gracias a ello.

En lo personal quiero agradecer a mis padres José Colín y Catalina Hernández por su incondicional apoyo, quienes en todo momento buscaron que tuviera la comodidad necesaria para poder realizar este trabajo. A Arely Ayala quien permaneció a mi lado durante esta etapa, sin mencionar todo el apoyo y los bellos momentos que hemos pasado. El habernos encontrado ha sido de lo mejor que ha sucedido en mi vida. A mis amigos Adrian, Aarón, Alejandro, Carlos y Gemma con quienes he pasado gratos momentos y quienes regalan a mi vida algo de ellos. A mis hermanos y familiares que han estado al pendiente tanto de mi vida académica como de la personal, gracias por su apoyo.

Agradezco a todo el personal administrativo del Departamento de Matemáticas, principalmente a Roxana Martínez, por la disposición y ayuda mostrada.

Finalmente agradezco al CONACYT por la beca otorgada para la realización del presente trabajo.

Resumen

El k -ésimo espacio de configuraciones ordenadas de una variedad $F_k(M)$ consta de todas las k -tuplas de puntos distintos en M . El grupo simétrico Σ_k actúa naturalmente en $F_k(M)$ y el espacio de órbitas $F_k(M)/\Sigma_k$ es el espacio de configuraciones desordenadas. Aunque han sido intensamente estudiados, la homología de estos espacios es desconocida excepto para casos especiales. C.F-Bödigheimer, F. Cohen y L. Taylor nos dicen que la homología de $F_k(M)/\Sigma_k$ depende del número k y de los números de Betti de la variedad M , en el caso en que M es una variedad compacta y los coeficientes son un campo \mathbb{F} , ya sea el campo \mathbb{F}_p de los enteros módulo p o un campo de característica cero. Este trabajo tiene como propósito dar una exposición a detalle de los resultados obtenidos por C.F-Bödigheimer, F. Cohen y L. Taylor sobre los cálculos de la homología de $F_k(M)/\Sigma_k$ [8] y [10].

Abstract

The k -th ordered configuration space $F_k(M)$ of a manifold M consisting of all k -tuples of distinct points in M . The symmetric group acts naturally in $F_k(M)$ by permutation of coordinates and the orbit space $F_k(M)/\Sigma_k$ is the disordered configuration space. Although intensively studied their homology is unknown except for special cases. C.F-Bödigheimer, F. Cohen and L. Taylor tell us that their homology depends on the Betti numbers of the manifold M , the dimension of M and the k number, for the case where M is compact manifold and the coefficients are a field \mathbb{F} , either the field \mathbb{F}_p with p elements, or a field of characteristic zero. The purpose of this work is to give a detailed exposition of the results obtained by C.F-Bödigheimer, F. Cohen and L. Taylor on the calculations of the homology of $F_k(M)/\Sigma_k$ [8] and [10].

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	5
Introducción	11
1. Preliminares	17
1.1. Casifibraciones	17
1.2. La construcción QX	19
1.3. La construcción de May-Milgram	22
1.4. La descomposición de Snaith	27
1.5. La homología de $\Omega^n \Sigma^n X$	28
1.5.1. Homología módulo 2 de $\Omega^k S^n$	32
1.5.2. Homología módulo 2 de QX	34
2. El espacio de configuraciones etiquetadas	35
2.1. El espacio de configuraciones $C(M, M_0; X)$	36
2.2. Descomposiciones estables y mapeos de Hopf	38
2.3. Casifibraciones asociadas con $C(M, M_0; X)$	42
2.4. $C(M, M_0; X)$ como espacio de funciones	45
2.5. Hazes vectoriales sobre espacios de configuraciones	52
3. La homología de $C(M, M_0; S^n)$	55
3.1. El teorema principal	55
3.2. La homología de $D_k(M, M_0; S^n)$	62

3.3. El caso $n = 1$	70
3.4. Caso G grupo de Lie compacto y conexo.	71
4. La homología de $F_k(M)/\Sigma_k$	75
4.1. Caso $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$	76
4.2. Caso \mathbb{F} en general	77
4.3. Homología de configuraciones sobre superficies cerradas	82
4.4. Homología de configuraciones sobre complementos de nudos	87
4.5. Cohomología racional de espacios de configuraciones de superficies . .	88
Bibliografía	95

Introducción

El k -ésimo espacio de configuraciones ordenadas de una variedad $F_k(M)$ consta de todas las k -tuplas de puntos distintos en M , es decir,

$$F_k(M) := \{(z_1, \dots, z_k \mid z_i \neq z_j \text{ para } i \neq j)\}.$$

El grupo simétrico Σ_k actúa naturalmente en $F_k(M)$ y el espacio de órbitas $F_k(M)/\Sigma_k$ es el espacio de configuraciones desordenadas.

Desde E. Fadell y L. Newirth [25] el estudio de los espacios de configuraciones ha sido importante y estos aparecen en varios contextos tales como geometría algebraica, teoría de nudos, topología diferencial, planeación motriz, teoría de homotopía. Por ejemplo, sabemos que el espacio $F_k(\mathbb{R}^2)/\Sigma_k$ es el espacio clasificante del grupo de trenzas de Artín en k -cuerdas así como también el espacio $F_k(\mathbb{R}^n)$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio de las k -ésimas operaciones del operad de n -cubitos, el cual juega un rol importante en la teoría de los espacios de n -lazos; más aún, el espacio de configuraciones etiquetadas $C(\mathbb{R}^n; X)$ es del mismo tipo de homotopía que $\Omega^n \Sigma^n X$.

Aunque los espacios de configuraciones $F_k(M)/\Sigma_k$ han sido intensamente estudiados su homología es desconocida, pero existen diversos trabajos que la describen para casos especiales, ejemplo de ellos [3], [4], [13], [8], [14], [16], [19], [20], [21], [26], [29] y [42] por mencionar algunos. Nuestra atención se restringe a los resultados obtenidos por Bödighheimer-Cohen-Taylor [8] quienes nos dan una descripción de la homología de $F_k(M)/\Sigma_k$ en el caso en que M es una variedad compacta y los coeficientes son un campo \mathbb{F} ya sea el campo \mathbb{F}_p de los enteros módulo p o un campo de característica

cero, tal descripción depende solamente de los números de Betti de la variedad M y del número k .

El propósito de este trabajo es dar a detalle los resultados obtenidos por C.-F. Bödigheimer, F. Cohen y L. Taylor sobre los cálculos de la homología de $F_k(M)/\Sigma_k$. Su método consiste en determinar $H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}_p)$ como parte de la homología de un espacio mucho más grande:

$$C(M, M_0; X) = \left(\prod_{k \geq 1} F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^k \right) / \approx$$

donde M_0 es una subvariedad, X es un espacio con un punto base x_0 y la relación \approx es generada por $(z_1, \dots, z_k; x_1, \dots, x_k) \approx (z_1, \dots, z_{k-1}; x_1, \dots, x_{k-1})$ si $z_k \in M_0$ o $x_k = x_0$. Tales espacios $C(M, M_0; X)$ llamados “espacios de configuraciones etiquetadas” son una generalización natural de la construcción de May-Milgram y aparecen en [6], [34] y [40] como modelos combinatorio de ciertos espacios de funciones.

El principal objetivo de esta Tesis es desarrollar la teoría necesaria para probar los siguientes resultados clásicos de [8] y [10].

Teorema 0.1 (Bödigheimer-Cohen-Taylor, 1989) *Sean M una variedad compacta de dimensión m y $n \geq 1$. Supongamos que $m + n$ es impar, a menos que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\theta : H_*(C(M, M_0; S^n); \mathbb{F}) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n}; \mathbb{F})^{\otimes \beta_q}$$

donde β_q es el q -ésimo número de betti de $H_*(M, M_0; \mathbb{F})$

El teorema anterior se cumple en particular cuando $M_0 = \emptyset$ y a partir de esto, podremos entonces determinar la homología de los espacios de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$.

Teorema 0.2 (Bödiger-Cohen-Taylor 1989) *Sea M una variedad compacta de dimensión m , entonces se cumple lo siguiente:*

(i) *Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ o m es impar, entonces para $0 < q < mk$ y $n \gg 0$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\begin{aligned} H_q(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}) &\cong H_{q+2nk}(C(M; S^{2n}); \mathbb{F}) \\ &\cong \bigotimes_{q=0}^m H_{q+2nk}(\Omega^{m-q} S^{m+2n}; \mathbb{F})^{\otimes \beta_q} \end{aligned}$$

(ii) *Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ o m es par, entonces para $0 < q < mk$ y $n \gg 0$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\begin{aligned} H_q(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}(-1)) &\cong H_{q+(2n+1)k}(C(M; S^{2n+1}); \mathbb{F}) \\ &\cong \bigotimes_{q=0}^m H_{q+(2n+1)k}(\Omega^{m-q} S^{m+2n+1}; \mathbb{F})^{\otimes \beta_q} \end{aligned}$$

Donde $\mathbb{F}(-1)$ es la representación signo de \mathbb{F} .

En particular cuando $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ se define una filtración por pesos del álgebra

$$\mathcal{C}(H_*; n) = \bigotimes_{q=0}^m (H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n}; \mathbb{F}_2))^{\otimes \beta_q},$$

y se demostrará que el subespacio generado por los elementos de peso exactamente k bajo una desuspensión coincide con la homología de los espacios de configuraciones $F_k(M)/\Sigma_k$.

Teorema 0.3 (Bödiger-Cohen-Taylor, 1989) *Si M es una variedad compacta, entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\bar{\theta}_k : H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}_2) \cong \sigma^{-kn} \mathcal{D}_k(H_*(M); n)$$

para toda n . Donde $\mathcal{D}_k(H_*(M); n)$ son los cocientes sucesivos de la filtración por pesos, es decir, los elementos de peso exactamente k y σ^{-kn} es la kn -desuspensión.

Los métodos que se exponen no son suficientes para determinar el producto en cohomología ni las operaciones de Steenrod.

Con el fin de cumplir nuestro objetivo dividiremos esta tesis en cuatro capítulos.

En el capítulo 1 recordaremos algunos resultados conocidos de teoría de homotopía, tales como la construcción de May-Milgram $C_n X$ que emplea a los espacios de n -cubitos; la relación que existe entre éste y el espacio de configuraciones etiquetadas $C(\mathbb{R}^n; X)$ así como también el Teorema de aproximación de P. May y la descomposición estable de Snaith. En la parte final recordaremos los resultados referentes a la homología de los espacios de lazos iterados $\Omega^n \Sigma^n X$ y en vista de la importancia que tiene en los teoremas anteriores, nos centraremos en el caso en que $X = S^m$ y los coeficientes son \mathbb{F}_2 .

Mientras que en el capítulo 2 introduciremos el espacio de configuraciones etiquetadas $C(M, M_0; X)$ como una generalización natural de la construcción de May-Milgram $C_n(X)$ y estudiaremos sus propiedades más importantes. A saber, se presentará una demostración de la descomposición estable de $C(M, M_0; X)$ análoga a la descomposición estable de Snaith:

$$Q(C(M, M_0; X)) \simeq Q\left(\bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X)\right),$$

donde los espacios $D_k(M, M_0; X)$ son los cocientes sucesivos de la filtración por longitud de configuraciones. Se exhibirán también las casifibraciones básicas que involucran a $C(M, M_0; X)$ y se probará que el espacio $C(M, M_0; X)$ puede interpretarse como modelo combinatorio para un espacio de funciones. Finalmente se mostrará la relación que existe entre los espacios $D_k(M, M_0; S^n)$ y los haces vectoriales canónicos definidos sobre el espacio de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$.

En el capítulo 3 demostraremos el Teorema 0.1 que describe a la homología de $C(M, M_0; X)$ mediante un producto tensorial que involucra a $H_*(M, M_0)$, la dimensión de la variedad M y la homología de los espacios de lazos iterados $\Omega^{m-q} S^{m+n}$. A partir de aquí, nos concentraremos en el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Notemos que cada factor $H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n})$ es un álgebra con pesos asociados a sus generadores, lo que

induce una filtración por pesos en $H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n})$. Más aún, se probará que el subespacio generado por los elementos de peso k es isomorfo a la homología del espacio $D_k(M, M_0; S^n)$.

Finalmente en el capítulo 4, a partir de la relación que existe entre $D_k(M; S^n)$ y los haces vectoriales canónicos sobre los espacios $F_k(M)/\Sigma_k$, se obtendrá $H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}_2)$ mediante el isomorfismo de Thom, 0.3. En este capítulo también probaremos el Teorema 0.2, lo que completa el caso general de \mathbb{F} . Además se presentan algunos ejemplos explícitos de $H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}_2)$ en el caso que M es una superficie cerrada orientable y no orientable; así como también para M el complemento de un nudo en \mathbb{R}^3 . Como mencionamos antes, en un campo de característica cero, el resultado principal solamente se aplica cuando M es una variedad de dimensión impar, por lo que finalizaremos recordando un resultado más, que describe a la cohomología racional de $F_k(M)/\Sigma_k$ cuando M es una superficie cerrada y orientable con un pinchazo [7].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunos resultados de teoría de homotopía, los cuales serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

1.1. Casifibraciones

Una fibración $p : B \rightarrow E$ es un mapeo que tiene la propiedad de levantamiento de homotopías y en particular cumple que el homomorfismo

$$p_* : \pi_n(E, p^{-1}(b)) \longrightarrow \pi_n(B, b) \tag{1.1}$$

es un isomorfismo para toda $b \in B$ y toda $n \geq 1$. Se tiene entonces la siguiente sucesión exacta:

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

donde $F := p^{-1}(b)$ es la fibra sobre b y el morfismo de conexión ∂ se obtiene de componer p^{-1} con el morfismo usual.

En virtud de lo descrito anteriormente A. Dold y R. Thom [23] introdujeron la siguiente definición.

Definición 1.1 Un mapeo $p : E \rightarrow B$ se llama *casifibración* si para todo punto $b \in B$ y para toda $x \in p^{-1}(b)$ el morfismo inducido

$$p_* : \pi_n(E, p^{-1}(b)) \rightarrow \pi_n(B, b)$$

(los grupos estan basados en x y b respectivamente) es un isomorfismo para toda $n \geq 0$.

Como un resultado inmediato tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2 Sea $p : E \rightarrow B$ una casifibración y sean $b \in B$, $e \in p^{-1}(b) = F$. Entonces se tiene una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \quad \blacksquare$$

La sucesión anterior es llamada *sucesión exacta larga de grupos de homotopía* de la casifibración $p : E \rightarrow B$.

Finalmente enunciamos un criterio que nos sirve para determinar cuando tenemos una casifibración. Tal criterio nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

Consideremos un mapeo $p : E \rightarrow B$, con B un espacio de Hausdorff, y supongamos que B esta filtrado por los subespacios $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B$ y además sobre cada diferencia $B_{i+1} - B_i$, p es un haz trivial, es decir, se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E_{i+1} - E_i & \xrightarrow{\cong} & (B_{i+1} - B_i) \times F \\ & \searrow p|_{E_{i+1}-E_i} & \swarrow \text{proy} \\ & B_{i+1} - B_i & \end{array}$$

donde $E_i = p^{-1}(B_i)$, y en particular, $p_0 := p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$ también es trivial. Así para cualquier $x \in B$, la fibra $p^{-1}(x) \cong F$.

Supongamos que además para cada i existe una vecindad abierta U_i de B_i en B_{i+1} y un retracts por deformación $r_i : U_i \rightarrow B_i$ que se levanta a un retracts por deformación

$\bar{r}_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow E_i$, es decir, de modo que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\bar{r}_i} & E_i \\ p|_{p^{-1}U_i} \downarrow & & \downarrow p_i \\ U_i & \xrightarrow{r_i} & B_i \end{array}$$

Así restringiendo las aplicaciones \bar{r}_i a cada fibra, obtenemos aplicaciones $\bar{r}_i^x : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(r_i(x))$.

Bajo las hipótesis anteriores, se tiene el siguiente resultado y su demostración puede consultarse en [1, Teorema A.1.19].

Teorema 1.3 *Si $\bar{r}_i^x : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(r_i(x))$ es una equivalencia homotópica para cada i y cada $x \in U_i$, entonces $p : E \rightarrow B$ es una casifibración. ■*

1.2. La construcción QX

Para esta sección supondremos que los espacios topológicos son compactamente generados. Las demostraciones de los resultados de esta sección pueden verse por ejemplo en [39, Sección 1.5].

Recordemos que si X y Y son dos espacios topológicos basados, entonces los espacios de mapeos $Map_*(X, \Omega Y)$ y $Map_*(\Sigma X, Y)$ son homeomorfos por el mapeo de adjunción entre los funtores Ω y Σ . Tal mapeo $\phi : Map_*(X, \Omega Y) \rightarrow Map_*(\Sigma X, Y)$ está definido por $\phi(f)(x \wedge s) := f(x)(s)$, cuya inversa está dada por $\phi^{-1}(f)(x)(s) := f(x \wedge s)$.

Dado un espacio basado X , para cada n definimos la inclusión:

$$\sigma_n : \Omega^n \Sigma^n X \rightarrow \Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X$$

dada por la composición

$$\sigma_n := \Omega^n \phi^{-1}(id_{\Sigma^{n+1} X}).$$

1.2. La construcción QX

Geometricamente, si identificamos a $\Omega^n \Sigma^n X$ como el espacio $Map_*(S^n, \Sigma^n X)$, entonces:

$$\sigma_n(f) := \Sigma(f) = f \wedge id_{S^1} : S^n \wedge S^1 = S^{n+1} \rightarrow \Sigma^n X \wedge S^1 = \Sigma^{n+1} X,$$

es decir, al tomar un punto $x \wedge s \in S^n \wedge S^1$; $\sigma_n(f)(x \wedge s) = f(x) \wedge s$. En particular $\sigma_0 : X \rightarrow \Omega \Sigma X$ esta definida por $\sigma_0(x)(s) := x \wedge s$. Así tenemos una sucesión de inclusiones

$$X \hookrightarrow \Omega \Sigma X \hookrightarrow \Omega^2 \Sigma^2 X \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Omega^n \Sigma^n X \hookrightarrow \Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X \hookrightarrow \dots$$

Definición 1.4 Sea X un espacio topológico basado. Definimos

$$QX := \Omega^\infty(\Sigma^\infty X) = \operatorname{colim}_n \Omega^n \Sigma^n X.$$

Definición 1.5 Una familia P de espacios basados $\{P_n\}$ junto con mapeos $\sigma_n : \Sigma P_n \rightarrow P_{n+1}$ (donde los mapeos adjuntos $\hat{\sigma}_n : P_n \rightarrow \Omega P_{n+1}$ no son necesariamente una equivalencia homotópica débil) es llamado un pre-espectro, si los mapeos adjuntos $\hat{\sigma}_n$ son homeomorfismos, entonces decimos que P es un espectro e identificamos a esta familia con el colímite ($P = \operatorname{colim}_n P_n$).

Observación 1.6 Q es un funtor en la categoría de espacios basados, el cual se obtiene al aplicar el funtor Σ^∞ para obtener un espectro, seguido del funtor Ω^∞ para aterrizar de regreso en los espacios.

A continuación mencionaremos las principales propiedades de la construcción Q .

Teorema 1.7 Cada homotopía de espacios basados $X \rightarrow Y$ induce una homotopía de mapeos basados $QX \rightarrow QY$, por lo que el funtor Q es un funtor homotópico. Además Q manda cuñas finitas en productos finitos i.e.

$$Q \left(\bigvee_{i=1}^n X_i \right) \cong \prod_{i=1}^n QX_i$$

■

El teorema anterior se puede generalizar a cuñas infinitas y productos infinitos, usando una aproximación CW para el producto infinito a través de todos los productos de celdas finitas y usando el Teorema de Hilton-Milnor [28] y [36] para la segunda equivalencia homotópica. Con esto tenemos

$$Q \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} X_i \right) \simeq \prod_{i=1}^{\infty} Q(X_i).$$

Teorema 1.8 *Existe una transformación natural*

$$X \rightarrow QX$$

dada por el mapeo identidad de X en el nivel 0 del sistema de colímite para QX . Es decir, para un mapeo de espacios basados $f : X \rightarrow Y$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ QX & \xrightarrow{Qf} & QY \end{array}$$

■

Al mapeo anterior, lo llamaremos *mapeo de estabilización*. Notemos que al pasar a grupos de homotopía se obtienen homomorfismos que van a los grupos de homotopía estables de X ,

$$\pi_*(X) \rightarrow \pi_*(QX) = \pi_*^s(X).$$

Finalmente el siguiente teorema nos dice que el espacio QX es un espacio de lazos infinito.

Teorema 1.9 *Sea X un espacio con punto base no degenerado, entonces*

$$QX \cong \Omega Q(\Sigma X)$$

por lo que QX es un espacio de lazos infinitos.

■

1.3. La construcción de May-Milgram

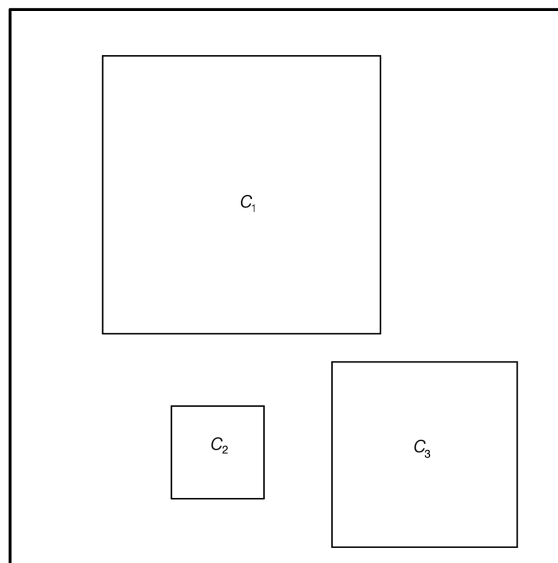
Iniciamos por recordar la definición del espacio de n -cubitos. Denotamos por I al intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Definición 1.10 *Un n -cubito c , es un encaje afín $c : I^n \rightarrow I^n$ que preserva la orientación y es de la forma $c = f_1 \times \dots \times f_n$, donde cada $f_i : I \rightarrow I$ es un mapeo de la forma $f_i(t) = (b_i - a_i)t + a_i$ con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$.*

Denotemos por $\mathcal{C}_n(k)$ el espacio de k cubitos de dimensión n , el cual consta de k -tuplas ordenadas de n -cubitos tales que los interiores de las imágenes son mutuamente disjuntos.

$$\mathcal{C}_n(k) := \left\{ (c_1, \dots, c_k) \left| \begin{array}{l} \text{Cada } c_i \text{ es un } n\text{-cubito.} \\ \text{int}(c_i) \cap \text{int}(c_j) = \emptyset \text{ si } i \neq j \end{array} \right. \right\}$$

Figura 1.1: k -tupla de cubitos de dimensión 2 que pertenece a $\mathcal{C}_2(k)$



Definición 1.11 Sea X un espacio basado con punto base no degenerado. Definimos el espacio:

$$C_n X := \left(\prod_{k \geq 0} \mathcal{C}_n(k) \times_{\Sigma_k} X^k \right) / \approx .$$

donde \approx es la relación de equivalencia generada por:

$$[\langle c_1, \dots, c_k \rangle; x_1, \dots, x_k] \approx [\langle c_1, \dots, c_{k-1} \rangle; x_1, \dots, x_{k-1}]$$

si y sólo si $x_k = *$ es el punto base

Observación 1.12 El espacio $C_n X$ está filtrado por los espacios $F_j(C_n X)$ que son la imagen de los mapeos

$$\left[\prod_{k=0}^j \mathcal{C}_n(k) \times X^k \hookrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_n(k) \times X^k \rightarrow C_n X \right]$$

dados por la composición del mapeo de inclusión y del mapeo de identificación.

Las propiedades más importantes del espacio $C_n X$ que usaremos en el resto de este trabajo son detalladas a continuación. El lector es referido a [30] para las demostraciones.

Denotamos por \mathcal{T}_* a la categoría de los espacios basados que son compactamente generados, débilmente Hausdorff y con puntos bases no degenerados.

Proposición 1.13 La construcción $C_n(-)$ es un funtor homotópico que preserva colímites. ■

Recordemos que el espacio $\Omega^n \Sigma^n X = \text{map}_*(S^n, \Sigma^n X)$ y que S^n puede verse como el espacio $I^n / \partial I^n$. El siguiente teorema es uno de los resultados principales de [30].

Teorema 1.14 (Teorema de aproximación de J.P. May) Para $n \geq 0$, si X es arco-conexo, entonces existe una equivalencia homotópica funtorial

$$\alpha_n : C_n(X) \rightarrow \Omega^n \Sigma^n X$$

1.3. La construcción de May-Milgram

dada por:

$$\alpha_n[c_1, \dots, c_k; x_1, \dots, x_k]([u]) := \begin{cases} [c_i^{-1}(u)] \wedge x_i & \text{si } u \in \text{Im}(\overset{\circ}{c}_i) \\ * & \text{si } u \notin \text{Im}(\overset{\circ}{c}_i) \text{ para todo } i \leq k \end{cases}$$

donde $[u]$ denota una clase en $I^n/\partial I^n = S^n$. ■

La demostración del teorema anterior requiere del uso del espacio $E_n(X)$, cuya construcción y propiedades elementales damos a continuación.

Definición 1.15 Sea (X, A) una pareja cerrada en \mathcal{T}_* . Definimos el subespacio $\mathcal{E}_n(k; X, A)$ de $\mathcal{C}_n(k) \times X^k$ por:

$$\langle (c_1, \dots, c_k); x_1, \dots, x_k \rangle \in \mathcal{E}_n(k; X, A) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{si } x_j \notin A, \text{ entonces } c_j \text{ se puede} \\ \text{“extender”} \end{array}$$

donde “extender” significa lo siguiente:

para $\langle c_1, \dots, c_k \rangle \in \mathcal{C}_n(k)$ y dado $1 \leq j \leq k$, decimos que $c_j = c'_j \times c''_j : I \times I^{n-1} \rightarrow I^n$ se puede extender si

$$(c'_j(-1), 1) \times c''_j(I^{n-1}) \cap c_s(I^n) = \emptyset \quad \text{para todo } s \neq j.$$

Así definimos el espacio

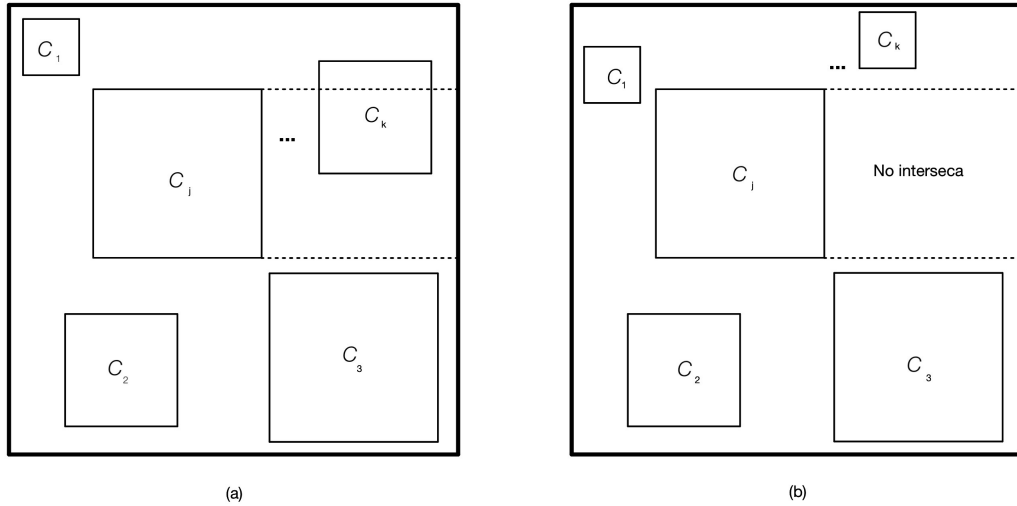
$$E_n(X, A) := \left(\prod_{k \geq 0} \mathcal{E}(k; X, A) / \Sigma_k \right) / \approx$$

donde \approx es la restricción de la relación definida para el espacio $C_n(X)$.

Teorema 1.16 Sea (X, A) una NDR-pareja en \mathcal{T}_* . Si X es contráctil, entonces $E_n(X, A)$ es esférico. Más aún, $E_n(X, A)$ es contráctil si se cumple lo siguiente:

1. X es contráctil.
2. X es compacto, X es el cono de A o si $n = 1$.

Figura 1.2: Configuración que no se extiende (a) y que si se extiende (b) en c_j



■

Teorema 1.17 Sea (X, A) una NDR-pareja en \mathcal{T}_* , y supongamos que A es arco-conexo. Si $\pi : X \rightarrow X/A$ es la proyección canónica, entonces el mapeo $\pi_n : E_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X/A)$ es una casifibración con fibra $C_n A$. ■

La construcción del mapeo anterior es la siguiente manera:

Dado cualquier elemento en el espacio $E_n(X, A)$ podemos representarlo de la siguiente forma:

$$[\langle c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \rangle; x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_l]$$

donde

$x_i \in X - A$, $a_j \in A$ y los c_i se pueden extender, para todo $1 \leq i \leq k$; $1 \leq j \leq l$.

Puesto que los c_i se pueden extender tienen la forma $c_i = c'_i \times c_i''$ y son tales que:

$$\langle c''_1, \dots, c''_k \rangle \in \mathcal{C}_{n-1}(k)$$

y también se tiene que $\pi(a_j) = *$, así la función π_n es la siguiente:

$$\pi_n [\langle c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \rangle; x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_l] = [\langle c''_1, \dots, c''_k \rangle; \pi(x_1), \dots, \pi(x_k)]$$

Definición 1.18 *Definimos el espacio $E_n X$ como el espacio contraible $E_n(CX, X)$ donde CX denota el cono de X .*

Teorema 1.19 *Para $X \in \mathcal{T}_*$ y $n \geq 1$, existen mapeos $\pi_n : E_n X \rightarrow C_{n-1} \Sigma X$ y $\bar{\alpha}_n : E_n X \rightarrow P\Omega^{n-1} \Sigma^n X$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccc}
 C_n X & \hookrightarrow & E_n X & \xrightarrow{\pi_n} & C_{n-1} \Sigma X \\
 \alpha_n \downarrow & & \bar{\alpha}_n \downarrow & & \downarrow \alpha_{n-1} \\
 \Omega^n \Sigma^n X & \hookrightarrow & P\Omega^{n-1} \Sigma^n X & \longrightarrow & \Omega^{n-1} \Sigma^n X
 \end{array}$$

donde la fila de abajo es la fibración de trayectorias y lazos de $\Omega^{n-1} \Sigma^n X$ y la fila de arriba es una casifibración por el teorema anterior. ■

El teorema anterior nos sirve para demostrar el Teorema 1.14.

Recordemos que el espacio de configuraciones ordenadas de una variedad M es el conjunto de k -tuplas de puntos distintos en M , es decir,

$$F_k(M) := \{(z_1, \dots, z_k) \in M^k \mid z_i \neq z_j \text{ para } i \neq j\} \subset M^k,$$

dotado de la topología de subespacio. El grupo simétrico Σ_k actúa naturalmente por permutación de coordenadas y el espacio de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$ es el espacio de órbitas. Los espacios de n -cubitos están estrechamente relacionados con los espacios de configuraciones de \mathbb{R}^n como nos muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.20 *Para $1 \leq n < \infty$ y $k \geq 1$, el espacio $\mathcal{C}_n(k)$ es homotópicamente equivalente al espacio $F_k(\mathbb{R}^n)$ bajo una homotopía que es Σ_k -equivariante.* ■

De manera natural podemos entonces definir el “espacio de configuraciones de puntos distintos en M y etiquetas en X ” como una generalización del espacio $C_n X$, de la siguiente manera.

Definición 1.21 *Dada una variedad M y X un espacio con punto base x_0 , definimos el espacio de configuraciones de puntos distintos de M con etiquetas en X como el*

espacio

$$C(M; X) = \left(\prod_{k \geq 1} F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^k \right) / \approx$$

donde la relación \approx es generada por $(z_1, \dots, z_k; x_1, \dots, x_k) \approx (z_1, \dots, z_{k-1}; x_1, \dots, x_{k-1})$ si $x_k = x_0$.

El estudio intensivo de tales espacios lo posponemos hasta el capítulo 2, solo recordaremos los siguientes resultados que se obtienen del Teorema 1.20.

Corolario 1.22 *Para $X \in \mathcal{T}_*$ y $n \geq 1$, el espacio $C(\mathbb{R}^n; X)$ es homotópicamente equivalente al espacio $C_n(X)$ por lo que también es homotópicamente equivalente a $\Omega^n \Sigma^n X$. ■*

Recordemos que el espacio $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}^n$ es el espacio del colímite $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \dots$ bajo las inclusiones estándar. Como $F_k(M)$ es functorial con respecto a encajes de variedades, podemos definir

$$F_k(\mathbb{R}^\infty) := \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} F_k(\mathbb{R}^n).$$

Proposición 1.23 *Sea $X \in \mathcal{T}_*$, entonces el espacio $C(\mathbb{R}^\infty; X)$ es homotópicamente equivalente a $QX = \Omega^\infty \Sigma^\infty X$. ■*

1.4. La descomposición de Snaith

Sabemos que por el Teorema de aproximación de P. May, si X es compactamente generado y debilmente Hausdorff el espacio $C_n(X)$ es del mismo tipo de homotopía que $\Omega^n \Sigma^n X$ (visto en la sección anterior). Con este resultado en mente, V. Snaith [41] obtuvo una descomposición estable del espacio $\Omega^n \Sigma^n X$ en cierta cuña $\bigvee_{k \geq 0} D_k(X, n)$ formada por los cocientes sucesivos de la filtración dada en la Observación 1.12. Recordemos que tal filtración esta formada por los subespacios $F_j(C_n X)$, que son la

imagen del mapeo dados por la composición del mapeo de inclusión y del mapeo de identificación

$$\left[\prod_{k=0}^j \mathcal{C}_n(k) \times X^k \hookrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_n(k) \times X^k \rightarrow C_n X \right].$$

Denotamos por

$$D_k(X, n) := F_k(C_n X) / F_{k-1}(C_n X)$$

$$D(X, n) := \bigvee_{k \geq 0} D_k(X, n).$$

El resultado principal de [41] es el siguiente.

Teorema 1.24 (Teorema de descomposición de Snaith) *El espacio $\Omega^n \Sigma^n X$ es del mismo tipo de homotopía estable que el espacio $D(X, n) = \bigvee_{k \geq 0} D_k(X, n)$, es decir,*

$$Q(\Omega^n \Sigma^n X) \simeq Q\left(\bigvee_{k \geq 0} D_k(X, n)\right)$$

Existen varias demostraciones elegantes del resultado anterior, nosotros incluiremos una de éstas en el siguiente capítulo, sobre un resultado un poco más general [17], a saber, como se hizo notar al final de la sección anterior, los espacios de configuraciones etiquetadas $C(M; X)$ son una generalización del espacio $C_n(X)$, así que naturalmente se demostrará que

$$Q(C(M; X)) \simeq Q\left(\bigvee_{k \geq 0} D_k(M; X)\right),$$

donde los $D_k(M; X)$ son los cocientes sucesivos de la filtración por longitud de configuraciones.

1.5. La homología de $\Omega^n \Sigma^n X$

En esta sección recordaremos la homología de los espacios de lazos iterados $\Omega^n \Sigma^n X$ con coeficientes en un campo \mathbb{F} de característica cero o el campo \mathbb{F}_p de los enteros

módulo p . Abordaremos el caso en que $X = S^n$ y $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, que será el caso importante para este trabajo, así como también recordaremos un resultado sobre la homología módulo 2 de QX .

Notemos que para cada n existe un mapeo $\eta_{n+1} : X \rightarrow \Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ dado por el adjunto de la función $id : \Sigma^{n+1}X \rightarrow \Sigma^{n+1}X$. Ahora como la composición

$$\Sigma^{n+1}X \xrightarrow{\Sigma^{n+1}\eta} \Sigma^{n+1}(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X) \xrightarrow{e} \Sigma^{n+1}X$$

es la identidad de $\Sigma^{n+1}X$ donde e es el mapeo de evaluación, entonces

$$\eta_* : H_*X \longrightarrow H_*(\Omega^n\Sigma^n X)$$

es un monomorfismo, por lo que es razonable pensar que $H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X)$ debería de ser un functor libre de H_*X . En [18] F. Cohen describe a dicha homología con coeficientes en \mathbb{F}_p a través de cierto functor libre GW_n .

En lo que sigue recordaremos las descripciones de la homología del espacio $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ [15] en términos de la homología reducida de X .

Empecemos con $\Omega\Sigma X$. Supongamos que R es un anillo y que $H_*(X; R)$ es libre de torsión. Entonces se tiene el siguiente resultado [11].

Teorema 1.25 (Bott-Samelson) *Existe un isomorfismo de álgebras*

$$T[\tilde{H}_*(X; R)] \longrightarrow H_*(\Omega\Sigma X; R).$$

Donde $T[\tilde{H}_*(X; R)]$ denota el álgebra tensorial generada por $\tilde{H}_*(X; R)$. ■

Para $n \geq 2$ frecuentemente en la homología de $\Omega^n\Sigma^n$ hay torsión, así que regularmente se describe esta homología con coeficientes en un campo \mathbb{F} .

Campo de característica cero. El caso simple para describir la homología es cuando \mathbb{F} es un campo de característica cero, para esta descripción recordamos lo siguiente.

El álgebra tensorial $T[V]$ es un álgebra de Lie graduada con producto de Lie

$$[a, b] = a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a,$$

donde $V = \tilde{H}_*(X; R)$. Denotaremos como $L[V]$ a la sub-álgebra de Lie libre de $T[V]$ generada por V .

Dado un módulo graduado M , se define $\sigma^n M$ como el módulo graduado M donde los nuevos grados se elevan en n , $S[M]$ denota el álgebra simétrica generada por el módulo M y $L[M]$ es como antes. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.26 *Si \mathbb{F} es un campo de característica cero y $n \geq 1$, entonces existe un isomorfismo de álgebras*

$$S[\sigma^{-n} L[\sigma^n \tilde{H}_*(X; \mathbb{F})]] \longrightarrow H_*(\Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X; \mathbb{F}).$$

■

Campo de los enteros módulo p . Tomemos a $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$. Dado un módulo graduado V denotaremos a $T[V]$ y $L[V]$ como antes. Escribiremos $\xi_p[V]$ para el espacio vectorial en $T[V]$ generado por todas las p -ésimas potencias de los elementos de grado par en $L[V]$ cuando p sea un primo impar, mientras que para $p = 2$ serán todas las p -ésimas potencias. Por ejemplo si X es una suspensión, entonces el módulo de los elementos primitivos en $H_*(\Omega \Sigma X; \mathbb{F}_p)$ es precisamente $L[V] \oplus \xi_p[V]$, con $V = \tilde{H}_*(X; \mathbb{F}_p)$.

Definimos

$$\Lambda_n[V] = \begin{cases} \sigma^{-n} L[\sigma^n V] \oplus \sigma^{-n} \xi_2[\sigma^n V] & \text{si } p = 2 \\ \sigma^{-n} L[\sigma^{-n} V] \oplus \sigma^{-n} \xi_p[\sigma^n V] \oplus \sigma^{-n+1} \xi_p[\sigma^n V] & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

Si $n \geq 1$, entonces $\Lambda_n[H_*(X, \mathbb{F}_p)]$ puede ser usado para describir los grupos de homología de $\Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X$. Nosotros solamente recordaremos esta descripción para $\Omega^2 \Sigma^2 X$, para n en general como lo mencionamos antes, se describe en [18] a través de cierto funtor libre GW_n .

Si $p = 2$. Dada una base $\{\lambda\}$ para $\Lambda_1[V]$ con $V = H_*(X; \mathbb{F}_2)$, definimos los elementos $Q_1^a \lambda$ inductivamente por

- (a) $Q_1^0 \lambda = \lambda$,
- (b) $Q_1^{a+1} \lambda = Q_1(Q_1^a \lambda)$ y
- (c) El grado de $Q_1(x)$ es $1 + 2|x|$.

Entonces:

Teorema 1.27 *Existe un isomorfismo de álgebras*

$$\mathcal{S}[Q_1^a \lambda \mid a \geq 0, \lambda \in \{\lambda\}] \longleftrightarrow H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X; \mathbb{F}_2).$$

Si p es un primo impar. Dada una base $\{\lambda\}$ para $\Lambda_1[V]$ con $V = H_*(X; \mathbb{F}_2)$, definimos los elementos $Q_1^a \lambda$ y $\beta Q_1^a \lambda$ para alguna elección de λ como sigue:

- (a) $Q_1^0 \lambda = \lambda$,
- (b) $Q_1^{a+1} \lambda = Q_1(Q_1^a \lambda)$
- (c) $\beta Q_1^a \lambda$ es definido para toda $Q_1^a \lambda$ con $a > 0$ y
- (d) los grados de $Q_1(x)$ y $\beta Q_1(x)$ están dados por $p - 1 + p|x|$ y $p - 2 + p|x|$ respectivamente.

Ahora definimos $W_1[V]$ como el espacio vectorial cuya base está dada por:

- (1) $\lambda \in \{\lambda\}$.
- (2) $Q_1^a \lambda$ para $\lambda \in \{\lambda\}$, con λ de grado impar y $a > 0$.
- (3) $\beta Q_1^b \lambda$ donde $Q_1^b \lambda$ es definido por (2) y $b \geq 1$.

Entonces

Teorema 1.28 *Existe un isomorfismo de álgebras*

$$\mathbb{F}_p [W_1 [H_*(X; \mathbb{F}_p)]] \longrightarrow H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X; \mathbb{F}_p).$$

■

1.5.1. Homología módulo 2 de $\Omega^k S^n$

Los siguientes teoremas están basados en [2], [12], [24], [38], [19].

Existen operaciones de Dyer-Lashof en la homología de $\Omega^n X$, que son naturales con respecto a mapeos de espacios de n -lazos

$$Q_i : H_q \Omega^n X \rightarrow H_{2q+i} \Omega^n X, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

y son lineales para $0 \leq i < n-1$. La suspensión de Freudenthal $E^k : S^n \rightarrow \Omega^k S^{n+k}$ induce un monomorfismo en homología, ya que la composición

$$S^k \wedge S^n \rightarrow S^k \wedge \Omega^k S^{n+k} \rightarrow S^{n+k}$$

es una equivalencia homotópica.

Denotemos por x_n a la imagen de la clase fundamental bajo E_*^k y por $\Omega_0^n S^n$ a la componente del punto base. Denotemos por $Q_I x_n$ a la clase de homología $Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_j} x_n$, si $I = (i_1, \dots, i_j)$. La sucesión I es admisible si $0 < i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_j$; pondremos $\ell(I) = j$ y diremos que $\lambda(I) \leq q$ si $i_j \leq q$.

Teorema 1.29 *Existe un isomorfismo de álgebras de Hopf*

$$\mathbb{F}_2 [Q_I x_n] \rightarrow H_*(\Omega^k S^{n+k}; \mathbb{F}_2), \quad n \geq 1,$$

donde I corre sobre todas las sucesiones admisibles con $\lambda(I) \leq k-1$ y la sucesión vacía $I = ()$, en cuyo caso $Q_I x_n = x_n$. Todos los generadores $Q_I x_n$ son primitivos.

Si $k = 0$, la clase fundamental satisface la relación adicional $x_n^2 = 0$. ■

Ejemplo 1.30

▷ $\Omega S^{n+2} = \Omega S^{(n+1)+1}$. Primero asociamos la clase fundamental x_{n+1} de grado $n+1$, lo siguiente es determinar las sucesiones admisibles $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ con $\lambda(I) \leq 1 - 1 = 0$. Podemos ver que la única sucesión admisible es la vacía $()$, por lo tanto

$$H_*(\Omega S^{n+2}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x],$$

con grado $|x| = n+1$.

▷ $\Omega^2 S^{n+2}$. Procedemos como antes y asociamos la clase fundamental x_n de grado n , aquí las sucesiones admisibles con $\lambda(I) \leq 2 - 1 = 1$ son de la forma $I = ()$ ó $I = (1, 1, \dots, 1)$, por lo que los generadores son $y_j = Q_1^j(x_n) = Q_1 Q_1 \cdots Q_1 x_n$, para $j \geq 0$, así

$$H_*(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_0, y_1, \dots],$$

con grados $|y_j| = (2^j - 1) + 2^n$.

▷ $\Omega^3 S^{n+3}$. Hay una clase fundamental x_n de grado n y las sucesiones admisibles con $\lambda(I) \leq 3 - 1 = 2$ son

$$I = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1) \\ (2, 2, \dots, 2) \\ (1, \dots, 1, 2, \dots, 2) \end{cases}$$

junto con la vacía. Denotamos a $z_{ij} := Q_1^i Q_2^j x_n = Q_1 \cdots Q_1 Q_2 \cdots Q_2 x_n$ con $i, j \geq 0$, entonces:

$$H_*(\Omega^3 S^{n+3}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[z_{ij} \mid i, j \geq 0],$$

con grados $|z_{ij}| = 2^{i+j}(n+2) - 2^i - 1$.

Siguiendo como antes podemos ver que

$$\begin{aligned} H_*(\Omega S^{n+3}; \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2[u] && \text{con } |u| = n+2. \\ H_*(\Omega^2 S^{n+3}; \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2[w_0, w_1, \dots] && \text{con } |w_i| = (2^i - 1) + 2^i(n+1) \end{aligned}$$

1.5.2. Homología módulo 2 de QX

De acuerdo al comentario del inicio de esta sección, tenemos que para cada n los mapeos

$$\eta_n : X \rightarrow \Omega^n \Sigma^n X$$

inducen monomorfismos en homología, luego el mapeo del colímite induce un monomorfismo

$$\eta_* : H_* X \rightarrow H_* QX,$$

por lo que de igual manera es razonable esperar que $H_* QX$ sea un funtor libre apropiado de $H_* X$.

P. May en [19] nos da una descripción de esta homología con coeficientes en \mathbb{F}_p , en cierto funtor libre GWE , nosotros solamente recordaremos el caso de la homología módulo 2 de QX .

Teorema 1.31 *Si X es arco-conexo, existe un isomorfismo de álgebras*

$$\mathbb{F}_2 [Q_I x] \rightarrow H_*(QX; \mathbb{F}_2)$$

para I admisible y donde x corre sobre una base para $\bar{H}_* X$. Si X es una suspensión, entonces los elementos de $Q_I x$ son primitivos. ■

Observación 1.32 *En virtud de los resultados anteriores, la homología de $\Omega^n \Sigma^n X$ y de $Q(X)$ con coeficientes en un campo de característica cero o en \mathbb{F}_p se expresa en términos de $\bar{H}_* X$, de tal forma que $H_* \Omega^n \Sigma^n X$ y $H_* Q(X)$ son funtores de $\bar{H}_* X$, que son naturales con respecto a mapeos de espacios.*

Capítulo 2

El espacio de configuraciones etiquetadas

En este capítulo introducimos el espacio de configuraciones etiquetadas $C(M, M_0; X)$, como una generalización natural de la construcción de May-Milgram $C(\mathbb{R}^n; X) \simeq \Omega^n \Sigma^n X$ y estudiamos sus propiedades más importantes. A saber, se describe la filtración canónica por longitud de configuraciones y se presenta una demostración de la descomposición estable de $C(M, M_0; X)$ análoga a la descomposición estable de Snaith:

$$Q(C(M, M_0; X)) \simeq Q\left(\bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X)\right),$$

donde los espacios $D_k(M, M_0; X)$ son los cocientes sucesivos de la filtración. Se exhiben también las casifibraciones básicas que involucran a $C(M, M_0; X)$ y se prueba que el espacio $C(M, M_0; X)$ puede interpretarse como modelo combinatorio para un espacio de funciones. Finalmente se muestra la relación que existe entre los espacios $D_k(M, M_0; X)$ y los haces vectoriales canónicos definidos sobre el espacio de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$. Dicha relación sera esencial en los capítulos siguientes, para describir la homología de los espacios de configuraciones.

2.1. El espacio de configuraciones $C(M, M_0; X)$

Definición 2.1 Definimos el espacio de configuraciones de puntos distintos en M , modulo M_0 y etiquetas en X como:

$$C(M, M_0; X) := \left(\prod_{k \geq 1} F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^k \right) / \approx$$

donde la relación \approx esta dada por:

$$[m_1, \dots, m_k; x_1, \dots, x_k] \approx [m_1, \dots, m_{k-1}; x_1, \dots, x_{k-1}] \text{ si } x_k = x_0 \text{ o } m_k \in M_0.$$

Observación 2.2 Una definición alterna para el espacio $C(M, M_0; X)$ se puede dar de la siguiente manera:

Consideremos el conjunto de parejas (S, f) , donde S es un subconjunto finito de M y $f : S \rightarrow X$, bajo la siguiente relación de equivalencia:

$$(S, f) \approx (S - \{z\}, f|_{S - \{z\}}) \text{ si } f(z) = x_0 \text{ o } z \in M_0.$$

Es claro que la construcción $C(M, M_0; X)$ puede verse como el espacio topológico que consiste de las clases de equivalencia de parejas $[S, f]$

Por otro lado, es claro que la construcción $C(M, M_0; X)$ es funtorial con respecto a encajes de variedades $h : (M, M_0) \rightarrow (N, N_0)$ y mapeos basados de CW-complejos $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Mas aún, se tiene:

Teorema 2.3 Sean X y Y CW-complejos del mismo tipo de homotopía y sean (M, M_0) y (N, N_0) variedades del mismo tipo de isotopía relativa, entonces:

1. $C(W, W_0; X) \simeq C(W, W_0; Y)$ para cualquier variedad W y subvariedad W_0 .
2. $C(M, M_0; Z) \simeq C(N, N_0; Z)$ para cualquier espacio CW-complejo Z . ■

Ejemplo 2.4 El mapeo de inclusión $i : (M - \partial M, M_0 - \partial M) \rightarrow (M, M_0)$ induce una equivalencia homotópica $C(M - \partial M, M_0 - \partial M; X) \rightarrow C(M, M_0; X)$.

Teorema 2.5 *Sea $U \subset M_0$ un conjunto abierto de M , entonces*

$$C(M - U, M_0 - U; X) \cong C(M, M_0; X)$$

Demostración

Definamos el siguiente mapeo

$$\phi : C(M, M_0; X) \rightarrow C(M - U, M_0 - U; X) \text{ dado por:}$$

$$\phi([S, f]) := [S \cap (M - U), f|_{S \cap (M - U)}].$$

El mapeo ϕ es la inversa del mapeo inducido por la inclusión

$$C_X(i) : C(M - U, M_0 - U; X) \rightarrow C(M, M_0; X),$$

teniéndose lo deseado. ■

Finalmente notemos que $C(M, M_0; X)$ está filtrado de manera natural por “longitud de configuraciones”. Consideremos los siguientes subespacios cerrados de $C(M, M_0; X)$:

$$F_k C(M, M_0; X) = C_k(M, M_0; X) = \left(\prod_{j=1}^k F_j(M) \times_{\Sigma_k} X^j \right) / \approx, \text{ para } k > 1.$$

Pongamos $F_0 C(M, M_0; X)$ igual al punto base y observemos que

$$F_1 C(M, M_0; X) = (M/M_0) \wedge X.$$

entonces es válido el siguiente resultado y su demostración puede verse en [30, Teorema 7.1.].

Teorema 2.6 *Las inclusiones $F_{k-1} C(M, M_0; X) \rightarrow F_k C(M, M_0; X)$ son cofibraciones. Denotaremos a sus cofibras por $D_k = D_k(M, M_0; X)$ a la que le llamamos la construcción k -ádica.* ■

2.2. Descomposiciones estables y mapeos de Hopf

Recordemos que el espacio de configuraciones etiquetadas $C(\mathbb{R}^n; X)$ es del mismo tipo de homotopia que $\Omega^n \Sigma^n X$ y que por otro lado, es establemente equivalente al wedge $D_k(X, n)$ (ver Sección 1.4) donde los espacios $D_k(X, n)$ pueden verse como los cocientes sucesivos de la filtración por longitud de configuraciones de $C(\mathbb{R}^n; X)$. Este último resultado se puede generalizar del modo siguiente y su demostración está tomada de [17].

Teorema 2.7 (Descomposición estable de Snaith.) *El espacio $C(M, M_0; X)$ es del mismo tipo de homotopía estable que el espacio*

$$D(M, M_0; X) := \bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X),$$

es decir,

$$Q(C(M, M_0; X)) \simeq Q\left(\bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X)\right).$$

Demostración

Emplearemos la siguiente notación:

$$D_k := D_k(M, M_0; X) \quad D := \bigvee_{k \leq 0} D_k(M, M_0; X)$$

$$F_j D := \bigvee_{k=0}^j D_k(M, M_0; X) \quad F_j C := F_j C(M, M_0; X)$$

Sabemos que cada espacio de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$ es una km -variedad; así podemos elegir un encaje de la unión disjunta $C(M, S^0) = \coprod_{k \geq 1} F_k(M)/\Sigma_k$ en \mathbb{R}^∞ , luego el espacio $C(M, S^0)$ cuyos elementos son los subconjuntos finitos de M , es un subespacio de \mathbb{R}^∞ .

Dado cualquier subconjunto finito S de M (i.e $S \in C(M, S^0)$), definimos el conjunto $P(S) := \{T \mid T \subset S \text{ y } T \neq \emptyset\}$, notemos que por lo anterior, $P(S)$ es un subconjunto

finito de \mathbb{R}^∞ . Definamos el mapeo

$$H : C(M, M_0; X) \rightarrow C(\mathbb{R}^\infty; D)$$

dado por

$$H([S, f]) = [P(S), g] \in C(\mathbb{R}^\infty; D)$$

donde

$$g : P(S) \rightarrow D \text{ esta definida por } g(T) = \overline{[T, f|_T]}$$

y $\overline{[T, f|_T]}$ indica la clase de equivalencia en D . Claramente H es continua, más aún, el mapeo H preserva la filtraciones del espacio $C(M, M_0; X)$, teniéndose el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_{j-1}C & \xrightarrow{H|_{F_{j-1}}} & C(\mathbb{R}^\infty; F_{j-1}D) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ F_jC & \xrightarrow{H|_{F_j}} & C(\mathbb{R}^\infty; F_jD) \end{array}$$

donde el mapeo i es el inducido por la inclusión $F_{j-1}D \hookrightarrow F_jD$. Sea p el mapeo inducido por colapsar el espacio $F_{j-1}D$ a un punto en el espacio F_jD . Como la composición $p \circ j \circ H|_{F_{j-1}}(F_{j-1}(C)) = \{*\}$, entonces existe una función $\phi : D_k \rightarrow C(\mathbb{R}^\infty; D_k)$ de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F_{j-1}C & \xrightarrow{H|_{F_{j-1}}} & C(\mathbb{R}^\infty; F_{j-1}D) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ F_jC & \xrightarrow{H|_{F_j}} & C(\mathbb{R}^\infty; F_jD) \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ D_k & \xrightarrow{\phi} & C(\mathbb{R}^\infty; D_k) \end{array}$$

Por otra parte, la función ϕ es homotópica a la inclusión estándar $D_k \hookrightarrow C(\mathbb{R}^\infty; D_k)$, mientras que por la Proposición 1.23 podemos reemplazar todos los espacios $C(\mathbb{R}^\infty; Z)$

por QZ , obteniendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 F_{j-1}C & \longrightarrow & Q(F_{j-1}D) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F_jC & \longrightarrow & Q(F_jD) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D_k & \longrightarrow & Q(D_k)
 \end{array}$$

Aplicamos el funtor Q al lado izquierdo para obtener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Q(F_{j-1}C) & \longrightarrow & Q(F_{j-1}D) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Q(F_jC) & \longrightarrow & Q(F_jD) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Q(D_k) & \longrightarrow & Q(D_k)
 \end{array}$$

donde la función de abajo es una equivalencia homotópica. Por el Teorema 2.6, el mapeo $F_{j-1}C \hookrightarrow F_jC \rightarrow D_j$ es una cofibración, luego sabemos que el funtor Q manda cofibraciones en casifibraciones, así el lado izquierdo del diagrama es una casifibración. Puesto que $F_0C = F_0D = *$ y el mapeo de la parte inferior es una equivalencia homotópica, entonces el mapeo $Q(F_1C) \rightarrow Q(F_1D)$ induce isomorfismos en los n -ésimos grupos de homotopía para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, de manera inductiva supongamos que

$$Q(F_{j-1}C) \rightarrow Q(F_{j-1}D)$$

es una equivalencia homotópica. Como el lado izquierdo del diagrama es una casifibración, al aplicar la sucesión exacta del par en grupos de homotopía nos da el

siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+1}(Q(D_k)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{n+1}Q(D_k) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_n(Q(F_{j-1}C)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(Q(F_{j-1}D)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_n(Q(F_jC)) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \pi_n(Q(F_jD)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_n(Q(D_k)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_nQ(D_k) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{n-1}(Q(F_{j-1}C)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{n-1}(Q(F_{j-1}D))
 \end{array}$$

así pues, por el lema del quinto $Q(F_jC) \rightarrow Q(F_jD)$ induce isomorfismos en los n -ésimos grupos de homotopía para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $Q(F_jC) \rightarrow Q(F_jD)$ es una equivalencia homotópica para todo j . Por lo tanto

$$C(M, M_0; X) \simeq_s \bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X).$$

■

Observación 2.8 *Para cualquier encaje $f : (M, M_0) \rightarrow (N, N_0)$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 C(M, M_0; X) & \xrightarrow{H} & C(\mathbb{R}^\infty; D(M, M_0; X)) & \xrightarrow{\cong} & Q(\bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X)) \\
 \downarrow C(f) & & \downarrow & & \downarrow \\
 C(N, N_0; X) & \xrightarrow{H} & C(\mathbb{R}^\infty; D(N, N_0; X)) & \xrightarrow{\cong} & Q(\bigvee_{k \geq 0} D_k(N, N_0; X))
 \end{array}$$

y además si aplicamos en el lado izquierdo el funtor Q se sigue preservando la conmutatividad, más aún, si precomponemos en el lado izquierdo con los mapeos de estabilización, por el Teorema 1.8 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccccc}
 C(M, M_0; X) & \longrightarrow & Q(C(M, M_0; X)) & \xrightarrow{\simeq} & Q(\bigvee_{k \geq 0} D_k(M, M_0; X)) \\
 \downarrow c(f) & & \downarrow & & \downarrow \\
 C(N, N_0; X) & \longrightarrow & Q(C(N, N_0; X)) & \xrightarrow{\simeq} & Q(\bigvee_{k \geq 0} D_k(N, N_0; X))
 \end{array}$$

El resultado anterior junto con las propiedades del funtor $Q = \Omega^\infty \Sigma^\infty$, en particular el Teorema 1.7 implican que para todo X arco-conexo existe una equivalencia homotópica

$$Q(C(M, M_0; X)) \rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} Q(D_k(M, M_0; X))$$

componiendo con el mapeo de estabilización $C(M, M_0; X) \rightarrow Q(C(M, M_0; X))$ por la izquierda y con la proyección en el primer factor $Q(D_1(M, M_0; X)) = Q(M/M_0 \wedge X)$ por la derecha, obtenemos el *mapeo de Hopf*

$$h = h(M, M_0) : C(M, M_0; X) \rightarrow Q(M/M_0 \wedge X).$$

2.3. Casifibraciones asociadas con $C(M, M_0; X)$

Sea $N \subset M$ una subvariedad de codimensión cero, es decir $\dim N = m$, consideremos la cofibración

$$(M, M_0 \cap N) \rightarrow (M, M_0) \xrightarrow{Q} (M, N \cup M_0)$$

donde Q es el mapeo de parejas de la identidad de M . Estas inducen los siguientes mapeos

$$C(N, N \cap M_0; X) \rightarrow C(M, M_0; X) \xrightarrow{q} C(M, N \cup M_0; X).$$

Teorema 2.9 *Sea $N \subset M$ una subvariedad de M de dimensión m , si la pareja $(M, N \cap M_0)$ o el espacio X es conexo, entonces*

$$C(N, N \cap M_0; X) \rightarrow C(M, M_0; X) \xrightarrow{q} C(M, N \cup M_0; X)$$

es una casifibración.

Demostración

La base $B = C(M, N \cup M_0; X)$ esta filtrada por los subespacios cerrados $B_k := F_k C(M, N \cup M_0; X)$; denotemos a la fibra por $F = C(N, N \cap M_0; X)$.

Notemos que si $e \in q^{-1}(B_{k+1} - B_k)$ se puede representar de la forma

$$e = [z_1, \dots, z_{k+1}, z'_1, \dots, z'_l; x_1, \dots, x_{k+1}, x'_1, \dots, x'_l] \in q^{-1}(B_{k+1} - B_k),$$

donde $z_1, \dots, z_{k+1} \in M - N$ y $z'_1, \dots, z'_l \in N$. Definimos la función

$$t_k : q^{-1}(B_{k+1} - B_k) \rightarrow (B_{k+1} - B_k) \times F$$

dada por

$$t_k(e) = ([z_1, \dots, z_{k+1}; x_1, \dots, x_{k+1}], [z'_1, \dots, z'_l; x'_1, \dots, x'_l])$$

la cual define un homeomorfismo y hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(B_{k+1} - B_k) & \xrightarrow{\cong} & (B_{k+1} - B_k) \times F \\ & \searrow q & \swarrow \pi_1 \\ & & B_{k+1} - B_k \end{array}$$

es decir, t_k es una fibración trivial, con fibra F .

Sea U una vecindad tubular cerrada de la pareja $(N, N \cap M_0)$ y sea $r : M \rightarrow M$ una isotopía que deja invariante a M_0 , N y $M - U$, además retrae exactamente a U en $N \cap M_0$; entonces, para cada k definimos

$$U_k = \{b = [z_1, \dots, z_{k+1}; x_1, \dots, x_{k+1}] \in B_{k+1} \mid z_i \in U \text{ para algún } i\}.$$

2.3. Casifibraciones asociadas con $C(M, M_0; X)$

Esta es una vecindad abierta en B_{k+1} que contiene a B_k y la isotopía r induce las retracciones

$$r_k : U_k \rightarrow B_k \quad \text{y} \quad \bar{r}_k : q^{-1}(U_k) \rightarrow q^{-1}(B_k)$$

tales que se cumple el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(U_k) & \xrightarrow{\bar{r}_k} & q^{-1}(B_k) \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ U_k & \xrightarrow{r_k} & B_k \end{array}$$

Para cada $b \in U_k$ con $b = [z_1, \dots, z'_1, \dots; x_1, \dots, x'_1, \dots]$ tal que $z_1, z_2, \dots, \in M - U$ y $z'_1, z'_2, \dots \in U - (N \cup M_0)$, consideramos la restricción a las fibras

$$\phi_b : F \xrightarrow[t_k^{-1}]{\cong} q^{-1}(b) \xrightarrow{\bar{r}_k} q^{-1}(r(b)) \xrightarrow[t_k]{\cong} F.$$

Veamos que ϕ_b es homotópica a la identidad.

Sea $f = [z''_1, \dots; x''_1, \dots] \in F$. Tenemos que

$$t_k^{-1}(f) = [z_1, \dots, z'_1, \dots, z''_1, \dots; x_1, \dots, x'_1, \dots, x''_1, \dots],$$

$$\tilde{r}_k t_k^{-1}(f) = [r(z_1), \dots, r(z'_1), \dots, r(z''_1), \dots; x_1, \dots, x'_1, \dots, x''_1, \dots],$$

notemos que $r(z_i) \in M - U \subset M - N$ así pues

$$t_k \tilde{r}_k t_k^{-1}(f) = [r(z'_1), \dots, r(z''_1), \dots; x'_1, \dots, x''_1, \dots] = \phi_b(f).$$

Finalmente vemos que los z'_i y x'_i solamente dependen de b ; por lo tanto si movemos $r(z'_i)$ en N hasta $N \cap M_0$, o si movemos sus etiquetados x'_i en X hasta x_0 se define una homotopía de ϕ_b , la cual termina con $\tilde{r}_k|_F$. Puesto que \tilde{r}_k es homotópico a la identidad, también lo es ϕ_b . Por el Teorema 1.3 se tiene lo deseado. ■

2.4. $C(M, M_0; X)$ como espacio de funciones

En esta sección interpretaremos al espacio $C(M, M_0; X)$ como modelo combinatorio para un espacio de funciones, generalizando el resultado clásico de P. May $C(\mathbb{R}^n; X) \simeq C_n(X) \simeq \Omega^n \Sigma^n X$. A saber:

Supongamos que W es una m -variedad sin frontera que contiene a M . Por ejemplo, $W = M$ si M es una variedad cerrada o $W = M \cup \partial M \times [0, 1)$ si M tiene frontera. Denotemos por $\dot{T}W$ a la compactificación unipuntual fibra a fibra del haz tangente TW . Este haz se puede definir de la siguiente forma:

Sea $D_x W$ el disco unitario en el espacio tangente $T_x W$ y sea $S_x = D_x W / \partial D_x W$; entonces \dot{T} es el haz asociado a TW con fibra $S_x \cong S^m$ sobre el punto $x \in W$.

Finalmente, consideremos el producto smash fibra a fibra del haz $\dot{T}W$ con el haz trivial $X \rightarrow (W \times X) \rightarrow W$, esto es:

$$\dot{T}_X W := \dot{T}W \wedge_W (W \times X).$$

Este nuevo haz tiene fibra $\Sigma^m X = S^m \wedge X$, con punto base $\infty \wedge x_0$ (o punto al infinito). El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 2.10 *Si M/M_0 o X es conexo, existe una equivalencia homotópica débil*

$$\gamma : C(M, M_0; X) \longrightarrow \Gamma(W - M_0, W - M; X)$$

donde $\Gamma(W - M_0, W - M; X)$ denota el espacio de secciones del haz $\dot{T}_X W$ definidas en $W - M_0$ y que mandan a $W - M$ en el correspondiente punto al infinito.

Ejemplo 2.11 *En el caso de un asa de índice q , esto es que*

$$M = [0, 1]^m \quad y \quad M_0 \cong [0, 1]^{m-q} \times \partial [0, 1]^q,$$

el teorema anterior implica que

$$C(M, M_0; X) \simeq \Omega^{m-q} \Sigma^m X.$$

El caso $q = 0$ es el teorema de aproximación de P. May.

2.4. $C(M, M_0; X)$ como espacio de funciones

Observación 2.12 *De manera un poco mas general, en el Capítulo 3 probaremos que en el caso en que $X = S^n$, la homología del espacio $C(M, M_0; S^n)$ esta dada por*

$$H_*C(M, M_0; X) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n})^{\otimes \beta_q}$$

donde $\beta_q = \dim_{\mathbb{F}} H_q(M, M_0; \mathbb{F})$ es el q -esimo numero de Betti de (M, M_0) y \mathbb{F} es el campo \mathbb{F}_p con p elementos o un campo de caracteristica cero. Para este resultado se requiere que $m + n$ sea impar, a menos que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, en cuyo caso el isomorfismo se vale para todos $m, n \geq 1$.

Ejemplo 2.13 *Si G es un grupo de Lie compacto y conexo de dimensión g , se tiene que*

$$C(G; X) \simeq \text{Map}(G, \Sigma^g X).$$

Ejemplo 2.14 *Si $M = M_g$ es una superficie de Riemman cerrada y orientable de género g , entonces*

$$C(\bar{M}_g; X) \simeq \text{Map}_*(M_g, \Sigma^2 X)$$

donde $\bar{M}_g = M_g - \{m_0\}$.

Para demostrar el resultado principal de la sección, necesitaremos el siguiente lema, con el cual podremos definir un mapeo de

$$C(M, M_0; X) \rightarrow \Gamma(W - M_0, W - M; X)$$

que es una equivalencia homotópica.

Lema 2.15 *El espacio de configuraciones etiquetadas $C(D^m, \partial D^m; X)$ es homotópicamente equivalente a $(D^n / \partial D^n) \wedge X$, es decir,*

$$C(D^m, \partial D^m; X) \simeq \Sigma^m X$$

Demostración

Recordemos que el espacio esta filtrado por los subespacios

$$F_k C(D^m, \partial D^m) = \left(\prod_{j=1}^k F_j(D^m) \times_{\Sigma_k} X^j \right) / \approx, \text{ para } k > 1.$$

$F_0C(D^m, \partial D^m)$ es el punto base y $F_1C(D^m, \partial D^m) = (D^m/\partial D^m) \wedge X$.

Básicamente se trata de construir un retracts por deformación del espacio

$$C(D^m, \partial D^m; X)$$

en $F_1C(D^m, \partial D^m)$. Simplemente daremos la idea de la construcción, que será principalmente dilatar el disco de manera continua, tal que todos los puntos excepto alguno vayan a dar a la frontera.

Dada una configuración $\xi = (z_1, \dots, z_k; x_1, \dots, x_k] \in C(D^m; X)$ fijémonos en la k -tupla $(z_1, \dots, z_k) \in F_k(D^m)$.

Consideremos las siguientes distancias:

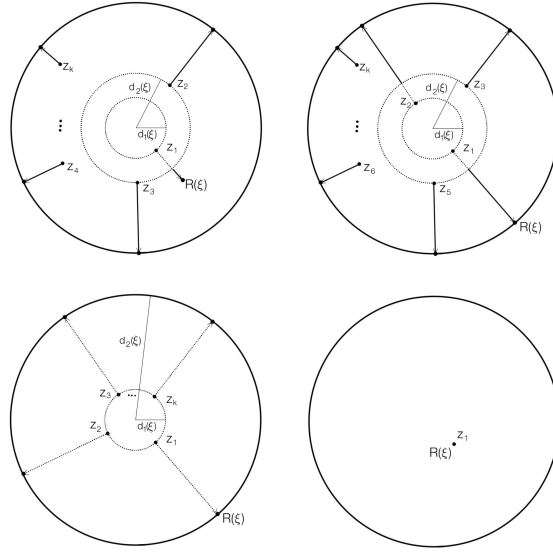
$$d_1(\xi) := \text{distancia más cercana de } \{z_1, \dots, z_k\} \text{ a } \vec{0};$$

$$d_2(\xi) := \text{segunda distancia más cercana de } \{z_1, \dots, z_k\} \text{ a } \vec{0} \text{ ó } 1;$$

$$L := \begin{cases} 1 - d_2(\xi) & \text{si } |D_{d_1(\xi)} \cap \{z_1, \dots, z_k\}| = 1 \\ 1 - d_1(\xi) & \text{si } |D_{d_1(\xi)} \cap \{z_1, \dots, z_k\}| > 1 \end{cases}$$

La idea es dilatar radialmente el disco una distancia L , de forma que los puntos que se encuentren en $D_{d_2(\xi)}$ se muevan a velocidad amortiguada y los que se encuentren fuera lo hagan a velocidad constante.

En la figura se muestran algunos casos para la retracción.



■

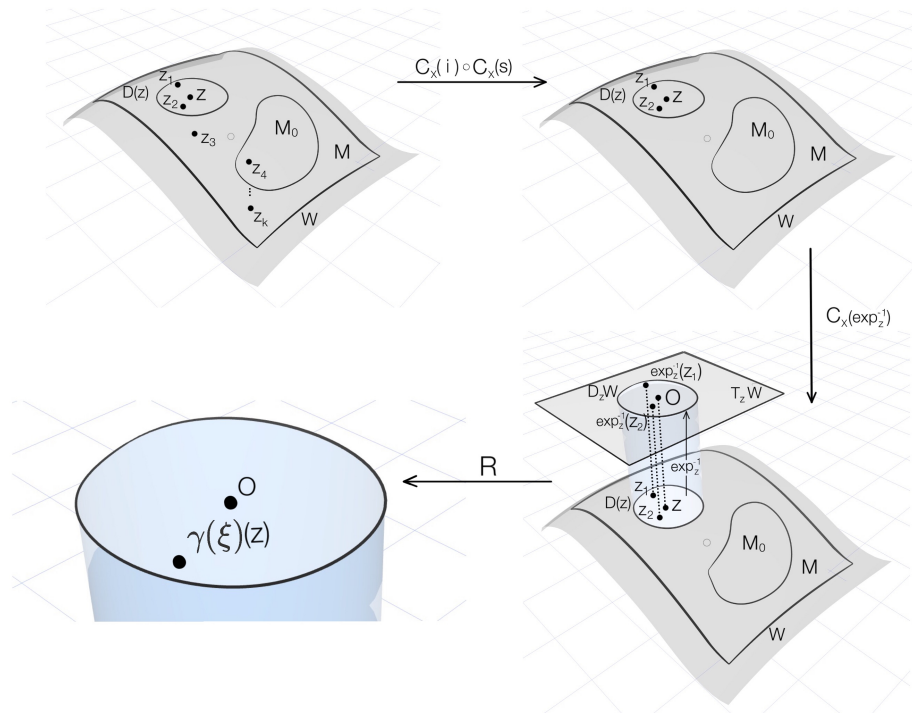
Con ayuda del lema anterior, definimos un mapeo

$$\gamma : C(M, M_0; X) \rightarrow \Gamma(W - M_0, W - M; X)$$

de la siguiente forma. Para cada $\xi \in C(M, M_0; X)$ y $z \in W - M_0$, definimos $\gamma(\xi)(z)$ como la imagen de ξ bajo la composición

$$\begin{aligned} C(M, M_0; X) &\rightarrow C(W, M_0 \cup (W - \text{int}(D(z)))) ; X \cong C(D(z), \partial D(z); X) \\ &\cong C(D_z W, \partial D_z W; X) \xrightarrow{R} (D_z W / \partial D_z W) \wedge X \rightarrow \dot{T}(W) \wedge_W (W \times X). \end{aligned}$$

El primer mapeo es el cociente natural, el segundo mapeo es una escisión y el tercero es el inducido por el mapeo exponencial del disco unitario $D_z W \subset T_z W$ en una vecindad de $D(z)$ en $W - M_0$. El mapeo R es un retracto por deformación de la inclusión $(D_z W / \partial D_z W) \wedge X \rightarrow C(D_z W, \partial D_z W; X)$ del lema anterior, mientras que ultimo mapeo es la inclusión de la fibra. En la figura se muestra un ejemplo de este mapeo.



El siguiente teorema es una generalización del resultado de D. McDuff [34].

Teorema 2.16 *Supongamos que (M, M_0) o X es conexo, entonces γ es una equivalencia homotópica.*

Demostración

La demostración esencialmente esta contenida en [34, Teorema 1.4]. Lo esbozamos en los siguientes pasos.

(1) Iniciamos por demostrar la suposición en el caso que (M, M_0) sea un asa de índice k ,

$$(D^m, D^k \times S^{m-k-1}).$$

La afirmación es cierta para $k = 0$ pues por el lema anterior, podemos construir mapeos de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 C(D^m, \partial D^m; X) & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\mathbb{R}^m - \partial D^m, \mathbb{R}^m - D^m; X) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \Sigma^m X & & \text{Map}_*(D_+^m, \Sigma^m X) \\
 & \searrow \simeq & \downarrow \simeq \\
 & & \Sigma^m X
 \end{array}$$

Ahora consideremos para cada $k = 1, 2, \dots, m$ el subespacio

$$I_k^m := \{(y^1, \dots, y^m) \in I^m \mid y^i = 0 \text{ ó } 1 \text{ para algún } i = k+1, \dots, m \text{ o } y^k = 1\};$$

ponemos $H^k := [0, 1]^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1]^{m-k} \subseteq I^m$. En la sucesión

$$(H_k, H_k \cap I_k^m) \rightarrow (I^m, I_k^m) \rightarrow (I^m, H_k \cup I_k^m)$$

el lado izquierdo es un asa de índice k , el lado derecho es un asa de índice $k-1$. Aplicamos el funtor $C(-, -; X)$ y por el Teorema 2.9 se tiene una casifibración para $k = 1, \dots, m-1$ si X es arbitrario y para $k = m$ si X es conexo. Aplicamos $\Gamma(-, -; X)$ a los complementos en $W = \mathbb{R}^m$, teniéndose el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 C(H_k, H_k \cap I_k^m; X) & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\mathbb{R}^m - (H_k \cap I_k^m), \mathbb{R}^m - H_k; X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(I^m, I_k^m; X) & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\mathbb{R}^m - I_k^m, \mathbb{R}^m - I^m; X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(I^m, H_k \cup I_k^m; X) & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(\mathbb{R}^m - (H_k \cup I_k^m), \mathbb{R}^m - I^m; X)
 \end{array}$$

Donde la sucesión de la derecha es una fibración. Nótese que los espacios de en medio son contraíbles así que por inducción concluimos la afirmación para todas las asas de índice $k = 0, 1, \dots, m-1$ si X es arbitrario y para $k = m$ si X es conexo.

(2) Para el caso $(M, \partial M)$ elegimos una descomposición en asas de M . Si adjuntamos una nueva asa nos da una casifibración para C y una fibración para Γ y γ mapea uno en el otro. Por inducción sobre el número de asas la afirmación se cumple para $(M, \partial M)$.

(3) Para el caso (M, M_0) con $M_0 \subseteq \partial M$ elegimos una subvariedad complementaria $L \subseteq \partial M$, i.e. $L \cup M_0 = \partial M$ y $L \cap M_0 = \partial L = \partial M_0$. Adjuntemos un collar cerrado a M , obteniendo $\bar{M} = M \cup (\partial M \times [0, 1])$, y consideremos la sucesión

$$(\bar{L}, \bar{L} \cap \bar{M}_0) \rightarrow (\bar{M}, \bar{M}_0) \rightarrow (\bar{M}, \bar{L} \cup \bar{M}_0)$$

con $\bar{L} = L \times [0, 1]$ y $\bar{M}_0 = M_0 \times [0, 1]$. La afirmación es cierta para el par del lado derecho por (1) puesto que $(\bar{M}, \bar{L} \cup \bar{M}_0) = (\bar{M}, \partial \bar{M}) \cong (M, \partial M)$. Como antes, la afirmación se sigue para $(\bar{M}, \bar{M}_0) \cong (M, M_0)$ si demostramos esto para $(\bar{L}, \bar{L} \cap \bar{M}_0) = (\bar{L}, \partial \bar{L}) = (L, \partial L) \times [0, 1]$.

Para este caso usamos la sucesión

$$(L, \partial L) \times [0, 1] \rightarrow (L, \partial L) \times ([0, 2], \{2\}) \rightarrow (L \times [0, 2], \partial(L \times [0, 2])).$$

La afirmación es cierta para el par del lado derecho por (1); también es cierta para el par de en medio pues esto da espacios contraibles. Por lo tanto la afirmación se sigue para el lado izquierdo.

(4) Para el caso de una subvariedad $M_0 \subseteq M$ reemplazamos M_0 por una vecindad tubular y removemos el interior de esta vecindad. Por la invarianza bajo isotopías y la propiedad de escisión ambas manipulaciones dejan inalterado el tipo de homotopía de C . Pero ahora estamos en el caso (2) completando la demostración. ■

2.5. Hazes vectoriales sobre espacios de configuraciones

En esta sección relacionaremos a los espacios $D_k(M, M_0; X)$ con los espacios de Thom de los haces vectoriales canónicos sobre los espacios de configuraciones $F_k(M)/\Sigma_k$.

Para todo k existe un haz vectorial

$$\eta^k = \eta^k(M) : \mathbb{R}^k \hookrightarrow F_k(M)/\Sigma_k \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \rightarrow F_k(M)/\Sigma_k.$$

De acuerdo a los resultados de [18], cuando $M = \mathbb{R}^n$ el haz anterior tiene orden finito $\phi_{n,k}$, el cual se puede calcular a partir del siguiente número.

$$a_{n,k} = 2^{\rho(n-1)} \prod_{3 \leq p \leq k} p^{[(n-1)/2]}$$

donde p denota un primo impar y $\rho(m)$ es el número de Adam's de campos vectoriales, es decir, $\rho(m)$ es el número de enteros positivos que son congruentes con 0, 1, 2 o 4 modulo 8. Teniendo el siguiente resultado principal

Teorema 2.17 *Si $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, entonces $\phi_{n,k} = a_{n,k}$. Más aún si $n \equiv 0 \pmod{4}$, entonces $a_{n,k} \mid \phi_{n,k}$ y $\phi_{n,k} \mid 2a_{n,k}$. ■*

La demostración del teorema anterior puede verse en [18] o de manera un poco más detallada en [39]. Con estos hechos podemos acotar el orden del haz vectorial η^k para M una variedad. A lo largo de este trabajo denotaremos al orden del haz η^k como n_k .

Veamos otros resultados importantes, que nos será de utilidad en los siguientes capítulos.

Sea η_0^k la restricción de η^k a $F_k(M \mid M_0)/\Sigma_k$ donde

$$F_k(M \mid M_0) = \{(z_1, \dots, z_k) \in F_k(M) \mid z_i \in M_0 \text{ para al menos un } i\}.$$

Teorema 2.18 *El espacio de Thom asociado a la n -ésima suma de Whitney $n\eta^k = \eta^k \oplus \dots \oplus \eta^k$ es homeomorfo al espacio $D_k(M; S^n)$, más aún el espacio de Thom relativo a la n -ésima suma de Whitney de la pareja (η^k, η_0^k) es homeomorfo al espacio $D_k(M, M_0; S^n)$.*

Demostración

Demostraremos el caso absoluto cuando $M_0 = \emptyset$ el caso relativo se sigue de la misma forma.

Consideremos a $S^n = \mathbb{R}^{n*}$ como la compactificación de \mathbb{R}^n por un punto, el punto base de la esfera. Tenemos que

$$D_k(M; S^n) := \frac{\left(\coprod_{j=1}^k F_j(M) \times_{\Sigma_j} (\mathbb{R}^{n*})^j \right) / \approx}{\left(\coprod_{j=1}^{k-1} F_j(M) \times_{\Sigma_j} (\mathbb{R}^{n*})^j \right) / \approx} \cong \frac{F_k(M) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{R}^{n*})^k}{F_k(M) \times_{\Sigma_k} \{*\}}.$$

Donde $*$ es el punto base de S^n (el punto de compactificación). Recordemos que $X^{\wedge k} \cong \frac{X^k}{\text{FatW}_k(X)}$, entonces

$$(\mathbb{R}^{n*})^{\wedge k} \cong \frac{(\mathbb{R}^{n*}) \times (\mathbb{R}^{n*}) \times \dots \times (\mathbb{R}^{n*})}{\left(\{*\} \times (\mathbb{R}^{n*})^{k-1} \right) \cup \left(\mathbb{R}^{n*} \times \{*\} \times (\mathbb{R}^{n*})^{k-2} \right) \cup \dots \cup \left((\mathbb{R}^{n*})^{k-1} \times \{*\} \right)}$$

Consideremos ahora $(\mathbb{R}^{n-k})^*$ la compactificación por un punto de \mathbb{R}^{n-k} , este punto lo podemos pensar como el punto base de $(\mathbb{R}^{n*})^{\wedge k}$. De acuerdo a lo anterior podemos ver que

$$D_k(M, S^n) \cong \frac{F_k(M) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{R}^{n-k})^*}{F_k(M) \times_{\Sigma_k} \{*\}}$$

donde $*$ es el punto de compactificación de \mathbb{R}^{n-k} . Notemos que justamente el último espacio es homeomorfo al espacio de Thom de la n -ésima suma de Whitney del haz η^k . Por lo tanto tenemos lo deseado. ■

En virtud de estos dos resultados se obtiene el siguiente:

Corolario 2.19 *Si $M_0 = \emptyset$, tenemos que*

$$D_k(M; S^{n_k}) \cong \Sigma^{k \cdot n_k}(F_k(M)/\Sigma_k)_+.$$

De forma más general, existe una periodicidad

$$D_k(M; S^{n+n_k}) \cong \Sigma^{k n_k} D_k(M; S^n) \quad \text{para cualquier } n \geq 1.$$

Demostración

La primera afirmación es consecuencia de los dos teoremas anteriores, en efecto, por el Teorema 2.17 la suma de Whitney $n_k \eta^k$ es un haz vectorial trivial de dimensión $n_k \cdot k$ sobre la base $F_k(M)/\Sigma_k$, luego el espacio de Thom de este haz es

$$\Sigma^{k \cdot n_k}(F_k(M)/\Sigma_k)_+,$$

mientras que por el Teorema 2.18 el espacio de Thom del haz vectorial $n_k \eta^k$ es:

$$D_k(M; S^{n_k}).$$

Para la segunda afirmación tenemos que

$$Th(n_k \eta^k \oplus n \eta^k) = \Sigma^{k \cdot n_k} Th(n \eta^k) \cong \Sigma^{k \cdot n_k} D_k(M; S^n)$$

pues $n \eta^k$ es un haz vectorial trivial, luego por el teorema anterior

$$D_k(M; S^{n+n_k}) = Th((n_k + n) \eta^k) = \Sigma^{k \cdot n_k} D_k(M; S^n).$$

■

Capítulo 3

La homología de $C(M, M_0; S^n)$

El propósito de este capítulo es describir a la homología de $C(M, M_0; X)$ en el caso que $X = S^n$, en términos de $H_*(M, M_0)$ y de la homología de los espacios de lazos iterados $\Omega^{m-q}S^{m+n}$, (ver Teorema 3.1). A su vez, cada factor $H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n})$ es un álgebra con pesos asociados a sus generadores; extendiendo multiplicativamente se induce una filtración por pesos en $\bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n})$. Más aún, en la Sección 3.2 se prueba que el subespacio generado por los elementos de peso k es isomorfo a la homología del espacio $D_k(M, M_0; S^n)$. En el caso $M_0 = \emptyset$, el isomorfismo de Thom permite obtener a partir de aquí, la homología de los espacios de configuraciones $F_k(M) / \Sigma_k$ en términos de la homología de M . Finalmente veremos que los resultados pudieron haberse obtenido de otra forma en el caso particular que $M = G$ es un grupo de Lie compacto y conexo.

3.1. El teorema principal

El propósito de esta sección es demostrar el siguiente resultado que describe a $H_*C(M, M_0; S^n)$ en términos de los números de Betti de $H_*(M, M_0)$ y de la homología de los espacios de lazos iterados $\Omega^{m-q}S^{m+n}$. Todas las variedades M son

3.1. El teorema principal

suaves, compactas y tienen dimensión fija m . Las variedades M_0 son compactas de dimensión arbitraria y posiblemente vacías. Sea \mathbb{F} el campo \mathbb{F}_p de los enteros módulo p o un campo de característica cero. $H_*(\)$ denotará la homología con coeficientes \mathbb{F} y $\beta_q = \dim H_q(M, M_0; \mathbb{F})$.

Teorema 3.1 *Sea $n \geq 1$ y supongamos que $m + n$ es impar, a menos que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Entonces*

(a) *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\theta : H_*C(M, M_0; S^n) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n})^{\otimes \beta_q}$$

(b) *El primer mapeo de Hopf induce un monomorfismo*

$$h_* : H_*C(M, M_0; S^n) \rightarrow H_*Q(M/M_0 \wedge S^n).$$

Observación 3.2 *En el resto de la sección supondremos que $n \geq 2$. El resultado también es válido para $n = 1$, pero por razones técnicas posponemos este caso hasta la sección 3.3. Como se verá en la demostración, el isomorfismo θ depende de una descomposición en asas y es natural con respecto encajes $(M, M_0) \rightarrow (N, N_0)$ que respeten las descomposiciones en asas.*

Demostración

Caso absoluto $M_0 = \emptyset$.

Si M es una unión disjunta de $M_1 \amalg M_2$, entonces $C(M; X) \cong C(M_1; X) \times C(M_2; X)$. Por tanto podemos restringirnos a variedades conexas. Procederemos por inducción sobre una descomposición en asas de M .

Iniciamos la demostración suponiendo que M es un m -disco D^m . De acuerdo al Teorema 2.10 el espacio

$$C(D^m; S^n) \simeq \Omega^m S^{m+n},$$

por lo que la afirmación (a) queda demostrada. La afirmación (b) es demostrada en [19, Página 226] o puede verse el Teorema 3.11; aquí necesitamos la hipótesis de que $m + n$ sea par si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$.

Supongamos que (a) y (b) se cumplen para M . Si $\bar{M} = M \cup D$ con $D \cong [0, 1]^m$ un asa de índice q en M , es decir $D \cap M \cong [0, 1]^{m-q} \times \partial[0, 1]^q$. Podemos suponer que $q \geq 1$, pues M es conexa. Consideremos la cofibración

$$(M, \emptyset) \rightarrow (\bar{M}, \emptyset) \rightarrow (\bar{M}, M) \simeq (S^q, *)$$

la cual induce la siguiente sucesión exacta en homología

$$0 \rightarrow H_q(M) \rightarrow H_q(\bar{M}) \rightarrow H_q(S^q) \rightarrow H_{q-1}(M) \rightarrow H_q(\bar{M}) \rightarrow 0$$

teniéndose los siguientes casos:

- I. $H_q(\bar{M}) \rightarrow \tilde{H}_q(S^q)$ es un epimorfismo, i.e. $\beta_q(\bar{M}) = \beta_q(M) + 1$;
- II. $H_q(\bar{M}) \rightarrow \tilde{H}_q(S^q)$ es cero, i.e. $\beta_{q-1}(\bar{M}) = \beta_{q-1}(M) - 1$.

Caso I. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(M; S^n) & \xrightarrow{h(M)} & Q(M_+ \wedge S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(\bar{M}; S^n) & \xrightarrow{h(\bar{M})} & Q(\bar{M}_+ \wedge S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{m-q} S^{m+n} \simeq C(\bar{M}, M; S^n) & \xrightarrow{h(\bar{M}, M)} & Q(\bar{M}/M \wedge S^n) \simeq Q(S^{q+n}) \end{array}$$

donde $h(-)$ son los mapeos de Hopf. El diagrama anterior es conmutativo por la Observación 2.8, mientras que por el Teorema 2.9 la columna de la izquierda es una casifibración y por el Ejemplo 2.11, $C(\bar{M}, M; S^n) \simeq \Omega^{m-q} S^{m+n}$.

3.1. El teorema principal

Ahora bien, sabemos que la columna derecha es una fibración y como estamos analizando el caso en que $H_*\bar{M} \rightarrow H_*S^q$ es un epimorfismo, por la Observación 1.32 se tiene que los mapeos $H_*Q(\bar{M}_+ \wedge S^n) \rightarrow H_*Q(S^{q+n})$ también son epimorfismos, así la sucesión espectral de Serre se colapsa. Debido a la hipótesis de inducción, tenemos que la afirmación (b) es válida para M , es decir, $h(M)_*$ es un monomorfismo, por lo que la sucesión espectral de Serre sobre el lado izquierdo también se colapsa.

Así pues tenemos que

$$\begin{aligned} H_*C(\bar{M}; S^n) &\cong H_*C(M; S^n) \otimes H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n}) \\ &\cong \bigotimes_{r=0}^m H_*(\Omega^{m-r}S^{m+n})^{\otimes \beta_r(M)} \otimes H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n}) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la afirmación (a) para \bar{M} ya que $\beta_q(\bar{M}) = \beta_q(M) + 1$.

Para la afirmación (b), fijémonos en el E^2 -nivel de las sucesiones espectrales, entonces $h(\bar{M})_*$ corresponde a $h(M)_* \otimes h(\bar{M}, M)_*$. Como $h(M)_*$ y $h(\bar{M}, M)_*$ son monomorfismos, entonces se cumple la afirmación (b) para \bar{M} .

Caso II. Consideramos la sucesión de fibras generada por el anterior diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{m-q+1}S^{m+n} \simeq \Omega C(\bar{M}, M; S^n) & \xrightarrow{\Omega h(\bar{M}, M)} & \Omega Q(\bar{M}/M \wedge S^n) \simeq Q(S^{q-1+n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(M; S^n) & \xrightarrow{h(M)} & Q(M_+ \wedge S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(\bar{M}, S^n) & \xrightarrow{h(\bar{M})} & Q(\bar{M}_+ \wedge S^n) \end{array}$$

Notemos que por el Teorema 1.9, el espacio

$$Q(S^{q-1+n}) \simeq \Omega Q(\Sigma(S^{q-1+n})) \simeq \Omega Q(\bar{M}/M \wedge S^n),$$

tal y como aparece en el diagrama.

Para este caso necesitamos que $n \geq 2$, pues con ello aseguramos la trivialidad del sistema local de coeficientes en la sucesión espectral de Serre. Notemos que $H_*Q(S^{q-1+n}) \rightarrow H_*Q(M_+ \wedge S^n)$ es un monomorfismo debido a que en este caso el mapeo $H_*S^{q-1} \rightarrow H_*M$ es un monomorfismo, entonces la sucesión espectral de Serre se colapsa en la columna de la derecha. Por otro lado el mapeo $\Omega h(\bar{M}, M)$ puede ser remplazado por $\Omega^{m-q+1}E$ donde E es el mapeo de estabilización $S^{m+n} \rightarrow Q(S^{m+n})$. Por lo tanto tenemos que $\Omega h(\bar{M}, M)_*$ es un monomorfismo, luego la sucesión espectral de Serre del lado izquierdo también se colapsa, por lo tanto

$$H_*C(M; S^n) \cong H_*C(\bar{M}; S^n) \otimes H_*(\Omega^{m-q+1}S^{m+n}).$$

Comparando con la serie de Euler-Poncaré y recordando que $\beta_{q-1}(\bar{M}) = \beta_q(M)$ demostramos la afirmación (a) para la variedad \bar{M} .

Para ver que $h(\bar{M})_*$ es un monomorfismo, obsevemos que:

1. Ambas son fibraciones principales.
2. $H_*C(\bar{M}; S^n) \cong H_*C(M; S^n) \otimes_R \mathbb{F}$, $R = H_*(\Omega^{m-q+1}S^{m+n})$.
3. $H_*Q(\bar{M} \wedge S^n) \cong H_*Q(M_+ \wedge S^n) \otimes_{R'} \mathbb{F}$, $R' = H_*Q(S^{q-1+n})$.

Se sigue de la naturalidad la afirmación (b).

Caso relativo (M, M_0)

Para tratar este caso, podemos suponer que M_0 es parte de un collar abierto, es decir, $M_0 = (\partial M \cap M_0) \times [0, 1[$. Para ver esto hagamos lo siguiente:

Remplacemos a M_0 por una vecindad tubular a la que llamaremos M'_0 (notemos que M_0 y M'_0 tienen el mismo tipo de istopía). Lo siguiente es remover el interior de M'_0 para obtener $M''_0 = M_0 - \text{int}M'_0$ y $M'' = M - \text{int}M'_0$. Por la propiedad de escisión se tiene que

$$C(M, M'_0; S^n) \cong C(M - \text{int}M'_0, M_0 - \text{int}M'_0; S^n) = C(M'', M''_0; S^n).$$

3.1. El teorema principal

Como M_0'' se encuentra en $\partial M''$, entonces podemos adjuntar un collar abierto para formar $M''' = M'' \cup (\partial M'' \times [0, 1])$, y el conjunto $M_0''' = M_0'' \times [0, 1]$, donde las parejas (M'', M_0'') y (M''', M_0''') tienen el mismo tipo de isotopía. El último par obtenido (M''', M_0''') tiene la forma deseada y cumple que:

$$C(M, M_0'; S^n) \cong C(M''', M_0'''; S^n),$$

por los resultados de la sección 2.1.

Para este caso también usaremos inducción sobre una descomposición en asas de $M_0 \cap \partial M$. Para iniciar la inducción, usamos el caso absoluto cuando $M_0 = \emptyset$.

Supongamos que las afirmaciones (a) y (b) son ciertas para la pareja (M, M_0) . Sea \bar{M}_0 la unión de $M_0 \cup D$ con $D \cong [0, 1]^m$ de tal forma que $[0, 1]^m \cong (D \cap \partial M) \times [0, 1]$ con $D \cap \partial M \cong [0, 1]^{m-1}$ una asa de dimensión $m - 1$ y de índice q en $\bar{M}_0 \cap \partial M$ (para $0 \leq q \leq m - 1$), es decir,

$$D \cap \partial M \cap M_0 \cong [0, 1]^{m-1-q} \times \partial[0, 1]^q \times \{0\}.$$

Consideremos la cofibración

$$(S^q, *) \simeq (D, D \cap M_0) \rightarrow (M, M_0) \rightarrow (M, \bar{M}_0),$$

entonces se tiene la siguiente sucesión exacta en homología de parejas

$$0 \rightarrow H_{q+1}(M, M_0) \rightarrow H_{q+1}(M, \bar{M}_0) \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow H_q(M, M_0) \rightarrow H_q(M, \bar{M}_0) \rightarrow 0$$

y de nuevo, tenemos los siguientes casos:

III. $H_q(S^q) \rightarrow H_q(M, M_0)$ es un monomorfismo, i.e. $\beta_q(M, \bar{M}_0) = \beta_q(M, M_0) - 1$;

IV. $H_q(S^q) \rightarrow H_q(M, M_0)$ es cero, i.e. $\beta_{q+1}(M, \bar{M}_0) = \beta_{q+1}(M, M_0) + 1$.

Caso III. Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{m-q}\Sigma^{m-q}S^{q+n} \simeq C(D, D \cap M_0; S^n) & \xrightarrow{h(D, D \cap M_0)} & Q(D/(D \cap M_0) \wedge S^n) \simeq Q(S^{q+n}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(M, M_0; S^n) & \xrightarrow{h(M, M_0)} & Q(M/M_0 \wedge S^n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(M, \bar{M}_0; S^n) & \xrightarrow{h(M, \bar{M}_0)} & Q(M/\bar{M}_0 \wedge S^n)
 \end{array}$$

Tenemos que $H_*Q(S^{q+n}) \rightarrow H_*Q(M/M_0 \wedge S^n)$ es un monomorfismo, puesto que el mapeo $H_*S^q \rightarrow H_*(M, M_0)$ es un monomorfismo. También se tiene que $h(D, D \cap M_0)$ es un monomorfismo. Con estos argumentos, vemos que las afirmaciones (a) y (b) para (M, \bar{M}_0) son ahora similares al caso II, con lo que concluimos este caso.

Caso IV. Primero removamos $D' =]0, 1[^{m-q-1} \times]0, 1[^q \times]0, 1[\subset D$ de M . Llamemos a $N := M - D'$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 C(N, N \cap \bar{M}_0; S^n) & \xrightarrow{h(N, N \cap \bar{M}_0)} & Q(N/(N \cap \bar{M}_0) \wedge S^n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(M, \bar{M}_0; S^n) & \xrightarrow{h(M, \bar{M}_0)} & Q(M/\bar{M}_0 \wedge S^n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(M, \bar{M}_0 \cup N; S^n) & \xrightarrow{h(M, \bar{M}_0 \cup N)} & Q(M/(\bar{M}_0 \cup N) \wedge S^n).
 \end{array}$$

Notemos que la pareja $(N, N \cap \bar{M}_0)$ tiene el mismo tipo de isotopía que la pareja (M, M_0) , luego el mapeo $h(N, N \cap \bar{M}_0)$ es un monomorfismo por la hipótesis de inducción.

En este caso el mapeo $H_*Q(N/(N \cap \bar{M}_0) \wedge S^n) \rightarrow H_*Q(M/\bar{M}_0 \wedge S^n)$ es un monomorfismo, por lo que la sucesión espectral de Serre colapsa en ambos lados. Como $(M, \bar{M}_0 \cup N)$ es del mismo tipo de isotopía que la asa $([0, 1]^m, [0, 1]^{m-q-1} \times \partial([0, 1]^q \times$

$[0, 1]$) de índice $q + 1$, se tiene que $C(M, \bar{M}_0 \cup N; S^n) \simeq \Omega^{m-q-1}S^{m+n}$. Luego las afirmaciones (a) y (b) se siguen como en el caso I. ■

3.2. La homología de $D_k(M, M_0; S^n)$

El Teorema 3.1 nos da un isomorfismo θ entre la homología del espacio de configuraciones $C(M, M_0; S^n)$ y el producto tensorial de las homologías de los espacios de lazos iterados $\Omega^{m-q}S^{m+n}$, cada término es un álgebra con pesos asociados a sus generadores. Nuestro objetivo principal será demostrar que el isomorfismo θ preserva la filtración por pesos en la filtración por longitud de configuraciones de $H_*C(M, M_0; S^n)$. En vista de esto, se obtendrá el siguiente resultado:

Teorema 3.3 *Para $n, k \geq 1$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\bar{\theta}_k : \mathcal{D}_k(H_*; n) \rightarrow H_*D_k(M, M_0; S^n).$$

Los espacios $\mathcal{D}_k(H_*; n)$ son los cocientes sucesivos de la filtración por pesos del álgebra tensorial $\bigotimes_{q=0}^m (H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n}))^{\otimes \beta_q}$.

A partir de aquí y con el isomorfismo de Thom nos permitirá obtener la homología de los espacios de configuraciones $F_k(M)/\Sigma_k$ en términos de los números de Betti de H_*M y el número k .

A lo largo de esta sección la pareja (M, M_0) se mantendrá fija. Escribiremos $C(n)$ para el espacio $C(M, M_0; S^n)$, y H_* para $H_*(M, M_0)$. Las demostraciones serán dadas para el campo de los enteros módulo 2; $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, los resultados para \mathbb{F} en general se demuestran de manera similar y los presentaremos resultados similares en el siguiente capítulo.

Definición 3.4 Definimos el álgebra graduada $\mathcal{C}(H_*; n)$ como el producto tensorial del Teorema 3.1;

$$\mathcal{C}(H_*; n) = \bigotimes_{q=0}^m (H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n}))^{\otimes \beta_q},$$

dicha álgebra solamente depende de m , n y β_0, \dots, β_m .

Notemos que los factores $H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n})$ se obtuvieron a partir de una descomposición en asas de (M, M_0) y con ello obtenemos información del álgebra $\mathcal{C}(H_*; n)$. Por otro lado la homología de los espacios de lazos iterados $\Omega^{m-q} S^{m+n}$ es el álgebra $\mathbb{F}_2[Q_I x_n]$ con $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ una sucesión admisible y $Q_I = Q_{i_1} Q_{i_2} \cdots Q_{i_r}$, donde los Q_i son las operaciones de Dyer-Lashof (ver Sección 1.5). Con esto en mente es posible dar una descripción algebraica de $\mathcal{C}(H_*; n)$ y definir una función de peso ω en cada generador como sigue.

Para cada clase $\alpha \in H_*(M, M_0)$ elegimos un generador u_α y le asociamos un grado y un peso definido de la siguiente forma:

$$|u_\alpha| := |\alpha| + n.$$

$$\omega(u_\alpha) := 1.$$

luego para cada u_α y sucesión de índices $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, asociamos un generador adicional $Q_I u_\alpha$ si la sucesión I es admisible, que en este caso significará que

$$0 < i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r < m - |\alpha|.$$

Recordemos que $Q_I = Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_r}$, por lo que tenemos

$$|Q_I u_\alpha| = i_1 + 2i_2 + 4i_3 + \dots + 2^{r-1} i_r + 2^r (|\alpha| + n).$$

Definimos el peso de estos nuevos generadores como

$$\omega(Q_I u_\alpha) := 2^{\|I\|} = 2^r.$$

Notemos que no existen generadores adicionales de la forma $Q_I(u_\alpha)$ cuando $\alpha \in H_m$ o $\alpha \in H_{m-1}$.

Entonces $\mathcal{C}(H_*; n)$ es el \mathbb{F} -álgebra asociativa y conmutativa generada por u_α y $Q_I u_\alpha$ módulo las relaciones

1. $u_{\alpha+\beta} = u_\alpha + u_\beta$.
2. $Q_I u_{\alpha+\beta} = Q_I u_\alpha + Q_I u_\beta$.
3. $u_\alpha^2 = 0$ si $|\alpha| = m$.

El grado y peso lo extendemos linealmente a todos los monomios en $\mathcal{C}(H_*, n)$ poniendo

$$|v_1 \cdot v_2| := |v_1| + |v_2|,$$

$$w(v_1 \cdot v_2) := w(v_1) + w(v_2).$$

Ejemplo 3.5 Si $H_* = \mathbb{F}_2$ esta concentrado en el grado $* = q$, entonces asociamos el generador x_{q+n} de grado $q+n$ (Notemos que por la relación (1) es el único generador de la forma u_α). Los generadores adicionales $Q_I(x_{q+n})$, son aquellos cuya sucesión de índices $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ satisface:

$$0 < i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r < m - |\alpha| = m - q.$$

que son justamente las sucesiones admisibles para la homología de $\Omega^{m-q}S^{m+n}$ de acuerdo a la Sección 1.5, así pues por el Teorema 1.29

$$\mathcal{C}(H_*; n) = \mathbb{F}_2[Q_I(x_{q+n})] \cong H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n}).$$

Por ejemplo, si (M, M_0) es una asa de índice q , entonces por el Ejemplo 2.11, $C(M, M_0; S^n) \simeq \Omega^{m-q}S^{m+n}$. Notemos que en este caso los generadores $Q_I u_\alpha$ y sus pesos fueron definidos usando primero los espacios de configuraciones etiquetadas y su longitud de las filtraciones de acuerdo al Teorema 3.1.

Definición 3.6 Para el álgebra $\mathcal{C}(H_*; n)$ denotaremos a

$$\mathcal{C}_k(H_*; n) = F_k \mathcal{C}(H_*; n)$$

como el submódulo generado por todos los monomios de peso a lo más k . Con esto obtenemos una filtración por pesos de $\mathcal{C}(H_*; n)$. Además, denotaremos por $\mathcal{D}_k(H_*; n)$ al espacio vectorial graduado de los cocientes sucesivos de esta filtración, es decir:

$$\mathcal{D}_k(H_*; n) := \mathcal{C}_k(H_*; n) / \mathcal{C}_{k-1}(H_*; n).$$

Notemos que una descomposición en asas de (M, M_0) proporciona una base del espacio vectorial $H_* = H_*(M, M_0)$ y de acuerdo a esta descripción, nos proporciona una base del álgebra $\mathcal{C}(H_*; n)$, además de acuerdo al Teorema 3.1 tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales graduados

$$\theta : \mathcal{C}(H_*; n) \rightarrow H_*C(n).$$

Con el fin de demostrar el Teorema 3.3 necesitaremos ver que de hecho, cualquier isomorfismo graduado debe de preservar las respectivas filtraciones $\mathcal{C}_k(H_*; n)$ y $H_*C_k(n)$ aunque un rango se incremente en n . Esto junto con las descomposiciones estables de la Sección 2.2 y la relación que existe entre los haces vectoriales canónicos de F_k/Σ_k con los espacios $D_k(M; S^n)$, en particular la periodicidad del Corolario 2.19 terminarán la demostración. Para esto primero demostremos los siguientes lemas.

Lema 3.7 *Sea r un entero tal que $n > rm \geq 2$. Entonces las siguientes condiciones se cumplen para toda $k \leq r$:*

- (a) θ mapea $\mathcal{C}_k(H_*; n)$ a $H_*C_k(n)$;
- (b) $\mathcal{C}_k(H_*; n)$ y $H_*C_k(n)$ se anulan en grados $\geq n(k+1)$;
- (c) La resticción $\theta_k : \mathcal{C}_k(H_*; n) \rightarrow H_*C_k(n)$ es un isomorfismo.

Demostración

Notemos que la dimension de $Q_i^k(v) = Q_i \dots Q_i(v)$ (k veces) es

$$| Q_i^k(v) | = (2^k - 1)i + 2^k | v | .$$

Determinemos los elementos de grado maximal en $\mathcal{C}_{2^k}(H_*; n)$ para ello tomemos un elemento $z \in \mathcal{C}_{2^k}(H_*; n)$ y observemos lo siguiente:

(1) Si $z = Q_I(u_\alpha)$, entonces $|z| = i_1 + 2i_2 + \dots + 2^{\|I\|-1}i_{\|I\|} + 2^{\|I\|}|u_\alpha|$ y como puede verse la forma en que este grado sea maximal es que $i_1 = i_2 = \dots = i_{\|I\|} = l$ sea el mas grande que se pueda elegir lo cual sucede cuando $l = m - |\alpha| - 1$; además como $|u_\alpha| = m + i$ donde $\alpha \in H_i(M, M_0)$, entonces i tiene que ser maximal, es decir,

$$i := \text{máx}\{j < m - 1 \mid \beta_j \neq 0\}.$$

Ahora como $w(z) = 2^k$ se tiene que $z = Q_{m-i-1}^k(u_{n+i})$ es de grado maximal.

(2) Si $z = \prod_{j=1}^l Q_{I_j}(v_j)$ (por comodidad se permite que I_j sea la sucesión vacía, en tal caso sólo nos dice que $Q_{I_j}(v_j) = v_j$), entonces por la linealidad del grado tenemos que cada factor tiene que ser maximal, por lo que si $I_j \neq \emptyset$ se debe tener que $I_j = (m - i - 1, m - i - 1, \dots, m - i - 1)$ r_j -veces donde $r_j = \|I_j\|$ y cada $v_j = u_{i+n}$. Así pues

$$\begin{aligned} |z| &= \sum_{j=1}^l |Q_{m-i-1}^{r_j}(u_{i+n})| = \sum_{j=1}^l [(2^{r_j} - 1)(m - i - 1) + 2^{r_j}(n + i)] \\ &= \left(\sum_{j=1}^l 2^{r_j} \right) (m + n - 1) - l(m - i - 1) \\ &= w(z) - l(m - i - 1) \\ &= 2^k - l(m - i - 1). \end{aligned}$$

Para que lo anterior sea maximal se debe de tener que $l = 1$, luego z se ve como (1).

De lo anterior vemos que los elementos en $\mathcal{C}_{2^k}(H_*; n)$ de grado maximal, son aquellos generados por elementos de la forma

$$Q_{m-i-1}^k(u_{n+i}) \quad \text{para } i := \text{máx}\{j < m - 1 \mid \beta_j \neq 0\}.$$

En general, si $k = \sum_{\kappa \in K} 2^\kappa$ es la expansión 2-ádica de k , procediendo como antes, vemos que los elementos de grado maximal en $\mathcal{C}_k(H_*; n)$ son los generados por los elementos de la forma

$$v = \prod_{\kappa \in K} Q_{m-i-1}^\kappa(u_{n+i})$$

para i nuevamente maximal. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 |v| &= \sum_{\kappa \in K} ((2^\kappa - 1)(m - i - 1) + 2^\kappa(n + i)) \\
 &= \sum_{\kappa \in K} (2^\kappa(m + n - 1) + i + 1 - m) \\
 &= k(m + n - 1) + \text{card}(K)(i + 1 - m) < k(n + i)
 \end{aligned}$$

dando una cota para el grado maximal. Estamos suponiendo que $k \leq r$ y de acuerdo a la hipótesis $rm < n$ esto junto con que $i < m$ nos da

$$|v| < n(k + 1).$$

Recordemos que por el Teorema de la descomposición estable de Snaith (Sección 2.2)

$$H_*C(n) \cong \bigoplus_{j \geq 1} \tilde{H}_*D_j(M, M_0; S^n)$$

y además sabemos que $D_j(M, M_0; S^n)$ es $(jn - 1)$ -conexo debido al Teorema 2.18 y de [37, Lema 18.1]. Por lo tanto $\theta(v)$ debe de estar en $H_*C_j(n)$ para algún $j < k + 1$, pues de no ser así $\theta(v)$ sería cero. Así hemos demostrado la afirmación (a).

Para demostrar (b) de acuerdo con el Teorema 2.18, $D_j(M, M_0; S^n)$ es el espacio de Thom de un haz vectorial de dimensión nj sobre el espacio base $F_k(M)/\Sigma_k$ que es una variedad de dimensión mj , luego se tiene que

$$H_*D_j(M, M_0; S^n) = 0 \quad \text{para } * > (m + n)j.$$

Esto implica que

$$H_*C_k(n) \cong \bigoplus_{j \geq k} H_*D_j(M, M_0; S^n) = 0 \quad \text{para } * > (m + n)k.$$

Adicionalmete el álgebra $\mathcal{C}_k(n)$ se anula en dimensiones $* > (m + n)k$ por construcción. De acuerdo a las hipótesis tenemos que $n > mk$, entonces $n(k + 1) > (m + n)k$, así hemos demostrado ambas afirmaciones de (b).

Consideremos el siguiente diagrama obtenido por la restricción

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(H_*; n) & \xrightarrow[\cong]{\theta} & H_*C(n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{C}_k(H_*; n) & \xrightarrow{\theta_k} & H_*C_k(n) \end{array}$$

De acuerdo la parte (a) tenemos que el mapeo θ_k esta bien definido y es un monomorfismo, así que para la parte (c) solo resta mostrar la suprayectividad de θ_k . Observemos primero lo siguiente:

Si $v \in \mathcal{C}(H_*; n)$ se tiene que $n \cdot w(v) \leq |v|$, por lo que si $|v| < n(k+1)$, entonces $v \in \mathcal{C}_k(H_*; n)$.

Procedamos ahora a demostrar la suprayectividad de θ_k . Sea $z \in H_*C_k(n)$ y $v = \theta^{-1}(z)$, si $|z| \leq n(k+1)$ por la parte (b) el resultado es trivial, así pues supongamos que $|z| < n(k+1)$ pero en este caso de acuerdo a la observación anterior $v \in \mathcal{C}_k(H_*; n)$ teniéndose lo deseado. ■

Definición 3.8 Denotaremos por $\sigma^k A$ al módulo graduado A donde los grados de los nuevos elementos $\sigma^k(a)$ aumentan por k . Al módulo graduado $\sigma^k A$ le llamaremos la k -ésima desuspensión de A .

Lema 3.9 Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales

$$t : \sigma^k \mathcal{D}_k(H_*; n) \rightarrow \mathcal{D}_k(H_*; n+1).$$

Para \mathbb{F} en general existe un isomorfismo $\sigma^{2k} \mathcal{D}_k(H_*; n) \cong \mathcal{D}_k(H_*; n+2)$.

Demostración

Una base de $\mathcal{D}_k(H_*; n)$ esta dada por los monomios

$$v = Q_{I_1}(u_{i_1}) \cdot \dots \cdot Q_{I_r}(u_{i_r}) \quad \text{con} \quad k = 2^{\|I_1\|} + \dots + 2^{\|I_r\|}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |\sigma^{2^{\|I\|}} Q_I(u_i)| &= i_1 + 2i_2 + \dots + 2^{\|I\|-1} i_{\|I\|} + 2^{\|I\|} |u_i| + 2^{\|I\|} \\ &= i_1 + 2i_2 + \dots + 2^{\|I\|-1} i_{\|I\|} + 2^{\|I\|} |u_i + 1| \\ &= |Q_I(u_{i+1})|. \end{aligned}$$

donde u_{i+1} es el generador asociado a u_i en $\mathcal{C}(H_*; n+1)$. Ahora definiendo

$$t(\sigma^k(v)) := Q_{I_1}(u_{i_1+1}) \cdot \dots \cdot Q_{I_r}(u_{i_r+1})$$

se tiene el isomorfismo deseado. ■

Finalmente demostramos el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 3.3

Por simplicidad denotaremos a $D_k(M, M_0; S^n)$ como $D_k(n)$.

Si n y k son tales que $n > km \geq 2$, entonces el isomorfismo del Lema 3.7

$$\theta_k : \mathcal{C}_k(H_*; n) \rightarrow H_* C_k(n)$$

induce un isomorfismo en

$$\bar{\theta}_k : \mathcal{D}_k(H_*; n) \rightarrow \tilde{H}_* D_k(n).$$

Recordemos que en la Sección 2.5 denotamos por η^k al haz vectorial canónico sobre $F_k(M)/\Sigma_k$ cuyo orden es n_k (el cual es finito por el Teorema 2.17) ahora bien, para cualquier $n, k \geq 1$ elegimos n' tal que

1. $n + n' > km$, y
2. n' es un múltiplo del orden del haz η^k .

El caso trivial cuando $m = k = 1$ será excluido, así pues supongamos que $km \geq 2$.

3.3. El caso $n = 1$

Por (2) sabemos que $n' = l \cdot n_k$ y de acuerdo al Corolario 2.19 tenemos los siguientes homeomorfismos

$$\begin{aligned} D_k(n + n') &\cong \Sigma^{k \cdot n_k} D_k(n + n' - n_k) \cong \Sigma^{k \cdot (2n_k)} D_k(n + n' - 2n_k) \cong \dots \\ &\cong \Sigma^{k \cdot (l \cdot n_k)} D_k(n + n' - ln_k) \\ &\cong \Sigma^{k \cdot (n')} D_k(n) \end{aligned}$$

Luego existe un isomorfismo

$$d : \sigma^{kn'} \tilde{H}_* D_k(n) \rightarrow H_* D_k(n + n').$$

Ahora bien, de (1) tenemos que $n + n'$ satisface las hipótesis del Lema 3.7, por lo que existe un isomorfismo $\bar{\theta}_k(n + n') : \mathcal{D}_k(H_*; n + n') \rightarrow \tilde{H}_* D_k(n + n')$. Con ayuda del Lema 3.9 y del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_k(H_*; n) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_k} & \tilde{H}_* D_k(n) \\ \sigma^{-kn'} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \sigma^{-kn'}(d) \\ \sigma^{-kn'} \mathcal{D}_k(H_*; n + n') & \xrightarrow[\sigma^{-kn'}(\bar{\theta}_k(n+n'))]{\cong} & \sigma^{-kn'} H_* D_k(n + n') \end{array}$$

definimos un isomorfismo

$$\tilde{\theta}_k : \mathcal{D}_k(H_*; n) \rightarrow \tilde{H}_* D_k(n)$$

concluyendo con la demostración del teorema. ■

3.3. El caso $n = 1$

En esta sección demostraremos el Teorema 3.1 para el caso $n = 1$.

Teorema 3.10 *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\theta : H_* C(M, M_0; S^1) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q} S^{m+1})^{\otimes \beta_q}.$$

Para $m + 1$ impar si $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$.

Demostración

De acuerdo al Teorema de la descomposición estable de Snaith (Sección 2.2) y el Teorema 3.3, definimos un isomorfismo θ a partir de los isomorfismos $\bar{\theta}_k$ y del dado por la descomposición estable. Aquí $\tilde{\mathcal{C}}$ significa los elementos de \mathcal{C} en grados positivos.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{C}}(H_*; 1) & \xrightarrow{\theta} & \tilde{H}_*C(M, M_0; S^1) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \bigoplus_{k \geq 1} \tilde{D}_k(H_*; 1) & \xrightarrow{\bigoplus_{k \geq 1} \bar{\theta}_k} & \bigoplus_{k \geq 1} H_*D_k(M; M_0; S^1)
 \end{array}$$

■

3.4. Caso G grupo de Lie compacto y conexo.

En esta sección mostraremos que los resultados en los Teoremas 3.1 y 3.3 pueden ser deducidos por otros medios en el caso que M sea un grupo de Lie G compacto y conexo. La idea general es usar el modelo como espacio de funciones de $C(G, S^n) \simeq \text{Map}(G, S^{n+g})$ (como en el Ejemplo 2.13) y conocer tal homología a partir de otras ya conocidas. Para ello recordemos algunos resultados sobre la homología del espacio $\text{Map}_*(X, Y)$, en el caso en que Y es una n -esfera.

Los siguientes resultados estan basados en [22] en donde pueden consultarse las demostraciones. Iniciamos por recordar la notación relevante.

Para cualquier espacio X definimos

$$d(X) \leq r \text{ si } H^q(X; \mathbb{Z}) = 0 \text{ para todo } q > r$$

$$b(X) \geq s \text{ si } H_q(X; \mathbb{Z}) = 0 \text{ para todo } q < s$$

3.4. Caso G grupo de Lie compacto y conexo.

Definimos $d_p(X)$ y $b_p(X)$ similarmente pero usando homología y cohomología con coeficientes en \mathbb{F}_p . Definimos la longitud de X y la longitud módulo p de X por

$$l(X) := d(X) - b(X) + 1 \quad \text{y} \quad l_p(X) := d_p(X) - b_p(X) + 1.$$

Con la notación anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11 *Sea $n \geq 2$ y sea X un CW-complejo conexo de tipo finito tal que $d(X) \leq n - 1$ y $d_p(X) + l_p(X) \leq n - 1$. Si $p = 0, 2$ o n es impar, entonces*

$$H_*(\text{Map}_*(X, S^n); \mathbb{F}_p) \cong \bigotimes_{i=1}^{n-1} H_*((\Omega^i S^n)^{\beta_i(X)}; \mathbb{F}_p)$$

como espacios vectoriales y el mapeo

$$\phi : \text{Map}_*(X, S^n) \rightarrow \text{Map}_*(X, QS^n)$$

que induce el mapeo de estabilización, es un monomorfismo en homología módulo p .

En el caso en que $p \neq 2$ el isomorfismo es como álgebras. ■

Corolario 3.12 *Sea G es un grupo de Lie compacto y conexo de dimensión g y tal que $d(G) \leq n - 1$ y $d_p(G) + l_p(G) \leq n - 1$. Si $p = 0, 2$ o $n + g$ es impar, entonces*

$$H_*(\text{Map}_*(G, S^{n+g}); \mathbb{F}_p) \cong \bigotimes_{q=0}^{g-1} H_*((\Omega^{g-q} S^{n+g})^{\beta_q(G)}; \mathbb{F}_p)$$

como espacios vectoriales y el mapeo

$$\phi : \text{Map}_*(G, S^{n+g}) \rightarrow \text{Map}_*(G, QS^{n+g})$$

es un monomorfismo en homología módulo p . ■

Con los resultados anteriores demostraremos el Teorema 3.1, en el caso especial en que G es un grupo de Lie compacto y conexo.

Teorema 3.13 *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo de dimensión g y sea n tal que $d(G) \leq n - 1$ y $d_p(G) + l_p(G) \leq n - 1$. Si $p = 0, 2$ o $n + g$ es impar, entonces*

$$H_*C(G; S^n) \cong \bigotimes_{q=0}^g H_*(\Omega^{g-q} S^{n+g})^{\otimes \beta_q(G)}$$

Demostración

De acuerdo al Ejemplo 2.13 el espacio $C(G; S^n)$ es una equivalencia homotópica a $Map(G; S^{n+g})$. Consideremos el diagrama de las fibraciones de evaluación.

$$\begin{array}{ccc}
 Map_0(G; S^{n+g}) & \longrightarrow & Map_0(G; QS^{n+g}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Map(G; S^{n+g}) & \longrightarrow & Map(G; QS^{n+g}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S^{n+g} & \xrightarrow{E} & QS^{n+g}
 \end{array}$$

Donde E es el mapeo de estabilización. Evidentemente la fibración del lado derecho es principal y tiene una sección; por tanto el espacio total se descompone como $QS^{n+g} \times Map_0(G; QS^{n+g})$. Por otro lado, de acuerdo al corolario anterior el mapeo superior es un monomorfismo en homología y la homología de la fibra del mapeo izquierdo es conocida. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
 H_*(Map(G, S^{n+g})) &\cong H_*(Map_*(G, S^{n+g})) \otimes H_*(S^{n+g}) \\
 &\cong \bigotimes_{q=0}^{g-1} H_*(\Omega^{g-q} S^{n+g})^{\otimes \beta_q(G)} \otimes H_*(\Omega^{g-g} S^{n+g})^{\otimes \beta_g(G)} \\
 &\cong \bigotimes_{q=0}^g H_*(\Omega^{g-q} S^{n+g})^{\otimes \beta_q(G)}
 \end{aligned}$$

teniéndose lo deseado. ■

El Teorema 3.3 se deduce de manera análoga.

3.4. Caso G grupo de Lie compacto y conexo.

Capítulo 4

La homología de $F_k(M)/\Sigma_k$

El propósito de este capítulo es obtener la homología con coeficientes en un campo $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ de los espacios de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$. En vista del capítulo anterior, el subespacio generado por los elementos de peso k del álgebra $\mathcal{C}(H_*; n)$ es isomorfo a la homología del espacio $D_k(M, M_0; S^n)$ para cualquier n si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ y para \mathbb{F} en general se requiere que $m + n$ sea impar, en particular se cumple cuando $M_0 = \emptyset$. A su vez, en la Sección 2.5 vimos que $D_k(M; S^n)$ es el espacio de Thom del haz vectorial canónico sobre el espacio $F_k(M)/\Sigma_k$, a partir de esto y con el isomorfismo de Thom obtendremos $H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}_2)$. En el caso general de \mathbb{F} presentaremos resultados análogos a los vistos en este trabajo, sin embargo los resultados solamente son válidos cuando m es un número impar; cuando m es par se obtiene la homología con coeficientes en la representación signo $\mathbb{F}(-1)$.

Se presentan también algunos ejemplos explícitos de las homología de los espacios $F_k(M)/\Sigma_k$ en el caso en que M es una superficie cerrada orientable y no orientable; así como también para M el complemento de un nudo en \mathbb{R}^3 . Como mencionamos antes, en un campo de característica cero, el resultado principal solamente se aplica cuando M es una variedad de dimensión impar, por lo que finalizaremos recordaremos

un resultado sobre la cohomología racional de $F_k(M)/\Sigma_k$ cuando M es una superficie cerrada y orientable con un pinchazo [7].

4.1. Caso $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$

El siguiente resultado describe a la homología sobre \mathbb{F}_2 de los espacios de configuraciones desordenadas, a partir de la homología del espacio $D_k(M, S^n)$.

Teorema 4.1 *Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ y M es una variedad compacta, entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\bar{\theta}_k : H_*F_k(M)/\Sigma_k \cong \sigma^{-kn} \mathcal{D}_k(H_*(M); n)$$

para toda n .

Demostración

De acuerdo al isomorfismo de Thom aplicado a la la suma de Whitney n -veces del haz canónico $\eta^k : F_k(M) \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \rightarrow F_k(M)/\Sigma_k$, tenemos que

$$\tilde{H}_{*+n \cdot k}(Th(n\eta^k)) \cong H_*(F_k(M)/\Sigma_k),$$

mientras que por el Teorema 2.18

$$\sigma^{-kn} \tilde{H}_*(D_k(M; S^n)) \cong H_*(F_k(M)/\Sigma_k)$$

y finalmente por el Teorema 3.3 se obtiene el isomorfismo deseado:

$$\bar{\theta}_k : H_*F_k(M)/\Sigma_k \cong \sigma^{-kn} \mathcal{D}_k(H_*(M); n).$$

■

En las siguientes secciones determinaremos los rangos de la homología módulo 2 de los espacios de configuraciones desordenadas de algunos ejemplos específicos, para esto hacemos la siguiente observación.

Observación 4.2 De acuerdo al Lema 3.9, una base para el espacio vectorial graduado $\mathcal{D}_k(H_*(M); n)$ está conformada por los monomios

$$v = Q_{I_1}(u_{i_1}) \cdot \dots \cdot Q_{I_r}(u_{i_r}) \quad \text{con} \quad k = 2^{\|I_1\|} + \dots + 2^{\|I_r\|}.$$

Luego por el Teorema 3.3 y el anterior tenemos una base de la homología de $F_k(M)/\Sigma_k$.

4.2. Caso \mathbb{F} en general

Los resultados que hemos dado hasta el momento son válidos para el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. En esta sección trataremos el caso general de $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$.

A lo largo de esta sección X será un espacio compactamente generado débilmente Hausdorff y con punto base no degenerado. Escribiremos $\mathbb{F}(-1)$ para el Σ_k -módulo \mathbb{F} , donde la acción de Σ_k esta dada por la representación signo, es decir, $\pi(1) = (-1)^{\text{sign}(\pi)}$ para $\pi \in \Sigma_k$ y definimos

$$H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}(-1)) := H_*(S_*(F_k(M)) \otimes_{\Sigma_k} \mathbb{F}(-1)).$$

donde $S_*(X)$ denota el complejo de cadenas singulares de X .

Los siguientes resultados se encuentra basados en [10] y el resultado principal de la sección es el siguiente

Teorema 4.3 (i) Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ o m es impar, entonces para $n \gg 0$ y $0 < q < mk$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} H_q(F_k(M)/\Sigma_k) &\cong H_{q+2nk}C(M; S^{2n}) \\ &\cong \bigotimes_{q=0}^m (H_{q+2nk}(\Omega^{m-q}S^{m+2n}))^{\otimes \beta_q} \end{aligned}$$

(ii) Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ o m es par, entonces para $n \gg 0$ y $0 < q < mk$ existe un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} H_q(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}(-1)) &\cong H_{q+(2n+1)k}C(M; S^{2n+1}) \\ &\cong \bigotimes_{q=0}^m (H_{q+(2n+1)k}(\Omega^{m-q}S^{m+2n+1}))^{\otimes \beta_q} \end{aligned}$$

4.2. Caso \mathbb{F} en general

Antes de proceder con la demostración, introduciremos más notación y veremos algunos resultados con la finalidad de demostrar el teorema anterior.

Sea V un espacio vectorial graduado sobre \mathbb{F} con V concentrado en grado al menos uno. Escribamos a

$$V^{\otimes k} = V \otimes_{\mathbb{F}} \dots \otimes_{\mathbb{F}} V$$

como un Σ_k -módulo, donde Σ_k actúa por permutación de coordenadas con la convención de signo usual y así definimos

$$H_*(F_k(M)/\Sigma_k; V^{\otimes k}) := H_*(S_*(F_k(M)) \otimes_{\Sigma_k} V^{\otimes k}).$$

Observación 4.4 *De las definiciones anteriores, tenemos los siguientes casos importantes:*

(i) *Si $V = \mathbb{F}$ está concentrado en un grado par digamos $2n$, entonces $V^{\otimes k} = \mathbb{F}$ está concentrado en grado $2nk$ y Σ_k actúa trivialmente. Más aún se tienen los siguientes isomorfismos:*

$$\begin{aligned} H_*(F_k(M)/\Sigma_k) &= H_*(S_*(F_k(M)/\Sigma_k) \otimes \mathbb{F}) \\ &\cong H_*(S_*(F_k(M)) \otimes_{\Sigma_k} \mathbb{F}) \\ &\cong H_{*+2nk}(S_*(F_k(M)) \otimes_{\Sigma_k} V^{\otimes k}) \\ &= \sigma^{-2nk} H_*(F_k(M)/\Sigma_k; V^{\otimes k}). \end{aligned}$$

(ii) *Si $V = \mathbb{F}$ está concentrado en un grado impar digamos $2n+1$, entonces $V^{\otimes k} = \mathbb{F}$ está concentrado en grado $(2n+1)k$ y Σ_k actúa por la representación signo; i.e. $V^{\otimes k} = \mathbb{F}(-1)$ en grado $(2n+1)k$. Como en el ejemplo anterior tenemos el siguiente isomorfismo:*

$$H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}(-1)) \cong \sigma^{-(2n+1)k} H_*(F_k(M)/\Sigma_k; V^{\otimes k}).$$

(iii) *De los ejemplos anteriores concluimos con los siguientes casos especiales:*

$$\begin{aligned} H_*(F_k(M)/\Sigma_k) &\cong \sigma^{-2k} H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \bar{H}_*(S^2)^{\otimes k}) \\ H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}(-1)) &\cong \sigma^{-k} H_*(F_k(M)/\Sigma_k; \bar{H}_*(S^1)^{\otimes k}). \end{aligned}$$

Como en el Teorema 2.18, la siguiente proposición nos relacionará nuevamente los espacios de configuraciones desordenadas $F_k(M)/\Sigma_k$ con el espacio $D_k(M; X)$.

Proposición 4.5 *Para $k \geq 1$, existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$H_*(F_k(M)/\Sigma_k; (\bar{H}_*X)^{\otimes k}) \cong \bar{H}_*D_k(M; X).$$

Demostración

La demostración se encuentra en [43] simplemente la recordaremos. Sabemos que existe una cofibración [19]

$$F_k(M) \times_{\Sigma_k} FatW_k(X) \rightarrow F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^k \rightarrow D_k(M; S^n).$$

Ahora, por el Teorema de Eilenberg-Zilber, existen los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} \bar{H}_*D_k(M; X) &\cong H_*(S_*(F_k(M)) \otimes_{\Sigma_k} S_*(X^k, FatW_k(X))) \\ &\cong H_*(S_*(F_k(M)) \otimes_{\Sigma_k} (S_*(X, *))^{\otimes k}) \end{aligned}$$

Notemos que $S_*(F_k(M))$ es una Σ_k -cadena compleja libre sobre \mathbb{F} y que además como cadenas complejas sobre \mathbb{F} , tenemos que existe un isomorfismo en homología $g : \bar{H}_*(X) \simeq S_*(X, *)$ dado por mandar una clase (eligiendo una base) a un ciclo que lo represente, donde la cadena compleja $\bar{H}_*(X)$ está dotada con diferenciales triviales. Así pues tenemos lo deseado. ■

La siguiente proposición se puede comparar con el Lema 3.9 y a la periodicidad 2.19 de los espacios $D_k(M; S^n)$.

Proposición 4.6 *Para $k \geq 1$ y $n \geq 1$, existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\bar{H}_*D_k(M; X) \cong \sigma^{-2nk} \bar{H}_*D_k(M; \Sigma^{2n}X).$$

Demostración

La demostración se sigue de la proposición anterior y del hecho que existe un isomorfismo como Σ_k -módulos

$$(H_*X)^{\otimes k} \rightarrow (H_{*+2}\Sigma^2X)^{\otimes k} \quad \blacksquare$$

4.2. Caso \mathbb{F} en general

Las proposiciones anteriores y la Observación 4.4 nos dice que la homología del espacio $F_k(M)/\Sigma_k$ ya sea con la representación signo o la usual, está estrechamente relacionada con la homología de los $D_k(M; S^n)$, entonces nuevamente el cálculo de la homología de $F_k(M)/\Sigma_k$, es equivalente a calcular la homología de los espacios $D_k(M; S^n)$; mientras que por el Teorema de la descomposición estable 2.7 tal homología es parte de $H_*C(M; S^n)$; veremos que para n suficientemente grande, dicha homología se encuentra “separada”, permitiéndonos así encontrar $H_*F_k(M)/\Sigma_k$.

Lema 4.7 *Para $r \geq 1$ se tiene*

1. $D_k(M; S^r)$ es $(kr - 1)$ -conexo.
2. $H_j(D_k(M; S^r)) = 0$ si $j > kr$.
3. Si n es tal que $2n > km - r$, entonces existen isomorfismos

$$H_s D_k(M; S^r) \cong H_{s+2nk} C(M; S^{2n+r})$$

cuando $H_s D_k(M; S^r)$ es no cero.

Demostración

La demostración de (1) y (2) se siguen del Teorema 2.18 y de [37, Lema 18.1]. Procedamos a demostrar (3), notemos que por la Proposición 4.6

$$H_s D_k(M; S^r) \cong H_{s+2nk} D_k(M; S^{2n+r})$$

para $s \geq 1$ y de acuerdo a (1) y (2) basta considerar a $kr \leq s \leq k(m+r)$.

Por la descomposición estable de Snaith 2.7 tenemos definidos los siguientes homomorfismos θ_k^s

$$\begin{array}{ccc} H_{s+2nk} D_k(M; S^{2n+r}) & \xrightarrow{\theta_k^s} & H_{s+2nk} C(M; S^{2n+r}) \\ & \searrow i_k & \cong \downarrow \theta \\ & & \bigoplus_{j \geq 1} H_{s+2nk} D_j(M; S^{2n+r}) \end{array}$$

Claramente θ_k^s son monomorfismos. Para probar la suprayectividad notemos que por la hipótesis se tiene que $(k-1)m < km < 2n+r$ y así las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} (k-1)(m+2n+r) &= (k-1)m + (k-1)(2n+r) < k(2n+r) \\ k(m+2n+r) &= km + k(2n+r) < (k+1)(2n+r) \end{aligned}$$

por lo que

$$(k-1)(m+2n+r) < s+2nk < (k+1)(2n+r).$$

Luego por (1) y (2) si $j \neq k$, entonces

$$H_{s+2nk}D_j(M; S^{2n+r}) = 0,$$

por lo que si $v \in H_{s+2nk}C(M; S^{2n+r})$ es no cero, entonces

$$w := \theta^{-1}(v) \in H_{s+2nk}D_k(M; S^{2n+r}),$$

teniéndose lo deseado. ■

Demostración del Teorema 4.3

Por la Observación 4.4 sabemos que

$$H_q(F_k(M)/\Sigma_k) \cong H_{q+2k}(F_k(M)/\Sigma_k; H_*(S^2)^{\otimes k}),$$

mientras que por la Proposición 4.5

$$H_{q+2k}(F_k(M)/\Sigma_k; H_*(S^2)^{\otimes k}) \cong H_{q+2k}D_k(M; S^2)$$

y por el lema anterior, para $n \gg 0$

$$H_{q+2k}D_k(M; S^2) \cong H_{q+2nk}C(M; S^{2n}).$$

Notemos que $m+2n$ es impar, así que por el Teorema 3.1

$$H_{q+2nk}C(M, M_0; S^{2n}) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_{q+2nk}(\Omega^{m-q}S^{m+2n})^{\otimes \beta_q},$$

4.3. Homología de configuraciones sobre superficies cerradas

Por lo tanto

$$H_q(F_k(M)/\Sigma_k) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_{q+2nk}(\Omega^{m-q} S^{m+2n})^{\otimes \beta_q}.$$

La parte (ii) del Teorema se demuestra de manera análoga recordando que por la Observación 4.4

$$H_q(F_k(M)/\Sigma_k; \mathbb{F}(-1)) \cong H_{q+k}(F_k(M)/\Sigma_k; H_*(S^1)^{\otimes k})$$

y teniendo en cuenta que en este caso $m + 2n + 1$ es impar. ■

4.3. Homología de configuraciones sobre superficies cerradas

Consideremos el caso en que M es una superficie. De acuerdo al Teorema 3.1 la homología módulo 2 de los espacios de configuraciones etiquetadas $C(M; S^n)$ esta dada por el producto tensorial

$$H_*(\Omega^2 S^{n+2})^{\otimes \beta_0} \otimes H_*(\Omega S^{n+2})^{\otimes \beta_1} \otimes H_*(S^{n+2})^{\otimes \beta_2}$$

donde β_0 , β_1 y β_2 son los números de Betti de M . De acuerdo al Ejemplo 1.30, tenemos que

$$H_*C(M; S^n) \cong \mathbb{F}_2[y_0, y_1, \dots]^{\otimes \beta_0} \otimes \mathbb{F}_2[x]^{\otimes \beta_1} \otimes (\mathbb{F}_2[u]/u^2)^{\otimes \beta_2},$$

donde y_0 , x y u son las clases fundamentales en grados n , $n+1$ y $n+2$ respectivamente y $y_j = Q_1^j y_0$ y notemos que $|y_j| = (2^j - 1) + 2^j n$.

Los pesos de todos los generadores están dados por:

$$\begin{aligned} \omega(u) &= 1, \\ \omega(x^i) &= i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \\ \omega(y_j) &= 2^j \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Superficies orientables. Denotemos por M_g a una superficie cerrada, orientable de género g . En este caso

$$\beta_q(M_g) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0, 2 \\ 2g & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

por lo anterior tenemos que:

$$H_*C(M_g; S^n) \cong \mathbb{F}_2[y_0, y_1, \dots] \otimes \mathbb{F}_2[x_1, x_2, \dots, x_{2g}] \otimes \mathbb{F}_2[u]/u^2$$

donde los grados y pesos de los generadores son:

$$\begin{aligned} |u| &= n + 2, & \omega(u) &= 1, \\ |x_i| &= n + 1, & \omega(x_i) &= 1, \\ |y_i| &= (2^j - 1) + 2^j n, & \omega(y_j) &= 2^j. \end{aligned}$$

Ahora por la Observación 4.2, una base de $\tilde{H}_*D_k(M_g; S^n)$ consiste de todos los monomios de la forma

$$f = u^e \cdot x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{2g}^{a_{2g}} \cdot y_1^{b_1} \cdot \dots \cdot y_r^{b_r}$$

para algún $r \geq 0$, $e = 0, 1$ y $a_i, b_j \geq 0$, tales que

$$\omega(f) = e + \sum_{i=1}^{2g} a_i + \sum_{j=0}^r 2^j b_j = k.$$

Por ejemplo, $\tilde{H}_q D_2(M_g; S^n)$ es determinado por la siguiente tabla.

q	Base	Rango
$2n$	y_0^2	1
$2n + 1$	$x_1 y_0, \dots, x_{2g} y_0, y_1$	$2g + 1$
$2n + 2$	$u y_0, x_1^2, \dots, x_i x_j, \dots, x_{2g}^2$	$2g^2 + g + 1$
$2n + 3$	$u x_1, \dots, u x_{2g}$	$2g$

4.3. Homología de configuraciones sobre superficies cerradas

Así por el Teorema 4.1

$$H_q F_2(M_g)/\Sigma_2 = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } q = 0 \\ (\mathbb{F}_2)^{2g+1} & \text{si } q = 1 \\ (\mathbb{F}_2)^{2g^2+g+1} & \text{si } q = 2 \\ (\mathbb{F}_2)^{2g} & \text{si } q = 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En la siguiente tabla se muestran los rangos de $\tilde{H}_q D_3(M_g; S^n)$ y de $H_{q-3n} F_3(M_g)/\Sigma_3$.

$q =$	Base	Rango
$3n$	y_0^3	1
$3n + 1$	$y_0 y_1, x_i y_0^2 \quad (1 \leq i \leq 2g)$	$2g + 1$
$3n + 2$	$u y_0^2, x_i y_1, x_i x_j y_0 \quad (1 \leq i \leq j \leq 2g)$	$2g^2 + 3g + 1$
$3n + 3$	$u y_1, u x_i y_0, x_i x_j x_k \quad (1 \leq i \leq j \leq k \leq 2g)$	$\frac{4}{3}g^3 + 2g^2 + \frac{8}{3}g + 1$
$3n + 4$	$u x_i x_j \quad (1 \leq i \leq j \leq 2g)$	$2g^2 + g$

Finalmente la última tabla muestra el rango de $H_q F_k(S^2)/\Sigma_k$ para $k \leq 10$.

q	$k = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	
3			1	2	2	3	3	3	3	3	
4					1	2	2	3	3	3	
5					1	1	2	3	3	4	
6							1	2	3	4	
7								1	2	3	
8									1	2	
9										1	1

Superficies no orientables

Denotemos por N_g a una superficie cerrada no orientable de género g . En este caso

$$\beta_q(N_g) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0, 2 \\ g & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

En este caso el Teorema 3.1 no da el siguiente isomorfismo

$$H_*C(N_g; S^n) \cong \mathbb{F}_2[y_0, y_1, \dots] \otimes \mathbb{F}_2[x_1, x_2, \dots, x_g] \otimes \mathbb{F}_2[u]/u^2$$

y una base de $\tilde{H}_*D_k(M_g; S^n)$ consiste de todos los monomios de la forma

$$h = u^e \cdot x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{2g}^{a_{2g}} \cdot y_1^{b_1} \cdot \dots \cdot y_r^{b_r}$$

para algún $r \geq 0$, $e = 0, 1$ y $a_i, b_j \geq 0$, tales que

$$\omega(h) = e + \sum_{i=1}^{2g} a_i + \sum_{j=0}^r 2^j b_j = k.$$

Por ejemplo, $\tilde{H}_qD_2(N_g; S^n)$ es determinado por la siguiente tabla.

q	Base	Rango
$2n$	y_0^2	1
$2n + 1$	$x_1y_0, \dots, x_gy_0, y_1$	$g + 1$
$2n + 2$	$uy_0, x_1^2, \dots, x_ix_j, \dots, x_g^2$	$\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}g + 1$
$2n + 3$	ux_1, \dots, ux_g	g

Luego por el Teorema 4.1

$$H_qF_2(N_g)/\Sigma_2 = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } q = 0 \\ (\mathbb{F}_2)^{g+1} & \text{si } q = 1 \\ (\mathbb{F}_2)^{\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}g + 1} & \text{si } q = 2 \\ (\mathbb{F}_2)^g & \text{si } q = 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4.3. Homología de configuraciones sobre superficies cerradas

En la siguiente tabla se muestran los rangos de $\tilde{H}_q D_3(N_g; S^n)$ y de $H_{q-3n} F_3(N_g)/\Sigma_3$.

$q =$	Base	Rango
$3n$	y_0^3	1
$3n + 1$	$y_0 y_1, x_i y_0^2 \quad (1 \leq i \leq g)$	$g + 1$
$3n + 2$	$u y_0^2, x_i y_1, x_i x_j y_0 \quad (1 \leq i \leq j \leq g)$	$\frac{1}{2}g^2 + \frac{3}{2}g + 1$
$3n + 3$	$u y_1, u x_i y_0, x_i x_j x_k \quad (1 \leq i \leq j \leq k \leq g)$	$\frac{1}{6}g^3 + \frac{1}{2}g^2 + \frac{4}{3}g + 1$
$3n + 4$	$u x_i x_j \quad (1 \leq i \leq j \leq g)$	$\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}g$

Finalmente la última tabla muestra el rango de $H_q F_k(\mathbb{R}P^2)/\Sigma_k$ para $k \leq 10$.

q	$k = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
3		1	3	5	6	7	7	7	7	7
4			1	3	6	8	9	10	10	10
5				1	4	7	10	12	13	14
6					1	4	8	12	15	17
7						1	4	9	14	18
8							1	4	10	16
9								1	5	11
10									1	5
11										1

4.4. Homología de configuraciones sobre complementos de nudos

Sea M el complemento de un nudo en \mathbb{R}^3 . Tomemos nuevamente a $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Ahora los números de Betti son los siguientes:

$$\beta_q(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 1 & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De acuerdo al Teorema 3.1 y el Ejemplo 1.30 se tiene que

$$\begin{aligned} H_*C(M; S^n) &\cong H_*(\Omega S^{n+3}) \otimes H_*(\Omega^2 S^{n+3}) \otimes H_*(\Omega^3 S^{n+3}) \\ &\cong \mathbb{F}_2[x] \otimes \mathbb{F}_2[y_i \mid i \geq 0] \otimes \mathbb{F}_2[z_{ij} \mid i, j \geq 0] \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} |x| &= n + 2 & \omega(x) &= 1 \\ |y_i| &= (2^i - 1) + 2^i(n + 1), & \omega(y_i) &= 2^i \\ |z_{ij}| &= 2^{i+j}(n + 2) - 2^i - 1, & \omega(z_{ij}) &= 2^{i+j} \end{aligned}$$

Procediendo como antes se obtiene la siguiente tabla para $H_q F_2(M)/\Sigma_k$, y el rango de $H_q F_k(M)/\Sigma_k$ para $k = 2, 3, 4$.

q	Rango		
	$k = 2$	3	4
0	1	1	1
1	2	2	2
2	3	4	5
3	2	5	8
4	1	4	9
5		2	8
6		1	6
7			3
8			1

Por ejemplo, una base para $H_*F_2(M)/\Sigma_2$ es:

$q =$	Base
0	z_{00}^2
1	y_0, z_{00}, z_{10}
2	xz_{00}, y_0^2, z_{01}
3	xy_0, y_1
4	x^2

4.5. Cohomología racional de espacios de configuraciones de superficies

En las secciones anteriores, estudiamos la homología de los espacios de configuraciones de una variedad M para los campos $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ o un campo de característica cero, sin embargo para una variedad de dimensión par los métodos descritos sólo funcionan cuando $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. En esta sección recordaremos los resultados obtenidos en [7] y [10] relativos a la homología racional de configuraciones en una superficie de Riemann

de género g con un agujero $\bar{M}_g := M_g - \{m_0\}$. La idea es esencialmente la misma que se ha usado en este trabajo; describir la cohomología de $F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k$ como parte de la cohomología de un espacio mucho mas grande $C(\bar{M}_g, S^{2n})$. Para ello usaremos el modelo como espacio de funciones de $C(\bar{M}_g, S^{2n})$, a saber, $Map_*(M_g, S^{2n})$ y con esto obtener una buena descripción de su tipo de homotopía. Al examinar la sucesión espectral de Serre de cierta fibración obtendremos la cohomología de $C(\bar{M}_g, S^{2n})$ y con ello la cohomología de $F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k$.

Para una superficie de Riemman de género g , existe un mapeo

$$w_g : S^1 \rightarrow \bigvee_{2g} S^1$$

con cofibra M_g y w_g es definido por mandar el generador de $\pi_1(S^1, *)$ a

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2g-1}, x_{2g}]$$

donde los x_i corren sobre una elección de generadores para $\pi_1\left(\bigvee_{2g} S^1, *\right)$. Escribimos

$$ad : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$$

para el conmutador $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$. Sea

$$\mu_g : (\Omega X)^g \rightarrow \Omega X$$

la multiplicación de lazos tomando un orden fijo. El siguiente lema se obtiene por las definiciones anteriores.

Lema 4.8 *Existe un diagrama conmutativo salvo homotopía*

$$\begin{array}{ccc} [(\Omega X)^2]^g & \xrightarrow{(ad)^g} & (\Omega X)^g \\ \downarrow = & & \downarrow \mu_g \\ Map_*\left(\bigvee_{2g} S^1, X\right) & \xrightarrow{w_g^*} & \Omega X \end{array}$$

donde w_g^* es el "hom-dual", es decir, $w_g^*(\gamma) = \gamma \circ w_g$. ■

4.5. Cohomología racional de espacios de configuraciones de superficies

Por otro lado la cofibración $S^1 \xrightarrow{w_g} \bigvee_{2g} S^1 \longrightarrow M_g$ induce la fibración

$$Map_*(M_g, X) \longrightarrow Map_*(\bigvee_{2g} S^1, X) \cong (\Omega X)^{2g} \xrightarrow{w_g^*} Map_*(S^1, X) = \Omega X$$

para cualquier espacio X , luego tenemos la siguiente fibración

$$\Omega^2 X \longrightarrow Map_*(M_g, X) \longrightarrow (\Omega X)^{2g}$$

Esta ultima fibración, nos servirá para describir la cohomología de $Map_*(M_g, X)$. A partir de aquí nos concentraremos en el caso en que $X = S^{2n+2}$ y en lo que resta de la sección H^* siempre denotará la cohomología racional.

Recordemos que existe un isomorfismo de álgebras de Hopf

$$H^*(\Omega S^{2n+2})^{2g} \cong H^*(S^{n+2} \times \Omega S^{4n+3}) \cong E[x_1, \dots, x_{2g}] \otimes P[y_1 \dots y_{2g}]$$

con $|x_i| = 2n + 1$ y $|y_i| = 4n + 2$ mientras que

$$H^*(\Omega^2 S^{2n+2}) \cong H^*(\Omega S^{2n+1} \times \Omega^2 S^{4n+3}) = H^*(\Omega S^{2n+1} \times S^{4n+1}) \cong P[u] \otimes E[v]$$

con $|u| = 2n$ y $|v| = 4n + 1$, donde $P[\]$ y $E[\]$ denotan el álgebra polinomial y exterior sobre \mathbb{Q} respectivamente.

El siguiente lema determina todos los diferenciales en la sucesión espectral de Serre de la fibración $\Omega^2 S^{2n+2} \rightarrow Map_*(M_g, S^{2n+2}) \rightarrow \Omega S^{2n+2}$.

Lema 4.9 *Los únicos diferenciales de la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración $\Omega^2 S^{2n+2} \rightarrow Map_*(M_g, S^{2n+2}) \rightarrow \Omega S^{2n+2}$, son los siguientes:*

$$d_{2n+1}(u) = 0$$

$$d_{4n+2}(v) = 2 \sum_{i=1}^g x_{2i-1} x_{2i}.$$

Demostración

Usando el Lema 4.8 en cohomología se tiene que

$$(w_g^*)^*(u) = 0 \quad \text{y}$$

$$(w_g^*)^*(v) = 2 \sum_{i=1}^g x_{2i-1} x_{2i}.$$

Por otro lado tenemos el siguiente morfismo de fibraciones:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2 S^{2n+2} & \xrightarrow{id} & \Omega^2 S^{2n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Map}_*(M_g, S^{2n+2}) & \longrightarrow & P\Omega S^{2n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Omega S^{2n+2})^{2g} & \xrightarrow{w_g^*} & \Omega S^{2n+2} \end{array}$$

De la naturalidad se sigue que $d_{2n+1}(u) = 0$ y $d_{4n+2}(v) = 2 \sum_{i=1}^g x_{2i-1} x_{2i}$. ■

Finalmente demostramos el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.10 *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$H^*(C(\bar{M}_g, S^{2n})) \cong P[u, y_1, \dots, y_{2g}] \otimes H_*(E[v, x_1, \dots, x_{2g}], d)$$

con $|u| = 2n$, $|y_i| = 4n + 2$, $|v| = 4n + 1$, $|x_i| = 2n + 1$ y el diferencial d esta dado por $d(v) = 2 \sum_{i=1}^g x_{2i-1} x_{2i}$.

Demostración

De acuerdo al Ejemplo 2.14 se tiene la siguiente equivalencia homotópica

$$C(\bar{M}_g, S^{2n}) \simeq \text{Map}_*(M_g, S^{2n+2}).$$

Por otro lado, el lema anterior implica que

$$E_{4n+3} = E_\infty = H^*C(\bar{M}_g, S^{2n}),$$

4.5. Cohomología racional de espacios de configuraciones de superficies

más aún, E_{4n+3} es un producto tensorial del álgebra polinomial $P[u, y_1, \dots, y_{2g}]$ y el modulo de homología $H_*(E, d)$ del álgebra exterior $E = E[v, x_1, \dots, x_{2g}]$ con diferencial d , lo cual demuestra el teorema. \blacksquare

Denotamos por $\mathcal{C}(g, n) := P[u, y_1, \dots, y_{2g}] \otimes H_*(E[v, x_1, \dots, x_{2g}], d)$. Definimos una función por pesos en los generadores de $\mathcal{C}(g, n)$ de la siguiente forma:

$$w(v) = w(x_i) = 1$$

$$w(u) = w(y_i) = 2$$

y la extendemos linealmente a todos los monomios. Esto hace de $\mathcal{C}(g, n)$ un espacio vectorial filtrado. Denotemos a esta filtración como $F_k \mathcal{C}(g, n)$. Sabemos que el espacio $C(\bar{M}_g, S^{2n})$ está filtrado por longitud de configuraciones y que ésta a su vez define una filtración $H^* F_k C(\bar{M}_g, S^{2n})$ de $H^* C(\bar{M}_g, S^{2n})$. El siguiente resultado nos dice que ambas filtraciones coinciden vía el isomorfismo del teorema anterior, la demostración es análoga a la del Lema 3.7 y por tanto la omitimos.

Teorema 4.11 *Como espacios vectoriales*

$$H^* F_k C(\bar{M}_g; S^{2n}) \cong F_k \mathcal{C}(g, n).$$

Más aún $H^(D_k(\bar{M}_g; S^{2n}))$ es isomorfo al subespacio vectorial de $\mathcal{C}(g, n)$ generado por todos los monomios de peso exactamente k al que denotaremos por $\mathcal{D}_k(g, n)$.* \blacksquare

Consideremos el haz vectorial canónico sobre $F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k$

$$\eta^k(\bar{M}_g) : \mathbb{R}^k \hookrightarrow F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k \times_{\Sigma_k} \mathbb{R}^k \rightarrow F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k.$$

De acuerdo al Teorema 2.17 este haz tiene orden finito, más aún, su orden es un número par (ver [18]) y lo denotaremos por $2n_k$. Por el Teorema 2.19 se tiene que

$$D_k(\bar{M}_g; S^{2n}) \cong \Sigma^{2n_k \cdot k} (F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k)_+,$$

con lo que finalmente obtenemos la descripción de la cohomología racional de $F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k$:

Teorema 4.12 *Existe un isomorfismo como espacios vectoriales graduados*

$$H^*(F_k(\bar{M}_g)/\Sigma_k) \cong \sigma^{-k \cdot 2n_k} \mathcal{D}_k(g, n_k).$$

■

Bibliografía

- [1] M. AGUILAR, S. GITLER Y C. PRIETO: *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag New York, (2002).
- [2] S. ARAKI Y T. KUDO: *Topology of H-spaces and H-squaring operations*, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A., (1956), 180-214.
- [3] V. I. ARNOLD: *On some topological invariants of algebraic functions*, Tran. Moscow Math. Soc. **21** (1970), 30-52.
- [4] M. BENDERSKY Y S. GITLER: *The cohomology of certain function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), 423-440.
- [5] J. BOARDMAN Y R. VOGT: *Homotopy-everything H-spaces*, Bull. A. M. S. **74** (1968) 1117-1122.
- [6] C.-F. BÖDIGHEIMER: *Stable splittings of mapping spaces*, Algebraic Topology. Proc. Seattle (1985). Springer Lecture Notes un Mathematics **1286**. 174-187
- [7] C.-F. BÖDIGHEIMER Y F. COHEN: *Rational cohomology of configuration spaces of surfaces*, Algebraic Topology and Transformations Groups (Göttingen 1987). Springer Lecture Notes in Mathematics **1361**, (1988) 7-13.
- [8] C.-F. BÖDIGHEIMER, F. COHEN Y L. TAYLOR: *On the homology of configuration spaces*, Topology, **28** (1989), 501-512
- [9] C.-F. BÖDIGHEIMER Y I. MADSEN: *Homotopy of mapping spaces and their stable spitting*, Quart. J. Math. Oxford (2), **39** (1988), 401-409.

- [10] C.-F. BÖDIGHEIMER, F. COHEN Y J. MILGRAM: *Truncated symmetric products and configuration spaces*, Math. Z. , **214** (1993), 179-216.
- [11] R. BOTT Y H. SAMELSON: *On the Pontrjagin product spaces in spaces of paths*, Comment Math. Helv., **27** (1953), 320-337.
- [12] W. BROWDER: *Homology operations and loop spaces*, Ill. J. Math., **4** (1960), 347-357.
- [13] R. F. BROWN Y J. H. WITHE: *Homology and Morse theory of third configuration spaces*, Indiana Univ. Math J. **30** (1981), 501-512.
- [14] F. COHEN: *Cohomology of braid spaces*, Bull. Amer. Math Soc. **79** (1973), 763-766.
- [15] F. COHEN: *On configuration spaces, their homology, and Lie algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, **100** (1995), 19-42
- [16] F. COHEN: *Homology of $\Omega^{n+1}S^{n+1}X$ y $C_{n+1}X$, $n > 0$* , Bull. Amer. Math Soc. **79** (1973), 1236-1241.
- [17] F. COHEN: *The unstable decomposition of Ω^2S^2X and its applications*, Math. Z. **182** (1983), 553-568.
- [18] F. COHEN, R. COHEN, K. KUHN Y J. NEISENDORFER: *Bundles over configuration spaces*, Pac. J. Math. **104** (1983), 47-54.
- [19] F. COHEN, T. LADA Y P. MAY: *The homology of iterated loop spaces*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **533** (1976).
- [20] F. COHEN Y L. TAYLOR: *Computations of Gelfand-Fuks cohomology, the cohomology of function spaces and the cohomology of configuration spaces* Geometric Applications of Homotopy Theory I (Evanston 1977), Springer Lecture Notes in Mathematics **657**, 106-143.
- [21] F. COHEN Y L. TAYLOR: *Configuration spaces: Applications to Gelfand-Fuks cohomology*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 134-136.

-
- [22] F. COHEN Y L. TAYLOR: *Homology of function spaces*, Contemp. Math. American Mathematical Society **19** (1983), 39-50.
- [23] A. DOLD Y R. THOM: *Quasifaserunge und unendliche symmetrische Producte*, Ann. Math. **67** (1958), 239-281.
- [24] E. DYER AND R. LASHOF: *Homology of iterated loop spaces*, Amer. J. Math., (1962), 35-88.
- [25] E. FADELL Y L. NEUWIRTH: *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), 11-118.
- [26] D. FUCKS: *Cohomologies of the group $\cos \text{ mod } 2$* , Funct. Anal. Appl. **4** (1970). 143-151.
- [27] A. HATCHER: *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [28] P. J. HILTON.: *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London Math. Soc., **30** (1955), 154-172.
- [29] P. LÖFFLER Y J. MILGRAM: *The structure of deleted symmetric products*, in Braids, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, Providence RI (1988) **78**, 415-424.
- [30] P. MAY: *The Geometry of iterated Loop spaces*, Springer Lecture Notes in Mathematics **271** (1972).
- [31] P. MAY: *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lecture notes in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL (1999).
- [32] J. MCCLEARY: *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol 58, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [33] D. MCDUFF: *Configuration spaces*, Proc. (Athens. Georgia. 1975), Springer Lectures Notes in Mathematics **575**, 88-95.

- [34] D. MCDUFF: *Configuration spaces of positive and negative particles*, *Topology* **14** (1975), 91-107.
- [35] J. MILGRAM: *Group representations and the Adams spectral sequence*, *Pac. J. Math.* **41** (1972), 157-182.
- [36] J. W. MILNOR.: *On the construction FK*, In *Algebraic topology—a student's guide*, by Adams, John Frank, pages pp. 118–136, London Math Soc. Lecture Note Series, No. 4. Cambridge Univ. Press, London, (1956)
- [37] J. W. MILNOR AND J. D. STASHEFF: *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974, *Annals of Mathematics Studies*, No. 76.
- [38] G. NISHIDA: *Cohomology operations in iterated loop spaces*, *Proc. Japan Acad.*, **44** (1968), 104-109.
- [39] I. ORTIGOZA: *Haces vectoriales sobre espacios de configuraciones*, Tesis de Maestría, CINVESTAV del IPN, 2016.
- [40] G. SEGAL: *Configuration spaces and iterated loop spaces*, *Invent. Math.* **41** (1973), 213-221.
- [41] V. SNAITH: *A stable descomposition of $\Omega^n S^n X$* , *J. London Math. Soc.* **7** (1974), 577-583.
- [42] F. V. VAINSHTEIN: *Cohomology of braid groups*, *Funct. Anal. Appl.* **12** (1978), 72-73.
- [43] J. WU: *On the homology of configuration spaces $C((M, M_0) \times \mathbb{R}^n; X)$* , *Math. Z.*, **22** (1998), 235-248.