Cinvestav

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Zacatenco

Tipos de homotopía de retículas y retículas de subgrupos de un grupo finito

TESIS

Presentada por

Antonio González Fernández

En opción al título de

Maestro en Ciencias

Con especialidad en

Matemáticas

Asesorado por

Jesús González Espino Barros

Ciudad de México, México

Abril de 2019

Abstract

En esta tesis se exponen de forma detallada los resultados del artículo *Type d'homotopie des treillis et treillis des sous-groupes d'un groupe fini*, escrito por Charles Kratzer y Jacques Thévenaz en 1985, explicando en forma extendida los detalles técnicos contenidos en los resultados del mismo.

Contenido

Capítulo 1

Resultados previos

Este capítulo es una recopilación de definiciones y resultados útiles para facilitar la fluidez de los capítulos posteriores.

1.1 Posets y complejos simpliciales asociados

Definición 1.1. Un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*† se define como un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ es una relación binaria tal que cumple las condiciones de reflexividad, antisimetría y transitividad para todos los elementos en P.

Definición 1.2. El *complejo simplicial* $|E|$ *asociado a un poset* E es un complejo simplicial donde hay un vértice por cada elemento de E, y por cada cadena finita no vacía generada por la relación en E se tiene un símplex cuyos vértices son los que representan a los elementos en dicha cadena.

Ejemplo 1.3. Si E es el conjunto de subgrupos del grupo simétrico S_3 bajo la relación de contención, tendremos que el poset será

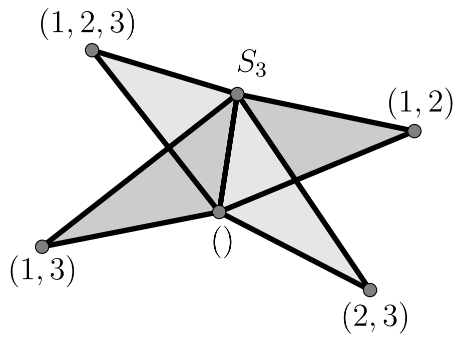
$$P = \{S_3, \langle(1,2,3)\rangle, \langle(1,2)\rangle, \langle(1,3)\rangle, \langle(2,3)\rangle, 1\},$$

†Para evitar el cambio innecesario entre nombres del mismo concepto, durante todo el trabajo se usará la palabra *poset* cuando nos refiramos a un conjunto parcialmente ordenado.

cuyos órdenes son de la forma $S_3 \geq M \geq 1$, con M cualquiera de los subgrupos propios de S_3. Esto da lugar al complejo simplicial

$$\mid P \mid = \{(S_3, \langle(1,2,3)\rangle, 1), (S_3, \langle(1,2)\rangle, 1), (S_3, \langle(1,3)\rangle, 1), (S_3, \langle(2,3)\rangle, 1), \},$$

que puede entenderse como el espacio dado por cuatro triángulos cuya intersección es únicamente un lado de cada uno:



Definición 1.4. Dados dos posets $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ se define una *función creciente* entre posets como una función $f \colon X \to Y$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ cumplen que $x_1 \leq_X x_2$, entonces $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$.

Cabe mencionar que de una función creciente f entre posets podemos obtener una función continua entre los complejos simpliciales inducidos de los posets involucrados, denotada $|f|$.

Lema 1.5. Si $X \times Y$ es el producto de los posets X y Y, entonces

$$|X \times Y| \cong |X| \times |Y|.$$

Prueba. Usando las proyecciones sobre cada entrada, el resultado es claro. (sección 1, p. 102 en [2]) $\square$

1.2 Retículas semimodulares y modulares

Definición 1.6. Una *retícula semimodular* (superiormente) es una retícula que cumple que para todo $a, b \in \bar{L}$, con $a \wedge b \lessdot a$, entonces $b \lessdot a \vee b$[†].

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \uparrow & & \uparrow \\ a & & a \vee b \\ \uparrow & \Rightarrow & \uparrow \\ a \wedge b & & b \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

Dicha definición puede adaptarse para una retícula semimodular *inferiormente*, si para cualesquiera $a, b \in L$ tales que a es maximal en $a \vee b$, se tiene $a \wedge b$ es maximal en b (p. 37, [7]).

Definición 1.7. Una *retícula modular* es una retícula que cumple ser semimodular tanto superior como inferiormente.

Definición 1.8. Una *retícula geométrica* $\bar{L}$ es una retícula que cumple ser semimodular y que cumple que para cualquier elemento $x \in \bar{L} - \{0\}$, x es el supremo de una familia de elementos minimales de $\bar{L}$.

Teorema 1.9. Definimos por $r(x)$ la función de rango de una retícula finita semimodular superiormente L. Dados elementos $x, y \in L$, se tiene que

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) \leq r(x) + r(y).$$

Prueba. Léase el teorema 2.27 del capítulo 2, sección 2B, p. 47 de [3]. $\square$

Teorema 1.10. Sea $r(x)$ la función de rango de una retícula modular finita L. Dados elementos $x, y \in L$, se tiene que

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) = r(x) + r(y).$$

Prueba. Léase el teorema 2.27 del capítulo 2, sección 2B, p.48 de [3]. $\square$

[†]Dados elementos $a, b \in \bar{L}$, la notación $a \lessdot b$ indica que no existe un elemento $c \in \bar{L}$ tal que $a \leq c \leq b$.

1.3 Teoría de grupos y módulos

Teorema 1.11. Si G es un grupo nilpotente finito y $\|G\| = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$, sean S_{p_i} los subgrupos de Sylow de G del primo p_i. Luego $G \cong S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}$.

Prueba. Léase el teorema 3 de la sección 6.1, p. 191 en [5]. $\square$

Teorema 1.12. Si G es un grupo nilpotente finito y $K \leq G$ es un subgrupo maximal de G, entonces $K \trianglelefteq G$.

Prueba. Léase la proposición 7 de la sección 6.1, p. 193 en [5]. $\square$

Definición 1.13. Se define por el subgrupo de Frattini, denotado $\Phi(G)$ como la intersección de los subgrupos maximales de G. Más generalmente, se denotará por $\Phi(H, G)$ a la intersección de todos los subgrupos maximales de G tales que contienen a H.

Nótese que en la definición 1.13, $\Phi(1, G) = \Phi(G)$.

Teorema 1.14. Si $G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$, luego $\Phi(G) = \Phi(H_1) \times \cdots \times \Phi(H_k)$.

Prueba. Léase el lema 9.4 de la sección 9, p. 30 de [9]. $\square$

Teorema 1.15. Si G es un p-grupo, entonces $G/\Phi(G)$ es un grupo abeliano elemental.

Prueba. Léase el teorema 9.6 de la sección 9, p. 31 de [9]. $\square$

Teorema 1.16. Si G es nilpotente, entonces $G/\Phi(G)$ es un producto de grupos abelianos elementales.

Prueba. Por ser G nilpotente, por el teorema 1.11, $G \cong S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}$. Por el teorema 1.14, tenemos que

$$\Phi(G) = \Phi(S_{p_1}) \times \cdots \times \Phi(S_{p_k}).$$

Esto implica que

$$\frac{G}{\Phi(G)} = \frac{S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}}{\Phi(S_{p_1}) \times \cdots \times \Phi(S_{p_k})} = \frac{S_{p_1}}{\Phi(S_{p_1})} \times \cdots \times \frac{S_{p_k}}{\Phi(S_{p_k})},$$

y por el teorema 1.15, podemos concluir que cada uno de los factores es producto de grupos abelianos elementales, concluyendo el resultado.

$\square$

Teorema 1.17. Sea M un módulo semisimple. Si $End(M)$ es un campo, M es un módulo simple.

Prueba. Léase el corolario 4 de la sección 3, p. 53 de [12]. $\square$

Teorema 1.18. Sea A un anillo y S un A-módulo simple finito. Denotamos por D al anillo opuesto de $End(S)$, el cual es un campo. Si M es un A-módulo finito, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) Existe un conjunto I tal que $M \cong S^{(I)}$.

ii) El módulo M es la suma directa de una familia de submódulos isomorfos a S.

iii) El módulo M es la suma de una familia de submódulos isomorfos a S.

iv) Existe un espacio vectorial V sobre el campo D tal que el A-módulo M sea isomorfo a $S \otimes_D V$.

Prueba. Léase la proposición 1 de la sección 4, p. 57 de [12]. $\square$

1.4 Topología de espacios

Por convención, durante toda la tesis, se definirá a la esfera S^{-1} como $S^{-1} = \emptyset$, puesto que ésto tiene sentido con respecto a la definición dada de esfera en dimensiones mayores.

Definición 1.19. Dado un espacio topológico X, se define como el cono sobre X, denotado por $C(X)$ a

$$(X \times [0,1] \sqcup *)/\{x \times \{1\} \sim *,\ \forall\, x \in X\}.$$

En caso de que la punta del cono sea conocida y de relevancia, se denotará por $C(X,p)$ donde p será dicha punta.

Gracias a la forma en que es definido el cono en 1.19, si aplicamos esta construcción sobre el espacio vacío, tendremos que el conjunto de relaciones también será vacío, implicando que el espacio resultante sea $C(\emptyset) = \emptyset \sqcup * = *$, puesto que $\emptyset \times [0,1] \sqcup * = \emptyset \sqcup * = *$.

Definición 1.20. Si X es un espacio topológico, definimos la suspensión de X como

$$\sum X = (X \times [0,1] \sqcup *_0 \sqcup *_1)/\{(x_1,0) \sim (x_2,0) \sim *_0, (x_1,1) \sim (x_2,1) \sim *_1 \ \forall\ x_1,x_2 \in X\}.$$

La definición dada por el autor de la suspensión a considerarse para el entendimiento de su trabajo es distinta, pero equivalente a la dada en 1.20:

Definición 1.21. Si $Y = Y_1 \cup Y_2$ es tal que $X = Y_1 \cap Y_2$ y si cada Y_i es un cono sobre X, entonces Y es la suspensión de X.

En el caso particular de la suspensión de S^{-1}, en ambos casos $\sum S^{-1} = S^0 = * \sqcup *'$, pues en la definición 1.20,

$$\sum \emptyset = (\emptyset \times [0,1] \sqcup *_0 \sqcup *_1)/\{(x_1,0) \sim (x_2,0) \sim *_0, (x_1,1) \sim (x_2,1) \sim *_1 \ \forall\ x_1,x_2 \in \emptyset\},$$

sin embargo, al no haber elementos en $\emptyset$, el conjunto de relaciones es vacío también, y como $\emptyset \times [0,1] = \emptyset$, el espacio termina siendo $\sum \emptyset = \emptyset \sqcup *_0 \sqcup *_1 = *_0 \sqcup *_1 = S^0$.

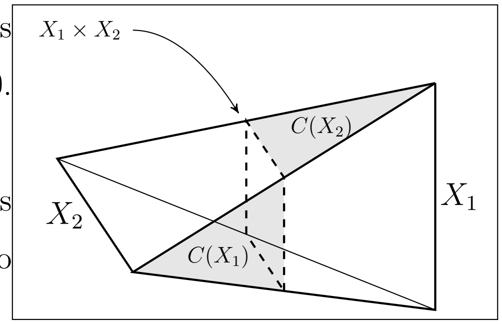
Para la definición dada en 1.21, los Y_i deben ser conos sobre $\emptyset$, implicando que $Y_1 = *_1$ y $Y_2 = *_2$, y su intersección sea $\emptyset$, por lo que $Y = Y_1 \cup Y_2 = *_1 \sqcup *_2 = S^0$.

Lema 1.22. La suspensión de una esfera de dimensión n es una esfera de dimensión $n+1$.

Prueba. Léase las proposiciones 4.4.2 y 4.4.4 en la sección 4.4 , en ps. 114 y 115 respectivamente, de [6], considerando la definición 1.21. $\square$

Definición 1.23. Dados dos espacios topológicos X_1, X_2, si se tienen $Y_1 = C(X_1) \times X_2$ y $Y_2 = X_1 \times C(X_2)$ (con el concepto de cono dado en 1.19), entonces $Y = Y_1 \cup_{X_1 \times X_2} Y_2$ es el join de los espacios X_1 y X_2, denotado por $X_1 * X_2$.

En el caso del join, si por ejemplo, $X_1 = \emptyset$, entonces $Y_1 = C(\emptyset) \times X_2 = * \times X_2 = X_2$ y $Y_2 = \emptyset \times C(X_2) = \emptyset$. Luego $Y = Y_1 \cup Y_2 = X_2 \cup \emptyset = X_2$.



Sin embargo, en el caso de si $X_1 = X_2 = \emptyset$, tendremos que $Y_1 = C(\emptyset) \times \emptyset = \emptyset$ y $Y_2 = \emptyset \times C(\emptyset) = \emptyset$, por lo que $Y = Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Teorema 1.24. Dadas dos esferas S^n y S^m con n, m enteros positivos, $S^m * S^n = S^{n+m+1}$.

Prueba. Léase la explicación en p. 173 de [6]. □

El resultado a continuación está descrito en el artículo [1], detallado en las notas posteriores al teorema 3.4.

Teorema 1.25. Sea $\bar{L} = [0, 1]$ una retícula modular finita, y $L = (0, 1)$. Sea $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ una cadena maximal en $\bar{L}$. Definimos m_i como el número de complementos de a_i en $[0, a_{i+1}]$. Si $\tilde{\chi}(L)$ es la característica reducida de Euler de L, entonces

$$\tilde{\chi}(L) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} m_i.$$

Capítulo 2

Introducción

La siguiente sección está dedicada a los resultados esenciales de los artículos de Kratzer y Thévenaz en [1] y Quillen en [2].

Durante la siguiente sección, se entenderá a E como un poset finito, y a $|E|$ como el complejo simplicial asociado a E. Sabiendo que de las funciones entre posets se puede inducir una función entre sus complejos simpliciales asociados, podemos aplicar a los posets conceptos topológicos y así se enunciarán posteriormente.

Teorema 2.1. Si E posee un *elemento máximo* a, entonces $|E|$ es un cono de punta a, implicando que E es contráctil.

Prueba. Debido a que tenemos al elemento máximo a, cualquier cadena maximal de E está dominada por a, por lo que podemos ver todos los vértices de los símplices en $|E|$ están conectados al vértice asociado al elemento a, implicando que podemos ver a $|E|$ como

$$\left(|E - \{a\}| \times [0,1] \bigsqcup \{a\}\right) / |E - \{a\}| \times \{1\} \sim \{a\},$$

donde claramente esto es homotópico a un cono, cuya punta es a.

En particular, todo cono es contráctil, bajo la homotopía que contrae su base hasta la punta a través de los segmentos que unen a dicha punta, haciendo que $|E| \simeq \{a\} = *$. $\square$

Teorema 2.2. Si $f, g\colon E \to F$ son dos funciones de posets tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in E$, entonces $|f| \simeq |g|$.

Prueba. (Boceto de la prueba dada por el Dr. Najib Idrissi-Kaïtouni).

Para que $|g| \simeq |f|$, necesitamos obtener una función $H\colon |E|\times[0,1] \to |F|$ tal que $H(x,0) = |g|(x)$ y que $H(x,1) = |f|(x)$.

Sea $I = \{0 < 1\}$ el poset cuyos únicos dos elementos ($\{0,1\}$) componen su única cadena $(0 < 1)$. Consideremos el poset producto $E \times I$ con el orden cartesiano. Sea $h\colon E\times I \to F$ una función de posets asignando $h(0,x) = g(x)$ y $h(1,x) = f(x)$.

Notemos que h es una función creciente: si $x, y \in E$ con $x < y$,

$$h(0,x) = g(x) < g(y) = h(0,y)$$

por ser g una función creciente, y de forma análoga con los elementos $h(1,x)$ y $h(1,y)$ usando la propiedad creciente de la función f.

Si $(0,x) < (1,y)^{\dagger}$,

$$h(0,x) = g(x) < f(x) < f(y) = h(1,y),$$

obteniendo nuevamente que el orden se preserva, siendo éstos los únicos casos de orden de $E \times I$.

Observando a los objetos asociados a dichos posets y funciones, tenemos que

$$H := |h|\colon |E \times I| \to |F|,$$

y como $|E\times I| \cong |E|\times|I| = |E|\times[0,1]$ por el lema 1.5, tendremos que la función inducida $H\colon |E| \times [0,1] \to |F|$ puede entenderse como la homotopía buscada, pues es una función continua tal que $H(x,0) = |g|(x)$ y $H(x,1) = |f|(x)$ tal como requeríamos. $\square$

Teorema 2.3. Sea $f\colon E \to E$ una función creciente y $a \in f(E)$. Si $x \leq f(x) \geq a$ para todo $x \in E$, entonces $|E|$ tiene el tipo de homotopía de un cono de punta a. En particular, E es contráctil.

†Recuérdese que el orden que se tiene para un producto de posets $X \times Y$ es $(x,y) < (x',y')$ si y sólo si $x \leq_X x'$ y $y \leq_Y y'$.

Prueba. Por el teorema 2.2, como $x \leq f(x)$ para todo $x \in E$, $|1_E| \simeq |f|$, teniendo entonces que $|X| \simeq |f(E)|$. Sin embargo, notemos que $|f(E)|$ es justamente homotópico a un cono de punta a, pues $f(E)$ posee al elemento a, y por hipótesis $a \leq f(x)$ para todo $x \in E$, haciéndolo un mínimo. Tenemos así las condiciones para el teorema 2.1, evidenciando que $|E| \simeq C(E, a)$.

Por otra parte, como $|f| \simeq |cte_a|$ por hipótesis, por transitividad de la homotopía obtenemos que $|cte_a| \simeq |1_E|$, haciendo así que la función $|1_E|$ sea nulhomotópica, y por tanto, que $|E|$ sea contráctil. □

Definición 2.4. Dado un poset E, sea $y \in E$. Se definirán por las *fibras* de y a los conjuntos $f/y := \{x \in E \mid f(x) \leq y\}$ y $y \backslash f := \{x \in E \mid y \leq f(x)\}$.

Teorema 2.5. [**Quillen**] Sea $f \colon E \to F$ una función creciente. Para $y \in F$, consideremos la fibra f/y. Si f/y es contráctil para todo $y \in F$, entonces f es una equivalencia homotópica.

Prueba. La prueba de dicho resultado está descrita en el artículo mencionado por Quillen en [2], en p. 103. □

El teorema 2.5 se utilizará esencialmente para el caso de una inclusión $i \colon E \hookrightarrow F$. Para $y \in E$, $|i/y|$ fácilmente puede verse que es homotópico a un cono de punta y, siendo éste su elemento maximal por como fue definido el conjunto, pudiendo aplicar el teorema 2.1. Por tanto, para poseer las hipótesis del teorema, lo único que será necesario es comprobar si las fibras i/y son contráctiles para los elementos $y \in F - E$.

Teorema 2.6. Sea $\bar{E} = [0, 1]$ un conjunto ordenado finito y $E = (0, 1)$. Sea A un subconjunto de E tal que $(0, a)$ es contráctil para todo $a \in A$. Entonces la inclusión $E - A \hookrightarrow E$ es una equivalencia homotópica.

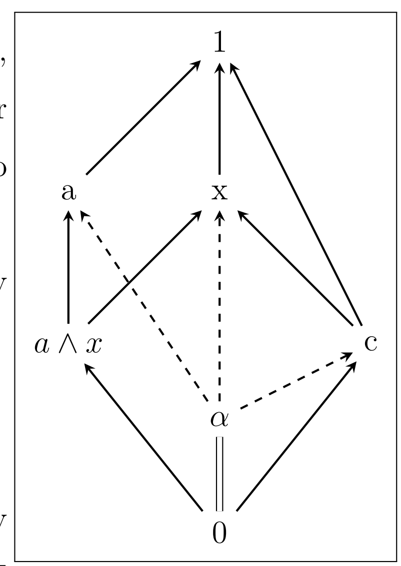
Prueba. Sea M el conjunto de los elementos máximos de A. Notemos que el proceso puede probarse si consideramos la inclusión $E - M \hookrightarrow E$, pues al repetirse este proceso de considerar los elementos máximos y verificar que al quitarlos se genera una equivalencia homotópica, podemos aplicar la cadena hasta obtener todo el conjunto A de la siguiente forma:

$$E \hookleftarrow (E - M_1) \hookleftarrow (E - M_2) \hookleftarrow (E - M_3) \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow E - A$$

Donde cada M_i es la unión del conjunto de los elementos máximos de $A - M_{i-1}$ y los M_k con $k < i$ ($M_0 = \emptyset$ por convención, $M_1 = M$), y dado que $\bar{E}$ es una retícula finita por hipótesis, tendremos que $M_n = M_{n+1} = A$ para algún $n < \infty$.

Notemos que si consideramos la inclusión $E - M \hookrightarrow E$, sólo necesitamos verificar que si $y \in M = E - (E - M)$, entonces i/y es contráctil. Como dos elementos en M no son comparables por ser maximales, todo elemento $x < y$ pertenecerá a $E - M$, de modo que $i/y = (0, y)$, y por hipótesis, dichos conjuntos son contráctiles. Por tanto, por el teorema 2.5, $E - M$ es contráctil, y realizando la serie de equivalencias homotópicas, vemos que $E - A \hookrightarrow E$ es una composición de equivalencias homotópicas, obteniendo así la prueba del teorema. $\square$

Teorema 2.7. Sean $a, x \in \bar{L}$ tales que $a \vee x = 1$. Si c es un complemento de $a \wedge x$ en $[0, x]$, entonces c es un complemento de a en $[0, 1] = \bar{L}$.



Prueba. Ya que $a \geq a \wedge x$, luego $c \vee a \geq c \vee (a \wedge x) = x$, por ser c el complemento de $a \wedge x$ en $[0, x]$. De lo anterior obtenemos que $(c \vee a) \vee a = a \vee c \geq a \vee x$, que en el lado derecho es 1 por hipótesis, luego $c \vee a = 1$.
Por otra parte, si $c \wedge a = \alpha$, claramente $\alpha \leq c \leq x$ y tendríamos que

$$0 = c \wedge (a \wedge x) = (c \wedge a) \wedge x = \alpha \wedge x = \alpha$$

Pues c es complemento de $a \wedge x$, por tanto $c \wedge a$ debe ser 0, y por consecuente, c ser complemento de a. $\square$

Teorema 2.8. Sea $\bar{L} = [0,1]$ una retícula finita y $L = (0,1)$. Si existe $a \in L$ sin complementos en $\bar{L}$, entonces L es contráctil.

Prueba. Sea $X = \{x \in L \mid a \vee x = 1\}$. Es fácil ver que si $x \in X$, $a \wedge x$ no tiene complementos en $[0,x]$, pues de tenerlos, por el teorema 2.7 podríamos construir uno para a, que por hipótesis, no tiene.

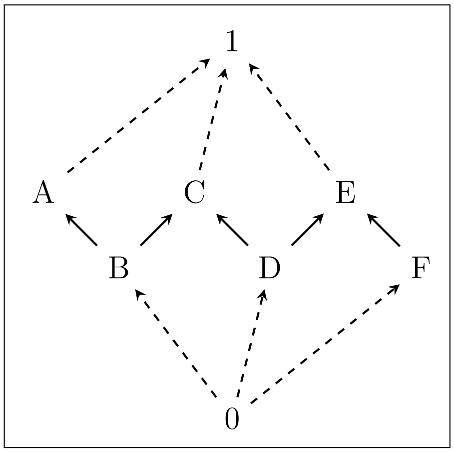
Probaremos por inducción sobre la cardinalidad de L que para todo $x \in X$, $(0,x)$ es contráctil siempre que exista un elemento a que no posea complementos. Esto con el fin de que $L - X \hookrightarrow L$ sea una equivalencia homotópica.

El caso base es trivial, dado que si $\|L\| = 1$, al ser a el único elemento en L, éste no posee complementos, además de que es claro que $X = \emptyset$, y por vacuidad se cumple nuestro requisito.

Procediendo a la prueba de inducción, al notar que $a \wedge x$ no tiene complemento en $[0,x]$, podemos aplicar la hipótesis de inducción y afirmar que $(0,x)$ es contráctil. Por lo anterior, podemos afirmar por el teorema 2.5 que $L - X \hookrightarrow L$ es una equivalencia homotópica, por lo que el resultado se reduce a probar que $L - X$ es contráctil.

Para probar que $L - X$ es contráctil, notemos primero que $a \in L - X$, pues si ocurriera lo contrario, $a \vee a = 1$, teniendo así que $a = 1$, y $1 \notin L$ (pues $L = \bar{L} - \{0,1\}$), por lo que no puede estar en X. Igualmente, si $y \in L - X$, entonces $y \vee a \in L - X$, pues de lo contrario, estaríamos afirmando que $(y \vee a) \vee a = y \vee a = 1$, implicando que originalmente $y \notin L - X$. Luego, $y, a \in L - X$, teniendo así que $y \leq y \vee a \geq a$. De esta forma podemos aplicar el teorema 2.3 y probar así que $L - X$ es contráctil, y por tanto que L también lo sea. $\square$

El recíproco de la proposición anterior no es cierta. Kratzer y Thévenaz tienen un contraejemplo para la reciprocidad considerando la siguiente retícula:



Claramente $|L| \simeq [0,1]$, por lo que es contráctil, y todos los elementos tienen complementos: las parejas $\{D,A\}$, $\{B,E\}$ y $\{C,F\}$ son complementos mutuos.

Capítulo 3

Pivotes y tipos de homotopía

En la siguiente sección se considerará a $\bar{L} = [0, 1]$ una retícula finita, denotaremos $L = (0, 1)$, que es la retícula $\bar{L}$ sin su supremo 1 e ínfimo 0. Si $a \in L$, denotaremos por $a^{\perp}$ al conjunto de complementos de a en L. En el caso de esta sección, supondremos que $a^{\perp}$ será no vacío para cualquier a, pues en otro caso, por el teorema 2.8 tendremos que L será contráctil.

Si $c \in a^{\perp}$ denotaremos por $[0, a]^c$ a la imagen de la función $f \colon [c, 1] \to [0, a]$ dada por $f(x) = x \wedge a$.

Lema 3.1. $[0, a]^c = \{b \in [0, a] \mid (b \vee c) \wedge a = b\}$

Prueba. Sea $A = \{b \in [0, a] \mid (b \vee c) \wedge a = b\}$. Si $b \in [0, a]^c$, entonces por definición existe $x \in [c, 1]$ tal que $x \wedge a = b$. Como $b \leq x$ y $c \leq x$, entonces $b \vee c \leq x$, de donde $(b \vee c) \wedge a \leq x \wedge a = b$. Ahora, recordando que $b = x \wedge a$, tenemos que

$$x \wedge a \leq (x \wedge a) \vee c$$

$$(x \wedge a) \wedge a \leq ((x \wedge a) \vee c) \wedge a$$

$$b \leq (b \vee c) \wedge a$$

Por lo que teniendo ambas contenciones, implicamos la igualdad $b = (b \vee c) \wedge a$. Esto conduce a afirmar que $[0, a]^c \subseteq A$.

Recíprocamente, si $b = (b \vee c) \wedge a$, es claro que $b \vee c \in [c, 1]$, por tanto $(b \vee c) \wedge a \in [0, a]^c$, implicando $A \subseteq [0, a]^c$, y al tener las dos contenciones, podemos afirmar la contención deseada $A = [0, a]^c$. $\square$

Denotaremos por $(0, a)^c = [0, a]^c - \{0, a\}$. Dado que $c \in a^\perp$, entonces tenemos que $a \in c^\perp$, por lo que el conjunto $[0, c]^a$ tiene sentido. Para $c \in a^\perp$ podemos definir los siguientes conjuntos:

- $\bar{L}_c = \{x \in \bar{L} \mid x = x_a \vee x_c,\ x_a \in [0, a]^c,\ x_c \in [0, c]^a\}$
- $\bar{L}'_c = \{x \in \bar{L} \mid x = x_a \vee x_c,\ x_a \in [0, a]^c,\ x_c \in [0, c]\}$
- $L_c = \bar{L}_c \cap L = \bar{L}_c - \{0, 1\}$
- $L_c{}' = \bar{L}'_c \cap L = \bar{L}'_c - \{0, 1\}$

Lema 3.2. Dada una retícula $\bar{L} = [0, 1]$ y $L = \bar{L} - \{0, 1\}$, sea $a \in L$ y $c \in a^\perp$.

a) Si $x = x_a \vee x_c \in \bar{L}'_c$, entonces tenemos que $x_a = x \wedge a$.

b) Si $x = x_a \vee x_c \in \bar{L}_c$, entonces $x_a = x \wedge a$ y $x_c = x \wedge c$.

c) El conjunto parcialmente ordenado $\bar{L}_c$ es isomorfo al producto $[0, a]^c \times [0, c]^a$.

Prueba. (a) Por pertenecer x_a a $[0, a]^c$, se tiene que $x_a = u \wedge a \leq a$; por otra parte, $x_a \leq x_a \vee x_c = x$, por tanto $x_a \leq x \wedge a$. Por el lema 3.1, nuevamente por ser $x_a \in [0, a]^c$, $x_a = (x_a \vee c) \wedge a$. Ahora, $x_c \in [0, c]$, por lo que $x_c \leq c$, implicando entonces $x = x_a \vee x_c \leq x_a \vee c$, de donde tenemos que $x \wedge a = (x_a \vee x_c) \wedge a \leq (x_a \vee c) \wedge a = x_a$. Teniendo ambas desigualdades, podemos concluir la identidad $x_a = x \wedge a$.

(b) El caso de $x_a = x \wedge a$ es idéntico al inciso (a). El caso $x_c = x \wedge c$ nuevamente es el inciso (a), cambiando los papeles de a por los de c y viceversa.

(c) Consideremos la función $f\colon [0,a]^c \times [0,c]^a \to \bar{L}_c$ dada por $(x_a, x_c) \mapsto x_a \vee x_c$. Dicha función es sobreyectiva por como fue construido el conjunto $\bar{L}_c$. La inyectividad de dicha función está dada por el inciso (b), ya que prueba que los elementos x_a y x_c son únicos para un x dado.

Para verificar la cuestión del orden, si consideramos $(m,n),(x,y) \in [0,a]^c \times [0,c]^a$, se tiene que $(m,n) \leq (x,y)$ si y solo si $m \leq x$ y $n \leq y$, implicando $m \vee n \leq x \vee y$ por lo que al aplicar f, $f((m,n)) = m \vee n \leq x \vee y = f((x,y))$, viendo así que el orden se preserva a través de f. $\square$

Nótese que en el caso del lema 3.2, el inciso a nos forza la estructura de x_a pero no la de x_c, y en el inciso b nos forza la de ambos. En el caso de 3.2a, también tenemos que $x_c = x \wedge c$, pero no tenemos la unicidad de esta estructura, por ser $[0,c]^a \subseteq [0,c]$.

Definición 3.3. Sea $L' = \bigcup_{c \in a^\perp} L'_c$. Se dice que $a \in L$ es un pivote si cumple las condiciones siguientes:

- El conjunto $[0,a]^c$ no depende del elemento $c \in a^\perp$.
- Dados dos elementos distintos $c, d \in a^\perp$, dichos elementos no son comparables bajo el orden de L.
- Si $x_1, \ldots, x_n \in L'$, con $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, entonces existe un elemento $c \in a^\perp$ tal que $x_i \in L'_c$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Si $a^\perp = \emptyset$, se considerará a a como pivote.

Teorema 3.4. Sean $\bar{E}$ y $\bar{F}$ dos conjuntos ordenados tales que cada uno posee un elemento supremo 1 y un elemento ínfimo 0. Sean $E = \bar{E} - \{0,1\}$, $F = \bar{F} - \{0,1\}$ y $G = (\bar{E} \times \bar{F}) - \{(0,0),(1,1)\}$. Luego, $|G|$ tiene el tipo de homotopía de $\sum(|E| * |F|)$.

Prueba. Sean $X = \{(a,b) \in G \mid a < 1\}$ y $Y = \{(a,b) \in G \mid b < 1\}$. Notemos que $|X|$ tiene el tipo de homotopía de un cono de punta $(0,1)$ con base $|X \cap Y|$, ya que $(0,1)$ es un ínfimo de X y es posible aplicar el resultado 2.1 en este poset. De forma análoga, podemos ver que $|Y|$ es un cono de punta $(1,0)$ con base $|X \cap Y|$.

Como $|X|$ y $|Y|$ se pueden deformar a conos con base $|X \cap Y|$, por la definición de suspensión dada, tendremos que

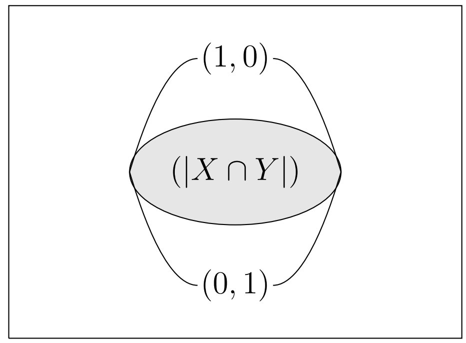
$$|X \cup Y| = |X| \cup |Y| \simeq C(|X \cap Y|, (0,1)) \cup C(|X \cap Y|, (1,0)) = \sum (|X \cap Y|)\,,$$

pero como $G = X \cup Y$, entonces $|G| = \sum(|X \cap Y|)$.

Por tanto, la pieza faltante de la pueba será ver que $|X \cap Y| = |E| * |F|$. Para ello, sean

$$U = \{(a,b) \in X \cap Y \mid a > 0\}$$
$$V = \{(a,b) \in X \cap Y \mid b > 0\}.$$

Se tiene que $U \cup V = X \cap Y$, y consecuentemente $|U| \cup |V| = |X \cap Y|$.



Además, es claro que por la construcción de dichos espacios, $U = E \times (\bar{F} - \{1\})$ y $V = (\bar{E} - \{1\}) \times F$, por lo que, al tener ambos $\bar{F} - \{1\}$ y $\bar{E} - \{1\}$ sus respectivos ínfimos 0, $|U| = |E| \times C(F, 0)$ y $|V| = C(E, 0) \times |F|$. Lo anterior, junto con que $|U| \cap |V| = |U \cap V| = |E \times F| = |E| \times |F|$, usando la definición 1.23 implica $|X \cap Y| = |E| * |F|$. $\square$

Corolario 3.5. $|L_c|$ tiene el tipo de homotopía de $\sum(|(0,a)^c| * |(0,c)^a|)$.

Prueba. Por el inciso (c) del lema 3.2, tenemos que $\bar{L}_c = [0,a]^c \times [0,c]^a$ por lo que podemos aplicar el teorema 3.4, y ver que

$$|\bar{L}_c| = |[0,a]^c \times [0,c]^a - \{(0,0),(1,1)\}| = \Sigma(|[0,a]^c| * |[0,c]^a|)$$

$\square$

Los siguientes resultados servirán posteriormente para la prueba de 3.9.

Lema 3.6. Una unión finita de complejos simpliciales $\bigcup_{i \in I} X_i$ tiene el tipo de homotopía de un bouquet $\bigvee_{i \in I} X_i$ si para todo $J \subset I$ con $\|J\| \geq 2$, se tiene que $\bigcap_{j \in J} X_j$ es contráctil.

Prueba. Procediendo por inducción sobre la cardinalidad de I, el caso base será con $\|I\| = 2$ y es trivial ver que es cierto, ya que al ser contráctil la intersección, el espacio $X_1 \cup X_2$ resulta homotópico a $(X_1 - X_1 \cap X_2) \vee (X_2 - X_1 \cap X_2)$, que es homotópico a $X_1 \vee X_2$. Sea $k \in I$ y $J = I - \{k\}$. Por hipótesis de inducción, $\bigcup_{j \in J} X_j$ es un bouquet, por lo que sólo necesitamos ver que también $(\bigcup_{j \in J} X_j) \cup X_k$ también lo sea. Es claro que $(\bigcup_{j \in J} X_j) \cup X_k = \bigcup_{j \in J}(X_j \cup X_k)$. Considerando que la unión de los complejos simpliciales vuelve a ser un complejo simplicial, al espacio $\bigcup_{i \in I - \{k\}}(X_i \cup X_k)$ puede aplicársele la hipótesis de inducción y y con ello probaríamos que éste termina siendo homotópicamente equivalente a $\bigcap_{j \in J} X_j$. $\square$

Proposición 3.7. Sea $\bar{L} = [0,1]$ una retícula finita, $L = (0,1)$ y $a \in L$. Para $b, c \in a^{\perp}$ se define

$$\bar{L}'_{b,c} = \{x \in \bar{L} \mid x = x_a \vee x_c,\ x_a \in [0,a]^b,\ x_c \in [0,c]\}$$

y $L'_{b,c} = \bar{L}'_{b,c} - \{0,1\}$. Entonces, la inclusión $\bigcup_{b,c \in a^{\perp}} L'_{b,c} \hookrightarrow L$ es una equivalencia homotópica.

Prueba. La prueba de este teorema se basa en probar que las inclusiones en el siguiente diagrama son equivalencias homotópicas:

$$\begin{array}{c}
L \\
\Big\uparrow \\
L_1 = \{x \in L \mid x \wedge a \text{ posee un complemento en } [0,x]\} \\
\Big\uparrow \\
L_2 = \{x \in L_1 \mid \text{ existe } b \in a^{\perp} : x \wedge a \in [0,a]^b\} \\
\Big\uparrow \\
L_3 = L_2 - \{x \in L_2 \mid x \wedge a = 0 \text{ y para todo } c \in a^{\perp}, x \notin [0,c]\} \\
\Big\uparrow \\
L_4 = \bigcup_{b,c \in a^{\perp}} L'_{b,c};
\end{array}$$

Sea $L_1 = \{x \in L \mid x \wedge a$ posee un complemento en $[0,x]\}$. Notemos que si $y \in L - L_1$, entonces $(0,y)$ es contráctil por el resultado 2.8, entonces tenemos un conjunto de elementos $(L - L_1)$ tales que $(0,y)$ es contráctil, por lo que por la proposición 2.6, tenemos que

$L-(L-L_1)=L_1 \hookrightarrow L$ es una equivalencia homotópica.

Sea $L_2=\{x \in L_1$ tal que existe $b \in a^{\perp}$ con $x \wedge a \in [0,a]^b\}$. Consideremos $y \in L_1 - L_2$, y el conjunto $y\backslash i = \{x \in L_2 \mid x \geq y\}$. Como $y \in L_1$, $y \wedge a$ poseerá un complemento $\bar{y}$ en y, y por tanto podemos reescribir y como $y=(y \wedge a) \vee \bar{y}$. Notemos que si $a \vee \bar{y} = 1$, tendríamos que $\bar{y} \in a^{\perp}$, pues recordando que $\bar{y} \leq y$ es complemento de $y \wedge a$ (en y),

$$0=(y \wedge a) \wedge \bar{y} = (y \wedge \bar{y}) \wedge a = \bar{y} \wedge a,$$

pero como $y \in [\bar{y},1]$, podemos ver que $y \wedge a \in [0,a]^{\bar{y}}$ por definición de este conjunto, de donde obtenemos que $y \in L_2$, resultando en una contradicción, pues $y \in L - L_2$.

Luego $a \vee \bar{y} < 1$ y al ser $(\bar{y} \vee a) \wedge a = a \in [0,a]^b$ para todo $b \in a^{\perp}$, se ve claramente que $a \vee \bar{y} \in L_2$. Además, como $y \wedge a \leq a$, se tiene que $y=(y \wedge a) \vee \bar{y} \leq a \vee \bar{y}$ por lo que $a \vee \bar{y} \in y\backslash i$. Queriendo mostrar que $y\backslash i$ es contráctil, tenemos que para todo $x \in y\backslash i$,

$$x \geq (x \wedge a) \vee \bar{y} \leq a \vee \bar{y}.$$

Ya que $x \geq x \wedge a$ y $\bar{y} \leq y \leq x$ y esto permite la desigualdad izquierda; para la derecha sólo es necesario ver que $x \wedge a \leq a$. Por tanto sólo falta ver que $z=(x \wedge a) \vee \bar{y} \in y\backslash i$.

Primeramente veamos que $z \in L_2$: como $x \wedge a \leq z$, luego $x \wedge a \leq z \wedge a$; por otra parte, por la identidad izquierda tendremos que $x \geq z$ resultando en que $x \wedge a \geq z \wedge a$, obteniendo de las dos desigualdades $x \wedge a = z \wedge a$. Como $x \in y\backslash i \subseteq L_2$, $x \wedge a = z \wedge a \in [0,a]^b$ para algún $b \in a^{\perp}$, obteniendo así que $z \in L_2$. Para verificar la contención solicitada, es claro que $y \leq x$ por definición de $y\backslash i$, por lo que

$$z=(x \wedge a) \vee \bar{y} \geq (y \wedge a) \vee \bar{y} = y$$

obteniendo que $z \in y\backslash i$, y por consecuente podemos aplicar el resultado 2.3, y así ver que $(0,y)$ es contráctil. Aplicando ahora el teorema 2.6 sobre la inclusión $L_2 \hookrightarrow L_1$, como para todo $y \in L_1 - L_2$ el conjunto $y\backslash i$ es contráctil, $L_2 = L_1 - (L_1 - L_2) \hookrightarrow L_1$ es una equivalencia homotópica.

Consideremos ahora $E = \{x \in L_2 \mid x \wedge a = 0$ y para todo $c \in a^{\perp}, x \notin [0,c]\}$ y sea $L_3 = L_2 - E$. Consideremos $y \in E$ y ahora $y\backslash i = \{x \in L_3 \mid x \geq y\}$. Tenemos que $a \vee y \neq 1$, pues de serlo, $y \in a^{\perp}$, y como $y \in [0,y]$, implicará $y \notin E$, contrario a lo supuesto. Es claro que si $x \in y\backslash i$, teniendo que $x, a \geq x \wedge a$,

$$x \geq (x \wedge a) \vee y \leq a \vee y,$$

por lo que deseamos ver que $a \vee y, (x \wedge a) \vee y \in y\backslash i$. Para ver que $a \vee y \in y\backslash i$, es claro que se tiene que $a \vee y \geq y$, por lo que deseamos ver que también pertenece a L_3. Para ver esto, veamos que

- $a \vee y \in L_1$ porque $(a \vee y) \wedge a = a$ posee un complemento en $[0, a \vee y]$ (que es y).
- $a \vee y \in L_2$ porque existe un elemento $\alpha \in a^{\perp}$ tal que $(a \vee y) \wedge a = a \in [0,a]^{\alpha}$ (que es cualquier complemento).
- $a \vee y \notin E$ porque $(a \vee y) \wedge a = a \neq 0$, por lo que la otra condición no es necesaria de verificar,

implicando que $a \vee y \in L_3 = L_2 - E$.

Para ver que $z = (x \wedge a) \vee y \in y\backslash i$, es trivial notar que se tiene $z \geq y$, por lo que la parte necesaria es verificar que $z \in L_3$. Para ello, primero veamos que está contenido en los conjuntos previos. Notemos antes que $y \wedge a = 0$, pues $y \in E$, luego:

- $(x \wedge a) \vee y \in L_1$ porque

  $$((x \wedge a) \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) = x \wedge a$$

  tiene complemento en $[0, (x \wedge a) \vee y]$ (que es y).
- $(x \wedge a) \vee y \in L_2$ porque existe un elemento $b \in a^{\perp}$ tal que

  $$((x \wedge a) \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) = x \vee a \in [0,a]^{b}$$

  (que es el mismo que cumple la condición para que $x \in L_2$).
- $(x \wedge a) \vee y \in L_3 = L_2 - E$ porque si

  $$((x \wedge a) \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) = x \wedge a = 0,$$

por ser $x \in L_3$, para algún $c \in a^{\perp}$ se tiene que $x \in [0, c]$, y por consecuente $y \leq x \leq c$, lo que es contrario a que $y \in E$. Entonces $x \wedge a \neq 0$ y $(x \wedge a) \vee y \in L_3$.

Por lo anterior, $a \vee y, (x \wedge a) \vee y \in y \backslash i$, implicando que las desigualdades mencionadas son válidas para aplicar el resultado 2.3, haciendo $y \backslash i$ contráctil, y con ello obteniendo las condiciones para aplicar el teorema 2.6, por lo que $L_3 = L_2 - E \hookrightarrow L_2$ es una equivalencia homotópica.

Sea $L_4 = \bigcup_{b,c \in a^{\perp}} L'_{b,c}$. Sea $y \in L_3 - L_4$ y sea $\bar{y}$ un complemento de $y \wedge a$ en $[0, y]$ (el cual existe porque $y \in L_4 \subseteq L_1$). Nótese que por considerar $y \in L_4$, automáticamente $y \wedge a \in L_1$, pues $\bar{y}$ es el complemento de $y \wedge a \wedge a = y \wedge a$ en $[0, y]$. Si $y \wedge a = 0$ entonces $y = \bar{y} \in [0, c]$ para un $c \in a^{\perp}$, pues $y \in L_3$, de donde obtenemos que $y = 0 \vee \bar{y} \in L'_{c,c}$, contradiciendo que $y \notin L_4$.

Luego, necesariamente $y \wedge a > 0$. Como $y \in L_2$, luego $y \wedge a \in [0, a]^b$ para cierto $b \in a^{\perp}$, implicando la pertenencia $y \wedge a \in L_2$, además de que al ser distinto de cero, no puede pertenecer a E, y consecuentemente, $y \wedge a \in L_3 = L_2 - E$. La pertenencia a L_2 implicará también $y \wedge a \in L_4$, pues dicho b implica (por definición del conjunto) la última contención $(y \wedge a) \vee 0 = y \wedge a \in L_{b,b}$, y por consecuente, podamos afirmar $y \wedge a \in i/y = \{x \in L_4 \mid x \leq y\}$. Queremos ver que $i/y = \{x \in L_4 \mid x \leq y\}$ es contráctil como en los casos anteriores. Notemos que para todo $x \in i/y$, es fácil ver que

$$x \leq (y \wedge a) \vee x \geq y \wedge a,$$

por lo que sólo queda verificar que $z = (y \wedge a) \vee x \in i/y$.

Claramente $y \vee a \leq z \wedge a$, pues $y \wedge a \leq z$ por la estructura de z, y $y \vee a \geq z \wedge a$, porque $y \geq y \wedge a, x$. De ambas contenciones, tendremos que $z \wedge a = y \wedge a$. Por otra parte, como $x \in i/y \subseteq L_4$, tenemos $x = x_a \vee x_c$, con $x_a \leq a$ y $x_c \leq c$. Como $x_a \leq x \wedge a \leq y \wedge a$ (pues $x \in i/y$ implica que $x \leq y$), entonces

$$z = (y \wedge a) \vee x = ((y \wedge a) \vee x_a) \vee x_c = (y \wedge a) \vee x_c,$$

y esta estructura de z muestra que como $y \wedge a \in [0, a]^b$ por su pertenencia a L_2, y $x_c \in [0, c]$, $z \in L'_{b,c}$, por lo que $z \in L_4$, y por tanto, $z \in i/y$. $\square$

Lema 3.8. Dada una retícula finita $\bar{L} = [0,1]$ sea $L = (0,1)$, $a \in L$ y $c \in a^{\perp}$. Entonces la inclusión $i\colon L_c \hookrightarrow L'_c$ es una equivalencia homotópica.

Prueba. Por el teorema 2.5, y la especificación dada de cómo se aplicará en el caso de las inclusiones, sólo necesitamos ver que si $y \in L'_c - L_c$, entonces $y\backslash i = \{x \in L_c \mid x \geq y\}$ es contráctil. Para ello, notemos que $y = y_a \vee y_c$ con $y_a \in [0,a]^c$ y $y_c \in [0,c]$, por definición del conjunto L'_c. Por el lema 3.2 y la nota que le sucede, podemos afirmar que $y_a = y \wedge a$ y darle a y_c la estructura $y_c = y \wedge c$ por conveniencia.

Veamos que $y_a \vee c \neq 1$. Como $y_a \in [0,a]^c$, podemos ver a $y_a = z \wedge a$, con $z \geq c$ (por la definición dada para este conjunto al inicio de esta sección)x. Nótese que $z \neq 1$, sino tendremos que $y_a = a$, implicando $y = y_a \vee y_c \geq a$, por lo que $y \in [a,1]$ y consecuentemente $y \wedge c \in [0,c]$, implicando que $y_c \in [0,c]^a$, contradiciendo que $y \in L_c$. Por tanto, $y_a \vee c \leq z < 1$, y de esto se sigue que $y_a \vee c \in y\backslash i$.

Para concluir, nótese que $y\backslash i$ tiene el tipo de homotopía de un cono de punta $y_a \vee c$, ya que para $x \in y\backslash i$, tenemos las desigualdades

$$x = x_a \vee x_c \geq y_a \vee x_c \leq y_a \vee c,$$

pues el elemento involucrado en ambas desigualdades cumple que $y_a \vee x_c \in L_c$ por definición de L_c, al igual que cumple la desigualdad $y_a \vee x_c \geq y_a \vee y_c \geq y$ implicando $y_a \vee x_c \in y\backslash i$. Por lo anterior, aplicando el teorema 2.1, tendremos que efectivamente es un cono, pero más importante aún, es contráctil, obteniendo lo necesario para ahora aplicar el teorema 2.5 como se quería en un principio. $\square$

Teorema 3.9. Sea $\bar{L} = [0,1]$ una retícula finita, $L = (0,1)$ y a un pivote de L. Luego, $|L|$ tiene el tipo de homotopía de $\bigvee_{c \in a^{\perp}}(\sum(|(0,a)^c| * |(0,c)^a|))$

Prueba. La prueba está dividida en ver que L puede verse como la unión de los espacios L'_c con $c \in a^{\perp}$, para luego aplicar el teorema 3.6 sobre dicha unión, para terminar viendo que es un bouquet de las suspensiones de interés.

Si $a^{\perp} = \emptyset$, entonces L es contráctil, pues al no tener complementos en la retícula, podemos aplicar el teorema 2.8. Por otra parte, un bouquet indexado por un conjunto vacío es un punto, implicando la obviedad de este caso.

Consideremos entonces $a^{\perp} \neq \emptyset$. Como a es un pivote, tenemos que $[0,a]^b = [0,a]^c$ para cualesquiera $b, c \in a^{\perp}$, de donde tenemos que para los conjuntos $L'_{b,c}$, tendremos las igualdades $L'_{b,c} = L'_{c,c} = L'_c$. Por tanto, la inclusión $L' = \bigcup_{c \in a^{\perp}} L'_c \hookrightarrow L$ es una equivalencia homotópica por el teorema 3.7. De la tercera condición del concepto de pivote, tenemos que cualquier símplex en $|L'|$, estará contenido en algún $|L'_c|$ (pues al estar cualquier cadena de L' contenida en algún L'_c, el símplex asociado a la cadena en cuestión estará contenido en el complejo asociado a dicho L'_c). Esto implica que $\bigcup_{c \in a^{\perp}} |L'_c| = |L'|$.

Ahora deseamos aplicar el teorema 3.6 en $|L'| = \bigcup_{c \in a^{\perp}} |L'_c|$, sea $J \subset a^{\perp}$, con $\|J\| \geq 2$. Debemos ver que $T = \bigcap_{c \in a^{\perp}} L'_c$ es contráctil, para tener las hipótesis del teorema. Sea $Z = \{x \in T \mid a \vee x < 1\}$. Veremos que Z es un conjunto contráctil, y posteriormente probaremos que la inclusión $i \colon Z \hookrightarrow T$ es una equivalencia homotópica.

Para lo primero, deseamos ver que si $x \in Z$, entonces $a \vee x \in Z$. La condición de $(x \vee a) \vee a = x \vee a < 1$ es clara, entonces queremos verificar que $x \vee a \in L'_c$ para todo $c \in J$. Nótese que para dicho x, $x = x_a \vee x_c$ con $x_a \in [0,a]^c$ y $x_c \in [0,c]$, para algún $c \in a^{\perp}$, pues $x \in Z \subset T$. De esto se tiene que $a \vee x = (a \vee x_a) \vee x_c = a \vee x_c$, y como $a \in [0,a]^c$ (considerando el elemento $1 \in [c,1]$), nos muestra que $x \vee a \in L'_c$, y generalizando esta construcción, podemos ver que $x \vee a \in T$. Ahora, Z es contráctil porque para todo $x \in Z$, se tiene

$$x \leq a \vee x \geq a,$$

pues los tres elementos están en Z.

Así, para concluir que T es contráctil, queda ver que $i \colon Z \hookrightarrow T$ es una equivalencia homotópica. Para ello, utilizamos los teoremas 2.5 y la nota sobre inclusiones que le sucede en el conjunto $T - Z$. Sea pues $y \in T - Z$ y definimos $i/y = \{x \in Z \mid x \leq y\}$. La idea es ver que éste último conjunto es contráctil. Como $y \notin Z$, entonces $a \vee y = 1$, por la definición de Z. Si $y_a = a \wedge y = 0$, entonces $y \in a^{\perp}$, e implicará que para $c \in J$, $y = y_a \vee y_c = y_c \in L'_c$, pues $y_c \in [0,c]$, lo que implicará que $c = y$, pues los complementos de un pivote (en este caso a) no son comparables, y por consecuente, $J = \{y\}$, contradiciendo que $\|J\| \geq 2$. Por tanto, $y_a = a \wedge y > 0$, y como $y_a = y_a \vee 0$, pertenece a todos los L'_c, $y_a \in Z$. Finalmente, i/y es contráctil porque para todo $x \in i/y$, se tiene que

$$x \leq y_a \vee x \geq y_a$$

y $y_a \vee x \in i/y$. Esto es fácil de ver, pues si $x \in i/y$, pues en todo L'_c x puede descomponerse de la forma $x_a \vee x_c$ donde $x_c \in [0,c]^a$, por lo que, considerando que $y_a \vee x = (y_a \vee x_a) \vee x_c$, como $y_a \vee x_a \in [0,a]$, junto a la pertenencia $x_c \in [0,c]^a$, $y_a \vee x \in L'_c$ para cualquier $c \in a^{\perp}$. Esto implica la equivalencia homotópica deseada.

Finalmente el resultado se concluye de aplicar el teorema 3.6 en conjunto con el corolario 3.5, pues:

$$|L| \simeq \bigcup_{c \in a^{\perp}} L'_c \simeq \bigcup_{c \in a^{\perp}} \sum(|(0,a)^c| * |(0,c)^a|) \simeq \bigvee_{c \in a^{\perp}} \sum(|(0,a)^c| * |(0,c)^a|).$$

□

Nótese que si $(0,a)^c = \emptyset$, es necesario que $(c,1) = \emptyset$, pues el primer conjunto es imagen del segundo a través de la función $f(x) = x \wedge a$. Más aún, como a es un pivote, para cualesquiera $b, c \in a^{\perp}$, $(0,a)^c = (0,a)^b = \emptyset$, por lo que para cualquier $b \in a^{\perp}$, $(b,1) = \emptyset$, o lo que es equivalente, $[b,1] = \{b,1\}$, implicando además que todos los complementos de a sean maximales.

Esto implicaría que $[0,a]^b = \{0,a\}$ para cualquier $b \in a^{\perp}$, pues $b \wedge a = 0$ (por ser b complemento de a), y $1 \wedge a = a$. Por tanto, en este caso particular, la única parte de la prueba que se vería afectada si $(0,a)^c = \emptyset$, son las identidades $L'_{b,c} = L'_{c,c} = L'_c$, sin embargo

$$\bar{L'_{b,c}} = \{x \in \bar{L}, x = x_a \vee x_c \mid x_a \in \{0,a\}, x_c \in [0,c]\} = \bar{L'_{c,c}},$$

y por tanto la identidad seguirá siendo la misma, pues los conjuntos seguirán siendo no vacíos. Por lo anterior, el resto de la prueba puede continuarse, y el teorema puede aplicarse con el caso $(0,a)^c = \emptyset$.

Capítulo 4

Retículas semimodulares y modulares

Con el propósito de poder aplicar el teorema 2.4, Kratzer y Thévenaz adaptaron dicho resultado a una retícula que cumpla las condiciones que resultan de interés. Por tanto, es necesario proceder a una adaptación de ciertos resultados sobre retículas semimodulares y modulares.

Para las retículas finitas de este capítulo, denotaremos por $r(x)$ a la función que define la longitud de las cadenas entre el elemento minimal (denotado 0) y x, como se consideró en el teorema 1.9. Igualmente las notaciones usadas en el capítulo 3 serán nuevamente consideradas para esta parte de la tesis.

Proposición 4.1. Sea $\bar{L} = [0, 1]$ una retícula semimodular finita y $a \in \bar{L}$.

a) Si $c \in a^{\perp}$ satisface que $r(a) + r(c) = r(1)$, entonces $[0, c]^a = [0, c]$ y $[0, a]^c = [0, a]$.

b) Si $r(a) + r(c) = r(1)$, para todo $c \in a^{\perp}$, entonces dos complementos distintos de a no son comparables.

c) Si a es maximal y $r(a) + r(c) = r(1)$ para todo $c \in a^{\perp}$, entonces a es un pivote.

d) Si $\bar{L}$ es modular y si a es maximal, entonces a es un pivote.

Prueba.

a) Probaremos la doble contención. Es trivial notar que $[0,c]^a \subseteq [0,c]$. Si $y \in [0,c]$, es claro que $y \leq y \vee a$ y que $y \leq c$, por lo que $(y \vee a) \wedge c \geq y$. Notemos que

$$(y \vee a) \vee c = y \vee (a \vee c) = y \vee 1 = 1$$

Por lo que, junto a la función de rango dada por la semimodularidad (descrita en 1.9), tenemos que $r((y \vee a) \wedge c) + r((y \vee a) \vee c) \leq r(y \vee a) + r(c)$ que puede verse como

$$r(1) + r((y \vee a) \wedge c) \leq r(y \vee a) + r(c)$$

Por otra parte, al ser $y \leq c$, y $c \wedge a = 0$ por ser complementos, $y \wedge a \leq c \wedge a = 0$, luego $r(y \vee a) + r(y \wedge a) \leq r(y) + r(a)$ se reduce a $r(y \vee a) \leq r(y) + r(a)$.

Sumando ambas desigualdades y usando que $r(a) + r(c) = r(1)$, obtenemos

$$r((y \vee a) \wedge c) \leq r(y)$$

lo que implica que, junto a la cota $y \leq (y \vee a) \wedge c$, se ve forzada la identidad $y = (y \vee a) \wedge c$, y debido al lema 3.1, se obtiene que $[0,c] \subseteq [0,c]^a$ implicando la igualdad entre ambos. Para probar el caso $[0,a]^c = [0,a]$, se prueba de forma análoga a la del caso $[0,c] = [0,c]^a$.

b) Como $r(a) + r(c) = r(1)$ para todo $c \in a^\perp$, esto implica que cualesquiera dos elementos $b, c \in a^\perp$ cumplen que $r(b) = r(c)$, por tanto si $b \leq c$, al tener la misma longitud sus cadenas, b necesariamente debe ser c.

c) Por los incisos (a) y (b), tenemos las primeras dos condiciones de los pivotes. Para probar la tercera condición, notemos primero que por el lema 3.2 y el inciso (a),

$$\bar{L}_c = \bar{L}'_c = \{x \in \bar{L} \mid x_a \vee x_c;\ x_a = x \wedge a,\ x_c = x \wedge c\}.$$

Como a es un elemento maximal, con la ecuación $r(a) + r(c) = r(1)$ obtenemos que teniendo $r(1) = r(a) + 1$ por la maximalidad de a, entonces $r(c) = 1$, implicando que para todo $c \in a^\perp$, éste es minimal. De lo anterior, obtenemos que

$$r(x_c) = r(x \wedge c) \leq r(c) = 1,$$

por lo que los elementos x_c sólo pueden ser c ó 0, por estar en la cadena $0 \leq c$.

Procediendo entonces para probar la tercera condición de los pivotes, necesitamos ver que para cualquier cadena en $L' = \bigcup_{c \in a^\perp} L'_c$, existe un $c \in a^\perp$ tal que toda la cadena esté contenida en L'_c.

Para ello, consideremos $x = x_a \vee x_c \in L_c$ con $x_c = c$ y $y = y_a \vee y_d \in L_d$, con $c, d \in a^\perp$ y $c \neq d$. Queremos probar que si $x \leq y$, entonces $y \in L_c$. Si $y_d = 0$, la contención $y \in L_c$ es trivial, por lo que consideraremos $y_d = d$. Como $c \leq x \leq y$, luego $y_a \vee c \leq y_a \vee y = y$.

Notemos que $y_a < y_a \vee c$, pues si $y_a \vee c = y_a$, entonces $c \leq y_a \leq a$, implicando que $c \in [0, a]$, por lo que $a \vee c = a$, que significaría que $c \notin a^\perp$, contradiciendo nuestra hipótesis inicial.

Supongamos $y_a \wedge d = 0$, ya que como $y_a \wedge d \in [0, d] = \{0, d\}$, si $y_a \wedge d = d$, implicaría que $d \leq y_a \leq a$, obteniendo así que $d \vee a = a$, contradiciendo que $d \in a^\perp$. Entonces, teniendo $y_a \wedge d = 0$ podemos aplicar la propiedad de semimodularidad con y_a y d: como $y_a \wedge d = 0 \lessdot d$, entonces $y_a \lessdot y_a \vee d = y$, concluyendo que y_a es maximal en $[0, y]$.

$$\begin{tikzcd}
y_a \vee c \arrow[rr, equal] & & y \\
y_a \arrow[u] \arrow[urr] & & d \arrow[u] \\
& y_a \wedge d \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& 0 \arrow[u, equal] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, esto forza la identidad $y_a \vee c = y$, considerando la cadena recién obtenida $y_a \lessdot y$ y $y_a < y_a \vee c \leq y$.

d) Como $\bar{L}$ es modular, para los elementos $c \in a^\perp$ tenemos que (por 1.10):

$$r(a) + r(c) = r(a \vee c) + r(a \wedge c) = r(1) + r(0) = r(1).$$

De la igualdad anterior obtenemos las hipótesis necesarias para aplicar los incisos (a), (b) y (c), obteniendo con el inciso (c) que a necesariamente es pivote.

$\square$

Corolario 4.2. Con las hipótesis c) o d), de la proposición 4.1, y siendo $L = (0, 1)$, se tiene que $|L| \simeq \bigvee_{c \in a^\perp} (\sum |(0, a)|)$

Prueba. Nótese que por cualquiera de los incisos (c) o (d), se implican los incisos (a) y (b).

Por la parte (a) de la proposición, $(0,a)^c = (0,a)$. Debido a que en la prueba de 4.1 obtenemos que $[0,c] = \{0,c\}$, luego $(0,c) = \emptyset$, por lo que aplicando el teorema 3.9, tenemos que

$$\bigvee_{c\in a^{\perp}} \left(\sum(|(0,a)^c| * |(0,c)^a|)\right) = \bigvee_{c\in a^{\perp}} \left(\sum(|(0,a)| * \{*\})\right) = \bigvee_{c\in a^{\perp}} \left(\sum|(0,a)|\right)$$

obteniendo así lo deseado. □

Teorema 4.3. Sea $\bar{L} = [0,1]$ una retícula modular finita y definamos $L = (0,1)$. Sea $0 = a_0 \lessdot a_1 \lessdot \cdots \lessdot a_{n-1} \lessdot a_n = 1$ una cadena maximal en $\bar{L}$. Sea m_i el número de complementos de a_i en $[0, a_{i+1}]$ y $m = \prod_{i=0}^{n-1} m_i$. Entonces se tiene que L tiene el tipo de homotopía de un bouquet de m esferas de dimensión $n-2$.

Prueba. Aplicaremos inducción sobre n. Si $n=1$, necesariamente $\bar{L} = \{0,1\}$, implicando que $L = \emptyset$, luego $|L| = \emptyset$, y al ser $0 < 1$ la única cadena, luego el único complemento de $a_0 = 0$ es 1, por tanto $m = m_0 = 1$ y como $\emptyset$ también es denotado por S^{-1} por convención, se cumple la base de inducción.

Para proceder si $n > 1$, notemos primero que, por el teorema 4.1d), el elemento $a = a_{n-1}$ es un pivote por estar en una retícula modular y ser un elemento maximal. Por tanto, aplicando el corolario 4.2, obtenemos que $|L| \cong \bigvee_{c\in a^{\perp}} \sum(|(0,a)|)$, y podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre $(0,a)$, usando la misma cadena salvo que ahora el maximal que haría de pivote sería a_{n-1}, y así obtener el resultado deseado.

□

Invirtiendo el orden de la retícula, se puede aplicar el teorema, y es claro que tendrá el mismo tipo de homotopía, pero para aplicar el teorema, éste cambiará los valores m_i por los valores s_i que serán el número de complementos de a_i en $[a_{i-1}, 1]$, y su producto, que denotaremos por s, será igual al m obtenido en el caso de la retícula original.

Ejemplo 4.4. Consideremos una retícula finita $\bar{L} = [0, 1]$ con las condiciones del teorema 4.6 cuyas cadenas maximales son de longitud 2, $\|\bar{L}\| = n > 4$, y sea $L = \bar{L} - \{0, 1\}$

Notemos que todos los elementos son complementos entre sí, salvo consigo mismos, el supremo y el ínfimo. Las cadenas que componen esta retícula serán de la forma

$$0 = a_0 \lessdot b_i \lessdot a_2 = 1.$$

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ b_1 \arrow[ur] & \cdots \arrow[u] & b_m \arrow[ul] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Por una parte, sabiendo que L puede verse como la unión disjunta de los b_i elementos que componen a $\bar{L}$ mayores a 0 y menores a 1, tendríamos que su complejo simplicial asociado, $|L|$, es la unión disjunta de $n-2$ puntos, que puede verse como el join de $n-3$ esferas S^0 $(= \{p_1, p_2\})$.

Por otra parte, para cualquier elemento $b \in L$, todos los elementos en $L - \{b\}$ serán complementos de b, implicando que $m_1 = n - 3$. Para m_0 notemos que el único complemento de 0 en $[0, b]$ será b justamente, por lo que $m_0 = 1$, y por tanto $m = n - 3$. Como b es pivote por ser maximal (por el teorema 4.1, d), aplicando el corolario 4.2, tenemos que, recordando que $\sum S^{-1} = * \sqcup * = S^0$,

$$|L| = \bigvee_{c \in b^\perp} (\sum |(0, b)|) \simeq \bigvee_{c \in b^\perp} S^0 = \bigvee_{i=1}^{n-3} S^0.$$

Proposición 4.5. Sea $\bar{L} = [0, 1]$ una retícula finita semimodular y $L = (0, 1)$. Sea $\psi \colon \bar{L} \to \bar{L}$ donde $\psi(x)$ es el supremo de todos los elementos minimales de $[0, x]$. Entonces:

a) $\bar{E} = \psi(\bar{L})$ es una retícula geométrica.

b) Si $E = \psi(L)$, entonces $\psi \colon L \to E$ es una equivalencia homotópica.

Prueba. a) Si $a, b \in E$, notemos que en $A = [0, a \vee b]$ las familias de minimales que son dominadas por a y por b pertenecen a A. Como dichas familias son dominadas por a y b, el menor elemento que domina a ambas familias es el menor elemento que domina a a y a b a la vez, que es por definición $a \vee b$. Al ser $a \vee b$ el mínimo elemento que domina a todos los minimales de $[0, a \vee b]$ y a la vez el elemento máximo de $[0, a \vee b]$, por unicidad es el supremo que domina a dichas familias, luego $\psi(a \vee b) = a \vee b$.

Notemos que para todo elemento minimal $x \in \bar{L}$, $\psi(x) = x$, por ser el supremo en $[0, x] = \{0, x\}$. Por tanto, por construcción de ψ, sabemos que todo punto de $\bar{E}$ es el supremo de la misma familia de minimales en $\bar{E}$, que la de $\bar{L}$. Denotemos por $a \cap b$ al máximo elemento que es dominado por a y b al mismo tiempo. Supongamos que $a \cap b \lessdot a$ en $\bar{E}$. Luego, existe un elemento $m \leq a$ minimal con $m \nleq b$, ya que de otra forma, todos los elementos minimales de a serían dominados por b, y por consecuente $a \leq b$, pues ambos son imágenes de ϕ, implicando que $a \cap b = a$, cosa que supusimos no cierta. Luego, por dicha descripción de m, $a \cap b < (a \cap b) \vee m \leq a$, pero al no haber elementos entre $a \cap b$ y a por hipótesis, se sigue la identidad $(a \cap b) \vee m = a$.

Como m es minimal y no es dominado por b, luego $b \wedge m = 0$, por tanto $b \wedge m \lessdot m$, y por la condición de retícula semimodular de $\bar{L}$, tenemos que $b \lessdot b \vee m$. Además, $m \vee b \leq a \vee b$, pues $m \leq a$ por como se definió m, y $m \vee b \geq a \vee b$, ya que $m \vee b \geq b$ y $m \vee b \geq m \vee (a \cap b) = a$. De esto se implica que $m \vee b = a \vee b$, y como $b \lessdot m \vee b = a \vee b$, entonces se cumple la semimodularidad de $\bar{E}$.

Cabe mencionar que por el segundo párrafo, $m \in \bar{E}$, y que para cualesquiera $a, b \in \bar{E}$, por el primer párrafo $a \vee b \in \bar{E}$. El único elemento faltante por verificar su pertenencia a $\bar{E}$ es $b \wedge m = 0$, pero es trivial que $\psi(0) = 0$.

b) Notemos que si $i \colon E \to L$ es la inclusión, es evidente que $\psi \circ i = id_E$. Luego, como $i \circ \psi$ cumple que $i(\psi(x)) \leq x$ para todo $x \in L$ por como fue definido, esto implica que $i \circ \psi \simeq 1_L$, por tanto obtenemos que hay una equivalencia homotópica entre E y L.

□

Proposición 4.6. Sea B un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo finito de q elementos. Sea $\bar{L}$ una retícula de subespacios de V y $L = \bar{L} - \{0, V\}$. Entonces L tiene el tipo de homotopía de un bouquet de $q^{\binom{n}{2}} (= q^{\frac{n(n-1)}{2}})$ esferas de dimensión $n - 2$.

Prueba. Dado el teorema 4.3, lo único necesario para obtener el resultado es calcular el número m_i de subespacios complementos de un subespacio W_i de dimensión i dentro de un espacio de dimensión W_{i+1}.

Si consideramos un espacio W_{i+1} (de dimensión $i+1$), el número de subespacios de dimensión 1 que contiene es justamente el número de vectores que posee dividido entre el número de vectores que pertenecen al mismo espacio vectorial.

Al ser vectores de tamaño n, tenemos un total de $q^{i+1}-1$ vectores no nulos contenidos en W_{i+1}, sin embargo, un espacio vectorial generado por un vector genera a $q-1$ vectores distintos del cero, por tanto el número de subespacios vectoriales de dimensión 1 en W_{i+1} es $(q^{i+1}-1)/(q-1)$. Calculando de la misma forma, podemos obtener que el número de subespacios de dimensión 1 que contiene $W_i \subset W_{i+1}$ es $(q^i-1)/(q-1)$, por lo que el número de subespacios que servirán de complemento a W_i en W_{i+1} será justamente

$$\frac{q^{i+1}-1-(q^i-1)}{q-1} = \frac{q^i(q-1)}{q-1} = q^i.$$

Si aplicamos este cálculo para una cadena de subespacios, el número m resulta ser

$$\prod_{i=0}^{n-1} m_i = q^{\sum_{i=0}^{n-1} i} = q^{\frac{(n-1)n}{2}} = q^{\binom{n}{2}},$$

obteniendo así el resultado deseado. $\square$

Capítulo 5

Retículas de subgrupos de grupos finitos

Consideremos un grupo finito G, y $\bar{L}(G)$ la retícula de subgrupos de G. Sea $L(G) = (1, G)$, es decir, la retícula de subgrupos propios de G. El propósito es ver bajo qué condiciones $L(G)$, o más generalmente, (H, G) es contráctil (siendo $H \leq G$).

Lema 5.1. Si $\Phi(H, G) \neq H$, entonces (H, G) es contráctil.

Prueba. Sea $\Phi = \Phi(H, G)$. Si $K \in (H, G)$, veamos que $\Phi \vee K < G$: retomando la definición de Φ, $\Phi = \bigcap_{\substack{A \in (H,G) \\ A \text{ maximal}}} A$, vemos que si K es maximal, $\Phi \leq K < G$, y en caso de no serlo, existe un K' maximal tal que $K \leq K' < G$, por tanto $\Phi \leq K' < G$.

Por lo anterior $\Phi \vee K \in (H, G)$, y como por hipótesis $H \neq \Phi$ se tiene que $\Phi \in (H, G)$, podemos afirmar que para todo $K \in (H, G)$,

$$K \leq K \vee \Phi \geq \Phi,$$

que, aplicando el teorema 2.3, nos prueba que (H, G) es contráctil. □

Proposición 5.2. Sea $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ y $X = N \cdot H$. Si (X, G) es contráctil, entonces (H, G) también lo es. En particular, $L(G)$ es contráctil si $L(G/N)$ lo es.

Prueba. Procederemos por inducción sobre el orden de G. Consideremos el conjunto $A = \{Z \in (H, G) \mid Z \cdot N = G\}$. Sean $Z \in A$ y $X' = (Z \cap N) \cdot H$. Probaremos que $f \colon [X, G] \to [X', Z]$ donde $f(U) = U \cap Z$ y $g \colon [X', Z] \to [X, G]$ donde $g(V) = V \cdot N$ son funciones inversas la una de la otra. Notemos que como $V \in [X', Z]$, $V \leq Z$, y por tanto $Z \cap V = V$, y como $Z \cap N \leq (Z \cap N) \cdot H = X' \leq V$, podemos ver que

$$f(g(V)) = (V \cdot N) \cap Z = (Z \cap V) \cdot (Z \cap N) = V \cdot (Z \cap N) = V$$

Luego, veamos que como $U \in [X, G]$, entonces $N \leq N \cdot H = X \leq U$, por tanto

$$g(f(U)) = (U \cap Z) \cdot N = (U \cdot N) \cap (Z \cdot N) = U \cap G = U$$

Por tanto dichas funciones son la inversa la una de la otra. Teniendo esto, podemos afirmar que $[X, G]$ y $[X', Z]$ son retículas equivalentes.

Por hipótesis del teorema, (X, G) es contráctil, por lo que (X', Z) también lo es, por las biyecciones anteriores. La hipótesis de inducción puede aplicarse sobre el grupo Z, pues $Z \cap N \trianglelefteq Z$, y como $Z \in (H, G)$, $H \leq Z$, haciendo que se pueda aplicar sobre Z considerando $X' = (Z \cap N) \cdot H$. Esto implica que como (X', Z) contráctil, entonces (H, Z) también lo será para los $Z \in A$.

Nótese que al principio de la inducción, el conjunto A es necesariamente vacío, implicando que el caso base se cumple por vacuidad.

Por la proposición 2.6, $(H, G) - A \hookrightarrow (H, G)$ es una equivalencia homotópica, ya que, por la hipótesis de inducción, vimos que (H, Z) es contráctil para todo $Z \in A$. Sin embargo, $(H, G) - A$ es contráctil justamente debido a que para todo $T \in (H, G) - A$, al tenerse que $T \notin A$, $H < T \cdot N < G$ y $T \cdot N \in (H, G) - A$ (pues $T \cdot N \cdot N = T \cdot N < G$), por tanto,

$$T \leq T \cdot N \geq N \cdot H = X,$$

y consecuentemente, (H, G) es contráctil.

Para ver que $L(G)$ es contráctil si $L(G/N)$ lo es, considérese el caso donde H es el grupo trivial, luego justamente $(H, G) = (1, G) = L(G)$, implicando que ambos grupos tengan la misma retícula, y como en este caso $X = 1 \cdot N = N$, entonces $L(G/X) = L(G/N) \cong$

$(N, G) = (X, G)$, pues cada grupo de la forma $K/N \leq G/N$ puede asociarse a dicho $K \leq G$ para obtenerse una biyección entre dichas retículas, considerándose el primer teorema de isomorfismos. $\square$

Corolario 5.3. Sean N y M dos subgrupos normales de G con $N < M$. Si $\Phi(N, M) \neq N$, entonces $L(G)$ es contráctil.

Prueba. Sea $Z \in (N, G)$ un subgrupo maximal, y sea $\Phi = \Phi(N, M)$.

Si $\Phi \cdot Z = G$, como $\Phi \leq M$, entonces

$$\Phi \cdot (Z \cap M) = (\Phi \cdot Z) \cap (\Phi \cdot M) = G \cap (\Phi \cdot M) = G \cap M = M.$$

Como $M' = Z \cap M \leq M$, si $M' \neq M$, entonces existe un maximal $K \in (N, M)$ tal que $M' \leq K$, entonces $\Phi \cdot M' \leq K < M$ (pues $\Phi \leq K$ por definición del grupo de Frattini), pero vimos en la ecuación previa que $\Phi \cdot M' = M$, por tanto $M' = M$. De lo anterior se deduce que $Z \geq M \geq \Phi$, por lo que $G = \Phi \cdot Z = Z$, contradiciendo que $Z \in (N, G)$.

Por tanto $\Phi \cdot Z = Z$ ya que Z es maximal, implicando que $\Phi \leq Z$. De lo anterior, $N < \Phi \leq \Phi(N, G)$ (teniendo por hipótesis que $N < \Phi$), lo que prueba que $\Phi(N, G) \neq N$, y por el lema 5.1 , implica que (N, G) sea contráctil, y por tanto, por el caso particular de la proposición 5.2, $L(G)$ lo sea también. $\square$

Proposición 5.4. Sean G y H dos grupos de órdenes primos relativos entre ellos. Entonces $|L(G \times H)|$ tiene el tipo de homotopía de $\sum(|L(G)| * |L(H)|)$.

Prueba. Claramente por la proposición 3.4, lo único que resta probarse para validar este resultado es $\bar{L}(G \times H) = \bar{L}(G) \times \bar{L}(H)$. Sin embargo, al ser $(\|H\|, \|G\|) = 1$ por hipótesis, las retículas de ambos grupos son ajenas, por tanto se tiene la identidad deseada. $\square$

Proposición 5.5. Sea G un grupo nilpotente y $H \leq G$.

a) Si $H \leq G$ no es normal en G, entonces (H, G) es contráctil.

b) Si $H \lhd G$ y G/H no es producto de grupos elementales abelianos, entonces $(H, G) = L(G/H)$ es contráctil.

c) Si $H \lhd G$ y $G/H \cong \prod_{i=1}^{r} C_{p_i}^{n_i}$,[†] entonces $|(H,G)| = |L(G/H)|$ tiene el tipo de homotopía de un bouquet de m esferas de dimensión $n-2$ donde $m = \prod_{r}^{i=1} p_i^{\binom{n}{2i}}$ y $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$.

Prueba. a) Como G es nilpotente, por el teorema 1.12, todo subgrupo maximal de G es normal, por tanto, al ser $\Phi(H,G)$ una intersección de grupos maximales de G, $\Phi(H,G) \trianglelefteq G$, por lo que $H \neq \Phi(H,G)$, implicando por el lema 5.1 que (H,G) sea contráctil.

b) Como G es nilpotente, por el teorema 1.16, $G/\Phi(H,G)$ es un producto de grupos abelianos elementales. Luego, como G/H no lo es, $\Phi(H,G) \neq H$ y consecuentemente (H,G) es contráctil por 5.1.

c) Como la selección de H en este resultado no es relevante, sin pérdida de generalidad sea $H = 1$. Sea $P_i = C_{p_i}^{n_i}$ el p_i-subgrupo de Sylow de G. Por el teorema 4.6, es claro que $L(P_i)$ es homotópicamente equivalente a un bouquet de $p_i^{\binom{n_i}{2}}$ esferas de dimensión $n_i - 2$. Luego, por el resultado 5.4, aplicándose sobre todos los p-subgrupos de Sylow, obtenemos de esto conjuntamente con el teorema 1.24, que nuestro resultado final será justamente el que queremos.

$\square$

Ejemplo 5.6. Para hacer evidente la afirmación 5.5c), consideremos el caso particular con $G = C_{p_1}^{n_1} \times C_{p_2}^{n_2}$, pues de este se puede inferir inductivamente dicha operación para una cantidad mayor de factores primos:

$$|G| = |C_{p_1}^{n_1} \times C_{p_2}^{n_2}| \cong \sum(|C_{p_1}^{n_1}| * |C_{p_2}^{n_2}|) = \sum\left(\bigvee_{p_1^{\binom{n_1}{2}}} S^{n_1-2} * \bigvee_{p_2^{\binom{n_2}{2}}} S^{n_2-2}\right),$$

pero sabiendo que el join de un wedge de espacios es justamente el wedge de dichos join, tenemos que

$$\sum\left(\bigvee_{p_1^{\binom{n_1}{2}}} S^{n_1-2} * \bigvee_{p_2^{\binom{n_2}{2}}} S^{n_2-2}\right) = \sum\left(\bigvee_{p_1^{\binom{n_1}{2}}}\left(\bigvee_{p_2^{\binom{n_2}{2}}} S^{n_1-2} * S^{n_2-2}\right)\right),$$

[†] C_p^n es el producto de n copias de $\mathbb{Z}_p$

y al hacer las operaciones pertinentes, se obtiene el resultado:

$$\sum\left(\bigvee_{p_1^{\binom{n_1}{2}}\cdot p_2^{\binom{n_2}{2}}} S^{n_1+n_2-3}\right)=\bigvee_{p_1^{\binom{n_1}{2}}\cdot p_2^{\binom{n_2}{2}}}\left(\sum(S^{n_1+n_2-3})\right)=\bigvee_{p_1^{\binom{n_1}{2}}\cdot p_2^{\binom{n_2}{2}}}\left(S^{n_1+n_2-2}\right).$$

Habiendo realizado estas operaciones con un G con sólo dos divisores primos, podemos proceder al caso general donde G posee una cantidad arbitraria finita de factores primos, concluyendo de la misma forma que $n=\sum_1^r n_i$ y que $\prod_1^r p_i^{\binom{n_i}{2}}$.

Lema 5.7. Sea N un subgrupo normal de G y $H\in N^{\perp}$.

a) $[1,N]^H$ es la retícula de subgrupos de N que son invariantes por H.

b) Si N es abeliano, $[1,N]^H$ es la retícula de subgrupos de N que son normales en G.

c) La función $[H,G]\to[1,N]^H$ dada por $X\mapsto X\cap N$ es un isomorfismo de retículas. En particular, un complemento de un subgrupo normal abeliano minimal es maximal.

d) La aplicación $[N,G]\to[1,H]$ dada por $X\mapsto X\cap H$ es un isomorfismo de retículas donde $[1,H]^N=[1,H]$

e) Si N es un subgrupo normal abeliano minimal y si $N\cdot K=G$, con $K\neq G$, entonces K es un complemento de N.

Prueba. Sea T la retícula de subgrupos de N que son invariantes a H. Si $X\in[H,G]$, entonces $X\cap N\in T$ ya que $X\cap N$ es normal en X, por lo que lo será igualmente con $H\leq X$. Sean entonces las funciones $\phi\colon[H,G]\to T$ y $\psi\colon T\to[H,G]$ dadas por $\phi(X)=X\cap N$ y $\psi(Y)=Y\cdot H$. Como H normaliza a $Y\in T$ (por definición de T), entonces $Y\cdot H$ es un subgrupo.

Notemos pues, que las funciones son inversas mutuamente: si $X\in[H,G]$ como $H\leq X$ y $H\cdot N=G$ por ser complemento de N, luego

$$\psi(\phi(X))=(X\cap N)\cdot H=(X\cdot H)\cap(N\cdot H)=X\cap(N\cdot H)=X\cap G=X;$$

por otra parte, si $Y\in T$, como $Y\leq N$ y $H\cap N=1$ por ser H complemento de N, entonces:

$$\phi(\psi(Y))=(Y\cdot H)\cap N=(Y\cap N)\cdot(H\cap N)=Y\cdot 1=Y.$$

Por definición, $[1,N]^H$ es la imagen de ϕ, como se describió en el capítulo 2, y dado que T es la imagen de dicha función, $T = [1,N]^H$, demostrando así los incisos (a) y la primera parte de (c).

Si N es abeliano, claramente para todo $Y \in [1,N]^H$ $Y \trianglelefteq N$, y como $Y \trianglelefteq H$ por definición de $[1,N]^H$, luego $Y \trianglelefteq H \cdot N = G$, por tanto esto prueba (b).

El caso particular de (c) se obtiene de ver que, teniendo el isomorfismo $\phi \colon [H,G] \to [1,N]^H$, si N es minimal, $[1,N]^H = \{1,N\}$, por lo que $[H,G] = \{H,G\}$, implicando que no existe otro subgrupo entre H y G, lo que justamente es la definición de subgrupo maximal.

Para ver (d), consideremos las funciones $\alpha \colon [N,G] \to [1,H]$, dada por $\alpha(X) = X \cap H$, $\beta \colon [1,H] \to [1,G/N]$, dada por $\beta(Y) = (Y \cdot N)/N$ y $\gamma \colon [N,G] \to [1,G/N]$ dada por $\gamma(X) = X/N$. Es trivial notar que γ es un isomorfismo de retículas, y que, recordando que $G/N \cong H$, β también lo es. De lo anterior, obtendremos que α también lo será si probamos que $\beta \circ \alpha = \gamma$. Pero esta identidad es clara porque para $X \geq N$,

$$\beta \circ \alpha(X) = \frac{(X \cap H) \cdot N}{N} = \frac{(X \cdot N) \cap (H \cdot N)}{N} = \frac{X \cap G}{N} = \frac{X}{N} = \gamma(X),$$

por lo que α será un isomorfismo. Además, esto implicará que, por definición del conjunto $[1,H]^N$ como la imagen de la función α, $[1,H] = [1,H]^H$.

Para probar (e), nótese que al ser minimal N, las únicas posibles opciones para $K \cap N$ son ser 1 ó N, y si $K \cap N = N$, implicaría que $N \leq K$, y por consecuente $G = K \cdot N = K$, contradiciendo que K sea un subgrupo maximal de G. Por ello $K \cap N = 1$, y junto con que $K \cdot N = G$, $K \in N^{\perp}$. $\square$

Teorema 5.8. Sea N un subgrupo normal abeliano de G. Supongamos que N es semisimple como $\mathbb{Z}G$-módulo (G actúa por conjugación sobre N). Entonces N es un pivote de $\bar{L}(G)$.

Prueba. Si N no posee complementos en G, por convención de la definición, es un pivote.

Si $N^{\perp} \neq \emptyset$, primero notemos, para verificar la primera condición de pivote, que por el lema 5.7b), $[1,N]^H$ es independiente de H, por ser el conjunto de subgrupos normales a G, haciéndolo un conjunto invariante de H.

Para ver la segunda condición, ésta clara, pues si $H \in N^{\perp}$, entonces:

$$|G| = |N \cdot H| = \frac{|N| \cdot |H|}{|N \cap H|} = |N| \cdot |H| \Rightarrow |H| = \frac{|G|}{|N|},$$

por lo que para cualesquiera dos complementos H, K, si $H \leq K$, por el orden de ambos, implicará que $H = K$.

Para la tercera condición, recordemos que $\bar{L_H}' = \{X = M \cdot K \mid M \in [1, N]^H, K \in [1, H]\}$, y que $L'_H = \bar{L_H}' - \{1, G\}$. Consideramos los complementos $H_1, H_2, \ldots, H_n \in N^{\perp}$ y $X_i \in L'_{H_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que $X_n \leq X_{n-1} \leq \cdots \leq X_2 \leq X_1$. Queremos ver que todos los X_i pertenecen a un mismo L'_H $(H \in N^{\perp})$ para verificar la tercera condición.

Para ello, lo probaremos por inducción. Para el caso con $n = 1$ es trivial. Consideremos entonces la cadena de n elementos. Tenemos que por hipótesis de inducción, para cualquier cadena de longitud $n-1$ elementos, éstos pertenecen a un mismo L'_H, por lo que podemos reducir el problema a ver que dada una cadena $\{X_i\}_{1,2,\ldots,n}$ sólo es necesario probar que alguno de los elementos de la cadena pertenezca al L'_H común de los demás. Supongamos entonces que $X_i \in L'_{H'}$ para $i = 2, \ldots, n$ y que $X_1 \in L'_H$. Por el lema 3.2, tenemos que $X_i = M_i \cdot K'_i$, con $M_i \in [1, N]^H$ y $K'_i \leq H'$, para $i = 2, \ldots, n$. Igualmente $X_1 = M_1 \cdot K_1$, con $M_1 \in [1, N]^H$ pero con $K_1 \in H$.

Nótese que todo elemento de H' puede escribirse de la forma $h' = c(h) \cdot h$, con $h \in H$, y $c(h) \in N$, pues $G = N \cdot H$. Más aún, la función $c \colon H \to N$ es un 1-cociclo, por el teorema 17.3 de [10]. Luego entonces, a cada subgrupo $K'_i \leq H'$ le corresponde un subgrupo $K_i \leq H$, ya que $K'_i = \{h \cdot c(h) \mid h \in K_i\}$.

Veamos que si $h \in K_2$, $c(h) \cdot h \in K'_2 \leq M_1 \cdot K_1$ (pues $K'_2 \leq X_2 \leq X_1$), implicando que, al tenerse que $M_1 \cap K_1 = \{1\}$ (pues $M_1 \in N$ y $K_1 \in H$), $c(h) \in M_1$.

Ahora $M_1 \in [1, N]^H$, por lo que $M_1 \trianglelefteq G$, por el lema 5.7b)$.$ De esto M_1 es un sub-$\mathbb{Z}G$-módulo de N, y como éste último es semisimple, una de las propiedades de la semisimplicidad es que existirá un módulo complemento P para M_1 tal que $N = M_1 \times P$.

Debido a lo anterior, c puede verse como $c = c_1 \times c_2$, con $c_1 \colon H \to M_1$ y $c_2 \colon H \to P$ 1-cociclos (lo cual puede verificarse viendo la función c en su descomposición entrada a entrada). Como $c(K_2) \subseteq M_1$, se tiene que $c_2|_{K_2} = 0$, y $c_1|_{K_2} = c|_{K_2}$. Sea entonces $H'' = \{c_1(h) \cdot h \mid h \in H\}$.

Como c_1 es un cociclo, H'' es un subgrupo de G. Además, es complemento de N, ya que, recordando que $c(h) \in N$ para todo $h \in H$, para los elementos en $N \cdot H''$, éstos pueden verse de la forma $(n \cdot c(h)^{-1}) \cdot (c(h) \cdot h) = n \cdot h$ con $n \in N$, por lo que $\|N \cdot H''\| = \|N \cdot H\|$. Para verificar que $N \cap H'' = 1$ y ver que efectivamente es un complemento, si $a \in N \cap H''$, por pertenecer a H'', $a = c(h) \cdot h$ para algún $h \in H$. Como $c(h)^{-1} \cdot (c(h) \cdot h) = h \in N$, luego $h \in N \cap H = \{1\}$, lo que forza $h = 1$, implicando que $a = 1$, por lo que $N \cap H'' = \{1\}$.

Ahora, siguiendo el hecho de que $c_1|_{K_2} = c|_{K_2}$, para $i \geq 2$,

$$K_i'' = \{c_1(h) \cdot h \mid h \in K_i\} = \{c(h) \cdot h \mid h \in K_i\} = K_i'.$$

Luego $X_i = M_i \cdot K_i' = M_i \cdot K_i'' \in L'_{H''}$. Más aún, si consideramos a $K_1'' = \{c_1(h) \cdot h \mid h \in K_1\}$, entonces $K_1'' \leq M_1 \cdot K_1$, pues claramente si $n \in K_1''$, luego $n = c_1(h) \cdot h$ para cierto $h \in K_1$, y recordando que $c_1(K_1) \leq M_1$, entonces $c_1(h) \cdot h \in M_1 \cdot K_1$.

Queriendo ver que $M_1 \cdot K_1 = M_1 \cdot K_1''$, notemos que $|K_1''| = |K_1|$. De no ser cierto, significaría que existen $h_1, h_2 \in K_1$ distintos tales que $c_1(h_1) \cdot h_1 = c_1(h_2) \cdot h_2$, implicando que $c_1(h_2)^{-1} \cdot c_1(h_1) = h_2 \cdot h_1^{-1}$. Como $c_1(h_2)^{-1} \cdot c_1(h_1) \in M_1$ y $h_2 \cdot h_1^{-1} \in K_1$, observando que $M_1 \leq N$ y $K_1 \leq H$, y éstos son complementos, $M_1 \cap K_1 = \{1\}$, por lo que $h_1 = h_2$, contradiciendo la suposición. Luego por cada elemento de K_1 hay uno de K_1'' implicando que tengan la misma cardinalidad.

Aparte, podemos ver que $K_1'' \cap M_1$ también es $\{1\}$, pues de existir un elemento $a \in K_1'' \cap M_1$, $a = c_1(h) \cdot h$ para cierto $h \in K_1$ por pertenecer a K_1'', pero como $c_1(h) \in M_1$, entonces $c_1(h)^{-1} \cdot (c_1(h) \cdot h) = h \in M_1$, pero nuevamente como $M_1 \leq N$, y $h \in H$, el único candidato posible para h es 1.

Considerando los dos párrafos anteriores, tenemos que, como $M_1, K_1'' \leq M_1 \cdot K_1$,

$$|M_1 \cdot K_1| = \frac{|M_1| \cdot |K_1|}{|M_1 \cap K_1|} = \frac{|M_1| \cdot |K_1''|}{1} = \frac{|M_1| \cdot |K_1''|}{|M_1 \cap K_1''|} = |M_1 \cdot K_1''|,$$

viendo de esta igualdad de cardinalidades que $M_1 \cdot K_1 = M_1 \cdot K_1''$. Como $K_1'' \leq H''$ por su misma construcción, esto implica que $K_i'' \leq H''$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, verificando así la tercera condición de pivote, probando el teorema. $\square$

Corolario 5.9. Sea N un subgrupo normal abeliano de G. Entonces $|L(G)|$ tiene el tipo de homotopía de $\bigvee_{H \in N^\perp} (\sum(|(1,N)^H| * |L(G/N)|))$. Además $L(G)$ es contráctil si N no es semisimple como $\mathbb{Z}G$-módulo.

Prueba. Si N es semisimple, por el teorema 5.8, N es pivote y por tanto aplicando el teorema 3.9 y tendremos que, considerando que $(1,H)^N = (1,H) \cong L(G/N)$ por el lema 5.7d),

$$|L(G)| \simeq \bigvee_{H \in N^\perp} \left(\sum \left(|(1,N)^H| * |(1,H)^N| \right) \right) \simeq \bigvee_{H \in N^\perp} \left(\sum \left(|(1,N)^H| * |L(G/N)| \right) \right).$$

Si N no tiene complementos, por convención, N es pivote y nuevamente podemos concluir de la misma forma que el caso anterior.

Si N no es semisimple como $\mathbb{Z}G$-módulo, veamos que $L(G)$ y $(1,N)^H$ son contráctiles para concluir. Sea J el radical del $\mathbb{Z}G$-módulo N. Ya que N es finito y no es semisimple, $J \neq 0$ (haciendo que $(1,N)^H$ sea contráctil por el lema 5.1).

Por otra parte, al ser J la intersección de los maximales de N, entonces es característico en él, y al ser N normal en G, cualquier automorfismo por conjugación de elementos de G se puede restringir a un automorfismo de N, haciendo que la propiedad de característico de J lo fije, implicando que $J \trianglelefteq G$.

Como N posee al menos un complemento (por hipótesis del caso), si J posee un complemento C, entonces $C \cong G/J$, y C contendrá un complemento H de N. Notemos que $C \cap N \in [1,N]^H$, pues H va a normalizar a dicho subgrupo, ya que $N \trianglelefteq G$ y $H \leq C$. Al tener la existencia de $C \cap N$, esto implica que éste subgrupo es complemento de J en N, pues $J \cap C \cap N = 1 \cap N = 1$ y

$$J \cup (C \cap N) = (J \cup N) \cap (J \cup N) = G \cap N = N,$$

pero la existencia de un complemento de J en N no puede ocurrir, ya que esto implicaría que N sea un semimódulo, ya que existen dos módulos en N tales que $N = \langle J, C \cap N \rangle$, por lo que J no puede poseer complementos en $[1, G]$, implicando que $L(G)$ sea contráctil, por el teorema 2.8. $\square$

Para los resultados siguientes, se consideran en algunos casos grupos G solubles. Si

$$1 = N_0 \lhd N_1 \lhd N_2 \lhd \cdots \lhd N_s = G$$

es una cadena principal de un grupo G, si $H \leq G$, se define $H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots \lhd H_n = G$ la cadena de términos distintos de la cadena de $H \cdot N_i$. También se denota $R_i = N_r$ el mayor N_j tal que $H \cdot N_j = H_i$ y $L_i = N_r$ el menor N_j tal que $H \cdot N_j = H_i$. De lo anterior, es claro que $L_0 = 1$, $N_{r+1} = L_{i+1}$ y $R_n = G$.

Teorema 5.10. Sea $1 = N_0 \lhd N_1 \lhd N_2 \lhd \cdots \lhd N_s = G$ una cadena principal de un grupo resoluble G. Sea m_i el número de complementos de N_i/N_{i-1} en G/N_{i-1} $(1 \leq i \leq s-1)$.

a) $|L(G)|$ tiene el tipo de homotopía de un bouquet de $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_{s-1}$ esferas de dimensión $s-2$.

b) C es un complemento de H_1 en $[H, G]$ si y sólo si C es un complemento de L_1 en $[1, G]$ y $C \geq H$.

c) H_1 es un pivote de $[H, G]$

Prueba. Las afirmaciones b, c son herramientas para probar a, por lo que para ello, primero se da una convención: como $R_0 \subset H$ (pues R_0 es el mayor N_i tal que $H = H \cdot N_i$), al pasar al cociente, éste resulta irrelevante, por lo que podemos suponer el caso $R_0 = 1$, lo que implica que L_1 sea un subgrupo minimal, por la maximalidad de la cadena principal, y abeliano, pues al ser resoluble, $L_1/R_0 = L_1/1 \cong L_1$ es abeliano.

b) $(\Leftarrow)$ Si $C \in L_1^{\perp}$ contiene a H, entonces

$$C \cdot H_1 = C \cdot H \cdot L_1 = (C \cdot L_1) \cdot H = G \cdot H = G$$

y como $C \geq H$,

$$C \cap H_1 = C \cap (L_1 \cdot H) = (C \cap L_1) \cdot (C \cap H) = 1 \cdot H = H.$$

($\Rightarrow$) Si $C \in H_1^{\perp}$ en $[H,G]$, entonces, como $C \in [H,G]$, $C \geq H$, y por tanto

$$C \cdot L_1 = C \cdot H \cdot L_1 = C \cdot H_1 = G$$

y de esto se sigue que $C \in L_1^{\perp}$ por el lema 5.7e).

c) Para ver la primera condición de pivote, es claro que $(H, H_1) \cong (N_0, N_1) = \emptyset$, luego $(H, H_1)^C$ también lo será, por lo que dicho conjunto es independiente de C.

Para la segunda condición, nótese que los complementos de H_1 son los complementos de L_1 por (a). De esto, podemos ver que el orden de los complementos de L_1 es el mismo para todos (como se realizó en 5.8), por lo que si dos complementos de L_1 fueran comparables, tendrían que ser el mismo elemento.

Para verificar la tercera condición, sea $Z_1 \leq Z_2 \leq \cdots \leq Z_m$ una cadena de subgrupos en $[H,G]$. Por el lema 3.2, podemos reescribirlos como $Z_i = (Z_i \cap H_1) \cdot (Z_i \cap C_i)$ para $C_i \in H_1^{\perp}$ y $Z_i \cap H_1 \in [H, H_1]^C$.

Como $(H, H_1)^C$ es vacío, $Z_i \cap H$ sólo puede ser H o H_1. Sea r el valor del índice más grande tal que $Z_i \cap H$ y definamos $C = C_r$ (si r no existiera, podemos considerar cualquier C_i). El propósito de esta selección es probar que para todo $1 \leq i \leq m$,

$$Z_i = (Z_i \cap H_1) \cdot (Z_i \cap C).$$

Si $i \leq r$, $Z_i \leq Z_r \leq C$, por lo que $Z_i \cap C = Z_i$, obteniendo lo deseado. Si $i > r$, $Z_i \geq H$, y utilizando el isomorfismo $f\colon [H_1, G] \to [H, C]$ del lema 5.7d) con Z_i, tenemos $f^{-1}(f(Z_i)) = f^{-1}(Z_i \cap C) = (Z_i \cap C) \cdot H_1$, pero la composición de f con su inversa implican que $Z_i = (Z_i \cap C) \cdot H_1$, haciendo claro que $Z_i \in L'_C$ para los $i > r$. Por tanto se cumple la tercera condición de pivote, probando así el enunciado.

a) Procediendo por inducción, nótese que para el caso base $n = 1$, $H \cdot L_1 = G$. Por el lema 5.7c), H es maximal, pues L_1 es un subgrupo normal abeliano minimal, por lo que $|(H,G)| = \emptyset = S^{-1}$. Por otro lado, $m_1 = 1$, pues H es el único complemento de L_1 contenido en H, lo que implica que en el caso general, $m_n = 1$.

Si $n > 1$, por hipótesis de inducción $|(H,G)|$ es homotópico a un bouquet de $m_2 \cdot m_3 \cdots m_n$ esferas de dimensión $n-3$. Recordemos que m_1 es el número de complementos de

H_1 en $[H, G]$, y por (a), dichos complementos lo son también de L_1 en $[1, G]$, por lo que por el lema 5.7c), éstos son maximales.

Luego, por (b), H_1 es pivote y podemos aplicar el teorema 3.9, obteniendo que

$$|(H,G)| = \bigvee_{C \in H_1^{\perp}} \sum \left(|(H,H_1)^C| * |(H,C)^{H_1}|\right)$$

Y como $(H, H_1)^C$ es la imagen de (C, G) por intersección con H_1 (usando el lema 5.7c)), entonces es vacío, por ser C maximal, implicando que $|(H, H_1)^C| = |\emptyset| = \emptyset$. Por otra parte, $(H, C)^{H_1} = (H, C) = (H_1, G)$ por 5.7d), por lo que, al realizar el join definido en 1.23 con éste espacio y un espacio vacío, nuevamente queda el espacio $|(H, C)^{H_1}|$, y al realizar dicha suspensión, sabiendo que por hipótesis de inducción, su complejo simplicial asociado es homotópico a un bouquet de esferas de dimensión $n - 3$ dichas esferas se volverán esferas de dimensión $n - 2$ (por 1.22). Luego tendremos un wedge indexado por los m_1 complementos de H_1 en $[H, G]$, de bouquets de $m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_n$ esferas de dimensión $n - 2$, lo que es equivalente a decir que tendremos un bouquet de $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ esferas de dimensión $n - 2$.

□

Corolario 5.11. Sea $1 = N_0 \lhd N_1 \lhd \dots \lhd N_s = G$ una cadena principal de un grupo resoluble G. Sea m_i el número de complementos de N_i/N_{i-1} en G/N_{i-1} $(1 \leq i \leq s-1)$. Entonces $|L(G)|$ tiene el tipo de homotopia de un bouquet de $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_{s-1}$ esferas de dimensión $s - 2$.

Prueba. Utilícese el teorema 5.10 considerando el caso $H = 1$. □

Corolario 5.12. Sea $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq N_s = G$. Una cadena principal de un grupo resoluble G y H un subgrupo de G. Si existe j tal que $N_{j-1} < (H \cdot N_{j-1}) \cap N_j < N_j$, entonces (H, G) es contráctil. En particular, (H, G) es contráctil si H está contenido propiamente entre dos términos consecutivos de una cadena principal.

Prueba. Si $H \cdot N_{j-1} = H \cdot N_j$, entonces $(H \cdot N_{j-1}) \cap N_j = N_j$, contradiciendo la hipótesis. Luego, $H \cdot N_{j-1} \leq H \cdot N_j$ para algún j, y usando la notación del teorema 5.10, $N_{j-1} = R_{i-1}$ y $N_j = L_i$ para cierto i.

Si C es un complemento de L_i/R_{i-1} en G/R_{i-1} (esto es, $C/R_{i-1} \cdot L_i/R_{i-1} = G/R_{i-1}$ y $C/R_{i-1} \cap L_i/R_{i-1} = 1/R_{i-1}$) y si C contiene a H, que implicaría que contenga al producto $H_{i-1} = H \cdot R_{i-1} = H \cdot N_{j-1}$, entonces

$$N_{j-1} < (H \cdot N_{j-1}) \cap N_j \leq C \cap N_j = C \cap L_i = R_{i-1} = N_{j-1},$$

lo cual no tiene sentido, ya que afirma que $N_{j-1} < N_{j-1}$. De lo anterior, esto afirma que L_i/R_{i-1} no tiene complementos en G/R_{i-1}, lo que implica que $m_i = 0$, y al utilizar el teorema 5.10, $|(H, G)|$ es homotópico a un bouquet de $m = 0$ esferas, lo que hace automáticamente a (H, G) contráctil. $\square$

Teorema 5.13. Sea $1 = M_0 \trianglelefteq M_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq M_r = G$ una cadena de subgrupos normales de G. Para $1 \leq i \leq r$ supongamos que M_i/M_{i-1} es abeliano (por tanto G es resoluble), que M_i/M_{i-1} es semisimple como $\mathbb{Z}[G/M_{i-1}]$-módulo y que M_i/M_{i-1} posea un complemento en G/M_{i-1}. Entonces $L(G)$ no es contráctil.

Prueba. Procedamos por inducción sobre r. Si $r = 1$, entonces $G = M_1/M_0 = G/1$ sería semisimple como $\mathbb{Z}[G/1]$-módulo, pero al ser abeliano por hipótesis (los M_i/M_{i-1} son abelianos), actuaría trivialmente sobre sí mismo, por lo que sería sólo un $\mathbb{Z}$-módulo.

Esto obliga, que al ser un $\mathbb{Z}$-módulo y semisimple, es suma directa de $\mathbb{Z}$-submódulos irreducibles, pero los módulos irreducibles de $\mathbb{Z}$ son los generados por los números primos. Luego G es una suma de grupos abelianos elementales, implicando que por la proposición 5.5c) no sea contráctil.

Si $r > 1$, $M_1 = M_1/M_0 = M_1/1$ es abeliano, y por el teorema 5.8 es un pivote. Por el teorema 5.9, $|L(G)| \simeq \bigvee_{H \in M_1^{\perp}} (\sum(|(1, M_1)^H| * |L(G/M_1)|))$, y hipótesis de inducción, $L(G/M_1) \cong (M_1, G)$ no es contráctil, por lo que sólo resta probar que $(1, M_1)^H$ no lo sea, ya que, en caso contrario, tendríamos el join con un punto, haciendo que tengamos que $|(1, M_1)^H| * |L(G/M_1)| \simeq C(|L(G/M_1)|) \simeq *$, y esto conllevaría a que $|L(G)|$ sea contráctil.

Por el lema 5.7b),$(1, M_1)^H$ es la retícula de sub-$\mathbb{Z}G$-módulos de M_1. Como M_1 es semisimple por hipótesis, todos los sub-$\mathbb{Z}G$-módulos de M_1 serán semisimples, implicando que $(1, M_1)^H$ es una retícula de componentes isotípicas de M_1. Por la proposición 3.4, sólo será necesario ver que cada una de las componentes no es contráctil, pues al ser un módulo semisimple, M_1 puede verse como suma de $\mathbb{Z}G$-módulos irreducibles.

Ahora, si $M = \bigoplus_k S$ es un $\mathbb{Z}G$-módulo isotípico, y si $End_{\mathbb{Z}G}(S) = F$, entonces F debe ser un anillo con división finito, y por consecuente, un campo finito (por el pequeño teorema de Wedderburn). Luego, como M cumple que

$$End_{\mathbb{Z}G}(M) = \bigoplus_k End_{\mathbb{Z}G}(S) = \bigoplus_k F,$$

y por el teorema 1.18 M será equivalente a un F-espacio vectorial V de dimensión finita, y generalizando la estructura de M a las retículas de sub-$\mathbb{Z}G$-módulos $(1, M_1)^H$, implica que éstos son equivalentes a espacios vectoriales, por tanto, por el teorema 4.6, $(1, M_1)^H$ no es contráctil.

$\square$

Teorema 5.14. Sea G un grupo resoluble, $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq N_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_s = G$ una cadena principal de G y $1 = M_0 \trianglelefteq M_1 \trianglelefteq M_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq M_r = G$ una cadena característica maximal de G. Las condiciones siguientes son equivalentes

i) $L(G)$ es contráctil.

ii) $\tilde{\chi}(L(G)) = \chi(L(G)) - 1 = 0$.

iii) Existe $1 \leq i \leq s-1$ tal que N_i/N_{i-1} no posee complementos en G/N_{i-1}.

iv) Existe $1 \leq i \leq r-1$ tal que M_i/M_{i-1} no posee complementos en G/M_{i-1}.

v) Existe un subgrupo característico de G sin complementos en G.

vi) Existe un subgrupo normal de G sin complementos en G.

vii) Existe un subgrupo de G sin complementos en G (en el sentido de retículas).

Prueba. Es claro que si tenemos (v), entonces dicho grupo al ser característico es normal, por lo que se cumple (vi) y el mismo subgrupo hace cumplir (vii). A su vez, por el teorema 2.8, (vii) implica (i).

Por otra parte, $|L(G)|$ es homotópico a un bouquet de $\tilde{\chi}(L(G))$ esferas. Por ello, si es contráctil, $\tilde{\chi}(L(G)) = 0$, haciendo que (i) implique (ii), y si $\tilde{\chi}(L(G)) = 0$, un bouquet de cero esferas es justamente un punto por convención, por lo que (ii) implica (i) y por consecuente (i) es equivalente a (ii).

Nótese que por el corolario 5.11, (i) es equivalente a (iii), pues de tener todos los N_i/N_{i-1} complementos en G/N_{i-1}, implicaría que $m_i \neq 0$ para $i = 0, 1, \ldots, s$, y no sería contráctil.

Luego, por la proposición 5.13, (i) implica (iv). Como M_i es característico en G, M_i/M_{i-1} lo será en G/M_{i-1}. Al ser la cadena característica una cadena maximal, M_i/M_{i-1} es minimal en G/M_{i-1}. Por otra parte, como es característico, es normal en G/M_{i-1}, lo que lo hace un $\mathbb{Z}[G/M_{i-1}]$-módulo. Ya que pertenece a una cadena característica maximal, su radical debe ser trivial, pues el radical de un grupo es característico, y de no ser trivial el radical de M_i/M_{i-1}, la hipótesis de maximalidad de la cadena se contradiría, por lo que M_i/M_{i-1} es semisimple.

Finalmente, (iv) implica (v), ya que, si M_i/M_{i-1} no posee complementos en G/M_{i-1}, M_i tampoco los tendrá. $\square$

El teorema anterior no tiene recíproco, ya que si $|L(G)|$ es homotópico a un bouquet de esferas de la misma dimensión, esto no implica que el grupo sea resoluble. Por ejemplo, recordando que A_5 es el grupo alternante de 5 elementos, $|L(A_5)|$ es homotópico a un bouquet de 60 círculos, pero es sabido que A_5 no es resoluble.

Más aún, para el caso de $G = PSL(\mathbb{F}_7)$, el grupo simple de orden 168, se tiene que $H_1(|L(G)|) \neq 0$, y que $H_2(|L(G)|) \neq 0$, además de cumplir que $\tilde{\chi}(L(G)) = 0$. Entonces, no solamente $|L(G)|$ no es un bouquet de esferas equidimensionales, sino que las condiciones (i) y (ii) no se cumplen (pues $H_1 = \pi_{ab} \neq 0$).

Por lo anterior, no tiene sentido el teorema si G no es resoluble.

Referencias

[1] C. Kratzer, J. Thévenaz, *Type d'homotopie des treillis et treillis des sous-groupes d'un groupe fini* (Francés), Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 1, 85–106.

[2] D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Adv. in Math. **28** (1978), no. 2, 101–128.

[3] M. Aigner *Combinatorial Theory*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[4] C. Kratzer, J. Thévenaz, *Fonction de Möbius d'un groupe fini et anneau de Burnside* (Francés), Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 3, 425–438

[5] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, third edition, Wiley, Hoboken, NJ, 2004.

[6] R. Brown, *Topology and groupoids*, third edition, Booksurge, N. Carolina, 2006.

[7] M. Stern, *Semimodular lattices: theory and applications*, Encyclopedia of mathematics and its applications; v 73. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[8] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[9] K. Doerk and T. Hawkes, *Finite soluble groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 4, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.

[10] B. Huppert, *Endliche Gruppen I* (Alemán), Springer Verlag, Berlin, 1967.

[11] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis* (Francés), Hermann, Paris, 1967.

[12] Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples.* (Francés) Second revised edition of the 1958 edition. Springer, Berlin, 2012.