CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Semiaditividad de la capacidad analítica.

T E S I S

Que presenta

CARLOS ANTONIO MARIN MENDOZA

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Director de la tesis: **Dr. Eduardo Santillan Zeron**

Ciudad de México — Febrero, 2018.

Agradecimientos

Primeramente agradezco al Dr. Eduardo Santillan Zeron por su gran apoyo, disposición y ayuda para realizar esta tesis, además de los excelentes cursos que me impartió durante la maestría. Al Dr. Enrique Ramírez de Arellano le agradezco por sus observaciones para la tesis, además de su buen trato y consejos al iniciar mi maestría como su alumno asesorado. También le agradezco al Dr. Luis Manuel Tovar por ser otra vez mi sinodal y por las correcciones que hizo para este trabajo.

De manera especial quisiera agradecer al Dr. Ruy Fábila Monroy y al Dr. Héctor Jasso Fuentes por brindarme la oportunidad de entrar como candidato a la maestría. Y al Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino por aceptarme como alumno del departamento de matemáticas. Agradezco a todo el personal administrativo del Departamento de Matemticas, en especial a Roxana Martínez, por su buena disposición y excelente trabajo que realiza en el departamento de Matemáticas.

De manera personal agradezco a mis padres Carlos y Matilde porque nunca dudaron que podía llegar hasta aquí y por todo su apoyo, pues sin él difícilmente lo hubiera logrado. También a mi tía María de Lourdes por su total apoyo y confianza; y porque siempre tenía para mi una taza de té o chocolate para amenizar el estudio. Al buen equipo de trabajo pero sobre todo buenos amigos de la maestría: Nestor, José Luis, Fidel y Rodolfo pues hacían de la escuela y el estudio algo más agradable. A mis amigos Gemma, Lalo, Artuo, Héctor y Olin porque estuvieron conmigo apoyándome durante toda esta etapa.

Finalmente agradezco al CONACYT por la beca de maestría y la beca de obtención de grado otorgadas para la realización del presente trabajo.

Índice general

Resumen.

Para un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, la capacidad analítica $\gamma(E)$ se define como el supremo del módulo de las derivadas de las funciones en el punto al infinito, donde el supremo se toma sobre todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ cuyo modulo está acotado por 1. Dicha capacidad está estrechamente relacionada con los conceptos de singularidades removibles para funciones analíticas acotadas y la dimensión de Hausdorff. Uno de los problemas que se tenía para dicha capacidad era que no se sabía si era semiaditiva para conjuntos compactos arbitrarios, lo cual fue probado en 2003 por Tolsa. Esta tesis tiene como propósito exponer a detalle las propiedades relevantes de la capacidad analítica, así como la demostración de la semiaditividad hecha por Tolsa en [Tolsa].

Abstract.

For a compact set $E \subset \mathbb{C}$, the analytic capacity $\gamma(E)$ is defined as the supremum of the module of the derivatives of the functions at the infinity point, where the supremum is taken over all the analytic functions $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ whose module is bounded by 1. This capacity is closely related to the concepts of removable singularities for bounded analytic functions and the Hausdorff dimension. One of the problems with this capacity was that it was not known if it had the property of being semiadditive for arbitrary compact sets, which was proved in 2003 by Tolsa. This thesis has as purpose to expose in detail the relevant properties of the analytic capacity, as well as the demonstration of the semiadditive made by Tolsa in [Tolsa].

Introducción.

En esta tesis se trabajará con la capacidad analítica, la cual se define para un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ como

$$\gamma(E) = \sup |f'(\infty)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ cuyo modulo está acotado por 1, y $f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$. La capacidad analítica fue introducida por Ahlfors en 1947 con el objetivo de estudiar el problema de Painlevé. Este problema consiste en caracterizar las singularidades removibles para funciones analíticas acotadas (o simplemente removibles) en términos métricos y/o geométricos. Ahlfors demostró que un conjunto compacto en el plano es removible si y sólo si su capacidad analítica es igual a cero (Proposición 1.2.3 en el capítulo 1).

En los años cincuentas Vitushkin utilizó la capacidad analítica mientras estudiaba la aproximación uniforme de funciones analíticas por funciones racionales en conjuntos compactos del plano; dando criterios para la aproximación por funciones racionales en términos de la capacidad analítica, y también para otra capacidad, la capacidad analítica continua (definida en la ecuación (1.1.3)). Mientras trabajaba en este problema, se preguntó si la capacidad analítica era semiaditiva; es decir, si existe una constante absoluta c tal que para todos los conjuntos compactos $E, F \subset \mathbb{C}$ se cumple que

$$\gamma(E \cup F) \leq c(\gamma(E) + \gamma(F)).$$

Para conjuntos compactos, ajenos y conexos Suita probó la subaditividad de γ en 1984, es decir él demostró que la ecuación anterior se cumple con $c = 1$ en éste caso particular. Aún no se sabe si la subaditividad ($c = 1$) se tiene para conjuntos arbitrarios compactos. Mientras que la semiaditividad ($c \geq 1$) de γ para conjuntos compactos arbitrarios fue probada en 2003 por Tolsa (Corolario 4.2.1 en el capítulo 4) usando la comparación entre la capacidad analítica y la capacidad γ_+(Definición 3.1.1 en el capítulo 3).
Otra contribución de Vistushkin se conecta con el problema de Painlevé. Demostró que hay conjuntos compactos con longitud positiva (o medida de Hausdorff 1-dimensional)

que son removibles, por ejemplo el conjunto de cuartos de esquina de Cantor (Ejemplo 1.4.14 del capítulo 1) y conjeturó que todos los conjuntos removibles son de esta forma, a ésta se llamo la conjetura de Vitushkin y permaneció abierta por varios años.

Dada una medida μ en $\mathbb{C}$ y una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$, la transformada de Cauchy (o el operador singular integral de Cauchy) se define como:

$$\mathcal{C}_\mu f(z) = \int \frac{1}{w-z} f(w) d\mu(w),$$

siempre que la integral tenga sentido. En 1977 Calderón probó que la transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu)$ para μ igual a la longitud de arco en una gráfica Lipschitz (Teorema 2.4.3 del capítulo 2). Como consecuencia de éste resultado se obtiene que cualquier conjunto rectificable con longitud positiva tiene capacidad analítica positiva, y por lo tanto es no removible. A éste resultado se le conoce como la conjetura de Denjoy (Teorema 3.5.4 en el capítulo 3) y es equivalente a decir que cualquier conjunto removible con longitud finita es puramente no rectificable. Más aún, este resultado es la solución de una de las implicaciones de la conjetura de Vitushkin para conjuntos de longitud finita. Tiempo después, Jones y Murai dieron un ejemplo explícito de un conjunto no-σ-finito donde la conjetura de Vitushkin no se cumple.

El descubrimiento de Melnikov en 1995 de la relación entre el kernel de Cauchy y la curvatura de Menger es un factor de gran importancia en los avances del estudio de la capacidad analítica y el problema de Painlevé. Melnikov de hecho encontró la siguiente identidad (Véase ecuación (2.2.1)):

$$\frac{1}{R(z_1,z_2,z_3)^2} = \sum_{s\in S_3} \frac{1}{(z_{s_2}-z_{s_1})\overline{(z_{s_3}-z_{s_1})}}, \quad z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$$

donde S_3 es el grupo de permutaciones de tres elementos y $R(z_1,z_2,z_3)$ representa el radio de la circunferencia que pasa por los puntos z_1,z_2,z_3. El recíproco de $R(z_1,z_2,z_3)$ es llamado la curvatura de Menger (Definición 2.2.1 del capítulo 2). De la ecuación anterior, Melnikov y Verdera dedujeron una ecuación (Véase ecuación (2.2.2) del capítulo 2) que relaciona la norma $L^2(\mu)$ de la transformada ε-truncada de Cauchy con un métrico geométrico: la triple integral del cuadrado de la curvatura de Menger con respecto a la medida μ. Esta triple integral será llamada la curvatura de μ (Definición 2.2.4 en el capítulo 2).

Para conjuntos de longitud infinita, el problema de Painlevé aún no tiene una solución tan buena como para los conjuntos de longitud finita. Tenemos que conformarnos con la caracterización de los conjuntos removibles en términos de la noción de curvatura de medidas. La cual es un corolario de la comparación entre la capacidad analítica y otra capacidad denotada como γ_+ (Teorema 4.0.1 en el capítulo 4). Esta comparación fue probada por Tolsa en 2003, y donde γ_+ tiene una descripción cuantitativa en términos de medidas con crecimiento lineal (Definición 2.1.1 en el capítulo 2) y curvatura finita. Otra consecuencia importante de la comparación entre γ y γ_+, es la semiaditividad de γ. Pues de la descripción arriba mencionada de γ_+, se deduce que es semiaditiva (Corolario 3.6.3 del capítulo 3). Luego, del hecho que γ y γ_+ son comparables (Teorema 4.0.1 en el capítulo 4), se deduce que γ también es semiaditiva (Corolario 4.2.1 del capítulo 4). éste es el resultado principal de esta tesis.

En el Capítulo 1 se define la capacidad analítica, se calculan algunos ejemplos y se demuestran algunas de sus propiedades más importantes, tales como la relación que tiene con el concepto de conjunto removible. Después se define la transformada de Cauchy y el operador de Vitushkin. Además se ve la relación que hay entre éstos dos operadores y la capacidad analítica. Con ello se prueba la semiaditividad de γ para dos casos particulares. Depués se ve la relación que hay entre la medida de Hausdorff 1-dimensional y la capacidad analítica. Para concluir el capítulo se construye en conjunto de cuartos de esquina de Cantor y se hace una estimación de su medida de Hausdroff 1-dimensional.

El segundo capítulo comienza con el concepto de medida de grado n y con una serie de resultados acerca de los operadores de Calderón-Zygmund que usamos para estudiar la transformada de Cauchy. Se define entonces el concepto de curvatura de Menger y de curvatura de una medida. Además se demuestra el Teorema T1 para la transformada de Cauchy. Por último, en este capítulo se prueba que la transformada de Cauchy es acotada en gráficas Lipschitz respecto a la norma $L^2(\mu)$ con μ la medida de longitud de arco.

En el capítulo 3 se define a la capacidad γ_+ y con ésta se demuestra la conjetura de Denjoy. Además caracterizamos a γ_+ en términos de medidas μ con crecimiento lineal y con curvatura finita, o equivalentemente, en términos de la norma $L^2(\mu)$ del operador singular integral de Cauchy $\mathcal{C}_\mu$. De ahí deducimos la semiaditividad de γ_+. Por último caracterizamos a la capacidad γ_+ en términos de un potencial.

Por último, en el capítulo 4, demostramos la comparación entre γ y γ_+. Como corolario se obtiene la semiditividad de la capacidad analítica; además de las caracterizaciones y resultados que ya se tenían para γ_+.

Capítulo 1

Capacidad Analítica

En este capítulo introduciremos el concepto de capacidad analítica y algunas de sus propiedades, así como la relación que tiene con los conjuntos removibles, la transformada de Cauchy, el operador de localización de Vitushkin y las medidas de Hausdorff.

1.1. Definición y propiedades básicas de la capacidad analítica

Definición 1.1.1. *Dado un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ definimos la familia de funciones:*

$$\boldsymbol{Ad(E)} := \{f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C} \mid f \textit{ es analítica y } |f| \leq 1 \textit{ en } \mathbb{C} \setminus E\}.$$

Cuando $f \in Ad(E)$ diremos que f es ***admisible para E****.*

Si f es admisible para E, entonces f es analíticia en el infinito, pues E es compacto y f es analítica y acotada en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus E$; por lo tanto ∞ es una singularidad removible de f. Por lo cual, podemos considerar la serie de Laurent de f centrada en ∞:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

donde $f(\infty)$ se define como a_0 y es igual a $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Claramente, $f'(\infty) = a_1$ y también:

$$f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz \qquad (1.1.1)$$

donde Γ es cualquier curva rectificable que rodea a E con una orientación negativa; es decir como en las manecillas del reloj.

Cabe recalcar que en general $f'(\infty) \neq \lim_{z\to\infty} f'(z)$. En su lugar, $f'(\infty) = g'(0)$ con $g(z) = f(1/z)$ es decir:

$$f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)).$$

Nótese que para cualquier conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ y para toda $f \in Ad(E)$, se tiene que

$$0 \leq |f'(\infty)| < \infty.$$

Pues sea U_∞ la componente conexa no acotada de $(\mathbb{C}\setminus E)\cup\{\infty\}$, como E es compacto U_∞ es simplemente conexa, por lo cual existe un biholomorfismo $\varphi : B(0,1) \to U_\infty$ tal que $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi'(0) > 0$. Luego para toda $f \in Ad(E)$, como f es holomorfa y U_∞ es abierto, f no puede tomar un máximo en U_∞, por lo cual $f(U_\infty) \subset B(0,1)$. Así, por el Lema de Schwarz se tiene que $|(f \circ \varphi)'(\infty)| \leq 1$. Y como $\varphi'(0) > 0$, entonces

$$|f'(\infty)| \leq \frac{1}{\varphi'(0)} < \infty.$$

Definición 1.1.2. *Dado un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, definimos su* ***capacidad analítica*** *como:*

$$\gamma(E) := \sup\{|f'(\infty)| : f \in Ad(E)\} \tag{1.1.2}$$

Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{C}$, definimos:

$$\gamma(A) := \sup\{\gamma(E) : E \subset A \text{ es compacto}\}.$$

Así que en principio podemos decir que γ es una capacidad interior.

Ejemplo 1.1.3. *La capacidad analítica de un punto es cero.*

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, para cualquier $f \in Ad(z_0)$ se tiene que f es analítica y acotada en $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$; por lo cual z_0 es una singularidad removible de f, luego f es entera y acotada en $\mathbb{C}$ por lo tanto; es constante y su derivada en cualquier punto es cero.

Cabe mencionar que para un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, existe la llamada **capacidad analítica continua** de E:

$$\alpha(E) := \sup\{|f'(\infty)| : f \text{ es continua en } \mathbb{C}, \text{ analítica en } \mathbb{C}\setminus E \text{ y } ||f||_\infty \leq 1\}. \tag{1.1.3}$$

Y si $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto arbitrario definimos

$$\alpha(A) := \sup\{\alpha(E) : E \subset A, E \text{ compacto}\}$$

La importancia de esta capacidad yace en la teoría de aproximación racional uniforme; y aunque no la estudiaremos, Vistushkin se preguntaba si γ y α son semiaditivas. Es decir si existe una constante absoluta c tal que

$$\gamma(E \cup F) \leq c(\gamma(E) + \gamma(F)).$$

Esto será probado para γ en el capítulo 4, relacionándola con otra capacidad llamada γ_+; y aunque α también es semmiaditiva y los argumentos para probarlo siguen el esquema de la prueba para γ, la adaptación no es trivial (Véase [Tolsa2]).

La **frontera exterior** de un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ es la frontera de la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus E$ y se denota como $\partial_0 E$. Claramente $\partial_0 E \subset \partial E$, donde ∂E es la frontera topológica clásica.

La siguiente Proposición nos dice que la capacidad analítica es monótona; invariante bajo traslaciones y rotaciones; y que sólo depende de la frontera exterior para conjuntos compactos.

Proposición 1.1.4. *Las siguientes propiedades se cumplen:*

(a) Si $E \subset F$, entonces
$$\gamma(E) \leq \gamma(F).$$

(b) Para todos $z, \lambda \in \mathbb{C}$:
$$\gamma(z + \lambda E) = |\lambda|\gamma(E)$$
con $z + \lambda E := \{w \in \mathbb{C} : \exists\ e \in E$ tal que $w = z + \lambda e\}$.

(c) Para todo $E \subset \mathbb{C}$ compacto:
$$\gamma(E) = \gamma(\partial_0 E).$$

Demostración.
(a) Como $\mathbb{C} \setminus F \subset \mathbb{C} \setminus E$, entonces $Ad(E) \subset Ad(F)$ y por lo tanto $\gamma(E) \leq \gamma(F)$.

(b) Primero probemos que $\forall\ w \in \mathbb{C},\ \gamma(E + w) = \gamma(E)$.
Sea $f \in Ad(E)$ y Γ una curva cerrada, simple y rectificable que rodea a E con orientación negativa; y sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el biholomorfismo $u(z) = z - w$. Así tenemos:

$$f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+w} f \circ u(z)dz = (f \circ u)'(\infty).$$

Como $f \in Ad(E) \Leftrightarrow f \circ u \in Ad(E + w)$, entonces:

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| : f \in Ad(E)\} = \sup\{|(f \circ u)'(\infty)| : f \circ u \in Ad(E + w)\}$$

$$\leq \sup\{|g'(\infty)| : g \in Ad(E+w)\} = \gamma(E+w) \Rightarrow \gamma(E) \leq \gamma(E+w).$$

La otra desigualdad $\gamma(E+w) \leq \gamma(E)$ se demuestra de forma análoga tomando el biholomorfismo $u^{-1}(z) = z + w$.

Ahora probemos que $\forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \gamma(\lambda E) = |\lambda|\gamma(E)$.
Sea $f \in Ad(E)$ y Γ una curva cerrada simple y rectificable que rodea a E con orientación negativa y sea $v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el biholomorfismo $v(z) = z/\lambda$. Así tenemos:

$$\lambda f'(\infty) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda\Gamma} f \circ v(z)dz = (f \circ v)'(\infty).$$

Como $f \in Ad(E) \Leftrightarrow f \circ v \in Ad(\lambda E)$, entonces:

$$|\lambda|\gamma(E) = \sup\{|(\lambda f)'(\infty)| : f \in Ad(E)\} = \sup\{|(f \circ v)'(\infty)| : f \circ v \in Ad(\lambda E)\}$$

$$\leq \sup\{|g'(\infty)| : g \in Ad(\lambda E)\} = \gamma(\lambda E) \Rightarrow |\lambda|\gamma(E) \leq \gamma(\lambda E).$$

La otra desigualdad $\gamma(\lambda E) \leq |\lambda|\gamma(E)$ se demuestra de forma análoga tomando el biholomorfismo $v^{-1}(z) = \lambda z$.

(c) Por definición sólo importa f' en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus E$.

Proposición 1.1.5. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. La familia de funciones admisibles para E es una familia normal y el supremo en* (1.1.2) *es alcanzado. Además cualquier función admisible f que lo alcance satisface $f(\infty) = 0$ si $\gamma(E) > 0$.*

Demostración.
Como toda $f \in Ad(E)$ cumple que $|f| \leq 1$ y f es analítica en $\mathbb{C}\setminus E$, entonces $Ad(E)$ es localmente uniformemente acotada en $\mathbb{C} \setminus E$, luego por el Teorema de Montel $Ad(E)$ es una familia normal.
Por la definición de $\gamma(E)$ podemos tomar una sucesión $\{f_k\} \subset Ad(E)$ tal que $f_k'(\infty) \to \gamma(E)$. Como $Ad(E)$ es una familia normal, existe $f \in Ad(E)$ tal que $f_{k_n} \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus E$, por lo cual $f'(\infty) = \gamma(E)$.
Para probar que $f(\infty) = 0$, si f es admisible y alcanza el supremo cuando $\gamma(E) > 0$, consideremos la función

$$g(z) = \varphi_{f(\infty)} \circ f(z) = \frac{f(z) - f(\infty)}{1 - \overline{f(\infty)}f(z)}$$

Donde $\varphi_{f(\infty)}(z) = \dfrac{z - f(\infty)}{1 - \overline{f(\infty)}z}$ es la transformación de Mobius del disco unitario en si mismo, recuerde que $|f(\infty)| < 1$ ya que $|f| \leq 1$ y es analítica en el abierto $\mathbb{C}_\infty \setminus E$ y por lo tanto no puede alcanzar su máximo en dicho abierto.
Así $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus E$ y $g(\infty) = 0$. Más aún:

$$g'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(f(z) - f(\infty))}{1 - \overline{f(\infty)}f(z)} = \frac{f'(\infty)}{1 - |f(\infty)|^2},$$

por lo cual $g \in Ad(E)$ y $|g'(\infty)| > |f'(\infty)|$ si $\gamma(E) = f'(\infty) \neq 0$. Esto último es una contradicción pues f alcanzaba el supremo, por lo tanto $f(\infty) = 0$.

Observación 1.1.6. *Como consecuencia de la Proposición anterior, si $\gamma(E) > 0$ obtenemos una definición equivalente para $\gamma(E)$ si en el supremo de* (1.1.2) *se pide que $f(\infty) = 0$.*

Proposición 1.1.7. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto y conexo compuesto por dos o más puntos. Sea f un mapeo conforme de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus E$ al disco unitario tal que $f(\infty) = 0$. Entonces $\gamma(E) = |f'(\infty)|$.*

Demostración.
Sea U la componente conexa no acotada del complemento $\mathbb{C}_\infty \setminus E$. Como E es compacto, conexo y diferente de un sólo punto, U es simplemente conexa. Por lo cual existe el mapeo f de la hipótesis. Extendiendo f a toda $\mathbb{C} \setminus E$ como cero en donde sea necesario, f es admisible para E y así $|f'(\infty)| \leq \gamma(E)$.
Si $\gamma(E) = 0$ por la desigualdad de arriba $|f'(\infty)| = \gamma(E) = 0$.
Supongamos ahora $\gamma(E) > 0$. Sea $g \in Ad(E)$. Por la Observación 1.1.6, $g(\infty) = 0$. Luego $g|_U \circ f^{-1} : B(0,1) \to B(0,1)$ es analítica y fija el origen. Entonces por el Lema de Schwarz

$$\left| g|_U \circ f^{-1}(z) \right| \leq |z|, \ \forall\ z \in B(0,1) \Rightarrow |g(z)| \leq |f(z)|, \ \forall\ z \in U.$$

Así, para toda $z \in U$:

$$|g'(\infty)| = \left| \lim_{z\to\infty} z(g(z) - g(\infty)) \right| = \lim_{z\to\infty} |zg(z)| \leq \lim_{z\to\infty} |zf(z)| = |f'(\infty)| \Rightarrow$$

$$\gamma(E) = \sup\{|g'(\infty)| : g \in Ad(E)\} \leq |f'(\infty)|.$$

Proposición 1.1.8. *La capacidad analítica de un disco es igual a su radio.*
La capacidad analítica de un segmento de longitud l es igual a $l/4$.

Demostración.
Consideremos el disco $\overline{B(z_0, r)}$. La función $f(z) = \frac{r}{z - z_0}$ es un mapeo conforme de $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, r)}$ a la bola unitaria y además $f(\infty) = 0$. Luego por la Proposición anterior $\gamma(E) = |f'(\infty)| = r$.

Por la Proposición 1.1.4 podemos tomar al segmento $E = [-l/2, l/2] \subset \mathbb{R}$.
Como la función $f(z) = (z + 1/z)l/4$ es un mapeo conforme de la bola unitaria a $\mathbb{C} \setminus [-l/2, l/2]$ y $f(\infty) = 0$, entonces por la proposición anterior:

$$\gamma([-l/2, l/2]) = \text{lím}_{z\to\infty} |zf^{-1}(z)| = \text{lím}_{z\to 0} |f(z)z| = \frac{l}{4}.$$

Recordemos que el Teorema 1/4 de Koebe (véase [Conway] Capítulo 14 Teorema 7.8) asegura que si $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ es analítica, inyectiva, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces $B(0,1/4) \subset f(B(0,1))$. En la siguiente proposición veremos una aplicación importante de este resultado a la capacidad analítica, el cual nos dice que la capacidad analítica de un compacto E siempre es menor o igual que su diámtreo y si además E es conexo entonces su diámetro es a lo más tan grande como cuatro veces su capacidad analítica.

Proposición 1.1.9. *Si $E \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces:*

$$\gamma(E) \leq diam(E).$$

Y si además E es un conjunto conexo, se tiene que

$$diam(E)/4 \leq \gamma(E).$$

Demostración.
Como E es compacto está contenido en un disco de radio $r = diam(E)$ y por la Proposición anterior al ser γ monótona se tiene la desigualdad del lado derecho.
Para demostrar la desigualdad del lado izquierdo, sea $U \subset \mathbb{C}_\infty \setminus E$ la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus E$ y considere el mapeo conforme $f : U \to B(0,1)$ con $f(\infty) = 0$. Como E es compacto existen $z_1, z_2 \in E$ tales que $|z_1 - z_2| = diam(E)$; así considere la función:

$$g(z) = \frac{\gamma(E)}{f^{-1}(z) - z_1}.$$

Como $\gamma(E) \leq diam(E)$ y $\dfrac{E - z_1}{diam(E)} \subset \overline{B(0,1)} \Rightarrow \dfrac{\gamma(E)}{E - z_1} \subset \mathbb{C} \setminus B(0,1)$ entonces $g(B(0,1)) = \dfrac{\gamma(E)}{f^{-1}(B(0,1)) - z_1} = \dfrac{\gamma(E)}{U - z_1} \subset B(0,1)$. Así $g : B(0,1) \to B(0,1)$ es analítica e inyectiva, pues f^{-1} lo es, además $g(0) = 0$. Por el Lema de Schwarz $|g(z)| \leq |z|$ luego:

$$|\gamma(E)| \leq |f^{-1}(z) - z_1||z| \Rightarrow |\gamma(E)| - |zf^{-1}(z)| \leq |z_1||z| \Rightarrow \lim_{z\to 0} |zf^{-1}(z)| = \gamma(E)$$

$$\Rightarrow |g'(0)| = \lim_{z\to 0} \frac{|\gamma(E)|}{|z(f^{-1}(z) - z_1)|} = 1.$$

Como z_2 no está en el rango de f^{-1}, $\gamma(E)/(z_2 - z_1)$ tampoco está en el rango de g. Por el Teorema 1/4 de Koebe $B(0,1/4) \subset g(B(0,1))$ por lo cual $\gamma(E)/|z_2 - z_1| \geq 1/4$, si no $\gamma(E)/(z_2 - z_1) \in g(B(0,1))$ lo cual es una contradicción.

El siguiente corolario nos dice que los conjuntos compactos con capacidad analítica nula tienen que ser totalmente disconexos.

Corolario 1.1.10. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Si $\gamma(E) = 0$, entonces E es totalmente disconexo.*

Demostración.
Si $diam(E) = 0$ entonces E es unipuntual y por lo tanto totalmente disconexo.
Supongamos $diam(E) > 0$. Si E fuera conexo, por la Proposición 1.1.9, $\gamma(E) \neq 0$; lo cual es una contradicción, por lo que E no puede ser conexo. Además si E tuviera una componente conexa F diferente de un punto, entonces esta componente conexa F debe tener diámtero $diam(F) > 0$ y capacidad analítica $\gamma(F) > 0$. Finalmente, como γ es monótona y $F \subset E \Rightarrow \gamma(E) > 0$, lo cual es una contradicción.

Como vimos arriba, si $E \subset \mathbb{C}$ es conexo, la capacidad analítica se puede calcular fácilmente si conocemos el mapeo conforme entre la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus E$ y el disco unitario; además tenemos la estimación $diam(E)/4 \leq \gamma(E) \leq diam(E)$. Pero para conjuntos totalmente disconexos es más difícil calcular su capacidad analítica y aún faltan estimaciones como las anteriores.

Proposición 1.1.11. *(Regularidad exterior de γ). Sea $\{E_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de conjuntos compactos en $\mathbb{C}$ tales que $E_{n+1} \subset E_n$ para cada n, entonces:*

$$\gamma\left(\bigcap_{n\geq 0} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \gamma(E_n)$$

Demostración.
Sea $E = \cap_{n\geq 0} E_n$. Como $\{\gamma(E_n)\}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente por cero, el límite del lado derecho existe. Además como $\forall\ n, E \subset E_n$, tenemos que $\gamma(E) \leq \lim_{n\to\infty} \gamma(E_n)$.
Por la Proposición 1.1.5, para cada n existe una función $f_n \in Ad(E_n)$ tal que $f'(\infty) = \gamma(E_n)$. Como la familia $\{f_n\}$ es acotada uniformemente por 1, usando el Teorema de Montel, obtenemos que esta es una familia normal en $\mathbb{C} \setminus E$. Por lo cual, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus E$ a una función f, luego $f \in Ad(E)$. Por (1.1.1) y por la convergencia uniforme en compactos:

$$f'(\infty) = \lim_{k\to\infty} f'_{n_k}(\infty) = \lim_{k\to\infty} \gamma(E_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} \gamma(E_n).$$

Así, como f es admisible para E tenemos: $\gamma(E) \geq |f'(\infty)| = \lim_{n\to\infty} \gamma(E_n)$.

Corolario 1.1.12. *Si $E \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces:*

$$\gamma(E) = \inf\{\gamma(U) : U \textit{ es abierto y } E \subset U\}.$$

Demostración.
Sea U abierto tal que $E \subset U$. Como la capacidad analítica es monótona, $\gamma(E) \leq \gamma(U)$ y $\gamma(E) \leq \text{ínf}\{\gamma(U) : U \textit{ es abierto y } E \subset U\}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n := \{x \in \mathbb{C} : |x - y| < 1/n \text{ para algún } y \in E\}$.
Así U_n es abierto, $E \subset U_n \subset \overline{U_n}$ donde $\overline{U_n}$ es compacto y además $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{U_n}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} = E$. Por la proposición anterior: $\gamma(E) = \gamma(\bigcap \overline{U_n}) = \text{lím}_{n\to\infty} \gamma(\overline{U_n})$.
Como la sucesión $\{\gamma(U_n)\}$ es decreciente tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(U_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\gamma(U_n)\} \geq \text{ínf}\{\gamma(U) : U \textit{ es abierto y } E \subset U\}.$$

Y ya que $\gamma(U_n) \leq \gamma(\overline{U_n}) \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} \gamma(\overline{U_n}) \geq \text{lím}_{n\to\infty} \gamma(U_n)$, entonces tendremos que $\gamma(E) \geq \text{ínf}\{\gamma(U) : U \textit{ es abierto y } E \subset U\}$.

Proposición 1.1.13. *Para todo conjunto compacto E hay una función f admisible para E tal que $f'(\infty) = \gamma(E)$. Dicha función es única en la componente no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus E$ si $\gamma(E) > 0$. A la función f se le llama* ***función de Ahlfors*** *de E.*

Demostración.
La existencia de la función f ya se probó en la Proposición 1.1.5, así que sólo resta probar la unicidad. Suponga que hay dos funciones admisibles f_1, f_2 tales que $f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = \gamma(E) > 0$ y $f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$. Luego $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2} \in Ad(E), f'(\infty) = \gamma(E)$ y $f(\infty) = 0$. Sea $g = \dfrac{f_2 - f_1}{2}$, así que $f_1 = f - g$ y $f_2 = f + g$.
De estas igualdades y de la Ley del paralelogramo tenemos:

$$|f \pm g|^2 = |f|^2 + |g|^2 \pm 2Re(f\overline{g}) \leq 1 \Rightarrow |f|^2 + |g|^2 \leq 1.$$

Usando el hecho que $1 + |f| \leq 2$, deducimos:

$$\frac{|g|^2}{2} \leq \frac{1 - |f|^2}{2} = \frac{(1 - |f|)(1 + |f|)}{2} \leq 1 - |f| \Rightarrow |f| + \frac{|g|^2}{2} \leq 1.$$

Si $f_1 \neq f_2$ cerca de ∞, entonces $g \neq 0$ en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus E$ y podemos considerar la serie de Laurent de $\dfrac{g^2}{2}$ para z cerca de ∞:

$$\frac{g(z)^2}{2} = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + \ldots \quad \text{con} \quad a_n \neq 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Como $g(\infty) = 0$ y $g'(\infty) = 0$, tenemos que $n \geq 2$.
Para $\varepsilon > 0$ tome la función:

$$\widehat{f}(z) = f(z) + \varepsilon \overline{a_n} z^{n-1} \frac{g(z)^2}{2}.$$

Si ε es suficientemente pequeño tal que $|\varepsilon\overline{a_n}z^{n-1}| \leq 1$ en una vecindad acotada de E, entonces deducimos que en esa vecindad

$$|\widehat{f}(z)| \leq |f(z)| + |\varepsilon\overline{a_n}z^{n-1}\frac{g(z)^2}{2}| \leq |f(z)| + \frac{|g(z)|^2}{2} \leq 1;$$

y como $\widehat{f}(\infty) = 0$, por el principio del máximo $|\widehat{f}(z)| \leq 1$ en toda la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus E$.
Por otro lado,

$$\widehat{f}'(\infty) = f'(\infty) + \varepsilon|a_n|^2 > \gamma(E),$$

lo cual es una contradicción pues $\widehat{f} \in Ad(E)$.

Cabe recalcar que por la demostración de la Proposición 1.1.11 las funciones de Ahlfors f_n de los conjuntos E_n (para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in Ad(E_n)$ y $f_n'(\infty) = \gamma(E_n)$ convergen en compactos a la función de Ahlfors de $\bigcap_{n\geq 0} E_n$.

1.2. Conjuntos removibles y el problema de Painlevé

En esta sección veremos la relación entre un conjunto removible y su capacidad analítica.

Definición 1.2.1. *Un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ se dice **removible** para funciones analíticas acotadas (o sólo removible) si para todo conjunto abierto Ω que contiene a E, cada función analítica acotada en $\Omega \setminus E$ tiene una extensión analítica a Ω.*

Ejemplo 1.2.2. *a) Sea $E \subset \mathbb{C}$ una colección finita de puntos, entonces E es removible.*
Por un teorema de Riemann sabemos que toda función analítica y acotada en un abierto menos un punto es analítica en todo el abierto; por lo cual se cumple que el punto es una singularidad removible para funciones analíticas acotadas.

b) Si E es compacto, numerable, entonces es removible.
Como $E \subset \mathbb{C}$ es compacto, es completo. Por el Teorema de Baire si E no tiene puntos aislados entonces E es no numerable, lo cual es una contradicción. Luego E tiene al menos un punto aislado z_0. Aplicando el mismo razonamiento a $E \setminus \{z_0\}$, obtenemos que $E \setminus \{z_0\}$ tiene al menos un punto aislado y podemos seguir por inducción y tendremos que todos los puntos de E son aislados. Así podemos proceder como en la primera parte del ejemplo y concluir que E es removible.

c) Un disco $\overline{B(z_0, r)}$ es no removible.
Basta considerar la función $f(z) = 1/(z-z_0)$ que es analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0, r)}$ pero no se puede extender a toda $\overline{B(z_0, r)}$ pues z_0 es un polo.

El **problema de Painlevé** consiste en caracterizar conjuntos removibles para funciones analíticas acotadas en una forma métrico/geométrica. Por el siguiente resultado, debido a Ahlfors, es equivalente trabajar conjuntos compactos con capacidad analítica cero y conjuntos compactos removibles.

Proposición 1.2.3. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Lo siguiente es equivalente:*

(i) E es removible para funciones analíticas acotadas.

(ii) Existe un conjunto abierto $\Omega \supset E$ tal que toda función analítica acotada en $\Omega \setminus E$ tiene una extensión analítica a Ω.

(iii) Toda función analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus E$ es constante.

(iv) $\gamma(E) = 0$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Por definición. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Dada $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ analítica y acotada, considerando su restricción a $\Omega \setminus E$, por hipótesis resulta que f se puede extender a una función bien definida en Ω y en $\mathbb{C}$. Así que f es entera y por lo tanto constante por el Teorema de Liouville.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Por definición de capacidad analítica. $(iv) \Rightarrow (iii)$ Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto con $\gamma(E) = 0$. Suponga que existe una función analítica y acotada (sin pérdida de generalidad podemos suponer acotada por 1, pues en otro caso basta dividirla entre su cota superior) pero no constante $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$, así que $f(\infty) \neq f(z_0)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C} \setminus E$. Considere la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \textit{para } z \neq z_0 \;\; \textit{y} \;\; g(z_0) = f'(z_0).$$

La función g es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ pues

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus (E \cup \{z_0\}), \quad g'(z) = \frac{(z - z_0)f'(z) - (f(z) - f(z_0))}{(z - z_0)^2}.$$

Y g tiene una singularidad removible en z_0 ya que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)g(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0.$$

Veamos que $|g| \leq 1$ en $\mathbb{C} \setminus E$. Como E es compacto, sin pérdida de generalidad podemos tomar $z_0 \in \mathbb{C} \setminus E$ tal que $B(z_0, 2) \subset \mathbb{C} \setminus E$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus (E \cup B(z_0, 2))$, entonces $|z - z_0| > 2 \Rightarrow |g(z)| \leq (|f(z)| + |f(z_0)|)/2 \leq (1+1)/2 = 1$.
Si $z \in B(z_0, 2)$ como g es analítica toma su máximo en $z_1 \in \partial B(z_0, 2)$ por lo cual

$$|g(z)| \leq |g(z_1)| \leq (|f(z_1)| + |f(z_0)|)/|z_1 - z_0| \leq (1+1)/2 = 1.$$

Así $g \in Ad(E)$ y $g(\infty) = 0$, luego

$$g'(\infty) = \lim_{z \to \infty} z(g(z) - g(\infty)) = f(\infty) - f(z_0) \neq 0 \Rightarrow \gamma(E) > 0,$$

lo cual es una contradicción.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Basta tomar $\Omega = \mathbb{C}$. Finalmente para $(iii) \Rightarrow (i)$, considere un subconjunto abierto $\Omega \supset E$ y una función $f : \Omega \setminus E \to \mathbb{C}$ analítica y acotada. Tenemos que demostrar que f se puede extender analíticamente a toda Ω. Vamos a suponer que Ω es conexo (de otra forma, consideramos cada componente conexa por separado). Como $\gamma(E) = 0$, por el Corolario 1.1.10 tenemos que E es totalmente disconexo, por lo cual $\Omega \setminus E$ es conexo. Tome $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$ curvas suaves que rodean a E, con Γ_2 muy cercana a E y considere un punto z_1 dentro de Γ_1 pero afuera de Γ_2. Por el desarrollo de f en serie de Laurent:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \text{ con } f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \;\, y \;\, f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Como Γ_1, Γ_2 son curvas homotópicas en $\Omega \setminus E$ a cualesquiera curvas que tengan a z en el interior y en el exterior, respectivamente, entonces las funciones f_1 y f_2 no dependen de las curvas Γ_1 y Γ_2. Luego f_1 es analítica en Ω y f_2 en $\mathbb{C} \setminus E$. Más aún como f_1 es acotada cerca de ∂E, pues es analítica en Ω, f_2 también es acotada cerca de ∂E; y por el principio de máximo en todo $\mathbb{C} \setminus E$. Como f_2 se anula en ∞, (iii) implica que $f_2 = 0$ y por lo tanto $f = f_1$ es analítica en Ω.

Una versión más fuerte de la implicación $(iv) \Rightarrow (i)$ será probada más adelante y la prueba evita el problema técnico de la construcción de las curvas Γ_1 y Γ_2.

Así, que un conjunto compacto sea removible es lo mismo que decir que el conjunto tiene capacidad analítica igual a cero. Por lo cual el Corolario 1.1.10 implica que todo conjunto removible debe ser totalmente disconexo. De alguna forma podemos pensar que la capacidad analítica mide el tamaño de un conjunto como singularidad no removible para funciones analíticas acotadas.

El siguiente lema nos dice que si un conjunto es removible, las únicas funciones admisibles serán las constantes.

Lema 1.2.4. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Suponga que $E \subset \overline{B(z_0, \delta)}$. Sea $f \in Ad(E)$ y considere la expansión en serie de Laurent de f centrada en z_0:*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| > \delta.$$

Entonces tendremos $\forall\ n \in N,\ |a_n| \leq n\delta^{n-1}\gamma(E)$.
Así que f es constante si $\gamma(E) = 0$.

Demostración.
Suponga por simplicidad que $z_0 = 0$. La función

$$g(z) = z^{n-1}\left(f(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{z^j}\right) = \frac{a_n}{z} + \frac{a_{n+1}}{z^2} + \dots$$

es analítica fuera de E y $g(\infty) = 0$.
Como f es analítica en ∞, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta} f(z)z^{n-1}dz$ por lo cual:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=\delta} |z|^{n-1}dz = \frac{\delta^{n-1}}{2\pi}(2\pi\delta) = \delta^n.$$

Así para $z \in B(0, \delta) \setminus E$:

$$|g(z)| \leq |z^{n-1}f(z)| + \sum_{j=1}^{n-1} \delta^j |z|^{n-1-j} \leq \delta^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \delta^{n-1} = n\delta^{n-1}.$$

Recuerde que $g(\infty) = 0$. Si en el exterior de la bola g creciera más de $n\delta^{n-1}$, entonces g tomaría su máximo en el abierto $\mathbb{C} \setminus E$ lo cual no puede pasar por el principio del máximo. Por lo tanto

$$||g||_\infty \leq n\delta^{n-1} \Rightarrow g/n\delta^{n-1} \in Ad(E) \Rightarrow |a_n| = |g'(\infty)| \leq n\delta^{n-1}\gamma(E).$$

Del lema anterior deducimos la siguiente propiedad que nos será de gran utilidad para la prueba de la semiaditividad de γ.

Lema 1.2.5. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Suponga que f es admisible para E y satisface $f(\infty) = 0$. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $dist(z, E) \leq \frac{3}{2}diam(E)$ cumple que:*

$$|f(z)| \leq c\frac{\gamma(E)}{dist(z, E)}.$$

Más aún si $f'(\infty) = 0$, entonces

$$|f(z)| \leq c\frac{diam(E)\gamma(E)}{dist(z,E)^2}.$$

Donde $c = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Demostración.
Sean $\delta = diam(E)$ y $z_0 \in E$ tal que $E \subset \overline{B(z_0,\delta)}$. Consideremos la expansión en serie de Laurent de f centrada en z_0:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}, \quad |z - z_0| > \delta.$$

Como $|z - z_0| \geq dist(z,E) \geq \dfrac{3}{2}\delta \Rightarrow \dfrac{2}{3} \geq \dfrac{\delta}{|z-z_0|}$. Por el Lema anterior tendremos

$$|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\delta^{n-1}\gamma(E)}{|z-z_0|^n} = \frac{\gamma(E)}{|z-z_0|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{|z-z_0|^n}(n+1) \leq \frac{\gamma(E)}{|z-z_0|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}(n+1)$$

$$\leq \frac{\gamma(E)}{|z-z_0|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}(n+2) = c\frac{\gamma(E)}{|z-z_0|}$$

Más aún si $f'(\infty) = a_1 = 0$, entonces:

$$|f(z)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\delta^{n-1}\gamma(E)}{|z-z_0|^n} = \frac{\delta\gamma(E)}{|z-z_0|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{|z-z_0|^n}(n+2) \leq \frac{\delta\gamma(E)}{|z-z_0|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}(n+2)$$

$$= c\frac{\delta\gamma(E)}{|z-z_0|^2}.$$

1.3. La Transformada de Cauchy y el operador de Vitushkin

En esta sección probaremos la semiaditividad de γ para dos casos particulares usando la transformada de Cauchy y el operador de localización de Vitushkin.

Definición 1.3.1. *La* ***transformada de Cauchy*** *de una medida finita (posiblemente compleja) ν en $\mathbb{C}$ con soporte compacto se define como:*

$$\mathcal{C}\nu(z) = \int \frac{1}{\xi - z}d\nu(\xi). \tag{1.3.1}$$

Recuerde por el bien de entender la notación que la variación total de ν la denotamos $||\nu|| := |\nu|(\mathbb{C}) < \infty$ y el soporte de ν, $supp(\nu) \subset \mathbb{C}$, es un compacto. Así que $\forall\ A \subset \mathbb{C}$ con $A \cap supp(\nu) = \emptyset$ se tiene que $\nu(A) = 0$.

Proposición 1.3.2. *Si ν es una medida compleja y de soporte compacto, entonces $\mathcal{C}\nu$ es localmente integrable en $\mathbb{C}$ respecto a la medida de Lebesgue. Además la integral que define la transformada de Cauchy es absolutamente convergente para casi todo punto en $\mathbb{C}$ con respecto a la medida de Lebesgue. Más aún $\mathcal{C}\nu$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus supp(\nu)$, $\mathcal{C}\nu(\infty) = 0$ y $(\mathcal{C}\nu)'(\infty) = -\nu(\mathbb{C})$.*

Demostración.
Primero veamos que la integral que define la transformada de Cauchy es absolutamente convergente para casi todo punto en $\mathbb{C}$ con respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^2$, es decir veamos que

$$\int \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - z|} < \infty \text{ para casi todo punto } z \in \mathbb{C} \text{ con respecto a } \mathcal{L}^2.$$

En efecto sabemos que si $f \geq 0$ en K con $\int_K f(z) d\mathcal{L}^2(z) < \infty$ entonces $f(z) < \infty$ c.t.p. en K. Como

$$\int \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - z|} \geq \int \frac{d\nu(\xi)}{|\xi - z|} \quad y \quad \int \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - z|} \geq 0$$

basta probar que $\forall\ K \subset \mathbb{C}$ compacto se cumple $\int_K \int_{\mathbb{C}} \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(z) < \infty$.
Aplicando el teorema de Fubini tenemos que:

$$\int_K \int_{\mathbb{C}} \frac{d|\nu|(\xi)}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_K \frac{d\mathcal{L}^2(z)}{|\xi - z|} d|\nu|(\xi) \leq M \int_{\mathbb{C}} d|\nu|(\xi) = M|\nu|(\mathbb{C}) < \infty$$

donde la última desigualdad se tiene ya que $\int_K \frac{d\mathcal{L}^2(z)}{|\xi - z|} < \infty$ para todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto y para toda $\xi \in \mathbb{C}$ (véase [Conway] Lema 13.2.6).
De los anteriores párrafos también se deduce que $\mathcal{C}\nu$ es localmente integrable en $\mathbb{C}$ respecto a la medida de Lebesgue.
Que $\mathcal{C}\nu$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus supp(\nu)$ se sigue al derivar bajo el signo de integral.
Como $\lim_{\xi \to \infty} 1/(\xi - z) = 0$ uniformemente en compactos que no contengan a $z \in \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{C}\nu$ tiene una singularidad removible en infinito y $\mathcal{C}\nu(\infty) = 0$.
Sea $g(z) = \mathcal{C}\nu(1/z)$, entonces:

$$g'(z) = \int \frac{-1}{(z\xi - 1)^2} d\nu(\xi) \Rightarrow (\mathcal{C}\nu)'(\infty) = g'(0) = -\int d\nu(\xi) = -\nu(\mathbb{C}).$$

Uno puede ver a la transformada de Cauchy como una herramienta para construir funciones analíticas a partir de medidas (que no son analíticas), aunque las dificultades se presentan al tratar de ver que las funciones así construidas son acotadas.

El siguiente corolario relaciona la capacidad analítica con la transformada de Cauchy.

Corolario 1.3.3. *Sea ν una medida compleja con soporte compacto tal que $\nu(\mathbb{C}) \neq 0$ y su transformada de Cauchy $\mathcal{C}\nu$ es acotada en $\mathbb{C} \setminus E$; donde $E \subset \mathbb{C}$ es un conjunto arbitrario que contiene al soporte de ν. Entonces $\gamma(E) \neq 0$ y por lo tanto E no es removible.*

Demostración.
Como $\mathcal{C}\nu$ es acotada en $\mathbb{C} \setminus E$, existe $M > 0$ tal que $|\mathcal{C}\nu| \leq M \Rightarrow |\mathcal{C}\nu/M| \leq 1$.
Como $supp(\nu) \subset E \Rightarrow \mathbb{C} \setminus E \subset \mathbb{C} \setminus supp(\nu)$, entonces $\mathcal{C}\nu/M \in Ad(E)$.
Luego por la proposición anterior: $0 < \dfrac{|-\nu(\mathbb{C})|}{M} = \dfrac{|(\mathcal{C}\nu)'(\infty)|}{M} \leq \gamma(E)$.

Para relacionar a la transformada de Cauchy con el operador de localización de Vitushkin, en lo que resta de la sección usaremos lo básico de la teoría de distribuciones que puede encontrarse en [Conway] sección 18.5.

Definición 1.3.4. *Se define la **transformada de Cauchy** para una medida compleja ν con soporte compacto, como la convolución de la función $1/z$ con ν:*

$$\mathcal{C}\nu = -\frac{1}{z} * \nu.$$

Nótese que toda medida ν puede verse como distribución bajo la fórmula $\phi \mapsto \int \phi d\nu$; y si ν es una distribución arbitraria, también definimos

$$\mathcal{C}\nu(x) = \left(-\frac{1}{z} * \nu\right)(x) = \nu_z\left(\frac{-1}{x-z}\right).$$

Las igualdades en el siguiente teorema deben entenderse en el sentido de distribuciones.

Teorema 1.3.5. *Si ν es una distribución en $\mathbb{C}$ con soporte compacto, entonces:*

$$\overline{\partial}(\mathcal{C}\nu) = -\pi\nu. \tag{1.3.2}$$

En particular si δ_0 es la Delta de Dirac en el origen, como $\mathcal{C}\delta_0(z) = \frac{-1}{z-t}\big|_{t=0} = -\frac{1}{z}$, entonces el kernel $\dfrac{1}{\pi z}$ es la solución fundamental del operador $\overline{\partial}$:

$$\overline{\partial}\frac{1}{\pi z} = \delta_0$$

También si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ (o mas generalmente si f es una distribución) es analítica en una vecindad de ∞ y $f(\infty) = 0$, entonces:

$$\mathcal{C}(\overline{\partial} f) = -\pi f.$$

La demostración del teorema anterior es demasiado larga para la extensión de esta tesis. Así que recomendamos al lector consultar la referencia original [Conway] Teorema 18.5.4 en donde se encontrará una demostración completa. Sin embargo, podemos decir que la última parte del teorema indica que toda distribución f o función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ que es analítica en una vecindad de ∞ y se anula en ∞ es la transformada de Cauchy de una única disribución con soporte compacto, a saber $\frac{1}{\pi}\overline{\partial} f$.

Como consecuencia, si ν es una distibución que se anula en ∞, es analítica en ∞ y $\overline{\partial}\nu = 0$, entonces $\nu = 0$.

Recordemos que dada una distribución ν, su soporte denotado $supp(\nu)$, es el complemento del abierto más grande en donde ν es igual a cero.

Proposición 1.3.6. *Si ν es una distribución con soporte compacto, entonces $\mathcal{C}\nu$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus supp(\nu)$ y además: $\mathcal{C}\nu(\infty) = 0$ y $(\mathcal{C}\nu)'(\infty) = -\langle \nu, 1\rangle$.*

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el apareamiento entre las distribuciones de soporte compacto y las correspondientes funciones de prueba i.e. las funciones C^∞. Así que $\langle \nu, \phi\rangle = \nu(\phi)$. Por lo cual si ν es una medida con soporte compacto en $\mathbb{C}$

$$(\mathcal{C}\nu)'(\infty) = -\langle \nu, 1\rangle = -\nu(\mathbb{C}).$$

También denotaremos a la **ϵ-vecindad de un conjunto** A como:

$$\mathcal{U}_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{C} \mid dist(x, A) < \epsilon\}.$$

Demostración.
Por el teorema anterior, $\overline{\partial}(\mathcal{C}\nu) = -\pi\nu$; y como $-\pi\langle \nu, \phi\rangle = 0$ si $\phi \notin supp(\nu)$, entonces $\mathcal{C}\nu$ es analítica fuera del soporte de ν.
Para probar que $\mathcal{C}\nu(\infty) = 0$, tome $r > 0$ tal que $supp(\nu) \subset B(0, r)$ y sea $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función radial C^∞ tal que $0 \leq \phi \leq 1$. Más aún, asuma que ϕ se anula en $B(0, r/2)$ y es igual a 1 en $\mathbb{C} \setminus B(0, r)$. Sea $k_r(z) = \phi(z)\dfrac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}$. Como $\phi = 1$ en $\mathbb{C} \setminus B(0, r)$ entonces $\nu * \dfrac{1}{z} = \nu * k_r$ en $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, 2r)}$ en el sentido de distribuciones.
Más aún, como $k_r(z)$ es una función radial C^∞, $\nu * k_r(z) = \langle \nu, \tau_z k_r\rangle$ donde $\tau_z k_r(w) = k_r(w - z)$. Debido a que $\tau_z k_r \to 0$ cuando $z \to \infty$ en C^∞, con la topología de las funciones de prueba, es decir la función y sus derivadas convergen a cero uniformemente en compactos,entonces $\langle \nu, \tau_z k_r\rangle \to 0$ cuando $z \to \infty$.
Por todo lo anterior, $\mathcal{C}\nu(\infty) = \left(-\dfrac{1}{z} * \nu\right)(\infty) = \left(-\nu * \dfrac{1}{z}\right)(\infty) = (-\nu * k_r)(\infty) = 0$.
Para ver que $(\mathcal{C}\nu)'(\infty) = -\langle \nu, 1\rangle$ considere $\{\psi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una aproximación radial C^∞ de

la identidad, luego $supp(\psi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$ y $\int \psi_\epsilon d\mathcal{L}^2 = 1$ para todo $\epsilon > 0$.
Por la asociatividad y conmutatividad de la convolución tenemos

$$\psi_\epsilon * \mathcal{C}\nu = \psi_\epsilon * \left(-\frac{1}{z} * \nu\right) = -\frac{1}{z} * (\psi_\epsilon * \nu) = \mathcal{C}(\psi_\epsilon * \nu).$$

Así $\mathcal{C}(\psi_\epsilon * \nu)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}_\epsilon(supp(\nu))}$. Y como $\psi_\epsilon * \mathcal{C}\nu \to \mathcal{C}\nu$ converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}_\epsilon(supp(\nu))}$ cuando $\epsilon \to 0$, entonces $\mathcal{C}(\psi_\epsilon * \nu) \to \mathcal{C}\nu$ converge uniformente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}_\epsilon(supp(\nu))}$ y se anula en ∞. Por esto y la ecuación (1.1.1) tenemos que:

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\mathcal{C}(\psi_\epsilon * \nu))'(\infty) = (\mathcal{C}\nu)'(\infty).$$

Por otro lado, como $\psi_\epsilon * \nu$ es una función C^∞ y de soporte compacto, ella nos genera la medida $\psi_\epsilon\nu(A) = \int_A \psi_\epsilon(z)d\nu(z)$ en $\mathbb{C}$ finita y de soporte compacto, por lo cual podemos aplicarle la Proposición 1.3.2,

$$(\mathcal{C}(\psi_\epsilon * \nu))'(\infty) = \int 1d(\psi_\epsilon * \nu) = -\langle(\psi_\epsilon * \nu), 1\rangle.$$

Usando el Teorema de Representación de Riesz y que $\int \psi_\epsilon d\mathcal{L}^2 = 1 \Rightarrow 1 * \psi_\epsilon(z) = 1$, concluimos que $-\langle(\psi_\epsilon * \nu), 1\rangle = -\langle\nu, 1 * \psi_\epsilon\rangle = -\langle\nu, 1\rangle$.

Definición 1.3.7. *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in C^\infty$ con soporte compacto, definimos la función*

$$V_\varphi f := \varphi f + \frac{1}{\pi}\mathcal{C}(f\overline{\partial}\varphi). \tag{1.3.3}$$

*Dada una función fija φ, llamamos a V_φ el **operador de localización de Vitushkin** (asociado a φ).*

Debido a que $\overline{\partial}$ es lineal es fácil ver que

$$V_{\alpha\varphi+\phi} = \alpha V_\varphi + V_\phi \quad \forall\ \varphi, \phi \in C^\infty, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Proposición 1.3.8. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in C^\infty$ de soporte compacto, entonces:*

$$V_\varphi f = -\frac{1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f)$$

en el sentido de distribuciones.

Demostración.
Por (1.3.3) y (1.3.2) tenemos que en el sentido distruibucional

$$\overline{\partial}(V_\varphi f) = f\overline{\partial}\varphi + \varphi\overline{\partial}f + \frac{1}{\pi}\overline{\partial}\mathcal{C}(f\overline{\partial}\varphi) = \varphi\overline{\partial}f = \overline{\partial}\left(\frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f)\right).$$

Y como φ es de soporte compacto $\Rightarrow \varphi f, f\overline{\partial}\varphi$ y $\varphi\overline{\partial}f$ son de soporte compacto, entonces $V_\varphi f$ y $\frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f)$ son analíticas en una vecindad de ∞ y se anulan en ∞. Luego por la última parte del Teorema 1.3.5

$$V_\varphi f = \mathcal{C}\left(\frac{-1}{\pi}\overline{\partial}V_\varphi f\right) = \frac{-1}{\pi}\mathcal{C}\left(\overline{\partial}\left(\frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f)\right)\right) = \frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f).$$

Observación 1.3.9. *Si $f = \mathcal{C}\nu$, donde ν es una medida o distribución compleja de soporte compacto, entonces por* (1.3.2) *y la proposición anterior*

$$V_\varphi(\mathcal{C}\nu) = \frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}(\mathcal{C}\nu)) = \frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi(-\pi\nu)) = \mathcal{C}(\varphi\nu). \tag{1.3.4}$$

Esta identidad fundamental justifica que V_φ sea llamado operador de localización (de Vitushkin):Observe que $\mathcal{C}\nu$ es analítica en $\mathbb{C}\setminus supp(\nu)$, por lo cual el soporte de ν se puede ver como el conjunto de singularidades de $\mathcal{C}\nu$. Por (1.3.4) *se sigue que $V_\varphi(\mathcal{C}\nu)$ es analítica en el conjunto más grande $\mathbb{C}\setminus supp(\varphi\nu)$. Así que las singularidades ahora se localizan en $supp(\nu)\cap supp(\varphi)$.*

Proposición 1.3.10. *Sea $\varphi \in C^\infty$ con soporte en una bola B_r de radio r, con $||\varphi||_\infty \leq c_4$ y $||\nabla\varphi||_\infty \leq c_4/r$. Para cualquier función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ se tienen las siguientes propiedades:*

- *(i) $||V_\varphi f||_\infty \leq c_5||f\chi_{B_r}||_\infty$, donde la constante c_5 sólo depende de c_4.*
- *(ii) V_φ se anula en las funciones constantes, es decir $V_\varphi f \equiv 0$ si $f \equiv$ constante.*
- *(iii) $V_\varphi f$ es holomorfa fuera de $supp(\overline{\partial}f)\cap supp(\varphi)$.*
- *(iv) Si f es acotada en B_r, entonces $V_\varphi f$ es continua donde f lo sea.*

Demostración.
(i) Por (1.3.3), $||V_\varphi f||_\infty \leq ||\varphi f||_\infty + \frac{1}{\pi}||\mathcal{C}(f\overline{\partial}\varphi)||_\infty$. Como $supp(\varphi) \subset B_r$ y $||\varphi||_\infty \leq c_4$, entonces $||\varphi f||_\infty \leq c_4||f\chi_{B_r}||_\infty$. También para cualquier $z \in \mathbb{C}$:

$$|\mathcal{C}(f\overline{\partial}\varphi)(z)| \leq \int_{B_r}\frac{1}{|w-z|}|f(w)||\overline{\partial}\varphi(w)|d\mathcal{L}^2(w) \leq$$

$$||f\chi_{B_r}||_\infty||\nabla\varphi||_\infty\int_{B_r}\frac{1}{|w-z|}d\mathcal{L}^2(w) \leq c||f\chi_{B_r}||_\infty \Rightarrow ||V_\varphi f||_\infty \leq c_5||f\chi_{B_r}||_\infty.$$

(ii) Sea f una función constante y $\phi \in C^\infty$ una función de prueba, por la Proposición 1.3.8 tenemos

$$\langle V_\varphi f, \phi\rangle = \frac{-1}{\pi}\langle\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f), \phi\rangle = \frac{-1}{\pi}\int\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial}f)(z)\phi(z)d\mathcal{L}^2(z);$$

y como f es contante

$$\frac{-1}{\pi}\int \mathcal{C}(\varphi\overline{\partial} f)(z)\phi(z)d\mathcal{L}^2(z) = \frac{-1}{\pi}\int\int \overline{\partial} f(\xi)\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\phi(z)d\mathcal{L}^2(\xi)d\mathcal{L}^2(z) = 0.$$

(iii) Por la Proposición 1.3.8, tenemos que $\overline{\partial} V_\varphi f = \frac{-1}{\pi}\overline{\partial}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial} f)$ como distribuciones; y por el Lema de Weyl (véase [Conway] Corolario 18.4.11) sabemos que $V_\varphi f$ es analítica fuera del soporte de $\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial} f) = supp(\varphi) \cap supp(\overline{\partial} f)$.
(iv) El resultado se obtiene tomando en cuenta que $\int \frac{f(\xi)\overline{\partial}\varphi(\xi)}{z-\xi}d\mathcal{L}^2$ depende continuamente de z pues f y $\overline{\partial}\varphi$ son acotadas en B_r obtenemos (iv).

Proposición 1.3.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $E \subset \mathbb{C}$ compacto con $\gamma(E) = 0$. Entonces, toda función f analítica y acotada en $\Omega \setminus E$ se puede extender analíticamente a todo el conjunto Ω.*

Nótese que no asumimos que $E \subset \Omega$. En particular puede pasar que $E \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, esta es la principal diferencia con la Proposición 1.2.3.

Demostración.
Asumiremos que Ω es acotado, pues si no lo fuera puedo considerar su imagen bajo una transfomación de Mobius que lo mande a un conjunto acotado y algún punto en el complemento de $\overline{\Omega}$ que lo mande al infinito. Considere una rejilla de cuadrados $\{Q_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{C}$ cuya longitud de sus lados sea $l(Q_i) = l$ para todo $i \in I$. Sea $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset C^\infty$ una partición de la unidad subordinada a los cuadrados $\{2Q_i\}_{i\in I}$, así que $supp(\varphi) \subset 2Q_i$ para cada $i \in I$ y $\Sigma_{i\in I}\varphi_i \equiv 1$ en $\mathbb{C}$. En particular esto significa que I es numerable y que $\mathbb{C} \subset \cup_{i\in I} 2Q_i$.
Extendamos a f como cero en $\mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus E)$, luego $supp(f) \subset \Omega \setminus E$. Como f se anula fuera del conjunto acotado $\Omega \setminus E$, por la Proposición 1.3.5 $f = \frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\overline{\partial} f)$; y además $V_{\varphi_i} f$ es idénticamente cero excepto para un número finito de índices $i \in I$.
Así dada una función de prueba $\phi \in C^\infty$, y dado que para cada $\xi \in \mathbb{C}$ hay sólo una $i \in I$ tal que $\phi_i(\xi) \neq 0$, tenemos que:

$$\langle f, \phi\rangle = \frac{-1}{\pi}\langle \mathcal{C}(\overline{\partial} f), \phi\rangle = \frac{-1}{\pi}\int\int f(\xi)\overline{\partial}\left(\frac{1}{\xi - z}\right)\phi(z)d\mathcal{L}^2(\xi)d\mathcal{L}^2(z) =$$

$$\frac{-1}{\pi}\int\int f(\xi)\overline{\partial}\left(\frac{\Sigma_{i\in I}\varphi_i(\xi)}{\xi - z}\right)\phi(z)d\mathcal{L}^2(\xi)d\mathcal{L}^2(z) =$$

$$\frac{-1}{\pi}\int\sum_{i\in I}\int f(\xi)\overline{\partial}\left(\frac{\varphi_i(\xi)}{\xi - z}\right)\phi(z)d\mathcal{L}^2(\xi)d\mathcal{L}^2(z) = \frac{-1}{\pi}\int\sum_{i\in I}\mathcal{C}(\overline{\partial} f\varphi_i)(z)\phi(z)d\mathcal{L}^2(z)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\langle\sum_{i\in I}\mathcal{C}(\overline{\partial} f\varphi_i), \phi\rangle.$$

Luego por la Proposición 1.3.8:

$$f = \frac{-1}{\pi} \sum_{i \in I} \mathcal{C}(\overline{\partial} f \varphi_i) = \sum_{i \in I} V_{\varphi_i} f. \tag{1.3.5}$$

Debido a que $supp(\overline{\partial} f) \subset E \cup \partial\Omega$, entonces para cada $i \in I$:

$$supp(\overline{\partial} V_{\varphi_i} f) \subset 2Q_i \cap (E \cup \partial\Omega).$$

Como consecuencia (usando el Lema de Weyl), si $2Q_i \cap \partial\Omega = \emptyset$, entonces $V_{\varphi_i} f$ es analítica fuera de $2Q_i \cap E$. Debido a que $V_{\varphi_i} f$ se anula en ∞, se sigue que $||V_{\varphi_i} f||_\infty < \infty$ (por (i) de la Proposición 1.3.10) y $\gamma(2Q_i \cap E) \leq \gamma(E) = 0$. Por la Proposición 1.2.3 tendremos entonces que:

$$V_{\varphi_i} f \equiv 0 \quad si \quad 2Q_i \cap \Omega = \emptyset \quad \Rightarrow \quad f = \sum_{i \in I : 2Q_i \cap \Omega \neq \emptyset} V_{\varphi_i} f.$$

Por lo tanto (usando de nuevo el Lema de Weyl), f es analítica en $\Omega \setminus \overline{\mathcal{U}_{4l}(\partial\Omega)}$, pues $supp(\overline{\partial} f) \subset E \cup \partial\Omega$ y $\mathbb{C} \setminus \cup_{i \in I}(2Q_i \cap (E \cup \partial\Omega)) = \Omega \setminus \overline{\mathcal{U}_{4l}(\partial\Omega)}$. Puesto que l es arbitrariamente pequeño resulta que f es analítica en todo Ω.

En la siguiente Proposición mostramos como el operador de localización de Vitushkin se puede usar para probar la semiaditividad de la capacidad analítica para dos casos particulares.
La notación $A \lesssim B$ significa que existe una constante $c > 0$ tal que $A \leq cB$. También decimos que A es **equicomparable** a B si $A \lesssim B \lesssim A$ y lo denotamos $A \approx B$.

Proposición 1.3.12. *(a) Para un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ y un disco o cuadrado cerrado $D \subset \mathbb{C}$, tenemos que:*

$$\gamma(E \cup D) \leq c_1(\gamma(E) + \gamma(D)).$$

Donde c_1 depende únicamente de $\tilde{c}$, donde $||\nabla\varphi||_\infty \leq \tilde{c}/r$, para alguna $\varphi \in C^\infty$ con soporte en $2D$ tal que $\varphi = 1$ en una vecindad de D y r es el radio o longitud de D.

(b) Dados dos rectángulos cerrados $E, S \subset \mathbb{C}$ (no asumimos que sus lados sean paralelos a los ejes), la siguiente desigualdad se satisface

$$\gamma(R \cup S) \leq c_2(\gamma(R) + \gamma(S)).$$

Donde c_2 depende de una aproximación por cuadrados para R y S.

Demostración.
Sea f la función de Ahlfors de $E \cup D$. La cual es analítica en el complemento de

$D \cup E$; así que la extendemos a $E \cup D$ como 0. Sea $\varphi \in C^\infty$ con soporte en $2D$ tal que $\varphi = 1$ en una vecindad de D, con $||\nabla\varphi||_\infty \leq c/r$, donde r es el radio (o longitud del lado) de D. Ahora sean $f_1 = V_\varphi f$ y $f_2 = f - f_1$. Por la Proposición 1.3.10 (i), f_1 es acotada por una constante c'; así que también f_2 es acotada por una constante c''. Por la Proposición 1.3.10 (iii), f_1 es holomorfa fuera de $supp(\overline{\partial} f) \cap supp(\varphi)$ y como $supp(\overline{\partial} f) \cap supp(\varphi) \subset (E \cup D) \cap 2D \subset 2D$, entonces f_1 es holomorfa fuera de $2D$. Análogamente f_2 es holomorfa fuera de E. Así tenemos que $f_1/c' \in Ad(2D)$ y $f_2/c'' \in Ad(E)$. Por lo cual, si $c = max(c', c'')$, tendremos que:

$$\gamma(E \cup D) = |f'(\infty)| = |(f_1 + f_2)'(\infty)| \leq |f_1'(\infty)| + |f_2'(\infty)| \leq c(\gamma(2D) + \gamma(E)).$$

Luego (a) se sigue de que $\gamma(2D) = 2\gamma(D)$.

Considere ahora los rectángulos R, S. Sean L_R, l_R las longitudes de los lados de R y L_S, l_S las de S. Así que $l_R \leq L_R$ y $l_S \leq L_S$. Asumamos primero que $L_R = M l_R$ y $L_S = N l_S$, con $M, N \in \mathbb{N}$. Luego podemos escribir $R = \cup_{i=1}^{M} P_i$ y $S = \cup_{j=1}^{N} Q_j$, donde P_i y Q_j son cuadrados de longitud l_R y l_S respectivamente. Tome funciones positivas $\varphi_i \in C^\infty$, $1 \leq i \leq M$, con $supp(\varphi_i) \subset 2P_i$ para cada i; y tales que $\sum_{i=1}^{M} \varphi_i \leq 1$ en $\mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^{M} \varphi_i = 1$ en R y $||\nabla\varphi_i||_\infty \leq c/l_R$. Sean $\psi_j \in C^\infty$, $1 \leq j \leq N$ funciones análogas para S. Sin perdida de generalidad supónga que $l_R \geq l_S$.
Definiendo $\overline{\psi_j} = \psi_j(1 - \sum_{i=1}^{M} \varphi_i)$ tendremos:

$$\sum_{i=1}^{M} \varphi_i + \sum_{j=1}^{N} \overline{\psi_j} = 1 \quad en \quad R \cup S.$$

Sea f la función de Ahlfors de $R \cup S$ extendida como cero en $R \cup S$. Si f es analítica en una vecindad del $supp(\varphi)$, entonces $V_\varphi f = 0$, pues $V_\varphi f = \frac{-1}{\pi}\mathcal{C}(\varphi\overline{\partial} f)$. Luego, por (1.3.5) en la demostración de la proposición anterior como distribuciones tenemos:

$$f = V_{\sum_{i=1}^{M} \varphi_i + \sum_{j=1}^{N} \overline{\psi_j}} f = \sum_{i=1}^{M} V_{\varphi_i} f + \sum_{j=1}^{N} V_{\overline{\psi_j}} f$$

Como f es acotada en $\mathbb{C}$ y por la Proposición 1.3.10, se sigue que $||V_\varphi f||_\infty < \infty$ para $\varphi = \varphi_i$ y $\varphi = \overline{\psi_j}$, entonces $f = \sum_{i=1}^{M} V_{\varphi_i} f + \sum_{j=1}^{N} V_{\overline{\psi_j}} f$ como funciones.
Más aún, para una $c > 0$, $cV_{\varphi_i} f$ es admisible para P_i y también $cV_{\overline{\psi_j}} f$ es admisible para Q_j pues $||\overline{\psi_j}||_\infty \leq 1$ y $||\nabla\overline{\psi_j}||_\infty \leq c/l_S$. Así, usando el hecho que la capacidad analítica de los cuadrados es comparable con su diámetro (Proposición 1.1.9) y que su diámetro es comparable con sus lados:

$$\gamma(R \cup S) = |f'(\infty)| \leq \sum_{i=1}^{M} \gamma(2P_i) + \sum_{j=1}^{N} \gamma(2Q_j) \leq c(M l_R + N l_S) \leq c(\gamma(R) + \gamma(S)).$$

Supongamos ahora que R y S son rectángulos arbitrarios. Sean M el entero más pequeño tal que $M \geq L_R/l_R$ y N el entero más pequeño tal que $N \geq L_S/l_S$. Sea R_0 un rectángulo que contiene a R cuya longitud de sus lados es l_R y Ml_R, tambén sea S_0 un rectángulo que contiene a S cuya longitud de sus lados es l_S y Nl_S. Así por lo que ya probamos

$$\gamma(R \cup S) \leq \gamma(R_0 \cup S_0) \leq c(\gamma(R_0) + \gamma(S_0)) \approx \gamma(R) + \gamma(S)$$

donde la última desigualdad se da ya que $\gamma(R) \approx diam(R) \approx diam(R_0) \approx \gamma(R_0)$ y análogamente para S y S_0.

1.4. Relación con medidas de Hausdorff

Empezaremos con las definiciones de medida de Hausdorff y dimensión de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$ con algunas de sus propiedades que ocuparemos.

Definición 1.4.1. *Dado $s \geq 0$ y $0 < \varepsilon \leq \infty$, para $A \subset \mathbb{R}^d$ definimos la siguiente medida exterior en $\mathbb{R}^d$*

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_i diam(A_i)^s : A \subset \bigcup_i A_i, diam(A_i) \leq \varepsilon \right\}. \tag{1.4.1}$$

Aunque nosotros trabajaremos con la métrica usual en $\mathbb{R}^d$, dicha medida exterior depende de la métrica con que se trabaje en $\mathbb{R}^d$, pues el diámetro se calcula con esta métrica.

Además $\mathcal{H}^s_\delta(A) \geq \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ si $\delta \leq \varepsilon$. Y como $\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) \leq diam(A)^s$, entonces dicha cantidad es finita si A es acotado en $\mathbb{R}^d$.

La ***medida de Hausdorff s-dimensional*** *de A es:*

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A).$$

Proposición 1.4.2. *Para todo $s \geq 0$ la medida $\mathcal{H}^s$ en $\mathbb{R}^d$ es Borel regular, pero no es una medida de Radon (pues no es localmente finita), excepto en el caso $s = d$.*

La demostración es un ejercicio clásico y recomendamos al lector consultarla en [Mattila] Teorema 4.2.

Es fácil ver que $\mathcal{H}^0$ coincide con la medida de conteo.
Además para $s = d$ tenemos

$$\mathcal{H}^d = \frac{2^d}{\alpha(d)}\mathcal{L}^d, \tag{1.4.2}$$

donde $\mathcal{L}^d$ es la medida de Lebesgue clásica en $\mathbb{R}^d$ y $\alpha(d) = \mathcal{L}^d(B(0,1))$ es la medida de Lebesgue de la bola unitaria d-dimensional.
Así, para el caso 1 dimensional, que es el mas relevante para el estudio de la capacidad analítica, la medida $\mathcal{H}^1$ coincide con la medida de Lebesgue de longitud $\mathcal{L}^1$.

En el caso $\varepsilon = \infty$ en (1.4.1), los conjuntos A_i no tienen restricción ni en los diámetros ni en la cantidad. A $\mathcal{H}^s_\infty(A)$ se le llama **contenido de Hausdorff s-dimensional**. Aunque esta no es una medida de Borel, es subaditiva. Además el contenido de Hausdorff tiene algunas ventajas sobre la medida de Hausdorff, por ejemplo: siempre es finita en conjuntos acotados y usualmente es más sencillo de estimar que la medida de Hausdorff. El contenido y la medida de Hausdorff s-dimensional se relacionan de la siguiente manera, para cualquier $\delta > 0$ se tiene:

$$\mathcal{H}^s_\infty(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s(A). \tag{1.4.3}$$

Por lo cual

$$\mathcal{H}^s(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}^s_\infty(A) = 0.$$

En efecto, por 1.4.3 se tiene la necesidad. Ahora suponga que $\mathcal{H}^s_\infty(A) = 0$. Sea $0 < \varepsilon < 1$. Por hipótesis para $\varepsilon^s > 0$ existe $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una cubierta por bolas de A tales que $\sum_{k\in\mathbb{N}} diam(B_k)^s \leq \varepsilon^s$; por lo cual $diam(B_k) < \delta$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} diam(B_k)^s \leq \varepsilon^s \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = 0.$$

Además si $A \subset \mathbb{R}$ se cumple que

$$\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A) = \mathcal{H}^1_\infty(A).$$

Ya que para cualquier subconjunto de los reales su volumen es igual a su longitud que es igual a su diámetro.

Más adelante veremos que la capacidad analítica esta muy relacionada con el contenido 1-dimensional de Hausdorff.

Para introducir la noción de dimensión de Hausdorff necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.4.3. *Para $0 \leq s < t$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos*

(i) Si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(ii) Si $\mathcal{H}^t(A) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Demostración.
Claramente ambos enunciados son equivalentes, así que sólo probaremos (i).
Por (1.4.1), existe una cubierta $\{A_i\}$ de A tal que $diam(A_i) \leq \varepsilon$ y $\sum_i diam(A_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)+1$. Como $0 < t-s$ y $diam(A_i)/\varepsilon \leq 1$, entonces $(diam(A_i)/\varepsilon)^t \leq (diam(A_i)/\varepsilon)^s$. Luego

$$\mathcal{H}^t_\varepsilon(A) \leq \sum_i diam(A_i)^t \leq \varepsilon^{t-s} \sum_i diam(A_i)^s \leq \varepsilon^{t-s}(\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) + 1).$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, tendremos $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Corolario 1.4.4. *Dado $A \subset \mathbb{R}^d$ existe un único $s_0 \in [0, \infty)$ tal que*

(i) $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ para toda $s \in [0, s_0)$.

(ii) $\mathcal{H}^s(A) = 0$ para toda $s \in (s_0, \infty)$.

Definición 1.4.5. *La dimensión de Hausdorff de un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^d$ se define como*

$$dim_H(A) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) < \infty\}.$$

Por definición $dim_H(\emptyset) = 0$. Del Corolario 1.4.4, $dim_H(A) = s_0$.

Observación 1.4.6. *1. Es fácil ver que la dimensión de Hausdorff es una función monótona de conjuntos:*

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad dim_H(E) \leq dim_H(F).$$

2. Como $\mathcal{H}^d(\mathbb{R}^d)$ es σ-finita, del Lema 1.4.3 se sigue que $dim_H(A) \leq d$ para todos los conjuntos $A \subset \mathbb{R}^d$. Más aún $dim_H(\mathbb{R}^d) = d$.

3. Si $s = dim_H(A)$ entonces $0 \leq \mathcal{H}^s(A) \leq \infty$.

4. Si para A encontramos un s tal que $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, entonces $s = dim_H(A)$.

Los resultados anteriores y más pueden encontrarse en [Mattila] capítulo 4 o en [Falconer] capítulo 2.

El siguiente teorema es primer resultado que conecta medidas de Hausdorff con capacidad analítica.

Teorema 1.4.7. *(Painlevé). Para todo conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, tenemos que*

$$\gamma(E) \leq \mathcal{H}^1_\infty(E).$$

En particular, si $\mathcal{H}^1(E) = 0$, entonces E es removible.

Demostración.
Dado $\varepsilon > 0$, por definición de contenido de Hausdorff, existe una cubierta $\{A_i\}$ de E tal que $\sum_i diam(A_i) \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) + \varepsilon$. Podemos reemplazar cada A_i con una bola abierta B_i de radio r_i, si es necesario ligeramente más grande que $diam(A_i)$, para que $E \subset \cup_i B_i$ y $\sum_i r_i \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) + 2\varepsilon$. Como E es compacto podemos asumir que esta familia de bolas es finita. Considere la curva $\Gamma = \partial_0(\cup_i B_i)$. Por (1.1.1), si f es la función de Ahlfors de E, tendremos

$$\gamma(E) = |f'(\infty)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz \right| \leq \sum_i \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma \cap \partial_0 B_i} |f(z)| d\mathcal{H}^1(z)$$

$$\leq \sum_i \frac{1}{2\pi} \int_{\partial_0 B_i} d\mathcal{H}^1(z) = \sum_i r_i \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se sigue el teorema.
De (1.4.3) se sigue que si $\mathcal{H}^1(E) = 0$, entonces E es removible.

La restricción de una medida μ a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ la denotaremos como $\mu\lfloor A$. Es decir, para $B \subset \mathbb{R}^d$, $\mu\lfloor A(B) = \mu(A \cap B)$.

Proposición 1.4.8. *Si $E \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto contenido en $\mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{1}{4}\mathcal{H}^1(E) \leq \gamma(E) \leq \frac{1}{\pi}\mathcal{H}^1(E).$$

Demostración.
Por la regularidad exterior de la capacidad analítica (Proposición 1.1.11) y por la compacidad de E, asumiremos que E es una colección finita de intervalos disjuntos. Así, para todo $\varepsilon > 0$ podemos construir una curva (o una familia de curvas) Γ en forma de rectángulo que rodea a E tal que $\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq 2\mathcal{H}^1(E) + \varepsilon$. Procediendo de manera análoga a la prueba del Teorema 1.4.7. Si f es una función admisible para E y como $\mathcal{H}^1(E) = \mathcal{H}^1_\infty(E)$, tendremos que

$$|f'(\infty)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \mathcal{H}^1_\infty(\Gamma) \leq \frac{1}{\pi}(\mathcal{H}^1_\infty(E) + \varepsilon).$$

Recuerde que $|f| \leq 1$. Por lo cual, $\gamma(E) \leq \mathcal{H}^1_\infty(E)/\pi$.
Para la otra desigualdad consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{2}\mathcal{C}(\mathcal{H}^1\lfloor E)(z) = \frac{1}{2} \int_E \frac{1}{t-z} d\mathcal{H}^1(t).$$

Observe que si $z = x + iy \notin E$, entonces

$$\mathrm{Im} f(z) = \frac{1}{2}\int_E \mathrm{Im}\frac{1}{t-z}\,d\mathcal{H}^1(t) = \frac{1}{2}\int_E \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,d\mathcal{H}^1(t).$$

Por lo tanto $\mathrm{Im} f(z) = 0$ cuando $y = 0$; y de otra forma

$$|\mathrm{Im} f(z)| < \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{t^2+y^2}\,d\mathcal{H}^1(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Luego, f envía $\mathbb{C}\setminus E$ a la franja $|\mathrm{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}$.
Considere la transformación $\varphi(z) = \dfrac{e^z-1}{e^z+1}$. Note que φ es una transformación conforme de la franja $|\mathrm{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}$ en el disco unitario. Luego $g = \varphi \circ f \in Ad(E)$ y por la Proposición 1.3.6, $f(\infty) = 0 \Rightarrow g(\infty) = \varphi(0) = 0$, así tenemos que

$$\gamma(E) \geq |g'(\infty)| = \lim_{z\to\infty} |zg(z)| = \lim_{z\to\infty} |zf(z)| \left|\frac{\varphi(f(z))}{f(z)}\right| = |f'(\infty)\varphi'(0)|.$$

Usando el resultado presentado en la Proposcición 1.3.6, $f'(\infty) = -\mathcal{H}^1(E)/2$; y como $\varphi'(0) = 1/2$ obtenemos $\gamma(E) \geq \mathcal{H}^1(E)/4$.

La proposición anterior nos dice que los subconjuntos compactos contenidos en lineas rectas son removibles si y sólo si tienen longitud cero. La **conjetura de Denjoy** es extender dicho resultado para subconjuntos de curvas rectificables, la cual probaremos en el capítulo 3.

Para la demostración del siguiente teorema, y en lo sucesivo, ocuparemos el concepto de cubo diádico.

Definición 1.4.9. *Para $m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}_m$ es la familia de cubos en $\mathbb{R}^d$ de la forma*

$$\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : k_i 2^{-m} \leq x_i < (k_i+1)2^{-m} \text{ donde } k_i \in \mathbb{Z} \text{ para } 1 \leq i \leq d\},$$

*los cubos de esta forma son llamados **diádicos**.*
La familia de todos los cubos diádicos (también llamado latice diádico) se escribe

$$\mathcal{D} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_m \tag{1.4.4}$$

*Para cada $m \in \mathbb{Z}$ los cubos de $\mathcal{D}_m$ forman una partición de $\mathbb{R}^d$. Dado $Q \in \mathcal{D}_m$, hay 2^d cubos de $\mathcal{D}_{m+1}$ que estan contenidos en Q, éstos son llamados **hijos de Q**.*
También dado $j \geq 0$, $\mathcal{D}_j(Q)$ denota la familia de cubos diádicos contenidos en Q cuyos lados miden $2^{-j}l(Q)$, donde $l(Q)$ es la longitud de los lados de Q.

Teorema 1.4.10. *(Lema de Frostman) Sea $0 < s \leq d$ y considere un conjunto compacto $E \subset \mathbb{R}^d$. Entonces $\mathcal{H}^s_\infty(E) > 0$ si y sólo si existe una medida de Borel μ no trivial con soporte en E tal que $\mu(B_r) \leq r^s$ para cualquier bola B_r de radio r. Más aún, podemos encontrar μ tal que $\mu(E) \geq c^{-1}\mathcal{H}^s_\infty(E)$ con la constante c dependiendo solamente de la dimensión de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración.
Supongamos primero que dicha medida μ existe y veamos que $\mathcal{H}^s_\infty(E) > 0$. Considere una cubierta $\bigcup_i A_i \supset E$ y tome para cada i un punto $x_i \in A_i$. Como $E \subset \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i \overline{B(x_i, diam(A_i))}$ tenemos que

$$\sum_i diam(A_i)^s \geq c^{-1} \sum_i \mu(\overline{B(x_i, diam(A_i))}) \geq c^{-1}\mu(E) > 0.$$

Tomando el ínfimo sobre todas las posibles cubiertas de E obtenemos

$$\mathcal{H}^s_\infty(E) \geq c^{-1}\mu(E) > 0.$$

Para la otra implicación del teorema asuma que E está contenido en un cubo diádico Q_0. La medida μ será construida como el límite débil de medidas μ_n con $n \geq 0$. Definimos la primer medida como

$$\mu_0 = \mathcal{H}^s_\infty(E) \frac{\mathcal{L}^d \lfloor Q_0}{\mathcal{L}^d(Q_0)}.$$

Ahora definimos μ_n a partir de μ_{n-1} como sigue: si $P \in \mathcal{D}_n(Q_0)$ y P es un hijo diádico de $Q \in \mathcal{D}_{n-1}(Q_0)$ (entonces escribimos $P \in \mathcal{C}h(Q)$) definimos

$$\mu_n(P) = \frac{\mathcal{H}^s_\infty(P \cap E)}{\sum_{R \in \mathcal{C}h(Q)} \mathcal{H}^s_\infty(R \cap E)} \mu_{n-1}(Q) \tag{1.4.5}$$

Así, para $n \geq 1$ cada medida μ_n se anula en $\mathbb{R}^d \setminus Q_0$, es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue y de la ecuación (1.4.5) deducimos que

$$\forall\ Q \in \mathcal{D}_{n-1}(Q_0), \quad \sum_{P \in \mathcal{C}h(Q)} \mu_n(P) = \mu_{n-1}(Q) \ \Rightarrow\ \mu_n(\mathbb{R}^d) = \mu_{n-1}(\mathbb{R}^d).$$

Luego como $\forall\ n \in \mathbb{N}, \mu_n(\mathbb{R}^d) = \mu_0(\mathbb{R}^d) = \mu_0(Q_0) = \mathcal{H}^s_\infty < \infty$ podemos definir μ como el límite débil de las medidas μ_n. El hecho de que μ tiene soporte en E se sigue de la definición de μ_n en (1.4.5), pues $\mu_n(P) = 0$ si $P \in \mathcal{D}_n(Q_0)$ no intersecta a E, como consecuencia $\mu_k(P) = 0$ para toda $k \geq n$, por lo cual $supp(\mu_k) \subset \mathcal{U}_{2^{-n+1}diam(Q_0)}(E)$ para toda $k \geq n$. Luego $supp(\mu) \subset \mathcal{U}_{2^{-n+1}diam(Q_0)}(E)$ para toda $n \geq 0$, lo que prueba nuestra afirmación.

Ahora veamos que $\mu_n(P) \leq \mathcal{H}^s_\infty(P \cap E)$ para todo $P \in \mathcal{D}_n(Q_0)$. Esto se sigue por inducción. Para $n = 0$:

$$\mathcal{D}_0(Q_0) = Q_0 \Rightarrow P = Q_0 \Rightarrow \mu_0(Q_0) = \mathcal{H}^s_\infty(E) \leq \mathcal{H}^s_\infty(E) = \mathcal{H}^s_\infty(E \cap Q_0).$$

Supongamos que se cumple para $n-1$ y Q es el padre diádico de P, entonces:

$$\mu_{n-1}(Q) \leq \mathcal{H}^s_\infty(Q \cap E) \leq \sum_{R \in \mathcal{C}h(Q)} \mathcal{H}^s_\infty(R \cap E).$$

Por lo tanto de (1.4.5) se deduce que $\mu_n(P) \leq \mathcal{H}^s_\infty(P \cap E)$ como se quería.
Como consecuencia para toda $j \geq n$,

$$\mu_j(P) \leq \mathcal{H}^s_\infty(P \cap E) \;\; \forall \; P \in \mathcal{D}_n(Q_0).$$

Más aún, por construcción, todos los cubos diádicos que no intersectan a Q_0 tienen medida μ_j igual a cero.
Dado que toda bola abierta B_r de radio r tal que $2^{-n-1}l(Q_0) \leq r < 2^{-n}l(Q_0)$ está contenida en una unión de a lo mas 2^d cubos P_k con longitud de lado $2^{-n}l(Q_0)$, tenemos que para todo $j \geq n$

$$\mu_j(B_r) \leq \sum_{k=1}^{2^d} \mu_j(P_k) \leq \sum_{k=1}^{2^d} \mathcal{H}^s_\infty(P_k \cap E) \leq \sum_{k=1}^{2^d} \mathcal{H}^s_\infty(P_k) \leq 2^d diam(P_k)^s;$$

y como $diam(P_k)^2 = 2(l(Q_0)/2^n)^2 \Rightarrow diam(P_k) = 2^{3/2}(l(Q_0)/2^{n+1}) \leq 2^{3/2}r$, entonces

$$\mu_j(B_r) \leq 2^{(d+3/2)s} r^s = cr^s.$$

Haciendo tender $j \to \infty$ concluimos que $\mu(B_r) \leq cr^s$. Así basta definir la medida buscada como μ/c.
Además, al ser $E \subset \mathbb{R}^d$ compacto, $\mathcal{H}^s_\infty(E) < \infty$ y como μ es no trivial, existe una constante c tal que $\mu(E) \geq c^{-1}\mathcal{H}^s_\infty(E)$.

Observación 1.4.11. *Como en el teorema anterior, probamos que para cualquier compacto $E \subset \mathbb{R}^d$ se cumple $\mu(E) \geq c^{-1}\mathcal{H}^s_\infty(E)$ y $\mathcal{H}^s_\infty(E) \geq c^{-1}\mu(E)$, entonces*

$$\mathcal{H}^s_\infty(E) \approx \sup\{\mu(E) : \mu(B(x,r)) \leq r^s \;\forall\; x \in \mathbb{R}^d, \forall\; r > 0\}.$$

Teorema 1.4.12. *Sea $s > 1$. Para todo compacto $E \subset \mathbb{C}$, tenemos que*

$$\gamma(E) \geq c(s)\mathcal{H}^s_\infty(E)^{1/s},$$

donde $c(s) = c'\frac{s-1}{s} > 0$ y c' es una constante absoluta ($c(s) \to 0$ si $s \to 1$).

Demostración.
Supongamos que $\mathcal{H}^s_\infty(E) > 0$, por el Teorema 1.4.10 existe μ medida de Borel con soporte en E tal que $\mu(E) \geq c^{-1}\mathcal{H}^s_\infty(E)$ y $\mu(B(z,r)) \leq r^s$ para toda $z \in \mathbb{C}$ y para todo $r > 0$. Considere la función $f = \mathcal{C}\mu$, por la Proposición 1.3.6, $f(\infty) = 0$ y $|f'(\infty)| = \mu(E)$. Para estimar $||f||_\infty$, dado cualquier $z \in \mathbb{C}$ tenemos

$$|\mathcal{C}\mu(z)| \leq \int \frac{1}{|w-z|} d\mu(w) = \int_0^\infty \mu\left(\left\{w : \frac{1}{|w-z|} > t\right\}\right) dt =$$

$$\int_0^\infty \mu(B(z,1/t))dt \leq \int_0^\infty min(\mu(E), 1/t^s)dt.$$

Calculando la última integral tenemos

$$\int_0^{\mu(E)^{-1/s}} \mu(E)dt + \int_{\mu(E)^{-1/s}}^\infty 1/t^s dt = \mu(E)^{1-\frac{1}{s}} + \frac{1}{s-1}(\mu(E)^{\frac{1}{s}})^{s-1} = \frac{s}{s-1}\mu(E)^{1-\frac{1}{s}}.$$

Por lo tanto $||f||_\infty \leq \frac{s}{s-1}\mu(E)^{1-\frac{1}{s}}$, luego $\dfrac{f}{||f||_\infty} \in Ad(E)$ y así

$$\gamma(E) \geq \frac{|f'(\infty)|}{||f||_\infty} \geq \frac{s-1}{s}\mu(E)^{1/s} \geq c\frac{s-1}{s}\mathcal{H}^s_\infty(E)^{1/s}.$$

La siguiente proposición resume lo que hemos visto en esta sección de la relación entre la medida de Hausdorff y la capacidad analítica.

Proposición 1.4.13. *(i) Si $dim_H(E) > 1$, entonces $\gamma(E) > 0$.*
(ii) $\gamma(E) \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) \leq \mathcal{H}^1(E)$. En particular si $dim_H(E) < 1$, entonces $\gamma(E) = 0$.

Demostración.
(i) Sea $dim_H(E) > 1$, luego para toda $s < dim_H(E)$, se tiene $\mathcal{H}^s(E) = \infty > 0$. Por lo cual $\mathcal{H}^s_\infty(E) > 0$, pues $\mathcal{H}^s(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^s_\infty(A) = 0$. Así, para $1 < s < dim_H(E)$, por el Teorema 1.4.12 tenemos $\gamma(E) \geq c(s)\mathcal{H}^s_\infty(E)^{1/s} > 0$.
(ii) Por el Teorema 1.4.7 (de Painlevé) y de (1.4.3) obtenemos $\gamma(E) \leq \mathcal{H}^1_\infty(E)$.
Ahora, para la segunda desigualdad sean $A := \{\sum_n diam(A_n) : E \subset \bigcup_n A_n\}$ y $B_\varepsilon := \{\sum_m diam(B_m) : E \subset \bigcup_m B_m,\ diam(B_m) \leq \varepsilon\}$.
Así $B_\varepsilon \subset A$ para todo $\varepsilon > 0$, por lo cual:

$$\text{ínf } A \leq \text{ínf } B_\varepsilon \ \forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^1_\infty(E) = \text{ínf } A \leq \sup_{\varepsilon>0}(\text{ínf } B_\varepsilon) = \mathcal{H}^1(E).$$

Gracias a la proposición que acabamos de demostrar, podemos dar fácilmente algunos ejemplos de conjuntos removibles y no removibles:

1. El conjunto de Mandelbrot ([Falconer] 14.2), su frontera y los conjuntos de Julia que se generan a partir de los puntos en la frontera ([Falconer] 14.3) al tener dimensión de Hausdorff igual a 2 son no removibles.

2. Las curvas de Koch ([Falconer] 15.3) y el triangulo de Sierpinski ([Falconer] 9.4) al tener dimensión de Hausdorff en el intervalo $(1, 2)$ son no removibles.

3. El conjunto de Cantor clásico al tener dimensión de Hausdorff menor que uno es removible.

Por lo concluido en la proposición anterior resulta que la dimensión 1 es la dimensión crítica conectada con la capacidad analítica. Más aún debido a la Proposición 1.4.13 uno se pregunta si es cierto que $\gamma(E) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(E) > 0$.
La primera prueba de que esta conjetura es falsa la dio Vitushkin en 1960 al construir un conjunto compacto de longitud positiva y capacidad analítica cero.

Ejemplo 1.4.14. *Un ejemplo típico de un conjunto E con capacidad $\gamma(E) = 0$ y longitud $\mathcal{H}^1(E) > 0$ es el llamado conjunto de Cantor de cuartos de esquina; éste se construye de la siguiente manera: considere un cuadrado Q^0 con longitud de lado 1. Ahora reemplace Q^0 por cuatro cuadrados $Q_i^1, i = 1, \ldots, 4$ con longitud de lado $1/4$ contenidos en Q^0, tal que cada Q_i^1 contenga un vértice diferente de Q^0. Análogamente, en el siguiente paso cada Q_i^1 se reemplaza por cuatro cuadrados con longitud de lado $1/16$ contenidos en Q_i^1 tal que cada uno contiene un vértice diferente de Q_i^1. Así tendremos 16 cuadrados Q_k^2 con longitud de lado $1/16$. Procediendo de manera inductiva (véase Figura 1.1), tomando $E_n = \bigcup_{i=1}^{4^n} Q_i^n$ y $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, E es el* ***conjunto de Cantor de cuartos de esquina****.*

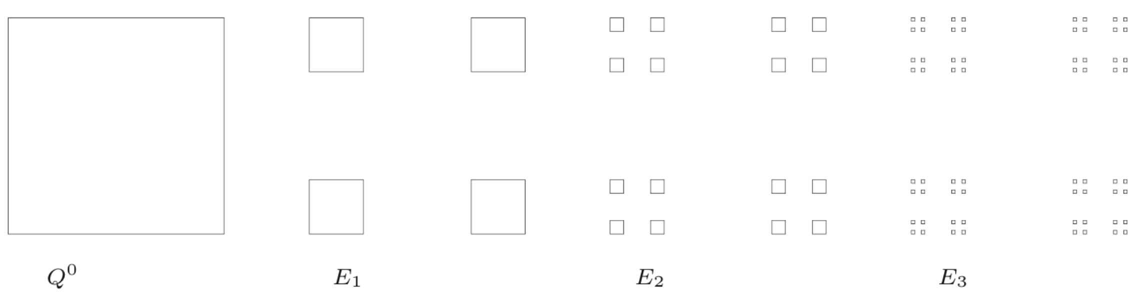

Figura 1.1: Se muestra el cuadrado Q_0 y a los conjuntos E_1, E_2 y E_3 que aparecen en las primeras 3 etapas de la construcción del conjunto de Cantor de cuartos de esquina.

Como $\sum_{i=1}^{4^n} l(Q_i^n) = 1 \ \forall \ n \geq 1$, donde $l(Q_i^n) = 4^{-n}$ es la longitud del lado de Q_i^n, *se deduce que*

$$\mathcal{H}^1_{2^{-n+1/2}}(E) \leq \mathcal{H}^1_{2^{-n+1/2}}(E_n) \leq \sum_{k=1}^{4^n} diam(Q_k^n) = 2^{2n}(2^{-2n+1/2}) = 2^{1/2}.$$

Haciendo tender $n \to \infty$ *se sigue que* $\mathcal{H}^1(E) \leq 2^{1/2}$.

Para probar que $\mathcal{H}^1(E) > 0$ *usaremos el Lema de Frostman 1.4.10: considere una medida de probabilidad* μ *con soporte en* E *tal que* $\mu(Q_i^n) = 4^{-n}$ *para toda* i, n. *Sean* $z \in E$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $1/4^{n+1} \leq r < 1/4^n$, *entonces* $B_E(z,r) = B(z,r) \cap E$ *está contenida en la unión de a lo mas 4 cuadrados de longitud* $1/4^{n+1}$ *por lo cual* $\mu(B_E(z,r)) \leq \sum_{i=1}^4 \mu(Q_i^{n+1}) = 4(1/4^{n+1}) \leq 4r$.*Así* μ *cumple que* $\mu(B(z,r)) \leq cr$ *para toda* $z \in E$ *y toda* $r > 0$. *Luego por la Observación 1.4.11 se tiene que:*

$$\mathcal{H}^1(E) \geq \mathcal{H}^1_\infty(E) \geq c^{-1}\mu(E) = c^{-1} > 0.$$

La prueba de que $\gamma(E) = 0$ *se irá desarrollando a lo largo de la tesis y se concluye a partir del teorema principal del Capítulo 4 , que es la comparación entre la capacidad analítica y la capacidad* γ_+.

Capítulo 2

La transformada de Cauchy y la curvatura de Menger

En este capítulo explicaremos la relación que hay entre la transformada de Cauchy y la curvatura de Menger, usaremos esta conexión para demostrar el Teorema T1 (Ver Teorema 2.3.2) para el operador integral singular de Cauchy, i.e. para $\mathcal{C}_\mu$.
Además obtendremos una prueba del acotamiento en L^2 de la transformada de Cauchy en gráficas de funciones Lipschitz respecto a la medida de longitud de arco.

2.1. Preliminares

Aunque en la literatura clásica de los operadores de Calderón-Zygmund las medidas μ con las que se trabaja son **duplicadoras**, es decir que existe una constante $c > 0$ tal que $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$, para la capacidad analítica esta condición es muy restrictiva, por lo cual trabajaremos con un tipo especial de medidas que satisfacen una condición de crecimiento superior.

Definición 2.1.1. *Una medida de Radon μ en $\mathbb{R}^d$ se dice que tiene **crecimiento de grado n** o que **es de grado n** si existe una constante c_0 tal que*

$$\mu(B(x, r)) \leq c_0 r^n \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^d, r > 0.$$

*Si nos interesa hacer énfasis en la constante c_0 decimos que μ tiene c_0-crecimiento de grado n. Cuando $n = 1$ decimos que μ tiene **crecimiento lineal**.*

Ejemplo 2.1.2. *La medida de Lebesgue $\mathcal{L}^2$ (área) en $\mathbb{R}^2$ es de crecimiento de grado dos pues $\mathcal{L}^2(B(x, r)) = \pi r^2$.*
También la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^1$ (longitud) en $\mathbb{R}$ es de crecimiento lineal pues

$\mathcal{L}^1(B(x,r)) = 2\pi r$.
Una medida μ en $\mathbb{C}$ que no tiene crecimiento lineal es la siguiente:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \notin A \\ 1 & si\ 0 \in A \end{cases}$$

Luego para toda $c > 0$ existen $x_c = 0, r_c = \frac{1}{2c}$ tales que $\mu(B(x_c, r_c)) = 1 > \frac{1}{2} = cr_c$.

La medida 1-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}^2$ no es n-dimensional para ningún n, pues $\mathcal{H}^1(B(x,r)) = \infty$. Mientras que la medida 2-dimensional de Hausdorff en $\mathbb{R}$ si es n-dimensional para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que $\mathcal{H}^2(B(x,r)) = 0 \leq r^n$.

Note que si μ es de grado n no puede tener puntos masa.
Pues como $\forall\ x \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, $\mu(\{x\}) \leq \mu(B(x,r)) \leq c_0 r^n$, luego haciendo tender $r \to 0$, tendremos que $\mu(\{x\}) = 0$.

Definición 2.1.3. *Decimos que $K(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x = y\} \to \mathbb{C}$ es un* ***kernel Calderón-Zygmund n-dimensional*** *si existen constantes $c > 0$ y $0 < \eta \leq 1$ tales que se cumplen las siguientes desigualdades para toda $x, y \in \mathbb{R}^d$ con $x \neq y$:*

$$|K(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^n}, \quad y\ si \quad |x - x'| \leq \frac{|x-y|}{2},$$

$$\Rightarrow \quad |K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq \frac{c|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n+\eta}}.$$

Dada una medida de Radon ν en $\mathbb{R}^d$, posiblemente compleja, definimos

$$T\nu(x) := \int K(x,y)d\nu(y), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus supp(\nu).$$

Decimos que T es un ***operador integral singular (SIO)*** *con Kernel $K(\cdot,\cdot)$.*
Como la integral anterior puede no ser absolutamente convergente si $x \in supp(\nu)$ consideraremos los siguientes ***operadores ε-truncados*** *T_ε, $\varepsilon > 0$:*

$$T_\varepsilon\nu(x) := \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)d\nu(y),\ x \in \mathbb{C}.$$

Observe que la integral del lado derecho converge absolutamente si $||\nu|| = |\nu|(\mathbb{R}^d) < \infty$.

Nosotros trabajaremos con el **espacio de medidas de Borel reales finitas** (o complejas si estamos trabajando en el plano complejo) y lo denotaremos como $M(\mathbb{R}^d)$, éste es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $||\nu|| = |\nu|(\mathbb{R}^d)$.

Cuando fijamos $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$, dada $f \in L^1_{loc}(\mu)$ y tomando el producto $(f\mu)$ en el sentido distribucional, escribimos

$$T_\mu f(x) := T(f\mu)(x) = \int K(x,y)f(y)d\mu(y),\ x \in \mathbb{R}^d \setminus supp(f\mu)$$

$$T_{\mu,\varepsilon} f(x) := T_\varepsilon(f\mu)(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

La integral que define $T_\varepsilon(f\mu)(x)$ es absolutamente convergente para toda $x \in \mathbb{R}^d$ si por ejemplo, $f \in L^p(\mu)$ para algún $1 \leq p < \infty$ y μ es de grado n. Pues si q es el índice conjugado de p tenemos que

$$||K||^q_{L^q(\mu,\varepsilon)} = \int_{|x-y|>\varepsilon} |K(x,y)|^q d\mu(y) \leq \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{c^q}{|x-y|^{nq}} d\mu(y) \leq \frac{c^q}{\varepsilon^q} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^n}.$$

Una vez demostrado que

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^n} \leq C \sup_{R>0} \left(\frac{\mu(B(x,R))}{R^n} \right), \tag{2.1.1}$$

al ser μ una medida n-dimensional, tendremos que

$$||K||^q_{L^q(\mu,\varepsilon)} \leq \frac{c^q}{\varepsilon^q} C \sup_{R>0} \left(\frac{\mu(B(x,R))}{R^n} \right) \leq \frac{c^q}{\varepsilon^q} C c_0 < \infty.$$

Así, por la desigualdad de Holder

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} |K(x,y)||f(y)|d\mu(y) = ||Kf||_{L^1(\mu,\varepsilon)} \leq ||f||_{L^p(\mu,\varepsilon)} ||K||_{L^q(\mu,\varepsilon)} < \infty.$$

Ahora demostremos (2.1.1), para ello separaremos el dominio de integración en anillos cuyos radios $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son estrictamente crecientes y tienden a ∞:

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\delta_k \leq |x-y| \leq \delta_{k+1}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k^n} \int_{\delta_k \leq |x-y| \leq \delta_{k+1}} d\mu(y).$$

Puesto que $\lim_{k\to\infty} \mu(B(x,k)) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x,k)\right) = \mu(\mathbb{C})$, entonces para $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x,r_1) \bigcap supp(\mu) \neq \emptyset$ y $\varepsilon_1 = \mu(B(x,r_1)) > 0$, existe un radio $r_{N_1} > r_1$ tal que

$$\mu(\mathbb{C}) - \mu(B(x,r_{N_1})) \leq \mu(B(x,r_1)) \leq \mu(B(x,r_{N_1})).$$

Ahora para $\varepsilon_2 = \mu(B(x,N_1))/2^2$ existe un radio $r_{N_2} > r_{N_1}$ tal que

$$\mu(\mathbb{C}) - \mu(B(x,r_{N_2})) \leq \frac{\mu(B(x,r_{N_1}))}{2^2} \leq \frac{\mu(B(x,r_{N_2}))}{2^2}.$$

Repitiendo este proceso inductivamente obtenemos una sucesión de radios $\{r_{N_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tales que

$$\mu(B(x, r_{N_{k+1}})) - \mu(B(x, r_{N_k})) \leq \mu(\mathbb{C}) - \mu(B(x, r_{N_k})) \leq \frac{\mu(B(x, r_{N_k}))}{k^2}.$$

Así, tomando $\delta_k = r_{N_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtendremos que

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k^n} \int_{\delta_k \leq |x-y| \leq \delta_{k+1}} d\mu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(B(x,\delta_{k+1})) - \mu(B(x,\delta_k))}{\delta_k^n}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(B(x,\delta_k))}{\delta_k^n} \frac{1}{k^2} \leq \left(\sup_{R>0} \frac{\mu(B(x,R))}{R^n} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C \left(\sup_{R>0} \frac{\mu(B(x,R))}{R^n} \right).$$

Nótese que la demostración de (2.1.1) no depende del valor n.

Consideraremos los **espacios débiles de Lebesgue** $L^{p,\infty}(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$. Donde $f \in L^{p,\infty}(\mu)$ si

$$||f||_{L^{p,\infty}(\mu)} = \sup_{\lambda>0} \lambda \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \lambda\})^{1/p} < \infty. \tag{2.1.2}$$

Decimos que $T_\mu : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ es **acotado en** $L^p(\mu)$ si los operadores $T_{\mu,\varepsilon}$ son uniformemente acotados en $L^p(\mu)$ con respecto a $\varepsilon > 0$. Análogmanete respecto al acotamiento de $L^1(\mu)$ en $L^{1,\infty}(\mu)$.
También decimos que T es **acotado de** $M(\mathbb{C})$ **en** $L^{1,\infty}(\mu)$ si existe alguna constante c tal que para toda $\nu \in M(\mathbb{R}^d)$ y toda $\lambda > 0$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |T_\varepsilon \nu(x)| > \lambda\}) \leq \frac{c||\nu||}{\lambda} \quad \text{uniformemente en } \varepsilon > 0$$

es decir $||T_\varepsilon \nu||_{L^{1,\infty}(\mu)} \leq c||\nu||$ uniformemente en $\varepsilon > 0$.
Los operadores integrales singulares que son acotados en $L^2(\mu)$ son llamados **operadores de Calderón-Zygmund**.

La transformada de Cauchy es el operador integral singular en $\mathbb{C}$ asociado al kernel

$$K(x,y) := \frac{1}{y-x}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

Así que la transformada de Cauchy de una medida de Radon μ en $\mathbb{C}$ es

$$\mathcal{C}\mu(x) := \int K(x,y) d\mu(y) = \int \frac{1}{y-x} d\mu(y) = \left(\frac{1}{x} * \mu \right)(x), \ x \in \mathbb{C} \setminus supp(\mu).$$

A continuación mencionaremos algunos teoremas esenciales para la demostración del Teorema T1 para la transformada de Cauchy y cuyas demostraciones pueden encontrarse en [Tolsa] capítulo 2.

Teorema 2.1.4. *Sea μ una medida de Radon en R^d de grado n. Si T_μ es un operador integral singular n-dimensional que es acotado en $L^2(\mu)$, entonces T es acotado de $M(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}(\mu)$.*
Más aún, dado $\varepsilon > 0$ si $T_{\mu,\varepsilon}$ es acotado en $L^2(\mu)$, entonces T_ε es acotado de $M(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}(\mu)$ con la cota dependiendo sólo de de la constante de crecimiento c_0 y de $||T_{\mu,\varepsilon}||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)}$.

Demostración.
Véase [Tolsa] Teorema 2.16.

Definición 2.1.5. *Si T es un operador integral especial, definimos el* ***operador maximal*** *T_* como:*

$$T_*\nu(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon \nu(x)| \quad \textit{para } \nu \in M(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d,$$

y el ***operador maximal δ-truncado*** *$T_{*,\delta}$ es*

$$T_{*,\delta}\nu(x) = \sup_{\varepsilon>\delta} |T_\varepsilon \nu(x)| \quad \textit{para } \nu \in M(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d.$$

También ponemos $T_{\mu,*}f = T_*(f\mu)$ y $T_{\mu,*,\delta}f = T_{*,\delta}(f\mu)$ para $f \in L^1_{loc}(\mu)$.

Teorema 2.1.6. *Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^d$ de grado n. Si T_μ es un operador integral especial n-dimensional acotado en $L^2(\mu)$, entonces $T_{\mu,*}$ es acotado en $L^p(\mu)$, para $p \in (1,\infty)$ y T_* es acotado de $M(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}(\mu)$.*

Demostración.
Véase [Tolsa] Teorema 2.21.

Definición 2.1.7. *Dados $\alpha, \beta > 1$ decimos que un cubo (o bola) Q es (α,β)**-duplicador** si $\mu(\alpha Q) \leq \beta\mu(Q)$, donde αQ es el cubo (bola) con en mismo centro que Q pero con diámetro $\alpha diam(Q)$.*

Teorema 2.1.8. *Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^d$ de grado n y T_μ un operador integral especial n-dimensional. Sean $\beta > 0$ suficientemente grande (dependiendo sólo de d) y $\theta > 0$. Suponga que para todo cubo $(2,\beta)$-duplicador Q existe un subconjunto $G_Q \subset Q$, con $\mu(G_Q) \geq \theta\mu(Q)$ tal que T_* es acotado de $M(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}(\mu\lfloor G_Q)$, con la norma acotada uniformemente en Q. Entonces T_μ es acotado en $L^p(\mu)$ para $1 < p < \infty$ con su norma dependiendo sólo de p y de las constantes anteriores.*

Demostración.
Véase [Tolsa] Teorema 2.22.

En pocas palabras el teorema anterior nos dice que si para todo cubo duplicador existe una gran parte (en términos de μ) donde T_* es acotado de $M(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}$, entonces T_μ es acotado en $L^p(\mu)$ para $1 < p < \infty$.

2.2. La curvatura de una medida

Definición 2.2.1. *Dados 3 puntos $x, y, z \in \mathbb{C}$ distintos a pares, su* ***curvatura de Menger*** *es:*

$$c(x, y, z) = \frac{1}{R(x, y, z)}$$

donde $\mathbb{R}(x, y, z) \in \mathbb{R}$ es el radio de la circunferencia que pasa a través de x, y, z (con $R(x, y, z) = \infty, c(x, y, z) = 0$ si x, y, z están sobre la misma linea). Si dos de los puntos x, y, z coinciden, por conveniencia ponemos $c(x, y, z) = 0$.

Note que la curvatura de Menger es invariante bajo traslaciones y rotaciones, pues el radio de la circunferencia no cambia al trasladar los tres puntos que la definen y tampoco cuando los rotamos.

Dados $x, y, z \in \mathbb{C}$ denotamos $\widehat{xyz}$ como el ángulo con vértice y y lados $\vec{yx}$ e $\vec{yz}$.

Proposición 2.2.2. *Sean $x, y, z \in \mathbb{C}$ puntos distintos a pares. Entonces*

$$c(x, y, z) = \frac{2dist(x, L_{y,z})}{|x - y||x - z|} = \frac{4S(x, y, z)}{|x - y||x - z||y - z|} = \frac{2sin\widehat{xyz}}{|x - z|},$$

donde $L_{y,z}$ es la línea que pasa por y, z, $S(x, y, z)$ es el área del triángulo con vérices en x, y, z y $\widehat{xyz}$ es el ángulo en el mismo triángulo opuesto al lado xz.

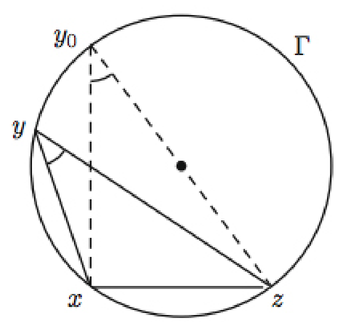

Figura 2.1: Se muestra la circunferencia Γ que pasa a través de los puntos x, y, z.

Demostración.
Denotemos por Γ a la circunferencia que pasa por x, y, z y por R su radio. Sea $y_0 \in \Gamma$ un punto opuesto a $z \in \Gamma$, así que el segmento con puntos finales y_0, z es un diámetro de Γ. Véase la Figura 2.1. En esta situación, si y y y_0 están en el mismo medio plano determinado por la linea $L_{x,z}$, entonces $\widehat{xyz} = \widehat{xy_0z}$. Si están en diferente medio plano,

entonces $\widehat{xyz} = \pi - \widehat{xy_0z}$. Así que en cualquier caso $sin\widehat{xyz} = sin\widehat{xy_0z}$.
Por otro lado, $\widehat{y_0xz}$ es un ángulo recto pues y_0, z son los puntos finales de un diámetro de Γ, por lo cual

$$sin\widehat{xy_0z} = \frac{|x-z|}{|y_0-z|} = \frac{|x-z|}{2R}.$$

Así que

$$c(x,y,z) = \frac{1}{R} = \frac{2sin\widehat{xy_0z}}{|x-z|} = \frac{2sin\widehat{xyz}}{|x-z|}.$$

Puesto que $dist(x, L_{y,z}) = |x-y|sin\widehat{xyz}$, tendremos que

$$c(x,y,z) = \frac{2dist(x, L_{y,z})}{|x-y||x-z|}.$$

Finalmente, del hecho $S(x,y,z) = \frac{1}{2}|y-z|dist(x, L_{y,z})$, obtenemos que

$$c(x,y,z) = \frac{4S(x,y,z)}{|x-y||x-z||y-z|}.$$

La relación entre la curvatura de Menger, la transformada de Cauchy y la capacidad analítica se origina de la siguiente identidad, descubierta por Melnikov:

Proposición 2.2.3. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ puntos distintos a pares. Tenemos que*

$$c(z_1,z_2,z_3)^2 = \sum_{s\in S_3} \frac{1}{(z_{s_2}-z_{s_1})\overline{(z_{s_3}-z_{s_1})}}, \tag{2.2.1}$$

donde S_3 es el grupo de permutaciones de 3 elementos.

Demostración.
Tomemos $a = z_2 - z_1, b = z_3 - z_1$, luego la suma del lado derecho de (2.2.1) es:

$$2Re\left(\frac{1}{a\bar{b}} + \frac{1}{(a-b)\bar{a}} + \frac{1}{b(\bar{b}-\bar{a})}\right) = 4\frac{|a|^2|b|^2 - Re(a\bar{b})^2}{|a|^2|b|^2|b-a|^2}.$$

Como $arg(a\bar{b}) = \widehat{z_2z_1z_3}$, entonces

$$|a|^2|b|^2 - Re(a\bar{b})^2 = |a|^2|b|^2(1 - cos^2\widehat{z_2z_1z_3}) = |a|^2|b|^2sin^2\widehat{z_2z_1z_3}$$

Y ya que $S(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{2}|z_1-z_3|dist(z_2, L_{z_1,z_3}) = \frac{1}{2}|z_1-z_3||z_2-z_1|sin\widehat{z_2z_1z_3}$
tenemos $|a|^2|b|^2sin^2\widehat{z_2z_1z_3} = 4S(z_1,z_2,z_3)^2$.

Definición 2.2.4. *Para una medida de Radon positiva μ, escribimos*

$$c_\mu^2(x) = \int \int c(x,y,z)^2 d\mu(z) d\mu(y),$$

*y definimos la **curvatura de** μ como*

$$c^2(\mu) = \int c_\mu^2(x) d\mu(x) = \int \int \int c(x,y,z)^2 d\mu(z) d\mu(y) d\mu(x).$$

A partir de aquí estaremos trabajando con medidas positivas sin hacer mención de ello a menos que se indique lo contrario.

La noción de curvatura de una medida fue introducida por Melnikov. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.5. *(a) Suponga que μ es la medida de longitud de arco en una circunferencia Γ de radio r. Así para todo $x, y, z \in \Gamma, R(x,y,z) = r$ por lo cual*

$$c_\mu^2(x) = \frac{1}{r^2} \int \int d\mu(z) d\mu(y) = \frac{1}{r^2} \mu(\Gamma)^2 = 4\pi^2 \ \Rightarrow \ c^2(\mu) = 8\pi^3 r.$$

(b) Consideremos ahora μ como la longitud de arco en un segmento L. Luego para toda $x \in L$ tendremos que $R(x,y,z) = \infty$, pues x, y, z se encuentran en la misma línea, por lo cual $c_\mu^2(x) = 0 \Rightarrow c^2(\mu) = 0$.
Calculemos $c_\mu^2(x)$ para $x \notin L$. Por la invariansa en la rotación y traslación, sumiremos que L está contenido en el eje real y x pertenece al eje imaginario superior. Así que $L = [a,b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $x = (0,h)$. Entonces

$$c_\mu^2(x) = \int \int_{y,z \in L} \left(\frac{2dist(x,L)}{|x-y||x-z|} \right)^2 d\mathcal{H}_L^1(z) d\mathcal{H}_L^1(y) = 4h^2 \left(\int_L \frac{1}{|x-y|^2} d\mathcal{H}_L^1(y) \right)^2$$

como $|x-y|^2 = (0-y)^2 + (h-0)^2$, la última integral es igual a

$$\int_a^b \frac{1}{y^2+h^2} dy = \frac{1}{h} \left(arctan \frac{b}{h} - \arctan \frac{a}{h} \right).$$

Por lo tanto $c_\mu^2(x) = 4 \left(arctan \frac{b}{h} - \arctan \frac{a}{h} \right)^2$.
Note que si $a < 0 < b$, entonces $c_\mu^2(x) \to 4\pi^2$ cuando $h \to 0$. Así que la función c_μ^2 no es continua en $\mathbb{C}$, pues si fuera continua que $h \to 0 \Rightarrow x \in L \Rightarrow c_\mu^2(x) \to 0$. Por otra parte, la última igualdad nos dice que $c_\mu^2(x) \leq 4\pi^2$ para toda $x \in \mathbb{C}$.

(c) En nuestro tercer ejemplo consideraremos el conjunto de Cantor de cuartos de esquina E descrito en el Ejemplo 1.4.14. Sea μ la medida de Hausdorff 1-dimensional en E; vamos a probar que $c^2_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$ y por lo tanto $c^2(\mu) = \infty$. Recuerde que $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, donde E_n esta conformado por una unión disjunta de 4^n cuadrados Q_i^n con longitud de lado 4^{-n}. Para $n \geq 0$ fijo, denotamos por $Q_n(x)$ al cuadrado Q_i^n que contiene a x. Así tenemos que,

$$c^2_\mu(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y \in Q_{k-1}(x) \setminus Q_k(x)} \int_{z \in Q_{k-1}(x) \setminus [Q_k(x) \cup Q_k(y)]} c(x,y,z)^2 d\mu(z) d\mu(z).$$

Por la geometría del conjunto E, dado $y \in Q_{k-1}(x) \setminus Q_k(x)$, se cumple que

$$dist(x, L_{y,z}) \geq \inf\{dist(x, L_{y,z}) : z \in Q_{k-1}(x) \setminus [Q_k(x) \cup Q_k(y)]\} > 0.$$

Y dado que para toda $z \in Q_{k-1}(x) \setminus [Q_k(x) \cup Q_k(y)]$ se tiene que

$$|x - z| \leq diam(Q_{k-1}(x)) = \sqrt{2}\; l(Q_{k-1}(x)) = \frac{\sqrt{2}}{4} l(Q_k(x)),$$

entonces

$$c(x,y,z) \geq C \frac{1}{l(Q_k(x))} \quad \forall\ z \in Q_{k-1}(x) \setminus [Q_k(x) \cup Q_k(y)],$$

para una constante C.
Más aún, como $\mu(Q_i^k) = 4 \cdot l(Q_i^k) = 4 \cdot 4^{-k}$ para $1 \leq i \leq 4^k$, entonces

$$\mu(Q_{k-1}(x) \setminus [Q_k(x) \cup Q_k(y)]) = 4 \cdot 4^{-k+1} - (4 \cdot 4^{-k} + 4 \cdot 4^{-k}) = 8 \cdot 4^{-k}$$

y

$$\mu(Q_{k-1}(x) \setminus Q_k(x)) = 4 \cdot 4^{-k+1} - 4 \cdot 4^{-k} = 12 \cdot 4^{-k}.$$

Es decir $\mu(Q_{k-1}(x) \setminus Q_k(x)) \approx \mu(Q_{k-1}(x) \setminus [Q_k(x) \cup Q_k(y)]) \approx 4^{-k}$.
Por lo cual tenemos que

$$c^2_\mu(x) \geq C \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y \in Q_{k-1}(x) \setminus Q_k(x)} \frac{4^{-k}}{l(Q_k(x))^2} d\mu(y) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4^{-k}}{4^{-k}}\right)^2 = \infty.$$

Cuando uno integra tres veces respecto a μ la identidad (2.2.1) obtenemos una nueva identidad que relaciona la transformada de Cauchy de una medida con su curvatura. Este resultado se encuentra en la siguiente proposición la cual incluye el concepto de **curvatura ε-truncada**

$$c^2_\varepsilon(\mu) = \int\int\int_{\substack{|x-z|>\varepsilon \\ |y-z|>\varepsilon \\ |x-y|>\varepsilon}} c(x,y,z)^2 d\mu(z) d\mu(y) d\mu(x).$$

Proposición 2.2.6. *Sea μ una medida finita de Radon en $\mathbb{C}$ con crecimiento c_0-lineal. Entonces tenemos*

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{6}c^2_\varepsilon(\mu) + O(\mu(\mathbb{C})), \tag{2.2.2}$$

donde $|O(\mu(\mathbb{C}))| \leq c_0^2 c\mu(\mathbb{C})$ y c es una constante absoluta que no depende de ε.

La identidad (2.2.2) es notable pues relaciona una noción analítica (la transformada de Cauchy de una medida) con una métrico-geométrica (curvatura).

Demostración.
Tenemos que:

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} = \int \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{1}{y-x} d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) =$$

$$\int \left(\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)}{y-x} \right) \left(\overline{\int_{|x-z|>\varepsilon} \frac{d\mu(z)}{z-x}} \right) d\mu(x) = \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon}} \frac{d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)}{(y-x)\overline{(z-x)}}$$

$$= \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|>\varepsilon}} \frac{d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)}{(y-x)\overline{(z-x)}} + \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|\leq\varepsilon}} \frac{d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)}{(y-x)\overline{(z-x)}} =: I_1 + I_2.$$

Consideremos la primera integral I_1. Permutando x, y, z y usando Fubini y la identidad de Melnikov (2.2.1), por la simetría del dominio de integración tenemos

$$I_1 = \frac{1}{6}\int\int\int_{\substack{|z_1-z_2|>\varepsilon \\ |z_1-z_3|>\varepsilon \\ |z_2-z_3|>\varepsilon}} \sum_{s\in S_3} \frac{d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3)}{(z_{s_2}-z_{s_1})\overline{(z_{s_3}-z_{s_1})}}$$

$$= \frac{1}{6}\int\int\int_{\substack{|z_1-z_2|>\varepsilon \\ |z_1-z_3|>\varepsilon \\ |z_2-z_3|>\varepsilon}} c(z_1,z_2,z_3)^2 d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3) = \frac{1}{6}c^2_\varepsilon(\mu).$$

Para estimar la integral I_2, por las condiciones del dominio de integración el lado con vértices y, z es el más corto en el triangulo con vértices x, y, z, por lo cual $|x-y| \leq c|x-z|$, luego

$$|I_2| \leq c\int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|\leq\varepsilon}} \frac{d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)}{|y-x|^2} \leq c\int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y-z|\leq\varepsilon}} \frac{d\mu(y)d\mu(z)d\mu(x)}{|y-x|^2}$$

integrando respecto a z y por el crecimiento lineal de μ tenemos

$$\int_{|y-z|\le\varepsilon} d\mu(z) = \mu(B(y,\varepsilon)) \le c_0 r \Rightarrow |I_2| \le cc_0\varepsilon \int\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)d\mu(x)}{|y-x|^2}.$$

Para estimar la última integral separamos el dominio de integración en anillos como se hizo en (2.1.1) pero con $n=1$, para obtener

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu(y)}{|y-x|^2} \le \frac{1}{\varepsilon} Cc_0 \left(\sup_{R>0} \frac{\mu(B(x,R))}{R}\right) \tag{2.2.3}$$

Así, por (2.1.1) y usando nuevamente el crecimiento lineal de μ, tenemos que

$$|I_2| \le cc_0\varepsilon \int\int_{\{x:|x-y|>\varepsilon\}} \frac{d\mu(x)}{|y-x|^2} \le cc_0^2 C\mu(\mathbb{C}).$$

En el siguiente lema generalizamos la identidad (2.2.2) al caso donde se tengan tres diferentes medidas. También ocuparemos el **operador maximal radial 1-dimensional** definido para cualquier medida compleja ν y cualquier $x \in \mathbb{C}$ como

$$M_R\nu(x) := \sup_{r>0} \frac{|\nu|(B(x,r))}{r}.$$

Si μ es una medida con crecimiento lineal fija, para $f \in L^p(\mu)$ ponemos $M_R f = M_R(f\mu)$, donde dicho operador es acotado en $L^p(\mu)$ con $1 < p \le \infty$ y de $M(\mathbb{R}^d)$ a $L^{1,\infty}(\mu)$ (Véase [Tolsa] pág. 53); donde $f\mu$ se entiende en el sentido distribucional $(f\mu)(A) = \int_A f d\mu$.

Lema 2.2.7. *Sea ν_1, ν_2, ν_3 medidas reales finitas de Radon en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\sum_{s\in S_3} \int \mathcal{C}_\varepsilon(\nu_{s_2})\overline{\mathcal{C}_\varepsilon(\nu_{s_3})} d\nu_{s_1} = \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|>\varepsilon}} c(x,y,z)^2 d\nu_1(x)d\nu_2(y)d\nu_3(z) + R.$$

donde

$$|R| \le C \sum_{s\in S_3} \int M_R\nu_{s_2} M_R\nu_{s_3} d\nu_{s_1}$$

con C una constante absoluta.

Demostración.
Procediendo de manera análoga a la demostración de la proposición anterior, tenemos que:

$$\int \mathcal{C}_\varepsilon(\nu_{s_2})(x)\overline{\mathcal{C}_\varepsilon(\nu_{s_3})(x)}d\nu_{s_1}(x) = \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon}} \frac{d\nu_3(z)d\nu_2(y)d\nu_1(x)}{(y-x)\overline{(z-x)}} =$$

$$\int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|>\varepsilon}} \ldots + \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|\leq\varepsilon}} \ldots =: I_1 + I_2. \tag{2.2.4}$$

Como en la demostración anterior, en el dominio de integración I_2 tenemos que $|x-y| \leq c|x-z|$, por lo cual

$$I_2 \leq c\int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |y-z|\leq\varepsilon}} \frac{d\nu_3(z)d\nu_2(y)d\nu_1(x)}{|y-x|^2} = \int\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\nu_3(B(y,\varepsilon))d\nu_2(y)d\nu_1(x)}{|y-x|^2}.$$

Como

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{1}{|y-x|^2}d\nu_1(x) \leq \frac{c}{\varepsilon}M_R\nu_1(y)$$

deducimos que

$$I_2 \leq c\int \frac{\nu_3(B(y,\varepsilon))}{\varepsilon}M_R\nu_1(y)d\nu_2(y) \leq c\int M_R\nu_1(y)M_R\nu_3(y)d\nu_2(y).$$

Permutando los índices $1,2,3$ en (2.2.4) y sumando sobre todas las posibles permutaciones, usando la Proposicioóm 2.2.1 terminamos.

2.3. El teorema $T1$ para el operador integral singular de Cauchy

En esta sección probaremos el teorema $T1$ para el operador integral singular de Cauchy, para esto primero probaremos el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *Sea μ una medida finita con c_0-crecimiento lineal en $\mathbb{C}$, es decir,*

$$\mu(B(x,r)) \leq c_0 r.$$

Suponga que $||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} \leq c_1\mu(\mathbb{C})$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces existe un subconjunto $G \subset \mathbb{C}$ con $\mu(G) \geq \mu(\mathbb{C})/4$ tal que $\mathcal{C}_{\mu\lfloor G} : L^2(\mu\lfloor G) \to L^2(\mu\lfloor G)$ es acotada y cuya norma está acotada por arriba por una constante que depende solamente de c_0 y c_1.

Demostración.
Debido a las hipótesis y a la Proposición 2.2.6 tenemos que

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{6}\mathcal{C}^2_\varepsilon(\mu) + O(\mu(\mathbb{C})) \leq c_1\mu(\mathbb{C}) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{C}^2_\varepsilon(\mu) \leq c_1\mu(\mathbb{C}) + |O(\mu(\mathbb{C}))| \leq c_1\mu(\mathbb{C}) + cc_0^2\mu(\mathbb{C}) = c_2\mu(\mathbb{C}).$$

Dada $c_3 > 0$, sea

$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C} : |\mathcal{C}_\varepsilon\mu(x)| \leq c_3 \ y \ c^2_\mu(x) \leq c_3^2\}.$$

Como $\int c^2_\mu(x)d\mu(x) = c^2(\mu) \leq c_2\mu(\mathbb{C})$ y $\int |\mathcal{C}_\varepsilon\mu|^2 d\mu = ||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} \leq c_1\mu(\mathbb{C})$ tendremos que $\mu(A_\varepsilon) \geq \mu(\mathbb{C})/2$ si c_3 se escoge suficientemente grande.
Queremos probar que el operador integral de Cauchy $\mathcal{C}_{\mu\lfloor A_\varepsilon,\varepsilon}$ es acotado en $L^2(\mu\lfloor A_\varepsilon)$. Para esto introduciremos un operador de curvatura auxiliar: dados $x, y \in A_\varepsilon$, considere el kernel $K(x,y) := \int c(x,y,z)^2 d\mu(z)$ y sea T el operador $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)d\mu(y)$. Por el lema de Schur (Schur test) T es acotado en $L^2(\mu\lfloor A_\varepsilon)$, pues para toda $x \in A_\varepsilon$,

$$\int_{A_\varepsilon} K(x,y)d\mu(y) = \int_{A_\varepsilon} K(y,x)d\mu(y) = \int\int_{y\in A_\varepsilon} c(x,y,z)^2 d\mu(z)d\mu(y) \leq c^2_\mu(x) \leq c_3.$$

Por el Lema 2.2.7 aplicado a $\nu_j = f\mu$ para $j = 1,2,3$, deducimos que dada una función f real no negativa con soporte en A_ε tendremos que

$$4\int |\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)|^2 d\mu = \int\int\int_{\substack{|x-y|>\varepsilon \\ |x-z|>\varepsilon \\ |y-z|>\varepsilon}} c(x,y,z)^2 f(x)f(y)d\mu(z)d\mu(y)d\mu(x)$$

$$-2Re\int (\mathcal{C}_\varepsilon\mu)\overline{(\mathcal{C}_\varepsilon f\mu)} f d\mu + O(||f||^2_{L^2(\mu)}).$$

Por lo cual

$$\int |\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)|^2 d\mu \leq \frac{1}{4}|\langle Tf, f\rangle| + \frac{1}{2}\int |(\mathcal{C}_\varepsilon\mu)\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)f| d\mu + c||f||_{L^2(\mu)}.$$

Para estimar el primer termino del lado derecho usamos que T es acotada en $L^2(\mu\lfloor A_\varepsilon)$ y que el soporte de f esta en A_ε:

$$|\langle Tf, f\rangle| \leq ||Tf||_{L^2(\mu)}||f||_{L^2(\mu)} \leq c||f||^2_{L^2(\mu)}.$$

Para estimar la segunda integral, note que $|\mathcal{C}_\varepsilon\mu| \leq c_3$ en el soporte de f, entonces

$$\int |(\mathcal{C}_\varepsilon\mu)\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)f| d\mu \leq c_3 \int |\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)f| d\mu \leq c_3||\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)||_{L^2(\mu)}||f||_{L^2(\mu)}.$$

Así tenemos que

$$||\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)||^2_{L^2(\mu)} \leq c||f||^2_{L^2(\mu)} + \frac{c_3}{2}||\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)||_{L^2(\mu)}||f||_{L^2(\mu)}$$

lo cual implica que $||\mathcal{C}_\varepsilon(f\mu)||_{L^2(\mu)} \leq c||f||_{L^2(\mu)}$.
Hasta ahora hemos probado el $L^2(\mu\lfloor A_\varepsilon)$ acotamiento de $\mathcal{C}_{\mu\lfloor A_\varepsilon,\varepsilon}$. Si A_ε fuera independiente de ε podríamos poner $G := A_\varepsilon$ y terminaríamos. Como éste no es el caso hay que hacer un poco mas de trabajo. Sea $G_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C} : \mathcal{C}_{*,\varepsilon}\mu(x) \leq c_4$ y $c^2_\mu(x) \leq c^2_4\}$ donde c_4 es una constante suficientemente grande (con $c_4 > c_3$) que escogeremos abajo. Por el Teorema 2.1.4 $\mathcal{C}_\varepsilon$ es acotado de $M(\mathbb{C})$ en $L^{1,\infty}(\mu\lfloor A_\varepsilon)$ y por el Teorema 2.1.6 $\mathcal{C}_{*,\varepsilon}$ en acotado de $M(\mathbb{C})$ en $L^{1,\infty}(\mu\lfloor A_\varepsilon)$ (con las cotas dependiendo sólo de ε), es decir $\mu(\{x \in A_\varepsilon : \mathcal{C}_{*,\varepsilon}\mu(x) > c_4\}) \leq \dfrac{c\mu(\mathbb{C})}{c_4}$.
Si c_4 es suficientemente grande, el lado derecho de la desigualdad anterior no pasa de $\mu(\mathbb{C})/4 \leq \mu(A_\varepsilon)/2$. Por lo tanto

$$\mu(G_\varepsilon) \geq \mu(\{x \in A_\varepsilon : \mathcal{C}_{*,\varepsilon}\mu(x) \leq c_4\}) \geq \frac{1}{2}\mu(A_\varepsilon) \geq \frac{1}{4}\mu(\mathbb{C}).$$

Sea $G := \bigcap_{\varepsilon>0} G_\varepsilon$. Note que por definición si $\varepsilon < \delta$ entonces $\mathcal{C}_{*,\varepsilon}\mu \geq \mathcal{C}_{*,\delta}\mu$ y por lo cual $G_\varepsilon \subset G_\delta$, así tenemos

$$\mu(G) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu(G_\varepsilon) \geq \frac{1}{4}\mu(\mathbb{C}).$$

Por el mismo argumento usado para A_ε se sigue que $\mathcal{C}_{\mu\lfloor G_\varepsilon,\varepsilon}$ es acotado en $L^2(\mu\lfloor G_\varepsilon)$ (con la constante independiente de ε) y por lo cual $\mathcal{C}_{\mu\lfloor G}$ es acotado en $L^2(\mu\lfloor G)$.

Teorema 2.3.2. *(T1) Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{C}$ con crecimiento lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{C}_\mu$ es acotada en $L^2(\mu)$.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ y todos los cuadrados $Q \subset \mathbb{C}$,

$$||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||_{L^2(\mu\lfloor Q)} \leq c\mu(2Q)^{\frac{1}{2}},$$

donde c es independiente de ε.

(c) Para todos los cuadrados $Q \subset \mathbb{C}$,

$$c^2(\mu\lfloor Q) \leq c\mu(2Q).$$

Demostración.
(a) $\Rightarrow$ (b). Es trivial pues $\chi_Q \in L^2(\mu)$, luego

$$||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||_{L^2(\mu\lfloor Q)} \leq ||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||_{L^2(\mu)} \leq M||\chi_Q||_{L^2(\mu)} = M\mu(Q)^{\frac{1}{2}} \leq M\mu(2Q)^{\frac{1}{2}}.$$

Para probar (b) $\Leftrightarrow$ (a) ocuparemos que $||\mathcal{C}_\varepsilon\mu\lfloor Q||^2_{L^2(\mu\lfloor Q)} = ||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||^2_{L^2(\mu\lfloor Q)}$.
En efecto pues

$$\mathcal{C}_\varepsilon\mu\lfloor Q(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{d\mu\lfloor Q(y)}{y-x} = \int_{|x-y|>\varepsilon\cap Q} \frac{d\mu(y)}{y-x} = \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\chi_Q(y)d\mu(y)}{y-x} = \mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q(x).$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Aplicando (2.2.2) a la medida $\mu\lfloor Q$, para todo $\varepsilon > 0$ tendremos que

$$\frac{1}{6}c^2_\varepsilon(\mu\lfloor Q) + O(\mu(Q)) = ||\mathcal{C}_\varepsilon\mu\lfloor Q||^2_{L^2(\mu\lfloor Q)} = ||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||^2_{L^2(\mu\lfloor Q)} \leq c^2\mu(2Q)$$

Como lo anterior sucede para toda $\varepsilon > 0$, si $O(\mu(Q)) \geq 0$, entonces $c^2(\mu\lfloor Q) \leq c\mu(2Q)$. Pero también si $O(\mu(Q)) < 0$ pues por la Proposición 2.2.6

$$\frac{1}{6}c^2_\varepsilon(\mu\lfloor Q) \leq c^2\mu(2Q) - O(\mu(Q)) \leq c^2\mu(2Q) - |O(\mu(Q))| \leq c^2\mu(2Q) + cc_0\mu(Q)$$

$$\leq c^2\mu(2Q) + cc_0\mu(2Q).$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Análogamente para toda $\varepsilon > 0$ por (2.2.2) tenemos

$$||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||^2_{L^2(\mu\lfloor Q)} = ||\mathcal{C}_\varepsilon\mu\lfloor Q||^2_{L^2(\mu\lfloor Q)} = \frac{1}{6}c^2_\varepsilon(\mu\lfloor Q) + O(\mu(Q)) \leq \frac{1}{6}c^2(\mu\lfloor Q) + O(\mu(Q))$$

$$\leq \frac{1}{6}c\mu(2Q) + O(\mu(Q)) \leq \frac{1}{6}c\mu(2Q) + |O(\mu(Q))| \leq \frac{1}{6}c\mu(2Q) + cc_0^2\mu(Q) \leq c\mu(2Q).$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Se sigue de aplicar el Lema 2.3.1 y el Teorema 2.1.8. En efecto, dado cualquier $\beta > 0$, considere un cuadrado $(2,\beta)$-duplicador Q. Por hipótesis tenemos

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu\lfloor Q||_{L^2(\mu\lfloor Q)} = ||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}\chi_Q||_{L^2(\mu\lfloor Q)} \leq c\mu(2Q)^{\frac{1}{2}} \leq c\beta^{\frac{1}{2}}\mu(Q)^{\frac{1}{2}}$$

uniformemente en $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.3.1 aplicado a la medida $\mu\lfloor Q$, deducimos que existe un subconjunto $G_Q \subset Q$ con $\mu(G_Q) \geq \mu(Q)/4$ tal que la transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu\lfloor Q)$ y por el Teorema 2.1.6 $\mathcal{C}_*$ es acotado de $M(\mathbb{C})$ en $L^{1,\infty}(\mu\lfloor G_Q)$. Entonces por el Teorema 2.1.8 $\mathcal{C}_\mu$ es acotado en $L^2(\mu)$.

2.4. La Transformada de Cauchy en gráficas Lipschitz

En esta sección probaremos que la transformada de Cauchy es acotada en las gráficas de funciones Lipschitz. Para lo cual será esencial el uso de la curvatura con la identidad (2.2.2) y el Teorema T1.

Dados $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}$, el área del triángulo con vértices en dichos puntos esta dada por

$$S(x,y,z)=\frac{1}{2}|(y_1-x_1)(z_2-x_2)-(y_2-x_2)(z_1-x_1)|,$$

por la Proposición 2.2.2 tenemos

$$\begin{aligned} c(x,y,z) &= 2\frac{|(y_1-x_1)(z_2-x_2)-(y_2-x_2)(z_1-x_1)|}{|x-y||x-z||y-z|} \\ &= 2\frac{|x_1-y_1||x_1-z_1||y_1-z_1|}{|x-y||x-z||y-z|}\left|\frac{\frac{z_2-x_2}{z_1-x_1}-\frac{y_2-x_2}{y_1-x_1}}{z_1-y_1}\right|. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Sea $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo y $A:I\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz. Considere tres puntos $X=(x,A(x)), Y=(y,A(y)), Z=(z,A(z))$ con $x,y,z\in I$.
Como A es una fumción Lipschitz es diferenciable c.t.p. y por el teorema del valor medio existen $\theta_{xy},\theta_{xz},\theta_{yz}\in I$ tales que

$$A'(\theta_{xy})=\frac{A(x)-A(y)}{x-y}, A'(\theta_{xz})=\frac{A(x)-A(z)}{x-z}, A'(\theta_{yz})=\frac{A(y)-A(z)}{y-z}$$

por lo cual tenemos

$$\frac{||X-Y||^2}{|x-y|^2}=1+(A'(\theta_{xy}))^2, \frac{||X-Z||^2}{|x-z|^2}=1+(A'(\theta_{xz}))^2, \frac{||Y-Z||^2}{|y-z|^2}=1+(A'(\theta_{yz}))^2$$

Luego

$$\frac{||X-Y||}{|x-y|}\frac{||X-Z||}{|x-z|}\frac{||Y-Z||}{|y-z|}\leq(1+||A'||_\infty^2)^{3/2}.$$

Así por la ecuación (2.4.1) se tiene que

$$\frac{2}{(1+||A'||_\infty^2)^{3/2}}\left|\frac{\frac{A(z)-A(x)}{z-x}-\frac{A(y)-A(x)}{y-x}}{z-y}\right|\leq$$

$$c(X,Y,Z) \leq 2 \left| \frac{\dfrac{A(z)-A(x)}{z-x} - \dfrac{A(y)-A(x)}{y-x}}{z-y} \right|. \tag{2.4.2}$$

Ahora veamos como el útimo termino del lado derecho de la ecuación anterior se puede estimar en términos de $||A''||_\infty$, asumiendo que A' es Lipschitz. Para simplificar la notación, para $a < b$, escribimos:

$$m_{[a,b]}A' = \frac{1}{b-a}\int_a^b A'(t)dt.$$

Esto es, $m_{[a,b]}A'$ es el promedio de A' sobre el intervalo $[a, b]$.
Suponga que $x < y < z$. Por el teorema fundamental del calculo tenemos que

$$\frac{A(z)-A(x)}{z-x} - \frac{A(y)-A(x)}{y-x} = m_{[x,z]}A' - m_{[x,y]}A' \tag{2.4.3}$$

$$= \left(\frac{y-x}{z-x}m_{[x,y]}A' + \frac{z-y}{z-x}m_{[y,z]}A'\right) - m_{[x,y]}A' = \frac{z-y}{z-x}(m_{[y,z]}A' - m_{[x,y]}A').$$

Ahora, por el teorema del valor medio para A' y A'' existen $y < y_0 < z$ y $y < y_1 < y_0$ tales que

$$|m_{[y,z]}A' - A'(y)| = \left|\frac{A(z)-A(y)}{z-y} - A'(y)\right| = |A'(y_0) - A'(y)| = |A''(y_1)||y_0 - y|$$

$$\leq ||A''||_\infty(z-y).$$

Y de manera análoga $|m_{[x,y]}A' - A'(y)| \leq ||A''||_\infty(y-x)$.
Por lo tanto

$$|m_{[y,z]}A' - m_{[x,y]}A'| \leq ||A''||_\infty(z-y) + ||A''||_\infty(y-x) = ||A''||_\infty(z-x).$$

De esta estimación y de (2.4.3) tenemos que

$$\left| \frac{\dfrac{A(z)-A(x)}{z-x} - \dfrac{A(y)-A(x)}{y-x}}{z-y} \right| \leq ||A''||_\infty \quad \Rightarrow \quad c(X,Y,Z) \leq 2||A''||_\infty.$$

Lo que hicimos fue estimar la curvatura de Menger de tres puntos en términos de $||A''||_\infty$. Integrando respecto a la medida de longitud de arco, uno puede acotar la curvatura de la medida de longitud de arco en la grafica de A en términos de $||A''||_\infty$

$$c^2(\mathcal{L}^1\lfloor A(I)) \leq 4||A''||^2_\infty \mathcal{L}^1(A(I))^3.$$

Más aún, resulta que podemos estimar la curvatura de la medida de longitud de arco en términos de la primera derivada de A en lugar de la segunda. Para esto ocuparemos la identidad de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||f(x)||^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} ||\widehat{f}(\xi)||^2 d\xi.$$

donde f es una función suave y que decae rápidamente a cero cerca de ∞ para que la integral exista y $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$ es la transformada de Fourier de f.

Lema 2.4.1. *Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua tal que $A' \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\frac{A(z)-A(x)}{z-x} - \frac{A(y)-A(x)}{y-x}}{z-y} \right|^2 dzdydx = 2\pi^2 ||A'||_2^2 \tag{2.4.4}$$

y

$$\frac{8\pi^2||A'||_2^2}{(1+||A'||_\infty^2)^3} \le \int\int\int_{\mathbb{R}^3} c\left((x,A(x)),(y,A(y)),(z,A(z))\right)^2 dzdydx \le 8\pi^2||A'||_2^2. \tag{2.4.5}$$

Demostración.
Consideremos las nuevas variables $h = y - x$ y $k = z - x$. Aplicando la identidad de Plancherel a $f(x) = \frac{A(k+x)-A(x)}{k} - \frac{A(h+x)-A(x)}{h}$, la triple integral en (2.4.4) es igual a:

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\frac{e^{2\pi ik\xi}-1}{k} - \frac{e^{2\pi ih\xi}-1}{h}}{k-h} \right|^2 |\widehat{A}(\xi)|^2 dkdhd\xi,$$

haciendo los cambios de variable $u = k\xi, v = h\xi$ tenemos:

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\frac{e^{2\pi iu}-1}{u} - \frac{e^{2\pi iv}-1}{v}}{u-v} \right|^2 |\xi\widehat{A}(\xi)|^2 dkdhd\xi,$$

y como $\widehat{A'(\xi)} = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$, entonces usando de nuevo la identidad de Plancherel,

$$\int |\xi\widehat{A}(\xi)|^2 d\xi = \int \left| \frac{\widehat{A'(\xi)}}{2\pi i} \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int |A'(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{4\pi^2} ||A'||_{L^2}^2.$$

Por lo cual le triple integral en (2.4.4) es

$$\frac{1}{4\pi^2}||A'||_{L^2}^2 \int\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\frac{e^{2\pi iu}-1}{u} - \frac{e^{2\pi iv}-1}{v}}{u-v} \right|^2 dudv.$$

Sea $E(u) = (e^{2\pi iu} - 1)/u$ y haciendo el cambio de variable $t = u - v$ tenemos que la última doble integral es

$$I = \int\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{E(u+t) - E(u)}{t} \right|^2 dtdu.$$

Sea $f(u) = \dfrac{e^{i\pi u}}{u}$, entonces $E(u) = 2i\sin(\pi u)f(u) \Rightarrow \widehat{E}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \frac{\pi}{2\pi}) - \widehat{f}(\xi + \frac{\pi}{2\pi})$ y como $\widehat{f}(\xi) = -i\pi sgn(\xi - 1/2)$ entonces $\widehat{E}(\xi) = i\pi(-sgn(\xi-1) + sgn(\xi)) = 2i\pi\chi_{[0,1]}(\xi)$. Usando de nuevo Plancherel tenemos

$$I = \int\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\widehat{E}(\xi+t) - \widehat{E}(\xi)}{t} \right|^2 dtd\xi = \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 4\pi^2 \left| \frac{e^{2\pi it\xi} - 1}{t} \right|^2 d\xi dt.$$

Haciendo $u = \xi t$ y aplicando la identidad de Plancherel a u obtenemos

$$I = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \left| \frac{e^{2\pi iu} - 1}{u} \right|^2 |\xi| d\xi du = 4\pi^2 ||E||_{L^2}^2 \int_0^1 \xi d\xi = 8\pi^4.$$

Finalmente (2.4.5) es una consecuencia directa de (2.4.2) y (2.4.4).

Lema 2.4.2. *Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz y $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ su gráfica. Sea Π la proyección ortogonal en el eje horizontal; y sea μ la medida en Γ dada por*

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |A'(\Pi(x))|^2}} d\mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma(x).$$

Entonces para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se tiene

$$c^2(\mu\lfloor \Pi^{-1}(I)) \leq 16\pi^2 ||A'||_\infty^2 \mathcal{L}^1(I).$$

Nótese que la medida μ tiene crecimiento lineal y que $\frac{1}{\sqrt{1+|A'(\Pi(x))|^2}}$ es el reciproco de la curva Γ con parametrización $(u, A(u))$, es decir $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \int \sqrt{1 + |A'(u)|^2} du$.

Demostración.
Al ser la curvatura invariante bajo traslaciones, podemos asumir que $I = [0, b]$ y

$A(b) = 0$. Considere la función auxiliar Lipschitz $\widehat{A}$ dada por

$$\widehat{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -b \\ A(0)b^{-1}x + A(0) & \text{si } -b < x \leq 0 \\ A(x) & \text{si } 0 < x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Entonces, como la medida de la imagen de μ por Π es la medida de Lebesgue en el eje x, tenemos

$$c^2(\mu\lfloor\Pi^{-1}(I)) = \int\int\int_{\Pi^{-1}\cap\Gamma} \frac{c(X,Y,Z)}{(1+|A'(\Pi(X))|^2)^{3/2}} d\mathcal{H}^1(Z)d\mathcal{H}^1(Y)d\mathcal{H}^1(X) \leq$$

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} c\left((x,\widehat{A}(x)),(y,\widehat{A}(y)),(z,\widehat{A}(z))\right)^2 dxdydz$$

Al ser A función de Lipschitz, $\widehat{A}$ es de Lipschitz y por lo tanto absolutamente continua. Así por (2.4.5)

$$c^2(\mu\lfloor\Pi^{-1}(I)) \leq 8\pi^2||\widehat{A}'||^2_{L^2}.$$

Luego como $||\widehat{A}'||_\infty \leq ||A'||_\infty$, entonces

$$||\widehat{A}'||^2_{L^2} = \int_{-b}^{b} |\widehat{A}'(x)|^2 dx \leq ||\widehat{A}'||_\infty \int_{-b}^{b} \leq ||A'||_\infty 2\mathcal{L}^1(I).$$

Concluimos esta sección con el siguiente teorema, el cual nos dice que la transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu)$, con μ la medida 1-dimensional de Hausdorff restringida a la gráfica de una función Lipschitz.

Teorema 2.4.3. *Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz y $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ su gráfica Lipschitz. Considere la medida $\mu = \mathcal{H}^1\lfloor\Gamma$. Entonces la transformada de Cauchy $\mathcal{C}_\mu$ es acotada en $L^2(\mu)$ y la norma no excede una constante que depende sólo de $||A'||_\infty$.*

Demostración.
Usaremos el Teorema 2.3.2 (T1) que probamos en la sección anterior. Así que es suficiente mostrar que existe alguna constante c que depende sólo de $||A'||_\infty$ tal que para todo cuadrado $Q \subset \mathbb{R}$

$$c^2(\mu\lfloor Q) \leq c\mu(2Q).$$

Sea Q tal que $Q \cap \Gamma \neq \emptyset$. Por el Lema 2.4.2 tenemos

$$c^2(\mu\lfloor Q) = c^2(\mathcal{H}^1\lfloor\Gamma \cap Q) \leq c(||A'||_\infty)\mathcal{H}^1(Q) \leq c(||A'||_\infty)\mu(2Q).$$

Capítulo 3

La capacidad γ_+

En este capítulo estudiaremos la capacidad γ_+. La caracterizaremos en términos de la transformada de Cauchy y también en términos de la curvatura. Probaremos la semiaditividad de γ_+. Por último veremos que la capacidad γ_+ se puede caracterizar en términos de un potencial.

3.1. Definición y propiedades básicas de la capacidad γ_+

Definición 3.1.1. *La capacidad γ_+ de un subconjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ es*

$$\gamma_+(E) := \sup\{\mu(E) : supp(\mu) \subset (E),\ ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1\},$$

donde μ es una medida de Radon en $\mathbb{C}$ positiva con soporte en E.
Y la capacidad γ_+ de un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{C}$ se define como

$$\gamma_+(A) := \sup\{\gamma_+(E) : E \subset A,\ E \text{ compacto}\}.$$

Note que γ_+ se define como γ en la Definición 1.1.2, pero donde $\mathcal{C}\mu$ juega el papel de la función f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus E$ y $\mu(E) \geq 0$ juega el papel de $|f'(\infty)|$. Por ejemplo, en la Definición 1.1.2 pedíamos que $||f||_{L^\infty(\mathbb{C}\setminus E)} \leq 1$ mientras que en la Definición 3.1.1 pedimos que $||f||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$ (para $f = \mathcal{C}\mu$).
También observe que por la Proposición 1.3.6, $f'(\infty) = (\mathcal{C}\mu)'(\infty) = -\mu(\mathbb{C}) = -\mu(E)$; y además sabemos que $\mathcal{C}\mu$ es holomorfa en $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus supp(\mu)$.
Por lo anterior podemos concluir que

$$\gamma(E)_+ \leq \gamma(E). \tag{3.1.1}$$

En el siguiente capítulo probaremos la otra desigualdad $\gamma(E) \leq c\gamma_+(E)$, pero por el momento estudiaremos la capacidad γ_+.

Para $E \subset \mathbb{C}$ compacto, definamos el siguiente subconjunto de las medidas de Radon positivas en $\mathbb{C}$

$$Ad_+(E) := \{\mu \geq 0 : supp(\mu) \subset E, ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1\}.$$

Así, $\gamma_+(E) = \sup\{\mu(E) : \mu \in Ad_+(E)\}$.

La siguiente Proposición nos dice que la capacidad γ_+ es monótona e invariante bajo traslaciones y rotaciones. Es el equivalente a la Proposición 1.1.4, salvo que de la definición de γ_+ no es claro si $\gamma_+(E) = \gamma_+(\partial_0 E)$ o $\gamma_+(E) \approx \gamma_+(\partial_0 E)$. La última afirmación es cierta, pero su prueba no es trivial, esta se sigue del hecho que $\gamma(E) = \gamma(\partial_0 E)$ y $\gamma \approx \gamma_+$.

Proposición 3.1.2. *Sean $E, F \subset \mathbb{C}$ compactos. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

(a) Si $E \subset F$, entonces $\gamma_+(E) \leq \gamma_+(F)$.

(b) Para todos $z, \lambda \in \mathbb{C}$:
$$\gamma_+(z + \lambda E) = |\lambda|\gamma_+(E)$$
con $z + \lambda E := \{z + \lambda e : e \in E\}$.

Demostración.
La demostración es prácticamente idéntica a la de la Proposición 1.1.4.
(a) Como $E \subset F \Rightarrow Ad_+(E) \subset Ad_+(F)$, entonces $\gamma_+(E) \leq \gamma_+(F)$.
(b) Primero probaremos que $\forall\ w \in \mathbb{C},\ \gamma_+(E) = \gamma_+(E + w)$.
Sea $\mu \in Ad_+(E)$. Como

$$\mu(E) = \int_E d\mu(z) = \int_{E+w} d\mu(z - w) = \int_{E+w} d\nu_\mu(z) = \nu_\mu(E + w).$$

con $\nu_\mu(A) = \mu(A-w), \forall\ A \subset \mathbb{C}$. Luego como $supp(\mu) \subset E$, entonces $supp(\nu_\mu) \subset E+w$. Además, como

$$||\mathcal{C}\nu_\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} = \sup_{x\in E+w}\left|\int \frac{d\nu_\mu(y)}{x - y}\right| = \sup_{x\in E}\left|\int \frac{d\mu(y - w)}{x + w - y}\right| = \sup_{x\in E}\left|\int \frac{d\mu(y)}{x - y}\right| = ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})},$$

y como $||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$, entonces $||\mathcal{C}\nu_\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$.
Por lo todo lo anterior, si $\mu \in Ad_+(E)$, entonces $\nu_\mu \in Ad_+(E + w)$, por lo cual

$$\gamma_+(E) = \sup\{\mu(E) : \mu \in Ad_+(E)\} = \sup\{\nu_\mu(E + w) : \mu \in Ad_+(E)\}$$

$$\leq \sup\{\nu(E+w) : \nu \in Ad_+(E+w)\} = \gamma_+(E+w).$$

La desigualdad $\gamma_+(E+w) \leq \gamma_+(E)$, se hace de manera análoga probando que si $\nu \in Ad_+(E+w)$, entonces la medida $\mu_\nu(A) := \nu(A+w)$, para todo $A \subset \mathbb{C}$ cumple que $\mu_\nu \in Ad_+(E)$.
Ahora veamos que $\forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \gamma_+(\lambda E) = |\lambda|\gamma_+(E)$.
Sea $\mu \in Ad_+(\lambda E)$. Como

$$\mu(\lambda E) = \int_{\lambda E} d\mu(z) = \int_E d\mu(\lambda z) = \int_E d\nu_\mu(z) = \nu_\mu(E),$$

con $\nu_\mu(A) := \mu(\lambda A),\ \forall\ A \subset \mathbb{C}$. Luego $supp(\mu) \subset \lambda E \Rightarrow supp\left(\dfrac{\nu_\mu}{|\lambda|}\right) \subset E$.
Además, como

$$\left|\left|\mathcal{C}\left(\frac{\nu_\mu}{|\lambda|}\right)\right|\right|_{L^\infty(\mathbb{C})} = \sup_{x\in E}\left|\int \frac{d\frac{\nu_\mu}{|\lambda|}(y)}{x-y}\right| = \sup_{x\in E}\left|\int \frac{d\mu(\lambda y)}{|\lambda|(x-y)}\right| = \frac{1}{|\lambda|}\sup_{x\in\lambda E}\left|\int \frac{d\mu(\lambda y)}{\frac{x}{\lambda}-y}\right|$$

$$= \sup_{x\in\lambda E}\left|\int \frac{d\mu(\lambda y)}{x-\lambda y}\right| = \sup_{x\in\lambda E}\left|\int \frac{d\mu(y)}{x-y}\right| = ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1.$$

Por todo lo anterior, si $\mu \in Ad_+(\lambda E)$, entonces $\dfrac{\nu_\mu}{|\lambda|} \in Ad_+(E)$, por lo cual

$$\gamma_+(\lambda E) = \sup\{\mu(\lambda E) : \mu \in Ad_+(\lambda E)\} = |\lambda|\sup\left\{\frac{\nu_\mu}{|\lambda|}(E) : \mu \in Ad_+(\lambda E)\right\}$$

$$\leq |\lambda|\sup\{\nu(E) : \nu \in Ad_+(E)\} = |\lambda|\gamma_+(E).$$

La desigualdad $|\lambda|\gamma_+(E) \leq \gamma_+(\lambda E)$, se hace de manera análoga probando que si $\nu \in Ad_+(E)$, entonces la medida $\mu_\nu(A) := \nu(A/\lambda)$, para todo $A \subset \mathbb{C}$ cumple que $|\lambda|\mu_\nu \in Ad_+(\lambda E)$.

3.2. Suavizando el kernel de Cauchy por molificación .

Para algunos argumentos, el hecho de que el kernel truncado de Cauchy $\chi_{|z|>\varepsilon}\frac{-1}{z}$ no sea suave puede causar algunos problemas. Así que, en esta sección, suavizaremos por molificación a la función $-\dfrac{1}{z}$.

Lema 3.2.1. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$ una función radial no negativa con soporte en la bola $B(0,r)$, con norma $L^1(\mathbb{C})$ (respecto a la medida de Lebesgue)igual a 1. Entonces la función $K(z) := \left(\frac{-1}{z} * \varphi\right)(z) = \int \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\mathcal{L}^2(\xi)$ es continua y satisface*

$$K(z) = \frac{-1}{z} \quad si\ |z| \geq r \quad y \quad ||K||_\infty \leq 2\pi r ||\varphi||_\infty.$$

Demostración.
Primero veamos que la función K es continua. Sean $x \in \mathbb{C}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión que converge a x. Pongamos $f(y) := \frac{-1}{y}$ y $d := diam(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x)$. Como $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$, entonces φ es continua en $\mathbb{C}$ salvo un conjunto de medida cero, por lo cual $\forall\ y \in \mathbb{C}, f_n(y) := f(y)\varphi(x_n - y) \to f(y)\varphi(x-y)$ cuando $n \to \infty$.
Además $\forall\ y \in \mathbb{C}, |f_n(y)| \leq ||\varphi||_\infty |f(y)| \chi_{B(x,r+d)}(y)$, pues si $|y - x| \geq r + d$, entonces $|x_n - y| \geq |x-y| - |x_n - x| \geq (r+d) - d = r \Rightarrow \varphi(x_n - y) = 0$.
Como $\int_K \frac{d\mathcal{L}^2(z)}{|\xi - z|} < \infty$ para todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto y para toda $\xi \in \mathbb{C}$ (véase [Conway] Lema 13.2.6), entonces $||\varphi||_\infty |f(y)| \chi_{B(x,r+d)}(y)$ es integrable con respecto a la medida de Lebesgue. Luego por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tendremos

$$\lim_{n\to\infty} K(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(y) d\mathcal{L}^2(y) = \int f(y)\varphi(x-y) d\mathcal{L}^2(y) = K(x).$$

Ahora sean $|x_0| \geq r$ y $u(z) := \dfrac{-1}{z}$, entonces $u(x_0 - \xi) = \dfrac{-1}{x_0 - \xi}$ es holomorfa y por lo tanto armónica $\forall\ \xi \in B(0,r)$; por lo cual $u(z)$ satisface la propiedad del valor medio en $B(x_0, r)$:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r_0)} u(z) dz \quad \forall\ 0 < r_0 < r \text{ tal que } \overline{B(z_0, r_0)} \subset B(x_0, r).$$

Así se tiene que

$$K(x_0) = (u * \varphi)(x_0) = \int_{B(0,r)} \varphi(\xi) u(x_0 - \xi) d\mathcal{L}^2(\xi) = \int_0^r R\varphi(R) \int_0^{2\pi} u(x_0 - Re^{i\theta}) d\theta dR$$

$$= \int_0^r R\varphi(R) 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial(B(x_0,R))} u(w) dw \right) dR = 2\pi \int_0^r R\varphi(R) u(x_0) dR$$

$$= u(x_0) \int_0^{2\pi} \int_0^r R\varphi(R) dR d\theta = u(x_0) ||\varphi||_{L^1(\mathbb{C})} = u(x_0) = \frac{-1}{x_0}.$$

Por último, para cualquier $z \in \mathbb{C}$,

$$|K(z)| \leq ||\varphi||_\infty \int_{B(0,r)} \frac{1}{|z - \xi|} d\mathcal{L}^2(\xi) = \int_{B(-z,r)} \frac{1}{|w|} d\mathcal{L}^2(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_{|-z|}^{|r-z|} \frac{R}{|Re^{i\theta}|} dR d\theta$$

$$= 2\pi(|r - z| - | - z|) \leq 2\pi r.$$

Lema 3.2.2. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$ una función radial no negativa con soporte en la bola $B(0,1)$ y con norma $L^1(\mathbb{C})$ (respecto a la medida de Lebesgue) igual a 1. Escribimos*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \textit{para } x \in \mathbb{C},$$

luego $supp(\varphi_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$ y $||\varphi_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{C})} = 1$.
Sea $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ el operador integral asociado al kernel $\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$. Si ν es una medida compleja y denotamos el kernel $K_\varepsilon = \frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$, entonces

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu(x) = \left(\frac{-1}{x} * \varphi_\varepsilon * \nu\right)(x) = (K_\varepsilon * \nu)(x) = \int\int \frac{-1}{(x-y)-w}\varphi_\varepsilon(w)d\mathcal{L}^2(w)d\nu(y),$$

es una función continua que satisface

$$|\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x) - \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu(x)| \leq C_\varphi M_R\nu(x) = C_\varphi \sup_{r>0}\frac{|\nu|(B(x,r))}{r} \tag{3.2.1}$$

donde C_φ depende solo de φ. Como consecuencia, si μ es una medida con crecimiento lineal, la transformada de Cauchy $\mathcal{C}_\mu$ es acotada en $L^p(\mu)$ si y sólo si $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mu,\varepsilon}$ es acotada en $L^p(\mu)$ uniformemente en $\varepsilon > 0$; y $\mathcal{C}\mu$ es acotada de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$ si y sólo si $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mu,\varepsilon}$ es acotada en $L^{1,\infty}(\mu)$ uniformemente en $\varepsilon > 0$.

Demostración.
Por el Lema 3.2.1, el kernel $K_\varepsilon = \frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$ es continuo y por lo tanto uniformemente continuo en compactos, además coincide con el kernel de Cauchy en $\mathbb{C} \setminus B(0,\varepsilon)$. Por lo cual $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu$ es continua y satisface

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu(x) - \mathcal{C}_\varepsilon\nu(x) = \int_{\mathbb{C}} K_\varepsilon(x-y)d\nu(y) - \int_{\mathbb{C}\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{-1}{x-y}d\nu(y) = \int_{\overline{B(x,\varepsilon)}} K_\varepsilon(x-y)d\nu(y).$$

Así, se tiene que

$$|\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x) - \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu(x)| \leq ||K_\varepsilon||_\infty|\nu|(B(x,\varepsilon)) \leq ||K_\varepsilon||_\infty \varepsilon M_R\nu(x).$$

Por el Lema 3.2.1,

$$||K_\varepsilon||_\infty \leq 2\pi\varepsilon||\varphi_\varepsilon||_\infty = \frac{2\pi}{\varepsilon}||\varphi||_\infty,$$

por lo que (3.2.1) se sigue con $C_\varphi = 2\pi||\varphi||_\infty$.
La última parte del teorema se sigue de (3.2.1) aplicado a $f\mu$, puesto que el operador

maximal M_R es acotado en $L^p(\mu)$ y de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$ cuando μ tiene crecimiento lineal(Veáse [Tolsa] pág. 53).

Para trabajar con el siguiente ejemplo de un kernel del tipo K_ε, ocuparemos la **Fórmula de Cauchy Pompeiu**, la cual nos dice que cualquier función f continuamente diferenciable en un dominio finito $\overline{D}$ cumple

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial \overline{\xi}}\frac{1}{\xi - z}d\mathcal{L}^2(\xi) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \overline{D} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C}\setminus \overline{D}\end{cases}$$

Ejemplo 3.2.3. *Sea $\varphi = \pi^{-1}\chi_{B(0,1)}$. Veámos que*

$$\left(\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon\right)(z) = K_\varepsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{-1}{z} & si\ |z| > \varepsilon \\ \\ -\dfrac{\overline{z}}{\varepsilon^2} & si\ |z| \le \varepsilon \end{cases}$$

Se sigue fácilmente que φ es una función radial no negativa con soporte en $B(0,1)$, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C})$ y $||\varphi||_{L^1(\mathbb{C})} = 1$. Luego $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^2\pi}\chi_{B(0,1)}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon^2\pi}\chi_{B(0,\varepsilon)}(x)$.
Como

$$\left(\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon\right)(z) = \frac{1}{\varepsilon^2\pi}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{\xi - z}d\mathcal{L}^2(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{-1/\varepsilon^2}{\xi - z}d\mathcal{L}^2(\xi),$$

usando la Formula de Cauchy Pompeiu aplicada a la función $f(z) = \dfrac{-\overline{z}}{\varepsilon^2}$, tendremos

$$-\frac{1}{\pi}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{-1/\varepsilon^2}{\xi - z}d\mathcal{L}^2(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\overline{z}}{\varepsilon^2} - \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\dfrac{-\overline{\xi}/\varepsilon^2}{\xi - z}d\xi & si\ z \in \overline{B(0,\varepsilon)} \\ \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\dfrac{-\overline{\xi}/\varepsilon^2}{\xi - z}d\xi & si\ z \in \mathbb{C}\setminus\overline{B(0,\varepsilon)} \end{cases}$$

Luego si $z \in \overline{B(0,\varepsilon)}$:

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{-\overline{\xi}/\varepsilon^2}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{d\xi}{\xi(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}\right)d\xi = 0.$$

Y si $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}$:

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{-\overline{\xi}/\varepsilon^2}{\xi - z}d(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{d(\xi)}{\xi(\xi - z)} = -\frac{1}{z}.$$

Así se tiene lo deseado.

Lema 3.2.4. *Sean ν una medida compleja, φ y $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ como en el Lema 3.2.2. Para $0 < \varepsilon \leq \delta$, tenemos que*

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\delta \nu||_\infty \leq ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty + C'_\varphi ||M_R \nu||_\infty, \tag{3.2.2}$$

y también,

$$||\mathcal{C}_\delta \nu||_\infty \leq ||\mathcal{C}_\varepsilon \nu||_\infty + C''_\varphi ||M_R \nu||_\infty, \tag{3.2.3}$$

con $C'_\varphi = 12\pi ||\varphi||_\infty$ y $C''_\varphi = 3C'_\varphi$.

Demostración.
Escribimos $K_\varepsilon = \dfrac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$ y $K_{\varepsilon,\delta} = \dfrac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon * \varphi_\delta$. Note que por las propiedades asociativas y conmutativas de la convolución

$$K_{\varepsilon,\delta} * \nu = (K_\varepsilon * \nu) * \varphi_\delta = \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu * \varphi_\delta.$$

Además, $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu \in L^\infty(\mathbb{C})$, pues por el Lema 3.2.1:

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu(x)| = \left| \int K_\varepsilon(x-y) d\nu(y) \right| \leq ||K_\varepsilon||_\infty |\nu|(\mathbb{C}) \leq 2\pi\varepsilon ||\nu|| < \infty.$$

Así, como $\varphi_\delta \in L^1(\mathbb{C})$ y $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu \in L^\infty(\mathbb{C})$, por las propiedades de la convolución se tiene

$$||K_{\varepsilon,\delta} * \nu||_\infty = ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu * \varphi_\delta||_\infty \leq ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty ||\varphi_\delta||_{L^1(\mathbb{C})} = ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty.$$

Dado que $supp(\varphi_\delta * \varphi_\varepsilon) \subset supp(\varphi_\delta) + supp(\varphi_\varepsilon) \subset B(0,\delta) + B(0,\varepsilon) \subset B(0, \delta+\varepsilon)$, por el Lema 3.2.1, $K_{\varepsilon,\delta}(z) = -1/z$ si $|z| \geq \varepsilon + \delta$. Por lo cual

$$|K_\delta * \nu(x) - K_{\varepsilon,\delta} * \nu(x)| \leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon+\delta} |K_\delta(x-y) - K_{\varepsilon,\delta}(x-y)| d|\nu|(y) \leq$$

$$(||K_\delta||_\infty - ||K_{\varepsilon,\delta}||_\infty) |\nu|(B(0, \varepsilon+\delta)). \tag{3.2.4}$$

De nuevo, por el Lema 3.2.1:

$$||K_\delta||_\infty \leq 2\pi\delta ||\varphi_\delta||_\infty = \frac{2\pi}{\delta} ||\varphi||_\infty$$

y

$$||K_{\varepsilon,\delta}||_\infty \leq 2\pi(\varepsilon+\delta) ||\varphi_\varepsilon * \varphi_\delta||_\infty \leq 2\pi(\varepsilon+\delta) ||\varphi_\delta||_\infty ||\varphi_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{C})} \leq 4\pi\delta ||\varphi_\delta||_\infty = \frac{4\pi}{\delta} ||\varphi||_\infty.$$

Así, por (3.2.4),

$$|K_\delta * \nu(x) - K_{\varepsilon,\delta} * \nu(x)| \leq \frac{6\pi}{\delta} ||\varphi||_\infty |\nu|(B(0, 2\delta)) \leq 12\pi ||\varphi||_\infty ||M_R \nu||_\infty$$

$$\Rightarrow \quad |\widetilde{\mathcal{C}}_\delta \nu(x)| = |K_\delta * \nu(x)| \leq 12\pi ||\varphi||_\infty ||M_R \nu||_\infty + |K_{\varepsilon,\delta} * \nu(x)|.$$

Y como $||K_{\varepsilon,\delta} * \nu||_\infty \leq ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty$,

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\delta \nu||_\infty \leq 12\pi ||\varphi||_\infty ||M_R \nu||_\infty + ||K_{\varepsilon,\delta} * \nu||_\infty \leq 12\pi ||\varphi||_\infty ||M_R \nu||_\infty + ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty.$$

Ahora, (3.2.3) se sigue debido a que por (3.2.1):

$$||\mathcal{C}_\lambda \nu - \widetilde{\mathcal{C}}_\lambda \nu||_\infty \leq C'_\varphi ||M_R \nu||_\infty \ \forall \ \lambda > 0.$$

Así que

$$||\mathcal{C}_\delta \nu||_\infty \leq ||\widetilde{\mathcal{C}}_\delta \nu||_\infty + C'_\varphi ||M_R \nu||_\infty \quad y \quad ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty \leq ||\mathcal{C}_\varepsilon \nu||_\infty + C'_\varphi ||M_R \nu||_\infty.$$

Luego, por (3.2.2):

$$||\mathcal{C}_\delta \nu||_\infty \leq ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \nu||_\infty + 2C'_\varphi ||M_R \nu||_\infty \leq ||\mathcal{C}_\varepsilon \nu||_\infty + 3C'_\varphi ||M_R \nu||_\infty.$$

3.3. La regularidad exterior de γ_+

Ahora probaremos la regularidad exterior de γ_+.

Proposición 3.3.1. *Sean $E_n \subset \mathbb{C}$, $n \geq 1$, una sucesión de conjuntos compactos tales que $E_{n+1} \subset E_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$, se tiene que*

$$\gamma_+(E) = \lim_{n \to \infty} \gamma_+(E_n).$$

Demostración.
Como $E_{n+1} \subset E_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 3.1.2, la sucesión $\{\gamma_+(E)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y no negativa, por lo tanto es convergente.
También por la Proposición 3.1.2,

$$\gamma_+(E) \leq \lim_{n \to \infty} \gamma_+(E_n).$$

Para probar la otra desigualdad, tome $\delta > 0$, por la definición de $\gamma_+(E_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sea ν_n una medida positiva con soporte en E_n tal que $\gamma_+(E_n) \leq \nu_n(E_n) + \delta$ y $||\mathcal{C}\nu_n||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$. Si consideramos la sucesión de medidas dadas por $\mu_n = \nu_n \lfloor E$, estas cumplen que $supp(\mu_n) \subset E$ y $\mu_n(E) \leq \gamma_+(E_n) + \delta \leq \gamma_+(E_1) + \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual existe μ un límite débil de una subsucesión $\{\mu_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ donde μ tiene soporte en E. Para verificar que $||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$ usaremos el truco de la molificación: consideremos a la función $\varphi = \pi^{-1}\chi_{B(0,1)}$, y para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \mu_{n_k} := \varphi_\varepsilon * \mathcal{C}\mu_{n_k} = \left(\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon\right) * \mu_{n_k}.$$

Como $||\mathcal{C}\mu_{n_k}||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$, se tiene que

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \mu_{n_k}||_{L^\infty(\mathbb{C})} = ||\varphi_\varepsilon * \mathcal{C}\mu_{n_k}||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq ||\varphi_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{C})}||\mathcal{C}\mu_{n_k}||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1.$$

Además, por la convergencia débil de $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a μ y por la continuidad del kernel $\dfrac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \mu_{n_k}(z) = \left(\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon\right) * \mu_{n_k}(z) \to \left(\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon\right) * \mu(z) = \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \mu(z).$$

Como consecuencia $||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$.
Dado que $\frac{-1}{z}$ es localmente integrable en $\mathbb{C}$ (respecto a la medida de Lebesgue) y como $\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$ converge a $\frac{-1}{z}$ cuando $\varepsilon \to 0$ uniformemente en compactos, entonces para casi todo punto $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \mu(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \left(\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon\right)(z-\xi)d\mu(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \frac{-1}{z-\xi} d\mu(\xi) = \mathcal{C}\mu(z).$$

Por lo cual $||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$ y así $\mu \in Ad_+(E)$.
Finalmente obtenemos

$$\gamma_+(E) \geq \mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(E_{n_k}) \geq \lim_{k\to\infty} \sup \gamma_+(E_{n_k}) - \delta = \lim_{k\to\infty} \gamma_+(E_n) - \delta.$$

Y el resultado final se obtiene ya que $\delta > 0$ se tomó arbitrario.

3.4. Dualización de la desigualdad débil (1,1)

En esta sección mostraremos algunos teoremas claves para conectar la capacidad analítica y la capacidad γ_+ con el acotamiento L^2 de la transformada de Cauchy.

Dado un espacio Hausdorff localmente compacto X, sea $C_0(X)$ el conjunto de funciones de continuas en $\mathbb{C}$ que se anulan en ∞. Éste es un espacio de Banach con la norma del supremo esencial $||\cdot||_\infty$. Sea $M(X)$ el espacio de medidas complejas de Radon, el cual es un espacio de Banach con la norma de la variación total y además es el espacio dual de $C_0(X)$.

Sean X, Y espacios de Hausdorff localmente compactos, $T : M(X) \to C_0(Y)$ un operador lineal acotado. Decimos que $T^t : M(Y) \to C_0(X)$ es el transpuesto de T si

$$\int T(\nu)d\sigma = \int T^t(\sigma)d\nu \quad \forall\ \nu \in M(X), \forall\ \sigma \in M(Y).$$

Recuerde que en (2.1.2) definimos el espacio de funciones $L^{1,\infty}$ como aquellas que cumplen:

$$||f||_{L^{1,\infty}(\mu)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \lambda\}) < \infty.$$

Teorema 3.4.1. *Sean X, Y espacios de Hausdorff localmente compactos, μ una medida de Radon en X y $T : M(X) \to C_0(Y)$ un operador lineal acotado, i.e. existe $B > 0$ tal que $\forall\ \nu \in M(X)$, $||T\nu||_\infty \leq B||\nu||$. Suponga que el operador transpuesto $T^t : M(Y) \to C_0(X)$ es acotado de $M(Y)$ a $L^{1,\infty}(\mu)$, es decir, existe una constante A tal que*

$$\mu(\{x \in X : |T^t\nu(x)| > \lambda\}) \leq A\frac{||v||}{\lambda} \quad \forall\ \lambda > 0$$

para toda $\nu \in M(X)$. Entonces para cada subconjunto de Borel $E \subset X$, con $\mu(E) < \infty$, existe una función de Borel h (h es función medible entre espacios de Borel) con soporte en E y $0 \leq h \leq 1$, tal que

$$\mu(E) \leq 2\int hd\mu = 2(h\mu)(E) \quad y \quad ||T(h\mu)||_\infty \leq 3A.$$

Demostración.
Suponga que esto falla para un subconjunto de Borel $E \subset X$, es decir E cumple: $\mu(E) < \infty$, $\forall\ h$ función de Borel con $supp(h) \subset E$ y $0 \leq h \leq 1$ se tiene que $\mu(E) > 2(h\mu)(E)$ ó $||T(h\mu)||_\infty > 3A$. Definimos los conjuntos

$$B_0 = \big\{f : X \to [0,1] : f \text{ es una función de Borel tal que } f = 0 \text{ en } X \setminus E \ \text{ y } \int fd\mu = (f\mu)(E) \geq \mu(E)/2\big\},$$

$$B_1 = \{T(f\mu) : f \in B_0\}, \quad B_2 = \{g \in C_0(Y) : ||g||_\infty < 3A\}.$$

Así, tenemos que $B_1, B_2 \subset C_0(Y)$ son disjuntos, pues las $f \in B_0$ no cumplen la condición $\mu(E) > 2(f\mu)(E)$ por lo cual deben cumplir la otra condición $||T(f\mu)||_\infty > 3A$, luego $T(f\mu)$ no puede estar en B_2.
Ahora veamos que B_1, B_2 son conjuntos convexos.
Sean $T(f_1\mu), T(f_2\mu) \in B_1$ y $0 < t < 1$. Como T es lineal $(1-t)T(f_1\mu) + tT(f_2\mu) = T(((1-t)f_1 + tf_2)\mu)$, veamos que $(1-t)f_1 + tf_2 \in B_0$. Como $0 \leq f_1, f_2 \leq 1$ y son funciones de Borel que se anulan fuera de E, entonces $0 \leq (1-t)f_1 + tf_2 \leq 1$ es una función de Borel que se anula fuera de E, además

$$\int ((1-t)f_1 + tf_2)d\mu \geq (1-t)\frac{\mu(E)}{2} + t\frac{\mu(E)}{2} = \frac{\mu(E)}{2}.$$

Ahora sean $g_1, g_2 \in B_2$ y $0 < t < 1$. Claramente $(1-t)g_1 + tg_2$ es continua pues g_1 y g_2 lo son, además

$$||(1-t)g_1 + tg_2||_\infty \leq (1-t)||g_1||_\infty + t||g_2|| < (1-t)3A + t3A = 3A.$$

Así B_1, B_2 son conjuntos disjuntos y convexos de $C_0(Y)$; y como B_2 es un conjunto abierto ($B_2 = B(0, 3A)$), por el Teorema de separación de Hahn-Banach (véase [Rudin2] Teorema 3.4), existe $\nu \in C_0(Y)^* = M(Y)$ tal que $Re\nu(h) > Re\nu(g)$ para toda $h \in B_1$ y $g \in B_2$. Esto es equivalente a decir que

$$Re\left(\int T(f\mu)d\nu\right) > Re\left(\int gd\nu\right) \quad \forall\ f \in B_0, \forall\ g \in B_2.$$

Debido a que $\nu \in M(Y)$ y Y es un espacio compacto localmente de Hausdorff, existe una función de Borel compleja h con $|h(z)| = 1\ \forall\ z \in Y$ y tal que $d\nu = hd|\nu|$ (véase [Rudin] Teorema 6.12).
Así dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar la función

$$g := \frac{1}{h}\left(3A - \frac{\varepsilon}{||\nu||}\right),$$

la cual cumple estar en B_2 y además:

$$3A||\nu|| - Re\left(\int gd\nu\right) = \int 3Ad|\nu| - Re\left(\int ghd|\nu|\right) = Re\left(\int (3A - gh)d\nu\right)$$
$$\leq \int |3A - gh|d|\nu| = \varepsilon.$$

Por lo cual concluimos que

$$\sup_{g\in B_2} Re\left(\int gd\nu\right) = 3A||\nu||.$$

Luego, para toda $f \in B_0$ se tiene que

$$Re\left(\int fT^t(\nu)d\mu\right) = Re\left(\int T(f\mu)d\nu\right) \geq 3A||\nu||. \tag{3.4.1}$$

Por la hipótesis de que T^t es acotado de $M(Y)$ a $L^{1,\infty}(\mu)$, para $\lambda = 2A||\nu||/\mu(E)$, se tiene que

$$\mu(\{x \in X : |T^t\nu(x)| > \lambda\}) \leq A\frac{||\nu||}{\lambda} = \frac{\mu(E)}{2},$$

por lo cual

$$\mu(\{x \in X : |T^t\nu(x)| \leq \lambda\}) \geq \frac{\mu(E)}{2}.$$

Sea f la función característica del conjunto $F = \{x \in X : |T^t\nu(x)| \leq \lambda\}$, así que $f \in B_0$. Además se cumple que

$$\left|\int fT^t(\nu)d\mu\right| \leq \int_F |T^t(\nu)(x)|d\mu(x) \leq \lambda\mu(F) \leq \lambda\mu(E),$$

lo cual es una contradicción con (3.4.1).

El siguiente lema relaciona las estimaciones débiles (1,1) para el operador integral de Cauchy con las estimaciones L^∞, las cuales están relacionadas con γ y γ_+.

Lema 3.4.2. *Sea μ una medida de Radon con crecimiento lineal en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La transformada de Cauchy es acotada de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$.

(b) Para cualquier subconjunto de Borel $E \subset \mathbb{C}$ con $\mu(E) < \infty$, existe una función h con soporte en E, con $0 \leq h \leq 1$, tal que

$$\mu(E) \leq 2\int hd\mu \quad y \quad ||\mathcal{C}_\varepsilon(h\mu)||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq c \ \forall \ \varepsilon > 0.$$

Donde la constante c en (b) depende solamente de la norma de la transformada de Cauchy de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$y conversamente.

Demostración.

Para probar que (b) $\Rightarrow$ (a) es suficiente demostrar que para cualquier medida compleja $\nu \in M(\mathbb{C})$ y para cualquier $\lambda > 0$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{C} : Re(\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x)) > \lambda\}) \leq \frac{c||\nu||}{\lambda},$$

pues se demuestra de manera análoga que lo mismo sucede con la parte imaginaria de $\mathcal{C}_\varepsilon\nu$ y por lo tanto se tiene (a).

Para ésto sea E un subconjunto de Borel de $\{x \in \mathbb{C} : Re(\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x)) > \lambda\}$ con $\mu(E) < \infty$. Sea h una función con soporte en E que cumple las propiedades de la hipótesis en (b). Luego tenemos que

$$\mu(E) \leq 2\int hd\mu \leq 2\int Re\left(\frac{\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x)}{\lambda}\right)h(x)d\mu(x) = \frac{2}{\lambda}Re\left(\int(\mathcal{C}_\varepsilon\nu)hd\mu\right)$$

$$= \frac{-2}{\lambda}Re\left(\int \mathcal{C}_\varepsilon(h\mu)d\nu\right) \leq \frac{c||\nu||}{\lambda}.$$

Ahora veamos que (a)$\Rightarrow$(b). Podemos asumir que E es compacto, por la regularidad interior de μ, $\forall\ A \subset \mathbb{C}$ de Borel, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A$ y K es compacto$\}$. Considere la función $\varphi = \pi^{-1}\chi_{B(0,1)}$ y para cada $\varepsilon > 0$, el operador integral $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ asociado al kernel suave $\frac{-1}{z} * \varphi_\varepsilon$, como en la sección 3.2. Si la transformada de Cauchy es acotada de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$, entonces por el Lema 3.2.2, los operadores $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ también son acotados de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$ uniformemente en ε. Estos también son acotados de $M(\mathbb{C})$ a $C_0(\mathbb{C})$, con norma dependiendo de ε.

Por otra parte, como los dos operadores $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon^{\,t} : M(\mathbb{C}) \to C_0(\mathbb{C})$, es fácil ver con un cambio de variable, que para cada $\varepsilon > 0$ el transpuesto de $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ es $-\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$. Luego por el Teorema 3.4.1, existe una función h_ε con soporte en E, donde $0 \leq h_\varepsilon \leq 1$, tal que

$$\mu(E) \leq 2\int h_\varepsilon d\mu \quad \text{y} \quad ||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon(h_\varepsilon\mu)||_\infty \leq c.$$

Así, dado que para todo $x \in E$ y $r > 0$:

$$|h_\varepsilon\mu|(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} h_\varepsilon(y)d|\mu|(y) \leq \int_{B(x,r)} d|\mu|(y) = |\mu|(B(x,r))$$

$$\Rightarrow \quad ||M_R(h_\varepsilon\mu)||_\infty \leq ||M_R\mu||_\infty \leq c,$$

entonces por el Lema 3.2.4, deducimos que

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\delta(h_\varepsilon\mu)||_\infty \leq c' \quad \forall\ \delta \geq \varepsilon.$$

Definamos las medidas $\mu_n := h_{\frac{1}{n}}\mu$, entonces $\mu_n \geq 0$ y tiene soporte dentro de E para toda n. Además estas medidas son uniformemente acotadas pues,

$$\mu_n(E) = \int_E h_{\frac{1}{n}} d\mu \leq \int_E d\mu = \mu(E) < \infty.$$

Por lo cual existe una subsecuencia de medidas $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a una medida $\nu \geq 0$ con soporte en E y acotada por $\mu(E)$.

Además cumple $\nu << \mu$. En efecto, sea $A \subset \mathbb{C}$ tal que $\mu(A) = 0$, entonces

$$\nu(A) = \lim_{k\to\infty} \int_A d\mu_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \int_A h_{\frac{1}{n_k}} d\mu = 0.$$

Luego, por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función medible $h \geq 0$ tal que $\nu(A) = \int_A h d\mu$, para todo conjunto A Borel medible. Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \int_A h_{\frac{1}{n_k}} d\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(A) = \nu(A) = \int_A h d\mu.$$

Así, $h : \mathbb{C} \to [0,1]$ es un límite débil estrella en $L^\infty(\mu)$ de una subsucesión $\{h_{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\varepsilon_k = \frac{1}{n_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$, h tiene soporte en E y $\mu(E) \leq 2\int hd\mu$.
Puesto que $||\widetilde{\mathcal{C}}_\delta(h_{\varepsilon_k}\mu)||_\infty \leq c'$ para $\delta \geq \varepsilon_k$, y el kernel de $\mathcal{C}_\delta$ esta en $L^1_{loc}(\mu)$, entonces

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\delta(h\mu)||_\infty \leq c' \quad \forall\, \delta > 0,$$

y por (3.2.1) se tiene que

$$||\mathcal{C}_\delta(h_\mu)||_\infty \leq c'' \quad \forall\, \delta > 0.$$

Corolario 3.4.3. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ de Borel. Si E contiene al soporte de una medida no cero de Radon μ, con crecimiento lineal y tal que el operador integral de Cauchy $\mathcal{C}_\mu$ es acotado en $L^2(\mu)$, entonces $\gamma(E) \geq \gamma_+(E) > 0$.*

Demostración.
Por el Teorema 2.1.4, la transformada de Cauchy es acotada de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$. Luego por el lema anterior existe una función h no cero con $0 \leq h \leq \chi_E$ y tal que $||\mathcal{C}_\varepsilon(h_\mu)||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq c$. Haciendo $\varepsilon \to 0$, tendremos que $|\mathcal{C}(h_\mu)(z)| \leq c$ para casi todo punto $z \in \mathbb{C}$. Así, $\dfrac{h\mu}{c} \in Ad_+E$. Además, por hipótesis y por el lema anterior:

$$0 < \frac{\mu(E)}{2c} \leq \int \frac{h(z)}{c} d\mu(z) = \left(\frac{h\mu}{c}\right)(E),$$

por lo cual $\gamma_+(E) > 0$.

3.5. La conjetura de Denjoy

En esta sección probaremos la llamada conjetura de Denjoy. Para ésto necesitamos antes un par de lemas.

Lema 3.5.1. *Sea $F \subset \mathbb{C}$, que satisface:*

$$\left|\frac{Im(z) - Im(w)}{Re(z) - Re(w)}\right| \leq c_F \quad \forall\, z, w \in F, \tag{3.5.1}$$

para una constante fija c_F. Entonces F está contenido en la gráfica de una función Lipschitz $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Demostración.
De (3.5.1), resulta que si $z, w \in F$ y $Re(z) = Re(w)$, entonces $z = w$, pues $Im(z) = Im(w)$. Por lo tanto podemos definir la función $\widetilde{A} : Re(F) \to Im(F) \subset \mathbb{R}$ como $\widetilde{A}(Re(z)) = Im(z)$. Luego, por (3.5.1), se tiene que $\widetilde{A}$ es de Lipschitz con constante menor o igual que c_F. Más aún, $\widetilde{A}$ se puede extender a una función Lipschitz $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula:

$$A(x) = \text{ínf}\{\widetilde{A}(y) + c_F|x - y| : y \in Re(F)\}.$$

Veamos que A es de Lipschitz. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y suponga sin pérdida de generalidad que $A(x_1) \geq A(x_2)$, entonces existen $y_1, y_2 \in Re(F)$ tales que

$$|A(x_1) - A(x_2)| = \widetilde{A}(y_1) + c_F|x_1 - y_1| - \widetilde{A}(y_2) - c_F|x_2 - y_2| \leq$$

$$\widetilde{A}(y_2) + c_F|x_1 - y_2| - \widetilde{A}(y_2) - c_F|x_2 - y_2| \leq c_F||x_1 - y_2| - |x_2 - y_2|| \leq c_F|x_1 - x_2|.$$

Además $A(x) = \widetilde{A}(x)$ si $x \in Re(F)$.

Lema 3.5.2. *Sea Γ una curva rectificable y $E \subset \Gamma$ con $\mathcal{H}^1(E) > 0$. Entonces existe un subconjunto compacto $F \subset E$ con $\mathcal{H}^1(F) > 0$, el cual está contenido en la gráfica de una función Lipschitz (posiblemente rotada) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Demostración.
Considere una parametrización $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ por longitud de arco de Γ, así que $\Gamma = g([a, b])$, g es diferenciable c.t.p. en $[a, b]$ y $|g'(t)| = 1$ para casi todo punto $t \in [a, b]$. Sea $t_0 \in (a, b)$ un punto donde g' existe y suponga que $g'(t_0) = 1$ (rotando si es necesario), i.e. la tangente a $g(t_0)$ es horizontal. Como g es diferenciable en t_0 existe un intervalo $I_0 \subset [a, b]$ que contiene a t_0 tal que $|g'(t) - g'(t_0)| < 1/20$.
Sea $G := \{t \in I_0 : \exists\, g'(t) \text{ y } |g'(t) - 1| \leq 1/10\}$. Por la última parte del párrafo anterior G es casi I_0, excepto en los puntos donde no existe $g'(t)$, por lo cual $\mathcal{L}^1(G) > 0$.
Para cada $m \geq 1$, considere el conjunto

$$G_m := \left\{ t \in G : \left| \frac{g(s) - g(t)}{s - t} - g'(t) \right| \leq \frac{1}{10} \; si \; |s - t| \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Como $G_m \subset G$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{m \in \mathbb{N}} G_m \subset G$. Además si $t \in G$, entonces g es diferenciable en t, luego para $\varepsilon = 1/10$ basta tomar $m = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : 1/\delta \leq n\}$ para que $t \in G_m$. Así $G = \cup_{m \in \mathbb{N}} G_m$ y $G_m \subset G_{m+1}$.
Como $\mathcal{L}^1(G) > 0$, entonces $\mathcal{L}^1(G_m) > 0$ para m suficientemente grande. Para dicho m, considere un intervalo $J \subset I_0$ de longitud $1/2m$ tal que $\mathcal{L}^1(J \cap G_m) > 0$. Observe que si $s, t \in J \cap G_m$, entonces

$$\left| \frac{g(s) - g(t)}{s - t} - 1 \right| \leq \left| \frac{g(s) - g(t)}{s - t} - g'(t) \right| + |g'(t) - 1| \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

Esto implica que

$$\left|\frac{Re(g(s)) - Re(g(t))}{s-t}\right| \geq 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \left|\frac{Im(g(s)) - Im(g(t))}{s-t}\right| \leq \frac{1}{5}.$$

Por lo cual

$$\left|\frac{Im(g(s)) - Im(g(t))}{Re(g(s)) - Re(g(t))}\right| \leq \frac{1}{4} \quad \forall\, s,t \in J \cap G_m.$$

Debido al lema anterior, $g(J \cap G_m)$ está contenido en la gráfica de una función Lipschitz. Por lo tanto, al tomar un subconjunto compacto $F_0 \subset J \cap G_m$, con $\mathcal{L}^1(F_0) > 0$ y haciendo $F = g(F_0)$ obtendremos lo deseado.

Definición 3.5.3. *Un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ se dice* ***rectificable*** *o* ***contablemente rectificable*** *si es $\mathcal{H}^1$-casi todo contenido en una unión contable de curvas rectificables (una* ***curva rectificable*** *es una curva de longitud finita). Es decir, existen curvas rectificables $\Gamma_i,\ i \geq 1$, con $\mathcal{H}^1(\Gamma_i) < \infty$ tales que*

$$\mathcal{H}^1\left(E \setminus \bigcup_i \Gamma_i\right) = 0.$$

Por otra parte, $E \subset \mathbb{C}$ se dice ***puramente no rectificable*** *si intersecta cualquier curva rectificable a lo más en un conjunto de longitud cero. Es decir, si no tiene subconjuntos rectificables de longitud positiva.*

Teorema 3.5.4. *(**La conjetura de Denjoy**). Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva rectificable y $E \subset \Gamma$ compacto. Entonces $\gamma(E) > 0$ si y sólo si $\mathcal{H}^1(E) > 0$.*
Otra forma equivalente de decirlo es: para un conjunto rectificable $E \subset \mathbb{C}$, $\gamma(E) > 0$ si y sólo si $\mathcal{H}^1(E) > 0$.

Demostración.
Recuerde que por la Proposición 1.4.13, $\gamma(E) \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) \leq \mathcal{H}^1(E)$. Por lo tanto sólo tenemos que probar, para $E \subset \Gamma$ con $\mathcal{H}^1(E) > 0$, entonces $\gamma(E) > 0$. Por el Lema 3.5.2, existe un subconjunto compacto $F \subset E$ con $\mathcal{H}^1(F) > 0$ contenido en una gráfica Lipschitz (posiblemente rotada). Puesto que, por el Teorema 2.4.3 la transformada de Cauchy es acotada en L^2 respecto a la longitud de arco en esta gráfica Lipschitz, también es acotada en $L^2(\mathcal{H}^1\lfloor F)$. Por el Corolario 3.4.3, con $\mu = \mathcal{H}^1\lfloor F$, $\gamma_+(F) > 0$ y por lo tanto $\gamma(E) \geq \gamma_+(E) \geq \gamma_+(F) > 0$.

De hecho, en la demostración anterior se probó lo siguiente.

Corolario 3.5.5. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva rectificable y $E \subset \Gamma$ compacto. Entonces $\gamma_+(E) > 0$ si y sólo si $\mathcal{H}^1(E) > 0$.*

Concluimos esta sección con el siguiente corolario

Corolario 3.5.6. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un subconjunto con longitud finita, $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Si $\gamma_+(E) = 0$, entonces E es puramente no rectificable.*

Demostración.
Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva rectificable. Como γ_+ es monótona, $\gamma_+(E \cap \Gamma) \leq \gamma_+(E) = 0$ y por la conjetura de Denjoy, $\mathcal{H}^1(E \cap \Gamma) = 0$. Entonces E intersecta a cualquier curva rectificable a lo más es un conjunto de longitud cero, por lo cual E es puramente no rectificable.

3.6. Semiaditividad de γ_+

En esta sección demostraremos la semiaditividad de γ_+. Recuerde que la notación $A \lesssim B$ significa que hay una constante positiva c tal que $A \leq cB$. Y $A \approx B$ significa $A \lesssim B \lesssim A$.
También denotaremos por $\Sigma(E) \subset M^+(\mathbb{C})$, al conjunto de las medidas complejas de Radon positivas, de medida finita con soporte en E y con crecimiento lineal, con constante de crecimiento $c_0 = 1$, es decir $\mu(B(x,r)) \leq r$ para toda $x \in \mathbb{C}$ y $r > 0$.

Teorema 3.6.1. *Para cualquier conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\begin{aligned}
\gamma_+(E) &\approx \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\varepsilon \mu||_{L^\infty(\mu)} \leq 1 \ \forall \ \varepsilon > 0\} \\
&\approx \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\varepsilon \mu||^2_{L^2(\mu)} \leq \mu(E) \ \forall \ \varepsilon > 0\} \\
&\approx \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), c^2(\mu) \leq \mu(E)\} \\
&\approx \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu) \to L^2(\mu)} \leq 1\}
\end{aligned}$$

donde las constantes en las desigualdades no dependen del conjunto E tomado. Y con $||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} = \sup_{\varepsilon>0} ||\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)}$.

Demostración.
Definimos

$$\begin{aligned}
&\gamma_+(E) = \sup(R_0) = \sup\{\mu(E) : \mu \in M(\mathbb{C}), \mu \geq 0, supp(\mu) \subset (E), \ ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1\} \\
&S_1 := \sup(R_1) = \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\varepsilon \mu||_{L^\infty(\mu)} \leq 1 \ \forall \ \varepsilon > 0\}, \\
&S_2 := \sup(R_2) = \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\varepsilon \mu||^2_{L^2(\mu)} \leq \mu(E) \ \forall \ \varepsilon > 0\}, \\
&S_3 := \sup(R_3) = \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), c^2(\mu) \leq \mu(E)\}, \\
&S_4 := \sup(R_4) = \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Demostraremos que $\gamma_+(E) \lesssim S_1 \lesssim S_2 \approx S_3 \lesssim S_4 \lesssim \gamma_+(E)$.

Primero probemos que $\gamma_+(E) \lesssim S_1$. Por definición de $\gamma_+(E)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe $\mu(E) \in R_0$, es decir $\mu \in M(\mathbb{C})$ positiva tiene soporte en E y $||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$, tal que $\gamma_+(E) \leq \delta + \mu(E) \leq 2\mu(E)$. Si probamos que μ tiene crecimiento lineal y $||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mu)} \leq c$ uniformemente en $\varepsilon > 0$, entonces $\mu(E)/c \in R_1$ por lo cual $\frac{1}{c}R_0 \subset R_1$ y al tomar supremos podemos concluir que $\gamma_+(E) \leq cS_1$.
Primero probemos que μ tiene crecimiento lineal. Dados $x \in \mathbb{C}$ y $R > 0$, como para cualquier compacto $K \subset \mathbb{C}$ se cumple que $\int_K \frac{1}{|x-\xi|} d\mathcal{L}^2(\xi) \leq 2\pi M$, donde $x - K \subset B(0, M)$ (véase [Conway] Lema 13.2.6), tenemos que

$$\int \int_{B(x,R)} \frac{1}{|z-\xi|} d\mathcal{L}^2(z) d\mu(\xi) \leq 2\pi R\mu(E).$$

Luego como $\int_{B(x,R)} \frac{1}{|z-\xi|} d\mathcal{L}^2(z) = \int_0^R \int_{z:|z-x|=r} \frac{1}{|z-\xi|} d\mathcal{H}^1(z) dr$, por el teorema de Fubini, para casi todo $r > 0$,

$$\int \int_{z:|z-x|=r} \frac{1}{|z-\xi|} d\mathcal{H}^1(z) d\mu(\xi) < \infty. \tag{3.6.1}$$

Por la fórmula de Cauchy Pompeiu, aplicada a $f(z) = 1$ por lo cual $\dfrac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} = 0$, tendremos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(x,r)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz = \begin{cases} f(\xi) = 1 & \text{si } \xi \in B(x,r) \\ 0 & \text{si } \xi \notin B(x,r) \end{cases}$$

Por lo cual, usando de nuevo Fubini para dichos r, se cumple que

$$\mu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} d\mu(\xi) = \int \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(x,r)} \frac{f(z)}{z-\xi} dz \right) d\mu(\xi) =$$

$$- \int_{\partial B(x,r)} \left(\int \frac{1}{\xi - z} d\mu(\xi) \right) \frac{dz}{2\pi i} = - \int_{\partial B(x,r)} \mathcal{C}\mu(z) \frac{dz}{2\pi i} \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(x,r)} ||\mathcal{C}\mu(z)||_{L^\infty(\mathbb{C})} dz \leq r. \tag{3.6.2}$$

Por aproximación, lo mismo sucede para todo $r > 0$ y por lo tanto se sigue que μ tiene crecimiento lineal.
Para tratar con la norma $L^\infty(\mu)$ de $\mathcal{C}_\varepsilon$, usaremos el operador suavizado $\widetilde{\mathcal{C}_\varepsilon}$ asociado con el kernel $\frac{-1}{z} * (\pi\varepsilon^2)^{-1}\chi_{B(0,\varepsilon)}$. Dado que μ tiene soporte compacto, por las propiedades asociativas y conmutativas de la convolución tenemos la siguiente identidad:

$$\widetilde{\mathcal{C}_\varepsilon}\mu = \frac{-1}{z} * \frac{\chi_{B(0,\varepsilon)}}{\pi\varepsilon^2} * \mu = \frac{\chi_{B(0,\varepsilon)}}{\pi\varepsilon^2} * \mathcal{C}\mu.$$

Esta igualdad se debe entender en el sentido distribucional y $\mathcal{C}\mu$ como función de $L^1_{loc}(\mathbb{C})$. Como consecuencia, dado que

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq \left|\left|\frac{\chi_{B(0,\varepsilon)}}{\pi\varepsilon^2}\right|\right|_{L^1(\mathbb{C})} ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} = ||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})},$$

si $||\mathcal{C}\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$, entonces $||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$; y debido a la continuidad de $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu$ para todo $\varepsilon > 0$, afirmamos que $||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mu)} \leq 1$. Ya que, debido a la continuidad de dichas funciones $|\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu|^{-1}(1,\infty)$ debe ser un abierto en $\mathbb{C}$ o el conjunto vacío, pero si no fuera el conjunto vacío, tendríamos que $|\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu| > 1$ en un abierto de $\mathbb{C}$, lo cual contradice que $||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$.
Como μ tiene crecimiento lineal y es positiva, por el Lema 3.2.2, tenemos que

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu(x) - \widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\mu(x)|| \leq C_\varphi M_R\mu(x) = C_\varphi \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r} \leq C_\varphi \ \forall\ x \in \mathbb{C},$$

por lo cual $||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mu)} \leq 1 + C_\varphi = c$, donde c sólo depende de φ. Con esto terminamos la demostración de $\gamma_+(E) \lesssim S_1$.

Demostremos ahora que $S_1 \lesssim S_2$. Sea $\mu(E) \in R_1$, entonces $\mu \in \Sigma(E)$ y para todo $\varepsilon > 0$ se cumple $||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||_{L^\infty(\mu)} \leq 1$, por lo cual

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||_{L^2(\mu)} = \int |\mathcal{C}_\varepsilon\mu(x)|^2 d\mu(x) \leq \mu(E), \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Así, $R_1 \subset R_2$, y por lo tanto $S_1 \leq S_2$.

Es fácil ver que $S_2 \approx S_3$. Sea $\mu(E) \in R_2$, entonces por la Proposición 2.2.6, tenemos que

$$||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{6}c^2_\varepsilon(\mu) + O(\mu(\mathbb{C})) \Rightarrow c^2_\varepsilon(\mu) = 6||\mathcal{C}_\varepsilon\mu||^2_{L^2(\mu)} - O(\mu(E)) \leq \mu(E) + cc_0^2\mu(E),$$

para todo $\varepsilon > 0$ donde c es una constante absoluta y $c_0 = 1$. Así

$$c^2_\varepsilon(\mu) \leq c_2\mu(E), \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad c^2\left(\frac{\mu}{c_2}\right) \leq \mu(E).$$

Por lo cual $\frac{1}{c_2}R_2 \subset R_3 \Rightarrow S_2 \leq c_2 S_3$, donde c_2 es una constante absoluta.
De manera análoga, usando la Proposición 2.2.6, se prueba que $S_3 \leq c_3 S_2$, donde c_3 es una constante absoluta.

Para demostrar que $S_3 \lesssim S_4$, sea $\mu(E) \in R_3$ tal que $S_3 \leq 2\mu(E)$. Luego por la Proposición 2.2.6 tendremos que

$$||\mathcal{C}_\varepsilon \mu||^2_{L^2(\mu)} = \frac{1}{6} c^2_\varepsilon(\mu) + O(\mu(\mathbb{C})) \leq c\mu(E),$$

uniformemente en $\varepsilon > 0$ y con c una constante absoluta. Por el Lema 2.3.1, existe un subconjunto $G \subset E$ con $\mu(G) \geq \mu(E)/4$ tal que $\mathcal{C}_{\mu\lfloor G} : L^2(\mu\lfloor G) \to L^2(\mu\lfloor G)$ es acotada y cuya norma está acotada por arriba por una constante absoluta c_4. Por lo tanto, la medida $\nu = \frac{1}{c_4}\mu\lfloor G$ tiene soporte en E, crecimiento lineal y satisface $||\mathcal{C}\nu||_{L^2(\nu)\to L^2(\nu)} \leq 1$, es decir $\nu(E) \in R_4$. Además como $\nu(E) \geq \mu(E)/4c_4$, entonces $4c_4 S_4 \geq S_3$.

Finalmente veamos que $S_3 \lesssim S_4$. Sea $\mu(E) \in R_4$, entonces $||\mathcal{C}\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1$. Por el Teorema 2.1.4 se tiene que $\mathcal{C}_\varepsilon$ es acotado de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$ con la cota dependiendo sólo de la constante de crecimiento $c_0 = 1$ y de $||T_{\mu,\varepsilon}||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)}$, es decir de la constante 1. Por el Lema 3.4.2, existe una función h con soporte en E y con $0 \leq h \leq 1$ tal que $\mu(E) \leq 2(h\mu)(E)$ y $||\mathcal{C}_\varepsilon(h\mu)||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq c$ para todo $\varepsilon > 0$, donde c sólo depende de la norma de la transformada de Cauchy de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$, es decir de 1. Así, la medida $h\mu/c \in Ad_+(E)$, es decir $\left(\frac{h\mu}{c}\right)(E) \in R_0$ y por lo tanto $\left(\frac{h\mu}{c}\right)(E) \leq \gamma_+(E)$. Luego $\mu(E) \leq 2(h\mu)(E) \leq c\gamma_+(E) \Rightarrow S_4 \leq c\gamma_+(E)$, con c una constante absoluta.

Observación 3.6.2. *Recuerde que para una conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{C}$, $\gamma_+(A) = \sup\{\gamma_+(E) : E \subset A$ es compacto $\}$. Por lo cual, se sigue que las caracterizaciones en γ_+ obtenidas en el teorema anterior también se tienen para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{C}$.*

Corolario 3.6.3. *(Semiaditividad de γ_+) La capacidad γ_+ es contablemente semiaditiva en conjuntos de Borel. Esto es, si E_i, $i = 1, 2, \ldots$, es una familia contable o finita de conjuntos de Borel, entonces*

$$\gamma_+\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_+(E_i).$$

Demostración.
Primero veamos que $\sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\}$ es semiaditivo. Por la semiaditividad de las medidas y las propiedades del supremo tenemos que

$$\sup\left\{\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) : \mu \in \Sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) : \mu \in \Sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\right\} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sup\{\mu(E_i) : \mu \in \Sigma(E_i), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\}.$$

Luego como por el teorema anterior $S_4 \approx \gamma_+$, se cumple que

$$\gamma_+\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq c_1 \sup\left\{\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) : \mu \in \Sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\right\} \leq$$

$$c_1\sum_{i=1}^{\infty}\sup\{\mu(E_i) : \mu \in \Sigma(E_i), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\} \leq c_1\sum_{i=1}^{\infty} c_2\gamma_+(E_i) = C\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_+(E_i).$$

Concluimos esta sección con la siguiente proposición que nos servirá en el próximo capítulo.

Proposición 3.6.4. *Si ν es una medida en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\gamma_+\left(\{x \in \mathbb{C} : \mathcal{C}_*\nu(x) = \sup_{\varepsilon>0}|\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x)| > \lambda\}\right) \leq C\frac{||\nu||}{\lambda}.$$

Demostración.
Sea $G := \{x \in \mathbb{C} : \mathcal{C}_*\nu(x) = \sup_{\varepsilon>0}|\mathcal{C}_\varepsilon\nu(x)| > \lambda\}$. Usando la notación del Teorema 3.6.1, por definición de S_4, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenño, existe $\mu(G) \in R_4$ tal que $S_4 \leq 2\mu(G)$; y como por el Teorema 3.6.1, $\gamma_+ \approx S_4$, entonces $\gamma_+(G) \leq c\mu(G)$ donde $\mu \in \Sigma(G)$ y la transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu)$ con norma menor o igual que 1. Luego, por el Teorema 2.1.6, el operador maximal de Cauchy $\mathcal{C}_*$ es acotado de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\mu)$, así tenemos que

$$\gamma_+(G) \leq c\mu(G) = \mu(\{x \in \mathbb{C} : \mathcal{C}_*\nu(x) > \lambda\}) \leq C\frac{||\nu||}{\lambda}.$$

Observe que esta Proposición en válida si reemplazamos γ por γ_+ una vez que demostremos que $\gamma \approx \gamma_+$, el cual es uno de los resultados principales de esta tesis.

3.7. Teoría del potencial para γ_+

Una consecuencia importante del Teorema 3.6.1, es que la capacidad γ_+ se puede caracterizar en términos del siguiente potencial:

$$U_\mu(x) := M_R\mu(x) + c_\mu^2(x)^{1/2} = \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r} + \left(\int\int c(x,y,z)^2 d\mu(z)d\mu(y)\right)^{1/2}.$$

El resultado preciso es el siguiente.

Corolario 3.7.1. *Es decir, para cualquier conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\gamma_+(E) \approx \sup\{\mu(E) : \mu \in M^+(\mathbb{C}), supp(\mu) \subset E, U_\mu(x) \leq 1 \ \forall\ x \in E\}.$$

donde $M^+(\mathbb{C}) \subset M(\mathbb{C})$ es el conjunto de medidas complejas de Radon positivas y finitas.

Demostración.
Usaremos que por el Teorema 3.6.1:

$$\gamma_+(E) \approx \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), c^2(\mu) \leq \mu(E)\} = \sup(R_3).$$

Sea $\mu(E) \in R_3$, veamos que existe una constante absoluta c tal que $U_{c\mu}(x) \leq 1$ para toda $x \in E$. Como $\mu \in \Sigma(E)$, entonces μ tiene crecimiento 1-lineal, por lo cual

$$M_R\mu(x) = \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r} \leq \sup_{r>0} \frac{r}{r} = 1.$$

Como $\int c_\mu^2(x)d\mu(x) = c^2(\mu) \leq \mu(E)$, entonces $c_\mu^2(x) \leq 1$ μ-c.t.p. en E.
Así, $U_\mu(x) = M_R\mu(x) + c_\mu^2(x)^{1/2} \leq 1 + 1 = 2$ en E, por lo cual $U_{\mu/2}(x) \leq 1$ en E.
Luego $\frac{1}{2}R_3 \subset R_5 := \{\mu(E) : \mu \in M^+(\mathbb{C}), supp(\mu) \subset E, U_\mu(x) \leq 1\ \forall\ x \in E\}$, por lo tanto $\frac{1}{2}\sup(R_3) \leq \sup(R_5)$.
Ahora sea $\mu(E) \in R_5$. Como $U_\mu(x) \leq 1\ \forall\ x \in E \Rightarrow c_\mu^2(x)^{\frac{1}{2}} \leq 1\ \forall\ x \in E$, entonces $\int c_\mu^2(x)d\mu(x) = c^2(\mu) \leq \mu(E)$.
Falta ver que μ tiene crecimiento 1-lineal. Como $U_\mu(x) \leq 1\ \forall\ x \in E \Rightarrow M_R\mu(x) = \sup_{r>0} \dfrac{\mu(B(x,r))}{r} \leq 1\ \forall\ x \in E$, entonces $\mu(B(x,r)) \leq r\ \forall\ x \in E$ y $\forall\ r > 0$.
Así, $\mu(E) \in R_3 \Rightarrow R_5 \subset R_3$, por lo tanto $\sup R_5 \leq \sup R_3$.

A continuacioón probaremos algunos lemas acerca de la curvatura. El siguiente lema nos dice como la curvatura de Menger de tres puntos cambia conforme uno de estos puntos se mueve.

Lema 3.7.2. *Sean $x, y, z \in \mathbb{C}$ tres puntos distintos a pares y sea $x' \in \mathbb{C}$ tal que*

$$A^{-1}|x-y| \leq |x'-y| \leq A|x-y|, \tag{3.7.1}$$

donde $A > 0$ es una constante. Entonces

$$|c(x,y,z) - c(x',y,z)| \leq (4+2A)\frac{|x-x'|}{|x-y||x-z|}. \tag{3.7.2}$$

Demostración.
Como $x \neq y$, por (3.7.1) tenemos que $x' \neq y$. Si $x' = z$, entonces $c(x', y, z) = 0$. Recuerde que $dist(x, L_{yz})$ es la distancia del punto x a la línea L_{yz} que une a y con z. En este caso (3.7.2) se sigue trivialmente ya que $dist(x, L_{yz}) \leq |x - z|$:

$$|c(x,y,z) - c(x',y,z)| = c(x,y,z) = \frac{2dist(x,L_{yz})}{|x-y||x-z|} \leq \frac{2}{|x-y|} = \frac{2|x-x'|}{|x-y||x-z|}.$$

Para $x' \neq y$ y $x' \neq z$ tenemos que

$$|c(x,y,z) - c(x',y,z)| = \left|\frac{2dist(x,L_{yz})}{|x-y||x-z|} - \frac{2dist(x',L_{yz})}{|x'-y||x'-z|}\right| \leq$$

$$2\frac{|dist(x,L_{yz}) - dist(x',L_{yz})|}{|x-y||x-z|} + 2dist(x',L_{yz})\left|\frac{1}{|x-y||x-z|} - \frac{1}{|x'-y||x'-z|}\right|$$
$$= I + II.$$

Para estimar el termino I, note que $|dist(x, L_{yz}) - dist(x', L_{yz})| \leq |x - x'|$, por lo cual

$$I \leq 2\frac{|x-x'|}{|x-y||x-z|}.$$

Por otro lado para el termino II tenemos que

$$II = 2dist(x',L_{yz})\left|\frac{|x'-y||x'-z| - |x-y||x-z|}{|x-y||x-z||x'-y||x'-z|}\right|.$$

Ahora como

$$|x'-y||x'-z| - |x-y||x-z| = |(|x'-y| - |x-y|)|x'-z| + (|x'-z| - |x-z|)|x-y||$$

$$\leq |x'-x||x'-z| + |x'-x||x-y|.$$

Usando que $dist(x', L_{yz}) \leq |x' - y|$ y que $dist(x', L_{yz}) \leq |x' - z|$, obtenemos que

$$II \leq 2|x-x'|\left(\frac{dist(x',L_{yz})|x'-z|}{|x-y||x-z||x'-y||x'-z|} + \frac{dist(x',L_{yz})|x-y|}{|x-y||x-z||x'-y||x'-z|}\right)$$

$$\leq 2\frac{|x-x'|}{|x-y||x-z|}+2\frac{|x-x'|}{|x'-y||x-z|}\leq (2+2A)\frac{|x-x'|}{|x-y||x-z|}.$$

Así, añadiendo las desigualdades obtenidas para I y II, obtenemos (3.7.2).

Dadas dos medidas de Radon positivas ν y μ (sin puntos de masa positiva) y $x \in \mathbb{C}$, escribimos

$$c^2(x,\mu,\nu)=\int\int\frac{1}{R(x,y,z)^2}d\nu(z)d\mu(y) \quad \text{y} \quad c(x,\mu,\nu)=(c^2(x,\mu,\nu))^{1/2}.$$

Nótese que $c(x,\mu,\nu)$ es un objeto diferente de $c(x,y,z)$.

El siguiente lema consiste en estimar la diferencia entre $c(x,\mu,\nu)$ y $c(x',\mu,\nu)$ cuando x y x' se encuentran lejos de los soportes de μ y ν.

Lema 3.7.3. *Sean $x, x' \in \mathbb{C}$ y μ,ν medidas de Radon positivas en $\mathbb{C}$. Sea $r>0$ y suponga que $x' \in B(x,r)$ y $supp(\mu)\cup supp(\nu)\subset B(x,2r)^C$. Entonces*

$$|c(x,\mu,\nu)-c(x',\mu,\nu)|\leq C(M_R\mu(x)M_R\nu(x))^{1/2}\approx (M_R\mu(x')M_R\nu(x'))^{1/2}.$$

Demostración.
Es inmediato que $M_R\mu(x)\approx M_R\mu(x')$ y $M_R\nu(x)\approx M_R\nu(x')$, usando que μ y ν tienen soporte lejos de x y x'. Por lo tanto, $M_R\mu(x)M_R\nu(x)\approx M_R\mu(x')M_R\nu(x')$.
Dado que $x'\in B(x,r)\Rightarrow |x-x'|<r$ y como $supp(\mu)\subset (B(x,2r))^C \Rightarrow \forall\ y \in supp(\mu), |x-y|>2r>r \Rightarrow \frac{1}{r}>\frac{1}{|x-y|}$ y también $|x'-y|\geq |x-y|-|x'-x|\geq r$.
Entonces

$$|x'-y|\leq |x'-x|+|x-y|\leq r+|x-y|=\left(\frac{r}{|x-y|}+1\right)|x-y|\leq 2|x-y|$$

y también

$$|x-y|\leq |x-x'|+|x'-y|\leq r+|x'-y|=\left(\frac{r}{|x'-y|}+1\right)|x'-y|\leq 2|x'-y|.$$

Lo cual implica que

$$\frac{|x-y|}{2}\leq |x'-y|\leq 2|x-y|.$$

Así por Holder y por el Lema 3.7.2 tenemos que

$$\left|\left(\int\int c(x,y,z)^2 d\nu(z)d\mu(y)\right)^{1/2}-\left(\int\int c(x',y,z)^2 d\nu(z)d\mu(y)\right)^{1/2}\right|\leq$$

$$\left(\int\int |c(x,y,z)-c(x',y,z)|^2 d\nu(z)d\mu(y)\right)^{1/2} \leq$$

$$c\left(\int\int \frac{|x-x'|^2}{|x-y|^2|x-z|^2}d\nu(z)d\mu(y)\right)^{1/2} \leq cr\left(\int \frac{1}{|x-y|^2}d\mu(y)\int \frac{1}{|x-z|^2}d\nu(z)\right)^{1/2}.$$

Debido a que $|x-y|>r$ para $y\in supp(\mu)$, separando el dominio de integración en anillos como en (2.1.1) con $n=1$, se sigue que

$$\int \frac{1}{|x-y|^2}d\mu(y) \leq \frac{c}{r}M_R\mu(x) \quad \text{y} \quad \int \frac{1}{|x-z|^2}d\nu(z) \leq \frac{c}{r}M_R\nu(x). \tag{3.7.3}$$

Y así se obtiene lo deseado.

En el siguiente lema probaremos una especie de principio del máximo para $c^2(x,\mu,\nu)$ que será necesario para obtener una nueva caracterizacíon de γ_+ como la del Corolario 3.7.1.

Lema 3.7.4. *Sean* μ *y* ν *medidas positivas de Radon tales que*

$$c^2(x,\mu,\nu)\leq \beta \quad \forall\ x\in supp(\nu).$$

Entonces

$$c^2(x,\mu,\nu)\leq 2\beta + C_1 M_R\nu(x)\,\text{mín}\left(M_R\mu(x), \sup_{z\in supp(\nu)} M_R\mu(z)\right)\ \forall\ x\in\mathbb{C},$$

donde C_1 *es una constante absoluta.*

Demostración.
Sólo hay que probar la desigualdad cuando $x\notin supp(\nu)$. Sea $r=dist(x,supp(\nu))>0$ y sea $x'\in supp(\nu)$ tal que $|x-x'|=r$. Entonces separamos $c^2(x,\mu,\nu)$ como sigue:

$$\begin{aligned} c^2(x,\mu,\nu) &= c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r),\nu\lfloor B(x,2r)) + c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r),\nu\lfloor B(x,2r)^C) \\ &+c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r)^C,\nu\lfloor B(x,2r)) + c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r)^C,\nu\lfloor B(x,2r)^C). \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

Estimaremos cada uno de los términos del lado derecho por separado.
Para el primero, usando que por la Proposición 2.2.2 $c(x,y,z)\leq 2|x-z|^{-1}\leq 2r^{-1}$ para $z\in supp(\nu)$, obtenemos

$$\begin{aligned} c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r),\nu\lfloor B(x,2r)) &\leq \frac{4}{r^2}\int_{|y-x|<2r}\int_{|x-z|<2r} d\nu(z)d\mu(y) \\ &\leq \frac{4\mu(B(x,2r))\nu(B(x,2r))}{r^2}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\frac{\mu(B(x,2r))}{r} \leq 2M_R\mu(x) \quad \text{y} \quad \frac{\nu(B(x,2r))}{r} \leq 2M_R\nu(x). \tag{3.7.5}$$

Para el primer cociente, dado que $B(x,2r) \subset B(x',3r)$, podemos usar la estimación

$$\frac{\mu(B(x,2r))}{r} \leq \frac{\mu(B(x',3r))}{r} \leq 3M_R\mu(x'). \tag{3.7.6}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$c^2(x, \mu\lfloor B(x,2r), \nu\lfloor B(x,2r)) \leq cM_R\nu(x) \min(M_R\mu(x), M_R\mu(x')).$$

Para el segundo termino en (3.7.4), usando de nuevo la Proposición 2.2.2, tenemos:

$$c^2(x, \mu\lfloor B(x,2r), \nu\lfloor B(x,2r)^C) \leq \int_{|y-x|<2r} \int_{|x-z|\geq 2r} \frac{4}{|x-z|^2} d\nu(z) d\mu(y)$$

$$= \mu(B(x,2r)) \int_{|x-z|\geq 2r} \frac{4}{|x-z|^2} d\nu(z).$$

Usando las estimaciones (3.7.5) y (3.7.6), y usando el hecho que por (3.7.3) la última integral de arriba no excede $cM_R\nu(x)$, obtenemos de nuevo que

$$c^2(x, \mu\lfloor B(x,2r), \nu\lfloor B(x,2r)^C) \leq cM_R\nu(x) \min(M_R\mu(x), M_R\mu(x')).$$

Para el tercer término en (3.7.4) procedemos análogamente:

$$c^2(x, \mu\lfloor B(x,2r)^C, \nu\lfloor B(x,2r)) \leq \int_{|y-x|\geq 2r} \int_{z\in B(x,2r)} \frac{4}{|x-y|^2} d\nu(z) d\mu(y)$$

$$= \nu(B(x,2r)) \int_{|x-y|\geq 2r} \frac{4}{|x-y|^2} d\mu(y) \leq cM_R\nu(x) M_R\mu(x).$$

Tomando en cuenta que $|x-y| \approx |x'-y|$ en la integral de arriba, tenemos que

$$\int_{|x-y|\geq 2r} \frac{4}{|x-y|^2} d\mu(y) \leq c \int_{|x'-y|>c^{-1}r} \frac{1}{|x'-y|^2} d\mu(y) \leq cM_R\mu(x'),$$

y por lo tanto

$$c^2(x, \mu\lfloor B(x,2r)^C, \nu\lfloor B(x,2r)) \leq cM_R\nu(x) \min(M_R\mu(x), M_R\mu(x')).$$

Finalmente, consideremos el último termino en (3.7.4). Aplicando el Lema 3.7.3 a $\mu\lfloor B(x,2r)^C$ y $\nu\lfloor B(x,2r)^C$, obtenemos

$$|c(x, \mu\lfloor B(x,2r)^C, \nu\lfloor B(x,2r)^C) - c(x', \mu\lfloor B(x,2r)^C, \nu\lfloor B(x,2r)^C)|$$

$$\lesssim \left(M_R(\mu\lfloor B(x,2r)^C)(x)M_R(\nu\lfloor B(x,2r)^C)(x)\right)^{1/2}.$$

Por lo tanto

$$c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r)^C,\nu\lfloor B(x,2r)^C) \leq 2c^2(x',\mu,\nu) + cM_R(\mu\lfloor B(x,2r)^C)(x)M_R\nu(x).$$

Dado que $M_R(\mu\lfloor B(x,2r)^C)(x) \approx M_R(\mu\lfloor B(x,2r)^C)(x')$, tenemos que

$$M_R(\mu\lfloor B(x,2r)^C)(x) \lesssim \text{mín}(M_R\nu(x), M_R\nu(x')),$$

por lo cual

$$c^2(x,\mu\lfloor B(x,2r)^C,\nu\lfloor B(x,2r)^C) \leq 2c^2(x',\mu,\nu) + cM_R\nu(x)\,\text{mín}(M_R\nu(x), M_R\nu(x')).$$

Usando todas las estimaciones obtenidas para los términos en (3.7.4) obtenemos lo deseado.

Corolario 3.7.5. *Si μ es una medida de Radon positiva tal que $U_\mu(x) \leq A$ para toda $x \in supp(\mu)$, entonces*

$$U_\mu(x) \leq cA \quad \forall\ x \in \mathbb{C},$$

donde c es una constante absoluta.

Demostración.
Dado que $U_\mu(x) \leq A \Rightarrow M_R\mu(x) \leq A$ para toda $x \in supp(\mu)$, concluimos que para $y \notin supp(\mu)$,

$$\mu(B(y,r)) \leq \mu(B(y',2r)) \quad \forall\ r > 0,$$

donde $y' \in supp(\mu)$ es el punto más cercano a y. Por lo cual, $M_R\mu(y) \leq 2A$ para toda $y \in \mathbb{C}$. Por el Lema 3.7.4 con $\mu = \nu$, como $U_\mu(x) \leq A \Rightarrow c^2(x,\mu,\mu) \leq A^2$ para toda $x \in supp(\mu)$, se deduce que $c^2(y,\mu,\mu) \leq cA^2$ para toda $y \in \mathbb{C}$.

Corolario 3.7.6. *Para cualquier subconjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\gamma_+(E) \approx \sup\{\mu(E) : \mu \in M^+(\mathbb{C}), supp(\mu) \subset E, U_\mu(x) \leq 1\ \forall\ x \in \mathbb{C}\}.$$

Demostración.
Se sigue de los Corolarios 3.7.1 y 3.7.5. Donde la constante $c > 0$ del Corolario 3.7.5 se absorbe dentro del símbolo $\approx$.

Teorema 3.7.7. *Si μ es una medida positiva de Radon en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\gamma_+(\{x \in \mathbb{C} : U_\mu(x) > \lambda\}) \leq c\frac{||\mu||}{\lambda} \tag{3.7.7}$$

Demostración.
Considere los siguientes conjuntos de Borel

$$E = \{x \in \mathbb{C} : U_\mu(x) > \lambda\}, \quad E_1 = \{x \in \mathbb{C} : M_R\mu(x) > \lambda/2\},$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{C} : M_R\mu(x) \leq \lambda/2 \quad \text{y} \quad c_\mu(x) > \lambda/2\}.$$

Como dado $x \in E$, entonces $U_\mu(x) = M_R\mu(x) + c_\mu(x) > \lambda$; hay dos posibilidades: la primera es que $M_R\mu(x) > \lambda/2$ y entonces $x \in E_1$. La segunda posibilidad es que $M_R\mu(x) \leq \lambda/2$ pero como $x \in E$, entonces $c_\mu(x) > \lambda/2$ por lo cual $x \in E_2$.
Así, $E \subset E_1 \cup E_2 \Rightarrow \gamma_+(E) \leq c(\gamma_+(E_1) + \gamma_+(E_2))$.
No es difícil ver que

$$\gamma_+(E_1) \leq c\frac{||\mu||}{\lambda}.$$

En efecto, por el Teorema 3.6.1, $\gamma_+(E) \approx S_3$, así tomemos $\nu \in \Sigma(E_1)$ tal que $\gamma_+(E_1) \approx ||\nu||$ donde $c^2(\mu) \leq \mu(E) \Rightarrow c_\nu^2(x) \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{C}$. Por el crecimiento lineal de ν, el operador maximal M_R es acotado de $M(\mathbb{C})$ a $L^{1,\infty}(\nu)$ (Véase [Tolsa] pág. 53) y por cual tenemos

$$\gamma_+(E_1) \leq c\nu(E_1) = c\nu(\{x \in \mathbb{C} : M_R\mu(x) > \lambda/2\}) \leq c\frac{||\mu||}{\lambda},$$

donde que la constante $c > 0$ de la desigualdad de arriba no es la constante $c > 0$ en (3.7.7).
Ahora probaremos que

$$\gamma_+(E_2) \leq c\frac{||\mu||}{\lambda}.$$

Como en la parte de arriba tomemos $\nu \in \Sigma(E_2)$, tal que $\gamma_+(E_2) \approx ||\nu||$ y $c_\nu^2(x) \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{C}$. Observe que $c^2(\mu, \nu, \nu) \leq ||\mu|| = \beta||\nu||$, donde $\beta = ||\mu||/||\nu||$. Luego, por la primera parte de la demostración del Lema 2.3.1, existe un subconjunto cerrado $F \subset supp(\nu)$ tal que $\nu(F) \geq ||\nu||/4$ y $c^2(x, \mu, \nu) \leq 2\beta$ para toda $x \in F$.
Por lo tanto, $c^2(x, \mu, \nu\lfloor F) \leq 2\beta \ \forall \ x \in F$ y por el Lema 3.7.4, $c^2(x, \mu, \nu\lfloor F) \leq c\lambda + 4\beta$ para toda $x \in \mathbb{C}$, pues $M_R\mu(z) \leq \lambda/2 \ \forall \ z \in supp(\nu)$ ya que $\nu \in \Sigma(E_2)$ y $x \in E_2$.
Como $x \in E_2 \Rightarrow \lambda/2 < c_\mu(x) \Rightarrow 1 < 2\lambda^{-1}c_\mu(x) = 2\lambda^{-1}c^2(x, \mu, \mu)^{1/2}$. Usando Fubini tenemos que

$$\gamma_+(E_2) \leq c\int d(\nu\lfloor F) \leq \frac{c}{\lambda^2}\int c^2(x, \mu, \mu)d(\nu\lfloor F)(x) = \frac{c}{\lambda^2}\int c^2(y, \mu, \nu\lfloor F)d\mu(y)$$

$$\leq \frac{c}{\lambda^2}\int (c\lambda + 4\beta)d\mu \leq \frac{c}{\lambda^2}\left(\lambda||\mu|| + \frac{||\mu||^2}{||\nu||}\right).$$

Y como $\gamma_+(E) \approx ||\nu||$, obtenemos que

$$\gamma_+(E_2) \leq c_2\left(\frac{||\mu||}{\lambda} + \frac{||\mu||^2}{\lambda^2\gamma_+(E_2)}\right).$$

Luego, si $||\mu||/\lambda \geq ||\mu||^2/(\lambda^2\gamma_+(E_2))$, entonces la desigualdad de arriba implica $\gamma_+(E_2) \leq 2c_2\frac{1}{\lambda}||\mu||$, y si $||\mu||/\lambda \leq ||\mu||^2/(\lambda^2\gamma_+(E_2))$ también obtenemos lo deseado.

Ocuparemos el siguiente par de lemas para dar otra caracterización de γ_+ en términos del potencial U.

Lema 3.7.8. *Sea $\nu \in M^+(\mathbb{C})$. Sea $Q \subset \mathbb{C}$ un cuadrado cerrado con longitud de lado δ. Sea L un segmento cerrado de longitud $\delta/2$ paralelo a uno de los lados de Q y concentrico con Q, es decir el centro de Q es el punto medio del segmento L. Suponga que $\nu\lfloor Q = a\mathcal{H}^1\lfloor L$ con $a > 0$ una constante y $\nu\left((\frac{3}{2}Q) \setminus Q\right) = 0$. Entonces existe una constante absoluta c_3 tal que para toda $x, y \in Q$,*

$$c_\nu^2(x) \leq \frac{10}{9}c_\nu^2(y) + c_3 \operatorname{mín}(M_R\nu(x), M_R\nu(y))^2.$$

Demostración.
Dado que $x \in Q$, se tiene que $supp(\nu\lfloor\mathbb{C} \setminus \frac{3}{2}Q) \subset \mathbb{C} \setminus B(x, 2diam(Q))$, por el Lema 3.7.3, para todo $y \in B(x, diam(Q))$:

$$\left|c_{\nu\lfloor\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q}(x) - c_{\nu\lfloor\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q}(y)\right| \lesssim M_R\left((\nu\lfloor\mathbb{C}) \setminus \left(\frac{3}{2}Q\right)\right)(x) \lesssim \operatorname{mín}(M_R\nu(x), M_R\nu(y)).$$

Por lo tanto,

$$c^2_{\nu\lfloor\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q}(x) \leq \frac{10}{9}c^2_{\nu\lfloor\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q}(y) + c\operatorname{mín}(M_R\nu(x), M_R\nu(y))^2.$$

Por otra parte como $\nu(\frac{3}{2}Q \setminus Q) = 0$ y $\nu\lfloor Q = a\mathcal{H}^1\lfloor L$, entonces para todo $x \in supp(\mathcal{H}^1\lfloor L) = L$ se tiene:

$$c^2_{\nu\lfloor\frac{3}{2}Q}(x) = c^2_{\nu\lfloor L}(x) = \int_L\int_L c(x,y,z)^2 d\mathcal{H}^1(y)d\mathcal{H}^1(z) = 0$$

ya que $c(x,y,z) = 0$ pues $x, y, z \in L$. Luego por el Lema 3.7.4 con $\beta = 0$, para toda $x \in \mathbb{C}$ tendremos que

$$c^2_{\nu\lfloor L}(x) = c^2(x, \nu\lfloor L, \nu\lfloor L) \leq C_1 M_R(\nu\lfloor L)(x)\operatorname{mín}\left(M_R(\nu\lfloor L)(x), \sup_{z\in supp(\nu\lfloor L)} M_R(\nu\lfloor L)(z)\right)$$
$$\leq C_1 M_R(\nu\lfloor L)(x)^2 \leq C_1 M_R\nu(x)^2.$$

Además como para toda $x \in Q$ se cumple que:

$$aC_2 := a\inf_{w\in Q} M_R\mathcal{H}^1(w) = \inf_{w\in Q} M_R(\nu\lfloor L)(w) \leq M_R(\nu\lfloor L)(x)$$

y también

$$\forall\ R > 0, \quad \frac{a(\mathcal{H}^1\lfloor L)(B(x,R))}{R} \leq a\frac{R}{R} \ \Rightarrow\ \sup_{R>0} \frac{a(\mathcal{H}^1\lfloor L)(B(x,R))}{R} = M_R(\nu\lfloor L)(x) \leq a,$$

por lo cual concluimos que $M_R(\nu\lfloor L)(x)^2 \approx a^2$ para toda $x \in Q$.
Así tenemos que

$$c^2_{\nu\lfloor\frac{3}{2}Q}(x) = c^2_{\nu\lfloor L}(x) \lesssim M_R(\nu\lfloor L)(x)^2 \approx a^2 \approx M_R(\nu\lfloor L)(y)^2,$$

por lo tanto

$$c^2_{\nu\lfloor\frac{3}{2}Q}(x) \lesssim \text{mín}(M_R\nu(x), M_R\nu(y))^2.$$

Finalmente, sea c_Q el centro de Q, usando la Proposición 2.2.2 tenemos que

$$c^2\left(x, \nu\lfloor\frac{3}{2}Q, \nu\lfloor\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q\right) \leq c\int_{z\in L}\int_{t\notin\frac{3}{2}Q}\frac{1}{|c_Q - t|^2}d\nu(z)d\nu(t),$$

ya que $|z-t| \approx |c_Q - t|$ para z, t en el dominio de integracioón. Procediendo de igual manera que en (3.7.3), tendremos que

$$c^2\left(x, \nu\lfloor\frac{3}{2}Q, \nu\lfloor\left(\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q\right)\right) \lesssim \nu(Q)\int_{t\notin\frac{3}{2}Q}\frac{1}{|c_Q - t|^2}d\nu(t)$$

$$\lesssim \frac{\nu(Q)}{l(Q)}M_R\left(\nu\lfloor\left(\mathbb{C}\setminus\frac{3}{2}Q\right)\right)(c_Q) \lesssim \text{mín}\left(M_R\nu(x), M_\nu(y)\right)^2.$$

Partiendo la integral como en la demostración del Lema 3.7.4 y añadiendo las estimaciones que hicimos arriba, el resultado se sigue.

Lema 3.7.9. *Considere una rejilla de cuadrados con longitud de lado $\delta > 0$ en $\mathbb{C}$ con lados paralelos a los ejes. Tome una colección finita de cuadrados cerrados $\{Q_i\}_{i\in I}$ de la rejilla. Para cada $i \in I$, sea L_i el segmento cerrado de longitud $\delta/2$ concentrico con Q_i y paralelo al eje x. Sea $\widetilde{E} = \cup_{i\in I}L_i$. Sea $\Sigma_0(\widetilde{E})$ el subconjunto de $\Sigma(\widetilde{E})$ de medidas μ de la forma $\mu = \sum_{i\in I} a_i\mathcal{H}^1\lfloor L_i$. Entonces existe una medida $\nu \in \Sigma_0(\widetilde{E})$ tal que*

$$\frac{\|\nu\|^2}{\|\nu\| + c^2(\nu)} = \sup_{\mu\in\Sigma_0(\widetilde{E})}\frac{\|\mu\|^2}{\|\mu\| + c^2(\mu)}.$$

Cualquier medida ν que cumpla la desigualdad anterior también satisface

$$c^2(\nu) \leq \|\nu\| \quad y \quad U_\nu(x) \geq c_4$$

para toda $x \in \widetilde{E}$, donde $c_4 > 0$ es una constante absoluta.

Demostración.
Primero recuerde que dada $\mu \in \Sigma_0(\widetilde{E})$, tenemos que μ es una medida positiva, finita y de Radon con soporte en $\widetilde{E}$ tal que $\mu(B(x,r)) \leq r$ para toda $x \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Además como $\mu = \sum_{i\in I} a_i \mathcal{H}^1 \lfloor L_i$, entonces para $x \in L_i$ y $r = \delta/2$ se tiene que $a_i\delta/2 = \mu(B(x,\delta/2)) \leq \delta/2$. Por lo cual $a_i \leq 1$ para toda $i \in I$.
Ahora $\widetilde{E} = \bigcup_{i\in I} L_i$ es compacto. Luego para toda $\mu \in \Sigma_0(\widetilde{E})$ se tiene que

$$\frac{\|\mu\|^2}{\|\mu\| + c^2(\mu)} \leq \|\mu\| = \sum_{i\in I} a_i \mathcal{H}^1 \lfloor L_i \leq card(I)\frac{\delta}{2} < \infty \Rightarrow$$

$$\sup_{\mu\in\Sigma_0(\widetilde{E})} \frac{\|\mu\|^2}{\|\mu\| + c^2(\mu)} \leq card(I)\frac{\delta}{2} < \infty$$

Por lo cual ν existe.
Ahora suponga que ν es maximal y $\nu/2 \in \Sigma_0(\widetilde{E})$, entonces

$$\frac{\|\nu\|^2}{\|\nu\| + c^2(\nu)} \geq \frac{\|\nu\|^2/4}{\|\nu\|/2 + c^2(\nu)/8} \Rightarrow \frac{\|\nu\|}{2} + \frac{c^2(\nu)}{8} \geq \frac{\|\nu\|}{4} + \frac{c^2(\nu)}{4},$$

por lo tanto $c^2(\nu) \leq 2\|\nu\|$.
Por otro lado veamos que si $x \in \widetilde{E}$, entonces $U_\nu(x) \geq c_4$. Sea L_i tal que $x \in L_i$. Suponga que $M_R\nu(x) \leq 1/20$. Para cada $\lambda > 0$, definimos la medida $\nu_\lambda = \nu + \lambda\mathcal{H}^1\lfloor L_i$. Afirmamos que si λ es suficientemente pequeño, entonces

$$M_R\nu_\lambda(y) \leq 1 \quad \forall\, y \in \widetilde{E}.$$

En efecto, si $y \in L_i$, tomando en cuenta que $\nu = \sum_{i\in I} a_i\mathcal{H}^1\lfloor L_i$, entonces para todo $R > 0$:

$$\frac{\nu(B(y,R))}{R} = \frac{\sum_{i\in I} a_i\mathcal{H}^1\lfloor L_i(B(y,R))}{R} \leq \frac{\delta}{2}\frac{\sum_{i\in I} a_i}{R} \leq \frac{\delta card(I)}{2R}.$$

Por lo cual $M_R\nu(y) \leq 1/5$ para toda $y \in L_i$. Así que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeña $M_R\nu_\lambda(y) \leq 1/4$ para toda $y \in L_i$.
Ahora considere el caso cuando $y \in \widetilde{E} \setminus L_i$. Si $B(y,r) \cap L_i = \emptyset$, entonces $\nu_\lambda(B(y,r)) = \nu(B(y,r))$. De otra forma $B(y,r)$ contiene algún punto $y' \in L_i$ y por lo tanto $B(y,r) \subset B(y',2r)$. Luego por los análisis llevados a cabo arriba

$$\frac{\nu_\lambda(B(y,r))}{r} \leq \frac{\nu_\lambda(B(y',2r))}{r} \leq 2M_R\nu_\lambda(y') \leq \frac{1}{2}.$$

En cualquier caso, $M_R\nu_\lambda(y) \leq 1 \Rightarrow \nu_\lambda(B(y,R)) \leq R$ para toda $y \in \widetilde{E}$ y $R > 0$. Es decir $\nu_\lambda \in \Sigma_0(\widetilde{E})$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño.
Por la definición de ν, la función

$$f(\lambda) = \frac{||\nu_\lambda||^2}{||\nu_\lambda|| + c^2(\nu_\lambda)},$$

satisface que $f'(0) \leq 0$ pues f alcanza un máximo en $\lambda = 0$. Observe que $f(\lambda)$ es igual a

$$\frac{(||\nu|| + \lambda\delta/2)^2}{||\nu|| + \lambda\delta/2 + c^2(\nu) + 3\lambda c^2(\mathcal{H}^1\lfloor L_i, \nu, \nu) + 3\lambda^2 c^2(\nu, \mathcal{H}^1\lfloor L_i, \mathcal{H}^1\lfloor L_i)}.$$

Así que

$$f'(0) = \frac{||\nu||\delta(||\nu|| + c^2(\nu)) - ||\nu||^2(\delta/2 + 3c^2(\mathcal{H}^1\lfloor L_i, \nu, \nu))}{(||\nu|| + c^2(\nu))^2}.$$

Por lo que $f'(0) \leq 0$ si y sólo si

$$\delta(||\nu|| + c^2(\nu)) \leq ||\nu||(\delta/2 + 3c^2(\mathcal{H}^1\lfloor L_i, \nu, \nu)).$$

Es decir,

$$\frac{||\nu|| + 2c^2(\nu)}{||\nu||} \leq \frac{6c^2(\mathcal{H}^1\lfloor L_i, \nu, \nu)}{\delta}.$$

Por lo cual $c^2(\mathcal{H}^1\lfloor L_i, \nu, \nu)/\delta \geq 1/6$. Luego existe un $x' \in L_i$ tal que $c^2(x', \nu, \nu) \geq 1/3$ pues $\mathcal{H}^1\lfloor L_i(L_i) = \delta/2$. Por el Lema 3.7.8,

$$c_\nu^2(x) \geq \frac{9}{10}\left(\frac{1}{3} - c_3 M_R\nu(x)^2\right).$$

Si $c_3 M_R\nu(x) \geq 1/6$, entonces $c_\nu^2(x) \geq 3/20$.
Hemos probado que si $M_R\nu(x) \leq \text{mín}(1/29, 1/(6c_3)^{1/2})$, entonces $c_\nu^2(x) \geq 3/20$ se cumple y se sigue el lema.

Teorema 3.7.10. *Para $E \subset \mathbb{C}$ compacto, se tiene que*

$$\gamma_+(E) \approx \text{ínf}\{||\mu|| : \mu \in M^+(\mathbb{C}),\ U_\mu(x) \geq 1\ \forall\ x \in E\}.$$

Donde $\sigma = \text{ínf}\{||\mu|| : \mu \in M^+(\mathbb{C}),\ U_\mu(x) \geq 1\ \forall\ x \in E\}$, satisface supp$(\sigma) \subset E$.

Demostración.
Sea $\mu \in M^+(\mathbb{C})$ tal que $U_\mu(x) = M_R\mu(x) + c_\mu(x) \geq 1$ para toda $x \in E$. Dado que $E \subset \{x \in \mathbb{C} : U_\mu(x) \geq 1\} \subset \{x \in \mathbb{C} : U_\mu(x) > 1/2\}$, por el Teorema 3.7.7, se tiene que $\gamma_+(E) \leq 2c||\mu||$.
Falta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe una medida $\mu \in M^+(\mathbb{C})$ tal que $\gamma_+(E) \geq c||\mu|| - \varepsilon$, donde $c > 0$ es una constante absoluta con μ satisfaciendo $M_R\mu(x) + c_\mu(x) = U_\mu(x) \geq 1$ en E. Por la regularidad exterior de γ_+ en conjuntos compactos probada en la Proposición 3.3.1, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma_+(E) \geq \gamma_+(\mathcal{U}_{2\delta}(E)) - \varepsilon$, donde $\mathcal{U}_{2\delta}(E)$ es la 2δ-vecindad de E. Considere una rejilla de cuadrados de longitud $\delta > 0$ con lados paralelos a los ejes. Sea $\{Q_i\}_{i\in I}$ los cuadrados cerrados de la rejilla que intersectan a E (son un número finito de cuadrados pues E es compacto). Para cada $i \in I$, sea L_i

el segmento cerrado de longitud $\delta/2$ cuyo punto medio es el centro de Q_i y paralelo al eje x. Sea $\widetilde{E} = \bigcup_{i\in I} L_i$. Note que $\widetilde{E} \subset \mathcal{U}_{2\delta}(E)$, por lo tanto $\gamma_+(E) \geq \gamma_+(\widetilde{E}) - \varepsilon$. Sea $\nu \in \Sigma_0(\widetilde{E})$ la medida maximal del Lema 3.7.9 para el conjunto compacto $\widetilde{E}$. Dado que $c^2(\nu) \leq 2||\nu||$, entonces por el Teorema 3.6.1, $\gamma_+(\widetilde{E}) \geq c||\nu||$. Sabemos que $M_R\nu(x) + c_\nu(x) \geq c_4$ para toda $x \in \widetilde{E}$, con $c_4 > 0$. Vamos a demostrar que ésto también se cumple para $x \in E$, cambiando la constante c_4 por otra constante c_4' suficientemente pequeña. Claramente con ésto terminamos la prueba del teorema, pues basta tomar $\mu = \nu/c_4'$. Pues μ cumplirá $c\|\mu\| - \varepsilon \leq \gamma_+(E)$, luego tomando el límite cuando ε tiende a cero, obtendremos una medida σ que es el límite débil de las medidas ν que dependían de δ (donde $\delta \to 0$ si $\varepsilon \to 0$) y tales que $supp(\nu) \subset \mathcal{U}_{2\delta}(E)$, por lo cual $supp(\sigma) \subset E$.
Sea $x \in E$. Suponga que $M_R\nu(x) \leq c_5$, donde $c_5 > 0$ es una constante mucho más pequeña que c_4 que será fijada mas adelante. Sea Q_i un cuadrado de la rejilla tal que $x \in Q_i$. Por la definición de ν no es difícil ver que para $y \in L_i$, $M_R\nu(y) \leq 4c_5$. Por lo tanto para $y \in L_i$, $c_\nu(y) \geq c_4 - 4c_5 \geq c_4/2$, asumiendo que $c_5 \geq c_4/8$. Ahora por el Lema 3.7.8

$$c_\nu^2(x) \geq \frac{9}{10}\left(\frac{c_4^2}{4} - c_3 M_R\nu(x)^2\right) \geq \frac{9}{10}\left(\frac{c_4^2}{4} - c_3 c_5^2\right) \geq \frac{c_4^2}{16},$$

si c_5 se escoge suficientemente pequeña.

Corolario 3.7.11. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Entonces $\gamma_+(E) = 0$ si y sólo si existe alguna medida $\mu \in M^+(\mathbb{C})$ tal que $U_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$.*

Demostración.
Si existe alguna medida $\mu \in M^+(\mathbb{C})$ tal que $U_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$, como $E \subset \{x \in \mathbb{C} : U_\mu(x) > \lambda\}$ para toda $\lambda > 0$, entonces por el Teorema 3.7.7 se tiene que

$$\gamma_+(E) \leq \gamma_+\{x \in \mathbb{C} : U_\mu(x) > \lambda\} \leq c\frac{\|\mu\|}{\lambda},\ \forall\ \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_+(E) = 0.$$

Suponga que $\gamma_+(E) = 0$. Por el Teorema 3.7.10, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una medida $\mu_n \in M^+(\mathbb{C})$ con $\|\mu_n\| \leq 2^{-n}$ y tal que $M_R\mu_n(x) + c_{\mu_n}(x) \geq 1$ para toda $x \in E$. Si definimos $\mu = \sum_{n=1}^\infty n\mu_n$, entonces $\|\mu\| \leq \sum_{n=1}^\infty n2^{-n}$ y como $\lim_{n\to\infty}(n2^{-n})^{1/n} = 1/2 < 1$, entonces la serie converge y por lo tanto $\mu \in M^+(\mathbb{C})$. Además para cada n, $M_R\mu(x) + c_\mu(x) \geq n(M_R\mu_n(x) + c_{\mu_n}(x)) \geq n$ para toda $x \in E$, es decir $U_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$.

Cabe recalcar que la medida μ en la prueba del corolario anterior se puede construir de tal forma que satisfaga $U_\mu(y) < \infty$ para toda $y \in E^C$.

En el Ejemplo 2.2.5 inciso (c), vimos que para el conjunto de Cantor de cuartos de esquina E y la medida $\mu = \mathcal{H}^1\lfloor E$, $c^2_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$. Por el corolario anterior concluimos que $\gamma_+(E) = 0$ y una vez que hayamos probado que $\gamma_+ \approx \gamma$, podremos afirmar que $\gamma(E) = 0$.

Capítulo 4

La comparación entre γ y γ_+, y la semiaditividad de γ

En este capítulo demostraremos el resultado principal esta tesis, demostraremos la semiaditividad de la capacidad analítica. Para ello, primero vamos a demostrar la equivalencia entre γ y γ_+.

Teorema 4.0.1. *Existe una constante absoluta $c > 0$ tal que*

$$\gamma(E) \leq c\gamma_+(E)$$

para todo $E \subset \mathbb{C}$ compacto.
Como consecuencia

$$\gamma(E) \approx \gamma_+(E),$$

pues recuerde que en (3.1.1) *se probó que $\gamma_+(E) \leq \gamma(E)$.*

4.1. Demostración de $\gamma \approx \gamma_+$

Para la demostración del Teorema 4.0.1, que es un poco extensa, ocuparemos una serie de resultados que probaremos a continuación.

Proposición 4.1.1. *Sean $E \subset \mathbb{C}$ compacto con $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ y $f \in Ad(E)$ tal que $f(\infty) = 0$. entonces existe una medida compleja ν con soporte en E tal que $f(z) = \mathcal{C}\nu(z)$ para toda $z \notin E$. Más aún, esta medida satisface*

$$|\nu(B(z,r))| \leq r \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \text{ y } r > 0,$$

y se puede escribir como $\nu = b\mathcal{H}^1\lfloor E$, donde b es una función medible tal que $|b(z)| \leq 1$ para toda $z \in E$.

Demostración.
Debido a que $\mathcal{H}^1(E) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, podemos cubrir a E con una familia de conjuntos $A_{\varepsilon,i}$ con diámetro $diam(A_{\varepsilon,i}) < \varepsilon$ y tales que $\sum_i diam(A_{\varepsilon,i}) \leq \mathcal{H}^1(E) + \varepsilon$. También podemos reemplazar cada $A_{\varepsilon,i}$ por una bola abierta $B_{\varepsilon,i}$ centrada en $E \cap A_{\varepsilon,i}$ de radio $r_{\varepsilon,i} < \varepsilon$, y de ser necesario ligeramente más grande que $diam(A_{\varepsilon,i})$, para que $E \subset \bigcup_i B_{\varepsilon,i}$ y $\sum_i r_{\varepsilon,i} \leq \mathcal{H}^1(E) + 2\varepsilon$. Dado que E es compacto podemos asumir que esta es una familia finita. Considere la curva (o la familia de curvas) $\Gamma_\varepsilon = \partial(\bigcup_i B_{\varepsilon,i})$, orientada de tal manera que el índice de la curva alrededor de cada $z \in \bigcup_i B_{\varepsilon,i}$ sea 1. Como $f(\infty) = 0$ y f es holomorfa en ∞, entonces para $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_i B_{\varepsilon,i}$, tenemos que

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Tomemos la medida compleja

$$d\nu_\varepsilon(w) = -\frac{f(w)}{2\pi i} dw \lfloor \Gamma_\varepsilon,$$

luego $f(z) = \mathcal{C}\nu_\varepsilon(z)$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_i B_{\varepsilon,i}$.
Observe que

$$||\nu_\varepsilon|| \leq \int \frac{|f(w)|}{2\pi} d\big|w\lfloor\Gamma_\varepsilon\big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} dw \leq \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{\partial B_{\varepsilon,i}} dw = \sum_i r_{\varepsilon,i} \leq \mathcal{H}^1(E) + 2\varepsilon.$$

Por lo cual la familia de medidas $\{\nu_\delta\}_{0<\delta\leq\varepsilon}$ de soporte compacto está uniformemente acotada, luego existe una sucesión $\varepsilon_k \to 0$ tal que las medidas complejas ν_{ε_k} convergen en el sentido débil estrella a una medida compleja ν tal que $supp(\nu) \subset E$ y además

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{C}\nu_{\varepsilon_k}(z) = \lim_{k\to\infty} \int \frac{d\nu_{\varepsilon_k}(z)}{w - z} = \int \frac{d\nu(z)}{w - z} = \mathcal{C}\nu(z) \quad \forall\ z \notin E.$$

Los argumentos para probar que $|\nu(B(z,r))| \leq r$, para toda $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, son muy similares a los que usamos al principio de la demostración del Teorema 3.6.1 cuando μ es una medida positiva. En efecto, debido a que $\mathcal{H}^1(E) < \infty$, E no puede contener ningún abierto y como $|\mathcal{C}\nu(z)| = |f(z)| \leq 1$ para toda $z \notin E$, entonces $||\mathcal{C}\nu||_\infty \leq 1$. Procediendo como en (3.6.1), $\forall\ z \in \mathbb{C}$ por Fubini resulta que para casi todo $r > 0$:

$$\int \int_{|\xi - z| = r} \frac{1}{|\xi - w|} d\mathcal{H}^1(\xi) d|\nu|(w) < \infty.$$

Para tales r, por Fubini (procediendo como en (3.6.2)):

$$|\nu(B(z,r))| = \left| \int_{|\xi - z| = r} \mathcal{C}\nu(\xi) \frac{d\xi}{2\pi i} \right| \leq r. \tag{4.1.1}$$

Por aproximación la misma estimación se tiene para toda $r > 0$.

Para mostrar que $\nu = b\mathcal{H}^1\lfloor E$, donde b es una función tal que $|b(z)| \leq 1$ para toda $z \in E$, es suficiente mostrar que $|\nu(A)| \leq \mathcal{H}^1\lfloor E(A)$ para cualquier subconjunto medible $A \subset E$ pues esto nos dice que $|\nu| \ll \mathcal{H}^1\lfloor E$, por lo cual $\nu \ll \mathcal{H}^1\lfloor E$ y por el Teorema de Radon-Nikodym existe una función b medible tal que $b\mathcal{H}^1\lfloor E = \nu$ y entonces $b \cdot \mathcal{H}^1\lfloor E = \nu \leq |\nu| \leq \mathcal{H}^1\lfloor E \Rightarrow |b| \leq 1$.
Dado que ν y $\mathcal{H}^1\lfloor E$ son medidas de Radon, si mostramos que $|\nu(U)| \leq \mathcal{H}^1\lfloor E(U)$ para cualquier conjunto abierto U, habremos terminado. Para ésto, sea φ una función continua tal que $0 \leq \varphi \leq \chi_U$ y sea $\delta = dist(supp(\varphi), \mathbb{C} \setminus U) > 0$. Así, por la convergencia débil estrella tendremos que

$$\int \varphi d\nu = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_{\varepsilon_k}} \varphi f(w) dw$$

$$\Rightarrow \left| \int \varphi d\nu \right| \leq \frac{1}{2\pi} \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_{\varepsilon_k} \cap supp(\varphi)} dw \leq \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{\partial B_{\varepsilon_k, i} \cap supp(\varphi)} dw.$$

Por lo cual, si denotamos como I_k a la familia de aquellos indices i tales que $B_{\varepsilon_k,i} \cap supp(\varphi) \neq \emptyset$, se tiene que

$$\left| \int \varphi d\nu \right| \leq \sum_{i \in I_k} r_{\varepsilon_k,i} = \sum_i r_{\varepsilon_k,i} - \sum_{i \notin I_k} r_{\varepsilon_k,i} \leq \mathcal{H}^1(E) + 2\varepsilon_k - \sum_{i \notin I_k} r_{\varepsilon_k,i}.$$

Para tratar con la última suma, afirmamos que si $\varepsilon_k < \delta/2$, entonces $E \setminus U \subset \bigcup_{i \notin I_k} A_{\varepsilon_k,i}$. En efecto, si $x \in E \setminus U$, entonces existe una i tal que $x \in A_{\varepsilon_k,i} \setminus U \subset B_{\varepsilon_k,i} \setminus U$. Y dado que $diam(B_{\varepsilon_k,i}) = 2\varepsilon_k < \delta \Rightarrow B_{\varepsilon_k,i} \cap supp(\varphi) = \emptyset$, entonces $i \notin I_k$.
Así deducimos que $\mathcal{H}^1_{\varepsilon_k}(E \setminus U) \leq \sum_{i \notin I_k} r_{\varepsilon_k,i}$ y por lo tanto

$$\left| \int \varphi d\nu \right| \leq \mathcal{H}^1(E) - \mathcal{H}^1(E \setminus U) = \mathcal{H}^1(U \cap E).$$

Como esto pasa para cualquier función arbitraria φ tal que $0 \leq \varphi \leq \chi_U$, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $|\nu(U)| \leq \mathcal{H}^1\lfloor E(U)$.

En la proposición que acabamos de probar, la suposición de que E tiene longitud finita es esencial. De hecho, dado un conjunto arbitrario $E \subset \mathbb{C}$ compacto y f analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus E$, puede no existir una medida μ tal que $f = \mathcal{C}\mu$. Por otra parte, debido al Teorema 1.3.5, en el sentido de distribuciones, $f = \mathcal{C}(\pi^{-1}\overline{\partial} f)$, donde f está definida apropiadamente en E (poniendo $f = 0$ en E por ejemplo). Así que f siempre es la transformada de Cauchy de una distribución, llamemosle $\pi^{-1}\overline{\partial} f$.

Haremos uso del siguiente **lema de descomposición de Whitney**.

Lema 4.1.2. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es abierto y $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, entonces Ω se puede descomponer como $\Omega = \bigcup_{i \in I} Q_i$, donde Q_i con $i \in I$ son cubos diádicos cerrados con interiores disjuntos tales que para algunas constantes $R > 20$ y $D_0 \geq 1$, se tiene lo siguiente:*

(i) $10Q_i \subset \Omega$ *para cada* $i \in I$.

(ii) $RQ_i \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \neq \emptyset$ *para cada* $i \in I$.

(iii) *Para cada cubo Q_i hay a lo más D_0 cubos Q_j tales que $10Q_i \cap 10Q_j \neq \emptyset$. Además para dichos cubos Q_i, Q_j, se tiene que $l(Q_i) \approx l(Q_j)$, donde $l(Q)$ es la longitud de algún lado de Q.*

A los cubos Q_i de la descomposición anterior, se les llama ***cubos Whitney****.*

Demostración.
Véase [Tolsa] Lema 2.23.

Lema 4.1.3. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Entonces existe un conjunto abierto acotado Ω que contiene a E y una descomposición de Whitney $\Omega = \bigcup_{i \in J} Q_i$, donde los $\{Q_i\}_{i \in J}$ son cuadrados Whitney, con $\sum_{i \in J} \chi_{14Q_i} \leq c\chi_\Omega$, tales que:*

(a) $\gamma_+(\Omega) \approx \gamma_+(E)$.

(b) $\sum_{i \in J} \gamma_+(E \cap 2Q_i) \leq c\gamma_+(E)$.

(c) *Si $\gamma_+(E) \leq c_2 diam(E)$, con $c_2 > 0$ suficientemente pequeño, entonces*

$$diam(Q_i) \leq \frac{1}{10} diam(E) \quad \forall \ i \in J.$$

Las constantes en (a) y (b) son absolutas.

Note que la condición (a) implica que los cuadrados Q_i en el lema no son muy grandes y la condición (b) nos dice que no son muy pequeños. Es decir, que pertenecen a una escala intermedia. La construcción de estos cuadrados es uno de los pasos claves de la demostración del Teorema 4.0.1.

Demostración.
Por el Teorema 3.7.10 existe una medida $\sigma \in M^+(\mathbb{C})$ que satisface $\sigma(E) \approx \gamma_+(E)$ y $U_\sigma(x) \geq 1$ para toda $x \in E$. Sea λ una constante con $0 < \lambda \leq 1/100$ que será fijada más adelante. Sea $\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ el conjunto abierto $\Omega_\lambda := \{x \in \mathbb{C} : U_\sigma(x) > \lambda\}$.
Note que $E \subset \Omega_\lambda$ y por el Teorema 3.7.7 tenemos que

$$\gamma_+(\Omega_\lambda) \leq C\lambda^{-1}\sigma(E) \leq C\lambda^{-1}\gamma_+(E),$$

Obviamente $\gamma_+(E) \leq \gamma_+(\Omega_\lambda)$, pues $E \subset \Omega_\lambda$.
Sea $\Omega_\lambda = \bigcup_{i\in J} Q_i$ una descomposición de Whitney de Ω_λ, donde $\{Q_i\}_{i\in J}$ es la familia usual de cuadrados de Whitney con interiores disjuntos, que satisfacen $20Q_i \subset \Omega_\lambda$, $\rho Q_i \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega_\lambda) \neq \emptyset$ (donde $\rho > 0$ es una constante absoluta fija) y $\sum_{i\in J} \chi_{14Q_i} \leq c\chi_{\Omega_\lambda}$. Recuerde que en el Lema 4.1.2 habíamos descrito las propiedades que los cuadrados Whitney satisfacen. Note que ahora algunas de las constantes descritas en el Lema 4.1.2 son diferentes. Si reemplazamos los cuadrados descritos en el Lema 4.1.2 por sus hijos, obtenemos una nueva descomposición de Whitney con las constantes 14 y 20 que pedimos ahora.

Veamos que (b) se obtiene si λ se escoge suficientemente pequeña. Demostraremos más abajo que si $x \in E \cap 2Q_i \neq \emptyset$ para algún $i \in J$, entonces

$$U_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) = M_R\sigma\lfloor 4Q_i(x) + c^2_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x)^{1/2} > 1/4, \tag{4.1.2}$$

asumiendo que λ es suficientemente pequeña. Esto implica que $E \cap 2Q_i \subset \{x \in \mathbb{C} : U_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) > 1/4\}$, luego por el Teorema 3.7.7 tendremos que

$$\gamma_+(E \cap 2Q_i) \leq c\sigma(4Q_i).$$

Usando la superposición finita de los cuadrados $4Qi$, deducimos que

$$\sum_{i\in J} \gamma_+(E \cap 2Q_i) \leq c \sum_{i\in J} \sigma(4Q_i) \leq c\Sigma(E) \leq c\gamma_+(E),$$

y así se sigue el inciso (b).
Ahora vamos a demostrar que (4.1.2) se obtiene para $x \in E \cap 2Q_i$. Sea $z \in \rho Q_i \setminus \Omega$, luego $dist(z, Q_i) \approx dist(\partial\Omega, Q_i) \approx l(Q_i)$ (donde $l(Q_i)$ es la longitud del lado de Q_i). Dado que $z \notin \Omega$, por definición $M_R\sigma(z) \leq U_\sigma(z) \leq \lambda$, se sigue que para cualquier bola B con radio $r(B) \geq l(Q_i)/4$ y $B \cap 2Q_i \neq \emptyset$, se tiene que

$$\frac{\sigma(B)}{r(B)} \leq c_3\lambda \ll \frac{1}{1000}, \tag{4.1.3}$$

donde la constante c_3 depende de la descomposición de Whitney (en particular, de la constante ρ) y asumimos que λ es muy pequeña.
En efecto, sea $a_1 > 0$ tal que $a_1\lambda \ll \frac{1}{1000}$. Como $\frac{\sigma(B)}{r(B)} \leq \frac{|\sigma(\mathbb{C})|}{r(B)} < \infty$, existe $M > 0$ tal que para todo $r(B) \geq M$ se cumple que $\frac{\sigma(B)}{r(B)} \leq a_1\lambda \ll \frac{1}{1000}$.
Ahora para $l(Q_i)/4 \leq r(B) \leq M$, como $B \cap 2Q_i \neq \emptyset$, entonces $B \subset B(z, dist(z, Q_i) + diam(2Q_i) + r(B))$ y como $dist(z, Q_i) \approx l(Q_i) \approx diam(2Q_i) \approx M$ podemos concluir

que $B \subset B(z, a_2 l(Q_i))$, donde a_2 es una constante que depende de ρ pues $dist(z, Q_i)$ depende de ρ. Así

$$\frac{\sigma(B)}{r(B)} \leq \frac{4\sigma(B)}{l(Q_i)} \leq 4a_2 \frac{\sigma(B(z, a_2 l(Q_i)))}{a_2 l(Q_i)} \leq 4a_2 M_R\sigma(z) \leq 4a_2\lambda.$$

Por lo tanto, basta tomar λ suficientemente pequeña para que $4a_2\lambda \ll \frac{1}{1000}$ y $c_3 :=$ máx$(a_1, 4a_2)$.

Recuerde que $U_\sigma(x) = M_R\sigma(x) + c_\sigma^2(x)^{1/2} \geq 1$. Si $M_R\sigma(x) > 1/2$, entonces $\sigma(B(x,r))/r > 1/2$ para alguna $r < l(Q_i)/4$, pues las bolas centradas en x y de radio mayor que $l(Q_i)/4$ satisfacen (4.1.3). Puesto que, $x \in 2Q_i \cap E$ y $r < l(Q_i)/4 \Rightarrow B(x,r) \subset 4Q_i$, deducimos que $U_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) \geq M_R(\sigma\lfloor 4Q_i)(x) > 1/2 \Rightarrow U_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) > 1/4$. Asuma ahora que $M_R\sigma(x) \leq 1/2$, por lo cual $c_\sigma(x) := c_\sigma^2(x)^{1/2} > 1/2$. Descompongamos $c_\sigma^2(x) =: c^2(x, \sigma, \sigma)$ como sigue:

$$1/4 < c^2(x, \sigma, \sigma) = \int\int c(x,y,z)^2 d\sigma(z) d\sigma(y) =$$

$$c^2(x, \sigma\lfloor 4Q_i, \sigma\lfloor 4Q_i) + 2c^2(x, \sigma\lfloor 4Q_i, \sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 4Q_i) + c^2(x, \sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 4Q_i, \sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 4Q_i). \quad (4.1.4)$$

Queremos ver que $c_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) > 1/4$ para poder concluir que $U_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) > 1/4$.
Así que, es suficiente mostrar que los últimos dos términos en la descomposición de $c_\sigma^2(x)$ son suficientemente pequeños. Para el primer término, por la Proposición 2.2.2, tenemos que

$$c^2(x, \sigma\lfloor 4Q_i, \sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 4Q_i) \leq \int_{y\in 4Q_i}\int_{t\in\mathbb{C}\setminus 4Q_i} \frac{4}{|t-x|^2} d\sigma(t) d\sigma(y)$$

$$= 4\sigma(4Q_i)\int_{t\in\mathbb{C}\setminus 4Q_i} \frac{1}{|t-x|^2} d\sigma(t) \leq 4\sigma(4Q_i)\int_{|x-t|\geq \frac{l(Q_i)}{4}} \frac{1}{|t-x|^2} d\sigma(t).$$

Si dividimos el dominio de integració en anillos, debido a que σ es positiva y como $\sigma(B(x,r)) \leq c_3\lambda r$ para toda $r \geq l(Q_i)/4$, entonces

$$\int_{|x-t|\geq \frac{l(Q_i)}{4}} \frac{1}{|t-x|^2} d\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\frac{l(Q_i)}{4}\leq|x-t|\leq 2^{k+1}\frac{l(Q_i)}{4}} \frac{1}{|t-x|^2} d\sigma(t)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(B(x, 2^{k+1}\frac{l(Q_i)}{4}))}{2^{2k}(\frac{l(Q_i)}{4})^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_3\lambda 2^{k+1}(\frac{l(Q_i)}{4})}{2^{2k}(\frac{l(Q_i)}{4})^2} = \frac{c\lambda}{l(4Q_i)}.$$

Y ya que para R_0 suficientemente grande tal que $4Q_i \subset B(z, R_0)$ se tiene que

$$\frac{\sigma(4Q_i)}{l(4Q_i)} \leq \frac{\sigma(B(z,R_0))}{l(4Q_i)} = \frac{\sigma(B(z,R_0))}{CR_0} \leq \frac{1}{C} M_R\sigma(z) \leq c\lambda.$$

Por lo tanto

$$c^2(x, \sigma\lfloor 4Q_i, \sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 4Q_i) \leq c\lambda \frac{\sigma(4Q_i)}{l(4Q_i)} \leq c\lambda^2. \tag{4.1.5}$$

Ahora estimemos el otro término

$$c^2_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) = c^2(x, \sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 4Q_i, \sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 4Q_i) = c^2(x, \sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 2\rho Q_i, \sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 2\rho Q_i)$$

$$+2c^2(x, \sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 2\rho Q_i, \sigma\lfloor 2\rho Q_i \setminus 4Q_i) + c^2(x, \sigma\lfloor \sigma\lfloor 2\rho Q_i \setminus 4Q_i, \sigma\lfloor 2\rho Q_i \setminus 4Q_i).$$

Procediendo como en (4.1.5), se deduce que los últimos dos términos de la igualdad anterior son acotados por arriba, otra vez por $c\lambda^2$. Por lo cual de (4.1.4) y (4.1.5) concluimos que

$$c^2_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) \geq c^2_\sigma(x) - c^2_{\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i}(x) - c\lambda^2. \tag{4.1.6}$$

Aún nos queda por analizar el término $c^2_{\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i}(x)$. Puesto que $x, z \in \rho Q_i$ y $supp(\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i) \subset \mathbb{C} \setminus 2\rho Q_i$, por el Lema 3.7.3:

$$|c^2_{\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i}(x) - c^2_{\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i}(z)| \leq cM_R(\sigma\lfloor \mathbb{C} \setminus 2\rho Q_i)(z) \leq cM_R\sigma(z) \leq c\lambda.$$

Así,

$$c_{\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i}(z) \leq c_\sigma(z) \leq U_\sigma(z) \leq \lambda \;\Rightarrow\; c_{\sigma\lfloor \mathbb{C}\setminus 2\rho Q_i}(x) \leq (1+c)\lambda.$$

Luego como $c^2_\sigma(x) \geq 1/4$ y por (4.1.6), obtenemos

$$c^2_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) \geq \frac{1}{4} - c\lambda^2 \geq \frac{1}{16},$$

si λ es suficientemente pequeña. Es decir, hemos probado que $c_{\sigma\lfloor 4Q_i}(x) > 1/4$.

Ahora probaremos (c), es decir $diam(Q_i) \leq \frac{1}{10} diam(E)$.
Es inmediato ver

$$U_\sigma(x) \leq \frac{100\sigma(E)}{dist(x, E)} \qquad \forall\ x \notin E.$$

Pues como vimos en el Teorema 3.7.10, se cumple que $supp(\sigma) \subset E$, por lo cual

$$M_R\sigma(x) = \sup_{R>0} \frac{\sigma(B(x,R))}{R} \leq \sup_{R \geq dist(x,E)} \frac{\sigma(B(x,R))}{dist(x,E)} = \frac{\sigma(E)}{dist(x,E)},$$

y también, por la Proposición 2.2.2 ,

$$c^2_\sigma(x)^{1/2} = \left(\int\int c(x,y,z)^2 d\sigma(y) d\sigma(x) \right)^{1/2} \leq \left(\int\int \frac{1}{|x-z|^2} d\sigma(y) d\sigma(x) \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int\int \frac{1}{dist(x,E)^2} d\sigma(y) d\sigma(x) \right)^{1/2} = \frac{\sigma(E)}{dist(x,E)}.$$

Por lo tanto, para $x \in \Omega \setminus E$ tendremos

$$\lambda < U_\sigma(x) \leq \frac{100\sigma(E)}{dist(x,E)}.$$

Como $\sigma(E) \approx \gamma_+(E)$ y por hipótesis $\gamma_+(E) \leq c_2 diam(E)$, si tomamos la constante c_2 suficientemente pequeña, entonces

$$dist(x,E) \leq \frac{100}{\lambda}\sigma(E) \leq \frac{c}{\lambda}\gamma_+(E) \leq \frac{1}{20}diam(E) \Rightarrow \sup_{x\in\Omega\setminus E} dist(x,E) \leq \frac{1}{20}diam(E).$$

Como Ω es compacto, sea $x \in \Omega$ tal que

$$diam(\Omega) \leq 2dist(x,E) + diam(E) \leq \left(\frac{1}{10}+1\right)diam(E) = \frac{11}{10}diam(E).$$

Puesto que por construcción de los cubos Whitney $20Q_i \subset \Omega$ para cada $i \in I$, entonces

$$20diam(Q_i) \leq diam(\Omega) \leq \frac{11}{10}diam(E).$$

En el siguiente lema construiremos, para todo conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, dos medidas, μ (positiva) y ν (compleja) adecuadas para la aplicación de un Teorema Tb (Teorema 4.1.9). Estas medidas no tendrán soporte en E sino en un conjunto intermedio F hecho de algunos cuadrados del Lema anterior. Para la demostración ocuparemos el siguiente teorema que en particular se cumple para familias de cubos en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 4.1.4. *Sea $\mathcal{B}$ una familia de bolas abiertas o cerradas de un espacio métrico tal que* $\sup\{diam(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty$. *Entonces existe una subcolección finita o numerable de bolas $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ disjuntas a pares tales que $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i\in I} 5B_i$.*

Demostración.
Véase [Tolsa] Teorema 2.2.

Lema 4.1.5. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto con $\mathcal{H}^1(\partial E) < \infty$ y $\gamma(E) > 0$. Sea $\{Q_i\}_{i\in I}$ la subfamilia finita de los cuadrados intermedios Q_i, $i \in J$, definidos en el Lema 4.1.3 tales que $\gamma(E \cap 2Q_i) \neq 0$. Sea $F = \bigcup_{i\in I} Q_i$, así que $E \subset F$. Suponga que*

$$\frac{\gamma_+(E)}{\gamma(E)} \leq \frac{\gamma_+(E\cap 2Q_i)}{\gamma(E\cap 2Q_i)} \neq 0 \qquad \forall\, i \in I.$$

Entonces existe una medida positiva de Radon μ y una medida compleja ν, ambas con soporte en F, y un conjunto $H \subset F$, tales que:

(a) $c_a^{-1}\gamma(E) \leq \mu(F) \leq c_a\gamma(E)$.

(b) $\nu = b\mu$, *con* b *una funión tal que* $\|b\|_{L^\infty(\mu)} \leq c_b$.

(c) $|\nu(F)| = \gamma(E)$.

(d) $\int_{F\setminus H} \mathcal{C}_*\nu d\mu \leq c_d\mu(F)$.

(e) Si $\mu(B(x,r)) > c_0 r$ *(para alguna constante grande* c_0*), entonces* $B(x,r) \subset H$. *En particular,* $\mu(B(x,r)) \leq c_0 r$ *para toda* $x \in F \setminus H$ *y toda* $r > 0$.

(f) El conjunto H *es de la forma* $H = \bigcup_{k\in I_H} B(x_k, r_k)$, *con*

$$\sum_{k\in I_H} r_k \leq 5c_0^{-1}\mu(F) =: \varepsilon\mu(F).$$

(g) Todos los cuadrados $Q \subset \mathbb{C}$ *satisfacen*

$$|\nu(Q)| \leq c_g l(Q).$$

Las constantes c_a, c_b, c_d *y* c_g *son absolutas, mientras que* c_0 *puede ser escogida arbitrariamente grande y por lo tanto* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño. Cabe mencionar que la constante* c_b *no depende de la función* b *y que el conjunto* H *depende de la elección de la constante* c_0.

Demostración.
Demostraciones (a), (b) y (c). Usando las particiones de la unidad, sabemos que existe $\{g_i\}_{i\in J}$ una familia de funciones C^∞ tales que para cada $i \in J$, $supp(g_i) \subset 2Q_i$, $0 \leq g_i \leq 1$ y $\|g_i\|_\infty \leq c/l(Q_i)$; así que $\sum_{i\in J} g_i = 1$ en Ω, donde $\Omega = \bigcup_{i\in J} Q_i$ es el conjunto abierto construido en el Lema 4.1.3

Sea $f(z)$ la función de Ahlfors de E, con $f(z) = 0$ si $z \in E$. Debido a la Proposición 4.1.1, existe una medida compleja ν_0 con $supp(\nu_0) \subset \partial E$ tal que $\mathcal{C}\nu_0 = f(z)$ para $z \notin \partial E$. Y como $\mathcal{H}^1(\partial E) < \infty \Rightarrow \mathcal{L}^2(\partial E) = 0$, podemos deducir que $\|\mathcal{C}\nu_0\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$. Más aún, por la Proposición 1.3.2 y la definición de f se tiene que

$$|\nu_0(E)| = |\nu_0(\partial E)| = |\nu_0(\mathbb{C})| = |(\mathcal{C}\nu_0)'(\infty)| = |f'(\infty)| = \gamma(E).$$

Ahora definamos μ. Para cada $i \in I$, sea Γ_i una circunferencia con el mismo centro que Q_i y de radio $\gamma(E \cap 2Q_i)/10$. Observe que, por la Proposición 1.1.9 tenemos

$$\gamma(E \cap 2Q_i) \leq \gamma(2Q_i) \leq diam(2Q_i) = 2diam(Q_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma(E \cap 2Q_i)}{10} \leq \frac{4}{10} diam\left(\frac{Q_i}{2}\right) \leq diam\left(\frac{Q_i}{2}\right).$$

Por lo tanto $\Gamma_i \subset \frac{1}{2}Q_i$. Así definimos

$$\mu := \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma_i.$$

Y también

$$\nu := \sum_{i \in I} \frac{1}{\mathcal{H}^1(\Gamma_i)} \int g_i d\nu_0 \cdot \mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma_i.$$

Note que $supp(\nu) \subset \bigcup_{i \in I} \Gamma_i = supp(\mu) \subset F$.

Tenemos que $d\nu = b d\mu$, con $b = \dfrac{\int g_i d\nu_0}{\mathcal{H}^1(\Gamma_i)}$ en Γ_i. Para estimar $\|b\|_{L^\infty(\mu)}$ veamos que, para cada $i \in J$,

$$|\mathcal{C}(g_i\nu_0)(z)| \leq c \qquad \forall\ z \notin E \cap 2Q_i. \tag{4.1.7}$$

En efecto, recuerde que por (1.3.4), $\mathcal{C}(g_i\nu_0) = V_{g_i}(\mathcal{C}\nu_0)$ (donde V_{g_i} es el operador de localización de Vitushkin) y entonces la desigualdad (4.1.7) se sigue por la Proposición 1.3.10 inciso (i).
La desigualdad (4.1.7) implica que $c^{-1}\mathcal{C}(g_i\nu_0) \in Ad(E \cap 2Q_i)$. Luego por la Proposición 1.3.6 se tiene que

$$\left| \int g_i d\nu_0 \right| = |\langle \nu_0, g_i \rangle| = |(\mathcal{C}(g_i\nu_0))'(\infty)| \leq c\gamma(E \cap 2Q_i) = c\mathcal{H}^1(\Gamma_i) \ \Rightarrow\ \frac{\left|\int g_i d\nu_0\right|}{\mathcal{H}^1(\Gamma_i)} \leq c. \tag{4.1.8}$$

Por lo cual $\|b\|_{L^\infty(\mu)} \leq c$ y se ha probado (b).

Por otro lado, como $\left|\int g_i d\nu_0\right| \leq c\gamma(E \cap 2Q_i)$ deducimos que $\int g_i d\nu_0 = 0$ si $i \in J \setminus I$. Y dado que $\sum_{i \in J} g_i = 1$ en Ω y $F = \bigcup_{i \in I} Q_i$, donde los Q_i tienen interiores disjuntos, entonces

$$\gamma(E) = |\nu_0(E)| = \left| \sum_{i \in I} \int g_i d\nu_0 \right| = \left| \sum_{i \in I} \nu(Q_i) \right| = |\nu(F)|,$$

lo que demuestra (c).

Resta demostrar (a). Por (4.1.8), la suposición de $\frac{\gamma_+(E)}{\gamma(E)} \leq \frac{\gamma_+(E \cap 2Q_i)}{\gamma(E \cap 2Q_i)} \neq 0\ \forall\ i \in I$ y por la propiedad (b) del Lema 4.1.3, obtenemos lo siguiente:

$$\gamma(E) = |\nu_0(E)| = \left| \sum_{i \in I} \int g_i d\nu_0 \right| \leq \sum_{i \in I} \left| \int g_i d\nu_0 \right| \leq c \sum_{i \in I} \gamma(E \cap 2Q_i) = c\mu(F)$$

$$\leq c \frac{\gamma(E)}{\gamma_+(E)} \sum_{i \in I} \gamma_+(E \cap 2Q_i) \leq c c_1 \gamma(E),$$

donde c_1 es la constante del Lema 4.1.3. Note que $\gamma_+(E) \neq 0$ ya que $\gamma_+(E \cap 2Q_i) \neq 0$. Al tomar $c_a = \text{máx}(c, c_1)$ obtenemos (a).

Sea $c_0 \geq 100c_a$ una constante fija. Dados $x \in F$ y $r > 0$, decimos que $B(x,r)$ es un **disco no-Ahlfors** si $\mu(B(x,r)) > c_0 r$. Para un $x \in F$ fijo, si existe algún radio $r > 0$ tal que $B(x,r)$ es un disco no-Ahlfors, entonces decimos que x es un **punto no Ahlfors**. Para cualquier $x \in F$, escribimos

$$\mathcal{R}(x) := \sup\{r > 0 : B(x,r) \text{ es un disco no-Ahlfors}\}.$$

Si $x \in F$ es un punto Ahlfors, ponemos $\mathcal{R}(x) = 0$. Y decimos que $\mathcal{R}(x)$ es el **radio Ahlfors** de x.

Observe que por el inciso (a) y la Proposición 1.1.9, se tiene que

$$\mu(F) \leq c_a \gamma(E) \leq c_a \gamma(F) \leq c_a diam(F),$$

por lo cual

$$\mu(B(x,r)) \leq \mu(F) \leq c_a diam(F) \leq 100 c_a r \leq c_0 r$$

para $r \geq diam(F)/100$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(x) \leq diam(F)/100$ para toda $x \in F$.

Considere ahora el conjunto formado por discos no-Ahlfors

$$H_0 = \bigcup_{x \in F, \mathcal{R}(x) > 0} B(x, \mathcal{R}(x)).$$

Como $\mathcal{R}(x) \leq diam(F)/100$, por el Teorema 4.1.4 existe una familia disjunta de bolas $\{B(x_h, \mathcal{R}(x_h))\}_h$ tal que $H_0 \subset \bigcup_h B(x_h, 5\mathcal{R}(x_h))$. Así definimos

$$H = \bigcup_h B(x_h, 5\mathcal{R}(x_h)).$$

Como para toda $x_h \in F$ se tiene que: $5\mathcal{R}(x_h) \leq 5diam(F)/100 < diam(F)$, entonces $B(x_h, \mathcal{R}(x_h)) \subset F$ y por lo tanto $H \subset F$.
Dado que $H_0 \subset H$, todos los discos no-Ahlfors están contenidos en H. Por lo cual, si $B(x,r)$ es un disco no-Ahlfors, es decir $\mu(B(x,r)) > c_0 r$, entonces $B(x,r) \subset H$.
Por otro lado si $x \in F \setminus H$, entonces $\mathcal{R}(x) = 0$, es decir x es un punto Ahlfors por lo cual $\mu(B(x,r)) \leq c_0 r$ para toda $r > 0$. Así hemos probado el inciso (e).

Puesto que $\mu(B(x_h, \mathcal{R}(x_h))) \geq c_0 \mathcal{R}(x_h)$ para toda h, entonces

$$\sum_h \mathcal{R}(x_h) \leq \frac{1}{c_0} \sum_h \mu(B(x_h, \mathcal{R}(x_h))) = \frac{1}{c_0}\mu(H) \leq \frac{1}{c_0}\mu(F),$$

lo que implica (f).

Ahora probemos (d), es decir $\int_{F\setminus H} \mathcal{C}_*\nu d\mu \leq c_d\mu(F)$. Para esto usaremos los operadores suavizados $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ que definimos en el Lema 3.2.2. Así que considere una función C^∞ radial no negativa ψ con soporte en $B(0,1)$ con norma $L^1(\mathbb{C})$ igual a 1, y sea $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$ el operador asociado al kernel $\frac{1}{z} * \psi_\varepsilon$. También escribimos $\widetilde{\mathcal{C}}_*\nu(x) = \sup_{\varepsilon>0} |\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu(x)|$.

Recuerde que por definición $|\mathcal{C}\nu_0(z)| \leq 1$ para toda $z \notin \partial E$. Dado que $\mathcal{L}^2(E) = 0$, ésto es cierto $\mathcal{L}^2$-c.t.p. $z \in \mathbb{C}$. Así tenemos que

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu_0||_{L^\infty} = ||\psi_\varepsilon * \mathcal{C}\nu_0||_{L^\infty} \leq ||\mathcal{C}\nu_0||_{L^\infty} \leq 1. \tag{4.1.9}$$

Por el Lema 3.2.2 sabemos que $\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu_0$ es continua en $\mathbb{C}$, de ahí se deduce que $|\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\nu_0(z)| \leq 1$ y $\widetilde{\mathcal{C}}_*\nu_0(z) \leq 1$ para toda $z \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$.

Para estimar $\widetilde{\mathcal{C}}_*\nu$, estudiaremos a la función $\widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu - \nu_0)$. Para ello probaremos las siguientes estimaciones, donde definimos $\nu_i := \nu\lfloor Q_i$:

$$\widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0)(z) \leq c \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus supp(\nu_i - g_i\nu_0) \tag{4.1.10}$$

y también

$$\widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0)(z) \leq \frac{c \cdot l(Q_i)\mu(Q_i)}{dist(z, 2Q_i)^2} \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus 14Q_i. \tag{4.1.11}$$

Sea $\alpha_i := \nu_i - g_i\nu_0$. Probemos la primera estimación. Ya vimos en (4.1.7) que $|\mathcal{C}(g_i\nu_0)(z)| \lesssim 1$ para $z \notin supp(g_i\nu_0)$. Y también $|\mathcal{C}(\nu_i)(z)| \lesssim 1$ para $z \notin \Gamma_i$, pues

$$\nu_i = \nu\lfloor Q_i = \frac{1}{\mathcal{H}^1(\Gamma_i)} \int g_i d\nu_0 \cdot \mathcal{H}^1\lfloor\Gamma_i,$$

donde por (4.1.7) $\frac{1}{\mathcal{H}^1(\Gamma_i)} \int g_i d\nu_0 \lesssim 1$. Por lo tanto

$$|\mathcal{C}\alpha_i(z)| \leq |\mathcal{C}(g_i\nu_0)(z)| + |\mathcal{C}(\nu_i)(z)| \lesssim 1$$

para $z \notin supp(\alpha_i) \subset \Gamma_i \cup (2Q_i \cap \partial E)$. En particular $|\mathcal{C}\alpha_i(z)| \lesssim 1$ para $\mathcal{L}^2$-c.t.p. $z \in \mathbb{C}$, es decir

$$||\mathcal{C}\alpha_i||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq c. \tag{4.1.12}$$

Por lo cual, para todo $\varepsilon > 0$,

$$||\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\alpha_i||_{L^\infty} = ||\psi_\varepsilon * \mathcal{C}\alpha_i||_{L^\infty} \leq ||\mathcal{C}\alpha_i||_{L^\infty} \lesssim 1,$$

lo que prueba (4.1.10).

Para la segunda estimación, hay que demostrar para toda $z \in \mathbb{C} \setminus 14Q_i$,

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon\alpha_i(z)| \leq \frac{c \cdot l(Q_i)\mu(Q_i)}{dist(z, 2Q_i)^2} \quad \forall\ \varepsilon > 0. \tag{4.1.13}$$

Note que

$$supp(\alpha_i) \subset \Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i) \subset 2Q_i \Rightarrow diam(supp(\alpha_i)) \leq diam(2Q_i) = 2\sqrt{2}l(Q_i).$$

Y además por la definición de ν y de ν_i

$$\alpha_i(\mathbb{C}) = \alpha_i(2Q_i) = \int (d\nu_i - g_i d\nu_0) = \frac{1}{\mathcal{H}^1(\Gamma_i)} \int g_i d\nu_0 \cdot \mathcal{H}^1(\Gamma_i) - \int g_i d\nu_0 = 0. \quad (4.1.14)$$

Asuma primero que $\varepsilon \leq dist(z, 2Q_i)/2$. Como $|\mathcal{C}\alpha_i(w)| \leq c$ para toda $w \notin supp(\alpha_i)$ implica que $c^{-1}\mathcal{C}\alpha_i \in Ad(supp(\alpha_i))$, $\mathcal{C}\alpha_i(\infty) = 0$ y $(\mathcal{C}\alpha_i)'(\infty) = -\alpha_i(\mathbb{C}) = 0$, entonces por el Lema 1.2.5

$$|\mathcal{C}\alpha_i(w)| \leq \frac{c \cdot diam(supp(\alpha_i))\gamma(supp(\alpha_i))}{dist(w, supp(\alpha_i))^2} \quad si \ dist(w, supp(\alpha_i)) \geq \frac{3}{2} diam(supp(\alpha_i)).$$

Y debido a que, si $dist(w, 2Q_i) \geq 5l(Q_i)$, entonces

$$dist(w, supp(\alpha_i)) \geq dist(w, 2Q_i) \geq 5l(Q_i) = \frac{5diam(2Q_i)}{2\sqrt{2}} \geq \frac{5diam(\alpha_i)}{2\sqrt{2}} > \frac{3}{2}diam(\alpha_i).$$

Es decir

$$|\mathcal{C}\alpha_i(w)| \leq \frac{c \cdot diam(supp(\alpha_i))\gamma(supp(\alpha_i))}{dist(w, supp(\alpha_i))^2} \quad si \ dist(w, 2Q_i) \geq 5l(Q_i).$$

Por lo cual,

$$|\mathcal{C}\alpha_i(w)| \leq \frac{c \cdot l(Q_i)\gamma(\Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i))}{dist(w, 2Q_i)^2} \quad si \ dist(w, 2Q_i) \geq 5l(Q_i). \quad (4.1.15)$$

Sea B_{Q_i} la bola concentrica con Q_i y de radio $\gamma(E) \cap 2Q_i)/10$ cuya circunferencia es Γ_i, luego por la Proposición 1.1.4 inciso (c), $\gamma(\Gamma_i) = \gamma(B_{Q_i})$. Así por la Proposición 1.3.12 inciso (a) tenemos que

$$\gamma(\Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)) \leq \gamma(B_{Q_i} \cup (E \cap 2Q_i)) \leq c(\gamma(B_{Q_i}) + \gamma(E \cap 2Q_i)) = c(\gamma(\Gamma_i) + \gamma(E \cap 2Q_i)).$$

Debido a la Proposición 1.1.8, $\gamma(\Gamma_i) = \gamma(E \cap 2Q_i)/10$, entonces

$$\gamma(\Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)) \leq c\gamma(E \cap 2Q_i).$$

Como $\Gamma_i \subset \frac{1}{2}Q_i$ y por la definición de μ se tiene que

$$\gamma(\Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)) \leq c\gamma(E \cap 2Q_i) = c\mathcal{H}^1(\Gamma_i) = c\mu(Q_i). \quad (4.1.16)$$

Si $w \in B(z, \varepsilon)$ (donde $\varepsilon \leq dist(z, 2Q_i)/2$) con $z \in \mathbb{C} \setminus 14Q_i$, entonces

$$dist(w, 2Q_i) \geq dist(z, 2Q_i) - \varepsilon \geq \frac{dist(z, 2Q_i)}{2} \geq \frac{12l(Q_i)}{2} > 5l(Q_i)$$

y también

$$dist(z, 2Q_i) \leq dist(w, 2Q_i) + \varepsilon \leq \frac{3}{2} dist(z, 2Q_i).$$

Luego por (4.1.15) y 4.1.16

$$|\mathcal{C}\alpha_i(w)| \leq \frac{c \cdot l(Q_i)\mu(Q_i)}{dist(z, 2Q_i)^2}.$$

Haciendo la convolución con ψ_ε, (4.1.13) se sigue para cuando $\varepsilon \leq dist(z, 2Q_i)/2$. Solamente tenemos que verificar el caso cuando $\varepsilon > dist(z, 2Q_i)/2$. Suponga ahora que este es el caso. Sea $h = \psi_\varepsilon * \alpha_i$, así que

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \alpha_i = \psi_\varepsilon * \frac{-1}{z} * \alpha_i = \mathcal{C}(h\mathcal{L}^2).$$

Por lo cual,

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon \alpha_i(z)| \leq \int \frac{|h(\xi)|}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(\xi) \leq c\|h\|_\infty \int_{supp(h)} \frac{1}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(\xi).$$

Ahora hay que estimar $\|h\|_\infty$ y $\int_{supp(h)} \frac{1}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(\xi)$. Observe que, si denotamos $l_i := l(Q_i)$ y a z_i como el centro de Q_i, tenemos que

$$supp(h) \subset supp(\psi_\varepsilon) + supp(\alpha_i) \subset B(0, \varepsilon) + B(z_i, 2l_i) = B(z_i, \varepsilon + 2l_i).$$

Y como $\varepsilon > dist(z, 2Q_i)/2 > 12l_i/2 = 6l_i \Rightarrow \varepsilon \geq l_i$, entonces

$$supp(h) \subset B(z_i, \varepsilon + 2l_i) \subset B(z, \varepsilon + 2l_i + 2dist(z, 2Q_i)) \subset B(z, 5\varepsilon + 2l_i) \subset B(z, 7\varepsilon).$$

Por lo cual,

$$\int_{supp(h)} \frac{1}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(\xi) \leq c\varepsilon,$$

pues por [Conway] Lema 13.2.6 , sabemos que $\int_{supp(h)} \frac{1}{|\xi - z|} d\mathcal{L}^2(\xi) \leq 2\pi(7\varepsilon)$.
Ahora tratemos con $\|h\|_\infty$. Sea η_i una función C^∞ con soporte en $3Q_i$ y que es igual a 1 en $2Q_i$ y tal que $\|\nabla \eta_i\| \leq c/l_i$. Tomando en cuenta que por (4.1.14), $\alpha_i(2Q_i) = 0$, entonces

$$h(w) = \int \psi_\varepsilon(\xi - w) d\alpha_i(\xi) = \int (\psi_\varepsilon(\xi - w) - \psi_\varepsilon(z_i - w)) d\alpha_i(\xi)$$

$$= \frac{l_i}{\varepsilon^3} \int \frac{\varepsilon^3}{l_i} (\psi_\varepsilon(\xi - w) - \psi_\varepsilon(z_i - w)) \eta_i(\xi) d\alpha_i(\xi) =: \frac{l_i}{\varepsilon^3} \int \varphi_w(\xi) \eta_i(\xi) d\alpha_i(\xi).$$

Más abajo probaremos que

$$||\mathcal{C}(\varphi_w \eta_i \alpha_i)||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq c \tag{4.1.17}$$

Por ahora supongamos que esta estimación es cierta. Dado que $\mathcal{C}(\varphi_w \eta_i \alpha_i)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus supp(\alpha_i)$ y $supp(\alpha_i) \subset \Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)$, podemos proceder de igual manera a como se hizo en (4.1.7) y en (4.1.8) con $\mathcal{C}(\varphi_w \eta_i \alpha_i)$ en lugar de $\mathcal{C} g_i \nu_0$ y obtener

$$\left| \int \varphi_w(\xi)\eta_i(\xi) d\alpha_i(\xi) \right| \leq c\gamma(\Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)).$$

Tomando en cuenta (4.1.16), tenemos que

$$\left| \frac{l_i}{\varepsilon^3} \int \varphi_w(\xi)\eta_i(\xi) d\alpha_i(\xi) \right| \leq \frac{c\ l_i}{\varepsilon^3} \gamma(\Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)) \leq \frac{c\ l_i \mu(Q_i)}{\varepsilon^3}$$

$$\Rightarrow ||h||_\infty \leq \frac{c\ l_i \mu(Q_i)}{\varepsilon^3}.$$

De las estimaciones anteriores podemos concluir que

$$|\widetilde{\mathcal{C}_\varepsilon} \alpha_i(z)| \leq \frac{c\ l(Q_i)\mu(Q_i)}{\varepsilon^2} \leq \frac{c\ l(Q_i)\mu(Q_i)}{dist(z, 2Q_i)^2}.$$

Resta probar (4.1.17). Como ya mencionamos arriba, argumentando como en (4.1.7) tenemos que $\mathcal{C}(\varphi_w \eta_i \alpha_i) = V_{\varphi_w \eta_i}(\mathcal{C}\alpha_i)$. Ya vimos en (4.1.12) que $\mathcal{C}\alpha_i$ es una función acotada. Como $supp(\varphi_w \eta_i) \subset 3Q_i$ (pues $supp(\eta_i) \subset 3Q_i$), por la Proposición 1.3.10 inciso (i) es suficiente demostrar $||\varphi_w \eta_i||_\infty \leq c$ y $||\nabla(\varphi_w \eta_i)||_\infty \leq c/l_i$.
Para $\xi \in 3Q_i$, como z_i es el centro del cuadrado Q_i, entonces

$$|\xi - z_i| \leq diam(3Q_i) = \sqrt{2}(3l_i) \Rightarrow \frac{1}{l_i} \leq \frac{c}{|\xi - z_i|}.$$

Y como $\psi_\varepsilon \in C^\infty$ es de soporte compacto, tenemos que

$$|\varphi_w(\xi)| = \frac{\varepsilon^3}{l_i} |\psi_\varepsilon(\xi - w) - \psi_\varepsilon(z_i - w)| \leq \varepsilon^3 c \frac{|\psi_\varepsilon(\xi - w) - \psi_\varepsilon(z_i - w)|}{|\xi - z_i|} \leq \varepsilon^3 c ||\nabla \psi_\varepsilon||_\infty \leq c.$$

Dado que $supp(\eta_i) \subset 3Q_i$ y $\eta_i \in C^\infty$, por la parte de arriba podemos concluir que $||\varphi_w \eta_i||_\infty \leq c$.
Finalmente, aplicando la regla de la cadena y usando que $\varphi_w(\xi) = \psi_\varepsilon(\xi - w) - c$, tenemos que

$$||\nabla(\varphi_w \eta_i)||_\infty \leq c||\nabla \varphi_w||_\infty + ||\varphi_w \chi_{3Q_i}||_\infty ||\nabla \eta_i||_\infty = c||\nabla \psi_\varepsilon||_\infty + ||\varphi_w \chi_{3Q_i}||_\infty ||\nabla \eta_i||_\infty;$$

y como ya vimos que φ_w es acotada y que por definición $||\nabla \eta_i||_\infty \leq c/l_i$, entonces

$$||\nabla(\varphi_w \eta_i)||_\infty \leq c||\nabla \psi_\varepsilon||_\infty + ||\varphi_w \chi_{3Q_i}||_\infty ||\nabla \eta_i||_\infty \leq \frac{c}{l_i}.$$

Ahora estamos listos para probar el inciso (d), es decir es decir

$$\int_{F\setminus H} \mathcal{C}_*\nu d\mu \leq c_d\mu(F).$$

Como ya vimos que por (4.1.9) se deduce que $\widetilde{\mathcal{C}}_*\nu_0(z) \leq 1$ para toda $z \in \mathbb{C}$, y ya que $0 \leq g_i \leq 1$, se tiene que

$$\int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*\nu d\mu \leq \int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*\nu_0 d\mu + \int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu-\nu_0) d\mu \leq \mu(F\setminus H) + \sum_{i\in I}\int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0) d\mu. \tag{4.1.18}$$

Recuerde que por (4.1.10) tenemos $\widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0)(z) \leq c$ para toda $z \in \mathbb{C}\setminus supp(\nu_i - g_i\nu_0)$ donde $supp(\nu_i - g_i\nu_0) \subset \Gamma_i \cup (E \cap 2Q_i)$, por lo tanto $\widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0)(z) \leq c$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{i\in I}\Gamma_i \cup (E\cap 2Q_i)\right)$.
Y como $\mu = \sum_{i\in I}\mathcal{H}^1\lfloor\Gamma_i$, entonces $\mu\left(\mathbb{C}\setminus\left(\bigcup_{i\in I}\Gamma_i \cup (E\cap 2Q_i)\right)\right) = 0$. Por lo cual, $||\widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0)(z)||_{L^\infty(\mu)} \leq c$.
Para estimar la última integral usamos (4.1.11) y la parte de arriba:

$$\int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i\nu_0) d\mu \leq c\mu(14Q_i) + \int_{F\setminus(14Q_i\cup H)} \frac{c\ l(Q_i)\mu(Q_i)}{dist(z,2Q_i)^2} d\mu(z). \tag{4.1.19}$$

Sea $N \geq 1$ el entero más pequeño tal que $(14^{N+1}Q_i \setminus 14^N Q_i)\setminus H \neq \emptyset$, y tomemos algún $z_0 \in (14^{N+1}Q_i \setminus 14^N Q_i)\setminus H$ fijo. Luego como $supp(\mu) \subset F = \bigcup_{i\in I} Q_i$ y los Q_i tienen interiores disjuntos,

$$\int_{F\setminus(14Q_i\cup H)} \frac{1}{dist(z,2Q_i)^2} d\mu(z) = \sum_{k=N}^{\infty}\int_{(14^{k+1}Q_i\setminus 14^k Q_i)\setminus H} \frac{1}{dist(z,2Q_i)^2} d\mu(z).$$

Dado que para todo $z \in (14^{k+1}Q_i \setminus 14^k Q_i)\setminus H$, se tiene que

$$dist(z,2Q_i) \geq \frac{l(14^k Q_i)}{2} - \frac{l(2Q_i)}{2} \geq \frac{l(14^k Q_i)}{2} - \frac{l(14Q_i)}{2}$$

implica que

$$2dist(z,2Q_i) \geq (14^k - 14)\frac{14^{k+1}}{14^{k+1}} l(Q_i) = \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{14^k}\right) l(14^{k+1}Q_i)$$

$$\geq \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{14^N}\right) l(14^{k+1}Q_i)$$

lo cual también implica que

$$\frac{1}{dist(z,2Q_i)^2} \leq \frac{c}{l(14^{k+1}Q_i)^2}.$$

Luego

$$\sum_{k=N}^{\infty} \int_{(14^{k+1}Q_i \setminus 14^k Q_i)\setminus H} \frac{1}{dist(z, 2Q_i)^2} d\mu(z) \leq c \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\mu(14^{k+1}Q_i)}{l(14^{k+1}Q_i)^2}$$

$$\leq c \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\mu(B(z_0, 2l(14^{k+1}Q_i)))}{l(14^{k+1}Q_i)^2},$$

y como $z_0 \in F \setminus H \Rightarrow \mu(B(z_0, r)) \leq c_0 r$ para toda $r > 0$, entonces

$$c \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\mu(B(z_0, 2l(14^{k+1}Q_i)))}{l(14^{k+1}Q_i)^2} \leq c \sum_{k=N}^{\infty} \frac{c_0 l(14^{k+1}Q_i)}{l(14^{k+1}Q_i)^2} = \frac{cc_0}{l(14^N Q_i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{14^k}$$

$$\leq \frac{cc_0}{l(14^N Q_i)} \leq \frac{cc_0}{l(Q_i)}.$$

Así por (4.1.19) obtenemos que

$$\int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i \nu_0) d\mu \leq c\mu(14Q_i).$$

Debido a la intersección finita de los cuadrados $14Q_i$ con $i \in I$, y a (4.1.18) tenemos

$$\int_{F\setminus H} \widetilde{\mathcal{C}}_*(\nu_i - g_i \nu_0) d\mu \leq \mu(F \setminus H) + c \sum_{i\in I} \mu(14Q_i) \leq c\mu(F). \tag{4.1.20}$$

Por el Lema 3.2.2 y la definición de $\widetilde{\mathcal{C}}_*$ se tiene que

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_* \nu(z) - \mathcal{C}_* \nu(z)| \leq c M_R \nu(z). \tag{4.1.21}$$

Si $z \in F \setminus H$, por el inciso (b) tenemos que $M_R \nu(z) \leq c_b M_R \mu(z) \leq c_b c_0$. Por lo cual, (4.1.20) y (4.1.21) implican que $\int_{F\setminus H} \mathcal{C}_* \nu(z) d\nu(z) \leq c\mu(F)$.

Ahora probemos (g), es decir veamos que para todos los cuadrados $R \subset \mathbb{C}$, se cumple que $|\nu(R)| \leq c_g l(R)$. Para ello ocuparemos el siguiente par de lemas.

Lema 4.1.6. *Sea $R \subset \mathbb{C}$ un cuadrado tal que existe un cuadrado Whitney Q_i, con $i \in J$, que satisface $R \cap 2Q_i \neq \emptyset$ y $l(R) \leq 4l(Q_i)$. Entonces*

$$\mu(R) \leq \overline{c_0} l(R),$$

donde $\overline{c_0}$ es una constante absoluta suficientemente grande.

Demostración.
Si R intersecta una única circunferencia Γ_j, $j \in I$, entonces

$$\mu(R) = \mathcal{H}^1(\Gamma_j \cap R) \leq cl(R)$$

y así habremos terminado.
Suponga ahora que R intersecta al menos dos circunferencias Γ_j y $\Gamma_{j'}$, $j, j' \in I$. Dado que $\Gamma_j \subset \frac{1}{2}Q_j$, se deduce que $l(R) \geq \frac{1}{4}l(Q_j)$. La suposición $R \cap 2Q_i \neq \emptyset$ y $l(R) \leq 4l(Q_i)$ implican que $R \subset 9Q_i$. Observe ahora que si Q_k es un cuadrado Whitney tal que $Q_k \cap 9Q_i \neq \emptyset$, entonces $l(Q_i) \approx l(Q_k)$ (recuerde el inciso (iii) del Lema 4.1.2). En particular, ésto pasa para $Q_k = Q_j$. Por lo cual, usando también la primera parte de la demostración, tenemos que

$$\mu(R) \leq \sum_{k:Q_k \cap 9Q_i \neq \emptyset} \mu(Q_k) = \sum_{k:Q_k \cap 9Q_i \neq \emptyset} \mathcal{H}^1(\Gamma_k \cap Q_k) \leq c \sum_{k:Q_k \cap 9Q_i \neq \emptyset} l(Q_k)$$

$$\leq cl(Q_i) \approx l(Q_j) \leq 4l(R).$$

Lema 4.1.7. *Sea $R \subset \mathbb{C}$ un cuadrado tal que $l(R) \geq 4l(Q_i)$ para cada cuadrado Whitney Q_i que satisfaga $2Q_i \cap R \neq \emptyset$. Sea $L_R = \{h \in I : 2Q_h \cap \partial R \neq \emptyset\}$. Entonces*

$$\sum_{h \in L_R} l(Q_h) \leq cl(R).$$

Demostración.
Para cada cuadrado Q_h, $h \in L_R$, se cumple que $l(4Q_h) \leq l(R)$, de lo cual se sigue que $\mathcal{H}^1(4Q_h \cap \partial R) \geq c^{-1}l(Q_h)$. Luego, por la intesrección finita de los cuadrados Q_h, obtenemos que

$$\sum_{h \in L_R} l(Q_h) \leq c \sum_{h \in L_R} \mathcal{H}^1(4Q_h \cap \partial R) \leq cl(R).$$

Ahora si estamos listos para probar (g). Debido al Lema 4.1.6 podemos asumir que $l(Q_i) \leq l(R)/4$ si $2Q_i \cap R \neq \emptyset$, pues de otra forma por el inciso (b), $|\nu(R)| \leq c_b\mu(R) \leq c_b\overline{c_0}l(R)$.

Como ya vimos que $||\mathcal{C}\nu_0||_{L^\infty(\mathbb{C})} \leq 1$, argumentando como en (4.1.1) deducimos que $|\nu_0(R)| \leq cl(R)$. Así que sólo tenemos que estimar la diferencia $|\nu(R) - \nu_0(R)|$.

Sea $\{Q_i\}_{i \in I_R}$, donde $I_R \subset I$ es la subfamilia de cuadrados Whitney tales que $Q_i \cap R \neq \emptyset$. Y sea $\{Q_i\}_{i \in J_R}$, donde $J_R \subset I$ es la subfamilia de cuadrados Whitney tales que $Q_i \subset R$. Luego

$$|\nu(R) - \nu_0(R)| = \left|\nu\left(\bigcup_{i \in I_R}(Q_i \cap R)\right) - \nu_0\left(\bigcup_{i \in I_R}(Q_i \cap R)\right)\right| \leq$$

$$\left|\nu\left(\bigcup_{i \in I_R \setminus J_R}(Q_i \cap R)\right) - \nu_0\left(\bigcup_{i \in I_R \setminus J_R}(Q_i \cap R)\right)\right| + \left|\nu\left(\bigcup_{i \in J_R} Q_i\right) - \nu_0\left(\bigcup_{i \in J_R} Q_i\right)\right|$$

$$=: A + B.$$

Primero trabajaremos con el término A, por la definición de ν tenemos que:

$$A \leq \sum_{i \in I_R \setminus J_R} |\nu|(\Gamma_i) + \sum_{i \in I_R \setminus J_R} |\nu_0(Q_i \cap R)|.$$

Ahora tomemos en cuenta que por el inciso (b), $|\nu|(\Gamma_i) \leq c_b \mathcal{H}^1(\Gamma_i)$. También debido a que $|\mathcal{C}\nu_0| \leq 1$, argumentado como en (4.1.1), obtenemos que $|\nu_0(Q_i \cap R)| \leq c\mathcal{H}^1(\partial(Q_i \cap R))$. Por lo cual,

$$A \leq c \sum_{i \in I_R \setminus J_R} [\mathcal{H}^1(\Gamma_i) + \mathcal{H}^1(\partial(Q_i \cap R))] \leq c \sum_{i \in I_R \setminus J_R} l(Q_i).$$

Note que si $i \in I_R \setminus J_R$, entonces $Q_i \cap R \neq \emptyset$ y $Q_i \nsubseteq R$. Por lo tanto, $Q_i \cap \partial R \neq \emptyset$. Del Lema 4.1.7 deducimos que $A \leq cl(R)$.

Ahora pongamos nuestra atención en el término B; por la definición de ν y de Γ_i automáticamente se tiene que

$$B = \left| \sum_{i \in J_R} \int g_i d\nu_0 - \int_{\cup_{i \in J_R} Q_i} d\nu_0 \right| = \left| \int \left(\sum_{i \in J_R} g_i - \chi_{\cup_{i \in J_R} Q_i} \right) d\nu_0 \right|$$

$$\leq \sum_{j \in J_R} \left| \int_{Q_j} \left(\sum_{i \in J_R} g_i - 1 \right) d\nu_0 \right| + \left| \int_{\mathbb{C} \setminus \cup_{j \in J_r} Q_j} \sum_{i \in J_R} g_i d\nu_0 \right| =: B_1 + B_2.$$

Consideremos primero el término B_1. Si $\sum_{i \in J_R} g_i \neq 1$ en Q_j, escribimos $j \in M_R$. En este caso, como $\sum_{i \in J} g_i \equiv 1$ en Ω, existe algún $h \in I \setminus J_R$ tal que $g_h \neq 0$ en Q_j. Así, como $supp(g_h) \subset 2Q_h$, entonces $2Q_h \cap Q_j \neq \emptyset$, con $Q_h \nsubseteq R$. Por lo cual, $2Q_h \cap \partial R \neq \emptyset$, es decir $h \in L_R$.

Para cada $h \in L_R$ hay a lo más c_4 cuadrados Q_j tales que $2Q_h \cap Q_j \neq \emptyset$. Más aún, para éstos cuadrados Q_j tenemos que $l(Q_j) \leq cl(Q_h)$. Luego por el Lema 4.1.7:

$$\sum_{j \in M_R} l(Q_j) \leq cc_4 \sum_{h \in L_R} l(Q_h) \leq cl(R). \tag{4.1.22}$$

Así,

$$B_1 = \sum_{j \in M_R} \left| \int_{Q_j} \left(\sum_{i \in J_R} g_i - 1 \right) d\nu_0 \right| \leq \sum_{j \in M_R} \left(\left| \int_{Q_j} \sum_{i \in J_R} g_i d\nu_0 \right| + |\nu_0(Q_j)| \right).$$

Por la definición de ν_0 tenemos que $|\nu_0(Q_j)| \leq cl(Q_j)$, por lo cual

$$\left| \int_{Q_j} \sum_{i \in J_R} g_i d\nu_0 \right| \leq \sum_{i \in J_R} \left| \int_{Q_j} g_i d\nu_0 \right| \leq cl(Q_j),$$

ya que $\#\{i \in J_R : supp(g_i) \cap Q_j \neq \emptyset\} \leq c$, y que por (4.1.8), $\left|\int g_i d\nu_0\right| \leq c\mathcal{H}^1(\Gamma_i)$. Por lo tanto, usando (4.1.22), obtenemos

$$B_1 \leq cl(R).$$

Finalmente hay que estimar B_2. Tenemos que

$$B_2 \leq \sum_{i \in J_R} \left| \int_{\mathbb{C} \setminus \cup_{j \in J_R} Q_j} g_i d\nu_0 \right| = \sum_{i \in J_R} B_{2,i}.$$

Observe que si $B_{2,i} \neq 0$, entonces $supp(g_i) \cap (supp(\nu_0) \setminus \cup_{j \in J_R} Q_j) \neq \emptyset$. Dado que $supp(g_i) \subset 2Q_i$, entonces $2Q_i \cap Q_h \neq \emptyset$ para algún $h \in I \setminus J_R$. Puesto que $Q_i \subset R$ y $Q_h \not\subseteq R$, deducimos que $2Q_i \cap \partial R \neq \emptyset$ o $Q_h \cap \partial R \neq \emptyset$. Así que $i \in L_R$ o $h \in L_R$. Tomando en cuenta que $l(Q_i) \approx l(Q_h)$ y por el Lema 4.1.7, se obtiene

$$B_2 \leq c \sum_{i \in L_R} l(Q_i) + c \sum_{i \in J_R} \sum_{h \in L_R : Q_h \cap 2Q_i \neq \emptyset} l(Q_i) \leq cl(R) + c \sum_{h \in L_R} \sum_{i \in I : Q_h \cap 2Q_i \neq \emptyset} l(Q_h) \leq cl(R).$$

Continuemos con la demostración del teorema principal de esta tesis. Sea $\mathcal{D}_0$ el lattice diádico usual, es decir lo que denotamos como $\mathcal{D}$ en (1.4.4). Dado $w \in \mathbb{C}$ escribimos

$$\mathcal{D}(w) := w + \mathcal{D}_0.$$

Es decir, $\mathcal{D}(w)$ es una traslación de $\mathcal{D}_0$ por el vector w. En lo que queda de éste capítulo y demostración, por un lattice diádico nos referimos a un lattice $\mathcal{D}(w)$, para algún $w \in \mathbb{C}$.

Sean F, ν, μ y H como en el Lema 4.1.5. Para abreviar la notación, sea $\mathcal{D}$ un lattice diádico fijo de la colección de lattices $\{\mathcal{D}(w)\}_{w \in \mathbb{C}}$, es decir

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(w) \quad \text{para algún } w \in \mathbb{C} \text{ fijo.}$$

Recuerde que $H = \bigcup_{k \in I_H} B(x_k, r_k) \subset F$, donde

$$\sum_{k \in I_H} r_k \leq \frac{5}{c_0} \mu(F) = \varepsilon \mu(F).$$

Considere la familia de cuadrados diádicos $\mathcal{D}_H \subset \mathcal{D}$ tal que $R \in \mathcal{D}_H$ si existe alguna bola $B(x_k, r_k)$, $k \in I_H$, que satisface

$$B(x_k, r_k) \cap R \neq \emptyset \quad \text{y} \quad 2r_k < l(R) \leq 4r_k. \tag{4.1.23}$$

Note que

$$\bigcup_{k\in I_H} B(x_k, r_k) \subset \bigcup_{R\in\mathcal{D}_H} R. \tag{4.1.24}$$

Tomemos un subfamilia de cuadrados maximales disjuntos $\{R_k\}_{k\in I_H}$ de $\mathcal{D}_H$, tal que

$$\bigcup_{R\in\mathcal{D}_H} R = \bigcup_{k\in I_H} R_k,$$

y definimos el **conjunto diádico excepcional** $H_\mathcal{D}$ como

$$H_\mathcal{D} := \bigcup_{k\in I_H} R_k.$$

Observe que (4.1.24) implica $H \subset H_\mathcal{D}$. Además, como para cada bola $B(x_k, r_k)$ hay a lo más cuatro cuadrados $R \in \mathcal{D}_H$ que satisfacen (4.1.23), obtenemos

$$\sum_{k\in I_H} l(R_k) \leq 16 \sum_{k\in I_H} r_k \leq \frac{80}{c_0}\mu(F) = 16\varepsilon\mu(F). \tag{4.1.25}$$

Ahora definamos al conjunto excepcional $T_\mathcal{D}$. Si un cuadrado diádico $R \in \mathcal{D}$ satisface

$$\mu(R) \geq c_T|\nu(R)|, \tag{4.1.26}$$

donde c_T es una constante grande que será escogida más abajo, diremos que $R \in \mathcal{D}_T$. Sea $\{R_k\}_{k\in I_T} \subset \mathcal{D}_T$ la familia de los cuadrados diádicos maximales de $\mathcal{D}_T$, y por lo tanto disjuntos, de $\mathcal{D}_T$. El **conjunto excepcional** $T_\mathcal{D}$ es

$$T_\mathcal{D} = \bigcup_{k\in I_T} R_k.$$

Por lo tanto, si $R \in \mathcal{D}$ es tal que $\mu(R) \geq c_T|\nu(R)|$, entonces $R \subset T_\mathcal{D}$.

En el siguiente lema veremos que $\mu(F\setminus(H_\mathcal{D}\cup T_\mathcal{D}))$ es tan grande que es comparable con $\mu(F)$.

Lema 4.1.8. *Si c_0 y c_T son escogidas suficientemente grandes, entonces*

$$|\nu(H_\mathcal{D} \cup T_\mathcal{D})| \leq \frac{1}{2}|\nu(F)| \quad y \quad \mu(H_\mathcal{D} \cup T_\mathcal{D}) \leq \delta_1\mu(F),$$

con $\delta_1 = 1 - \dfrac{1}{2c_a c_b} < 1.$

Demostración.
Sea $\{R_k\}_{k\in I_{TH}}$ la subfamilia de cuadrados maximales, y por lo tanto disjuntos de $\{R_k\}_{k\in I_H} \cup \{R_k\}_{k\in I_T}$, así que

$$H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}} = \bigcup_{k\in I_{HT}} R_k.$$

Como

$$|\nu(H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}})| \leq \sum_{k\in I_{HT}} |\nu(R_k)| \leq \sum_{k\in I_H} |\nu(R_k)| + \sum_{k\in I_T} |\nu(R_k)|,$$

luego, por el Lema 4.1.5 inciso (g) y (4.1.26), tenemos que

$$\sum_{k\in I_H} |\nu(R_k)| + \sum_{k\in I_T} |\nu(R_k)| \leq c_g \sum_{k\in I_H} l(R_k) + c_T^{-1} \sum_{k\in I_T} \mu(R_k),$$

dado que $supp(\mu) \subset F$ y usando (4.1.25)

$$c_g \sum_{k\in I_H} l(R_k) + c_T^{-1} \sum_{k\in I_T} \mu(R_k) \leq 16c_g\varepsilon\mu(F) + c_T^{-1}\mu(F) = (16c_g\varepsilon + c_T^{-1})\mu(F),$$

y por el Lema 4.1.5 incisos (a) y (c) obtenemos

$$(16c_g\varepsilon + c_T^{-1})\mu(F) \leq c_a(16c_g\varepsilon + c_T^{-1})|\nu(F)|.$$

Así que, si escogemos ε suficientemente pequeño y c_T suficientemente grande:

$$|\nu(H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}})| \leq \frac{1}{2}|\nu(F)|.$$

Por lo cual,

$$|\nu(F \setminus (H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}}))| \geq |\nu(F)| - |\nu(H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}})| \geq \frac{1}{2}|\nu(F)|.$$

Luego, por el Lema 4.1.5 incisos (a),(c) y (b), tendremos

$$\mu(F) \leq c_a|\nu(F)| \leq 2c_a|\nu(F \setminus (H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}}))| \leq 2c_ac_b\mu(F \setminus (H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}})).$$

Por lo tanto, $\mu(F \setminus (H_{\mathcal{D}} \cup T_{\mathcal{D}})) \leq \delta_1\mu(F)$, con $\delta_1 = 1 - \dfrac{1}{2c_ac_b} < 1$.

A continuación enunciamos el **Teorema Tb de Nazarov, Treil y Volberg**, el cual es una herramienta crucial para demostrar la equivalencia entre γ y γ_+. Debido a éste se hicieron todas las construcciones anteriores de ν, μ, H, $H_{\mathcal{D}}$ y $T_{\mathcal{D}}$.

Teorema 4.1.9. Teorema Tb de Nazarov, Treil y Volberg. *Sea μ una medida con soporte en un compacto $F \subset \mathbb{C}$. Suponga que existe una medida compleja ν y, para cada $w \in \mathbb{C}$, existen dos conjuntos $H_{\mathcal{D}(w)}, T_{\mathcal{D}(w)} \subset \mathbb{C}$ hechos de cuadrados diádicos de $\mathcal{D}(w)$ tales que*

(a) *Toda bola B_r de radio r tal que $\mu(B_r) > c_0 r$ está contenida en $\bigcap_{w\in\mathbb{C}} H_{\mathcal{D}(w)}$.*

(b) *$\nu = b\mu$, donde b es una función tal que $||b||_{L^\infty(\mu)} \leq c_b$.*

(c) *$\int_{\mathbb{C}\setminus H_{\mathcal{D}(w)}} \mathcal{C}_*\nu d\mu \leq c\mu(F)$, para toda $w \in \mathbb{C}$.*

(d) *Si $Q \in \mathcal{D}(w)$ es tal que $Q \nsubseteq T_{\mathcal{D}(w)}$, entonces $\mu(Q) \leq c_d|\nu(Q)|$.*

(e) *$\mu(H_{\mathcal{D}(w)} \cup T_{\mathcal{D}(w)}) \leq \delta_0\mu(F)$, para toda $w \in \mathbb{C}$ y algún $\delta_0 < 1$.*

Entonces existe un subconjunto $G \subset F$ tal que

(i) *$\mu(G) \geq c^{-1}\mu(F)$,*

(ii) *$\mu\lfloor G$ tiene c_0-crecimiento lineal,*

(iii) *la transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu\lfloor G)$.*

La constante c y la cota para la norma L^2 dependen solamente de las constantes de la hipóstesis.

Si aplicamos éste Teorema al Lema 4.1.5 obtenemos el siguiente resultado:

Lema 4.1.10. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto con $\mathcal{H}^1(\partial E) < \infty$ y $\gamma(E) > 0$. Sea $\{Q_i\}_{i\in I}$ la subfamilia finita de los cuadrados intermedios Q_i, $i \in J$, del Lema 4.1.3 tales que $\gamma(E \cap 2Q_i) \neq 0$. Sea $F = \bigcup_{i\in I} Q_i$. Suponga que*

$$\frac{\gamma_+(E)}{\gamma(E)} \leq \frac{\gamma_+(E\cap 2Q_i)}{\gamma(E\cap 2Q_i)} \neq 0 \qquad \forall\ i \in I.$$

Entonces existe una medida μ con soporte en F y un conjunto $G \subset F$ tales que

(1) *$c_a^{-1}\gamma(E) \leq \mu(F) \leq c_a\gamma(E)$ y $\mu(F) \leq c_5\mu(G)$.*

(2) *$\mu(G \cap B(x,r)) \leq c_0 r$ para toda $x \in G$ y $r > 0$.*

(3) *La transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu\lfloor G)$ con*

$$||\mathcal{C}_{\mu\lfloor G}||_{L^2(\mu\lfloor G)\to L^2(\mu\lfloor G)} \leq c_6.$$

Las constantes c_a, c_0, c_5, c_6 son absolutas.

Demostración.
Podemos aplicar el Teorema Tb 4.1.9 al conjunto F y a las medidas ν y μ que construimos en el Lema 4.1.5, pues las siguientes hipótesis del Teorema Tb 4.1.9 se cumplen:

(a) Se cumple por el inciso (b) del Lema 4.1.5, ya que por definición, $H \subset H_{\mathcal{D}(w)}$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

(b) Se tiene por el inciso (b) del Lema 4.1.5

(c) Como $H \subset H_{\mathcal{D}(w)}$ para todo $w \in \mathbb{C}$, entonces $\int_{\mathbb{C}\setminus H_{\mathcal{D}(w)}} \mathcal{C}_*\nu d\mu \leq \int_{\mathbb{C}\setminus H} \mathcal{C}_*\nu d\mu$ y por el inciso (d) del Lema 4.1.5 se tiene lo deseado.

(d) Se sigue de la definición de $T_{\mathcal{D}}$.

(e) Se probó en el Lema 4.1.8

Por todo lo cual tenemos que el resultado (1) se sigue del Lema 4.1.5 inciso (a) y del Teorema Tb 4.1.9 inciso (i). También los resultados (2) y (3) se tienen por el Teorema Tb 4.1.9 inciso (ii) y (iii) respectivamente.

Los últimos argumentos para probar el Teorema 4.0.1 son el siguiente par de lemas.

Lema 4.1.11. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto tal que $\mathcal{H}^1(\partial E) < \infty$ y $\gamma(E) > 0$. Existe una constante absoluta B tal que si*

(a) $\gamma_+(E) \leq c_2 diam(E)$.

(b) $\dfrac{\gamma_+(E)}{\gamma(E)} \leq \dfrac{\gamma_+(E \cap Q)}{\gamma(E \cap Q)} \neq 0$ *para todos los cuadrados Q tales que $\gamma(E \cap Q) \neq 0$ y $diam(Q) \leq diam(E)/10$.*

Entonces $\gamma(E) \leq B\gamma_+(E)$.

Demostración.
Debido a los Lemas 4.1.3 y 4.1.10, existen conjuntos F, G y una medida μ con soporte en F tales que los siguientes incisos se satisfacen:

(i) $E \subset F$ y $\gamma_+(E) \approx \gamma_+(F)$.
Pues $\gamma_+(E) \leq c\gamma_+(F)$ debido a que $\gamma_+(\Omega) \approx \gamma_+(E)$, por el Lema 4.1.3 inciso (a), donde $F \subset \Omega$.

(ii) $\mu(F) \approx \gamma(E)$.
Se sigue del lema 4.1.10 inciso (1).

(iii) $G \subset F$ y $\mu(G) \approx \mu(F)$.
Se sigue del lema 4.1.10 inciso (1).

(iv) $\mu(G \cap B(x,r)) \leq c_0 r$ para toda $x \in G$ y $r > 0$. Y $\|\mathcal{C}_{\mu\lfloor G}\|_{L^2(\mu\lfloor G)\to L^2(\mu\lfloor G)} \leq c_6$. Se tiene por el Lema 4.1.10 incisos (2) y (3) respectivamente.

El inciso (iv) implica que $c_6^{-1}\mu\lfloor G \in \Sigma(F)$ y por el Teorema 3.6.1 se tiene que $\mu(G) = \mu\lfloor G(F) \leq c\gamma_+(F)$. Luego por el inciso (iii) tendremos

$$\gamma_+(F) \geq c^{-1}\mu(G) \geq c^{-1}\mu(F).$$

Así , por (ii), la desigualdad anterior y (i) se cumple que

$$\gamma(E) \leq c\mu(F) \leq c\gamma_+(F) \leq B\gamma_+(E).$$

Lema 4.1.12. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto tal que $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Existe una constante absoluta A_0 tal que si $\gamma(E \cap Q) \leq A_0\gamma_+(E \cap Q)$ para todos los cuadrados Q con $diam(Q) \leq diam(E)/10$, entonces $\gamma(E) \leq A_0\gamma_+(E)$.*

Demostración.
Supondremos que $\gamma(E) > 0$, pues de otra forma el enunciado del lema es trivial.

Si $\gamma_+(E) > c_2 diam(E)$, entonces por la Proposición 1.1.9 tendremos que $\gamma_+(E) > c_2\gamma(E)$ y hemos terminado si definimos $A_0 \geq c_2^{-1}$.
Sea $A_0 = max(1, c_2^{-1}, B)$. Si $\gamma_+(E) \leq c_2 diam(E)$, entonces también se cumple que $\gamma(E) \leq A_0\gamma_+(E)$. Pues de lo contrario tendríamos que $A_0 < \gamma(E)/\gamma_+(E)$, por lo cual

$$\gamma(E \cap Q) \leq A_0\gamma_+(E \cap Q) < \frac{\gamma(E)}{\gamma_+(E)}\gamma_+(E \cap Q)$$

implica que

$$\frac{\gamma_+(E)}{\gamma(E)} \leq \frac{\gamma_+(E \cap Q)}{\gamma(E \cap Q)},$$

es decir se cumple la hipóstesis (b) del Lema 4.1.11.
Además por el Lema 4.1.3 inciso (c) se cumple la hipótesis (a) del Lema 4.1.11. Por lo cual deducimos que $\gamma(E) \leq B\gamma_+(E) \leq A_0\gamma_+(E)$, lo que es una contradicción.

Nótese que cualquier constante $A_0 \geq \text{máx}(1, c_2^{-1}, B)$ funciona en el argumento del Lema anterior. Así que el Lema 4.1.12 se cumple para cualquier constante A_0 suficientemente grande.

Finalmente concluimos éste capítulo con la siguiente **demostración del Teorema 4.0.1**, es decir probaremos la desigualdad $\gamma(E) \leq c\gamma_+(E)$.

Demostración.
Por la regularidad exterior de γ_+ en conjuntos compactos (Proposición 3.3.1), si $d > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $\gamma_+\left(\overline{\mathcal{U}_d(E)}\right) \leq \gamma_+(E) + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es una constante arbitrariamente pequeña.
Considere el conjunto compacto E_0 hecho de todos los cuadrados diádicos cerrados contenidos en el lattice diádico estándar $\mathcal{D}_0$, con longitud de lado $d/2$ y que intersectan a E (asumiendo que d es de la forma 2^{-k}). Vamos a probar más abajo que $\gamma(E_0) \leq c\gamma_+(E)$. De esta desigualdad, dado que $E \subset E_0 \subset \overline{\mathcal{U}_d(E)}$, obtendremos

$$\gamma(E) \leq \gamma(E_0) \leq c\gamma_+(E_0) \leq c\gamma_+\left(\overline{\mathcal{U}_d(E)}\right) \leq c(\gamma_+(E) + \varepsilon),$$

y habremos terminado.
Para probar que $\gamma(E_0) \leq c\gamma_+(E_0)$, vamos a probar por inducción en n que si R es un rectángulo cerrado con lados paralelos a los ejes y diámetro $diam(R) \leq 4^{n-1}d$, $n \geq 0$, entonces

$$\gamma(R \cap E_0) \leq A_0\gamma_+(R \cap E_0). \tag{4.1.27}$$

Note que si $diam(R) \leq d/4$, entonces R puede intersectar a lo más cuatro de los cuadrados diádicos con longitud de lado d que forman a E_0. En cualquier caso, como los lados de R son paralelos a los ejes, es fácil ver que $R \cap E_0$ es un rectángulo R_1 o un polígono que se puede descomponer como la unión de dos rectángulos cerrados R_1, R_2 con $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.
Para el primer caso probemos que para todo rectángulo R_1 se cumple que $diam(R_1) \leq c\gamma_+(R_1)$. Sea μ la medida de longitud de arco en ∂R_1, lo que implica que para todos $x, y, z \in R_1$, $R(x, y, z) \geq L(R_1)/2$, donde $L(R_1)$ es el lado más grande de R_1, pues una circunferencia de radio menor que $L(R_1)/2$ ya no toca a 3 puntos en la frontera del rectángulo R_1. Además $\frac{\mu}{16} \in \Sigma(R_1)$ pues $supp(\frac{\mu}{16}) \subset R_1$ y $\frac{\mu}{16}(B(x,r)) \leq r$ para toda $x \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Por otra parte para toda $x \in \mathbb{C}$,

$$c^2_{\frac{\mu}{16}}(x) = \int\int c(x,y,z)^2 d\left(\frac{\mu}{16}\right)(y) d\left(\frac{\mu}{16}\right)(z) \leq \frac{4}{L(R_1)^2}\left(\frac{\mu(R_1)}{16}\right)^2$$

implica que

$$c^2\left(\frac{\mu}{16}\right) = \int c^2_{\frac{\mu}{16}}(x) d\left(\frac{\mu}{16}\right)(x) \leq \frac{4}{L(R_1)^2}\left(\frac{\mu(R_1)}{16}\right)^3.$$

Por lo cual, $c^2\left(\frac{\mu}{16}\right) \leq \frac{\mu}{16}(R_1)$ si y sólo si $\frac{4}{L(R_1)^2}\left(\frac{\mu(R_1)}{16}\right)^3 \leq \frac{\mu}{16}(R_1)$ si y sólo si

$\left(\dfrac{\mu(R_1)}{16}\right)^2 \leq \dfrac{L(R_1)^2}{4}$; y si ponemos $l(R_1)$ como el lado más pequeño de R_1, entonces

$$\left(\frac{\mu(R_1)}{16}\right)^2 = \left(\frac{2L(R_1)+2l(R_1)}{16}\right)^2 \leq \left(\frac{4L(R_1)}{16}\right)^2 = \frac{1}{16}L(R_1)^2 < \frac{L(R_1)^2}{4}.$$

Por lo tanto $\left(\frac{\mu(R_1)}{16}\right)^2 \leq \frac{L(R_1)^2}{4}$ implica que $c^2\left(\frac{\mu}{16}\right) \leq \frac{\mu}{16}(R_1)$; y por el Teorema 3.6.1 podemos concluir que

$$C\ diam(R_1) = \frac{\mu}{16}(R_1) \leq \gamma_+(R_1).$$

Luego por La Proposición 1.1.9 y la parte de arriba, tendremos que

$$\gamma(R_1) \leq diam(R_1) \leq A_0\gamma_+(R_1),$$

asumiendo que A_0 es suficientemente grande.

En el segundo caso, por la Proposición 1.3.12 y usando lo que hicimos en el primer caso, se tiene que

$$\gamma(R_1 \cup R_2) \leq c(\gamma(R_1)+\gamma(R_2)) \leq c(\gamma_+(R_1)+\gamma_+(R_2)) \leq 2c\gamma_+(R_1 \cup R_2).$$

Veamos ahora que si (4.1.27) se cumple para todos los rectángulos R con $diam(R) \leq 4^n d$, entonces también se cumple para un rectángulo $\widehat{R}$ con $diam(\widehat{R}) \leq 4^{n+1}d$. Solamente tenemos que aplicar el Lema 4.1.12 al conjunto $\widehat{R} \cap E_0$. En efecto, tome un cuadrado Q con $diam(Q) \leq diam(\widehat{R} \cap E_0)/10$. Por la hipótesis de inducción tenemos

$$\gamma(Q \cap \widehat{R} \cap E_0) \leq A_0\gamma_+(Q \cap \widehat{R} \cap E_0),$$

pues $\widehat{R} \cap Q$ es un rectángulo con diámetro $\leq 4^n d$. Luego por el Lema 4.1.12

$$\gamma(\widehat{R} \cap E_0) \leq A_0\gamma_+(\widehat{R} \cap E_0).$$

Y de nuevo por el Lema 4.1.12 podemos concluir que $\gamma(E_0) \leq A_0\gamma_+(E)$.

Para concluir esta sección, en donde se demuestra la equivalencia entre γ y γ_+, deducimos los siguientes resultados.

Corolario 4.1.13. *Un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ es removible para funciones analíticas acotadas si y sólo si $\gamma_+(E) = 0$*

Demostración.
Se sigue del Teorema 4.0.1 y la Proposición 1.2.3.

Corolario 4.1.14. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva rectificable y $E \subset \Gamma$ compacto. Entonces $\gamma_+(E) > 0$ si y sólo si $\mathcal{H}^1(E) > 0$.*

Demostración.
Se sigue de la conjetura de Denjoy (Teorema 3.5.4) y la Proposición 1.2.3.

El siguiente corolario determina la removilidad de un conjunto en términos de la curvatura de una medida.

Corolario 4.1.15. *Un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ es no removible para funciones analíticas acotadas si y sólo si contiene el soporte de una medida de Radon no cero con crecimiento lineal y curvatura finita.*

Demostración.
Por la Proposición 1.2.3, sabemos que E es no removible para funciones analíticas acotadas si y sólo si $\gamma(E) > 0$; y por el Teorema 4.0.1 esto pasa si y sólo si $\gamma_+(E) > 0$. Luego por el Teorema 3.6.1 tenemos la siguiente caracterización de γ_+ en términos de la curvatura

$$\gamma(E) \approx \sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\}.$$

Por lo cual, E es no removible para funciones analíticas acotadas si y sólo si $\sup\{\mu(E) : \mu \in \Sigma(E), ||\mathcal{C}_\mu||_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leq 1\} > 0$, de ahí se sigue el resultado. Con ésto concluimos la demostración del corolario sobre funciones analíticas acotadas.

El siguiente corolario caracteriza a la capacidad analítica en términos del potencial que definimos en la sección 3.7.

Corolario 4.1.16. *Para cualquier conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\gamma(E) \approx \sup\{\mu(E) : \mu \in M^+(\mathbb{C}), supp(\mu) \subset E, U_\mu(x) \leq 1 \ \forall\ x \in E\},$$

$$\gamma(E) \approx \text{ínf}\{||\mu|| : \mu \in M^+(\mathbb{C}),\ U_\mu(x) \geq 1 \ \forall\ x \in E\},$$

con $M^+(\mathbb{C}) \subset M(\mathbb{C})$ el conjunto de medidas complejas de Radon positivas y finitas; y donde el potencial lo definimos como

$$U_\mu(x) := M_R\mu(x) + c^2_\mu(x)^{1/2} = \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x,r))}{r} + \left(\int\int c(x,y,z)^2 d\mu(z)d\mu(y)\right)^{1/2}.$$

Demostración.
Se siguen del Corolario 3.7.1, el Teorema 3.7.10 y el Teorema 4.0.1.

Corolario 4.1.17. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ compacto. Entonces $\gamma(E) = 0$ si y sólo si existe una medida $\mu \in M^+(\mathbb{C})$ tal que $U_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$.*

Demostración.
Se sigue del Corolario 3.7.11 y de que $\gamma(E) = 0$ si y sólo si $\gamma_+(E) = 0$.

Corolario 4.1.18. *El conjunto de Cantor de cuartos de esquina tiene capacidad analítica igual a cero. Por lo cual es un conjunto puramente no rectificable.*

Demostración.
En el Ejemplo 2.2.5 inciso (c) vimos que para el conjunto de Cantor de cuartos de esquina E y la medida $\mu = \mathcal{H}^1\lfloor E$, $c^2_\mu(x) = \infty$ para toda $x \in E$. Del Corolario 3.7.11 concluimos que $\gamma_+(E) = 0$ y como $\gamma_+ \approx \gamma$, entonces $\gamma(E) = 0$. Debido al Ejemplo 1.4.14 se tiene que $\mathcal{H}^1(E) < \infty$, luego por el Corolario 3.5.6, E tiene que ser puramente no rectificable.

4.2. Semiaditividad de la capacidad analítica

Por último, el Teorema 4.0.1, es decir la equivalencia entre γ y γ_+, implica el siguiente corolario que es la semiaditividad de la capacidad analítica γ.

Corolario 4.2.1. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto. Y sean E_i, con $i \geq 1$, conjuntos de Borel tales que $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Entonces*

$$\gamma(E) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(E_i),$$

donde c es una constante absoluta.

Demostración.
Por la equivalencia entre γ y γ_+ (Teorema 4.0.1), y la semiaditividad de γ_+ (Corolario 3.6.3) tenemos que

$$\gamma(E) \leq c\gamma_+(E) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_+(E_i) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(E_i).$$

Con este resultado concluimos este trabajo de tesis.

Conclusión

La definición de capacidad analítica de un compacto E nos indica que debemos evaluar la derivada en el punto al infinito de todas las funciones analíticas y acotadas definidas en $\mathbb{C} \setminus E$; ésto se debe a que el infinito es el único punto que no pertenece a ninguún compacto de $\mathbb{C}$. Por lo anterior, la capacidad analítica sólo depende de la frontera exterior del conjunto compacto E. Además de que es invariante bajo traslaciones y rotaciones, pues estas son transformaciones que preservan el punto al infinito y no afectan el módulo de la derivada. Por otra parte, la capacidad analítica de un compacto E está determinada por la función de Ahlfors del conjunto E y también por los mapeos conformes f de la componente conexa no acotada de $(\mathbb{C} \setminus E) \cup \{\infty\}$ al disco unitario tales que $f(\infty) = 0$. Más aún, la capacidad analítica de cualquier conjunto compacto y conexo es equicomparable a su diámetro, es decir $\gamma(E) \approx diam(E)$. De lo cual se deduce que cualquier conjunto compacto con capacidad analítica nula debe ser totalmente disconexo. Por lo tanto, todo conjunto removible tiene que ser totalmente disconexo. Aunque todavía faltan estimaciones como las anteriores para los conjuntos totalmente disconexos. Como para cualquier compacto $E \subset \mathbb{C}$ se tiene que E es removible si y sólo si $\gamma(E) = 0$, podemos decir que la capacidad analítica mide el tamaño de un conjunto como singularidad no removible para funciones analíticas acotadas. Y si E es removible las únicas funciones admisibles para E son las constantes.

La transformada de Cauchy se introduce como herramienta para construir funciones analíticas a partir de medidas (que obviamente no son analíticas); y así poder relacionar ciertas medidas con soporte en E con la capacidad analítica, pues la transformada de Cauchy de dichas medidas serán funciones admisibles para E. También se introdujo el operador de Vitushkin debido a la relación que guarda con la transformada de Cauchy; además de que fue esencial en la prueba de la semiaditividad de γ para dos casos particulares: un disco o cuadrado unión un compacto; y para la unión de dos rectángulos cerrados.

También trabajamos con la de medida de Hausdorff y la dimensión de Hausdorff, debido a que la capacidad analítica de un conjunto compacto depende de su dimensión de Hausdorff. En particular, la dimensión uno es la dimensión crítica asociada con la capacidad analítica, de aquí se concluye que si $\gamma(E) > 0$, entonces $\mathcal{H}^1(E) > 0$.

Pero por el ejemplo que desarrollamos del conjunto de cuartos de esquina de Cantor, sabemos que hay conjuntos tales que $\gamma(E) = 0$ pero $\mathcal{H}^1(E) > 0$.

En el capítulo dos se introdujo la noción de medida n-dimensional, que juega un papel esencial en las estimaciones y que es menos restrictiva que el concepto de medida duplicadora usado en la teoría clásica de operadores de Calderón-Zygmund. La teoría de los operadores integrales singulares fue otra herramienta necesaria, aplicada particularmente a la transformada de Cauchy. Al definir la curvatura de Menger y la curvatura de una medida se vió la relación que tienen con la transformada de Cauchy. Gracias a esta relación y al Teorema T1 pudimos demostrar que la transformada de Cauchy es acotada en $L^2(\mu)$, donde μ es la medida de longitud de arco restringida a las gráficas de funciones Lipchitz.

En el capítulo tres se definió a la capacidad γ_+ como el supremo calculado sobre todas las medidas con soporte en E y cuya transformada de Cauchy tiene norma $L^\infty(\mathbb{C})$ acotada. El definir a γ_+ como éste supremo de medidas es esencial para probar su semiaditividad. Además, como la derivada en el punto al infinito de la transformada de Cauchy (de una medida compleja con soporte compacto) es igual a menos la medida de todo el espacio, la capacidad γ_+ es menor o igual que la capacidad analítica. Dicha capacidad γ_+ también es invariante bajo traslaciones y rotaciones, además es equicomparable con la capacidad γ_+ de la frontera exterior de E; y cumple con la propiedad de regularidad exterior. Con la ayuda de esta capacidad se probó la conjetura de Denjoy para conjuntos rectificables ($\gamma(E) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^1(E) > 0$). También probamos que la capacidad $\gamma_+(E)$ está determinada por las medidas complejas de Radon positivas con soporte en E, crecimiento 1-lineal y cuya curvatura está acotada por su variación total, o en su defecto si su transformada de Cauchy está acotada por uno en L^2 respecto a dicha medida. Usando éste resultado se obtuvo la semiaditividad de γ_+. Para finalizar el tercer capítulo se caracterizó a γ_+ en términos de un potencial que depende de la curvatura de Menger y del operador maximal radial 1-dimensional. Dicha caracterización fue usada para probar la comparación entre γ y γ_+.

En el último capítulo se probó que γ es equicomparable con γ_+, para ésto el Teorema Tb de Nazarov, Treil y Volberg fue una herramienta esencial en dicha demostración. De la equicomparación de las capacidades γ y γ_+ se sigue que γ satisface los resultados que ya se tenían para γ_+; y viceversa. Por lo tanto, se puede usar la teoría del potencial para trabajar con la capacidad analítica. Por último, se probó la semiaditividad de γ, que era el objetivo principal de esta tesis, la cual se deduce fácilmente de la semiaditividad de γ_+ y de la equicomparación entre γ y γ_+.

Índice de símbolos.

$diam(E)$	—	El diámetro del conjunto E.
$l(Q)$	—	La longitud de lado del cuadrado Q.
$\mathcal{L}^n(E)$	—	La medida de Lebesgue n-dimensional del conjunto E.
$Ad(E)$	—	La familia de funciones admisibles para el conjunto E–pág. 1.
$\gamma(E)$	—	La capacidad analítica del conjunto E–pág. 2.
$\alpha(E)$	—	La capacidad analítica continua del conjunto E–pág. 2.
$\partial_0 E$	—	La frontera exterior del conjunto compacto E–pág. 2.
$\mathcal{C}$	—	La transformada de Cauchy–pág. 13,14.
$\lVert\nu\rVert$	—	Variación total de la medida ν–pág. 13.
$supp(\nu)$	—	Soporte de la medida ν–pág. 13.
$\mathcal{U}_\varepsilon(A)$	—	La ε-vecindad del conjunto A–pág. 15.
V_φ	—	El operador de localización de Vitushkin asociado a φ–pág. 16.
$\approx, \lesssim$	—	Símbolos de equicomparación–pág. 21.
$\mathcal{H}^s(A)$	—	La medida de Hausdorff s-dimensional del conjunto A–pág. 22.
$\mathcal{H}^s_\infty(A)$	—	El contenido de Hausdorff s-dimensional del conjunto A–pág. 22.
$\mu\lfloor A = \mu\vert_A$	—	La restricción de la medida μ al conjunto A–pág. 24.

$\mathcal{D}_m$	—	Familia de cubos diádicos de longitud 2^{-m}–pág. 26.
$M(\mathbb{R}^d)$	—	El conjunto de medidas de Borel en $\mathbb{R}^d$ reales (o complejas) finitas–pág. 32.
T_ε	—	Operador ε-truncado–pág. 32.
$L^{p,\infty}(\mu)$	—	Espacios débiles de Lebesgue–pág. 34.
T_*	—	Operador maximal–pág. 35.
$T_{*,\delta}$	—	Operador maximal δ-truncado–pág. 35.
$c(x,y,z)$	—	La curvatura de Menger de los puntos x, y, z–pág. 36.
$\widehat{xyz}$	—	El ángulo con vértice y y lados $\vec{yx}$ e $\vec{yz}$–pág. 36.
$L_{x,z}$	—	La línea que pasa por los puntos x y z–pág. 36.
$c^2(\mu)$	—	La la curvatura de la medida μ–pág. 37.
$c^2_\varepsilon(\mu)$	—	La la curvatura ε-truncada de la medida μ–pág. 39.
$M_R\mu$	—	Operador maximal radial 1-dimensional de la medida μ–pág. 41.
$Ad_+(E)$	—	Conjunto de medidas admisibles para E y la capacidad γ_+–pág. 52.
$\widetilde{\mathcal{C}}_\varepsilon$	—	Kernel de Cauchy suavizado–pág. 55.
$M^+(\mathbb{C})$	—	El conjunto de medidas complejas de Radon positivas y finitas–pág. 66.
$\Sigma(E)$	—	Las medidas complejas de Radon positivas con soporte en E y con crecimiento 1-lineal.–pág. 66
U_μ	—	Potencial asociado a γ_+–pág. 71.
$c^2(x,\mu,\nu)$	—	Donde $x \in \mathbb{C}$ y μ, ν son medidas de Radon positivas–pág. 73.
$\mathcal{D}(w)$	—	El lattice diádico usual trasladado por el vector w–pág. 101.

Bibliografía

[Conway] John B. Conway, *Functions of one complex variable II*. Springer - Verlag (1995).

[Falconer] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry. Mathemathical foundations and applications*. John Wiley and Sons, Segunda edición (2003).

[Mattila] Pertti Mattila, *Geometry of sets and measure in Euclidean spaces*. Cambridge University Press, Fractals and Rectifiability (1995).

[Rudin] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*. MacGraw-Hill, Tercera edición (1988).

[Rudin2] W. Rudin, *Functional Analysis*. MacGraw-Hill (1973).

[Tolsa] Xavier Tolsa, *Analytic Capacity, the Cauchy Transform, and Non-homogeneous CaldernZygmund Theory*. Springer Intenational Publishing, Progress in Mathematics Volume 307 (2014).

[Tolsa2] Xavier Tolsa, *The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture* (2002).