Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Funciones Pseudo-analíticas y Construcción de Potencias Formales en el Sentido Bers-Kravchenko para Números Hiperbólicos

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemáticas

PRESENTA

Pablo Enrique Moreira Galván

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Robert Michael Porter Kamlin

CIUDAD DE MÉXICO, 2016

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

Gracias a mis padres Angelina Galván Cabral y Cruz Moreira Solis que me apoyaron en todo momento en esta etapa de estudio, y a mI pareja Analy Chairez y mi hijo Leonardo que siempre estuvieron a mi lado. Quiero agradecer al Dr. R. Michael Porter K. por todo el apoyo brindado durante mi estancia en el Cinvestav, que además de ser un apoyo académico tambien fue un gran apoyo en lo personal.

Índice general

Introducción

Uno de los problemas mas recurrentes en la física es la de encontrar soluciones a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = -\lambda r(x)y$$

con condiciones de contorno. Este problema es conocido en las matemáticas como un problema de Sturm-Liouville. La teoría desarrollada para estudiar propiedades de soluciones a este tipo de problema fue creada por J.C.F Sturm y J. Liouville entre los años 1829-1840. Además de la gran importancia en la física, tiene gran relevancia en las matemáticas abstractas. En 2008 V.V. Kravchenko y R.M. Porter [6] presentan un método para calcular los coeficientes funcionales en una representación en series de potencias $y(x) = \sum c_n(x)\lambda^n$ para las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville, que se conoce como *Spectral Parameter Power Series* (S.P.P.S). Esto generó mucho interés en desarrollar mejores métodos de encontrar los eigenvalores de problemas espectrales.

La construcción de las Spectral Parameter Power Series se fundamentó en la teoría de las funciones pseudo-analíticas de L. Bers [1], que son funciones de una variable compleja. V.V Kravchenko y S.Torba en [8], usaron funciones pseudo-analíticas de una variable en el espacio de números hiperbólicos en lugar de los complejos, lo cual permitió obtener resultados importantes para problemas de Sturm-Liouville.

En este trabajo explicaremos los conceptos básicos que se usan en [8]. Describiremos con detalle los números hiperbólicos y desarrollaremos la teoría de las funciones pseudo-analíticas para los dos casos, números complejos $\mathbb{C}$ (generados por $1, \mathbf{i}$) y números hiperbólicos $\mathbb{D}$ (generados por $1, \mathbf{j}$) simultáneamente.

En el Capítulo 1, se darán varias formas de definir los números hiperbólicos y se mostrarán algunas diferencias y semejanzas entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$. En el Capítulo 2 se dará la definición de diferenciabilidad en $\mathbb{D}$, y se darán las propiedades básicas de las funciones pseudo-analíticas para los casos complejo e hiperbólico, escribiendo $\mathbb{E}$ para denotar $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{D}$, según el caso. Simplificamos la presentación usando un par generador en el sentido de Bers de la forma especial $(f, \mathbf{k}/f)$ donde $\mathbf{k}$ representa $\mathbf{i}$ ó $\mathbf{j}$ y f es una función escalar. En el Capítulo 3, se estudiará la integración sobre curvas en $\mathbb{E}$ y un tipo de integración especial llamada f-integración (que se reduce al concepto de integración en $\mathbb{E}$ cuando $f \equiv 1$). Luego definiremos las potencias formales en $\mathbb{E}$ y unas funciones asociadas a ellas. En el Capitulo 4, se estudiaran operadores de transmutación de un operador diferencial en otro. Un operador de transmutación asociado a las funciones pseudo-analíticas hiperbólicas servirá para resolver problemas de Sturm-Liouville.

Capítulo 1

Números Hiperbólicos

Los números hiperbólicos (que tambien se han llamado números dobles, birreales o duplex) forman un sistema algebraico con propiedades análogas a los números complejos, pero con unas diferencias importantes que permiten entender mejor ciertos operadores diferenciales [4, 8]. En este capítulo veremos que los números hiperbólicos aparecen de manera natural al tratar de definir una suma y un producto componente a componente en $\mathbb{R}^2$. Hay muchas formas de definir números hiperbólicos, por lo que construiremos varios modelos y mostraremos las equivalencias entre ellos. Aprovechándonos de las diversas construcciones, demostraremos algunas de las propiedades de los números hiperbólicos. Veremos las semejanzas y diferencias de las funciones elementales (polinomios, exponencial, etc.) entre los números complejos y los números hiperbólicos.

1.1. Definición de números hiperbólicos y construcciones.

La presentación aquí se ha formulado combinando ideas de los trabajos [3, 4, 13, 14].

Definición 1.1. El conjunto de los *números hiperbólicos*, denotado por $\mathbb{D}_1 := (\mathbb{R}^2, +, \odot)$ tiene la suma $+$ usual, y el producto $\odot$ definido de la siguiente manera:

$$(a, b) \odot (c, d) := (ab, cd) \text{ para } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.2. *El conjunto $\mathbb{D}_1$ es un anillo conmutativo con unidad. Además para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{D}_1$, se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. ***Neutro aditivo**: $0_{\mathbb{D}_1} = (0, 0)$;*
2. ***Neutro multiplicativo**: $1_{\mathbb{D}_1} = (1, 1)$;*

3. *$(a,b) \odot (c,d) = 0$ si y sólo si $ab = 0$ y $cd = 0$;*

4. *Si (a,b) es invertible, entonces $(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$;*

5. *$(a,b)^n = (a^n, b^n)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.*

1.2. Realizaciones de números hiperbólicos.

En esta sección veremos maneras alternativas de construir los números hiperbólicos.

Definición 1.3. Se define el anillo $\mathbb{D} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ donde $+$ es la suma usual, y el producto $\cdot$ es definido por

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac + bd, ad + cb) \text{ para todo } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.4. *El conjunto $\mathbb{D}$ es un anillo conmutativo con unidad y satisface las siguientes propiedades:*

1. ***Neutro aditivo*** $0_{\mathbb{D}} = (0,0)$;

2. ***Neutro multiplicativo*** $1_{\mathbb{D}} = (1,0)$.

Definición 1.5. Se define el número $\mathbf{j} := (0,1) \in \mathbb{D}$, el cual es llamado la *unidad hiperbólica* en $\mathbb{D}$.

Claramente todo $(a,b) \in \mathbb{D}$ se puede escribir de manera única como

$$(a,b) = (a,0) + \mathbf{j}(b,0),$$

así en vez de usar (a,b) usaremos el símbolo $a + \mathbf{j}b$. Ademaás se tiene

$$\mathbf{j}^2 = 1.$$

Sea $A[X]$ el conjunto de polinomios 3n X con coeficientes en un anillo A. Aquí X representa un símbolo indeterminado, y un polinomio en X es una expresioón de la forma $p(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ donde $a_i \in A$ para todo i. Aunque X no tiene un valor, los polinomios se pueden multiplicar y sumar de una forma natural, así $A[X]$ es un anillo [15].

Se escribe $\langle p(X) \rangle$ para el subconjunto de $A[X]$ de todos los múltiplos de $p(X)$: el *ideal generado por p(x)*.

Consideramos $A = \mathbb{R}$. El anillo cociente

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2 - 1 \rangle} = \{a + bX + \langle X^2 - 1 : a, b \in \mathbb{R} \rangle\}$$

tiene estructura de anillo de forma natural [15]. Aquí $\{a+bX+\langle X^2-1\rangle |\ a,b\in\mathbb{R}\}$ significa la clase de equivalencia de $a+bX$.

Definición 1.6. Se define $\mathbb{D}_2 := (\frac{\mathbb{R}[X]}{\langle X^2-1\rangle}, +, *)$ donde la suma y el producto son los usuales para polinomios y espacios cociente (ver por ejemplo [15]).

Por ser X^2-1 un polinomio reducible, se tiene que $\mathbb{D}_2$ tiene divisores de cero. De hecho, cualquier polinomio con factores de $X-1$ o $X+1$, al multiplicar por $X+1$ o $X-1$ respectivamente, da cero en $\mathbb{D}_2$.

Sea $\mathbf{M}_{2\times 2}\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$ la colección de matrices con coeficientes reales

$$\mathbf{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R} \right\}.$$

Definición 1.7. Definimos el anillo $\mathbb{D}_3 = (\mathbf{M}_{2\times 2}, +, *)$ donde la suma y el producto son los usuales para las matrices.

Notemos que un elemento $A\in\mathbb{D}_3$ tiene inversa multiplicativa si y sólo si $\det A\neq 0$, es decir que $|a|\neq|b|$.

Teorema 1.8. *Son isomorfos los anillos $\mathbb{D}, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ y $\mathbb{D}_3$.*

Demostración: Usando el siguiente esquema

$$\mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_3 \longrightarrow \mathbb{D}_2$$

se demostrará el teorema. Consideramos $\rho_1 : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}$ definido por

$$(a,b) \xrightarrow{\rho_1} \frac{a+b}{2} + \mathbf{j}\frac{a-b}{2}.$$

Claramente ρ_1 es un homomorfismo de anillos. Si $\rho_1(a,b)=0$ entonces $a+b=0$ y $a-b=0$ luego $a=0=b$. Por lo tanto $\ker\rho_1=\{0\}$. Sea $\tilde{a}+\mathbf{j}\tilde{b}\in\mathbb{D}$. Entonces $(a,b)=\left(\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}, \frac{\tilde{a}-\tilde{b}}{2}\right)\in\mathbb{D}_1$ satisface $\rho_1(a,b)=(\tilde{a},\tilde{b})$. Por lo tanto ρ_1 es isomorfismo.

De manera análoga se muestra que las siguientes funciones son isomorfismos:

$$\begin{aligned} \rho_2\colon \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D}_3, \\ (a,b) &\longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ \rho_3\colon \mathbb{D}_3 &\longrightarrow \mathbb{D}_2, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} &\longrightarrow bX + a. \end{aligned}$$

□

De ahora en adelante se usará el modelo $\mathbb{D}$ para denotar a los números hiperbólicos, a menos que se especifique otro de los modelos.

Definición 1.9. Se definen los *números hiperbólicos idempotentes* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbb{D}$ mediante

$$\mathbf{e_1} = \frac{1+\mathbf{j}}{2}, \ \mathbf{e_2} = \frac{1-\mathbf{j}}{2}.$$

La importancia de estos números se verá en la siguiente proposición y en el desarrollo de la teoría de los números hiperbólicos.

Proposición 1.10. *Los elementos idempotentes $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbb{D}$ satisfacen las siguientes relaciones:*

1. $\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} = 0$;
2. $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = 1$;
3. $\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} = \boldsymbol{j}$;
4. ${\mathbf{e_1}}^2 = \mathbf{e_1}$ *y* ${\mathbf{e_2}}^2 = \mathbf{e_2}$;
5. $a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2} = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$;
6. *Sea* $z = x + \boldsymbol{j}y \ \in \mathbb{D}$. *Entonces existen únicos* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $z = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}$. *Los valores explícitos son* $a = x + y, b = x - y$ *(Representación idempotente);*
7. *Sea* $z = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2}, w = b_1\mathbf{e_1} + b_2\mathbf{e_2}$. *Entonces se tiene lo siguiente:*
   a) $z + w = (a_1 + b_1)\mathbf{e_1} + (a_2 + b_2)\mathbf{e_2}$;
   b) $z \cdot w = a_1b_1\mathbf{e_1} + a_2b_2\mathbf{e_2}$;

c) $z^n = a_1^n \mathbf{e_1} + b_1^n \mathbf{e_2}$ *para* $n \in \mathbb{Z}$.

8. $\rho_1(a,b) = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}$ *donde* ρ_1 *es el isomorfismo definido en el Teorema 1.10.*

Por la importancia de la representación idempotente la enunciamos en la siguiente forma,

$$x + \mathbf{j}y = (x+y)\mathbf{e_1} + (x-y)\mathbf{e_2}. \tag{1.1}$$

Un elemento $a \neq 0 \in A$ de un anillo A se dice *divisor de cero* si existe un elemento $b \neq 0$ tal que $ab = 0$. El conjunto de divisores de cero lo denotamos como $Z(A)$.

Lema 1.11. *El conjunto de divisores de cero de los números hiperbólicos es*

$$Z(\mathbb{D}) = ((\mathbb{R}\mathbf{e_1}) \cup (\mathbb{R}\mathbf{e_2})) - \{0\} = \{a \pm a\boldsymbol{j} \mid a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

donde $\mathbb{R}\boldsymbol{e}_i = \{a\boldsymbol{e}_i | a \in \mathbb{R}\}$ $(i = 1, 2)$.

Demostración: Se sigue directamente de la Proposición 1.10 7 inciso b. □

Con la Proposición 1.10 se verá que los polinomios con coeficientes hiperbólicos tienen una forma muy particular.

Lema 1.12. *Sea* $p \in \mathbb{D}[X]$. *Entonces existen* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[X]$ *tales que para todo* $z = x + \boldsymbol{j}y \in \mathbb{D}$,

$$p(z) = p_1(x+y)\mathbf{e_1} + p_2(x-y)\mathbf{e_2}.$$

Demostración: Sea $p(X) = \sum_{n=0}^{N} c_n X^n$. Fijemos $z = x + \mathbf{j}y \in \mathbb{D}$. Usando (1.1) existen $a, b, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $z = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}$ y $c_n = a_n\mathbf{e_1} + b_n\mathbf{e_2}$. Usando la Proposición 1.10 se tiene

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^{N} (a_n\mathbf{e_1} + b_n\mathbf{e_2})(a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2})^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} (a_n a^n \mathbf{e_1} + b_n b^n \mathbf{e_2}) \\ &= p_1(2a)\mathbf{e_1} + p_2(2b)\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

donde

$$p_1(r) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{r}{2}\right)^n, \; p_2(r) = \sum_{n=0}^{N} b_n \left(\frac{r}{2}\right)^n.$$

Puesto que $a = (x+y)/2, b = (x-y)/2$, se sigue que p_1, p_2 son los polinomios buscados. □

Corolario 1.13. *Sea $p \in \mathbb{D}[X]$. Entonces las raíces de p en $\mathbb{D}$ quedan determinadas por $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, además p tiene a los más $N_1N_2 \leqslant N^2$ raíces (donde N_1, N_2 es el grado de p_1, p_2 respectivamente) o una infinidad de raíces.*

Demostración: Sea $p \in \mathbb{D}[X]$. Por el Lema existen $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[X]$ tales que $p(z) = p_1(x+y)\mathbf{e_1} + p_2(x-y)\mathbf{e_2}$. Supongamos que $p(z) = 0$. Entonces por la Proposición 1.10, $p_1(x+y) = p_2(x-y) = 0$. Sean $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ los conjuntos de raíces de p_1, p_2 respectivamente. Asi $x+y = a_{j_1},\ x-y = a_{j_2}$ para $0 \leqslant j_1 \leqslant N_1$, $0 \leqslant j_2 \leqslant N_2$. Esto determina $x = (a_{j_1} + a_{j_2})/2$, $y = (a_{j_1} - a_{j_2})/2$ y vemos que sólo hay N_1N_2 combinaciones para $z = x + \mathbf{j}y$. En el caso que p_1 ó p_2 sea idénticamente cero entonces p tiene una infinidad de raíces.

Los siguientes ejemplos muestran que un polinomio con coeficientes hiperbólicos puede tener una cantidad finita ó infinita de raíces, o bien no tener raíces.

Ejemplo 1.14. Sea $p(z) = (1+\mathbf{j})z^3 + (1+\mathbf{j})z$. Entonces $p(z) = ((x+y)^3 + (x+y))\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2}$. Así el conjunto de soluciones de p, en forma idempotente, queda determinado por las combinaciones de $(x+y) = 0$ y $(x-y) \in \mathbb{R}$ o $z = \lambda(1-\mathbf{j}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.15. Sea $p(z) = z^2 - \mathbf{j}$. Entonces la representación idempotente es $p(z) = ((x+y) - 1)\mathbf{e_1} + ((x-y)^2 + 1)\mathbf{e_2}$ lo cual no tiene solución, pues $(x-y)^2 + 1$ no tiene solución en los reales.

Ejemplo 1.16. Sea $p(z) = \frac{(1+\mathbf{j})}{2}z^3 - \mathbf{j}z$, el cual tiene la representación idempotente siguiente: $p(z) = ((x+y)^3 - (x+y))\mathbf{e_1} + (x-y)\mathbf{e_2}$. Se tiene que las raíces de p son la combinaciones de $(x+y) = 0, 1, -1$ y $(x-y) = 0$, las cuales representan $z_0 = 0, z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ y $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

Las raíces de un polinomio quedan determinadas por el anillo en donde se encuentran sus coeficientes. Por ejemplo $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ no tiene raíces reales, sin embargo $x^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ tiene sus dos raíces en $\mathbb{C}$. Así es natural preguntarse si existen polinomios $p \in \mathbb{R}[X]$ que no tengan raíces reales, pero cuando consideramos $p \in \mathbb{D}[X]$ sí tengan raíces. Resulta que no puede pasar esto. Este resultado no lo hemos encontrado en las fuentes consultadas.

Teorema 1.17. *Sea $p \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{D}[X]$. Entonces p tiene una raíz en $\mathbb{D}$ si y sólo si tiene una raíz en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $z = x + \mathbf{j}y$ y $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ con $a_n \in \mathbb{R}$, por lo cual $a_n = a_n\mathbf{e_1} + a_n\mathbf{e_2}$. Por la fórmula explicita de p_1, p_2 dada en la demostración del Lema 1.12, $p_1 = p_2 = p$ y

$$p\left(\frac{X}{2}\right) = p_1(x+y)\mathbf{e_1} + p_2(x-y)\mathbf{e_2}.$$

Por tanto $p(z_0) = 0$ si y sólo si $p_1((x_0+y_0)/2) = 0 = p_2((x_0-y_0)/2)$. $\square$

Lo anterior indica que si $p \in \mathbb{R}[X]$ lo consideramos como $p \in \mathbb{D}[X]$, no se puede afirmar que las dos versiones tengan las mismas raíces. Lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.18. Sea $p(X) = X^2 - 1$. Si lo consideramos en $\mathbb{R}[X]$, tiene dos raíces $1, -1$; pero si lo consideramos en $\mathbb{D}[X]$ tiene cuatro raíces $1, -1, \mathbf{j}, -\mathbf{j}$.

Definición 1.19. Sea $z = a + \mathbf{j}b \in \mathbb{D}$. Se definen el *conjugado hiperbólico, la parte real y la parte imaginaria* de z mediante

$$\overline{z} := a - \mathbf{j}b,\ \Re z := a \text{ y } \Im z := b$$

respectivamente.

El conjugado hiperbólico satisface las siguientes relaciones:

Proposición 1.20. *Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Entonces*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
2. *Cuando* $z = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}$ *se tiene* $\overline{z} = b\mathbf{e_1} + a\mathbf{e_2}$;
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
4. $\overline{\overline{z}} = z$;
5. $\Re(z_1 + z_2) = \Re z_1 + \Re z_2$;
6. $\Im(z_1 + z_2) = \Im z_1 + \Im z_2$;
7. $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *y* $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$;
8. $\Re(\boldsymbol{j}z) = \Im z$ *y* $\Im(\boldsymbol{j}z) = \Re z$.

Demostración: Las demostraciones salvo la número 2 son idénticas que en los números complejos, para demostrar 2 usamos que $\overline{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e_2}$ y $\overline{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e_1}$ y la propiedad 1. □

Lema 1.21. *Sea $p \in \mathbb{D}[X]$ con coeficientes reales. Supóngase que $p(z_0) = 0$. Entonces $p(\overline{z_0}) = 0$.*

Demostración: *Como $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ y $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, se tiene $p(\overline{z_0}) = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$.* □

Dado $w \in \mathbb{D}$ ¿es posible encontrar z_0 tal que $z_0^n = w$? Veremos que no siempre se puede encontrar tal z_0. Consideremos el polinomio $p(z) = z^n - w$ con $w = a_1\mathbf{e_1} + b_1\mathbf{e_2}$ y supongamos que tiene una raíz $z_0 = a_0\mathbf{e_1} + b_0\mathbf{e_2}$. Con lo visto anteriormente tenemos $p(z_0) = 0$ si y sólo si $z_0^n = w$; usando la representación idempotente $a_0^n\mathbf{e_1} + b_0^n\mathbf{e_2} = a_1\mathbf{e_1} + b_1\mathbf{e_2}$, luego $a_0^n = a_1$ y $a_0^n = b_1$. Supongamos n par y $a_1, b_1 \geq 0$ entonces la solución es $z_0 = \sqrt[n]{a_1}\mathbf{e_1} + \sqrt[n]{b_1}\mathbf{e_2}$, por otra parte si $a_1 < 0$ o $b_1 < 0$ no existe solución. Ahora supongamos n impar; entonces siempre existe solución la cual es $z_0 = \sqrt[n]{a_1}\mathbf{e_1} + \sqrt[n]{b_1}\mathbf{e_2}$.

Ejemplo 1.22. La ecuación $z^n = \mathbf{j}$ solamente tiene solución cuando n es impar, pues $\mathbf{j} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$ y su solución es $\mathbf{j}$.

1.3. Convergencia.

Como $\mathbb{D} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, dotamos a $\mathbb{D}$ con la norma usual en $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\|z\| = \|a + \mathbf{j}b\| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Con lo cual se tiene lo conocido sobre unicidad de límites, suma de límites, continuidad de funciones etc. A diferencia de los números complejos $\mathbb{C}$ en los cuales con la norma usual se tiene que $\|zw\| = \|z\|\|w\|$, vemos que en $\mathbb{D}$ no se tiene esta propiedad. Consideremos por ejemplo $z = 1 + \mathbf{j}$: $\|z^2\| = \|2 + 2\mathbf{j}\| = \sqrt{8} \neq 2\|1 + \mathbf{j}\|^2$. Sin embargo se tiene lo siguiente:

Lema 1.23. *Sean $z, w \in \mathbb{D}$. Entonces $\|zw\| \leqslant \sqrt{2}\|z\|\|w\|$.*

A menudo es mejor usar la representación idempotente de los números hiperbólicos, y usar que la convergencia en $\mathbb{R}^2$ es entrada a entrada en esta reprentación. Esto se puede demostrar pues $z_n = x_n + \mathbf{j}y_n$ converge si y solo si $a_n := x_n + y_n$, $b_n := x_n - y_n$ convergen.

Recordemos de los cursos de cálculo que la función exponencial se puede expresar mediante un límite

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

para $x \in \mathbb{R}$. Con esto definiremos la función exponencial en $\mathbb{D}$.

Teorema 1.24. *El siguiente límite existe para toda $z = x + \boldsymbol{j}y \in \mathbb{D}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x \left(\cosh y + \boldsymbol{j} \sinh y\right).$$

Demostración: Usando que $z = x + \mathbf{j}y = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}$ y la Proposición 1.10 tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \left(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \frac{a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}}{n}\right)^n \\
&= \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\mathbf{e_1} + \left(1 + \frac{b}{n}\right)\mathbf{e_2}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \mathbf{e_1} + \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \mathbf{e_2} \\
&\to e^a\mathbf{e_1} + e^b\mathbf{e_2} \\
&= e^{x+y}\left(\frac{1 + \mathbf{j}}{2}\right) + e^{x-y}\left(\frac{1 - \mathbf{j}}{2}\right) \\
&= e^x\left(\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\right) \\
&= e^x\left(\cosh y + \mathbf{j}\sinh y\right).
\end{aligned}$$

Si $x_n + \mathbf{i}y_n$ converge en $\mathbb{C}$ donde $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ es la unidad imaginaria, se sigue que $x_n + \mathbf{j}y_n$ converge donde $\mathbf{j} \in \mathbb{D}$ es la unidad hiperbólica. Sin embargo, una aparente generalización natural de este hecho para series de potencias no es válida.

Ejemplo 1.25. Veamos que en general no se tiene que

$$\text{“}\sum (a_k + \mathbf{i}b_k)z^k \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum (a_k + \mathbf{j}b_k)z^k \text{ converge.”}$$

Sean $a_k = 0, b_k = 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y sea $z = 1$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^k}{k} = \sum_{k\ par} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k} + \mathbf{i} \sum_{k\ impar} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \in \mathbb{C}.$$

La cual converge pues la parte real e imaginaria son series alternantes cuyos términos decrecen a cero. Pero si consideremos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{j}^k}{k} = \sum_{k\ par} \frac{1}{k} + \sum_{k\ impar} \frac{\mathbf{j}}{k} \in \mathbb{D}.$$

la serie diverge.

Definición 1.26. Dado $z \in \mathbb{D}$ se define

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.27. $\exp(\boldsymbol{j}) = \cosh 1 + \sinh 1$.

Proposición 1.28. *La función exponencial (1.2) cumple*

1. *Para* $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{D}$ *se tiene* $\exp(x) = e^x$*;*
2. $\exp(z) \neq 0 \ \ \forall\, z \in \mathbb{D}$*;*
3. $\exp(z) \notin Z(\mathbb{D})$ *y su inverso multiplicativo es* $\exp(-z)$*;*
4. *Dado* $w = w_1\mathbf{e_1} + w_2\mathbf{e_2}$ *con* $w_1, w_2 > 0$*, la ecuación* $\exp(z) = w$ *tiene única solución, que es* $z = \frac{\ln(w_1 w_2)}{2} + \boldsymbol{j}\frac{\ln(w_1 w_2^{-1})}{2}$.

Demostración:

1. Como $x = x + \mathbf{j}0$, $\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$, se cumple que la exponencial hiperbólica es una extensión de la exponencial real.

2. Por la representación idempotente $\exp(z) = e^{x+y}\mathbf{e_1} + e^{x-y}\mathbf{e_2}$ y como la función exponencial real e^x no se anula por Proposición 1.10 inciso 5 se obtiene el resultado.

3. Como $\exp(-z) = e^{-(x+y)}\mathbf{e_1} + e^{-(x-y)}\mathbf{e_2}$ y como $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = 1$, multiplicando por $\exp(z)$ en su forma idempotente se tiene el resultado.

4. Como $\exp(z) = e^{x+y}\mathbf{e_1} + e^{x-y}\mathbf{e_2}$ entonces basta resolver la ecuación
$$w_1\mathbf{e_1} + w_2\mathbf{e_2} = e^{x+y}\mathbf{e_1} + e^{x-y}\mathbf{e_2}.$$
o equivalentemente
$$w_1 = e^{x+y} \text{ y } w_2 = e^{x-y}.$$
De donde se tiene el resultado.

Con esto podemos tener la siguiente proposición y un análogo de la fórmula de Moivre para los números hiperbólicos.

Lema 1.29. *Sea* $z, w \in \mathbb{D}$. *Entonces* $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$. *En particular se tiene*
$$(\cosh y + \boldsymbol{j}\sinh y)^n = \cosh ny + \boldsymbol{j}\sinh ny \quad \textit{para} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración: Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad tenemos
$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= e^x(\cosh y + \mathbf{j}\sinh y)e^{x_1}(\cosh y_1 + \mathbf{j}\sinh y_1) \\
&= e^{x+x_1}\left((\cosh y \cosh y_1 + \sinh y \sinh y_1) + \mathbf{j}\left(\cosh y \sinh y_1 + \sinh y \cosh y_1\right)\right) \\
&= e^{x+x_1}\left(\cosh(y + y_1) + \mathbf{j}\sinh(y + y_1)\right) \\
&= \exp(z + y).
\end{aligned}$$

□

Como $\exp(\mathbf{j}y) = \cosh y + \mathbf{j}\sinh y$ y $\exp(-\mathbf{j}y) = \cosh y - \mathbf{j}\sinh y$, se tiene que
$$\cosh y = \frac{\exp(\mathbf{j}y) + \exp(-\mathbf{j}y)}{2} \quad \text{y} \quad \sinh y = \frac{\exp(\mathbf{j}y) - \exp(-\mathbf{j}y)}{2\mathbf{j}}.$$

El Lema 1.29 sugiere la siguiente definición.

Definición 1.30. Para $z \in \mathbb{D}$, se definen las *funciones trigonométricas hiperbólicas*
$$\cosh z = \frac{\exp(\mathbf{j}z) + \exp(-\mathbf{j}z)}{2} \quad \text{y} \quad \sinh z = \frac{\exp(\mathbf{j}z) - \exp(-\mathbf{j}z)}{2\mathbf{j}}.$$

Proposición 1.31. *Sea $z \in \mathbb{D}$. Entonces*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Demostración: Utilizando la representación idempotente de z y la Proposición 1.10, tenemos la siguiente cadena de igualdades.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2})^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a^k \mathbf{e_1}}{k!} + \frac{b^k \mathbf{e_2}}{k!} \right) = e^a \mathbf{e_1} + e^b \mathbf{e_2}$$

$$= e^{x+y} \frac{1+j}{2} + e^{x-y} \frac{1-j}{2} = e^x (\cosh y + j \sinh y).$$

Con esto se tiene tienen las siguientes relaciones de las funciones trigonométricas hiperbólicas, las cuales se demuestran de manera análoga que en el caso de la función exponencial.

Proposición 1.32. *Para $z \in \mathbb{D}$,*

1. Si $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{D}$ entonces $\cosh x, \sinh x$ coinciden con el coseno y seno hiperbólico reales;
2. $\cosh z = \sum_{n \text{ par}} \frac{z^n}{n!}$;
3. $\sinh z = \sum_{n \text{ impar}} \frac{z^n}{n!}$;
4. $\exp z = \cosh z + \mathbf{j} \sinh z$;
5. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

Capítulo 2

Diferenciabilidad y Pseudo-diferenciabilidad

En este capítulo se define la noción de diferenciabilidad de funciones hiperbólicas. La diferenciabilidad en el sentido hiperbólico corresponde a unas ecuaciones análogas a las ecuaciones Cauchy-Riemann de la variable compleja y veremos algunas de sus consecuencias. Después se verá el concepto de pseudo-diferenciabilidad tanto en números en complejos como en números hiperbólicos.

2.1. Diferenciabilidad

En la siguiente sección solamente trabajaremos en $\mathbb{D}$. Los conceptos son análogos a nociones bien conocidas para los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 2.1. Sea $U \in \mathbb{D}$ abierto. Se dice que la función $w\colon U \longrightarrow \mathbb{D}$ es $\mathbb{D}$-*diferenciable* en el punto $z_0 \in U$ cuando existe el límite siguiente:

$$w'(z_0) \quad := \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z - z_0 \notin Z(\mathbb{D})}} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0} \tag{2.1}$$

El número $w'(z_0) \in \mathbb{D}$ se llama la $\mathbb{D}$-derivada de w en z_0. Se dice que w es $\mathbb{D}$-diferenciable en U cuando lo es en cada punto de U. Claramente $w(z) = \textit{constante}$ es $\mathbb{D}$-diferenciable y $w'(z) = 0$.

Notemos que a diferencia de los números complejos $\mathbb{C}$, los números hiperbólicos tienen divisores de cero, por eso la necesidad de pedir que $z - z_0 \notin \mathbb{Z}(\mathbb{D})$ en (2.1). En el siguiente ejemplo se muestra que puede existir la derivada en un punto donde la función no es continua, a diferencia de lo que se tiene en las funciones de variable compleja.

Ejemplo 2.2. Consideremos la siguiente función:

$$w(z) = w(x+\mathbf{j}y) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |x| \neq |y| \text{ o } z = 0, \\ \\ 1 \quad \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Calculando la derivada en $z_0 = 0$,

$$w'(0) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z\notin Z(\mathbb{D})}} \frac{w(z)}{z} = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z\notin Z(\mathbb{D})}} \frac{0}{z} = 0. \tag{2.2}$$

Sin embargo la función w claramente no es continua en 0. En este ejemplo w no es $\mathbb{D}$-diferenciable en todo punto. Sea $z_0 \in Z(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$. Entonces

$$w'(z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{D})}} \frac{w(z)}{z-z_0} = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{D})}} \frac{1}{z-z_0}$$

no existe.

Proposición 2.3. *Sea $z = \tilde{x}\mathbf{e_1} + \tilde{y}\mathbf{e_2}$ y $w(z) = w_1(\tilde{x})\mathbf{e_1} + w_2(\tilde{y})\mathbf{e_2}$, donde w_1, w_2 son funciones real valuadas. Entonces $w'(z) = w'(\tilde{x})\mathbf{e_1} + w_2'(\tilde{y})\mathbf{e_2}$.*

Demostración: Dado $z = \tilde{x}\mathbf{e_1} + \tilde{y}\mathbf{e_2}$, define la correspondencia $(x, y) \longleftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$, entonces $z \to z_0 \Longleftrightarrow x \to \tilde{x}_0, \tilde{y} \to \tilde{y}_0$. Usando los incisos 1 y 7c de la Proposición 1.10 calculando el límite (2.1) se tiene:

$$\begin{aligned} w'(z_0) &= \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{D})}} \frac{(w_1(\tilde{x}) - w_1(\tilde{x}_0))\mathbf{e_1} + (w_2(\tilde{y}) - w_2(\tilde{y}_0))\mathbf{e_2}}{(\tilde{x}-\tilde{x}_0)\mathbf{e_1} + (\tilde{y}-\tilde{y}_0)\mathbf{e_2}}; \\ &= \lim_{x\to\tilde{x}_0} \frac{w_1(\tilde{x}) - w_1(\tilde{x}_0)}{\tilde{x}-\tilde{x}_0}\mathbf{e_1} + \lim_{\tilde{y}\to\tilde{y}_0} \frac{w_2(\tilde{y}) - w_2(\tilde{y}_0)}{\tilde{y}-\tilde{y}_0}\mathbf{e_2}; \\ &= w_1'(\tilde{x}_0)\mathbf{e_1} + w_2'(\tilde{y}_0)\mathbf{e_2}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. Sea $w(z) = z^n \quad (n \in \mathbb{N})$. Entonces $w'(z) = nz^{n-1}$.

Demostración: Sea $z = x + \mathbf{j}y = \tilde{x}\mathbf{e_1} + \tilde{y}\mathbf{e_2}$. Entonces por el inciso 7c de la Proposición 1.10 se tiene

$$\begin{aligned} z^n &= (\tilde{x}\mathbf{e_1} + \tilde{y}\mathbf{e_2})^n \\ &= \tilde{x}^n\mathbf{e_1} + \tilde{y}^n\mathbf{e_2}. \end{aligned}$$

Por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} w'(z) &= n\tilde{x}^{n-1}\mathbf{e_1} + n\tilde{y}^{n-1}\mathbf{e_2} \\ &= n\left(\tilde{x}\mathbf{e_1} + \tilde{y}\mathbf{e_2}\right)^{n-1} \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

□

En el Ejemplo 2.2, se vio que la función w es $\mathbb{D}$-diferenciable en $(\mathbb{D}-Z(\mathbb{D}))-\{0\}$ pero no continua en 0. El siguiente teorema muestra una relación positiva entre $\mathbb{D}$-diferencibilidad y continuidad.

Teorema 2.5. *Sea $U \in \mathbb{D}$ abierto y conexo. Si w es $\mathbb{D}$-diferenciable en todo U, entonces w es continua en U.*

Demostración: Sea $z_0 \in \mathbb{U}$. Como w es $\mathbb{D}$-diferenciable en U, el límite (2.1) existe, así para $z - z_0 \notin Z(\mathbb{D})$, se tiene

$$0 = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{D})}} (z-z_0)\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{D})}} \left(w(z)-w(z_0)\right). \tag{2.3}$$

Falta ver el comportamiento de $w(z)-w(z_0)$ cuando $z-z_0 \in Z(\mathbb{D})$ y $z-z_0 \to 0$. Sea $z_n \in Z(\mathbb{D})+z_0$, tal que $z \to z_0$. Para cada n usando (2.3), con z_n en lugar de z_0, tomamos $\zeta_n \notin Z(\mathbb{D}) + z_n$ tal que $|\zeta_n - z_n| < 1/n$ y $|w(\zeta_n)-w(z_n)| < 1/n$. Observamos que $\zeta_n \notin Z(\mathbb{D})+z_0$ y que $|\zeta_n - z_0| \to 0$, entonces usando (2.3) nuevamente $w(\zeta_n) - w(z_0) \to 0$. Entonces

$$|w(z_n)-w(z_0)| \leqslant |w(z_n)-w(\zeta_n)| + |w(\zeta_n)-w(z_0)| \to 0.$$

□

Teorema 2.6. *(Condiciones de Cauchy-Riemann) Sea $U \subseteq \mathbb{D}$ un conjunto abierto. Sea $w \in C^1(U,\mathbb{R})$, con $w(z) = u(z) + \boldsymbol{j}v(z)$. Entonces w es $\mathbb{D}$-diferenciable en U si y sólo si*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Además, cuando w es $\mathbb{D}$-diferenciable,

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Demostración: Sea $z = x + \mathbf{j}y$, entonces

$$\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x+\mathbf{j}y) - u(x_0 - \mathbf{j}y_0) + j\left(v(x+\mathbf{j}y) - v(x_0+\mathbf{j}y_0)\right)}{(x-x_0) + \mathbf{j}\,(y-y_0)}.$$

Como el límite 2.1 existe para toda trayectoria, en particular existe para $\Im z = y_0$ y haciendo $x \to x_0$, se obtiene

$$w'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

De manera análoga calculando el límite 2.1 para la trayectoria $\Re z = x_0$, haciendo $y \to y_0$ y el hecho que $1/\mathbf{j} = \mathbf{j}$ se obtiene

$$w'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

Igualando parte real e imaginaria se obtiene el resultado. □

Ejemplo 2.7. La función exp hiperbólica es $\mathbb{D}$-diferenciable y $\exp' z = \exp z$.

Demostración: Por la definición de la exponencial hiperbólica 1.2 se tiene que $\exp \in C^1(U)$, como

$$\frac{\partial(e^x \cosh y)}{\partial x} = e^x \cosh y \ \text{ y } \ \frac{\partial(e^x \sinh y)}{\partial x} = e^x \sinh y,$$

por (2.4) se tiene el resultado.

Corolario 2.8. *Si $w(z) = u(x + \boldsymbol{j}y) + \boldsymbol{j}v(x + \boldsymbol{j}y) \in C^2(U)$ es $\mathbb{D}$-diferenciable, entonces*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \quad y \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0.$$

Demostración: Se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.4) y la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

2.2. Funciones pseudo-analíticas.

En esta sección se define una especie de derivada tanto en los complejos como en los números hiperbólicos que dependerá de una función f real valuada, ya que en vez de tomar la base $(1, \mathbf{k})$ para $\mathbb{R}^2$ sobre los números reales, se toma $(f, \frac{\mathbf{k}}{f})$. L. Bers en su trabajo [1] usa pares funciones (F, G) que sean linealmente independientes, y demuestra las teoremas análogos a los existentes en la variable compleja como Teorema de Singularidades de Riemman, Teorema de Cauchy, Teorema de identidad etc. Posteriormente tanto V. Kravchenko en [4], usa los resultados de Bers para estudiar ecuaciones de Schrödinger, Dirac, Maxwell, Klein-Gordon etc, usando los números complejos y los números hiperbólicos. Para tratar ambos sistemas de números al mismo tiempo, en esta sección $\mathbb{E}$ representa a $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{D}$, de manera similar $\mathbf{k}$ representa $\mathbf{i}$ ó $\mathbf{j}$ respectivamente. Escribiremos para $z \in \mathbb{E}$ como $z = x + \mathbf{k}y \ \ (x, y \in \mathbb{R})$.

Definición 2.9. Sea $U \subseteq \mathbb{E}$ abierto. Se define el operador diferencial $\partial_{\overline{z}} \colon C^1(U) \longrightarrow \mathbb{E}$ mediante

$$\partial_{\overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\partial_x - \mathbf{k}^3 \partial_y\right)$$

y el operador diferencial $\partial_z \colon C^1(U) \longrightarrow \mathbb{E}$ mediante

$$\partial_z := \frac{1}{2}\left(\partial_x + \mathbf{k}^3 \partial_y\right).$$

Nótese $\mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}$, $\mathbf{j}^3 = \mathbf{j}$, por eso la ecuación $\partial_{\overline{z}} h = 0$ es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann cuando $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ y a las ecuaciones (2.4) en el caso $\mathbb{E} = \mathbb{D}$. Con esto se tiene lo siguiente.

Proposición 2.10. *Sea $U \subseteq \mathbb{E}$ un conjunto abierto y sea $h \in C^1(U)$. Entonces h es $\mathbb{E}$-diferenciable si y sólo si $\partial_{\overline{z}} h = 0$.*

Proposición 2.11. *Sean $h, g \in C^1(\mathbb{E})$. Entonces*

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}}(h+g) &= \partial_{\overline{z}} h + \partial_{\overline{z}} g; \\ \partial_{\overline{z}}(hg) &= f\partial_{\overline{z}} g + g\partial_{\overline{z}} h; \\ \partial_z(h+g) &= \partial_z h + \partial_z g; \\ \partial_z(hg) &= f\partial_z g + g\partial_z h; \\ \overline{\partial_{\overline{z}} h} &= \partial_z \overline{h}. \end{aligned}$$

Durante el resto del capítulo fijamos $f \colon U \subseteq \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua que no se anula y con esta función vamos a definir una especie de derivada que depende de f. Sea $U \subseteq \mathbb{E}$ un conjunto abierto y $w \colon U \longrightarrow \mathbb{E}$. Vemos que para $z \in U$ se tiene

$$w(z) = \varphi(z) f(z) + \psi(z) \frac{\mathbf{k}}{f(z)} \tag{2.6}$$

donde $\varphi(z) = \frac{\Re w(z)}{f(z)}$ y $\psi(z) = f(z)\Im w(z)$. Toda función w tiene una representación única de la forma (2.6) con φ, ψ real valuadas, que se llamará la *f-representación* de w.

Definición 2.12. *[7]* Una función $w \colon U \subseteq \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ se dice que admite una *f-derivada* en z_0 cuando existe el siguiente límite :

$$\frac{d_{(f)} w(z_0)}{dz} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z - z_0 \notin Z(\mathbb{E})}} \frac{w(z) - \varphi(z_0) f(z) - \psi(z_0) \frac{\mathbf{k}}{f(z)}}{z - z_0}. \tag{2.7}$$

Si el límite existe en todo $z \in U$ denotaremos la f-derivada como $\dfrac{d_{(f)}w}{dz}$ y diremos que w es *f-pseudoanalítica* en U. Escribiremos

$$\mathrm{PS}_{(f)}(U) := \{w\colon U \longrightarrow \mathbb{E} |\ w \text{ es } f\text{-pseudoanalítica}\}.$$

Notemos que cuando $f \equiv 1$ se tiene que $\varphi(z_0) + \mathbf{k}\psi(z_0) = w(z_0)$, entonces es concepto de f-pseudoanalítica (2.7) coincide con el concepto de $\mathbb{E}$-diferenciable y $\mathrm{PS}_{(f)}$, corresponde a el conjunto de funciones holomorfas en U.

Lema 2.13. *Sea*

$$\begin{aligned}
\omega(z) &:= w(z) - \varphi(z_0)f(z) + \psi(z_0)\frac{\boldsymbol{k}}{f(z)} \\
&= (\varphi(z) - \varphi(z_0))\, f(z) + (\psi(z) - \psi(z_0))\, \frac{\boldsymbol{k}}{f(z)}.
\end{aligned}$$

Entonces w es f-pseudoanalítica si y sólo si ω es $\mathbb{E}$-diferenciable en el punto $z = z_0$.

La f-representación es útil por el siguiente hecho.

Teorema 2.14. *Sea $w = \varphi f + \boldsymbol{k}\frac{\psi}{f}$ la f-representación de w. Entonces $f \in PS_{(f)}$ si y solo si $\varphi, \psi \in C^1(U, \mathbb{R})$ y*

$$\varphi_{\overline{z}} f + \psi_{\overline{z}} \frac{\boldsymbol{k}}{f} = 0. \tag{2.8}$$

o equivalentemente

$$\varphi_z f - \psi_z \frac{\boldsymbol{k}}{f} = 0. \tag{2.9}$$

Cuando w es f-pseudoanalítica, su f-derivada se da por las fórmulas

$$\begin{aligned}
\frac{d_{(f)}w}{dz} &= \varphi_z f + \psi_z \frac{\boldsymbol{k}}{f} &(2.10)\\
&= 2\varphi_z f &(2.11)\\
&= 2\psi_z \frac{\boldsymbol{k}}{f}. &(2.12)
\end{aligned}$$

Demostración: Por el Lema 2.13, $\omega(z_0)_{\overline{z}} = 0$ si y sólo si w es f-psedoanalítica en z_0. Calculando $\omega_{\overline{z}}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\omega(z)_{\overline{z}} &= \left((\varphi(z) - \varphi(z_0) f(z) + (\psi(z) - \psi(z_0)) \frac{\mathbf{k}}{f(z)} \right)_{\overline{z}} \\
&= \varphi(z)_{\overline{z}} f(z) + (\varphi(z) - \varphi(z_0)) f(z)_{\overline{z}} + \psi(z)_{\overline{z}} \frac{\mathbf{k}}{f(z)} + (\psi(z) - \psi(z_0)) \left(\frac{\mathbf{k}}{f(z)} \right)_{\overline{z}}.
\end{aligned}$$

Evaluando en z_0 se obtiene (2.8), conjugando (2.8) se obtiene (2.9)puesto que f, φ, psi son funciones real valuadas. De manera análoga se tiene la representación (2.10). Sustituyendo el valor de $\varphi_z f$ ó $\psi_z \mathbf{k}/f$ de la ecuacion (2.9) en (2.10), se obtienen (2.11) y (2.12). □

Corolario 2.15. *Sea $w \in PS_{(f)}(U)$. Entonces $\frac{d_{(f)}w}{dz} = 0$ si y sólo si φ, ψ son constantes.*

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si φ, ψ son constantes, para toda $z \in \mathbb{E}$, la f-representación es $w(z) = c_1 f(z) + c_2\mathbf{k}/f$. Calculando la f-derivada en z_0 se tiene

$$\frac{d_{(f)}w(z_0)}{dz} = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{E})}} \frac{w(z) - c_1 f(z) - c_2\frac{\mathbf{k}}{f(z)}}{z - z_0} = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z-z_0\notin Z(\mathbb{E})}} \frac{0}{z - z_0} = 0.$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $d_{(f)}w/dz = 0$. Entonces por teorema anterior se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d_{(f)}w}{dz} \\ &= 2\varphi_z f \\ &= \varphi_x f + \mathbf{k}^3\varphi_y f. \end{aligned}$$

Igualando partes reales y partes imaginarias, y como f no se anula se tiene $\varphi_x = 0 = \varphi_y$, por la convexidad de U se tiene $\varphi \equiv constante$. Análogamente se obtiene el resultado para ψ. □

Corolario 2.16. *Las funciones $f, \boldsymbol{k}/f$ son f-pseudoanalíticas.*

Demostración: Se sigue de las f-representaciones $f = 1f + 0\mathbf{k}/f$ y $\mathbf{k}/f = 0f + 1\mathbf{k}/f$ y del Corolario 2.15. □

Fijemos $z_0 \in \mathbb{E}$. Definamos $\omega(z) = w(z) - \varphi(z_0)f(z) + \psi(z_0)\frac{\mathbf{k}}{f(z)}$. Como

$$\frac{d_{(f)}w}{dz} = \lim_{z\to z_0} \frac{\omega(z) - \omega(z_0)}{z - z_0} = \omega'(z_0),$$

es decir ω es $\mathbb{E}$-diferenciable en z_0 si y sólo si w es f-diferenciable. Así Supongamos z_0 en $U \subseteq \mathbb{E}$. Entonces

$$\omega_{\overline{z}}(z_0) = 0 \iff w_{\overline{z}}(z_0) - \varphi(z_0)f_{\overline{z}}(z_0) - \psi(z_0)\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_{\overline{z}}(z_0) = 0. \tag{2.13}$$

Usando que $\Re w(z_0) = \frac{1}{2}(w(z_0) + \overline{w(z_0)})$ y $\Im(z_0) = \frac{1}{2k}(w(z_0) - \overline{w(z_0)})$ entonces (2.13) se transforma en

$$w_{\overline{z}}(z_0) - \left(\frac{w(z_0) + \overline{w(z_0)}}{2}\right) f_{\overline{z}}(z_0) - f(z_0)\left(\frac{w(z_0) - \overline{w(z_0)}}{2}\right)\left(\frac{1}{f}\right)_{\overline{z}}(z_0) = 0.$$

A su vez es igual a

$$w_{\overline{z}}(z_0)-w(z_0)\left(\frac{f_{\overline{z}(z_0)}}{2f(z_0)}+\frac{f(z_0)}{2}\left(\frac{1}{f}\right)_{\overline{z}}(z_0)\right)-\overline{w(z_0)}\left(\frac{f_{\overline{z}}(z_0)}{2f(z_0)}-\frac{f(z_0)}{2}\left(\frac{1}{f}\right)_{\overline{z}}(z_0)\right)=0,$$

$$w_{\overline{z}}(z_0)-\overline{w(z_0)}\left(\frac{f_{\overline{z}}(z_0)}{f(z_0)}\right)=0.$$

Con esto como $z_0\in U$ era arbitrario se demuestra el siguiente lema.

Lema 2.17. *Una función $w=\varphi f+\psi(\boldsymbol{k}/f)$ es f-pseudoanalítica en U si y sólo si w satisface la ecuación*

$$w_{\overline{z}}-\left(\frac{f_{\overline{z}}}{f}\right)\overline{w}=0. \tag{2.14}$$

La cual es llamada *ecuación de Vekua principal* determinada por f.

Vamos a suponer en el resto de este capítulo que f solamente depende de x. Entonces puede (2.14) ser escrita de la forma :

$$\partial_{\overline{z}}w-\frac{f'}{2f}\overline{w}=0. \tag{2.15}$$

Lema 2.18. *Sea $W=u+\boldsymbol{k}v$. Entonces W satisface la ecuación de Vekua principal (2.15) si y sólo si*

$$f\partial_x\left(\frac{1}{f}u\right) = \partial_y v, \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{f}\partial_x(fv) = \boldsymbol{k}^2\partial_y u. \tag{2.17}$$

Demostración: Desarrollando la ecuación (2.15) puede ser escrita como un sistema de ecuaciones equivalentes

$$\partial_{\overline{z}}(u+\mathbf{k}v)-\frac{f'}{2f}(u-\mathbf{k}v)=0,$$

la cual es equivalente a

$$(\partial_x u-\mathbf{k}^3\partial_y)(u+\mathbf{k}v)-\frac{f'}{f}(u-\mathbf{k}v)=0,$$

y a su vez a

$$(\partial_x u-\mathbf{k}^3\partial_y u)+(\mathbf{k}\partial_x v-\mathbf{k}^4\partial_y v)-\frac{f'}{f}u+\mathbf{k}\frac{f'}{f}v=0.$$

Igualando parte imaginaria, parte real y notando que $\mathbf{k}^4 = 1$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_x u - \partial_y v - \frac{f'}{f}u &= 0, \\ \mathbf{k}^2\partial_y u + \partial_x v + \frac{f'}{f}v &= 0. \end{aligned}$$

De donde se obtiene el resultado. $\square$

Haciendo $\varphi = \frac{u}{f}$, $\psi = fv$ las ecuaciones (2.16), (2.17), son equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones

$$\partial_y\varphi = \frac{\mathbf{k}^2}{f^2}\partial_x\psi \quad \text{y} \quad \partial_x\varphi = \frac{1}{f^2}\partial_y\psi. \tag{2.18}$$

Si en vez de f tenemos $\frac{1}{f}$ la ecuación (2.15) tiene la forma

$$\partial_{\overline{z}}w + \frac{f'}{2f}\overline{w} = 0.$$

y si hacemos el procedimiento análogo tenemos que es equivalente

$$\frac{1}{f}\partial_x(fu) \quad = \quad \partial_y v, \tag{2.19}$$

$$f\partial_x\left(\frac{1}{f}v\right) \quad = \quad \mathbf{k}^2\partial_y u. \tag{2.20}$$

En general no se tiene que la f-derivada $\frac{d_{(f)}w}{dz}$ sea f-pseudoanalítica, pero existe la relación entre f-derivada y $1/f$-derivada cuando f solamente depende de x.

Teorema 2.19. *Supongamos $\varphi, \psi \in C^2(U, \mathbb{R})$ y $w = \varphi f + \psi(\boldsymbol{k}/\psi)$. Si $w \in PS_{(f)}(U)$ entonces*

$$\frac{d_{(f)}w}{dz} \in PS_{(1/f)}(U).$$

Demostración: Aplicando ∂_z a (2.8), tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{z\overline{z}}f + \psi_{z\overline{z}}\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right) + \varphi_{\overline{z}}f_z + \psi_{\overline{z}}\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_z &= 0 \\ \varphi_{z\overline{z}}f + \psi_{z\overline{z}}\frac{\mathbf{k}}{f} &= -\left(\varphi_{\overline{z}}f_z + \psi_{\overline{z}}\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_z\right) \\ \varphi_{z\overline{z}}f + \psi_{z\overline{z}}\frac{\mathbf{k}}{f} &= -\left(\overline{\varphi_z f_{\overline{z}} - \psi_z\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_{\overline{z}}}\right). \end{aligned}$$

Aplicando $\partial_{\overline{z}}$ a (2.10), usando la Proposición 2.11, inciso 1 de la Proposición 1.20 y lo anterior,

$$\left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)_{\overline{z}} = \varphi_z f_{\overline{z}} + \psi_z \left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_{\overline{z}} - \left(\overline{\varphi_z f_{\overline{z}} - \psi_z \left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_{\overline{z}}}\right).$$

Sustituyendo el valor de φ_z, ψ_z (ecuaciones (2.11) y (2.12)) tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)_{\overline{z}} &= \left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)\frac{f_{\overline{z}}}{2f} + \left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)\frac{f}{2\mathbf{k}}\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_{\overline{z}} - \left(\overline{\left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)\frac{f_{\overline{z}}}{2f} - \left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)\frac{f}{2\mathbf{k}}\left(\frac{\mathbf{k}}{f}\right)_{\overline{z}}}\right) \\
&= -\frac{f_z}{f}\overline{\left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)} \\
&= \frac{(1/f)_z}{1/f}\overline{\left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right)}.
\end{aligned}$$

Es decir satisface (2.15) por tanto es $1/f$-pseudoanalíltica. □

Definición 2.20. Sean $\varphi, \psi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ y $w \in \mathrm{PS}_{(f)}(U)$. Se define la *derivada n-ésima* ($n \in \mathbb{N}$) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{[0]}_{(f)}}{dz}w &= w \\
\frac{d^{[1]}_{(f)}}{dz}w &= \frac{d_{(f)}}{dz}w \\
\frac{d^{[n]}_{(f)}}{dz^n}w &= \frac{d_{(f^{(-1)^{n-1}})}}{dz}\left(\frac{d^{[n-1]}_{(f)}}{dz^{(n-1)}}\right).
\end{aligned}$$

Y se definen los conjuntos de funciones

$$\mathrm{PS}^{[n]}_{(f)} := \{w | \frac{d_{(f)}w}{dz} \in \mathrm{PS}^{[n-1]}_{(f)}\}.$$

Lema 2.21. *Sea $W \in PS^{[n]}_{(f)}(U)$ una solución de la ecuación de Vekua principal (2.15). Entonces la derivada n-ésima de W está dada por la fórmula*

$$\frac{d^{[n]}_{(f)}W}{dz} = \boldsymbol{k}^{3n}\partial^n_y W. \tag{2.21}$$

Demostración: Sea $W = \varphi f + \psi(\mathbf{k}/f)$. Entonces por el Teorema 2.14 se tiene

$$\frac{d_{(f)}W}{dz} = (\partial_z\varphi)f + (\partial_z\psi)\frac{\mathbf{k}}{f}$$

donde φ, ψ satisface (2.18). Calculando $\partial_z\varphi$ se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_z\varphi &= \frac{1}{2}\left(\partial_x\varphi + \mathbf{k}^3\partial_y\varphi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f^2}\partial_y\psi + \mathbf{k}^3\partial_y\varphi\right) \\
&= \frac{\mathbf{k}^3}{2f}\left(\partial_y\left(\varphi f + \psi\frac{\mathbf{k}}{f}\right)\right) \\
&= \frac{\mathbf{k}^3}{2f^2}\left(\partial_y W\right).
\end{aligned}$$

De manera análoga se tiene

$$\partial_z\psi = \frac{f\mathbf{k}^2}{2}\partial_y W.$$

Sustituyendo estos valores tenemos

$$\frac{d_{(f)}W}{dz} = \mathbf{k}^3\partial_y W$$

lo cual es (2.21) para $n = 1$.

Por definición para poder calcular $d_{(f)}^{[2]}W/dz^2$ debemos calcular la $1/f$-derivada de $\mathbf{k}^3\partial_y W$, para lo cual debemos encontrar la $1/f$-representación. Dado que f no depende de y se tiene

$$\mathbf{k}^3\partial_y W = (\partial_y\psi)\frac{1}{f} + (\mathbf{k}^2\varphi)\mathbf{k}f.$$

Como $\mathbf{k}^3\partial_y W$ es $1/f$-pseudoanalítica, entonces se deben satisfacer las ecuaciones (2.19),(2.20), donde $u = \partial_y\psi$ y $v = \mathbf{k}^2\partial_y\varphi$. Por lo que se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\partial_x\left(f\partial_y\psi\right) &= \mathbf{k}^2\partial_y\partial_y\varphi, \\
f\partial_x\left(\frac{1}{f}\partial_y\varphi\right) &= \partial_y\partial_y\psi.
\end{aligned}$$

Escribimos $\tilde{\varphi} = \partial_y \varphi / f$ y $\tilde{\psi} = f \partial_y \psi$. Las ecuaciones anteriores son equivalentes a

$$\partial_y \tilde{\varphi} = \frac{k^2}{f^2} \partial_x \tilde{\psi},$$

y

$$\partial_y \tilde{\psi} = f^2 \partial_x \tilde{\varphi}.$$

Procediendo de manera análoga a $n = 1$, usando el Teorema 2.14 y la inducción se tiene el resultado.
□

Capítulo 3

Integración y f-integración.

En este capítulo se define la integral sobre curvas para funciones de una variable hiperbólica. Se verán algunos resultados sobre la integración y con esto podremos definir de manera análoga una f-integral con respecto a una función escalar f. Cuando f es idénticamente 1, la f-integral se reduce a la integral sobre curvas anterior. Esto permitirá definir series de potencias formales correspondientes a f, con las cuales se podrán resolver ecuaciones del tipo Sturm-Liouville.

3.1. Integración hiperbólica.

Sea $U \subseteq \mathbb{E}$ un dominio. Sea $w\colon U \longrightarrow \mathbb{E}$ continua y sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U \in C^1[a,b]$ una curva rectificable. Recordemos que cuando $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, se define la integral de linea [10] de w a lo largo de γ mediante

$$\int_\gamma w(z)dz = \int_a^b w(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Usaremos esta expresión para la definición de $\int_\gamma w\ dz$ también cuando $\mathbb{E} = \mathbb{D}$, con $w(\gamma(t))\gamma'(t)$ indicando la multiplicación de $\mathbb{D}$ en lugar de $\mathbb{C}$. De esta definición cuando $w(z) = u(z)+\mathbf{k}v(z)$ $(u(z), v(z) \in \mathbb{R})$ y $z = x + \mathbf{k}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$, tenemos

$$\int_\gamma w(z)dz = \int_\gamma [u(x,y)dx + \mathbf{k}^2 v(x,y)dy] + \mathbf{k}\int_\gamma [u(x,y)dy + v(x,y)dx]. \tag{3.1}$$

Recordemos que $\mathbf{k}^2 = \pm 1$ es escalar.

Una de las integrales más representativas de la variable compleja es $\int_\gamma (1/z)\,dz$ donde γ es la circunferencia. En el siguiente ejemplo veremos el paralelismo entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$.

Ejemplo 3.1. En este ejemplo exp representa la exponencial compleja ó hiperbólica dependiendo de $\mathbf{k}$.

$$\int_{z\bar{z}=1} \frac{1}{z}\, dz = \begin{cases} 2\pi\mathbf{i} & \text{cuando} \quad \mathbf{k}=\mathbf{i}, \\ \\ \text{no existe} & \text{cuando} \quad \mathbf{k}=\mathbf{j}. \end{cases}$$

La curva de integración $z\bar{z} = 1$, significa $\gamma(t) = \exp(\mathbf{k}t)$, donde en el caso complejo $t \in [0, 2\pi]$ y en el caso hiperbólico $t \in (-\infty, \infty)$. En ambos casos la curva es la trazada una sola vez para los valores de t indicados.

Teorema 3.2. *Sea $U \subset \mathbb{E}$ un dominio y sea $w\colon U \longrightarrow \mathbb{E}$ continua. Supóngase también que $w = g'$, donde $g\colon U \longrightarrow \mathbb{E}$ es $\mathbb{E}$-diferenciable y $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow U$ es una curva C^1 por tramos. Entonces*

$$\int_\gamma w(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

La demostración es idéntica a la clásica para $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, puesto que la regla de la cadena $(g \circ \gamma)' = (g' \circ \gamma)\, \gamma'$ es valida.

Teorema 3.3. *Sea w $\mathbb{E}$-diferenciable en un dominio simplemente conexo U. Entonces para toda curva cerrada $\gamma \subset U$:*

1. *Si $\frac{du}{dy} = \boldsymbol{k}^2 \frac{dv}{dx}$, entonces $\Re \int_\gamma w\, dz = 0$.*

2. *Si $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$, entonces $\Im \int_\gamma w\, dz = 0$.*

Por tanto, si w es $\mathbb{E}$-diferenciable, entonces $\int_\gamma w\, dz = 0$.

Demostración: Por definición de la integral (3.1) al inicio de esta sección y por el teorema de Green, se tiene

$$\begin{aligned} \int_\gamma wdz &= \int_\gamma \left(udx + \mathbf{k}^2 vdy\right) + \mathbf{k} \int_\gamma (udy + vdx) \\ &= \iint_{\mathrm{int}\gamma} \left(\mathbf{k}^2 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + \mathbf{k} \iint_{\mathrm{int}\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy. \end{aligned}$$

Tomando parte real e imaginaria, se obtiene el resultado. □

3.2. f-integración.

De aquí en adelante $U \subseteq \mathbb{E}$ será un dominio simplemente conexo. Lipman Bers definió junto con la derivada con respecto a un par generador (F, G), una (F, G)-integral. Puesto que sólo nos interesa un par generador $(f, \mathbf{k}/f)$, en el sentido Bers, fijamos una función $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, como en el capítulo 2. Se define un tipo de integral que depende de la función f y con esto se puede definir series potencias formales las cuales son soluciones de un tipo de ecuaciones de Sturm-Liouville.

Supongamos que w es f-pseudoanalítica y que conocemos $\frac{d_{(f)}w}{dz}$. Una pregunta natural es ¿Podemos reconstruir w a partir de su f-derivada? Primero consideramos el problema de encontrar una solución a la ecuación diferencial $\varphi_z = \Phi$, ó equivalentemente

$$\varphi_x = 2\Re\Phi \text{ y } \varphi_y = 2\mathbf{k}^2\Im\Phi.$$

Si existe una solución $\varphi(x, y)$, entonces dado que $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ tenemos

$$\partial_x\Im\Phi - \mathbf{k}^2\partial_y\Re\Phi = 0. \tag{3.2}$$

Supongamos esta condición (3.2) se cumple. Para $x + \mathbf{k}y \in U$ y por el Teorema de Green se tiene

$$\int_\gamma \Re\Phi dx + \mathbf{k}^2\Im\Phi dy \quad = \quad \iint_{int\gamma} \left(\mathbf{k}^2\partial_x\Im\Phi - \partial_y\Re\Phi\right) dxdy = 0$$

Esto es válido para cualquier curva $\gamma \subseteq U$ que encierra una área. Entonces la función

$$\varphi(z) = 2\int_{z_0}^{z} \left(\Re\Phi dx + \mathbf{k}^2\Im\Phi dy\right) \tag{3.3}$$

no depende de la curva que una z_0 con z, y se verifica (tomando las derivadas ∂_x, ∂_y de las integrales)que

$$\varphi_z = \Phi = 2\int \Re(\Phi dz) = 2\int_{z_0}^{z} \Re(\varphi_z dz) = 2\Re\int_{z_0}^{z} \varphi_z dz. \tag{3.4}$$

Ahora se define un tipo de integral relacionada con la f-derivada.

Definición 3.4. Sea $w\colon U \longrightarrow \mathbb{E}$ y sea $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow U$ una curva rectificable tal que $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z_1$. Se define la *$f$-integral* $\int_\gamma w\ d_{(f)}z$ de w como

$$\int_\gamma w(z)\ d_{(f)}z = f(z_1)\Re\left(\int_\gamma \frac{w(z)}{f(z)}\ dz\right) + \frac{\mathbf{k}}{f(z_1)}\Re\left(\int_\gamma \mathbf{k}^3 f(z)w(z)\ dz\right).$$

Observemos que cuando $f \equiv 1$, se reduce a la integral de línea ordinaria $\int_\gamma w \, dz$ para $\mathbb{E}$.

Proposición 3.5. *Se tienen las siguientes propiedades de la f-integral.*

1. $\int_\gamma w(z) \, d_{(f)}z = f(z_1)\Re\left(\int_\gamma \frac{w(z)}{f(z)} \, dz\right) + \frac{\mathbf{k}}{f(z_1)}\Im\left(\int_\gamma f(z)w(z) \, dz\right)$.
2. Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces $\int_\gamma (cw_1(z) + w_2(z)) \; d_{(f)}z = c\int_\gamma w_1(z) \, d_{(f)}z + \int_\gamma w_2(z) \, d_{(f)}z$.
3. Sea $c \neq 0 \in \mathbb{R}$. Entonces $\int_\gamma w(z) \, d_{(cf)}z = \int_\gamma w(z) \, d_{(f)}z$.
4. $\int_\gamma w(z) \, d_{(\mathbf{k}f)}z = \int_\gamma w(z) \, d_{(1/f)}z$.
5. Si $f \equiv c \, (c \neq 0 \in \mathbb{R})$, entonces $\int_\gamma w(z) \, d_{(f)}z = \int_\gamma w(z) \, dz$.

Demostración:

1. Se sigue del hecho que $\Re(\mathbf{k}^3 z) = \Im z$.
2. Como $\Re(z_1 + z_2) = \Re z_1 + \Re z_2$ y $\Im(z_1 + z_2) = \Im z_1 + \Im z_2$, y $\frac{w_1+w_2}{f} = \frac{w_1}{f} + \frac{w_2}{f}$, $f(w_1 + w_2) = fw_1 + fw_2$, y puesto que la integral es lineal, se tiene el resultado.
3. Se sigue por la $\mathbb{R}$-linealidad de la f-integral.
4. Como $1/\mathbf{k} = \mathbf{k}^3$ y $\mathbf{k}^4 = 1$ se tiene lo deseado.
5. Se sigue de 3 de esta proposición.

Con el siguiente lema veremos la relación entre la f-integral y f-diferenciabilidad, que es un análogo al Teorema Fundamental del Cálculo.

Lema 3.6. *Sea $w = \varphi f + \psi(\boldsymbol{k}/f)$ una función f-pseudoanalítica. Entonces*

$$\int_{z_0}^{z} \left(\frac{d_{(f)}w}{dz}\right) d_{(f)}z = w(z) - \varphi(z_0)f(z) - \psi(z_0)\frac{\boldsymbol{k}}{f(z)}.$$

En particular para toda curva cerrada $\gamma \in U$,

$$\int_\gamma \frac{d_{(f)}w}{dz} \, d_{(f)}z = 0.$$

Demostración: Como w es f-pseudoanalítica, por la Definición 3.4, por las ecuaciones (2.11), (2.12), por el hecho $\mathbf{k}^4 = 1$ y la ecuación (4.10) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} \left(\frac{d_{(f)} w}{dz} \right) d_{(f)} z &= f(z) \Re \left(\int_{z_0}^{z} 2\varphi_z(z) dz \right) + \frac{\mathbf{k}}{f(z)} \Re \left(\int_{z_0}^{z} 2\psi_z dz \right) \\
&= f(z) \left(\varphi(z) - \varphi(z_0) \right) + \frac{\mathbf{k}}{f(z)} \left(\psi(z) - \psi(z_0) \right) \\
&= w(z) - \varphi(z_0) f(z) - \psi(z_0) \frac{\mathbf{k}}{f(z)}.
\end{aligned}$$

□

Cuando γ es una curva cerrada tenemos $z = z_0$ y se obtiene la ultima afirmación. □

Teorema 3.7. *Sea w una función f-pseudoanalítica. Entonces $\int_{z_0}^{z} w \; d_{(f)} z$ es una función $(1/f)$-pseudoanalítica.*

Definición 3.8. Sea $z_0 \in U$. Para cualquier $a = a' + \mathbf{k} a'' \in \mathbb{E}$ y $m \in \mathbb{N}_0$ se definen las *potencias formales* determinadas por f, $Z_m^{(0)}(a, z_0; z)$ con centro en z_0, y con coeficiente $a = a' + \mathbf{k} a''$ y con exponente 0 como:

$$Z_m^{(0)}(a, z_0; z) = a' f^{(-1)^{m+1}}(z_0) f^{(-1)^m}(z) + \mathbf{k} a'' f^{(-1)^m}(z_0) f^{(-1)^{m+1}}(z). \tag{3.5}$$

Las *potencias formales* con exponentes $n = 1, 2, \ldots$ son definidas mediante la fórmula de recursión

$$Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = n \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; \zeta) d_{\left((f)^{(-1)^m}\right)} \zeta. \tag{3.6}$$

Notemos que $Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = a' Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + \mathbf{k} a'' Z_m^{(n)}(\mathbf{k}, z_0; z)$, es decir las potencias formales son $\mathbb{R}$-lineales en a.

Teorema 3.9. *[1] La función $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ es una función $f^{(-1)^{n+m}}$-pseudoanalítica.*

Demostración: Este resultado en una forma mas general es citado en [1, 4]. No daremos la demostración aquí.

En lo siguiente se denotará $Z_0^{(n)}(a, z_0; z)$ como $Z^{(n)}(a, z_0; z)$. Si queremos calcular $Z^{(n)}(a, z_0; z)$, el siguiente diagrama nos dirá la forma de hacerlo.

$$\begin{aligned}
Z^{(n)}(a, z_0; z) \leftarrow n Z_1^{(n-1)}(a, z_0; z) \;\; &\leftarrow (n-1) Z_2^{(n-2)}(a, z_0; z) \;\; \leftarrow \ldots \\
&\ldots \leftarrow Z_{n-1}^{(1)}(a, z_0; z) \leftarrow Z_n^{(0)}(a, z_0; z).
\end{aligned}$$

donde las flechas indican la $f^{(-1)^m}$-integración, con m el subíndice de la potencia.

Ejemplo 3.10. Por proposición 3.5, inciso 3, podemos suponer que $f(0)=1$. Entonces

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}_{n-1}(1,z_0;z) &= \int_{z_0}^{z} f^{(-1)^m}(\zeta)\, d_{f^{(-1)^{(m-1)}}}\zeta \\
&= \left(f^{(-1)^{(m-1)}}(z)\Re\left(\int_{z_0}^{z} \frac{f^{(-1)^m}(\zeta)}{f^{(-1)^{(m-1)}}}\, d\zeta\right) + \right. \\
&\qquad \left. \mathbf{k} f^{(-1)^m}(z)\Im\left(\int_{z_0}^{z} f^{(-1)^{(m-1)}}(\zeta) f^{(-1)^m}(\zeta)\, d\zeta\right)\right) \\
&= f^{(-1)^{(m-1)}}(z)\Re\left(\int_{z_0}^{z} f^{2(-1)^m}(\zeta)d\zeta\right) + \mathbf{k} f^{(-1)^m}(z)\Im\left(\int_{z_0}^{z} d\zeta\right).
\end{aligned}$$

De manera análoga se tiene

$$Z^{(1)}_{n-1}(\mathbf{k},z_0;z) = f^{(-1)^{(m-1)}}(z)\Re\left(\int_{z_0}^{z} d\zeta\right) + \mathbf{k} f^{(-1)^m}(z)\Im\left(\int_{z_0}^{z} f^{2(-1)^m}(\zeta)\, d\zeta\right).$$

En general las expresiones generales para $Z^{(2)}_{n-2}(a,z_0;z)$ son mucho más complicadas y no las escribiremos aquí.

3.3. Series de potencias formales en caso hiperbólico.

En esta sección se verán series formales para funciones hiperbólicas. Bajo ciertas circunstancias se cumple que toda solución de la ecuación de Vekua principal se representa mediante series formales. En esta sección f dependerá de x, es decir, $f(x+\mathbf{j}y) = f(x+\mathbf{j}y')$ y se escribirá $f(x)$. En lo que resta del trabajo, se supondrá $\mathbb{E}=\mathbb{D}$. La teoría para $\mathbb{E}=\mathbb{C}$, está en [1] mientras la teoría aquí desarrollada se encuentra en [4].

Definición 3.11. Definimos las *funciones auxiliares para f*

$$X^{(0)}_f(x) \equiv 1,$$

y luego

$$X^{(n)}_f(x) = n\int_{x_0}^{x} X^{(n-1)}_f(s)\left(f^{2(-1)^n}(s)\right)\, ds$$

para $n \geqslant 1$.

En particular cuando $f \equiv 1$, $X_f^{(n)}(x) = x^n$. La función $X_f^{(n)}(x)$ nos ayuda a representar de una manera sencilla las series de potencias formales. En [8] se definen otro par de funciones auxiliares, que en nuestro caso coincide con $X_{(1/f)}^{(n)}$. Definimos

$$_{*}Z^{(n)}(1,0;z) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^{(n-i)}(x)(\mathbf{j}y)^i. \tag{3.7}$$

Proposición 3.12. Sea $z = x + \mathbf{j}y$. Entonces las series de potencias formales se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$Z_{m-n}^{(n)}(1,0;z) = f^{(-1)^{m-n}}(x)\Re\left({}_{*}Z^n(1,0;z)\right) + \mathbf{j}f^{(-1)^{m-n-1}}(x)\Im\left({}_{*}Z^n(1,0;z)\right). \tag{3.8}$$

$$Z_{m-n}^{(n)}(\mathbf{j},0;z) = f^{(-1)^{m-n}}(x)\Im\left({}_{*}Z^n(1,0;z)\right) + \mathbf{j}f^{(-1)^{m-n-1}}(x)\Re\left({}_{*}Z^n(1,0;z)\right). \tag{3.9}$$

Demostración: Se demostrará solamente (3.8) usando inducción. La demostración, para (3.9) es análoga. Para $n = 0$, notamos que (3.7) se reduce a

$$_{*}Z_m^{(0)}(1,0;z) = 1.$$

Se cumple (3.8) $n = 0$ puesto que por (3.5)

$$Z_m^{(0)}(1,0;z) = f^{(-1)^m}(x).$$

Fijamos m, n, con $n \geqslant 0$ y supongamos que se cumple (3.8), es decir:

$$Z_{m-n}^{(n)}(1,0;z) = f^{(-1)^{m-n}}(x)\Re\left({}_{*}Z^n(1,0;z)\right) + \mathbf{j}f^{(-1)^{m-n-1}}(x)\Im\left({}_{*}Z^n(1,0;z)\right).$$

Por la definición (3.6) se tiene

$$\begin{aligned} Z_{m-n-1}^{(n+1)}(1,0;z) &= (n+1)\int_0^z Z_{m-n}^{(n)}(1,0;\zeta)\, d_{\left(f^{(-1)^{m-n+1}}\right)}\zeta \\ &= (n+1)f^{(-1)^{m-n-1}}(x)\Re\left(\int_0^z f^{2(-1)^{m-n}}(\Re\zeta)\Re\left({}_{*}Z^n(1,0;\zeta)\right) + \mathbf{j}\Im\left({}_{*}Z^n(1,0;\zeta)\right)\, d\zeta\right) \\ &\quad +(n+1)\mathbf{j}f^{(-1)^{m-n}}(x)\Im\left(\int_0^z \Re\left({}_{*}Z^n(1,0;\zeta)\right) + \mathbf{j}f^{2(-1)^{m-n}}(\Re\zeta)\Im\left({}_{*}Z^n(1,0;\zeta)\right) d\zeta\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Se nota la que la integral no depende de la curva de 0 a z. Calculando la primera parte de la integral (3.10) por la trayectoria $\gamma(t) = t + \mathbf{j}\frac{y}{x}t$ $(t \in [0,x])$, vemos que la parte real de la primera integral es

$$(n+1)\int_0^x \left(f^{2(-1)^{m-n}}(t)\Re\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X_f^{(n-i)}(t)\left(\frac{x}{y}\right)^i(\mathbf{j}t)^i\right)\right.$$

$$+\left(\frac{x}{y}\right)\Im\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X_f^{(n-i)}(t)\left(\frac{x}{y}\right)^i(\mathbf{j}t)^i\right)dt\Bigg).$$

Lo cual es equivalente a

$$(n+1)\int_0^x\left(f^{2(-1)^{m-n}}(t)\Re\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X_f^{(n-i)}(t)\left(\frac{y}{x}\right)^i(\mathbf{j}t)^i\right)\right.$$
$$\left.+\Im\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X_f^{(n-i)}(t)\left(\frac{y}{x}\right)^{i+1}(\mathbf{j}t)^i\right)dt\right).$$

Reordenando la segunda suma, se tiene

$$(n+1)\int_0^x\left({}^{2(-1)^{m-n}}(t)\Re\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X_f^{(n-i)}(t)\left(\frac{y}{x}\right)^i(\mathbf{j}t)^i\right)\right.$$
$$\left.+\Im\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}X^{(n-i+1)}(t)\left(\frac{y}{x}\right)^i(\mathbf{j}t)^{i-1}\right)dt\right). \tag{3.11}$$

Para $i=0$ se tiene

$$(n+1)\int_0^x f^{2(-1)^{m-n}}(t)X_f^{(n)}(t)=X^{(n+1)}(x).$$

Para $i>0$, integrando la primera parte de la integral (3.11) se tiene

$$\begin{aligned}u&=(\mathbf{j}t)^i, & v&=(n+1)\binom{n}{i}f^{2(-1)^{m-n}}(t)X_f^{(n-i)}(t),\\ du&=i(\mathbf{j}t)^{i-1}, & dv&=\binom{n+1}{i}X_f^{(n-i+1)}(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Re\left(\sum_{i=0}^{n+1}\left(\frac{y}{x}\right)^i(\mathbf{j}t)^i\binom{n+1}{i}X_f^{(n-i+1)}(t)\Bigg|_0^x-\left(\frac{y}{x}\right)^i(n+1)\int_0^x\binom{n}{i-1}t^{i-1}X^{n-i+1}(t)dt\right)\\ &= \Re\left(\sum_{i=0}^{n+1}(y\mathbf{j})^i\binom{n+1}{i}X^{(n-i+1)}(x)-(n+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)^i\int_0^x\binom{n}{i-1}(\mathbf{j}t)^{i-1}X^{n-i+1}(t)dt\right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

Pero la segunda parte la integral (3.12) se cancela con la segunda parte de (3.11). De manera análoga se calcula la segunda parte de la integral (3.10). Por lo tanto

$$Z_{m-n-1}^{(n+1)}(1,0;z)=f^{(-1)^{m-n-1}}(x)\Re\left({}_*Z^{n+1}(1,0;z)\right)+f^{(-1)^{m-n}}(x)\Im\left({}_*Z^{n+1}(1,0;z)\right).$$

Esto es (3.7), con $n+1$ en lugar de n. Por inducción sobre n, se tiene el resultado. □

Con esta proposición y la $\mathbb{R}$-linealidad de las potencias formales en sus coeficientes, se tiene el siguiente teorema.

Lema 3.13. *Sea $a = a' + \boldsymbol{j}a''$. Entonces*

$$Z_m^{(n)}(a, 0; z) = a' f^{(-1)^m}{}_* Z_m^{(n)}(1, 0; z) + \boldsymbol{j} f^{(-1)^{m-1}}\ a''{}_* Z_m^{(n)}(1, 0; z).$$

Ejemplo 3.14. Cuando $f \equiv 1$, $a = a' + \mathbf{j}a''$, $a', a'' \in \mathbb{R}$ y $z = x + \mathbf{j}y$ entonces $Z^{(n)}(a, 0; z) = az^n$.

El siguiente resultado es la clave para aplicar la teoría de las funciones pseudo-analíticas a la solución numérica de problemas de Sturm-Liouville. Un *polinomio en potencias formales centrado en* z_0 es una suma finita

$$\sum_{n=0}^{N} Z^{(n)}(a_n, z_0; z).$$

Teorema 3.15. *[8] Sea $f \in C^2[-b, b]$ que no se anula. Sea W una solución de la ecuación principal de Vekua (2.15). Entonces existe una sucesión de polinomios en potencias formales centradas en cero que converge uniformemente a W en $[-b, b] \times [-b, b]$.*

Definición 3.16. Se definen las *familias de funciones canónicas* $\{\varphi_k(x), \psi_k(x)\}$ asociadas a f $(k \in \mathbb{N}_0)$ mediante

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} f(x) X_f^{(k)} & \text{cuando } k \text{ es impar,} \\ \\ \frac{1}{f(x)} X_{(1/f)}^{(k)} & \text{cuando } k \text{ es par,} \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} X_{1/f}^{(k)} & \text{cuando } k \text{ es impar,} \\ \\ f(x) X_f^{(k)} & \text{cuando } k \text{ es par.} \end{cases}$$

En términos de las funciones canónicas se definen los *polinomios generalizados de onda* correspondientes a f,

$$u_{2n-1}(x,y) = \Re\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi_{n-i}(x)(\mathbf{j}y)^i\right), \tag{3.13}$$

$$u_{2n}(x,y) = \Im\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi_{n-i}(x)(\mathbf{j}y)^i\right), \tag{3.14}$$

$$v_{2n-1}(x,y) = \Re\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\psi_{n-i}(x)(\mathbf{j}y)^i\right), \tag{3.15}$$

$$v_{2n}(x,y) = \Im\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\psi_{n-i}(x)(\mathbf{j}y)^i\right). \tag{3.16}$$

Lema 3.17. *Para $n \geqslant 0$ y $a = a' + \boldsymbol{j}a''$,*

$$Z^{(n)}(a,0;z) = a'u_{n_1}(x,y) + a''u_{n_2}(x,y) + \boldsymbol{j}\left(a''v_{n_1}(x,y) + a'v_{n_2}(x,y)\right).$$

Demostración: Usar las relaciones

$$f(x)\Re_* Z^{(n)}(1,0;z) = u_{2n-1}(x,y), \quad f(x)\Im_* Z^{(n)}(1,0;z) = u_{2n}(x,y),$$

y

$$\frac{1}{f(x)}\Re_* Z^{(n)}(1,0;z) = v_{2n-1}(x,y), \quad \frac{1}{f(x)}\Im_* Z^{(n)}(1,0;z) = v_{2n}(x,y).$$

□

La importancia de la teoría desarrollada se muestra en el siguiente resultado que relaciona las φ_k, ψ_k con soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville.

Teorema 3.18. *[8] Sea $q \in C([a,b],\mathbb{C})$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que existe una solución $f \in C^2(a,b)$ de la ecuación*

$$f'' - qf = 0 \tag{3.17}$$

en (a,b) tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces la solución general de la ecuación

$$g'' - qg = \lambda g \tag{3.18}$$

en (a,b) tiene la forma

$$g = c_1 g_1 + c_2 g_2$$

donde c_1, c_2 son constantes complejas arbitrarias,

$$g_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k)!}\varphi_{2k} \quad g_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k+1)!}\varphi_{2k+1}$$

y ambas series convergen uniformemente en $[a,b]$ junto con la serie de sus primeras derivadas, las cuales son

$$g_1' = f' + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2k)!} \left(\frac{f'}{f} \varphi_{2k} + 2k\psi_{2k-1} \right)$$

y

$$g_2' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2k+1)!} \left(\frac{f'}{f} \varphi_{2k} + (2k+1)\psi_{2k} \right).$$

Las series de las segundas derivadas convergen uniformemente en cualquier segmento $[a_1,b_1] \subset (a,b)$. Si q admite una extensión continua a $[a,b]$, entonces las funciones g_1, g_2 admiten extensiones a $C^1[a,b]$.

Capítulo 4

Operador de Transmutación

En esta capítulo se explica cómo aplicar la teoría de funciones pseudo-analíticas hiperbólicas para resolver problemas de Sturm-Liouville. Esto se hace a través de las relaciones entre el operador $\partial_x^2 - \partial_y^2$ y el operador $d/dx^2 + q(x)$. Se define un operador de transmutación entre $d/dx^2 + q(x)$ y d/dx^2, que es un operador integral tipo Volterra con kernel que es solución a un problema de Goursat y que se encuentra por medio de los polinomios generalizados de onda.

Todo el material de este capítulo se encuentra en [8] y las referencias que contiene.

4.1. Problema de Goursat

En esta sección se define el problema de Goursat para $\partial/\partial\overline{z}$. Se exhibe la solución general del problema y varias formas de representarla. Se describe su relación con el *operador D'Alembertiano*

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{4.1}$$

De ahora en adelante se usará solamente el caso hiperbólico de la teoría ya desarrollada.

Teorema 4.1. *La ecuación $\partial_{\overline{z}} w = 0$ en el cuadrado $\boldsymbol{S}_b := [-b, b] \times [-b, b]$ tiene por solución general*

$$w(x, y) \quad = \quad \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathbf{e_1} + \Psi\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathbf{e_2} \tag{4.2}$$

donde $\Psi, \Phi \in C^1([-b, b], \mathbb{R})$ son arbitrarias.

Demostración: Por definición de $\partial_{\overline{z}}$ se tiene

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}}w &= \frac{1}{2}\left(\partial_x - \mathbf{j}\partial_y\right)w \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(w_x - w_y\right)\mathbf{e_1} - \left(w_x + w_y\right)\mathbf{e_2}\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

en representación idempotente. Haciendo el cambio $\beta = \frac{x-y}{2}$ y $\alpha = \frac{x+y}{2}$ (4.3) se transforma en

$$\partial_{\overline{z}}w = w_\beta \mathbf{e_1} + w_\alpha \mathbf{e_2}. \tag{4.4}$$

Sea $w(z) = \xi(x,y)\mathbf{e_1} + \eta(x,y)\mathbf{e_2}$. Entonces $w_\beta = \xi_\beta \mathbf{e_1} + \eta_\beta \mathbf{e_2}$ y $w_\alpha = \xi_\alpha \mathbf{e_1} + \eta_\alpha \mathbf{e_2}$. Sustituyendo en (4.4) se tiene por la Proposición 1.10, incisos 1 y 4 , que

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}}w &= \left(\xi_\beta \mathbf{e_1} + \eta_\beta \mathbf{e_2}\right)\mathbf{e_2} - \left(\xi_\alpha \mathbf{e_1} - \eta_\alpha \mathbf{e_2}\right)\mathbf{e_2} \\ &= \xi_\beta \mathbf{e_1} + \eta_\alpha \mathbf{e_2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\partial_{\overline{z}}w = 0 \iff \xi_\beta = 0 \text{ y } \eta_\alpha = 0. \tag{4.5}$$

De (4.5) y como $\mathbf{S}_b$ es convexo entonces se tiene que ξ depende solamente de α, y η depende solamente de β. Por lo tanto existen $\Phi, \Psi \in C^1([-b,b],\mathbb{R})$ tales que

$$\xi(\alpha,\beta) = \Phi(\alpha) \ \text{ y } \ \eta(\alpha,\beta) = \Psi(\beta).$$

□

Problema de Goursat para $\partial/\partial_{\overline{z}}$: Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$\partial_{\overline{z}}w = 0 \ \text{ en } \ \mathbf{S}_b$$

con las condiciónes siguientes en las curvas características $x = y$ y $x = -y$:

$$w(x,x) = \mathbf{e_1}\Phi(x) + \mathbf{e_2}\Psi(0) \text{ y } w(x,-x) = \mathbf{e_1}\Phi(0) + \mathbf{e_2}\Psi(x)$$

donde $\Phi, \Psi \in C^1[-b,b]$, son funciones escalares dadas.

Corolario 4.2. *El problema de Goursat para $\partial/\partial_{\overline{z}}$ tiene una única solución, y la solución es de la forma 4.2.*

Demostración: Sea $w_1 = \Phi_1\mathbf{e_1} + \Psi_1\mathbf{e_2}$ otra solución del problema de Goursat. Entonces comparando las soluciones en la diagonales $y = \pm x$ se tiene

$$0 = (\Phi(x) - \Phi_1(x))\mathbf{e_1} + (\Psi(0) - \Psi_1(0))\mathbf{e_2} \qquad 0 = (\Phi(0) - \Phi_1(0))\mathbf{e_1} + (\Psi(x) - \Psi_1(x))\mathbf{e_2},$$

de donde necesariamente $\Phi = \Phi_1$ y $\Psi = \Psi_1$. □

Corolario 4.3. *Sean Φ, Ψ funciones escalares definidas en $[-b,b]$ que tienen series de potencias que convergen uniformemente,*

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Entonces la solución del problema de Goursat está dada por

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad donde \;\; c_n = \frac{1}{2^n}(a_n \mathbf{e_1} + b_n \mathbf{e_2}) \tag{4.6}$$

Además se tiene

$$c_n = \frac{w^{[n]}(0)}{n!}$$

donde $w^{[n]}$ significa la derivada n-ésima hiperbólica de w.

Demostración: Por el Teorema 4.1, la solución del problema de Goursat viene dada por

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathbf{e_1} + \Psi\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathbf{e_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \mathbf{e_1} + b_n\left(\frac{x-y}{2}\right)^n \mathbf{e_2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2^n}(x+y)^n\mathbf{e_1} + \frac{b_n}{2^n}(x-y)^n\mathbf{e_2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \end{aligned}$$

Por la proposición 1.10 y como $w^{[n]} = \mathbf{j}^n \partial_y^n w$ y $w = \Phi\mathbf{e_1} + \Psi\mathbf{e_2}$,

$$\begin{aligned} w^{[n]}(0) &= \mathbf{j}^n \Phi^n(0)\mathbf{e_1} + (-\mathbf{j})^n \Psi^n(0)\mathbf{e_2} \\ &= \left(\mathbf{j}^n n! \frac{a_n}{2^n}\right)\mathbf{e_1} + \left((-\mathbf{j})^n n! \frac{b_n}{2^n}\right)\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Como $\mathbf{j}^n = \mathbf{e_1} + (-1)^n\mathbf{e_2}$, $(-\mathbf{j})^n = \mathbf{e_2} + (-1)^n\mathbf{e_1}$, entonces $\mathbf{j}^n\mathbf{e_1} = \mathbf{e_1}$ y $(-\mathbf{j})^n\mathbf{e_2} = \mathbf{e_2}$. Por tanto $w^{[n]}(0) = n! c_n$. □

Ejemplo 4.4. Sea $\Phi(x) = e^x$ y $\Psi(x) = e^{-x}$. En cualquier intervalo cerrado hay series de potencias que convergen uniformemente

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

Entonces por la Proposición 1.10, los coeficientes en el enunciado del Corolario 4.3 son

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n!}\mathbf{e_1} + \frac{(-1)^n}{n!}\mathbf{e_2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^n n!} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \mathbf{j}\frac{1}{2^n n!} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así la solución w del problema de Goursat está dada por

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{n \text{ impar}} \frac{z^n}{2^n n!} + \mathbf{j}\sum_{n \text{ par}} \frac{z^n}{2^n n!} \\ &= \exp\left(\frac{z}{2}\right)\mathbf{e_1} + \exp\left(\frac{-z}{2}\right)\mathbf{e_2}. \end{aligned}$$

Definición 4.5. (*Polinomios de onda*) Sea $z = x + \mathbf{j}y$. Se definen los *polinomios de onda* p_{n_1}, p_{n_2} de grado n como

$$p_{n_1}(x,y) = \Re\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}(\mathbf{j}y)^i\right) \tag{4.7}$$

$$p_{n_2}(x,y) = \Im\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}(\mathbf{j}y)^i\right). \tag{4.8}$$

Cuando se tiene las hipótesis del Corolario 4.3, usando los polinomios generalizados de onda y el hecho que $z^n = p_1(x,y) + \mathbf{j}p_2(x,y)$ la solución (4.6) se transforma en

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(p_{n_1}(x,y) + \mathbf{j}p_{n_2}(x,y)\right).$$

Relación de ecuación de onda con la ecuación de Vekua.

Teorema 4.6. *Sea $W \in C^2(U)$. Entonces*

$$W_{\overline{z}} - \frac{f_{\overline{z}}}{f}\overline{W} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \left(\Box - \frac{f''}{f}\right)\Re W = 0, \\ \left(\Box - \frac{(1/f)''}{1/f}\right)\Im W = 0. \end{cases}$$

En el caso particular $f_{\overline{z}} = 0$, W es $\mathbb{D}$-diferenciable,

$$W_{\overline{z}} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Box\Re W = 0, \\ \Box\Im W = 0. \end{cases}$$

4.2. Operador de transmutación

En esta sección se define el operador de transmutación en que se basa el método para resolver un problema de Sturm-Liouville. Operadores de transmutación aparecen en los trabajos por ejemplo [11, 12].

Definición 4.7. Sean E, E' espacios vectoriales y sean $A, B\colon E \to E'$ operadores lineales. Entonces T definido en E tal que E_1 es invariante bajo T, se dice *operador de transmutación* de los operadores A, B si satisface las siguientes condiciones.

1. T es invertible, y T y su inversa T^{-1} son continuas en E,
2. T satisface la ecuación $AT = TB$ en E_1.

Teorema 4.8. *Sea $q \in C([-b, b], \mathbb{R})$. Dadas $\Phi, \Psi \in C^2(b, -b)$ hay una solución única del problema de Goursat para $\Box - q$*

$$\begin{aligned} (\Box - q)\boldsymbol{K}(x, y) &= 0, \\ \boldsymbol{K}(x, x) &= \Phi(x), \\ \boldsymbol{K}(x, -x) &= \Psi(x), \end{aligned}$$

en el cuadrado $[-b, b] \times [-b, b]$.

Consideremos el operador

$$L_q = u'' - qu. \tag{4.9}$$

Dada q supongamos que se puede encontrar $f \in C^2[0, b]$ que no se anule tal que $L_q[f] = 0$. Tomemos

$$\Phi(x) = \frac{f'(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x q(s)\, ds, \tag{4.10}$$

$$\Psi(x) = \frac{f'(0)}{2}. \tag{4.11}$$

Con esto definimos $\mathbf{K}_f$ igual a la solución del Teorema 4.8. Es necesario que f no se anule, porque $1/f$ aparece en los desarrollos de las potencias formales del Capítulo 3.

Definición 4.9. Consideremos el operador de Volterra

$$T_f[u](x) = u(x) + \int_{-x}^{x} \mathbf{K}_f(x, y)u(y)\, dy$$

actuando en $C[-b, b]$.

Teorema 4.10. *[2, 9] El operador T cumple*

1. *T_f es un operador de transmutación de $L_0 - \lambda$ a $L_q - \lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*
2. *$T_f[x^k] = \varphi_k$, donde φ_k es la función canónica asociada a f.*

En el teorema anterior, los operadores $L_q - \lambda$ actúan en $C^2[-b, b] \subseteq C^0[-b, b]$.

Cada vez que tengamos la función real valuada $\mathbf{K}_f$, tenemos tambien la función $\mathbf{K}_{1/f}$ construida de la misma manera. Uno de los resultados principales de [8] es el siguiente.

Teorema 4.11. *La función hiperbólica*

$$\mathbf{K}_f - \boldsymbol{j}\,\mathbf{K}_{1/f} \tag{4.12}$$

es una solución de la ecuación de Vekua principal hiperbólica (2.15) en $[-b, b] \times [-b, b]$.

4.3. Procedimiento para problemas de Sturm-Liouville.

Consideremos el operador lineal $L_q \colon C^2[0, b] \longrightarrow C[0, b]$ definido por

$$L_q[u] = u'' - qu \tag{4.13}$$

Para construir el operador de transmutación entre L_q y L_0 necesitamos unos teoremas de aproximación. Lo siguiente es un caso particular de [8, Proposición 4.1].

Teorema 4.12. *Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, con la siguiente propiedad. Supongamos que $c_0, c_1, \ldots, b_1 \ldots,$ satisfacen*

$$\left|\frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_f(x, x) + \mathbf{K}_f(x, -x)\right) - \left(c_0 u_0(x, x) + \sum_{n=1}^{N} c_n u_{2n-1}(x, x)\right)\right| < \delta,$$

$$\left|\frac{1}{2}\left(\mathbf{K}_f(x, x) - \mathbf{K}_f(x, -x)\right) - \sum_{n=1}^{N} b_n u_{2n}(x, x)\right| < \delta,$$

para todo $x \in [-b, b]$, donde los u_n son los polinomios generalizados de onda. Entonces para cualquier $x, y \in [-b, b] \times [-b, b]$,

$$\left|\boldsymbol{K}_f(x, y) - \left(c_0 u_0(x, y) + \sum_{n=1}^{N} (c_n u_{2n-1}(x, y) + b_n u_n(x, y))\right)\right| < \epsilon. \tag{4.14}$$

Teorema 4.13. *[2] Los siguientes sistemas* $\{u_{2n-1}(x,x), u_{2n}(x,x)\}$ *son linealmente independientes y completos en* $C^1[-b,b]$ *y* $C_0^1[-b,b]$ *respectivamente.*

Con estos resultados se puede dar el algoritmo para construir la solución al problema de Sturm-Liouville siguiente

$$L_q[u] = \lambda u, \ u(0) = u(b) = 0. \tag{4.15}$$

1. Dado q, encontrar f que no se anule en $[0,b]$ tal que $L_q[f] = 0$. La existencia de tal solución es explicada en [6], cuando se permite que f sea compleja-valuada.

2. Construir las funciones auxiliares $X_f^{(n)}, X_{1/f}^{(n)}$ como se explicó en el Capítulo 3, luego las funciones canónicas φ_k y por último los polinomios generalizados de onda $u_n(x,y)$ asociados a f.

3. Fijar N. Encontrar la combinación de coeficientes $\{b_n\}$ que minimice

$$\sup_{x\in[-b,b]} \left| (\Phi(x) - \Psi(x)) - \sum_{n=1}^{N} b_n u_{2n}(x,x) \right|$$

   donde Ψ, Φ están dadas por (4.10),(4.11).

Notemos que $\Phi(0) = \Psi(0)$, lo cual justifica que no aparece la función u_0 en esta aproximación. Por el Teorema 4.13, la funciones $\Phi + \Psi$, $\Phi - \Psi$, que son los valores de $\mathbf{K}_f$ en las diagonales del cuadrado, se pueden aproximar por combinaciones lineales de los polinomios generalizados de onda u_n. Por el Teorema 4.12, se obtienen aproximaciones de los valores de $\mathbf{K}_f$ en todo el cuadrado. Definimos $s_\lambda(x) = \mathbf{T}_f[\sin\sqrt{\lambda}x]$, o sea,

$$s_\lambda(x) = \sin\sqrt{\lambda}x + \int_{-x}^{x} \mathbf{K}_f(x,y) \sin\sqrt{\lambda}y \, dy. \tag{4.16}$$

Anteriormente a los trabajos [5, 8] era difícil encontrar $\mathbf{K}_f$ con suficiente precisión para poder evaluar esta integral numéricamente. Por el hecho $\mathbf{T}_f[x^k] = \varphi_k$ aplicado a la serie de potencias del seno,

$$s_\lambda(x) = \sin\sqrt{\lambda}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} \varphi_{n-k}(x) \int_{-x}^{x} t^k \sin\sqrt{\lambda}t \, dt.$$

Por el Teorema 4.10 , $L_q[s_\lambda] = \lambda s_\lambda$, y obviamente se satisface la primera condición de frontera $s_\lambda(0) = 0$. Hay que encontrar para cuáles λ se tiene $s_\lambda(b) = 0$.

4. Evaluar la función

$$s_\lambda(x) = \sin\sqrt{\lambda}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} \varphi_{n-k} \int_{-x}^{x} t^k \sin\sqrt{\lambda}t\, dt.$$

   como función de $\sqrt{\lambda}$, y calcular sus ceros numéricamente. Éstos son los eigenvalores que se buscan.

Para estimar s_λ, se truncan las series a un número finito de términos, se calculan las raíces de $\int_{-b}^{b} t^k \sin\sqrt{\lambda}t\, dt$, las cuales se usan como aproximaciones a los eigenvalores del problema.

En [8] se explica que a diferencia de métodos anteriores, este método no pierde precisión para valores grandes de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Todo lo anterior se hace con la teoría de funciones $\mathbb{R}$-valuadas, con la excepción de los polinomios generalizados de onda $\{u_n\}$ que requieren a los números hiperbólicos para su definición.

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo describe una forma recientemente descubierta para resolver problemas de Sturm-Liouville con alta precisión. Este método se basa en la teoría de las funciones pseudo-analíticas modificada para los números hiperbólicos en vez de los números complejos. Hemos dado demostraciones de muchos aspectos que no se encuentran explícitamente en las fuentes originales.

En particular hemos detallado propiedades del anillo de los números hiperbólicos, la diferenciación e integración de funciones con valores hiperbólicos, la construcción de polinomios de onda y el operador de transmutación para un problema de Sturm-Liouville.

Bibliografía

[1] Bers L. *Theory of Pseudo-analytic Functions.* New York University (1952).

[2] Campos H.M; Kravchenko V.V; Torba S.M. *Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane.* J. Math. Anal. Appl. **389**, 1222-1238 (2012).

[3] Catoni F; Boccletti D; Cannata R; Catoni V; Zampetti P.*Geometry of Minkowski Space-Time.* Springer (2011).

[4] Kravchenko V.V. *Applied pseudoanalytic function theory.* Birkhäuser, Basel (2009).

[5] Kravchenko V.V. *A representation for solutions of the Sturm-Liouville equation.* Complex Var. Elliptic Eq. **53**, 775-789 (2008).

[6] Kravchenko V.V; Porter R.M. *Spectral parameter power series for Sturm-Liouville problems.* Math. Method Appl. Sci. **33**, 459-468 (2010).

[7] Kravchennko V.V., Rochon, D., Tremblay, S *On the Klein-Gordon equation and hyperbolic pseudo-analytic function theory.* J. Phys, A Math. Gen. **41**s, 065205 (2008). (18 pp.)

[8] Kravchenko,V.V; Torba S.M. *Construction of Transmutation Operators and Hyperbolic Pseudoanalytic Functions.* Complex Anal. Oper. Theory (2015) 9:379-429.

[9] Kravchenko V.V; Torba S. *Transmutations for Darboux transformed operators with applications.* J. Phys. A. Math. Gen. **45**, 075201 (2012). (21 pp).

[10] Lascurain O.A. *Curso básico de variable compleja* 3a ed UNAM Facultad de ciencias (2011).

[11] Lions, J. L. *Solutions élémentaires de certains opérateurs différentiels à coefficients variables.* J.Math **36** 57-64 (1957).

[12] Marchennko, V.A. *Sturm-Liouville Operators and Applications.* Birkhäuser, Basel (1986).

[13] Motter A.E; Rosa, M.A.F. *Hyperbolic calculus.* Adv. Appl. Clifford Algebras 8 (1998), no. 1 109-128.

[14] Shapiro M; Vajiac M.B.*Hyperbolic numbers and their functions.* An. Univ. Oradea Fasc. Mat. 19 (2012), no.1, 265-283.

[15] Zaldívar F. *Introducción a la teoría de grupos* Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana Nivel medio 1a. Reimpresión (2009). Coedición Reverté.