CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

COHOMOLOGÍA DE ESPACIOS DE ÓRBITAS POR GRUPOS CÍCLICOS DE ORDEN PRIMO

TESIS

Que presenta

JOSÉ LUIS LEÓN MEDINA

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

en la especialidad de

MATEMÁTICAS

Director de la tesis:

DR. JESÚS GONZÁLEZ ESPINO BARROS

Ciudad de México — Marzo, 2018

Agradezco el apoyo brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para la realización de mis estudios de maestría.

Resumen

El objetivo de esta tesis es desarrollar en extenso la teoría expuesta por Minoru Nakaoka en el artículo *Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications* para calcular el anillo de cohomología del cociente de un complejo simplicial por una acción cíclica de orden primo. Mediante el uso de los grupos especiales de cohomología se da una descripción de la imagen del homomorfismo cociente y en el caso de los productos cíclicos de orden primo se da una descripción detallada de su anillo de cohomología y su estructura como módulo sobre el álgebra de Steenrod.

Abstract

The aim of this thesis is to develop extensively the theory exposed by Minoru Nakaoka on his article *Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications* for computing the cohomology ring of the quotient of a simplicial complex by a prime cyclic action. By means of the special cohomology groups is given a description of the quotient homomorphism image and in the case of cyclic products of prime order is given a detailed description of its cohomology ring and its structure as module over the Steenrod algebra.

Agradecimientos

En este breve espacio deseo agradecer a las personas que hicieron posible esto:

- A mi mamá María Elena por apoyarme siempre, desde el inicio de mis estudios y guiarme con su paciencia y dedicación.
- A mi esposa Lucero por estar siempre a mi lado, brindarme tanto amor y sacar lo mejor de mi, así como a mis suegros Paula y Ezequiel por apoyarme tanto y hacerme parte de la familia.
- A mi asesor, Dr. Jesús González, por su apoyo a lo largo de mis estudios de maestría, por confiar en mí y por revisar esta tesis. Sus enseñanzas cultivaron disciplina en mis estudios.
- A mis sinodales, Dr. José María Cantarero y Dr. Iakov Mostovoi, por aceptar tan amablemente y con mucha disposición revisar esta tesis, sus sugerencias ayudaron a mejorar la presentación final de esta tesis.
- Y a los profesores que dieron lo mejor de sí para contribuir a mi formación a lo largo de mis estudios y a mis amigos con los que compartí buenas vivencias e hicieron aún más agradable el tránsito por esta maestría.

A todos ustedes
¡Muchas gracias!
José Luis

Índice general

Introducción

Las relaciones entre la homología, y cohomología, del espacio total y de órbitas de la acción de un grupo finito fueron estudiadas intensamente a principios del siglo XX, por ejemplo Floyd en [1] introduce el uso del transfer, que permite calcular la homología y cohomología del espacio de órbitas, bajo la acción de un grupo finito G, por medio del uso de un homomorfismo opuesto al homomorfismo de la proyección natural, específicamente, si $\pi : K \longrightarrow K/G$ denota la función proyección del complejo simplicial K en su espacio de órbitas y σ es el homomorfismo $\sigma c = \sum gc$ en $C(K)$, el complejo de cadenas, existe un isomorfismo

$$\mu : C(K/G, L/G) \to \sigma C(K, L)$$

tal que $\mu(\pi c) = \sigma c$ para toda cadena $c \in C(K/G, L/G)$ y a su vez este isomorfismo induce un isomorfismo en homología (con coeficientes en un campo F de característica 0 o prima a $|G|$) llamado transfer:

$$\mu_* : H_*(K/G, L/G; F) \to H_*(K, L; F)^G$$

y por dualidad, un isomorfismo en cohomología

$$\mu^* : H^*(K, L; F)^G \to H^*(K/G, L/G; F)$$

véase Bredon [2], Capítulo 3.

Por otra parte, sea W un complejo simplicial y t una función simplicial. Richardson y Smith en [3] analizan la homología del espacio de órbitas cuando t es de periodo finito e introducen la noción de grupo especial de homología, lo que permite describir por completo la homología módulo p del p-ésimo producto cíclico de W. Posteriormente Liao en [4] determina el grupo de cohomología del p-ésimo producto cíclico de la n-esfera así como la estructura algebraica de las potencias reducidas.

En [5] Nakaoka anuncia resultados que permiten describir la cohomología del espacio de órbitas bajo t cuando t es de periodo primo p y presenta la cohomología del p-ésimo producto cíclico de W así como su estructura multiplicativa y de módulo sobre el álgebra de Steenrod, generalizando los resultados en [4]. Luego los resultados obtenidos en [5] le permiten calcular la cohomología del tercer producto simétrico de esferas [6]. Finalmente, Nakaoka en [7] desarrolla de manera sistemática, dentro del contexto de cohomología simplicial, la teoría que da lugar a los resultados en [5]. Usando los grupos especiales de cohomología describe relaciones entre la cohomología del complejo simplicial W y de su espacio de órbitas W_t, además de describir la estructura multiplicativa y de módulo sobre el álgebra de Steenrod.

El objetivo del presente trabajo es revisar a detalle la teoria expuesta en [7].

En el primer capítulo se desarrolla la teoría básica; en la sección 1.1 se presentan los grupos especiales de cohomología y la sucesión de Richardson-Smith. Los grupos especiales de cohomología juegan un papel importante para lograr una descomposición del grupo de cohomología del espacio de órbitas, pues se verá que el homomorfismo π^* tiene como imagen un grupo especial de cohomología ($I^* = \pi^* : H^*(W_t, W_t'; G) \cong {}^{\sigma}H^*(W, W'; G)$). En la sección 1.2 se definen homomorfismos básicos que servirán de conexión entre los grupos especiales de cohomología, un homomorfismo tipo transfer ϕ_0 y morfismos μ y ν obtenidos a partir del homomorfismo de conexión γ_ρ en la sucesión exacta de Richardson-Smith. La relación de estos homomorfismos con las potencias reducidas de Steenrod ($p \geq 3$) o cuadrados de Steenrod ($p = 2$) y el homomorfismo de Bockstein son objeto de estudio en la sección 1.3. Finalmente, en la sección 1.4 se introduce el concepto de casi regularidad para una terna (W, W', t). Se verá que cuando esta propiedad se cumple se tiene que

$$ {}^{\sigma}H^*(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) = {}^{\sigma}N^*(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) + \kappa_\sigma H^*(W, W'; \mathbb{Z}_p) \qquad (*) $$

donde ${}^{\sigma}N^*(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p)$ es el kernel de α_τ, un homomorfismo en la sucesión exacta de Richardson-smith, y κ_σ es un homomorfismo tal que $I^* \phi_0^* = \kappa_\sigma$.

Sea $\mathfrak{X}(K)$ el p-ésimo producto de un complejo simplicial K y t la transformación dada por $t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$. Sean $\mathfrak{B}(K)$ y $\mathfrak{d}(K)$ el espacio de órbitas de $\mathfrak{X}(K)$ y el espacio de órbitas de su subcomplejo de puntos fijos $\mathfrak{D}(K)$ ($\mathfrak{B}(K)$ es el p-ésimo producto cíclico de K). Entonces $(*)$ toma la forma (componiendo con I^{*-1})

$$ H^*(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p) = N^r(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p) + \phi_0^* H^r(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p) \qquad (**) $$

donde $N^r(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p)$ es el kernel del homomorfismo π^*. Más aún la descomposición es una suma directa como se probará en la sección 2.5. Para garantizar tal descomposición se verifica, en la sección 2.2, que la terna $(\mathfrak{X}(K), \emptyset, t)$ es casi regular. En la sección 2.3 se introducen los homomorfismos E_s cuyas imagenes, en un cierto rango, constituirán el kernel del homomorfismo π^* como se verá en la sección 2.4. Luego, la descomposición

$(**)$ describe por completo la estructura aditiva y multiplicativa en $H^*(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p)$, pues una base para $H^*(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p)$ esta constituida por elementos de la forma $E_s(x)$ y $\phi_0(y)$ y los posibles productos copa entre ellos se calculan en la segunda parte de la sección 2.5, así como la acción de las potencias (o cuadrados) de Steenrod y el homomorfismo de Bockstein. En la sección 2.6 se dan fórmulas que permiten expresar a cualquier elemento $\phi_0(y)$ o $E_s(x)$ en término de los elementos básicos de la descomposición $(**)$. Finalmente en la sección 2.7 se da el cálculo explicito de la cohomología del producto cíclico de esferas.

1 | Cohomología de espacios de órbitas

En este capítulo se presentará la teoría básica que, bajo ciertas condiciones, permitirá calcular la cohomología de espacios de órbitas de un complejo simplicial bajo una transformación de orden primo. Específicamente, en el Capítulo 1 se introducirán los grupos especiales de cohomología y se desarrollará la relación que tienen respecto al homomorfismo cociente inducido por la transformación. En el Capítulo 2 se presentarán homomorfismos esenciales para dar una descripción adecuada del kernel del homomorfismo cociente y en la sección 4 se darán condiciones bajo las cuales tal descripción se cumple. Finalmente, en la sección 3 se darán propiedades que determinarán la interacción de las potencias o cuadrados de Steenrod con los homomorfismos presentados en la sección 2.

1.1. El grupo especial de cohomología

Sea W un complejo simplicial finito, y sea $t : W \to W$ una transformación periodica de periodo primo p. Supongamos que t satisface las condiciones

a) t es simplicial

b) Si un simplejo es enviado en sí mismo por t, todos sus puntos quedan fijos.

Se puede ver fácilmente que el conjunto $F = F(t)$ de puntos fijos bajo t forman un subcomplejo de W. Sea W' un subcomplejo arbitrario de W invariante bajo t, y sea G un grupo abeliano. t da origen a una función de cocadenas $t^\#$ en el grupo $C^r(W, W'; G)$ de r-cocadenas del par (W, W') con grupo de coeficientes G. Sean σ y τ los morfismos de cocadenas definidos por

$$\sigma = \sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j}, \qquad \tau = 1 - t^\#$$

respectivamente. Dado que la mayoría de los resultados involucran relaciones entre σ y τ acordemos denotar alguna de estas funciones por ρ y la otra por $\bar{\rho}$.

Observación 1.1.1.

- $\rho\bar{\rho} = 0$
  Pues $\left(1 - t^{\#}\right)\left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j}\right) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j}\right)\left(1 - t^{\#}\right) = \sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j} - \sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j+1} = 0$

- Si denotamos por ${}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G)$ y ${}^{\rho}C^r(W,W';G)$ al kernel e imagen, respectivamente, del morfismo $\rho : C^r(W,W';G) \to C^r(W,W';G)$ entonces $\left\{{}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G),\delta\right\}$ y $\left\{{}^{\rho}C^r(W,W';G),\delta\right\}$[1] son complejos de cocadenas y por tanto podemos definir los grupos de cohomología de ${}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G)$ y ${}^{\rho}C^r(W,W';G)$, llamados el grupo ρ^{-1} especial de cohomología y grupo ρ especial de cohomología con coeficientes en G, denotados ${}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$ y ${}^{\rho}H^r(W,W';G)$, respectivamente.

- La sucesión

  $$0 \to {}^{\rho^{-1}}C^r(W,W',G) \xrightarrow{i} C^r(W,W',G) \xrightarrow{\rho} {}^{\rho}C^r(W,W',G) \to 0$$

  donde i es el homomorfismo de inclusión, es una sucesión exacta de morfismos de cadenas. Y por tanto existe una sucesión exacta larga de grupos de cohomología como en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. *La siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \to {}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G) \xrightarrow{\alpha_\rho} H^r(W,W';G) \xrightarrow{\beta_\rho} {}^{\rho}H^r(W,W';G) \xrightarrow{\gamma_\rho} {}^{\rho^{-1}}H^{r+1}(W,W';G) \to \cdots$$

donde α_ρ y β_ρ son los homomorfismos inducidos por i y ρ respectivamente. γ_ρ es el homomorfismo de conexión tal que $\gamma_\rho([\rho u]) = [\delta u]$. A esta sucesión se le conoce como la sucesión de Richardson-Smith.

A continuación daremos condiciones suficientes para que el ρ^{-1} grupo especial de cohomología coincida con el $\bar{\rho}$ grupo especial de cohomología; primero veamos que todo elemento de ${}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G)$ es suma de un elemento en ${}^{\bar{\rho}}C^r(W,W';G)$ más una cocadena sobre los puntos fijos.

Sea Π el grupo cíclico de orden p generado por t. Es claro que Π opera libremente sobre la base del grupo de r-cadenas enteras $C_r(W,W' \cup F)$. Sea $\Omega_r = \Omega_r(W,W' \cup F)$ una Π base libre para $C_r(W,W' \cup F)$.

[1]En estos complejos de cocadenas δ es la restricción o cociente respectivamente de la cofrontera de $C^r(W,W';G)$

Lema 1.1.3. *Se cumple lo siguiente:*

(i) $${}^{\tau^{-1}}C^r(W,W';G) = {}^{\sigma}C^r(W,W';G) + C^r(W'\cup F,W';G)$$

(ii) $${}^{\sigma^{-1}}C^r(W,W';G) = {}^{\tau}C^r(W,W';G) + C^r(W'\cup F,W';{}_pG)^2$$

Demostración. Observemos que si $u \in {}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G)$ entonces u es una cocadena que se evalua en sumas de r-simplejos de W que no están en W', en particular si $x \in C_r(W,W')$ se tiene que

$$x = \sum_{\sigma\in W^{(r)}\setminus W'^{(r)}} k_\sigma \sigma \quad = \sum_{\sigma\in\left(W^{(r)}\setminus W'^{(r)}\right)-F^{(r)}} k_\sigma\sigma \quad + \sum_{\sigma\in F^{(r)}-W'^{(r)}} k_\sigma\sigma$$

y entonces u se puede expresar como una suma de cocadenas $u = u_1 + u_2$, donde $u_1 : C_r(W,W'\cup F) \to G$ y $u_2 : C_r(W'\cup F,W') \to G$.

Demostración de (i): Sea $u \in {}^{\tau^{-1}}C^r(W,W';G)$, entonces $\tau u = \tau u_1 = 0$ y en particular para cada x en Ω_r: $(1-t^{\#})(u_1(x)) = u_1(x) - u_1(t_{\#}(x)) = 0$ y así $u_1(x) = u_1(t_{\#}(x)) = \cdots = u_1\left(t_{\#}^{p-1}(x)\right)$. Definamos la cocadena $v \in C^r(W,W':G)$ por $v(x) = u_1(x)$ y $v(t_{\#}^j(x)) = 0$ para todo $x \in \Omega_r$ y $j \neq 0$.

Luego, por la definición de σ es claro que $u_1 = \sigma v$ y como $v \in C^r(W,W';G)$ entonces $u_1 \in {}^{\sigma}C^r(W,W';G)$. Por tanto ${}^{\tau^{-1}}C^r(W,W';G) \subset {}^{\sigma}C^r(W,W';G) + C^r(W'\cup F,W';G)$.

Recíprocamente, si $\sigma u + v \in {}^{\sigma}C^r(W,W';G) + C^r(W'\cup F,W';G)$ entonces $\tau(\sigma u + v) = \tau\sigma u + \tau v = \tau v = v(x) - v(t_{\#}x) = v(x) - v(x) = 0$. Y por tanto se cumple (i).

Demostración de (ii): Sea $u \in {}^{\sigma^{-1}}C^r(W,W';G)$ y consideremos $u = u_1 + u_2$ como en la observación. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sigma u(x) &= \left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j}\right) u(x) = \sum_{j=0}^{p-1} u\left(t_{\#}^j(x)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\left(u_1\left(t_{\#}^j(x)\right) + u_2\left(t_{\#}^j(x)\right)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{p-1} u_1\left(t_{\#}^j(x)\right) + pu_2(x) = 0
\end{aligned}$$

y por tanto $\forall\, x \in \Omega_r : \sum_{j=0}^{p-1} u_1\left(t_{\#}^j(x)\right) = 0$ y $\forall\, x \in C_r(W'\cup F,W') : pu_2(x) = 0$. Por tanto $u_2 \in C^r(W'\cup F,W';{}_pG)$. Luego, definimos v por:

$$v\left(t_{\#}^i x\right) = \sum_{j=i}^{p-1} u_1\left(t_{\#}^j x\right)$$

[2] ${}_pG$ denota al subgrupo $\{g \in G \,|\, pg = 0\}$.

para todo x en Ω_r y $i = 0,\dots,p-1$. Es claro entonces, por la definición de τ, que $\tau v = u_1$. Por tanto $u_1 \in {}^{\tau}C^r(W,W';G)$ y ${}^{\sigma^{-1}}C^r(W,W'\cup F;G) \subset {}^{\tau}C^r(W,W';G) + C^r(W'\cup F,W';{}_pG)$.

Recíprocamente, si $\tau u + v \in {}^{\tau}C^r(W,W';G) + C^r(W'\cup F,W';{}_pG)$, entonces $\sigma(\tau u + v) = \sigma\tau u + \sigma v = \sigma v = pv = 0$. Por tanto se cumple (ii). $\square$

Teorema 1.1.4.

(i) Si $F \subset W'$, entonces para todo G: ${}_{\bar\rho}H^r(W,W';G) = {}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$.

(ii) Si G es un campo de característica q, no divisor de p, entonces para todo W'

$$ {}_{\bar\rho}H^r(W,W';G) = {}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G) $$

Demostración. Para (i) observemos que si $F \subset W'$ entonces $C^r(W'\cup F,W';G) = C^r(W'\cup F,W';{}_pG) = 0$. De modo que ${}_{\bar\rho}C^r(W,W';G) = {}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G)$ y por tanto ${}_{\bar\rho}H^r(W,W';G) = {}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$.

Para (ii) observemos que $C^r(W'\cup F,W';{}_pG) = 0$ cuando G es de característica q y $q \nmid p$. Y, con la misma hipótesis, $C^r(W'\cup F,W';G) = pC^r(W'\cup F,W';G) = {}^{\sigma}C^r(W'\cup F,W';G)$. Por tanto ${}_{\bar\rho}H^r(W,W';G) = {}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$. $\square$

Lema 1.1.5. *Si $F \subset W'$ ó G es un campo de característica q, no divisor de p:*

$$ \alpha_{\bar\rho}\beta_{\rho} = \rho^* $$

donde $\rho^* : H^r(W,W';G) \to H^r(W,W';G)$ es el homomorfismo inducido por ρ.

Demostración. Sea $\rho'^{\#}$ el morfismo inducido por ρ correstringido a su imagen. Entonces a nivel de cocadenas tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
C^r(W,W';G) \arrow[r, "\rho'^{\#}"] \arrow[dr, "\rho^{\#}"'] & {}_{\rho}C^r(W,W';G) \arrow[d, "i"] \\
 & C^r(W,W';G)
\end{tikzcd}
$$

Como ${}_{\rho}H^r(W,W';G) = {}^{\bar\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$ por el Teorema 1.1.4, el diagrama inducido en cohomología es el siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
H^r(W,W';G) \arrow[r, "\beta_{\rho}"] \arrow[dr, "\rho^{*}"'] & {}_{\rho}H^r(W,W';G) \arrow[d, "\alpha_{\bar\rho}"] \\
 & H^r(W,W';G)
\end{tikzcd}
$$

que es lo que se quería demostrar. $\square$

Definición 1.1.6. Sea $Q_\rho : C^r(W,W';G) \to C^r(W,W';G)$ la función de cocadenas definida por:

$$Q_\sigma = \text{identidad},$$
$$Q_\tau = \sum_{j=2}^{p}(-1)^j \binom{p}{j}\tau^{j-2}.$$

Lema 1.1.7. *$p\rho = Q_\rho \rho^2$*

Demostración.

- Veamos que $\sigma^2 = p\sigma$

$$\sigma^2 = \left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{\#j}\right)\left(\sum_{i=0}^{p-1} t^{\#i}\right) = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1} t^{\#j+i} = \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-j-1} t^{\#j+i} + \sum_{i=p-j}^{p-1} t^{\#j+i}\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{i=j}^{p-1} t^{\#i} + \sum_{i=p}^{p+j-1} t^{\#i}\right) = \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{i=j}^{p-1} t^{\#i} + \sum_{i=0}^{j-1} t^{\#i}\right) = \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} t^{\#i}\right) = p\sum_{i=0}^{p-1} t^{\#i} = p\sigma$$

- Veamos que $Q_\tau \tau^2 = p\tau$

$$Q_\tau \tau^2 = \sum_{j=2}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\tau^{j-2}\tau^2 = \sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j}(-1)^j\tau^j = \sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j}(-\tau)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-\tau)^j - (1-p\tau) = (1-\tau)^p - (1-p\tau) = t^{\#p} - (1-p\tau) = p\tau.$$

□

Teorema 1.1.8. *Sea a un elemento de ${}^{\rho^{-1}}H^{r+1}(W,W';G)$ contenido en la imagen de γ_ρ. Entonces $p(a) = 0$.*

Demostración. Primero veamos que para toda cocadena $u \in C^r(W,W';G)$ tal que $\delta\rho u = 0$, existe una cocadena $v \in C^r(W,W';G)$ tal que $p\delta u = \delta\bar{\rho}v$.

- Si $\rho = \tau$: Como $\tau\delta u = 0$ se sigue por el Lema 1.1.3 que existen $v \in C^r(W,W';G)$ y $w \in C^r(W' \cup F, W';G)$ tales que $\delta u = \sigma v + w$. Entonces por el Lema 1.1.7 se tiene que

$$p\delta u = p\sigma v + pw = \sigma^2 v + pw = \sigma(\delta u - w) + pw = \sigma\delta u - \sigma w + pw = \sigma\delta u = \delta\sigma Q_\sigma u$$

- Si $\rho = \sigma$: Como $\sigma\delta u = 0$, por el Lema 1.1.3 existen $v \in C^r(W,W';G)$ y $w \in C^r(W' \cup F,W';G)$ tales que $\delta u = \tau v + w$ y $pw = 0$. Entonces por el Lema 1.1.7 se tiene

$$p\delta u = p\tau v + pw = Q_\tau \tau^2 v = Q_\tau \tau(\delta u - w) = Q_\tau \tau \delta u = \delta\tau Q_\tau u.$$

Notemos que en ambos casos la cocadena $v = Q_{\bar{\rho}}u$ cumple la condición deseada.

Ahora, si $a \in {}^{\rho^{-1}}H^{r+1}(W,W';G) \cap \gamma_p({}^{\rho}H^r(W,W';G))$, existe u en $C^r(W,W';G)$ tal que $a = \gamma_\rho[\rho u] = [\delta u]$ y como $a \in {}^{\rho^{-1}}H^{r+1}(W,W';G)$ se tiene que $\rho\delta u = \delta\rho u = 0$. Luego como $p\delta u = \delta\bar{\rho}Q_{\bar{\rho}}u$ por el desarrollo anterior, entonces $pa = [\delta\bar{\rho}Q_{\bar{\rho}}u] = \gamma_\rho[\rho\bar{\rho}Q_{\bar{\rho}}u] = \gamma_\rho[0] = 0$. □

Teorema 1.1.9. *Sea G un campo de característica q, no divisor de p. Entonces, para todo r, el homomorfismo α_ρ es inyectivo y su imagen es $\bar{\rho}^*H^r(W,W';G)$. Más aún todo elemento de ${}^{\rho}H^r(W,W';G)$ está representado como $\beta_\rho(a)$ donde $a \in H^r(W,W';G)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.8, el morfismo $\gamma_\rho : {}^{\rho}H^{r-1}(W,W';G) \to {}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$ es trivial para toda r, luego α_ρ es inyectivo y β_ρ es sobreyectivo. Además por el Lema 1.1.5 se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & H^r(W,W';G) \arrow[dl, "\beta_{\bar{\rho}}"'] \arrow[dr, "\bar{\rho}^*"] & \\
{}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G) \arrow[rr, "\alpha_\rho"] & & H^r(W,W';G)
\end{tikzcd}$$

De donde se sigue que la imagen de α_ρ es $\bar{\rho}^*H^r(W,W';G)$ y como β_ρ es sobreyectivo todo elemento de ${}^{\rho}H^r(W,W';G)$ está representado como $\beta_\rho(a)$ donde $a \in H^r(W,W';G)$. □

Denotemos por W_t al espacio de órbitas de W respecto a t, $O(W,t)$, y sea $\pi : W \to W_t$ la función cociente. Entonces W_t tiene estructura de complejo simplicial; sus vértices son las órbitas de los vértices, $[v]$, y los simplejos de W_t son simplejos de la forma $([v_0],\ldots,[v_n])$ donde $(v_0,\ldots,v_n)$ es un simplejo en W. De esta forma π es una función simplicial y las imagenes correspondientes de los subcomplejos W' y F son subcomplejos de W_t. Denotemoslos por $W'_t = O(W',t)$ y $F_t = O(F,t)$ respectivamente.

Como se menciono en la introducción, el estudio de los grupos de cohomología especiales es relevante para el estudio cohomológico de W_t porque la imagen del homomorfismo inducido π^* resulta ser un grupo de cohomología especial. Esto se establece en el siguiente lema.

Lema 1.1.10. *Se tienen los siguientes isomorfismos:*

$$\pi^{\#'} : C^r(W_t, W_t'; G) \approx {}^{\tau^{-1}}C^r(W, W'; G)$$
$$\pi^{\#} : C^r(F_t; G) \approx C^r(F; G)$$

Demostración. Como $\pi : W \longrightarrow W_t$ es una función simplicial, la función inducida correspondiente en cocadenas $\pi^{\#} : C^r(W_t, W_t'; G) \to C^r(W, W'; G)$ es inyectiva, pues si $\pi^{\#}u = 0$ entonces $u\pi_{\#} = 0$ y así $u = 0$. Además $\tau u\pi_{\#} = u\pi_{\#} - u\pi_{\#}t_{\#} = u\pi_{\#} - u\pi_{\#} = 0$. Por tanto $\mathrm{Im}\,\pi^{\#} \subset {}^{\tau^{-1}}C^r(W, W'; G)$.

Más aún, si $v \in {}^{\tau^{-1}}C^r(W, W'; G)$ definimos $u \in C^r(W_t, W_t'; G)$ por $u(\pi(x)) = v(x)$ para todo $x \in \Omega_r$, pues $v(x) = v(t^{\#}(x)) = \cdots = v\big(t^{\#^{p-1}}(x)\big)$. Por tanto ${}^{\tau^{-1}}C^r(W, W'; G) \subset \mathrm{Im}\,\pi^{\#}$.

Por otra parte notemos que $F_t = \{\pi(x) \,|\, x \in F\} = \{\{x\} \,|\, x \in F\} \approx F$. Por tanto $\pi^{\#} : C^r(F_t; G) \approx C^r(F; G)$ es claramente una biyección. □

Una consecuencia inmediata de este lema es el siguiente teorema.

Teorema 1.1.11. *Si I^* es el homomorfismo inducido por π, se tienen los isomorfismos:*

$$I^* : H^r(W_t, W_t'; G) \approx {}^{\tau^{-1}}H^r(W, W'; G),$$
$$\pi^* : H^r(F_t; G) \approx H^r(F; G).$$

Más aún notemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & {}^{\tau^{-1}}C^r(W, W'; G) \arrow[dr, "i^{\#}"] & \\ C^r(W_t, W_t'; G) \arrow[ur, "\pi^{\#'}"] \arrow[rr, "\pi^{\#}"] & & C^r(W, W'; G) \end{tikzcd}$$

y por tanto lo es el diagrama correspondiente en cohomología:

$$\begin{tikzcd} & {}^{\tau^{-1}}H^r(W, W'; G) \arrow[dr, "\alpha_\tau"] & \\ H^r(W_t, W_t'; G) \arrow[ur, "I^*"] \arrow[rr, "\pi^*"] & & H^r(W, W'; G) \end{tikzcd}$$

es decir:

Corolario 1.1.12. $\alpha_\tau I^* = \pi^*$.

Finalmente, el Teorema 1.1.9 para $\rho = \tau$ implica lo siguiente

Teorema 1.1.13. *Bajo las mismas hipótesis que el Teorema 1.1.9, el homomorfismo π^* es inyectivo y su imagen es $\sigma^* H^r(W, W'; G)$.*

1.2. Homomorfismos básicos

Denotemos por $\eta : G \to G_p$ a la proyección natural $\eta(g) = g \mod p$. Entonces se verifica la siguiente observación:

Observación 1.2.1. $\eta Q_\rho {}^\rho C^r(W, W' \cup F; G) \subset {}^{\bar\rho} C^r(W, W' \cup F; G_p)$, donde G_p denota al cociente G/pG

Pues si $u \in C^r(W, W' \cup F; G)$ entonces

$$\rho\eta Q_\rho \rho(u) = \rho[Q_\rho \rho(u)]_{\text{mod } p} = [Q_\rho \rho^2(u)]_{\text{mod } p} = [p\rho(u)]_{\text{mod } p} = 0.$$

Así que $\rho\eta Q_\rho \rho(u) \in {}^{\rho^{-1}} C^r(W, W' \cup F; G)$ y además ${}^{\rho^{-1}} C^r(W, W' \cup F; G_p) = {}^{\bar\rho} C^r(W, W' \cup F; G_p)$, por el Lema 1.1.3. Por tanto $\eta Q_\rho {}^\rho C^r(W, W' \cup F; G) \subset {}^{\bar\rho} C^r(W, W' \cup F; G_p)$

De la observación anterior se sigue que ηQ_ρ induce un homomorfismo

$$Q_\rho{}' : {}^\rho H^r(W, W' \cup F; G) \to {}^{\bar\rho} H^r(W, W' \cup F; G_p)$$

Sean $\epsilon_\sigma = 1$ y $\epsilon_\tau = -1$, definamos el homorfismo $\psi_{\bar\rho}$ por $\psi_{\bar\rho} = \epsilon_\rho Q'_\rho$, entonces

$$\psi_{\bar\rho} : {}^\rho H^r(W, W' \cup F; G) \to {}^{\bar\rho} H^r(W, W' \cup F; G_p).$$

Lema 1.2.2.

(i) $\epsilon_\tau Q_\tau \tau \equiv \epsilon_\sigma Q_\sigma \sigma = \sigma$ *mód* p.

(ii) $\begin{cases} Q_\tau \sigma \equiv 0 \mod p & \textit{si } p \geq 3 \\ Q_\tau \sigma = \sigma & \textit{si } p = 2. \end{cases}$

Demostración.

(i)
$$\begin{aligned}
\epsilon_\tau Q_\tau \tau &= (-1)\left(\sum_{j=2}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \tau^{j-2}\right)\tau = \sum_{j=2}^{p} (-1)^{j+1} \binom{p}{j} \tau^{j-1} \\
&\equiv (-1)^{p+1} \tau^{p-1} \text{ pues } p \,\Bigg|\, \binom{p}{j} \text{ para todo } j < p \\
&= (-1)^{p-1} (1 - t^\#)^{p-1} = (t^\# - 1)^{p-1} \\
&\equiv \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{p-j-1} \binom{p-1}{j} t^{\# j}, \text{ y como } \binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \mod p, \\
&\equiv \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{p-1} t^{\# j} = \sigma = \epsilon_\sigma Q_\sigma \sigma \mod p
\end{aligned}$$

(ii) $$Q_\tau\sigma = \sum_{j=2}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\tau^{j-2}\sigma = \binom{p}{2}\sigma \equiv \begin{cases} 0 \quad \text{mód } p & \text{si } p \geq 3 \\ \sigma \quad \text{mód } p & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

La segunda igualdad se da porque $\tau\sigma = 0$.

□

Lema 1.2.3.

(i) ψ_τ *(*ψ_σ*) envía a un elemento de* ${}^\sigma H^r(W, W' \cup F; G)$ *(*${}^\tau H^r(W, W' \cup F; G)$*) representado por* σu *(*τu*) al elemento de* ${}^\tau H^r(W, W' \cup F; G_p)$ *(*$\sigma H^r(W, W' \cup F; G_p)$*) representado por* σu*.*

(ii) $\begin{cases} \psi_\sigma\psi_\tau = 0, & \textit{si } p \geq 3, \\ \psi_\sigma\psi_\tau = \eta_*, & \textit{si } p = 2. \textit{ Donde } \eta_* \textit{ es el homomorfismo inducido por } \eta. \end{cases}$

Demostración.

(i)
- $\psi_\tau[\sigma u] = \left[\epsilon_\sigma Q'_\sigma \sigma u\right] = [\epsilon_\sigma \eta Q_\sigma \sigma u] = \eta_*\left[\epsilon_\sigma Q_\sigma \sigma u\right] = \eta_*[\sigma u]$.
- $\psi_\sigma[\tau u] = \left[\epsilon_\tau Q'_\tau \tau u\right] = [\epsilon_\tau \eta Q_\tau \tau u] = \eta_*\left[\epsilon_\tau Q_\tau \tau u\right] = \eta_*[\sigma u]$.

(ii)

$$\psi_\sigma\psi_\tau[\sigma u] = \psi_\sigma\left(\eta_*[\sigma u]\right) = \eta_*[\epsilon_\tau Q_\tau \sigma u] = \begin{cases} 0, & \text{si } p \geq 3, \\ \eta_*[\sigma u], & \text{si } p = 2, \end{cases} \text{ por el Lema 1.2.2.}$$

□

Lema 1.2.4. *(i)* $\psi_\rho\gamma_\rho = \gamma_{\bar\rho}\psi_{\bar\rho}$ *(ii)* $\psi_\sigma\beta_\tau = \eta_*\beta_\sigma$ *(iii)* $\alpha_\sigma\psi_\tau = \eta_*\alpha_\tau$.

Demostración.

(i) $\psi_\rho\gamma_\rho, \gamma_{\bar\rho}\psi_{\bar\rho} : {}^\rho H^r(W, W' \cup F; G) \to {}^\rho H^{r+1}(W, W' \cup F; G_p)$. Sea $[a] \in {}^\rho H^r(W, W' \cup F; G)$, entonces existe una cocadena $u \in C^r(W, W' \cup F; G)$ tal que $[a] = [\rho u]$, luego:

$$\psi_\rho\gamma_\rho[\rho u] = \psi_\rho[\delta u] = [\epsilon_{\bar\rho}\eta Q_{\bar\rho}\delta u]$$

y por otra parte

$$\gamma_{\bar\rho}\psi_{\bar\rho}[\rho u] = \gamma_{\bar\rho}\left([\eta\epsilon_\rho Q_\rho \rho u]\right) = \gamma_{\bar\rho}\left[\bar\rho\eta\epsilon_{\bar\rho}Q_{\bar\rho}u\right] = \left[\eta\epsilon_{\bar\rho}Q_{\bar\rho}\delta u\right]$$

donde la segunda igualdad se cumple por el Lema 1.2.2 (i).

(ii) $\psi_\sigma\beta_\tau, \eta_*\beta_\sigma : H^r(W, W' \cup F; G) \to {}^\sigma H^r(W, W' \cup F; G_p)$ y

$$\psi_\sigma\beta_\tau[u] = \psi_\sigma[\tau u] = \eta_*[\sigma u]$$

y por otra parte

$$\eta_*\beta_\sigma[u] = \eta_*[\sigma u].$$

(iii) $\alpha_\sigma\psi_\tau, \eta_*\alpha_\tau : {}^\sigma H^r(W, W' \cup F; G) \to H^r(W, W' \cup F; G_p)$ y

$$\alpha_\sigma\psi_\tau[\sigma u] = \alpha_\sigma(\eta[\sigma u]) = \eta_*[\sigma u]$$

mientras que

$$\eta_*\alpha_\tau[\sigma u] = \eta_*[\sigma u].$$

□

Definición 1.2.5. Definimos los homomorfismos μ y ν como:

$$\mu = I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^* : H^r(W_t, W_t' \cup F_t; G) \to H^{r+2}(W_t, W_t' \cup F_t; G)$$
$$\nu = I^{*-1}\psi_\sigma\gamma_\sigma I^* : H^r(W_t, W_t' \cup F_t; G) \to H^{r+1}(W_t, W_t' \cup F_t; G_p)$$

Obsérvese que por el Lema 1.2.4 (i), $\nu = I^{*-1}\gamma_\tau\psi_\tau I^*$.

Teorema 1.2.6. *(i)* $\begin{cases} \nu^2 = 0, & si\ p \geq 3, \\ \nu^2 = \eta_*\mu, & si\ p = 2. \end{cases}$ *(ii)* $\mu\nu = \nu\mu$.

Demostración.

(i) $\nu^2 = I^{*-1}\psi_\sigma\gamma_\sigma\psi_\sigma\gamma_\sigma I^* = I^{*-1}\psi_\sigma\psi_\tau\gamma_\tau\gamma_\sigma I^* = \begin{cases} 0, & \text{si } p \geq 3, \\ \eta_*\mu, & \text{si } p = 2, \end{cases}$ donde la segunda igualdad se cumple por el Lema 1.2.4 (i) y la última por el Lema 1.2.3 (ii).

(ii) $\mu\nu = I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^* I^{*-1}\psi_\sigma\gamma_\sigma I^* = I^{*-1}\gamma_\tau\psi_\tau\gamma_\tau\gamma_\sigma I^* = I^{*-1}\gamma_\tau\psi_\tau I^* I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^* = \nu\mu$ la segunda igualdad está dada por 1.2.4 (i).

□

Ahora, notemos que si $a \in H^r(W, W'; G)$ entonces $a = [u]$ para algún $u \in C^r(W, W'; G)$ y se tiene que $\rho u \equiv \rho\left(u|_{W-F}\right) \mod p$, pues para todo elemento x de F

$$\rho u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = \tau \\ pu & \text{si } \rho = \sigma \end{cases} \equiv 0 = \rho u|_{W-F}(x) \mod p,$$

y además si $[u] = [u']$ entonces $u' = u + \delta w$ para algún $w \in H^{r-1}(W, W'; G)$ así que $\rho u' = \rho u + \rho\delta w = \rho u + \delta\rho w$ y por tanto $[\rho u'] = [\rho u]$. Esto garantiza que la función κ_ρ definida a continuación es un homomorfismo

Definición 1.2.7. Sea $\kappa_\rho : H^r(W, W'; G) \to {}^\rho H^r(W, W' \cup F; G_p)$ el homorfismo definido por $\kappa_\rho[u] = [\eta\rho u]$.

Observación 1.2.8. (i) $\alpha_{\bar{\rho}}\kappa_\rho = \rho_0^*$, (ii) $\psi_\sigma\kappa_\tau = \kappa_\sigma$,
donde $\rho_0^* : H^r(W, W'; G) \to H^r(W, W' \cup F; G_p)$ es el homomorfismo inducido por ρ.

Pues si $u' \in C^r(W, W' \cup F; G)$ es tal que $u \equiv u' \mod p$, entonces

(i) $\alpha_{\bar{\rho}}\kappa_\rho, \rho_0^* : H^r(W, W'; G) \to H^r(W, W' \cup F; G_p)$ y

$$\alpha_{\bar{\rho}}\kappa_\rho[u] = \alpha_{\bar{\rho}}[\rho u'] = [\rho u'] \in H^r(W, W' \cup F; G_p),$$

mientras que

$$\rho_0^*[u] = \eta_*[\rho u] = [\rho\eta u] = [\rho u'].$$

(ii) $\psi_\sigma\kappa_\tau, \kappa_\sigma : H^r(W, W'; G) \to {}^\sigma H^r(W, W' \cup F; G_p)$ y

$$\psi_\sigma\kappa_\tau[u] = \psi_\sigma[\tau u'] = [\sigma u'] = \kappa_\sigma[u],$$

la segunda igualdad se cumple por el Lema 1.2.3 (i).

Definición 1.2.9. Definimos el morfismo transfer $\phi : C^r(W, W'; G) \to C^r(W_t, W'_t; G)$ por

$$\phi u(\pi_* x) = \sigma u(x)$$

para todo $u \in C^r(W, W'; G)$ y x un simplejo de W.

Lema 1.2.10. *(i) $\delta\phi = \phi\delta$.* *(ii) $\pi^\#\phi = \sigma$.*

Demostración. Sea ∂ el operador de frontera. Entonces

(i)
$$\begin{aligned} \delta\phi u(\pi x) &= \phi u(\pi_\# \partial x) = \sigma u(\partial x) \\ &= \delta\sigma u(x) = \sigma\delta u(x) \\ &= \phi\delta u(\pi x). \end{aligned}$$

(ii)
$$\pi^\#\phi u(x) = \phi u(\pi_\# x) = \sigma u(x).$$

□

Lema 1.2.11. *ϕ induce un homomorfismo*

$$\phi^* : H^r(W,W';G) \to H^r(W_t,W_t';G),$$

y como $\eta\phi C^r(W,W';G) \subset H^r(W_t,W_t' \cup F_t;G_p)$, se induce un homomorfismo:

$$\phi_0^* : H^r(W,W';G) \to H^r(W_t,W_t' \cup F_t;G_p).$$

Demostración. ϕ induce el homomorfismo ϕ^* por la propiedad (i) del Lema 1.2.10 y podemos verificar que $\eta\phi C^r(W,W';G) \subset H^r(W_t,W_t' \cup F_t;G_p)$ como sigue:

Si $u \in C^r(W,W';G)$ entonces $\phi u \in C^r(W_t,W_t';G)$ y $\eta\phi u \in C^r(W_t,W_t';G_p)$. Además, si $\{x\} \in F_t$ entonces $\eta\phi u(\{x\}) = \eta\sigma u(x) = \eta p u(x) \equiv 0$. □

Veamos ahora que ϕ^* satisface lo siguiente

Lema 1.2.12. *(i) $I^*\phi_0^* = \kappa_\sigma$* *(ii) $j^*\phi_0^* = \eta_*\phi^*$*
donde $j^* : H^r(W_t,W_t' \cup F_t;G_p) \to H^r(W_t,W_t';G_p)$ es el homomorfismo inducido por la inclusión.

Demostración. Sea $u \in C^r(W,W';G)$ un cociclo, entonces:

(i) Haciendo uso del Lema 1.2.10 se tiene: $I^*\phi_0^*[u] = [\eta\pi^\#\phi u] = [\eta\sigma u] = \kappa_\sigma[u]$.

(ii) El siguiente diagrama conmuta, pues $j^*\phi_0^*[u] = j^*[\eta\phi u] = [\eta\phi u]$ y $\eta_*\phi^*[u] = [\eta\phi u]$.

$$\begin{array}{ccc} H^r(W,W';G) & \xrightarrow{\phi_0^*} & H^r(W_t,W_t' \cup F_t;G_p) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & \downarrow{\scriptstyle j^*} \\ H^r(W_t,W_t';G) & \xrightarrow{\eta_*} & H^r(W_t,W_t';G_p) \end{array}$$

□

Lema 1.2.13. *La composición $C^r(W;G) \xrightarrow{\delta} C^{r+1}(W;G) \xrightarrow{\tau} C^{r+1}(W;G)$ se anula en cocadenas $v \in C^r(W;G)$ que se anulan en simplejos fuera de F.*

Demostración. Sea c un $(r+1)$ simplejo de W y sea

$$\partial c = \sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j y_j$$

donde α_i y β_j son coeficientes enteros, los x_i son r simplejos de $W - F$ y los y_j de F. Entonces

$$\begin{aligned} \tau\delta v(c) &= v(\tau\partial c) = v(\partial c) - v(\partial t c) \\ &= \sum_i \alpha_i(v(x_i) - v(tx_i)) + \sum_j \beta_j(v(y_j) - v(ty_j)) = 0 \end{aligned}$$

ya que $y_j = ty_j$ y $v(x_i) = v(tx_i) = 0$. □

Recordemos que la sucesión exacta de la tripleta $(W, W' \cup F, W')$ define un morfismo de conexión $\delta^* : H^r(W' \cup F, W'; G) \to H^{r+1}(W, W' \cup F; G)$ tal que $\delta^*[v] = [\delta \bar{v}]$ para toda clase $[v] \in H^r(W' \cup F, W'; G)$, donde $\bar{v}$ es un cociclo en $C^r(W, W'; G)$. Más aún, la elección de la cocadena $\bar{v}$ se da por un proceso zig-zag y la clase $[\delta \bar{v}]$ es independiente del representante $\bar{v}$ elegido en el proceso. Supongamos entonces que tal cocadena $\bar{v}$ se anula en simplejos fuera de F. Si $b \in H^r(W' \cup F, W'; G)$ está representado por el cociclo v, entonces la cocadena $\bar{v}$ de $C^r(W, W'; G)$ cumple que $\tau \delta \bar{v} = 0$, por el Lema 1.2.13, y entonces el cociclo $\delta \bar{v} \in C^{r+1}(W, W' \cup F; G)$ es un cociclo en ${}^{\tau^{-1}}C^{r+1}(W, W' \cup F; G) = {}^{\sigma}C^{r+1}(W, W' \cup F; G)$ y este define una clase de cohomología $[\delta \bar{v}] \in {}^{\sigma}H^{r+1}(W, W' \cup F; G)$. Más aún por el proceso zig-zag la clase $[\delta \bar{v}]$ es independiente de la elección del representante v tomado para b. Esto nos garantiza la existencia de los siguientes homomorfismos:

Definición 1.2.14.

- Sea $\vartheta : H^r(W' \cup F, W'; G) \to {}^{\sigma}H^{r+1}(W, W' \cup F; G)$ el homomorfismo definido por $\vartheta[v] = [\delta \bar{v}]$.
- Sea $\vartheta_\rho : H^r(W' \cup F, W'; G) \to {}^{\bar{\rho}}H^{r+1}(W, W' \cup F; G_p)$ el homomorfismo definido por

$$\vartheta_\tau = \eta_* \vartheta \qquad \text{y} \qquad \vartheta_\sigma = \psi_\tau \vartheta.$$

Como una consecuencia inmediata de la definición y del Lema 1.2.3 tenemos que

Lema 1.2.15. *(i)* $\psi_\tau \vartheta_\tau = \vartheta_\sigma$. *(ii)* $\psi_\sigma \vartheta_\sigma = \begin{cases} 0, & si\ p \geq 3, \\ \vartheta_\tau, & si\ p = 2. \end{cases}$

Consideremos el siguiente diagrama con columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
H^{r-1}(W' \cup F, W'; G) \arrow[r, "\vartheta_\rho"] \arrow[d, "\delta^*"] & {}^{\bar{\rho}}H^r(W, W' \cup F; G_p) \arrow[d, "\alpha_\rho"] \\
H^r(W, W' \cup F; G) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "j^*"] & H^r(W, W' \cup F; G_p) \arrow[d, "\beta_\rho"] \\
H^r(W, W'; G) \arrow[r, "\kappa_\rho"] \arrow[d, "i^*"] & {}^{\rho}H^r(W, W' \cup F; G_p) \arrow[d, "\gamma_\rho"] \\
H^r(W' \cup F, W'; G) \arrow[r, "\vartheta_\rho"] \arrow[d] & {}^{\bar{\rho}}H^{r+1}(W, W' \cup F; G_p) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Entonces se cumple lo siguiente

Lema 1.2.16. *(i)* $\alpha_\rho\vartheta_\rho = \eta_*\delta^*$. *(ii)* $\beta_\rho\eta_* = \kappa_\rho j^*$. *(iii)* $\gamma_\rho\kappa_\rho = -\vartheta_\rho i^*$.

Demostración.

(i) $\alpha_\rho\vartheta_\rho, \eta_*\delta^* : H^{r-1}(W'\cup F, W'; G) \to H^r(W, W'\cup F; G_p)$ y si $[u] \in H^{r-1}(W'\cup F, W'; G)$ entonces:

$$\alpha_\rho\vartheta_\rho[u] = \begin{cases} \alpha_\tau\eta_*\vartheta[u] = \eta_*[\delta u] = [\eta\delta u], & \text{si } \rho = \tau, \\ \alpha_\sigma\vartheta_\sigma[u] = \alpha_\sigma\psi_\tau\vartheta[u] = \alpha_\sigma\psi_\tau[\delta u] = [\epsilon_\sigma Q_\sigma\eta\delta u] = [\eta\delta u], & \text{si } \rho = \sigma. \end{cases}$$

y en cualquier caso $\alpha_\rho\vartheta_\rho[u] = \eta_*\delta^*[u]$.

(ii) $\beta_\rho\eta_*, \kappa_\rho j^* : H^r(W, W'\cup F; G) \to {}^\rho H^r(W, W'\cup F; G_p)$ y $\beta_\rho\eta_*[u] = \beta_\rho[\eta u] = [\eta\rho u]$ y por otra parte $\kappa_\rho j^*[u] = \kappa_\rho[u] = [\eta\rho u]$.

(iii) $\gamma_\rho\kappa_\rho, -\vartheta_\rho i^* : H^r(W, W'; G) \to {}^{\bar\rho}H^{r+1}(W, W'\cup F; G_p)$. Sea $[u] \in H^r(W, W'; G)$, si $u = u_1 + u_2$ donde $u_1 \in C^r(W, W'\cup F; G)$ y $u_2 \in C^r(W'\cup F, W'; G)$ entonces $\eta\rho u = \eta\rho u_1$, así que $\gamma_\rho\kappa_\rho[u] = \gamma_\rho[\eta\rho u_1] = [\eta\delta u_1]$ y $\vartheta_\rho i^*[u] = \vartheta_\rho[u] = [\eta\delta u_2]$, luego

$$\gamma_\rho\kappa_\rho + \vartheta_\rho i^*[u] = [\eta\delta u_1] + [\eta\delta u_2] = [\eta\delta(u_1 + u_2)] = [\eta\delta u] = 0.$$

Por tanto $\gamma_\rho\kappa_\rho = -\vartheta_\rho i^*$.

□

Observación 1.2.17. $\vartheta_\tau\pi^* = I^*\eta_*\delta^*$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^r(W'_t\cup F_t, W'_t; G) & \xrightarrow{\eta_*\delta^*} & H^{r+1}(W_t, W'_t\cup F_t; G_p) \\ \cong\Big\downarrow\pi^* & & \cong\Big\downarrow I^* \\ H^r(W'\cup F, W'; G) & \xrightarrow{\vartheta_\tau} & {}^\sigma H^{r+1}(W, W'\cup F; G_p) \end{array}$$

El diagrama es conmutativo, pues si $[u] \in H^r(W'_t\cup F_t, W'_t; G)$ entonces $I^*\eta_*\delta^*[u] = [\pi^\#\eta\delta u]$ $= [\eta\delta u\pi_\#] = \vartheta_\tau[u\pi_\#] = \vartheta_\tau\pi^*[u]$. Además I^* y π^* son isomorfismos por el Teorema 1.1.11 □

Teorema 1.2.18. *(i)* $\mu\phi_0^* = -\nu\delta^*\pi^{*-1}i^*$. *(ii)* $\nu\phi_0^* = \begin{cases} 0, & \textit{si } p \geq 3, \\ \eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^*, & \textit{si } p = 2. \end{cases}$

Demostración.

(i)
$$\begin{aligned}\mu\phi_0^* &= I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^*\phi_0^* = I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma\kappa_\sigma && \text{por el Lema 1.2.12}\\ &= -I^{*-1}\gamma_\tau\vartheta_\sigma i^* = -I^{*-1}\gamma_\tau\psi_\tau\vartheta_\tau i^* && \text{por los Lemas 1.2.15 y 1.2.16}\\ &= -I^{*-1}\gamma_\tau\psi_\tau I^* I^{*-1}\vartheta_\tau i^* = -\nu I^{*-1}\vartheta_\tau i^* && \text{definición de } \nu\\ &= -\nu I^{*-1}\vartheta_\tau\pi^*\pi^{*-1}i^* = -\nu\eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^* && \text{por la Observación 1.2.17}\\ &= -\nu\delta^*\pi^{*-1}i^*.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\nu\phi_0^* &= I^{*-1}\psi_\sigma\gamma_\sigma I^*\phi_0^* = I^{*-1}\psi_\sigma\gamma_\sigma\kappa_\sigma = I^{*-1}\psi_\sigma(-\vartheta_\sigma i^*) = -I^{*-1}\psi_\sigma\psi_\tau\vartheta_\tau i^*\\ &= \begin{cases}0, & \text{si } p \geq 3,\\ -I^{*-1}\eta_*\vartheta_\tau i^* = -I^{*-1}\eta_* I^*\eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^* = \eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^*, & \text{si } p = 2.\end{cases}\end{aligned}$$

□

Definición 1.2.19. Sea $\overline{\Gamma}_s^\rho : H^q(W' \cup F, W'; G) \to {}_{\bar\rho}H^{q+s}(W, W' \cup F; G_p)$ $(s > 0)$ el homomorfismo definido por:

$$\overline{\Gamma}^\rho_{2\alpha+1} = (\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^\alpha\vartheta_\rho, \qquad \overline{\Gamma}^\rho_{2\alpha+2} = (\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^\alpha\gamma_\rho\vartheta_{\bar\rho}.$$

Estos homomorfismos satisfacen las siguientes propiedades:

Lema 1.2.20.

(i) $\gamma_{\bar\rho}\overline{\Gamma}^\rho_s = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{s+1}$,

(ii) Si $p \geq 3$ *entonces* $\psi_\sigma\overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+1} = \psi_\tau\overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2} = 0$, $\psi_\sigma\overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+2} = \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2}$, $\psi_\tau\overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+1} = \overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+1}$,

(iii) Si $p = 2$, $\psi_\rho\overline{\Gamma}^\rho_s = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_s$.

Demostración.

(i)
$$\gamma_{\bar\rho}\overline{\Gamma}^\rho_s = \begin{cases}\gamma_{\bar\rho}(\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^\alpha\vartheta_\rho = (\gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho)^\alpha\gamma_{\bar\rho}\vartheta_\rho = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{s+1}, & \text{si } s = 2\alpha+1,\\ \gamma_{\bar\rho}(\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^\alpha\gamma_\rho\vartheta_{\bar\rho} = (\gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho)^{\alpha+1}\vartheta_{\bar\rho} = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{s+1}, & \text{si } s = 2\alpha+2.\end{cases}$$

(ii) Verifiquemos que tanto $\psi_\sigma\overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+1}$ como $\psi_\tau\overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2}$ se anulan

$$\begin{aligned}\psi_\sigma\overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+1} &= \psi_\sigma(\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha\vartheta_\sigma\\ &= (\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha\psi_\sigma\vartheta_\sigma && \text{por el Lema 1.2.4}\\ &= 0, && \text{por el Lema 1.2.15.}\end{aligned}$$

y para $\psi_\tau \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2}$,

$$\begin{aligned}
\psi_\tau \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2} &= \psi_\tau(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \gamma_\tau \vartheta_\sigma \\
&= (\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \psi_\tau \gamma_\tau \vartheta_\sigma && \text{por el Lema 1.2.4} \\
&= (\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \gamma_\sigma \psi_\sigma \psi_\tau \vartheta_\tau && \text{por los Lemas 1.2.4 y 1.2.15} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\psi_\sigma \overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+2} = \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2}$:

$$\begin{aligned}
\psi_\sigma \overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+2} &= \psi_\sigma(\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \gamma_\sigma \vartheta_\tau \\
&= (\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \psi_\sigma \gamma_\sigma \vartheta_\tau && \text{por el Lema 1.2.4} \\
&= (\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \gamma_\tau \psi_\tau \vartheta_\tau && \text{por el Lema 1.2.4} \\
&= (\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \gamma_\tau \vartheta_\sigma && \text{por el Lema 1.2.15} \\
&= \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+2}.
\end{aligned}$$

Finalmente verifiquemos que $\psi_\tau \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+1} = \overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+1}$:

$$\begin{aligned}
\psi_\tau \overline{\Gamma}^\tau_{2\alpha+1} &= \psi_\tau(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \vartheta_\tau \\
&= (\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \psi_\tau \vartheta_\tau && \text{por el Lema 1.2.4} \\
&= (\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \vartheta_\sigma && \text{por el Lema 1.2.15} \\
&= \overline{\Gamma}^\sigma_{2\alpha+1}.
\end{aligned}$$

(iii) Desarrollemos primero el caso impar

$$\psi_\rho \overline{\Gamma}^\rho_{2\alpha+1} = \psi_\rho(\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^\alpha \vartheta_\rho = (\gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho)^\alpha \psi_\rho \vartheta_\rho = \begin{cases} (\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \vartheta_\tau = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{2\alpha+1}, & \text{si } \rho = \sigma, \\ (\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \vartheta_\sigma = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{2\alpha+1}, & \text{si } \rho = \tau. \end{cases}$$

donde la segundad igualdad es consecuencia del Lema 1.2.4 y la última del Lema 1.2.15. Similarmente para el caso par se tiene

$$\psi_\rho \overline{\Gamma}^\rho_{2\alpha+2} = \psi_\rho(\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^\alpha \gamma_\rho \vartheta_{\bar\rho} = (\gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho)^\alpha \gamma_{\bar\rho} \psi_{\bar\rho} \vartheta_{\bar\rho} = \begin{cases} (\gamma_\sigma\gamma_\tau)^\alpha \gamma_\sigma \vartheta_\tau = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{2\alpha+2}, & \text{si } \rho = \tau, \\ (\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \gamma_\tau \vartheta_\sigma = \overline{\Gamma}^{\bar\rho}_{2\alpha+2}, & \text{si } \rho = \sigma. \end{cases}$$

□

Cuando $p = 2$ se tiene una variación de la sucesión exacta de Richardson-Smith, como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2.21. *La siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \to H^{r-1}(W_t, W_t' \cup F_t; G_2) \xrightarrow{j^*\nu} H^r(W_t, W_t'; G_2) \xrightarrow{\pi^*} H^r(W, W'; G_2) \xrightarrow{\phi_0^*} H^r(W_t, W_t' \cup F_t; G_2) \to \cdots$$

y además $\pi^* j^* \phi_0^* = \sigma^*$.

Demostración. Nótese que $\sigma = \tau$ con coeficientes en G_2. Además, por el Teorema 1.1.4 se tiene que ${}^{\sigma^{-1}}H^r(W, W' \cup F; G_2) = {}^{\sigma}H(W, W' \cup F; G_2)$. Entonces, en vista de la Definición 1.2.5, del Corolario 1.1.12 y los Lemas 1.2.10 y 1.2.12, el diagrama en la Figura 1.1 (véase la siguiente página) resulta ser conmutativo. También el renglón inferior es exacto (Teorema 1.1.2) y los morfismos I son isomorfismos (Teorema 1.1.11), por tanto es suficiente mostrar que el morfismo $j^* : {}^{\tau}H^r(W, W' \cup F; G) \to {}^{\tau}H^r(W, W'; G)$ es isomorfismo.

Consideremos el diagrama usual de complejos de cadenas con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 & C_r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_2) \arrow[l] & C_r(W, W'; \mathbb{Z}_2) \arrow[l, "j_\#"'] & C_r(W' \cup F, W'; \mathbb{Z}_2) \arrow[l, "i_\#"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & C_r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_2) \arrow[l] \arrow[u, "\tau_\#"] & C_r(W, W'; \mathbb{Z}_2) \arrow[l, "j_\#"'] \arrow[u, "\tau_\#"] & C_r(W' \cup F, W'; \mathbb{Z}_2) \arrow[l, "i_\#"'] \arrow[u, "\tau_\#"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

y notemos que el homomorfismo $\tau_\#$ de la derecha es trivial. Luego aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\_; G_2)$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo de renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^r(W, W' \cup F; G_2) \arrow[r, "j^\#"] \arrow[d, "\tau"] & C^r(W, W'; G_2) \arrow[r, "i^\#"] \arrow[d, "\tau"] & C^r(W' \cup F, W'; G_2) \arrow[r] \arrow[d, "\tau=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^r(W, W' \cup F; G_2) \arrow[r, "j^\#"] \arrow[d, "\tau"] & C^r(W, W'; G_2) \arrow[r, "i^\#"] \arrow[d, "\tau"] & C^r(W' \cup F, W'; G_2) \arrow[r] \arrow[d, "\tau=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^r(W, W' \cup F; G_2) \arrow[r, "j^\#"] & C^r(W, W'; G_2) \arrow[r, "i^\#"] & C^r(W' \cup F, W'; G_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

del cual es evidente que $j^\# : {}^{\tau}C^r(W, W' \cup F; G_2) \to {}^{\tau}C^r(W, W'; G_2)$ es inyectivo. Nótese también que en el diagrama anterior la columna de la izquierda es exacta pues $\sigma = \tau$ (Teorema 1.1.4). Sea $a \in {}^{\tau}C^r(W, W'; G_2)$, es decir, existe $b \in C^r(W, W'; G)$ tal que $\tau(b) = a$, entonces $i^\#(a) = i^\#\tau(b) = \tau i^\#(b) = 0$ porque el homomorfismo τ de la derecha es trivial entonces, por la exactitud del renglón, existe $c \in C^r(W, W' \cup F; G_2)$ tal que $j^\#(c) = a$. Luego, $j^\#\tau(c) = \tau j^\#(c) = \tau(a) = \tau(\tau(b)) = 0$ implica que $\tau(c) = 0$, pues $j^\#$ es inyectivo y, por la sucesión exacta de la columna izquierda, existe $d \in C^r(W, W' \cup F; G_2)$ tal que $\tau(d) = c$, esto es, $c \in {}^{\tau}C^r(W, W' \cup F; G_2)$ y $j^\#(c) = a$. Por tanto j^* es isomorfismo.

Finalmente la igualdad $\pi^* j^* \phi_0^* = \sigma^*$ es consecuencia inmediata del Lema 1.2.10. □

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\phi_0"] & H^{r-1}(W_t,W_t'\cup F_t;G_2) \arrow[r, "j^*\nu"] \arrow[dr, "\nu"] \arrow[dd, "\cong"', "I"] & & H^r(W_t,W_t';G_2) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dddd, "\cong"', "I"] & H^r(W,W';G_2) \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[dddd, "\cong"', "Id"] & H^r(W_t,W_t'\cup F_t;G_2) \arrow[r, "j^*\nu"] \arrow[dd, "\cong"', "I"] & \cdots \\
& & H^r(W_t,W_t'\cup F_t;G_2) \arrow[ur, "j^*"] \arrow[dd, "\cong"', "I"] & & & & \\
& \tau^{-1}H^{r-1}(W,W'\cup F;G_2) \arrow[dr, "\gamma_\tau"] \arrow[dd, "j^*"] & & & & \tau^{-1}H^r(W,W'\cup F;G_2) \arrow[dd, "j^*"] & \\
& & \tau^{-1}H^r(W,W'\cup F;G_2) \arrow[dr, "j^*"] & & & & \\
\cdots \arrow[r, "\beta_\tau"] & \tau H^{r-1}(W,W\cup F;G_2) \arrow[r, "\gamma_\tau"] & & H^r(W,W';G_2) \arrow[r, "\alpha_\tau"] & H^r(W,W';G_2) \arrow[r, "\beta_\tau"] & \tau H^r(W,W';G_2) \arrow[r, "\gamma_\tau"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.1: Diagrama conmutativo para la prueba del Teorema 1.2.21.

1.3. Relación con las operaciones cohomológicas

En esta sección se explora la interacción de los morfismos ϕ_0^*, μ y ν con las potencias reducidas de Steenrod (o cuadrados de Steenrod) y el homomorfismo de Bockstein que se denotarán respectivamente como:

$$\begin{aligned} P^s : H^r(X,A;\mathbb{Z}_p) &\to H^{r+2s(p-1)}(X,A;\mathbb{Z}_p) & p \geq 3 \\ Sq^s : H^r(X,A;\mathbb{Z}_2) &\to H^{r+s}(X,A;\mathbb{Z}_2) & p \geq 2 \\ \Delta_p : H^r(X,A;\mathbb{Z}_p) &\to H^{r+1}(X,A;\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

Las hipótesis impuestas a la transformación simplicial t garantizan que es posible definir un orden localmente simple en W invariante bajo t de tal manera que el orden inducido es localmente simple en W_t. De esta forma los homomorfismos t^* y π son homomorfismos preservadores de orden. Una consecuencia inmediata de este hecho es el siguiente lema.

Lema 1.3.1. *Sean $u, v \in C^*(W, W'; G)$, entonces*

$$t^{\#^i}(u \smile v) = t^{\#^i} u \smile t^{\#^i} v, \qquad \pi^{\#}(\phi u \smile \phi v) = \pi^{\#}\phi u \smile \pi^{\#}\phi v.$$

Lema 1.3.2. *Sean $u, v \in C^*(W, W'; G)$, entonces*

(i) $\sigma(u \smile \sigma v) = \sigma u \smile \sigma v$.

(ii) $\tau(u \smile \sigma v) = \tau u \smile \sigma v$.

(iii) $\phi(u \smile \sigma v) = \phi u \smile \phi v$.

Demostración.

(i)
$$\begin{aligned} \sigma(u \smile \sigma v) &= \sum_{i=0}^{p-1} t^{\#^i}\left(u \smile \sum_{j=0}^{p-1} t^{\#^j} v\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1}\left(t^{\#^i} u \smile \sum_{j=0}^{p-1} t^{\#^j} v\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} t^{\#^i} u \smile \sum_{j=0}^{p-1} t^{\#^j} v \\ &= \sigma u \smile \sigma v. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\tau(u \smile \sigma v) &= (1 - t^{\#})(u \smile \sigma v)\\ &= (u \smile \sigma v) - t^{\#}(u \smile \sigma v)\\ &= u \smile \sigma v - t^{\#}u \smile t^{\#}\sigma v\\ &= u \smile \sigma v - t^{\#}u \smile \sigma v\\ &= (u - t^{\#}u) \smile \sigma v\\ &= \tau u \smile \sigma v.\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\pi^{\#}\phi(u \smile \sigma v) &= \sigma(u \smile \sigma v) && \text{por el Lema 1.2.10}\\ &= \sigma u \smile \sigma v\\ &= \pi^{\#}\phi u \smile \pi^{\#}\phi v && \text{por el Lema 1.2.10}\\ &= \pi^{\#}(\phi u \smile \phi v)\end{aligned}$$

y por tanto, por el Lema 1.1.10, $\phi(u \smile \sigma v) = \phi u \smile \phi v$.

□

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

Teorema 1.3.3. *Sean a, $b \in H^*(W,W';G)$ entonces $\phi_0^*(a \smile \sigma^* b) = \phi_0^*(a) \smile \phi_0^*(b)$*

Teorema 1.3.4. *Sean a, $b \in H^*(W,W';G)$ entonces*

$$\nu(\phi_0^* a \smile \phi_0^* b) = 0, \qquad \mu(\phi_0^* a \smile \phi_0^* b) = 0$$

Demostración. Es suficiente verificar que $\gamma_\sigma I^*(\phi_0^* \smile \phi_0^* b) = 0$. Supongamos que u es un cociclo que representa a a y v un cociclo que representa a b, entonces, después de reducir coeficientes módulo p,

$$\begin{aligned}\phi(u \smile \sigma v) = \phi u \smile \phi v \quad &\text{es un cociclo que representa a } \phi_0^*(a) \smile \phi_0^*(b),\\ \sigma(u \smile \sigma v) = \pi\phi(u \smile \sigma v) \quad &\text{es un cociclo que representa a } I\big(\phi_0^*(a) \smile \phi_0^*(b)\big),\\ \delta(u \smile \sigma v) = \gamma_\sigma\sigma(u \smile \sigma v) \quad &\text{es un cociclo que representa a } \gamma_\sigma I\big(\phi_0^*(a) \smile \phi_0^*(b)\big),\end{aligned}$$

pero $\delta(u \smile \sigma v) = 0$ pues tanto u como v son cociclos. Por tanto $\gamma_\sigma I^*(\phi_0^* \smile \phi_0^* b) = 0$. □

Corolario 1.3.5. Sean $a_i \in H^*(W,W';G)$ donde $i = 1, 2, \ldots, k$ y $k \geq 2$, entonces

$$\nu(\phi_0^* a_1 \smile \phi_0^* a_2 \smile \cdots \smile \phi_0^* a_k) = 0 \text{ y}$$
$$\mu(\phi_0^* a_1 \smile \phi_0^* a_2 \smile \cdots \smile \phi_0^* a_k) = 0.$$

La demostración del siguiente teorema hace uso de la naturalidad de los morfismos ν y μ, su demostración se encuentra en el artículo de Nakaoka [7]:

Teorema 1.3.6. *Sean a, $b \in H^*(W_t, W'_t \cup F_t; G)$ y $\alpha, \beta \geq 0$. Entonces*

(i) $\mu^\alpha(a) \smile \mu^\beta(b) = \mu^{\alpha+\beta}(a \smile b)$,

(ii) $\eta_* \mu^\alpha(a) \smile \nu(b) = (-1)^{dim\, a} \mu^\alpha \nu(a \smile b)$,

(iii) $\nu(a) \smile \nu(b) = \begin{cases} 0, & si\ p \geq 3, \\ \eta_* \mu(a \smile b), & si\ p = 2. \end{cases}$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \arrow[ddl, "\phi_0^*"'] \arrow[d, "i^*"] \arrow[ddr, "\Delta_p"] & \\
 & H^r(W'\cup F, W';\mathbb{Z}_p) & \\
H^r(W_t, W'_t \cup F_t;\mathbb{Z}_p) \arrow[ddr, "\Delta_p"'] & & H^{r+1}(W,W';\mathbb{Z}_p) \arrow[ddl, "\phi_0^*"] \\
 & H^r(W'_t \cup F_t, W'_t;\mathbb{Z}_p) \arrow[uu, "\pi^*"] \arrow[d, "\delta^*"] & \\
 & H^{r+1}(W_t, W'_t \cup F_t;\mathbb{Z}_p) &
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos Δ_p son los Bockstein de conexión asociados a la sucesión exacta corta (no escisiva) de coeficientes $0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0$. Nótese que π^* es isomorfismo (comparar con el Lema 1.1.10). Entonces se tiene

Teorema 1.3.7.
$$\phi_0^* \Delta_p - \Delta_p \phi_0^* = \delta^* \pi^{*-1} i^*.$$

Demostración. Sean $a \in H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)$ y $u \in C^r(W,W';\mathbb{Z})$ con $\delta u \equiv 0 \mod p$ tal que $[u] = a$. Entonces existe $v \in C^{r+1}(W,W';\mathbb{Z})$ tal que $\delta u = pv$. Sea $u = u_1 + u_2$ donde $u_1 \in C^r(W, W' \cup F;\mathbb{Z})$ y $u_2 \in C^r(W' \cup F, W';\mathbb{Z})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi u &= \phi u_1 + \phi u_2 \\
&= \phi u_1 + \pi^{\#^{-1}} \sigma u_2 \\
&= \phi u_1 + p\pi^{\#^{-1}} u_2 \\
&= \phi u_1 + pu'_2 \text{ donde } u'_2 = \pi^{\#^{-1}} u_2 \in C^r(W'_t \cup F_t, W'_t;\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Entonces $\delta\phi u = \delta\phi u_1 + p\delta u'_2$ y como $\delta\phi u = \phi\delta u = p\phi v$ se tiene que

$$\phi v = \frac{1}{p}\delta\phi u_1 + \delta u'_2.$$

Además $\phi_0^*\Delta_p(a) = [\phi v]$ y $\delta^*\pi^{*-1}i^*(a) = [\delta u_2']$ y $\phi u \equiv \phi u_1 \mod p$. Por tanto

$$\left[\frac{1}{p}\delta\phi u_1\right] = \Delta_p\phi_0^*(a).$$

□

Teorema 1.3.8. *(i)* $\Delta_p v + v\Delta_p = \mu$, *(ii)* $\mu\Delta_p = \Delta_p\mu$.

Demostración. Sea $a \in H^r(W_t, W_t' \cup F_t; \mathbb{Z}_p)$ y $u \in C^r(W_t, W_t' \cup F_t; \mathbb{Z})$ con $\delta u \equiv 0 \mod p$ y $a = [u]$. Entonces existe un cociclo $v \in C^{r+1}(W_t, W_t' \cup F_t; \mathbb{Z})$ tal que $\delta u = pv$. Como $\pi u, \pi v \in {}^{\tau^{-1}}C^*(W, W' \cup F; \mathbb{Z})$ tomemos $u_0 \in C^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z})$ y $v_0 \in C^{r+1}(W, W' \cup F; \mathbb{Z})$ tales que $\pi u = \sigma u_0$ y $\pi v = \sigma v_0$, entonces $\phi u_0 = \pi^{-1}\sigma u_0 = u$ y $\phi v_0 = \pi^{-1}\sigma v_0 = v$. Luego

$$\begin{aligned}\sigma(\delta u_0 - pv_0) &= \delta\sigma u_0 - p\sigma v_0 = \delta\pi\phi u_0 - p\pi\phi v_0\\ &= \delta\pi u - p\pi v = \pi(\delta u - pv) = 0.\end{aligned}$$

Además $\sigma\delta v_0 = \delta\sigma v_0 = \delta\pi\phi v_0 = \delta\pi v = \pi\delta v = 0$. Luego por el Lema 1.1.3 existen cociclos $u_1 \in C^{r+1}(W, W' \cup F; \mathbb{Z})$ y $v_1 \in C^{r+2}(W, W' \cup F; \mathbb{Z})$ tales que

$$\delta u_0 - pv_0 = \tau u_1, \tag{A}$$

$$\delta v_0 = \tau v_1. \tag{B}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\tau(\delta u_1 + pv_1) &= \delta\tau u_1 + p\tau v_1\\ &= \delta(\delta u_0 - pv_0) + p\tau v_1\\ &= \delta\delta u_0 - p(\delta v_0 - \tau v_1) = 0.\end{aligned}$$

Así que existe una cocadena $y_1 \in C^{r+2}(W, W' \cup F; \mathbb{Z})$ tal que

$$\delta u_1 + pv_1 = \sigma y_1 \tag{C}$$

y aplicando ϕ a ambos lados de (C), tenemos:

$$\begin{aligned}\phi(\delta u_1 + pv_1) &= \phi\sigma y_1\\ \phi\delta u_1 + p\phi v_1 &= p\phi y_1\\ \frac{1}{p}\delta\phi u_1 + \phi v_1 &= \phi y_1\\ \frac{1}{p}\delta\phi u_1 &= \phi y_1 - \phi v_1.\end{aligned} \tag{D}$$

Luego tenemos el siguiente análisis a nivel de cocadenas:

$$\begin{array}{rl}
\text{Como } \pi u = \sigma u_0,\ I^*(a) & \text{está representado por } \sigma u_0 \mod p \\
\text{por (A), } \gamma_\sigma I^*(a) & \text{está representado por } \delta u_0 \equiv \tau u_1 \mod p \\
\text{por el Lema 1.2.3 y (C), } \psi_\sigma \gamma_\sigma I^*(a) & \text{está representado por } \sigma u_1 \mod p \text{ y} \\
\gamma_\tau \gamma_\sigma I^*(a) & \text{está representado por } \delta u_1 = \sigma y_1 \mod p. \\
\text{Entonces } \nu(a) = I^{*-1} \psi_\sigma \gamma_\sigma I^*(a) & \text{está representado por } \phi(u_1) \mod p \text{ y} \\
\mu(a) = I^{*-1} \gamma_\tau \gamma_\sigma I^*(a) & \text{está representado por } \phi(y_1) \mod p. \\
\text{Por otra parte, } \Delta_p(a) & \text{está representado por } v \mod p \text{ y} \\
I^* \Delta_p(a) & \text{está representado por } \sigma v_0 \mod p. \\
\text{Por (B), } \gamma_\sigma I^* \Delta_p(a) & \text{está representado por } \delta v_0 = \tau v_1. \\
\text{Entonces, } \nu \Delta_p(a) = I^{*-1} \psi_\sigma \gamma_\sigma I^* \Delta_p(a) & \text{está representado por } \phi(v_1) \mod p.
\end{array}$$

Entonces (i) se sigue de (D).

Por (i) y usando que $\Delta_p^2 = 0$ se tiene que

$$\mu \Delta_p = (\Delta_p \nu + \nu \Delta_p) \Delta_p = \Delta_p \nu \Delta_p$$

y

$$\Delta_p \nu \Delta_p = \Delta_p (\mu - \Delta_p \nu) = \Delta_p \mu$$

por tanto, $\mu \Delta_p = \Delta_p \mu$, lo cual prueba (ii). □

El siguiente resultado se prueba en el artículo de Nakaoka [7] a partir tan sólo de los axiomas que caracterizan a los cuadrados y las potencias de Steenrod.

Teorema 1.3.9.

(i) Sea $p \geq 3$, entonces

$$P^s \mu - \mu P^s = \mu^p P^{s-1}, \qquad P^s \nu = \nu P^s$$

(ii) Sea $p = 2$, entonces

$$Sq^s \nu - \nu Sq^s = \nu^2 Sq^{s-1}$$

Corolario 1.3.10.

(i) $\mu P^s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \mu^{k(p-1)} P^{s-k} \mu$, si $p \geq 3$,

(ii) $\nu Sq^s = \sum_{k=0}^{s} \nu^k Sq^{s-k} \nu$, si $p = 2$.

Demostración. Demostremos ambas propiedades por inducción. Para (i) es claro que $\mu P^0 = \mu$ y utilizando la hipótesis inductiva tenemos

$$\begin{aligned}
\mu P^{s+1} &= P^{s+1}\mu - \mu^p P^s \quad \text{por el Teorema 1.3.9} \\
&= P^{s+1}\mu - \mu^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \mu^{k(p-1)} P^{s-k}\mu\right) \\
&= P^{s+1}\mu + \sum_{k=0}^{s}(-1)^{k+1}\mu^{(k+1)(p-1)} P^{s-(k+1)+1}\mu \\
&= P^{s+1}\mu + \sum_{k=1}^{s}(-1)^k \mu^{k(p-1)} P^{s+1-k}\mu + (-1)^{s+1}\mu^{(s+1)(p-1)+1} \\
&= \sum_{k=0}^{s+1}(-1)^k \mu^{k(p-1)} P^{s+1-k}\mu.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mu P^s = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \mu^{k(p-1)} P^{s-k}\mu$ para todo s natural y esto prueba (i).

Para (ii) es claro que $\nu = \nu Sq^0 = \nu^0 Sq^0 \nu = \nu$ y usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
\nu Sq^{s+1} &= Sq^{s+1}\nu - \nu^2 Sq^s \\
&= Sq^{s+1}\nu - \nu\left(\sum_{k=0}^{s}\nu^k Sq^{s-k}\nu\right) \\
&= Sq^{s+1}\nu - \sum_{k=0}^{s}\nu^{k+1} Sq^{s-k}\nu \\
&= Sq^{s+1}\nu + \sum_{k=1}^{s+1}\nu^k Sq^{s+1-k}\nu \\
&= \sum_{k=0}^{s+1}\nu^k Sq^{s+1-k}\nu.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.3.11. (i) $\mu\phi_0^* P^s = P^s \mu\phi_0^*$ si $p \geq 3$. (ii) $\nu\phi_0^* Sq^s = Sq^s \nu\phi_0^*$ si $p = 2$.

Demostración. Para demostrar (i), por el Teorema 1.2.18 (i) $\mu\phi_0^* = -\nu\delta^*\pi^{*-1}i^*$, entonces

$$\mu\phi_0^* P^s = -\nu\delta^*\pi^{*-1}i^* P^s = P^s(-\nu\delta^*\pi^{*-1}i^*) = P^s\mu\phi_0^*.$$

Mientras que para (ii) usemos que por el Teorema 1.2.18 (ii) $\nu\phi_0^* = \eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^*$, entonces

$$\nu\phi_0 Sq^s = \eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^* Sq^s = Sq^s(\eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^*) = Sq^s\nu\phi_0^*.$$

□

La demostración del siguiente teorema se encuentra en el artículo de Nakaoka.

Teorema 1.3.12.

(i) $\phi_0^* P^s - P^s \phi_0^* = \mu^{p-1} P^{s-1} \phi_0^*$, *si* $p \geq 3$.

(ii) $\phi_0^* Sq^s - Sq^s \phi_0^* = \nu Sq^{s-1} \phi_0^*$, *si* $p = 2$.

Corolario 1.3.13. Si $p = 2$, entonces $\phi_0^* Sq^s - Sq^s \phi_0^* = \mu Sq^{s-2} \phi_0^* + Sq^{s-1} \nu \phi_0^*$.

Demostración.

$$\mu Sq^{s-2} \phi_0^* = \nu^2 Sq^{s-2} \phi_0^* = Sq^{s-1} \nu \phi_0^* - \nu Sq^{s-1} \phi_0^*$$

y usando el Teorema 1.3.12

$$\mu Sq^{s-2} \phi_0^* = Sq^{s-1} \nu \phi_0^* - \phi_0^* Sq^s + Sq^s \phi_0^*$$

y por tanto (podemos cambiar los signos porque $p = 2$)

$$\phi_0^* Sq^s - Sq^s \phi_0^* = \mu Sq^{s-2} \phi_0^* + Sq^{s-1} \nu \phi_0^*.$$

□

Corolario 1.3.14.

(i) $P^s \phi_0^* = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \mu^{k(p-1)} \phi_0^* P^{s-k}$, si $p \geq 3$.

(ii) $Sq^s \phi_0^* = \sum_{k=0}^{s} \nu^k \phi_0^* Sq^{s-k}$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre s en ambos casos.

(i) Es claro que $P^0 \phi_0^* = (-1)^0 \phi_0^*$ y utilizando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
P^{s+1} \phi_0^* &= \phi_0^* P^{s+1} - \mu^{p-1} P^s \phi_0^* \\
&= \phi_0^* P^{s+1} - \mu^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \mu^{k(p-1)} \phi_0^* P^{s-k} \right) \\
&= \phi_0^* P^{s+1} + \sum_{k=0}^{s} (-1)^{k+1} \mu^{(k+1)(p-1)} \phi_0^* P^{s+1-(k+1)} \\
&= \phi_0^* P^{s+1} + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^k \mu^{k(p-1)} \phi_0^* P^{s+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \mu^{k(p-1)} \phi_0^* P^{s+1-k}.
\end{aligned}$$

(ii) Es claro que $Sq^0\phi_0^* = \nu^0\phi_0^*$ y usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
Sq^{s+1}\phi_0^* &= \phi_0^* Sq^{s+1} - \nu Sq^s \phi_0^* \\
&= \phi_0^* Sq^{s+1} - \nu\left(\sum_{k=0}^{s} \nu^k \phi_0^* Sq^{s-k}\right) \\
&= \phi_0^* Sq^{s+1} + \sum_{k=0}^{s} \nu^{k+1}\phi_0^* Sq^{s+1-(k+1)} \\
&= \phi_0^* Sq^{s+1} + \sum_{k=1}^{s+1} \nu^k \phi_0^* Sq^{s+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{s+1} \nu^k \phi_0^* Sq^{s+1-k}.
\end{aligned}$$

□

1.4. Regularidad y casi-regularidad

Definición 1.4.1. Diremos que la terna (W,W',t) es casi regular en dimensión r si la siguiente sucesión es exacta para $\rho = \sigma$ y τ.

$$H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho_0^*} H^r(W,W'\cup F;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta_{\bar\rho}} \bar\rho H^r(W,W'\cup F;\mathbb{Z}_p).$$

Por otra parte, diremos que (W,W',t) es regular en dimensión r si la siguiente sucesión es exacta para $\rho = \sigma$ y τ

$$H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\bar\rho^*} H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)$$

y además el homomorfismo $j^* : H^r(W,W'\cup F;\mathbb{Z}_p) \to H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo.

Teorema 1.4.2. *Si (W,W',t) es regular en dimensión r, entonces es casi regular en dimensión r.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\rho_0^*"] \arrow[dr, "\rho^*"'] & H^r(W,W'\cup F;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\beta_{\bar\rho}"] \arrow[d, "j^*"] & \bar\rho H^r(W,W'\cup F;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\alpha_\rho"] \\
& H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\rho_0^*"] \arrow[dr, "\bar\rho^*"'] & H^r(W,W'\cup F;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "j^*"] \\
& & H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in \ker \beta_{\bar\rho}$, entonces $a \in H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$ y como $\bar\rho^* j^*(a) = j^*\alpha_\rho\beta_{\bar\rho}(a) = 0$ se sigue que $j^*(a) \in \ker \bar\rho^*$ y por hipótesis existe $b \in H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)$ tal que $j^*(a) = \rho^*(b)$. Luego $j^*(a - \rho_0^*(b)) = j^*(a) - j^*\rho_0^*(b) = \rho^*(b) - \rho^*(b) = 0$ y como j^* es inyectivo se sigue que $a = \rho_0^*(b)$. □

Denotemos por ${}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$ al kernel del homomorfismo $\alpha_{\bar\rho} : {}^{\rho}H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \to H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$. Entonces

Teorema 1.4.3. *Si (W,W',t) es casi regular en dimensión r, se cumple que*

$$ {}^{\bar\rho}N^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) = \gamma_\rho {}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) + \vartheta_\rho i^* H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) $$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama, cuyo triángulo de la izquierda es conmutativo pero el cuadrado anticonmutativo por el Lema 1.2.15:

$$
\begin{tikzcd}
H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\beta_{\bar\rho}"'] & {}^{\rho}H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \arrow[l, "\alpha_{\bar\rho}"'] \arrow[r, "\gamma_\rho"] & {}^{\bar\rho}H^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \\
{}^{\bar\rho}H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) & H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "\kappa_\rho"] \arrow[ul, "\rho_0^*"] \arrow[r, "i^*"] & H^r(W' \cup F,W';\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "\vartheta_\rho"']
\end{tikzcd}
$$

Sea $a \in {}^{\bar\rho}N^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$ entonces $a = \gamma_\rho(b)$ para algún $b \in {}^{\rho}H^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$, luego como $\beta_{\bar\rho}(\alpha_{\bar\rho} b) = 0$ existe $c \in H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)$ tal que $\alpha_{\bar\rho}(b) = \rho_0^*(c)$. Sea $d = b - \kappa_\rho(c)$, entonces

$$ \alpha_{\bar\rho}(d) = \alpha_{\bar\rho}(b) - \alpha_{\bar\rho}\kappa_\rho(c) = \alpha_{\bar\rho}(b) - \rho_0^*(c) = 0 $$

así que $d \in {}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$. Por otra parte

$$ a = \gamma_\rho(b) = \gamma_\rho(d + \kappa_\rho(c)) = \gamma_\rho(d) + \gamma_\rho(\kappa_\rho(c)) = \gamma_\rho(d) - \vartheta_\rho i^*(c) $$

y por tanto ${}^{\bar\rho}N^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \subset \gamma_\rho {}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) + \vartheta_\rho i^* H^r(W,W';\mathbb{Z}_p)$.

Finalmente la inclusión $\gamma_\rho {}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) + \vartheta_\rho i^* H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) \subset {}^{\bar\rho}N^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$ es evidente por el Teorema 1.1.2 y la anticonmutatividad del cuadrado del diagrama. □

Teorema 1.4.4. *Si (W,W',t) es regular en dimensión r, entonces se cumple que*

$$ {}^{\bar\rho}N^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) = \gamma_\rho {}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \oplus \vartheta_\rho i^* H^r(W,W';\mathbb{Z}_p) $$

y además $\gamma_\rho : {}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p) \to {}^{\bar\rho}N^{r+1}(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo.

Demostración. Es suficiente probar que $\gamma_\rho(a) + \vartheta_\rho i^*(b) = 0$ implica que $a = 0$ cuando $a \in {}^\rho N^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p)$ y $b \in H^r(W, W'; \mathbb{Z}_p)$.

Como $\gamma_\rho(a - \kappa_\rho(b)) = \gamma_\rho(a) - \gamma_\rho\kappa_\rho(b) = \gamma_\rho(a) + \vartheta_\rho i^*(b) = 0$ existe un elemento $c \in H^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p)$ tal que $a - \kappa_\rho(b) = \beta_\rho(c)$. Además, como $\alpha_{\bar\rho}(a) = 0$, se tiene que

$$\rho^*(c) = \alpha_{\bar\rho}(\beta_\rho(c)) = \alpha_{\bar\rho}(a - \kappa_\rho(b)) = -\alpha_{\bar\rho}(\kappa_\rho(b)) = -\rho_0^*(b)$$

Entonces $\rho^*(b + j^*(c)) = j^*\rho_0^*(b) + j^*\rho^*(c) = j^*(\rho_0^*(b) + \rho^*(c)) = j^*(\rho_0{}^*(b) - \rho_0{}^*(b)) = 0$. Luego, por hipótesis existe un $d \in H^r(W, W'; \mathbb{Z}_p)$ tal que $b + j^*(c) = \bar\rho^*(d)$. Entonces $a - \kappa_\rho(\bar\rho(d) - j^*(c)) = \beta_\rho(c)$ y como $\kappa_\rho\bar\rho^* = 0$ y $\kappa_\rho j^* = \beta_\rho$ por el Lema 1.2.16 se sigue que $a = 0$. □

Teorema 1.4.5. *Si (W, W', t) es casi regular en dimensión r, entonces tenemos que*

$${}^\rho H^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) = {}^\rho N^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) + \kappa_\rho H^r(W, W'; \mathbb{Z}_p).$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{}^\rho H^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) \arrow[rr, "\alpha_{\bar\rho}"] & & H^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\beta_{\bar\rho}"] & {}^{\bar\rho} H^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p) \\
& H^r(W, W'; \mathbb{Z}_p) \arrow[ul, "\kappa_\rho"] \arrow[ur, "\rho_0^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in {}^\rho H^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p)$. Entonces, como $\beta_{\bar\rho}\alpha_{\bar\rho}(a) = 0$, existe por hipótesis un elemento $b \in H^r(W, W'; \mathbb{Z}_p)$ tal que $\alpha_{\bar\rho}(a) = \rho_0^*(b)$. Sea $c = a - \kappa_\rho(b)$, se tiene entonces

$$\alpha_{\bar\rho}(c) = \alpha_{\bar\rho}(a) - \alpha_{\bar\rho}\kappa_\rho(b) = \alpha_{\bar\rho}(a) - \rho_0^*(b) = 0.$$

Por tanto $c \in {}^\rho N^r(W, W' \cup F; \mathbb{Z}_p)$ y entonces $a = c + \kappa_\rho(b)$ como se deseaba.

□

2 | Cohomología de productos cíclicos

En este capítulo se desarrolla la teoría expuesta en el capítulo 1 cuando t es la transformación dada por $t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$ en K^p. Esta transformación verifica la propiedad de casi regularidad, sección 2.2, lo que permite dar una descomposición del kernel de π^*, sección 2.4, y dar una descripción completa del anillo de cohomología, y como módulo sobre el álgebra de Steenrod, para productos cíclicos en la sección 2.5.

2.1. Productos cartesianos y productos cíclicos

Sea K un complejo simplicial finito, denotemos por $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$ al p-ésimo producto cartesiano de K y supongamos que K tiene un orden local simple. Entonces $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$ es un complejo simplicial considerando que:

- Sus vértices son los puntos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ donde $a_i \in K$ para todo $i = 1, \ldots, p$.
- Un conjunto de $(n+1)$-vértices $a^i = (a^i_1, a^i_2, \ldots, a^i_p)$ de $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$ forman un n-simplejo si
$$a^0_j, a^1_j, \ldots, a^n_j$$
están contenidos en un simplejo de K y además $a^0_j \leq a^1_j \leq \cdots \leq a^n_j$ respecto al orden en K. Esto induce un orden entre los vértices de $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$; $a^0 < a^1 < \cdots < a^n$.

Sea $t : \mathfrak{X}_{(p)}(K) \to \mathfrak{X}_{(p)}(K)$ la función dada por $t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1)$. Es claro que t es una transformación periódica de periodo p. Más aún, se verifica directamente de la definición de t y $\mathfrak{X}_{(p)}(X)$ que

- t es simplicial,
- Si $t(\sigma) = \sigma$, entonces $t|_\sigma = 1_\sigma$ y
- t preserva el orden definido en $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$.

Es decir t satisface las condiciones supuestas en el Capítulo 1 y por tanto podemos aplicar la teoría desarrollada considerando $W = \mathfrak{X}_{(p)}(K)$, $W' = \emptyset$, $F = \mathfrak{D}_{(p)}(K) := \{(x,x,\ldots,x) \,|\, x \in K\}$. El espacio de órbitas bajo la acción de t, $O(\mathfrak{X}_{(p)}(K),t)$ es el p-ésimo producto cíclico de K, denotado por $\mathfrak{B}_{(p)}(K)$. Además denotemos por $\mathfrak{d}$ a la imagen de F bajo la proyección $\pi : \mathfrak{X}_{(p)}(K) \to \mathfrak{B}_{(p)}(K)$, entonces $\pi : \mathfrak{D}_{(p)}(K) \to \mathfrak{d}_{(p)}(K)$ es un homeomorfismo. En lo que sigue consideraremos un primo fijo por lo que omitiremos el subíndice (p).

Sea $d : K \to \mathfrak{X}(K)$ la función diagonal. Sea $d^* : H^r(\mathfrak{X}(K);G) \to H^r(K;G)$ el homomorfismo inducido por d. Entonces para cada $a \in H^r(K;G)$ y $1 \in H^0(K;\mathbb{Z})$ se tiene

$$d^*(a \times 1 \times \cdots \times 1) = a \smile 1 \smile \cdots \smile 1 = a$$

En particular d^* es sobre. Denotemos por $d_0^* : K \to \mathfrak{D}(K)$ a la función d restringida a su imagen, entonces d_0 es un homeomorfismo y $d_0^* : H^r(\mathfrak{D}(K),G) \to H^r(K;G)$ es un isomorfismo. Luego, por conmutatividad del diagrama,

$$\begin{tikzcd} H^r(\mathfrak{X}(K);G) \arrow[rr, "i^*"] \arrow[dr, "d^*"'] & & H^r(\mathfrak{D}(K);G) \arrow[dl, "\approx", "d_0^*"'] \\ & H^r(K;G) & \end{tikzcd}$$

se sigue que i^* es sobre. Entonces por la sucesión exacta del par $(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K))$ se obtiene el siguiente Teorema

Teorema 2.1.1. *La sucesión*

$$0 \longrightarrow H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);G) \xrightarrow{j^*} H^r(\mathfrak{X}(K);G) \xrightarrow{i^*} H^r(\mathfrak{D}(K);G) \longrightarrow 0$$

es exacta. Más aún, $d_0^* i^* = d^*$ y $d_0^* : H^r(\mathfrak{D}(K);G) \approx H^r(K;G)$.

Sea G un campo y sea $\Omega^*(K;G)$ una base homogenea para el espacio vectorial $H^*(K;G)$. Luego el producto cruz:

$$b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_p \quad \big(b_j \in \Omega^*(K;G)\big)$$

es un elemento de $H^*(\mathfrak{X}(K);G)$. Más aún, el Teorema de Künneth en cohomología con coeficientes en un campo establece que existe un isomorfismo:

$$\bigoplus_{q_1+\cdots+q_p=r} \bigotimes_{i=1}^{p} H^{q_i}(X;G) \longrightarrow H^r(X^p;G).$$

Por tanto, una base para $H^r(\mathfrak{X}(K);G)$, cuando G es un campo, como lo supondremos en el resto del capítulo, está dada por:

$$B^r(\Omega^*(K;G)) = \left\{ b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_p \,\middle|\, b_j \in \Omega^*(K;G);\ \sum_{j=1}^{p} q_i = r \right\}$$

donde $\dim b_j = q_j$. De esta base es conveniente distinguir los términos "diagonales" de los que no son. Para esto definamos

$$B'''^r(\Omega^*(K;G)) = \{ b \times b \times \cdots \times b \mid b \in \Omega^*(K;G);\ pq = r \}$$

donde $\dim b = q$. Y sea

$$B''^r(\Omega^*(K;G)) = B^r(\Omega^*(K;G)) - B'''^r(\Omega^*(K;G)).$$

Finalmente, denotemos por $V''^r(\Omega^*(K;G))$ y $V'''^r(\Omega^*(K;G))$ a los subespacios vectoriales generados por $B''^r(\Omega^*(K;G))$ y $B'''^r(\Omega^*(K;G))$ respectivamente.

Como consecuencia de la conmutatividad graduada del producto cruz en cohomología se tiene que, para el homomorfismo $t^* : H^r(\mathfrak{X};G) \to H^r(\mathfrak{X};G)$ inducido por t,

$$t^*(b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_p) = (-1)^{q_1(q_2 + \cdots + q_p)}(b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_p \times b_1)$$

y por tanto los subespacios vectoriales $V''^r(\Omega^*(K;G))$ y $V'''^r(\Omega^*(k;G))$ son t^*-invariantes.

Definamos la siguiente relación entre los elementos de $B''^r(\Omega^*(K;G))$:

$$u \sim v \text{ si y solo si existe algún } i \in \{0, \ldots, p-1\} \text{ tal que } v = \pm t^{*i}(u)$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $B''^r(\Omega^*(K;G))$. Sea $B_t''^r(\Omega^*(K;G))$ un conjunto de representantes de $B''^r(\Omega^*(K;G))/\sim$. Dado que p es primo, el conjunto $B_t''^r(\Omega^*(K;G))$ satisface:

- $\left\{ t^{*j}(\overline{w}) \,\middle|\, \overline{w} \in B_t''^r(\Omega^*(K;G)), 0 \leq j < p-1 \right\}$ es una base para $V''^r(\Omega^*(K;G))$,
- Todo elemento de $B_t''^r(\Omega^*(K;G))$ es de la forma $\pm w$ donde $w \in B''^r(\Omega^*(K;G))$.

Es obvio que $\bar{\rho}^* \rho^* = 0$ y más aún el siguiente teorema establece que, salvo un elemento diagonal, el kernel de $\bar{\rho}^*$ es la imagen de ρ^*.

Teorema 2.1.2. *Sea G un campo, y sea $a \in H^r(\mathfrak{X}(K);G)$ tal que $\bar{\rho}^* a = 0$. Entonces existen x, $y \in H^r(\mathfrak{X}(K);G)$ tales que $a = \rho^* x + y$, donde y es combinación lineal de elementos diagonales para una base de $H^*(K;G)$. Si r no es divisible por p, no existe tal elemento diagonal.*

Demostración. Como $a \in H^r(\mathfrak{X}(K);G)$, entonces $a = a' + a''$ donde $a' \in V'^r(\Omega^*(K;G))$ y $a'' \in V''^r(\Omega^*(K;G))$. Luego como $\bar{\rho}^*(a) = 0$ entonces $\bar{\rho}^* a' = 0$ y $\bar{\rho}^* a'' = 0$. En particular el elemento a' se puede escribir como

$$a' = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^i t^{*i}(b) \qquad \left(c_b^i \in G\right)$$

porque $\left\{t^{*j}(\overline{w}) \middle| \overline{w} \in B_t'^r(\Omega^*(K;G)), 0 \leq j < p-1\right\}$ es una base para $V'^r(\Omega^*(K;G))$.

Caso 1: $\bar{\rho} = \tau$. Entonces $\tau a' = (1-t^*)a'$, esto es,

$$\tau a' = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^i t^{*i}(b) - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^i t^{*i+1}(b) = 0.$$

Entonces para todo $b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))$: $c_b^i t^{*i+1}(b) = c_b^{i+1} t^{*i+1}(b)$ implica que $c_b^0 = c_b^1 = \cdots = c_b^{p-1}$. Luego, sea

$$u = \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^0 b.$$

Entonces es claro que $\sigma u = a'$.

Caso 2: $\bar{\rho} = \sigma$. Entonces $\sigma a' = \sum_{j=0}^{p-1} t^{*j} a'$ y esto es,

$$\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^i t^{*j} t^{*i}(b) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^i t^{*j+i}(b) = 0.$$

Entonces para todo $b \in B_t'^r$: $c_b^0 b + c_b^1 b + \cdots + c_b^{p-1} b = 0$ y como $b \neq 0$ se tiene que $c_b^0 + c_b^1 + \cdots + c_b^{p-1} = 0$. Luego,

$$u = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b \in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} \left(\sum_{j=0}^{i} c_b^j \right) t^{*i}(b)$$

satisface que

$$\begin{aligned}
\tau u = (1-t^*)u &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b\in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} \left[\left(\sum_{j=0}^{i} c_b^j\right)t^{*i}(b) - \left(\sum_{j=0}^{i} c_b^j\right)t^{*i+1}(b)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b\in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} \left[\left(\sum_{j=0}^{i} c_b^j - \sum_{j=0}^{i-1} c_b^j\right)t^{*i}(b)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{b\in B_t'^r(\Omega^*(K;G))} c_b^i t^{*i}(b).
\end{aligned}$$

Esto es, $\tau u = a'$.

Por tanto en cualquier caso $a = \rho^* x + a''$. Además es claro que si r no es divisible por p, entonces $B_t''^r(\Omega^*(K;G)) = \emptyset$ y por tanto no existe el elemento diagonal a''. □

Corolario 2.1.3. Sea G un campo y supongamos que r no es divisible por p. Entonces la sucesión

$$H^r(\mathfrak{X}(K);G) \xrightarrow{\rho^*} H^r(\mathfrak{X}(K);G) \xrightarrow{\bar{\rho}^*} H^r(\mathfrak{X}(K);G)$$

es exacta.

2.2. $(\mathfrak{X}(K), t)$ es casi regular

Abreviemos $(\mathfrak{X}(K),\emptyset,t)$ por $(\mathfrak{X}(K),t)$, el objetivo de esta sección es demostrar que $(\mathfrak{X}(K),t)$ es casi regular en toda dimensión, lo que nos permitirá dar una descripción explicita del kernel del homomorfismo π.

Teorema 2.2.1. *$(\mathfrak{X}(K),t)$ es regular en dimensión r no divisible por p.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.1.1 y el Corolario 2.1.3. □

Lema 2.2.2. *Sea $a \in H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ tal que $\beta_{\bar{\rho}} a = 0$ y $j^* a$ es combinación lineal de elementos diagonales para una base de $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$. Entonces $a = 0$.*

Demostración. Sea $n = \dim(K)$.

Caso 1: $q=n$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{\rho}H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[dr, "\alpha_{\bar\rho}"] & \\
H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[ur, "\beta_\rho"] \arrow[rr, "\rho^*"] \arrow[d, "j^*"] & & H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[dl, "j^*"] \arrow[d, "\beta_{\bar\rho}"] \\
H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\rho^*"] & H^{pn}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) & {}^{\bar\rho}H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

Como $\beta_{\bar\rho}(a)=0$, por la sucesión exacta de Richardson-Smith, existe un elemento $b\in {}^{\rho}H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ tal que $\alpha_{\bar\rho}(b)=a$ y como el homomorfismo

$$\gamma_\rho : {}^{\rho}H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)\to {}^{\rho^{-1}}H^{pn+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$$

es trivial, existe un elemento $c\in H^{pn}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ tal que $\beta_\rho(c)=b$. Luego por conmutatividad $\rho^*(c)=a$.

Sea $j^*(c)=c'+c''$ donde $c'\in V'(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ y $c''\in V''(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$. Entonces

$$\begin{aligned}
j^*(a) &= j^*\rho^*(c)\\
&= \rho^*j^*(c)\\
&= \rho^*(c')+\rho^*(c'')\\
&= \rho^*(c')
\end{aligned}$$

porque $\rho^*(c)$ es o bien cero (cuando $\rho=\tau$), o bien pc (cuando $\rho=\sigma$), en cualquier caso el resultado es cero módulo p. Entonces $j^*(a)\in V'(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ pero también $j^*(a)\in V''(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ por hipótesis, así que $j^*(a)\in V'(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\cap V''(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ implica que $j^*(a)=0$ y como j^* es un homomorfismo inyectivo, $a=0$.

Caso 2: $q<n$. Denotemos por K^q al q-esqueleto de K, sea $g:K^q\hookrightarrow K$ la inclusión y $G=g\times g\times\cdots\times g$ (p veces g). Sea $\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)$ una base de $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$. Como el homomorfismo inducido $g^*:H^q(K;\mathbb{Z}_p)\to H^q(K^q;\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo, existe una base $\Omega^*(K^q;\mathbb{Z}_p)$ de $H^*(K^q;\mathbb{Z}_p)$ que contiene a todos los elementos $g^*(b)$ tal que $b\in\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)$ y $\dim b=q$. Luego, es claro que $G^*\left(V''^{pq}(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\right)\subset V''^{pq}(\Omega^*(K^q;\mathbb{Z}_p))$.

Veamos que $G^*:V''^{pq}(\Omega^*(K^q;\mathbb{Z}_p))\to V''^{pq}(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ es un homomorfismo inyectivo.

Considérese el monomorfismo

$$\begin{aligned}
\xi:\ V''^{pq}(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)) &\longrightarrow \textstyle\bigotimes_p H^q(K;\mathbb{Z}_p)\\
b\times\cdots\times b &\longmapsto b\otimes b\otimes\cdots\otimes b
\end{aligned}$$

y denotemos también por ξ al monomorfismo correspondiente para el esqueleto K^q. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
V''^{pq}(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "G^*"'] & \bigotimes_p H^q(K;\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\bigotimes_p g^*"] \\
V''^{pq}(\Omega^*(K^q;\mathbb{Z}_p)) \arrow[r, "\xi"] & \bigotimes_p H^q(K^q;\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

Además, como g^* es un homomorfismo inyectivo, también lo es $\bigotimes_p g^*$ y por tanto G^* es inyectivo.

Luego, en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^{pq}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "G^*"] & H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[r, "\beta_{\bar\rho}"] \arrow[d, "G^*"] & \bar\rho H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "G^*"] \\
H^{pq}(\mathfrak{X}(K^q);\mathbb{Z}_p) & H^{pq}(\mathfrak{X}(K^q),\mathfrak{D}(K^q),\mathbb{Z}_p) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[r, "\beta_{\bar\rho}"] & \bar\rho H^{pq}(\mathfrak{X}(K^q),\mathfrak{D}(K^q),\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\beta_{\bar\rho}(a) = 0$ por hipótesis y entonces $\beta_{\bar\rho}G^*(a) = G^*\beta_{\bar\rho}(a) = 0$ y como $j^*G^*(a) = G^*j^*(a) \in V''^{pq}(\Omega^*(K^q;\mathbb{Z}_p))$ se puede aplicar el caso anterior a $G^*(a)$ de donde se sigue que $G^*(a) = 0$. Entonces $G^*j^*(a) = j^*G^*(a) = 0$ y como G^* es un homomorfismo inyectivo en $V''^{pq}(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ y $j^*(a) \in V''^{pq}(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$, se sigue que $j^*a = 0$ y por tanto $a = 0$. □

Teorema 2.2.3. $(\mathfrak{X}(K),t)$ *es casi regular en dimensión* $r = pq$ *(divisible por* p*).*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{pq}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[rr, "\rho_0^*"] \arrow[d, "\rho^*"'] & & H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[rr, "\beta_{\bar\rho}"] \arrow[dll, "j^*"] \arrow[drr, "\bar\rho^*"'] & & \bar\rho H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\alpha_\rho"] \\
H^{pq}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[drr, "\bar\rho^*"'] & & & & H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[dll, "j^*"] \\
& & H^{pq}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) & &
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K),\mathbb{Z}_p)$ tal que $\beta_{\bar\rho}(a) = 0$. Entonces $\bar\rho^* j^*(a) = j^*\bar\rho^*(a) = j^*\alpha_\rho\beta_{\bar\rho}(a) = 0$, así que existe un par de elementos x, $y \in H^{pq}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)$ tales que $j^*(a) = \rho^*(x) + y$ donde y es una combinación lineal de elementos diagonales de una base para $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$, por el Teorema 2.1.2. Entonces $j^*(a) = j^*\rho_0^*(x) + y$, y por tanto $j^*(a - \rho_0^*(x)) = y$. Luego, $\beta_{\bar\rho}(a - \rho_0^*(x)) = \beta_{\bar\rho}(a) - \beta_{\bar\rho}\rho_0^*(x) = 0$ y por el Lema 2.2.2 $a - \rho_0^*(x) = 0$ y por tanto $a = \rho_0^*(x)$. □

Finalmente, uniendo los Teoremas 2.2.1 y 2.2.3 se sigue la casi regularidad de $(\mathfrak{X}(K),t)$:

Teorema 2.2.4. $(\mathfrak{X}(K),t)$ *es casi regular en toda dimensión.*

2.3. Los homomorfismos Γ_s^ρ

Definición 2.3.1. Sea Γ_s^ρ la composición $\overline{\Gamma}_s^\rho d_0^{*-1}$, esto es

$$\begin{tikzcd}
H^q(K;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "d_0^{*-1}"] \arrow[dr, "\Gamma_s^\rho"'] & H^q(\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\overline{\Gamma}_s^\rho"] \\
& {}^{\bar\rho}H^{q+s}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

El objetivo de esta sección es probar que los homomorfismos

$$\Gamma_s^\rho : H^q(K;\mathbb{Z}_p) \to {}^{\bar\rho}H^{q+s}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$$

son inyectivos para $1 \le s \le (p-1)q$, Teorema 2.3.7.

En la Sección 2.2 se probó que $(\mathfrak{X},t)$ es casi regular en toda dimensión, así que por el Teorema 1.4.3

$${}^{\bar\rho}N^{r+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K),\mathbb{Z}_p) = \gamma_\rho {}^{\rho}N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) + \vartheta_\rho i^* H^r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)$$

donde ${}^{\rho}N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ es el kernel de $\alpha_{\bar\rho} : {}^{\rho}H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$.

Lema 2.3.2. *Para todo r*

$${}^{\bar\rho}N^{r+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K),\mathbb{Z}_p) = \gamma_\rho {}^{\rho}N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K),\mathbb{Z}_p) + \Gamma_1^\rho H^r(K;\mathbb{Z}_p).$$

Demostración. Es suficiente ver que $\Gamma_1^\rho H^r(K;\mathbb{Z}_p) = \vartheta_\rho i^*(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)$, por el Teorema 1.4.3. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^r(K;\mathbb{Z}_p) \arrow[rr, "\Gamma_1^\rho"] \arrow[dr, "d_0^{*-1}"] & & {}^{\bar\rho}H^{r+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \\
& H^r(\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[ur, "\overline{\Gamma}_1^\rho"] & \\
H^r(\mathfrak{X}(K);G) \arrow[ur, "i^*"] & &
\end{tikzcd}$$

Como i^* y d_0^{*-1} son sobreyectivos, Teorema 2.1.1, $i^*(H^r(\mathfrak{X}(K);G)) = d_0^{*-1}(H^r(K;\mathbb{Z}_p))$ y por definición $\overline{\Gamma}_1^\rho = (\gamma_\rho\gamma_{\bar\rho})^0 \vartheta_\rho = \vartheta_\rho$. Por tanto $\Gamma_1^\rho H^r(K;\mathbb{Z}_p) = \vartheta_\rho i^*(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)$. $\square$

Sea S^n la n-esfera. Recordemos que sus grupos de cohomología son:

$$H^q(S^n;\mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & \text{si } q = 0, n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 2.3.3. $\Gamma_s^\rho H^0(S^n;\mathbb{Z}_p) = 0$.

Porque el generador de $H^0(\mathfrak{X}(K);G)$ está dado por $1\times\cdots\times 1$ donde 1 es el generador de $H^0(K;\mathbb{Z}_p)$. Entonces $\rho(1\times\cdots\times 1)$ está representado por un cociclo cargado por la diagonal y por tanto $\kappa_\rho(1\times\cdots\times 1) = 0$. Luego, por el Lema 1.2.16 se tiene que $\vartheta_\rho i^*(1\times\cdots\times 1) = -\gamma_\rho\kappa_\rho(1\times\cdots\times 1) = 0$. De esta forma $\Gamma_1^\rho(H^0(K;\mathbb{Z}_p)) = 0$ y aplicando alternadamente $\gamma_{\bar\rho}$ y γ_ρ a $\Gamma_1^\rho(H^0(K;\mathbb{Z}_p))$ se tiene que $\Gamma_s^\rho H^0(S^n;\mathbb{Z}_p) = 0$.

Lema 2.3.4.

$$_\rho N^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = \Gamma^{\bar\rho}_{n(p-1)} H^n(S^n;\mathbb{Z}_p).$$

Demostración. Veamos primero que $_\rho N^n(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = 0$. Aplicando sucesivamente el Lema 2.3.2 y usando los valores de los grupos de cohomología de S^n tenemos:

$$\begin{aligned}
{}_\rho N^n(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) &= \gamma_{\bar\rho}\,{}_{\bar\rho}N^{n-1}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \quad \text{pues } H^{n-1}(S^n;\mathbb{Z}_p) = 0 \\
&= \gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho\,{}_\rho N^{n-2}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \quad \text{pues } H^{n-2}(S^n;\mathbb{Z}_p) = 0 \\
&\ \ \vdots \\
&= \underbrace{\gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho\cdots\gamma_{\rho'}}_{n-1\ \gamma\text{'s}}\,{}_{\rho'}N^1(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \quad \rho' \text{ es } \rho \text{ o } \bar\rho \text{ dependiendo de } n \\
&= \gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho\cdots\gamma_{\rho'}\left(\gamma_{\bar\rho'}\,{}_{\bar\rho'}N^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p)\right) \quad \text{pues } \Gamma_1^{\bar\rho'}H^0(S^n;\mathbb{Z}_p) = 0
\end{aligned}$$

como $H^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = 0$, por la sucesión exacta del par, el inicio de la sucesión exacta larga de Richardson-Smith es:

$$0 \xrightarrow{\gamma_{\rho'}} {}_{\bar\rho'}H^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\alpha_{\rho'}} H^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

de modo que $_{\bar\rho'}H^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = 0$ y por tanto $_{\bar\rho'}N^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = 0$. Finalmente esto implica que

$$_\rho N^n(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = \gamma_{\bar\rho}\gamma_\rho\cdots\gamma_{\rho'}\left(\gamma_{\bar\rho'}\,{}_{\bar\rho'}N^0(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p)\right) = 0.$$

Veamos ahora que $_\rho N^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = \Gamma^{\bar\rho}_{n(p-1)}H^n(S^n;\mathbb{Z}_p)$.

Como $H^{np-r}(S^n;\mathbb{Z}_p) = 0$ para todo $r \leq np-(n+1)$ podemos aplicar sucesivamente el Lema 2.3.2:

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}N^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) &= \gamma_{\bar\rho}{}^{\bar\rho}N^{np-1}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p)\\
&= \gamma_{\bar\rho}\gamma_{\rho}{}^{\rho}N^{np-2}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p)\\
&= \gamma_{\bar\rho}\gamma_{\rho}\gamma_{\bar\rho}{}^{\bar\rho}N^{np-3}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p)\\
&= \qquad \vdots\\
&= \underbrace{\gamma_{\bar\rho}\gamma_{\rho}\cdots\gamma_{\rho}\gamma_{\bar\rho}}_{n(p-1)-1\ \gamma\text{'s}}\Big(\gamma_{\rho}{}^{\rho}N^{n}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p)+\Gamma_1^{\rho}H^n(S^n;\mathbb{Z}_p)\Big)\\
&= \underbrace{\gamma_{\bar\rho}\gamma_{\rho}\cdots\gamma_{\rho}\gamma_{\bar\rho}}_{n(p-1)-1\ \gamma\text{'s}}\Gamma_1^{\rho}H^n(S^n;\mathbb{Z}_p) \ \text{ pues } {}^{\rho}N^{n}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = 0\\
&= \Gamma^{\bar\rho}_{n(p-1)}H^n(S^n;\mathbb{Z}_p).
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.3.5. *${}^{\rho}H^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = {}^{\rho}N^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = \kappa_\rho H^{np}(\mathfrak{X}(S^n);\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p$ y además κ_ρ es un isomorfismo.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\rho}H^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\alpha_{\bar\rho}"] & H^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\beta_{\bar\rho}"] \arrow[dr, "j^*"] & {}^{\bar\rho}H^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \\
H^{np}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "\beta_\rho"] \arrow[r, "j^*"'] & H^{np}(\mathfrak{X}(S^n);\mathbb{Z}_p) \arrow[ul, "\kappa_\rho"'] \arrow[u, "\rho_0^*"'] \arrow[r, "\rho^*"'] & H^{np}(\mathfrak{X}(S^n);\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}
$$

Como ${}^{\rho}H^{np+1}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = {}^{\bar\rho}H^{np+1}(\mathfrak{X}(S^n),\mathfrak{D}(S^n);\mathbb{Z}_p) = 0$ se tiene que β_ρ y $\beta_{\bar\rho}$ son sobreyectivos por la sucesión de Richardson-Smith. Sea e_n el generador de $H^n(S^n;\mathbb{Z}_p)$, entonces $H^{np}(\mathfrak{X}(S^n);\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p$ está generado por $e_n \times e_n \times \cdots \times e_n$. Además, como $t^*(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) = e_n \times e_n \times \cdots \times e_n$, se tiene que $\rho^*(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) = 0$. Entonces $j^*\rho_0^* = \rho^*$ es trivial y entonces, por el Teorema 2.1.1, $\alpha_{\bar\rho}\kappa_\rho = \rho_0^*$ es trivial. Pero, como $\beta_\rho = \kappa_\rho j^*$ es sobreyectivo, también lo es κ_ρ. Por tanto $\alpha_{\bar\rho}$ es trivial y $\beta_{\bar\rho}$ es inyectivo. Finalmente, como $\beta_{\bar\rho}$ es sobreyectivo por la sucesión de Richardson-Smith, $\beta_{\bar\rho}$ es un isomorfismo y también κ_ρ, en vista de que j^* es isomorfismo. □

Teorema 2.3.6. *Existe un entero módulo p, $\chi_{\rho,n} \not\equiv 0$ tal que*

$$\kappa_\rho(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) = \chi_{\rho,n}\Gamma^{\bar\rho}_{n(p-1)}(e_n).$$

Demostración. Por el Lema 2.3.5, $\kappa_\rho(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) \in {}^{\rho}N^{np}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p)$ y por el Lema 2.3.4 $\Gamma^{\bar{\rho}}_{n(p-1)}(e_n)$ es el generador de ${}^{\rho}N^{np}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p)$. Por tanto $\kappa_\rho(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) = \chi_{\rho,n}\Gamma^{\bar{\rho}}_{n(p-1)}(e_n)$ para algún $\chi_{\rho,n} \not\equiv 0 \mod p$. □

Teorema 2.3.7. *El homomorfismo* $\Gamma^{\rho}_{s} : H^q(K; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow {}^{\bar{\rho}}H^{q+s}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p)$ *es inyectivo, para* $1 \leq s \leq (p-1)q$.

Demostración. Es suficiente probar que $\Gamma^{\bar{\rho}}_{q(p-1)} : H^q(K; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow {}^{\rho}H^{pq}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p)$ es inyectivo. Sea $a \in H^q(K; \mathbb{Z}_p)$ tal que $\Gamma^{\bar{\rho}}_{q(p-1)}(a) = 0$. Supongamos, para llegar a una contradicción que $a \neq 0$.
Caso 1: $q = \dim K = n$. Por representabilidad de Brown y el hecho de que el n-esqueleto de $K(\mathbb{Z}, n)$ es S^n, existe una función $f : K \to S^n$ tal que $f^*(e_n) = a$. Sea $F : \mathfrak{X}(K) \to \mathfrak{X}(S^n)$ definida por $F = f \times f \times \cdots \times f$. Como $f^* d^*_0 = d^*_0 F^*$ se sigue por el Teorema 2.3.6 y la naturalidad de γ_ρ, ϑ_ρ y κ_ρ que:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\bar{\rho}}_{n(p-1)}(a) &= \Gamma^{\bar{\rho}}_{n(p-1)}(f^* e_n) & \\
&= F^* \Gamma^{\bar{\rho}}_{n(p-1)}(e_n) & \text{porque } d^{*-1}_0 f^* = F^* d^{*-1}_0 \\
&= \chi^{-1}_{\rho,n} F^* \kappa_\rho(e_n \times e_n \cdots \times e_n) & \text{por el Teorema 2.3.6} \\
&= \chi^{-1}_{\rho,n} \kappa_\rho F^*(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) & \text{por naturalidad de } \kappa_\rho \\
&= \chi^{-1}_{\rho,n} \kappa_\rho(a \times a \times \cdots \times a). &
\end{aligned}$$

Y por tanto $\kappa_\rho(a \times a \times \cdots \times a) = 0$ por hipótesis. Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^{pn}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\beta_\rho"] & H^{pn}(\mathfrak{X}(K); \mathbb{Z}_p) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dl, "\kappa_\rho"] & H^{pn}(\mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p) \\
{}^{\rho}H^{pn}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p) & &
\end{tikzcd}$$

Por la sucesión exacta del par y el hecho de que $H^{pn}(\mathfrak{D}(K), \mathbb{Z}_p) \approx H^{pn}(K; \mathbb{Z}_p) = 0$ se tiene que j^* es sobre, luego, existe un elemento $b \in H^{pn}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K); \mathbb{Z}_p)$ tal que $j^*(b) = a \times a \times \cdots \times a$ y

$$\beta_\rho(b) = \kappa_\rho j^*(b) = \kappa_\rho(a \times a \times \cdots \times a) = 0.$$

Como existe una base de $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ que contiene a a y $j^*(b)$ es un elemento diagonal para tal base, se sigue por el Lema 2.2.2 que $b = 0$, entonces $a \times a \times \cdots \times a = 0$ y por tanto $a = 0$.

Caso 2: $q < n$. Sea $g : K^q \hookrightarrow K$ la inclusión del q-esqueleto y $G : \mathfrak{X}(K^q) \to \mathfrak{X}(K)$ la función $G = g \times g \times \cdots \times g$. Luego, por hipótesis:

$$\Gamma^{\bar{\rho}}_{q(p-1)}(g^* a) = G^* \Gamma^{\bar{\rho}}_{q(p-1)}(a) = 0$$

y entonces por el caso 1, $g^* a = 0$. Y como $g^* : H^q(K;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^q(K^q;\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo se sigue que $a = 0$. ◻

Definición 2.3.8. Definamos el homomorfismo

$$E_s : H^q(K;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{q+s}(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \qquad (s > 0)$$

como

$$E_{2\alpha+1} = \mu^\alpha \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}, \qquad E_{2\alpha+2} = \mu^\alpha \nu \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} \qquad (\text{para } \alpha \geq 0).$$

Observación 2.3.9. $E_s = I^{*-1}\Gamma_s^\tau$.
Verifiquemos primero la igualdad cuando s es impar:

$$\begin{aligned}
E_{2\alpha+1} &= (I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^*)^\alpha \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha I^* \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \vartheta_\tau \pi^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} && \text{por 1.2.17} \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \vartheta_\tau d_0^{*-1} \\
&= I^{*-1}\Gamma^\tau_{2\alpha+1},
\end{aligned}$$

y en el caso par:

$$\begin{aligned}
E_{2\alpha+2} &= (I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^*)^\alpha \nu \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha I^* \nu \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha I^* I^{*-1} \gamma_\tau \psi_\tau I^* \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} && \text{por definición de } \nu \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \gamma_\tau \psi_\tau \vartheta_\tau \pi \pi^{*-1} d_0^{*-1} && \text{por 1.2.17} \\
&= I^{*-1}(\gamma_\tau\gamma_\sigma)^\alpha \gamma_\tau \psi_\tau \vartheta d_0^{*-1} && \text{por definición de } \vartheta_\tau \\
&= I^{*-1}\Gamma^\tau_{2\alpha+2} && \text{por el Lema 1.2.15.}
\end{aligned}$$

Observación 2.3.10.

$$E_{2\alpha+2} = \nu E_{2\alpha+1} \ \ (\alpha \geq 0), \qquad E_{s+2\alpha} = \mu^\alpha E_s \ \ (s > 0).$$

Pues por el Teorema 1.2.6

$$E_{2\alpha+2} = \mu^{\alpha} \nu \delta^{*} \pi^{*-1} d_{_0}^{*-1} = \nu \mu^{\alpha} \delta^{*} \pi^{*-1} d_{_0}^{*-1} = \nu E_{2\alpha+1},$$

y por otra parte

$$E_{s+2\alpha} = \begin{cases} \mu^{s'-1+\alpha} \nu \delta^{*} \pi^{*-1} d_{_0}^{*-1} = \mu^{\alpha} \mu^{s'-1} \nu \delta^{*} \pi^{*-1} d_{_0}^{*-1} = \mu^{\alpha} E_{s}, & \text{si } s = 2s', \\ \mu^{\alpha+s'} \delta^{*} \pi^{*-1} d_{_0}^{*-1} = \mu^{\alpha} \mu^{s'} \delta^{*} \pi^{*-1} d_{_0}^{*-1} = \mu^{\alpha} E_{s}, & \text{si } s = 2s'+1. \end{cases}$$

Teorema 2.3.11. *El homomorfismo* $E_s : H^q(K;\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{q+s}(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$ *es inyectivo para* $1 \leq s \leq (p-1)q$.

Demostración. Es consecuencia directa de la Observación 2.3.9 y los Teoremas 1.1.11 y 2.3.7 para $\rho = \tau$. $\square$

2.4. El kernel de π^*

Lema 2.4.1. *Si r no es divisible por p*

$$ {}^{\bar\rho}N^{r+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = \gamma_\rho {}^{\rho}N^{r}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus \Gamma_1^\rho H^r(K;\mathbb{Z}_p). $$

Más aún $\gamma_\rho : {}^{\rho}N^{r}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow {}^{\bar\rho}N^{r+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ y Γ_1^ρ son inyectivos.

Demostración. Por los Teoremas 1.4.4 y 2.3.7

$$ {}^{\rho}N^{r+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = \gamma_{\bar\rho} {}^{\bar\rho}N^{r}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus \Gamma_1^\rho H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) $$

pues como se observó en la demostración del Lema 2.3.2, $\vartheta_\rho i^*$ y Γ_1^ρ tienen la misma imagen, y γ_ρ es inyectivo. Además por el Teorema 2.3.7, Γ_1^ρ es inyectivo. □

Lema 2.4.2. *Sea $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, entonces*

$$ \kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) \in {}^{\rho}N^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p). $$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$ \begin{tikzcd} {}^{\rho}H^{np}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\alpha_{\bar\rho}"] & H^{np}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[dr, "j^*"] & \\ & H^{np}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[ul, "\kappa_\rho"] \arrow[u, "\rho_0^*"] \arrow[r, "\rho^*"'] & H^{np}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) \end{tikzcd} $$

Entonces
$$ \begin{aligned} j^*\alpha_{\bar\rho}\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) &= j^*\rho_0^*(x \times x \times \cdots \times x) \\ &= \rho^*(x \times x \times \cdots \times x) \\ &= 0, \end{aligned} $$

y como j^* es inyectivo, $\alpha_{\bar\rho}\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) = 0$. □

Lema 2.4.3. *Si ${}^{\rho}N^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{s=q}^{pq-1} \Gamma_{pq-s}^{\bar\rho} H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ entonces la componente en $\Gamma_{(p-1)q}^{\bar\rho} H^q(K;\mathbb{Z}_p)$ de $\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x)$ es $\chi_{\rho,q}\Gamma_{(p-1)q}^{\bar\rho}(x)$, donde $\chi_{p,q}$ es el entero módulo p del Teorema 2.3.6.*

Demostración. Sea $g : K^q \hookrightarrow K$ la inclusión del q-esqueleto y $G = g \times g \times \cdots \times g$. Entonces

$$ \begin{aligned} G^*\left(\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x)\right) &= \kappa_\rho(g^*x \times g^*x \times \cdots \times g^*x) \\ &= \chi_{\rho,q}\Gamma_{(p-1)q}^{\bar\rho}(g^*x). \end{aligned} $$

la última igualdad se cumple en vista del Teorema 2.3.6.

Por otra parte, si $\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s} y_{\rho,s}$ con $y_{\rho,s} \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$, entonces

$$\begin{aligned} G^*\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) &= G^*\left(\sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(y_{\rho,s})\right) \\ &= \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}\left(g^* y_{\rho,s}\right) \text{ pero } H^s(K^q;\mathbb{Z}_p) = 0 \text{ si } s > q \\ &= \Gamma^{\bar\rho}_{q(p-1)} g^*(y_{\rho,q}). \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $\Gamma^{\bar\rho}_{q(p-1)}\chi_{p,q}g^*(x) = \Gamma^{\bar\rho}_{q(p-1)}g^*(y_{\rho,q})$. Y como $\Gamma^{\bar\rho}_{q(p-1)}$ y g^* son inyectivos, $\chi_{\rho,q}x = y_{\rho,q}$. □

Teorema 2.4.4. $\quad {}_{\bar\rho}N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{s=\left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor}^{r-1} \Gamma^\rho_{r-s} H^s(K;\mathbb{Z}_p)$

donde $\lfloor x \rfloor$ *denota la función parte entera.*

Nótese que todos los homomorfismos Γ^ρ_{r-s} en este rango son inyectivos por el Teorema 2.3.7. A esta descomposición directa de ${}_\rho N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ se le llamará canónica.

Demostración. Inducción sobre r. Para todo $r < 0$ ambos términos son cero. Así que supongamos que se cumple la igualdad para $r \le r_0$ y probemos la igualdad para $r = r_0 + 1$.
Caso 1: r_0 no es divisible por p

Por el Lema 2.4.1 se tiene

$$\begin{aligned} {}_{\bar\rho}N^{r_0+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) &= \gamma_\rho {}_\rho N^{r_0}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus \Gamma^\rho_1 H^{r_0}(K;\mathbb{Z}_p) \\ &= \gamma_\rho\left(\bigoplus_{s=\left\lfloor \frac{r_0+p-1}{p} \right\rfloor}^{r_0-1} \Gamma^{\bar\rho}_{r_0-s} H^s(K;\mathbb{Z}_p)\right) \oplus \Gamma^\rho_1 H^{r_0}(K;\mathbb{Z}_p) \\ &= \bigoplus_{s=\left\lfloor \frac{r_0+p-1}{p} \right\rfloor}^{r_0-1} \Gamma^\rho_{r_0-s+1} H^s(K;\mathbb{Z}_p) \oplus \Gamma^\rho_1 H^{r_0}(K;\mathbb{Z}_p) \\ &= \bigoplus_{s=\left\lfloor \frac{r_0+p}{p} \right\rfloor}^{r_0} \Gamma^\rho_{r_0-s+1} H^s(K;\mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

Como γ_ρ es inyectiva en ${}^{\rho}N^{r_0}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$, por el Lema 2.4.1, se preserva la suma directa en la tercera igualdad y la última igualdad se cumple porque $p \nmid r_0$ y entonces

$$\left\lfloor \frac{r_0+p}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_0}{p}+1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_0-1}{p}+1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_0+p-1}{p} \right\rfloor.$$

Caso 2: $r_0 = pq$ para algún entero q. Veamos entonces que se cumplen:

(I) ${}^{\bar\rho}N^{pq+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = \displaystyle\sum_{s=q+1}^{pq} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1} H^s(K;\mathbb{Z}_p)$.

(II) La descomposición en (I) es directa.

(I) Por el Lema 2.3.2 y la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
{}^{\bar\rho}N^{pq+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) &= \gamma_\rho {}^{\rho}N^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) + \Gamma^{\rho}_1 H^{pq}(K;\mathbb{Z}_p)\\
&= \gamma_\rho \left(\sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s} H^s(K;\mathbb{Z}_p) \right) + \Gamma^{\rho}_1 H^{pq}(K;\mathbb{Z}_p)\\
&= \sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1} H^s(K;\mathbb{Z}_p).
\end{aligned}$$

Veamos que $\Gamma^{\rho}_{(p-1)q+1} H^q(K;\mathbb{Z}_p) \subset \displaystyle\sum_{s=q+1}^{pq} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1} H^s(K;\mathbb{Z}_p)$.

Por el Lema 2.4.2, para todo $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, $\kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x) \in {}^{\rho}N^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$. Luego por el inducción, $\kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x) \in \bigoplus_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s} H^s(K;\mathbb{Z}_p)$. Sean $y_{\rho,s} \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ ($s = q,\, q+1,\, \ldots,\, pq-1$) tales que $\kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(y_{\rho,s})$.

Por el Lema 2.4.3

$$\chi_{\rho,q}\Gamma^{\bar\rho}_{(p-1)q}(x) = \Gamma^{\bar\rho}_{(p-1)q}(y_{\rho,q})$$

y entonces

$$\chi_{\rho,q}\Gamma^{\bar\rho}_{(p-1)q}(x) = \kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x) - \sum_{s=q+1}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(y_{\rho,s}).$$

Aplicando γ_ρ a ambos términos

$$\chi_{\rho,q}\Gamma^{\rho}_{(p-1)q+1}(x) = \gamma_\rho\kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x) - \sum_{s=q+1}^{pq-1} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1}(y_{\rho,s}).$$

Por otra parte, por el Lema 1.2.16

$$\begin{aligned}\gamma_\rho\kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x)&=-\vartheta_\rho i^*(x\times x\times\cdots\times x)\\&=-\vartheta_\rho d_0^{*-1}d^*(x\times x\times\cdots\times x)\\&=-\vartheta_\rho d_0^{*-1}(x\smile x\smile\cdots\smile x)\\&=-\Gamma_1^\rho(x\smile x\smile\cdots\smile x).\end{aligned}$$

Entonces

$$\chi_{\rho,q}\Gamma^\rho_{(p-1)q+1}(x)=-\sum_{s=q+1}^{pq}\Gamma^\rho_{pq-s+1}(y_{\rho,s}),\qquad \text{donde } y_{\rho,pq}=x\smile x\smile\cdots\smile x.$$

Por tanto $\Gamma^\rho_{(p-1)q+1}H^q(K;\mathbb{Z}_p)\subset\displaystyle\sum_{s=q+1}^{pq}\Gamma^\rho_{pq-s+1}H^s(K;\mathbb{Z}_p)$.

(II) Supongamos que $\displaystyle\sum_{s=q+1}^{pq}\Gamma^\rho_{pq-s+1}(a_s)=0$ donde $a_s\in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$.

Se tiene $\Gamma_1^\rho(a_{pq})=\vartheta_\rho d_0^{*-1}(a_{pq})$ por definición de Γ_1^ρ
$=\vartheta_\rho i^*(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)$ porque $d^*(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)=a_{pq}$
$=-\gamma_\rho\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)$ por el Lema 1.2.16.

Entonces, por hipótesis, $\gamma_\rho\left\{\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)-\displaystyle\sum_{s=q+1}^{pq-1}\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(a_s)\right\}=0.$

Luego, por la sucesión exacta de Richardson-Smith, existe $b_{pq}\in H^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ tal que

$$\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)=\beta_\rho(b_{pq})+\sum_{s=q+1}^{pq-1}\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(a_s).\tag{A}$$

Aplicando $j^*\alpha_{\bar\rho}$ a ambos lados de (A)

$$\begin{aligned}j^*\alpha_{\bar\rho}\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)&=j^*\alpha_{\bar\rho}\beta_\rho(b_{pq})+j^*\alpha_{\bar\rho}\sum_{s=q+1}^{pq-1}\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(a_s)\\ j^*\rho_0^*(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)&=j^*\rho^*(b_{pq})+j^*\alpha_{\bar\rho}\gamma_{\bar\rho}\left(\sum_{s=q+1}^{pq-2}\Gamma^\rho_{pq-s-1}(a_s)\right)+j^*\alpha_{\bar\rho}\vartheta_{\bar\rho}d_0^{*-1}(a_{pq-1})\\ \rho^*(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)&=\rho^*j^*(b_{pq})\end{aligned}$$

porque $\alpha_{\bar\rho}\gamma_{\bar\rho}=0$ y $j^*\alpha_{\bar\rho}\vartheta_{\bar\rho}d_0^{*-1}=\eta_* j^*\delta^* d_0^{*-1}=0$ por las sucesiones exactas de Richardson-Smith y del par respectivamente. Entonces $\rho^*((a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)-j^*(b_{pq}))=0$ y por el Teorema 2.1.2 existen x, $y\in H^{pq}(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)$ tales que

$$(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)-j^*(b_{pq})=\bar\rho^*(x)+y$$

donde y es combinación lineal de elementos diagonales para una base de $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$. Aplicando κ_ρ a la igualdad y reagrupando términos

$$\begin{aligned}\kappa_\rho(y)&=\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)-\kappa_\rho j^*(b_{pq})-\kappa_\rho\bar\rho^*(x)\\&=\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)-\beta_\rho(b_{pq})\end{aligned}\tag{B}$$

pues $\kappa_\rho\bar\rho^*=0$ y $\kappa_\rho j^*=\beta_\rho\eta_*$ por el Lema 1.2.16.

Luego de (A) y (B)

$$\kappa_\rho(y)=\sum_{s=q+1}^{pq-1}\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(a_s).\tag{C}$$

Como y es combinación lineal de elementos diagonales, digamos $y=\sum_j y_j\times y_j\times\cdots\times y_j$ donde las y_j varian sobre una base de $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$. Por el Lema 2.4.3 la componente de $\kappa_\rho(y_j\times y_j\times\cdots\times y_j)$ en $\Gamma^{\bar\rho}_{(p-1)q}H^q(K;\mathbb{Z}_p)$ es $\chi_{\rho,q}\Gamma^{\bar\rho}_{(p-1)q}(y_j)$ (Aquí se usa la hipótesis inductiva ${}^{\rho}N^{pq}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)=\bigoplus_{s=q}^{pq-1}\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}H^s(K;\mathbb{Z}_p)$). Pero por (C),

$$\kappa_\rho(y)=\sum_j\kappa_\rho(y_j\times\cdots\times y_j)=\sum_j\chi_{\rho,q}\Gamma^{\rho}_{(p-1)q}(y_j)=0$$

pero las y_j corren sobre los elementos de una base de $H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ y, por tanto, los elementos $\Gamma^{\rho}_{(p-1)q}(y_j)$ son linealmente independientes, pues $\Gamma_{(p-1)q}$ es inyectivo, así que $y_j=0$ para todo j en la descomposición de y. Luego $y=0$ y por (B)

$$\kappa_\rho(a_{pq}\times 1\times\cdots\times 1)=\beta_\rho(b_{pq})$$

y por (A)

$$\sum_{s=q+1}^{pq-1}\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(a_s)=0$$

Entonces por hipótesis inductiva $\Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(a_s)=0$ para todo $q+1\le s\le pq-1$ y esto implica que también $\Gamma^{\rho}_1(a_{pq})=0$. □

Teorema 2.4.5. *Para cada $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$ existe un único sistema de $(p-1)q$ elementos $\{y_{\rho,s}(x)\}$ ($s = q,\ q+1,\ \ldots,\ pq-1$) con $y_{\rho,s}(x) \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ tal que:*

$$\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar{\rho}}_{pq-s}(y_{\rho,s}(x)).$$

donde $y_{\rho,q}(x) = \chi_{\rho,q} x$ y $\chi_{\rho,q}$ es el entero módulo p del Teorema 2.3.6.

Demostración. Para todo $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, $\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) \in {}^\rho N^{pq}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ y por el Teorema 2.4.4

$${}^\rho N^{pq}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\rho}_{pq-s} H^s(K;\mathbb{Z}_p).$$

Entonces

$$\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar{\rho}}_{pq-s} y_{\rho,s}(x).$$

Los elementos $y_{\rho,s}(x)$ son únicos por la descomposición directa de ${}^\rho N^{pq}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ y además, por el Lema 2.4.3, $y_{\rho,s} = \chi_{\rho,s} x$. □

Teorema 2.4.6. *Dado $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, existe un único sistema de $(p-1)q$ elementos $\{y_{\rho,s}(x)\}$ ($s = q+1,\ q+2,\ \ldots,\ pq$) con $y_{\rho,s}(x) \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ que satisface la ecuación*

$$\sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1}(y_{\rho,s}(x)) = 0,$$

donde $y_{\rho,q} = \chi_{\rho,q} x$. Más aún los $y_{\rho,s}(x)$ coinciden con los del Teorema 2.4.5 y $y_{\rho,pq}(x) = x \smile x \smile \cdots \smile x$.

Demostración. Por el Teorema 2.4.5

$$\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar{\rho}}_{pq-s}(y_{\rho,s}(x)).$$

Aplicando γ_ρ a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\gamma_\rho \kappa_\rho(x\times x\times\cdots\times x) = \gamma_\rho \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\bar\rho}_{pq-s}(y_{\rho,s}(x))$$

$$-\vartheta_\rho i^*(x\times x\times\cdots\times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1}(y_{\rho,s}(x)) \qquad \text{por Lema 1.2.16}$$

$$-\Gamma^{\rho}_1(x\smile x\smile\cdots\smile x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma^{\rho}_{pq-s+1}(y_{\rho,s}(x)).$$

Entonces

$$\sum_{s=q}^{pq}\Gamma^{\rho}_{pq-s+1}(y_{\rho,s}(x)) = 0.$$

Luego, supongamos que $\{y_{\rho,s}(x)\}$ y $\{\bar y_{\rho,s}(x)\}$ satisfacen la ecuación. Entonces

$$\sum_{s=q+1}^{pq}\Gamma^{\rho}_{pq-s+1}\left(y_{\rho,s}(x)-\bar y_{\rho,s}(x)\right) = 0.$$

Como $\left\lfloor \frac{pq+1+p-1}{p}\right\rfloor = q+1$, esta suma es la descomposición canónica del elemento $0\in {}_{\bar\rho}N^{pq+1}(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ y por tanto $y_{\rho,s}(x)-\bar y_{\rho,s}(x)=0$ para $q+1\le s\le pq$. Así que la descomposición es única. □

Definición 2.4.7. Denotemos por $N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$ el kernel del homomorfismo $\pi^*: H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ inducido por π.

Como $I^*: H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)\approx {}_{\tau^{-1}}H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$ y $\alpha_\tau I^* = \pi^*$ entonces $\ker\pi = \ker\alpha_\tau I^*\approx\ker\alpha_\tau$. Por tanto $I^*: N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)\approx {}_\sigma N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$.

Teorema 2.4.8. $N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) = \displaystyle\bigoplus_{s=\left\lfloor\frac{r+p-1}{p}\right\rfloor}^{r-1} E_{r-s}H^s(K;\mathbb{Z}_p).$

Demostración. Consecuencia inmediata del Teorema 2.4.4 para $\rho=\tau$. □

En vista del Lema 1.2.12, los equivalentes para los Teoremas 2.4.5 y 2.4.6 para $\rho=\sigma$ y $\rho=\tau$ respectivamente son los siguientes:

Teorema 2.4.9. *Sea $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, entonces existe un único sistema de $(p-1)q$ elementos $\{y_{\sigma,s}(x)\}$ ($s = q,\ q+1,\ \ldots,\ pq-1$) con $y_{\sigma,s}(x) \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ tales que*

$$\phi_0^*(x \times x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} E_{pq-s}(y_{\sigma,s}(x))$$

y se cumple que $y_{\sigma,q}(x) = \chi_{\sigma,q}x$.

Teorema 2.4.10. *Sea $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, entonces existe un único sistema de $(p-1)q$ elementos $\{y_{\tau,s}(x)\}$ ($s = q+1,\ q+2,\ \ldots,\ pq$) donde $y_{\tau,s} \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ que satisface la ecuación*

$$\sum_{s=q}^{pq} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x)) = 0.$$

donde $y_{\tau,q}(x) = \chi_{\tau,q}(x)$ y $y_{\tau,pq}(x) = x \smile x \smile \cdots \smile x$.

2.5. Cohomología de p-productos cíclicos

Teorema 2.5.1. *Para toda r,*

$$H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) = N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus \phi_0^*(V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))).$$

El kernel de $\phi_0^* : V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)) \longrightarrow H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$ es $\tau^*V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$.

Demostración. Los Teoremas 2.4.8 y 2.4.9 implican que

$$\phi_0^*(V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))) \subset N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p). \tag{A}$$

Por el Teorema 1.4.5 para $\rho = \sigma$ se tiene

$${}^{\sigma}H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) = {}^{\sigma}N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) + \kappa_\sigma H^r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)$$

y como $I^* : N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \approx {}^{\sigma}N^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$, componiendo con I^{*-1} se tiene

$$\begin{aligned} H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) &= N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) + \phi_0^* H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \\ &= N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) + \phi_0^*(V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))) \quad \text{por (A).} \end{aligned}$$

Ahora probemos que la descomposición es directa. Supongamos que $c + \phi_0^*(b) = 0$ donde $c \in N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$ y $b \in V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}^{\sigma}H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\alpha_\tau"] & H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\beta_\tau"] \arrow[dr, "j^*"] & {}^{\tau}H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p) \\
H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "I^*"] & H^r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) \arrow[l, "\phi_0^*"] \arrow[u, "\sigma_0"'] \arrow[ul, "\kappa_\sigma"'] \arrow[r, "\sigma^*"] & H^r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

Como $\alpha_\tau I^*(c) = \pi^*(c) = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma^*(b) &= j^*\sigma_0^*(b) = j^*\alpha_\tau\kappa_\sigma(b)\\ &= j^*\alpha_\tau I^*\phi_0^*(b)\\ &= -j^*\alpha_\tau I^*(c) = 0.\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.1.2 existe un elemento $d \in V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ tal que $b = \tau^*(d)$, pues $b \in V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ y los espacios $V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ y $V''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ son t-invariantes. Entonces $c + \phi_0^*(\tau^* d) = 0$ pero, por el Lema 1.2.12, $\phi_0^*\tau^* = I^{*-1}\kappa_\sigma\tau^* = 0$ y por tanto $c = 0$.

Obsérvese que tomando $c = 0$ en el argumento anterior se concluye que

$$\ker \phi_0^*|_{V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))} \subset \tau^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))).$$

La otra contención es obvia. □

Sea G un campo. Sea $R_r(X,A;G)$ el rango del grupo $H^r(X,A;G)$. Entonces

Teorema 2.5.2. $R_r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) = \left[\sum_{s=\left\lfloor\frac{r+p-1}{p}\right\rfloor}^{r-1} R_s(K;\mathbb{Z}_p)\right] + \frac{1}{p}\left[R_r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) - R_{r/p}(K;\mathbb{Z}_p)\right]$ *donde* $R_{r/p}(K;\mathbb{Z}_p) = 0$ *si* $p \nmid r$.

La unión del conjunto $\left\{E_{r-s}(b) \,\middle|\, \left\lfloor\frac{r+p-1}{p}\right\rfloor \le s \le r-1, b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p) \text{ y } \dim b = s\right\}$ *y el conjunto* $\left\{\phi_0^*(w) \,|\, w \in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\right\}$ *es una base para* $H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$.

Demostración. Por el Teorema 2.5.1

$$H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) = N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus \phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))$$

y por el Teorema 2.4.8

$$N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{s=\left\lfloor\frac{r+p-1}{p}\right\rfloor}^{r-1} E_{r-s}H^s(K;\mathbb{Z}_p).$$

Claramente $\{E_{r-s}(b) \,|\, b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p) \text{ y } \dim b = s\}$ es una base para $E_{r-s}H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ para $\left\lfloor\frac{r+p-1}{p}\right\rfloor \le s \le r-1$, pues los homomorfismos E_{r-s} son inyectivos, además

$$\{E_{r-s}(b) \,|\, b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p) \text{ y } \dim b = s\} = E_{r-s}\{b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p) \,|\, \dim b = s\}$$

y $\{b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p) \,|\, \dim b = s\}$ es base para $H^s(K;\mathbb{Z}_p)$. Luego,

$$\left|\{E_{r-s}(b) \,|\, b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p) \text{ y } \dim b = s\}\right| = R_s(K;\mathbb{Z}_p).$$

Por otra parte $\left\{\phi_0^*(w)\,|\,w\in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))$, por el Teorema 2.5.1, y como ϕ_0^* es una transformación lineal

$$\dim\phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))=\dim(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))-\dim(\tau^*V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))$$

donde $\tau^*:V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\longrightarrow V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ también es lineal. Entonces

$$\dim\tau^*V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))=\dim V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))-\dim(\ker\tau^*)$$

así que $\dim\phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))=\dim\ker\tau^*$.
Veamos que $\ker\tau^*=\left\langle\left\{b+t^*(b)+\cdots+t^{*p-1}(b)\,|\,b\in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\right\}\right\rangle$

Abreviemos $B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$ por $B_t'^r$. Si $u=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{b\in B_t'^r}c_b^jt^{*j}(b)\in\ker\tau^*$ entonces

$$u-t^*u=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{b\in B_t'^r}c_b^jt^{*j}(b)-\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{b\in B_t'^r}c_b^jt^{*j+1}(b)=0.$$

esto implica que $c_b^1=c_b^0$, $c_b^2=c_b^1,\ldots,c_b^p=c_b^{p-1}$ y por tanto $c_b^{p-1}=c_b^{p-2}=\cdots=c_b^1=c_b^0$, i.e.

$$u=\sum_{b\in B_t'^r}c_b^0\sum_{j=0}^{p-1}t^{*j}(b).$$

Por tanto $\ker\tau^*\subset\left\langle\left\{b+t^*(b)+\cdots+t^{*p-1}(b)\,|\,b\in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\right\}\right\rangle$, y la inclusión inversa es obvia. Además $\{b+t^*(b)+\cdots+t^{*j-1}(b)\,|\,b\in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\}$ es linealmente independiente, pues

$$\sum_{b\in B_t'^r}c_b\sum_{j=0}^{p-1}t^{*j}(b)=0\text{ implica que }c_b=0\;\forall\,b\in B_t'^r.$$

Por tanto $\dim\phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))=|B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))|$ y $\left\{\phi_0^*(w)\,|\,w\in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\right\}$ es una base para $\phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))$. Finalmente

$$|B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))|=\frac{1}{p}|B'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))|$$

donde $B'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))=B^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))-B''^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))$. Y como

$$\begin{aligned}|B^r(\Omega^*(K;G))|&=\left|\{b_1\times b_2\times\cdots\times b_p\,|\,b_j\in\Omega^*(K;G),\sum_{j=1}^{p}q_j=r,\dim b_j=q_j\}\right|\\&=R_r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p)\\\left|B''^r(\Omega^*(K;G))\right|&=\left|\{b\times b\times\cdots\times b\,|\,b\in\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p),pq=r,\dim b=q\}\right|\\&=R_{r/p}(K;\mathbb{Z}_p)\end{aligned}$$

se sigue que

$$|B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))| = \frac{1}{p}\left[R_r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) - R_{r/p}(K;\mathbb{Z}_p)\right].$$

□

Observación 2.5.3. $\delta^* : H^{r-1}(\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$ es inyectivo para todo $r > 1$.

Pues por el Teorema 2.3.11, E_1 es inyectivo y $E_1 = \delta^* I^{*-1} d_0^*$, entonces δ^* es inyectivo para todo $r > 1$.

Lema 2.5.4. *La sucesión*

$$0 \longrightarrow H^{r-1}(\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\delta^*} H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j^*} H^r(\mathfrak{B}(K);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

es exacta para $r > 1$. Además $j : H^1(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \to H^1(\mathfrak{B}(K);\mathbb{Z}_p)$ es isomorfismo.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la observación anterior en la sucesión exacta del par. □

Teorema 2.5.5. *Sea $r \geq 1$, entonces*

$$R_r(\mathfrak{B}(K);\mathbb{Z}_p) = \sum_{s=\left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor}^{r-2} R_s(K;\mathbb{Z}_p) + \frac{1}{p}\left[R_r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) - R_{r/p}(K;\mathbb{Z}_p)\right].$$

La unión del conjunto $\{j^*E_{r-s}(b) \mid \left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor \leq s \leq r-2, b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p), \dim b = s\}$ y el conjunto $\{\phi^*(w) \mid w \in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\}$ es una base para $H^r(\mathfrak{B}(K);\mathbb{Z}_p)$.

Demostración. Por el Teorema 2.5.1

$$H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) = N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus \phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p)))$$

y aplicando $j^* : H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^r(B(K);\mathbb{Z}_p)$ a ambos términos de la igualdad

$$\begin{aligned}
j^*H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) &= j^*N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \oplus j^*\phi_0^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))) \\
H^r(\mathfrak{X}(K);\mathbb{Z}_p) &= j^*\left(\bigoplus_{p=\left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor}^{r-1} E_{r-s}H^s(K;\mathbb{Z}_p)\right) \oplus \phi^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))) \\
&= \bigoplus_{p=\left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor}^{r-2} j^*E_{r-s}H^s(K;\mathbb{Z}_p) \oplus \phi^*(V'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))).
\end{aligned}$$

La última igualdad se da porque j^* se anula en E_1 por el Lema 2.5.4 y es inyectivo sobre los demás sumandos. De esta descomposición es inmediato, por el Teorema 2.5.2, que la unión del conjunto $\{j^* E_{r-s}(b) \mid \left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor \leq s \leq r-2, b \in \Omega^*(K;\mathbb{Z}_p), \dim b = s\}$ y el conjunto $\{\phi^*(w) \mid w \in B_t'^r(\Omega^*(K;\mathbb{Z}_p))\}$ es una base para $H^r(\mathfrak{B}(K);\mathbb{Z}_p)$. □

Estructura multiplicativa y módulo sobre el álgebra de Steenrod

El objetivo de esta subsección es describir el anillo de cohomología $H^*(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p)$ así como la acción de las potencias (o cuadrados) de Steenrod y del homomorfismo de Bockstein. En virtud del Teorema 2.5.2 es suficiente con analizar la acción de estos homomorfismos en los elementos de la forma $\phi_0^*(x)$ y $E_{r-s}(x)$.

Teorema 2.5.6. *Sea $x_j \in H^*(K;\mathbb{Z}_p)$ para $j = 1, 2, \ldots, p$. Entonces*

(I) $\Delta_p \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) = \phi_0^* \Delta_p(x_1 \times \cdots \times x_p) - E_1(x_1 \smile \cdots \smile x_p)$.

(II) Cuando $p \geq 3$ o $p = 2$ se tiene respectivamente:

(i) $$P^s \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) = \phi_0^* P^s(x_1 \times \cdots \times x_p) + \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} E_{2j(p-1)} P^{s-j}(x_1 \smile \cdots \smile x_p).$$

(ii) $$Sq^s \phi_0^*(x_1 \times x_2) = \phi_0^* Sq^s(x_1 \times x_2) + \sum_{j=1}^{s} E_j Sq^{s-j}(x_1 \smile x_2).$$

Demostración. Por el Teorema 1.3.7

$$\begin{aligned}
\phi_0^* \Delta_p - \Delta_p \phi_0^* &= \delta^* \pi^{*-1} i^* \\
\Delta_p \phi_0^* &= \phi_0^* \Delta_p - \delta^* \pi^{*-1} i^* \\
&= \phi_0^* \Delta_p - \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} d^*
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} d^*(x_1 \times \cdots \times x_p) &= \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(x_1 \smile \cdots \smile x_p) \\
&= E_1(x_1 \smile \cdots \smile x_p).
\end{aligned}$$

(II)

(i) $$P^s\phi_0^*(x_1\times\cdots\times x_p)=\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\mu^{j(p-1)}\phi_0^*P^{s-j}(x_1\times\cdots\times x_p)\ \text{por el Corolario 1.3.14}$$
$$=\phi_0^*P^s(x_1\times\cdots\times x_p)+\sum_{j=1}^{s}(-1)^j\mu^{j(p-1)}\phi_0^*P^{s-j}(x_1\times\cdots\times x_p)$$
$$=\phi_0^*P^s(x_1\times\cdots\times x_p)+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}\mu^{j(p-1)-1}\nu\delta^*\pi^{*-1}i^*P^{s-j}(x_1\times\cdots\times x_p)$$
$$=\phi_0^*P^s(x_1\times\cdots\times x_p)+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}E_{2j(p-1)}P^{s-j}(x_1\smile\cdots\smile x_p),$$

donde la tercera igualdad se cumple por el Teorema 1.2.18.

(ii) Por el corolario 1.3.14, $Sq^s\phi_0^*=\sum_{j=0}^{s}\nu^j\phi_0^*Sq^{s-j}$. Entonces

$$Sq^s\phi_0^*(x_1\times x_2)=\sum_{j=0}^{s}\nu^j\phi_0^*Sq^{s-j}(x_1\times x_2)$$
$$=\phi_0^*Sq^s(x_1\times x_2)+\sum_{j=1}^{s}\nu^j\phi_0^*Sq^{s-j}(x_1\times x_2)$$
$$=\phi_0^*Sq^s(x_1\times x_2)+\sum_{j=1}^{s}\nu^{j-1}\eta_*\delta^*\pi^{*-1}i^*Sq^{s-j}(x_1\times x_2)\ \text{por el Teorema 1.2.18}$$
$$=\phi_0^*Sq^s(x_1\times x_2)+\sum_{j=1}^{s}E_jSq^{s-j}(x_1\smile x_2).$$

La última igualdad se cumple porque

$$E_j=\begin{cases}\mu^\alpha\nu\delta^*\pi^{*-1}d_0^{*-1}=\nu^{2\alpha}\nu\delta^*\pi^{*-1}d_0^{*-1}=\nu^{j-1}\delta^*\pi^{*-1}d_0^{*-1}, & \text{si } j=2\alpha+2,\\ \mu^\alpha\delta^*\pi^{*-1}d_0^{*-1}=\nu^{2\alpha}\delta^*\pi^{*-1}d_0^{*-1}=\nu^{j-1}\delta^*\pi^{*-1}d_0^{*-1}, & \text{si } j=2\alpha+1.\end{cases}$$

□

Teorema 2.5.7. *Sea $x\in H^*(K;\mathbb{Z}_p)$*

(I) *(i)* $\Delta_pE_{2\alpha+1}(x)=-E_{2\alpha+1}(\Delta_px)$

(ii) $\Delta_pE_{2\alpha+2}(x)=E_{2\alpha+3}(x)+E_{2\alpha+2}(\Delta_px)$

$$\textit{(II)} \quad \textit{(i)} \ P^s E_{2\alpha+1}(x) = \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+1} P^j(x)$$

$$\textit{(ii)} \ P^s E_{2\alpha+2}(x) = \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+2} P^j(x)$$

$$\textit{(iii)} \ Sq^s E_{\alpha+1}(x) = \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{\alpha+1+s-j} Sq^j(x) \ (s, \alpha \geq 0)$$

Demostración.

(I) (i) Como $\Delta_p \delta^* = -\delta^* \Delta_p$

$$\Delta_p E_1(x) = \Delta_p \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(x) = -\delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} \Delta_p(x) = -E_1 \Delta_p(x).$$

Luego, por el Teorema 1.3.8,

$$\Delta_p E_{2\alpha+1} = \Delta_p \mu^\alpha E_1 = -\mu^\alpha E_1 \Delta_p(x) = -E_{2\alpha+1} \Delta_p(x).$$

(ii)

$$\begin{aligned} \Delta_p E_{2\alpha+2}(x) &= \Delta_p \nu E_{2\alpha+1}(x) \quad \text{por la Observación 2.3.10} \\ &= (\mu - \nu \Delta_p) E_{2\alpha+1}(x) \quad \text{por el Teorema 1.3.8} \\ &= \mu E_{2\alpha+1}(x) - \nu \Delta_p E_{2\alpha+1}(x) \\ &= E_{2\alpha+3}(x) + \nu E_{2\alpha+1}(\Delta_p x) \quad \text{por (I) (i)} \\ &= E_{2\alpha+3}(x) + E_{2\alpha+2}(\Delta_p x). \end{aligned}$$

(II) (i) Inducción sobre $s + \alpha$

- Si $s + \alpha = 0$ entonces $s = \alpha = 0$, entonces $P^0 E_1(x) = E_1 P^0(x)$.
- Supongamos que se cumple (i) para $s + \alpha \leq l$. Sea $s + \alpha = l + 1$.
  - Si $\alpha = 0$ $(s = l + 1)$

$$\sum_{j=0}^{l+1} \binom{0}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+1} P^j(x) = E_1 P^{l+1}(x)$$

y por otra parte

$$P^s E_{2\alpha+1}(x) = P^{l+1} E_{2\alpha+1}(x) = P^{l+1} E_1(x) = E_1 P^{l+1}(x).$$

◇ Si $\alpha \geq 1$

$$
\begin{aligned}
P^s E_{2\alpha+1}(x) &= P^s \mu E_{2\alpha-1}(x) \\
&= \mu P^s E_{2\alpha-1}(x) + \mu^p P^{s-1} E_{2\alpha-1}(x) \quad \text{por el Teorema 1.3.9} \\
&= \mu \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha-1}{s-j} E_{\beta-2} P^j(x) + \mu^p \sum_{j=0}^{s-1} \binom{\alpha-1}{s-1-j} E_{\beta-2p} P^j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha-1}{s-j} E_{\beta} P^j(x) + \sum_{j=0}^{s-1} \binom{\alpha-1}{s-1-j} E_{\beta} P^j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{s-1} \left[\binom{\alpha-1}{s-j} + \binom{\alpha-1}{s-1-j} \right] E_{\beta} P^j(x) + \binom{\alpha-1}{s-s} E_{\beta} P^s(x) \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{\beta} P^j(x),
\end{aligned}
$$

donde $\beta = 2(s-j)(p-1) + 2\alpha + 1$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
P^s E_{2\alpha+2}(x) &= P^s \nu E_{2\alpha+1}(x) = \nu P^s E_{2\alpha+1}(x) \\
&= \nu \left[\sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+1} P^j(x) \right] \quad \text{por (II) (i)} \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+2} P^j(x).
\end{aligned}
$$

(iii) Inducción sobre $s + \alpha$

◇ Si $s + \alpha = 0$, entonces $s = \alpha = 0$ y $Sq^s E_{\alpha+1}(x) = E_1(x)$,

◇ Si $\alpha = 0$, $s > 0$

$$
\sum_{j=0}^{s} \binom{0}{s-j} E_{1+s-j} Sq^j(x) = E_1 Sq^s(x) = Sq^s E_1(x).
$$

- Si $\alpha = 2\alpha' > 0$

$$\begin{aligned}
Sq^s E_{\alpha+1} &= Sq^s E_{2\alpha'+1} = Sq^s \mu E_{2\alpha'-1} \\
&= Sq^s \nu^2 E_{2\alpha'-1} \quad \text{por el Teorema 1.2.6} \\
&= (\nu^2 Sq^{s-1} + \nu Sq^s)\nu E_{2\alpha'-1} \quad \text{por el Teorema 1.3.9} \\
&= \nu^2 Sq^{s-1} E_\alpha + \nu Sq^s E_\alpha \\
&= \nu^2 \sum_{j=0}^{s-1} \binom{\alpha-1}{s-1-j} E_{\beta-2} Sq^j + \nu \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha-1}{s-j} E_{\beta-1} Sq^j \\
&= \sum_{j=0}^{s-1} \binom{\alpha-1}{s-1-j} E_\beta Sq^j + \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha-1}{s-j} E_\beta Sq^j \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_\beta Sq^j,
\end{aligned}$$

donde $\beta = \alpha + s - j + 1$.

- Si $\alpha = 2\alpha' + 1$

$$\begin{aligned}
Sq^s E_{\alpha+1} &= Sq^s E_{2\alpha'+2} = Sq^s \nu E_{2\alpha'+1} \\
&= \nu^2 Sq^{s-1} E_{2\alpha'+1} + \nu Sq^s E_{2\alpha'+1} \\
&= \nu^2 \left(\sum_{j=0}^{s-1} \binom{\alpha-1}{s-j-1} E_{\beta-2} Sq^j \right) + \nu \left(\sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha-1}{s-j} E_{\beta-1} Sq^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{s-1} \binom{\alpha-1}{s-j-1} E_\beta Sq^j + \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha-1}{s-j} E_\beta Sq^j \\
&= \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_\beta Sq^j,
\end{aligned}$$

donde $\beta = \alpha + s - j + 1$.

$\square$

Teorema 2.5.8. *Sean x, y, x_α, $y_\beta \in H^*(K;\mathbb{Z}_p)$*

(i) $\phi_0^*(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p) \smile \phi_0^*(y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_p) =$

$$\sum_{j=1}^{p} (-1)^{\epsilon_j} \phi_0^* \left((x_1 \smile y_j) \times (x_2 \smile y_{j+1}) \times \cdots \times (x_p \smile y_{j-1}) \right),$$

donde $\epsilon_j = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{p} \dim y_\alpha\right) \left(\sum_{\alpha=1}^{j-1} \dim y_\alpha\right) + \sum_{\alpha=0}^{p-2} \sum_{\beta=\alpha+2}^{p} (\dim y_{\alpha+j})(\dim x_\beta)$.

(ii) $E_s(x) \smile \phi_0^*(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p) = 0$ *para* $s \geq 1$.

(iii) $E_s(x) \smile E_t(y) = 0$ *para* $s, t \geq 1$.

Demostración.

(i)
$$\begin{aligned}
&\phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) \smile \phi_0^*(y_1 \times \cdots \times y_p) \\
&= \phi_0^*\left((x_1 \times \cdots \times x_p) \smile \sigma(y_1 \times \cdots \times y_p)\right) \quad \text{por el Teorema 1.3.3} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \phi_0^*\left((x_1 \times \cdots \times x_p) \smile t^{*j}(y_1 \times \cdots \times y_p)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{\xi_j} \phi_0^*\left((x_1 \times \cdots \times x_p) \smile (y_{j+1} \times \cdots \times y_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{\xi_{j-1}} \phi_0^*\left((x_1 \times \cdots \times x_p) \smile (y_j \times \cdots \times y_{j-1})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{\xi_{j-1}+\theta_j} \phi_0^*\left((x_1 \smile y_j) \times (x_2 \smile y_{j+1}) \times \cdots \times (x_p \smile y_{j-1})\right).
\end{aligned}$$

donde ξ_j es la potencia de -1 obtenida al aplicar t^{*j} a $y_1 \times \cdots \times y_p$ y θ_j es la potencia de -1 que se obtiene al distribuir el producto copa sobre los productos cruz.

Como $t^*(a_1 \times \cdots \times a_p) = (-1)^{\dim a_1(\dim a_2 + \cdots + \dim a_p)}(a_2 \times \cdots \times a_1)$, el valor de ξ_j es

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{j} \dim y_\alpha \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{p} \dim y_\beta \right) &\equiv \sum_{\alpha=1}^{j} \left[\dim y_\alpha \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{p} \dim y_\beta \right) + \dim y_\alpha^2 + \dim y_\alpha \right] \quad \text{mód } 2 \\
&= \sum_{\alpha=1}^{j} \dim y_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{p} \dim y_\beta + 1 \right) \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^{j} \dim y_\alpha \right) \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{p} \dim y_\alpha \right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, de la fórmula $(a \times b) \smile (c \times d) = (-1)^{(\dim b)(\dim c)}(a \smile c) \times (b \smile d)$ se deduce que el valor de θ_j es ($\alpha + j$ se toma módulo p)

$$\sum_{\alpha=0}^{p-2} \sum_{\beta=\alpha+2}^{p} (\dim y_{\alpha+j})(\dim x_\beta).$$

(ii) En vista de las propiedades de productos de clases relativas:

$$\begin{aligned} E_1(x) \smile \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) &= \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(x) \smile \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) \\ &= j^* \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(x) \smile \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) \\ &= 0 \quad \text{porque por el Lema 2.5.4 } j^*\delta^* = 0. \end{aligned}$$

Además, como $E_{2\alpha+2} = \nu E_{2\alpha+1}$ y $E_{s+2\alpha} = \mu^\alpha E_s$ ($s > 0$, $\alpha \geq 0$), por la Observación 2.3.10, el resultado se sigue aplicando μ o ν sucesivamente.

(iii)
$$\begin{aligned} E_1(x) \smile E_1(y) &= \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(x) \smile \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(y) \\ &= j^* \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(x) \smile \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1}(y) \\ &= 0 \quad \text{porque por el Lema 2.5.4 } j^*\delta^* = 0. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 1.3.6 y las fórmulas de la observación 2.3.10 se tiene que $\mu^\alpha(a) \smile \mu^\beta(b) = \mu^{\alpha+\beta}(a \smile b)$ y

$$\eta_* \mu^\alpha(a) \smile \nu(b) = (-1)^{\dim a} \mu^\alpha \nu(a \smile b),$$

de estas igualdades se sigue el resultado.

□

2.6. Fórmula de Reducción

En los siguientes resultados $x \in H^q(K; \mathbb{Z}_p)$.

Teorema 2.6.1.

(i) Sea $p \geq 3$, entonces $y_{\sigma,s}(x) = \begin{cases} y_{\tau,s}(x), & \text{si } pq - s \text{ es par}, \\ 0, & \text{si } pq - s \text{ es impar}. \end{cases}$

(ii) Sea $p = 2$, entonces $y_{\sigma,s}(x) = y_{\tau,s}(x)$ para todo s.

Demostración. Por el Teorema 2.4.5

$$\kappa_\rho(x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} \Gamma_{pq-s}^{\bar{\rho}}(y_{\rho,s}(x)),$$

en particular

$$\kappa_\tau(x\times\cdots\times x)=\sum_{s=q}^{pq-1}\Gamma^{\sigma}_{pq-s}(y_{\tau,s}(x))$$

$$\psi_\sigma\kappa_\tau(x\times\cdots\times x)=\sum_{s=q}^{pq-1}\psi_\sigma\Gamma^{\sigma}_{pq-s}(y_{\tau,s}(x)) \qquad \text{luego, por el Lema 1.2.20}$$

$$\kappa_\sigma(x\times\cdots\times x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\ \text{par}}}^{pq-1}\Gamma^{\tau}_{pq-s}(y_{\tau,s}(x)), & \text{si } p\geq 3,\\ \displaystyle\sum_{s=q}^{pq-1}\Gamma^{\tau}_{pq-s}(y_{\tau,s}(x)), & \text{si } p=2.\end{cases}$$

Y el Teorema 2.4.5 para $\rho=\sigma$ establece que

$$\kappa_\sigma(x\times\cdots\times x)=\sum_{s=q}^{pq-1}\Gamma^{\tau}_{pq-s}(y_{\sigma,s}(x))$$

Luego, igualando término a término se sigue el resultado. □

Corolario 2.6.2. $\chi_{\sigma,q}\equiv\chi_{\tau,q}$ para todo p y q. También $y_{\sigma,q+1}(x)=0$.

Demostración. Para $p=2$ es inmediato que $\chi_{\sigma,q}\equiv\chi_{\tau,q}$ pues son los únicos coeficientes no nulos. Para $p\geq 3$, tomando $q=s$ en el Teorema 2.6.1 se tiene que $pq-s=q(p-1)$ es par y por tanto

$$\chi_{\sigma,q}x=y_{\sigma,q}(x)=\chi_{\tau,q}x$$

luego, tomando un elemento no nulo x, como el generador de $H^q(S^q,\mathbb{Z}_p)$, se garantiza que $\chi_{\sigma,q}\equiv\chi_{\tau,q}$.

Por otra parte, tomando $s=q+1$ en el Teorema 2.6.1 y como $pq-s=pq-q-q=(p-q)q-1$ es impar se sigue que $y_{\sigma,q+1}(x)=0$. □

Teorema 2.6.3. *Si $p \geq 3$ y $pq - s$ es impar,* $y_{\tau,s}(x) = \Delta_p y_{\sigma,s-1}(x)$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\Delta_p \phi_0^*(x \times \cdots \times x) &= \Delta_p \left(\sum_{s=q}^{pq-1} E_{pq-s}(y_{\sigma,s}(x)) \right) \quad \text{por el Teorema 2.4.9} \\
&= \sum_{\substack{s=q \\ pq-s \text{ par}}}^{pq-1} \Delta_p E_{pq-s} y_{\sigma,s}(x) \quad \text{por el Teorema 2.6.1} \\
&= \sum_{\substack{s=q \\ pq-s \text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1} y_{\sigma,s}(x) + \sum_{\substack{s=q \\ pq-s \text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s} \Delta_p y_{\sigma,s}(x) \quad \text{por el Teorema 2.5.7.}
\end{aligned}
$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\phi_0^* \Delta_p (x \times \cdots \times x) &= \phi_0^* \left(\sum_{j=0}^{p-1} t^{*j} (\Delta_p x \times x \times \cdots \times x) \right) \quad \text{por la fórmula de Cartan} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \phi_0^* t^{*j} (\Delta_p x \times x \times \cdots \times x) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} (t^j \phi_0)^* (\Delta_p x \times x \times \cdots \times x) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \phi_0^* (\Delta_p x \times x \times \cdots \times x) \\
&= p \phi_0^* (\Delta_p x \times x \times \cdots x) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por el Teorema 2.5.6, $\Delta_p \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p) = \phi_0^* \Delta_p (x_1 \times \cdots \times x_p) - E_1(x_1 \smile \cdots \smile x_p)$, entonces, por el Teorema 2.4.10,

$$
\Delta_p \phi_0^*(x \times \cdots \times x) - \phi_0^* \Delta_p (x \times \cdots \times x) = \sum_{s=q}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))
$$

y sustituyendo las expresiones anteriores

$$
\sum_{\substack{s=q \\ pq-s \text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1} y_{\sigma,s}(x) + \sum_{\substack{s=q \\ pq-s \text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s}(\Delta_p y_{\sigma,s}(x)) = \sum_{s=q}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))
$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}y_{\sigma,s}(x)+\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s}(\Delta_p y_{\sigma,s}(x)) &= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ impar}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))+\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))\\
&= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ impar}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))+\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)),\\
\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}y_{\sigma,s}(x)-\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) &= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ impar}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))-\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s}(\Delta_p y_{\sigma,s}(x)),\\
0 &= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ impar}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))-\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s}(\Delta_p y_{\sigma,s}(x)).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se da por el Teorema 2.6.1. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ impar}}}^{pq-1} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x))-\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-1} E_{pq-s}(\Delta_p y_{\sigma,s}(x))\\
&= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-2} E_{pq-s}(y_{\tau,s+1}(x))-\sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-2} E_{pq-s}(\Delta_p y_{\sigma,s}(x))\\
&= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-2} E_{pq-s}\big(y_{\tau,s+1}(x)-\Delta_p y_{\sigma,s}(x)\big)\\
&= \sum_{\substack{s=q\\ pq-s\text{ par}}}^{pq-2} E_{pq+1-(s+1)}\big(y_{\tau,s+1}(x)-\Delta_p y_{\sigma,s}(x)\big).
\end{aligned}$$

Obsérvese que $\left\lfloor \frac{pq+1+p-1}{p} \right\rfloor = q+1$, así que la sumatoria anterior es la descomposición canónica del elemento $0 \in N^{pq+1}(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$. Luego, por el Teorema 2.4.8, se tiene que $y_{\tau,s+1}(x) = \Delta_p y_{\sigma,s}(x)$ si $pq-s$ es par. $\square$

Lema 2.6.4.

(i) $E_{q(p-1)+2}(x) = \sum_{j=0}^{\frac{q}{2}-1} (-1)^{q/2+j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{q/2-j}(x)$ *si* $p \geq 3$ *y* q *es par.*

(ii) $E_{q(p-1)+p+1}(x) = \sum_{j=0}^{(q-1)/2} (-1)^{(q+1)/2+j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{(q+1)/2-j}(x)$ *si* $p \geq 3$ *y* q *es impar.*

(iii) $E_{q+1}(x) = \sum_{j=0}^{q-1} E_{j+1} Sq^{q-j}(x)$ *si* $p = 2$.

Demostración. Sea $\bar{x} = x \times 1 \times \cdots \times 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mu P^s \phi_0^*(\bar{x}) &= \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \mu^{j(p-1)} P^{s-j} \mu \phi_0^*(\bar{x}) \quad \text{por el Corolario 1.3.10} \\
&= \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \mu^{j(p-1)} \mu \phi_0^* P^{s-j}(\bar{x}) \quad \text{por el Corolario 1.3.11} \\
&= \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \mu^{j(p-1)} \nu \delta^* \pi^{*-1} i^* P^{s-j}(\bar{x}) \quad \text{por el Teorema 1.2.18} \\
&= \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} \mu^{j(p-1)} \nu \delta^* \pi^{*-1} d_0^{*-1} P^{s-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{s} (-1)^{j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{s-j}(x).
\end{aligned}
$$

Pero por la dimensión de $\bar{x}$ y el Corolario 1.3.5 se tiene que

$$
\begin{cases}
\mu P^{q/2} \phi_0^*(\bar{x}) = \mu\left(\phi_0^*(\bar{x}) \smile \phi_0^*(\bar{x}) \smile \cdots \smile \phi_0^*(\bar{x})\right) = 0, & \text{si } q \text{ es par,} \\
\mu P^{(q+1)/2} \phi_0^*(\bar{x}) = 0, & \text{si } q \text{ es impar.}
\end{cases}
$$

y entonces

$$
\begin{cases}
\sum_{j=0}^{q/2} (-1)^{j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{q/2-j}(x) = 0, & \text{si } q \text{ es par,} \\
\sum_{j=0}^{(q+1)/2} (-1)^{j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{(q+1)/2-j}(x) = 0, & \text{si } q \text{ es impar.}
\end{cases}
$$

Esto prueba (i) y (ii).

(iii)
$$\begin{aligned}
\nu Sq^s \phi_0^*(\bar{x}) &= \sum_{k=0}^{s} \nu^k Sq^{s-k} \nu \phi_0^*(\bar{x}) \quad \text{por el Corolario 1.3.10}\\
&= \sum_{k=0}^{s} \nu^k \nu \phi_0^* Sq^{s-k}(\bar{x}) \quad \text{por el Corolario 1.3.11}\\
&= \sum_{k=0}^{s} \nu^{k+1} \phi_0^* Sq^{s-k}(\bar{x})\\
&= \sum_{k=0}^{s} \nu^k \delta^* \pi^{*-1} i^* Sq^{s-k}(\bar{x}) \quad \text{por el Teorema 1.2.18}\\
&= \sum_{k=0}^{s} E_{k+1} Sq^{s-k}(x).
\end{aligned}$$

Por otra parte $\nu Sq^q \phi_0^*(\bar{x}) = \nu(\phi_0^*(\bar{x}) \smile \phi_0^*(\bar{x})) = 0$, por el Corolario 1.3.5, y por tanto

$$\sum_{k=0}^{q} E_{k+1} Sq^{q-k}(x) = 0.$$

□

En vista del corolario 2.6.2 denotemos por χ_q a $\chi_{q,\tau} \equiv \chi_{q,\sigma}$.

Lema 2.6.5.

(i) $E_{q+1}(x) = \sum_{s=q+1}^{2q} E_{2q-s+1}(y_{\sigma,s}(x))$ *para* $p = 2$.

(ii) $E_{q(p-1)+2}(x) = -\chi_q^{-1}\left(\sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+2}(y_{\sigma,s}(x))\right)$.

(iii) $E_{q(p-1)+p+1}(x) = -\chi_q^{-1} \sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+p+1}(y_{\sigma,s}(x))$.

Demostración.

(i) Por el Teorema 2.4.10 para todo $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$ existe un único sistema $\{y_{\tau,s}(x)\}$ de elementos, $s = q+1, \ldots, pq$, donde $y_{\tau,s}(x) \in H^s(K;\mathbb{Z}_p)$ y $\sum_{s=q}^{pq} E_{pq-s+1}(y_{\tau,s}(x)) = 0$.

Entonces

$$\begin{aligned}
-E_{q+1}(y_{\tau,q}(x)) &= \sum_{s=q+1}^{2q} E_{2q-s+1}(y_{\tau,s}(x)),\\
-\chi_{\tau,q}E_{q+1}(x) &= \sum_{s=q+1}^{2q} E_{2q-s+1}(y_{\tau,s}(x)) \quad \text{por el Teorema 2.4.5,}\\
E_{q+1}(x) &= \sum_{s=q+1}^{2q} E_{2q-s+1}(y_{\tau,s}(x)) \quad \text{ porque } \chi_{\tau,q} \not\equiv 0 \mod 2\\
&= \sum_{s=q+1}^{2q} E_{2q-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) \quad \text{por el Teorema 2.6.1.}
\end{aligned}$$

(ii) Por el Teorema 2.4.6 los elementos $y_{\sigma,s}(x)$ satisfacen

$$\sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\sigma}_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0$$

componiendo con $I^{*-1}\gamma_\tau$ se tiene

$$\begin{aligned}
I^{*-1}\gamma_\tau \sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\sigma}_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) &= 0,\\
\sum_{s=q}^{pq} I^{*-1}\gamma_\tau \Gamma^{\sigma}_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) &= 0,\\
\sum_{s=q}^{pq} E_{pq-s+2}(y_{\sigma,s}(x)) &= 0 \quad \text{por el Lema 1.2.20.}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E_{q(p-1)+2}(\chi_{\sigma,q}x) &= -\sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+2}(y_{\sigma,s}(x)),\\
E_{q(p-1)+2}(x) &= -\chi_{\sigma,q}^{-1} \sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+2}(y_{\sigma,s}(x)).
\end{aligned}$$

(iii) Nuevamente, por el Teorema 2.4.6 los elementos $y_{\sigma,s(x)}$ satisfacen

$$\sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\sigma}_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0$$

componiendo con una sucesión de p gammas; $\gamma_\tau \cdots \gamma_\sigma \gamma_\tau$ y luego con I^{*-1} se tiene

$$\gamma_\tau \cdots \gamma_\sigma \gamma_\tau \sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\sigma}_{pq-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0,$$

$$\sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\tau}_{pq-s+p+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0,$$

$$I^{*-1} \sum_{s=q}^{pq} \Gamma^{\tau}_{pq-s+p+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0,$$

$$\sum_{s=q}^{pq} E_{pq-s+p+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0.$$

Entonces

$$E_{q(p-1)+p+1}(\chi_{\sigma,q} x) = -\sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+p+1}(y_{\sigma,s}(x))$$

$$E_{q(p-1)+p+1}(x) = -\chi_{\sigma,q}^{-1} \sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+p+1}(y_{\sigma,s}(x)).$$

□

Teorema 2.6.6.

(i) Sea $p \geq 3$, entonces $y_{\sigma,s}(x) = (-1)^j \chi_q P^j(x)$ si $s = q + 2j(p-1)$ y 0 en otro caso.

(ii) Sea $p = 2$, entonces $y_{\sigma,s}(x) = Sq^{s-q}(x)$.

Demostración.

(i) Si q es par, por los Lemas 2.6.4 y 2.6.5 se tiene

$$\sum_{j=0}^{q/2-1} (-1)^{q/2+j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{q/2-j}(x) + \chi_q^{-1} \sum_{s=q+1}^{pq} E_{pq-s+2}(y_{\sigma,s}(x)) = 0,$$

donde la primera suma corre sobre los homomorfismos E_2 a $E_{qp-q-2(p-1)+2}$ y la segunda de E_2 a E_{pq-q+1}, en ambos casos los valores en los subíndices no exceden el valor $pq-q+1$. Y como $\left\lfloor \frac{pq+2+p-1}{p} \right\rfloor = q+1$, la suma es la descomposición canónica del $0 \in N^{pq+2}(\mathfrak{X}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{s=q+1}^{pq+1} E_{pq+2-s} H^s(K; \mathbb{Z}_p)$. Entonces, igualando los correspondientes términos en E_{pq+2-s}, se tiene

$$(-1)^{q/2+j+1} P^{q/2-j}(x) + \chi_q^{-1} y_{\sigma,q+(p-1)(q-2j)}(x) = 0$$

y entonces $y_{\sigma,s}(x) = 0$ si $s - q \not\equiv 0 \mod 2(p-1)$. Esto prueba (i) cuando q es par. Si q es impar por los Lemas 2.6.4 y 2.6.5 se tiene

$$\sum_{j=0}^{(q-1)/2} (-1)^{(q+1)/2+j+1} E_{2j(p-1)+2} P^{(q+1)/2-j}(x) + \chi_q^{-1} \sum_{s=q+2}^{pq} E_{pq-s+p+1} y_{\sigma,s}(x) = 0$$

pues, por el Corolario 2.6.2 $y_{\sigma,q+1} = 0$. La primera suma corre de E_2 a $E_{(q-1)(p-1)+2}$ y la segunda de E_{p+1} a $E_{pq-q+p-1}$, en ambos casos el subíndice no excede $pq + p - q - 1$ y como $\left\lfloor \frac{pq+p+1+p-1}{p} \right\rfloor = q + 2$, la suma combinada es la descomposición de $0 \in N^{pq+p+1}(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_p)$. Luego

$$(-1)^{(q+1)/2+j+1} P^{(q+1)/2-j}(x) + \chi_q^{-1} y_{\sigma,q+(p-1)(q+1-2j)}(x) = 0$$

y entonces $y_{\sigma,s}(x) = 0$ si $s - q \not\equiv 0 \mod 2(p-1)$. Esto prueba (i) cuando q es impar.

(ii) De los lemas 2.6.4 y 2.6.5 se tiene

$$\sum_{j=0}^{q-1} E_{j+1} Sq^{q-j}(x) - \sum_{s=q+1}^{2q} E_{2q-s+1}(y_{\sigma,s}(x)) = 0.$$

Como el subíndice en el homomorfismo E no excede q en ambos casos y $\left\lfloor \frac{2q+1+1}{2} \right\rfloor = q + 1$, la suma es la descomposición del elemento $0 \in N^{2q+1}(\mathfrak{B}(K), \mathfrak{d}(K); \mathbb{Z}_2)$. Por tanto

$$Sq^{s-q}(x) - y_{\sigma,s}(x) = 0.$$

□

Corolario 2.6.7. $\chi_q = (-1)^{q/2}$ si q es par.

Demostración. Cuando $j = \frac{q}{2}$ en el Teorema 2.6.6 (i) se tiene

$$y_{\sigma,pq}(x) = (-1)^{q/2} \chi_q P^{q/2}(x), \qquad \text{pues } s = q + q(p-1) = pq$$

y, tomando un elemento x no nulo, de $y_{\sigma,pq}(x) = x \smile \cdots \smile x = P^{q/2}(x)$ se tiene que $\chi_q = (-1)^{q/2}$. □

Corolario 2.6.8.

(i) Sea $p \geq 3$ entonces

$$y_{\tau,s}(x) = \begin{cases} (-1)^j \chi_q P^j(x), & \text{si } s = q + 2j(p-1), \\ (-1)^j \chi_q \Delta_p P^j(x), & \text{si } s = q + 2j(p-1) + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(ii) Si $p = 2$, $y_{\tau,s}(x) = Sq^{s-q}(x)$.

Demostración. Es consecuencia directa de los Teoremas 2.6.1, 2.6.3 y 2.6.6. □

Del Teorema 2.6.6 y 2.4.9 se tiene que

Teorema 2.6.9 (Fórmula de reducción)**.** *Sea $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, entonces*

(i) $\phi_0^*(x \times x \times \cdots \times x) = \chi_q \sum_{0 \leq j < q/2} (-1)^j E_{(p-1)(q-2j)} P^j(x)$ *si* $p \geq 3$.

(ii) $\phi_0^*(x \times x) = \sum_{j=0}^{q-1} E_{q-j} Sq^j(x)$ *si* $p = 2$.

Del Corolario 2.6.8 y el Teorema 2.4.10 se tiene que

Teorema 2.6.10 (Fórmula de reducción)**.** *Sea $x \in H^q(K;\mathbb{Z}_p)$, entonces*

(i) Si $p \geq 3$

$$E_{(p-1)q+1}(x) = \sum_{0 < j \leq q/2} (-1)^{j+1} E_{(p-1)(q-2j)+1} P^j(x) + \sum_{0 \leq j < q/2} (-1)^{j+1} E_{(p-1)(q-2j)} \Delta_p P^j(x).$$

(ii) $E_{q+1}(x) = \sum_{j=1}^{q} E_{q-j+1} Sq^j(x)$ *si* $p = 2$.

Observación 2.6.11. Como consecuencia del corolario 2.6.8 se puede adoptar al sistema de $(p-1)q$ elementos $\{y_{\tau,s}(x)\}$ del Teorema 2.4.10 como la definición de las potencias reducidas o cuadrados de Steenrod respectivamente.

2.7. Productos cíclicos de esferas

Sea e_n el generador de $H^n(S^n;\mathbb{Z}_p)$ y sea

$$a_s = j^* E_{s-n}(e_n) \in H^s(\mathfrak{B}(S^n);\mathbb{Z}_p)$$

para $n+2 \leq s \leq np$. Sea $1 \leq q \leq p$ y $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_q\}$ un conjunto de q enteros distintos módulo p. Pongamos

$$g_{nq}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q) = \phi^*(x_1 \times \cdots \times x_p) \in H^{nq}(\mathfrak{B}(S^n); \mathbb{Z}_p)$$

donde $x_j = \begin{cases} e_n, & \text{si } j \equiv \alpha_i \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, q\}, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Teorema 2.7.1. *a_s y $g_{nq}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ son elementos no cero de $H^*(\mathfrak{B}(S^n); \mathbb{Z}_p)$,*

$$g_{nq}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \pm g_{nq}(\beta_1, \ldots, \beta_q)$$

si y sólo si existe un entero k tal que $\{\alpha_1 + k, \alpha_2 + k, \ldots, \alpha_q + k\} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q\}$ y, salvo signo, existen $\binom{p}{q}/p$ elementos $g_{nq}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ linealmente independientes para $q < p$. $H^*(\mathfrak{B}(S^n); \mathbb{Z}_p)$ es generado por los elementos 1, a_s $(n+2 \leq s \leq np)$ y $g_{nq}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ para $1 \leq q \leq p-1$ y todo conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q\}$. Más aún $g_{np}(1, 2, \ldots, p) = \chi_n a_{np}$ donde $(\chi_n \not\equiv 0 \mod p)$.

Demostración. Por el Teorema 2.5.5 una base para $H^r(\mathfrak{B}(K); \mathbb{Z}_p)$ $(r \geq 1)$ está dada por la unión del conjunto

$$\left\{ j^* E_{r-s}(b) \,\middle|\, \left\lfloor \frac{r+p-1}{p} \right\rfloor \leq s \leq r-2, b \in \Omega^*(K; \mathbb{Z}_p), \dim b = s \right\}$$

y el conjunto $\left\{\phi^*(w) \,|\, w \in B_t'^r(\Omega^*(K; \mathbb{Z}_p))\right\}$. Para $K = S^n$, r está limitado por $r \leq pn$ y la unión de los conjuntos del primer tipo es

$$\{j^* E_{s-n}(e_n) \,|\, n+2 \leq s \leq np\} = \{a_s \,|\, n+2 \leq s \leq np\}.$$

Además $g_{np}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \phi^*(x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p)$ donde $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p \in B_t'^{nq}(\Omega^*(S^n; \mathbb{Z}_p))$ si $1 \leq q \leq p-1$ y

$$\begin{aligned}
g_{nq}(1, \ldots, p) &= \phi^*(e_n \times \cdots \times e_n) \\
&= j^* \phi_0^*(e_n \times \cdots \times e_n) \\
&= j^* \sum_{s=q}^{pq-1} E_{pq-s}(y_{\sigma,s}(x)) \quad \text{por el Teorema 2.4.9 con } q = n \text{ y } x = e_n. \\
&= j^* \sum_{s=n}^{pn-1} E_{pn-s}(y_{\sigma,s}(e_n)) \quad \text{donde } y_{\sigma,n}(e_n) = \chi_{\sigma,n} e_n \in H^n(S^n; \mathbb{Z}_p) \\
&= j^* E_{pn-n}(\chi_n e_n) \quad \text{por el Teorema 2.6.6 y la estructura de } H^*(S^n; \mathbb{Z}_p) \\
&= \chi_n j^* E_{pn-n}(e_n) \\
&= \chi_n a_{pn}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.7.2.

(i) $\Delta_p g_{nq}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) = 0$; $\Delta_p a_{n+2\alpha+1} = 0$, $\Delta_p a_{n+2\alpha+2} = a_{n+2\alpha+3}$.

(ii) $P^s g_n(1) = (-1)^{s+1} a_{n+2s(p-1)}$ *si* $s \neq 0$, $P^s g_{nq}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) = 0$ *si* $q > 1$ *y* $s \neq 0$.
$P^s a_{n+2\alpha+1} = \binom{\alpha}{s} a_{n+2s(p-1)+2\alpha+1}$, $P^s a_{n+2\alpha+2} = \binom{\alpha}{s} a_{n+2s(p-1)+2\alpha+2}$.

(iii) $Sq^s g_n(1) = a_{n+s}$, $Sq^s a_{n+\alpha+1} = \binom{\alpha}{s} a_{n+\alpha+s+1}$.

Demostración.

(i)
$$\begin{aligned}\Delta_p g_{nq}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) &= \Delta_p j^*\phi_0^*(x_1\times\cdots\times x_p)\\ &= j^*\Delta_p\phi_0^*(x_1\times\cdots\times x_p)\\ &= j^*(\phi_0^*\Delta_p(x_1\times\cdots\times x_p) - \delta^*\pi^{*-1}(x_1\smile\cdots\smile x_p)) \text{ por 1.3.7}\\ &= j^*\phi_0^*\Delta_p(x_1\times\cdots\times x_p) = 0.\end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se da por la sucesión exacta del par, $j^*\delta^* = 0$, y la última se obtiene al aplicar la fórmula de Cartan.
Por otra parte

$$\Delta_p a_{n+2\alpha+1} = \Delta_p j^* E_{2\alpha+1}(e_n) = j^*\Delta_p E_{2\alpha+1}(e_n) = -j^* E_{2\alpha+1}(\Delta_p e_n) = 0$$

donde la tercera igualdad se da por el Teorema 2.5.7.

Finalmente

$$\begin{aligned}\Delta_p a_{n+2\alpha+2} &= \Delta_p j^* E_{2\alpha+2}(e_n)\\ &= j^*\Delta_p E_{2\alpha+2}(e_n)\\ &= j^*(E_{2\alpha+3}(e_n) + E_{2\alpha+2}(\Delta_p e_n)) \text{ por el Teorema 2.5.7}\\ &= j^* E_{2\alpha+3}(e_n)\\ &= a_{n+2\alpha+3}.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}P^s g_n(1) &= P^s\phi^*(e_n\times 1\times\cdots\times 1)\\ &= j^*P^s\phi_0^*(e_n\times 1\times\cdots\times 1) \text{ por el Teorema 2.5.6 y fórmulas de Cartan;}\\ &= j^*\left[\phi_0^* P^s(e_n\times 1\times\cdots\times 1) + \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}E_{2j(p-1)}P^{s-j}(e_n\smile 1\smile\cdots\smile 1)\right]\\ &= j^*\left[(-1)^{s+1}E_{2s(p-1)}(e_n)\right]\\ &= (-1)^{s+1} j^* E_{2s(p-1)}(e_n)\\ &= (-1)^{s+1} a_{n+2s(p-1)}.\end{aligned}$$

Si $q > 1$ y $s \neq 0$

$$\begin{aligned}
P^s g_{nq}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) &= P^s j^* \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p)\\
&= j^*(P^s \phi_0^*(x_1 \times \cdots \times x_p)), \text{ aplicando el Teorema 2.5.6;}\\
&= j^*\left[\phi_0^* P^s(x_1 \times \cdots \times x_p) + \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1} E_{2j(p-1)} P^{s-j}(x_1 \smile \cdots \smile x_p)\right]\\
&= j^*\left[\phi_0^* P^s(x_1 \times \cdots \times x_p)\right] \quad \text{pues } x_1 \smile x_2 \smile \cdots \smile x_p = 0 \ \ (q > 1)\\
&= 0 \quad \text{por fórmulas de Cartan.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^s a_{n+2\alpha+1} &= j^* P^s E_{2\alpha+1}(e_n)\\
&= j^* \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+1} P^j(e_n) \quad \text{por el Teorema 2.5.7}\\
&= j^* \binom{\alpha}{s} E_{2s(p-1)+2\alpha+1}(e_n)\\
&= \binom{\alpha}{s} a_{n+2s(p-1)+2\alpha+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^s a_{n+2\alpha+2} &= j^* P^s E_{2\alpha+2}(e_n)\\
&= j^* \sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{2(s-j)(p-1)+2\alpha+2} P^j(e_n) \quad \text{por el Teorema 2.5.7}\\
&= j^* \binom{\alpha}{s} E_{2s(p-1)+2\alpha+2}(e_n)\\
&= \binom{\alpha}{s} a_{n+2s(p-1)+2\alpha+2}.
\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}
Sq^s g_n(1) &= j^* Sq^s \phi_0^*(e_n \times 1)\\
&= j^*\left[\phi_0^* Sq^s(e_n \times 1) + \sum_{j=1}^{s} E_j Sq^{s-j}(e_n \smile 1)\right] \quad \text{por el Teorema 2.5.6}\\
&= j^* E_s(e_n) = a_{n+s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sq^s a_{n+\alpha+1} &= j^* Sq^s E_{\alpha+1}(e_n) \\
&= j^* \left[\sum_{j=0}^{s} \binom{\alpha}{s-j} E_{\alpha+1+s-j} Sq^j(e_n) \right] \quad s,\alpha \geq 0 \quad \text{por el Teorema 2.5.7} \\
&= j^* \binom{\alpha}{s} E_{\alpha+1+s} Sq^0(e_n) \\
&= \binom{\alpha}{s} a_{n+\alpha+s+1}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.7.3. *Sea $p \geq 3$, entonces* $g_n(1) \smile g_n(1) = \begin{cases} 2\sum_{k=2}^{(p-1)/2} g_{2n}(1,k), & \text{si } n \text{ es par}, \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$
Sea $p = 2$, entonces $g_n(1) \smile g_n(1) = a_{2n}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
g_n(1) \smile g_n(1) &= j^*\phi_0^*(e_n \times 1 \times \cdots \times 1) \smile j^*\phi_0^*(e_n \times 1 \times \cdots \times 1) \\
&= j^* \left[\phi_0^*(e_n \times 1 \times \cdots \times 1) \smile \phi_0^*(e_n \times 1 \times \cdots \times 1) \right] \\
&= j^* \left[\sum_{j=1}^{p} (-1)^{\epsilon_j} \phi_0^*((e_n \smile y_j) \times (1 \smile y_{j+1}) \times \cdots \times (1 \smile y_{j-1})) \right] \text{ por 2.5.8} \\
&= j^* \left(\sum_{j=2}^{p} \phi_0^*(e_n \times \cdots 1 \times \cdots \times \underbrace{e_n}_{j^\circ} \times \cdots \times 1) \right) \\
&= \sum_{j=2}^{p} g_{2n}(1,j) \\
&= 2 \sum_{k=2}^{(p-1)/2} g_{2n}(1,j)
\end{aligned}$$

donde $(y_1 \times \cdots \times y_p) = (e_n \times 1 \times \cdots \times 1)$ y $\epsilon_j = (1+n)\left(\sum_{\alpha=1}^{j} \dim y_\alpha\right) \equiv 0 \mod 2$.

Si $p = 2$, el análisis anterior implica que $g_n(1) \smile g_n(1) = g_{2n}(1,2)$ que coincide con a_{2n} en vista de la última afirmación del Teorema 2.7.1. □

Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolló la teoría presentada por Nakaoka en [7], enmarcada en la teoría de cohomología simplicial. Es importante notar que la introducción de los grupos especiales de cohomología para estudiar la cohomología del espacio de órbitas es eficaz, pues permite entender la imagen del homomorfismo cociente y más aún bajo la condición de casi regularidad permite también hacer una descripción del kernel de tal homomorfismo.

En el segundo capítulo se aplicó la teoría desarrollada en el capítulo 1 al caso específico de productos cíclicos de orden primo. En este caso es posible dar una descripción completa del kernel del homomorfismo cociente, lo que implica una descomposición directa de los grupos de cohomología del espacio de órbitas en términos de imágenes de morfismos que dependen sólo del espacio original y esto permite entender totalmente la estructura multiplicativa y como módulo sobre el álgebra de Steenrod.

Finalmente, la descripción completa que se hace de la cohomología de espacios de órbitas es de gran utilidad para determinar otros espacios cocientes, por ejemplo el tercer producto simétrico de esferas, como el mismo Nakaoka muestra en [7].

Listado de símbolos

Símbolo	**Descripción**	**Pág.**
t	Transformación periódica de periodo primo	1
σ	Homomorfismo de cocadenas $1 + t^{\#} + \cdots + t^{\# p-1}$	1
τ	Homomorfismo de cocadenas $1 - t^{\#}$	1
ρ	Denota a una de las funciones σ o τ mientras que $\bar{\rho}$ denota a la otra	1
${}^{\rho^{-1}}C^r(W,W';G)$	Kernel del homomorfismo ρ	2
${}^{\rho}C^r(W,W';G)$	Imagen del homomorfismo ρ	2
${}^{\rho^{-1}}H^r(W,W';G)$	Grupo ρ^{-1}-especial de cohomología	2
${}^{\rho}H^r(W,W';G)$	Grupo ρ-especial de cohomología	2
α_ρ	Homomorfismo de la sucesión exacta de Richardson-Smith	2
β_ρ	Homomorfismo inducido por ρ en la sucesión de Richardson-Smith	2
γ_ρ	Homomorfismo de conexión en la sucesión de Richardson-Smith	2
ρ^*	Homomorfismo en cohomología inducido por ρ	4
Q_ρ	Homomorfismo de cocadenas tal que $p\rho = Q_\rho \rho^2$	5
W_t	Espacio de órbitas del complejo simplicial W bajo la acción de t	6
π	Función cociente $W \longrightarrow W_t$	6
F_t	Espacio de órbitas del subcomplejo de puntos fijos de W	6
I^*	El homomorfismo π^* correstringido a su imagen	7
π^*	Homomorfismo en cohomología inducido por π	7
η	Función de reducción de coeficientes módulo p	8
$\psi_{\bar{\rho}}$	Homomorfismo entre los grupos ρ y $\bar{\rho}$-especiales de cohomología	8
μ	Homomorfismo $I^{*-1}\gamma_\tau\gamma_\sigma I^*$	10
ν	Homomorfismo $I^{*-1}\psi_\sigma\gamma_\sigma I^*$	10
κ_ρ	Homomorfismo $H^r(W,W';G) \to {}^{\rho}H^r(W,W' \cup F;G_p)$	11
ϕ^*	Homomorfismo inducido en cohomología por el transfer ϕ	12
ϕ_0^*	Homomorfismo ϕ reducido módulo p	12
ϑ_ρ	Homomorfismo $H^r(W' \cup F,W';G) \to {}^{\bar{\rho}}H^{r+1}(W,W' \cup F;G_p)$	13
$\bar{\Gamma}_s^\rho$	Homomorfismo $H^q(W' \cup F,W';G) \to {}^{\bar{\rho}}H^{q+s}(W,W' \cup F;G_p)$	15
${}^{\rho}N^r(W,W' \cup F;\mathbb{Z}_p)$	Kernel del homomorfismo $\alpha_{\bar{\rho}}$	27

Símbolo	**Descripción**	**Pág.**
K	Un complejo simplicial finito	29
$\mathfrak{X}_{(p)}(K)$	p-ésimo producto cartesiano de K	29
$\mathfrak{D}_{(p)}(K)$	Espacio de puntos fijos de $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$	30
$\mathfrak{d}$	Imagen de la proyección $\pi : \mathfrak{X}_{(p)}(K) \to \mathfrak{B}_{(p)}(K)$	30
$\mathfrak{B}_{(p)}(K)$	Espacio de órbitas de $\mathfrak{X}_{(p)}(K)$ bajo la acción de t	30
d	Función diagonal $d : K \to \mathfrak{X}(K)$	30
d^*	Homomorfismo inducido en cohomología de la función diagonal d.	30
d_0^*	Función d correstringida a su imagen	30
$\Omega^*(K;G)$	Base homogénea para el espacio vectorial $H^*(K;G)$	30
$B^r(\Omega^*(K;G))$	Base para $H^r(\mathfrak{X}(K);G)$	31
$B'^r(\Omega^*(K;G))$	Subconjunto de elementos no diagonales en $B^r(\Omega^*(K;G))$	31
$B''^r(\Omega^*(K;G))$	Subconjunto de los elementos diagonales en $B^r(\Omega^*(K;G))$	31
$V'^r(\Omega^*(K;G))$	Espacio vectorial generado por $B'^r(\Omega^*(K;G))$	31
$V''^r(\Omega^*(K;G))$	Espacio vectorial generado por $B''^r(\Omega^*(K;G))$	31
$B_t'^r(\Omega^*(K;G))$	Subbase de $V'^r(\Omega^*(K;G))$	31
Γ_s^ρ	Homomorfismo $\overline{\Gamma}_s^\rho d_0^{*-1}$	36
$\chi_{\rho,n}$	Entero módulo p no nulo tal que $\kappa_\rho(e_n \times e_n \times \cdots \times e_n) = \chi_{\rho,n}\Gamma_{n(p-1)}^{\bar{\rho}}(e_n)$	38
E_s	Homomorfismo $I^{*-1}\Gamma_s^\tau$	40
$y_{\rho,s}(x)$	Sistema de $(p-1)q$ elementos en la descomposición de $\kappa_\rho(x \times x \times \cdots \times x)$	47
$N^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p)$	Kernel de $\pi^* : H^r(\mathfrak{B}(K),\mathfrak{d}(K);\mathbb{Z}_p) \to H^r(\mathfrak{X}(K),\mathfrak{D}(K);\mathbb{Z}_p)$	48
$R_r(X,A;G)$	Rango del grupo $H^r(X,A;G)$	50

Bibliografía

[1] E. E. Floyd, "Orbit spaces of finite transformation groups. I.," *Duke Math. J.*, vol. 20, pp. 563–567, 12 1953.

[2] G. E. Bredon, ed., *Introduction to Compact Transformation Groups*, vol. 46 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier, 1972.

[3] M. Richardson and P. A. Smith, "Periodic transformations of complexes," *Annals of Mathematics*, vol. 39, no. 3, pp. 611–633, 1938.

[4] S. D. Liao, "On the topology of cyclic products of spheres," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 77, no. 3, pp. 520–551, 1954.

[5] M. Nakaoka, "Cohomology of the p-fold cyclic products," *Proc. Japan Acad.*, vol. 31, no. 10, pp. 665–669, 1955.

[6] M. Nakaoka, "Cohomology of the three-fold symmetric products of spheres," *Proc. Japan Acad.*, vol. 31, no. 10, pp. 670–672, 1955.

[7] M. Nakaoka, "Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications," *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A*, vol. 7, no. 1-2, pp. 51–102, 1956.