Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

Problemas de paro óptimo y control impulsivo en procesos de Markov-Feller

TESIS QUE PRESENTA

Fidel Vásquez Rojas

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias

CON ESPECIALIDAD EN

Matemáticas

Director de tesis: **Dr. Héctor Jasso Fuentes**

Ciudad de México Diciembre de 2017

Agradecimientos

Agradezco a mi supervisor Dr. Héctor Jasso Fuentes, a mis sinodales Dr. Onésimo Hernández Lerma y Dr. Eduardo Santillán Zerón. También agradezco al personal administrativo del departamento de matemáticas, en especial a Roxana. De igual manera le doy gracias a mi familia, compañeros y amigos por su apoyo.

Agradezco por último al Conacyt por la beca otorgada para la realización del presente trabajo.

Abstract

A Markov-Feller process can be studied from the point of view of the semigroup of operators theory, by a strongly continuous contraction semigroup associated to the process. In the optimal control problems contained in this work we study, basically, the optimization of a cost function and we exhibit an optimal control. We concentrate, particularly, on the optimal stopping and impulsive control problems with dynamics given by Markov-Feller processes, by dynamic programming we arrive to inequalities of variational type for optimal stopping problems and quasi-variational type for impulsive control problems.

Resumen

Un proceso de Markov-Feller se puede estudiar desde el punto de vista de la teoría de semigrupos de operadores, mediante un semigrupo de contracción fuertemente continuo asociado al proceso. En los problemas de control óptimo contenidos en este trabajo se estudia, en pocas palabras, la optimización de una función de costo y se exhibe un control óptimo. Estudiamos en particular problemas de paro óptimo y de control impulsivo para dinámicas dadas por procesos de Markov-Feller, que mediante programación dinámica equivalen a la resolución de desigualdades variacionales para el caso de paros óptimos y quasi-variacionales para control impulsivo.

Índice general

Agradecimientos **3**

Abstract **4**

Resumen **5**

1. Introducción **1**

2. Teoría de semigrupos de operadores **4**

2.1. Funciones en espacios de Banach 4

2.2. Operadores en espacios de Banach 10

2.3. Semigrupos de operadores 13

2.3.1. El generador infinitesimal 14

2.3.2. La resolvente 17

2.3.3. Teorema de Hille-Yosida 23

3. Procesos de Markov-Feller **25**

3.1. Semigrupos de Feller 25

3.2. Procesos de Markov-Feller 28

4. Control de Tiempos de Paro **32**

4.1. Problemas de tiempo de paro óptimo 32

4.2. Problema penalizado 33

4.3. Caracterización del costo óptimo 41

4.4. Ejemplo: Tiempo óptimo de compra/venta de activos. 46

4.4.1. Variante 1: Problemas de comienzo y parada óptimos 47

5. Control impulsivo **49**

5.1. Control impulsivo 49

5.2. Ecuaciones cuasi-variacionales 51

5.3. Caracterización del costo óptimo 59

5.4. Ejemplos 66

5.4.1. Problema de gestión de materias primas 66

5.4.2. Problema de mantenimiento y control de calidad. 67

Bibliography **68**

Capítulo 1

Introducción

Un problema de control óptimo puede ser visto como un problema de optimización a través del tiempo dentro del cual se desea optimizar (maximizar o minimizar) un funcional dado, sobre un conjunto de reglas de decision también conocidas como controles o políticas de control. Todo problema de control óptimo está sujeto a ciertas restricciones, dentro de las que destaca la dinámica asociada a un sistema dinámico, la cual puede ser a tiempo discreto o a tiempo continuo y además puede ser determinística o estocástica, con espacio de estados numerable o no numerable, etc. Es un hecho que las técnicas que se utilizan para garantizar (y más aún para calcular de manera práctica) una política óptima, resultan ser muy variadas y esto se debe principalmente al tipo de dinámica con que estemos lidiando y al tipo de funcional que estemos optimizando.

Dentro de los problemas de control óptimo se encuentran los problemas de tiempo de paro y de control impulsivo. El primero de ellos consiste en decidir en que tiempo parar la evolución de un sistema en base a la optimización de una función de costo o ganancia; mientras que en el segundo, el controlador desea encontrar una sucesión de tiempos y otra de “impulsos” o “discontinuidades” aplicados al estado del sistema, ambos con la finalidad de optimizar, de nueva cuenta, cierto costo o una ganancia. Ambos problemas surgen de manera natural en diversas aplicaciones como en las finanzas, en la extracción de recursos naturales, en problemas de producción, en problemas de manufactura, etc. En las Secciones 4 y 5 mencionaremos de manera ilustrativa algunas de estas aplicaciones.

En esta tesis nos enfocaremos al estudio de modelos de tiempo de paro y de control impulsivo. En específico, nuestra finalidad es dar condiciones suficientes a los datos del modelo con la finalidad de poder garantizar la existencia y mostrar algunas caracterizaciones de políticas de control óptima y del costo óptimo. Para tal fin, consideraremos una dinámica general de tipo Markov-Feller y un funcional a optimizar (en ambos problemas) de tipo descontado con horizonte de planeación infinito. Nuestro estudio se basará en la técnica de programación dinámica, la cual consiste en relacionar nuestros problemas de control con un problema de encontrar soluciones de desigualdades o ecuaciones funcionales. Para el tipo de problemas que se abordan en este trabajo, el tipo de desigualdades que se tratan son de tipo variacional y cuasi-variacional. De hecho, como se verá en las secciones siguientes, las soluciones de estas desigualdades serán vistas como funciones límite de otras funciones que son más fáciles de tratar.

Los problemas de tiempos de paro óptimo se han estudiado considerablemente en la literatura. Por ejemplo, véase Bensoussan y Lions [6, 5] en el caso de procesos de difusión no degenerados, Menaldi [10] para el caso degenerado, Oksendal y Sulem [12] en procesos de difusión tipo Lévy y en casos especiales de procesos generales de procesos de Markov-Feller, ver Robin [14], Peskir y Shiryayev [13], y Stettner [15].

Por otro lado, los problemas de control impulsivo fueron introducidos por Bensoussan y Lions (ver por ejemplo [6]) y posteriormente la teoría sobre estos modelos se ha extendido considerablemente. Por ejemplo en difusiones con saltos tipo Lévy Oksendal y Sulem [12] y Menaldi [11] hicieron un estudio detallado en este tipo de dinámicas, mientras Robin [14] y Stettner [15] estudiaron un tipo especial de procesos de Markov-Feller.

El contenido de la tesis está distribuido en 4 capítulos. A saber, en el Capítulo 2 se estudia la teoría de semigrupos de contracción de tipo continuo, abarcando al generador infinitesimal y a la resolvente. Se prueban algunas de sus propiedades y se enuncia el Teorema de Hille-Yosida. Todos estos temas antes mencionados son escenciales en el estudio del control óptimo de tiempos de paro y del control impulsivo analizados en capítulos subsecuentes. Por otra parrte, en el Capítulo 3 presentamos al proceso de Markov-Feller que modelará las dinámicas para los problemas de control bajo estudio y se da la relación con los semigrupos de contracción de tipo continuo. En el Capítulo 4 estudiamos el problema de tiempo de paro óptimo. Para ello, se da una caracterización del costo óptimo mediante la solución maximal de una desigualdad variacional que surge de la ecuación de programación dinámica. La solución de esta última se verá como una función límite de soluciones de ciertos problemas denominados 'penalizados'. Adicionalmente, se exhibe un control óptimo mediante la también llamada región de continuación y se prueba la desigualdad de Lewy-Stampacchia. También se muestran algunas aplicaciones que ilustran los resultados. El Capítulo 5 se refiere al estudio de los problemas de control impulsivo. Se describen las trayectorias controladas y se define también el problema de control. Para obtener los resultados de optimalidad, recurrimos a problemas de tiempo de paro óptimo auxiliares. En este caso la ecuación de programación dinámica produce un problema de solución maximal de una desigualdad cuasi-variacional, cuya solución está dada como el límite de soluciones de ecuaciones variacionales asociadas a los problemas de paro óptimo auxiliares antes mencionados. Finalmente, se exhibe un control impulsivo óptimo mediante otro conjunto de continuidad y se muestran algunas aplicaciones que ilustran los resultados.

Capítulo 2

Teoría de semigrupos de operadores

2.1. Funciones en espacios de Banach

Sea E un espacio de Banach con norma denotada por $\|\cdot\|$ y I un intervalo en $\mathbb{R}$.

Dada una función $u : I \to E$, decimos que tal función es *continua en el punto* t_0 de I si

$$\lim_{t \to t_0} \|u(t) - u(t_0)\| = 0.$$

Decimos que u es *continua en* I, si es continua en cada punto t de I. Denotamos por $C(I, E)$ al espacio vectorial de funciones continuas con dominio I e imagen en E.

Acerca de la continuidad de funciones en espacios de Banach, tenemos los siguientes resultados análogos al caso de la continuidad de funciones escalares.

Proposición 2.1.1. *(a) Sea* $u \in C(I, E)$*, entonces la función* $t \mapsto \|u(t)\|$ *es continua en*

$\mathbb{R}$.

(b) Sea $u \in C(I, E)$, si $f \in E^*$, donde E^* es el espacio dual de E, entonces $t \mapsto f(u(t))$ es continua.

(c) Sea I un intervalo compacto, entonces toda función u en $C(I, E)$ es uniformemente continua.

(d) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(I, E)$ que converge uniformemente a una función u, es decir,
$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} \|u_n(t) - u(t)\| = 0$. *Entonces $u \in C(I, E)$.*

Demostración. (a) Sea $t \in \mathbb{R}$. Consideremos una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que $t_n \to t$, cuando $n \to \infty$. Por la desigualdad triangular de la norma se tiene que $\big|\|u(t_n)\| - \|u(t)\|\big| \leq \|u(t_n) - u(t)\|$, haciendo tender n a ∞, se concluye que que $\lim_{n\to\infty} \|u(t_n)\| = \|u(t)\|$.

(b) La función $f(u(t))$ es una composición de funciones continuas y por lo tanto es continua.

(c) Sea $u \in C(I, E)$ y $\varepsilon > 0$. Como I es compacto y u es continua, tomemos una cubierta finita de N bolas abiertas con centros $t_1, \ldots, t_N \in I$ y radios $\delta_1, \ldots, \delta_N \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$u\big(B(t_n, \delta_n)\big) \subset B\big(u(t_n), \varepsilon/2\big), \forall n \in \{1, \ldots, N\}. \tag{2.1}$$

Consideremos $\delta = \min\{\delta_n/2 : n = 1, \ldots, N\}$. Sean $t, s \in I$ que satisfacen $|t - s| < \delta$, entonces $t \in B(t_n, \delta_n/2)$ para algún $n \in \{1, \ldots, N\}$, además $|s - t_n| \leq |s - t| + |t - t_n| < \delta + \delta_n/2 \leq \delta_n$. Tenemos pues que $t, s \in B(t_n, \delta_n)$, esto junto con (2.1) implican que $u(t), u(s) \in B\big(u(t_n), \varepsilon/2\big)$, y por lo tanto $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$. Luego u es uniformemente continua.

(d) Sea $\varepsilon > 0$ y $t \in I$. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que para todo $n \geq N$, $\sup_{s\in I} \|u_n(s) - u(s)\| < \varepsilon/3$. Además tomemos $\delta > 0$ tal que $|t - s| < \delta$ implique $\|u_n(t) - u_n(s)\| < \varepsilon/3$. De lo anterior si $|t - s| < \delta$ entonces $\|u(t) - u(s)\| \leq \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u_n(s)\| + \|u_n(s) - u(s)\| < \varepsilon$. Por lo tanto u es continua.

□

Sea u una función en $C(I, E)$ que satisface

$$\int_I \|u(t)\|\, dt < \infty, \tag{2.2}$$

entonces, se define la integral de Riemann $\int_I u(t)dt$ en E, tal y como en el caso escalar y diremos que u es *integrable* en I. Por la desigualdad triangular de la norma tenemos que

$$\left\| \int_I u(t)dt \right\| \leq \int_I \|u(t)\|\, dt.$$

Las siguientes propiedades tienen que ver con la integrabilidad en espacios de Banach, las cuales son análogas al caso de integrabilidad de funciones escalares:

Proposición 2.1.2. *(a) Sea I un intervalo compacto. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C(I, E)$ que converge uniformemente en I a una función u. Entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y u son integrables y se cumple*

$$\int_I u(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I u_n(t)\, \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

(b) Sea $u \in C(I, E)$ y t_0 un punto interior de I, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} u(t)\, \mathrm{d}t = u(t_0). \tag{2.4}$$

Demostración. (a) La función u es continua por ser límite uniforme de funciones continuas y sabemos que toda función con dominio compacto es acotada, entonces las funciones

u, u_n, con $n = 1, 2, \ldots$, son acotadas. Además estas funciones son integrables, en efecto, $\int_I \|u(t)\| \,\mathrm{d}t \leq \int_I M \,\mathrm{d}t \leq M\, long(I)$, donde $long(I)$ es la longitud del intervalo I y M es una cota de u, por lo tanto u es integrable. El mismo argumento sirve para verificar la integrabilidad de las funciones u_n.

Ahora probemos que es válido (2.3). Sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t \in I} \|u(t) - u_n(t)\| < \varepsilon$$

, para todo $n \geq N$, entonces

$$\left\| \int_I \big(u(t) - u_n(t)\big) \,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_I \|u(t) - u_n(t)\| \,\mathrm{d}t \leq \varepsilon\, long(I),$$

para todo $n \geq N$. Lo anterior implica (2.3).

(b) Ya que $u \in C(I, E)$, dado $\varepsilon > 0$ consideramos $\delta > 0$ tal que $|t_0 - s| < \delta$ implique $\|u(t_0) - u(s)\| < \varepsilon$. Sea $0 < h < \delta$, entonces si $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, se tiene que $|t_0 - t| \leq h < \delta$, por lo tanto

$$\left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} u(t) \,\mathrm{d}t - u(t_0) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \|u(t) - u(t_0)\| \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \varepsilon \,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Luego $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} u(t) \,\mathrm{d}t = u(t_0)$ en la norma de E. Si $h < 0$ tal que $0 \leq t_0 + h$, se puede verificar lo mismo con algunos ajustes en el argumento anterior. Por lo tanto se tiene el resultado.

$\square$

Sea I un intervalo abierto y sea $u \colon I \to E$. Se dice que u es *diferenciable en un punto* t_0 de I, si el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}.$$

existe en E. En caso de existir el límite anterior lo denotamos por $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_0)$ o por $u'(t_0)$. Decimos que u es *diferenciable en* I, si es diferenciable en cada punto t_0 de I.

Respecto a la diferenciabilidad tenemos los siguientes resultados, los cuales son una extensión del Teorema Fundamental del Cálculo de funciones escalares para funciones en espacios de Banach.

Proposición 2.1.3. *(a) Toda función $u : I \to E$ diferenciable es continua.*

(b) Si $u \in C(I, E)$, entonces para cada $c \in I$, la función $t \mapsto \int_c^t u(s)\,\mathrm{d}s$ es diferenciable en I y además se cumple la igualdad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_c^t u(s)\,\mathrm{d}s = u(t). \tag{2.5}$$

(c) Si u es una función diferenciable en I y $u' \in C(I, E)$, entonces para cualquier par de elementos a, b en I se tiene que

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

Demostración. (a) Sea $\varepsilon_0 > 0$ y $t \in I$. Tomemos $\delta_0 > 0$ tal que $|t - s| < \delta_0$ implica

$$\left\| \frac{u(t) - u(s)}{t - s} - u'(t) \right\| < \varepsilon_0. \tag{2.7}$$

Tomemos ahora otro $\varepsilon > 0$ y consideremos $\delta = \text{mín}\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + \|u'(t)\|}\} > 0$. Si $|t - s| < \delta \leq \delta_0$ entonces se cumple (2.7) y esto implica

$$\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon_0|t - s| + \left\|u'(t)\right\| |t - s| \leq \varepsilon_0\delta + \left\|u'(t)\right\| \delta \leq \varepsilon,$$

por lo tanto u es continua.

(b) Por (2.4) tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_c^{t+h} u(s)\,\mathrm{d}s-\int_c^{t} u(s)\,\mathrm{d}s\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)\,\mathrm{d}s=u(t).$$

Por lo tanto $t\mapsto\int_c^t u(s)\,\mathrm{d}s$ es diferenciable y además es válida la fórmula (2.5).

(c) Sea $F(s)=\int_a^s u'(t)\,\mathrm{d}t$ entonces por el inciso anterior se tiene que $F'(s)=u'(s)$. Sea $G:I\to E$ otra función tal que $G'(s)=F'(s)=u'(s)$.

Dado $L\in E^*$, definimos la función $g_L:I\to\mathbb{R}$ como $g_L(s)\coloneqq L(F(s)-G(s))$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{g_L(s+h)-g_L(s)}{h}&=\frac{L(F(s+h)-G(s+h))-L(F(s)-G(s))}{h}\\&=L\left(\frac{F(s+h)-G(s+h)-F(s)+G(s)}{h}\right).\end{aligned}$$

Como L es continuo, F y G son diferenciables en s, entonces existe el límite de la expresión de arriba cuando $h\to 0$ por lo que g_L es diferenciable. Además se tiene que $g_L'(s)=L(F'(s)-G'(s))=L(0)=0$. Como g_L es una función real valuada con dominio real deducimos que es una función constante para cada $L\in E^*$. Dado que E^* separa puntos de E debido al teorema de Hanh-Banach [veáse [7], Coroloario 6.8, p. 79] se sigue que $F-G$ es una función constante, de lo contrario existen $s,t\in I$ y un funcional $L\in E^*$ tal que $g_L(s)=L(F(s)-G(s))\neq L(F(t)-G(t))=g_L(t)$. Luego existe $c\in E$ tal que $F(s)=G(s)+c$, pero $0=F(a)=G(a)+c$ por lo que $c=-G(a)$ y luego $F(b)=G(b)-G(a)$. En particular con $G=u$ obtenemos el resultado deseado.

$\square$

2.2. Operadores en espacios de Banach

Consideremos al espacio de Banach E.

Definición 2.2.1. Sea D un subespacio lineal de E. Un operador lineal $T : D \to E$ es *acotado* si existe una constante $c \geq 0$ tal que $\|Tf\| \leq c\,\|f\|$ para todo $f \in D$.

Cuando T es *no acotado*, vamos a considerar a su dominio D como un subespacio denso en E.

Por otra parte, sea $L(E)$ el espacio de operadores lineales acotados de E en E. Resulta ser que $L(E)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|^*$, dada por

$$\|T\|^* := \sup_{f \in E\setminus\{0\}} \|Tf\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\|, \quad \text{para todo} \quad T \in L(E).$$

Teorema 2.2.2. *Sea $u \in C(I, E)$ integrable, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) Si $T : E \to E$ un operador lineal acotado, entonces la función $t \mapsto Tu(t)$ es integrable en I. Además se tiene que

$$T \int_I u(t)\,\mathrm{d}t = \int_I T(u(t))\,\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

(b) Sea $f \in E^*$, entonces $t \mapsto f(u(t))$ es integrable y se cumple

$$f \int_I u(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(u(t))\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. Probaremos solo el inciso (a) ya que el inciso (b) se demuestra de manera similar.

Dado $T : E \to E$ un operador acotado, tenemos que $\|T(u(t))\| \leq C\,\|u(t)\|$, para todo $t \in I$, con $C > 0$ constante. Luego $\int_I \|T(u(t))\| \, \mathrm{d}t \leq \int_I C \, \|u(t)\| \, \mathrm{d}t < \infty$, por lo tanto $T(u)$ es integrable.

Por otro lado supongamos que I es acotado y con extremos $-\infty < a < b < \infty$. Para cualquier partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de I y cualquier función $u : I \to E$, denotamos por $S(u, P)$ a la suma $\sum_{k=1}^n u(t_k)(t_k - t_{k-1})$; además, como $S(u, P) \in E$, tenemos

$$T\big(S(u,P)\big) = T\big(\sum_{k=1}^n u(t_k)(t_k - t_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^n T(u(t_k))(t_k - t_{k-1}) = S(T(u), P). \qquad (2.9)$$

Definimos $\Delta(P) \coloneqq \text{máx}\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\}$. Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de I tal que $\Delta(P_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por (2.9) y por el hecho de que T es continuo, por ser acotado, obtenemos

$$\int_I T(u(t)) \, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} S(T(u), P_n) = \lim_{n\to\infty} T\big(S(u, P_n)\big) = T\big(\lim_{n\to\infty} S(u, P_n)\big) = T \int_I u(t) \, \mathrm{d}t.$$

La igualdad anterior se cumple para cualquier intervalo acotado I. Consideremos ahora a I con extremos $-\infty < a < b = \infty$. Entonces

$$\int_a^t T(u(t)) \, \mathrm{d}t = T \int_a^t u(t) \, \mathrm{d}t,$$

para todo $a \leq t < b$. Tomando en cuenta la integrabilidad de $T(u)$ y de u sobre I, y la continuidad de T, al hacer tender $t \to \infty$ obtenemos (2.9) con $I = [a, \infty)$. Los casos restantes para a y b se justifican de manera similar. $\square$

Sea I un intervalo y sea $\Phi : I \to L(E)$. Decimos que Φ es *continua en un punto* t_0 de I si

$$\lim_{t\to t_0} \|\Phi(t)f - \Phi(t_0)f\| = 0, \quad \text{para todo} \quad f \in E. \qquad (2.10)$$

Si Φ es continua en todo punto de I, diremos que es continua en I.

Una función $\Phi : I \to L(E)$ se dice *diferenciable en un punto* t_0 de I si existe una función $\Psi : I \to L(E)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{\Phi(t_0+h)-\Phi(t_0)}{h} f - \Psi(t_0) f \right\| = 0,$$

para todo f en E.

Denotaremos al operador $\Psi(t_0)$ por $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t_0)$ ó $\Phi'(t_0)$. Si Φ es diferenciable en todo punto t_0 de I, diremos que es diferenciable en I.

El siguiente teorema nos dice que la fórmula de Leibniz se puede generalizar para las funciones de operadores diferenciables. La demostración es análoga al caso de funciones escalares así que se omitirá.

Teorema 2.2.3. *(a) Sean $u : I \to E$ y $\Phi : I \to L(E)$ funciones continuas (resp. diferenciables), entonces la función $t \mapsto \Phi(t)u(t)$ es también continua (resp. diferenciable) en I. En el caso diferenciable se satisface que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi(t)u(t)) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t)u(t) + \Phi(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t).$$

(b) Sean $\Phi, \Psi : I \to L(E)$ diferenciables en I, entonces la función $t \mapsto \Psi(t)\Phi(t)$ es diferenciable en I, y tenemos la fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi(t)\Phi(t)) = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}(t)\Phi(t) + \Psi(t)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(t).$$

Dado un operador $A : D(A) \subset E \to E$, su gráfica está dada por

$$Gr(A) = \{(f, Af) \in E \times E : f \in D(A)\}.$$

Definición 2.2.4. Sea $A : D(A) \subset E \to E$ un operador lineal con $D(A)$ denso en E. Decimos que A es un operador cerrado si su $Gr(A)$ es un conjunto cerrado.

2.3. Semigrupos de operadores

Sea E un espacio de Banach.

Definición 2.3.1. Una familia de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tales que $T(t) \in L(E)$, $t \geq 0$, es un *semigrupo de contracciones* si satisface las siguientes condiciones:

(a) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

(b) $\|T(t)f\| \leq \|f\|$, para todo $f \in E$ y $t \geq 0$.

Decimos además que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones *continuo* si

(c) $\lim_{t\downarrow 0} T(t)f = f$, para todo $f \in E$.

En adelante, en algunas ocasiones, nos vamos a referir a la familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ simplemente como T.

Las condiciones (a), (b) y (c) son llamadas propiedad de semigrupo, de contracción y de continuidad, respectivamente. Para un semigrupo de contracción continuo T, tenemos que $\|T(0)f - f\| \leq \|T(0)(f - T(t)f)\| + \|T(t)f - f\| \leq \|f - T(t)f\| + \|T(t)f - f\|$ para todo $t \geq 0$, de lo cual se sigue, al hacer tender t a cero, que $T(0)f = f$, para todo $f \in E$ y por lo tanto $T(0) = \mathtt{I}$, donde $\mathtt{I}$ es el operador identidad en $L(E)$. Además para $f \in E$ y $t \geq s \geq 0$ tenemos que $\|T(t)f - T(s)f\| = \|T(s)(T(t-s)f - f)\| \leq \|T(t-s)f - f\| \to 0$ cuando $s \uparrow t$ (o, $t - s \downarrow 0$), luego la función $t \mapsto T(t)f$ es continua por la izquierda, con el mismo argumento se puede verificar que tal función es continua por la derecha también y por lo tanto es continua.

2.3.1. El generador infinitesimal

Definición 2.3.2. Definimos al *generador infinitesimal* de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ como el operador denotado por $\mathcal{A}$ y con dominio $D(\mathcal{A}) := \{f \in E : \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)f-f}{h} \in E\}$, dado por

$$\mathcal{A}f := \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)f - f}{h}, \quad \text{para todo} \quad f \in D(\mathcal{A}). \tag{2.11}$$

De la definición anterior vemos que el generador infinitesimal es lineal, pero resulta que no necesariamente es acotado. Sin embargo tiene otra propiedad más débil, el generador es un operador cerrado densamente definido, como veremos más adelante.

En la siguiente proposición se muestra que un semigrupo se relaciona con su generador mediante una ecuación diferencial, además esta ecuación será de ayuda para demostrar algunos resultados posteriores.

Teorema 2.3.3. *Sea $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) Si $f \in D(\mathcal{A})$ entonces $T(t)f \in D(\mathcal{A})$ para todo $t > 0$, la función $t \mapsto T(t)f$ es diferenciable en el intervalo $(0,\infty)$ y además se satisface

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T(t)f) = \mathcal{A}T(t)f = T(t)\mathcal{A}f, \tag{2.12}$$

para todo $t > 0$.

(b) El generador $\mathcal{A}$ es un operador lineal cerrado y su dominio $D(\mathcal{A})$ es denso en E.

Demostración. (a) Primero probaremos que el semigrupo deja invariante al dominio del generador, es decir, que para todo $f \in D(\mathcal{A})$ y $t \geq 0$ se tiene que $T(t)f \in D(\mathcal{A})$. Sean pues $f \in E$ y $t > 0$, por la propiedad de semigrupo tenemos que

$$\frac{T(s)T(t)f - T(t)f}{s} = T(t)\frac{T(s)f - f}{s},$$

dado que T es de contracción, tenemos

$$\left\| T(t)\frac{T(s)f - f}{s} - T(t)\mathcal{A}f \right\| = \left\| T(t)\left(\frac{T(s)f - f}{s} - \mathcal{A}f\right) \right\| \leq \left\| \frac{T(s)f - f}{s} - \mathcal{A}f \right\|,$$

y como $\lim_{s\downarrow 0} \frac{T(s)f-f}{s} = \mathcal{A}f$, entonces $\lim_{s\downarrow 0} T(t)\frac{T(s)f-f}{s} = T(t)\mathcal{A}f$. De lo anterior se concluye que $T(t)f \in D(\mathcal{A})$ y además $\mathcal{A}T(t)f = T(t)\mathcal{A}f$, para todo $f \in E$ y $t \geq 0$.

Ahora probemos que $t \mapsto T(t)f$ es diferenciable en $(0, \infty)$. Ya vimos de la parte anterior que $t \mapsto T(t)f$ es diferenciable por la derecha en $(0, \infty)$ y que $\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}T(t)f = \mathcal{A}T(t)f = T(t)\mathcal{A}f$, mostremos pues que también es diferenciable por la izquierda; sean $t > s > 0$, tenemos que

$$\frac{T(t-s)f - T(t)f}{-s} - T(t)\mathcal{A}f = T(t-s)\left(\frac{T(s)f - f}{s} - T(s)\mathcal{A}f\right),$$

como T es de contracción, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| T(t-s)\left(\frac{T(s)f - f}{s} - T(s)\mathcal{A}f\right) \right\| &\leq \left\| \frac{T(s)f - f}{s} - T(s)\mathcal{A}f \right\| \\ &\leq \left\| \frac{T(s)f - f}{s} - \mathcal{A}f \right\| + \left\| \mathcal{A}f - T(s)\mathcal{A}f \right\|. \end{aligned}$$

Los términos del lado derecho en la última desigualdad tienden a cero cuando s tiende a cero por la derecha porque $f \in D(\mathcal{A})$ y el semigrupo es continuo, por lo tanto

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{T(t-s)f - T(t)f}{-s} = T(t)\mathcal{A}f,$$

lo cual demuestra que $t \mapsto T(t)f$ es diferenciable por la izquierda en $(0, \infty)$. Además se tiene que $\frac{\mathrm{d}^-}{\mathrm{d}t}T(t)f = \mathcal{A}T(t)f = T(t)\mathcal{A}f$.

Por lo anterior $T(t)f$ es diferenciable en $(0,\infty)$ y se satisface la relación (2.12).

(b) Demostremos primero que $\mathcal{A}$ es cerrado. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D(\mathcal{A})$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}f_n = g$, con f y g en E. Probaremos entonces que $f \in D(\mathcal{A})$ y que $\mathcal{A}f = g$.

Usando el Teorema fundamental del cálculo (2.6) y la ecuación (2.12), obtenemos

$$T(t)f_n - f_n = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T(s)f_n)\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)\mathcal{A}f_n\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.13}$$

Por otro lado, tenemos que $\lim_{n\to\infty}(T(t)f_n - f_n) = T(t)f - f$, por ser $T(t)$ acotado (continuo) para todo $t \geq 0$. Además

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t T(s)\mathcal{A}f_n\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)g\,\mathrm{d}s\right\| = \left\|\int_0^t T(s)(\mathcal{A}f_n - g)\,\mathrm{d}s\right\| &\leq \int_0^t \|T(s)(\mathcal{A}f_n - g)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leq t\,\|\mathcal{A}f_n - g\|, \quad \forall\, t \geq 0,\end{aligned}$$

pero por hipótesis tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}f_n - g\| = 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)\mathcal{A}f_n\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Luego, haciendo tender $n \to \infty$ en (2.13) llegamos a que

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)g\,\mathrm{d}s,$$

más aún, ya que $s \mapsto T(s)f$ es continua tenemos por (2.4) que

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)f - f}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)g\,\mathrm{d}s = T(0)g = g,$$

lo cual nos dice que $f \in D(\mathcal{A})$ y que $\mathcal{A}f = g$. Por lo tanto el generador es cerrado.

Ahora demostremos que $D(\mathcal{A})$ es denso en E. Para este fin, considere $f \in E$, y para cada $\delta > 0$, defina

$$f_\delta := \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)f\,\mathrm{d}s. \tag{2.14}$$

Sabemos que $\lim_{\delta\to 0} f_\delta = f$, por lo tanto, la prueba se reduce a demostrar que $f_\delta \in D(\mathcal{A})$.

En efecto, usando (2.14) y (2.8), para cada $0 < h < \delta$ tenemos

$$T(h)f_\delta = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(h)T(s)f\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(h+s)f\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\delta}\int_h^{\delta+h} T(s)f\,\mathrm{d}s,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{T(h)f_\delta - f_\delta}{h} &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{h}\int_h^{\delta+h} T(s)f\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\delta T(s)f\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{h}\int_\delta^{\delta+h} T(s)f\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)f\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

pero sabemos que $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_\delta^{\delta+h} T(s)f\,\mathrm{d}s = T(\delta)f$, y que $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)f\,\mathrm{d}s = f$, por lo tanto

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)f_\delta - f_\delta}{h} = \frac{1}{\delta}(T(\delta)f - f), \quad \text{en} \quad E. \tag{2.15}$$

Lo cual implica que para cada $\delta > 0$, f_δ pertenece al dominio $D(\mathcal{A})$ del generador, luego $D(\mathcal{A})$ es denso en E.

□

2.3.2. La resolvente

Definición 2.3.4. Una *resolvente de contracciones* es una familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ tales que $R_\alpha \in L(E)$, $\alpha > 0$, con las siguientes propiedades:

(a) $R_\alpha - R_\beta = (\beta - \alpha)R_\alpha R_\beta$, para todo $\alpha, \beta > 0$.

(b) $\|\alpha R_\alpha f\| \leq \|f\|$, para todo $f \in E$ y $\alpha > 0$.

Decimos además que la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ es regular si

(c) $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f = f$, para todo $f \in E$.

La relación en la condición (a) es conocida como la *ecuación resolvente* y en particular nos dice que $R_\beta = R_\alpha(\mathtt{I} - (\beta - \alpha)R_\beta)$ y luego $R_\beta(E) \subset R_\alpha(E)$ y por simetría $R_\alpha(E) \subset R_\beta(E)$, es decir, que la imagen $R_\alpha(E)$ es independiente de $\alpha > 0$. Notemos además que la propiedad de contracción (inciso (b)) la adquieren los operadores αR_α. La propiedad de regularidad implica que $R_\alpha(E)$ es denso en E, pues todo elemento $f \in E$ es límite de elementos de la forma $\alpha R_\alpha f \in R_\alpha(E)$.

Veremos en la siguiente proposición que una resolvente de contracciones restringida a su imagen es regular. Y además que la cerradura de la imagen es justamente el subconjunto de E donde la resolvente es regular.

Proposición 2.3.5. *Sea $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ una resolvente de contracciones y denotemos por D a su imagen. Entonces se cumple:*

(a) Para todo $f \in D$ se tiene que $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f = f$.

(b) Si $F = \{f \in E : \lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f = f\}$ entonces $\bar{D} = F$.

Demostración. (a) Sea $f \in D$, entonces $f = R_\beta g$, para algún $g \in E$ y $\beta > 0$. Luego, se tiene

$$\alpha R_\alpha f = \alpha R_\alpha R_\beta g = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(R_\beta g - R_\alpha g) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} f - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} R_\alpha g. \tag{2.16}$$

Pero, cuando $\alpha \to \infty$, se tiene que $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} f \to f$, y por la propiedad de contracción de la resolvente tenemos $\left\| \frac{\alpha}{\alpha-\beta} R_\alpha g \right\| \leq |\frac{1}{\alpha-\beta}| \, \|g\| \to 0$, por lo tanto

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\alpha-\beta} f - \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\alpha-\beta} R_\alpha g = f.$$

(b) Consideremos el conjunto F. Por el inciso (a) tenemos que $D \subset F$. Además F es cerrado, en efecto, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, para algún $f \in E$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha R_\alpha f - f\| &\leq \|\alpha R_\alpha f - \alpha R_\alpha f_n\| + \|\alpha R_\alpha f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \\ &\leq 2\,\|f_n - f\| + \|\alpha R_\alpha f_n - f_n\|\,, \end{aligned}$$

luego tenemos que

$$\limsup_{\alpha\to\infty} \|\alpha R_\alpha f - f\| \leq 2\,\|f_n - f\| + \limsup_{\alpha\to\infty} \|\alpha R_\alpha f_n - f_n\| = 2\,\|f_n - f\|\,,$$

y como $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ concluimos que $\limsup_{\alpha\to\infty} \|\alpha R_\alpha f - f\| = 0$. Por lo tanto $f \in F$, luego F es cerrado. De lo cual se sigue que $\bar{D} \subset F$. La contención $F \subset \bar{D}$ se tiene porque todo elemento f de F es límite de elementos de la forma $\alpha R_\alpha f \in D$.

□

De la proposición anterior se desprende una condición necesaria y suficiente para que una resolvente de contracciones sea regular, que establecemos en el siguiente corolario.

Corolario 2.3.6. *Una resolvente de contracciones es regular si y solo si su imagen es densa en E.*

Demostración. Si $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ es regular ya sabemos que D es denso en E. Por otro lado si D es denso en E, entonces por el inciso (b) de la proposición anterior, tenemos que

$E = \bar{D} = \{f \in E : \text{lím}_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f = f\}$, por lo que la resolvente es regular. $\square$

Ahora construiremos una resolvente de contracciones regular a partir de un semigrupo de contracciones continuo, mediante la transformada de Laplace.

Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo y considere $\alpha > 0$ y $f \in E$. La función $t \mapsto e^{-\alpha t}T(t)f$ es continua y se tiene que

$$\int_0^\infty \left\| e^{-\alpha t}T(t)f \right\| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} \|f\| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \|f\| , \tag{2.17}$$

es decir, $t \mapsto e^{-\alpha t}T(t)f$ es integrable en $[0, \infty)$, luego existe la integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}T(t)f \, \mathrm{d}t,$$

en E. Para $\alpha > 0$ definimos al operador $\mathcal{R}_\alpha$ en E, como

$$\mathcal{R}_\alpha f \coloneqq \int_0^\infty e^{-\alpha t}T(t)f \; dt, \quad \text{con} \quad f \in E. \tag{2.18}$$

De (2.17) $\mathcal{R}_\alpha$ está bien definida para toda $f \in E$ siempre y cuando $\alpha > 0$. Además, por la linealidad de la integral y usando nuevamente (2.17), $\mathcal{R}_\alpha$ es un operador lineal acotado en E. Veamos que estos operadores forman una resolvente de contracción regular.

Proposición 2.3.7. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de contracciones continuo. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) La familia $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha>0}$ definida en (2.18), es una resolvente de contracciones regular.

(b) Sea $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal relacionado al semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces para cada $\alpha > 0$ el operador $(\alpha I - \mathcal{A})$ es una biyección de $D(\mathcal{A})$ en E. Además se cumple la igualdad

$$\mathcal{R}_\alpha = (\alpha I - \mathcal{A})^{-1}.$$

Demostración. (a) Tenemos que probar que $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha>0}$ satisface las tres propiedades de la Definición 2.3.4.

(1) Tomemos $f \in E$ arbitrario y sean $\alpha, \beta > 0$. Si $\alpha = \beta$, la condición se cumple trivialmente, consideremos pues $\alpha \neq \beta$. La función $t \mapsto T(t)f$ es continua, luego por (2.8) y por (2.18) tenemos que

$$\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) \mathcal{R}_\beta f \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_0^\infty e^{-\beta s} T(t+s) f \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t,$$

para t fija hacemos el cambio de variable $r = t + s$, y un cambio en el orden de integración, para obtener

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta f &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_t^\infty e^{-\beta(r-t)} T(r) f \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\beta r} T(r) f \int_0^r e^{\beta t - \alpha t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty e^{-\beta r} T(r) f \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{(\beta-\alpha) r} - 1) \, \mathrm{d}r = \int_0^\infty T(r) f \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}) \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\beta - \alpha} (\mathcal{R}_\alpha f - \mathcal{R}_\beta f).
\end{aligned}$$

Como f es un elemento arbitrario en E, se tiene la igualdad que queríamos.

(2) Sea $\alpha > 0$. Por ser $T(t)$ acotado para todo $t \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\alpha \mathcal{R}_\alpha f\| &= \left\| \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) f \, \mathrm{d}t \right\| = \left\| \int_0^\infty e^{-s} T(s/\alpha) f \, \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-s} \|T(s/\alpha) f\| \, \mathrm{d}s \leq \int_0^\infty e^{-s} \|f\| \, \mathrm{d}s = \|f\|.
\end{aligned}$$

(3) Dado que $T(s/\alpha) f \to f$ cuando $\alpha \to \infty$ y $\|e^{-s} T(s/\alpha) f\| \leq e^{-s} \|f\|$ con $\int_0^\infty e^{-s} \|f\| \, \mathrm{d}s < \infty$. Por convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\mathcal{R}_\alpha f = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} T(s) f \,\mathrm{d}s = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\infty e^{-s} T(s/\alpha) f \,\mathrm{d}s \tag{2.19}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha s} \lim_{\alpha\to\infty} T(s/\alpha) f \,\mathrm{d}s = (\int_0^\infty e^{-s} \,\mathrm{d}s) f = f. \tag{2.20}$$

(b) Primero demostraremos que $(\alpha I - \mathcal{A})$ es un operador sobreyectivo para cada $\alpha > 0$. Sea f un elemento arbitrario de E. Lo que queremos es hallar un elemento en $D(\mathcal{A})$ tal que su imagen bajo $(\alpha I - \mathcal{A})$ sea f y el candidato es $\mathcal{R}_\alpha f$, veamos pues que $(\alpha I - \mathcal{A})\mathcal{R}_\alpha f = f$. Para cada $h > 0$, tenemos

$$T(h)\mathcal{R}_\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(h)T(t) f \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(h+t) f \,\mathrm{d}t = e^{\alpha h} \int_h^\infty e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t, \tag{2.21}$$

donde la primera igualdad se cumple debido a (2.8). Por lo tanto

$$T(h)\mathcal{R}_\alpha f - \mathcal{R}_\alpha f = e^{\alpha h} \int_h^\infty e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{-\alpha t} T(t) x \,\mathrm{d}t$$

$$= (e^{\alpha h} - 1) \int_h^\infty e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t - \int_0^h e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t,$$

luego

$$\frac{T(h)\mathcal{R}_\alpha f - \mathcal{R}_\alpha f}{h} = \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} \int_h^\infty e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t,$$

pero sabemos que $\lim_{h\downarrow 0} \frac{e^{\alpha h}-1}{h} = \alpha$, $\lim_{h\downarrow 0} \int_h^\infty e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t = \mathcal{R}_\alpha f$ y $\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\alpha t} T(t) f \,\mathrm{d}t = e^{-\alpha t} T(t) f|_{t=0} = f$, por lo tanto

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)\mathcal{R}_\alpha f - \mathcal{R}_\alpha f}{h} = \alpha\mathcal{R}_\alpha f - f.$$

Lo anterior implica que $\mathcal{R}_\alpha f \in D(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}\mathcal{R}_\alpha f = \alpha\mathcal{R}_\alpha f - f$, luego $(\alpha I - \mathcal{A})\mathcal{R}_\alpha f = f$, para cada $f \in E$. Por lo tanto $(\alpha I - \mathcal{A})$ es sobreyectiva para cada $\alpha > 0$.

Ahora probemos que $(\alpha I - \mathcal{A})$ es inyectivo para cada $\alpha > 0$. Sea f un elemento de $D(\mathcal{A})$ tal que $(\alpha I - \mathcal{A})f = 0$. Consideremos la siguiente función $u(t) := e^{-\alpha t}T(t)f$, para todo $t > 0$, entonces se sigue de la relación (2.12) que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)) = -\alpha e^{-\alpha t}T(t)f + e^{-\alpha t}T(t)\mathcal{A}f = -e^{-\alpha t}T(t)(\alpha I - \mathcal{A})f = 0,$$

por lo que $u(t)$ es constante para todo $t > 0$. Notemos que $\lim_{t\downarrow 0} u(t) = e^{-\alpha t}T(t)f|_{t=0} = f$, y por ser $T(t)$ de contracción tenemos que $\left\|e^{-\alpha t}T(t)f\right\| \leq e^{-\alpha t}\left\|f\right\|$, esto implica que

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}T(t)f = 0,$$

y por ser $u(t)$ constante y continua, deducimos que $f = 0$. Por lo tanto $(\alpha I - \mathcal{A})$ es inyectivo para cada $\alpha > 0$.

Así, hemos demostrado que el operador $(\alpha I - \mathcal{A})$ es una biyección de $D(\mathcal{A})$ en E, para cada $\alpha > 0$, además $(\alpha I - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{R}_\alpha$.

□

2.3.3. Teorema de Hille-Yosida

A continuación enunciaremos un teorema que nos brinda condiciones suficientes y necesarias para que un operador lineal sea el generador infinitesimal de algún semigrupo. Mientras que el teorema posterior a este nos dice que es posible obtener un semigrupo de contracciones continuo con base en una resolvente de contracciones regular. Ambos son parte del Teorema de Hille-Yosida y puede hallarse una demostración en [17] (Teorema 5.20, p. 458).

Teorema 2.3.8 (Hille-Yosida)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un operador lineal definido en un espacio de Banach E, con dominio $D(\mathcal{U})$. Para que $\mathcal{U}$ sea el generador infinitesimal de algún semigrupo de contracciones continuo es necesario y suficiente que $\mathcal{U}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

(a) El operador $\mathcal{U}$ *es cerrado y su dominio* $D(\mathcal{U})$ *es denso en* E.

(b) Para todo $\alpha > 0$ *la ecuación* $(\alpha I - \mathcal{U})f = g$, *tiene una única solución* $f \in D(\mathcal{U})$ *para cualquier* $g \in E$*; escribimos entonces* $f = (\alpha I - \mathcal{U})^{-1}g$.

(c) Para todo $\alpha > 0$, $g \in E$, *tenemos la desigualdad* $\left\|(\alpha I - \mathcal{U})^{-1}g\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\|g\|$.

Teorema 2.3.9. *Toda resolvente de contracción regular* $\{R_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ *es la transformada de Laplace de un único semigrupo de contracción continuo. En particular la familia* $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha>0}$ *definida en* (2.18), *cumple esta propiedad.*

Capítulo 3

Procesos de Markov-Feller

3.1. Semigrupos de Feller

Sea $\mathcal{O}$ un espacio de Banach con base numerable. Consideremos al espacio conformado por las funciones reales con dominio en $\mathcal{O}$, continuas y que se desvanecen en el infinito, con la norma uniforme

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{O}} |f(x)|, \quad \text{para todo} \quad f \in C_\infty(\mathcal{O}).$$

Definición 3.1.1. Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales y acotados, definidos en el espacio de Banach $(C_\infty(\mathcal{O}), \|\cdot\|_\psi)$, es un *semigrupo de Feller* si satisface lo siguiente.

(a) $T(t)f \in C_\infty(\mathcal{O})$ para todo $f \in C_\infty(\mathcal{O}),\ t \geq 0$.

(b) $T(s)T(t) = T(s+t)$, para todo $s, t \geq 0$.

(c) $\|T(t)f\| \leq \|f\|$, para todo $t \geq 0$ y $f \in C_\infty(\mathcal{O})$.

(d) $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|$, para todo $f \in C_\infty(\mathcal{O})$.

(e) $T(t)f \geq 0$, para todo $f \geq 0$, $h \in C_\infty(\mathcal{O})$ (*no negatividad*).

Podemos decir, pues, que un semigrupo de Feller es un semigrupo de contracciones continuo, no negativo y definido sobre el espacio de Banach $C_\infty(\mathcal{O})$.

En el siguiente teorema mostraremos que cuando $\mathcal{O}$ es un *espacio localmente compacto con base numerable*, la condición (d) de la definición anterior puede ser reemplazada por

(d') $\lim_{t\to 0} |T(t)f(x) - f(x)|$, para todo $x \in \mathcal{O}$ y $f \in C_\infty(\mathcal{O})$ (*continuidad puntual*).

Teorema 3.1.2. *Sea $\mathcal{O}$ un espacio localmente compacto con base numerable. Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de contracciones, no negativo, definido sobre $C_\infty(\mathcal{O})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(d) $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|$, *para todo $f \in C_\infty(\mathcal{O})$.*
(d') $\lim_{t\to 0} |T(t)f(x) - f(x)|$, *para todo $x \in \mathcal{O}$ y $f \in C_\infty(\mathcal{O})$.*

Demostración. La implicación (d) $\implies$ (d') se tiene por el hecho de que $|T(t)f(x) - f(x)| \leq \|T(t)f - f\|$, para todo $t \geq 0$, $x \in \mathcal{O}$ y $f \in C_\infty(\mathcal{O})$. Para la otra implicación probaremos que la transformada de Laplace del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es una resolvente de contracción regular, y por el Teorema 2.3.9 prodremos concluir que el semigrupo es continuo (fuertemente).

Sea $f \in C_\infty(\mathcal{O})$, por la propiedad de contracción del semigrupo tenemos que $\|T(s)f\| \leq \|f\|$, luego

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s} \|T(s)f\| \,\mathrm{d}s \leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} \|f\| \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Entonces el operador

$$R_\alpha f := \int_0^\infty e^{-\alpha s} T(s) f \,\mathrm{d}s,$$

está bien definido, para todo $f \in C_\infty(\mathcal{O})$. Por la demostración de la Proposición 2.3.7(a) la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ es una resolvente de contracción. Además, dado $f \in C_\infty(\mathcal{O})$ tenemos que $\lim_{\alpha\to\infty} e^{-t}T(t/\alpha)f(x) = e^{-t}f(x)$, para todo $x \in \mathcal{O}$, y $\left|e^{-t}T(t/\alpha)f(x)\right| \leq \left\|e^{-t}T(t/\alpha)f\right\| \leq$

$e^{-t}\|f\|$, donde la función $t \mapsto e^{-t}\|f\|$ es integrable, entonces por el Teorema de convergencia dominada tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f(x) &= \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} T(s) f(x)\,\mathrm{d}s = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\infty e^{-t} T(t/\alpha) f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \lim_{\alpha\to\infty} e^{-t} T(t/\alpha) f(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} f(x)\,\mathrm{d}t = f(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo $x \in \mathcal{O}$ (convergencia puntual).

Para probar que la resolvente es regular, usaremos el Corolario 2.3.6, es decir, demostraremos que el conjunto imagen $D \coloneqq R_\alpha(C_\infty(\mathcal{O}))$, que recordemos no depende de α, es denso en $C_\infty(\mathcal{O})$.

El espacio dual $C_\infty(\mathcal{O})^*$ está formado por las medidas finitas con signo en $\mathcal{O}$ (vease [7], Apéndice C). Un corolario del Teorema de Hahn-Banach (vease [7], Corolario 6.14, p. 81), nos dice que los elementos de la cerradura de un subespacio de un espacio normado, son aquellos que se anulan en todo funcional lineal que anula al subespacio mismo. Entonces si probamos que el elemento cero de $C_\infty(\mathcal{O})^*$ es el único que anula a D, tendremos que $\bar{D} = C_\infty(\mathcal{O})$. Sea pues $\mu \in C_\infty(\mathcal{O})^*$ tal que

$$\alpha \int_{\mathcal{O}} R_\alpha f\,\mathrm{d}\mu = 0, \tag{3.2}$$

para todo f en $C_\infty(\mathcal{O})$ y $\alpha > 0$. Por (3.1) sabemos que $\alpha R_\alpha f$ converge puntualmente a f, cuando $\alpha \to \infty$. Además $|\alpha R_\alpha f(x)| \le \|\alpha R_\alpha f\| \le \|f\|$, por la propiedad de contracción, para todo $x \in \mathcal{O}$ y $\alpha > 0$, donde la función constante $x \mapsto \|f\|$ es μ-integrable porque μ es una medida finita en $\mathcal{O}$. Entonces por (3.2) y por el Teorema de convergencia dominada tenemos que

$$0 = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathcal{O}} \alpha R_\alpha f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{O}} \lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{O}} f\,\mathrm{d}\mu,$$

para todo f en $C_\infty(\mathcal{O})$, por lo que $\mu = 0$. Por lo tanto D es denso en $C_\infty(\mathcal{O})$. Luego la resolvente de contracciones $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ es regular, es decir $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha R_\alpha f = f$ y por lo tanto el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es continuo (fuertemente). $\square$

3.2. Procesos de Markov-Feller

Sea $\mathcal{O}$ un espacio localmente compacto con base numerable y norma $|\cdot|$. Sea $C_\infty(\mathcal{O})$ el espacio de funciones $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, continuas, que se desvanecen en el infinito, es decir, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, y sea $\|\cdot\|$ la norma uniforme dada por $\|h\| = \sup_{x\in\mathcal{O}} |h(x)|$, para todo $h \in C_\infty(\mathcal{O})$. La pareja $(C_\infty(\mathcal{O}), \|\cdot\|)$ conforma un espacio de Banach [veáse [7], Proposición 1.7, p. 65].

Sea $y(t,x)$ un proceso de Markov-Feller homogéneo definido en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ con espacio de estados $\mathcal{O}$, cuya familia de operadores $\{\Phi(t)\}_{t\geq 0}$ dada por

$$\Phi(t)h(x) = \mathbb{E}[h(y(t,x))], \quad \forall t \geq 0, x \in \mathcal{O}, h \in C_\infty(\mathcal{O}),$$

satisface las siguientes propiedades:

(a) $\Phi(t)h \in C_\infty(\mathcal{O})$ para todo $h \in C_\infty(\mathcal{O})$.

(b) $\|\Phi(t)h\| \leq \|h\|$ para todo $t \geq 0$, $h \in C_\infty(\mathcal{O})$.

(c) $\Phi(t)h \geq 0$, si $h \in C_\infty(\mathcal{O})$ y $h \geq 0$.

(d) $\lim_{t\to 0} \|\Phi(t)h - h\| = 0$, para todo $h \in C_\infty(\mathcal{O})$.

Observación 3.2.1. Existen casos especiales de procesos de Markov-Feller que satisfacen las propiedades (a)-(d); por ejemplo, véase [[3], sección 3], en el caso cuando $y(t,x)$ es un proceso de Lévy o [[2], sección 1.4], para cadenas de Markov a tiempo continuo $y(t,x)$.

Sea $-\mathcal{A}_0$ el generador infinitesimal del semigrupo $\{\Phi_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, con dominio $D(\mathcal{A}_0) \subset C_\infty(\mathcal{O})$, y $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha>0}$ su resolvente asociado. Entonces, de la sección anterior, se cumple que $D(\mathcal{A}_0)$ es denso en $C_\infty(\mathcal{O})$, $\mathcal{R}_\alpha(C_\infty(\mathcal{O})) = D(\mathcal{A}_0)$ y no depende de α, el operador $\alpha\mathtt{I} + \mathcal{A}_0$ es biyectivo para todo $\alpha > 0$, $\mathcal{R}_\alpha = (\alpha\mathtt{I} + \mathcal{A}_0)^{-1}$ y tenemos la desigualdad

$$\|\mathcal{R}_\alpha h\| \leq \frac{1}{\alpha}\|h\|, \quad \forall\, h \in C_\infty(\mathcal{O}). \tag{3.3}$$

Sea $\alpha > 0$, sabemos que la familia $\{\Phi_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ definida sobre $C_\infty(\mathcal{O})$ y dada por

$$\Phi_\alpha(t)h(x) = \mathbb{E}[e^{-\alpha t}h(y(t,x))], \tag{3.4}$$

para todo $t \geq 0$, $x \in \mathcal{O}$, $h \in C_\infty(\mathcal{O})$, es nuevamente un semigrupo de Feller, en efecto, dado que $\Phi_\alpha(t)h = e^{-\alpha t}\Phi(t)h$ se tiene inmediatamente que $\Phi_\alpha(t)h \in C_\infty(\mathcal{O})$, $\|\Phi_\alpha(t)h\| \leq \|h\|$, $\Phi_\alpha(t)h \geq 0$ si $h \geq 0$ y por último $\|\Phi_\alpha(t)h - h\| \leq \left\|e^{-\alpha t}\Phi(t)h - e^{-\alpha t}h\right\| + \left\|e^{-\alpha t}h - h\right\| \to 0$ cuando $t \to 0$. Sea $-\mathcal{A}_\alpha$ el generador asociado al semigrupo Φ_α, entonces $D(\mathcal{A}_\alpha) = D(\mathcal{A})$ y tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. *(a) Sea $\alpha > 0$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\|\Phi_\alpha(t)h\| \leq e^{-\alpha t}\|h\|. \tag{3.5}$$

(b) Para cada $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ se cumple la igualdad,

$$\mathcal{A}_{\alpha+\beta} = \mathcal{A}_\alpha + \beta\mathtt{I}, \tag{3.6}$$

donde $\mathtt{I}$ es el operador identidad en $C_\infty(\mathcal{O})$.

Demostración. (a) Sea $t \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}|\Phi_\alpha(t)h(x)| &\leq \mathbb{E}\left[e^{-\alpha t}\,|h(y(t,x))|\right] = e^{-\alpha t}\mathbb{E}\left[|h(y(t,x))|\right] \\ &\leq e^{-\alpha t}\,\|h\|\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\Phi_\alpha(t)h\| = \sup_{x\in\mathcal{O}}\{|\Phi_\alpha(t)h(x)|\} \leq e^{-\alpha t}\,\|h\|$.

(b) Sea $h \in D(\mathcal{A}_{\alpha+\beta})$, notemos que

$$\Phi_{\alpha+\beta}(t)h(x) = \mathbb{E}\left[e^{-(\alpha+\beta)t}h(y(t,x))\right] = e^{-\beta t}\Phi_\alpha(t)h(x),$$

para todo $t \geq 0$ y $x \in E$, de donde obtenemos

$$\mathcal{A}_{\alpha+\beta}h = \lim_{t\downarrow 0}\frac{h-\Phi_{\alpha+\beta}(t)h}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{h-e^{-\beta t}\Phi_\alpha(t)h}{t},$$

pero $e^{-\beta t} = 1-\beta t + o(t)$, entonces se tiene que

$$\frac{h-e^{-\beta t}\Phi_\alpha(t)h}{t} = \frac{h-(1-\beta t+o(t))\Phi_\alpha(t)h}{t} = \frac{h-\Phi_\alpha(t)h}{t} + \beta\Phi_\alpha(t)h - \frac{o(t)}{t}\Phi_\alpha(t)h.$$

Sabemos que existe el límite del primer término de la expresión anterior y el límite de $\beta\Phi_\alpha(t)h - \frac{o(t)}{t}\Phi_\alpha(t)h$ cuando $t \to \infty$, por lo tanto existe el límite $\lim_{t\to 0}\frac{h-\Phi_\alpha(t)h}{t}$ luego $h \in D(\mathcal{A}_\alpha)$. Además se cumple que

$$\mathcal{A}_{\alpha+\beta}h = \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{h-\Phi_\alpha(t)h}{t} + \beta\Phi_\alpha(t)h - \frac{o(t)}{t}\Phi_\alpha(t)h\right) = \mathcal{A}_\alpha h + \beta h.$$

□

De la proposición anterior deducimos que $D(\mathcal{A}_\alpha) = D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$ y también $\mathcal{R}_\alpha = (\alpha\mathtt{I} + \mathcal{A}_0)^{-1} = \mathcal{A}_\alpha^{-1}$. Además, para $\beta > 0$ tenemos $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}h = \mathcal{A}_{\alpha+\beta}^{-1}h = (\mathcal{A}_\alpha + \beta I)^{-1}h$, es decir, $\{\mathcal{R}_{\alpha+\beta}\}_{\beta>0}$ es la resolvente asociada al semigrupo $\{\Phi_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, para cada $\alpha \geq 0$.

Capítulo 4

Control de Tiempos de Paro

4.1. Problemas de tiempo de paro óptimo

Sea $y(t, x)$ un proceso de Markov-Feller definido como en el capítulo anterior. Vamos a considerar una dinámica con evolución dada por el proceso $y(t, x)$ el cual se puede detener en un tiempo aleatorio. A cada instante se produce un costo dado por una función f y al detener la dinámica se produce un costo final dado por una función ψ. El problema es determinar un tiempo aleatorio de manera que se produzca un costo mínimo.

Vamos a definir primero lo que es un tiempo de paro. Dado un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, un tiempo de paro respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una variable aleatoria τ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con valores en $[0, \infty]$ y tal que se cumple la siguiente condición

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall \quad t \geq 0.$$

Denotamos por $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los tiempos de paro

$$\mathcal{T} := \{\tau : \tau \text{ es tiempo de paro con respecto a } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}\}.$$

Dadas dos funciones f y ψ en $C_\infty(\mathcal{O})$ y $\alpha > 0$, consideramos la función de costo

$$J(x,\tau) := E\left[\int_0^\tau f(y(t,x))e^{-\alpha t}dt + 1_{\tau<\infty}\psi(y(\tau,x))e^{-\alpha\tau}\right], \tag{4.1}$$

y la función de costo óptimo

$$\hat{u}(x) = \inf_{\tau} J(x,\tau). \tag{4.2}$$

Donde el ínfimo se toma sobre todos los tiempos de paro $\tau \in \mathcal{T}$. Además, diremos que $\hat{\tau} \in \mathcal{T}$ es un tiempo de paro óptimo, si cumple lo siguiente:

$$\hat{u}(x) = J(x,\hat{\tau}), \quad \forall\, x \in \mathcal{O}. \tag{4.3}$$

4.2. Problema penalizado

Nuestro objetivo es dar una caracterización de la función de costo óptimo (4.2) y hallar un tiempo de paro óptimo (4.3). Una forma natural de estudiar este problema es mediante los problemas penalizados.

Dados α, ε constantes positivas, f y ψ en $C_\infty(\mathcal{O})$, queremos resolver la siguiente ecuación no lineal

$$u_\varepsilon \in D(\mathcal{A}_\alpha) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}_\alpha u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ = f, \tag{4.4}$$

donde $(\cdot)^+$ denota la parte positiva. En la siguiente proposición demostraremos que esta ecuación tiene una única solución en $C_\infty(\mathcal{O})$.

Proposición 4.2.1. *Sean f y ψ funciones en $C_\infty(\mathcal{O})$. Entonces,* *(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe una única solución $u_\varepsilon \in C_\infty(\mathcal{O})$ de la ecuación (4.4).*

(b) Si $\psi \in D(\mathcal{A}_\alpha)$, entonces se cumple:

$$0 \leq u_\varepsilon(x) - u_{\varepsilon'}(x) \leq \varepsilon \left\|(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+\right\|, \tag{4.5}$$

para todo $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, $x \in \mathcal{O}$.

(c) Se satisface la siguiente relación:

$$u_\varepsilon = \Phi_\alpha(t) u_\varepsilon + \int_0^t \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+] \, \mathrm{d}s, \tag{4.6}$$

para todo $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

Demostración. (a) Primero vamos a reescribir la ecuación (4.4) de la siguiente manera. Dado $\epsilon > 0$, de la relación $(u_\varepsilon - \psi)^+ = u_\varepsilon - u_\varepsilon \wedge \psi$ (donde $\wedge$ denota al mínimo entre dos valores), se sigue de la misma ecuación (4.4) que

$$\mathcal{A}_\alpha u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon = f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon = f + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon \wedge \psi), \tag{4.7}$$

sin embargo por (3.6) tenemos que $\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} I = \mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon}$, además como vimos en el capítulo anterior, el generador $\mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon} : D_p(\mathcal{A}_\alpha) \to C_\infty(\mathcal{O})$ es biyectivo y su inversa es la resolvente $\mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}$, por lo que

$$u_\varepsilon = \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon \wedge \psi)). \tag{4.8}$$

Notemos que para todo $h \in C_\infty(\mathcal{O})$, $f + \frac{1}{\varepsilon} h \wedge \psi \in C_\infty(\mathcal{O})$, pues $f, \psi \in C_\infty(\mathcal{O})$. Entonces definimos al operador $T_\varepsilon : C_\infty(\mathcal{O}) \to D(\mathcal{A}_\alpha)$, como

$$T_\varepsilon h \coloneqq \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f + \frac{1}{\varepsilon}(h \wedge \psi)), \quad \forall\, h \in C_\infty(\mathcal{O}).$$

Así, el problema de existencia de una única solución del problema (4.4) se traduce al problema de existencia de un único punto fijo de T_ε, que es lo que mostraremos a continuación. Como $C_\infty(\mathcal{O})$ es completo, basta probar que T_ϵ es de contracción. Sean $g, h \in C_\infty(\mathcal{O})$, por la linealidad de la resolvente tenemos que

$$T_\varepsilon h - T_\varepsilon g = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(h \wedge \psi - g \wedge \psi),$$

y notemos que $\|h \wedge \psi - g \wedge \psi\| \leq \|h - g\|$, lo cual junto con (3.3) nos da

$$\|T_\varepsilon h - T_\varepsilon g\| \leq \frac{1/\varepsilon}{\alpha + 1/\varepsilon} \|h - g\|,$$

como $\alpha > 0$ resulta que T_ε es de contracción, luego tiene un único punto fijo $u_\varepsilon \in C_\infty(\mathcal{O})$. Pero además por (4.8) tenemos que $u_\varepsilon = T_\varepsilon u_\varepsilon \in D(\mathcal{A}_\alpha)$. Por lo tanto la ecuación (4.4) tiene una única solución en $D(\mathcal{A}_\alpha)$.

(b) Supongamos que $\psi \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ y sean $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Primero demostraremos que se cumple la desigualdad $0 \leq u_\varepsilon - u'_\varepsilon$. En efecto, usando (4.7) y (3.6) tenemos

$$\mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon} u_{\varepsilon'} = \mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon'+(1/\varepsilon-1/\varepsilon')} u_{\varepsilon'} = \mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon'} u_{\varepsilon'} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon'}\right) u_{\varepsilon'} \tag{4.9}$$

$$= f - \frac{1}{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'} - \psi)^+ + \frac{1}{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon'}\right) u_{\varepsilon'} = f - \frac{1}{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'} - \psi)^+ + \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon'}. \tag{4.10}$$

Entonces, como $-1/\varepsilon' < -1/\varepsilon$, se tiene que

$$\mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon} u_{\varepsilon'} \leq f - \frac{1}{\varepsilon}(u_{\varepsilon'} - \psi)^+ + \frac{1}{\varepsilon} u_{\varepsilon'} = f + \frac{1}{\varepsilon}(u_{\varepsilon'} \wedge \psi). \tag{4.11}$$

Dado que la resolvente $\mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}$ (el operador inverso de $A_{\alpha+1/\varepsilon}$), es un operador lineal monótono, es decir, $g \leq h$ implica $\mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon} g \leq \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon} h$, de la desigualdad (4.11) se sigue que

$$u_{\varepsilon'} \leq \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f + \frac{1}{\varepsilon}(u_{\varepsilon'} \wedge \psi)) = T_\varepsilon u_{\varepsilon'}.$$

Aplicando el operador T_ε a la expresión anterior de manera iterativa, obtenemos las desigualdades

$$u_{\varepsilon'} \leq T_\varepsilon u_{\varepsilon'} \leq \ldots \leq T_\varepsilon^n u_{\varepsilon'}.$$

Como T_ε es un operador de contracción, la sucesión $\{T_\varepsilon^n u_{\varepsilon'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, cuando $n \to \infty$, al punto fijo u_ε. Por lo tanto tenemos que

$$u_{\varepsilon'} \leq \lim_{n\to\infty} T_\varepsilon^n u_{\varepsilon'} = u_\varepsilon. \tag{4.12}$$

Es decir $u_{\varepsilon'} \leq u_\varepsilon$ siempre que tengamos $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Ahora queda por demostrar que $u_\varepsilon(x) - u_{\varepsilon'}(x) \leq \varepsilon \|(f - \mathcal{A}_\alpha\psi)^+\|$, para todo $x \in \mathcal{O}$. Para esto es suficiente probar que se cumple $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\| \leq \varepsilon \|(f - \mathcal{A}_\alpha\psi)^+\|$, lo cual probaremos a continuación. Por (4.8) y dado que $\psi \in D_p(\mathcal{A}_\alpha)$, tenemos

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon - \psi &= \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon \wedge \psi)) - \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}\mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon}\psi \\
&= \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}\left(f + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon \wedge \psi)) - \frac{1}{\varepsilon}\psi - \mathcal{A}_\alpha\psi\right) \\
&= \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}\left(f - \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+ - \mathcal{A}_\alpha\psi\right) \leq \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f - \mathcal{A}_\alpha\psi) \\
&\leq \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f - \mathcal{A}_\alpha\psi)^+.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f - \mathcal{A}_\alpha\psi)^+ \geq 0$, deducimos que

$$(u_\varepsilon - \psi)^+ \leq \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f - \mathcal{A}_\alpha\psi)^+, \tag{4.13}$$

lo cual junto con (3.3) implica

$$\left\|(u_\varepsilon - \psi)^+\right\| \leq \frac{1}{1/\varepsilon + \alpha} \left\|(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+\right\| \leq \varepsilon \left\|(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+\right\|. \tag{4.14}$$

Por otra parte si $u_{\varepsilon'} \geq \psi$ entonces

$$0 \leq u_\varepsilon - u_{\varepsilon'} \leq u_\varepsilon - \psi \leq (u_\varepsilon - \psi)^+. \tag{4.15}$$

Mientras que si $u_{\varepsilon'} < \psi$ entonces usando (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\alpha(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) = \mathcal{A}_\alpha u_\varepsilon - \mathcal{A}_\alpha u_{\varepsilon'} &= -\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ + \frac{1}{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'} - \psi)^+ \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ \leq 0,\end{aligned}$$

luego por la monotonía de la resolvente obtenemos que $0 \leq u_\varepsilon - u_{\varepsilon'} \leq \mathcal{R}_\alpha 0 = 0$. Por lo tanto hemos probado que

$$0 \leq u_\varepsilon - u_{\varepsilon'} \leq (u_\varepsilon - \psi)^+.$$

Finalmente por la desigualdad anterior y usando (4.15) y (4.14) llegamos a la desigualdad deseada

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\| \leq \left\|(u_\varepsilon - \psi)^+\right\| \leq \varepsilon \left\|(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+\right\|,$$

(c) Dado que u_ε satisface la ecuación (4.4), se tiene que

$$u_\varepsilon = \mathcal{R}_\alpha[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+] = \int_0^\infty \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+] \, \mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+]\,\mathrm{d}s + \int_t^\infty \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+]\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+]\,\mathrm{d}s + \Phi_\alpha(t)\int_0^\infty \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+]\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+]\,\mathrm{d}s + \Phi_\alpha(t)\mathcal{R}_\alpha[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+] \\
&= \int_0^t \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+]\,\mathrm{d}s + \Phi_\alpha(t)u_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Con lo cual concluimos la prueba.

□

La solución u_ε del problema penalizado (4.4) puede interpretarse como un costo óptimo del siguiente problema de control estocástico [véase [14], p. 13],

$$
\begin{cases}
u_\varepsilon(x) := \inf\{J_0(x,\nu) : \nu \text{ adaptado}, 0 \le \varepsilon\nu \le 1\}, \quad \text{donde} \\
J_0(x,\nu) := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty [f(y(t,x)) + \nu(t)\psi(y(t,x))]e^{-\int_0^t(\alpha+\nu(s))ds}dt\right].
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *Las soluciones penalizadas u_ε convergen puntualmente de forma decreciente y en norma, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, a una función $u_0 \in C_\infty(\mathcal{O})$, es decir*

$$
\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_\varepsilon = u_0 \quad (\textit{en } C_\infty(\mathcal{O})). \tag{4.17}
$$

Demostración. Sean $\psi \in C_\infty(\mathcal{O})$, $\bar\psi \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos por $u_\varepsilon(x,\psi)$ y $u_\varepsilon(x,\bar\psi)$ a las soluciones de (4.16) correspondientes a ψ y $\bar\psi$, respectivamente. De igual manera denotamos a las funciones de costo por $J_0(x,\nu,\psi)$ y $J_0(x,\nu,\bar\psi)$ para todo $x \in \mathcal{O}$, y $0 \le \varepsilon\nu \le 1$ adaptado.

Sea $x \in \mathcal{O}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|u_\varepsilon(x,\psi) - u_\varepsilon(x,\bar{\psi})\right| &= \left|\inf_\nu J_0(x,\nu,\psi) - \inf_\nu J_0(x,\nu,\bar{\psi})\right| \leq \sup_\nu \left|J_0(x,\nu,\psi) - J_0(x,\nu,\bar{\psi})\right| \\
&\leq \sup_\nu \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left|\psi(y(t,x)) - \bar{\psi}(y(t,x))\right| \nu(t) e^{-\int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right] \\
&\leq \left\|\psi - \bar{\psi}\right\| \sup_\nu \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \nu(t) e^{-\int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right] \\
&\leq \left\|\psi - \bar{\psi}\right\| \mathbb{E}\left[\sup_\nu \left\{\int_0^\infty \nu(t) e^{-\int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right\}\right]. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $\tau(t) = \int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s$, $d\tau = \nu dt$, con $\tau(0) = 0$ y $\tau(t) \to a$ cuando $t \to \infty$, donde $0 \leq a \leq \infty$, entonces

$$\int_0^\infty \nu(t) e^{-\int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t = \int_0^a e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \leq 1$$

con probabilidad 1 para todo ν adaptado con $0 \leq \nu \leq 1/\varepsilon$. Luego

$$\sup_\nu \int_0^\infty \nu(t) e^{-\int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \leq 1,$$

usando este hecho junto con (4.18), obtenemos

$$\left|u_\varepsilon(x,\psi) - u_\varepsilon(x,\bar{\psi})\right| \leq \left\|\psi - \bar{\psi}\right\|.$$

Por lo tanto

$$\left\|u_\varepsilon(\psi) - u_\varepsilon(\bar{\psi})\right\| \leq \left\|\psi - \bar{\psi}\right\|. \qquad (4.19)$$

Si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ entonces se tiene que $u_{\varepsilon'} \leq u_\epsilon$, definimos pues la función $u_0 \coloneqq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon$, (convergencia monótona puntual). De acuerdo con la notación anterior, escribimos $u_0(\psi)$

en lugar de u_0, y lo mismo con la función $\bar{\psi}$. Notemos que

$$\begin{aligned}\left|u_0(x,\psi)-u_0(x,\bar{\psi})\right| &= \left|\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(u_\varepsilon(x,\psi)-u_\varepsilon(x,\bar{\psi}))\right| = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left|u_\varepsilon(x,\psi)-u_\varepsilon(x,\bar{\psi})\right| \\ &\leq \left\|\psi-\bar{\psi}\right\|,\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathcal{O}$, lo cual es equivalente a

$$\left\|u_0(\psi)-u_0(\bar{\psi})\right\| \leq \left\|\psi-\bar{\psi}\right\|. \tag{4.20}$$

Por otro lado como $\bar{\psi}\in D(\mathcal{A}_\alpha)$ entonces es válida la desigualdad (4.5) con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\left|u_\varepsilon(x,\bar{\psi})-u(x,\bar{\psi})\right| &= \left|u_\varepsilon(x,\bar{\psi})-\lim_{\varepsilon'<\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}u_{\varepsilon'}(x,\bar{\psi})\right| = \lim_{\varepsilon'<\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\left|u_\varepsilon(x,\bar{\psi})-u_{\varepsilon'}(x,\bar{\psi})\right| \\ &\leq \varepsilon\left\|(f-\mathcal{A}_\alpha\bar{\psi})^+\right\|\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathcal{O}$, es decir

$$\left\|u_\varepsilon(\bar{\psi})-u_0(\bar{\psi})\right\| \leq \varepsilon\left\|(f-\mathcal{A}_\alpha\bar{\psi})^+\right\|, \tag{4.21}$$

por lo que $u_\varepsilon(\bar{\psi})$ converge a $u_0(\bar{\psi})$ en norma cuando $\varepsilon\downarrow 0$, para todo $\bar{\psi}\in D(\mathcal{A})$, luego $u_0(\bar{\psi})\in C_\infty(\mathcal{O})$.

Para el caso general $\psi\in C_\infty(\mathcal{O})$ usamos las desigualdades (4.19), (4.20) y (4.21), para obtener

$$\begin{aligned}\left\|u_\varepsilon(\psi)-u_0(\psi)\right\| &\leq \left\|u_\varepsilon(\psi)-u_\varepsilon(\bar{\psi})\right\|+\left\|u_\varepsilon(\bar{\psi})-u_0(\bar{\psi})\right\|+\left\|u_0(\psi)-u(\bar{\psi})\right\| \\ &\leq \left\|\psi-\bar{\psi}\right\|+\varepsilon\left\|(f-\mathcal{A}_\alpha\bar{\psi})^+\right\|+\left\|\psi-\bar{\psi}\right\|. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dado que $D(\mathcal{A}_\alpha)$ es denso en $C_\infty(\mathcal{O})$, existe una sucesión $\psi_n\in D(\mathcal{A}_\alpha)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\left\|\psi-\psi_n\right\| =$

0, de lo cual se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u_\varepsilon(\psi) - u_0(\psi_n)\| \leq 2\,\|\psi - \psi_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Por lo tanto, haciendo $n \to \infty$, se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon(\psi) = u_0(\psi) \quad \text{para todo} \quad \psi \in C_\infty(\mathcal{O}), \quad \text{(convergencia en norma).} \tag{4.24}$$

□

Consideremos ahora el problema de hallar

$$u \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad u \leq \psi, \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_\alpha u \leq f. \tag{4.25}$$

A cualquier solución del problema anterior le llamaremos *subsolución* de la *ecuación variacional* (4.25). Como u no necesariamente pertenece a $D(\mathcal{A}_\alpha)$, consideramos la desigualdad anterior en el sentido del semigrupo, es decir,

$$\mathcal{A}_\alpha u \leq f \quad \iff \quad u(x) \leq \Phi_\alpha(t)u(x) + \int_0^t \Phi_\alpha(s) f(x)\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \geq 0,\ x \in \mathcal{O}. \tag{4.26}$$

4.3. Caracterización del costo óptimo

El siguiente teorema muestra una caracterización del costo óptimo definido en (4.2), como una subsolución maximal del problema (4.25).

Teorema 4.3.1. *Sean $f, \psi \in C_\infty(\mathcal{O})$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) Existe en $C_\infty(\mathcal{O})$ el límite de las soluciones penalizadas u_ε, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, y dicho límite es subsolución maximal de (4.25).

(b) El costo óptimo $\hat{u}$ dado por (4.2) es el límite de las soluciones penalizadas u_ε, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, es decir $\hat{u} = u_0$ con u_0 definida en (4.17).

(c) El primer tiempo de salida de la región de continuidad definido como

$$\hat{\tau}(x) \coloneqq \text{ínf}\{t \geq 0 : \hat{u}(y(t,x)) = \psi(y(t,x))\}, \quad \forall\, x \in \mathcal{O}, \tag{4.27}$$

es un tiempo de paro óptimo, i.e., $\hat{u}(x) = J(x, \hat{\tau})$.

(d) Si $\psi \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ entonces se cumple la desigualdad de Lewy-Stampacchia

$$f \wedge \mathcal{A}_\alpha \psi \leq \mathcal{A}_\alpha \hat{u} \leq f. \tag{4.28}$$

Demostración. (a) Ya vimos que existe el límite $u_0 \coloneqq \text{lím}_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon$ en $C_\infty(\mathcal{O})$, veamos ahora que u_0 es subsolución maximal de (4.25). De (4.4), sabemos que $\mathcal{A}_\alpha u_\varepsilon = f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+$, luego por (4.6) se sigue que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \Phi_\alpha(t) u_\varepsilon(x) + \int_0^t \Phi_\alpha(s)[f - \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+](x)\,\mathrm{d}s & (4.29)\\ &\leq \Phi_\alpha(t) u_\varepsilon(x) + \int_0^t \Phi_\alpha(s) f(x)\,\mathrm{d}s, & (4.30)\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0,\ x \in \mathcal{O},\ \varepsilon > 0$. Como $\Phi_\alpha(t)$ es de contracción, es acotado y tomando el límite en la desigualdad anterior cuando $\varepsilon \downarrow 0$, llegamos a que $\mathcal{A}_\alpha u_0 \leq f$ en el sentido del semigrupo (4.6).

Ahora probemos que $u_0 \leq \psi$, para este fin usaremos la densidad de $D(\mathcal{A}_\alpha)$. Dado que $\psi \in C_\infty(\mathcal{O})$ tomamos una sucesión $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(\mathcal{A}_\alpha)$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$ y denotemos por $u_\varepsilon(\psi_n)$ y $u_\varepsilon(\psi)$ a las soluciones de (4.4) correspondientes a ψ_n y ψ

respectivamente. Tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|(u_0(\psi)-\psi)^+\right\| \le{}& \left\|(u_0(\psi)-u_\varepsilon(\psi))^+\right\| + \left\|(u_\varepsilon(\psi)-u_\varepsilon(\psi_n))^+\right\| \\ &+ \left\|(u_\varepsilon(\psi_n)-\psi_n)^+\right\| + \left\|(\psi_n-\psi)^+\right\|. \qquad (4.31)\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, $n \ge 1$. Pero por (4.19), (4.14) y (4.24), el lado derecho de la desigualdad anterior converge a cero cuando $\varepsilon \downarrow 0$ y $n \to \infty$, por lo tanto $(u_0(\psi)-\psi)^+ = 0$ o equivalentemente $u_0(\psi) \le \psi$. Así que u_0 es una subsolución de (4.25).

Finalmente mostremos que u_0 es la subsolición maximal. Sea u una subsolución de (4.25). La desigualdad $\mathcal{A}_\alpha u \le f$, implica $\mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon} u \le f + \frac{1}{\varepsilon}u$, para todo $\varepsilon > 0$. Mientras que $u \le \psi$ implica $u \wedge \psi = u$. Luego entonces

$$u \le \mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}[f + \frac{1}{\varepsilon}(u \wedge \psi)] = T_\varepsilon u, \qquad (4.32)$$

e iterando obtenemos $u \le T_\varepsilon u \le \ldots \le T_\varepsilon^n u$. Recordemos que T_ε es de contracción y que su punto fijo es la solución penalizada u_ε, entonces $u \le \lim_{n\to\infty} T_\varepsilon^n u = u_\varepsilon$. Por lo tanto $u \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_\varepsilon = u_0$, luego u_0 es la máxima subsolución de (4.25).

(b) Sea $T > 0$ fijo. Para cualquier tiempo de paro $\tau \in \mathcal{T}$, de (4.6) y por la definición del semigrupo $\Phi_\alpha(t)$ en (3.4), tenemos que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\le \Phi_\alpha(\tau\wedge T)u_\varepsilon(x) + \int_0^{\tau\wedge T} \Phi_\alpha(s) f(x)\,\mathrm{d}s \qquad (4.33)\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge T} e^{-\alpha t} f(y(t,x))\,\mathrm{d}t + e^{-\alpha(\tau\wedge T)} u_\varepsilon(y(\tau\wedge T, x))\right], \qquad (4.34)\end{aligned}$$

usando el teorema de convergencia monotona, al tomar el límite cuando $\varepsilon \downarrow 0$ en la expresión de arriba y tomando en cuenta que $u_0 \le \psi$, obtenemos

$$u_0(x) \le \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge T} e^{-\alpha t} f(y(t,x))\,\mathrm{d}t + e^{-\alpha(\tau\wedge T)} \psi(y(\tau\wedge T, x))\right]. \qquad (4.35)$$

Ahora pasamos al límite cuando $T \to \infty$ para llegar a que

$$u_0(x) \leq J(x,\tau), \quad \forall\, x \in C_\infty(\mathcal{O}),\, \tau \in \mathcal{T}, \tag{4.36}$$

por lo tanto $u_0 \leq \hat{u}$, con $\hat{u}$ dado en (4.2).

Por otro lado, consideremos el tiempo de paro τ_ε dado por

$$\tau_\varepsilon := \text{ínf}\{t \geq 0 : u_\varepsilon(y(t,x)) \geq \psi(y(t,x))\}. \tag{4.37}$$

Nuevamente por (4.6), tenemos que

$$u_\varepsilon(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_\varepsilon \wedge T} e^{-\alpha t} f(x)\,\mathrm{d}t + e^{-\alpha(\tau_\varepsilon \wedge T)} u_\varepsilon(y(\tau_\varepsilon \wedge T, x))\right]. \tag{4.38}$$

Además, se tiene que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ implica $u_\varepsilon \geq u'_\varepsilon$, y esto a su vez implica $\tau_\varepsilon \leq \tau_{\varepsilon'}$, es decir, $\varepsilon \mapsto \tau_\varepsilon$ es decreciente. Definamos $\tau_0 := \text{lím}_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_\varepsilon \leq \infty$. Haciendo tender $T \to \infty$ y luego $\varepsilon \downarrow 0$ en (4.38) obtenemos $u_0(x) = J(x,\tau_0)$. Lo cual prueba que $u_0 = \hat{u}$, observando la expresión (4.36).

(c) Dado que $u_\varepsilon \geq \hat{u}$, se tiene que si $t \geq 0$ es tal que $\hat{u}(y(t,x)) = \psi(y(t,x))$, entonces $u_\varepsilon(y(t,x)) \geq \psi(y(t,x))$ para todo $x \in \mathcal{O}$ y por lo tanto $\hat{\tau} \geq \tau_\varepsilon$. Al tomar el límite cuando $\varepsilon \downarrow 0$, obtenemos $\tau_0 \leq \hat{\tau}$.

Por otra parte, dado que $\varepsilon \mapsto \tau_\varepsilon$ es decreciente se cumple únicamente una de las dos siguientes afirmaciones: la primera es que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\tau_\varepsilon = \tau_0$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, y la segunda es tenemos que $\tau_\varepsilon < \tau_0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Si se cumple la primera afirmación, entonces dado $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ tenemos que $u_\varepsilon(y(\tau_\varepsilon,x)) \geq \psi(y(\tau_\varepsilon,x))$ y como $\tau_\varepsilon = \tau_0$ entonces se tiene que $u_\varepsilon(y(\tau_0,x)) \geq \psi(y(\tau_0,x))$ y haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos $u(y(\tau_0,x)) \geq \psi(y(\tau_0,x))$ lo cual implica que $\tau_0 \geq \hat{\tau}$.

Si se cumple la segunda afirmación, por ser $y(t,x)$ un proceso cuasi-continuo por la izquierda [véase [9], Proposición 25.20, p. 501], y ya que $\tau_\varepsilon \uparrow \tau_0$ y $\tau_\varepsilon < \tau_0$, se tiene que $\lim_{\varepsilon\to 0} y(\tau_\varepsilon, x) = y(\tau_0, x)$, luego $\hat{u}(y(\tau_0, x)) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(y(\tau_\varepsilon, x)) \geq \psi(y(\tau_0, x))$ lo cual quiere decir que $\tau_0 \geq \hat{\tau}$. Por lo tanto $\tau_0 = \hat{\tau}$

(d) Para probar que se cumple la desigualdad de Lewy-Stampachhia (4.28), interpretada en el sentido del semigrupo (4.26) , consideremos la ecuación lineal

$$v_\varepsilon \in D(\mathcal{A}_\alpha) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}_{\alpha+1/\varepsilon} v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+. \tag{4.39}$$

Note que, por (4.4) y (4.13), tenemos

$$f - \mathcal{A}_\alpha u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^+ \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{R}_{\alpha+1/\varepsilon}(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+ = v_\varepsilon. \tag{4.40}$$

Tomando en cuenta que

$$v_\varepsilon = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon}\Phi_{\alpha+1/\varepsilon}(t)(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+ \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t}\Phi_\alpha(\varepsilon t)(f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+ \,\mathrm{d}t,$$

obtenemos $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} v_\varepsilon = (f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+$ en $C_\infty(\mathcal{O})$, mediante convergencia dominada. Luego por (4.40) tenemos $f - v_\varepsilon \leq \mathcal{A}_\alpha u_\varepsilon$, que en el sentido del semigrupo se expresa como

$$u_\varepsilon \geq \Phi_\alpha(t) u_\varepsilon + \int_0^t \Phi_\alpha(s)(f - v_\varepsilon)\,\mathrm{d}s, \tag{4.41}$$

haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos

$$\hat{u} \geq \Phi_\alpha(t)\hat{u} + \int_0^t \Phi_\alpha(s)(f - (f - \mathcal{A}_\alpha \psi)^+)\,\mathrm{d}s = \Phi_\alpha(t)\hat{u} + \int_0^t \Phi_\alpha(s)(f \wedge \mathcal{A}_\alpha \psi)\,\mathrm{d}s, \tag{4.42}$$

es decir, $\mathcal{A}_\alpha \hat{u} \geq f \wedge \mathcal{A}_\alpha \psi$. La desigualdad $\mathcal{A}\hat{u} \leq f$ ya la hemos probado gracias al Teorema 4.1.3 (a) y (b), y por lo tanto se cumple (4.28).

□

4.4. Ejemplo: Tiempo óptimo de compra/venta de activos.

Un problema clásico de tiempo de paro puede ser formulado como el siguiente juego: asuma que $y(t,x)$ representa el precio de un activo financiero y sea K un precio de ejercicio (compra o venta) del activo que el jugador pacta en el instante $t=0$. Supongamos que el jugador tiene la libertad de parar el juego (realizar la compra/venta) en cualquier tiempo τ y como consecuencia, éste recibe la ganancia

$$J(x,\tau)=\mathbb{E}\big[e^{-\alpha\tau}F(y(x,\tau),K)\big],$$

para alguna función $F:\mathbb{R}^2_+$, donde $y(x,0)=x$ (precio inicial de la acción) y donde $e^{-\alpha t}>0$ representa un cierto factor de descuento ($\alpha>0$). En este caso, el jugador no recibe ganancia alguna hasta no parar el juego. Una función F que se usa frecuentemente en la teoría financiera, es aquella de la forma $F(x,k)=(x-K)^+$ o $F(x,k)=(K-x)^+$ y el proceso $y(t,x)$ es comúnmente representado por medio de un movimiento browniano geométrico de la forma

$$dy(t,x)=y(t,x)[\kappa dt+\beta dB(t)],$$

con α, β constantes dadas y $B(t)$ un movimiento browniano estándar, con condiciones usuales para la existencia (fuerte o débil) y unicidad de una solución.

De nuestros resultados anteriores, podemos ver que el costo óptimo $\sup_\tau J(x,\tau)$ es la máxima subsolución de la ecuación variacional

$$\text{máx}\left\{\beta^2x^2u''(x)/2+\kappa xu'(x)-\alpha u\ ,\ F-u\right\}=0,\quad x>0.$$

El problema anterior se puede ver como un caso especial del problema de opciones Americanas. Dicho problema tiene solucion explícita inclusive en dinámicas más generales, ver por ejemplo Oksendal & Sulem [12], páginas 31 a 36.

4.4.1. Variante 1: Problemas de comienzo y parada óptimos

Asuma ahora que el jugador tiene la libertad de escoger dos tiempos: el primero de ellos, τ_1, es el tiempo de comienzo del juego y el segundo, τ_2, es el tiempo de parada del juego, por supuesto $\tau_1 \leq \tau_2$ y ambos se asumen ser tiempos de paro con respecto a la filtración del proceso $y(\cdot, x)$. Consideremos el siguiente costo

$$J(x, \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}\big[\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\alpha t} f(y(t, x(t)))dt + e^{-\alpha\tau_1}\varphi(y(x, \tau_1)) + e^{-\alpha\tau_2}\psi(y(x, \tau_2))\big],$$

y sea $\hat{u}(x) := \inf_{\tau_1,\tau_2} J(x, \tau_1, \tau_2)$ el costo óptimo. Entonces, de nuestra teoría desarrollada en las secciones anteriores, podemos verificar que si consideramos el conjunto de funciones $(u, v) \in C_\infty(\mathcal{O})$ tales que

$$\begin{aligned} u, v &\in C_\infty(\mathcal{O}), \\ u &\leq \psi, \\ v &\leq \Phi_\alpha(t)v + \int_0^t \Phi_\alpha(s) f ds \\ u &\leq \varphi + v \\ u &\leq \Phi_\alpha(t)u, \end{aligned}$$

entonces este conjunto tiene una solución maximal $(\bar{u}, \bar{v})$ y $\bar{u}$ coincide con el costo óptimo $\hat{u}$. Además, el óptimo (τ_1^*, τ_2^*) se puede obtener como

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= \inf\{t \geq 0 \ : \ \hat{u}(y(t, x)) = \varphi(y(t, x)) + \hat{v}(y(t, x))\}, \\ \tau_2^* &= \hat{\tau} + \hat{\tau} \circ \theta_{\tau_1^*}, \end{aligned}$$

donde θ es el operador de traslación y $\hat{\tau} = \text{ínf}\{t \geq 0 \ : \ \hat{v}(y(t,x)) = \psi(y(t,x))\}$. Intuitivamente, τ_2^* es el primer tiempo posterior a τ_1^* tal que $\hat{v} = \psi$.

Capítulo 5

Control impulsivo

5.1. Control impulsivo

En el problema de tiempo de paro óptimo, se decide entre parar o continuar con la evolución del sistema dinámico estocástico $y(t,x)$. Permitir que el sistema evolucione provoca un costo $f(y(t,x))$, mientras que al detenerlo al tiempo τ (variable aleatoria), se genera un costo final dado por $\psi(y(\tau,x))$. Ahora abordaremos el problema de encontrar de manera secuencial tiempos óptimos de parada del sistema y en cada uno de ellos aplicar una discontinuidad (impulso) al estado del sistema, misma que podamos controlar de manera óptima. Este tipo de problemas se pueden ver como una sucesión de tiempos de paro óptimo.

Sean $\mathcal{O}$ un espacio de Banach separable y $y(t,x)$ un proceso de Markov homogéneo con condición inicial $x \in \mathcal{O}$. Consideremos un parámetro de control k que pertenece a un conjunto compacto $K \subset \mathcal{O}$ y una función de transición dada por

$$\xi_k(i+1) = X(\xi_k(i), k), \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \tag{5.1}$$

donde $X : \mathcal{O} \times K \to \mathcal{O}$ es una función medible y continua en $\mathcal{O} \times K$ con las siguientes condiciones:

existe una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en K tal que

$$\lim_{n\to\infty} |X(x, k_n)| = \infty, \tag{5.2}$$

y

$$|X(x, k)|^m \leq C_m(1 + |x|^m), \quad \forall\, k \in K,\, x \in \mathcal{O}, \tag{5.3}$$

para todo $m \geq 0$, donde C_m son constantes positivas. La condición (5.3) es esencialmente una propiedad de suavidad para la función de transición $X(\xi, k)$.

Vamos a referirnos a una política de control impulsiva como una sucesión $\pi = \{\tau_i, k_i; i = 1, 2, \ldots\}$ donde τ_i es una sucesión de tiempos de paro tal que $\tau_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$ y k_i es una secuencia de variables aleatorias con valores en K.

Al tiempo $t = \tau_i$ el sistema tiene un impulso descrito por la función de transición controlada X con $k = k_i$ mientras que entre dos tiempos de paro consecutivos $\tau_i \geq t < \tau_{i+1}$ el sistema evoluciona conforme al proceso (no controlado), $y(t, x)$. Es decir,

$$\begin{cases} z^\pi(t, x) = y(t; \tau_i, z^\pi(\tau_i, x)), & \text{si} \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \\ z^\pi(\tau_i, x) = X(z^\pi(\tau_i^-, x), k_i), & \end{cases} \tag{5.4}$$

donde $y(t; s, x)$ es el proceso de Markov (continuo) con condición inicial x al tiempo s y τ_i^- el límite por la izquierda de τ_i.

Si $\tau_i = \tau_{i+1}$ entonces hacemos $\tau_{i+1}^- = \tau_i$ y (5.4) es consistente. Dado que $\tau_i \to \infty$, cuando $i \to \infty$, podemos construir el proceso $z^\pi(t, x)$ mediante iteraciones de (5.4), para cualquier control impulsivo π y condición inicial $x \in \mathcal{O}$. Por lo tanto, la evolución dinámica es un proceso estocástico que no es continuo (incluso no lo es en probabilidad), pero con límites por la izquierda y contino por la derecha.

Note que el control donde todos lo tiempos de paro son $\tau_i = \infty$, $i = 0, 1, \ldots$, es válido y significa que estamos manteniendo la condicion inicial sin alteración, es decir, una decisión de no intervención.

Dado un control $\pi = \{\tau_i, k_i; i \geq 1\}$, a cada impulso k_i le asociamos un costo estrictamente positivo, al cual nos referiremos como *costo por impulso* y dado por la función $l(z, k)$, mientras que, como se mencionó arriba, $f(z)$ representa el costo por permitir que la dinámica z siga evolucionando. Así pues, el costo total para un control π y condición inicial x está dado por

$$J(x, \pi) \coloneqq \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(z^\pi(t, x))\,\mathrm{d}t + \sum_i e^{-\alpha\tau_i} l(z^\pi(\tau_i^-, x), k_i)\Big], \tag{5.5}$$

y con costo óptimo

$$\hat{u}(x) \coloneqq \inf_\pi J(x, \pi), \tag{5.6}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los controles impulsivos y $z^\pi(t, x)$ tiene evolución construida mediante (5.4) con condición inicial x. Las funciones f y l se eligen de manera particular dependiendo de la aplicación.

Además, diremos que un control impulsivo $\hat{\pi}$ es óptimo si

$$\hat{u}(x) = J(x, \hat{\pi}), \quad \forall\, x \in \mathcal{O}. \tag{5.7}$$

5.2. Ecuaciones cuasi-variacionales

El principio de programación dinámica nos conduce a resolver el siguiente problema: Dados $l \in C(\mathcal{O} \times K)$, $l(\cdot, k) \in C_\infty(\mathcal{O})$ $\forall k \in K$, $f \in C_\infty(\mathcal{O})$, $f \geq 0$, hallar la subsolución maximal de la *desigualdad cuasi-variacional*

$$u \in C_\infty(\mathcal{O}) \text{ tal que, } u \leq \mathcal{M}u \text{ y } \mathcal{A}_\alpha u \leq f, \tag{5.8}$$

o equivalentemente, encontrar la subsolución (no necesariamente maximal) de

$$u \in C_\infty(\mathcal{O}) \text{ tal que } u \leq \mathcal{M}u,\ \mathcal{A}_\alpha u \leq f \text{ y } \mathcal{A}_\alpha u = f \text{ en } [u < \mathcal{M}u], \tag{5.9}$$

donde $-\mathcal{A}_\alpha$ es el generador infinitesimal de $y(t,x)$ y $\mathcal{M}$ es el operador no lineal en $C_\infty(\mathcal{O})$ dado por

$$\mathcal{M}h(x) := \inf_k \{l(x,k) + h(X(x,k))\}, \quad \forall\, x \in \mathcal{O}, \tag{5.10}$$

Para resolver (5.8) definimos una sucesión de ecuaciones variacionales por inducción como sigue: hallar la máxima sub-solución de

$$u^{n+1} \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad u^{n+1} \leq \mathcal{M}u^n, \quad \mathcal{A}_\alpha u^{n+1} \leq f, \tag{5.11}$$

para cualquier $n \geq 0$. Donde u^0 es tal que $\mathcal{A}_\alpha u^0 = f$.

En vista del Teorema 4.1.3, solo necesitamos ver que M mapea al espacio $C_\infty(\mathcal{O})$ en sí mismo, para poder obtener la sucesión de solucinoes $\hat{u}^n$.

Una de las principales diferencias entre el control de tipo impulsivo y el de tipo continuo es el costo positivo por impulso, es decir, requerimos que

$$l(x,k) \geq l_0 > 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{O},\ k \in K, \tag{5.12}$$

lo cual evita la acumulación masiva de impulsos pues mientras más impulsos, mayor es el coste que se paga. Como se mencionó en el problema (5.8), vamos a necesitar

$$l \in C(\mathcal{O} \times K), \quad l(\cdot, k) \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \forall\, k \in K, \quad f \in C_\infty(\mathcal{O}) \text{ y } f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{O}, \quad (5.13)$$

para estar en condiciones de establecer la sucesión (5.11).

Un papel importante lo lleva a cabo la función u^0, la cual satisface $\mathcal{A}_\alpha u^0 = f$, así como la función u_0, la cual está definida como la máxima subsolución del problema

$$u_0 \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad u_0 \leq \inf_k l(\cdot, k), \quad \mathcal{A}_\alpha u_0 \leq f. \quad (5.14)$$

Considere nuevamente el problema de máxima subsolución

$$u \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad u \leq \mathcal{M}u, \quad \mathcal{A}_\alpha u \leq f, \quad (5.15)$$

bajo la condición

$$\text{existe} \quad r \in (0, 1] \quad \text{tal que} \quad r u^0(x) \leq u_0(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{O}, \quad (5.16)$$

sobre lo que comentaremos después.

En adelante supondremos que se cumplen las condiciones (5.2), (5.3), (5.12), (5.13) y (5.16).

Lema 5.2.1. *El operador $\mathcal{M}$ definido en (5.10) mapea al espacio $C_\infty(\mathcal{O})$ en sí mismo.*

Demostración. Sea $h \in C_\infty(\mathcal{O})$. Usando el hecho que $\sup_{k \in K} l(\cdot, k) \in C_\infty(\mathcal{O})$ y de (5.3), tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}h(x)| &= \left| \inf_k \{ l(x, k) + h(X(x, k)) \} \right| \leq |l(x, k)| + |h(X(x, k))| \\ &\leq \|l(\cdot, k)\| + \|h\| \leq C + \|h\|, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{O}$ y con $C \geq 0$. Por lo que $\|\mathcal{M}h\| < \infty$.

Sean (x, k) y $(x_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{O}\times K$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n, k_n) = (x, k)$. Se tiene que $\lim_{n\to\infty} l(x_n, k_n) = l(x, k)$ y $\lim_{n\to\infty} X(x_n, k_n) = X(x, k)$. Por lo tanto la función $(x, k) \mapsto l(x, k) + h(X(x, k))$ es continua.

Sean x y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{O}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces

$$\mathcal{M}h(x_n) \leq l(x_n, k) + h(X(x_n, k)), \quad \forall k \in K,$$

lo cual implica

$$\limsup_n \mathcal{M}h(x_n) \leq l(x, k) + h(X(x, k)), \quad \forall k \in K$$

y por lo tanto

$$\limsup_n \mathcal{M}h(x_n) \leq \inf_k \left\{ l(x, k) + h(X(x, k)) \right\} = \mathcal{M}h(x). \tag{5.17}$$

Por otra parte, por definición de ínfimo sabemos que para todos $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathcal{O}$, existe $k^* = k^*(x, \varepsilon) \in K$ tal que

$$\mathcal{M}h(x) \geq l(x, k^*) + h(X(x, k^*)) - \varepsilon. \tag{5.18}$$

Luego, dados $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathcal{O}$ tales que $x_n \to x$ (en la norma de $\mathcal{O}$), se tiene que

$$\liminf_n \mathcal{M}h(x_n) \geq \liminf_n l(x_n, k_n^*) + \liminf_n h(X(x_n, k_n^*)) - \varepsilon. \tag{5.19}$$

Usando la continuidad de los dos términos de la derecha y el hecho de que K es cerrado, obtenemos

$$\liminf_{n} \mathcal{M}h(x_n) \geq l(x, k_\infty^*) + h(X(x, k_\infty^*)) - \varepsilon \geq \mathcal{M}h(x) - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{5.20}$$

para algún $k_\infty^* \in K$. Haciendo $\varepsilon \to 0$, deducimos que

$$\liminf_{n} \mathcal{M}h(x_n) \geq \mathcal{M}h(x). \tag{5.21}$$

De (5.17) y de la desigualdad de arriba se sigue que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}h(x_n) = \mathcal{M}h(x)$ y por lo tanto $\mathcal{M}h$ es una función continua.

Finalmente, tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_n| \to \infty$. Luego, tomemos la sucesión $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dada en la condición (5.2). Así,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}h(x_n)| &= |\inf_{k\in K} \big\{ l(x_n, k) + h(X(x_n, k)) \big\}| \\ &\leq l(x_n, k_m) + h(X(x_n, k_m)) \quad \forall n, m \geq 1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Haciendo $m \to \infty$ en el lado derecho de (5.22), y de la continuidad de X y de h obtenemos que $\lim_{m\to\infty} h(X(x_n, k_m)) = 0$.

Además, como $l \in C(\mathcal{O} \times K)$ y K es cerrado, deducimos que

$$\lim_{m\to\infty} l(x_n, k_m) = l(x_n, k^*), \tag{5.23}$$

para algún $k^* \in K$. De esta manera, haciendo $m \to \infty$ en (5.22) y luego $n \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{M}h(x_n)| = 0, \tag{5.24}$$

después de usar el hecho que $l(\cdot, k) \in C_\infty(\mathcal{O})$, para todo $k \in K$,

Esto prueaba que $\mathcal{M}h \in C_\infty(\mathcal{O})$ para todo $h \in C_\infty(\mathcal{O})$. □

Lema 5.2.2. *El problema* (5.11) *tiene solución para todo $n \geq 1$, además se tiene que la sucesión de soluciones $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es monótona decreciente y cada una es no negativa, es decir,*

$$0 \leq u^n \leq u^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.25}$$

Demostración. Por el lema anterior y el Teorema 4.1.3, tenemos que $\mathcal{M} : C_\infty(\mathcal{O}) \to C_\infty(\mathcal{O})$ entonces el problema (5.11) tiene solución u^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Probaremos ahora que el operador $\mathcal{M}$ es monótono. Como $\mathcal{M}$ preserva la suma de funciones basta probar que $h \geq 0$ implica $\mathcal{M}h \geq 0$. Sea pues $h \in C_\infty(\mathcal{O})$ con $h \geq 0$ y $x \in \mathcal{O}$, como la función l es no negativa, entonces tenemos

$$l(x, k) + h(X(x, k)) \geq 0,$$

para todo $k \in K$, luego, al tomar el ínfimo sobre $k \in K$ obtenemos que $\mathcal{M}h(x) \geq 0$, de lo cual se sigue que $\mathcal{M}$ es un operador monótono.

Para probar (5.25) procederemos por inducción. Sea $u^0 \in D_p(\mathcal{A}_\alpha)$ tal que $\mathcal{A}_\alpha u^0 = f$, es decir $u^0 = \mathcal{R}_\alpha f$. Por la monotonía de la resolvente se tiene que $u^0 \geq 0$ pues $f \geq 0$. Como u^1 es subsolución maximal del problema

$$v \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad v \leq \mathcal{M}u^0, \quad \mathcal{A}_\alpha v \leq f, \tag{5.26}$$

entonces tenemos que $u^1 \leq \mathcal{R}_\alpha f = u^0$. Además note que la función constante $0 \in C_\infty(\mathcal{O})$ es subsolución del problema anterior, pues como $u^0 \geq 0$ y $l \geq l_0 > 0$ entonces $0 \leq \mathcal{M}u^0$ y $\mathcal{A}_\alpha 0 = 0 \leq f$, y al ser u^1 subsolución maximal se sigue que $u^1 \geq 0$.

Hemos probado que $0 \leq u^1 \leq u^0$, ahora supongamos que se cumple $0 \leq u^n \leq u^{n-1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y mostremos que también se cumple $0 \leq u^{n+1} \leq u^n$.

Por la hipótesis de inducción y por ser u^{n+1} subsolución de una ecuación cuasivariacional de la forma (5.11) deducimos que $u^{n+1} \leq \mathcal{M}u^n \leq \mathcal{M}u^{n-1}$ y $\mathcal{A}_\alpha u^{n+1} \leq f$. Al ser u^n subsolución maximal del problema

$$v \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad v \leq \mathcal{M}u^{n-1}, \quad \mathcal{A}_\alpha v \leq f, \tag{5.27}$$

concluimos que $u^{n+1} \leq u^n$. Además, como $u^n \geq 0$ tenemos que $\mathcal{M}u^n \geq 0$ y $\mathcal{A}_\alpha 0 = 0 \leq f$, como u^{n+1} es maximal se sigue que $u^{n+1} \geq 0$. □

De (5.25) definimos a la función u como el límite (monótono y puntual) de la sucesión $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, es decir, $u(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} u^n(x)$. El siguiente teorema afirma que tal convergencia se tiene también en norma y muestra una caracterización de u.

Teorema 5.2.3. *Se tiene que* $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$.

Demostración. Primero defina al operador no lineal $v \mapsto u = T(v)$, que asigna a v la sub-solución maximal del problema

$$u \in C_\infty(\mathcal{O}) \quad \text{tal que} \quad u \leq Mv, \quad \mathcal{A}_\alpha u \leq f. \tag{5.28}$$

El operador T es monótono (creciente), en efecto, sean $u, v \in C_\infty(\mathcal{O})$ tales que $u \leq v$. Entonces $\mathcal{M}u \leq \mathcal{M}v$ lo cual implica que $T(u) \leq \mathcal{M}v$ y como $T(v)$ es maximal entonces $T(u) \leq T(v)$.

El operador T es concavo, en efecto, sea $\theta \in [0,1]$ y $u, v \in C_\infty(\mathcal{O})$. Entonces $\theta T(u) \leq \theta \mathcal{M} u$, y $(1-\theta)T(v) \leq (1-\theta)\mathcal{M} v$, luego

$$\theta T(u) + (1-\theta)T(v) \leq \theta \mathcal{M} u + (1-\theta)\mathcal{M} v \leq \mathcal{M}(\theta u + (1-\theta)v),$$

donde la última desigualdad se da por las propiedades del ínfimo.

Además, como $\mathcal{A}_\alpha$ es lineal tenemos que $\mathcal{A}_\alpha[\theta T(u) + (1-\theta)T(v)] \leq \theta f + (1-\theta) f = f$. Esto implica que $\theta T(u) + (1-\theta)T(v)$ es subsolución de (5.28). En consecuencia

$$\theta T(u) + (1-\theta)T(v) \leq T(\theta u + (1-\theta)v),$$

ya que esta última es la subsolución maximal.

Por otro lado, la condición (5.16) junto con las definiciones de u_0 y de T en (5.14) y (5.28) nos dan que $T(0) = u_0 \geq r u^0$, lo cual junto con la monotonía y concavidad de T implican que

$$\begin{cases} \text{si} \quad T(v) \leq u^0 \quad \text{y} \quad v - u \leq \theta v, \\ \text{entonces} \quad T(v) - T(u) \leq \theta(1-r)T(v), \end{cases} \tag{5.29}$$

con el mismo $0 < r < 1$. En efecto, del primer renglón en (5.29), tenemos que $\theta 0 + (1-\theta)v \leq u$, luego entonces

$$T(u) \geq T(\theta 0 + (1+\theta)v) \geq \theta T(0) + (1-\theta)T(v). \tag{5.30}$$

Así, usando el hecho de que $T(0) \geq r u^0$ y de nuevo del primer renglón de (5.29), concluimos que

$$T(v) - T(u) \leq \theta T(v) - \theta T(0) \leq \theta T(v) - \theta r u^0 \leq \theta(1-r)T(v). \tag{5.31}$$

Por lo tanto, en vista de que $u^{n+1} = T(u^n)$, podemos iterar (5.29) como sigue. De la desigualdad $\mathcal{A}_\alpha T(u^0) \leq f$ obtenemos que $u^1 = T(u^0) \leq \mathcal{R}_\alpha f = u^0$, lo cual junto con $u^n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, también implica que $0 \leq u^0 - u^1 \leq u^0$. Así, las condiciones del primer renglón de (5.29) se satisfacen. Por tanto con $\theta = 1$ conseguimos $0 \leq u^1 - u^2 \leq (1-r)u^1$. Usando inductivamente la expresión (5.29) obtenemos con $\theta = (1-r)^{n-1}$ lo siguiente,

$$0 \leq u^n - u^{n+1} \leq (1-r)u^0, \tag{5.32}$$

después de notar que $u^n \leq u^0$. Luego, la sucesión $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C_\infty(\mathcal{O})$ y por lo tanto existe $\tilde{u} \in C_\infty(\mathcal{O})$ tal que $u^n \to \tilde{u}$, en norma. Pero como $u^n \to u$ puntualmente, se tiene que $\tilde{u} = u$. $\square$

5.3. Caracterización del costo óptimo

El siguiente teorema nos muestra que el costo óptimo en (5.6) resulta ser subsolución del problema (5.8), así como la existencia del control óptimo.

Antes de proceder con el teorema, vamos a suponer que para cada control impulsivo π existe un espacio de probabilidad $\mathbb{P}^\pi, \Omega$ tal que el proceso $z^\pi(t,x)$ es de Markov, denotamos por $\mathcal{F}_s^\pi$ al sigma álgebra generada por dicho proceso y por $\mathbb{E}^\pi$ a la esperanza asociada a $\mathbb{P}^\pi$, véase [[14], p. 89].

Teorema 5.3.1. *(a) La función límite u del Teorema 5.2.3, es el elemento maximal del conjunto de funciones que satisfacen la desigualdad cuasi-variacional* (5.15).

(b) Se tiene que $u(x) = \hat{u}(x)$, es decir, el costo óptimo $\hat{u}$ en (5.6) *es subsolución maximal de la desigualdad variacional* (5.15)*. Además existe un control impulsivo óptimo.*

Demostración. (a) Procederemos por inducción. Sea v una función arbitraria en $C_\infty(\mathcal{O})$

que satisface la desigualdad cuasi-variacional (5.15), entonces $v \leq \mathcal{A}_\alpha^{-1} f = u^0$. Supongamos que se cumple $v \leq u^n$ y probemos que se tiene $v \leq u^{n+1}$. Dado que v satisface la desigualdad cuasi-variacional (5.15) por la hipótesis de inducción y la monotonía del operador $\mathcal{M}$ tenemos que $v \leq \mathcal{M}v \leq \mathcal{M}u^n$ y $\mathcal{A}_\alpha v \leq f$, es decir, v satisface la desigualdad variacional (5.11) para n, pero como u^{n+1} es subsolución maximal de dicha desigualdad variacinal, obtenemos que $v \leq u^{n+1}$. Por lo tanto $v \leq u^n$ para todo $n \geq 0$, haciendo $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, llegamos a que $v \leq u$.

(b) Sea $\pi = \{\tau_i, k_i : i \geq 1\}$. De las desigualdades $u \leq \mathcal{M}u$ y $\mathcal{A}_\alpha u \leq f$ se sigue que

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \mathbb{E}^\pi [e^{-\alpha\tau_1} u(y(\tau_1, x)) + \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha s} f(y(s,x))\, \mathrm{d}s] \\ &= \mathbb{E}^\pi [e^{-\alpha\tau_1} u(z^\pi(\tau_1^-, x)) + \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha s} f(z^\pi(s,x))\, \mathrm{d}s]; \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha\tau_1} u(z^\pi(\tau_1^-, x)) &\leq e^{-\alpha\tau_1} l(z^\pi(\tau_1^-, x), k_1) + e^{-\alpha\tau_1} u(X(z^\pi(\tau_1^-, x), k_1)) \\ &= e^{-\alpha\tau_1} l(z^\pi(\tau_1^-, x), k_1) + e^{-\alpha\tau_1} u(z^\pi(\tau_1, x)). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Nuevamente usando $\mathcal{A}_\alpha u \leq f$ y $u \leq \mathcal{M}u$, obtenemos que

$$\begin{aligned}e^{-\alpha\tau_1}u(z^\pi(\tau_1,x)) \leq& e^{-\alpha\tau_1}\mathbb{E}^\pi[e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}u(y(\tau_2-\tau_1,z^\pi(\tau_1,x)))\\ &+\int_0^{\tau_2-\tau_1} e^{-\alpha s}f(y(s,z^\pi(\tau_1,x)))\,\mathrm{d}s]\\ =& e^{-\alpha\tau_1}\mathbb{E}^\pi[e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}u(z^\pi(\tau_2^- -\tau_1,z^\pi(\tau_1,x)))\\ &+\int_0^{\tau_2-\tau_1} e^{-\alpha s}f(z^\pi(s,z^\pi(\tau_1,x)))\,\mathrm{d}s]\\ =& e^{-\alpha\tau_1}\mathbb{E}^\pi[e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}u(z^\pi(\tau_2^-,x))\\ &+\int_0^{\tau_2-\tau_1} e^{-\alpha s}f(z^\pi(\tau_1+s,x))\,\mathrm{d}s\big|\mathcal{F}^\pi_{\tau_1}]\\ =&\mathbb{E}^\pi[e^{-\alpha\tau_2}u(z^\pi(\tau_2^-,x))+\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\alpha s}f(z^\pi(s,x))\,\mathrm{d}s\big|\mathcal{F}^\pi_{\tau_1}];\end{aligned}\tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}e^{-\alpha\tau_2}u(z^\pi(\tau_2^-,x)) \leq& e^{-\alpha\tau_2}l(z^\pi(\tau_2^-,x),k_2)+e^{-\alpha\tau_2}u(X(z^\pi(\tau_2^-,x),k_2))\\ =& e^{-\alpha\tau_2}l(z^\pi(\tau_2^-,x),k_2)+e^{-\alpha\tau_2}u(z^\pi(\tau_2,x)).\end{aligned}\tag{5.36}$$

Sustituyendo (5.34) en (5.33) y (5.36) en (5.35), obtenemos

$$u(x)\leq \mathbb{E}^\pi[\int_0^{\tau_1} e^{-\alpha s}f(z^\pi(s,x))\,\mathrm{d}s+e^{-\alpha\tau_1}l(z^\pi(\tau_1^-,x),k_1)+e^{-\alpha\tau_1}u(z^\pi(\tau_1,x))]\tag{5.37}$$

y

$$\begin{aligned}e^{-\alpha\tau_1}u(z^\pi(\tau_1,x)) \leq& \mathbb{E}^\pi[\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\alpha s}f(z^\pi(s,x)))\,\mathrm{d}s+e^{-\alpha\tau_2}l(z^\pi(\tau_2^-,x),k_2)\\ &+e^{-\alpha\tau_2}u(z^\pi(\tau_2,x))\big|\mathcal{F}^\pi_{\tau_1}].\end{aligned}\tag{5.38}$$

Sustituimos (5.38) en (5.37) y usamos la propiedad de la esperanza iterada, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} u(x) \leq & \mathbb{E}^{\pi}[\int_0^{\tau_2} e^{-\alpha s} f(z^{\pi}(s,x))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\tau_1} l(z^{\pi}(\tau_1^-,x),k_1) + e^{-\alpha\tau_2} l(z^{\pi}(\tau_2^-,x),k_2) \\ & + e^{-\alpha\tau_2} u(z^{\pi}(\tau_2,x))]. \end{aligned} \tag{5.39}$$

De manera similar se llega a la desigualdad

$$u(x) \leq \mathbb{E}^{\pi}[\int_0^{\tau_n} e^{-\alpha s} f(z^{\pi}(s,x))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha\tau_i} l(z^{\pi}(\tau_i^-,x),k_1) + e^{-\alpha\tau_n} u(z^{\pi}(\tau_n,x))]. \tag{5.40}$$

Dado que $\tau_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$, se tiene que $e^{-\tau_i} \to 0$, cuando $i \to \infty$. Además tenemos que $|u(z^{\pi}(\tau_n,x))| \leq \|u\|$, por lo tanto $e^{-\alpha\tau_n} u(z^{\pi}(\tau_n,x)) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Así pues, tomando el límite cuando $n \to \infty$ en (5.40) llegamos a que

$$u(x) \leq \mathbb{E}^{\pi}[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} f(z^{\pi}(s,x))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha\tau_i} l(z^{\pi}(\tau_i^-,x),k_1)] = J(x,\pi). \tag{5.41}$$

Como π es un control impulsivo arbitrario concluimos que

$$u(x) \leq \hat{u}(x). \tag{5.42}$$

Ahora exhibiremos un control impulsivo óptimo como en (5.7). Definimos al control impulsivo $\hat{\pi} = \{\hat{\tau}_i, \hat{k}_i : i \geq 1\}$, como el control donde los tiempos de paro $\hat{\tau}_i$ están dados por:

$$\begin{cases} \hat{\tau}_1 = \bar{\tau}_1 := \text{ínf}\{t \geq 0 : u(y(t,x)) = \mathcal{M}u(y(t,x))\}, \\ \bar{\tau}_i := \text{ínf}\{t \geq 0 : u(y(t, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_{i-1}, x))) = \mathcal{M}u(y(t, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_{i-1}, x)))\}, \\ \hat{\tau}_i = \bar{\tau}_i + \hat{\tau}_{i-1}, \quad \forall\, i \geq 2, \end{cases} \tag{5.43}$$

y las variables de control aleatorias k_i dadas mediante:

$$\begin{cases} \hat{k}_1 & := & \arg\text{mín}\{l(y(\bar{\tau}_1, x), k) + u(X(y(\bar{\tau}_1, x), k)) : k \in K\}, \\ \hat{k}_i & := & \arg\text{mín}\{l(y(\bar{\tau}_i, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_{i-1}, x)), k) + u(X(y(\bar{\tau}_i, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_{i-1}, x)), k)) : k \in K\} \\ & = & \arg\text{mín}\{l(y(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i-1}, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_{i-1}, x)), k) + u(X(y(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i-1}, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_{i-1}, x)), k)) : \\ & & k \in K\}, \quad \forall\, i \geq 2. \end{cases}$$

Supongamos que $\hat{\tau}_1 > 0$, entonces $u(x) < \mathcal{M}u(x)$ y luego por (5.9) se tiene que $u(x) = \mathcal{A}_\alpha^{-1} f(x)$, lo cual, en el sentido del semigrupo equivale a

$$u(x) = \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\hat{\tau}_1} e^{-\alpha s} f(y(s,x))\, \mathrm{d}s + e^{-\alpha \hat{\tau}_1} u(y(\hat{\tau}_1, x))]. \tag{5.44}$$

Además, por las definiciones de $\hat{\tau}_1$ y $\hat{k}_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} u(y(\hat{\tau}_1, x)) = \mathcal{M}u(y(\hat{\tau}_1, x)) &= l(y(\hat{\tau}_1, x), \hat{k}_1) + u(X(y(\hat{\tau}_1^-, x), \hat{k}_1)) \\ &= l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1^-, x), \hat{k}_1) + u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)). \end{aligned} \tag{5.45}$$

Sustituyendo (5.45) en (5.44) llegamos a la igualdad,

$$u(x) = \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\hat{\tau}_1} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s,x))\, \mathrm{d}s + e^{-\alpha \hat{\tau}_1} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1^-, x), \hat{k}_1) + e^{-\alpha \hat{\tau}_1} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x))]. \tag{5.46}$$

Si $\hat{\tau}_1 = 0$ entonces (5.46) se cumple trivialmente.

Supongamos ahora que $\hat{\tau}_2 > 0$, entonces $u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)) = \mathcal{A}_\alpha^{-1} f(z^\pi(\hat{\tau}_1, x))$ que en el sentido del semigrupo nos da

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha\hat{\tau}_1} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)) &= e^{-\alpha\hat{\tau}_1} \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\bar{\tau}_2} e^{-\alpha s} f(y(s, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\bar{\tau}_2} u(y(\bar{\tau}_2, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)))] \\
&= \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1} e^{-\alpha(s+\hat{\tau}_1)} f(z^{\hat{\pi}}(s + \hat{\tau}_1, x))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x))\big|\mathcal{F}_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\pi}}] \\
&= \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\tau}_2} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s, x)))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x))\big|\mathcal{F}_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\pi}}],
\end{aligned} \tag{5.47}$$

mientras que por las definiciones de $\bar{\tau}_2$, $\hat{\tau}_2$ y $\hat{k}_2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\hat{\pi}}[e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x))\big|\mathcal{F}_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\pi}}] =& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(y(\bar{\tau}_2, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)))] \\
=& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[e^{-\alpha\hat{\tau}_2} \mathcal{M}u(y(\bar{\tau}_2, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)))] \\
=& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[e^{-\alpha\hat{\tau}_2} l(y(\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)), \hat{k}_2) \\
& + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(X(y(\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1, z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)), \hat{k}_2))] \\
=& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[e^{-\alpha\hat{\tau}_2} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x), \hat{k}_2) + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2, x), \hat{k}_2)\big|\mathcal{F}_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\pi}}]
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Sustituyendo (5.48) en (5.47) obtenemos la expresión,

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha\hat{\tau}_1} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1, x)) =& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\tau}_2} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s, x))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x), \hat{k}_2) \\
& + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2, x), \hat{k}_2)\big|\mathcal{F}_{\tau_1}^{\hat{\pi}}].
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Después sustituimos (5.49) en (5.46)

$$
\begin{aligned}
u(x) =& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\hat{\tau}_1} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s,x))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\hat{\tau}_1} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1^-, x), \hat{k}_1) \\
&+ \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_{\hat{\tau}_1}^{\hat{\tau}_2} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s,x))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x), \hat{k}_2) + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2, x), \hat{k}_2) \big| \mathcal{F}^{\hat{\pi}}_{\tau_1}]] \\
=& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\hat{\tau}_2} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s,x))\,\mathrm{d}s + e^{-\alpha\hat{\tau}_1} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_1^-, x), \hat{k}_1) + e^{-\alpha\hat{\tau}_2} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2^-, x), \hat{k}_2) \\
&+ e^{-\alpha\hat{\tau}_2} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_2, x))].
\end{aligned} \tag{5.50}
$$

Siguiendo los pasos para llegar a la expresión (5.50) podemos obtener,

$$
\begin{aligned}
u(x) =& \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\hat{\tau}_n} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s,x))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha\hat{\tau}_n} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_n^-, x), \hat{k}_i) \\
&+ e^{-\alpha\hat{\tau}_n} u(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_n, x))].
\end{aligned} \tag{5.51}
$$

Y como en (5.41) al tomar el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$
u(x) = \mathbb{E}^{\hat{\pi}}[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} f(z^{\hat{\pi}}(s,x))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha\hat{\tau}_n} l(z^{\hat{\pi}}(\hat{\tau}_n^-, x), \hat{k}_i)].
$$

Por lo tanto $u(x) = J(x, \hat{\pi})$ y luego $u = \hat{u}$. Además se tiene que $\hat{u} = J(x, \hat{\pi})$, es decir el control impulsivo $\hat{\pi}$ es óptimo.

□

5.4. Ejemplos

En esta sección mostraremos de manera breve algunas aplicaciones de los problemas de control impulsivo. Algunas referencias sobre estas aplicaciones, se pueden consultar por ejemplo en en [5] o [12].

5.4.1. Problema de gestión de materias primas

Consideremos un problema de producción a tiempo continuo en el que se tiene una fábrica que produce un artículo determinado que está compuesto por una serie de insumos o materias primas para su fabricación. Supóngase que el modelo de producción del artículo es conocido y esta dado por un proceso $y(t,x)$ regido por la ecuación diferencial estocástica

$$dy(t,x) = b(y(t,x))dt + \sigma(y(t,x))dB(t), \quad x > 0$$

donde $B(t)$ es un movimiento browniano estándar b y σ son funciones dadas que satisfacen las condiciones usuales para garantizar la existencia (fuerte o débil) de la ecuación anterior. Considere ahora una sucesión de tiempos $\{\tau_1, \tau_2 \cdots\}$ en los que es "preciso" reabastecer la materia prima así como la cantidad "precisa" de materia prima $\{k_1, k_2 \cdots\}$, ambos para solventar la producción.

Denotando por $\pi = \{\tau_1, k_1, \tau_2, k_2, \cdots\}$ la sucesión de tiempos y abastecimientos a lo largo del tiempo, se sigue entonces que el proceso de reabastecimiento de materia prima $z^\pi(\cdot)$ se rige por la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} dz^\pi(t,x) &= -\gamma dy(t, \tau_i, z^\pi(\tau_i, x)) \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \\ z^\pi(\tau_i, x) &= z^\pi(\tau_i -, z^\pi(\tau_{i-1}, x)) + k_i, \end{aligned}$$

donde, como en secciones anteriores, $y(t,s,x)$ representa el proceso y al tiempo t con condicion inicial x al tiempo s.

Nuestra función a minimizar consiste en un costo de producción/reabastecimiento a lo largo del tiempo el cual es definido como

$$J(x,\pi) = \mathbb{E}^{\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(z^{\pi}(x,t))dt + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha \tau_i} c_i k_i\right],$$

donde f, c_i representan la función de costo de producción y el costo de abastecimiento por unidad al tiempo τ_i, respectivamente.

Este problema tiene solución considerando a los tiempos óptimos de reabastecimiento de materia prima así como a la cantidad óptima de materia prima mediante las relaciones (5.43) y (5.44), respectivamente.

5.4.2. Problema de mantenimiento y control de calidad.

Considere un problema de mantenimiento o reemplazamiento de máquinas a lo largo del tiempo. Para fijar ideas, supongamos que tenemos un solo tipo de máquina y que su proceso de deterioro está dado a través de un proceso de Markov no decreciente $y(t,x)$ y no negativo [1], de tal manera que el deterioro de la máquina se mide de acuerdo al valor positivo que tome el proceso, siendo el estado 0 el estado en el que la máquina esta nueva.

Considere ahora la sucesión $\pi = \{\tau_1, \tau_2 \cdots\}$ tales que τ_i es el tiempo en el que la máquina se reemplaza por una nueva. Definimos el proceso $z^{\pi}(t,x)$ como en (5.2) de tal manera que la transición X esta dada por $X(x,k) = -x$ (observe que en este problema, el control k_i no es necesario).

Denotando por $f(x)$ el costo por deterioro de la máquina y por c_i el costo de una máquina

[1] Vea [5] para algunos casos especiales de dinámicas. También puede considerar para este tipo de dinámicas un procesos de Lévy de tipo subordinador.

nueva al tiempo τ_i, deseamos minimizar el costo

$$J(x,\pi) = \mathbb{E}^{\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(z^{\pi}(x,t))dt + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha\tau_i} c_i\right].$$

a través de una sucesión óptima $\pi = \{\tau_1, \tau_2 \cdots\}$ de tiempos de reemplazo.

De manera similar al ejemplo anterior, los tiempos óptimos se pueden calcular mediante la relación (5.43).

Bibliografía

[1] Aliprantis, C. D., Border K. C.: *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1994).
http://dx.doi.org/10.1007/3-540-29587-9

[2] Anderson, J. W.:*Continuous-Time Markov Chains: an applications-oriented approach*. Springer-Verlag, New York (1991).

[3] Applebaum, D.: Lévy Processes and Stochastic Calculus. Second Edition. Cambridge University Press, New York, (2009).

[4] Bensoussan, A.: *Stochastic Control by Functional Analysis Methods*, vol 11, Elsevier, New York (1982).

[5] Bensoussan, A., Lions P.L.: *Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control*. North-Hollamd, Amsterdam, (1982).

[6] Bensoussan, A., Lions P.L: *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi Variationnelles*. Dunod, Paris, (1982).

[7] Conway, J. B.: *A Course in Functional Analysis*. Springer New York (1985).
http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3828-5

[8] DELLACHERIE, C., MEYER, P.A.: *Probabilities and Potential: Potential Theory for Discrete and Continuous Semigroups Pt. C.* Volumen 151, North-Holland Math. Studies, Elsevier (2011). ISBN: 008087262X, 9780080872629.

[9] KALLENBERG, O.:*Foundations of modern Probability*, Second Edition. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (2001).

[10] MENALDI, J.L.: *On the optimal stopping time problem for degenerate diffusions. SIAM J. Control Optim.* **18** 697–721. (1980).

[11] MENALDI, J.L.: *Optimal impulse control problems for degenerate diffusions with jumps. Acta Appl. Math.* **8** 165–198. (1987).

[12] OKSENDAL, B., SULEM, A.:*Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg. (2005).

[13] PESKIR, G., SHIRYAEV, A.: *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems.* Birkhäusser Verlag, Basel Switzerland 2006.

[14] ROBIN, M.: *Contrôle impulsionnel des processus de Markov. Optimisation et contrôle*, [math.OC]. Université Paris Dauphine - Paris IX, (1978).

[15] STETTNER, L.: *On some optimal stopping and impulsive control problems with a general discount rate criterion. Probab. Math. Statist.* **10**, pp. 223–245 (1986).

[16] TAIRA, K.: *Semigroups, Boundary Value Problems and Markov Processes.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2014).
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-43696-7

[17] TUDOR, C.: *Procesos estocásticos*, Aportaciones mat. Textos nivel avanzado 2, Sociedad Matemática Mexicana, tercera edición, (2002).