

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

“Teoría de Morse discreta y espacios
de configuraciones de gráficas”

TESIS

Que Presenta

MARÍA TERESA IDSKJEN HOEKSTRA MENDOZA

para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Director de la Tesis:

Dr. Jesús González Espino Barros

Ciudad de México

Febrero, 2019

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por financiar este trabajo así como todos mis estudios de maestría. CVU: 829061

También agradezco a mi asesor Jesús González por dirigir esta tesis así como a los sinodales Miguel Xicoténcatl y Ruy Fabila por revisarla.

Resumen

En esta tesis se da una introducción a la teoría de Morse discreta la cual es una herramienta muy útil en la topología algebraica. También platicamos sobre los espacios de configuraciones en gráficas y su versión discretizada. Aplicamos la teoría de Morse discreta para calcular el tipo de homotopía de los espacios de configuraciones en gráficas. En el caso de los árboles, también mencionamos un método para calcular el grupo de trenzas.

Abstract

In this thesis we give an introduction to discrete Morse theory which is a very useful tool in algebraic topology. We also talk about configuration spaces of graphs and their discretized version. We apply discrete Morse theory to obtain the homotopy type of configuration spaces of graphs. When the graph is a tree, we also discuss a method of obtaining the tree braid groups.

Índice general

1. Introducción	9
2. Primeras definiciones y resultados	11
3. Presentaciones monoidales y teoría de Morse discreta	17
4. Campos vectoriales discretos y grupos de trenzas de gráficas	27
5. Algunos corolarios	39
6. Presentaciones de grupos de trenzas de árboles.	43
Bibliografía	57

Capítulo 1

Introducción

Dada una gráfica G , y un número natural fijo n , el espacio de configuraciones etiquetado $\mathcal{C}^n G$ es el producto cartesiano de G visto como espacio topológico, $\prod^n G$ removiendo el conjunto $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i = x_j \text{ para } i \neq j\}$. El espacio de configuraciones sin etiquetar $UC^n G$ es el cociente de $\mathcal{C}^n G$ bajo la acción del grupo simétrico que permuta a los factores.

Los espacios de configuraciones representan las posiciones que pueden tomar n partículas que se mueven sobre la gráfica G sin chocar entre sí, por lo que aparecen mucho en la robótica. Una trayectoria en $\mathcal{C}^n G$ o en $UC^n G$ representa un movimiento de estas partículas sin chocar.

Nosotros trabajaremos con las versiones discretizadas $\mathcal{D}^n G$ y $UD^n G$. Aquí en vez de remover a Δ removemos a toda celda abierta cuya cerradura que interseque a Δ obteniendo así un complejo celular.

En [1] se demuestra que $\mathcal{C}^n G$ (respectivamente $UC^n G$) se retrae fuertemente por deformación en $\mathcal{D}^n G$ (respectivamente $UD^n G$).

Cuando $UD^n G$ tiene dimensión 1, o bien si tomamos su 1-esqueleto, éste coincide con la gráfica de n -fichas de la gráfica G . Las gráficas de fichas actualmente están siendo muy estudiadas en la teoría de gráficas.

Nos enfocaremos en conocer el tipo de homotopía de $UD^n G$. Para ello utilizaremos a la teoría de

Morse discreta la cual es una herramienta muy útil en la topología algebraica ya que simplifica muchos cálculos.

La teoría de Morse discreta le asocia a un complejo celular o simplicial una colección de parejas de celdas, llamada campo vectorial discreto, tales que en cada pareja una celda es cara inmediata de la otra con la propiedad de que cada celda está en a lo más una pareja.

Las celdas que no están en ninguna pareja se llaman críticas. Si el campo vectorial es acíclico, basta considerar a las celdas críticas para recuperar el tipo de homotopía.

El grupo fundamental de UC^nG se llama el grupo de trenzas de G en n hilos y se denota B^nG . El grupo fundamental de C^nG es el grupo de trenzas puras en n hilos y se denota PB^nG .

En el capítulo 1 introducimos esta teoría de Morse discreta y damos varias definiciones en general.

En el capítulo 2 hablamos brevemente sobre presentaciones monoidales y los sistemas de reescritura asociados a ellas.

En el capítulo 3 aparecen los espacios de configuraciones y construimos un campo vectorial discreto gradiente para UD^nG .

En el capítulo 4 mencionamos algunas consecuencias de los resultados del capítulo 3.

Por último, en el capítulo 5 damos una manera de calcular una presentación de B^nG para G un árbol. En esta presentación, los generadores son las 1-celdas críticas de UD^nG .

El material de este trabajo está basado en el artículo [2]

Capítulo 2

Primeras definiciones y resultados

Dado un CW complejo vamos a denotar que una celda τ tiene dimensión p por τ^p . Dadas dos celdas τ, ν denotamos que τ es cara de ν por $\tau < \nu$.

Definición 2.0.1. *Dado un CW complejo con conjunto de celdas $K(X)$ decimos que una función $f : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse discreta si se cumple que:*

- *Para cualquier celda regular σ se cumple que $|\{\sigma^p < \tau^{p+1} : f(\sigma) \geq f(\tau)\}| \leq 1$ para toda celda τ .*
- *Para cualquier celda regular τ se cumple que $|\{\sigma^p < \tau^{p+1} : f(\sigma) \geq f(\tau)\}| \leq 1$ para toda celda σ .*
- *Dada una celda irregular τ se tiene que $|\{\sigma^{p-1} < \tau^p : f(\sigma) \geq f(\tau)\} \cup \{\tau^p < \nu^{p+1} : f(\tau) \geq f(\nu)\}| = 0$*

Ejemplo 2.0.1. *La función $f : K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ cuyos valores están dados en la figura, es una función de Morse para $X = \Delta^2$ el 2-simplex estándar.*

Proposición 2.0.1. *Sea X un complejo simplicial y sea τ^p una celda. Entonces tenemos que $|Y| := |\{\sigma^{p-1} < \tau^p : f(\sigma) \geq f(\tau)\} \cup \{\tau^p < \nu^{p+1} : f(\tau) \geq f(\nu)\}| \leq 1$.*

Demostración. Si τ es crítica es claro que $|Y| = 0$. Supongamos entonces que τ no es crítica y que $|Y| = 2$. Esto es, existen celdas σ y ν tales que $\nu^{p-1} < \tau < \sigma^{p+1}$ con $f(\nu) \geq f(\tau) \geq f(\sigma)$. En particular $f(\sigma) \leq f(\nu)$. Como X es complejo simplicial, afirmamos que existe otra p -celda α tal

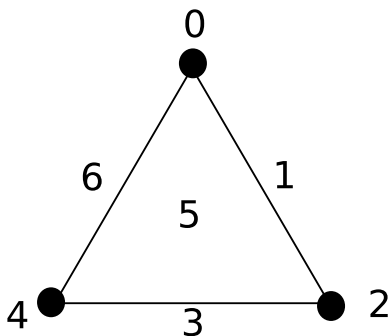


Figura 2.1: Una función de Morse discreta en el 2-simplex estándar.

que $\nu < \alpha < \sigma$. Como f es función de Morse discreta tenemos que $f(\nu) < f(\alpha) < f(\sigma) \leq f(\nu)$ lo cual es una contradicción. \square

Definición 2.0.2. *Un campo vectorial discreto W en un CW complejo finito X es un apareamiento de celdas de X donde las parejas son de la forma (τ, ν) tales que $\tau^p < \nu^{p+1}$ con la propiedad de que toda celda está en a lo más una pareja.*

Para facilitar la notación denotaremos por $W(\tau)$ a la pareja de τ en W . Además, para visualizar el campo, denotaremos $(\sigma^p, \tau^{p+1}) \in W$ como $\sigma \rightarrow \tau$ sobre todo en las figuras.

Dada una función de Morse discreta le podemos asociar un campo vectorial discreto llamado el campo vectorial gradiente de f . Las parejas de este campo son $\{(\sigma, \tau) : \sigma^p < \tau^{p+1}, f(\sigma) \geq f(\tau)\}$.

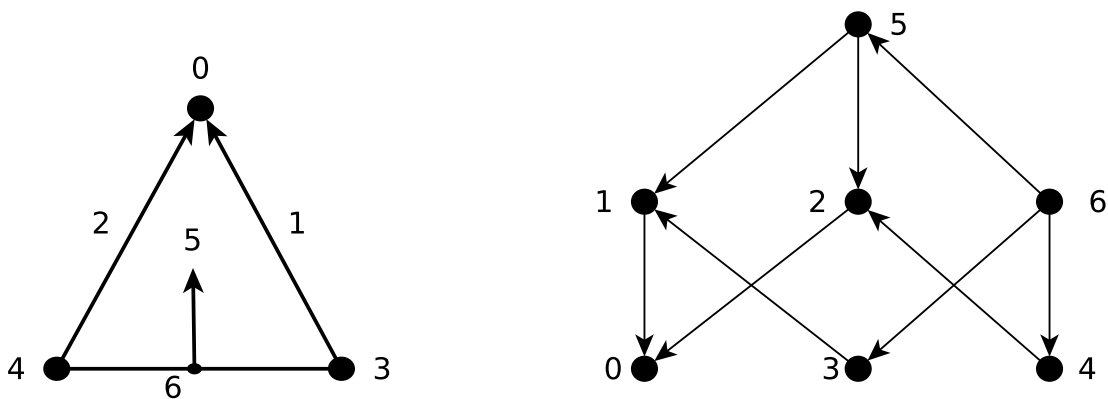


Figura 2.2: Un campo vectorial discreto en el 2-simplex estándar y su diagrama de Hasse modificado.

Dado un campo vectorial discreto W podemos clasificar las celdas de X en 3 tipos respecto a W :

- Las celdas críticas. Son las celdas que no están apareadas en W .
- Las celdas redundantes. Son las que se aparean en W con celdas de dimensión mayor.
- Las celdas colapsables. Son las que se aparean en W con celdas de dimensión menor.

Definición 2.0.3. Dado un CW-complejo X , sean $\sigma^p < \tau^{p+1}$ celdas tales que σ es una cara regular de τ , y τ es la única cocara de σ . Entonces decimos que X colapsa en $X - \sigma \cup \tau$. Si X se puede transformar en Y mediante una secuencia de estas operaciones escribimos $X \searrow Y$, en cuyo caso Y es un retracto por deformación de X .



Figura 2.3: Un colapso simplicial.

Definición 2.0.4. Sea W un campo vectorial discreto en X . Un W -camino de dimensión p es una sucesión de p -celdas $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ tales que ν_i es redundante para $0 \leq i \leq n - 1$ y $\nu_{i+1} < W(\nu_i)$. Diremos que el camino es de longitud n . El camino es cerrado si $\nu_0 = \nu_n$.

Definición 2.0.5. Dado un campo vectorial discreto en X decimos que una celda ν tiene rango k , $R(\nu) = k$, si el W -camino más largo que empieza en ν tiene longitud k .

Dado un complejo simplicial X le podemos asociar una digráfica llamada el diagrama de Hasse $H(X)$. Esta digráfica tiene como vértices a los simplejos de X y como conjunto de flechas a $F(H(X)) = \{(\sigma^{p+1}, \tau^p) : \tau < \sigma\}$.

Si X tiene un campo vectorial discreto W podemos describirlo mediante el diagrama de Hasse. Para denotar que una pareja está en W , volteamos la orientación de la flecha correspondiente obteniendo el diagrama de Hasse modificado $H_W(X)$.

Un W -camino en el diagrama de Hasse modificado es un camino dirigido que alterna flechas del diagrama de Hasse con flechas que fueron volteadas.

Teorema 2.0.1. *Un campo vectorial discreto es el campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta si y sólo si no tiene caminos cerrados.*

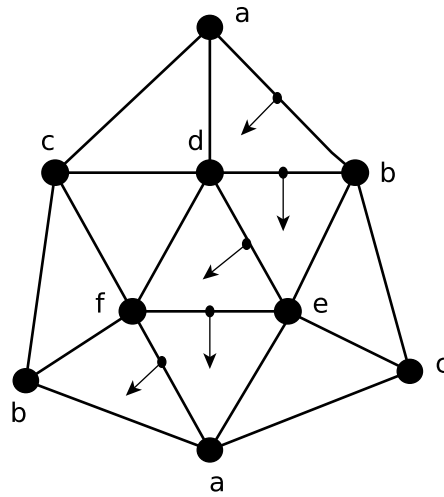


Figura 2.4: Un camino cerrado de longitud 5.

Antes de demostrar este teorema vamos a dar unos resultados de teoría de gráficas que facilitan la prueba.

Ejemplo 2.0.2. *Sea X una triangulación del plano proyectivo dotado del campo vectorial W , como se ve en la figura 2.4. Notemos que contiene un camino cerrado de longitud 5 por lo que no es un campo vectorial gradiente.*

Dada una digráfica D denotaremos por $V(D)$ a su conjunto de vértices y por $F(D)$ a su conjunto de flechas.

El exgrado de un vértice v es $\delta^+(v) = |\{w \in V(D) : (v, w) \in F(D)\}|$ y similarmente el ingrado de v es $\delta^-(v) = |\{w \in V(D) : (w, v) \in F(D)\}|$. Dada una gráfica G , a los vértices de grado mayor o igual a 3 les llamaremos vértices esenciales.

Diremos que una digráfica es acíclica si no tiene caminos cerrados dirigidos. En particular una digráfica acíclica no tiene bucles ni flechas simétricas.

Lema 2.0.1. *Toda digráfica sin trayectorias infinitas exteriores acíclica D tiene al menos un vértice de exgrado cero.*

Demostración. Como D es finita tiene una trayectoria de longitud máxima. El vértice final de esta trayectoria debe tener exgrado cero pues de lo contrario se formaría un ciclo. \square

Definición 2.0.6. *Dada una digráfica G , una trayectoria infinita exterior es una sucesión infinita de vértices $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(G)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.0.2. *Una digráfica sin trayectorias infinitas exteriores D es acíclica si y solo si existe una función $f : V(D) \rightarrow \mathbb{R}$ que decrece a lo largo de caminos dirigidos.*

Demostración. Supongamos que D es acíclica. Vamos a definir a los conjuntos V_k empezando por $V_0 = \{x \in V(D) : \delta^+(x) = 0\}$. Notemos que como D es acíclica, por el lema 2.0.1 $V_0 \neq \emptyset$. Sea $V_1 = \{x \in V(D) - V_0 : N^+(x) \subset V_0\}$ y, en general definimos $V_k = \{v \in V(D) - \cup_{i=1}^{k-1} V_i : N^+(v) \subset \cup_{i=1}^{k-1} V_i\}$.

Es claro que $V(D) \subset V_0 \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$.

Definimos $f : V(D) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ como $f(x) = i$ para todo $x \in V_i$.

Ahora solo falta ver que f decrece a lo largo de caminos dirigidos.

Sea $(x, y) \in F(D)$ y supongamos que $f(y) = k$. Entonces $y \in V_k$ y como $y \in N^+(x)$ tenemos que $N^+(x) \not\subset \cup_{i=1}^{k-1} V_i$ por lo que $f(x) > f(y)$.

Si dicha función f existe y $\{x_0, x_1, \dots, x_n = x_0\}$ es un ciclo, entonces $f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_n) = f(x_0)$ lo cual es imposible. \square

Con esto tenemos las herramientas necesarias para demostrar el teorema 2.0.1.

Demostración. 2.0.1 Si W no tiene caminos cerrados, su diagrama de Hasse modificado es acíclico. Entonces por el teorema anterior existe una función $f : K(X) \rightarrow \mathbb{R}$ que decrece a lo largo de trayectorias. En particular decrece a lo largo de flechas. Es inmediato de las definiciones que esta función es de Morse discreta y tiene como campo vectorial gradiente a W .

Para ver que un campo vectorial gradiente no tiene caminos cerrados basta notar que su función de Morse discreta decrece a lo largo de trayectorias en $H_W(X)$. \square

Capítulo 3

Presentaciones monoidales y teoría de Morse discreta

Definición 3.0.1. *Dado un conjunto Σ el monoide libre generado por Σ denotado por Σ^* es la colección de todas las palabras formadas por elementos de Σ , junto con la palabra vacía y con la operación de concatenación.*

Una presentación monoidal $\langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ consiste de un conjunto Σ junto con una colección de pares ordenados \mathcal{R} de elementos en Σ^ .*

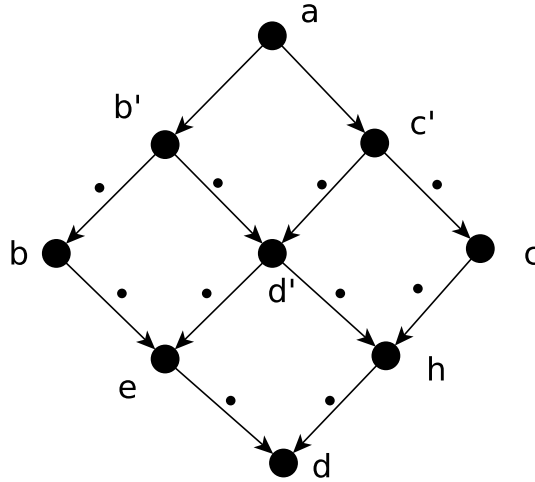
Un sistema de reescritura es simplemente una digráfica. Para denotar que existe una flecha de x en y escribimos $x \rightarrow y$. Dada una digráfica D denotaremos por \overline{D} a su cerradura reflexiva transitiva. Para denotar que existe una flecha de x en y en esta cerradura escribimos $x \dot{\rightarrow} y$.

Definición 3.0.2. *Un sistema de reescritura D es terminante si no tiene caminos infinitos exteriores. Un sistema de reescritura es confluyente si dadas dos flechas $(a, b), (a, c) \in F(\overline{D})$ existe $d \in V(D)$ tal que $(b, d), (c, d) \in F(\overline{D})$. Decimos que es localmente confluyente si en la definición de confluyente las flechas iniciales están en $F(D)$.*

Lema 3.0.1. *Todo sistema de reescritura terminante es localmente confluyente si y solo si es confluyente.*

Demostración. Sean $(a, b), (a, c) \in F(\overline{D})$. Notemos que en particular un sistema de reescritura terminante es acíclico. Entonces nuevamente por el teorema 2.0.2 existe una función $f : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$ que decrece a lo largo de trayectorias dirigidas. Vamos a proceder por inducción sobre $f(a)$.

Para $f(a) = 1$, por como se construyó a f en 2.0.2, tenemos que la trayectoria más larga que empieza en a es de longitud 1. Entonces por la confluencia local se cumple la base de inducción. Supongamos ahora la hipótesis inductiva. Tenemos dos primeros casos:



- Si $a = b$ tomamos $c = d$.
- Si $a = c$ tomamos $b = d$.

Supongamos entonces que los tres vértices a, b y c son distintos. Esto quiere decir que existen vértices b' y c' tales que $(a, b'), (a, c') \in F(D)$ y $(b', b), (c', c) \in F(\overline{D})$.

Por la confluencia local tenemos que existe $d' \in V(D)$ tal que $(c', d'), (b', d') \in F(\overline{D})$. Notemos también que $f(b') < f(a)$ y $f(c') < f(a)$. Entonces por hipótesis de inducción tenemos que existen $e, h \in V(D)$ tales que $(b', e), (d', e), (d', h), (c', h) \in F(\overline{D})$. Por último como $f(a) > f(b') \geq f(d')$ podemos volver a aplicar la hipótesis de inducción pero ahora en e y h . Obtenemos que existe $d \in V(D)$ tal que $(e, d), (h, d) \in F(\overline{D})$ lo cual prueba el lema. \square

Lema 3.0.2. *Todo sistema de reescritura terminante y confluyente D tiene un único vértice de exgrado cero en cada componente conexa.*

Demostración. Como D es terminante, es acíclico. Por el lema 2.0.1 sabemos que cada componente conexa tiene al menos un vértice de exgrado cero. Supongamos entonces que existen $w, v \in V(D)$ tales que $\delta^+(w) = \delta^+(v) = 0$. Como ambos vértices están en la misma componente conexa, podemos encontrar $x \in V(D)$ tal que $(x, v), (x, w) \in F(\overline{D})$. Entonces como D es

confluente existe $y \in V(D)$ tal que $(y, w), (y, v) \in F(\overline{D})$ lo cual es una contradicción ya que w y v tienen exgrado cero. \square

Toda presentación monoidal $\langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ tiene asociada una digráfica $\mathfrak{D}(\langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle)$ cuyo conjunto de vértices es Σ^* y cuyo conjunto de flechas es $\{(w_1, w_2) : w_1 = ur_1v, w_2 = ur_2v, (r_1, r_2) \in \mathcal{R}\}$.

Dado un complejo finito X con un campo vectorial acíclico W vamos a denotar por X'_n el subcomplejo de X que consiste del n -esqueleto menos las n -celdas redundantes. Denotaremos por X''_n a X'_n menos las n -celdas críticas.

Proposición 3.0.1. *Dado un complejo simplicial finito X con campo vectorial discreto W tenemos que para cualquier n , $X''_{n+1} \searrow X'_n$.*

Demostración. Sea $X_{n,k}$ el subcomplejo de X que consiste del $(n-1)$ -esqueleto junto con las n -celdas de rango a lo más k y sus respectivas $(n+1)$ -parejas en W . Por ejemplo tenemos que $X_{n,1} = X'_n$.

Afirmación: $X_{n,i+1} \searrow X_{n,i}$ para $i \in \mathbb{N}$.

Para demostrar la afirmación, tomemos una celda c de rango exactamente $i+1$. Entonces la $(n+1)$ -celda $W(c)$ es la única cocara de c en $X_{n,i+1}$, ya que no puede tener otra cocara colapsable pues aumentaría su rango. Además, todas las $(n+1)$ -celdas en $X_{n,i+1}$ son colapsables. Por lo tanto $X_{n,i+1} \searrow X_{n,i+1} - (c \cup W(c))$.

Repitiendo este proceso para toda celda que sea pareja de alguna $(n+1)$ -celda en $X_{n,i+1}$ tenemos que $X_{n,i+1} \searrow X_{n,i}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$.

Como X es finito existe $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $X_{n,k}$ consiste de todo el n -esqueleto más las $(n+1)$ -celdas colapsables. Por lo tanto $X''_{n+1} = X_{n,k} \searrow X_{n,1} = X'_n$. \square

Proposición 3.0.2. 1. *La inclusión de X'_n en X induce un isomorfismo entre $\pi_{n-1}(X'_n)$ y $\pi_{n-1}(X)$.*

2. *El subcomplejo de X generado por las aristas críticas y colapsables es conexo.*

3. *Si X no tiene celdas críticas de dimensión mayor a k , entonces $X \searrow X'_k$.*

4. *El subcomplejo de X generado por las celdas colapsables y el 0-esqueleto de X es un bosque maximal.*

5. Si existe una única celda crítica de dimensión cero, entonces la gráfica que consiste de las aristas colapsables es un árbol maximal en X .

Demostración. 1. Notemos que el mapeo $\pi_{n-1}(X'_n) \rightarrow \pi_{n-1}(X)$ se factoriza como $\pi_{n-1}(X'_n) \rightarrow \pi_{n-1}(X''_{n+1}) \rightarrow \pi_{n-1}(X)$.

De la proposición 3.0.1 se sigue que el primer mapeo es un isomorfismo. Como X se obtiene a partir de X''_{n+1} añadiendo celdas de dimensión al menos $n + 1$, que no afectan a π_{n-1} , tenemos que el segundo mapeo también es un isomorfismo.

2. Queremos ver que X'_1 es conexo. Por el inciso anterior sabemos que $\pi_0(X'_1) \rightarrow \pi_0(X)$ es una biyección. Como X es conexo, X'_1 también debe ser conexo.
3. Tenemos la secuencia $X'_k \subset X''_{k+1} = X'_{k+1} \subset X''_{k+2} = X'_{k+2} \subset \dots$. Cada complejo en esta secuencia colapsa en el anterior. Como la secuencia acaba en X queda demostrado el enunciado.
4. Como $X''_1 \searrow X'_0$, cada componente de X''_1 es contraíble, y por lo tanto X''_1 es un bosque. Como X''_1 contiene todo el 0-esqueleto, debe ser maximal.
5. Como $X''_1 \searrow X'_0$, y X'_0 es un punto, X''_1 es conexo. Por el inciso anterior sabemos que X''_1 es un bosque maximal, por lo que debe ser un árbol maximal.

□

El siguiente corolario es consecuencia del resultado central en la teoría de Morse discreta:

Corolario 3.0.1. *El complejo simplicial finito X es homotópicamente equivalente a un CW complejo con m_n celdas de dimensión n donde m_n denota la cantidad de celdas críticas de dimensión n en X .*

Demostración. Sea $n = \dim X$. Entonces $X'_n = X_n$ y al hacer el colapso simplicial $X''_n \searrow X'_{n-1}$ nos quedan en dimensión n , únicamente las m_n celdas críticas. Luego haciendo el colapso $X''_{n-1} \searrow X'_{n-2}$ nuevamente nos quedan, en dimensión $n - 1$, únicamente las m_{n-1} celdas críticas. Siguiendo así sucesivamente llegamos al colapso $X''_1 \searrow X'_0$ pero como en dimensión 0 no hay celdas colapsables, X'_0 consiste únicamente de las celdas críticas.

□

Vamos a tomar ahora un árbol maximal T en X_1 que contenga a todas las aristas colapsables y algunas aristas críticas. Podemos encontrar tal árbol ya que X'_1 es conexo. Definimos una presentación monoidal MP_{TW} como:

Los generadores son las aristas de T orientadas en ambos sentidos. Dada una arista e denotaremos por \bar{e} a la arista con orientación opuesta. Similarmente si $w = w_1w_2\dots w_n$ es una palabra denotaremos $\bar{w} = \bar{w}_n\dots\bar{w}_2\bar{w}_1$.

Las relaciones son:

1. $(e, 1), (1, \bar{e})$ para $e \in T$.
2. $(e\bar{e}, 1), (\bar{e}e, 1)$ para una arista e .
3. $(e, \bar{w}), (\bar{e}, w)$ donde ew es la frontera de una 2-celda colapsable apareada con la 1-celda e .

En la digráfica $\mathfrak{D}(MP_{TW})$ diremos que una flecha es de tipo i para $i = 1, 2, 3$ si proviene de una relación de tipo i .

Proposición 3.0.3. *La digráfica $\mathfrak{D}(MP_{TW})$ asociada a la presentación monoidal $MP_{TW} = \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ es terminante y confluyente como sistema de reescritura.*

Demostración. Primero veamos que es localmente confluyente.

Si $(w, w_1), (w, w_2) \in F(\mathfrak{D}(MP_{TW}))$ corresponden a dos pares de relaciones ajenas en \mathcal{R} , tenemos que $w = rs_1tu_1v$, $w_1 = rs_2tu_1v$ y $w_2 = rs_1tu_2v$ con $(s_1, s_2), (r_1, r_2) \in \mathcal{R}$, $r, t, u_i, s_i \in \Sigma^*$ para $i = 1, 2$.

Sea $w_3 = rs_2tu_2v$ de modo que $(w_i, w_3) \in F(\mathfrak{D}(MP_{TW}))$ para $i = 1, 2$.

Consideremos ahora las aristas que provienen de relaciones no ajenas en \mathcal{R} . Notemos que de un mismo vértice no pueden salir flechas de tipo 1 y 3 pues tendríamos las relaciones $(e, 1)$ y (e, w) con $e \in T$ y e una 1-celda redundante, pero si recordamos la construcción de T , todas sus aristas son 1-celdas críticas y colapsables. Esto quiere decir que al menos una de las dos flechas es de tipo 2.

Supongamos que $w = te\bar{e}v$ y $w_1 = t_1v$. Tenemos entonces dos casos:

- La otra flecha es de tipo 1. En este caso tenemos que $(e, 1), (\bar{e}, 1) \in \mathcal{R}$, $e \in T$ entonces $w_2 = t\bar{e}v$ y por lo tanto $(w_2, w_1) \in F(\mathfrak{D}(MP_{TW}))$ y $(w_1, w_1) \in F(\overline{\mathfrak{D}(MP_{TW})})$.

- La otra flecha es de tipo 3. En este caso tenemos que $w_2 = tewv$. Entonces $(w_2, t\bar{w}wv) \in F(\mathfrak{D}(MP_{TW}))$ y $(t\bar{w}wv, tv) \in F(\overline{\mathfrak{D}(MP_{TW})})$ por lo que $(w_2, w_1) \in F(\overline{\mathfrak{D}(MP_{TW})})$.

Veamos ahora que es terminante.

Vamos a demostrar que al avanzar sobre una trayectoria, la longitud de los vértices vistos como palabras, a partir de cierto punto decrece por lo que no puede haber trayectorias infinitas exteriores.

Notemos que en general al tener una flecha de tipo 1 o 2 la longitud de la palabra decrece. La longitud de la palabra solamente crece cuando avanzamos sobre una flecha de tipo 3.

Supongamos que iniciamos en un vértice que equivale a la palabra $r = a_1 \dots a_n$ con $a_i \notin T$ celdas redundantes para $i = 1, \dots, n$. Al avanzar sobre una trayectoria que empieza en r eventualmente llegamos a una palabra de la forma $w = w_1 \dots w_n$ con $a_i \bar{w}_i$ frontera de una 2-celda colapsable. Entonces todas las aristas de w deben estar en T , por lo que al seguir avanzando sobre una trayectoria que salga de w la longitud de la palabra solamente puede decrecer.

Claramente podemos tener vértices en los que no todas sus aristas son redundantes, pero en esos casos simplemente tenemos menos relaciones y por lo tanto tampoco les puede salir una trayectoria infinita. \square

Por el lema 3.0.2 tenemos que en cada componente conexa de la digráfica $\mathfrak{D}(MP_{TW})$ existe un único vértice de exgrado cero. Dado un vértice $w \in V(\mathfrak{D}(MP_{TW}))$ llamaremos $r(w)$ al único vértice de exgrado cero que está en la misma componente conexa que w .

Proposición 3.0.4. *Supongamos que Y se obtiene a partir de un espacio conexo por trayectorias X añadiendo 2-celdas e_i^2 vía mapeos de pegado $\phi_i : S^1 \rightarrow X$. Sea s_0 el punto base de S^1 . Sea $x_0 \in X$ un punto base y sea γ_i una trayectoria de x_0 en $\phi_i(s_0)$.*

- *Entonces la inclusión $X \hookrightarrow Y$ induce un mapeo sobreyectivo $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$ cuyo núcleo es N , donde N es el subgrupo normal de $\pi_1(Y, x_0)$ generado por los lazos $\gamma_i \phi_i \bar{\gamma}_i$ variando i . Por lo tanto $\pi_1(X)/N \cong \pi_1(Y)$.*
- *Si Y se obtiene a partir de X añadiendo ahora n -celdas para una $n > 2$ fija, entonces la inclusión $X \hookrightarrow Y$ induce un isomorfismo $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0)$.*

Demostración. Vamos a extender a Y a un espacio Z que se retrae por deformación en Y . El espacio Z se obtiene a partir de Y pegando bandas rectangulares $S_i = I \times I$ haciendo las

identificaciones: la parte de abajo $I \times \{0\}$ con γ_i , la parte derecha $\{1\} \times I$ con un arco que empieza en $\gamma_i(s_0)$ y entra radialmente en e_i^2 y todas las partes derechas $\{0\} \times I$ pegadas juntas en un solo arco.

Como las partes de arriba de las bandas no se identificaron, el espacio Z se retrae por deformación en Y . En cada celda e_i^2 escogemos un punto base y_i que esté fuera del arco donde se pegó la banda. Sean $A = Z - \cup_i \{y_i\}$ y $B = Z - X$. Entonces A se retrae por deformación en X y B es contráctil.

Como $\pi(B) = 0$ por el teorema de van Kampen aplicado a la cubierta $\{A, B\}$ tenemos que $\pi_1(Z)$ es isomorfo al cociente $\pi_1(A)/M$ donde M es el subgrupo normal generado por la imagen del mapeo $\pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(A)$.

Esto es, escojamos un punto base $z_0 \in A \cap B$ cerca de x_0 sobre el segmento donde se intersectan las bandas S_i y sean δ_i lazos en $A \cap B$ basados en z_0 que representan a los elementos de $\pi_1(A, z_0)$ que corresponden a $[\gamma_i \phi_i \bar{\gamma}_i] \in \pi_1(A, x_0)$ bajo el isomorfismo β_h de cambio de base que recorre al punto base a lo largo del segmento de recta h que une a z_0 con x_0 en la intersección de los segmentos S_i .

Ahora solo falta checar que $\pi_1(A \cap B)$ está generado por los lazos δ_i . Esto se puede hacer nuevamente con el teorema de van Kampen ahora aplicado a la cubierta de $A \cap B$ por los abiertos $A_i = A \cap B - \cup_{j \neq i} e_j^2$. Como cada A_i se retrae por deformación en un círculo en $e_i^2 - \{y_i\}$, tenemos que $\pi_1(A_i, z_0) \cong \mathbb{Z}$ generado por δ_i .

□

Teorema 3.0.1. *Sea X un complejo simplicial finito y conexo con campo vectorial discreto gradiente W . Entonces $\pi_1(X) \cong \langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ donde Σ es el conjunto de 1-celdas críticas que no están contenidas en T y $\mathcal{R} = \{(r(w), 1) | w \text{ es frontera de una 2-celda crítica}\}$.*

Demostración. Por la proposición 3.0.2 tenemos que $\pi_1(X) \cong \pi_1(X'_2)$. La presentación usual de $\pi_1(X'_2)$ es $\langle \Sigma' | \mathcal{R}' \rangle$ donde Σ' es el conjunto de 1-celdas orientadas positivamente y las relaciones de \mathcal{R}' son de tres tipos:

1. Los ciclos que son frontera de una 2-celda crítica.
2. Los ciclos que son frontera de una 2-celda colapsable.

3. Las aristas colapsables en T .

Todas relacionadas con 1.

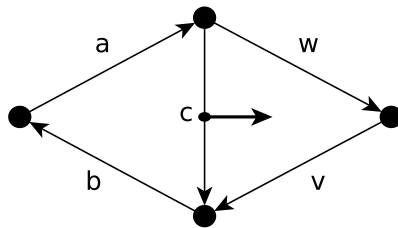
Vamos a escoger a la 1-celda de mayor rango c . Como debe ser redundante, pertenece a algún ciclo frontera de la 2-celda $W(c)$. Sea w el complemento de dicho ciclo. Notemos que las aristas de w tienen menor rango que c .

En la presentación de $\pi_1(X'_2)$ vamos a reemplazar cada aparición de c o de \bar{c} fuera de $W(c)$ con \bar{w} o w respectivamente. Así c o \bar{c} aparece únicamente en $W(c)$.

Con esta sustitución solamente se modifican relaciones del tipo 1 pues $c \notin T$, además si c fuera frontera de algún otro ciclo no crítico, no tendría rango máximo.

Por lo tanto podemos eliminar al generador c junto con la frontera de $W(c)$ obteniendo una presentación del mismo grupo.

Por ejemplo, tenemos que $\langle a, b, c, w, v | cwv = 1, cba = 1 \rangle = \langle a, b, w, v | \bar{v}\bar{w}ba = 1 \rangle$.



Continuamos de esta manera removiendo inductivamente 1-celdas de rango máximo hasta eliminar todas las 1-celdas redundantes.

Ahora vamos a remover las 1-celdas de T de la lista de generadores junto con sus respectivas relaciones de tipo 3 y sus apariciones en las demás relaciones.

Con esto tenemos una presentación del mismo grupo pero ahora con conjunto de generadores $\{e \notin T : e \text{ no es redundante}\} = \{e \notin T : e \text{ es crítica}\} = \Sigma$.

Para ver cuál es el conjunto de relaciones que obtuvimos, notemos que fuimos avanzando sobre trayectorias en $\mathfrak{D}(MP_{TW})$ eliminando relaciones de la forma $(a, 1)$ con $a \in T$ y $(a_1a_2\dots a_n, 1)$ con $a_1a_2\dots a_n$ la frontera de una 2-celda colapsable. Llegamos a un punto en el que no podemos avanzar sobre una flecha de tipo 1 pues las relaciones correspondientes ya fueron eliminadas. Tampoco podemos avanzar sobre una flecha de tipo 3 pues solamente quedan 2-celdas críticas. Por último tampoco podemos avanzar sobre una flecha de tipo 2 pues no tenemos ciclos de

longitud 2 en $\mathfrak{D}(MP_{TW})$. Por lo tanto estamos en un vértice de exgrado cero, esto es, nos quedaron únicamente las relaciones de la forma $(r(w), 1)$. \square

Capítulo 4

Campos vectoriales discretos y grupos de trenzas de gráficas

Definición 4.0.1. Sea G una gráfica y n un número natural fijo. El espacio de configuraciones etiquetado de G en n puntos es el espacio

$$\left(\prod^n G\right) - \Delta$$

donde Δ denota el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n) \in \prod^n(G)$ tal que $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j$. El espacio de configuraciones no etiquetado de G en n puntos es el cociente del espacio de configuraciones etiquetado por la acción del grupo simétrico S_n , donde la acción permuta a los factores.

Sea Δ' la unión de las celdas abiertas en $\prod^n G$ cuya cerradura intersecta a Δ . Sea $\mathcal{D}^n(G) = \prod^n G - \Delta'$ y sea $U\mathcal{D}^n G$ el cociente de $\mathcal{D}^n G$ por la acción del grupo simétrico S_n permutando las coordenadas. Entonces una celda abierta en $U\mathcal{D}^n G$ se puede escribir como $\{c_1, \dots, c_n\}$ donde cada c_i es un vértice o el interior de una arista cuya cerradura es disjunta de la cerradura de c_j para $i \neq j$. Además la dimensión de la celda c es la cantidad de aristas que contiene.

Ejemplo 4.0.1. En la figura 4.1 podemos ver el espacio $\mathcal{D}^2 C_4$ donde los vértices de C_4 están etiquetados como $\{1, 2, 3, 4\}$ y en $\mathcal{D}^2 C_4$ las 0-celdas están etiquetadas como ij con $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Definición 4.0.2. El grupo de trenzas de G en n vértices, denotado $B_n G$, es el grupo fundamental del espacio de configuraciones no etiquetadas de G en n vértices. El grupo de trenzas

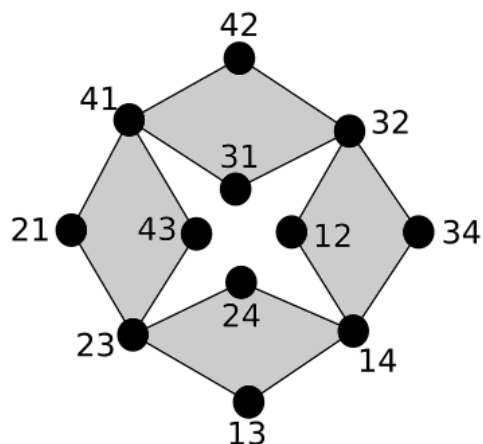


Figura 4.1: El espacio $\mathcal{D}^2 C_4$.

puras, denotado $PB_n G$, es el grupo fundamental del espacio de configuraciones etiquetadas.

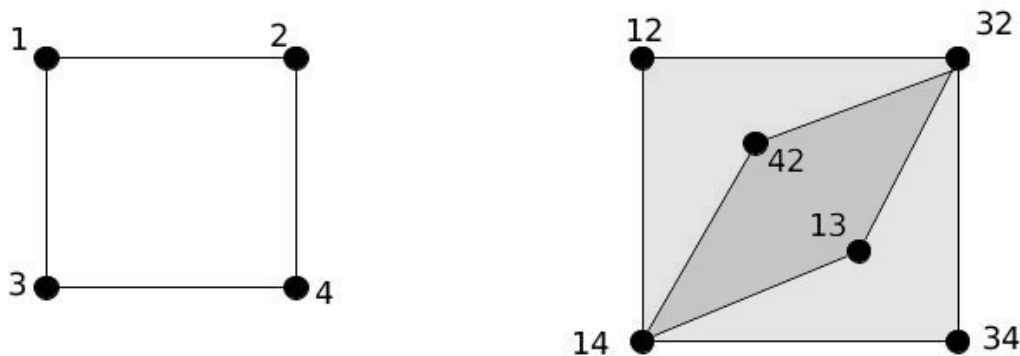


Figura 4.2: La gráfica $G = C_4$ y el espacio $UD^2 G$

Ejemplo 4.0.2. En la figura 4.2 podemos ver el espacio $UD^2 G$ donde G es el ciclo de longitud 4. Aquí las dos 2-celdas son $\{(1, 3), (2, 4)\}$ y $\{(1, 2), (3, 4)\}$. Los vértices etiquetados como ij corresponden a las celdas $\{i, j\}$ y las aristas de la forma (ij, ik) corresponden a las celdas de la forma $\{(j, k), i\}$ para $i, j, k = 1, 2, 3, 4$.

Teorema 4.0.1. [1] Para cada $n > 1$ y cualquier gráfica G con al menos n vértices, el espacio de configuraciones etiquetado (sin etiquetar) de G en n puntos se retrae fuertemente por deformación en $\mathcal{D}^n G$ ($UD^n G$) si se cumplen las condiciones:

1. Cada camino entre vértices distintos, que no sean de grado 2, pasa por al menos $n - 1$ aristas.
2. Cada camino cerrado, que no sea homotópicamente trivial, pasa por al menos $n+1$ aristas.

Si una gráfica G satisface las condiciones del teorema 4.0.1 diremos que G está suficientemente subdividida para n . Vamos a definir un campo vectorial gradiente W en $UD^n G$ utilizando un árbol maximal de G .

Sea T un árbol maximal y $*$ un vértice de grado 1 en T . Vamos a definir una operación \wedge en los vértices de T como $v_1 \wedge v_2 = v_3$ donde v_3 es el extremo, distinto de $*$, del segmento $[*, v_1] \cap [*, v_2]$. Aquí $[x, y]$ denota la única trayectoria que existe en T entre x y y .

Dado un vértice $v \in V(G)$ llamaremos direcciones desde v a las aristas que inciden en él. Vamos a ordenar a todas las direcciones desde v asignándoles un número del conjunto $\{0, 1, \dots, \delta(v) - 1\}$ de modo que la arista de la $*$ - v -trayectoria tenga el número cero.

También vamos a definir una función $g : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $g(v_1, v_2)$ sea la etiqueta de la dirección de v_1 que está en la $v_1 v_2$ -trayectoria y $g(v, v) = 0$.

Ahora vamos a ordenar a los vértices de T . Supongamos que $v_1 \wedge v_2 = v_3$. Entonces $v_1 \leq v_2$ si y sólo si $v_3 = v_1$ o $g(v_3, v_1) < g(v_3, v_2)$ cuando $v_1 \neq v_3$.

Dada una arista e , sean $i(e)$ y $t(e)$ los vértices en los que incide e de modo que $i(e) \geq t(e)$.

Dado un vértice $v \neq *$ sea $e(v)$ la arista de T tal que $i(e(v)) = v$.

Lema 4.0.1. *El orden \leq en los vértices de G cumple que:*

1. Si $v_2 \in [*, v_1]$ entonces $v_2 \leq v_1$.
2. Si $v \in V(G)$ y $e \in A(T)$ son tales que $e(v) \cap e = t(e)$ y $v < i(e)$, entonces $t(e)$ es un vértice esencial y $0 < g(t(e), v) < g(t(e), i(e))$.

Demostración. 1. Como $v_2 \in [*, v_1]$ tenemos que $[*, v_1] \cap [*, v_2] = [*, v_2]$ por lo que $v_1 \wedge v_2 = v_2$ y $v_2 \leq v_1$.

2. El vértice $t(e)$ debe tener grado al menos 3 pues en su vecindad están al menos los vértices v , $i(e)$ y el otro extremo de la arista $e(t(e))$.

□

Ejemplo 4.0.3. El árbol en la figura 4.3 está suficientemente subdividido para $n = 4$ y sus vértices están ordenados como describimos anteriormente. Otra manera de obtener este orden en los vértices, es empezar con un encaje del árbol en el plano con un vértice raíz $*$ tal que $\delta(*) = 1$. A partir de $*$ vamos a enumerar los vértices de manera creciente y cada que lleguemos a un vértice esencial, siempre empezamos por la izquierda.

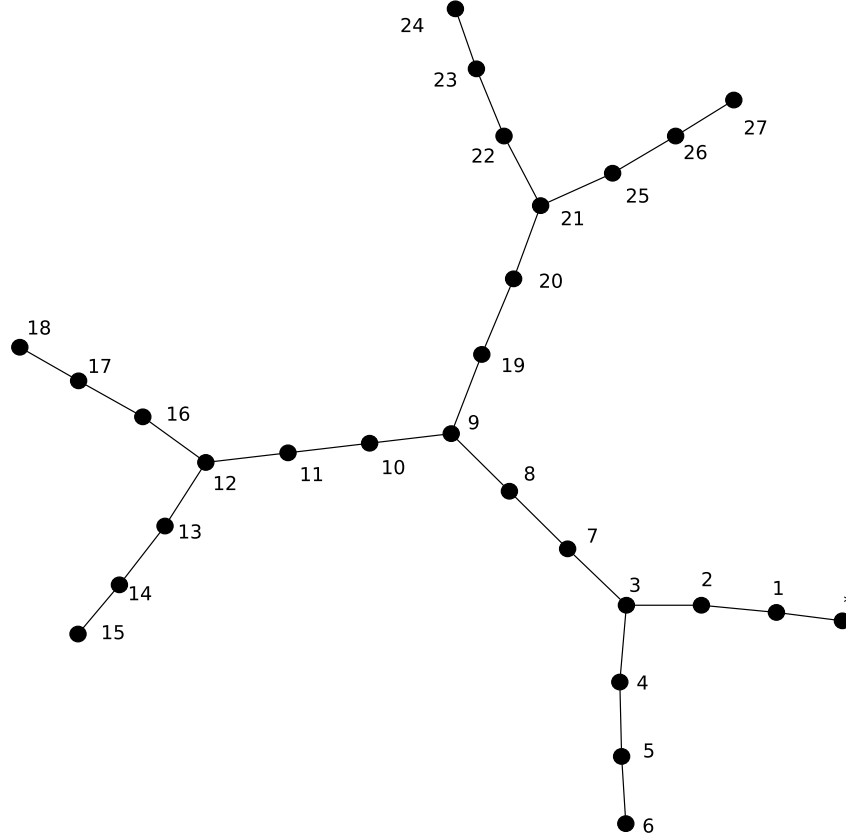


Figura 4.3: Un árbol suficientemente subdividido para $n = 4$.

Definición 4.0.3. Sea $c = \{c_1, \dots, c_{n-1}, v\}$ una celda de $UD^n G$ que contiene al vértice v . Si $e(v) \cap c_i = \emptyset$ para $i = 1, \dots, n - 1$ entonces la reducción elemental de c desde v es la celda $c = \{c_1, \dots, c_{n-1}, e(v)\} \subset UD^n G$ y decimos que v está desbloqueado en c . De lo contrario decimos que v está bloqueado en c . Si v es el vértice desbloqueado más pequeño, decimos que la reducción es principal.

Vamos a definir un campo vectorial W en $UD^n G$ de manera inductiva. Sea c una 0-celda. Si existe la reducción principal elemental de c , $W_0(c)$, ponemos a la pareja $(c, W_0(c)) \in W$. Para

$i > 0$, sea c una i -celda que no está apareada en W . Entonces si existe su reducción principal elemental $W_i(c)$, ponemos $(c, W_i(C)) \in W$.

Definición 4.0.4. Sea c una celda, y sea $e \in c$ una arista de G . La arista e se dice que respeta el orden en c si $e \in A(T)$ y para todo vértice $v \in c$ tal que $e(v) \cap e = t(e)$ tenemos que $v > i(e)$. Una tal arista se dice que es la mínima arista que respeta el orden en c si $i(e)$ es minimal respecto al orden de los vértices iniciales de las aristas que respetan el orden.

Por ejemplo en la figura 4.3, las aristas de la forma $(i, i + 1)$ respetan el orden para $i \leq 26$.

Denotaremos que una pareja (x, y) está en el campo vectorial W por $x \rightarrow y$.

Ejemplo 4.0.4. En el ejemplo de la figura 4.2 las parejas del campo vectorial W son: $\{12\} \rightarrow \{2, (1, *)\}$, $\{*2\} \rightarrow \{*, (1, 2)\}$, $\{13\} \rightarrow \{3, (1, *)\}$, $\{3*\} \rightarrow \{*, (2, 3)\}$, $\{32\} \rightarrow \{3, (1, 2)\}$, $\{1, (2, 3)\} \rightarrow \{(2, 3), (1, *)\}$ y $\{2, (*, 3)\} \rightarrow \{(1, 2), (3, *)\}$. Esto prueba que UD^2C_4 tiene el tipo de homotopía de S^1 pues tenemos una 0-celda crítica $\{1*\}$ y una 1-celda crítica $\{1, (3, *)\}$.

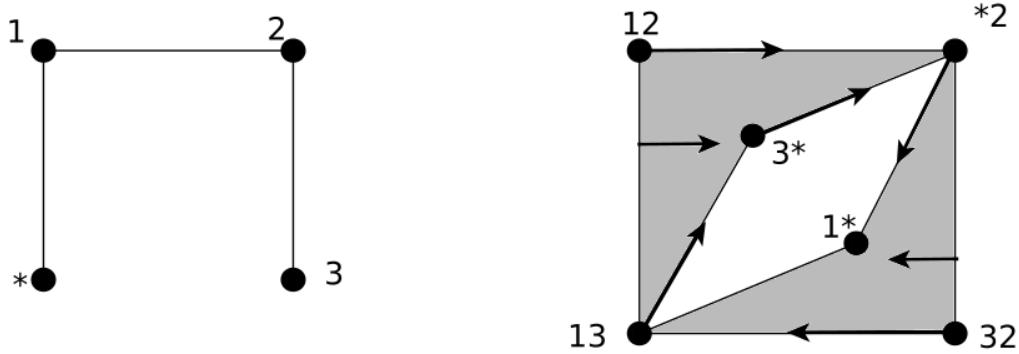


Figura 4.4: El árbol maximal en C_4 y un campo vectorial gradiente para UD^2C_4 .

Lema 4.0.2. 1. Si $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ se obtiene a partir de $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ mediante una reducción principal, entonces e es una arista que respeta el orden.

2. Sea $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\} = c$ con $e \in A(T)$ entonces una arista e' en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ respeta el orden si y sólo si respeta el orden en c .

Demostración. 1. Supongamos lo contrario. Claramente $e \in A(T)$ pues $e = e(i(e))$. Entonces existe $v \in \{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ tal que $e(v) \cap e = t(e)$ con $v \leq i(e)$. Entonces podemos hacer la

reducción elemental de $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ desde v con $v < i(e)$. Esto quiere decir que la reducción desde $i(e)$ no era principal.

2. Podemos suponer que $e' \in A(T)$ pues de lo contrario no respeta el orden en ninguna celda. (\Rightarrow) Si e' no respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ entonces existe un vértice $v \in \{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ tal que $e(v) \cap e' = t(e')$ y $v \leq i(e')$. Entonces $v \in \{c_1, \dots, c_{n-1}\} \subset \{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ y e' no respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ lo cual es una contradicción.

(\Leftarrow) Supongamos sin pérdida de generalidad que $e' = c_{n-1}$. Si e' no respeta el orden en $c' = \{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ entonces existe un vértice $v \in c'$ tal que $e(v) \cap e' = t(e')$ y $v \leq i(e')$. En este caso $v \neq i(e)$ pues de lo contrario $e(v) = e$ y $e \cap e' \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $v \in \{c_1, \dots, c_{n-2}\} \subset \{c_1, \dots, c_{n-1}, e, e'\}$ y e' no respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$

□

Lema 4.0.3. 1. Si una celda c no contiene aristas que respeten el orden, entonces es crítica si cada vértice de c está bloqueado y redundante de lo contrario.

2. Supongamos que c contiene una arista que respeta el orden, y sea e la mínima tal arista en c . Si existe un vértice desbloqueado $v \in c$ tal que $v < i(e)$, entonces c es redundante. Si no existe tal vértice, c es colapsable.

Demostración. 1. Por el lema 4.0.2, c no puede ser colapsable. Si todo vértice de c está bloqueado tampoco puede ser redundante por lo que debe ser crítica. De lo contrario, al tener un vértice desbloqueado, es redundante.

2. Supongamos que existe $v \in c$ desbloqueado tal que $v < i(e)$. Afirmamos que la celda $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ no es colapsable. Suponiendo lo contrario, existe e' (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e' = c_n$) tal que $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e'\}$ es la reducción principal de $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e')\}$. Entonces por el lema 4.0.2 la arista e' respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e'\}$. Se sigue que $i(e') \geq i(e) > v$ pues e es la mínima arista que respeta el orden.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $v = c_{n-1}$. Como la reducción elemental desde v está definida para $\{c_1, \dots, c_{n-2}, v, i(e')\}$, se sigue que $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e'\}$ no es la reducción principal de $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e')\}$ lo cual es una contradicción. Como c no es colapsable y tiene vértices desbloqueados, debe ser redundante.

Supongamos ahora que no hay vértices desbloqueados $v \in c$ con $v < i(e)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c = \{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$. Afirmamos que $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ es la reducción principal desde $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$. Sea v el vértice desbloqueado más pequeño de $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$. Es claro que $v \leq i(e)$ pues $i(e)$ está desbloqueado. Si $v \not\leq i(e)$, entonces v está desbloqueado en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ pero bloqueado en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$. Esto quiere decir que $e(v) \cap e = t(e)$, y como e respeta el orden tenemos que $v > i(e)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe ser que $v = i(e)$ y la reducción principal de $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ es $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$.

Ahora solo falta ver que $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ no es colapsable. Suponiendo que es colapsable, existe $e' \in \{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e)\}$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e' = c_{n-1}$) tal que $\{c_1, \dots, c_{n-2}, e', i(e)\}$ es la reducción principal de $\{c_1, \dots, c_{n-2}, i(e'), i(e)\}$. Como $i(e)$ y $i(e')$ están ambos desbloqueados en $\{c_1, \dots, c_{n-2}, i(e'), i(e)\}$, tenemos que $i(e') < i(e)$.

Afirmamos que e' respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-2}, e, e'\}$. Es claro que $e \in A(T)$. Suponiendo lo contrario, existe $v \in \{c_1, \dots, c_{n-2}, e, e'\}$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v = c_{n-2}$) tal que $e(v) \cap e' = t(e')$ y $v < i(e') < i(e)$. Como $v \cap e' = \emptyset$ tenemos que $t(e') = t(e(v))$. Como $\{c_1, \dots, c_{n-3}, v, i(e), i(e')\}$ es una celda, para ver que v está desbloqueado aquí, basta ver que $t(e(v))$ no interseca esta celda y por lo anterior, se sigue de que $\{c_1, \dots, c_{n-2}, e, e'\}$ también es celda. Esto quiere decir que v está desbloqueado en $\{c_1, \dots, c_{n-3}, v, i(e), i(e')\}$ y $v < i(e')$ por lo que la reducción de $\{c_1, \dots, c_{n-3}, v, i(e), i(e')\}$ desde $i(e')$ no es principal lo cual es una contradicción. Por lo tanto e' es una arista que respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-2}, e, e'\}$.

Con esto tenemos que e no es la mínima arista que respeta el orden en c lo cual es una contradicción.

□

Con este lema podemos obtener una caracterización de las celdas.

Teorema 4.0.2. 1. Una celda es crítica si y solo si no contiene aristas que respeten el orden y todos sus vértices están bloqueados.

2. Una celda es redundante si y solo si se cumple una de las dos condiciones:

- No contiene aristas que respeten el orden y al menos uno de sus vértices está bloqueado.
- Contiene una mínima arista que respeta el orden e y hay algún vértice desbloqueado v tal que $v < i(e)$.

3. Una celda es colapsable si y solo si contiene una mínima arista que respeta el orden y para cualquier $v < i(e)$, v está bloqueado.

Teorema 4.0.3. Sea F_W la función definida en las celdas redundantes de X que a cada celda le asigna su pareja en W . Entonces la función F_W es inyectiva.

Demostración. Supongamos que $c = \{c_1, \dots, c_n\}$ es una celda colapsable. Entonces existe una única mínima arista e que respeta el orden en c . Como $c \in \text{Im}F_W$ existe e' (podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e' = c_n$) tal que $F_W(\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e')\}) = \{c_1, \dots, c_{n-1}, e'\}$. Por el lema 4.0.2, e' respeta el orden en c .

Afirmación: Las aristas e y e' son iguales.

Suponiendo lo contrario, tenemos que $i(e') > i(e)$ pues e era mínima. Luego $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e')\}$ es redundante y e respeta el orden en $\{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e')\}$, pues si $e(c_i) \cap e = t(e)$ y $i(e) > c_i$, entonces $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ no es la reducción principal. Esto se debe a que en este caso los vértices c_i están desbloqueados ya que $e(c_i) \cap e = t(e)$ y $\{c_1, \dots, c_{n-1}, e\}$ es una celda. Por el teorema 4.0.2 existe un vértice desbloqueado $v \in \{c_1, \dots, c_{n-1}, i(e')\}$ tal que $v < i(e) < i(e')$.

Como $v \neq i(e')$, y $v \in c$ tenemos que v está bloqueado en c , pues c es colapsable. Se sigue que $e(v) \cap e' = t(e')$ y $v < i(e')$. Como $e' \in A(T)$, tenemos que e' no respeta el orden en c lo cual es una contradicción.

Con esto tenemos que dada una preimagen d de c con $v \in d$ tal que $e(v) \in c$, $e(v)$ debe ser la mínima arista que respeta el orden en c por lo que si c tiene dos preimagenes éstas deben coincidir.

□

Ahora queremos demostrar que este campo vectorial discreto es gradiente. Por el teorema 2.0.1 basta demostrar que no tiene caminos cerrados no triviales.

Proposición 4.0.1. *Sea G una gráfica. Para cada vértice $v \in V(G)$ sea $f_v : UD^n G \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f_v(c) = |\{c_i \in c : c_i \subset [* , v]\}|$. Cada función f_v cumple que:*

1. *Si c es redundante, tenemos que $f_v(c) = f_v(W(c))$ donde $\{c, W(c)\} \in W$.*
2. *Si c' se obtiene a partir de c reemplazando $e \in A(T)$ con $i(e)$ entonces $f_v(c) = f_v(c')$.*
3. *Si c' se obtiene a partir de c reemplazando $e \in A(T)$ con $t(e)$ entonces $f_v(c) = f_v(c')$, salvo que $v \wedge i(e) = t(e)$ en cuyo caso $f_v(c') = f_v(c) + 1$.*
4. *Si c' se obtiene a partir de c reemplazando $e \in A(T)$ con $t(e)$ entonces $f_v(c) = f_v(c')$ salvo que $v \wedge t(e) = t(e)$ en cuyo caso $f_v(c') = f_v(c) + 1$.*
5. *Si c' se obtiene a partir de c reemplazando $e \in A(T)$ con $i(e)$ entonces $f_v(c) = f_v(c')$ salvo que $v \wedge i(e) = i(e)$ en cuyo caso $f_v(c') = f_v(c) + 1$.*

Demostración. 1. Si c es redundante, $c = \{c_1, \dots, c_n = v\}$ y su pareja en W es $W(c) = \{c_1, \dots, c_{n-1}, e(v)\}$. Como $e(v) \cap c_i = \emptyset$, las celdas $c_i \in [* , v]$ que están en c siguen siendo las mismas celdas $c_i \in [* , v]$ que están en $W(c)$ y de la misma manera contamos ahora a $e(v) \in W(c)$ en lugar de contar a $v \in c$.

2. Sea $c = \{c_1, \dots, c_n = i(e)\}$ y sea $c' = \{c_1, \dots, c'_n = e\}$. Si para obtener a c' se hizo una reducción elemental, se tiene que $f_v(c') = f_v(c)$ pues $i(e) \in [* , v]$ implica que $e \in [* , v]$.
3. Si $c = \{c_1, \dots, c_n = i(e)\}$ y $c' = \{c_1, \dots, c'_n = e\}$ con $v \wedge i(e) = t(e)$, al hacer el reemplazo, no podemos contar a e en lugar de $t(e)$ pues no se queda contenida en $[* , v]$.

Los casos 4. y 5. son análogos. □

Teorema 4.0.4. *El campo vectorial discreto W no tiene ciclos.*

Demostración. Supongamos que $\{\sigma_0, \dots, \sigma_r\}$ es un camino cerrado no trivial. Para todo vértice v , tenemos que $f_v(\sigma_0) \leq f_v(\sigma_1) \leq \dots \leq f_v(\sigma_r) = f_v(\sigma_0)$ por lo que se debe dar la igualdad, esto es, $f_v(\sigma_i) = f_v(\sigma_j)$ para todo $i, j \leq r$.

Entonces por la proposición 4.0.1, σ_{i+1} se obtiene a partir de $W(\sigma_i)$ reemplazando $e' \in W(\sigma_i)$ por $i(e')$ con $e' \in A(T)$.

Afirmación: Si σ_{i+1} se obtiene a partir de $W(\sigma_i)$ reemplazando $e \in W(\sigma_i)$ con $i(e)$ entonces $i(e_{i+1}) < i(e_i)$ donde e_j denota la mínima arista que respeta el orden en σ_j . Si e_j no existe diremos que $i(e_j) = \infty$.

Caso 1: $i(\sigma_i) = \infty$.

Como $W(\sigma_i)$ es colapsable, tiene una arista e que respeta el orden y ésta debe ser única pues σ_i no tiene ninguna. Entonces σ_{i+1} también tiene una única arista que respeta el orden y debe ser ésta misma. Esto es, $e = e_{i+1}$, y por lo tanto $i(e_{i+1}) < i(e_i) = \infty$.

Caso 2: $i(\sigma_i) < \infty$.

Sea v el mínimo vértice desbloqueado de σ_i . Entonces como σ_i es redundante, por el teorema 4.0.2, $v < i(e_i)$. La celda $W(\sigma_i)$ se obtiene a partir de σ_i reemplazando a v con $e(v)$. Luego σ_{i+1} se obtiene a partir de $W(\sigma_i)$ reemplazando una arista e' con $i(e')$. Esto quiere decir que $e(v)$ respeta el orden en σ_{i+1} pues lo hace en $W(\sigma_i)$ y por el lema 4.0.2. Como e_{i+1} es la mínima arista que respeta el orden tenemos que $i(e_{i+1}) \leq i(e(v)) = v$ por lo que tenemos que $i(e_{i+1}) \leq v \leq i(e_i)$. Esto demuestra la afirmación.

Con esto llegamos a la contradicción $i(e_0) > i(e_1) > \dots > i(e_r) = i(e_0)$. □

Ejemplo 4.0.5. Sea $G = K_4$ la gráfica completa en 4 vértices. Tomamos el mismo árbol maximal que tomamos para la gráfica C_4 , el ciclo de longitud 4. Entonces UD^2K_4 tiene seis 0-celdas, doce 1-celdas y tres 2-celdas. El campo vectorial W está dado explícitamente por las parejas:

$$\{1, 2\} \rightarrow \{(1, *), 2\}$$

$$\{1, 3\} \rightarrow \{(1, *), 3\}$$

$$\{2, 3\} \rightarrow \{(1, 2), 3\}$$

$$\{2, *\} \rightarrow \{(1, 2), *\}$$

$$\{3, *\} \rightarrow \{(1, 3), *\}$$

$$\{3, *\}, 2\} \rightarrow \{(3, *), (1, 2)\}$$

$$\{2, 3\}, 1\} \rightarrow \{(2, 3), (1, *)\}$$

Además a este campo vectorial le podemos agregar la pareja $\{(1, 3), 2\} \rightarrow \{(2, *), (1, 3)\}$ sin formar ciclos. Con esto tenemos que UD^2K_4 tiene el tipo de homotopía de $\vee_{i=1}^4 S^1$.

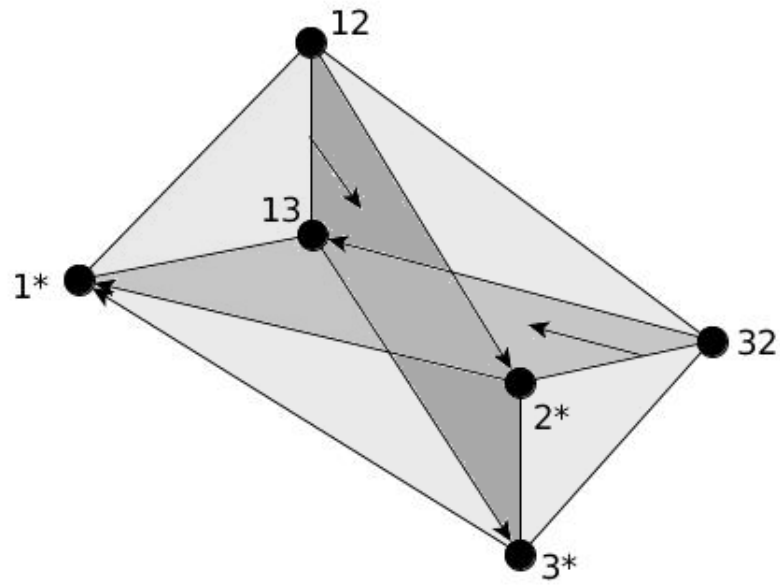


Figura 4.5: Un campo vectorial discreto gradiente para UD^2K_4 .

Capítulo 5

Algunos corolarios

Recordemos a la presentación $\langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ del grupo $\pi_1(X)$. Cuando el campo vectorial discreto acíclico W tiene una única celda crítica de dimensión cero, W determina completamente al árbol maximal T y denotamos a la presentación $\langle \Sigma | \mathcal{R} \rangle$ como P_W .

Teorema 5.0.1. *Sea G una gráfica con árbol maximal T . Si G no es un árbol, supongamos que los extremos de las aristas $e \notin A(T)$ tienen grado 1 en T . Sea $d = |A(G) - A(T)|$. Entonces P_W tiene*

$$d + \sum_{\delta(v) \geq 3} \sum_{i=2}^{\delta(v)-1} \left[\binom{n + \delta(v) - 2}{n - 1} - \binom{n + \delta(v) - i - 1}{n - 1} \right]$$

generadores.

Demostración. Como sólo hay una 0-celda crítica, todas las celdas del árbol son colapsables. Esto quiere decir que para contar las 1-celdas críticas que no están en el árbol basta contar las 1-celdas críticas.

Si c es una 1-celda crítica, entonces c contiene una única arista $e \notin A(T)$ o existe $v \in c$ tal que $e(v) \cap e = t(e)$ con $v < i(e)$.

En este último caso, $\delta(t(e)) \geq 3$ y $0 < g(t(e), v) < g(t(e), i(e))$.

Se sigue que $2 \leq g((t(e), i(e))) \leq \delta(t(e)) - 1$.

Ahora vamos a contar a todas las 1-celdas críticas c . Si la única arista $e \in c$ es tal que $e \notin A(T)$ entonces c está determinada únicamente por e , por lo que hay exactamente $d - 1$ celdas críticas

de este tipo.

Si la única arista e de c es tal que $e \in A(T)$ entonces $\delta(t(e)) \geq 3$ y $2 \leq g(t(e), i(e)) \leq \delta(t(e)) - 1$. Notemos que como todo vértice de c está bloqueado, la celda crítica c está determinada por la cantidad de vértices de c que están en cada una de las $\delta(t(e))$ componentes conexas de $T - e$. Notemos que aquí estamos removiendo a e con todo y sus vértices. La cantidad de componentes conexas se debe a que el árbol está suficientemente subdividido de modo que no hay dos vértices esenciales adyacentes.

Hay

$$\binom{n + \delta(t(e)) - 2}{n - 1}$$

maneras de asignar $n - 1$ vértices a las $\delta(t(e))$ componentes conexas de $T - e$. No todas nos dan una celda crítica c .

La condición $0 < g(t(e), v) < g(t(e), i(e))$ para algún $v \in c$ no se satisface si para cada $v \in c$ se tiene que $g(t(e), i(e)) \leq g(t(e), v) \leq \delta(t(e)) - 1$ ó $g(t(e), v) = 0$.

La cantidad de arreglos no permitidos de este tipo es

$$\binom{\delta(t(e)) + n - g(t(e), i(e)) - 1}{n - 1}.$$

Tomando la diferencia obtenemos que la cantidad de 1-celdas críticas para una arista fija e es

$$\binom{n + \delta(v) - 2}{n - 1} - \binom{n + \delta(v) - i - 1}{n - 1}.$$

Como toda arista que no respeta el orden tiene un vértice esencial, podemos tomar la suma sobre los vértices esenciales. Como a cada vértice esencial $t(e)$ le salen $\delta(v)$ aristas podemos poner $i = g(t(e), i(e))$ y tomar la suma. \square

Corolario 5.0.1. *Si G es un árbol con un único vértice esencial v , entonces $B_n G$ es libre de rango*

$$\sum_{i=2}^{\delta(v)-1} \left[\binom{n + \delta(v) - 2}{n - 1} - \binom{n + \delta(v) - i - 1}{n - 1} \right].$$

Demostración. Como toda arista que no respeta el orden debe incidir en un vértice esencial

y como existe uno único, no puede haber celdas críticas de dimensión mayor a uno pues sus aristas son ajenas.

Como las relaciones de P_W son frontera de 2-celdas críticas y aquí no hay 2-celdas críticas, tenemos que P_W es libre. Por el teorema 5.0.1 tiene la cantidad de generadores deseada. \square

Teorema 5.0.2. *Sea G un árbol y c una celda crítica de $UD^n G$. Sea*

$$k = \min\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, |\{v \in V(G) : \delta(v) \geq 3\}|\}.$$

Entonces $\dim c \leq k$. En particular, $UD^n G$ se retrae fuertemente por deformación en $(UD^n G)'_k$.

Demostración. Para cada arista $e \in c$ existe un vértice $v \in c$ tal que $e(v) \cap e = t(e)$. Si e_1 y e_2 son dos aristas en c y los vértices $v_1, v_2 \in c$ son tales que $e(v_i) \cap e_i = t(e_i)$ para $i = 1, 2$, entonces $v_1 \neq v_2$ ya que $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.

Se sigue que hay al menos tantos vértices como aristas en c . Como la dimensión de c es la cantidad de aristas que hay en c , y hay n celdas en c , tenemos que la dimensión de c es menor o igual a $\frac{n}{2}$.

Como $t(e)$ debe ser un vértice esencial de G para cada arista $e \in c$, y las aristas en c son disjuntas, tenemos que la dimensión de c es menor o igual a la cantidad de vértices esenciales de G .

Por último, por la proposición 3.0.2 $UD^n G$ se retrae fuertemente por deformación en $(UD^n G)'_k$. \square

Teorema 5.0.3. *Sea G una gráfica suficientemente subdividida que no sea un ciclo y sea $\chi(G)$ su característica de Euler. Entonces $UD^n G$ se retrae fuertemente por deformación en un complejo de dimensión a lo más k donde*

$$k = \min\{\lfloor \frac{n+1-\chi(G)}{2} \rfloor, |\{v \in V(G) : v \text{ es esencial}\}|\}.$$

Demostración. Vamos a construir un árbol maximal T con la propiedad de que toda arista que no esté en T , incida en un vértice esencial.

Notemos que como $G \not\cong S^1$, todo ciclo C en G debe tener al menos un vértice esencial v . Tomamos cualquier arista $e \in C$ que incida en v y la removemos para obtener el árbol T .

Hacemos esto para todo ciclo de G . Así obtenemos el árbol deseado.

Cualquier encaje de T induce un campo vectorial W con la propiedad de que toda arista en una celda crítica contiene un vértice esencial. Por lo tanto la cantidad de vértices esenciales acota la dimensión de las celdas de $UD^n G$ que son críticas con respecto a W .

Sea d la cantidad de aristas en G que no están en T , esto es la cantidad de ciclos en G , $d = 1 - \chi(G)$. Si c es una celda crítica, entonces todas sus aristas no respetan el orden. Como dada una arista $e \in A(T)$ que no respeta el orden se tiene que $\delta(t(e)) \geq 3$, y por construcción de T , si $e \notin A(T)$ también $\delta(t(e)) \geq 3$. Tenemos entonces que por cada arista que no respeta el orden hay un vértice esencial y estos deben ser disjuntos ya que las aristas lo son. Con esto tenemos que $\dim c \leq \{v \in V(G) : \delta(v) \geq 3\}$.

De las $n - d$ posibles aristas en T que puede tener c , por cada arista e debe existir un vértice $v \in c$ por lo que hay a lo más $\lfloor \frac{n-d}{2} \rfloor$ aristas y las demás celdas de c son vértices.

Por lo tanto la dimensión de una celda crítica es menor o igual a $d + \lfloor \frac{n-d}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+d}{2} \rfloor$.

Nuevamente por la proposición 3.0.2, $UD^n G$ se retrae fuertemente por deformación en un complejo de dimensión a lo más k .

Cuando no hay vértices de grado mayor o igual a 3, como la gráfica no puede ser un ciclo, debe ser una trayectoria. Como las trayectorias son isomorfas a los intervalos cerrados es claro que $UD^n G$ es contraíble. \square

Capítulo 6

Presentaciones de grupos de trenzas de árboles.

Consideremos el conjunto de vértices esenciales $V_E(G)$ de la gráfica G . Si a es un vector con $\delta(v) - 1$ entradas en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ para $v \in V_E(G)$, y $m \in \{1, \dots, \delta(v) - 1\}$ es tal que la m -ésima entrada de a es $a_m \neq 0$, entonces usamos la notación $v_m(a)$ para representar la siguiente subconfiguración.

En la m -ésima dirección de v hay una única arista e con $t(e) = v$ y $a_m - 1$ vértices bloqueados atrás de e . En cualquier otra dirección $i > 0$, $i \neq m$ desde v hay a_i vértices bloqueados atrás de e en v .

También denotaremos por $k*$ una colección de k vértices consecutivos que están en la única trayectoria que sale de $*$. Vamos a combinar estas dos notaciones utilizando notación aditiva. Las aristas de G que están fuera del árbol las denotaremos simplemente por su nombre.

Ejemplo 6.0.1. *Por ejemplo si tomamos el árbol de la figura 4.3, para $v = 3$, tenemos $v_1[(3, 0)] = \{5, 6, e(4)\}$ y $v_2[(1, 2)] = \{4, 8, e(7)\}$ y la celda $\{13, 10, e(19), e(16)\}$ se denota como $12_2[(1, 1)] + 9_2[(1, 1)]$.*

Por último, si una misma celda tuviera dos notaciones, subdividimos más la gráfica para evitarlo.

Proposición 6.0.1. *Sea G una gráfica suficientemente subdividida y sea T un árbol maximal en G con base $*$. Supongamos que T está encajado en el plano de modo que hay un orden en los vértices. Supongamos también que toda $e \in A(G - T)$ es tal que su punto final v tiene grado*

1 en T .

Entonces si escribimos una celda c como $A_{l_A}(a) + B_{l_B}(b) + \dots + e_1 + e_2 + \dots + k*$ con cada $A, B, \dots \in V_E(G)$, cada $e_i \in A(G-T)$ y cada a, b, \dots vectores con entradas en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces c es crítica si para $X = A, B, \dots$ alguna entrada x_j de $x = (x_1, \dots, x_{\delta(X)-1})$ es distinta de cero para $j < l_X$. Por otro lado toda celda crítica se puede escribir de esta forma.

Si para algún $X \in V_E(G)$ $x_j = 0$ para toda $j < l_X$, entonces la celda descrita anteriormente es colapsable.

Demostración. Por el teorema 4.0.2 una celda es crítica si y solo si no contiene aristas que respetan el orden y todos sus vértices están bloqueados. Esto es, para cada $X \in V_E(G)$ se tiene que $l_X \geq 2$. En particular si existe $j < l_X$ entonces $l_X \geq 2$. Además en esta configuración todos los vértices están bloqueados.

Si $x_i = 0$ para todo $i < l_X$ por el teorema 4.0.2 sabemos que una celda es colapsable si y solo si contiene una arista que respeta el orden e y para cualquier v tal que $v < i(e)$, v está bloqueado. Esto es, si tomamos la celda $(c - e) \cup i(e)$, como no hay vértices en menores direcciones y $x \in c$ tenemos que $i(e)$ está desbloqueado y es el menor vértice desbloqueado. Esto implica que $c = W((c - e) \cup i(e))$. \square

Sean $v, u \in V(G)$. Sea $|v, u| = \{w \in V(G) : v < w < u\}$, en otras palabras $|v, u|$ denota el conjunto de vértices que están entre u y v respecto al orden de los vértices.

Lema 6.0.1. *Sea $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(MP_{TW})$ la digráfica asociada a la presentación monoidal MP_{TW} . Sea c una 1-celda redundante en UD^nG para G una gráfica finita arbitraria. Supongamos que $c = \{c_1, \dots, v, e\}$ donde e es la única arista y v es el mínimo vértice desbloqueado en c . Sea $c' = c - \{v\} \cup \{t(e(v))\}$. Si $|t(e(v), v) \cap \{c_1, \dots, c_{n-2}, i(e), t(e)\}| = \emptyset$, entonces $c \rightarrow c'$.*

Demostración. Sean $c_i = \{c_1, \dots, c_{n-2}, e(v), i(e)\}$, $c_t = \{c_1, \dots, c_{n-2}, e(v), t(e)\}$. La pareja de c en W es la 2-celda de la figura 6.1

Sabemos que $(c, c_i c'_i) \in A(\mathfrak{D})$. Hay que ver que $(c_i, 1), (c_t, 1) \in A(\overline{\mathfrak{D}})$. Consideremos la condición de 1-celdas \hat{c} de UD^nG :

(\star) Si $v \in V(G)$ y $v \in d = \hat{c}$, entonces $v \notin |t(\hat{e}), i(\hat{e})|$ donde \hat{e} denota la única arista de d .

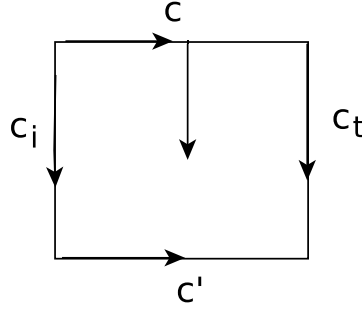


Figura 6.1: La 2-celda $W(c)$.

Afirmación 1: Una 1-celda d que satisface (\star) no puede ser crítica.

Afirmación 2: Si una 1-celda d satisface (\star) , entonces también lo hace toda 1-celda que esté en un W -camino que empiece en d .

Como c_i y c_t ambas satisfacen (\star) , ya que de lo contrario v no sería el mínimo vértice desbloqueado, probaremos el lema por inducción sobre el rango de c_i y c_t .

Empecemos demostrando la primera afirmación. Supongamos que d satisface (\star) . Si d es crítica existe $v \in d$ tal que $e(v) \cap \hat{e} = t(\hat{e})$ y $0 < g(t(\hat{e}), v) < g(t(\hat{e}), i(\hat{e}))$ pero entonces $t(\hat{e}) < v < i(\hat{e})$ lo cual es una contradicción.

Demostremos ahora la segunda afirmación. Si d es colapsable entonces cualquier W -camino que empieza en d es d mismo. Podemos entonces asumir que d es redundante. Esto quiere decir que existe $v \in d$ tal que $v < i(e)$ y v está desbloqueado. Podemos escoger a v que sea el mínimo vértice desbloqueado. Como d cumple (\star) tenemos que $v < t(\hat{e})$. Las dos aristas en $W(d)$, que son $e(v)$ y \hat{e} , tienen la propiedad de que $t(e(v)) < i(e(v)) = v < t(\hat{e}) < i(\hat{e})$. Más aún, no existe $v' \in W(d) \cap |t(e(v)), i(e(v))|$ pues un tal vértice minimal v' sería un vértice desbloqueado en d tal que $v' < v$ lo cual es una contradicción. Este vértice efectivamente está desbloqueado ya que al ser el mínimo en $W(d)$ se cumple que $t(e(v')) = t(e(v))$ o $t(e(v')) \notin W(d)$.

El inmediato sucesor c_j de d en un W -camino se obtiene reemplazando una arista de $W(d)$ con un vértice que está en esa arista, que en este caso es v o $(t(e(v)))$. Por lo tanto se tiene que

$c_j = d_i$ o $c_j = d_t$ y ambos cumplen (\star) , donde d_i y d_t son los análogos a c_i y c_t .

Ahora demostraremos el lema por inducción sobre $R(d)$, donde $R(d)$ denota el rango de la celda d para $d = c_i, c_t$.

Para $R(d) = 1$ como d no es crítica, ya que satisface la condición (\star) , debe ser colapsable. Esto quiere decir que d está en el árbol T por lo que $(d, 1) \in A(\mathfrak{D})$.

Supongamos que el resultado se cumple para celdas d' con $R(d') < R(d)$.

Como d es redundante tenemos que $(d, abf) \in A(\mathfrak{D})$ donde $abf\bar{d}$ es frontera de una 2-celda. Como $R(a), R(b), R(f) < R(d)$ tenemos que $(a, 1), (b, 1), (f, 1) \in A(\overline{\mathfrak{D}})$ por lo que $(d, 1) \in A(\overline{\mathfrak{D}})$. \square

Vamos a introducir nueva notación. Sea $A \in V_E(G)$. Sea $\dot{A}[a]$ la colección de vértices que consiste de A junto con a_i vértices acomodados consecutivamente en la dirección i desde A de modo que todo vértice está bloqueado salvo A . Sea $A[a] = \dot{A}[a] - A$. Combinamos estas notaciones con las anteriores.

Decimos que una 1-celda c' se obtiene a partir de c mediante un deslizamiento si existe un vértice desbloqueado $v \in c$ tal que $e(v) = (i, i + 1)$ y $c' = c - \{i\} \cup \{i + 1\}$.

Ejemplo 6.0.2. Por ejemplo en el árbol de la figura 4.3, $\mathfrak{g}[(2, 1)] = \{9, 10, 11, 19\}$ y $\{9, 10, 19, 22, e(25)\}$ se obtiene a partir de $\{9, 10, 20, 22, e(25)\}$ mediante un deslizamiento.

Si c se desliza hacia c' podemos intercambiarlos para nuestros propósitos. Notemos que en este caso c y c' son lados paralelos de una 2-celda donde los otros dos lados son c_i y c_t como en el lema 6.0.1 por lo que representan el mismo elemento en la presentación de $\pi_1(UD^n G)$. Podemos añadir las relaciones (c, c') a la presentación monoidal MP_{TW} de modo que la gráfica asociada siga siendo confluyente, terminante y sus vértices de exgrado cero permanezcan los mismos.

Sea δ_m el vector que tiene un uno en su m -ésima entrada y las demás entradas 0. Si w es un vector con entradas en $\mathbb{Z} \cup \{0\}$, sea $w - 1$ el vector que se obtiene al sustraer 1 de la primera entrada no cero de w . Denotemos por $|w|$ a la suma de las entradas de w .

Lema 6.0.2. Sean A y B vértices esenciales de T , un árbol maximal en G . En los incisos (1c) y (1d) necesitaremos la hipótesis adicional de que la celda inicial es redundante.

1. Supongamos que $A \wedge B = C$ con $C \in V_E(G)$, $A \neq C \neq B$. Sea $g(C, A) = i$ y $g(C, B) = j$ con $i < j$. Entonces

$$(a) (A[a] + B_l[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (B_l[b] + (p + |a|)^*),$$

$$(b) (\dot{A}[a] + B_l[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (B_l[b] + (p + 1 + |a|)^*),$$

$$(c) (A_k[a] + B[b] + p^*) \dot{\rightarrow} w_1(A_k[a] + (p + |b|)^*)w_1^{-1}, \text{ y}$$

$$(d) (A_k[a] + \dot{B}[b] + p^*) \dot{\rightarrow} w_2(A_k[a] + (1 + p + |b|)^*)w_2^{-1}, \text{ donde}$$

$$w_1 = \prod_{\alpha=0}^{|b|-1} (C_j[|a|\delta_i + (|b| - \alpha)\delta_j] + (p + \alpha)^*),$$

y w_2 es similar pero con $|b| + 1$ en lugar de $|b|$.

2. Supongamos que $A \wedge B = A$ y que $g(A, B) = i$. Entonces

$$(a) (A_k[a] + B[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (A_k[a + |b|\delta_i] + p^*),$$

$$(b) (A_k[a] + \dot{B}[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (A_k[a + (1 + |b|)\delta_i] + p^*),$$

$$(c) A[a] + B_l[b] + p^*) \dot{\rightarrow} w_3(B_l[b] + (p + |a|)^*)w_3^{-1},$$

$$(d) (\dot{A}[a] + B_l[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (A[a] + B_l[b] + (p + 1)^*)$$

donde

$$w_3 = \prod_{\alpha=0}^{|a|-1} (A_\beta[|b|\delta_i + (a - \alpha)] + (p + \alpha)^*),$$

y β es la mínima coordenada de $a - \alpha$ distinta de cero. Aquí un factor de w_3 se considera trivial si $\beta \leq i$, y la relación $\dot{\rightarrow}$ se refiere a ser una flecha en la cerradura transitiva de la digráfica \mathfrak{D} .

Demostración. (1a) Notemos que $A[a]$ son a_i vértices en la i -ésima dirección desde A para $i = 1, \dots, \delta(A) - 1$. Luego $B_l[b]$ es similar pero en la l -ésima dirección tiene a la arista e tal que $t(e) = B$ con $b_l - 1$ vértices bloqueados. Por último recordemos que p^* son p vértices consecutivos desde $*$. El vértice v más pequeño de $A[a]$ es el vértice adyacente a A en la dirección i tal que $i = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$.

Queremos aplicar el lema 6.0.1 para lo cual debemos encontrar dos 1-celdas c y c' tales que: existe $v \in c$, $v \notin v'$, c es redundante. Para esto se debe cumplir que $c = \{c_1, \dots, c_{n-2}, v, e\}$ con v el vértice desbloqueado más pequeño y $c' = \{c_1, \dots, c_{n-2}, t(e(v)), e\}$ de modo que $|t(e(v)), v| \cap (c - v) = \emptyset$.

Primero veamos que la 1-celda $(A_k[a] + B[b] + p^*)$ es redundante ya que $A[a]$ tiene vértices desbloqueados que cumplen que $v < i(e)$ pues A está en la dirección i y B está en la dirección j con $i < j$. Notemos también que $e(v) = (A, v)$, $A = t(e(v))$. Luego los vértices c_1, \dots, c_{n-2} son vértices de $A(a)$ por lo que son mayores que v . Por lo tanto $(c, c') \in A(\overline{\mathfrak{D}})$.

Repitiendo esto varias veces tenemos que $(A[a] + B_l[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (A[a-1] + B_l[b] + (p+1+|a|)^*)$. Haciendo este proceso varias veces obtenemos el resultado. Se repite tantas veces como vértices hay en $A[a]$.

- (1b) Hacemos lo mismo que en el inciso (1a) pero ahora empezamos tomando al vértice A en lugar de v . Como tenemos un vértice más, tenemos que repetir el proceso una vez más por lo que obtenemos el resultado.
- (1c) Similarmente a los incisos anteriores podemos aplicar el lema 6.0.1 al mínimo vértice desbloqueado de $B[b]$ para moverlo hasta llegar al vértice adyacente a C en la dirección j desde C . Esto es, $(A[a] + B_l[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (A_k[a] + B[b-1] + C[\delta_j] + p^*)$.

$$\begin{array}{ccc}
 & A_k[a] + B[b-1] + C[\delta_j] + p^* & \\
 & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\
 A_k[a] + B[b-1] + \dot{C} + p^* & \square & \dot{A}[a - \delta_k] + B[b-1] + C_j[\delta_j] + p^* \\
 & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\
 & A_k[a] + B[b-1] + \dot{C} + p^* &
 \end{array}$$

Consideremos la celda $A[a] + B[b-1] + C_j[\delta_j] + p^*$. El lema 6.0.1 aplica para los vértices de $A[a]$ como anteriormente; se puede mover el vértice más pequeño hasta quedar adyacente

a C en la dirección i y los demás atrás de él. Esto es,

$$(A[a] + B[b - 1] + C[\delta_j] + p^*) \dot{\rightarrow} (B[b - 1] + C_j[\delta_j + |a|\delta_i] + p^*)$$

como lo hicimos en el inciso (1a).

Haciendo lo mismo para $B[b - 1]$ tenemos que $(B[b - 1] + C_j[\delta_j + |a|\delta_i] + p^*) \dot{\rightarrow} (C_j[|b|\delta_j + |a|\delta_i] + p^*)$. Esta última 1-celda es crítica pues todos sus vértices están bloqueados y no puede ser colapsable ya que su única arista estaría en la dirección i pues $i > j$.

Análogamente para $\dot{A}(a - \delta_k) + B(b - 1) + C_j(\delta_j) + p^*$ pues $|a - \delta_k| + 1 = |a|$.

Finalmente $(\dot{C} + A_k[a] + B[b] + p^*) \dot{\rightarrow} (A_k[a] + B[b - 1] + (p + 1)^*)$ por el lema 6.0.1.

Por lo tanto $(A_k[a] + B[b] + p^*) \dot{\rightarrow} w(A_k[a] + B[b - 1] + (p + 1)^*)w^{-1}$ con $w = (C_j|a|\delta_i + |b|\delta_j) + p^*$.

Aplicando esto varias veces llegamos al resultado pues $(A_k[a] + B[b - 1] + (p + 1)^*) \rightarrow w'(A_k[a] + B[b - 2] + (p + 2)^*)w'^{-1}$ con $w' = (C_j|a|\delta_i + |b - 1|\delta_j) + p^*$.

Esto implica que $(A_k[a] + B[b] + p^*) \rightarrow ww'(A_k[a] + B[b - 2] + (p + 2)^*)w'^{-1}w^{-1}$.

(1d) Procedemos similarmente al inciso anterior, pero ahora hay un punto más en $\dot{B}[b]$ que en $B[b]$, y recordando que $|b|$ denota la cantidad de puntos en $B[b]$, al tener uno más tomamos w_2 en lugar de w_1 .

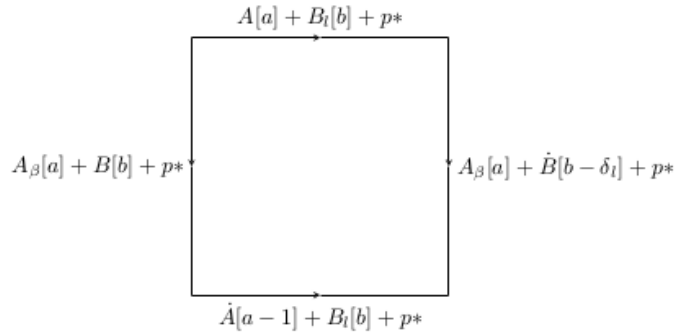
(2a) Aquí los vértices de $B[b]$ se pueden mover hasta llegar a A en la dirección i por lo que llegamos a $A_k[a + |b|\delta_i] + p^*$ por el lema 6.0.1.

(2b) Similarmente al caso anterior pues $\dot{B}[b]$ tiene un vértice más que $B[b]$.

(2c) Empezamos tomando la pareja en W de $A[a] + B_l[b] + p^*$. Es la celda $A_\beta[a] + B_l[b] + p^*$ donde $\beta = \min\{n \in \mathbb{N} : \alpha_\beta \neq 0\}$.

Si $\beta \leq i$ tenemos que las celdas verticales son colapsables. Si $\beta > i$ ambas celdas le mandan flecha a $A_\beta[a + |b|\delta_i] + p^*$ en $\overline{\mathfrak{D}}$.

Luego $\dot{A}[a - 1] + B_l[b] + p^* \dot{\rightarrow} (A[a - 1] + B_l[b] + (p + 1)^*)$.



Por lo tanto $A[a] + B_l[b] + p* \rightarrow w(A[a-1] + B_l[b] + (p+1)*)w^{-1}$ donde $w = (A_\beta[a + |b|\delta_i] + p*)$ si $\beta > 1$ y $w = 1$ si $\beta \leq 1$.

(2d) Aquí lo único que hay que hacer es mover el vértice A hasta que quede pegado a los p vértices obteniendo $(A[a] + B_l[b] + (p+1)*)$.

□

Teorema 6.0.1. *Sea G un árbol suficientemente subdividido con base fija $*$. Supongamos que G está encajado en el plano de modo que sus vértices estén ordenados. Entonces el grupo de trenzas $B_n G$ está generado por la colección de 1-celdas críticas, y el conjunto de relaciones es $\{(r(w), 1) : w \text{ es frontera de una } 2\text{-celda crítica}\}$. Para una 2-celda crítica $c = (A_k[a] + B_l[b] + p*)$ con frontera w , tenemos que $r(w)$ es de la forma:*

1. Si $A \wedge B = C$ con $C \neq A, B$, $g(C, A) = i$, $g(C, B) = j$, y $i < j$, entonces $r(w)$ es de la forma

$$[(B_l[b] + (p + |a|)*), w_1(A_k[a] + (p + |b|)*)w_i^{-1}],$$

donde w_1 es como en la proposición anterior.

2. Si $A \wedge B = A$, y $g(A, B) = i$, entonces $r(w)$, con w la frontera de c , tiene la forma

$$[w_3^{-1}(A_k[a + |b|\delta_i] + p*)w'_3, (B_l[b] + (p + |a|)*)^{-1}],$$

donde w_3 es como en el lema anterior, y w'_3 es similar pero con $a - \delta_k$ en lugar de a y $p + 1$ en lugar de p .

Aquí $r(w)$ se refiere a un vértice de exgrado cero que está en la misma componente conexa por trayectorias que w en la digráfica asociada a $B_n G$.

Demostración. Del teorema 3.0.1 sabemos que $B_n G$ está generado por las 1-celdas críticas con las relaciones $(r(w), 1)$ donde w es la frontera de una 2-celda crítica c . Consideremos la 2-celda $A_k[a] + B_l[b] + p*$ y su frontera como en la figura 6.2.

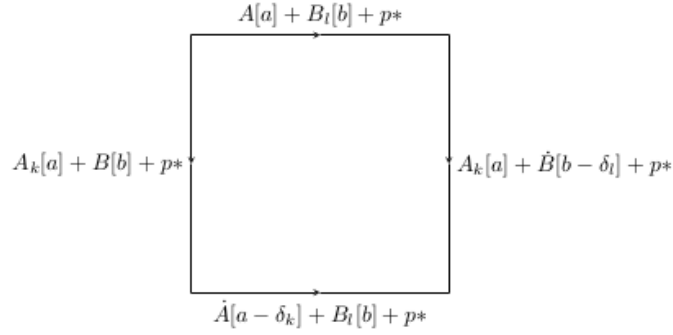


Figura 6.2: La frontera de la 2-celda crítica $A_k[a] + B_l[b] + p*$

Notemos que como la celda $A_k[a] + B_l[b] + p*$ es crítica, sus dos aristas no respetan el orden por lo que las celdas verticales deben ser redundantes. Por el lema 6.0.2 las 1-celdas verticales le mandan flecha a $w_1(A_k[a] + (p + |b|)*)w_1^{-1}$ en $\overline{\mathfrak{D}}$ y las celdas horizontales a $B_l[b] + (p + |a|)*$. \square

Definición 6.0.1. Un grupo G es de ángulo recto de Artin si puede ser presentado mediante una gráfica donde los vértices son los generadores y las aristas dan relaciones de conmutatividad entre los generadores. Explícitamente, $G = \langle V, A \rangle$ donde V es el conjunto de vértices de la gráfica, y cada arista (a, b) da la relación $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$.

Ejemplo 6.0.3. Consideremos el caso en que G es un árbol con seis vértices de los cuales dos tienen grado 3 y cuatro son hojas. Fijemos una hoja como punto base $*$, sea A el vértice esencial adyacente a $*$ y B el otro vértice esencial.

Proposición 6.0.2. Sea G el árbol descrito en 6.0.3. Entonces $B^n G$ es un grupo de ángulo recto de Artin para toda n .

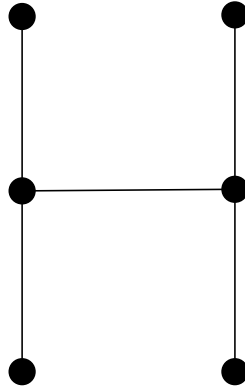


Figura 6.3: El árbol descrito en el ejemplo 6.0.3.

Demostración. Para toda n podemos aplicar el teorema 6.0.1(2) y debemos obtener los valores de las palabras w_3 y w'_3 . Vamos a probar que estas dos palabras deben ser triviales. Sea

$$w_3 = \prod_{\alpha=0}^{|a|-1} (A_\beta[|b|\delta_i + (a - \alpha)] + (p + \alpha)*).$$

Aquí $i = g(A, B) = 2$ y β es el índice de la mínima entrada no cero de $(a - \alpha)$. Notemos que en este caso β también es la mínima entrada no cero de $|b|\delta_i + (a - \alpha)$, por lo que por la proposición 6.0.1, ningún término en el producto de arriba es una 1-celda crítica. De hecho todas son colapsables. De esto se sigue que w_3 es trivial. Similarmente para w'_3 . \square

En el caso $n = 6$ tenemos que $B_n G$ es el producto libre de un grupo libre de rango 18 con el grupo de Artin de ángulo recto dado por la gráfica de la figura 6.4. La verificación de este hecho es muy extensa pero no difícil.

La subgráfica isomorfa a $K_{3,3}$ representa un subgrupo isomorfo a $F_3 \times F_3$ el producto directo del grupo libre de rango 3 con él mismo.

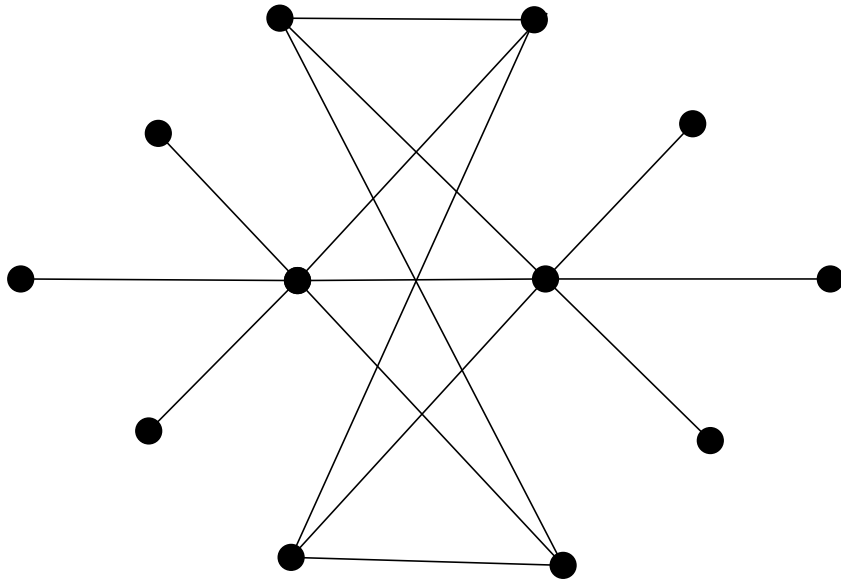


Figura 6.4: Parte de la presentación del grupo B_6G .

Trabajo a futuro

Se planea utilizar las técnicas de teoría de Morse discreta a fin de poder acceder a las propiedades topológico-algebraicas de los espacios de configuración de gráficas y otros objetos combinatorios. De particular interés será estudiar el anillo de cohomología de estos espacios, a fin de poder tener estimaciones de la complejidad topológica de los mismos. En tal dirección, el trabajo “On the cohomology rings of tree braid groups” de los autores Farley y Sabalka (publicado en el *Journal of Pure and Applied Algebra* 212 (2008) 53–71), es la continuación natural del trabajo desarrollado en esta tesis. De hecho, el plan de actividades aquí vislumbrado ya ha visto frutos parciales en el trabajo “Topological complexity of n points on a tree” de Scheirer (publicado en *Algebr. Geom. Topol.* 18 (2018), no. 2, 839–876), mismo que se planea extender.

Otro trabajo a futuro que ya empezamos a desarrollar es utilizar la teoría de Morse discreta para entender propiedades homotópicas de propiedades generales de gráficas.

Bibliografía

- [1] Aaron David Abrams. *Configuration spaces and braid groups of graphs*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2000. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley.
- [2] Daniel Farley and Lucas Sabalka. Discrete Morse theory and graph braid groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:1075–1109, 2005.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [4] Kevin P. Knudson. *Morse theory: Smooth and discrete*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015.