



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Matemáticas

Precio de opciones con doble barrera

Tesis para obtener el título de

Maestro en Ciencias
con especialidad en
Matemáticas

presenta

Jhovany Guillén Morales

bajo la dirección de

Dr. Sergey Grudsky
Dr. Egor Maximenko

MÉXICO, D.F., FEBRERO DE 2016.

Resumen

En esta tesis estudiamos opciones con doble barrera. Usando dos métodos (separación de variables y reflexión) deducimos dos fórmulas exactas para el precio de la opción y analizamos el comportamiento asintótico de dichas fórmulas. Además damos un criterio para decidir cual fórmula es más eficiente en casos particulares, por ejemplo, cuando la distancia entre las barreras es muy grande.

In this thesis we study double barrier options. Using two methods (separation of variables and reflection) we deduce two exact formulas for the price of the option and analyze the asymptotic behavior of these formulas. Moreover we give a criterion to decide which formula is more efficient in particular cases, for example, when the distance between the barriers is very big.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme estar en este momento en el tiempo. Por dejarme continuar hasta alcanzar este punto. Por mostrarme un camino que yo pensaba era recto y ahora sé, tiene más discontinuidades de las que pensaba. Gracias por las enseñanzas y por dejar que mi camino convergiera con el de las personas que me han hecho estar de pie ante todo.

A mis padres María y Claudio. A Adán, Alán, Anna, Ángeles, Carlos, Estela, Egor, Leo, Lulú, Martha, Miguel Á., Nohemi, Rocío, Rubén y Sergei, quienes me han apoyado de manera tal, que ahora tengo una vista hacia arriba y ganas de continuar.

Esta etapa comenzó en el momento que mi profesora Anna Tarasenko me contacto con el profesor Sergei Grudsky para trabajar sobre matemáticas financieras. Posteriormente, el doctor Grudsky sugirió la asesoría del profesor Egor Maximenko para la realización de este trabajo. Es por esto que mi agradecimiento más especial es para mis dos asesores, por su paciencia, su ayuda, su apoyo y enseñanzas a lo largo de estos dos años.

Así mismo, mis agradecimientos a mis profesores y personal administrativo del departamento de matemáticas del CINVESTAV, quienes forman un gran grupo de trabajo e hicieron de mi estancia en la institución una etapa de gran evolución. Al CONACYT por otorgarme los recursos financieros para llevar a cabo los estudios de maestría.

La travesía continua, por el momento gracias por una vida que ha sobrepasado mis expectativas...

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Mercado.	8
1.2. Elementos de la teoría de procesos estocásticos.	9
1.3. Ecuación de Black-Scholes.	13
1.4. Relación entre opciones con doble barrera.	24
2. Solución mediante el método de separación de variables	27
2.1. Reducción a la ecuación de calor.	28
2.2. Solución General.	30
2.3. Casos particulares.	34
2.4. Comportamiento asintótico.	41
3. Solución mediante método de reflexiones	45
3.1. Solución General.	45
3.2. Casos particulares.	52
3.3. Comportamiento asintótico.	60
4. Métodos numéricos	67
4.1. Programa.	67
4.2. Criterio.	72
Conclusiones	77

Introducción

En este trabajo abordaremos el problema de opciones con doble barrera. Comenzaremos por explicar a qué nos referimos con una opción, para lo cual entraremos un poco en su historia hasta llegar al modelo matemático que se emplea para hacer cálculos.

Es bien sabido que desde el inicio de la humanidad, se tuvo la necesidad de organización en lo que hoy llamamos sociedad. Los bienes que se poseen tienen que ser distribuidos de manera adecuada para su uso y se debe saber qué hacer para que se tengan provisiones a lo largo del tiempo. En este sentido, la cuestión de poseer cosas, darles valor y hacer intercambio con ellas hizo de manera inmediata la necesidad de contar con un mercado en el que se pueden comprar y vender artículos, así como servicios. De esta forma se da comienzo a las cuestiones financieras. A lo largo del tiempo, se forja todo un sistema para el cual instrumentos como el dinero, contratos hasta llegar a aquellos más recientes como las *opciones* y futuros se sumergen en un mecanismo de funcionamiento con reglas específicas.

La importancia de estas operaciones cada vez tomó más relevancia. Fue entonces cuando se tiene la necesidad de crear organismos reguladores para el buen funcionamiento del mercado financiero. Con ello, también se inicia el estudio de manera formal y las finanzas junto con la economía comienzan su auge. Herramientas como las matemáticas ayudan a la modelación del sistema y se desarrolla toda una teoría alrededor de esto. Es entonces cuando en la primera mitad del siglo XX comienzan a concretarse las bases del modelo, comenzando con las ideas nuevas de la teoría de la medida aplicadas en el área de la probabilidad. Posteriormente, las ideas de los procesos estocásticos toman forma con trabajos como los de A. Markov y L. Bachelier. Continuando este desarrollo se sigue hasta llegar a las aplicaciones, y es donde importantes contribuciones de N. Wiener y R. Brown asientan las ideas del movimiento browniano.

Toda la maquinaria hace funcionar la modelación matemática para la valuación de los precios de opciones. Es cuando F. Black y M. Scholes en 1973 publican su trabajo en el modelo conocido como Black-Scholes [2] y posteriormente R. C. Merton lo formaliza y presenta una fórmula para el precio de una opción cuyo precio está restringido a una condición de frontera [3]. En 1979, M. Goldman, H. Sosin y M. Gatto presentan soluciones de forma cerrada para todos los tipos de opciones con

barreras [4]. Con estos trabajos fue “relativamente sencillo” obtener las formulas exactas para casos de opciones con una barrera. Una extensión inmediata para los modelos con una barrera fue considerar modelos con doble barrera. Basados en los resultados de P. Lévy, en 1992, N. Kunimoto y M. Ikeda derivan una fórmula para opciones con doble barrera con función de pago restringida por dos fronteras de tipo exponencial dependientes del tiempo [5]. Posteriormente, en 1996, el trabajo de H. German y M. Yor, empleando la transformada de Laplace se obtiene una fórmula para una opción con doble barrera respecto a su tiempo de expiración [7]. Desde entonces, se lleva un largo camino para la aplicación de los conocimientos matemáticos para seguir desarrollando la teoría de opciones con doble barrera en el mercado financiero alrededor del mundo.

Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precio en productos agroindustriales (commodities), en condiciones de elevada volatilidad. A partir de 1972 comenzaron a desarrollarse los instrumentos derivados financieros, cuyos activos de referencia son títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros. Los principales derivados financieros son: futuros, opciones, opciones sobre futuros, warrants y swaps. Ahora: ¿cómo regular el mercado de opciones? El mercado de opciones tuvo inicio a principios del siglo XX y tomó forma en la Put and Call Brokers and Dealers Association, aunque no logró desarrollar un mercado secundario ni contar con mecanismos que aseguraran el cumplimiento de las contrapartes. El mercado formal de opciones se originó en abril de 1973, cuando The Chicago Board of Trade (CBOT) creó una bolsa especializada en este tipo de operaciones, The Chicago Board Options Exchange (CBOE). Dos años más tarde, se comenzaron a negociar opciones en The American Stock Exchange (AMEX) y en The Philadelphia Stock Exchange (PHLX). En 1976 se incorporó The Pacific Stock Exchange (PSE). Desde entonces se lleva todo un proceso para regular el mercado alrededor del mundo entero, en cuyos centros financieros se realizan operaciones a cada momento y de entre los cuales podemos destacar: *Bourse de Montreal*, *Nasdaq OMX*, *Hong Kong Exchanges*, *EUROEX*, etc. Actualmente se tiene que tan solo en enero de 2015 se realizaron alrededor del mundo 279,284,637 contratos, cifra que contrasta con los 3,527,574,799 contratos realizados en 2014. (Veáse [13].)

En México, en 1998 el Mercado Mexicano de Derivados (*MexDer*) comienza operaciones para el comercio de opciones. En 2014 se realizan 562,037 contratos.

Parte importante de este trabajo se concentra en ver el comportamiento de la liquidación cuando las barreras X_1 y X_2 tienen un comportamiento asintótico. Será fundamental el papel que juega

$$\ell := \ln \left(\frac{X_2}{X_1} \right).$$

Por el hecho de que si la distancia entre las barreras se va a infinito, entonces ℓ también se va a infinito y si la distancia entre las barreras se va a cero, entonces ℓ

también se va a cero.

También es importante el papel que tiene la variable correspondiente al tiempo “normalizado” τ , en el sentido de que es una variable adimensional y que es la clave para determinar cual de las dos fórmulas es efectiva en casos particulares.

Nuestro trabajo se enfoca en obtener soluciones exactas para saber el precio de opciones con doble barrera. Los métodos que emplearemos son conocidos. El primero es mediante el método de separación de variables y el segundo por el método de reflexiones. La aportación de este trabajo está reflejada en el análisis de la convergencia de las series para la solución, la eficiencia de dicha solución para distintos valores de parámetros como el tiempo, el precio del activo subyacente y la distancia entre las barreras. Emplearemos métodos numéricos y asintóticos para obtener un criterio de cuándo usaremos una u otra fórmula.

En el primer capítulo daremos los elementos que utilizaremos a lo largo del trabajo, así como parte de la teoría financiera de opciones, los resultados de la teoría de procesos estocásticos y otros resultados importantes que emplearemos en la obtención de las fórmulas, tales como las transformadas de Fourier y de Laplace.

En el segundo capítulo se dará una solución general al precio de una opción con doble barrera de clase up-and-out-down-and-out utilizando el método de separación de variables y utilizaremos la fórmula obtenida para casos de opciones europeas de tipo call y put y opciones de tipo supershare. Así mismo, se hará un análisis asintótico de la fórmula obtenida.

En el tercer capítulo obtendremos una fórmula general para el precio de una opción con doble barrera de clase up-and-out-down-and-out mediante el método de reflexiones y también se aplicará para los casos particulares del capítulo 2. También se finaliza el capítulo con un análisis asintótico de la fórmula obtenida.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se hace un análisis de las dos fórmulas para obtener un criterio que nos dice cuando una fórmula es eficiente para parámetros específicos. Se muestran los programas empleados para calcular el precio de opciones para ambas formulas. El análisis se hace para cuando el tiempo es cercano a cero o al tiempo de expiración, o cuando la distancia de las barreras se acerca a cero o a infinito.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Para entender que es una opción, primero consideramos un mercado donde se compran y venden productos o mercancías. Posteriormente, tenemos que un “derivado financiero” es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo. El activo del que depende se le llama “activo subyacente”. Por ejemplo, un bono de inversión sobre el precio de la plata.

Una opción es un instrumento financiero derivado donde se establece un contrato que le da al comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender bienes o valores a un precio determinado, conocido como precio de ejercicio o *strike* hasta una fecha de vencimiento. La persona que compra el derecho a comprar o vender se le llama tenedor o titular o *holder*, el vendedor tiene la obligación de vender o comprar el activo que se pactó en el contrato. En este caso, el activo subyacente puede ser una acción, un bono, etcétera. Hay dos tipos de opciones: *call* que es una opción de compra y *put* que es una opción de venta.

Se tienen las siguientes clasificaciones para las opciones:

Opciones tipo “plain vanilla”.

La característica de este tipo de opciones es que depende de cuando se ejerce el derecho de dicha opción.

- *Opción Europea*. Es aquella cuyo tiempo de ejercicio se realiza solamente en el tiempo de expiración.
- *Opción Americana*. En este caso, el tenedor puede ejercer en cualquier tiempo antes de la fecha de expiración.

Opciones tipo “vanilla sin derecho de ejercicio”.

Opciones con el mismo pago de las tipo vanilla pero con diferentes tiempo de ejercicio, por ejemplo:

- *Opciones Bermuda*. Solo pueden ser ejercidas en determinados momentos entre la fecha de compra y vencimiento. El ejercicio se lleva a cabo en días particulares.

- *Opciones Canarias*. El tenedor tiene el derecho de ejercicio en momentos que no están dentro de un conjunto de tiempos dado.

Opciones exóticas con derecho de ejercicio “vanilla”.

Opciones con el mismo tiempo de vencimiento de las tipo vanilla pero con pago distinto.

- *Opciones Basket*. El precio depende del promedio de varios activos.
- *Opciones de intercambio*. El tenedor tiene el derecho de cambiar un activo subyacente por otro en el momento de vigencia.

Opciones exóticas que dependen de su trayectoria.

Opciones cuyo pago y tiempo de ejercicio dependen del comportamiento del activo subyacente en un período de tiempo.

- *Opciones Asiáticas*. El pago no está dado por el precio del activo subyacente al tiempo de vencimiento, sino por el precio del activo subyacente en un período de tiempo fijado con anterioridad.
- *Opciones Binarias*. El pago puede ser una cantidad fija o dependiente de el precio al tiempo de vencimiento.
- *Opciones con barreras*. La opción pierde su valor o se ejerce el derecho si el precio alcanza un valor fijo.

Como ejemplo, usaremos las opciones europeas, ya que son las más sencillas dentro de las clases que se mencionan arriba. Se consideran los siguientes elementos en la formulación:

- Fecha de expiración: T (fin del período).
- Período de vigencia: $[0, T]$.
- Precio del bien de referencia en el tiempo $t \in [0, T]$: $S(t)$.
- Precio de ejercicio: K .

Ahora consideremos los dos tipos de opciones europeas:

1. Call. Si $S(T) > K$, entonces el tenedor usa su derecho y compra el subyacente en el precio K y luego lo vende a precio $S(T)$. Entonces su ganancia es $S(T) - K$. Si $S(T) < K$ entonces el tenedor no usa su derecho y su ganancia será cero. Entonces podemos escribir

$$\text{Ganancia} = (S(T) - K)_+.$$

2. Put. Si $S(T) < K$, entonces el tenedor usa su derecho y vende el subyacente en el precio K y después de comprarlo a precio $S(T)$. Entonces su ganancia es $K - S(T)$. Si $S(T) \geq K$ entonces el tenedor no usa su derecho y su ganancia será cero. Entonces se escribe

$$\text{Ganancia} = (K - S(T))_+.$$

Cabe resaltar que la función generada por la ganancia de este tipo de opciones es continua.

Otro tipo de opciones en las que estamos interesados es en las opciones tipo *Supershare*. A este tipo de opción se le da el nombre de opción digital, debido a que la función de pago es una función discontinua respecto al precio final del activo subyacente. La liquidación al final del período se escribe

$$SS_T = \frac{S_T}{K_1} \mathbb{1}_{(K_1 < S_T < K_2)},$$

donde S_T es el precio del bien de referencia al tiempo T y $\mathbb{1}$ es la función indicadora y los valores de K_1 y K_2 son preestablecidos.

Opciones con barrera.

A lo largo de la vida de una opción se tienen cambios en el precio del bien de referencia. Es natural pensar en que estos cambios no son muy grandes. Pero no se puede tener control en todos los agentes que intervienen en el cambio del precio y puede que bajo condiciones anómalas haya cambios muy altos en el precio. Para evitar situaciones de este tipo, se formula un caso de barreras, es decir, niveles de precios en los que si son alcanzados entonces se define si usar o no el derecho de ejercer la opción.

Existen muchos tipos de opciones con barreras, en seguida listaremos solo unas de ellas.

Opciones con una barrera.

Para el caso de una barrera X_0 se tienen las formulaciones de las siguientes opciones:

1. *Up-and-out.*

La opción carece de valor si el precio del activo subyacente S_t alcanza por abajo a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

2. *Down-and-out.*

La opción carece de valor si el precio del activo subyacente S_t alcanza por arriba a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

3. *Up-and-in.*

La opción carece de valor a menos que el precio del activo subyacente S_t alcance por abajo a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

4. *Down-and-in.*

La opción carece de valor a menos que el precio del activo subyacente S_t alcance por arriba a la barrera X_0 antes de la fecha de expiración.

Opciones con doble barrera.

Para el caso de doble barrera, contamos con una barrera inferior X_1 y una barrera superior X_2 . Se tienen las siguientes formulaciones:

1. *Tipo Up-and-out-down-and-out.*

La opción se realiza si y sólo si durante la vida de la opción se tiene $X_1 < S_t < X_2$. Si para algún t_0 el precio del bien de referencia alcanza X_1 o X_2 entonces la opción pierde su valor.

2. *Tipo Up-and-out-down-and-in.*

La opción se realiza si y sólo si durante la vida de la opción se tiene $S_t > X_1$ y S_t alcanza por abajo la barrera superior X_2 .

3. *Tipo Up-and-out-up-and-in.*

La opción se realiza si y sólo si durante la vida de la opción se tiene $S_t > X_1$ y S_t alcanza por arriba al barrera superior X_2 . Se considera en este caso $S_0 > X_2$.

1.1. Mercado.

Para la valuación de las opciones se hace uso del modelo propuesto por Fischer Black y Myron Scholes en 1973. Conocido popularmente como el modelo *Black-Scholes*. Según el modelo, se asumen las siguientes “condiciones ideales” para el mercado (de acuerdo con [2]):

1. En un corto plazo, la tasa de interés r es conocida y constante a lo largo del tiempo.
2. La volatilidad σ es conocida y constante durante la vida de la opción.
3. El precio de una acción es un proceso browniano geométrico, además la tasa de variación de la rentabilidad de las acciones es constante.
4. No hay costos de transacción en la compra o venta de acciones o de la opción.
5. Un inversionista que venda una opción o una acción en corto plazo tendrá disponibles los recursos producto de la venta.

6. No hay penalizaciones para la venta a corto plazo.

Nos concentramos en este momento en obtener una fórmula para determinar el valor esperado de una opción. Este método es distinto al que fue empleado originalmente por Black-Scholes.

Se considera $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$ el proceso estocástico que modela el precio de una acción. También tenemos $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ como el proceso sin riesgo de una inversión. Se tiene entonces

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde B_0 es el capital inicial y r representa una tasa de interés.

Como veremos más adelante, S_t es un proceso del tipo *Movimiento Browniano Geométrico*, el cual se utiliza en la formulación del modelo de Black-Scholes. Con estos dos elementos se formula de manera precisa el comportamiento del valor de una opción.

La derivación de esta fórmula de Black-Scholes requiere algunos supuestos no intuitivos. Como camino hacia esto, vamos a definir algunos términos básicos sobre el riesgo, y luego vamos a invocar el Lema de Ito para obtener la ecuación de Black-Scholes. La idea básica es que, se hace perfectamente razonable suponer que la gente es neutral al riesgo. Este es un paso muy necesario, sin embargo, para la mayoría de las personas el riesgo es un agente no muy agradable. Entonces de alguna manera buscaremos eliminar el factor de riesgo para la obtención de la fórmula.

Vamos a introducir el concepto de no arbitraje, el cual es un concepto importante para nuestros fines.

1.2. Elementos de la teoría de procesos estocásticos.

A continuación se tienen los conceptos básicos para la formulación de la ecuación de Black-Scholes. Usamos la notación \mathbb{P} y \mathbb{E} para probabilidad y esperanza, respectivamente.

Definición 1. Sea Γ un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de Γ . Sea \mathbb{P} una medida de probabilidad. Entonces $(\Gamma, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamado *espacio medible*.

Un *proceso estocástico* es una familia $X = X(t)$, $t \geq 0$ de variables aleatorias \mathbb{R} -valuadas, las cuales están bien definidas en $(\Gamma, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dado un $\omega \in \Gamma$, una trayectoria del proceso X es un mapeo $t \mapsto X(t, \omega)$, para todo $t \geq 0$.

Definición 2. Sea Γ un conjunto no vacío. Supongamos que $\mathcal{F}(t)$ es una σ -álgebra para cada $t \geq 0$, tal que si $s \leq t$, cada conjunto de $\mathcal{F}(s)$ está en $\mathcal{F}(t)$. La colección de σ -álgebras $\mathcal{F}(t)$, con $t \geq 0$ es llamada una *filtración*.

Definición 3. Un *proceso estocástico adaptado* es un proceso $X(t)$, $t \geq 0$ tal que $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible, donde $\mathcal{F}(t)$ pertenece a la filtración \mathcal{F} .

Definición 4. Un proceso estocástico W_t , con $t > 0$ es un *movimiento Browniano* si

- $W(0) = 0$.
- $W(t)$ es continuo casi seguramente.
- Para $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ se tiene que $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ es independiente de W_{t_j} , con $j < i$.
- $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, para $0 \leq s \leq t$, donde $N(0, t)$ es la distribución normal con esperanza 0 y varianza $t - s$.

Consideraremos un período de tiempo $[0, T]$. Queremos conocer el conjunto de eventos factibles para cada $t \in [0, T]$, el cual debe ser una σ -álgebra de tal forma que el proceso estocástico que modela el precio de una acción debe ser un proceso estocástico adaptado a alguna filtración $\mathcal{F}(t)$ para $t \in [0, T]$. Encontrar el valor esperado de

$$\int_0^s Y(t) dW_t,$$

con W_t un movimiento Browniano con filtración $\mathcal{F}(t)$, para $t > 0$ y $Y(t)$ un proceso estocástico adaptado a \mathcal{F} es nuestro objetivo en este momento. Dicho objetivo se alcanza cuando se emplea la teoría de Ito para sobrepasar el obstáculo del hecho que W_t no es diferenciable y por lo tanto la integral de Lebesgue $\int_0^s dW_t$ no tiene sentido. Pero con la teoría de Ito se aborda este problema de manera rigurosa (véase [9]). Entonces se considerará de ahora en adelante dW_t en el sentido de Ito.

A continuación daremos un bosquejo general de la construcción de la integral de Ito.

Definición 5. Sea $0 \leq a < b$. Denotamos como $N[a, b]$ la familia de procesos estocásticos $f(\cdot) = \{f(t), t \geq 0\}$ tales que

- $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es medible,
- f es adaptado a \mathcal{F}^W , donde $\mathcal{F}^W := \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ (decimos que \mathcal{F}^W es la σ -álgebra generada por W) y
- $f \in L^2([a, b] \times \Gamma)$.

Definición 6. Denotamos a $M[a, b]$ como la familia de *procesos estocásticos escalonados*. Es decir, $f \in M[a, b]$ si f es constante en el intervalo $[t_j, t_{j+1})$ para $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (consideramos a la partición (t_1, t_2, \dots, t_n) arbitraria).

Ahora tenemos la integral de Ito para procesos escalonados en la siguiente definición.

Definición 7. Sea $f \in M[a, b]$, entonces la *integral de Ito* I de la función f es

$$I(f) = \int_a^b f(t) dW_t := \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) \Delta W_j,$$

donde $\Delta W_j = W_{j+1}(t) - W_j(t)$.

Tenemos las siguientes propiedades para la integral de Ito.

Teorema 8. Sea $f \in M[a, b]$. Entonces

- $$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dW = \alpha \int_a^b f dW + \beta \int_a^b g dW.$$
- $I(f)$ es una variable aleatoria con esperanza cero y

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f dW \right]^2 = \int_a^b \mathbb{E}[f(t)^2] dt = \mathbb{E} \left[\int_a^b f^2(t) dt \right],$$

la cual es conocida como la isometría de Ito.

Definición 9. Una sucesión de procesos estocásticos $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la norma L^2 al proceso $f(t)$ si

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Teorema 10. $M[a, b]$ es denso en $N[a, b]$ con la norma L^2 .

Con lo anterior se puede definir la integral de Ito para cualquier $f \in N[a, b]$.

Definición 11. Sea $f \in N[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M[a, b]$ tal que $f_n \rightarrow f$ y denotamos la *integral del proceso* f como

$$I(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dW.$$

Se tiene los siguientes resultados.

Teorema 12. Sea $f \in N[a, b]$. Entonces $I(f)$ es independiente a la sucesión aproximante $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, además

$$\mathbb{E}[I(f)] = 0$$

y

$$\text{var}(I(f)) = \mathbb{E} \left[\int_a^b f dW \right]^2 = \int_a^b \mathbb{E}[f^2(t)] dt.$$

Con esto, se tiene que considerando X_0 como el valor en el tiempo 0 del proceso estocástico X , se tiene que $dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dW_t$ es una contracción a la ecuación

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(u)X_u du + \int_0^t \sigma(u)X_u dW_u, \quad \forall t \in [a, b], \quad (1.1)$$

donde la primera integral es en el sentido de Lebesgue y la segunda, en el sentido de Ito.

Definición 13. Un *proceso de Ito* X_t es aquel que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dW_t.$$

Definición 14. Un proceso estocástico X_t es un *Movimiento Browniano geométrico* si satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

donde μ y σ son constantes y W_t es un movimiento Browniano.

Teorema 15 (Lema de Ito). *Sea x_t un proceso estocástico tal que*

$$dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dW_t.$$

Sea $y_t = F(x_t, t)$ una función del proceso estocástico x_t tal que $F(x_t, t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ (una función de clase \mathcal{C}^2 en la primera entrada y de clase \mathcal{C} en la segunda). Entonces y_t es un proceso estocástico tal que

$$dy_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x_t, t) + f(x_t, t) \frac{\partial F}{\partial x_t} + \frac{1}{2} g(x_t, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_t^2}(x_t, t) \right) dt + \left(g(x_t, t) \frac{\partial F}{\partial x_t} \right) dW_t.$$

Es importante considerar el concepto de *estrategia auto-financiable*. Un proceso $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ compuesto de procesos *progresivamente continuos* (véase [8]) sobre un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Definición 16. Sea el *proceso de riqueza* $V(\phi)$ de quien emplea una estrategia ϕ sobre un intervalo $[0, T]$ de la forma

$$V_t(\phi) = \phi_1 S_t + \phi_2 B_t,$$

donde S_t es un proceso estocástico relacionado a una acción y B_t es un monto obtenido en una inversión sin riesgo. (Entonces ϕ representa como vamos a jugar nuestro capital en el mercado financiero.) Se dice que ϕ es *auto-financiable* si satisface

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_{1,u} dS_u + \int_0^t \phi_{2,u} dB_u, \quad \forall t \in [0, T].$$

Denotamos por Φ como la clase de todas las estrategias auto-financiables.

Definición 17. Se dice que una estrategia auto-financiable ϕ es un *arbitraje* si

$$\mathbb{P}\{V_0(\phi) = 0\} = 1$$

y el proceso de riqueza de ϕ satisface

$$\mathbb{P}\{V_T(\phi) \geq 0\} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\{V_T(\phi) > 0\} > 0.$$

Denotemos como Φ como el conjunto de todas las estrategias posibles ϕ . Decimos que un mercado $\mathcal{M} = (S, B, \Phi)$ está libre de arbitraje si no existen estrategias en Φ que satisfagan las condiciones la definición anterior.

Definición 18. Un *proceso descontado* S_t^* de S_t es aquel que satisface

$$S_0^* = S_0 \quad \text{y} \quad S_t^* = e^{-rt} S_t.$$

Se tiene que \mathcal{M} por sí sola contiene estrategias que no necesariamente genera una martingala para el proceso V_t . Entonces se emplean herramientas como la *medida equivalente martingala* con la cual se obtiene una medida de probabilidad \mathbb{P}^* tal que el proceso de descuento de cualquier estrategia auto-financiable es una martingala local bajo \mathbb{P}^* . Con esto se cumple las condiciones en el modelo de Black-Scholes dadas en la siguiente definición:

Definición 19. Una estrategia $\phi \in \Phi$ se dice \mathbb{P}^* -*admisibile* si el proceso de descuento

$$V_t^*(\phi) = B_t^{-1} V_t(\phi), \quad \forall t \in [0, T],$$

es una martingala bajo \mathbb{P}^* .

El mercado en el que estamos interesados es aquel en el que se cumple la propiedad anterior, por lo que le llamamos mercado de Black-Scholes a $\mathcal{M}_{BS} = (S, B, \Phi(\mathbb{P}^*))$.

1.3. Ecuación de Black-Scholes.

Intentamos modelar el cambio producido de $\frac{dS}{S}$. La forma más natural de analizar este cambio es mediante dos partes. La primera parte corresponde al agente sin riesgo en el mercado, tal como una inversión sin riesgo en un banco. Esto nos da la contribución μdt . A μ se le conoce como una tasa de apreciación sobre el precio de la acción. La segunda parte se considera como el agente con riesgo, donde agentes externos afectan en el mercado directamente en el precio con la contribución σdW_t , donde σ es la volatilidad en el mercado. De forma resumida tiene que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{1.2}$$

es decir, el proceso es un movimiento browniano geométrico.

Un resultado importante (véase [6]) es que con probabilidad 1,

$$dW_t^2 \rightarrow dt \quad \text{como} \quad dt \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Empleando la fórmula de Ito, se tiene que la solución a (1.2) es

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ahora, para una función $f(S)$ de clase $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ se puede aplicar la expansión de Taylor de la forma

$$df = \frac{df}{dS} dS + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} dS^2 + \dots,$$

donde solo consideramos los términos después de los puntos, ya que se consideran de una magnitud muy pequeña.

Se tiene que

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dW_t^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dW_t + \mu^2 S^2 dt^2,$$

y cuando $dt \rightarrow 0$, aplicando (1.3) se tiene

$$dS^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt.$$

De esta forma, solo considerando los dos primeros términos de la expansión de Taylor (considerando que $dX = O(\sqrt{dt})$ los demás términos de la serie tienen un orden menor que $O(dt)$) y así

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS} (\sigma S dW_t + \mu S dt) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dW_t + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt \end{aligned}$$

De manera más general, si consideramos $f(S, t)$, la expansión de Taylor está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \dots$$

Consideremos $Y(S, t)$ como la función que nos da el valor de una opción. Entonces por lo anterior, se tiene que

$$dY = \sigma S \frac{\partial Y}{\partial S} dW_t + \left(\mu S \frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + \frac{\partial Y}{\partial t} \right) dt. \quad (1.4)$$

Consideremos un portafolio Π . Dicho portafolio representa una combinación de las inversiones realizadas por una persona en acciones, bonos, etc. En este caso tenemos una opción y una cantidad $-\delta$ de activos subyacentes. Entonces

$$\Pi = Y - \delta S,$$

con lo que

$$d\Pi = dY - \delta dS,$$

considerando a δ como una cantidad fija.

Entonces por las ecuaciones (1.2) y (1.4) se tiene que

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial Y}{\partial S} - \delta \right) dW_t + \left(\mu S \frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + \frac{\partial Y}{\partial t} - \mu \delta S \right) dt. \quad (1.5)$$

Ahora llegaremos a la ecuación de Black-Scholes suponiendo que no hay arbitraje. Consideramos al arbitraje como el hecho de tener un beneficio sin tener un capital inicial. Por ejemplo, la posibilidad de comprar un dólar en México a 15.6 pesos a crédito, luego venderlo en Chile por 16 pesos, cobrarlos y en ese mismo instante pagar el crédito para no generar algún costo extra. Entonces la ganancia por un solo dólar sería de 0.4 pesos, esto por efectuar la compra-venta de dólares en los distintos mercados.

Considerando un cambio en el portafolio se tiene que éste sólo depende de la cantidad que ponemos en activos subyacentes y opciones. Al ser Π un proceso autofinanciable, entonces $d\Pi = 0$. Por ser un proceso de Ito, se tiene que $d\Pi = 0$ implica

$$\sigma S \left(\frac{\partial Y}{\partial S} - \delta \right) dW_t = 0,$$

lo que ocurre si y sólo si $\delta = \frac{\partial Y}{\partial S}$.

Entonces la ecuación (1.5) se convierte en

$$d\Pi = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + \frac{\partial Y}{\partial t} \right) dt. \quad (1.6)$$

Veremos que la cantidad Π invertida sin riesgo tendrá el crecimiento de $r\Pi dt$ en el tiempo dt . Entonces si el lado derecho de (1.6) fuera mayor a esta cantidad, un oportunista podría tener beneficio sin riesgo garantizado por pedir prestado una cantidad Π para invertir en el portafolio dado. La ganancia de esta estrategia libre de riesgo sería mayor que el costo del préstamo. De forma contraria, si el lado derecho de (1.6) fuera menor que $r\Pi dt$ entonces el oportunista solo invierte todo en el banco. De cualquier forma el oportunista puede ganar sin riesgo, ni costos por manejo de activos. Este tipo de estrategias no las consideremos dentro del mercado \mathcal{M}_{BS} . En este caso, al no haber arbitraje, podremos calcular la tasa r libre de riesgo para este modelo cuya fórmula está dada por:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = r dt.$$

Por lo que tendremos necesariamente que

$$\begin{aligned} r\Pi dt &= r(Y - \delta S)dt \\ &= r\left(Y - \frac{\partial Y}{\partial S}S\right)dt \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}\right)dt, \end{aligned}$$

de la última igualdad se obtiene

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} + rS \frac{\partial Y}{\partial S} - rY = 0. \quad (1.7)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes*.

Al operador de la siguiente forma:

$$\Lambda := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r \quad (1.8)$$

lo utilizaremos como el operador de Black-Scholes. Este operador se puede interpretar como una medida de la diferencia entre la ganancia de la inversión en un portafolio (correspondientes a los primeros dos términos) y las ganancias de un depósito hecho en un banco (los cuales se ven reflejados en los dos últimos términos). Veremos que esto debe ser cero para opciones como las europeas, sin embargo esto no es general, ya que se puede ver que en aquellas que son americanas no se da la igualdad (véase [6]).

Para encontrar a Y de forma explícita debemos considerar algunos aspectos de relevancia. Primeramente, hallar la solución exacta para la ecuación de Black-Scholes bajo condiciones dadas no es posible de manera general. En ocasiones es necesario emplear métodos numéricos. Además, si la ecuación es de tipo hacia atrás, entonces se debe tener una condición final, como

$$Y(S, T) = G(S),$$

donde la función G es conocida. Consideramos que la función G es una función con propiedades adecuadas para poder hacer cálculos. En un principio pediremos que la función G es de variación acotada, esta condición se cumple, por ejemplo, cuando la función es continuamente diferenciable o continuamente diferenciable a trozos y no tiene discontinuidades excepto saltos. Entonces podremos encontrar Y en la región $t < T$. Finalmente, se deben tener condiciones de frontera para obtener una solución única.

El problema que se aborda de manera general será:

$$\begin{cases} \Lambda(Y)(S, t) = 0, \\ Y(S, T) = G(S), & S > 0, \\ Y(0, t) = G_1(t), & t < T, \\ Y(S, t) \sim G_2(S, t) & \text{(condición general).} \end{cases}$$

En el caso de una opción Europea tipo call, se tiene la función de pago

$$C(S, T) = (S - K)_+.$$

Las condiciones de frontera serán

$$C(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad C(S, t) \rightarrow S \quad \text{cuando} \quad S \rightarrow \infty.$$

Es natural pensar en estas condiciones. Para la primera se tiene que cuando $S = 0$ la ecuación de Black-Scholes se convierte en $\frac{\partial C}{\partial t}(0, t) = rC(0, t)$ y la función de pago sería $C(0, T) = (0 - K)_+ = 0$. Entonces la solución es $C(0, t) = C(0, T)e^{-r(T-t)} = 0$. Similarmente, cuando $S \rightarrow \infty$ entonces S será mayor a K (fijo) y entonces $C(S, t) \sim S$ conforme $S \rightarrow \infty$. Entonces el problema a resolver para una opción Europea tipo call es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(C)(S, t) = 0, \\ C(S, T) = (S - K)_+, \quad S > 0, \\ C(0, t) = 0, \quad t < T, \\ C(S, t) \sim S, \quad \text{cuando} \quad S \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

De manera similar, el problema a resolver para una opción Europea tipo put se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(P)(S, t) = 0, \\ P(S, T) = (K - S)_+, \quad S > 0, \\ P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad t < T, \\ P(S, t) \sim 0, \quad \text{cuando} \quad S \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Así mismo, se tiene que para una opción Supershare se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(SS)(S, t) = 0, \\ SS(S, T) = \frac{S}{K_1}, \quad K_1 < S < K_2, \\ SS(0, t) = 0, \quad t < T, \\ SS(S, t) \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad S \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

para valores fijos $K_1 < K_2$.

Transformadas de Fourier y Laplace.

En los métodos que abordaremos para la obtención de fórmulas para el precio de una opción se utilizarán las transformadas de Fourier y Laplace.

Definición 20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La *transformada de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R})$, denotada por $\hat{f} := \mathfrak{F}[f]$ está dado por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} d\xi,$$

para valores $\xi \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral existe.

Con el siguiente teorema se dan las condiciones para aplicar la transformada inversa de Fourier (véase [10]).

Teorema 21. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ y que en cualquier intervalo finito $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas a trozos con una cantidad finita de discontinuidades. Entonces si f es continua en $x \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Por otra parte, si f es discontinua en $x \in \mathbb{R}$, considerando $f(x^+)$ y $f(x^-)$ como los límites derecho e izquierdo, respectivamente, entonces

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Se puede mostrar que este proceso arroja una función única al aplicar la transformada inversa. Se tiene que en la definición (20) consideramos funciones $f \in L^1(\mathbb{R})$. Esta condiciones se puede cambiar por funciones f tales que $f \in L^2(\mathbb{R})$ y bajo ciertas condiciones se tiene el mismo resultado, pero por el momento nos basta con la definición dada.

Además emplearemos la transformada de Laplace (véase [1]).

Definición 22. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si la función f satisface:

- es continua a trozos en el intervalo $(0, \infty)$, y
- tiene orden exponencial $e^{\lambda t}$ (i.e. $|f(t)| < Me^{\lambda t}$ para todo $t > \lambda$ y algún $M > 0$),

entonces la *transformada de Laplace* es

$$\tilde{f}(s) := \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

para $s > \lambda$.

En el siguiente teorema se dan condiciones para obtener la transformada inversa de Laplace.

Teorema 23. *Si $\tilde{f}(z)$ (con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$) es la transformada de Laplace de una función $f(t)$ con orden $O(e^{x_0 t})$ (para algún $x_0 \in \mathbb{R}$), con f y f' continuas a trozos en cada intervalo finito, entonces*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iL}^{\gamma + iL} e^{rt} \tilde{f}(r) dr, \quad \gamma > \text{Re}(z_i),$$

donde $\{z_i\}$ son singularidades de $\tilde{f}(z)$ y también $\gamma > x_0$.

Solución a la ecuación de calor con valor inicial sobre \mathbb{R} .

Para resolver los problemas de calcular el precio de una opción de un tipo dado, es necesario resolver $\Lambda(Y)(S, t) = 0$ con condiciones iniciales y de frontera. Resulta que se puede hacer un cambio de variable (que veremos más adelante) con el cual transformamos la ecuación de Black-Scholes en la ecuación de calor. Por lo cual es necesario tener la solución a la ecuación de calor con valor inicial. Consideremos el problema:

$$\begin{cases} u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau), & \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.9)$$

La función g suponemos que pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(x, \tau) = g(x), \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}.$$

En esta sección nos enfocaremos a encontrar la solución del problema (1.9).

Teorema 24. *La solución general del problema (1.9) es*

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (1.10)$$

Demostración. Consideramos la transformada de Fourier para resolver:

$$\hat{f}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{-i\rho\nu} d\nu,$$

al multiplicar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\nu}$ en (1.9) y haciendo integración por partes se tiene

$$\begin{cases} \hat{u}_\tau(\nu, \tau) = (i\nu)^2 \hat{u}(\nu, \tau), \\ \hat{u}(\nu, 0) = \hat{g}(\nu). \end{cases}$$

La solución al problema anterior, (una ecuación diferencial de primer orden en τ) es

$$\hat{u}(\nu, \tau) = \hat{g}(\nu) e^{-\tau\nu^2}.$$

Usando la transformada inversa de Fourier se tiene la solución exacta para $u(x, \tau)$:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu) e^{-\tau\nu^2} e^{ix\nu} d\nu. \quad (1.11)$$

Sustituyendo \hat{g} en (1.11) se tiene

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\xi\nu} d\xi \right) e^{-\tau\nu^2 + ix\nu} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\nu^2 + ix\nu - i\xi\nu} g(\xi) d\xi d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\nu^2 - i\nu(\xi-x)} g(\xi) d\xi d\nu. \end{aligned}$$

Supongamos que g satisface las condiciones para aplicar el teorema de Fubini, entonces podemos cambiar el orden de integración, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\nu^2 - i\nu(\xi-x)} g(\xi) d\nu d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(\nu + i\frac{\xi-x}{2\tau})^2} d\nu d\xi. \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $\rho = \sqrt{2\tau} (\nu + i\frac{\xi-x}{2\tau})$ en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi. \end{aligned}$$

Que es precisamente la solución en (1.10). \square

Solución al caso: opción Europea tipo call.

Bajo las consideraciones para una opción Europea tipo call, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \Lambda(C)(S, t) = 0, \\ C(S, T) = (S - K)_+, & S > 0, \\ C(0, t) = 0, & t < T, \\ C(S, t) \sim S, & \text{cuando } S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.12)$$

Recordemos que Λ es el operador de Black-Scholes.

Teorema 25. *La solución de (1.12) es*

$$C(S, t) = SN(D_1) - Ke^{-r(T-t)}N(D_2),$$

donde

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad y \quad D_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Demostración. Hacemos $S = Ke^x$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$ y $C(S, t) = Ke^{px+q\tau}u(x, \tau)$.

Entonces

$$\begin{aligned} C_t(S, t) &= -K \frac{\sigma^2}{2} e^{px+q\tau} (qu(x, \tau) + u_\tau(x, \tau)), \\ C_S(S, t) &= e^{(p-1)x+q\tau} (pu(x, \tau) + u_x(x, \tau)), \\ C_{SS}(S, t) &= \frac{1}{K} e^{(p-2)x+q\tau} ((p^2 - p)u(x, \tau) + (2p - 1)u_x(x, \tau) + u_{xx}(x, \tau)). \end{aligned}$$

Al tomar

$$\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad p = -\frac{1}{2}(\lambda - 1) \quad \text{y} \quad q = -(p + \lambda)^2,$$

se tiene que $\Lambda(C)(S, t)$ se convierte en $u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau)$.

Aplicando el cambio de variables se tiene:

$$\begin{cases} u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau), & \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \left(e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x} \right)_+, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces, por el teorema (24) se tiene que

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)\xi} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\xi} \right)_+ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{\sqrt{2\tau}}(\xi - x)$. Entonces reescribimos la ecuación anterior como

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(z\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(z\sqrt{2\tau}+x)} \right)_+ e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Ahora se tiene que

$$e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(z\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(z\sqrt{2\tau}+x)} > 0 \Leftrightarrow z > -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(z\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(z\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &=: I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Ahora nos concentramos en resolver I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)(z\sqrt{2\tau}+x) - \frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z - \sqrt{\frac{\tau}{2}}(\lambda+1))^2} dz \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \sqrt{\frac{\tau}{2}}(\lambda+1)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho, \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(\lambda+1)} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho, \\ &= e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} N(d_1), \end{aligned}$$

donde

$$\rho = z - \sqrt{\frac{\tau}{2}}(\lambda + 1), \quad d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(\lambda + 1) \quad \text{y} \quad N(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\nu} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho.$$

La integral I_2 es idéntica a I_1 excepto por el factor $\lambda + 1$ que en este caso es $\lambda - 1$. Es decir,

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2\tau} N(d_2),$$

donde $d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(\lambda - 1)$. Finalmente, regresando a las variables originales se tiene que

$$C(S, t) = SN(D_1) - Ke^{-r(T-t)}N(D_2),$$

donde

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad D_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Finalmente se puede ver que cuando $S \downarrow 0$ entonces $\ln(\frac{S}{K}) \rightarrow -\infty$, por lo que $N(D_{1,2}) = 0$ cuando $S = 0$. Así, $C(0, t) = 0$ cuando $t < T$. Así mismo, cuando $S \rightarrow \infty$ se tiene que $\ln(\frac{S}{K}) \rightarrow \infty$. Por lo que $N(D_{1,2}) \rightarrow 1$. Entonces $C(S, t) \sim S - K$ y cuando S es suficientemente grande, entonces K es un valor sin relevancia sobre C . Concluimos que $C(S, t) \sim S$ cuando $S \rightarrow \infty$. \square

Para el caso de una opción Europea tipo put se tiene que $P(S, T) = (K - S)_+$, por tanto la solución cuando $S = 0$ se obtiene del problema cuando consideramos la ecuación de Black-Scholes $\frac{\partial P}{\partial t}(0, t) = rP(0, t)$ y la función de pago $P(0, T) = (K - 0)_+ = K$. Entonces la solución es $P(0, t) = P(0, T)e^{-r(T-t)} = Ke^{-r(T-t)}$. Cuando $S \rightarrow \infty$ se tiene $P(S, t) \rightarrow 0$ pues el valor de K es fijo y S lo rebasará en algún momento. Entonces el problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(P)(S, t) = 0, \\ P(S, T) = (K - S)_+, \quad S > 0, \\ P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad t < T, \\ P(S, t) \sim 0, \quad \text{cuando } S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.13)$$

Se tiene el siguiente resultado (cuya prueba es muy similar a la prueba anterior).

Teorema 26. *La solución a (1.13) está dado por*

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-D_2) - SN(-D_1),$$

donde

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad D_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

(Recordemos que N es la función de distribución acumulada para una variable aleatoria normal estándar.)

Finalmente, se tiene que para una opción Supershare se tiene el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Lambda(SS)(S, t) = 0, \\ SS(S, T) = \frac{S}{K_1}, & K_1 < S < K_2, \\ SS(0, t) = 0, & t < T, \\ SS(S, t) \rightarrow 0, & \text{cuando } S \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.14)$$

Teorema 27. *La solución al problema (1.14) es*

$$SS(S, t) = \frac{S}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{k_2 - \sigma^2(1-p)(T-t) - \ln\left(\frac{S}{K_1}\right)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-\sigma^2(1-p)(T-t) - \ln\left(\frac{S}{K_1}\right)}{\sigma\sqrt{2(T-t)}} \right) \right), \quad (1.15)$$

donde $p = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$, $q = -\frac{1}{4}(1 + \frac{2r}{\sigma^2})^2$ y $k_2 = \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$.

Demostración. Primero hacemos los cambios $S = K_1 e^x$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$ y $SS(S, t) = K_1 e^{px+q\tau} u(x, \tau)$. Consideramos $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$, $p = -\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ y $q = -(p + \lambda)^2$, (igual que en el teorema (25)) entonces $\Lambda(SS)(S, t)$ se convierte en $u_{xx}(x, \tau) = u_\tau(x, \tau)$ y con esto, queremos resolver

$$\begin{cases} u_{xx}(x, \tau) = u_\tau(x, \tau), \\ u(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \frac{e^{(1-p)x}}{K_1} \mathbb{1}_{(0, k_2)}(x),$$

con $k_2 = \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right)$. Aplicando el teorema (24) se tiene que

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

La integral anterior se calcula mediante la función de error, por lo que se tiene después de cálculos:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2K_1} e^{(1-p)x + (1-p)^2\tau} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{k_2 - 2(1-p)\tau - x}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-2(1-p)\tau - x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Luego,

$$SS(S, t) = K_1 e^{px+q\tau} u(x, \tau)$$

y después de regresar a las variables originales se tiene el resultado. \square

1.4. Relación entre opciones con doble barrera.

Se tiene que en las opciones con doble barrera, la clase up-and-out-down-and-out juega un papel fundamental, en el sentido de que las otras dos clases de opciones pueden derivarse de ésta. Es decir, conociendo la función de pago de la primera, se puede calcular el precio para las otras dos. Denotemos el valor de una opción con valor S al tiempo t como $\Upsilon(S, t)$, con subíndice 1, 2 o 3 para el tipo de opción correspondiente en la lista.

Para mostrar la relación entre las opciones con doble barrera, emplearemos primero las opciones con una barrera. Supongamos que tenemos una opción europea tipo *call*.

En [11] se puede ver que la solución al problema de calcular el precio con una barrera X_0 de clase down-and-out

$$\begin{cases} \Lambda(C_{DAO})(S, t, X_0) = 0, \\ C_{DAO}(S, T, X_0) = G(S), & S > X_0, \\ C_{DAO}(X_0, t, X_0) = 0, & t < T, \\ C_{DAO}(S, t, X_0) \sim S, & S \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.16)$$

donde $G(S) = (S - K)_+$ y se puede obtener mediante el método de las imágenes (y consideramos $C_{DAO}(S, t, X_0)$ como la opción europea tipo *call* de clase down-and-out al tiempo S, t y con barrera X_0).

Considerando el cambio de variables $S = X_0 e^x$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ y $C_{DAO}(S, t) = X_0 e^{px+q\tau} u(x, \tau)$, y escogiendo $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$, $p = -\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ y $q = -(p + \lambda)^2$ se tiene que el problema anterior se convierte en:

$$\begin{cases} u_{xx}(x, \tau) = u_\tau(x, \tau), \\ u(x, 0) = g(x), & x > 0, \\ u(0, \tau) = 0, & \tau > 0, \\ u(x, \tau) \sim e^{(1-p)x-q\tau}, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.17)$$

con $g(x) = \frac{G(X_0 e^x) e^{-px}}{X_0}$.

Si $u_0(x, \tau)$ es la solución al problema sin barreras

$$\begin{cases} u_{0,xx}(x, \tau) = u_{0,\tau}(x, \tau), \\ u_0(x, 0) = g(x), & x > 0, \\ u_0(x, \tau) \rightarrow 0, & x \rightarrow -\infty, \\ u_0(x, \tau) \rightarrow e^{(1-p)x-q\tau}, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

entonces conocemos a u_0 al aplicar el teorema (24). Con esto, la solución al problema (1.16) se escribe de la forma $u(x, \tau) = u_0(x, \tau) - u_0(2x_0 - x, \tau)$. Finalmente, la solución al problema (1.16) es aplicar el cambio de variable inverso, así

$$C_{DAO}(S, t, X_0) = X_0 e^{px+q\tau} u(x, \tau).$$

De manera explícita se tiene

$$C_{DAO}(S, t, X_0) = \begin{cases} 0 & S \leq X_0, \\ C(S, t) - \left(\frac{S}{X_0}\right)^{1-\lambda} C\left(\frac{X_0^2}{S}, t\right) & S > X_0, \end{cases}$$

donde $C(S, t)$ es a función correspondiente a la opción europea tipo call sin barreras al tiempo t y precio S .

Similarmente, el problema a resolver para una opción europea tipo call con barrera de clase up-and-out es

$$\begin{cases} \Lambda(C_{UAO})(S, t, X_0) = 0, \\ C_{UAO}(S, T, X_0) = G(S), & S < X_0, \\ C_{UAO}(X_0, t, X_0) = 0, & t < T, \\ C_{UAO}(0, t, X_0) = 0, & S \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.18)$$

cuya solución está dada por

$$C_{UAO}(S, t, X_0) = \begin{cases} C(S, t) - \left(\frac{S}{X_0}\right)^{1-\lambda} C\left(\frac{X_0^2}{S}, t\right), & S < X_0, \\ 0, & S \geq X_0. \end{cases}$$

Para el caso de opción europea tipo call con barrera de clase down-and-in introducimos las regiones

$$\begin{aligned} D_1 &= (0, X_0) \times (-\infty, T), \\ D_2 &= (X_0, \infty) \times (-\infty, T). \end{aligned}$$

Si $(S, t) \in D_1$ entonces $C_{DAI}(S, t) = C(S, t)$ y el problema a resolver en D_2 es

$$\begin{cases} \Lambda(C_{DAI})(S, t, X_0) = 0, \\ C_{DAI}(X_0, t, X_0) = C(X_0, t), & t < T, \\ C_{DAI}(S, T, X_0) = 0, & S > X_0, \\ C_{DAI}(0, t, X_0) \rightarrow 0, & S \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.19)$$

entonces la fórmula final es

$$C_{DAI}(S, t, X_0) = \begin{cases} C(S, t), & S < X_0, \\ \left(\frac{S}{X_0}\right)^{1-\lambda} C\left(\frac{X_0^2}{S}, t\right), & S \geq X_0. \end{cases}$$

Finalmente, para una opción europea tipo call con barrera de clase up-and-in se tienen dos casos (como en el ejemplo anterior). Para $(S, t) \in D_2$ se tiene que $C_{UAI}(S, t) = C(S, t)$ y en D_1 el problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(C_{UAI})(S, t, X_0) = 0, \\ C_{UAI}(X_0, t, X_0) = C(X_0, t), & t < T, \\ C_{UAI}(S, T, X_0) = 0, & S < X_0, \\ C_{UAI}(0, t, X_0) \sim S, & S \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.20)$$

donde la fórmula final es

$$C_{UAI}(S, t, X_0) = \begin{cases} \left(\frac{S}{X_0}\right)^{1-\lambda} C\left(\frac{X_0^2}{S}, t\right), & S \leq X_0, \\ C(S, t), & S > X_0. \end{cases}$$

Consideremos que $X_1 < S_0 < X_2$. Introduzcamos las regiones

$$\begin{aligned} D_1 &= (X_2, \infty) \times (-\infty, T), \\ D_2 &= (X_1, X_2) \times (-\infty, T), \end{aligned}$$

donde T es el tiempo de vigencia.

Si $(S, t) \in D_1$ entonces $\Upsilon_2(S, t)$ es una opción de una barrera de tipo *down – and – out* cuya barrera es $X_0 = X_1$. En este caso

$$\Upsilon_2(S, t) = \Upsilon_{DAO}(S, t, X_1).$$

Si $(S, t) \in D_2$ entonces se tiene una opción clase up-and-out-down-and-out. Entonces se tiene

$$\Upsilon_2(S, t) = \begin{cases} 0, & S < X_1, \\ \Upsilon_{DAO}(S, t, X_1) - \Upsilon_1(S, t), & X_1 \leq S \leq X_2, \\ \Upsilon_{DAO}(S, t, X_1), & S > X_2. \end{cases}$$

De manera similar, para opciones de clase up-and-out-up-and-in, consideremos primero que $S_0 > X_2$ y las mismas regiones D_1 y D_2 . Entonces se tiene

$$\Upsilon_3(S, t) = \begin{cases} 0, & S < X_1, \\ \Upsilon_{DAO}(S, t, X_1), & X_1 \leq S \leq X_2, \\ \Upsilon_{DAO}(S, t, X_1) - \Upsilon_{DAO}(S, t, X_2), & S > X_2. \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Solución mediante el método de separación de variables

En este capítulo abordaremos el problema de encontrar la solución exacta para el precio de una opción con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out mediante el método de separación de variables y mostraremos unos ejemplos para casos particulares. Además estudiaremos el comportamiento asintótico de la fórmula obtenida.

Denotaremos como Ω a la función del precio de una opción en general. El problema de calcular el precio de opciones con doble barrera de clase up-and-out-down-and-out tiene la siguiente forma matemática:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(\Omega)(S, t) = 0, \\ \Omega(S, T) = G(S), \quad X_1 < S < X_2, \\ \Omega(X_1, t) = 0, \quad t < T, \\ \Omega(X_2, t) = 0, \quad t < T, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

donde $G(S)$ es una función conocida y es de variación acotada. Esta función representa las ganancias que obtenemos al tiempo T según el tipo de opción.

Recordemos que X_1 y X_2 son las barreras inferior y superior, respectivamente. Cuando $S = X_1$ ó $S = X_2$ entonces al menos una barrera es alcanzada cuando aún está vigente la opción cuando $t < T$. Esto significa (según la formulación de esta clase de opciones) que perderá su valor, por lo que se le asigna el valor 0. Además, si $S \notin (X_1, X_2)$ entonces $\Omega(S, t) = 0$, ya que la condición de este tipo de opción es que S siempre está dentro de las barreras impuestas previamente.

2.1. Reducción a la ecuación de calor.

En las dos fórmulas que obtendremos emplearemos el siguiente cambio de variables (y transformación de la función también):

$$\begin{cases} S &= X_1 e^{\ell x}, \\ t &= T - \frac{2\ell^2 \tau}{\sigma^2}, \\ \Omega(S, t) &= X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau). \end{cases} \quad (2.2)$$

Este cambio nos llevará a transformar la ecuación de Black-Scholes a la ecuación de calor normalizada en el intervalo unitario. Posteriormente, se resolverá por dos métodos distintos, los cuales nos servirán para analizar el comportamiento de las soluciones para distintos valores de los parámetros t , S y ℓ .

A continuación se tiene un análisis de las dimensiones de los componentes de la ecuación de Black-Scholes y los respectivos cambios de variable.

Variable	Dimensión
t, T	tiempo
S, Ω	dinero
Ω_S	1
Ω_{SS}	dinero ⁻¹
Ω_t	dinero · tiempo ⁻¹
r	tiempo ⁻¹
σ^2	tiempo ⁻¹
$\ell = \ln(X_2/X_1)$	1
x	1
$\tau = \frac{\sigma^2}{2\ell^2}(T - t)$	1
u	1

Cuando nos referimos a tiempo, consideramos una unidad específica, como años, meses, semanas, etc. De igual forma, a dinero nos referimos a pesos (*MXN*), dólares (*USD*), euros (*EUR*), etc. Las demás dimensiones que están dadas en la tabla, nos muestran que ℓ , τ y $u(x, \tau)$ son *adimensionales*. En este caso particular, hemos dicho que transformaremos una ecuación diferencial estocástica a la ecuación de calor. Es decir, queremos encontrar un sentido *físico* a un modelo *financiero*, el cual contiene los parámetros mostrados en la tabla. Estos parámetros tienen un sentido financiero como la tasa de interés o la volatilidad. En un inicio, en la mayoría de las soluciones debemos escalar las variables dependientes e independientes con “valores comunes” para agrupar dichos factores tanto como sea posible.

La razón de este énfasis es que considerando S como el valor de un activo subyacente, la expresión

$$e^S = 1 + S + \frac{1}{2}S^2 + \dots,$$

carece de sentido si S tiene una dimensión no elemental (como dinero en este caso). Además notemos que ∂S se mide en la misma dimensión de S , pero $\partial S/S$ es adimensional.

Con la ecuación del calor, consideraremos los parámetros τ , x y ℓ , los cuales son adimensionales. Entonces podremos analizar la solución al problema en su expansión asintótica. El análisis asintótico comprende herramientas para analizar de una forma más adecuada la solución cuando los parámetros son muy grandes o muy pequeños. Así, obtendremos que una solución será lo bastante buena considerando solo un número fijo de sumandos en la expansión.

Teorema 28. *Sea Λ el operador de Black-Scholes y $\Omega(S, t)$ la función de pago de una opción. Entonces con el cambio de variables*

$$\begin{aligned} S &= X_1 e^{\ell x}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \tau &= \frac{\sigma^2}{2\ell^2}(T - t), \quad \tau > 0, \\ \Omega(S, t) &= X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \end{aligned}$$

el problema

$$\begin{cases} \Lambda(\Omega)(S, t) = 0, \\ \Omega(S, T) = G(S), \quad X_1 < S < X_2, \\ \Omega(X_1, t) = 0, \quad t < T, \\ \Omega(X_2, t) = 0, \quad t < T, \end{cases}$$

se transforma en

$$\begin{cases} u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau) \\ u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \\ u(1, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \end{cases}$$

para

$$\alpha = \ell \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right), \quad \beta = -(\ell - \alpha)^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{X_1} e^{-\alpha x} G(X_1 e^{\ell x}).$$

Demostración. Hacemos el cambio de variables y calculamos las derivadas en la ecuación de Black-Scholes

$$\begin{aligned} \Omega_t(S, t) &= -\frac{\sigma^2 X_1}{2\ell^2} e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u(x, \tau) + u_\tau(x, \tau)), \\ \Omega_S(S, t) &= \frac{1}{\ell} e^{(\alpha - \ell)x + \beta \tau} (\alpha u(x, \tau) + u_x(x, \tau)), \\ \Omega_{SS}(S, t) &= \frac{1}{X_1 \ell^2} e^{(\alpha - 2\ell)x + \beta \tau} ((\alpha^2 - \alpha\ell)u(x, \tau) + (2\alpha - \ell)u_x(x, \tau) + u_{xx}(x, \tau)). \end{aligned}$$

Entonces $\Lambda(\Omega)(S, t) = 0$ se convierte en

$$u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau) + q_1 u_x(x, \tau) + q_2 u(x, \tau), \quad (2.3)$$

donde

$$q_1 = \left(2\alpha - \ell + \frac{2\ell r}{\sigma^2}\right) \quad y \quad q_2 = \left(\alpha^2 - \ell\alpha + \frac{2r\ell}{\sigma^2}(\alpha - \ell) - \beta\right).$$

Tenemos que

$$q_1 = 0 \quad y \quad q_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \ell \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) \quad y \quad \beta = -(\ell - \alpha)^2,$$

entonces (2.3) se convierte en

$$u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau).$$

Además, cuando $t = T$ entonces $\tau = 0$. Entonces la condición inicial es

$$u(x, 0) = \frac{1}{X_1} e^{-\alpha x} G(X_1 e^{\ell x}) = g(x).$$

Finalmente, cuando $S = X_1$ entonces $x = 0$ y cuando $S = X_2$ entonces $x = 1$. Por lo que se tiene que $\Omega(X_1, t) = 0$ se transforma en $u(0, \tau) = 0$ y $\Omega(X_2, t) = 0$ se transforma en $u(1, \tau) = 0$ para cada $t < T$ y $\tau > 0$. \square

Introducimos adicionalmente a γ como la cantidad $\ell - \alpha$, con lo que $\beta = -\gamma^2$.

Cabe resaltar que $g(x)$ es una función cuyo soporte está contenido en $[0, 1]$ y es de variación acotada. Entonces de aquí en adelante, formalmente se define la función g de la siguiente forma:

$$g(x) := \begin{cases} \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Comenzaremos por resolver el problema de calcular una opción con doble barrera utilizando el primer método (la fórmula de Lagrange).

2.2. Solución General.

Teorema 29. *La solución al problema (2.1) es*

$$\Omega(S, t) = \begin{cases} 2S^{\frac{\ell-\gamma}{\ell}} X_1^{\frac{\gamma}{\ell}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2t^2}(\gamma^2 + (\pi j)^2)(T-t)} A_j \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases}$$

donde

$$\gamma = \ell \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right), \quad g(x) := \begin{cases} \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-(\ell-\gamma)x}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1), \end{cases}$$

con g una función de variación acotada y

$$A_j = \int_0^1 g(u) \sin(j\pi u) du,$$

que es conocido como el coeficiente de Fourier de la función g .

Demostración. Empleando el cambio de variables (2.2) y el teorema 28 se tiene que $\Lambda(\Omega)(S, t) = 0$ se convierte en

$$u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau). \quad (2.4)$$

Con esto, el problema inicial (2.1) lo reescribimos al hacer cambios de variable como

$$\begin{cases} u_\tau(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau), \\ u(x, 0) = g(x), & 0 < x < 1, \\ u(0, \tau) = 0, & \tau > 0, \\ u(1, \tau) = 0, & \tau > 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde

$$g(x) := \frac{G(X_1 e^{\ell x}) e^{-\alpha x}}{X_1}.$$

Se debe notar que $S \in (X_1, X_2)$ si y solo si $x \in (0, 1)$.

Usaremos la siguiente notación para la transformada de Laplace:

$$\tilde{g}(\omega) = \mathfrak{L}[g(s)](\omega) = \int_0^\infty g(s) e^{-s\omega} ds.$$

Multiplicando por $e^{-\omega\tau}$ a $u_\tau(x, \tau)$, integrando respecto a τ y haciendo integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u_\tau(x, \tau) e^{-\omega\tau} d\tau &= e^{-\omega\tau} u(x, \tau) \Big|_0^\infty + \omega \int_0^\infty u(x, \tau) e^{-\omega\tau} d\tau \\ &= -u(x, 0) + \omega \tilde{u}(x, \omega). \end{aligned}$$

De esta forma, de (2.5) se obtiene

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xx}(x, \omega) - \omega \tilde{u}(x, \omega) = -g(x), & 0 < x < 1, \\ \tilde{u}(0, \omega) = 0, & \tau > 0, \\ \tilde{u}(1, \omega) = 0, & \tau > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Se considerará un problema similar a (2.6) de la siguiente forma

$$\begin{cases} \tilde{u}_{x_0,xx}(x, \omega) - \omega \tilde{u}_{x_0}(x, \omega) = \delta(x - x_0), & 0 < x < 1, \\ \tilde{u}_{x_0}(0, \omega) = 0, & \tau > 0, \\ \tilde{u}_{x_0}(1, \omega) = 0, & \tau > 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

donde δ es la función delta de Dirac.

Según la solución al problema (2.7) mediante la fórmula de Lagrange se tiene

$$\tilde{u}_{x_0}(x, \omega) = -\frac{\tilde{u}_1(x_<, \omega)\tilde{u}_2(x_>, \omega)}{W(\tilde{u}_1(x, \omega), \tilde{u}_2(x, \omega))}, \quad (2.8)$$

donde

$$x_< = \min(x, x_0) \quad \text{y} \quad x_> = \max(x, x_0),$$

$\tilde{u}_{1,2}(x, \omega)$ son soluciones a los siguientes problemas

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1,xx}(x, \omega) - \omega\tilde{u}_1(x, \omega) = 0, \\ \tilde{u}_1(0, \omega) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{2,xx}(x, \omega) - \omega\tilde{u}_2(x, \omega) = 0, \\ \tilde{u}_2(1, \omega) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

y finalmente

$$W(\tilde{u}_1(x, \omega), \tilde{u}_2(x, \omega)) = \begin{vmatrix} \tilde{u}_1(x, \omega) & \tilde{u}_2(x, \omega) \\ \tilde{u}_{1,x}(x, \omega) & \tilde{u}_{2,x}(x, \omega) \end{vmatrix}.$$

Tenemos que una solución a (2.9) es

$$\tilde{u}_1(x, \omega) = \sinh(x\sqrt{\omega})$$

y una solución a (2.10) es

$$\tilde{u}_2(x, \omega) = \sinh((x-1)\sqrt{\omega}).$$

Calculando en este caso el Wronskiano se tiene

$$\begin{aligned} W(\tilde{u}_1(x, \omega), \tilde{u}_2(x, \omega)) &= \begin{vmatrix} \sinh(x\sqrt{\omega}) & \sinh((x-1)\sqrt{\omega}) \\ \sqrt{\omega} \cosh(x\sqrt{\omega}) & \sqrt{\omega} \cosh((x-1)\sqrt{\omega}) \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{\omega} (\sinh(x\sqrt{\omega}) \cosh((x-1)\sqrt{\omega}) \\ &\quad - \sinh((x-1)\sqrt{\omega}) \cosh(x\sqrt{\omega})) \\ &= \sqrt{\omega} \sinh(\sqrt{\omega}). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.8) se tiene

$$\tilde{u}_{x_0}(x, \omega) = -\frac{\sinh(x_<\sqrt{\omega}) \sinh((x_>-1)\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega} \sinh(\sqrt{\omega})}.$$

Por lo que

$$\tilde{u}(x, \omega) = \int_0^1 \tilde{u}_x(y, \omega)g(y) dy, \quad x \in (0, 1).$$

Luego, la solución de (2.7) se obtiene al aplicar la transformada de Fourier inversa a $\tilde{u}_x(y, \omega)$, es decir

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{u}_x(y, \omega) e^{\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_0^1 \tilde{u}_x(y, \omega) e^{\omega\tau} g(y) dy d\omega, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $c < 0$.

Cambiando el orden de integración, se tiene de (2.11) que

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_0^1 g(y) \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sinh(y_{<}\sqrt{\omega}) \sinh((y_{>} - 1)\sqrt{\omega})}{\sqrt{\omega} \sinh(\sqrt{\omega})} e^{\omega\tau} d\omega \right) dy \\ &=: \int_0^1 g(y) I_x(y) dy. \end{aligned}$$

Se tiene que $y_{<} = \min\{x, y\}$ y $y_{>} = \max\{x, y\}$. Para calcular I_x se aplica el teorema del residuo. El denominador de $I_x(u)$ solo puede ser cero si $\sqrt{\omega} = 0$ o $\sinh(\sqrt{\omega}) = 0$. El primer caso se descarta dado que $c < 0$ y del segundo se obtiene

$$I_x(y) = - \sum_{j=1}^{\infty} \text{Res}(\tilde{u}_x(y, \omega) e^{\tau\omega}, \omega = \omega_j),$$

donde ω_j satisface

$$\sinh(\sqrt{\omega_j}) = 0. \quad (2.12)$$

Resolviendo (2.12) se tiene que $\omega_j = -(\pi j)^2$ para $j \in \mathbb{N}$.

Recordando un resultado de la teoría de residuos en la que si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ donde g y h son holomorfas en una vecindad de $c \in \mathbb{C}$, $h(c) = 0$ y $h'(c) \neq 0$ entonces

$$\text{Res}(f(z), z = c) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

Con esto, considerando

$$\sinh'(\sqrt{\omega}) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \cosh(\sqrt{\omega}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_x(y) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sinh(ij\pi y_{<}) \sinh(ij\pi(y_{>} - 1))}{ij\pi \cosh(ij\pi) \frac{1}{2ij\pi}} e^{-(j\pi)^2\tau} \\ &= -2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sinh(ij\pi y_{<}) \sinh(ij\pi(y_{>} - 1))}{\cosh(ij\pi)} e^{-(j\pi)^2\tau}. \end{aligned}$$

Consideramos las identidades trigonométricas $\sinh(ik) = i \sin(k)$ y $\cosh(ik) = \cos(k)$, entonces

$$\begin{aligned}\sinh(ij\pi y_<) &= i \sin(j\pi y_<), \\ \sinh(ij\pi(y_> - 1)) &= i \sin(j\pi(y_> - 1)), \\ \cosh(ij\pi) &= (-1)^j.\end{aligned}$$

Tenemos una expresión reducida para I_x :

$$I_x(y) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j e^{-j^2\pi^2\tau} \sin(j\pi y_<) \sin(j\pi(y_> - 1)).$$

Como

$$\begin{aligned}\sin(j\pi y) &= \sin(j\pi(y - 1) + j\pi) \\ &= (-1)^j \sin(j\pi(y - 1)),\end{aligned}$$

se tiene que (2.11) se reduce a

$$\begin{aligned}u(x, \tau) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j e^{-j^2\pi^2\tau} \int_0^1 g(y) \sin(j\pi y_<) (-1)^j \sin(j\pi y_>) dy \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} \left(\int_0^x g(y) \sin(j\pi y) \sin(j\pi y) dy \right) \\ &\quad + \int_x^1 g(y) \sin(j\pi x) \sin(j\pi y) dy \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} \sin(j\pi x) \int_0^1 g(y) \sin(j\pi y) dy.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Recordando la definición de A_j y regresando a las variables originales, mediante $x = \ell^{-1} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)$ y $\tau = \frac{\sigma^2}{2\ell^2}(T - t)$ y recordando que $\Omega(S, t) = X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$ se obtiene la ecuación deseada, considerando $S \in (X_1, X_2)$. Cuando $S \notin (X_1, X_2)$ entonces $\Omega(S, t) = 0$ pues consideramos una opción de doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out. \square

2.3. Casos particulares.

Ahora emplearemos la fórmula para los casos de opciones europeas tipos call y put y opciones Supershare con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out. Para ello, emplearemos el siguiente lema.

Lema 30. *La solución de la integral*

$$\int_a^b e^{px} \sin(qx) dx$$

es

$$\frac{e^{pb}(p \sin(qb) - q \cos(qb)) - e^{pa}(p \sin(qa) - q \cos(qa))}{p^2 + q^2}.$$

Demostración. Calculando la integral de manera directa, se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{px} \sin(qx) dx &= \operatorname{Im} \left\{ \int_a^b e^{(p+iq)x} dx \right\} \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{(p+iq)x}}{p+iq} \Big|_{x=a}^b \right\} \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{(p+iq)b} - e^{(p+iq)a}}{p+iq} \right\} \\ &= \frac{e^{pb}(p \sin(qb) - q \cos(qb)) - e^{pa}(p \sin(qa) - q \cos(qa))}{p^2 + q^2}. \end{aligned}$$

□

Caso: opción europea tipo call.

Consideremos una opción europea tipo call con doble barrera tipo up-and-out-down-and-out. Entonces la función de liquidación es

$$G(S) = \begin{cases} (S - K)_+, & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2). \end{cases}$$

La constante K en un principio sólo tiene la condición de ser mayor que cero. Pero si $K > X_2$, entonces $(S - K)_+ = 0$ pues $S < X_2 < K$. Entonces consideramos $K \in (0, X_2)$. Claramente G es de variación acotada.

Entonces el problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(C)(S, t) = 0, \\ C(S, T) = (S - K)_+, & X_1 < S < X_2, \\ C(X_1, t) = 0, & t < T, \\ C(X_2, t) = 0, & t < T. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 31. *La función de precio de una opción europea tipo call con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out es*

$$C(S, t) = \begin{cases} 2S^{\frac{\alpha}{\ell}} X_1^{\frac{\gamma}{\ell}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\gamma^2 + j^2\pi^2)(T-t)} I_j(k) \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $\alpha = \ell\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)$, $\gamma = \ell - \alpha$,

$$I_j(k) = \frac{j\pi(e^{\gamma k} \cos(j\pi k) - (-1)^j \gamma) - \gamma(\sin(j\pi k))}{\gamma^2 + j^2\pi^2} - \frac{K}{X_1} \frac{j\pi(e^{-\alpha k} \cos(j\pi k) - (-1)^j e^{-\alpha}) + \alpha(e^{-\alpha k} \sin(j\pi k))}{\alpha^2 + j^2\pi^2}$$

y $k = \max\left\{\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K}{X_1}\right), 0\right\}$.

Demostración. Aplicando el cambio de variables (2.2), la función g tiene la siguiente forma:

$$g(x) = u(x, 0) = \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x} = \left(e^{\gamma x} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha x}\right)_+,$$

cuando $0 < x < 1$ y $g(x) = 0$ cuando $x \notin (0, 1)$.

Aplicando del teorema 29 se tiene que

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} A_j \sin(j\pi x). \quad (2.15)$$

La integral A_j de (2.15) en este caso es

$$A_j = \int_0^1 \left(e^{\gamma y} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha y}\right)_+ \sin(j\pi y) dy.$$

Como

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K}{X_1}\right)$$

y estamos integrando sobre el intervalo $(0, 1)$, entonces denotando

$$k = \max\left\{\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K}{X_1}\right), 0\right\}$$

se tiene que

$$A_j = \int_k^1 \left(e^{\gamma y} \sin(j\pi y) - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha y} \sin(j\pi y)\right) dy.$$

Por el lema (30) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_k^1 e^{\gamma y} \sin(j\pi y) dy &= \frac{e^\gamma(\gamma \sin(j\pi) - j\pi \cos(j\pi)) - e^{\gamma k}(\gamma \sin(j\pi k) - j\pi \cos(j\pi k))}{\gamma^2 + j^2\pi^2} \\ &= \frac{-(-1)^j j\pi e^\gamma - e^{\gamma k}(\gamma \sin(j\pi k) - j\pi \cos(j\pi k))}{\gamma^2 + j^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\int_k^1 e^{-\alpha y} \sin(j\pi y) dy = \frac{-(-1)^j j\pi e^{-\alpha} + e^{-\alpha k}(\alpha \sin(j\pi k) + j\pi \cos(j\pi k))}{\alpha^2 + j^2\pi^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{j\pi(e^{\gamma k} \cos(j\pi k) - (-1)^j \gamma) - \gamma(\sin(j\pi k))}{\gamma^2 + j^2\pi^2} - \\ &\quad \frac{K}{X_1} \frac{j\pi(e^{-\alpha k} \cos(j\pi k) - (-1)^j e^{-\alpha}) + \alpha(e^{-\alpha k} \sin(j\pi k))}{\alpha^2 + j^2\pi^2} \\ &= I_j(k). \end{aligned}$$

Con lo anterior, se tiene que

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} I_j(k) \sin(j\pi x).$$

Regresando a las función inicial, se tiene

$$\Omega(S, t) = X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau).$$

Después de sustituir $u(x, \tau)$ y regresar a las variables originales se llega a la igualdad (2.14). Lo anterior es válido para $S \in (X_1, X_2)$. Cuando $S \notin (X_1, X_2)$ entonces $C(S, t) = 0$ pues consideramos una opción de tipo up-and-out-down-and-out. \square

Caso: opción europea tipo put.

Consideremos una opción europea tipo put con doble barrera de clase up-and-out-down-and-out. Entonces la función de liquidación es

$$G(S) = \begin{cases} (K - S)_+, & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2). \end{cases}$$

Consideramos que K es positiva en un principio. Pero si $K \in (0, X_1)$ y como $S > X_1$ entonces $G(S) = 0$. Por lo que para el caso put, sólo consideraremos $K \in (X_1, \infty)$. Claramente G es de variación acotada.

Entonces el problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(P)(S, t) = 0, \\ P(S, T) = (K - S)_+, & X_1 < S < X_2, \\ P(X_1, t) = 0, & t < T, \\ P(X_2, t) = 0, & t < T, \end{cases}$$

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 32. *La función de precio de una opción europea put con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out es*

$$P(S, t) = \begin{cases} 2S^{\frac{\alpha}{\ell}} X_1^{\frac{\gamma}{\ell}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2t^2}(\gamma^2 + j^2\pi^2)(T-t)} I_j(k) \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $\alpha = \ell\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)$, $\gamma = \ell - \alpha$,

$$k = \min\left\{\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K}{X_1}\right), 1\right\}$$

y

$$I_j(a) = \frac{K}{X_1} \frac{j\pi(e^{-\alpha k} \cos(j\pi k) - (-1)^j e^{-\alpha}) + \alpha(e^{-\alpha k} \sin(j\pi k))}{\alpha^2 + j^2\pi^2} - \frac{j\pi(e^{\gamma k} \cos(j\pi k) - (-1)^j \gamma) - \gamma(\sin(j\pi k))}{\gamma^2 + j^2\pi^2}.$$

Demostración. La prueba es casi idéntica que el teorema anterior, salvo el cálculo para A_j . En este caso se tiene

$$g(x) \begin{cases} \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha x} - e^{\gamma x}\right)_+, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Por lo que

$$A_j = \int_0^1 \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha y} - e^{\gamma y}\right)_+ \sin(j\pi y) dy.$$

Como

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K}{X_1}\right)$$

y por estar integrando sobre el intervalo $(0, 1)$, entonces denotando

$$k = \min\left\{\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K}{X_1}\right), 1\right\},$$

entonces

$$A_j = \int_0^k \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha y} \sin(j\pi y) - e^{\gamma y} \sin(j\pi y) \right) dy.$$

Por el lema (30) se tiene que

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{K}{X_1} \frac{j\pi(e^{-\alpha k} \cos(j\pi k) - (-1)^j e^{-\alpha}) + \alpha(e^{-\alpha k} \sin(j\pi k))}{\alpha^2 + j^2\pi^2} - \\ &\quad \frac{j\pi(e^{\gamma k} \cos(j\pi k) - (-1)^j \gamma) - \gamma(\sin(j\pi k))}{\gamma^2 + j^2\pi^2} \\ &= I_j(k). \end{aligned}$$

Con lo anterior, se tiene que

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} I_j(k) \sin(j\pi x).$$

Regresando a las variables iniciales, se tiene

$$P(S, t) = 2S^{\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}} X_1^{\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2\ell^2}(\gamma + j^2\pi^2)(T-t)} I_j(k) \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right),$$

cuando $S \in (X_1, X_2)$. Cuando $S \notin (X_1, X_2)$ se tiene que $P(S, t) = 0$ porque es una opción de doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out. \square

Caso: opción Supershare.

Consideramos una opción Supershare con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out. Entonces la función de liquidación es

$$G(S) \begin{cases} \frac{S}{K_1} \mathbb{1}_{(K_1, K_2)}(S), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases}$$

para valores fijos de $K_1 < K_2$. Además consideramos que $(K_1, K_2) \subseteq (X_1, X_2)$ pues tenemos que si se alcanzan las barreras, entonces la opción pierde su valor. Si $K_1 < X_1$ o $K_2 > X_2$ entonces se consideraría simplemente $K_1 = X_1$ ó $K_2 = X_2$ respectivamente. Se tiene que G es de variación acotada.

Entonces el problema (2.1) es el siguiente:

$$\begin{cases} \Lambda(SS)(S, t) = 0, \\ SS(S, T) = \frac{S}{K_1} \mathbb{1}_{(K_1, K_2)}(S), & X_1 < S < X_2, \\ SS(X_1, t) = 0, & t < T, \\ SS(X_2, t) = 0, & t < T. \end{cases}$$

Con lo anterior se tiene el siguiente teorema.

Teorema 33. *La función de precio de una opción Supershare con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out está dado por la fórmula*

$$SS(S, t) = \begin{cases} 2S^{\frac{\alpha}{\ell}} X_1^{\frac{\gamma}{\ell}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2\ell^2}(\gamma^2 + j^2\pi^2)(T-t)} I_j(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $\alpha = \ell\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)$, $\gamma = \ell - \alpha$,

$$\tilde{k}_1 = \max\left\{\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K_1}{X_1}\right), 0\right\}, \quad \tilde{k}_2 = \min\left\{\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{K_2}{X_1}\right), 1\right\}$$

y

$$I_j(a, b) = \frac{1}{K_1} \frac{j\pi(e^{\gamma\tilde{k}_1} \cos(j\pi\tilde{k}_1) - e^{\gamma\tilde{k}_2} \cos(j\pi\tilde{k}_2)) + \gamma(e^{\gamma\tilde{k}_2} \sin(j\pi\tilde{k}_2) - e^{\gamma\tilde{k}_1} \sin(j\pi\tilde{k}_1))}{\gamma^2 + j^2\pi^2}.$$

Demostración. Aplicando el cambio de variables (2.2) se tiene que la función g tiene la siguiente forma:

$$g(x) = u(x, 0) = \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x} = \frac{1}{K_1} e^{\gamma x} \mathbb{1}_{(k_1, k_2)}(x),$$

cuando $x \in (0, 1)$ y $g(x) = 0$ cuando $x \notin (0, 1)$ y donde

$$k_{1,2} = \ell^{-1} \ln\left(\frac{K_{1,2}}{X_1}\right) \quad \text{y} \quad \gamma = \ell - \alpha.$$

Aplicando del teorema 29 se tiene que

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} \sin(j\pi x) A_j. \quad (2.18)$$

La integral A_j de (2.18) en este caso es

$$A_j = \int_0^1 \frac{1}{K_1} e^{\gamma y} \mathbb{1}_{(k_1, k_2)}(y) \sin(j\pi y) dy = \frac{1}{K_1} \int_{\tilde{k}_1}^{\tilde{k}_2} e^{\gamma y} \sin(j\pi y) dy,$$

donde

$$\tilde{k}_1 = \max\{k_1, 0\} \quad \text{y} \quad \tilde{k}_2 = \min\{k_2, 1\},$$

pues estamos integrando en el intervalo $(0, 1)$ y de forma general solo se tiene que $K_1 < K_2$.

Por el lema (30) se tiene que

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{K_1} \frac{j\pi(e^{\gamma\tilde{k}_1} \cos(j\pi\tilde{k}_1) - e^{\gamma\tilde{k}_2} \cos(j\pi\tilde{k}_2)) + \gamma(e^{\gamma\tilde{k}_2} \sin(j\pi\tilde{k}_2) - e^{\gamma\tilde{k}_1} \sin(j\pi\tilde{k}_1))}{\gamma^2 + j^2\pi^2} \\ &=: I_j(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2), \end{aligned}$$

Con lo anterior, se tiene que

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2 \pi^2 \tau} I_j(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \sin(j\pi x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} SS(S, t) &= X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \\ &= 2X_1 e^{\alpha x} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-(\gamma^2 + j^2 \pi^2) \tau} I_j(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \sin(j\pi x). \end{aligned}$$

Regresando a las variables iniciales, se tiene

$$SS(S, t) = 2S^{\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}} X_1^{\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2\ell^2} (\gamma + j^2 \pi^2) (T-t)} I_j(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right),$$

cuando $S \in (X_1, X_2)$ y $SS(S, t) = 0$ cuando $S \notin (X_1, X_2)$ pues consideramos una opción de doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out.

Después de simplificaciones se llega a la ecuación (2.17). \square

2.4. Comportamiento asintótico.

Estudiaremos el comportamiento asintótico cuando $\tau \rightarrow \infty$ en el caso de la fórmula de separación de variables.

Definición 34. Sean $f(z)$ y $\phi(z)$ funciones definidas sobre un conjunto $R \subseteq \mathbb{C}$ y sea z_0 un punto límite en R (que puede ser un punto al infinito). La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(z)$$

(no necesariamente convergente) se dice que es una *expansión asintótica* de $f(z)$ en el sentido de Poincaré, con respecto a la secuencia $\{\phi_n(z)\}$ si, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \phi_n(z) = o(\phi_{m-1}(z)),$$

cuando $z \rightarrow z_0$.

Recordemos que para obtener la fórmula del precio de una opción con doble barrera de clase up-and-out-down-and-out por método de separación de variables usamos (2.13):

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2 \pi^2 \tau} A_j \sin(j\pi x), \quad (2.19)$$

donde

$$A_j = \int_0^1 g(y) \sin(j\pi y) dy.$$

Consideremos

$$u_n(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^n e^{-j^2\pi^2\tau} A_j \sin(j\pi x),$$

entonces

$$\begin{aligned} u(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau) &= 2 \sum_{j=n}^{\infty} e^{-j^2\pi^2\tau} A_j \sin(j\pi x) \\ &= 2e^{-n^2\pi^2\tau} \sum_{j=n}^{\infty} e^{-(j^2-n^2)\pi^2\tau} A_j \sin(j\pi x). \end{aligned}$$

Sea $A = \sup_{j \in \mathbb{N}} |A_j|$ (el cual es finito porque $\{A_j\}$ es una sucesión acotada). Entonces

$$\begin{aligned} |u(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| &= 2e^{-n^2\pi^2\tau} \left| \sum_{j=n}^{\infty} e^{-(j^2-n^2)\pi^2\tau} A_j \sin(j\pi x) \right| \quad (2.20) \\ &\leq 2Ae^{-n^2\pi^2\tau} \sum_{j=n}^{\infty} e^{-(j^2-n^2)\pi^2\tau}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\sum_{j=n}^{\infty} e^{-(j^2-n^2)\pi^2\tau} = 1 + \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-(j^2-n^2)\pi^2\tau} \leq 1 + \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{(n-j)\pi^2\tau} \leq 1 + \frac{e^{-\pi^2\tau}}{1 - e^{-\pi^2\tau}}.$$

Así (2.20) se obtiene como

$$|u(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| \leq 2Ae^{-n^2\pi^2\tau} \left(1 + \frac{e^{-\pi^2\tau}}{1 - e^{-\pi^2\tau}} \right) = 4Ae^{-n^2\pi^2\tau},$$

para $\tau \geq \tau_0$, donde τ_0 es un número fijo suficientemente grande.

Además $\{e^{-n^2\pi^2\tau}, e^{-(n+1)^2\pi^2\tau}\} \subset o\left(e^{-(n-1)^2\pi^2\tau}\right)$, por lo que $|u(x, \tau) - u_{n-1}(x, \tau)| \in o\left(e^{-(n-1)^2\pi^2\tau}\right)$. Entonces (2.19) es una serie asintótica de la función para cuando $\tau \rightarrow \infty$. Con lo anterior se tiene probado el siguiente teorema.

Teorema 35. *La función $u(x, \tau)$ en la ecuación (2.13) se puede escribir como*

$$u(x, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} e^{-j^2\pi^2\tau} A_j \sin(j\pi x) + o\left(e^{-(n-1)^2\pi^2\tau}\right),$$

cuando $\tau \rightarrow \infty$ y para un valor fijo x en el intervalo $(0, 1)$.

Regresando a las variables iniciales S y t y la función Ω , con el teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Teorema 36. *La expansión asintótica de la función de separación de variables para el precio de una opción de doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out expresada en la ecuación (29) está dada por*

$$\begin{aligned} \Omega(S, t) = & 2S^{\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}} X_1^{\frac{1}{2}+\frac{r}{\sigma^2}} \sum_{j=1}^{n-1} e^{-\frac{\sigma^2}{2\ell}(\gamma^2+j^2\pi^2)(T-t)} A_j \sin\left(\frac{j\pi}{\ell} \ln\left(\frac{S}{X_1}\right)\right) + \\ & o\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2\ell^2}(n-1)^2\pi^2(T-t)}\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

cuando $\frac{\sigma^2}{2\ell^2}(T-t) \rightarrow \infty$, particularmente, si $\ell \rightarrow 0$ y los parámetros σ, t y T son fijos, o bien, si $T-t \rightarrow \infty$ y los parámetros X_1, X_2 y σ son fijos.

En este capítulo hemos obtenido una fórmula que resulta ser eficiente para el caso cuando el parámetro $\tau \rightarrow \infty$. En el siguiente capítulo deduciremos otra fórmula tal que sea eficiente cuando $\tau \rightarrow 0$.

CAPÍTULO 3

Solución mediante método de reflexiones

En este capítulo nos encargaremos de buscar una función para el precio de una opción para la cual se tenga una buena aproximación cuando $\ell \rightarrow \infty$ (y en consecuencia, $\tau \rightarrow 0$). Este método lo desarrollamos con ayuda de la transformada de Fourier.

3.1. Solución General.

Se tiene que la forma matemática del problema de opciones con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Lambda(\Omega)(S, t) = 0, \\ \Omega(S, T) = G(S), & X_1 < S < X_2, \\ \Omega(X_2, t) = 0, & t < T, \\ \Omega(X_1, t) = 0, & t < T, \end{cases} \quad (3.1)$$

Recordemos que Λ denota el operador de *Black-Scholes* y G es una función conocida y de variación acotada.

Teorema 37. *La solución al problema (3.1) es*

$$\Omega(S, t) = \begin{cases} X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi - \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)) \right), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

$$x = \ell^{-1} \ln \left(\frac{S}{X_1} \right), \quad \tau \frac{\sigma^2}{2\ell^2} (T - t), \quad \alpha = \ell \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right), \quad \gamma = \ell - \alpha$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x}, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1), \end{cases}$$

con g una función de variación acotada y las B son integrales de la forma

$$B_{\pm, k}^{\pm}(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{1}{4\tau}(R_k^{\pm}(x) + |z^{\pm} - \xi|)^2} d\xi,$$

donde los índices inferiores \pm de $B_{\pm, k}^{\pm}$ corresponden a los índices \pm de z^{\pm} , los superiores corresponden a los índices de R_k^{\pm} , finalmente

$$z^+ = 1, \quad z^- = 0, \quad R_k^+(x) = x + k \quad y \quad R_k^-(x) = 1 - x + k.$$

Demostración. Al tomar los cambios de variables empleados en la resolución de la fórmula en el capítulo anterior y el teorema (28) se tiene que $\Lambda(\Omega)(S, t) = 0$ se convierte en

$$u_{\tau}(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau), \quad (3.3)$$

donde

$$\alpha = \ell \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right) \quad y \quad \beta = -(\ell - \alpha)^2.$$

Con esto, el problema inicial (3.1) lo reescribimos como

$$\begin{cases} u_{\tau}(x, \tau) = u_{xx}(x, \tau), \\ u(x, 0) = g(x), & 0 < x < 1, \\ u(0, \tau) = 0, & \tau > 0, \\ u(1, \tau) = 0, & \tau > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $g(x) := G(X_1 e^{\ell x}) e^{-\alpha x} / X_1$, cuando $x \in (0, 1)$ y $g(x) = 0$ cuando $x \notin (0, 1)$.

Según la ecuación (5.4) de [12], primero debemos que considerar la solución al problema sin barreras $u_{\infty}(x, \tau)$ y luego resolver para una solución auxiliar $u_0(x, \tau)$ que estás relacionadas de la siguiente forma con la solución exacta $u(x, \tau)$:

$$u_0(x, \tau) = u_{\infty}(x, \tau) - u(x, \tau). \quad (3.5)$$

Primero consideramos el problema sin barreras

$$\begin{cases} u_{\infty, \tau}(x, \tau) = u_{\infty, xx}(x, \tau), \\ u_{\infty}(x, 0) = g(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

La solución de (3.6) según el teorema (24) del primer capítulo es

$$u_{\infty}(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Al considerar el resultado del artículo citado, se tiene que considerar

$$u_0(x, \tau) = u_\infty(x, \tau) - u(x, \tau), \quad (3.7)$$

de donde (3.4) se convierte en

$$\begin{cases} u_{0,\tau}(x, \tau) = u_{0,xx}(x, \tau), \\ u_0(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u_0(0, \tau) = u_\infty(0, \tau), & \tau > 0, \\ u_0(1, \tau) = u_\infty(1, \tau), & \tau > 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Consideraremos la transformada de Laplace

$$\tilde{u}_0(x, \omega) = \mathfrak{L}(u_0)(x, \omega) = \int_0^\infty u_0(x, \tau) e^{-\omega\tau} d\tau. \quad (3.9)$$

En (3.8), multiplicando cada una de las partes por $e^{-\omega\tau}$ e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\omega\tau} u_{0,\tau}(x, \tau) d\tau &= \int_0^\infty e^{-\omega\tau} u_{0,xx}(x, \tau) d\tau, \\ u_0(x, \tau) e^{-\omega\tau} \Big|_{\tau=0}^\infty - \int_0^\infty (-\omega) e^{-\omega\tau} u_0(x, \tau) d\tau &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-\omega\tau} u_0(x, \tau) d\tau, \\ u_0(x, 0) + \omega \tilde{u}_0(x, \omega) &= \tilde{u}_{0,xx}(x, \omega), \\ \tilde{u}_{0,xx}(x, \omega) - \omega \tilde{u}_0(x, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por otra parte, usando la ecuación (1.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(z, \omega) &= \int_0^\infty u_\infty(z, \tau) e^{-\omega\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\tau\nu^2 + i\nu z} \hat{g}(\nu) d\nu e^{-\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\nu z} \hat{g}(\nu) \int_0^\infty e^{-\tau(\nu^2 + \omega)} d\tau d\nu \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\nu z}}{\nu^2 + \omega} \hat{g}(\nu) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\nu z}}{\nu^2 + \omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\xi\nu} g(\xi) d\xi d\nu \\ &= \int_{-\infty}^\infty g(\xi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\nu^2 + \omega} e^{i\nu(z-\xi)} d\nu d\xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sea

$$f(\nu) = \frac{1}{\nu^2 + \omega} e^{i\nu(z-\xi)},$$

y sea $C_{1,r}$ el semicírculo superior en el plano complejo, centrado en el origen, de radio r y que contiene el punto $i\sqrt{\omega}$. Entonces $z \geq \xi$ y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{C_{1,r}} f(\nu) d\nu &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-r}^r f(\nu) d\nu + \int_{C'_{1,r}} f(\nu) d\nu \right) \\ &= i\text{Res}(f(\nu), \nu = i\sqrt{\omega}) + \frac{1}{2\pi} \int_{C'_{1,r}} f(\nu) d\nu, \end{aligned}$$

donde $C'_{1,r}$ es la cuerda del semicírculo $C_{1,r}$. Por un lado, como

$$f(\nu) = \frac{e^{i\nu(z-\xi)}}{2i\sqrt{\omega}} \left(\frac{1}{\nu - i\sqrt{\omega}} - \frac{1}{\nu + i\sqrt{\omega}} \right),$$

tenemos que

$$i\text{Res}(f(\nu), \nu = i\sqrt{\omega}) = i \frac{e^{i(i\sqrt{\omega})(z-\xi)}}{2i\sqrt{\omega}} = \frac{e^{-\sqrt{\omega}(z-\xi)}}{2\sqrt{\omega}}.$$

Además

$$\int_{C'_{1,r}} f(\nu) d\nu \rightarrow 0,$$

pues

$$\left| \int_{C'_{1,r}} f(\nu) d\nu \right| \leq \frac{1}{k} \int_{C'_{1,r}} \frac{1}{r^2 - 1} d\nu = \frac{1}{k} \frac{\pi r}{r^2 - 1} \rightarrow 0,$$

cuando $r \rightarrow \infty$ y k es una constante. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) d\nu &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r f(\nu) d\nu \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C_{1,r}} f(\nu) d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_{C'_{1,r}} f(\nu) d\nu \right) \\ &= \frac{e^{-\sqrt{\omega}(z-\xi)}}{2\sqrt{\omega}}. \end{aligned}$$

Calculando la integral, pero considerando C_2 , el semicírculo inferior en el plano complejo, centrado en el origen y de radio r , consideramos $z \leq \xi$ y similarmente a lo anterior, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) d\nu = \frac{e^{\sqrt{\omega}(z-\xi)}}{2\sqrt{\omega}}.$$

En conclusión, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) d\nu = \frac{e^{-\sqrt{\omega}|z-\xi|}}{2\sqrt{\omega}}.$$

Así,

$$\tilde{u}_0(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{e^{-\sqrt{\omega}(\xi)}}{2\sqrt{\omega}} d\xi =: \varepsilon^-(\omega)$$

y

$$\tilde{u}_0(1, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{e^{-\sqrt{\omega}(1-\xi)}}{2\sqrt{\omega}} d\xi =: \varepsilon^+(\omega).$$

Entonces (3.8) se convierte en

$$\begin{cases} \tilde{u}_0, xx(x, \omega) - \omega \tilde{u}_0(x, \omega) = 0, \\ \tilde{u}_0(0, \omega) = \varepsilon^-(\omega), \\ \tilde{u}_0(1, \tau) = \varepsilon^+(\omega). \end{cases} \quad (3.12)$$

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria con condiciones en la frontera, tenemos al resolver para λ que

$$\lambda^2 - \omega = 0,$$

la solución general de está dada por

$$\tilde{u}_0(x, \omega) = c_1 e^{\sqrt{\omega}x} + c_2 e^{-\sqrt{\omega}x}.$$

Para encontrar las constantes c_1 y c_2 , resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \varepsilon^-(\omega), \\ c_1 e^{\sqrt{\omega}} + c_2 e^{-\sqrt{\omega}} &= \varepsilon^+(\omega). \end{aligned}$$

Considerando el sistema matricial, tenemos que

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{\sqrt{\omega}} - e^{-\sqrt{\omega}}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-\sqrt{\omega}} \\ -1 & e^{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^+(\omega) \\ \varepsilon^-(\omega) \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{e^{-\sqrt{\omega}}\varepsilon^+(\omega) - e^{-2\sqrt{\omega}}\varepsilon^-(\omega)}{1 - e^{-2\sqrt{\omega}}}, \\ c_2 &= \frac{\varepsilon^-(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}}\varepsilon^+(\omega)}{1 - e^{-2\sqrt{\omega}}}. \end{aligned}$$

Así, la solución al problema (3.12) es

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x, \omega) &= \frac{e^{-\sqrt{\omega}}\varepsilon^+(\omega) - e^{-2\sqrt{\omega}}\varepsilon^-(\omega)}{1 - e^{-2\sqrt{\omega}}} e^{\sqrt{\omega}x} + \\ &\quad \frac{\varepsilon^-(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}}\varepsilon^+(\omega)}{1 - e^{-2\sqrt{\omega}}} e^{-\sqrt{\omega}x}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{\omega}}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\sqrt{\omega}}, \quad \text{para } \omega \neq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x, \omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\sqrt{\omega}} \left(e^{-\sqrt{\omega}}\varepsilon^+(\omega) - e^{-2\sqrt{\omega}}\varepsilon^-(\omega) + \varepsilon^-(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}}\varepsilon^+(\omega) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\sqrt{\omega}R_{2k}^-(x)}\varepsilon^+(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}R_{2k+1}^-(x)}\varepsilon^-(\omega) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\sqrt{\omega}R_{2k}^+(x)}\varepsilon^-(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}R_{2k+1}^+(x)}\varepsilon^+(\omega) \right), \end{aligned}$$

donde $R_k^+(x) = x + k$ y $R_k^-(x) = 1 - x + k$.

Ahora aplicaremos la transformada inversa de Laplace, de tal modo que

$$u_0(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{u}_0(x, \omega) e^{\omega\tau} d\omega. \quad (3.13)$$

Con lo anterior, (3.13) se puede escribir como

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\sqrt{\omega}R_{2k}^-(x)}\varepsilon^+(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}R_{2k+1}^-(x)}\varepsilon^-(\omega) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\sqrt{\omega}R_{2k}^+(x)}\varepsilon^-(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}R_{2k+1}^+(x)}\varepsilon^+(\omega) \right) e^{\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(e^{-\sqrt{\omega}R_{2k}^-(x)+\omega\tau}\varepsilon^+(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}R_{2k+1}^-(x)+\omega\tau}\varepsilon^-(\omega) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\sqrt{\omega}R_{2k}^+(x)+\omega\tau}\varepsilon^-(\omega) - e^{-\sqrt{\omega}R_{2k+1}^+(x)+\omega\tau}\varepsilon^+(\omega) \right) d\omega. \end{aligned}$$

Ahora nos concentramos en evaluar integrales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B_{\pm, k}^{\pm}(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \varepsilon^{\pm}(\omega) e^{-\sqrt{\omega}R_k^{\pm}(x)+\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{e^{-\sqrt{\omega}|z^{\pm}-\xi|}}{2\sqrt{\omega}} d\xi e^{-\sqrt{\omega}R_k^{\pm}(x)+\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-\sqrt{\omega}R_{\pm}^{\pm}(x, \xi)+\omega\tau}}{\sqrt{\omega}} d\omega d\xi, \end{aligned}$$

considerando que el índice inferior \pm de $A_{\pm,k}^{\pm}(x)$ corresponde a los índices \pm de ε^{\pm} , los superiores corresponden a los de $R_k^{\pm}(x)$. Además escribimos

$$R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi) = R_k^{\pm}(x) + |z^{\pm} - \xi|,$$

cuyos índices inferiores \pm corresponden a los índices \pm de z^{\pm} y los superiores a los de R_k^{\pm} (denotamos $z^+ = 1$ y $z^- = 0$).

Podemos deformar el contorno de integración $(-i\infty, i\infty)$ a $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, donde

$$\Gamma_{\mp} = \left\{ \omega = \left(\frac{\sigma' R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)}{2\tau} \mp \frac{iy}{\sqrt{\tau}} \right)^2 \right\}, \quad y \in (0, \infty),$$

donde el signo \mp corresponde al signo \mp del lado derecho de la expresión anterior, además se considera el intervalo $(-i\infty, 0) \cup (0, i\infty)$ pues recordemos que $\omega = 0$ no lo estamos considerando. Haciendo el cambio de variable

$$\omega = \left(\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)}{2\tau} \mp \frac{iy}{\sqrt{\tau}} \right)^2$$

y considerando que

$$-\sqrt{\omega} R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi) + \omega\tau = -\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau} - y^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-\sqrt{\omega} R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi) + \omega\tau}}{\sqrt{\omega}} d\omega &= \int_{-i\infty + \frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau^2}}^{i\infty + \frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau^2}} \frac{e^{-\sqrt{\omega} R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi) + \omega\tau}}{\sqrt{\omega}} d\omega \\ &= \int_{-i\infty + \frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau^2}}^{\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau^2}} \frac{e^{-\sqrt{\omega} R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi) + \omega\tau}}{\sqrt{\omega}} d\omega \\ &\quad + \int_{\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau^2}}^{i\infty + \frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau^2}} \frac{e^{-\sqrt{\omega} R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi) + \omega\tau}}{\sqrt{\omega}} d\omega \\ &= \frac{2i}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau} - y^2} dy - \frac{2i}{\sqrt{\tau}} \int_0^{-\infty} e^{-\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau} - y^2} dy \\ &= \frac{4i}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau}} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2} dy \\ &= \frac{4i}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= 2i \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x, \xi)^2}{4\tau}}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} B_{\pm}^{\pm}(x, \tau) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) 2i \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{R_{\pm,k}^{\pm}(x,\xi)^2}{4\tau}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{1}{4\tau}(R_k^{\pm}(x)+|z^{\pm}-\xi|)^2} d\xi. \end{aligned}$$

Recordemos que los índices inferiores \pm de $B_{\pm,k}^{\pm}$ corresponden a los índices \pm de z^{\pm} , los superiores corresponden a los índices de R_k^{\pm} .

En conclusión, podemos escribir

$$u_0(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)). \quad (3.14)$$

Finalmente, tenemos que

$$u(x, \tau) = u_{\infty}(x, \tau) - u_0(x, \tau). \quad (3.15)$$

Tenemos que

$$X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) = X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} (u_{\infty}(x, \tau) - u_0(x, \tau)).$$

Esta ecuación corresponde a (3.2) después de hacer las sustituciones de u_{∞} y u_0 y hacer los cambios de variable inversos, cuando $S \in (X_1, X_2)$. Cuando $S \notin (X_1, X_2)$ se tiene que $\Omega(S, t) = 0$ porque es una opción de doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out. \square

3.2. Casos particulares.

En esta parte nos ocuparemos de calcular la función de precio de opciones europeas tipo call y put y opciones supershare con doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out. Un resultado que estaremos empleando para obtener dicha función está en el siguiente lema.

Lema 38. Sean $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Se tiene que

$$\int_a^b e^{px} e^{-\frac{(x-q)^2}{4\tau}} dx = \sqrt{\pi\tau} e^{p(q+p\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{b-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Demostración. Calculando la integral se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{px} e^{-\frac{(x-q)^2}{4\tau}} dx &= \int_a^b e^{-\frac{x^2-2x(q+2p\tau)+q^2}{4\tau}} dx \\
&= e^{-\frac{-q^2+(q+2p\tau)^2}{4\tau}} \int_a^b e^{-\frac{(x-q-2p\tau)^2}{4\tau}} dx \quad \left(y = \frac{x-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{p(q+p\tau)} 2\sqrt{\tau} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}}}^{\frac{b-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}}} e^{-y^2} dy \\
&= \sqrt{\pi\tau} e^{p(q+p\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{b-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a-q-2p\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).
\end{aligned}$$

□

Caso: opción europea tipo call.

Calcularemos la fórmula explícita de la función de precio de una opción europea tipo call con doble barrera tipo up-and-out-down-and-out. Se tiene que la función de pago es

$$G(S) = \begin{cases} (S - K)_+, & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2). \end{cases}$$

Sabemos que $K > 0$. pero si $K > X_2$ y como $S \in (X_1, X_2)$ entonces $G(S) = 0$. Por lo tanto consideramos para el caso de una opción europea tipo call a $K \in (0, X_2)$. Claramente G es de variación acotada.

El problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(C)(S, t) = 0, \\ C(S, T) = (S - K)_+, & X_1 < S < X_2, \\ C(X_1, t) = 0, & t < T, \\ C(X_2, t) = 0, & t < T. \end{cases}$$

La respuesta al problema la encontramos en el siguiente teorema.

Teorema 39. *La función de u del teorema (37) para una opción europea tipo call con doble barrera tipo up-and-out-down-and-out está dada por*

$$\begin{aligned}
u_\infty(x, \tau) &= \frac{1}{2} \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1-x-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-x-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \\
&\quad \frac{K}{2X_1} \frac{e^{\alpha(\alpha\tau-x)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1-x+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-x+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right), \\
B_{+,k}^\pm(x) &= \frac{e^{\gamma(-R_k^\pm(x)+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1+R_k^\pm(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^\pm(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \\
&\quad \frac{K}{2X_1} e^{\alpha(R_k^\pm(x)+\alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1+R_k^\pm(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^\pm(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$B_{-,k}^{\pm}(x) = \frac{e^{\gamma(-R_k^{\pm}(x)+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1+R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \frac{K}{2X_1} e^{\alpha(R_k^{\pm}(x)+\alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1+R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right),$$

donde

$$\tilde{k} = \max \left\{ \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right), 0 \right\}.$$

Demostración. Aplicando el cambio de variables (2.2) se tiene que la función g tiene la siguiente forma:

$$g(x) = u(x, 0) = \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x} = \left(e^{\gamma x} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha x} \right)_+,$$

cuando $0 < x < 1$ y $g(x) = 0$ cuando $x \notin (0, 1)$. Por el teorema (37), se tiene que

$$u(x, \tau) = u_{\infty}(x, \tau) - \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)).$$

Basta calcular u_{∞} y las funciones B para aplicar el cambio de variable inverso y obtener el resultado. Comenzaremos por calcular u_{∞} :

$$u_{\infty}(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\gamma\xi} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} \right)_+ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Se tiene que

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right).$$

Denotamos

$$k := \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right)$$

Como el soporte de la función g es el intervalo $(0, 1)$ y $K \in (0, X_2)$, si $K < X_1$ entonces $k < 0$ y entonces integramos sobre todo el soporte. Por otro lado, si $K \in (X_1, X_2)$ entonces integramos sobre el intervalo $(k, 1)$. Así, denotemos

$$\tilde{k} := \max \left\{ \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right), 0 \right\}.$$

Entonces

$$u_{\infty}(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\tilde{k}}^1 \left(e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \right) d\xi.$$

Aplicando el lema (38) se tiene que

$$\int_{\tilde{k}}^1 e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \sqrt{\pi\tau} \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1-x-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-x-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Así mismo,

$$\int_{\tilde{k}}^{\infty} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \sqrt{\pi\tau} \frac{e^{\alpha(\alpha\tau-x)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1-x+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-x+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_{\infty}(x, \tau) &= \frac{1}{2} \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1-x-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-x-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \\ &\quad \frac{K}{2X_1} \frac{e^{\alpha(\alpha\tau-x)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1-x+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-x+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right). \end{aligned}$$

Similarmente, se tiene que

$$\begin{aligned} B_{+,k}^{\pm}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\tilde{k}}^1 \left(e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+(1-\xi))^2}{4\tau}} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+(1-\xi))^2}{4\tau}} \right) d\xi \\ &= \frac{e^{\gamma(1+R_k^{\pm}(x)+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-1-R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \\ &\quad \frac{K}{2X_1} e^{-\alpha(1+R_k^{\pm}(x)-\alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-1-R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right). \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} B_{-,k}^{\pm}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\tilde{k}}^1 \left(e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+\xi)^2}{4\tau}} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+\xi)^2}{4\tau}} \right) d\xi \\ &= \frac{e^{\gamma(-R_k^{\pm}(x)+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1+R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \\ &\quad \frac{K}{2X_1} e^{\alpha(R_k^{\pm}(x)+\alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1+R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right). \end{aligned}$$

□

Caso: opción europea tipo put.

Calcularemos la fórmula explícita de la función de precio de una opción europea tipo put con doble barrera tipo up-and-out-down-and-out. Se tiene que la función de pago es

$$G(S) = \begin{cases} (K - S)_+, & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2). \end{cases}$$

Sabemos que $K > 0$, pero si $K < X_1$ y como $S \in (X_1, X_2)$ entonces $G(S) = 0$. Por lo que consideramos para el caso put que $K > X_1$. Claramente la función G es de variación acotada.

El problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(P)(S, t) = 0, \\ P(S, T) = (K - S)_+, & X_1 < S < X_2, \\ P(X_1, t) = 0, & t < T, \\ P(X_2, t) = 0, & t < T. \end{cases}$$

Veamos el siguiente teorema.

Teorema 40. *La función de u del teorema (37) para una opción europea tipo put con doble barrera tipo up-and-out-down-and-out está dada por*

$$u_\infty(x, \tau) = \frac{1}{2} \frac{e^{\alpha(\alpha\tau - x)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - x + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-x + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \frac{K}{2X_1} \frac{e^{\gamma(x + \gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right),$$

$$B_{+,k}^\pm(x) = \frac{K}{2X_1} e^{\alpha(\alpha\tau - 1 - R_k^\pm(x))} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - 1 - R_k^\pm(x) + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1 - R_k^\pm(x) + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \frac{e^{\gamma(1 + R_k^\pm(x) + \gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - 1 - R_k^\pm(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1 - R_k^\pm(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right)$$

y

$$B_{-,k}^\pm(x) = \frac{K}{2X_1} e^{\alpha(R_k^\pm(x) + \alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} + R_k^\pm(x) + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{R_k^\pm(x) + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \frac{e^{\gamma(-R_k^\pm(x) + \gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} + R_k^\pm(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{+R_k^\pm(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right),$$

donde

$$\tilde{k} := \min \left\{ \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right), 0 \right\}.$$

Demostración. Aplicando el cambio de variables (2.2) se tiene que la función g tiene la siguiente forma:

$$g(x) = u(x, 0) = \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x} = \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha x} - e^{\gamma x} \right)_+,$$

cuando $x \in (0, 1)$ y $g(x) = 0$ cuando $x \notin (0, 1)$. Por el teorema (37), se tiene que

$$u(x, \tau) = u_\infty(x, \tau) - \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)).$$

Basta calcular u_∞ y las funciones B para aplicar el cambio de variable inverso y obtener el resultado. Comenzaremos por calcular u_∞ :

$$u_\infty(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\gamma\xi} - \frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} \right)_+ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Se tiene que

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right).$$

Denotemos

$$k := \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K}{X_1} \right).$$

Como el soporte de la función g es el intervalo $(0, 1)$ y $K > X_1$, si $K < X_2$ entonces integraremos sobre el intervalo $(0, k)$. Por otro lado, si $K \geq X_2$, entonces $k > 1$ por lo que integraremos sobre todo el intervalo $(0, 1)$. Así, denotemos

$$\tilde{k} := \min \{k, 0\}.$$

Entonces

$$u_\infty(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\tilde{k}} \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} - e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} \right) d\xi.$$

Aplicando el lema (38) se tiene que

$$\int_0^{\tilde{k}} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \sqrt{\pi\tau} \frac{e^{\alpha(\alpha\tau-x)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - x + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-x + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Así mismo,

$$\int_0^{\tilde{k}} e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \sqrt{\pi\tau} \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Entonces

$$u_\infty(x, \tau) = \frac{1}{2} \frac{e^{\alpha(\alpha\tau-x)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - x + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-x + 2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \frac{K}{2X_1} \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k} - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

Similarmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
B_{+,k}^{\pm}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\tilde{k}} \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+(1-\xi))^2}{4\tau}} - e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+(1-\xi))^2}{4\tau}} \right) d\xi \\
&= \frac{K}{2X_1} e^{-\alpha(1+R_k^{\pm}(x)-\alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-1-R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1-R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) \\
&\quad - \frac{e^{\gamma(1+R_k^{\pm}(x)+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}-1-R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-1-R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
B_{-,k}^{\pm}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\tilde{k}} \left(\frac{K}{X_1} e^{-\alpha\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+\xi)^2}{4\tau}} - e^{\gamma\xi} e^{-\frac{(R_k^{\pm}(x)+\xi)^2}{4\tau}} \right) d\xi \\
&= \frac{K}{2X_1} e^{\alpha(R_k^{\pm}(x)+\alpha\tau)} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{R_k^{\pm}(x)+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right) - \\
&\quad \frac{e^{\gamma(-R_k^{\pm}(x)+\gamma\tau)}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}+R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{+R_k^{\pm}(x)-2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).
\end{aligned}$$

□

Caso: opción Supershare.

Finalmente calcularemos la fórmula explícita de la función de precio una opción Supershare con doble barrera tipo up-and-out-down-and-out. Tenemos que

$$G(S) = \begin{cases} \frac{S}{K_1} \mathbb{1}_{(K_1, K_2)}(S), & S \in (X_1, X_2), \\ 0, & S \notin (X_1, X_2), \end{cases}$$

donde $K_1 < K_2$. Se tiene que la función G es de variación acotada.

El problema a resolver es

$$\begin{cases} \Lambda(SS)(S, t) = 0, \\ SS(S, T) = \frac{S}{K_1} \mathbb{1}_{(K_1, K_2)}(S), & X_1 < S < X_2, \\ SS(X_1, t) = 0, & t < T, \\ SS(X_2, t) = 0, & t < T. \end{cases}$$

Veamos el siguiente teorema.

Teorema 41. *La función de u del teorema (37) para una opción Supershare con*

doble barrera tipo up-and-out-down-and-out está dada por

$$u_{\infty}(x, \tau) = \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_2 - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_1 - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right),$$

$$B_{+,k}^{\pm}(x) = \frac{e^{\gamma(R_k^{\pm}(x)+1+\gamma\tau)}}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_2 - R_k^{\pm}(x) - 1 - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_1 - R_k^{\pm}(x) - 1 - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

y

$$B_{-,k}^{\pm}(x) = \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_2 + R_k^{\pm}(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_1 + R_k^{\pm}(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right),$$

donde

$$\tilde{k}_1 = \max\{k_1, 0\} \quad y \quad \tilde{k}_2 = \min\{k_2, 1\}.$$

Demostración. Aplicando el cambio de variables (2.2) se tiene que la función g tiene la siguiente forma:

$$g(x) = u(x, 0) = \frac{G(X_1 e^{\ell x})}{X_1} e^{-\alpha x} = \frac{e^{\gamma x}}{K_1} \mathbb{1}_{(k_1, k_2)}(x),$$

cuando $x \in (0, 1)$ y $g(x) = 0$ cuando $x \notin (0, 1)$ y donde

$$k_{1,2} = \frac{1}{\ell} \ln \left(\frac{K_{1,2}}{X_1} \right).$$

Se tiene que el soporte de la función g es el intervalo $(0, 1)$. Por lo que si $K < X_1$, entonces $k_1 < 0$, así que integraremos desde 0, pero si $K > X_1$, entonces integramos desde k_1 . Similarmente, si $K_2 < X_2$ integramos hasta k_2 , pero si $K_2 > X_2$, entonces $k_2 > 1$, así que integraremos hasta 1. Entonces definimos

$$\tilde{k}_1 := \max\{k_1, 0\} \quad y \quad \tilde{k}_2 := \min\{k_2, 1\}.$$

Entonces integraremos sobre el intervalo $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$.

Por el teorema (37), se tiene que

$$u(x, \tau) = u_{\infty}(x, \tau) - \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)).$$

Comenzaremos por calcular $u_\infty(x, \tau)$ usando el lema (38):

$$\begin{aligned} u_\infty(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\tilde{k}_1}^{\tilde{k}_2} \frac{e^{\gamma\xi}}{K_1} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi \\ &= \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_2 - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_1 - x - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right). \end{aligned}$$

Cálculos similares a lo anterior muestran que

$$\begin{aligned} B_{+,k}^\pm(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\tilde{k}_1}^{\tilde{k}_2} g(\xi) e^{-\frac{(\xi - (R_k^\pm(x)+1))^2}{4\tau}} d\xi \\ &= \frac{e^{\gamma(R_k^\pm(x)+1+\gamma\tau)}}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_2 - R_k^\pm(x) - 1 - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_1 - R_k^\pm(x) - 1 - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} B_{-,k}^\pm(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\tilde{k}_1}^{\tilde{k}_2} g(\xi) e^{-\frac{(\xi - (-R_k^\pm(x)))^2}{4\tau}} d\xi \\ &= \frac{e^{\gamma(x+\gamma\tau)}}{2K_1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_2 + R_k^\pm(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\tilde{k}_1 + R_k^\pm(x) - 2\gamma\tau}{2\sqrt{\tau}} \right) \right). \end{aligned}$$

□

3.3. Comportamiento asintótico.

Estudiaremos el comportamiento asintótico de la fórmula obtenida en el caso de reflexiones.

Empleando el método de Laplace, se tiene que en una integral de la forma

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda R(s)} g(s) ds \quad (3.16)$$

se puede estudiar su comportamiento cuando $\lambda \rightarrow \infty$ con $\lambda > 0$. La idea principal detrás del método, es que el valor de la integral se concentra en una vecindad donde $R(s)$ toma el valor máximo. Fuera de está vecindad, la contribución a la integral es muy pequeña. Se debe tener que $R(s)$ es una función que alcanza su máximo en el intervalo (a, b) . En nuestro caso supongamos que existe un punto s_0 donde g alcanza su punto máximo, entonces se tiene que $R'(s_0) = 0$ y $R''(s_0) < 0$. Además, supongamos que g es una función en $\mathcal{C}^1((a, b))$ y tiene derivadas primera, segunda, tercera, y cuarta.

Recordemos que para la fórmula del caso de de reflexiones, se tiene

$$u(x, \tau) = u_\infty(x, \tau) - u_0(x, \tau),$$

donde

$$u_{\infty}(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Para aplicar el método de Laplace, observamos que en este caso, $\lambda = \frac{1}{\tau}$, con $\tau > 0$ y $R(x) = -\frac{(\xi-x)^2}{4}$. Así, $\lambda \rightarrow \infty$ cuando $\tau \rightarrow 0$ con $\lambda > 0$. Además, $R(\xi)$ alcanza el máximo cuando $\xi = x$ (así $R'(x) = 0$ y $R''(x) = -\frac{1}{2}$). Tomando la siguiente serie de Taylor alrededor del punto x se tiene

$$g(\xi) = g(x) + g'(x)(\xi - x) + \frac{g''(x)}{2}(\xi - x)^2 + \frac{g'''(x)}{6}(\xi - x)^3 + r(\xi),$$

donde

$$r(\xi) = \frac{g^{(iv)}(\eta)}{24}(\xi - x)^4,$$

para algún η en una vecindad acotada de $\xi = x$.

Así,

$$\begin{aligned} u_{\infty}(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(g(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi + g'(x) \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi \right. \\ &\quad + \frac{g''(x)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x)^2 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi + \frac{g'''(x)}{3} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x)^3 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi + \\ &\quad \left. + \frac{g^{(iv)}(\eta)}{24} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x)^4 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi \right). \end{aligned}$$

Para la primera integral, bajo el cambio de variable $\nu = \frac{\xi-x}{\sqrt{2\tau}}$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = 2\sqrt{\pi\tau}.$$

La segunda y cuarta integrales son cero por imparidad. Para la tercera y quinta, calculamos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x)^{2k} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} d\zeta \\ &= 2 \int_0^{\infty} \zeta^{2k} e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} d\zeta \\ &= 2^{2k+1} \tau^k \sqrt{\tau} \int_0^{\infty} \nu^{\frac{2k-1}{2}} e^{-\nu} d\nu \\ &= 2^{2k+1} \tau^k \sqrt{\tau} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \\ &= 2^{2k+1} \tau^k \sqrt{\tau} \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\pi} \\ &= 2^{k+1} (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot \tau^k \sqrt{\tau\pi}. \end{aligned}$$

Entonces

$$u_\infty(x, \tau) = g(x) + \tau g''(x) + O(\tau^2).$$

Analicemos qué pasa para $B_{\pm, k}^\pm(x, \tau)$. Se tiene que

$$B_{+, k}^+(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{1}{4\tau}(x+k+1-\xi)^2} d\xi,$$

por lo que $R(\xi) = -\frac{(x+k+1-\xi)^2}{4}$ y el máximo se alcanza en $\xi = x + k + 1$. Recordemos que $g(x)$ es igual a cero fuera del intervalo $(0, 1)$, así $B_{+, k}^+(x, \tau)$ tiene su máximo fuera del intervalo que estamos integrando, entonces por el criterio en el método de Laplace el valor de la integral es muy pequeño. Y esto pasa para los demás casos $B_{+, k}^-(x, \tau)$, $B_{-, k}^+(x, \tau)$ y $B_{-, k}^-(x, \tau)$.

Consideremos $\theta = \sup_{\xi \in (0, 1)} |g(\xi)|$. Luego

$$\begin{aligned} |B_{+, k}^+(x, \tau)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{1}{4\tau}(R_k^+(x)+1-\xi)^2} d\xi \right| \\ &\leq \int_0^1 |g(\xi)| e^{-\frac{1}{4\tau}(1+k+x-\xi)^2} d\xi \\ &\leq \theta \int_0^1 e^{-\frac{1}{4\tau}(1+k+x-\xi)^2} d\xi \\ &= 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(k+x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(x+k+1)} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B_{+, 2k+1}^+(x, \tau) &= 2\theta\sqrt{\tau} \left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1+x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2+x)} e^{-u^2} du + \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(3+x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(4+x)} e^{-u^2} du + \dots \right) \\ &\leq 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(x+1)}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \theta\sqrt{\pi\tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(x+1) \right) \\ &\leq \theta\sqrt{\pi\tau} e^{-\frac{1}{4\tau}(x+1)^2}. \end{aligned}$$

donde $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$. (También usamos el hecho de que $\operatorname{erfc}(x) \leq e^{-x^2}$ para $x > 0$.) Similarmente,

$$|B_{+, k}^-(x, \tau)| \leq \theta \int_0^1 e^{-\frac{1}{4\tau}(2+k-x-\xi)^2} d\xi = 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1+k-x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2+k-x)} e^{-u^2} du.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} B_{+,2k}^-(x, \tau) &= 2\theta\sqrt{\tau} \left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1-x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2-x)} e^{-u^2} du + \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(3-x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(4-x)} e^{-u^2} du + \dots \right) \\
&\leq 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1-x)}^{\infty} e^{-u^2} du \\
&= \theta\sqrt{\pi\tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1-x) \right) \\
&\leq \theta\sqrt{\pi\tau} e^{-\frac{1}{4\tau}(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Así mismo,

$$|B_{-,k}^-(x, \tau)| \leq \theta \int_0^1 e^{-\frac{1}{4\tau}(1+k-x+\xi)^2} d\xi = 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1+k-x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2+k-x)} e^{-u^2} du.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} B_{-,2k+1}^-(x, \tau) &= 2\theta\sqrt{\tau} \left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2-x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(3-x)} e^{-u^2} du + \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(4-x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(5-x)} e^{-u^2} du + \dots \right) \\
&\leq 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2-x)}^{\infty} e^{-u^2} du \\
&= \theta\sqrt{\pi\tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2-x) \right) \\
&\leq \theta\sqrt{\pi\tau} e^{-\frac{1}{4\tau}(2-x)^2}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$|B_{-,k}^+(x, \tau)| \leq \theta \int_0^1 e^{-\frac{1}{4\tau}(k+x+\xi)^2} d\xi = 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(k+x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1+k+x)} e^{-u^2} du.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} B_{-,2k}^+(x, \tau) &= 2\theta\sqrt{\tau} \left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(1+x)} e^{-u^2} du + \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(2+x)}^{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(3+x)} e^{-u^2} du + \dots \right) \\
&\leq 2\theta\sqrt{\tau} \int_{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(x)}^{\infty} e^{-u^2} du \\
&= \theta\sqrt{\pi\tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}(x) \right) \\
&\leq \theta\sqrt{\pi\tau} e^{-\frac{1}{4\tau}x^2}.
\end{aligned}$$

Se concluye de lo anterior que

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{4\tau}(1-x)^2} - e^{-\frac{1}{4\tau}(2-x)^2} + e^{-\frac{1}{4\tau}x^2} - e^{-\frac{1}{4\tau}(x+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que $u_0(x, \tau) \in O(\tau^2)$.

Con lo anterior se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 42. *Sea g una función de variación acotada en $[0, 1]$ y dos veces continuamente diferenciable a trozos, sea u la solución al problema (3.4) y sea $x \in (0, 1)$ tal que g es de clase \mathcal{C}^2 en una vecindad de x . Entonces se cumple la siguiente fórmula asintótica para u cuando $\tau \rightarrow 0$:*

$$u(x, \tau) = g(x) + \tau g''(x) + O(\tau^2),$$

cuando $\tau \rightarrow 0$.

Entonces, regresando a las variables S y t y la función Ω , empleando el resultado anterior, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 43. *Sea G una función de variación acotada en $[X_1, X_2]$ y dos veces continuamente diferenciable a trozos, sea Ω la solución al problema (3.1), esto es, el precio de una opción de doble barrera de tipo up-and-out-down-and-out y sea S un punto en el intervalo (X_1, X_2) tal que G es de clase \mathcal{C}^2 en una vecindad de S . Entonces se tiene la siguiente fórmula asintótica cuando $\frac{\sigma^2}{2\ell^2}(T-t) \rightarrow 0$:*

$$\begin{aligned} \Omega(S, t) &= e^{-\left(\frac{\sigma+r}{2}\right)^2 \frac{T-t}{2}} \left[G(S) + \left(X_1 \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right)^2 \frac{G(S)}{2} + rSG'(S) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{S^2\sigma^2}{2}G''(S) \right) (T-t) \right] + O \left(e^{-\left(\frac{\sigma+r}{2}\right)^2 \frac{T-t}{2}} \frac{\sigma^4}{4\ell^4} (T-t)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

(En particular, está fórmula asintótica es válida cuando $T-t \rightarrow 0$ y los demás parámetros son fijos, o bien cuando $\ell \rightarrow \infty$ y los demás parámetros son fijos.)

Demostración. Por el teorema anterior, se tiene que

$$u(x, \tau) = g(x) + \tau g''(x) + O(\tau^2).$$

Recordemos que $X_1g(x) = G(X_1e^{\ell x})e^{-\alpha x}$. Calculando las dos primeras derivadas de g se tiene

$$\begin{aligned} X_1g'(x) &= e^{-\alpha x} (X_1\ell e^{\ell x}G'(X_1e^{\ell x}) - \alpha G(X_1e^{\ell x})) \\ X_1g''(x) &= e^{-\alpha x} (X_1^2\ell^2 e^{2\ell x}G''(X_1e^{\ell x}) + X_1(\ell^2 - 2\alpha\ell)e^{\ell x}G'(X_1e^{\ell x}) + X_1\alpha^2G(X_1e^{\ell x})) \end{aligned}$$

y además recordemos que $\Omega(S, t) = X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$. Entonces

$$\begin{aligned}\Omega(S, t) &= X_1 e^{\alpha x + \beta \tau} (g(x) + \tau g''(x) + O(\tau^2)) \\ &= e^{\beta \tau} (1 + X_1 \alpha^2 \tau) G(X_1 e^{\ell x}) + X_1 \tau (\ell^2 - 2\alpha \ell) e^{\ell x + \beta \tau} G'(X_1 e^{\ell x}) + \\ &\quad X_1^2 \ell^2 e^{2\ell x + \beta \tau} \tau G''(X_1 e^{\ell x}) + O(e^{\beta \tau} \tau^2).\end{aligned}$$

Se tiene que $\alpha = \ell \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)$ y $\beta = -(\ell - \alpha)^2$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2\ell^2} (T - t)$ y $S = X_1 e^{\ell x}$. Entonces $\beta \tau = -\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{r}{\sigma}\right)^2 \frac{T-t}{2}$, $\alpha^2 \tau = \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)^2 \frac{T-t}{2}$ y $\tau(\ell^2 - 2\alpha \ell) = r(T - t)$.

Regresando a las variables iniciales y factorizando el término $e^{\beta \tau}$ se llega a (3.17). □

Con lo anterior, hemos encontrado una expresión asintótica para Ω cuando $\ell \rightarrow \infty$ ó $t \rightarrow T$.

CAPÍTULO 4

Métodos numéricos

Es este capítulo nos encargaremos de definir un criterio para decidir cuándo será conveniente emplear el método de reflexiones o el de separación de variables según los valores de los parámetros t y ℓ .

4.1. Programa.

Nos ocuparemos de mostrar el código para calcular el precio de una opción en el programa de Matlab®.

Caso de método de separación de variables.

Tenemos la fórmula explícita (sin hacer cambios de variable inverso)

$$u(x, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\pi^2 j^2 \tau} A_j \sin(j\pi x),$$

donde A_j es el coeficiente de Fourier para la función $g(x)$ correspondiente a la función de precio de la opción (hechos los cambios de variable).

Denotemos de la siguiente forma la serie que converge a u para el método separación de variables

$$u^{<m>}(x, \tau) = \sum_{j=1}^m e^{-j^2 \pi^2 \tau} A_j \sin(j\pi x).$$

Consideramos como efectiva la fórmula cuando $m = 30$ donde el error relativo generalmente es menor a 10^{-8} .

El código para el programa es

```

1 function [Om] = omss(S, t, r, s, X1, X2, K1, K2, j)
2     L = log(X2 ./ X1);
3     k1 = log(K1 ./ X1) ./ L;
4     k2 = log(K2 ./ X1) ./ L;
5     k1 = max(0, k1);
6     k2 = min(1, k2);
7     ga = L .* (0.5 + r ./ (s .^ 2));
8     al = L - ga;
9     x = log(S ./ X1) ./ L;
10    tau = s .^ 2 .* t ./ (2 * L .^ 2);
11    u = ufourier(x, tau, ga, K1, k1, k2, j);
12    Om = X1 .* exp(al .* x - ga .* tau) .* u;
13 end
14
15 function [y] = ufourier(x, tau, ga, K1, k1, k2, j)
16     y = zeros(size(x));
17     for j = 1 : j,
18         fouriercoef = (fe(ga, j, k2) - fe(ga, j, k1)) ./ K1;
19         y = y + fouriercoef .* exp(- (j * pi) ^ 2 * tau) .*
20             sin(j * pi * x);
21     end
22 end
23 function [coef] = fe(ga, j, k)
24     d1 = 2 * exp(ga .* k);
25     d2 = (ga .* sin(pi * j * k) - pi * j .* cos(pi * j * k));
26     numer = d1 .* d2;
27     denom = ga .^ 2 + (pi * j) ^ 2;
28     coef = numer ./ denom;
29 end

```

Para el caso particular de $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $S = 1$, $K_1 = 0.8$, $K_2 = 1, 2$, $X_1 = 0.7$ y $X_2 = 1.25$ se tiene el siguiente gráfico de $u^{<5>}(x, \tau)$ contra t .

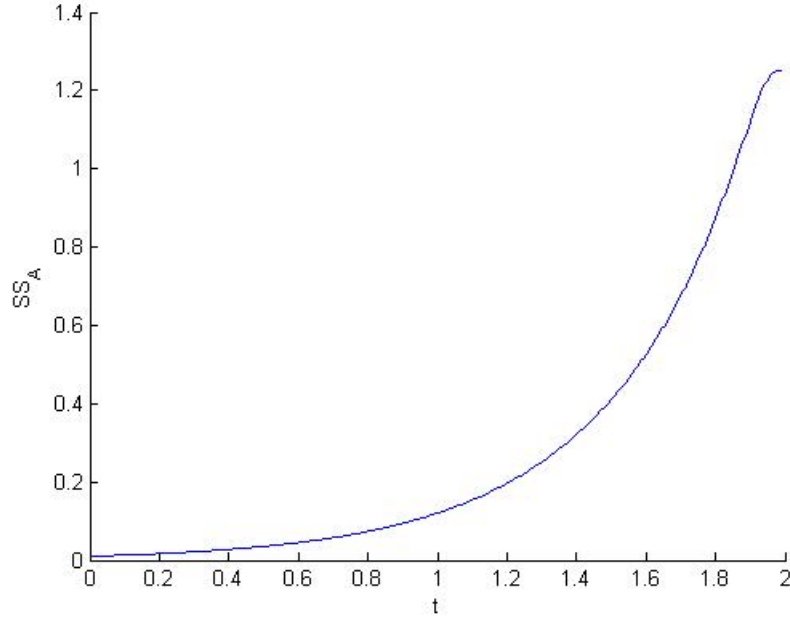


Figura 4.1: Método de separación de variables.

Caso de fórmula mediante método de reflexiones.

Tenemos la fórmula explícita (sin hacer cambios de variable inverso)

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi - \sum_{k=0}^{\infty} (B_{+,2k}^-(x) - B_{-,2k+1}^-(x) + B_{-,2k}^+(x) - B_{+,2k+1}^+(x)) \right).$$

Denotemos de la siguiente forma la serie que converge a u para el método de reflexiones

$$u^{<m>}(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi - \sum_{k=0}^m (B_{+,2k}^-(x, \tau) - B_{-,2k+1}^-(x, \tau) + B_{-,2k}^+(x, \tau) - B_{+,2k+1}^+(x, \tau)) \right).$$

La convergencia de la serie es muy rápida en muchos casos.

El código para el programa es

```

1 function y = uu(r, s, t, Xm, Xn, K1, K2, S, P)
2 L = log(Xm ./ Xn);
3 a = L .* (1/2 - r ./ (s .^ 2));
4 b = -(L - a) .^ 2;
5 g = L - a;
6 x = log(S ./ Xn) ./ L;
7 k1 = log(K1 ./ Xn) ./ L;
8 k2 = log(K2 ./ Xn) ./ L;
9 k1 = max(0, k1);
10 k2 = min(1, k2);
11 e1 = erf((k2 - x - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t)));
12 e2 = erf((k1 - x - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t)));
13 ui = exp(g .* (x + g .* t)) ./ (2 * K1) .* (e1 - e2);
14 w = 0;
15 for l = 0:P
16     B1 = Bnm(x, 2 * l, t, g, K1, k1, k2);
17     B2 = Bnn(x, 2 * l + 1, t, g, K1, k1, k2);
18     B3 = Bmm(x, 2 * l, t, g, K1, k1, k2);
19     B4 = Bmm(x, 2 * l + 1, t, g, K1, k1, k2);
20     w = w + B1 - B2 + B3 - B4;
21 end
22 uc = w ./ (2 * sqrt(pi * t));
23 y = Xn .* exp(a .* x + b .* t) .* (ui - uc);
24 end
25
26 function y = Bmm(x, k, t, g, K1, k1, k2)
27     num1 = (k2 - x - k - 1 - 2 * g .* t) ./ (2 .* sqrt(t));
28     num2 = (k1 - x - k - 1 - 2 * g .* t) ./ (2 .* sqrt(t));
29     num3 = g .* (x + k + 1 + g .* t);
30     ind = num3 < 709;
31     y = zeros(size(num3));
32     E1 = erf(num1(ind));
33     E2 = erf(num2(ind));
34     y(ind) = sqrt(pi * t(ind)) ./ K1(ind) .* exp(num3(ind))
35         .* (E1 - E2);
36 end
37 function y = Bnm(x, k, t, g, K1, k1, k2)
38     num1 = (k2 - 1 + x - k - 1 - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t));

```

```

39     num2 = (k1 - 1 + x - k - 1 - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t))
        ;
40     num3 = g .* (1 - x + k + 1 + g .* t);
41     ind = num3 < 709;
42     y=zeros(size(num3));
43     E1 = erf(num1(ind));
44     E2 = erf(num2(ind));
45     y(ind) = sqrt(pi * t(ind)) ./ K1(ind) .* exp(num3(ind))
        .* (E1 - E2);
46 end
47
48 function y = Bmn(x, k, t, g, K1, k1, k2)
49     num1 = (k2 + x + k - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t));
50     num2 = (k1 + x + k - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t));
51     num3 = g .* (-x - k + g .* t);
52     ind = num3 < 709;
53     y = zeros(size(num3));
54     E1 = erf(num1(ind));
55     E2 = erf(num2(ind));
56     y(ind) = sqrt(pi * t(ind)) ./ K1(ind) .* exp(num3(ind))
        .* (E1 - E2);
57 end
58
59 function y = Bnn(x, k, t, g, K1, k1, k2)
60     num1 = (k2 + 1 - x + k - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t));
61     num2 = (k1 + 1 - x + k - 2 * g .* t) ./ (2 * sqrt(t));
62     num3 = g .* (-1 + x - k + g .* t);
63     ind = num3 < 709;
64     y=zeros(size(num3));
65     E1 = erf(num1(ind));
66     E2 = erf(num2(ind));
67     y(ind) = sqrt(pi * t(ind)) ./ K1(ind) .* exp(num3(ind))
        .* (E1 - E2);
68 end

```

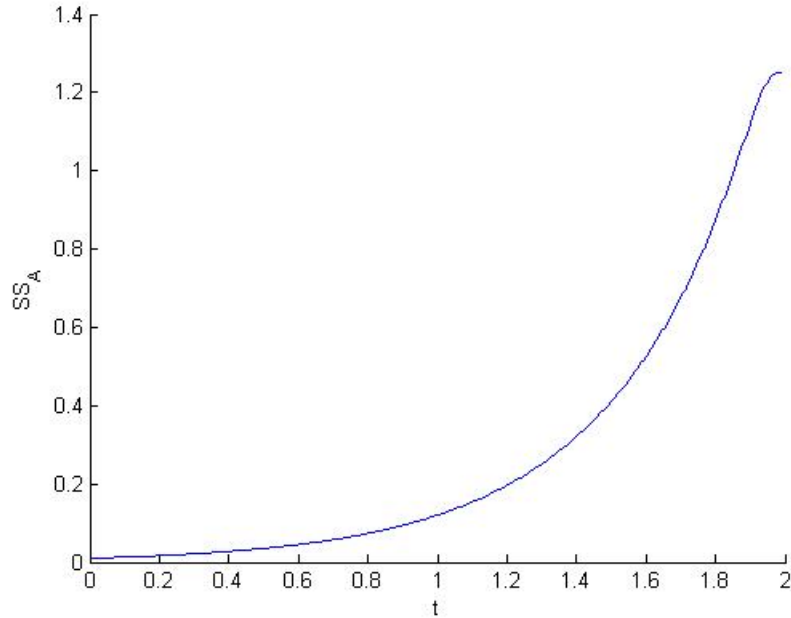


Figura 4.2: Método de reflexiones

Con los mismos parámetros que en el caso del método de la transformada de Fourier se tiene considerando 6 sumandos.

4.2. Criterio.

Como hemos mencionado anteriormente, lo que nos interesa es poder definir un criterio para el cual se pueda tener una efectividad al usar una u otra fórmula bajo condiciones en los parámetros. Dado que en ambas fórmulas se tienen series, en el caso de separación de variables un término y en el caso de reflexiones cuatro términos por cada vez que cambia el contador, entonces usaremos una razón 1 – 4 para comparar las series. Un criterio de forma simple se obtiene de la siguiente forma:

Caso de método de separación de variables. Cuando ℓ es cercano a cero se tiene una buena aproximación usando esta fórmula.

Caso de método de reflexiones. Cuando ℓ es muy grande y t cercano a T es muy efectiva esta fórmula.

Sin embargo, esto nos genera un problema cuando hay combinaciones en las condiciones, por ejemplo, ¿qué pasa cuando t es cercano a T y ℓ muy grande?

Resulta que considerando el parámetro τ se obtiene la respuesta. Graficando los errores relativos en escala logarítmica en base 10 en cada fórmula para 10^8 casos

aleatorios con $S \in (0.8, 1.2)$, $\sigma \in (0.3, 0.7)$, $r \in (0.1, 0.3)$, $T \in (0.5, 1.7)$, $K_1 = 0.7$, $K_2 = 1.3$, $X_1 \in (0.4, 0.6)$, $X_2 \in (1.2, 1.8)$ y considerando 1-4 términos en la serie, así se obtiene lo siguiente

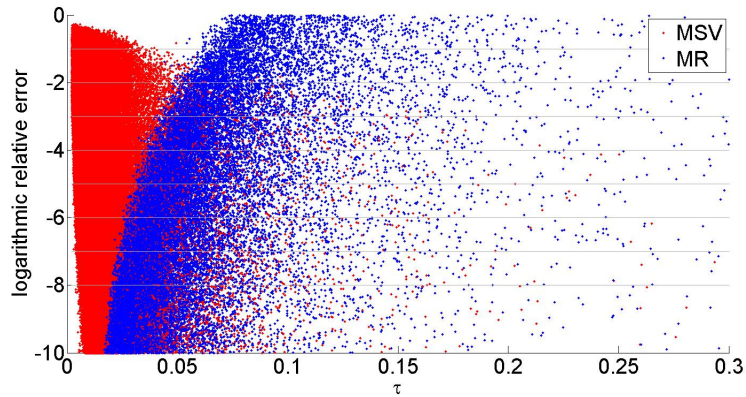


Figura 4.3: Series con razón 1-4.

Cuando τ crece, los puntos obtenidos por el método de reflexiones tienden a crecer y la fórmula por el método de separación de variables tiende a decrecer. En la gráfica, la fórmula por el método de reflexiones nos da una muy buena aproximación cuando $\tau \in (0, 0.05)$. Cuando $\tau > 0.05$ se comienzan a tener valores dispersos, a veces hay una buena aproximación y a veces no. De manera contraria, la fórmula por el método de separación de variables resulta más eficiente cuando $t > 0.05$ y no tan buena cuando $\tau \in (0, 0.05)$.

Para cuando se tienen 2-8 términos en las series, se tiene el siguiente gráfico:

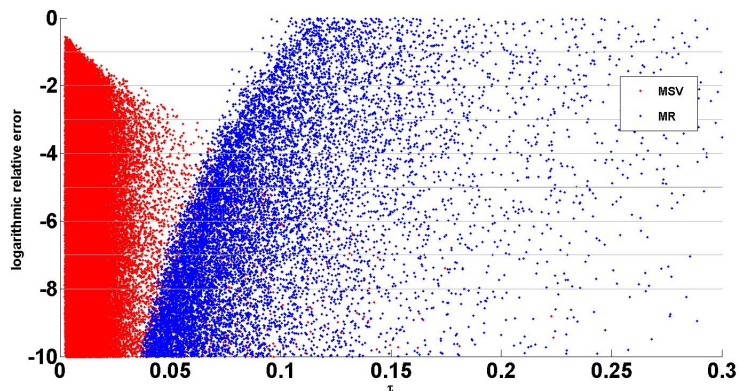


Figura 4.4: Serie con razón 2-8.

Ahora se puede ver que en una vecindad de 0.07 hay mejor aproximación de las series. En este caso, la tendencia se mantiene en ambos casos, para la fórmula de separación de variables, mientras más grande es τ , menor es el valor de la opción. En cambio, mientras más grande es el valor de τ , mayor es el valor de la opción con la fórmula de reflexiones. Cuando $\tau > 0.06$, la fórmula obtenida mediante el método de separación de variables es bastante buena (el valor máximo es menor a 10^{-3}) mientras que cuando $\tau \in (0, 0.08)$ se tiene una muy buena aproximación para la fórmula obtenida mediante el método de reflexiones.

Para cuando se tienen 3-12 términos en las series, se tiene el siguiente gráfico:

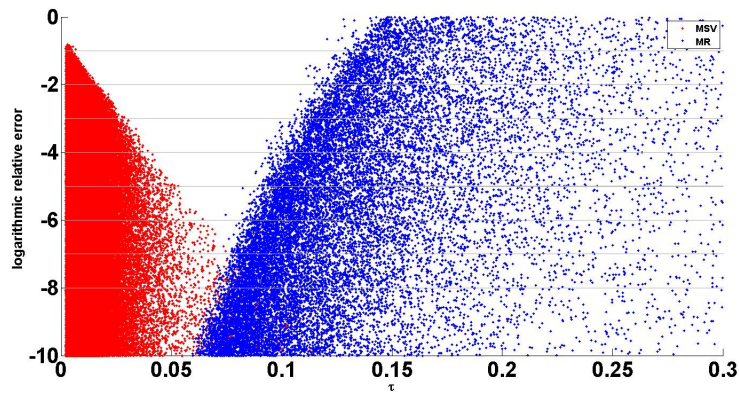


Figura 4.5: Serie con razón 3-12.

Notemos el comportamiento de cuando hay tres sumandos en la serie de reflexiones se tiene una buena aproximación cuando $\tau \in (0, 0.12)$, la efectividad de la fórmula por el método de separación de variables es muy buena cuando $\tau > 0.02$.

Para cuando se tienen 6-24 términos en las series, se tiene el siguiente gráfico:

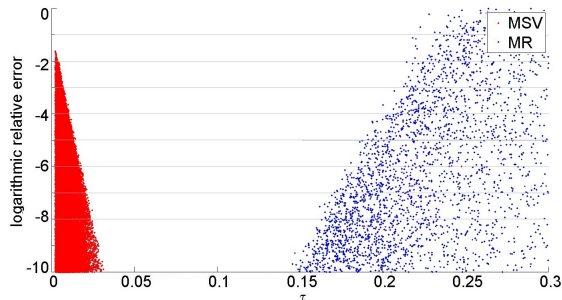


Figura 4.6: Serie con razón 6-24.

Generalmente se tiene el siguiente criterio (escoger la fórmula mediante el método de reflexiones “MR” o el método de separación de variables “MSV”):

	$\tau \in (0, 0.06)$	$\tau \in (0.06, 0.08)$	$\tau > 0.08$
j=1	MF	MF mejor que MSV	MSV
j=2	MF	MF o MSV	MSV
j=3	MF	MF o MSV	MSV
j=4	MF	MF o MSV	MSV
j>5	MF	MF o MSV	MSV

En este capítulo se ha dado un criterio para decidir en qué casos emplear una u otra fórmula según el valor de los parámetros t y ℓ mediante τ .

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron dos fórmulas para obtener el precio de una opción mediante el método de separación de variables y el método de reflexiones. Se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Cuando calculamos $\tau = \frac{\sigma^2}{2\ell^2}(T - t)$ decidimos cual fórmula se usará, bajo el criterio de que si τ es menor a 0.05 entonces usamos la fórmula de reflexiones, si τ es mayor a 0.05 entonces usamos la fórmula del método de separación de variables y si τ está en una vecindad de 0.05 entonces se usará cualquier método con una cantidad fija excepto (excepto un sumando en el caso de la fórmula de separación de variables) para obtener una buena aproximación .
2. Cuando ℓ es muy grande o $T - t$ cercano a cero, entonces se usará la fórmula obtenida por el método de reflexiones. En la serie, usualmente con 8 sumandos se obtiene un error menor a 10^{-8} .
3. Cuando $T - t$ es grande o ℓ se acerca a 0 entonces se usará la fórmula obtenida por el método de separación de variables. En la serie, usualmente con 30 sumandos se obtiene un error menor a 10^{-8} .
4. Se dedujeron dos expresiones asintóticas, una correspondiente al método de separación de variables, cuando $\tau \rightarrow \infty$ ((2.21)) y la otra correspondiente al método de reflexiones, cuando $\tau \rightarrow 0$ ((3.17)).

Bibliografía

- [1] Widder D.V. (1946), *The Laplace Transform*. Princeton University Press, USA.
ISBN: 978-0486477558
- [2] Black F., Scholes M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*.
The Journal of Political Economy, 81:3, 637-654.
doi:10.1086/260062.
- [3] Merton R.C. (1973), *Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of
Economics and Management Science, 4:1, 141-183.
doi: 10.2307/3003143
- [4] Goldman M., Sosin H., Gatto, M. (1979), *Path Dependent Options : Buy at the
Low, Sell at the High*. Journal of finance, 34:5, 1111-1127.
doi: 10.1111/j.1540-6261
- [5] Kunimoto N., Ikeda M. (1992), *Pricing options with curved boundaries*. Mathe-
matical Finance, 2:4, 275-298.
doi: 10.1111/j.1467-9965
- [6] Wilmont P., Howison S., Dewynne J. (1995), *The mathematics of financial de-
rivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, USA.
ISBN: 978-0521497893
- [7] German H., Yor M. (1996), *Pricing and Hedging Double-Barrier Options: A
Probabilistic Approach*. Mathematical Finance, 6:4, 365-378.
doi: 10.1111/j.1467-9965
- [8] Musiela M., Rutkowski M. (1997), *Martingale methods in financial modelling*.
Springer, USA.
ISBN: 978-3-540-26653-2
- [9] Karatzas I.; Shreve S. (1998), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Sprin-
ger, USA.
ISBN: 978-1-4612-0949-2

- [10] Bracewell R. (2000), *The Fourier Transform and its applications*. McGraw Hill, USA.
ISBN: 978-0073039381
- [11] García-Fuentes R., *Opciones digitales de doble barrera*. Tesis de maestría del departamento de matemáticas, CINVESTAV, México, 2004.
- [12] Carrada-Herrera R.; Grudsky S.; Palomino-Jiménez C.; Porter R. M. (2013), *Asymptotics of european double-barrier option with compound Poisson component*. Communications in Mathematical Analysis, 14:2, 40-66.
<http://www.math.cinvestav.mx/grudsky/Papers/123.pdf>
- [13] Organización de datos financieros.
<http://www.world-exchanges.org/statistics/monthly-reports>.
-