

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional**

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

*Clases Características de Haces con Fibra la
Botella de Klein*

Tesis presentada por

Cristhian Ernesto Hidber Cruz

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

En la especialidad de
Matemáticas

Director de Tesis: **Dr. Miguel A. Xicoténcatl Merino**

México, D. F.

Octubre de 2016

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | v |
| Introducción | vii |
| 1. Clases Características de Haces de Superficies | 1 |
| 1.1. Haces de superficies. | 1 |
| 1.2. El grupo modular. | 3 |
| 1.3. Clases características de haces de Toros. | 6 |
| 1.4. Clases características de K -haces. | 9 |
| 2. La Cohomología de $B\text{Diff}(K)$. | 11 |
| 2.1. La sucesión espectral. | 11 |
| 2.2. El término $E_2^{*,*}$ | 15 |
| 2.3. La estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$ | 27 |
| 2.4. El colapso de la sucesión espectral. | 37 |
| 3. El tipo de homotopía de $B\text{Diff}(K)$ | 45 |
| 3.1. El tipo de homotopía de $B\text{Diff}(K)$ | 45 |
| 3.2. Ejemplos de K -haces | 49 |
| 3.2.1. K -haces sobre S^1 | 49 |
| 3.2.2. Otros ejemplos sencillos de K -haces. | 52 |
| 4. La cohomología de $\Gamma^q(K)$ | 57 |
| 4.1. Un espacio $\mathbf{K}(\pi, 1)$ para $\Gamma^q(K)$ | 58 |
| 4.2. La cohomología mód 2 de $\Gamma^q(K)$ | 66 |
| 4.3. La homología de los espacios de configuraciones. | 73 |
| 4.4. Descomposición en asas | 78 |

Bibliografía**81**

Resumen

En este trabajo se calcula la cohomología de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$, el espacio clasificante del grupo de difeomorfismos de la botella de Klein. Para ésto, analizamos la sucesión espectral asociada a la fibración

$$B\text{Diff}_0(\mathbb{K}) \longrightarrow B\text{Diff}(\mathbb{K}) \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

y demostramos que colapsa en la página $E_2^{*,*}$. Más aún, demostramos que $B\text{Diff}(\mathbb{K})$ es del mismo tipo de homotopía que $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$. Posteriormente, consideramos la construcción de Borel

$$E\text{Diff}(\mathbb{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbb{K})} F_q(\mathbb{K})/\Sigma_q$$

del espacio de configuraciones $F_q(\mathbb{K})/\Sigma_q$ y probamos que es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(\Gamma^q(\mathbb{K}), 1)$, donde $\Gamma^q(\mathbb{K}) := \pi_0\text{Diff}(\mathbb{K}; q)$ es el grupo modular de \mathbb{K} con q puntos marcados. Así, cada uno de estos espacios $K(\Gamma^q(\mathbb{K}), 1)$ tiene asociada de manera natural una fibración cuya sucesión espectral de Serre en cohomología mód 2 colapsa en el término $E_2^{*,*}$. Finalmente, usando este hecho calculamos la cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbb{K})$.

Introducción

Un problema importante en topología es el de clasificar variedades diferenciables. Dadas dos variedades diferenciables F y M , una forma de construir una tercera a partir de ellas es mediante el uso de la estructura de haces fibrados diferenciables. Entonces, un problema igualmente importante es el de determinar el conjunto de clases de isomorfismo de F -haces, es decir de haces fibrados diferenciables con fibra F y espacio base M

$$\pi : E \longrightarrow M.$$

El grupo estructural de tales haces es $Diff(F)$, el grupo de difeomorfismos de F equipado con la topología C^∞ . El problema anterior se puede formular en términos de teoría de homotopía. A saber, si $BDiff(F)$ denota el espacio clasificante de $Diff(F)$, es bien sabido que existe una biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de isomorfismo} \\ \text{de } F\text{-haces sobre } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow [M, BDiff(F)]$$

donde el lado derecho denota el conjunto de clases de homotopía de mapeos de M en $BDiff(F)$. Por lo tanto, es de vital importancia determinar el tipo de homotopía de $Diff(F)$ y $BDiff(F)$. En esta misma dirección, el grupo $Diff(F)$ está estrechamente relacionado con las clases características de F -haces, ya que estas son precisamente los elementos de la cohomología del espacio clasificante $BDiff(F)$ [29].

Por ejemplo, si $F = S_g$ es una superficie cerrada, orientada de género g , las clases características de S_g -haces orientados están dadas por la cohomología de $BDiff^+(S_g)$, el espacio clasificante del grupo de difeomorfismos de S_g que preservan orientación. El caso $g \geq 2$ fue estudiado por Morita [27]. Para $g \geq 2$, es un resultado

clásico [11] que $Diff_0(S_g) \cong *$ y por lo tanto $H^*(BDiff^+(S_g)) = H^*(\Gamma(S_g))$, donde $Diff_0(S_g)$ es la componente de la identidad de $Diff^+(S_g)$ y $\Gamma(S_g) = Diff^+(S_g)/Diff_0(S_g)$ es el grupo modular de S_g . El caso $g = 1$ (cuando S_g es el toro T) es especial y la cohomología racional de $BDiff^+(T)$ fue calculada por Morita en [28] y puede ser expresada en términos de formas modulares. Es bien sabido que $\Gamma(T) = SL_2(\mathbb{Z})$ [13] y la sucesión exacta corta de grupos

$$1 \longrightarrow Diff_0(T) \longrightarrow Diff^+(T) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

induce una fibración de espacios clasificantes

$$BDiff_0(T) \longrightarrow BDiff^+(T) \longrightarrow BSL_2(\mathbb{Z}).$$

Earle-Eells [11] y Gramain [16] demostraron que la inclusión $T \subset Diff_0(T)$ es una equivalencia homotópica, por lo tanto $BDiff_0(T) \simeq BT = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$. En consecuencia la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración anterior tiene la forma

$$E_2^{*,*} = H^*(SL_2(\mathbb{Z}); R[x, y]) \quad \Rightarrow \quad H^*(BDiff^+(T); R)$$

donde $|x| = |y| = 2$ y la cohomología de $SL_2(\mathbb{Z})$ se considera con coeficientes no triviales. En el caso en que $R = \mathbb{Q}$ o \mathbb{Z}_p con p primo diferente de 2, 3, Morita demostró [28] que la sucesión espectral se colapsa y calculó $H^*(BDiff^+(T))$ con dichos coeficientes. Posteriormente, Furusawa, Tezuka y Yagita [15] interpretaron los resultados en términos de formas modulares y calcularon $H^*(BDiff^+(T); \mathbb{Z}_p)$ con $p = 2, 3$.

De manera análoga, si N_g es una superficie cerrada no orientable de género g , las clases características de N_g —haces están dadas por la cohomología de $BDiff(N_g)$, donde $Diff(N_g)$ es el grupo de todos los difeomorfismos de N_g . Similarmente al caso orientable, Earle-Eells [11] y Gramain [16] demostraron que

$$Diff_0(N_g) \simeq \begin{cases} SO(3) & \text{si } g = 1 \\ SO(2) & \text{si } g = 2 \\ * & \text{si } g \geq 3. \end{cases}$$

Más aún, en el caso $g = 1$, $Diff_0(N_1) = Diff(N_1)$. Luego, para $g = 1$ la cohomología de $BDiff(N_1)$ coincide con la cohomología de $BSO(3)$ y para $g \geq 3$ se tiene que $H^*(BDiff(N_g)) = H^*(\Gamma(N_g))$.

Uno de los objetivos de este trabajo es estudiar la cohomología de $B\text{Diff}(\mathbf{K})$, el espacio clasificante de los difeomorfismos de la botella de Klein \mathbf{K} , adaptando el método de Morita para calcular $H^*(B\text{Diff}^+(T))$. En este caso consideramos la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow \text{Diff}_0(\mathbf{K}) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbf{K}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{K}) \longrightarrow 1$$

donde el grupo modular $\Gamma(\mathbf{K})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. La sucesión exacta anterior induce una fibración de espacios clasificantes cuya sucesión espectral de Serre (con coeficientes locales) tiene la forma

$$E_2^{*,*} = H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); \mathcal{H}^*(\text{Diff}_0(\mathbf{K}); R)) \quad \Rightarrow \quad H^*(B\text{Diff}(\mathbf{K}); R)$$

Dado que $\Gamma(\mathbf{K})$ es finito, la cohomología con coeficientes en \mathbb{Q} no provee información por lo que en su lugar estudiamos la cohomología entera de $B\text{Diff}(\mathbf{K})$. con este propósito obtenemos la estructura de álgebra del término $E_2^{*,*}$ y demostramos que $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$. Más aún, existe una inclusión natural $i : \mathbb{Z}_2 \times O(2) \rightarrow \text{Diff}(\mathbf{K})$, la cual es una equivalencia homotópica y como consecuencia $B\text{Diff}(\mathbf{K})$ es del mismo tipo de homotopía que $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$. Usando la equivalencia homotópica $\text{Diff}(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times O(2)$ y el espacio de configuraciones desordenadas $F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$ de \mathbf{K} , construimos espacios de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ para $\pi = \Gamma^q(\mathbf{K})$, el grupo modular de la botella de Klein con q puntos marcados. Finalmente, usamos estos espacios $K(\Gamma^q(\mathbf{K}), 1)$ para calcular la cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbf{K})$.

La presente tesis está estructurada como sigue. En el capítulo 1 recordamos la definición de haces de superficies y de clases características, así como su relación con los grupos modulares. También exponemos con más detalle el procedimiento usado por Morita para obtener la cohomología racional de $B\text{Diff}^+(T)$. En el capítulo 2 estudiamos la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración

$$B\text{Diff}_0(\mathbf{K}) \longrightarrow B\text{Diff}(\mathbf{K}) \longrightarrow B\Gamma(\mathbf{K})$$

que converge a la cohomología entera de $B\text{Diff}(\mathbf{K})$, en particular identificamos el término $E_2^{*,*}$ con $H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}[x])$, donde la cohomología se considera con coeficientes locales. En este mismo capítulo, calculamos la cohomología de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con coeficientes triviales en \mathbb{Z} y no triviales en $\overline{\mathbb{Z}}$, así como los productos cup que nos

permiten describir la estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$. Finalmente demostramos que la sucesión espectral colapsa en el término $E_2^{*,*}$.

En el capítulo 3 exhibimos una inclusión $i : \mathbb{Z}_2 \times O(2) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{K})$ que induce una equivalencia homotópica entre $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$ y $B\text{Diff}(K)$ y presentamos algunos ejemplos de \mathbb{K} -haces que pueden ser detectados por clases características mód 2.

Finalmente, en el capítulo 4 demostramos que el espacio total de haz

$$F_q(\mathbb{K})/\Sigma_q \longrightarrow E\text{Diff}(\mathbb{K}) \underset{\text{Diff}(\mathbb{K})}{\times} F_q(\mathbb{K})/\Sigma_q \longrightarrow B\text{Diff}(\mathbb{K})$$

es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(\Gamma^q(\mathbb{K}), 1)$ el cual puede ser usado para calcular la cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbb{K})$. Usando la equivalencia homotópica $\text{Diff}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times O(2)$, probamos también que el espacio anterior es homotópicamente equivalente a

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \underset{\mathbb{Z}_2 \times O(2)}{\times} F_q(\mathbb{K})/\Sigma_q.$$

y que su cohomología depende solo de la cohomología del espacio de configuraciones desordenadas $F_q(\mathbb{K})/\Sigma_q$ y de la cohomología de $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$.

Capítulo 1

Clases Características de Haces de Superficies

En este capítulo recordaremos los conceptos básicos con los que estaremos trabajando a lo largo de esta tesis.

1.1. Haces de superficies.

Si F es una variedad C^∞ , entonces para fines de este trabajo un F -haz será siempre un haz fibrado suave cuyas fibras son difeomorfas a F . Un problema fundamental en topología es el de determinar el conjunto de clases de isomorfismos de F -haces

$$\pi : E \rightarrow M$$

sobre una variedad dada M . El grupo estructural de tales haces es $Diff(F)$, el grupo de difeomorfismos de F equipado con la topología C^∞ . Más aún, si $BDiff(F)$ denota el espacio clasificante, es bien sabido que existe una biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de isomorfismos} \\ \text{de } F\text{-haces sobre } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow [M, BDiff(F)]$$

donde el lado derecho denota el conjunto de clases de homotopía de mapeos de M en $BDiff(F)$. Luego, el problema de determinar a todos los F -haces sobre M (no

isomorfos entre sí) es equivalente a describir el conjunto $[M, BDiff(F)]$, lo cual no es sencillo en general. En tal situación es natural buscar métodos para determinar si dos F -haces sobre la misma base son isomorfos entre sí. Una posibilidad es usar clases características de F -haces. A continuación recordamos la definición.

Definición 1.1. *Sea A un grupo abeliano y k un entero no negativo. Supongamos que a todo F -haz $\pi : E \rightarrow M$ se le puede asociar una clase de cohomología $\alpha(\pi) \in H^k(M; A)$ del espacio base, la cual es natural con respecto a mapeos de F -haces. Entonces decimos que $\alpha(\pi)$ una clase característica de F -haces, de grado k y coeficientes en A .*

En la definición anterior, que $\alpha(\pi)$ sea natural significa que para cualquier mapeo de F -haces

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

se tiene $\alpha(\pi_1) = f^*(\alpha(\pi_2))$.

Usando el lenguaje de los espacios clasificantes, si $\alpha \in H^k(BDiff(F); A)$ es la clase asociada al F -haz universal

$$F \longrightarrow EDiff(F) \underset{Diff(F)}{\times} F \longrightarrow BDiff(F)$$

y si $f : M \rightarrow BDiff(F)$ es el mapeo clasificante de un F -haz dado $\pi : E \rightarrow M$, entonces se tiene que $\alpha(\pi) = f^*(\alpha)$. En otras palabras las clases características son elementos en $H^*(BDiff(F); A)$. De la definición se sigue que si dos F -haces sobre la misma base $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ satisfacen $\alpha(\pi_1) \neq \alpha(\pi_2)$, entonces dichos haces no son isomorfos. Es claro entonces que el grupo $Diff(F)$ está estrechamente relacionado con las clases características de F -haces.

1.2. El grupo modular.

El grupo de difeotopía de F que denotamos por $\mathcal{D}(F)$, es el grupo formado por las componentes arco conexas de $\text{Diff}(F)$, es decir

$$\mathcal{D}(F) := \pi_0(\text{Diff}(F)).$$

En el caso en que F sea una superficie orientable S , se define el grupo modular (ó grupo de difeotopía orientado) de S como: $\pi_0(\text{Diff}^+(S))$, donde $\text{Diff}^+(S)$ denota el grupo de difeomorfismos de S que preservan orientación. Si S es una superficie no orientable, el grupo modular es por definición $\pi_0(\text{Diff}(S))$. En ambos casos denotaremos al grupo modular de S por $\Gamma(S)$. Existe además una versión del grupo modular con puntos marcados (ver por ejemplo [29]). A saber, si $\{x_1, \dots, x_q\}$ es un subconjunto finito de puntos distinguidos en S , denotamos por $\text{Diff}^+(S; q)$ al subgrupo de difeomorfismos de S que preservan orientación y dejan invariante a dicho conjunto de puntos, en el caso en que S sea orientable y en tal caso se define el grupo modular de S con q puntos marcados como:

$$\Gamma^q(S) := \pi_0 \text{Diff}^+(S; q).$$

En el caso no orientado, consideramos el subgrupo $\text{Diff}(S; q)$ de todos los difeomorfismos de S que dejan invariante al conjunto de puntos distinguidos y definimos

$$\Gamma^q(S) := \pi_0 \text{Diff}(S; q)$$

Es importante recordar que trabajar con superficies tiene sus ventajas, pues es bien sabido que si $f, g : S \rightarrow S$ son homeomorfismos homotópicos de una superficie compacta S (distinta del anillo cerrado o del disco cerrado) entonces son isotópicos ([2] y [13]). Más aún, existe una equivalencia entre el concepto de homeomorfismos y difeomorfismos para superficies: todo homeomorfismo de una superficie compacta es isotópico a un difeomorfismo de la superficie ([30], [34]). Los grupos modulares han sido estudiados desde varios puntos de vista pues se relacionan con diversas ramas de la matemáticas como la teoría de espacios de Teichmüller y la teoría de 3-variedades (ver [29]). A continuación ilustramos su relación con los haces de superficies.

Recordemos que el grupo modular $\Gamma(S)$ de una superficie orientable es por defi-

nición el cociente

$$\Gamma(S) = \text{Diff}^+(S)/\text{Diff}_0(S)$$

donde $\text{Diff}_0(S)$ es la componente de la identidad de $\text{Diff}^+(S)$. Ahora bien, si S_g denota a la superficie compacta orientable de genero g , entonces Earle-Eells [11] y Gramain [16] demostraron que:

$$\text{Diff}_0(S_g) \simeq \begin{cases} SO(3) & \text{si } g = 0 \\ S_1 & \text{si } g = 1 \\ * & \text{si } g \geq 2. \end{cases}$$

Por otro lado, la sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$\text{Diff}_0(S_g) \longrightarrow \text{Diff}^+(S_g) \longrightarrow \Gamma(S_g)$$

induce una fibración a nivel de espacios clasificantes

$$B\text{Diff}_0(S_g) \longrightarrow B\text{Diff}^+(S_g) \longrightarrow B\Gamma(S_g)$$

cuya cohomología se puede estudiar mediante la sucesión espectral de Serre. Notemos que si $g \geq 2$ entonces $H^*(B\text{Diff}^+(S_g)) = H^*(\Gamma(S_g))$. En el caso $g = 1$, el calculo de la cohomología racional de $B\text{Diff}(S_1)$ fue llevado a cabo por Morita [28] y será revisado brevemente en la siguiente sección.

El caso no orientable se trata de manera similar. A saber, si N_g es la superficie no orientada de genero g , Earle-Eells [11] y Gramain [16] también demostraron que:

$$\text{Diff}_0(N_g) \simeq \begin{cases} SO(3) & \text{si } g = 1 \\ SO(2) & \text{si } g = 2 \\ * & \text{si } g \geq 3. \end{cases}$$

De manera similar, la sucesión exacta corta

$$\text{Diff}_0(N_g) \longrightarrow \text{Diff}(N_g) \longrightarrow \Gamma(N_g)$$

induce la fibración

$$BDiff_0(N_g) \longrightarrow BDiff(N_g) \longrightarrow B\Gamma(N_g)$$

Similarmente al caso orientable, se tiene que $H^*(BDiff(N_g)) = H^*(\Gamma(N_g))$ para $g \geq 3$. El caso $g = 2$, $N_2 = \mathbf{K}$ es la botella de Klein y el proposito de este trabajo es estudiar la cohomología del espacio clasificante $BDiff(\mathbf{K})$ basandonos en el método de Morita para calcular $H^*(BDiff^+(S_1))$.

1.3. Clases características de haces de Toros.

En esta sección describimos el argumento del artículo de Morita [28] en el cual nos basamos para calcular $H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z})$. El objetivo de dicho artículo es determinar clases características sobre \mathbb{Q} para T -haces, con $T = S^1 \times S^1$ el toro, en otras palabras calcular $H^*(B\text{Diff}^+(T); \mathbb{Q})$ usando la sucesión espectral de Serre.

Recordemos que $\Gamma(T) = SL_2(\mathbb{Z})$ (ver [13]). Luego tenemos una sucesión exacta corta de grupos

$$\text{Diff}_0(T) \longrightarrow \text{Diff}^+(T) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z})$$

que induce una fibración

$$B\text{Diff}_0(T) \longrightarrow B\text{Diff}^+(T) \longrightarrow BSL_2(\mathbb{Z}) = K(SL_2(\mathbb{Z}), 1).$$

Por otro lado, notemos que T actúa sobre sí mismo por traslación y por tanto puede ser considerado como un subgrupo de $\text{Diff}_0(T)$. Earle-Eells [11] y Gramain [16] prueban que la inclusión $T \subset \text{Diff}_0(T)$ es una equivalencia homotópica lo cual implica que $B\text{Diff}_0(T) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \times \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Por lo tanto, si R es un anillo conmutativo con identidad, entonces $H^*(B\text{Diff}_0(T); R) = R[x, y]$ con $|x| = |y| = 2$.

Ahora bien, el termino $E_2^{*,*}$ de la sucesión espectral asociada a la fibración anterior con coeficientes en R es

$$E_2^{*,*} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} H^s(SL_2(\mathbb{Z}); R[x, y])$$

donde el sistema de coeficientes locales es no trivial. Recordemos que $SL_2(\mathbb{Z})$ tiene la siguiente presentación (ver [31]):

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = \alpha^2 \beta^{-3} = 1 \rangle$$

con

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil probar que la acción de $SL_2(\mathbb{Z})$ en $R[x, y]$ está dada por

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -y & \alpha(y) &= x \\ \beta(x) &= x - y & \beta(y) &= x. \end{aligned}$$

Por otro lado, es bien sabido que la abelianización de $SL_2(\mathbb{Z})$ es \mathbb{Z}_{12} , es decir el kernel de la suprayección natural $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$ es un grupo libre en 2 generadores F_2 (ver [31]). Luego la composición del morfismo restricción con el transfer

$$H^*(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \xrightarrow{res} H^*(F_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{tr} H^*(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z})$$

es mutiplicación por 12. Más aún el siguiente par de resultados aparecen en [28].

Proposición 1.1. *Si $s \geq 2$, entonces $E_2^{s,*} = H^s(SL_2(\mathbb{Z}); R[x, y])$ es aniquilado por 12. En particular si $R = \mathbb{Q}$ ó \mathbb{Z}_n con $(n, 12) = 1$, entonces*

$$E_2^{s,*} = 0$$

para $s \geq 2$.

Demostración. Como $H^s(F_2; R[x, y]) = 0$ para $s \geq 2$, el primer resultado se sigue de la proposición III.10.1 de [7]. Ahora bien, si $R = \mathbb{Q}$ ó \mathbb{Z}_n con $(n, 12) = 1$, tenemos que 12 es invertible y por lo tanto *res* es monomorfismo, lo cual implica la segunda parte. \square

Corolario 1.2. *Si $R = \mathbb{Q}$ ó \mathbb{Z}_p con p primo diferente de 2 ó 3, entonces*

$$H^n(BDiff^+(T); R) \cong E_2^{o,n} \oplus E_2^{1,n-1}.$$

Observemos que en el caso $R = \mathbb{Q}$, $H^*(BDiff^+(T); \mathbb{Q})$ está dado en términos de $H^0(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Q}[x, y]) = \mathbb{Q}[x, y]^{SL_2(\mathbb{Z})} = \mathbb{Q}$ y $H^1(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Q})$. El cálculo de

$H^1(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Q})$ fue llevado a cabo por Morita [28] usando herramientas elementales de álgebra lineal. En el caso $R = \mathbb{Z}_p$, con $p \neq 2, 3$ se debe considerar también los invariantes $H^0(SL_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}_p[x, y]) = \mathbb{Z}_p[x, y]^{SL_2(\mathbb{Z})}$, los cuales resultan ser no triviales en este caso. A continuación citaremos los resultados principales de [28].

Teorema 1.3. *La cohomología racional del espacio clasificante de $\text{Diff}^+(T)$ es:*

$$\overline{H}^n(B\text{Diff}^+(T); \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Q}^{2m-1} & \text{si } n = 24m + 1 \\ \mathbb{Q}^{2m+1} & \text{si } n = 24m + 5, 24m + 9, \\ & 24m + 13, 24m + 17 \\ \mathbb{Q}^{2m+3} & \text{si } n = 24 + 21. \end{cases}$$

Teorema 1.4. *mód 2 y 3 torsión, tenemos que*

$$\overline{H}_n(B\text{Diff}^+(T); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \text{torsión} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \text{grupo libre abeliano de rango} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{indicado en el teorema anterior} & \\ 0 & \text{si } n \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

1.4. Clases características de K -haces.

Denotemos por K a la botella de Klein y recordemos que existe una biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de isomorfismos} \\ \text{de } K\text{-haces sobre } M \end{array} \right\} \longleftrightarrow [M, B\text{Diff}(K)]$$

sin embargo describir cualquiera de los dos conjuntos anteriores es un problema no trivial. Un método alternativo para determinar cuando dos K -haces con el mismo espacio base no son isomorfos es encontrar clases características de K -haces. Por lo tanto debemos describir a $H^*(B\text{Diff}(K); R)$, para esto adoptaremos el método desarrollado por Morita en [28] (ver la sección 1.3). En dicho artículo los puntos más importantes son el hecho de que se conoce el grupo modular del toro, $\Gamma(T) = SL(2, \mathbb{Z})$ y la acción de $SL(2, \mathbb{Z})$ en el anillo de cohomología $H^*(B\text{Diff}_0(T); R) \cong H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \times \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; R) = \mathbb{Z}[x, y]$.

Sabemos que el grupo modular de K es $\Gamma(K) = \text{Diff}(K)/\text{Diff}_0(K) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Recordemos que la botella de Klein K es el cociente de $S^1 \times I$ bajo la relación de equivalencia que identifica $(x, 0)$ con $(\bar{x}, 1)$ donde \bar{x} es el conjugado de x y denotemos por C' a la curva representada por $S^1 \times \frac{1}{2}$ (ver figura 1.1). Sea $f \in \text{Diff}(K)$ el difeomorfismo que refleja $S^1 \times I / \sim$ en C' y $h \in \text{Diff}(K)$ el difeomorfismo que se obtiene al hacer un giro de Dehn a lo largo de C' . Lickorish prueba [20] que las clases de los homeomorfismos f y h generan a $\Gamma(K)$, es decir $\Gamma(K) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle [f], [h] \rangle$ (ver también [17]).

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$\text{Diff}_0(K) \longrightarrow \text{Diff}(K) \longrightarrow \Gamma(K) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 . \quad (1.1)$$

Al tomar espacios clasificantes, obtenemos la fibración

$$B\text{Diff}_0(K) \longrightarrow B\text{Diff}(K) \xrightarrow{\pi} B\Gamma(K) \simeq B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \quad (1.2)$$

cuya cohomología (con coeficientes en un anillo conmutativo con identidad R) se puede estudiar mediante la sucesión espectral de Serre. Más aún, Earle-Eells [11] y

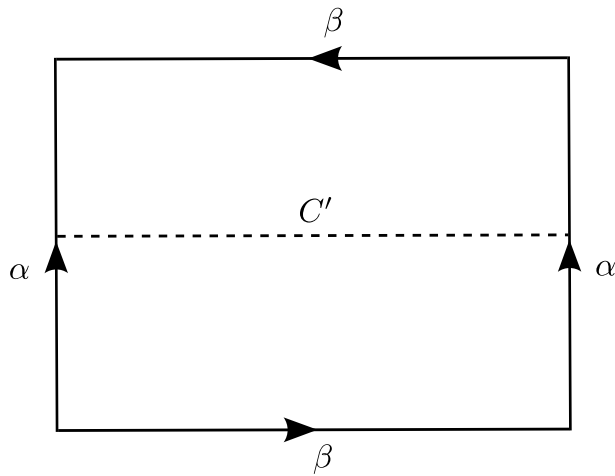


Figura 1.1: Generadores de $\pi_1(\mathbf{K})$.

Gramain [16] probaron que $Diff_0(\mathbf{K}) \simeq S^1$, de donde se sigue que $BDiff_0(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Luego el término $E_2^{*,*}$ de la sucesión espectral está dado por:

$$E_2^{*,*} = H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); \mathcal{H}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; R)),$$

la cohomología de $B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ con coeficientes locales en la cohomología de la fibra $BDiff_0(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Notemos que con coeficientes en \mathbb{Q} no se obtiene mucha información pues al ser $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ finito se tiene

$$H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); \mathbb{Q}) = H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & * = 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El cálculo de la cohomología de $BDiff(\mathbf{K})$, así como su tipo de homotopía serán objeto de estudio de los capítulos siguientes. A saber demostraremos que:

Teorema 1.5. *La cohomología de $BDiff(\mathbf{K})$, con coeficientes en un anillo conmutativo con identidad R , es isomorfa a la cohomología de $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$, es decir*

$$H^*(BDiff(\mathbf{K}); R) \cong H^*(B\mathbb{Z}_2 \times BO(2); R).$$

Capítulo 2

La Cohomología de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$.

En este capítulo estudiamos la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración

$$BSO(2) \longrightarrow B\text{Diff}(\mathbb{K}) \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

que converge a la cohomología entera de $B\text{Diff}(K)$, el espacio clasificante del grupo de difeomorfismos de \mathbb{K} . En la sección uno identificamos el término $E_2^{*,*}$ de la sucesión espectral, a saber

$$E_2^{*,*} = H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}[x]),$$

donde la cohomología de $B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ se considera con coeficientes locales. En la sección dos usamos cohomología de grupos para dar explícitamente la forma del término $E_2^{*,*}$ y en la sección tres se calculan todos los productos cup, obteniendo así la estructura multiplicativa del término $E_2^{*,*}$. En particular, se prueba que $E_2^{*,*}$ está generado por seis clases como álgebra bigraduada. Finalmente, en la sección cuatro usamos esta presentación explícita para probar que no existen diferenciales y por lo tanto $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$.

2.1. La sucesión espectral.

Recordemos que el grupo modular de la botella de Klein es

$$\Gamma(\mathbb{K}) = \text{Diff}(\mathbb{K}) / \text{Diff}_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

y que generadores explícitos fueron dados por Lickorish [20] y Hamstrom [17] (ver sección 1.4). Pasando a espacios clasificantes obtenemos la fibración

$$BDiff_0(\mathbf{K}) \longrightarrow BDiff(\mathbf{K}) \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \quad (2.1)$$

cuya cohomología se puede estudiar mediante la sucesión espectral de Serre. Por otro lado, el grupo $SO(2)$ actúa en \mathbf{K} por rotaciones y por lo tanto puede verse como subgrupo de $Diff_0(\mathbf{K})$. Más aún, Earle-Eells [11] y Gramain [16] demostraron que la inclusión $SO(2) \subset Diff_0(\mathbf{K})$ es una equivalencia homotópica y por lo tanto el espacio $BDiff_0(\mathbf{K})$ es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Entonces, el término $E_2^{*,*}$ de la sucesión espectral asociada a 2.1 es:

$$E_2^{*,*} = H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); \mathcal{H}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})),$$

la cohomología de $B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ con coeficientes locales en la cohomología de la fibra $BDiff_0(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$. Ahora bien,

$$H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); \mathcal{H}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})) \cong H_{eq}^*(E(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}))$$

donde $H_{eq}^*(E(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}))$ denota la cohomología equivariante de la cubierta universal de $B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ con coeficientes en el $\pi_1(B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))$ -módulo $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})$ (ver [33] capítulo VI). Como $B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ es un $K(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, 1)$, entonces

$$H_{eq}^*(E(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2); H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})) \cong H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}))$$

luego

$$\begin{aligned} E_2^{*,*} &= H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})) \\ &= H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}[x]), \end{aligned}$$

donde $|x| = 2$ y la cohomología se considera con coeficientes no triviales. Dado que $\mathbb{Z}[x] = \bigoplus_n \mathbb{Z} \cdot x^n$

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}\langle x^n \rangle) & \text{si } q = 2n \\ 0 & \text{si } q \text{ es impar} \end{cases}$$

donde $\mathbb{Z}\langle x^n \rangle$ es el \mathbb{Z} -módulo libre de rango 1 con base x^n . Para continuar debemos hacer explícita la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}[x]$. Recordemos que \mathbf{K} es el cociente de $S^1 \times S^1$ bajo la relación de equivalencia $(z, 0) \sim (\bar{z}, 1)$. Los generadores usuales de $\Gamma(\mathbf{K})$ son las clases de los difeomorfismos $h, f : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ donde h es el giro de Dehn a lo largo de la curva $S^1 \times \frac{1}{2}$ que denotamos por C' y $f(z, t) = (z, 1 - t)$ es la reflexión con respecto a C' (ver [20]).

Lema 2.1. *La acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle h, f \rangle$ en el anillo $H^*(B\text{Diff}_0(\mathbf{K}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$ está dada por $h \cdot x = x$ y $f \cdot x = -x$.*

Demostración. Sea x_0 el punto base de \mathbf{K} y recordemos que $\pi_1(\mathbf{K}, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1 \rangle$, donde α y β son los lazos que se muestran en la figura 2.1.

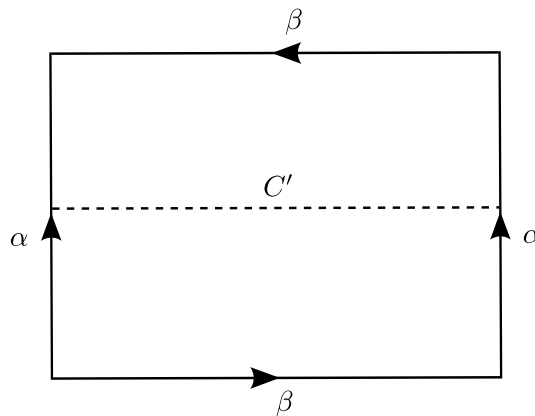


Figura 2.1: Generadores de $\pi_1(K)$.

Consideremos el mapeo $\text{Diff}_0(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ dado por evaluación en x_0 . Gramain prueba en [16] que el morfismo inducido en grupos fundamentales

$$\pi_1(\text{Diff}_0(\mathbf{K}), id) \rightarrow \pi_1(\mathbf{K}, x_0)$$

es inyectivo y es un isomorfismo sobre el centro de $\pi_1(\mathbf{K}, x_0)$:

$$\pi_1(\text{Diff}_0(\mathbf{K}), id) \cong \langle \alpha^2 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Sabemos que la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle h, f \rangle$ en $Diff_0(\mathbf{K})$ está dada por conjugación

$$\begin{aligned} Diff_0(\mathbf{K}) &\longrightarrow Diff_0(\mathbf{K}) \\ \phi &\longmapsto h\phi h^{-1} \\ \phi &\longmapsto f\phi f^{-1} \end{aligned}$$

y su efecto en grupo fundamental se obtiene al evaluar en x_0 . Esto es, si γ es el generador canónico de $\pi_1(Diff_0(\mathbf{K}), id)$ entonces $f \cdot \gamma$ es, abusando de la notación, $f \circ \gamma \circ f^{-1}$ que visto como elemento en $\pi_1(\mathbf{K}, x_0)$ es

$$\begin{aligned} f \circ \gamma \circ f^{-1}(x_0) &= f \circ \gamma(x_0) \text{ pues } f(x_0) = x_0 \\ &= f(\alpha^2) \\ &= \alpha^{-2} \text{ pues } f(\alpha) = \alpha^{-1}, \end{aligned}$$

como α^{-2} equivale a γ^{-1} tenemos que $f \cdot \gamma = \gamma^{-1}$. Mediante un análisis similar se sigue que $h \cdot \gamma = \gamma$. Por lo tanto, la acción de h y f en $Diff_0(\mathbf{K}) \simeq S^1$ está dada por conjugación y la identidad (salvo homotopía), respectivamente.

Usando el haz universal $S^1 \rightarrow ES^1 \rightarrow BS^1$, obtenemos que la acción de h y f en $\pi_2(BS^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ está dada por $h \cdot 1 = 1$ y $f \cdot 1 = -1$. Del Teorema de Hurewicz se sigue que $H_2(BS^1) = \mathbb{Z}$ y la acción en $H_2(BS^1)$ es $h \cdot 1 = 1$ y $f \cdot 1 = -1$. Finalmente del Teorema de Coeficientes Universales para cohomología

$$0 \longrightarrow Ext(H_1(BS^1), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(BS^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow Hom(H_2(BS^1), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

se obtiene que $h \cdot x = x$ y que $f \cdot x = -x$. □

Por lo tanto, la acción de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en x^n es trivial si n es par y está dada por $h \cdot x^n = x^n$ y $f \cdot x^n = -x^n$ si n es impar. En consecuencia, el cálculo de la estructura aditiva del término $E_2^{*,*}$ se reduce a calcular la cohomología de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con coeficientes en \mathbb{Z} -trivial y con coeficientes en $\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(-1)$ donde $\mathbb{Z}(-1)$ denota la representación signo. En la siguiente sección se llevarán acabo estos cálculos y exhibimos generadores explícitos para los grupos de cohomología. Dichos generadores se usan en la secciones posteriores para describir la estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$.

2.2. El término $E_2^{*,*}$.

Para poder describir al término $E_2^{*,*}$ de la sucesión espectral primero debemos calcular la cohomología de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con coeficientes triviales en \mathbb{Z} y con coeficientes torcidos $\tilde{\mathbb{Z}}$, es decir calcular $H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$ y $H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$. Esto se puede hacer usando un complejo doble o bien construyendo una resolución proyectiva explícita para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Usaremos este último procedimiento ya que nos permitirá encontrar generadores explícitos los cuales se usarán en las secciones 2.3 y 2.4 para describir la estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$ y el colapso de la sucesión espectral.

Denotamos por G al grupo \mathbb{Z}_2 , es decir: $G = \mathbb{Z}_2 = \langle t \mid t^2 = 0 \rangle$ y consideramos la resolución proyectiva canónica $F \rightarrow \mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \cdot e_4 \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}G \cdot e_3 \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \cdot e_2 \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}G \cdot e_1 \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \cdot e_0 \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Entonces $F \otimes F \rightarrow \mathbb{Z}$ es una resolución proyectiva de \mathbb{Z} sobre $\mathbb{Z}[G \times G]$. Recordemos que $\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[G \times G]$, donde el isomorfismo está dado por $g \otimes g' \mapsto (g, g')$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} (F \otimes F)_n &= \mathbb{Z}G \cdot e_0 \otimes \mathbb{Z}G \cdot e_n \oplus \mathbb{Z}G \cdot e_1 \otimes \mathbb{Z}G \cdot e_{n-1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}G \cdot e_n \otimes \mathbb{Z}G \cdot e_0 \\ &\cong \mathbb{Z}[G \times G] \cdot e_{0,n} \oplus \mathbb{Z}[G \times G] \cdot e_{1,n-1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[G \times G] \cdot e_{n,0} \end{aligned}$$

donde $\mathbb{Z}G \cdot e_i \otimes \mathbb{Z}G \cdot e_{n-i}$ se identifica con $\mathbb{Z}[G \times G] \cdot e_{i,n-i}$ mediante $e_i \otimes e_{n-i} \mapsto e_{i,n-i}$. Es decir $(F \otimes F)_n$ es el $\mathbb{Z}[G \times G]$ -módulo libre de rango $n+1$ y base $e_{0,n}, e_{1,n-1}, \dots, e_{n,0}$. Las siguientes proposiciones describen los diferenciales de la resolución proyectiva $F \otimes F \rightarrow \mathbb{Z}$.

Proposición 2.2. *En la $\mathbb{Z}[G \times G]$ -base de $(F \otimes F)_{2n+1}$, el diferencial*

$$\partial_{2n+1} : (F \otimes F)_{2n+1} \rightarrow (F \otimes F)_{2n}$$

está dado por

$$\partial_{2n}(e_{i,2n+1-i}) = [(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i} + [(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n-1}$$

si $i = 2m$ con $m = 0, 1, \dots, n$. Para $i = 2m + 1$ con $m = 0, 1, \dots, n$, se tiene:

$$\partial_{2n+1}(e_{i,2n+1-i}) = [(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i} - [(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n-i}.$$

Demostración. En efecto, abusando de la notación

$$\partial_{2n+1}(e_{i,j}) = \partial e_i \otimes e_j + (-1)^{|e_i|} e_i \otimes \partial e_j.$$

Luego, si $i = 2m$ con $m = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \partial_{2n+1}(e_{i,2n+1-i}) &= \partial e_i \otimes e_{2n+1-i} + e_i \otimes \partial e_{2n+1-i} \\ &= (t+1)e_{i-1} \otimes e_{2n+1-i} + e_i \otimes (t-1)e_{2n-i} \\ &= te_{i-1} \otimes e_{2n+1-i} + e_{i-1} \otimes e_{2n+1-i} + e_i \otimes te_{2n-i} - e_i \otimes e_{2n-i} \\ &= (t, 1)e_{i-1,2n+1-i} + (1, 1)e_{i-1,2n+1-i} \\ &\quad + (1, t)e_{i,2n-i} - (1, 1)e_{i,2n-i} \\ &= [(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i} + [(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n-i} \end{aligned}$$

De manera similar si $i = 2m + 1$ con $m = 0, \dots, n$

$$\partial_{2n+1}(e_{i,2n+1-i}) = [(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i} - [(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n-i}.$$

□

Proposición 2.3. En la $\mathbb{Z}[G \times G]$ -base de $(F \otimes F)_{2n}$, el diferencial

$$\partial_{2n} : (F \otimes F)_{2n} \rightarrow (F \otimes F)_{2n-1},$$

está dado por

$$\partial_{2n}(e_{i,2n-i}) = [(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n-i} + [(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n-i-1}$$

si $i = 2m$ con $m = 0, 1, \dots, n$. Para $i = 2m - 1$ con $m = 1, \dots, n$, se tiene:

$$\partial_{2n}(e_{i,2n-i}) = [(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n-i} - [(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n-i-1}.$$

Demostración.

Similar a la proposición anterior. □

Aplicando el funtor $Hom_{\mathbb{Z}[G \times G]}(-, \mathbb{Z})$ a $F \otimes F$ obtenemos

$$\cdots Hom((F \otimes F)_{2n+1}, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta^{2n}} Hom((F \otimes F)_{2n}, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta^{2n-1}} Hom((F \otimes F)_{2n-1}, \mathbb{Z}) \cdots$$

Como cada $f \in Hom_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_n, \mathbb{Z})$ está determinado por los valores que toma en la $\mathbb{Z}[G \times G]$ -base de $(F \otimes F)_n$, tenemos que

$$Hom_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_n, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{k=0}^n (\mathbb{Z})_k \cong \mathbb{Z}^{n+1},$$

donde $(\mathbb{Z})_k$ denota simplemente el k -ésimo sumando \mathbb{Z} , el isomorfismo está dado por $f \mapsto (f(e_{0,n}), \dots, f(e_{n,0}))$. Entonces el complejo de cocadenas anterior se ve como:

$$\cdots \longleftarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \xleftarrow{\delta^{2n}} \mathbb{Z}^{2n+1} \xleftarrow{\delta^{2n-1}} \mathbb{Z}^{2n} \longleftarrow \cdots$$

Proposición 2.4. *El operador cofrontera $\delta^{2n} : \mathbb{Z}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+2}$ está dado por:*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \\ (x_0, \dots, x_{2n}) &\longmapsto (0, -2x_1, 2x_1, -2x_3, 2x_3, \dots, -2x_{2n-1}, 2x_{2n-1}, 0). \end{aligned}$$

Mientras que el operador cofrontera $\delta^{2n+1} : \mathbb{Z}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+3}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{2n+2} &\longrightarrow \mathbb{Z}^{2n+3} \\ (x_0, \dots, x_{2n+1}) &\longmapsto (2x_0, 0, 2x_1 + 2x_2, 0, \dots, 2x_{2n-1} + 2x_{2n}, 0, 2x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Demostración. Primero determinamos a δ^{2n} . Sea $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_{2n}, \mathbb{Z})$. El homomorfismo $\delta^{2n} f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_{2n+1}, \mathbb{Z})$ está determinado por sus valores en la $\mathbb{Z}[G \times G]$ -base de $(F \otimes F)_{2n+1}$. Para $i = 2m$ con $m = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \delta^{2n} f(e_i^{2n+1-i}) &= f(\partial_{2n+1}(e_{i,2n+1-i})) \\ &= f([(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i}) + f([(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n-i}) \\ &= [(t, 1) + (1, 1)]f(e_{i,2n+1-i}) + [(1, t) - (1, 1)]f(e_{i,2n-i}) \\ &= 2f(e_{i-1,2n+1-i}). \end{aligned}$$

En el caso $i = 2m + 1$ con $m = 0, \dots, n$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta^{2n} f(e_{i,2n+1-i}) &= f(\partial_{2n+1}(e_{i,2n+1-i})) \\ &= f([(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i}) - f([(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n-i}) \\ &= [(t, 1) - (1, 1)]f(e_{i,2n+1-i}) - [(1, t) + (1, 1)]f(e_{i,2n-i}) \\ &= -2f(e_{i,2n-i}). \end{aligned}$$

Luego

$$\partial_{2n}(x_0, \dots, x_{2n}) = (0, -2x_1, 2x_1, -2x_3, 2x_3, \dots, -2x_{2n-1}, 2x_{2n-1}, 0).$$

De manera similar, si $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_{2n+1}, \mathbb{Z})$ entonces $\delta^{2n+1} f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_{2n+2}, \mathbb{Z})$ está dado por

$$\begin{aligned} \delta^{2n+1} f(e_{i,2n+2-i}) &= f(\partial_{2n+2}(e_{i,2n+2-i})) \\ &= f([(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n+2-i}) + f([(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n+2-i-1}) \\ &= [(t, 1) + (1, 1)]f(e_{i-1,2n+2-i}) + [(1, t) + (1, 1)]f(e_{i,2n+1-i}) \\ &= 2f(e_{i-1,2n+2-i}) + 2f(e_{i,2n+1-i}) \end{aligned}$$

si $i = 2m$ con $m = 0, \dots, n + 1$. En el caso en que $i = 2m - 1$ con $m = 1, \dots, n + 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\delta^{2n+1}f(e_{i,2n+2-i}) &= f(\partial_{2n+2}(e_{i,2n+2-i})) \\
&= f([(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n+2-i}) - f([(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n+2-i-1}) \\
&= [(t, 1) - (1, 1)]f(e_{i-1,2n+2-i}) - [(1, t) - (1, 1)]f(e_{i,2n+1-i}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego se sigue que

$$\delta^{2n+1}(x_0, \dots, x_{2n+1}) = (2x_0, 0, 2x_1 + 2x_2, 0, \dots, 2x_{2n-1} + 2x_{2n}, 0, 2x_{2n+1})$$

□

Proposición 2.5. *La cohomología de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con coeficientes en \mathbb{Z} trivial es:*

$$H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si * = 0 \\ (\mathbb{Z}_2)^{n+1} & si * = 2n \\ (\mathbb{Z}_2)^n & si * = 2n + 1 \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que

$$H^{2n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = \frac{Ker(\delta^{2n})}{Im(\delta^{2n-1})}.$$

De la definición de δ^{2n} tenemos que $(x_0, \dots, x_{2n}) \in Ker(\delta^{2n})$ si y solo si $x_1 = x_3 = \dots = x_{2n-1} = 0$ y el resto de las variables x_2, \dots, x_{2n} son independientes. Luego

$$Ker(\delta^{2n}) \cong \bigoplus_{k=0}^n (\mathbb{Z})_{2k} \cong \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Por otro lado, $(x_0, \dots, x_{2n}) \in Im(\delta^{2n-1})$ si y solo si existe (y_0, \dots, y_{2n-1}) tal que

$$(x_0, \dots, x_{2n}) = (2y_0, 0, 2(y_1 + y_2), 0, \dots, 2(y_{2n-3} + y_{2n-2}), 0, y_{2n-1})$$

como $y_i + y_{i+1}$ puede tomar cualquier valor en \mathbb{Z} , se sigue que

$$Im(\delta^{2n-1}) \cong \bigoplus_{k=0}^n 2(\mathbb{Z})_{2i}.$$

Por lo tanto

$$H^{2n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}_2)^{n+1}.$$

De manera análoga, recordemos que

$$H^{2n+1}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = \frac{Ker(\delta^{2n+1})}{Im(\delta^{2n})}.$$

De la definición del operador cofrontera δ^{2n+1} tenemos que $(x_0, \dots, x_{2n+1}) \in Ker \delta^{2n+1}$ si y solo si $x_0 = x_{2n+1} = 0$ y $x_2 = -x_1, x_4 = -x_3, \dots, x_{2n} = -x_{2n-1}$ si y solo si $(x_0, \dots, x_{2n+1}) = (0, -y_1, y_1, -y_3, y_3, \dots, -y_{2(n+1)-1}, y_{2(n+1)-1}, 0)$. Luego

$$Ker(\delta^{2n+1}) = \mathbb{Z}^n.$$

Por otro lado, $(x_0, \dots, x_{2n+1}) \in Im(\delta^{2n})$ si y solo si existe (y_0, \dots, y_{2n}) tal que $(x_0, \dots, x_{2n+1}) = (0, -2y_1, 2y_1, -2y_3, 2y_3, \dots, -2y_{2(n+1)-1}, 2y_{2(n+1)-1}, 0)$. Luego

$$Im(\delta^{2n}) \cong (2\mathbb{Z})^n.$$

Por lo tanto

$$H^{2n+1}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}_2)^n.$$

□

Para $0 \leq i \leq n$, denotamos por $\alpha_i^{2n} : (F \otimes F)_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}$ al morfismo de $\mathbb{Z}[G \times G]$ -módulos dado por

$$\alpha_i^{2n}(e_{j, 2n-j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Bajo el isomorfismo $Hom_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_{2n}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2n+1}$ se tiene que:

$$\alpha_i^{2n} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

donde el 1 aparece en el lugar $2i$. Además es claro que $\alpha_i^{2n} \in \text{Ker}(\delta^{2n})$, luego $[\alpha_i^{2n}] \in H^{2n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$ es un generador para el $i + 1$ sumando.

De manera análoga, para $0 \leq i \leq n - 1$, denotamos por $\alpha_i^{2n-1} : (F \otimes F)_{2n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ al morfismo dado por

$$\alpha_i^{2n+1}(e_{j,2n+1-j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2i + 1 \\ -1 & \text{si } j = 2i + 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, bajo la identificación $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_{2n+1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2n+2}$ tenemos:

$$\alpha_i^{2n+1} = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$$

donde el 1 aparece en el lugar $2i + 1$ y el -1 en el lugar $2i + 2$. Se sigue que $\alpha_i^{2n+1} \in \text{Ker}(\delta^{2n+1})$ y que $[\alpha_i^{2n+1}] \in H^{2n+1}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$ es un generador para el $i + 1$ sumando.

Ahora calculamos $H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$, donde recordemos que $\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}(-1)$ y $\mathbb{Z}(-1)$ denota la representación signo. Notemos que

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]}((F \otimes F)_n, \tilde{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}^{n+1} \cong \bigoplus_{k=0}^n (\mathbb{Z})_i$$

donde de nuevo el isomorfismo está dado por $f \rightarrow (f(e_{0,n}), \dots, f(e_{n,0}))$ y $(\mathbb{Z})_k$ es el k -ésimo sumando \mathbb{Z} . El complejo de cocadenas

$$\cdots \text{Hom}((F \otimes F)_{2n+1}, \tilde{\mathbb{Z}}) \xleftarrow{\tilde{\delta}^{2n}} \text{Hom}((F \otimes F)_{2n}, \tilde{\mathbb{Z}}) \xleftarrow{\tilde{\delta}^{2n-1}} \text{Hom}((F \otimes F)_{2n-1}, \tilde{\mathbb{Z}}) \cdots$$

se ve como

$$\cdots \longleftarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \xleftarrow{\tilde{\delta}^{2n}} \mathbb{Z}^{2n+1} \xleftarrow{\tilde{\delta}^{2n-1}} \mathbb{Z}^{2n} \longleftarrow \cdots$$

Proposición 2.6. *El operador cofrontera $\tilde{\delta}^{2n} : \mathbb{Z}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+2}$ está dado por:*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \\ (x_0, \dots, x_{2n}) &\longrightarrow (-2x_0, 0, 2x_1 - 2x_2, 0, \dots, 0, 2x_{2n-1} - 2x_{2n}, 0). \end{aligned}$$

El operador cofrontera $\tilde{\delta}^{2n+1} : \mathbb{Z}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+3}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{2n+2} &\longrightarrow \mathbb{Z}^{2n+3} \\ (x_0, \dots, x_{2n+1}) &\longrightarrow (0, 2x_1, 2x_1, 2x_3, 2x_3, \dots, 2x_{2n+1}, 2x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Demostración. Primero determinamos a $\tilde{\delta}^{2n}$. Sea $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]} \left((F \otimes F)_{2n}, \tilde{\mathbb{Z}} \right)$, el homomorfismo $\tilde{\delta}^{2n} f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]} \left((F \otimes F)_{2n+1}, \tilde{\mathbb{Z}} \right)$ está completamente determinado por sus valores en la $\mathbb{Z}[G \times G]$ -base de $(F \otimes F)_{2n+1}$. Para $i = 2m$ con $m = 0, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^{2n} f(e_{i,2n+1-i}) &= f(\partial_{2n+1} e_{i,2n+1-i}) \\ &= f([(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i}) + f([(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n-i}) \\ &= [(t, 1) + (1, 1)]f(e_{i-1,2n+1-i}) + [(1, t) - (1, 1)]f(e_{i,2n-i}) \\ &= 2f(e_{i-1,2n+1-i}) - 2f(e_{i,2n-i}). \end{aligned}$$

En el caso en que $i = 2m + 1$ con $m = 0, \dots, n$, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^{2n}(e_{i,2n+1-i}) &= f(\partial_{2n+1} e_{i,2n+1-i}) \\ &= f([(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n+1-i}) - f([(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n-i}) \\ &= [(t, 1) - (1, 1)]f(e_{i-1,2n+1-i}) - [(1, t) + (1, 1)]f(e_{i,2n-i}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{\delta}^{2n}(x_0, \dots, x_{2n}) = (-2x_0, 0, 2x_1 - 2x_2, 0, \dots, 0, 2x_{2n-1} - 2x_{2n}, 0).$$

Por otro lado y de manera similar si $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]} \left((F \times F)_{2n+1}, \mathbb{Z} \right)$, entonces

para $i = 2m$ con $m = 0, \dots, n + 1$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^{2n+1} f(e_{i,2n+2-i}) &= f(\partial_{2n+2} e_{i,2n+2-i}) \\ &= f([(t, 1) + (1, 1)]e_{i-1,2n+2-i}) + f([(1, t) + (1, 1)]e_{i,2n+2-i-1}) \\ &= [(t, 1) + (1, 1)]f(e_{i-1,2n+2-i}) + [(1, t) + (1, 1)]f(e_i^{2n+1-i}) \\ &= 2f(e_{i-1}^{2n+2-i}).\end{aligned}$$

Si $i = 2m - 1$ con $m = 1, \dots, n + 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^{2n+1} f(e_{i,2n+2-i}) &= f(\partial_{2n+2} e_{i,2n+2-i}) \\ &= f([(t, 1) - (1, 1)]e_{i-1,2n+2-i}) - f([(1, t) - (1, 1)]e_{i,2n+2-i-1}) \\ &= [(t, 1) - (1, 1)]f(e_{i-1,2n+2-i}) - [(1, t) - (1, 1)]f(e_{i,2n+1-i}) \\ &= 2f(e_i^{2n+1-i})\end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{\delta}^{2n+1}(x_0, \dots, x_{2n+1}) = (0, 2x_1, 2x_1, 2x_3, 2x_3, \dots, 2x_{2n+1}, 2x_{2n+1}).$$

□

Proposición 2.7. *La cohomología de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con coeficientes en $\tilde{\mathbb{Z}}$ es*

$$H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^n & \text{si } * = 2n \\ (\mathbb{Z}_2)^{n+1} & \text{si } * = 2n + 1 \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que

$$H^{2n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \tilde{\mathbb{Z}}) = \frac{Ker \tilde{\delta}^{2n}}{Im \tilde{\delta}^{2n-1}}.$$

De la definición de $\tilde{\delta}^{2n}$ tenemos que $(x_0, \dots, x_{2n}) \in Ker(\tilde{\delta}^{2n})$ si y solo si $x_0 = 0$, $x_1 = x_2, \dots, x_{2n-1} = x_{2n}$ si y solo si $(x_0, \dots, x_{2n}) = (0, y_1, y_1, \dots, y_n, y_n)$ con $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}$. Luego

$$Ker(\tilde{\delta}^{2n}) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Por otro lado $(x_0, \dots, x_{2n}) \in \text{Im}(\tilde{\delta}^{2n-1})$ si y solo si existe (y_0, \dots, y_{2n-1}) tal que $(x_0, \dots, x_{2n}) = (0, 2y_1, 2y_1, 2y_3, 2y_3, \dots, 2y_{2n-1}, 2y_{2n-1})$. Luego

$$\text{Im}(\tilde{\delta}^{2n-1}) = (2\mathbb{Z})^n.$$

Por lo tanto:

$$H^{2n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \cong (\mathbb{Z}_2)^n.$$

De manera similar recordemos que

$$H^{2n+1}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker}(\tilde{\delta}^{2n+1})}{\text{Im}(\tilde{\delta}^{2n})}.$$

De la definición de $\tilde{\delta}^{2n+1}$ tenemos que $(x_0, \dots, x_{2n+1}) \in \text{Ker}(\tilde{\delta}^{2n+1})$ si y solo si $x_1 = x_3 = \dots = x_{2n+1} = 0$ y x_0, x_2, \dots, x_{2n} son variables independientes. Luego

$$\text{Ker}(\tilde{\delta}^{2n+1}) \cong \bigoplus_{k=0}^n (\mathbb{Z})_{2k} \cong \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Por otro lado $(x_0, \dots, x_{2n+1}) \in \text{Im}(\tilde{\delta}^{2n})$ si y solo si existe (y_0, \dots, y_{2n}) tal que $(x_0, \dots, x_{2n+1}) = (-2y_0, 0, 2(y_1 - y_2), 0, \dots, 0, 2(y_{2n-1} - y_{2n}), 0)$. Como $y_k - y_{k+1}$ puede tomar el valor de cualquier entero, se sigue que

$$\text{Im}(\tilde{\delta}^{2n}) \cong \bigoplus_{k=0}^n 2(\mathbb{Z})_{2k} \cong (2\mathbb{Z})^{n+1}$$

Luego tenemos que:

$$H^{2n+1}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \cong (\mathbb{Z}_2)^{n+1}.$$

□

Para $0 \leq i \leq n-1$, denotamos por $\beta_i^{2n} : (F \otimes F)_{2n} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ al morfismo de $\mathbb{Z}[G \times G]$ -módulos dado por

$$\beta_i^{2n}(e_j^{2n-j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2i + 1 \\ 1 & \text{si } j = 2i + 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Bajo la identificación $\text{Hom}_{G \times G} \left((F \otimes F)_{2n}, \tilde{\mathbb{Z}} \right) \cong \mathbb{Z}^{2n+1}$ se tiene que:

$$\beta_i^{2n} = (0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)$$

donde el 1 aparece en la entrada $2i + 1$ y $2i + 2$. Tenemos que $\beta_i^{2n} \in \text{Ker}(\tilde{\delta}^{2n})$, más aún $[\beta_i^{2n}] \in H^{2n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \tilde{\mathbb{Z}})$ es un generador para el $i + 1$ sumando \mathbb{Z}_2 .

De manera análoga, para $0 \leq i \leq n$, denotamos por $\beta_i^{2n+1} : (F \otimes F)_{2n+1} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ al morfismo de $\mathbb{Z}[G \times G]$ -módulos dado por

$$\beta_i^{2n+1}(e_j^{2n+1-j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Bajo la identificación $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G \times G]} \left((F \otimes F)_{2n+1}, \tilde{\mathbb{Z}} \right) \cong \mathbb{Z}^{2n+2}$ tenemos:

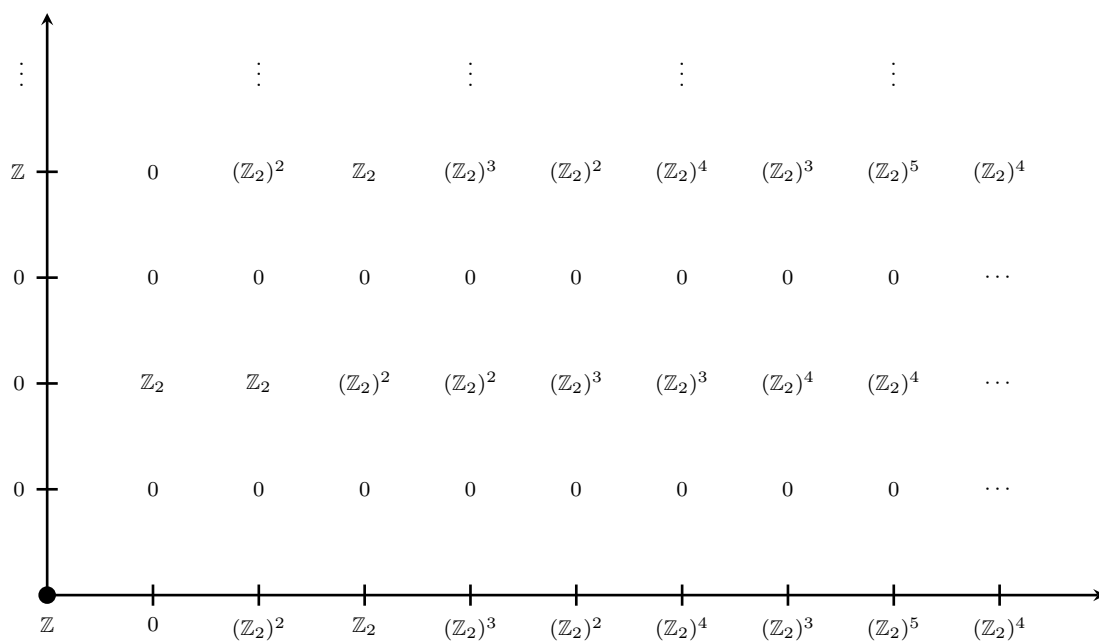
$$\beta_i^{2n+1} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

donde el 1 aparece en el lugar $2i$. Tenemos que $\beta_i^{2n+1} \in \text{Ker}(\tilde{\delta}^{2n+1})$, más aún $[\beta_i^{2n+1}] \in H^{2n+1}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \tilde{\mathbb{Z}})$ es un generador para el $i + 1$ sumando \mathbb{Z}_2 .

Recordemos de la sección 2.1 que el término $E_2^{*,*}$ de la sucesión espectral está dado por:

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) & \text{si } q \equiv 0 \pmod{4} \\ H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) & \text{si } q \equiv 2 \pmod{4} \\ 0 & \text{si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

Luego, como consecuencia de las proposiciones 2.5 y 2.7, el término $E_2^{*,*}$ tiene la siguiente forma:



2.3. La estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$.

En esta sección se describe la estructura multiplicativa del término $E_2^{*,*}$ con el objetivo de facilitar el cálculo de el término $E_\infty^{*,*}$. Para comenzar, de la solución afirmativa del problema de realización de Nielsen para superficies no orientadas (ver [19]), sabemos que la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow \text{Diff}_0(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{K}) \xrightarrow{s} \Gamma(\mathbb{K}) \longrightarrow 1$$

se escinde y por lo tanto la fibración de espacios clasificantes

$$B\text{Diff}_0(\mathbb{K}) \longrightarrow B\text{Diff}(\mathbb{K}) \xrightarrow{\pi} B\Gamma(\mathbb{K}),$$

admite una sección. De aquí se sigue que $\pi^* : H^*(B\Gamma(\mathbb{K}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z})$ es inyectivo.

Proposición 2.8. *Para todo $p \geq 0$ se tiene que $E_\infty^{p,0} = E_2^{p,0}$.*

Demostración. En efecto. Recordemos, ver [24], que la composición

$$H^p(B\Gamma(\mathbb{K}); \mathbb{Z}) = E_2^{p,0} \rightarrow E_3^{p,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_\infty^{p,0} = F^p H^p \subset H^p(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z})$$

es el homomorfismo $\pi^* : (B\Gamma(\mathbb{K}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z})$. El resultado se sigue de que π^* es inyectivo. \square

Por otro lado (ver [18] págs. 306-307), $H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$ es el anillo de polinomios sobre los enteros en tres clases λ, μ, ν de grado 2, 2 y 3, respectivamente, sujetas a las relaciones

$$2\lambda = 2\mu = 2\nu = 0, \text{ y a } \nu^2 + \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 = 0,$$

por lo que conocemos parte de la estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$. El siguiente paso es describir por completo la estructura multiplicativa de $E_2^{*,*}$ con el objetivo

de obtener más información sobre los diferenciales d_2 . Para esto debemos entender los productos cup:

$$H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \otimes H^q(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

$$H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \otimes H^q(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

$$H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \otimes H^q(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$$

Denotamos por \mathbb{G} a $G \times G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y por \mathbb{F} a $F \otimes F$ (donde $F \rightarrow \mathbb{Z}$ es la resolución proyectiva canónica de \mathbb{Z}), el producto cup \cup (ver [7]) se define como la composición

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathbb{G}; M) \otimes H^q(\mathbb{G}; N) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}(\mathbb{G} \times \mathbb{G}; M \otimes N) \\ & \searrow \cup & \downarrow d^* \\ & & H^{p+q}(\mathbb{G}; M \otimes N) \end{array}$$

donde \times es el producto cruz y $d : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ es el morfismo diagonal. A nivel de cocadenas, si $\Delta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ es una aproximación diagonal, entonces $\mu \cup \nu = (\mu \times \nu) \circ \Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{G}}(\mathbb{F}, M \otimes N)$ donde $\mu \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{G}}(\mathbb{F}, M)$ y $\nu \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{G}}(\mathbb{F}, N)$.

Antes de continuar recordemos que $\mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_i \otimes \mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_j \cong \mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot (e_i \otimes e_j) \cong \mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_{i,j}$ y bajo este isomorfismo $(t^k, t^l)e_{i,j} = (t^k, t^l)e_i \otimes e_j = t^k e_i \otimes t^l e_j$. De manera similar $\mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_{i,j} \otimes \mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_{m,n} \cong \mathbb{Z}(\mathbb{G} \times \mathbb{G}) \cdot (e_{i,j} \otimes e_{m,n})$, y bajo este isomorfismo $(t^k, t^l, t^r, t^s)(e_{i,j} \otimes e_{m,n}) = (t^k, t^l)e_{i,j} \otimes (t^r, t^s)e_{m,n}$. Notemos que $(\mathbb{F} \otimes \mathbb{F})_n = (\mathbb{F}_0 \otimes \mathbb{F}_n) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_0)$ donde

$$\mathbb{F}_i \otimes \mathbb{F}_j \cong \bigoplus_{k=0, l=0}^{k=i, l=j} \mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_{k, i-k} \otimes \mathbb{Z}\mathbb{G} \cdot e_{l, j-l} \cong \bigoplus_{k=0, l=0}^{k=i, l=j} \mathbb{Z}(\mathbb{G} \times \mathbb{G}) \cdot (e_{k, i-k} \otimes e_{l, j-l}).$$

Debemos encontrar una aproximación diagonal

$$\Delta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}.$$

Consideremos la aproximación diagonal usual para \mathbb{Z}_2 (ver [1]) dada por:

$$\begin{aligned}\lambda : F &\longrightarrow F \otimes F \\ e_i &\longmapsto \sum_{j=0}^i e_j \otimes t^j e_{i-j},\end{aligned}$$

y el “switch-map” τ :

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{F} \otimes \mathbb{F} = F \otimes F \otimes F \otimes F &\longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F} = F \otimes F \otimes F \otimes F \\ a \otimes b \otimes c \otimes d &\longmapsto (-1)^{|b||c|} a \otimes c \otimes b \otimes d.\end{aligned}$$

Lema 2.9. *El mapeo τ conmuta con ∂ , es decir*

$$\tau \circ \partial = \partial \circ \tau.$$

Demostración. Notemos que

$$\tau((t^k, t^l, t^m, t^n)e_{i,j} \otimes e_{p,q}) = (t^k, t^m, t^l, t^n)\tau(e_{i,j} \otimes e_{p,q})$$

con $(t^k, t^l, t^m, t^n) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$. Entonces basta verificar que en los elementos de las bases de $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ se cumple que $\tau \circ \partial = \partial \circ \tau$. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\tau \circ \partial(e_{i,j} \otimes e_{p,q}) &= \tau(\partial e_{i,j} \otimes e_{p,q} + (-1)^{i+j} e_{i,j} \otimes \partial e_{p,q}) \\ &= \tau((\partial e_i \otimes e_j + (-1)^i e_i \otimes \partial e_j) \otimes e_{p,q}) \\ &\quad + \tau((-1)^{i+j} e_{i,j} \otimes (\partial e_p \otimes e_q + (-1)^p e_p \otimes \partial e_q)) \\ &= \tau(\partial e_i \otimes e_j \otimes e_{p,q} + (-1)^i e_i \otimes \partial e_j \otimes e_{p,q}) \\ &\quad + \tau((-1)^{i+j} e_{i,j} \otimes \partial e_p \otimes e_q + (-1)^{i+j+p} e_{i,j} \otimes e_p \otimes \partial e_q) \\ &= (-1)^{jp} \partial e_i \otimes e_p \otimes e_j \otimes e_q + (-1)^{i+jp-p} e_i \otimes e_p \otimes \partial e_j \otimes e_q \\ &\quad + (-1)^{i+jp} e_i \otimes \partial e_p \otimes e_j \otimes e_q + (-1)^{i+j+p+jp} e_i \otimes e_p \otimes e_j \otimes \partial e_q.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\partial \circ \tau(e_{i,j} \otimes e_{p,q}) &= \partial((-1)^{jp} e_{i,p} \otimes e_{j,q}) \\ &= (-1)^{jp} (\partial e_i \otimes e_p + (-1)^i e_i \otimes \partial e_p) \otimes e_{j,q} \\ &\quad + (-1)^{jp} (-1)^{i+p} e_{i,p} \otimes (\partial e_j \otimes e_q + (-1)^j e_j \otimes \partial e_q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{jp} \partial e_i \otimes e_p \otimes e_j \otimes e_q + (-1)^{jp+i} e_i \otimes \partial e_p \otimes e_j \otimes e_q \\
&\quad + (-1)^{jp+i+p} e_i \otimes e_p \otimes \partial e_j \otimes e_q + (-1)^{jp+i+p+j} e_i \otimes e_p \otimes e_j \otimes \partial e_q
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau \circ \partial = \partial \circ \tau$. □

Ahora consideremos la composición $\Delta = \tau \circ (\lambda \otimes \lambda)$.

Proposición 2.10. *La composición*

$$\Delta = \tau \circ (\lambda \otimes \lambda) : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$$

es \mathbb{G} -equivariante con respecto al morfismo diagonal d .

Demostración. Debemos demostrar que:

$$\tau \circ (\lambda \otimes \lambda) ((t^k, t^l) e_{i,j}) = d(t^k, t^l) \tau \circ (\lambda \otimes \lambda) (e_{i,j}).$$

Por un lado

$$\begin{aligned}
\tau \circ (\lambda \otimes \lambda) ((t^k, t^l) e_{i,j}) &= \tau \circ (\lambda \otimes \lambda) (t^k e_i \otimes t^l e_j) \\
&= \tau (\lambda(t^k e_i) \otimes \lambda(t^l e_j)) \\
&= \tau ((t^k, t^k) \lambda(e_i) \otimes (t^l, t^l) \lambda(e_j)) \\
&= \tau \left(\left((t^k, t^k) \sum_{r=0}^i e_r \otimes t^r e_{i-r} \right) \otimes \left((t^l, t^l) \sum_{s=0}^j e_s \otimes t^s e_{j-s} \right) \right) \\
&= \tau \left(\left(\sum_{r=0}^i t^k e_r \otimes t^{r+k} e_{i-r} \right) \otimes \left(\sum_{s=0}^j t^l e_s \otimes t^{s+l} e_{j-s} \right) \right) \\
&= \sum_{r,s=0}^{r=i, s=j} (-1)^{(i-r)s} t^k e_r \otimes t^l e_s \otimes t^{r+k} e_{i-r} \otimes t^{s+l} e_{j-s}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$d(t^k, t^l) \tau \circ (\lambda \otimes \lambda) (e_{i,j}) = (t^k, t^l, t^k, t^l) \tau (\lambda(e_i) \otimes \lambda(e_j))$$

$$\begin{aligned}
&= (t^k, t^l, t^k, t^l) \tau \left(\left(\sum_{r=0}^i e_r \otimes t^r e_{i-r} \right) \otimes \left(\sum_{s=0}^j e_s \otimes t^s e_{j-s} \right) \right) \\
&= (t^k, t^l, t^k, t^l) \sum_{r=0, s=0}^{r=i, s=j} (-1)^{(i-r)s} e_r \otimes e_s \otimes t^r e_{i-r} \otimes t^s e_{j-s} \\
&= \sum_{r=0, s=0}^{r=i, s=j} (-1)^{(i-r)s} t^k e_r \otimes t^l e_s \otimes t^{r+k} e_{i-r} \otimes t^{s+l} e_{j-s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto Δ es un \mathbb{G} -mapeo con respecto a d . □

Proposición 2.11. *El morfismo $\Delta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ es una aproximación diagonal.*

Demostración. Por la proposición anterior, resta probar que Δ preserva la aumentación y que $\Delta \partial = \partial \Delta$. Como Δ es un \mathbb{G} -mapeo y

$$\Delta(e_{0,0}) = \tau(\lambda(e_0) \otimes \lambda(e_0)) = \tau(e_{0,0} \otimes e_{0,0}) = e_{0,0} \otimes e_{0,0}$$

entonces

$$\epsilon(e_{0,0}) = 1 = \epsilon'(e_{0,0} \otimes e_{0,0}) = \epsilon'(\Delta(e_{0,0}))$$

donde $\epsilon : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\epsilon' : \mathbb{F} \otimes \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ son las aumentaciones. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\Delta \circ \partial(e_i \otimes e_j) &= (\partial e_i \otimes e_j + (-1)^i e_i \otimes \partial e_j) \\
&= \tau(\lambda(\partial e_i) \otimes \lambda(e_j) + (-1)^i \lambda(e_i) \otimes \lambda(\partial e_j)) \\
&= \tau(\partial \lambda(e_i) \otimes \lambda(e_j) + (-1)^i \lambda(e_i) \otimes \partial \lambda(e_j)) \\
&= \tau \circ \lambda(\lambda(e_i) \otimes \lambda(e_j)) \\
&= \partial \circ \tau(\lambda(e_i) \otimes \lambda(e_j)) \\
&= \partial \circ \Delta(e_i \otimes e_j).
\end{aligned}$$

Como Δ es un \mathbb{G} -mapeo y ∂ es un \mathbb{G} -mapeo o bien un $(\mathbb{G} \times \mathbb{G})$ -mapeo según corresponda, se sigue que ∂ y Δ conmutan. Luego Δ es una aproximación diagonal. □

Usando la aproximación diagonal $\Delta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ y las bases que se introdujeron en la sección 2.2, procedemos a calcular los productos cup involucrados. Notemos que como $\mathbb{Z}\mathbb{G}$ -módulos $\mathbb{Z} \otimes \tilde{\mathbb{Z}} = \tilde{\mathbb{Z}}$ y que $\tilde{\mathbb{Z}} \otimes \tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Proposición 2.12.

1. A nivel de cociclos, el producto cup

$$H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

está dado por:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{2n} \cup \alpha_j^{2m} &= \alpha_{i+j}^{2(n+m)} \\ \alpha_i^{2n} \cup \alpha_j^{2m-1} &= \alpha_{i+j}^{2(n+m)-1} \\ \alpha_i^{2n-1} \cup \alpha_j^{2m-1} &= -\alpha_{i+j+1}^{2(n+m)-2} - \alpha_{i+j+2}^{2(n+m)-2} \end{aligned}$$

2. A nivel de cociclos, el producto cup

$$H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \otimes H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup} H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

está dado por:

$$\begin{aligned} \beta_i^{2n} \cup \beta_j^{2m} &= \alpha_{i+j+1}^{2(n+m)} + \alpha_{i+j+2}^{2(m+n)} \\ \beta_i^{2n} \cup \beta_j^{2m-1} &= -\alpha_{i+j}^{2(n+m)-1} \\ \beta_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m-1} &= \alpha_{i+j}^{2(n+m)-2} \end{aligned}$$

3. A nivel de cociclos, el producto cup

$$H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup} H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$$

está dado por:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{2n} \cup \beta_j^{2m} &= \beta_{i+j}^{2(n+m)} \\ \alpha_i^{2n} \cup \beta_j^{2m-1} &= \beta_{i+j}^{2(n+m)-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} &= \beta_{i+j+1}^{2(n+m)-1} + \beta_{i+j+2}^{2(m+n)-1} \\ \alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m-1} &= -\beta_{i+j}^{2(n+m)-2}\end{aligned}$$

Demostración. Demostramos el caso

$$\alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} = \beta_{i+j+1}^{2(n+m)-1} + \beta_{i+j+2}^{2(m+n)-1}.$$

Debemos calcular

$$\alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} (e_{l,2m+2n-1-l})$$

con $0 \leq l \leq 2m + 2n - 1$. Por un lado

$$\begin{aligned}\alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} (e_{l,2m+2n-1-l}) &= \alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} (\Delta (e_{l,2m+2n-1-l})) \\ &= \alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} (\tau (\lambda(e_l) \otimes \lambda(e_{2m+2n-i-l}))).\end{aligned}$$

Notemos que $\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} (e_{x_1,x_2} \otimes e_{x_3,x_4}) = 0$ excepto en los casos

- $e_{2i+1,2n-1-(2i+1)} \otimes e_{2j+1,2m-(2j+1)}$,
- $e_{2i+1,2n-1-(2i+1)} \otimes e_{2j+2,2m-(2j+2)}$,
- $e_{2i+2,2n-1-(2i+2)} \otimes e_{2j+1,2m-(2j+1)}$,
- $e_{2i+2,2n-1-(2i+2)} \otimes e_{2j+2,2m-(2j+2)}$.

Por otro lado observamos que módulo multiplicación por algún elemento de $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ o un entero, $e_{x_1,x_2} \otimes e_{x_3,x_4}$ es un sumando de $\Delta (e_{l,k}) \iff l = x_1 + x_3$, y $k = x_2 + x_4$. Por lo tanto los elementos donde $\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m}$ es no cero son sumandos de

- $\Delta (e_{(2i+1)+(2j+1),2m+2n-1-(2i+1)-(2j+1)})$,
- $\Delta (e_{(2i+1)+(2j+2),2m+2n-1-(2i+1)-(2j+2)})$,
- $\Delta (e_{(2i+2)+(2j+2),2m+2n-1-(2i+2)-(2j+2)})$.

Entonces debemos considerar tres elementos de la base de $(\mathbb{F} \otimes \mathbb{F})_{2m+2n-1}$. Al evaluar en estos tres elementos se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} \left(e_{(2i+1)+(2j+1), 2m+2n-1-(2i+1)-(2j+1)} \right) = \\
& = \left(\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} \right) \circ \Delta \left(e_{(2i+1)+(2j+1), 2m+2n-1-(2i+1)-(2j+1)} \right) \\
& = \left(\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} \right) \circ \tau \left[\left(\sum_{r=0}^{(2i+1)+(2j+1)} (1, t^r) e_{r, (2i+1+2j+1-r)} \right) \otimes \right. \\
& \quad \left. \left(\sum_{s=0}^{2m+2n-1-(2i+1)-(2j+1)} (1, t^s) e_{s, (2m+2n-1-2i-1-2j-1-s)} \right) \right] \\
& = \left(\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} \right) \left((-1)^{(2j+1)(2n-1-(2i+1))} e_{2i+1, 2n-1-(2i+1)} \otimes (t, 1) e_{2j+1, 2m-(2j+1)} \right) \\
& = (-1)^{2m(2n-1)} 1 \otimes 1 \\
& = 1
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
& \alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} \left(e_{(2i+1)+(2j+2), 2m+2n-1-(2i+1)-(2j+2)} \right) = \\
& = \left(\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} \right) \left((-1)^{(2j+2)(2n-1-2i-1)} e_{2i+1, 2n-1-(2i+1)} \otimes (t, 1) e_{2j+2, 2m-(2j+2)} \right) \\
& \quad + \left(\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} \right) \left((-1)^{(2j+1)(2n-1-2i-2)} e_{2i+2, 2n-1-(2i+2)} \otimes (1, t) e_{2j+1, 2m-(2j+2)} \right) \\
& = (-1)^{2m(2n-1)} 1 \otimes 1 - (-1)^{2m(2n-1)} (-1) \otimes (-1) \\
& = 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} \left(e_{(2i+2)+(2j+2), 2m+2n-1-(2i+2)-(2j+2)} \right) = \\
& = \left(\alpha_i^{2n-1} \times \beta_j^{2m} \right) \left((-1)^{(2j+2)(2n-1-2i-2)} e_{2i+2, 2n-1-(2i+2)} \otimes (1, t) e_{2j+2, 2m-(2j+2)} \right) \\
& = (-1)^{2m(2n-1)} (-1) \otimes (-1) \\
& = 1
\end{aligned}$$

Luego se sigue que $\alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m}$ es tal que

$$e_{2(i+j+1), 2m+2n-1-(2(i+j+1))} \mapsto 1$$

$$e_{2(i+j+2), 2m+2n-1-(2(i+j+2))} \mapsto 1$$

y el resto de elementos de la base son mapeados a cero. Por lo tanto

$$\alpha_i^{2n-1} \cup \beta_j^{2m} = \beta_{i+j+1}^{2m+2n-1} + \beta_{i+j+2}^{2m+2n-1}.$$

El resto de los casos en cada inciso se demuestra de manera similar. \square

Notación:

- Para $q \equiv 0 \pmod{4}$ y p fijos, denotemos por $\alpha_i^{p,q} \in E_2^{p,q}$ a la clase de cohomología que corresponde al generador $[\alpha_i^p] \in H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$. Aquí i corre de 0 a n si $p = 2n$ o bien de 0 a $n - 1$ si $p = 2n + 1$.
- Similarmente, para $q \equiv 2 \pmod{4}$ y p fijos, denotemos por $\beta_i^{p,q} \in E_2^{p,q}$ a la clase de cohomología que corresponde al generador $[\beta_i^p] \in H^p(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$. Donde i corre de 0 a $n - 1$ si $p = 2n$ o bien de 0 a n si $p = 2n + 1$.

La estructura multiplicativa del término $E_2^{*,*}$ se sigue de la proposición anterior y está dada por:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{2n,q} \cup \alpha_j^{2m,q'} &= \alpha_{i+j}^{2(n+m),q+q'} \\ \alpha_i^{2n,q} \cup \alpha_j^{2m-1,q'} &= \alpha_{i+j}^{2(n+m)-1,q+q'} \\ \alpha_i^{2n-1,q} \cup \alpha_j^{2m-1,q'} &= -\alpha_{i+j+1}^{2(n+m)-2,q+q'} - \alpha_{i+j+2}^{2(n+m)-2,q+q'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_i^{2n,q} \cup [\beta_j^{2m,q'}] &= \alpha_{i+j+1}^{2(n+m),q+q'} + \alpha_{i+j+2}^{2(n+m),q+q'} \\ \beta_i^{2n,q} \cup \beta_j^{2m-1,q'} &= -\alpha_{i+j}^{2(n+m)-1,q+q'} \\ \beta_i^{2n-1,q} \cup \beta_j^{2m-1,q'} &= \alpha_{i+j}^{2(n+m)-2,q+q'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_i^{2n,q} \cup \beta_j^{2m,q'} &= \beta_{i+j}^{2(n+m),q+q'} \\
\alpha_i^{2n,q} \cup \beta_j^{2m-1,q'} &= \beta_{i+j}^{2(n+m)-1,q+q'} \\
\alpha_i^{2n-1,q} \cup \beta_j^{2m,q'} &= \beta_{i+j+1}^{2(n+m)-1,q+q'} + \beta_{i+j+2}^{2(m+n)-1,q+q'} \\
\alpha_i^{2n-1,q} \cup \beta_j^{2m-1,q'} &= -\beta_{i+j}^{2(n+m)-2,q+q'}
\end{aligned}$$

Más aún, no es difícil demostrar la siguiente proposición

Proposición 2.13. *Las siguientes clases generan multiplicativamente al término $E_2^{*,*}$:*

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{2,0}, \alpha_1^{2,0} &\in E_2^{2,0} \\
\alpha_0^{3,0} &\in E_2^{3,0} \\
\beta_0^{1,2} &\in E_2^{1,2} \\
\beta_0^{2,2} &\in E_2^{2,2} \\
\alpha_0^{0,4} &\in E_2^{0,4}.
\end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de las tablas de multiplicar anteriores. □

2.4. El colapso de la sucesión espectral.

En esta sección demostramos que la sucesión espectral de Serre se colapsa. Notemos que $E_2^{*,*} = E_3^{*,*}$ y recordemos que el término $E_2^{*,*}$ está generado multiplicativamente por las clases $\alpha_0^{2,0}, \alpha_1^{2,0}, \alpha_0^{3,0}, \beta_0^{1,2}, \beta_0^{2,2}, \alpha_0^{0,4}$. Por lo tanto, para determinar $d_3 : E_3^{*,*} \rightarrow E_3^{*,*}$ es suficiente conocer su efecto en los generadores. Es claro que $d_r(\alpha_0^{2,0}) = d_r(\alpha_1^{2,0}) = d_r(\alpha_0^{3,0}) = 0$ para todo $r \geq 2$. Más aún en la sección 3.1 mostramos que la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \text{Diff}_0(\mathbf{K}) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \quad (2.2)$$

se escinde y por lo tanto, la fibrición

$$\text{BDiff}_0(\mathbf{K}) \longrightarrow \text{BDiff}(\mathbf{K}) \xrightarrow{\pi} \text{B}\Gamma(\mathbf{K}). \quad (2.3)$$

\curvearrowright
 s

posee una sección. Esto implica que $d_3(\beta_0^{1,2}) = d_3(\beta_0^{2,2}) = 0$. Luego, resta calcular $d_3(\alpha_0^{4,0})$.

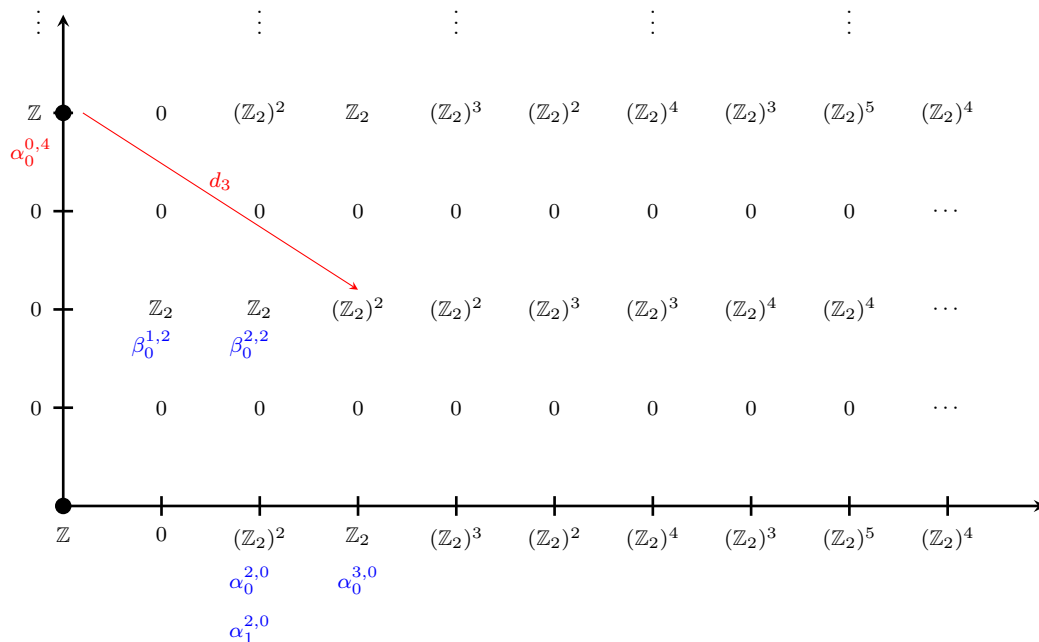


Figura 2.2: Página $E_2^{*,*}$ asociada a la fibrición 2.3.

Notemos que la inclusión $SO(2) \subset \text{Diff}_0(\mathbf{K})$ descrita en la sección 2.1 se extiende

a una inclusión de $O(2)$ en $Diff(\mathbf{K})$, la cual manda una reflexión fija $r \in O(2)$ en la involución f . Luego tenemos el siguiente morfismo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccc} Diff_0(\mathbf{K}) & \longrightarrow & Diff(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow i_2 \\ SO(2) & \longrightarrow & O(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

donde $i_2 : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es la inclusión en el segundo factor. Al pasar a espacios clasificantes tenemos el mapeo de fibraciones:

$$\begin{array}{ccc} BS^1 & \xrightarrow{\simeq} & BDiff_0(\mathbf{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO(2) & \longrightarrow & BDiff(\mathbf{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{Bi_2} & B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

el cual induce un mapeo entre sucesiones espectrales. La sucesión espectral asociada a la fibración de la izquierda es más simple de describir. La página \overline{E}_2 está dada por:

$$\begin{aligned} E_2^{*,*} &= H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathcal{H}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z})) \\ &= H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}[x]) \end{aligned}$$

donde $|x| = 2$ y la acción de $\mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$ en x está dada por $r \cdot x = -x$. Recordemos que

$$H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{si } * \text{ es impar} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } * \text{ es par} \end{cases}$$

Usando la resolución F , denotamos por

$$\begin{array}{ccc} \overline{\alpha}_0^{2n} : F_{2n} = \mathbb{Z}G \cdot e_{2n} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & e_{2n} \longmapsto 1 \end{array}$$

al cociclo que genera a $H^{2n}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$. Similarmente

$$H^*(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } * \text{ es impar} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y denotamos por

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_0^{2n-1} : F_{2n-1} = \mathbb{Z}G \cdot e_{2n-1} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ e_{2n-1} &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

al cociclo que genera a $H^{2n-1}(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$. La figura 2.3 muestra la página $E_2^{*,*}$ asociada a la fibración

$$BS^1 \longrightarrow BO(2) \longrightarrow B\mathbb{Z}_2 \tag{2.4}$$

Usando la aproximación diagonal $\lambda : F \rightarrow F \otimes F$ se puede demostrar fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 2.14.

1. A nivel de cociclos el producto cup

$$H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

está dado por $\bar{\alpha}_0^{2n} \cup \bar{\alpha}_0^{2m} = \bar{\alpha}_0^{2n+2m}$.

2. A nivel de cociclos el producto \cup

$$H^*(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \otimes H^*(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup} H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

está dado por $\bar{\beta}_0^{2n-1} \cup \bar{\beta}_0^{2m-1} = \bar{\alpha}_0^{2n+2m-2}$.

3. A nivel de cociclos el producto \cup

$$H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup} H^*(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$$

está dado por $\bar{\alpha}_0^{2n} \cup \bar{\beta}_0^{2m-1} = \bar{\beta}_0^{2(n+m)-1}$.

Notación: Para $q \equiv 0 \pmod{4}$ sea $\bar{\alpha}_0^{2n,q} \in E_2^{2n,q}$ la clase en cohomología que corresponde a la clase $[\bar{\alpha}_0^{2n}] \in H^{2n}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$. Similarmente para $q \equiv 2 \pmod{4}$ sea $\bar{\beta}_0^{2n-1,q} \in E_2^{2n-1,q}$ la clase en cohomología que corresponde a la clase $[\bar{\beta}_0^{2n-1}] \in H^{2n-1}(\mathbb{Z}_2; \tilde{\mathbb{Z}})$.

Proposición 2.15. *La página $E_2^{*,*}$ asociada a la fibración 2.4 está generada multiplicativamente por:*

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0^{2,0} &\in E_2^{2,0} \\ \bar{\beta}_0^{1,2} &\in E_2^{1,2} \\ \bar{\alpha}_0^{0,4} &\in E_2^{0,4} \end{aligned}$$

Demostración. Es consecuencia de la proposición 2.14. □

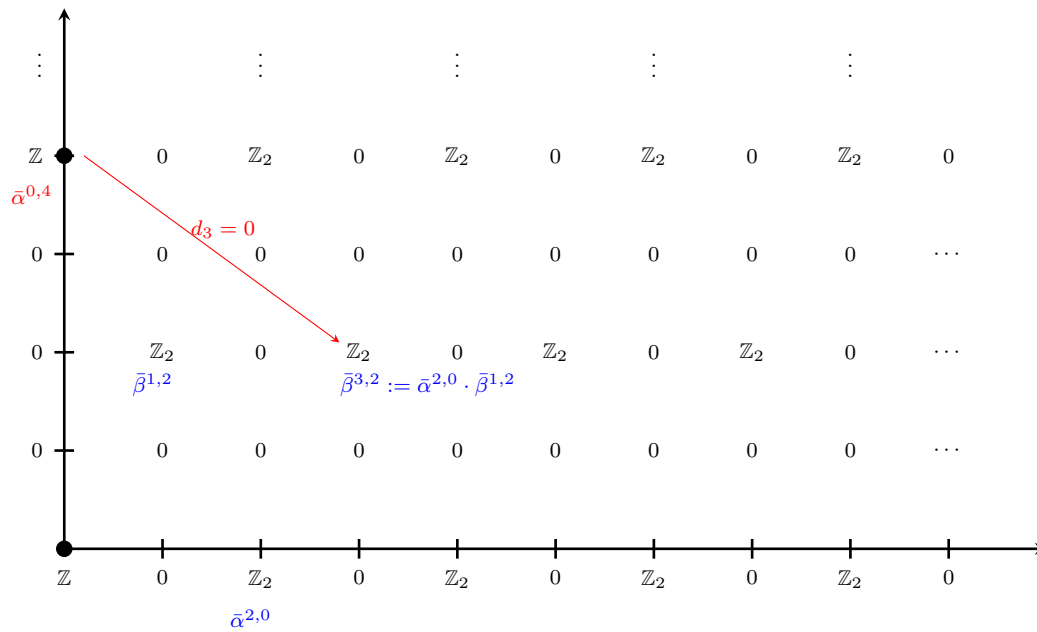


Figura 2.3: Página $E_2^{*,*}$ asociada a la fibración 2.4

Consideramos el mapeo

$$\begin{aligned} \gamma : F &\longrightarrow F \otimes F \\ e_n &\longmapsto e_0 \otimes e_n \end{aligned}$$

el cual es un mapeo de cadenas compatible con i_2 , es decir $\gamma(t-) = i_2(t)\gamma(-)$.

Proposición 2.16. *Los morfismo inducidos por i_2 en cohomología:*

$$i_2^* : H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z})$$

e

$$i_2^* : H^*(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \overline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^*(\mathbb{Z}_2; \overline{\mathbb{Z}})$$

están dados por

$$i_2^*([\alpha_i^{2n}]) = \begin{cases} [\overline{\alpha}_0^{2n}] & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

e

$$i_2^*([\beta_i^{2n-1}]) = \begin{cases} [\overline{\beta}_0^{2n-1}] & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

respectivamente.

Demostración. Se sigue de la definición de morfismo inducido usando γ y la definición de los cociclos correspondientes. \square

Corolario 2.17. *El morfismo inducido en fibraciones por $i_2 : \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, induce un morfismo entre sucesiones espectrales que denotamos por i_2^**

$$i_2^* : E_2^{*,*} \rightarrow E_2^{*,*}$$

y que a nivel de generadores multiplicativos está dado por

$$\begin{aligned} \alpha_0^{2,0} &\longmapsto \overline{\alpha}_0^{2,0} \\ \alpha_1^{2,0} &\longmapsto 0 \\ \alpha_0^{3,0} &\longmapsto 0 \\ \beta_0^{1,2} &\longmapsto \overline{\beta}_0^{1,2} \\ \beta_0^{2,2} &\longmapsto 0 \\ \alpha_0^{0,4} &\longmapsto \overline{\alpha}_0^{0,4} \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de la proposición anterior. \square

Ahora bien, es un resultado clásico que la cohomología entera de $BO(2)$ (ver [6] y [14]) es:

$$H^*(BO(2); \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[v_2, v_3, p_4]}{\langle 2v_2, 2v_3, v_2p_4 + v_3^2 \rangle}$$

donde los subíndices indican el grado de cada generador. Como la fibración 2.4 se escinde $d_r(\bar{\alpha}_0^{2,0}) = d_r(\bar{\beta}_0^{1,2}) = 0$ para todo $r \geq 2$. Por otro lado sabemos que

$$H^5(BO(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$$

y de la sucesión espectral tenemos que

$$\bar{E}_\infty^{3,2} = H^5(BO(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2,$$

luego $\bar{E}_4^{3,2} = \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto

$$d_3 : \bar{E}_3^{0,4} \longrightarrow \bar{E}_3^{3,2}$$

es cero y en particular $d_3(\bar{\alpha}_0^{0,4}) = 0$. Por lo tanto $d_r(\bar{\alpha}_0^{0,4}) = 0$ para todo $r \geq 2$.

Proposición 2.18. *En la sucesión espectral asociada a la fibración*

$$BDiff_0(\mathbf{K}) \longrightarrow BDiff(\mathbf{K}) \longrightarrow B\Gamma(\mathbf{K})$$

para todo $r \geq 2$

$$d_r(\alpha_0^{0,4}) = 0.$$

Demostración. Notemos que

$$\beta_0^{1,2} \cup \beta_0^{2,2} = \alpha_0^{3,4} = \alpha_0^{3,0} \cup \alpha_0^{0,4}.$$

Como $d_3(\beta_0^{1,2} \cup \beta_0^{2,2}) = 0$, entonces

$$0 = d_3(\alpha_0^{3,0} \cup \alpha_0^{0,4}) = \alpha_0^{3,0} \cup d_3(\alpha_0^{0,4}).$$

Por otro lado

$$i_2^*(\alpha_0^{0,4}) = \bar{\alpha}_0^{0,4} \implies i_2^*(d_3\alpha_0^{0,4}) = d_3i_2^*(\alpha_0^{0,4}) = d_3(\bar{\alpha}_0^{0,4}) = 0,$$

luego $d_3(\alpha_0^{0,4}) \in \text{Ker}(i_2^*) = \langle \alpha_1^{2,0} \cup \beta_0^{1,2} = \beta_1^{3,2} \rangle \subset \bar{E}_3^{3,2}$, donde

$$i_2^* : (\mathbb{Z}_2)^2 = E_3^{3,2} \longrightarrow \bar{E}_3^{3,2} = \mathbb{Z}_2.$$

Entonces hay dos posibilidades: $d_3(\alpha_0^{0,4}) = 0$ ó $d_3(\alpha_0^{0,4}) = \alpha_1^{2,0} \cup \beta_0^{1,2}$. Si pasa esto último se tiene que

$$0 = \alpha_0^{3,0} \cup d_3(\alpha_0^{0,4}) = \alpha_0^{3,0} \cup \alpha_1^{2,0} \cup \beta_0^{1,2},$$

pero

$$\alpha_0^{3,0} \cup \alpha_1^{2,0} \cup \beta_0^{1,2} = \alpha_1^{5,0} \cup \beta_0^{1,2} = \beta_1^{6,2} \neq 0.$$

Por lo tanto $d_3(\alpha_0^{0,4}) = 0$. Como la fibración se escinde $d_5(\alpha_0^{0,4}) = 0$, luego $d_r(\alpha_0^{0,4}) = 0$ para todo $r \geq 2$. \square

Proposición 2.19. *La sucesión espectral asociada a la fibración*

$$B\text{Diff}_0(\mathbb{K}) \longrightarrow B\text{Diff}(\mathbb{K}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{K})$$

se colapsa en la página $E_2^{,*}$, es decir*

$$E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}.$$

Demostración. Se sigue de que $d_r(\alpha_0^{2,0}) = d_r(\alpha_1^{2,0}) = d_r(\alpha_0^{3,0}) = d_r(\beta_0^{1,2}) = d_r(\beta_0^{2,2}) = d_r(\alpha_0^{0,4}) = 0$ para todo $r \geq 2$. \square

A pesar de que la sucesión espectral que converge a $H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z})$ se colapsa en la página $E_2^{*,*}$, no es posible deducir de ella la cohomología de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$ puesto que existen problemas de extensión, sin embargo sugiere que $H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z}) = H^*(B\mathbb{Z}_2 \times BO(2); \mathbb{Z})$. En el siguiente capítulo demostraremos que $B\text{Diff}(\mathbb{K})$ tiene el mismo tipo de homotopía que $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$.

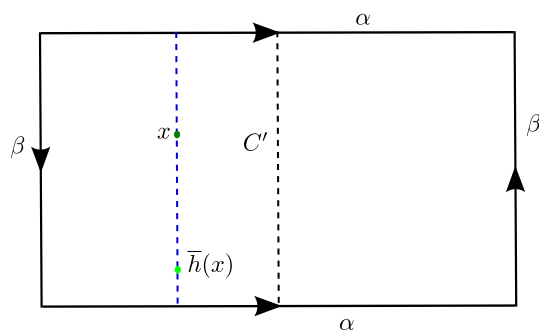
Capítulo 3

El tipo de homotopía de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$

En el capítulo anterior demostramos que la sucesión espectral que converge a $H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K}); \mathbb{Z})$ se colapsa en la página $E_2^{*,*}$, es decir $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$. Sin embargo, debido a problemas de extensión no es posible calcular la cohomología entera de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$ a partir del término $E_\infty^{*,*}$. El morfismo entre sucesiones espectrales inducido por la inclusión de \mathbb{Z}_2 en el segundo factor de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y la página $E_\infty^{*,*}$ sugieren que $H^*(B\text{Diff}(\mathbb{K})) = H^*(B\mathbb{Z}_2 \times BO(2))$ (ver sección 2.4). En la sección 1 de este capítulo demostramos que en efecto $B\text{Diff}(\mathbb{K})$ es del mismo tipo de homotopía que $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$. En la sección 2 se describen ejemplos sencillos de K -haces cuya no trivialidad es detectada por clases características en la cohomología de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$ con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

3.1. El tipo de homotopía de $B\text{Diff}(\mathbb{K})$.

Recordemos que la botella de Klein \mathbb{K} es el cociente de $S^1 \times I$ bajo la relación de equivalencia $(z, 0) \sim (\bar{z}, 1)$, el grupo $\Gamma(\mathbb{K})$ está generado por las clases de los difeomorfismos h y f donde f es reflexión y h es el giro de Dehn a lo largo de la curva $S^1 \times \frac{1}{2}$ (denotada por C') respectivamente. Denotamos por $\bar{h} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ al difeomorfismo dado por $\bar{h}(z, t) = (-z, t)$, es decir al mapeo antipodal en las fibras de \mathbb{K} , ver figura 3.1. Es fácil ver que \bar{h} y h son isotópicos y por lo tanto definen el mismo elemento en $\Gamma(\mathbb{K})$.

Figura 3.1: El difeomorfismo \bar{h} .

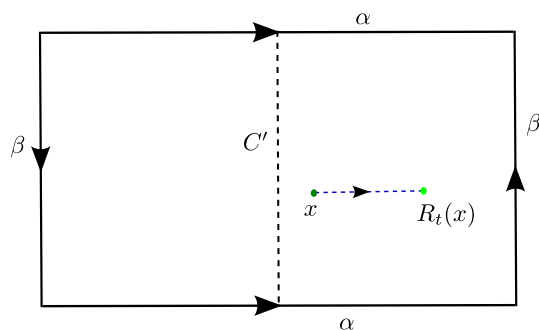
Por otro lado, para $0 \leq t \leq 2$, sea $R_t : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ el difeomorfismo “rotación” dado por $R_t(z, s) = (z, s + t)$ (ver figura 3.2). Notemos que

$$\{R_t \mid 0 \leq t \leq 2\} \approx SO(2).$$

Más aún, Gramain [16] demostró que el mapeo

$$\begin{aligned} SO(2) &\longrightarrow \text{Diff}_0(\mathbf{K}) \\ e^{i\theta} &\mapsto R_{\frac{\theta}{\pi}} \end{aligned}$$

es una equivalencia homotópica. Notemos que \bar{h} tiene orden dos, conmuta con f , con las rotaciones R_t y además $f \circ R_t \circ f = R_{-t}$.

Figura 3.2: Los difeomorfismos R_t .

Proposición 3.1. *El grupo $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ es un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbf{K})$.*

Demostración. Los difeomorfismos \bar{h} , f , R_t determinan una inclusión $\mathbb{Z}_2 \times O(2) \subset \text{Diff}(\mathbf{K})$. \square

Teorema 3.2. *Los espacios $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$ y $\mathbf{BDiff}(\mathbf{K})$ son del mismo tipo de homotopía.*

Demostración. La inclusión $\mathbb{Z}_2 \times O(2) \subset \text{Diff}(\mathbf{K})$ de la proposición anterior induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 SO(2) & \xrightarrow{\cong} & \text{Diff}_0(\mathbf{K}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z}_2 \times O(2) & \longrightarrow & \text{Diff}(\mathbf{K}) \\
 \downarrow & & \downarrow \curvearrowright^s \\
 \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2
 \end{array}$$

donde la sección de la derecha mapea a los generadores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en los difeomorfismos \bar{h} y f respectivamente. Pasando a espacios clasificantes obtenemos un mapeo de fibraciones

$$\begin{array}{ccc}
 BSO(2) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{BDiff}_0(\mathbf{K}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B\mathbb{Z}_2 \times BO(2) & \longrightarrow & \mathbf{BDiff}(\mathbf{K}) \\
 \downarrow & & \downarrow \curvearrowright^s \\
 B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) & \xlongequal{\quad} & B(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

el cual, mediante la sucesión exacta en homotopía, implica que

$$\pi_i(B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)) \cong \pi_i(\mathbf{BDiff}(\mathbf{K}))$$

para todo $i \geq 0$. Por lo tanto $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$ es débilmente equivalente a $\mathbf{BDiff}(\mathbf{K})$ y por el teorema de Withehead concluimos que $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2) \simeq \mathbf{BDiff}(\mathbf{K})$. \square

Corolario 3.3. *Sea R un anillo conmutativo con identidad. Tenemos que*

$$H^*(\mathbf{BDiff}(\mathbf{K}); R) \cong H^*(B\mathbb{Z}_2 \times BO(2); R).$$

Demostración. Por el teorema anterior $\mathbf{BDiff}(\mathbf{K})$ y $B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$ son del mismo tipo de homotopía, luego estos dos espacios tienen los mismos grupos de cohomología. \square

En el caso en que $R = \mathbb{Z}_2$ tenemos:

$$H^p(\mathbf{BDiff}(K); \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^{(n+1)^2} & \text{si } p = 2n \\ (\mathbb{Z}_2)^{(n+1)(n+2)} & \text{si } p = 2n + 1 \end{cases}$$

y cuando $R = \mathbb{Z}$ tenemos:

$$H^p(\mathbf{BDiff}(K); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + (\mathbb{Z}_2)^{2n(n+1)} & \text{si } p = 4n \\ (\mathbb{Z}_2)^{2n(n+1)} & \text{si } p = 4n + 1 \\ (\mathbb{Z}_2)^{2(n+1)^2} & \text{si } p = 4n + 2 \quad \text{o} \quad p = 4n + 3 \end{cases}$$

3.2. Ejemplos de K -haces

Esta sección contiene ejemplos de K -haces cuya no trivialidad es detectada por clases de cohomología de $H^*(B\text{Diff}(K); \mathbb{Z}_2)$. Recordemos que $B\text{Diff}(K) \simeq B\mathbb{Z}_2 \times BO(2)$ y para nuestros propósitos consideremos al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^\infty$ y a la grassmanniana de 2-planos de \mathbb{R}^∞ , denotada por $G_2(\mathbb{R}^\infty)$, como representantes homotópicos de $B\mathbb{Z}_2$ y $BO(2)$ respectivamente, es decir $B\text{Diff}(K) \simeq \mathbb{R}P^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$. Los espacios S^∞ y la variedad de Stiefel de 2-planos de \mathbb{R}^∞ , denotada por $V_2(\mathbb{R}^\infty)$, serán los representantes homotópicos de $E\mathbb{Z}_2$ y $EO(2)$ respectivamente. Denotamos por ζ al $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ -haz universal

$$\mathbb{Z}_2 \times O(2) \longrightarrow S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

y por $\zeta(K)$ al K -haz

$$K \longrightarrow (S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty))_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \times K \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty).$$

Recordemos que la cohomología módulo dos de $B\text{Diff}(K)$ está generada por tres clases: x_1 , ω_1 y ω_2 , donde x_1 es inducida por el factor $B\mathbb{Z}_2$ y ω_1, ω_2 por el factor $BO(2)$. Abusando de la notación, x_1 también denotara al generador de $H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ así como ω_1 y ω_2 también denotarían a los generadores de $H^*(BO(2); \mathbb{Z}_2)$.

3.2.1. K -haces sobre S^1 .

Existen, hasta por isomorfismo, cuatro K -haces con espacio base S^1 , los cuales han sido descritos en [22] y son: el haz trivial, $S^1 \times_f K$, $S^1 \times_{\bar{h}} K$ y el haz $S^1 \times_{f\bar{h}} K$. A continuación explicamos que clases de $H^*(B\text{Diff}(K); \mathbb{Z}_2)$ detectan estos haces.

1. Consideremos el mapeo

$$i_1 : \mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

que es inclusión en la primera coordenada y constante en la segunda y el cual induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}_2 \times O(2) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_2 \times O(2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 i_1^*(S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty)) & \longrightarrow & S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{RP}^1 & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty).
 \end{array}$$

Notemos que el pull-back $i_1^*(S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty))$ es $S^1 \times O(2)$ y al hacer construcción de Borel con \mathbf{K} obtenemos

$$(S^1 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K} = S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbf{K}$$

donde $\mathbb{Z}_2 = \langle [\bar{h}] \rangle$. Ahora bien, sabemos que el \mathbf{K} -haz

$$\mathbf{K} \longrightarrow S^1 \times_{\bar{h}} \mathbf{K} \longrightarrow S^1$$

es no trivial y más aún

$$i_1^*(x_1) = y, \quad i_1^*(\omega_1) = i_1^*(\omega_2) = 0$$

donde $y \in H^1(S^1; \mathbb{Z}_2)$ es el generador. Entonces la no trivialidad del \mathbf{K} -haz inducido por i_1 es detectada por la clase de cohomología x_1 .

2. De manera similar consideremos el mapeo

$$i_2 : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

que es constante en la primera coordenada y en la segunda es la inclusión de S^1 en la uno celda de $G_2(\mathbb{R}^\infty)$ (vease [26]). El mapeo i_2 induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_2 \times O(2) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_2 \times O(2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
i_2^*(S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty)) & \longrightarrow & S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{RP}^1 & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty).
\end{array}$$

Es fácil ver que $i_2^*(S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty)) = \mathbb{Z}_2 \times S^1 \times S^1$ y haciendo construcción de Borel con \mathbf{K} obtenemos

$$(\mathbb{Z}_2 \times S^1 \times S^1) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K} = S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbf{K}$$

donde $\mathbb{Z}_2 = \langle [f] \rangle$. Sabemos que el \mathbf{K} -haz

$$\mathbf{K} \longrightarrow S^1 \times_f \mathbf{K} \longrightarrow S^1$$

que es no trivial y además

$$i_2^*(x_1) = 0 = i_2^*(\omega_2), \quad i_2^*(\omega_1) = y.$$

Luego, la no trivialidad del haz $S^1 \times_f \mathbf{K}$ es detectada por $\omega_1 \in H^*(B\text{Diff}(\mathbf{K}); \mathbb{Z}_2)$.

3. Combinemos los mapeos de los dos ejemplos anteriores, es decir consideremos el mapeo

$$i_{1,2} : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

el cual es la inclusión de \mathbb{RP}^1 en cada una de las coordenadas. Notemos que $i_{1,2}$ no es homotópico a i_1 ni a i_2 , luego el haz $i_{1,2}^*(\zeta(\mathbf{K}))$ es diferente de $S^1 \times_{\bar{h}} \mathbf{K}$ y de $S^1 \times_f \mathbf{K}$. Además no es el haz trivial pues

$$i_{1,2}^*(x_1) = y = i_{1,2}^*(\omega_1), \quad i_{1,2}^*(\omega_2) = 0.$$

Por lo tanto $i_{1,2}^*(\zeta(\mathbf{K}))$ es el haz $S^1 \times \mathbf{K}$ y la no trivialidad es detectada por las clases $x_1, \omega_1 \in H^*(\mathbf{BDiff}(\mathbf{K}); \mathbb{Z}_2)$.

3.2.2. Otros ejemplos sencillos de K -haces.

Continuando con coeficientes mód 2 consideremos la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow SO(2) \xrightarrow{i} O(2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

que se escinde y la cual induce la fibración de espacios clasificantes

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \xrightarrow{i} BO(2) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$$

que admite una sección. No es difícil ver (por ejemplo en [24]) que al pasar a cohomología

$$\begin{aligned} i^* : H^*(BO(2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1, \omega_2] &\longrightarrow H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_2] \\ \omega_1 &\longmapsto 0 \\ \omega_2 &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^* : H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_1] &\longrightarrow H^*(BO(2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1, \omega_2] \\ x_1 &\longmapsto \omega_1 \end{aligned}$$

y por lo tanto $s^*(\omega_1) = x_1 \in H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}_2)$.

1. Dado $n \geq 1$ sea i la composición de las inclusiones

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \longrightarrow BO(2).$$

La inclusión i induce el mapeo, también denotado por i :

$$i : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

que es constante en la primera coordenada y la inclusión en la segunda. El pullback $i^*(\zeta(K))$ es un K -haz con espacio base $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ que no es trivial pues $i^*(\omega_2) = \bar{x}_2$, donde $\bar{x}_2 \in H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ es el generador del anillo de cohomología. Entonces la no trivialidad de este haz es detectada por la clase $\omega_2 \in H^*(B\text{Diff}(K); \mathbb{Z}_2)$.

2. Similarmente, denotemos por s a la inclusión de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ en $\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ seguido de la sección s , es decir la composición de los mapeos

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \xrightarrow{s} BO(2).$$

El pullback $s^*(\omega_1)$ es \bar{x}_1 , el generador del anillo de cohomología $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$. El mapeo s induce el mapeo

$$\bar{s} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

que es constante en la primera coordenada y s en la segunda. Entonces, el K -haz $\bar{s}^*(\zeta(K))$ con espacio base $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es no trivial y la no trivialidad es detectada por la clase $\omega_1 \in H^*(B\text{Diff}(K); \mathbb{Z}_2)$.

3. El ejemplo 1 de la sección 3.2.1 se puede generalizar. Para $n \geq 1$ sea i_1 el mapeo:

$$i_1 : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

que es inclusión en la primera coordenada y constante en la segunda. Notemos que el espacio total del pullback $i_1^*(\zeta)$ es $S^n \times O(2)$ donde la acción de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ es como sigue: la acción de \mathbb{Z}_2 en S^n es la antipodal y en $O(2)$ es trivial, la acción de $O(2)$ es trivial en S^n y es multiplicación por la derecha en $O(2)$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_2 \times O(2) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_2 \times O(2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^n \times O(2) & \longrightarrow & S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{RP}^n & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)
\end{array}$$

del cual, al hacer construcción de Borel, obtenemos el mapeo de haces fibrados:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{K} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{K} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(S^n \times O(2))_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \times \mathbf{K} & \longrightarrow & (S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty))_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \times \mathbf{K} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{RP}^n & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty).
\end{array}$$

Es fácil ver que

$$(S^n \times O(2))_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \times \mathbf{K} \approx S^n_{\mathbb{Z}_2} \times \mathbf{K},$$

además el morfismo en cohomología

$$i_1^* : H^*(\mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$$

es tal que

$$i_1^*(\omega_1) = 0 = i_1^*(\omega_2), \quad i_1^*(x_1) = \bar{x}_1.$$

Por lo tanto el \mathbf{K} -haz

$$\mathbf{K} \longrightarrow S^n_{\mathbb{Z}_2} \times \mathbf{K} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$$

es no trivial y la no trivialidad es detectada por la clase de cohomología $x_1 \in H^*(\mathbf{BDiff}(\mathbf{K}); \mathbb{Z}_2)$.

4. Sea $k \geq 3$ y recordemos que la inclusión

$$j : G_2(\mathbb{R}^{2+k}) \longrightarrow G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

induce un isomorfismo

$$j^* : H^p(G_2(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow H^p(G_2(\mathbb{R}^{2+k}))$$

para $p < k$ con cualquiera coeficientes. Más aún $H^*(G_2(\mathbb{R}^{2+k}); \mathbb{Z}_2)$ está generada por las clases de Stiefel-Whitney asociadas al haz canónico γ^2 y que aquí denotamos por μ_1 y μ_2 , así como por las clases duales $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_k$ sujetas a las $2 + k$ relaciones

$$(1 + \mu_1 + \mu_2)(1 + \bar{\mu}_1 + \dots + \bar{\mu}_k) = 1,$$

(ver ejercicios 6 – B y 7 – B de [26]). Entonces, con coeficientes en \mathbb{Z}_2 tenemos que

$$j^*(\omega_1) = \mu_1, \quad j^*(\omega_2) = \mu_2.$$

Para $k \geq 3$ consideremos el mapeo

$$j_2 : G_2(\mathbb{R}^{2+k}) \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)$$

el cual es constante en la primera coordenada y j en la segunda. Notemos que el espacio total del pullback $j_2^*(\zeta)$ es $\mathbb{Z}_2 \times V_2(\mathbb{R}^{2+k})$. Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 \times O(2) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{Z}_2 \times O(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 \times V_2(\mathbb{R}^{2+k}) & \longrightarrow & S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_2(\mathbb{R}^{2+k}) & \xrightarrow{j_2} & \mathbb{R}P^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty). \end{array}$$

Al pasar a construcción de Borel con \mathbf{K} obtenemos:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{K} & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathbf{K} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{Z}_2 \times V_2(\mathbb{R}^{2+k})) & \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K} \longrightarrow & (S^\infty \times V_2(\mathbb{R}^\infty)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K} \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_2(\mathbb{R}^{2+k}) & \xrightarrow{j_2} & \mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty)
\end{array}$$

donde

$$(\mathbb{Z}_2 \times V_2(\mathbb{R}^{2+k})) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K} = V_2(\mathbb{R}^{2+k}) \times_{O(2)} \mathbf{K}.$$

El morfismo inducido en cohomología

$$j_2^* : H^*(\mathbb{RP}^\infty \times G_2(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(G_2(\mathbb{R}^{2+k}); \mathbb{Z}_2)$$

satisface que

$$j_2^*(x_1) = 0, \quad j_2^*(\omega_1) = \mu_1, \quad j_2^*(\omega_2) = \mu_2,$$

de donde concluimos que el \mathbf{K} -haz

$$\mathbf{K} \longrightarrow V_2(\mathbb{R}^{2+k}) \times_{O(2)} \mathbf{K} \longrightarrow G_2(\mathbb{R}^{2+k})$$

es no trivial y la no trivialidad es detectada por las clases de cohomología $\omega_1, \omega_2 \in H^*(\mathbf{BDiff}(\mathbf{K}); \mathbb{Z}_2)$.

Capítulo 4

La cohomología de $\Gamma^q(\mathbf{K})$

El objetivo de este capítulo es calcular la cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbf{K})$, el grupo modular de la botella de Klein \mathbf{K} con q puntos marcados. Recordemos que $\Gamma^q(\mathbf{K}) := \pi_0(\text{Diff}(\mathbf{K}; q))$ donde $\text{Diff}(\mathbf{K}; q)$ denota el grupo de difeomorfismos de \mathbf{K} que dejan invariante a un conjunto fijo de q puntos distintos de \mathbf{K} . Por otro lado, denotamos por $F_q(M)$ al espacio de configuraciones desordenadas de M dado por $\{(m_1, \dots, m_q) \in M^q \mid m_i \neq m_j \text{ si } i \neq j\}$, equipado con la acción natural del grupo simétrico Σ_q . Notemos que $\text{Diff}(\mathbf{K})$ actúa diagonalmente en $F_q(\mathbf{K})$ y por lo tanto en el espacio de configuraciones desordenadas $F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$. En la sección 1 demostramos que el espacio

$$E\text{Diff}(\mathbf{K}) \underset{\text{Diff}(\mathbf{K})}{\times} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$$

es un espacio Eilenberg-MacLane $K(\Gamma^q(\mathbf{K}), 1)$. En la sección 2, usamos la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \underset{\mathbb{Z}_2 \times O(2)}{\times} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))$$

para calcular la cohomología mód 2 de

$$E\text{Diff}(\mathbf{K}) \underset{\text{Diff}(\mathbf{K})}{\times} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$$

es decir la cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbf{K})$. En la sección 3 recordamos como calcular la homología mód 2 de los espacios de configuraciones y demostramos un teorema que se usa en la sección 2.

4.1. Un espacio $\mathbf{K}(\pi, 1)$ para $\Gamma^q(\mathbf{K})$

El objetivo de esta sección es usar la equivalencia $\text{Diff}(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times O(2)$ para construir espacios Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ para el grupo modular $\Gamma^q(\mathbf{K})$.

Notemos que $\text{Diff}(\mathbf{K})$ actúa en el espacio de configuraciones desordenadas $F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$ donde la acción está dada por evaluación, es decir:

$$\begin{aligned} \theta : \text{Diff}(\mathbf{K}) \times F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q &\longrightarrow F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \\ (f, [x_1, \dots, x_q]) &\longmapsto [f(x_1), \dots, f(x_q)] \end{aligned}$$

Más aún esta acción es transitiva y si $x_1, \dots, x_q \in \mathbf{K}$ son q puntos distintos de \mathbf{K} , entonces el estabilizador de $[x_1, \dots, x_q] \in F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$ es $\text{Diff}(\mathbf{K}; q)$, el subgrupo de difeomorfismos de \mathbf{K} que deja invariante al conjunto $\{x_1, \dots, x_q\}$.

Por otro lado, recordemos el siguiente par de resultados conocidos.

Lema 4.1. *Sea G un grupo topológico actuando transitivamente en X . Elijase un punto base $x_0 \in X$ y sea $p : G \rightarrow X$ el mapeo evaluación, dado por $g \mapsto g \cdot x_0$. Sea H el subgrupo de isotropía (estabilizador) de x_0 . Si G es compacto, o si $p : G \rightarrow X$ es abierto, entonces el mapeo inducido $G/H \rightarrow X$ es un homeomorfismo de G -espacios.*

Teorema 4.2. *Bajo las condiciones del lema anterior*

$$EG \times_G X \simeq BH.$$

Demostración. Por el lema anterior X es homeomorfo a G/H . Entonces basta demostrar que $EG \times_G X \simeq BH$. En efecto, notemos que H actúa libremente en EG y por lo tanto EG/H es un modelo para el espacio clasificante BH . Ahora bien, el mapeo

$$\begin{aligned} \gamma : EG \times_G (G/H) &\longrightarrow EG/H \\ [e, g \cdot H] &\longmapsto [e \cdot g] \end{aligned}$$

es continuo y más aún biyectivo con inversa continua

$$\begin{aligned} \alpha : EG/H &\longrightarrow EG \times_G (G/H) \\ [e] &\longmapsto [e, 1 \cdot H] \end{aligned}$$

por lo tanto $EG \times_G (G/H) \simeq BH$ y el teorema se sigue. □

Por el lema anterior tenemos que $\text{Diff}(\mathbf{K})/\text{Diff}(\mathbf{K}; q) \approx F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$, luego del teorema 4.2 se sigue que

$$EDiff(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \simeq BDiff(\mathbf{K}; q).$$

Proposición 4.3. *El grupo fundamental del espacio*

$$EDiff(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \tag{4.1}$$

es isomorfo a $\Gamma^q(\mathbf{K})$.

Demostración. De la sucesión exacta en homotopía de la fibración

$$\text{Diff}(\mathbf{K}; q) \longrightarrow EDiff(\mathbf{K}; q) \longrightarrow BDiff(\mathbf{K}; q)$$

se sigue que $\pi_1(BDiff(\mathbf{K}; q)) \cong \pi_0(\text{Diff}(\mathbf{K}; q)) \cong \Gamma^q(\mathbf{K})$. Luego

$$\pi_1(EDiff(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q) \cong \pi_1(BDiff(\mathbf{K}; q)) \cong \Gamma^q(\mathbf{K}).$$

□

Así, para ver que el espacio en cuestión es un $K(\pi, 1)$, resta demostrar que:

$$\pi_i(EDiff(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q) = 0 \quad \forall i \geq 2.$$

Esto se hará por inducción sobre q . Con el objetivo de tener una descripción más sencilla del espacio (4.1) recordemos que la inclusión $\mathbb{Z}_2 \times O(2) \hookrightarrow \text{Diff}(\mathbf{K})$ induce una equivalencia homotópica, la cual induce un mapeo de fibraciones

$$\begin{array}{ccc}
 F_p(\mathbf{K})/\Sigma_q & \xlongequal{\quad\quad\quad} & F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q & \longrightarrow & E\text{Diff}(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q/\Sigma_q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & B\text{Diff}(\mathbf{K})
 \end{array}$$

de donde se sigue que

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \simeq E\text{Diff}(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q.$$

Lema 4.4. *El espacio*

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K}$$

es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$.

Demostración. La fibración

$$\mathbf{K} \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K} \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))$$

induce la sucesión exacta larga en homotopía:

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathbf{K}) \longrightarrow \pi_i\left(E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K}\right) \longrightarrow \pi_i\left(B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))\right) \longrightarrow \cdots$$

Como $\pi_i(\mathbf{K})$ es trivial para $i \geq 2$ y $\pi_i(B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))) = 0$ para $i \geq 3$, entonces

$$\pi_i\left(E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} \mathbf{K}\right) = 0$$

para $i \geq 3$. Notemos que

consigo mismo q veces. Las proyecciones naturales

$$p_i : M^q \longrightarrow M^{q-1}$$

que eliminan la i -ésima coordenada se restringen a mapeos a nivel de espacios de configuraciones ordenadas. Más aún,

Teorema 4.5 (Fadell-Nuewirth). *Si M es una variedad sin frontera, la proyección natural*

$$p_i : F_k(M) \rightarrow F_{k-1}(M)$$

es una fibración con fibra $M \setminus Q_{k-1}$, donde $Q_{k-1} \subset M$ es un conjunto de cardinalidad $k - 1$, que corresponde al punto base, dado por una configuración fija $(m_1, \dots, m_{k-1}) \in F_{k-1}(M)$.

Demostración. Ver [12]. □

Teorema 4.6. *Si M es una superficie que no es homeomorfa a S^2 o al plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$, entonces $F_q(M)$ y $F_q(M)/\Sigma_q$ son espacios $K(\pi, 1)$.*

Demostración. Ver [21]. □

Usando los resultados anteriores podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *El espacio $E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})$ es un espacio $K(\pi, 1)$.*

Demostración. Consideremos la fibración de Fadell-Neuwirth dada por proyección en la primera coordenada

$$\mathbf{K} \setminus Q_1 \longrightarrow F_2(\mathbf{K}) \longrightarrow F_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K}.$$

Pasando a construcciones de Borel, tenemos la fibración:

$$\mathbf{K} \setminus Q_1 \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_2(\mathbf{K}) \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_1(\mathbf{K}).$$

Como $\mathbf{K} \setminus Q_1$ es un espacio $\mathbf{K}(\pi, 1)$ así como $E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_1(\mathbf{K})$, de la sucesión exacta larga en homotopía se sigue que

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_2(\mathbf{K})$$

es un espacio $K(\pi, 1)$. Procediendo por inducción y usando la fibración

$$\mathbf{K} \setminus Q_{q-1} \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K}) \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_{q-1}(\mathbf{K})$$

concluimos que la construcción de Borel

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})$$

es un espacio Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. □

Como consecuencia del teorema 4.7 obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.8. *El espacio $EDiff(\mathbf{K}) \times_{Diff(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$ es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(\Gamma^q(\mathbf{K}), 1)$.*

Demostración. Consideremos el recubrimiento

$$\Sigma_q \longrightarrow F_q(\mathbf{K}) \longrightarrow F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$$

el cual pasando a construcciones de Borel induce la fibración

$$\Sigma_q \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K}) \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q.$$

Como Σ_q es discreto y

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})$$

es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$, el resultado se sigue de la sucesión exacta larga en homotopía y de la equivalencia homotópica

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \simeq E\text{Diff}(\mathbf{K}) \times_{\text{Diff}(\mathbf{K})} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q.$$

□

Hemos obtenido una fibración

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))$$

cuya sucesión exacta en homotopía se reduce a

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow B_q(\mathbf{K}) \longrightarrow \Gamma^q(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

proporcionando así una relación entre el grupo $\Gamma^q(\mathbf{K})$ y el grupo de trenzas en q cuerdas de \mathbf{K} , $B_q(\mathbf{K})$.

Corolario 4.9. *El grupo modular $\Gamma^q(\mathbf{K})$ es una extensión de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ por $B_q(\mathbf{K})/\mathbb{Z}$, es decir tenemos una sucesión exacta corta*

$$1 \longrightarrow B_q(\mathbf{K})/\mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma^q(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

donde $B_q(\mathbf{K})$ es el grupo de trenzas de \mathbf{K} y \mathbb{Z} es generado por la trenza que da un giro completo a \mathbf{K} .

Demostración. Es consecuencia de la sucesión exacta en homotopía asociada a la fibración:

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)).$$

□

4.2. La cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbf{K})$

Recordemos que la botella de Klein \mathbf{K} es el cociente de $S^1 \times S^1$ por la acción de $\mathbb{Z}_2 = \langle \tau \rangle$, dado por $\tau(u, v) = (-u, \bar{v})$, es decir la acción antipodal en la primera coordenada y conjugación en la segunda. También recordemos que existe una acción natural de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ en \mathbf{K} dada por

$$\begin{aligned} \Theta_1 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbf{K} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (\tau, [u, v]) &\longmapsto [u, -v] \end{aligned}$$

y por

$$\begin{aligned} \Theta_2 : O(2) \times \mathbf{K} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (A, [u, v]) &\longmapsto [A \cdot u, \det A \cdot v] \end{aligned}$$

En el resto de la sección será conveniente pensar a \mathbf{K} como el espacio cociente $S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^1$, así como identificar explícitamente la acción de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$. Para esto recordemos que $S^1 \approx \mathbb{R}\mathbb{P}^1$, donde el homeomorfismo es

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\longmapsto \left[\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned}$$

Más aún, este homeomorfismo es $\mathbb{Z}_2 = \langle \tau \rangle$ equivariante, donde \mathbb{Z}_2 actúa por conjugación en S^1 y en $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ por:

$$\tau \cdot [\cos \phi, r \sin \phi] = [\cos \phi, -r \sin \phi].$$

Luego, existe un homeomorfismo

$$\mathbf{K} = S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} S^1 \xrightarrow{\cong} S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^1$$

donde la acción en el primer factor de $S^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ es la antipodal. La acción de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ en $\mathbf{K} \cong S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ se ve ahora como

$$\begin{aligned} \Theta_1 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbf{K} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (\tau, [u, [\cos \phi, \text{sen } \phi]]) &\longmapsto \left[u, \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right), \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) \right] \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Theta_2 : O(2) \times \mathbf{K} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (A, [u, [\cos \phi, \text{sen } \phi]]) &\longmapsto \left[Au, \left[\cos \left((1 - \det A) \frac{\pi}{2} + \phi \right), \text{sen} \left((1 - \det A) \frac{\pi}{2} + \phi \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Luego, el grupo $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ actúa diagonalmente (vía Θ_1 y Θ_2) en el espacio de configuraciones $F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$. De la sección 4.1 sabemos que la construcción de Borel

$$E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$$

es un espacio $\mathbf{K}(\pi, 1)$ para el grupo modular $\Gamma^q(\mathbf{K})$. Por lo tanto, podemos calcular la cohomología de $\Gamma^q(\mathbf{K})$ usando la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración:

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \quad (4.2)$$

A partir de ahora trabajaremos con cohomología con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

Teorema 4.10. *La sucesión espectral de Serre en cohomología mód 2 asociada a la fibración 4.2, colapsa en la página $E_2^{*,*}$.*

Demostración. Notemos que la acción de \mathbb{Z}_2 en $S^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ se puede extender a una acción libre de \mathbb{Z}_2 en $S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ como sigue. Sea $(x_1, x_2, \dots) \in S^\infty \subseteq \mathbb{R}^\infty$ y sea $[r \cos \phi, r \operatorname{sen} \phi, y_3, \dots] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$. Definimos la acción de $\langle \tau \rangle$ en $S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ por:

$$\tau \cdot ((x_1, x_2, \dots); [r \cos \phi, r \operatorname{sen} \phi, y_3, \dots]) = (-(x_1, x_2, \dots); [r \cos \phi, -r \operatorname{sen} \phi, y_3, \dots]).$$

Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1 & \longrightarrow & S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{K} = S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^1 & \longrightarrow & S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \end{array}$$

donde los mapeos horizontales son inclusiones y los verticales son las proyecciones canónicas.

Por otro lado, la acción de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ en \mathbf{K} se extiende a $S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$. En efecto, si $\mathbb{Z}_2 = \langle \tau \rangle$, $A \in O(2)$, $(x_1, x_2, \dots) \in S^\infty \subseteq \mathbb{R}^\infty$ y $[r \cos \phi, r \operatorname{sen} \phi, y_3, \dots] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$, definimos:

$$\begin{aligned} & A \cdot [(x_1, x_2, \dots); [r \cos \phi, r \operatorname{sen} \phi, y_3, \dots]] = \\ & = \left[\left(A(x_1, x_2), x_3, \dots \right); \left[r \cos \left((1 - \det A) \frac{\pi}{2} + \phi \right), r \operatorname{sen} \left((1 - \det A) \frac{\pi}{2} + \phi \right), y_3, \dots \right] \right] \end{aligned}$$

y

$$\tau \cdot [(x_1, x_2, \dots); [r \cos \phi, r \operatorname{sen} \phi, y_3, \dots]] = \left[(x_1, x_2, \dots); \left[r \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right), r \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right), y_3, \dots \right] \right]$$

Más aún $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ actúa diagonalmente en los espacios de configuraciones de \mathbf{K} y de $S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ de forma que la inclusión

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \hookrightarrow F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q$$

es $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ equivariante. Esta inclusión induce un mapeo de haces fibrados:

$$\begin{array}{ccc}
F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q & \hookrightarrow & F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q \\
\downarrow & & \downarrow \\
E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q & \longrightarrow & E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q \\
\downarrow & & \downarrow \\
B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))
\end{array}$$

y por lo tanto un morfismo entre las correspondientes sucesiones espectrales. En la sección 4.4 probaremos que la inclusión en fibras induce un epimorfismo en cohomología y la siguiente proposición demuestra que el haz de la derecha es homotópicamente trivial. Estos dos hechos implican que la acción de $\pi_1(B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)))$ en

$$H^* \left(F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2 \right)$$

es trivial, y más aún, que la acción de $\pi_1(B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)))$ en

$$H^*(F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2)$$

también es trivial. Como los sistemas de coeficientes locales en ambos haces son triviales y la inclusión en fibras induce un epimorfismo en cohomología, se sigue que la sucesión espectral de Serre asociada al haz de la izquierda colapsa en la página $E_2^{*,*}$. \square

Proposición 4.11. *Para $q \geq 1$ el haz fibrado:*

$$F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q \longrightarrow E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q \longrightarrow B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))$$

es homotópicamente trivial.

Demostración. Notemos que de un resultado clásico de J. Birman (Teorema 1 en [3]) se sigue que la inclusión

$$F_q(S^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^n) \underset{\mathbb{Z}_2}{\hookrightarrow} (S^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^n) \underset{\mathbb{Z}_2}{\hookrightarrow} (S^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^n)^q$$

induce un isomorfismo a nivel de grupos de homotopía π_r con $r < 2n - 1$. Aquí la acción de \mathbb{Z}_2 en $S^n \times \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es la restricción de la acción de \mathbb{Z}_2 en $S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$. Pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos que

$$F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) \underset{\mathbb{Z}_2}{\longrightarrow} (S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) \underset{\mathbb{Z}_2}{\longrightarrow} (S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q$$

es una equivalencia homotópica Σ_q -equivariante. Por lo tanto, el mapeo inducido en construcciones de Borel

$$E\Sigma_q \underset{\Sigma_q}{\times} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) \underset{\mathbb{Z}_2}{\longrightarrow} E\Sigma_q \underset{\Sigma_q}{\times} (S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q$$

es una equivalencia homotópica, $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ equivariante con respecto a la acción diagonal en el segundo factor.

Por otro lado la proyección en el segundo factor

$$E\Sigma_q \underset{\Sigma_q}{\times} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) \underset{\mathbb{Z}_2}{\longrightarrow} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) / \Sigma_q$$

también es una equivalencia homotópica $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ equivariante.

Las dos equivalencias homotópicas descritas arriba inducen las siguientes equivalencias entre haces fibrados:

$$\begin{array}{ccc} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) / \Sigma_q & \xleftarrow{\simeq} & E\Sigma_q \underset{\Sigma_q}{\times} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \underset{\mathbb{Z}_2 \times O(2)}{\times} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) / \Sigma_q & \xleftarrow{\simeq} & E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \underset{\mathbb{Z}_2 \times O(2)}{\times} [E\Sigma_q \underset{\Sigma_q}{\times} F_q(S^\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) & \xrightarrow{\cong} & E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q \\
\downarrow & & \downarrow \\
E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} [E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)] & \xrightarrow{\cong} & E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} [E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q] \\
\downarrow & & \downarrow \\
B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))
\end{array}$$

Así, para probar el teorema basta probar que el haz con fibra $E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q$ es homotópicamente trivial. Consideremos el mapeo

$$\begin{aligned}
s : (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)_t &\longrightarrow S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \\
[(x_1, x_2, \dots); (y_1, y_2, \dots)] &\longmapsto [(0, 0, x_1, x_2, \dots); (0, 0, y_1, y_2, \dots)]
\end{aligned}$$

donde $(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)_t$ denota a $S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ con la acción trivial de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$.

Notemos que s es $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ equivariante y más aún es una equivalencia homotópica. En efecto, notemos que el haz fibrado natural dado por proyección en la primera coordenada

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \longrightarrow S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$$

tiene una sección, de donde se sigue que $S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ es un $K(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, 1)$. Por otro lado el mapeo s induce un mapeo de haces fibrados

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty \\
\downarrow & & \downarrow \\
(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)_t & \xrightarrow{s} & (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty & \xrightarrow{\bar{s}} & \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty
\end{array}$$

donde \tilde{s} y \bar{s} están dados por recorrer las primeras dos coordenadas. Los morfismos inducidos por \tilde{s} y \bar{s} en grupos fundamentales son no triviales. De aquí se sigue que

s induce isomorfismo en grupos fundamentales y por lo tanto es una equivalencia homotópica.

El mapeo s^q induce una equivalencia de haces fibrados

$$\begin{array}{ccc}
 E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)_t^q & \xrightarrow{1 \times s^q} & E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} [E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)_t^q] & \longrightarrow & E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} [E\Sigma_q \times_{\Sigma_q} (S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^q] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))
 \end{array}$$

donde el haz fibrado de la izquierda es trivial, pues la acción de $\mathbb{Z}_2 \times O(2)$ en la fibra es trivial. Por lo tanto el haz de la derecha es trivial. \square

Como consecuencia del teorema 4.10 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.12. *Para $q \geq 1$, existe un isomorfismo de álgebras*

$$\begin{aligned}
 H^*(\Gamma^q(\mathbf{K}); \mathbb{Z}_2) &\cong H^* \left(E(\mathbb{Z}_2 \times O(2)) \times_{\mathbb{Z}_2 \times O(2)} F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2 \right) \\
 &\cong H^*(B(\mathbb{Z}_2 \times O(2)); \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2)
 \end{aligned}$$

Demostración. Es consecuencia de que la sucesión espectral de Serre asociada al haz fibrado 4.2 colapsa en la página E_2 , el grupo fundamental de $B(\mathbb{Z}_2 \times O(2))$ actúa trivialmente en $H^*(F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2)$ y que los coeficientes son \mathbb{Z}_2 . \square

El teorema anterior demuestra que la cohomología mód 2 de $\Gamma^q(\mathbf{K})$ está determinada por la cohomología de $F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q$.

4.3. La homología de los espacios de configuraciones.

En esta sección recordamos la descripción de la homología mód 2 del espacio de configuraciones F_q/Σ_q como funtor de $H_*(M; \mathbb{Z}_2)$, en el caso en que M es una variedad compacta de dimensión m . La idea es describir a $H_*(F_q(M)/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2)$ como parte de la homología de un espacio más grande conocido como espacio de configuraciones etiquetadas. A lo largo de toda la sección usamos homología con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

Definición 4.1. *Sea M una variedad compacta y X un CW-complejo con punto base $*$. El espacio de configuraciones etiquetadas $C(M; X)$ se define como el cociente*

$$C(M; X) = \left(\prod_{j \geq 1} F_j(M) \times_{\Sigma_j} X^j \right) / \sim$$

donde la relación \sim es generada por

$$(m_1, \dots, m_j; x_1, \dots, x_j) \sim (m_1, \dots, m_{j-1}; x_1, \dots, x_{j-1}),$$

si $x_j = *$.

Los espacios de configuraciones etiquetadas aparecen en [4], [25] y [5] como modelos de espacios de mapeos. En nuestro caso consideraremos a $X = S^n$. El espacio $C(M; X)$ está filtrado por espacios cerrados

$$C_q(M; X) = \left(\prod_{j \geq 1}^q F_j(M) \times_{\Sigma_j} X^j \right) / \sim.$$

El espacio $C_0(M; X)$ es el punto base y $C_1(M; X) = M \wedge X = (M \times X)/M \times *$. Las inclusiones $C_{q-1}(M; X) \hookrightarrow C_q(M; X)$ son cofibraciones, ver [23]. Sus fibras se denotan usualmente por $D_q(M; X)$. Esta filtración se escinde de manera estable, i.e para X conexo hay una equivalencia natural

$$Q(C(M; X)) \xrightarrow{\simeq} \prod_{q=1}^{\infty} Q(D_q(M; X))$$

donde $Q = \Omega^\infty \Sigma^\infty$ y la cual generaliza la descomposición de Snaith, vea [4],[8], [32],[5]. Una consecuencia de esta descomposición estable, ver [5], [21], es que existe un isomorfismo en homología reducida:

$$\tilde{H}_i C(M; X) \cong \bigoplus_{q=1}^{\infty} \tilde{H}_i D_q(M; X).$$

Por otro lado el siguiente lema se demuestra en [5].

Lema 4.13. *Considere el siguiente haz vectorial natural sobre el espacio de configuraciones*

$$\omega_q : \mathbb{R}^q \longrightarrow F_q(M) \times_{\Sigma_q} \mathbb{R}^q \longrightarrow F_q(M)/\Sigma_q.$$

Entonces $D_q(M; S^n) \simeq Th(n\omega_q)$, es decir, el espacio de Thom de $n\omega_q = \omega_q \oplus \cdots \oplus \omega_q$.

El lema anterior implica que las homología de $F_q(M)/\Sigma_q$ y de $D_q(M; S^n)$ están estrechamente relacionadas. A saber, por el teorema del isomorfismo de Thom tenemos que

$$H_*(F_q(M)/\Sigma_q) \cong H_{*+qn}(D_q(M; S^n)).$$

Entonces el calculo de la homología de $F_q(M)/\Sigma_q$ es equivalente a calcular la homología de $D_q(M; S^n)$, la cual se obtiene de la homología de $C(M; S^n)$ como se observa a continuación.

Teorema 4.14. *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales graduados*

$$\Theta : H_*(C(M; S^n); \mathbb{Z}_2) \cong \bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q} S^{m+n}; \mathbb{Z}_2)^{\otimes \beta_q}$$

donde β_q es el q -ésimo número de Betti de M , es decir $\beta_q = \dim H_q(M; \mathbb{Z}_2)$.

Demostración. Ver [5].

□

El isomorfismo Θ del teorema anterior depende de una descomposición en asas de M y es natural con respecto a encajes que preservan la descomposición en asas (ver [5]).

A continuación recordemos la homología mód 2 de los espacios de lazos iterados $\Omega^{m-q}S^{m+n}$, vea [9]. Sabemos que existen operaciones en homología mód 2 conocidas como operaciones de Dyer-Lashof

$$Q_i : H_q(\Omega^n X) \longrightarrow H_{2q+i}(\Omega^n X), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

que son naturales con respecto a mapeos de espacios de n -lazos, $\Omega^n f : \Omega^n X \rightarrow \Omega^n Y$. Más aún, dichas operaciones son lineales si $0 \leq i < n-1$. Por otro lado, la suspensión de Freudenthal $E^q : S^n \rightarrow \Omega^q S^{n+q}$ induce un monomorfismo en homología con $x_n = E_*^q(u_n)$, donde u_n es la clase fundamental de $H_*(S^n)$. Denotamos por $Q_I x_n$ a la composición $Q_{i_1} Q_{i_2} \cdots Q_{i_j} x_n$ si $I = (i_1, \dots, i_j)$. La sucesión I es admisible si $0 < i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_j$. Escribimos $\lambda(I) \leq q$ si $i_j \leq q$ y si la longitud de I es igual a j , es decir $l(I) = j$.

Teorema 4.15. *Existe un isomorfismo de álgebras de Hopf*

$$H_*(\Omega^q S^{m+q}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[Q_I x_n], \quad n \geq 1,$$

donde I es admisible con $\lambda(I) \leq q-1$ y donde $Q_I x_n$ es primitivo.

Regresando al teorema 4.14, cada término $H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n}; \mathbb{Z}_2)$ es una álgebra con pesos asociados a sus generadores. Más aún, vía el isomorfismo Θ la homología de $D_q(M; S^n)$ corresponde con el espacio vectorial generado por los elementos de peso q (ver [5]).

A continuación describimos los pesos de los generadores de $\bigotimes_{q=0}^m H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n})^{\otimes \beta_q}$. Primero por cada generador $\alpha \in H_q(M; \mathbb{Z}_2)$ elegimos un generador u_α en $H_*(\Omega^{m-q}S^{m+n})^{\otimes \beta_q}$ correspondiente a la clase fundamental de grado $q+n$ y a todos estos elementos les asignamos peso

$$\omega(u_\alpha) = 1.$$

Después, para cada u_α y cada índice $I = (i_1, \dots, i_r)$ consideramos los generadores $Q_I u_\alpha$ si $0 < i_1 \leq \dots \leq i_r < m - q$. Así tenemos que

$$|Q_I u_\alpha| = i_1 + 2i_2 + 4i_3 + \dots + 2^{r-1}i_{r-1} + 2^r(|\alpha| + n),$$

y a este generador le asignamos peso $\omega(Q_I u_\alpha) = 2^r$. Finalmente extendemos la función peso a productos de generadores por $\omega(\nu_1 \cdot \nu_2) = \omega(\nu_1) + \omega(\nu_2)$.

Ejemplo: Sea M una superficie compacta, orientable o no. Por el teorema 4.14 la homología mód 2 de $C(M; S^n)$ está dada por

$$H_*(\Omega^2 S^{n+2})^{\otimes \beta_0} \otimes H_*(\Omega S^{n+2})^{\otimes \beta_1} \otimes H_*(S^{n+2})^{\otimes \beta_2}$$

donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ son los números de Betti mód 2 de M . Por el teorema 4.15 tenemos que

$$H_*(C(M; S^n)) \cong \mathbb{Z}_2[y_0, y_1, \dots]^{\otimes \beta_0} \otimes \mathbb{Z}_2[x]^{\otimes \beta_1} \otimes (\mathbb{Z}_2[u]/u^2)^{\otimes \beta_2}$$

donde:

$$\begin{aligned} |u| &= n + 2, & \omega(u) &= 1, \\ |x| &= n + 1, & \omega(x) &= 1, \\ |y_i| &= (2^i - 1) + 2^i n, & \omega(y_i) &= 2^i. \end{aligned}$$

Si $M = N_g$ es la superficie compacta, no orientable de género g , se tiene que

$$H_*(C(N_g; S^n)) \cong \mathbb{Z}_2[y_0, y_1, \dots] \otimes \mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_g] \otimes \mathbb{Z}_2[u]/u^2.$$

Entonces una base para $\overline{H}_*(D_q(N_g; S^n))$ consiste de los monomios

$$h = u^e x_1^{a_1} \dots x_g^{a_g} y_0^{b_0} y_1^{b_1} \dots y_r^{b_r},$$

donde $r \geq 0, e = 0, 1$ y $a_i, b_j \geq 0$, son tales que

$$\omega(h) = e + \sum_{i=1}^g a_i + \sum_{j=0}^r 2^j b_j = q.$$

Por ejemplo la homología reducida de $D_2(N_g; S^n)$ está dada por

| q | Base | Rango |
|----------|--|-----------|
| $2n$ | y_0^2 | 1 |
| $2n + 1$ | $x_1 y_0, \dots, x_g y_0, y_1$ | $g + 1$ |
| $2n + 1$ | $u y_0, x_1^2, \dots, x_i x_j, \dots, x_g^2$ | $g^2 + 1$ |
| $2n + 3$ | $\mu x_1, \dots, \mu x_g$ | g |

De aquí se sigue, por el lema 4.13 que

$$H_q(F_2(N_g)/\Sigma_2; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } q = 0 \\ (\mathbb{Z}_2)^{g+1} & \text{si } q = 1 \\ (\mathbb{Z}_2)^{g^2+1} & \text{si } q = 2 \\ (\mathbb{Z}_2)^g & \text{si } q = 3 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

4.4. Descomposición en asas

Finalmente, en esta sección demostramos que la inclusión de espacios de configuraciones

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \hookrightarrow F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q$$

induce un epimorfismo en cohomología mód 2.

Recordemos que el isomorfismo Θ del teorema 4.14 depende de la descomposición en asas de M . Por completez recordamos aquí la definición.

Sea \overline{M} una variedad de dimensión m y $M \subset \overline{M}$ una subvariedad cerrada de codimensión 0. Decimos que \overline{M} se obtiene a partir de M pegándole un asa de índice q si $\overline{M} = M \cup D$ y $M \cap D \approx [0, 1]^{m-q} \times \partial[0, 1]^q$ donde $D \approx [0, 1]^m$.

Definición 4.2. *Una descomposición en asas de una variedad M , es una filtración por subvariedades*

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{m-1} \subset M_m = M$$

donde M_0 es una unión disjunta de discos de dimensión m y M_q se obtiene pegando asas de índice q a M_{q-1} .

Ejemplo 1: Consideramos a S^m con su estructura celular usual con dos celdas antipodales de dimensión q para $0 \leq q \leq m$:

$$S^m = (e_+^0 \cup e_-^0) \cup \cdots \cup (e_+^{m-1} \cup e_-^m)$$

El q -esqueleto de S^m es S^q , además tenemos la filtración $S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^m$ donde S^q se obtiene al pegar dos celdas de dimensión q a S^{q-1} . Esta estructura celular induce una descomposición en asas de S^m con dos asas de índice q antipodales con $q = 0, \dots, m$ y de forma que el encaje natural $S^m \subseteq S^{m+1}$ respeta dicha descomposición. Más aún al pasar al cociente por la acción antipodal obtenemos una descomposición en asas para $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ que es respetada por la inclusión natural $\mathbb{R}\mathbb{P}^m \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^{m+1}$.

Ejemplo 2: Para $m \geq 1$, sea $K_{2m} = S^m \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ el cociente de $S^m \times \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ por el grupo $\mathbb{Z}_2 = \langle \tau \rangle$, donde la acción de τ está dada por:

$$\begin{aligned} \tau \cdot ((x_1, \dots, x_{m+1}); [r \cos \phi, r \sin \phi, y_3, \dots, y_{m+1}]) &= \\ = (- (x_1, \dots, x_{m+1}); [r \cos \phi, -r \sin \phi, y_3, \dots, y_{m+1}]). \end{aligned}$$

Notemos que $S^m \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ es el espacio total de un $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ -haz sobre $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$. Consideremos, como en el ejemplo anterior, la estructura celular de S^m con dos celdas antipodales de dimensión q para $0 \leq q \leq m$ y la estructura celular usual de $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$ con una celda de dimensión q , $0 \leq q \leq m$. Estas descomposiciones inducen una estructura celular en K_{2m} con $(i+1)$ celdas de dimensión i cuando $0 \leq i \leq m$, y con $(2m+1-i)$ celdas de dimensión i cuando $m \leq i \leq 2m$. Esta estructura celular induce una descomposición en asas de K_{2m} con $(i+1)$ asas de índice i si $0 \leq i \leq m$ y con $(2m+1-i)$ asas de índice i si $m \leq i \leq 2m$, de tal forma que la inclusión $K_{2m} \subset K_{2(m+1)}$ respeta dicha descomposición.

El siguiente teorema prueba que la inclusión

$$F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q \longrightarrow F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q$$

induce un epimorfismo en cohomología mód 2. La demostración del teorema 4.10 depende de este hecho.

Teorema 4.16. *La inclusión natural de $\mathbf{K} \subset S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ induce un mapeo entre espacios de configuraciones desordenadas, que es un epimorfismo en cohomología mód 2:*

$$H^* \left(F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2 \right) \longrightarrow H^* (F_q(K)/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2).$$

Demostración. Para $m \geq 1$ consideramos $K_{2m} = S^m \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^m$. La inclusión natural $\mathbf{K} = K_1 \hookrightarrow K_{2m}$ induce un mapeo a nivel de espacios de configuraciones etiquetadas $C(\mathbf{K}; S^n) \longrightarrow C(K_{2m}; S^n)$.

Por el teorema 4.14 se tienen los siguientes isomorfismos en homología mód 2:

$$\begin{aligned} H_*(C(\mathbf{K}; S^n)) &\cong H_*(\Omega^2 S^{n+2}) \otimes H_*(\Omega S^{n+2})^{\otimes 2} \otimes H_*(S^{n+2}) \\ H_*(C(K_{2m}; S^n)) &\cong H_*(\Omega^{2m} S^{n+2m})^{\beta_0} \otimes \dots \otimes H_*(S^{n+2m})^{\beta_{2m}}. \end{aligned}$$

donde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ son los números de Betti de K_{2m} . Usando una sucesión espectral de Serre deducimos que $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 \geq 1$. Más aún como el encaje $\mathbf{K} \subset K_{2m}$ respeta la descomposición en asas, el mapeo inducido en homología $H_*(C(\mathbf{K}; S^n)) \longrightarrow H_*(C(K_{2m}; S^n))$ está dado por los morfismos de adjunción usuales

$$\begin{aligned} H_*(\Omega^2 S^{n+2}) &\longrightarrow H_*(\Omega^{2m} S^{n+2m}) \\ H_*(\Omega S^{n+2})^{\otimes 2} &\longrightarrow H_*(\Omega^{2m-1} S^{n+2m})^{\otimes 2} \\ H_*(S^{n+2}) &\longrightarrow H_*(\Omega^{2m-2} S^{n+2m})^{\otimes \beta_2} \end{aligned}$$

donde el tercer morfismo es adjunción en alguno de los factores de $H_*(\Omega^{2m-2} S^{n+2m})^{\otimes \beta_2}$. Estos mapeos son monomorfismos que preservan el peso de los generadores. Por lo tanto la inclusión $\mathbf{K} \subset K_{2m}$ induce un monomorfismo

$$H_*(F_q(\mathbf{K})/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*\left(F_q(S^\infty \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)/\Sigma_q; \mathbb{Z}_2\right)$$

y por dualidad, un epimorfismo en cohomología mód 2. □

Bibliografía

- [1] A. Adem and R. J. Milgram, *Cohomology of finite groups*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] R. Baer, *Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen*, J. Reine Angew. Math. **159** (1928), 101–116.
- [3] J. S. Birman, *On braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 41–72.
- [4] C. F. Bödigheimer, *Stable splittings of mapping spaces*, Algebraic topology (Seattle, Wash., 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1286, Springer, Berlin, 1987, pp. 174–187.
- [5] C. F. Bödigheimer, F. Cohen, and L. Taylor, *On the homology of configuration spaces*, Topology **28** (1989), no. 1, 111–123.
- [6] E. H. Brown, Jr., *The cohomology of BSO_n and BO_n with integer coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), no. 2, 283–288.
- [7] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [8] F. R. Cohen, *The unstable decomposition of $\Omega^2\Sigma^2X$ and its applications*, Math. Z. **182** (1983), no. 4, 553–568.
- [9] ———, *A course in some aspects of classical homotopy theory*, Algebraic topology (Seattle, Wash., 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1286, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–92.
- [10] E. Dyer and R. K. Lashof, *Homology of iterated loop spaces*, Amer. J. Math. **84** (1962), 35–88.

-
- [11] C. J. Earle and J. Eells, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, J. Differential Geometry **3** (1969), 19–43.
- [12] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), 111–118.
- [13] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 49, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [14] M. Feshbach, *The integral cohomology rings of the classifying spaces of $O(n)$ and $SO(n)$* , Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 4, 511–516.
- [15] M. Furusawa, M. Tezuka, and N. Yagita, *On the cohomology of classifying spaces of torus bundles and automorphic forms*, J. London Math. Soc. (2) **37** (1988), no. 3, 520–534.
- [16] A. Gramain, *Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 53–66.
- [17] M. E. Hamstrom, *Homotopy properties of the space of homeomorphisms on P^2 and the Klein bottle*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 37–45.
- [18] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [19] S. P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 235–265.
- [20] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 307–317.
- [21] M. A. Maldonado, *On the cohomology of mapping class groups for non-orientable surfaces*, Ph.D. thesis, Cinvestav-IPN, 2011.
- [22] J. M. Márquez-Bobadilla, *On the trigenus of surface bundles over S^1* , Papers of the Mexican Mathematical Society (Spanish), Aportaciones Mat. Comun., vol. 35, Soc. Mat. Mexicana, México, 2005, pp. 201–215.
- [23] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.

-
- [24] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [25] D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, *Topology* **14** (1975), 91–107.
- [26] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [27] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, *Invent. Math.* **90** (1987), no. 3, 551–577.
- [28] ———, *Characteristic classes of T^2 -bundles*, Homotopy theory and related topics (Kyoto, 1984), *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 9, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 135–148.
- [29] ———, *Introduction to mapping class groups of surfaces and related groups*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 353–386.
- [30] J. Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, *Ann. of Math. (2)* **72** (1960), 521–554.
- [31] J. P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Société Mathématique de France, Paris, 1977, Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [32] V. P. Snaith, *A stable decomposition of $\Omega^n S^n X$* , *J. London Math. Soc. (2)* **7** (1974), 577–583.
- [33] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 61, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [34] J. H. C. Whitehead, *Manifolds with transverse fields in euclidean space*, *Ann. of Math. (2)* **73** (1961), 154–212.