

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE  
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO  
POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Matemáticas

**SERIES DE POTENCIAS DEL  
PARÁMETRO ESPECTRAL PARA  
HACES POLINOMIALES DE  
OPERADORES DE  
STURM-LIOUVILLE, SISTEMAS  
DE ZAKHAROV-SHABAT Y  
APLICACIONES**

Tesis que presenta:  
**Ulises Velasco García**

para obtener el grado de:  
Doctor en Ciencias  
en la especialidad de Matemáticas

Asesores:  
Dr. Vladislav V. Kravchenko Cherkasski  
Dr. Sergii M. Torba

*Agosto 2015, Santiago de Querétaro, Querétaro, México*



---

# Spectral parameter power series for polynomial pencils of Sturm-Liouville operators, Zakharov-Shabat systems and applications

By Ulises Velasco-García

*A Dissertation Submitted to the Department of Mathematics of Cinvestav-IPN in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Mathematics*

Advisors:

Dr. Vladislav V. Kravchenko

Dr. Sergii M. Torba

August 2015

Santiago de Querétaro, Querétaro, México.



---

*Dedicado a mi familia por su amor y apoyo, a mis profesores por sus conocimientos, paciencia y amistad.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	10
1.2. Objetivos . . . . .	13
1.3. Contenido . . . . .	14
1.4. Aprobación . . . . .	16
<b>2. Preliminares</b>	<b>19</b>
2.1. El método de series de potencias del parámetro espectral . . . . .	19
2.2. El sistema de Zakharov-Shabat y la transformada no lineal de Fourier	20
2.2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	20
2.2.2. La transformada no lineal de Fourier . . . . .	21
2.2.3. Parejas de Lax y ecuaciones de evolución . . . . .	21
2.2.4. Condición de cero curvatura . . . . .	23
2.2.5. Relación entre el sistema de Zakharov-Shabat y la ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	24
2.2.6. El sistema de Zakharov-Shabat, los coeficientes espectrales y la transformada continua y discreta de Fourier . . . . .	27
<b>3. Series de potencias del parámetro espectral para haces polinomiales de operadores de Sturm-Liouville</b>	<b>31</b>
3.1. Representación SPPS para las soluciones de una ecuación de Sturm- Liouville en haz . . . . .	33
3.2. Técnica del desplazamiento espectral . . . . .	37
<b>4. Problema espectral para la ecuación de movimiento de una cuerda suave con fricción distribuida</b>	<b>39</b>
4.1. Representación de la solución por medio del método SPPS . . . . .	39
4.2. Análisis del desempeño del método numérico . . . . .	40
<b>5. Sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado</b>	<b>45</b>
5.1. Una relación entre el sistema de Zakharov-Shabat generalizado y una ecuación de Sturm-Liouville en haz . . . . .	45
5.2. Coeficientes espectrales, transformada continua y discreta de Fourier para el sistema de Zakharov-Shabat con potencial complejo-valuado . .	47

<b>6. Solución del sistema de Zakharov-Shabat en términos del método SPSS y aplicaciones a la transformada no lineal de Fourier</b>	<b>49</b>
6.1. Series de potencias para el sistema generalizado de Zakharov-Shabat . . . . .	49
6.2. Problema de eigenvalores del sistema de Zakharov-Shabat . . . . .	51
6.3. Ecuación de dispersión para el problema de eigenvalores . . . . .	52
6.4. Coeficientes espectrales y transformada no lineal de Fourier continua y discreta . . . . .	54
6.5. Una relación de una ecuación de Sturm-Liouville en haz con un sistema de Dirac . . . . .	55
<b>7. Solución numérica de sistemas de Zakharov-Shabat con potenciales complej-valuados</b>	<b>57</b>
7.1. Esquema general y detalles de implementación para el método de series de potencias del parámetro espectral modificado . . . . .	57
7.2. Ejemplos numéricos . . . . .	58
<b>8. Sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado</b>	<b>63</b>
8.1. Relación entre una ecuación de Sturm-Liouville con un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado . . . . .	63
8.2. Coeficientes espectrales, transformada continua y discreta de Fourier para el sistema de Zakharov-Shabat con potencial real-valuado . . . . .	65
<b>9. Métodos para solucionar el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado y aplicaciones a la transformada no lineal de Fourier</b>	<b>69</b>
9.1. Series de potencias del parámetro espectral para ecuaciones de Sturm-Liouville . . . . .	69
9.1.1. Aplicación del método de series de potencias del parámetro espectral a una ecuación de Sturm-Liouville . . . . .	69
9.1.2. Solución general del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado . . . . .	71
9.1.3. El problema de eigenvalores . . . . .	72
9.1.4. Ecuación de dispersión para el problema de eigenvalores . . . . .	73
9.2. Aproximación analítica de operadores de transmutación . . . . .	73
9.2.1. Integrales recursivas y polinomios de onda generalizados . . . . .	75
9.3. Método generalizado para construir los primeros coeficientes de las series de Taylor de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville . . . . .	79
9.3.1. Representación en series de Taylor de la solución general del sistema de Zakharov-Shabat . . . . .	81
<b>10. Ejemplos numéricos para el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado</b>	<b>87</b>
10.1. Implementación de los métodos numéricos . . . . .	87
10.1.1. Esquema general y detalles de implementación para la aproximación analítica de operadores de transmutación . . . . .	87



10.1.2. Esquema general y detalles de implementación para el método de series de potencias del parámetro espectral . . . . .	88
10.1.3. Esquema general y detalles de implementación la generalización del método para construir los coeficientes de la serie de Taylor de la solución de una ecuación de Sturm-Liouville . . . . .	89
10.2. Ejemplos numéricos . . . . .	91
10.2.1. Perfil Rectangular . . . . .	91
10.2.2. Pulso de Satsuma-Yajima . . . . .	93
10.2.3. Potencial de dos jorobas . . . . .	95
10.2.4. Estudio del comportamiento de los eigenvalores . . . . .	95
10.2.5. Localización de eigenvalores empleando el principio del argumento . . . . .	97
<b>11. Conclusiones y recomendaciones para el trabajo a futuro</b>	<b>101</b>
11.1. Conclusiones . . . . .	101
11.2. Recomendaciones para el trabajo a futuro . . . . .	102
<b>Agradecimientos</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>115</b>



# Índice de figuras

2.1. Diagrama sobre el proceso que sigue la transformada de dispersión inversa . . . . .	21
4.1. Las gráficas de los errores absolutos (arriba) y relativos (abajo) de los eigenvalores del Ejemplo 16 calculados por medio del método SPPS usando diferente número de puntos para calcular las integrales recursivas. El eje de las abscisas corresponde al número ordinal de los eigenvalores. . . . .	42
4.2. Errores absolutos de los eigenvalores del Ejemplo 17 calculados por medio del método SPPS usando distintas cantidades de potencias formales. El eje de las abscisas corresponde al número ordinal del eigenvalor. . . . .	44
7.1. Localización de los eigenvalores del ejemplo 32 para $\epsilon = 0.2, 0.159, 0.126, 0.1, 0.0794$ y $0.063$ . . . . .	60
10.1. Comparación del espectro continuo obtenido por el método SPPS, el método AATO y el espectro continuo exacto. Se considera para cada ilustración los valores $A = 2, 3$ y $10$ respectivamente, fijando $T_1 = 0$ y $T_2 = 2$ . . . . .	92
10.2. Error absoluto del método SPPS en comparación con el error absoluto del método AATO. . . . .	94
10.3. Gráfica del espectro continuo (izquierda) y el error absoluto (derecha) del experimento numérico para el pulso de Satsuma-Yajima con $A = 2.7$ calculado con el método SPPS y el método AATO. . . . .	95
10.4. Gráfica del error absoluto de los coeficientes no lineales de Fourier $\mathbf{a}(\lambda)$ (izquierda) y $\mathbf{b}(\lambda)$ (derecha) usando los métodos SPPS y AATO numéricos con un valore de $A = 2.7$ . . . . .	96
10.5. Gráfica de la aproximación SPPS del sistema de Z-S con el potencial (10.3), cada punto corresponde a una raíz de la ecuación característica aproximada, las raíces que aparecen alrededor corresponde al error que induce el truncamiento de las series. . . . .	96

- 10.6. Gráficas de la función  $-\log |\Phi_M|$  del Ejemplo 57. En (a) los picos de la izquierda muestran la posición de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  con  $s = 0.956$ . En (b) cuando  $s = 0.9995$  es posible ver que los picos en la izquierda están mas cerca uno del otro. En (c) los picos de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están cerca de fusionarse en un eigenvalor doble cerca de  $s \approx 0.9999006472847$ , y finalmente en (d)  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos eigenvalores diferentes en  $s = 0.99999$ . 99
- 10.7. Ilustración del algoritmo basado en el principio del argumento en el Ejemplo 59 para  $s = 0.956$  (arriba a la izquierda),  $s = 0.9995$  (arriba a la derecha),  $s = 0.9999006472847$  (abajo a la izquierda) y  $s = 0.99999$  (abajo a la derecha). Los rectángulos sombreados marcan la posición de los eigenvalores. . . . . 100

# Índice de cuadros

4.1. Errores de los eigenvalores del ejemplo 16. . . . .	41
7.1. Errores de los eigenvalores del ejemplo 33. . . . .	61
10.1. Comparación del error absoluto del método SPPS, del método de series de Taylor y del método AATO. . . . .	93
10.2. Errores absolutos de los experimentos numéricos usando la mezcla del método SPPS y AATO para la aproximación de los eigenvalores y la transformada no lineal de Fourier discreta. . . . .	94
10.3. Error absoluto y relativo de los experimentos numéricos usando el método SPPS y el método AATO para el espectro discreto cuando $A = 2.7$ . . . . .	95
10.4. Comportamiento de los eigenvalores dependiendo del parámetro $s$ del Ejemplo 57. . . . .	97
10.5. Comportamiento de los eigenvalores dependiendo del parámetro $s$ en el Ejemplo 57. . . . .	98



# Abstract

In the present work a modification of the spectral parameter power series method (SPPS) is proposed which allows one to construct a representation of the general solution of the equation

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^N \lambda^k r_k. \quad (0.1)$$

The method permits to solve boundary value problems and spectral problems for equation (0.1). A convenient form of the representation leads to an efficient numerical method for solving related spectral problems.

One of the applications of this method is the solution of Zakharov-Shabat systems with either complex or real-valued potentials. In the thesis, the representations of the general solution of Zakharov-Shabat systems are constructed taking advantage of the properties of recent methods to solve Sturm-Liouville equations. The convenient form of the solution lends itself to numerical applications.

The Zakharov-Shabat system with a complex valued potential reduces to equation (0.1) with  $N = 2$ . We use this property to obtain a representation for the solution of the Zakharov-Shabat system with a complex-valued potential using the modification of the spectral parameter power series method.

The Zakharov-Shabat system with a real-valued potential can be reduced to a classical Sturm-Liouville equation (a particular case of (0.1) having  $N = 1$ ). Representations and approximations for the solutions of the Zakharov-Shabat system with a real-valued potential which are obtained using the classical spectral parameter power series method (see [49]) and the analytic approximation of transmutation operators (see [50]) are shown. Moreover a method proposed in [48] to construct first Taylor coefficients of the solution is discussed.

The convenient forms of the solution representations of Zakharov-Shabat systems with compactly supported either complex-valued or real-valued potentials allows one to construct a characteristic equation, moreover lends itself to construct a representation of the spectral coefficients which gives the possibility to determine numerically the discrete and continuous parts of the non-linear Fourier transform.

Equation (0.1) also arises in relation with the problem of the transverse displacement of a smooth string with a distributed friction. In the thesis, the solution of this problem based on the SPPS method for equation (0.1) is proposed and the performance of the method is analyzed in several numerical examples.





# Resumen

En el presente trabajo se propone una modificación del método de series de potencias del parámetro espectral (SPPS por sus siglas en inglés) para construir la representación SPPS de la solución de una ecuación de tipo

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^N \lambda^k r_k. \quad (0.2)$$

Esta modificación del método también permite resolver problemas de valor de la frontera y problemas espectrales para este tipo de ecuaciones. La forma conveniente de la representación de las soluciones se presta para construir un método numérico para aproximar eigenvalores.

Una aplicación de este método permite encontrar la solución del sistema de Zakharov-Shabat ya sea con un potencial complejo-valuado o real-valuado. En la tesis, se construyen las representaciones de la solución general del sistema de Zakharov-Shabat. La forma conveniente de las soluciones es conveniente para desarrollar un método numérico.

El sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado se reduce a una ecuación de tipo (0.2) con  $N = 2$ . Esta propiedad se aprovecha para obtener una representación de las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado empleando la modificación del método de series de potencias del parámetro espectral.

El sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real valuado se puede reducir a una ecuación de Sturm-Liouville clásica (este es un caso particular de (0.2) con  $N = 1$ ). Se muestran diversas representaciones y aproximaciones para las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado, las cuales se obtienen por medio de el método de series de potencias del parámetro espectral (vea [49]) y el método de la aproximación analítica de operadores de transmutación de Delsarte (vea [50]). Mas aún se discute un método para construir los primeros coeficientes de Taylor de una ecuación de Sturm-Liouville propuesto en [48].

Dada la forma conveniente de las representaciones de la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial de soporte compacto se puede construir una ecuación característica e incluso se construye una representación de los coeficientes espectrales que permiten obtener una aproximación numérica del espectro continuo y el espectro discreto de la transformada de Fourier.

La ecuación (0.2) también surge en relación con el problema de el desplazamiento transversal de una cuerda suave con fricción distribuida. En la tesis, se propone la solución de este problema basándose en el método SPPS para la ecuación (0.2) y el desempeño del método se analiza en varios ejemplos numéricos.

# 1 Introducción

Ecuaciones de la forma

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^N \lambda^k r_k \quad (1.1)$$

surgen en diversas aplicaciones y han sido estudiadas en varias publicaciones donde algunas veces son conocidas como ecuación tipo Schrödinger con un potencial con dependencia polinomial de energía [66, 64], ecuaciones de Schrödinger con un potencial dependiente de la energía [62], operador de Schrödinger con potenciales dependientes de la energía [59], ecuaciones de Klein-Gordon de ondas [9], ecuaciones de Sturm-Liouville dependientes de la energía [69], lápiz de operadores de Sturm-Liouville [4, 83], lápiz polinomial de ecuaciones de Sturm-Liouville [4] o haz de operadores de Sturm-Liouville [65]. El término ecuación de Sturm-Liouville en haz es el que se emplea en este trabajo para referirse a la ecuación 1.1.

Uno de los resultados presentados en esta tesis consiste en una representación en forma de series de potencias del parámetro espectral (SPPS) de la solución de la ecuación (1.1). Este resultado generaliza lo que se ha hecho para la ecuación de Sturm-Liouville

$$(pu')' + qu = \lambda ru \quad (1.2)$$

en [46] (vea también [47, 49]).

La solución general de (1.1) es representada en la forma de series de potencias en términos del parámetro espectral  $\lambda$ . Los coeficientes de las series se calculan por medio de integrales recursivas en términos de una solución particular de la ecuación de Sturm-Liouville

$$(pu'_0)' + qu_0 = 0. \quad (1.3)$$

Además, para construir la solución particular  $u_0$  uno puede usar el mismo método SPPS tal como se explicó en [47, 49].

Tal como mostró en diversas publicaciones recientes las representaciones SPPS proporcionan un método eficiente y preciso para resolver problemas de valor inicial y problemas espectrales (vea [13, 14, 24, 32, 33, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 55, 70]). En esta tesis se demuestra este hecho aplicado a la ecuación (1.1). La principal ventaja del enfoque SPPS aplicado a problemas espectrales consiste en la posibilidad de

obtener una ecuación característica (o ecuación de dispersión) de un problema de manera explícita  $\Phi(\lambda) = 0$  donde la función  $\Phi$  es analítica con respecto a  $\lambda$ . Gracias a la representación SPPS la función está dada en forma de series de Taylor cuyos coeficientes pueden ser calculados en términos de una solución particular de (1.3).

Para realizar una aproximación numérica se calcula una suma parcial de la serie de Taylor  $\Phi_M$  y la aproximación del problema espectral se reduce al problema de localizar ceros del polinomio  $\Phi_M(\lambda)$ . La precisión de este enfoque depende de que tan pequeña es la diferencia  $|\Phi - \Phi_M|$  para lo cual presentamos estimados y adicionalmente mostramos que, de acuerdo con el Teorema de Rouché, una buena aproximación de  $\Phi$  por  $\Phi_M$  en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  garantiza que ninguna raíz de  $\Phi_M$  que correspondería a un valor ficticio puede aparecer en  $\Omega$  como resultado de la truncación de la serie de potencias del parámetro espectral. Esto es, en un dominio  $\Omega$  donde el  $\max |\Phi - \Phi_M|$  es suficientemente pequeño, en este dominio todas las raíces de  $\Phi_M$  aproximan eigenvalores verdaderos del problema espectral. Se muestra también que para localizar los eigenvalores y estimar su número en un dominio complejo se puede usar el principio del argumento.

En la presente tesis se estudia el sistema de Zakharov-Shabat que es uno de los modelos físicos que se pueden reducir a una ecuación de la forma (1.1) con  $N = 2$ . Este sistema es un objeto central de estudio en la solución de diversas ecuaciones de evolución no lineales usando la transformada no lineal de Fourier (también conocida como el método del problema inverso de dispersión) [3, 5, 6, 2, 39, 41, 40, 75, 85, 86]. Algunas de estas ecuaciones son, por ejemplo, la ecuación no lineal de Schrödinger, las ecuaciones de sine-Gordon y cosine-Gordon, la ecuación modificada de Korteweg-de Vries, etc. En el caso de la ecuación no lineal de Schrödinger los eigenvalores del sistema de Zakharov-Shabat corresponden a soluciones en forma de solitón las cuales encuentran varias aplicaciones por ejemplo en fibras ópticas (vea por ejemplo [75]). El presente trabajo considera el sistema de Zakharov-Shabat en su forma mas general, es decir, con un potencial complejo-valuado (también conocido como potencial de valores complejos). También se considera para otras aplicaciones el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado. La suposición que el potencial es real-valuado es natural y común en la literatura de la ingeniería, la cual incluye perfiles convencionales tales como el rectangular, el Gaussiano, el de Satsuma-Yahima, etc.

## 1.1. Estado del Arte

En la literatura existen diversas publicaciones dedicadas a la ecuación de Sturm-Liouville (S-L) en haz, por ejemplo, en [66, 64] es llamada ecuación tipo Schrödinger con un potencial con dependencia polinomial de energía. Se construyen las representaciones integrales de las soluciones de Jost y se estudian algunas propiedades. En [62] las ecuaciones de S-L en haz son conocidas como ecuaciones de Schrödinger con un potencial dependiente de la energía, en esta publicación se consideran dos

transformaciones de Darboux de una ecuación de S-L en haz. Se obtienen funciones potenciales más complicadas de una función potencial simple por medio de la transformación de Darboux para la ecuación de S-L en haz y las eigenfunciones están dadas respectivamente. En [59] a la ecuación de S-L en haz se le conoce como operador de Schrödinger con potenciales dependientes de la energía, en este texto se estudia un problema inverso de una ecuación de S-L en haz. En particular, se muestra que la introducción del espectro discreto generalmente no conduce a singularidades de las soluciones en solitones correspondientes. También se obtienen nuevas fórmulas para las trazas las cuales pueden ser consideradas como generalizaciones de una fórmula estándar para la traza de la ecuación de S-L en haz. En [9] a las ecuaciones de S-L en haz se les conoce como ecuaciones de Klein-Gordon de ondas, en esta publicación se estudia una ecuación de S-L en haz con cierta condición de frontera en un espacio  $L^2(\mathbb{R})$  con un potencial complejo-valuado. Se estudia el espectro discreto de la ecuación de S-L en haz y se obtienen las condiciones para el potencial bajo las cuales se obtiene un número finito de eigenvalores y singularidades espectrales con multiplicidades finitas. Después se investiga el proceso de las funciones principales que corresponden a eigenvalores y las singularidades espectrales. En [69] se le conoce a las ecuaciones de S-L en haz como ecuaciones de Sturm-Liouville dependientes de la energía, en esta publicación se estudia el problema espectral inverso para reconstruir ecuaciones de Sturm-Liouville en haz a partir de dos espectros. Se da un algoritmo de reconstrucción y se establece la existencia y unicidad de la reconstrucción. Su enfoque explota esencialmente la conexión entre los problemas espectrales de la ecuación de S-L en haz y los del operador de Dirac en una forma especial. En [4] a la ecuación de S-L en haz se le llama lápiz de operadores de Sturm-Liouville, en esta publicación se investigan los problemas de valor en la frontera para las ecuaciones de S-L en haz. Usando las propiedades de los operadores de transmutación para estas ecuaciones se obtienen las fórmulas asintóticas para los eigenvalores de los problemas correspondientes. En [83] se menciona que generalmente los coeficientes  $p(x)$  y  $q(x)$  de ecuaciones de S-L en haz de orden dos están determinados únicamente por dos espectros o un espectro y constantes de normalización. En esa publicación se muestra que si  $p(x)$  y  $q(x)$  son conocidos en la mitad del intervalo del dominio, entonces únicamente un espectro basta para determinarlos en la otra mitad. En [65] se prueba el teorema de unicidad de una solución del problema inverso para una ecuación de S-L con un haz de orden dos con condiciones regulares no separables de frontera.

Existen decenas de trabajos dedicados a la primer etapa de la transformada no lineal de Fourier aplicada a la ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS), esta etapa se conoce como la transformada directa de Fourier y es donde aparece el sistema de Zakharov-Shabat (vea por ejemplo [3, 2, 6, 41, 75, 55]). Pocos trabajos muestran soluciones exactas del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial específico; entre otros ejemplos en [85] se muestra la solución exacta de un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial con forma de perfil rectangular, este es uno de los potenciales más sencillos para este sistema. En [73] se muestra una ecuación de dispersión

exacta para un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial de Satsuma-Yahima el cual es de la forma de una secante hiperbólica. La mayoría de los trabajos dedicados al sistema de Zakharov-Shabat presentan métodos numéricos donde se hace una interpolación del potencial y se aproxima una solución del problema (vea por ejemplo [12, 22, 41, 86]). En [86] se presentan diversos métodos numéricos, por ejemplo, para aproximar el espectro continuo se usan métodos discretización central y discretización hacia adelante como el método de Euler de primer orden, el método de Runge-Kutta del cuarto orden, el método de descamación de capas donde se aproxima el potencial como una señal constante a trozos, el método de Crank-Nicolson y la discretización de Ablowitz-Ladik. Para aproximar el espectro discreto en [86] se emplean principalmente dos técnicas: Se usan los algoritmos para aproximar el espectro continuo mencionados para calcular los coeficientes espectrales de Fourier y se buscan los eigenvalores usando algún método para encontrar raíces, tal como el método de Newton-Raphson por ejemplo. Estos métodos necesitan puntos iniciales buenos y se necesita ser cuidadoso en la convergencia del método. La segunda técnica consiste en reescribir el problema espectral para el operador como un problema de eigenvalores de una matriz grande. El espectro puntual del operador también se puede encontrar de esta manera. Algunas publicaciones usan técnicas variacionales, lo cual requiere un análisis físico del fenómeno, para obtener una ecuación característica y muestran resultados aproximados para el espectro discreto (vea por ejemplo [22]).

Durante los últimos años se han propuesto poderosos métodos para resolver las ecuaciones de tipo Sturm-Liouville tales como el método de series de potencias del parámetro espectral [49] el cual permite construir la serie de potencias de la solución de ecuaciones de Sturm-Liouville en su forma clásica, los coeficientes de la serie de potencias están dados en términos de una solución particular de la ecuación de Sturm-Liouville con el parámetro espectral igual con cero. Este método ha probado que, entre otras aplicaciones, proporciona un método numérico eficiente para resolver problemas de valor inicial y de valores en la frontera. Dada la forma conveniente de la representación se presta para solucionar numéricamente problemas espectrales de Sturm-Liouville efectivamente por medio del cálculo de las raíces de un polinomio.

La aproximación analítica de operadores de transmutación (AATO), presentada en [50], es un método que permite aproximar la solución de problemas espectrales de ecuaciones de Sturm-Liouville. Este método está basado en la construcción operadores de transmutación en el sentido de Delsarte. El problema de la aproximación numérica de las soluciones y los eigenvalores se reduce a la aproximación de una primitiva del potencial por medio de una combinación finita lineal de polinomios de onda generalizados introducidos en [34, 51]. Una característica interesante de este método es que permite aproximar eigenvalores de manera muy precisa.

## 1.2. Objetivos

En el presente trabajo se propone una modificación del método de series de potencias del parámetro espectral [49]. Este método permite construir una representación en series de potencias del parámetro espectral de las soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville en haz, es decir, las ecuaciones de tipo (1.1). La forma conveniente de la solución la hace conveniente para construir un método numérico para resolver los problemas de valor inicial, problemas de frontera y valores espectrales correspondientes. Un objetivo de este trabajo es explorar algunas características de este método, su eficiencia y su precisión numérica.

Otro objetivo de este trabajo consiste en estudiar el sistema de Zakharov-Shabat bajo dos enfoques principales; el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado (también conocido como función potencial de valor complejo) y el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado (o función potencial de valor real) y construir para cada caso diversas representaciones exactas y aproximadas de sus soluciones. Bajo ciertas restricciones se busca construir la transformada no lineal de Fourier continua y discreta del potencial. Se tiene como objetivo explorar las propiedades del método numérico que se obtiene de cada una de las técnicas usadas y así revelar las características, fortalezas y cualidades de cada uno.

Se muestra que es posible encontrar un procedimiento para reducir el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado a una ecuación de Sturm-Liouville en haz. Esta relación permite aplicar el método de series de potencias del parámetro espectral modificado para recuperar una representación de la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado, esto propone otro objetivo en este trabajo, encontrar una representación exacta para los coeficientes de la transformada no lineal de Fourier. Dado que la modificación del método de series de potencias del parámetro espectral permite construir un método numérico, este trabajo tiene como objetivo revelar algunas propiedades numéricas de la aproximación del espectro discreto y continuo y las eigenfunciones del sistema de Zakharov-Shabat con diversos potenciales complejo-valuados y verificar que tan buena es la aproximación de la transformada no lineal de Fourier.

Se muestra un procedimiento para reducir un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado a una ecuación de Sturm-Liouville clásica. Aprovechando los recientes métodos para resolver ecuaciones de tipo Sturm-Liouville, tales como el método SPSS clásico [49], el método de aproximación analítica de operadores de transmutación [50], se construyen varias representaciones para la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado. Aprovechando la forma conveniente en que las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat son obtenidas, bajo ciertas condiciones de frontera cuando se considera un potencial de soporte compacto se puede construir una ecuación característica para obtener el espectro discreto. Más aún, se construye una representación de la transformada de Fourier discreta y la transformada de Fourier continua.

Debido a las cualidades convenientes de los métodos para resolver las ecuaciones de Sturm-Liouville mencionados las representaciones obtenidas para la ecuación característica así como las representaciones para el espectro continuo y discreto del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial de soporte compacto se prestan para elaborar métodos numéricos que presentan propiedades interesantes. Las cualidades de cada experimento numérico son estudiadas, exploradas y comparadas con algunos resultados aproximados y exactos mostrados en la literatura.

### 1.3. Contenido

En el Capítulo 2 de este trabajo se introduce la ecuación de Sturm-Liouville (S-L) y se presenta una técnica reciente para resolver este tipo de ecuaciones, esta técnica es conocida como el método de series de potencias del parámetro espectral (SPPS). El sistema de Zakharov-Shabat surge de la transformada no lineal de Fourier aplicada a la ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS), dado que en este trabajo se busca aplicar los resultados obtenidos a la transformada no lineal de Fourier, se presenta una breve introducción a este campo. Se presenta la ecuación no lineal de Schrödinger normalizada no estocástica. Posteriormente se introduce un esquema general de los pasos más importantes que sigue la transformada no lineal de Fourier general. Se muestra la forma canónica de Lax con lo cual se puede descomponer la ENLS en una pareja de operadores. Se muestra la pareja de Lax para la ENLS una parte de la cual es también conocida como el sistema de Zakharov-Shabat que es uno de los temas de estudio de este trabajo. Posteriormente se explican con detalle algunas propiedades del sistema de Zakharov-Shabat, sus soluciones, las condiciones de frontera y finalmente se introduce la transformada discreta y continua de Fourier.

En el Capítulo 3 se muestra una modificación del método de series de potencias del parámetro espectral [49]. Este método permite construir una representación en series de potencias del parámetro espectral de las soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville en haz, las cuales son de la forma (1.1). El método permite obtener la solución general de esta ecuación como una serie de potencias en términos del parámetro espectral  $\lambda$ . Los coeficientes de las series están dados en la forma de integrales recursivas en términos de una solución particular  $u_0$  de la ecuación  $u_0'' + q(x)u_0 = 0$ .

La forma obtenida de la solución de (1.1) la hace conveniente para construir un método numérico eficiente para resolver los problemas de valor inicial, problemas de frontera y valores espectrales correspondientes. En el Capítulo 4 se implementa numéricamente el método SPPS modificado para resolver numéricamente algunas ecuaciones de Sturm-Liouville en haz cuya solución exacta es conocida. El ejemplo que se considera es el problema espectral de la ecuación de una cuerda suave con fricción distribuida. Este problema se puede reducir a una ecuación de Sturm-Liouville en haz de orden dos. Se usa este ejemplo para poder verificar el desempeño numérico del método SPPS modificado.



El Capítulo 5 presenta la relación entre una ecuación de Sturm-Liouville en haz y un sistema de Zakharov-Shabat con potencial complejo-valuado. Se considera un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado el cual se reduce fácilmente a una ecuación de tipo Sturm-Liouville en haz de orden dos. Se construye en términos de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville en haz la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado. Considerando un potencial de soporte compacto y ciertas condiciones para las soluciones de la ecuación de Z-S en la frontera se puede obtener una representación de los coeficientes no lineales (o coeficientes espectrales) de Fourier y la transformada continua y discreta de Fourier. La importancia principal de este capítulo es que reduce el resolver el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial de soporte compacto, los coeficientes de Fourier y la transformada continua y discreta de Fourier a encontrar una solución de una ecuación tipo Sturm-Liouville.

En el Capítulo 6 se muestra una representación de las soluciones de un sistema de Zakharov-Shabat generalizado en términos de las soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville en haz. Se construye la representación en series de potencias del parámetro espectral de las soluciones de un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado. Considerando un potencial complejo-valuado de soporte compacto y algunas condiciones de frontera se realiza una aplicación de las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat para construir una representación en términos de series de potencias del parámetro espectral de los coeficientes de Fourier, la transformada continua y discreta de Fourier.

Dada la forma conveniente de la representación en series de potencias del parámetro espectral de la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado y los coeficientes de Fourier en el Capítulo 7 se muestra un esquema de como implementar numéricamente el método para aproximar el espectro continuo y discreto. Se consideran algunos potenciales que han sido resueltos en la literatura para comparar resultados y estudiar algunas características del método.

En el Capítulo 8 se considera el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado y éste se reduce a una ecuación clásica de Sturm-Liouville. Se construye en términos de la solución general de una ecuación de Sturm-Liouville las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado. Posteriormente se considera un potencial de soporte compacto y condiciones en la frontera del soporte del potencial para el sistema de Zakharov-Shabat. Bajo estas condiciones se obtiene una representación de los coeficientes de Fourier, la transformada continua y discreta de Fourier. La importancia principal de este capítulo es que reduce el resolver el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial de soporte compacto y también simplifica el proceso de encontrar los coeficientes de Fourier y la transformada continua y discreta de Fourier a encontrar una solución de una ecuación de Sturm-Liouville.

En el Capítulo 8 los resultados mostrados dependen de soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville, en el Capítulo 9 se presentan algunos métodos recientes para resolver estas ecuaciones: El primer método propuesto es una aplicación directa

del método de series de potencias del parámetro espectral (para mas detalles vea [49]). Otro método está basado en un método mostrado en [50] el cual se conoce como el método de aproximación analítica de operadores de transmutación (AATO). Este método está basado en la aproximación de los núcleos de una representación en forma de ecuación integral de los operadores de transmutación [50] y permite obtener una aproximación de las soluciones de una ecuación de Sturm-Liouville por medio de operadores de transmutación. Este método permite aproximar la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado.

En el Capítulo 10 se muestran la implementación numérica de las técnicas mostradas en el Capítulo 9, esto ayuda a encontrar las cualidades, desempeño, características, ventajas y desventajas de cada uno de los métodos en un sentido numérico. Primero se considera el método AATO, se muestra un esquema general y los detalles de una implementación numérica. Debido a que el método SPPS clásico depende de la construcción de potencias formales que se obtienen en la construcción numérica del método AATO se describe como obtener el método numérico SPPS clásico a partir de los los detalles de la implementación del método SPPS clásico (además de que la implementación del método SPPS clásico es muy similar a la implementación del método SPPS modificado presentada en el Capítulo 4). Se considera el método SPPS clásico en varios experimentos numéricos, en estos casos este método será extraído de los cálculos de el método AATO. Posteriormente se implementa numéricamente y se compara cada método numérico con diferentes resultados precisos mostrados en la literatura, principalmente se muestran el comportamiento referente a la ubicación de los eigenvalores, la precisión con la que se aproxima el espectro discreto con las diversas técnicas mostradas y también se muestra como es el desempeño de cada técnica cuando se aproxima la transformada continua y discreta de Fourier.

## 1.4. Aprobación

Las principales aportaciones que contiene esta tesis fueron publicadas en los siguientes artículos:

- V. V. Kravchenko, U. Velasco-García. Dispersion equation and eigenvalues for the Zakharov-Shabat system using spectral parameter power series. *Journal of Mathematical Physics* 52, 063517 (2011); doi: 10.1063/1.3602275.
- V. V. Kravchenko, S. M. Torba, U. Velasco-García. Spectral parameter power series for polynomial pencils of Sturm-Liouville operators and Zakharov-Shabat systems. *Journal of Mathematical Physics* 56, 073508 (2015); doi: 10.1063/1.4927253.
- V. V. Kravchenko, S. M. Torba, U. Velasco-García. Nonlinear Fourier transform using transmutation operators and spectral parameter power series representations, In preparation.

Los resultados contenidos en esta tesis fueron aceptados para ser expuestos en los siguientes congresos:

- 8th American Institute of Mathematical Sciences International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, University of Technology, Dresden , Germany, 2010
- XLIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez y Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas, México, 2010.
- XLIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, 2011.
- 1st International Conference Waves in Science and Engineering (WIS&E) Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México, 2011.
- XLV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, Querétaro de Arteaga, México, 2012.
- XLVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México, 2013.
- 2nd International Conference Waves in Science and Engineering (WIS&E), Huatulco, Oaxaca, México, 2013.
- XLVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Universidad Juárez del Estado de Durango, Durango, Durango, México, 2014.



## 2 Preliminares

### 2.1. El método de series de potencias del parámetro espectral

La ecuación de Sturm-Liouville, llamada así por Jacques Charles François Sturm y Joseph Liouville, es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$(p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u \quad (2.1)$$

donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  son funciones complejo-valuadas de la variable  $x$  que satisfacen ciertas condiciones de suavidad, la constante arbitraria  $\lambda \in \mathbb{C}$  es conocida como el parámetro espectral.

En el reciente trabajo [49] se presenta una representación para las soluciones de la ecuación (2.1) en términos de una solución no trivial de la ecuación

$$(pu_0')' + qu_0 = 0$$

donde  $u_0$  es una función (en general complejo-valuada) de la variable  $x$  que satisface cierta condición de suavidad.

Este método es conocido como el método de series de potencias del parámetro espectral (SPPS), entre otras aplicaciones posibles, es un método simple y poderoso para obtener una solución numérica de problemas de valor inicial, problemas de frontera y problemas espectrales. El método SPPS se explica en el siguiente teorema.

**Teorema 1.** [49] *Asuma que en el intervalo finito  $[a, b]$ , la ecuación (2.1) posee una solución particular  $u_0$  de tal manera que las funciones  $u_0^2 r$  y  $\frac{1}{u_0^2 p}$  son continuas en  $[a, b]$ . Entonces la solución general de (2.1) en el intervalo  $(a, b)$  es de la forma*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas arbitrarias,

$$u_1 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} \quad y \quad u_2 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} \quad (2.2)$$

con  $\tilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  definidas por las relaciones recursivas

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(0)} &\equiv 1, & X^{(0)} &\equiv 1 \\ \tilde{X}^{(n)}(x) &= \begin{cases} \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) u_0^2(s) r(s) ds, & n \text{ impar} \\ \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) \frac{1}{u_0^2(s)p(s)} ds, & n \text{ par} \end{cases} \\ X^{(n)}(s) &= \begin{cases} \int_{x_0}^s X^{(n-1)}(s) u_0^2(s) r(s) ds, & n \text{ par} \\ \int_{x_0}^s X^{(n-1)}(s) \frac{1}{u_0^2(s)p(s)} ds, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $x_0$  es un punto arbitrario en  $[a, b]$  de tal manera que  $p$  es continua en  $x_0$  y  $p(x_0) \neq 0$ . Más aún, ambas series en (2.2) convergen uniformemente en  $[a, b]$ .

## 2.2. El sistema de Zakharov-Shabat y la transformada no lineal de Fourier

Uno de los temas centrales en este trabajo es el estudio del sistema de Zakharov-Shabat el cual se origina de la aplicación de la transformada no lineal de Fourier a la ecuación no lineal de Schrödinger, en esta sección se explican los detalles principales de como surge el sistema de Zakharov-Shabat en la transformada de dispersión inversa. También se explica a grandes rasgos como se obtiene la transformada no lineal de Fourier discreta y continua partiendo de un sistema de Zakharov-Shabat.

### 2.2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger

En el presente capítulo se introducirá la ecuación no lineal de Schrödinger y los pasos que se siguen para resolver esta ecuación aplicando el método de la transformada no lineal de Fourier (TNLF) [85] (también conocida como transformada de dispersión inversa). Para mayor detalle sobre la transformada no lineal de Fourier vea [2, 3, 6, 75, 85].

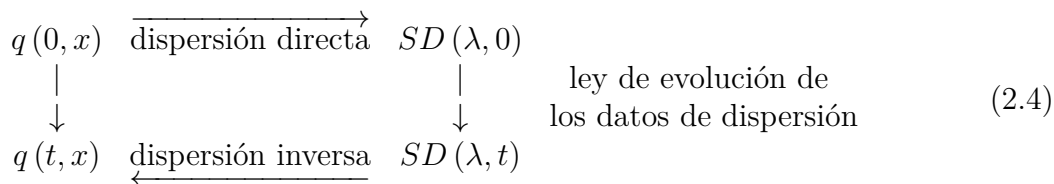
La ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS), también conocida como la ecuación cúbica de Schrödinger [3, 5, 41, 40, 75], en el caso de enfoque o el caso en el que se obtienen soluciones en forma de solitones es

$$iq_t(t, x) + \frac{1}{2}q_{xx}(t, x) + |q(t, x)|^2 q(t, x) = 0. \quad (2.3)$$

El caso en que la ecuación es de la forma  $iq_t - \frac{1}{2}q_{xx} + |q|^2 q = 0$  es llamado caso de desenfoque y se caracteriza por que no aparecen soluciones en las que se formen solitones. Un método con el que se puede resolver la ecuación no lineal de Schrödinger es conocido como la transformada no lineal de Fourier, a continuación se dará una breve explicación de la transformada no lineal de Fourier.

### 2.2.2. La transformada no lineal de Fourier

La transformada no lineal de Fourier, también conocida como la transformada de dispersión inversa (TDI), anexa a la ENLS (2.3) cierto problema espectral en la línea real para cada  $z$ . La solución del problema espectral se compone de eigenvalores, constantes de normalización asociadas y coeficientes de reflexión para el espectro continuo. Al conjunto de estos datos se le conoce como datos de dispersión (scattering data en inglés), lo cual será denotado por  $SD(\lambda, t)$ . Los datos de dispersión  $SD(\lambda, 0)$ , esto es, para  $t = 0$  están determinados únicamente por  $q(0, x)$  a través de la teoría de dispersión directa. Los datos  $SD(\lambda, t)$  evolucionan con respecto al tiempo partiendo de  $SD(\lambda, 0)$  de una manera explícita; esta es clave esencial de como el método de la TDI funciona. Finalmente,  $q(t, x)$  es determinado a partir de  $SD(\lambda, t)$  por medio de la teoría de dispersión inversa. En el Figura 2.1 se captura la idea básica de la TDI.



**Figura 2.1:** Diagrama sobre el proceso que sigue la transformada de dispersión inversa

La evolución explícita de  $SD(\lambda, 0)$  a  $SD(\lambda, t)$  es una consecuencia de la propiedad de que el problema espectral adjunto a (2.3) evoluciona linealmente con respecto a  $t$ , esto a pesar de que (2.3) es no lineal. La ENLS pertenece a una familia de ecuaciones que comparte esta propiedad. Otras ecuaciones de esta familia son las ecuaciones de Korteweg-de Vries, la ecuación de Sine-Gordon y otras ecuaciones más. A las ecuaciones que se pueden resolver por medio de la TDI son llamadas “integrables”.

### 2.2.3. Parejas de Lax y ecuaciones de evolución

En esta sección se descompone la ENLS en dos operadores diferenciales conocidos como pareja de Lax. Los resultados de esta sección se basan en los resultados mostrados en [3, 85].

**Definición 2.** [71, 85] Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert,  $\mathcal{D}$  un dominio denso en  $\mathcal{H}$  y sea  $L(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  una familia de operadores acotados indexados por un parámetro  $x$ . Si el espectro de  $L(x)$  no depende de  $x$ , entonces  $L(x)$  se llama una *familia isospectral de operadores*. Si esta familia es diagonalizable entonces para cada  $x$  la familia de operadores  $L(x)$  es similar a un operador de multiplicación  $\Lambda$ , es decir,  $L(x) = G(x)\Lambda G^{-1}(x)$ , para algún operador  $G(x)$ .

Asumiendo que  $L(x)$  varía suavemente con respecto a  $x$ , se puede calcular la tasa de cambio (con respecto a  $x$ ) de  $L(x)$  por medio de una diferencial: Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dL(x)}{dx} &= G_x \Lambda G^{-1} + G \Lambda \left( -G^{-1} G_x G^{-1} \right) \\ &= G_x G^{-1} \left( G \Lambda G^{-1} \right) - \left( G \Lambda G^{-1} \right) G_x G^{-1} \\ &= M(x)L(x) - L(x)M(x) = [M, L], \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $G_x = \frac{dG(x)}{dx}$ ,  $M = G_x G^{-1}$  y  $[M, L] := ML - LM$  es conocido como *el corchete conmutador* [85]. En otras palabras, todo operador isospectral diagonalizable  $L(x)$  satisface la ecuación diferencial (2.5).

De manera inversa; suponiendo que  $M(x)$  está dado y el operador diagonalizable desconocido  $L(x)$  evoluciona de acuerdo a (2.5) bajo la condición inicial  $L(0) = G_0 \Lambda_0 G_0^{-1}$ , sea  $G(x)$  la única solución invertible de  $G_x = MG$  con  $G(0) = G_0$ , entonces es posible verificar que  $L(x) = G(x) \Lambda_0 G(x)^{-1}$  satisface (2.5). Si se asume que la solución de la ecuación diferencial de primer orden es única, entonces  $L(x)$  es una familia isospectral (vea [85]).

**Lema 3.** [85] *Sea  $L(x)$  un operador diagonalizable para cada  $x$ . Entonces  $L(x)$  es isospectral si y sólo si satisface*

$$\frac{dL}{dx} = [M, L], \tag{2.6}$$

para algún operador  $M = M(x)$ . Si  $L$  es autoadjunto, entonces  $M$  es pseudo Hermitiana, es decir,  $M^* = -M$ .

Es importante notar que tanto  $L$  como  $M$  no tienen que ser independientes y pueden depender en un parámetro en común, por ejemplo, una función  $q(x)$ . La propiedad de isospectralidad de la solución no cambia, es decir, los eigenvalores de la solución no dependen de  $x$ . El corchete conmutador  $[M, L]$  en (2.6) puede crear ecuaciones de evolución para  $q(t, x)$  de la forma

$$\frac{\partial q}{\partial x} = K(q),$$

donde  $K(q)$  es en general una función no lineal de  $q(t, x)$  y de sus derivadas con respecto al tiempo.

**Definición 4.** Un par de operadores  $L$  y  $M$ , que dependen de  $x$ , se llaman *pareja de Lax*  $(L, M)$  si satisfacen la ecuación de Lax (2.6). Siguiendo el Lema 3, los eigenvalores del operador  $L$  son independientes de  $x$  por la condición isospectral.



### 2.2.4. Condición de cero curvatura

Siguiendo la notación presentada en el artículo [85] se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 5.** Los *eigenvalores* del operador  $L$  son las constantes  $\lambda$  que satisfacen la igualdad

$$Lv = \lambda v, \quad (2.7)$$

donde  $L$  es lo mismo que en la Definición 2.

Tomando la derivada con respecto a  $x$  de (2.7) y usando la ecuación de Lax (2.6), se obtiene que  $(L - \lambda I)(v_x - Mv) = 0$ . Dado que  $L - \lambda I$  es igual a cero solamente en los eigenvectores de  $L$ , se tiene que  $v_x - Mv$  es un elemento del eigenespacio, es decir,  $v_x - Mv = \alpha Gy$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  donde  $y$  es un vector. La elección de  $\alpha$  no influye sobre los resultados, entonces por simplicidad se fija  $\alpha = 0$ . Se deduce que la evolución con respecto a  $x$  de un eigenvector  $v(t, x)$  se basa en la ecuación lineal

$$v_x = Mv. \quad (2.8)$$

Además, es conveniente reescribir (2.7) como

$$v_t = Pv, \quad (2.9)$$

para algún operador  $P$ . La relación entre  $P$  y  $L$  se puede calcular combinando  $(DI - P)v = 0$  con  $(L - \lambda I)v = 0$ , con lo que se obtiene

$$P = \Sigma(L - \lambda I) + DI, \quad (2.10)$$

donde  $\Sigma$  es algún operador invertible y  $D = \frac{\partial}{\partial t}$ .

**Definición 6.** [85] Combinando las ecuaciones (2.8) y (2.9) usando la igualdad de derivadas mixtas, es decir,  $v_{tx} = v_{xt}$ , la ecuación de Lax (2.6) es reducida a la *condición de cero curvatura* [25, 85]

$$P_x - M_t + [P, M] = 0. \quad (2.11)$$

Note que la ecuación no lineal obtenida de (2.11) es una condición de compatibilidad entre dos ecuaciones lineales (2.8) y (2.9). Esto muestra que ciertas ecuaciones no lineales poseen una “linealidad escondida” de (2.8) y (2.9).

Después del trabajo de Zakharov y Shabat para la ENLS (vea [89]), los autores Ablowitz, Kaup, Newell y Segur proponen que el operador  $P$  se puede expresar como

$$P = \begin{pmatrix} -i\lambda & r(t, x) \\ s(t, x) & i\lambda \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde  $r(t, x)$  y  $s(t, x)$  son funciones que dependen de  $q(t, x)$  que se determinarán para producir una ecuación de evolución dada (vea [2]). De la ecuación (2.10) se tiene que el operador  $L$  corresponde la expresión

$$L = i \begin{pmatrix} D & -r(t, x) \\ s(t, x) & -D \end{pmatrix}.$$

A la ecuación (2.9) que incluye a  $P$  dado por (2.12) se le conoce como el *sistema AKNS* [2] o sistema de Dirac [3], (el cual es un caso particular del sistema de Dirac general) y toma un papel central en el estudio de la transformada no lineal de Fourier [25]. Vale la pena considerar el caso especial e importante cuando  $r(t, x) = q(t, x)$  y  $s(t, x) = -q^*(t, x)$ , el cual es generalmente conocido como el *sistema de Zakharov-Shabat* y es uno de los temas centrales de estudio de este trabajo. Se asumirá de ahora en adelante que el dominio de  $L$ ,  $P$  y  $M$  son subconjuntos del espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  denotado en la Sección 2.2.3 como  $\mathcal{H}$ .

Tal como se muestra en [85], la elección de  $L$  y  $M$  que determina alguna ecuación diferencial particular no lineal no es única. Se puede escalar  $L$  por un número o agregar una constante  $\alpha I$  a  $L$  o a  $M$ . Incluso tanto la ecuación de Lax (2.6) y (2.7) permanece sin cambios bajo transformaciones ortogonales, por ejemplo, reemplazando  $L$  y  $M$  por  $\Sigma L \Sigma^T$  y  $\Sigma M \Sigma^T$ , respectivamente, donde  $\Sigma$  es una matriz ortogonal constante, es decir,  $\Sigma^T \Sigma = I$ .

### 2.2.5. Relación entre el sistema de Zakharov-Shabat y la ecuación no lineal de Schrödinger

En esta sección se considera una pareja de operadores cuya condición de cero curvatura (2.11) es la ENLS [2, 3, 85]. Asuma que  $\vec{v}(x, \lambda, t)$  evoluciona de manera lineal con respecto a  $t$  de tal manera que los eigenvalores  $\lambda(t)$  son constantes, esto es,  $\lambda_t = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ . Considere la siguiente pareja de Lax:

$$\vec{v}_x(t, x) = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(t, x) \\ -q^*(t, x) & i\lambda \end{pmatrix} \vec{v}(t, x), \quad (2.13)$$

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \vec{v}, \quad (2.14)$$

donde las entradas de la matriz en (2.14) son funciones de  $t$ ,  $x$  y  $\lambda$ . En (2.13) se tiene que  $q$  es una función complejo-valuada con respecto a la variable real  $x$  y  $*$  representa el conjugado complejo. A (2.13) se le conoce como el *sistema de Zakharov-Shabat*. Tome la  $t$  derivada parcial, esto es,  $\partial_t$  de (2.13), es decir;

$$\vec{v}_{xt} = \begin{pmatrix} 0 & q_t \\ -q_t^* & 0 \end{pmatrix} \vec{v} + \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix} \vec{v}_t,$$

y la derivada parcial ( $\partial_x$ ) de (2.14) para obtener

$$\vec{v}_{tx} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix} \vec{v} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \vec{v}_x.$$

Igualando ambas derivadas parciales mixtas y fijando  $\lambda_t = 0$  se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & q_t \\ -q_t^* & 0 \end{pmatrix} \vec{v} + \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix} \vec{v} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ -q^* & i\lambda \end{pmatrix} \vec{v}.$$

Factorizando los coeficientes para  $v_1$  y para  $v_2$  en la igualdad anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones [3, 75]

$$A_x = Cq + Bq^*, \quad (2.15)$$

$$B_x + 2i\lambda B = -Aq + Dq + q_t,$$

$$C_x - 2i\lambda C = -Aq^* + Dq^* + q_t^*,$$

$$D_x = -Cq - Bq^*. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) implican que  $A_x = -D_x$ , entonces  $A = -D + \eta(t, \lambda)$ , siendo  $\eta(t, \lambda)$  una función arbitraria. Tomando  $\eta(t, \lambda) = 0$  se obtiene  $A = -D$  entonces las ecuaciones representadas desde (2.15) hasta (2.16) se reducen al sistema

$$A_x = Cq + Bq^*,$$

$$B_x + 2i\lambda B = -2Aq + q_t, \quad (2.17)$$

$$C_x - 2i\lambda C = -2Aq^* - q_t^*.$$

Posteriormente se procede a buscar soluciones del sistema (2.17).

Existen varios métodos para resolver este sistema, en este caso se considerará el método de expansión por series, sin embargo se puede emplear el método de operadores mostrado en [3] Sección 1.5 para encontrar una ecuación de evolución general. También Zakharov y Shabat desarrollaron una técnica que parte de una ecuación integral lineal (vea [88] y [3] Sección 3.6).

Dado que la ecuación no lineal de Schrödinger (2.3) es de segundo orden para la variable  $x$ , entonces la expansión en series alrededor de  $\lambda$  para  $A$ ,  $B$  y  $C$  incluye únicamente términos hasta  $\lambda^2$ , si se consideran mas elementos en la expansión de series,  $\lambda^4$  por ejemplo, se pueden obtener casos especiales como el de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación modificada de Korteweg y de Vries, sine-Gordon, cosine-Gordon, entre otras (vea [3, 75]). Considere

$$A = A + A\lambda + A\lambda^2,$$

$$B = A + A\lambda + A\lambda^2, \quad (2.18)$$

$$C = A + A\lambda + A\lambda^2.$$

Se procede a sustituir (2.18) en (2.17) y se igualan los coeficientes de las potencias de  $\lambda$ . Por ejemplo, de la segunda ecuación de (2.17), igualando los coeficientes de  $\lambda^0$  se obtiene

$$(B_0)_x = -2uA_0 + u_t. \quad (2.19)$$

De manera similar, se llega a que

$$B_2 = 0, \quad C_2 = 0, \quad (A_2)_x = 0,$$

entonces se puede tomar  $A_2 = a_2(z)$  donde  $a_2$  es alguna función. Se puede concluir que

$$\begin{aligned} B_1 &= ia_2(t)q, \\ C_1 &= -ia_2(t)q^*, \\ A_1 &= a_1(t), \\ A_0 &= -\frac{1}{2}a_2(t)|q|^2, \\ B_0 &= -ia_1(t)u - \frac{1}{2}a_2(t)q_x, \\ C_0 &= -ia_1(t)u^* - \frac{1}{2}a_2(t)q_x^*, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son funciones arbitrarias [3]. Si se elijen  $a_1 = 0$  y  $a_2 = -2i$  y se sustituyen en  $B_0$  de las igualdades (2.20) y se coloca el resultante en (2.19), se obtiene

$$\left(-\frac{1}{2}(-2i)q_x\right)_x = -2A_0 + u_t.$$

A partir de las expresiones para  $A_0$  en (2.20) se obtiene  $iq_{xx} = -2i|q|^2q + q_t$  y finalmente

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) es equivalente a la ecuación (2.3), lo cual se puede verificar si se considera el cambio de variable  $\tilde{t} = \frac{1}{2}t$  en (2.21), posteriormente se obtiene la ecuación (2.3) la cual es de la forma  $iq_{\tilde{t}} + q_{xx} + 2|q|^2q = 0$ .

Se puede concluir que la ENLS está relacionada con el sistema de Zakharov-Shabat (Z-S) por medio de operaciones algebraicas formales. Estas operaciones muestran que (2.14), (2.13) y (2.3) son consistentes. Esto significa que hay diferentes opciones para elegir las entradas de la matriz

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

en (2.14) de tal manera que los eigenvalores de (2.13) son funciones fijas en  $t$  cuando  $q(t, x)$  satisface la ecuación (2.3). Considerando los términos en (2.20), la ecuación (2.14) se convierte en

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} i(|q|^2 - 2\lambda^2) & iq_x + 2\lambda q \\ iq_x^* - 2\lambda q^* & -i(|q|^2 - 2\lambda^2) \end{pmatrix} \vec{v}. \quad (2.22)$$

El sistema (2.22) se emplea para determinar los datos de dispersión.

### 2.2.6. El sistema de Zakharov-Shabat, los coeficientes espectrales y la transformada continua y discreta de Fourier

En esta sección se trabajará con una función potencial inicial o potencial de entrada, es decir, está definida en un tiempo fijo  $q(x) = q(t_0, x)$ , por ejemplo,  $t_0 = 0$ . Se define la transformada no lineal de Fourier de la función  $q(x)$  con respecto al operador de Lax  $L$  (2.6) a lo largo de esta sección.

Se asumirá de ahora en adelante que el potencial  $q(x)$  satisface:

1.  $q \in L^1(\mathbb{R})$ ,
2.  $q(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Como se ha mencionado en [3, 85] el estudio de la ENLS (2.3), bajo la transformada no lineal de Fourier, se reduce al estudio del sistema de Zakharov-Shabat, el cual es de la forma

$$v_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x) \\ -q^*(x) & i\lambda \end{pmatrix} v. \quad (2.23)$$

Defina el sistema de Z-S en términos de un operador  $P$ ;

$$v_x = P(\lambda, q)v = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x) \\ -q^*(x) & i\lambda \end{pmatrix} v.$$

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial de tal manera que para todo  $v \in \mathcal{H}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  es una solución del sistema de Z-S (2.23). Defina el producto interno (o Wronskiano)

$$\langle v(x), w(x) \rangle_s = v_1(x)w_2(x) - v_2(x)w_1(x),$$

como la forma simpléctica bilinear  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$  considerada en [85]. Defina el adjunto de un vector como

$$\tilde{v}(x) = \begin{pmatrix} v_2^*(x) \\ -v_1^*(x) \end{pmatrix}.$$

Recordando que la función potencial  $q(x)$  es de tal manera que  $q \in L^1(\mathbb{R})$  y  $q(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  se tiene que las condiciones de frontera acotadas en la mitad superior del plano complejo  $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Im(\lambda) > 0\}$ , sean

$$\psi(x, \lambda) \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (2.24)$$

$$\phi(x, \lambda) \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.25)$$

Las cuales garantizan soluciones exponencialmente pequeñas, únicas excepto por los múltiplos constantes en  $\pm\infty$  para  $\Im(\lambda) > 0$ . Es posible resolver el sistema de Z-S para  $\lambda^*$  bajo las condiciones de frontera adjuntas acotadas en la mitad inferior del plano complejo  $\mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Im(\lambda) < 0\}$  las cuales son

$$\psi(x, \lambda^*) \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda^* x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\phi(x, \lambda^*) \cong \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda^* x}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Estas condiciones de frontera dan origen a dos funciones vectoriales  $\tilde{\psi}(x, \lambda^*)$  y  $\tilde{\phi}(x, \lambda^*)$ . De acuerdo a [85] las funciones vectoriales  $\tilde{\psi}(x, \lambda^*)$  y  $\tilde{\phi}(x, \lambda^*)$  son elementos de  $E_\lambda$ .

**Definición 7.** Los cuatro vectores  $\psi(x, \lambda)$ ,  $\phi(x, \lambda)$ ,  $\tilde{\psi}(x, \lambda^*)$  y  $\tilde{\phi}(x, \lambda^*)$ , todos elementos de  $E_\lambda$ , son llamados *eigenvectores canónicos*.

**Lema 8.** Según [3, 85], los *eigenvectores canónicos* satisfacen:

1.  $\langle \tilde{\psi}(x, \lambda^*), \psi(x, \lambda) \rangle_s = \langle \tilde{\phi}(x, \lambda^*), \phi(x, \lambda) \rangle_s = 1$ .
2. Los elementos de los conjuntos  $\{\tilde{\psi}(x, \lambda^*), \psi(x, \lambda)\}$ ,  $\{\tilde{\phi}(x, \lambda^*), \phi(x, \lambda)\}$  son linealmente independientes y presentan bases en  $E_\lambda$ .

**Definición 9.** Eligiendo  $\tilde{\psi}(x, \lambda^*)$  y  $\psi(x, \lambda)$  como una base para el eigenspacio, es posible proyectar  $\phi(x, \lambda)$  y  $\tilde{\phi}(x, \lambda^*)$  en esta base para obtener

$$\phi(x, \lambda) = \mathbf{a}(\lambda)\tilde{\psi}(x, \lambda^*) + \mathbf{b}(\lambda)\psi(x, \lambda), \quad (2.26)$$

$$\tilde{\phi}(x, \lambda) = \mathbf{b}^*(\lambda^*)\tilde{\psi}(x, \lambda^*) - \mathbf{a}^*(\lambda^*)\psi(x, \lambda), \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  son llamados *coeficientes espectrales* (vea [3, 5, 6]) o *coeficientes no lineales de Fourier* (vea [85]), estos coeficientes espectrales también se pueden calcular por medio de los límites

$$\mathbf{a}(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1(x) e^{i\lambda x} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{b}(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_2(x) e^{-i\lambda x}. \quad (2.29)$$

**Definición 10.** [3, 77, 85] (Transformada no lineal de Fourier ) Sea  $q(x)$  una función suficientemente suave que satisface las propiedades

1.  $q \in L^1(\mathbb{R})$ .
2.  $q(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

La *transformada no lineal de Fourier* de  $q(t)$  consiste en las funciones espectrales continua y discreta  $\hat{q}(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\tilde{q}(\lambda_j)$ ,

$$\tilde{q}(\lambda_j) = \frac{\mathbf{b}(\lambda_j)}{\mathbf{a}_\lambda(\lambda_j)} \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.30)$$

$$\hat{q}(\lambda) = \frac{\mathbf{b}(\lambda)}{\mathbf{a}(\lambda)}, \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{a}_\lambda$  representa la derivada con respecto a  $\lambda$ , las constantes  $\lambda_j \in \mathbb{C} : j = 1, 2, \dots, N$  son llamadas espectro discreto y son de tal manera que  $\forall \lambda_j, \mathbf{a}(\lambda_j) = 0$ .

La transformada no lineal de Fourier discreta está relacionada con la existencia de soluciones con forma de solitón de la ENLS [85]. Los solitones son pulsos que conservan su forma durante la propagación y pueden ser vistos como un sistema de eigenfunciones. Una onda arbitraria puede ser vista como una combinación de solitones asociados con el espectro no lineal discreto y una componente no solitónica (de radiación), asociada con el espectro no lineal continuo.

**Definición 11.** (Matriz de dispersión) Considere los cuatro eigenvectores canónicos en  $+\infty$ , esto es,

$$\left\{ \phi(+\infty, \lambda), \tilde{\phi}(+\infty, \lambda^*), \psi(+\infty, \lambda), \tilde{\psi}(+\infty, \lambda^*) \right\}.$$

Es posible proyectar  $\phi(+\infty, \lambda)$  y  $\tilde{\phi}(+\infty, \lambda^*)$  en la base  $\psi(+\infty, \lambda)$  y  $\tilde{\psi}(+\infty, \lambda^*)$  de acuerdo con (2.26), (2.27) para obtener

$$\left[ \phi(+\infty, \lambda), \tilde{\phi}(+\infty, \lambda^*) \right] = \left[ \psi(+\infty, \lambda), \tilde{\psi}(+\infty, \lambda^*) \right] S,$$

donde

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\lambda) & \mathbf{b}^*(\lambda^*) \\ \mathbf{b}(\lambda) & -\mathbf{a}^*(\lambda^*) \end{pmatrix}.$$

La matriz  $S$  es conocida como la *matriz de dispersión* y contiene los coeficientes no lineales de Fourier [3, 85].

La matriz de dispersión es una función de  $q(x)$  y contiene toda la información acerca de la dispersión de (2.23) desde  $x = -\infty$  hasta  $x = +\infty$ . La información en  $x = +\infty$  es completa en el sentido de que en este punto es posible reconstruir la solución general de la ENLS  $q(x, z)$  completamente, para mayor detalle vea [3, 75, 85].





### 3 Series de potencias del parámetro espectral para haces polinomiales de operadores de Sturm-Liouville

En este capítulo se presenta una adaptación del método SPPS para poder resolver los haces polinomiales de operadores de Sturm-Liouville así como también se presenta la técnica de desplazamiento espectral para los haces polinomiales de operadores de Sturm-Liouville.

Ecuaciones de la forma

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^N \lambda^k r_k \quad (3.1)$$

surgen en diversas aplicaciones y han sido estudiadas en numerosas publicaciones donde algunas veces han sido llamadas ecuaciones de tipo Schrödinger con un potencial polinomial dependiente de la energía [64, 66], ecuaciones de Schrödinger con un potencial dependiente de la energía [62], operadores de Schrödinger con potenciales dependientes de la energía [59], ecuaciones de Klein-Gordon s-onda [9], ecuaciones de Sturm-Liouville dependientes de la energía [69], haz de operadores de Sturm-Liouville [8, 83], haz polinomial de ecuaciones de Sturm-Liouville [4] o haz de operadores de Sturm-Liouville [65]. En esta sección  $p$ ,  $q$  y  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  son funciones complejo-valuadas dependientes de la variable real  $x$  y el número complejo  $\lambda$  representa al parámetro espectral. Se formularán posteriormente condiciones adicionales para los coeficientes de la ecuación (3.1).

En este capítulo se obtiene una representación en forma de series de potencias del parámetro espectral (SPPS) para las soluciones de (3.1). Este resultado generaliza los resultados para la ecuación de Sturm-Liouville

$$(pu')' + qu = \lambda ru, \quad (3.2)$$

este método se considera con mayor detalle en la Sección 2.1, también se pueden consultar las referencias [46, 47, 49].

La solución general de (3.1) se representa en la forma de series de potencias en términos del parámetro espectral  $\lambda$ . Los coeficientes de las series son calculados

Capítulo 3

como integrales recursivas en términos de una solución particular de la ecuación

$$(pu_0')' + qu_0 = 0. \tag{3.3}$$

Más aun, para construir la solución particular  $u_0$  se puede usar el mismo enfoque del método SPPS así como se explica en [47, 49].

Tal como se mostró en una serie de publicaciones recientes, la representación SPPS proporciona un método eficiente y preciso para resolver problemas de valor inicial, valores en la frontera y espectrales (vea [13], [14], [24], [32], [35], [33], [36], [37], [46], [47], [49], [55], [70]). En este capítulo se demuestra esta característica en una aplicación a la ecuación (3.1). La ventaja principal del enfoque del método SPPS aplicado a problemas espectrales consiste en la posibilidad de escribir una ecuación característica (o ecuación de dispersión) de un problema de manera explícita  $\Phi(\lambda) = 0$ , donde la función  $\Phi$  es analítica con respecto a  $\lambda$  debido a que la representación SPPS de la función  $\Phi$  está dada en forma de serie de Taylor cuyos coeficientes se pueden calcular en términos de la solución particular de (3.3). Para la aplicación numérica una suma parcial de la serie de Taylor  $\Phi_M$  es calculada y la solución aproximada del problema espectral se reduce al problema de encontrar ceros de un polinomio  $\Phi_M(\lambda)$ . La precisión de este enfoque depende en que tan pequeña es la diferencia  $|\Phi - \Phi_M|$  para lo cual se presentan estimados y adicionalmente se muestra que debido al teorema de Rouché una buena aproximación de  $\Phi$  por  $\Phi_M$  en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  garantiza que ninguna raíz de  $\Phi_M$  que correspondería a un eigenvalor espurio pudiera aparecer en  $\Omega$  como un resultado de la truncación de la serie de potencias del parámetro espectral. Esto es, en un dominio  $\Omega$  donde  $\max |\Phi - \Phi_M|$  es suficiente pequeño todas las raíces de  $\Phi_M$  aproximan eigenvalores genuinos del problema espectral. Se muestra que para localizar los eigenvalores y para estimar su localización en un dominio complejo se puede emplear el principio del argumento.

El sistema de Zakharov-Shabat es uno de los modelos físicos que puede ser reducido a una ecuación de la forma (3.1). Como se ha mostrado en la Sección 8.1, cuando el potencial en el sistema de Zakharov-Shabat es real-valuado la situación es mucho mas simple en el sentido de que el sistema se reduce a una ecuación de tipo (3.2) y en ese caso la representación SPPS de su solución se obtiene en la Sección 9.1.2 y se usa para resolver problemas espectrales (vea [55]). Sin embargo cuando el potencial es complejo-valuado tal reducción es en general imposible y una ecuación de la forma (3.1) con  $N = 2$  surge de manera natural. Se obtiene una representación SPPS para las soluciones de tal sistema general de Zakharov-Shabat así como una forma analítica para la ecuación de dispersión del problema espectral correspondiente en el caso de un potencial de soporte compacto. La implementación numérica del método junto con el principio del argumento es ilustrado en un par de problemas de prueba. Se muestra que el sistema de Dirac de una dimensión puede ser estudiado de una manera similar.

Otro modelo físico que se reduce a una ecuación de la forma (3.1) nuevamente con  $N = 2$ , el cual se considera a detalle en la Sección 4.1, corresponde al de una cuerda

amortiguada [7, 30, 42]. Se obtiene una forma analítica de la ecuación de dispersión del problema espectral correspondiente y se ilustra la aplicación del método SPPS con varios ejemplos numéricos.

### 3.1. Representación SPPS para las soluciones de una ecuación de Sturm-Liouville en haz

En esta sección se obtiene y se demuestra una representación SPPS para la solución general de (3.1).

**Teorema 12.** *Suponga que en un segmento finito  $[a, b]$  la ecuación*

$$(pu_0')' + qu_0 = 0$$

*posee una solución particular  $u_0(x)$  que no se anula en el intervalo de interés  $[a, b]$ , de tal forma que las funciones  $u_0^2 r_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  y  $\frac{1}{u_0^2 p}$  son continuas en  $[a, b]$ . Entonces la solución general de la ecuación*

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^N \lambda^k r_k \tag{3.4}$$

*tiene la forma  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas arbitrarias,*

$$u_1 = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \widetilde{X}^{(2n)} \quad y \quad u_2 = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n+1)} \tag{3.5}$$

*con  $\widetilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  siendo definidas por las relaciones recursivas*

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{(n)} &\equiv X^{(n)} \equiv 0 \quad \text{para } n < 0, \\ \widetilde{X}^{(0)} &\equiv X^{(0)} \equiv 1, \end{aligned}$$

*y*

$$\widetilde{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x u_0^2(y) \sum_{k=1}^N \widetilde{X}^{(n-2k+1)}(y) r_k(y) dy & n\text{-impar} \\ \int_{x_0}^x \widetilde{X}^{(n-1)}(y) \frac{1}{u_0^2(y)p(y)} dy & n\text{-par}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$X^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(y) \frac{1}{u_0^2(y)p(y)} dy & n\text{-impar} \\ \int_{x_0}^x u_0^2(y) \sum_{k=1}^N X^{(n-2k+1)}(y) r_k(y) dy & n\text{-par}, \end{cases} \tag{3.7}$$

*donde  $x_0$  es un punto arbitrario de  $[a, b]$  de tal manera que  $p(x_0) \neq 0$ . Ambas series en (3.5) convergen uniformemente en  $[a, b]$ .*

Capítulo 3

*Demostración.* Se prueba primero que  $u_1$  y  $u_2$  son en efecto soluciones de (3.4) siempre que la aplicación del operador  $L = \frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$  tenga sentido. Si  $u_0$  es una solución de  $Lu_0 = 0$  que no se anula, entonces el operador  $L = \frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$  admite una factorización de Pólya  $L = \frac{1}{u_0}\partial pu_0^2\partial\frac{1}{u_0}$ . La aplicación de  $L$  a  $u_1$  empleando (3.6) resulta en

$$\begin{aligned} Lu_1 &= \frac{1}{u_0}\partial pu_0^2\partial\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\widetilde{X}^{(2k)} = \frac{1}{u_0}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\partial\widetilde{X}^{(2k-1)} \\ &= \frac{1}{u_0}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\sum_{n=1}^N\widetilde{X}^{(2(k-n))}u_0^2r_n = \sum_{n=1}^N r_n u_0 \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\widetilde{X}^{(2(k-n))} \\ &= \sum_{n=1}^N r_n u_0 \sum_{k=n}^{\infty}\lambda^k\widetilde{X}^{(2(k-n))} = \sum_{n=1}^N r_n u_0 \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+n}\widetilde{X}^{(2k)} \\ &= \sum_{n=1}^N r_n \lambda^n u_0 \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\widetilde{X}^{(2k)} = u_1 \sum_{n=1}^N \lambda^n r_n. \end{aligned}$$

De manera similar, la aplicación de  $L$  a  $u_2$  muestra que  $u_2$  satisface (3.4).

Para dar sentido a esta cadena de igualdades es suficiente probar la convergencia uniforme de las series involucradas en  $u_1$  y  $u_2$  así como la convergencia uniforme de las series obtenidas de una diferenciación término por término de  $\frac{u_1}{u_0}$  y  $\frac{u_2}{u_0}$ . Primero, se prueba la convergencia uniforme de las series involucradas en  $u_1$ . Esto se puede lograr con la ayuda de la prueba M de Weierstrass.

Se prueba por inducción que para  $n \geq 0$  la desigualdad

$$\left|\widetilde{X}^{(2n)}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-\lfloor\frac{n}{N}\rfloor} \binom{n}{k} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \quad (3.8)$$

es válida, donde  $m$  denota el máximo de las funciones  $|u_0^2(x)r_k(x)|$ ,  $k = 1, \dots, N$  y  $\left|\frac{1}{u_0^2(x)p(x)}\right|$  en  $[a, b]$ . Para  $n = 0$ ,  $|\widetilde{X}^{(0)}| = 1$ , y entonces (3.8) se cumple. Para el paso inductivo se asume que (3.8) se cumple para algún  $n$  y se prueba que para  $n + 1$  la desigualdad

$$\left|\widetilde{X}^{(2(n+1))}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n+1-\lfloor\frac{n+1}{N}\rfloor} \binom{n+1}{k} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n+1-k)}}{(2(n+1-k))!} \quad (3.9)$$

se cumple. Suponga que  $x_0 \leq x$  (el caso opuesto es similar), recordando la definición

de  $m$  y (3.6) se tiene

$$\begin{aligned}
 |\widetilde{X}^{(2(n+1))}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \widetilde{X}^{(2n+1)}(y) \frac{1}{u_0^2(y)p(y)} dy \right| \leq m \int_{x_0}^x |\widetilde{X}^{(2n+1)}(y)| dy \\
 &\leq m \int_{x_0}^x \int_{x_0}^y \sum_{j=1}^N |\widetilde{X}^{(2(n-j+1))}(z) u_0^2(z) r_j(z)| dz dy \\
 &\leq m^2 \int_{x_0}^x \int_{x_0}^y \sum_{j=1}^N |\widetilde{X}^{(2(n-j+1))}(z)| dz dy \\
 &= m^2 \int_{x_0}^x \int_{x_0}^y \sum_{j=1}^{\min\{n+1, N\}} |\widetilde{X}^{(2(n-j+1))}(z)| dz dy.
 \end{aligned}$$

Aplicando (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 |\widetilde{X}^{(2(n+1))}(x)| &\leq m^2 \int_{x_0}^x \int_{x_0}^y \sum_{j=1}^{\min\{n+1, N\}} \sum_{k=0}^{n-j+1-\lfloor \frac{n-j+1}{N} \rfloor} \binom{n-j+1}{k} \frac{(m|z-x_0|)^{2(n-j-k+1)}}{(2(n-j-k+1))!} dz dy \\
 &= \sum_{j=1}^{\min\{n+1, N\}} \sum_{k=0}^{n-j+1-\lfloor \frac{n-j+1}{N} \rfloor} \frac{\binom{n-j+1}{k} m^{2(n-j-k+2)}}{(2(n-j-k+1))!} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^y |z-x_0|^{2(n-j-k+1)} dz dy \\
 &= \sum_{j=1}^{\min\{n+1, N\}} \sum_{k=0}^{n-j+1-\lfloor \frac{n-j+1}{N} \rfloor} \binom{n-j+1}{k} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n-j-k+2)}}{(2(n-j-k+2))!}.
 \end{aligned}$$

Es sencillo ver de  $1 \leq j \leq \min\{n+1, N\}$  y  $0 \leq k \leq n-j+1 - \lfloor \frac{n-j+1}{N} \rfloor$  que

$$0 \leq k+j-1 \leq n+1 - \lfloor \frac{n+1}{N} \rfloor.$$

Se ordenan los términos con respecto a  $l = k+j-1$ ,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\min\{n+1, N\}} \sum_{k=0}^{n-j+1-\lfloor \frac{n-j+1}{N} \rfloor} \binom{n-j+1}{k} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n-j-k+2)}}{(2(n-j-k+2))!} \\
 &= \sum_{l=0}^{n+1-\lfloor \frac{n+1}{N} \rfloor} \sum_{j=1}^{\min\{N, n+1, l+1\}} \binom{n-(j-1)}{l-(j-1)} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n+1-l)}}{(2(n+1-l))!} \\
 &\leq \sum_{l=0}^{n+1-\lfloor \frac{n+1}{N} \rfloor} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n+1-l)}}{(2(n+1-l))!} \sum_{j=0}^l \binom{n-j}{l-j}.
 \end{aligned}$$

Usando la relación de combinatoria bien conocida

$$\binom{n+1}{l} = \sum_{j=0}^l \binom{n-j}{l-j} \quad \text{para } l < n+1$$

Capítulo 3

se obtiene

$$\sum_{l=0}^{n+1-\lfloor \frac{n+1}{N} \rfloor} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n+1-l)}}{(2(n+1-l))!} \sum_{j=0}^l \binom{n-j}{l-j} = \sum_{l=0}^{n+1-\lfloor \frac{n+1}{N} \rfloor} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n+1-l)}}{(2(n+1-l))!} \binom{n+1}{l},$$

lo cual prueba por inducción la desigualdad (3.9) y el estimado (3.8) para cualquier entero  $n \geq 0$ .

Después se prueba que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \widetilde{X}^{(2n)}$  converge uniformemente en  $[a, b]$ . Se tiene que para  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} |\widetilde{X}^{(2n)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-\lfloor \frac{n}{N} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{(m|x-x_0|)^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \leq \sum_{k=0}^{n-\lfloor \frac{n}{N} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{(m(b-a))^{2(n-k)}}{(2\lfloor \frac{n}{N} \rfloor)!} \\ &\leq \frac{1}{(2\lfloor \frac{n}{N} \rfloor)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m(b-a))^{2(n-k)} 1^k = \frac{((m(b-a))^2 + 1)^n}{(2\lfloor \frac{n}{N} \rfloor)!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n |\widetilde{X}^{(2n)}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n \frac{((m(b-a))^2 + 1)^n}{(2\lfloor \frac{n}{N} \rfloor)!},$$

y agrupando términos con respecto a  $n_1 = \lfloor \frac{n}{N} \rfloor$  se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n |\widetilde{X}^{(2n)}| \leq \sum_{n_1=0}^{\infty} |\lambda|^{n_1 N} \frac{((m(b-a))^2 + 1)^{n_1 N}}{(2n_1)!} \sum_{k=0}^{N-1} |\lambda|^k ((m(b-a))^2 + 1)^k.$$

Considerando la notación  $M = |\lambda| ((m(b-a))^2 + 1)$  se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n |\widetilde{X}^{(2n)}| \leq \sum_{k=0}^{N-1} M^k \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{M^{n_1 N}}{(2n_1)!} = \sum_{k=0}^{N-1} M^k \cosh M^{N/2}.$$

Entonces, por el criterio M de Weierstrass las series  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \widetilde{X}^{(2n)}$  convergen uniformemente en  $[a, b]$ .

La demostración para la convergencia uniforme de la función  $u_2$  y las derivadas  $(\frac{u_1}{u_0})' = \frac{1}{u_0 p} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \widetilde{X}^{(2n+1)}$  y  $(\frac{u_2}{u_0})' = \frac{1}{u_0 p} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n)}$  es similar.

El último paso es verificar que el Wronskiano de  $u_1$  y  $u_2$  es diferente de cero en al menos un punto (lo cual necesariamente implica la independencia lineal de  $u_1$  y  $u_2$  en el segmento entero  $[a, b]$ ). Es fácil ver por definición que todos los  $\widetilde{X}^{(n)}(x_0)$  y  $X^{(n)}(x_0)$  se anulan excepto  $\widetilde{X}^{(0)}(x_0) = X^{(0)}(x_0) = 1$ . Entonces

$$u_1(x_0) = u_0(x_0), \quad u_1'(x_0) = u_0'(x_0), \quad (3.10)$$

$$u_2(x_0) = 0, \quad u_2'(x_0) = \frac{1}{u_0(x_0) p(x_0)}, \quad (3.11)$$

y entonces el Wronskiano de  $u_1$  y  $u_2$  en el punto  $x_0$  es  $\frac{1}{p(x_0)} \neq 0$ . □

*Observación 13.* La solución particular  $u_0$  la cual en general puede ser complejovalueada también puede construirse por medio del método SPPS (vea [47, 49]).

*Observación 14.* Cuando  $N = 1$  el resultado del Teorema 12 se reduce a la representación SPPS presentada en [47, 49], esta representación sirve para construir las soluciones de una ecuación de Sturm-Liouville clásica.

**Ejemplo 15.** Considere la ecuación diferencial

$$y'' = y(\lambda + 2\lambda^2)$$

en el segmento  $[0, 1]$  con las condiciones iniciales

$$y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0. \tag{3.12}$$

La única solución de este problema es  $y(x) = \cosh\left(x\sqrt{\lambda + 2\lambda^2}\right)$ . Esta es una ecuación de la forma de (3.4) con  $p = 1$ ,  $q = 0$  y  $r_k = k$ ,  $k = 1, 2$ . Considere su solución en términos de la representación SPPS del Teorema 12. Tomando  $x_0 = 0$  y  $u_0 \equiv 1$  como una solución particular de la ecuación diferencial  $y'' = 0$ , se calculan las funciones  $\widetilde{X}^{(2n)}$  con  $n = 1, 2, 3$  para encontrar los primeros términos de las series  $u_1 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)}$ ,

$$\begin{array}{ll} n & \widetilde{X}^{(2n)} \\ 1 & \frac{x^2}{2} \\ 2 & x^2 + \frac{x^4}{24} \\ 3 & \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{720} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Así, los primeros cuatro términos de la representación SPPS de  $u_1$  son

$$u_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2}\lambda + \left(x^2 + \frac{x^4}{24}\right)\lambda^2 + \left(\frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{720}\right)\lambda^3 + \dots \tag{3.13}$$

Note que debido a las condiciones iniciales (3.10) la solución  $u_1$  satisface (3.12) y entonces debe coincidir con  $y(x) = \cosh\left(x\sqrt{\lambda + 2\lambda^2}\right)$ . En efecto, el cálculo de los primeros cuatro términos de la serie de Taylor de la solución exacta  $y(x)$  con respecto al parámetro espectral  $\lambda$  y  $x_0 = 0$  resulta nuevamente en la serie (3.13).

## 3.2. Técnica del desplazamiento espectral

El procedimiento para construir soluciones de la ecuación (3.4) descrito en el Teorema 12 funciona cuando se conoce analíticamente o numéricamente una solución particular  $u_0$  de (3.4) con  $\lambda = 0$ . En [49] se mencionó que para la ecuación (3.2) es

Capítulo 3

también posible construir la representación SPSP de una solución general partiendo de una solución particular para algún  $\lambda = \lambda_0$  que no se anula en el dominio de interés. Tal procedimiento es llamado *técnica del desplazamiento espectral* y su utilidad ya ha sido probada para aplicaciones numéricas en [15, 32, 49].

En esta sección se muestra que la técnica del desplazamiento espectral también puede ser aplicada a la ecuación (3.4): Sea  $\lambda_0$  un número complejo fijo (no necesariamente un eigenvalor). Suponga que en el intervalo finito  $[a, b]$  una solución  $u_0$  que no se anula de la ecuación

$$(pu_0')' + qu_0 = u_0 \sum_{k=1}^N \lambda_0^k r_k \quad (3.14)$$

es conocida, de tal manera que las funciones  $u_0^2 r_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  y  $\frac{1}{u_0^2 p}$  son continuas en  $[a, b]$ . Sea  $\lambda = \lambda_0 + \Lambda$  entonces el lado derecho de la igualdad (3.4) se puede escribir de la manera

$$\begin{aligned} u \sum_{k=1}^N (\lambda_0 + \Lambda)^k r_k &= u \sum_{k=1}^N r_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \lambda_0^\ell \Lambda^{k-\ell} \\ &= u \sum_{k=1}^N r_k \lambda_0^k + u \sum_{k=1}^N \Lambda^k \sum_{\ell=0}^{N-k} \binom{k+\ell}{\ell} \lambda_0^\ell r_{k+\ell}. \end{aligned}$$

Debido a esta identidad, la ecuación (3.4) con  $\lambda = \lambda_0 + \Lambda$  es transformada nuevamente en una ecuación de la forma (3.4):

$$L_0 u = u \sum_{k=1}^N \Lambda^k \sum_{\ell=0}^{N-k} \binom{k+\ell}{\ell} \lambda_0^\ell r_{k+\ell}, \quad (3.15)$$

donde

$$L_0 u = (pu')' + u \left( q - \sum_{k=1}^N r_k \lambda_0^k \right).$$

Ahora el procedimiento descrito en el Teorema 12 se puede aplicar a la ecuación (3.15). Considerando la solución particular  $u_0$  de (3.14) y las funciones

$$\tilde{r}_k = \sum_{\ell=0}^{N-k} \binom{k+\ell}{\ell} \lambda_0^\ell r_{k+\ell},$$

se puede construir el sistema de integrales recursivas  $X^{(n)}$  y  $\widetilde{X}^{(n)}$  mediante la aplicación de (3.6) y (3.7) a las funciones  $u_0$  y  $\tilde{r}_k$ . Entonces la solución general de la ecuación (3.4) tiene la forma  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas arbitrarias y

$$u_1 = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \widetilde{X}^{(2n)} \quad \text{y} \quad u_2 = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n X^{(2n+1)}.$$



# 4 Problema espectral para la ecuación de movimiento de una cuerda suave con fricción distribuida

En la Sección 3.1 se muestra un método para resolver ecuaciones de Sturm-Liouville en haz. Con el objetivo de explorar las propiedades y características de este método en esta sección se muestra la aplicación del método SPPS modificado al problema espectral para la ecuación de movimiento de una cuerda suave con fricción distribuida. También se hace una descripción de algunas cualidades del método numérico.

## 4.1. Representación de la solución por medio del método SPPS

La ecuación para el desplazamiento transversal  $u(x, t)$  de una cuerda en un medio absorbente no homogéneo (vea, por ejemplo, [7, 30, 42]) el cual se extiende en la dirección  $x$  desde  $x = 0$  a  $x = l$  con los parámetros característicos  $c(x) > 0$ ,  $b(x) > 0$  y la característica de absorción  $\Gamma(x)$ , tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Gamma(x) \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4.1)$$

La siguiente condición expresa la hipótesis de que el medio es totalmente reflejante en  $z = 0$ :

$$u(0, t) = 0. \quad (4.2)$$

Para una onda de frecuencia  $\lambda$ , esto es, para  $u(x, t) = y(\lambda, x)e^{-i\lambda t}$ , las ecuaciones (4.1) y (4.2) toman la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( c(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \lambda^2 b(x)y + i\lambda\Gamma(x)y = 0, \\ y(\lambda, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

La ecuación en (4.3) es de la forma (3.4), esto es, una ecuación de Sturm-Liouville en haz. Para los ejemplos numéricos se considera  $c \equiv 1$ , y la absorción  $i\Gamma(x) =: 2a(x)$ , esto es,

$$y'' = 2a(x)\lambda y + b(x)\lambda^2 y \quad (4.4)$$

con las condiciones de frontera

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (4.5)$$

Se fijan  $x_0 = 0$  y  $u_0 = 1$  para el método SPPS modificado del Teorema 12. Debido a las condiciones de frontera (4.5) se tiene que  $c_1 = 0$ . Entonces la ecuación característica del problema (4.4), (4.5) es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n+1)}(1) = 0,$$

y por lo tanto el problema se reduce a localizar los ceros del polinomio

$$\Phi_M(\lambda) = \sum_{n=0}^M \lambda^n X^{(2n+1)}(1) \quad (4.6)$$

el cual aproxima la función característica.

## 4.2. Análisis del desempeño del método numérico

La ecuación (4.4) es un haz cuadrático de Sturm-Liouville con  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $r_1 = 2a$  y  $r_2 = b$ . En el siguiente ejemplo numérico las integrales recursivas  $X^{(n)}$  y  $\widetilde{X}^{(n)}$  se calculan usando la fórmula de integración de Newton-Cotes de seis puntos del séptimo orden. En cada paso para la integración (si no se especifica de manera explícita) se tomaron 100000 puntos de muestra equidistantes en el segmento  $[0, 1]$ .

**Ejemplo 16.** Considere la ecuación (4.4) con  $a = 1$  y  $b = 1$ . Este es el caso de una cuerda vibrando con una amortiguación constante. La ecuación característica exacta [18] es de la forma  $\lambda^2 + 2\lambda = -n^2\pi^2$ , esto es,

$$\lambda_{\pm n} = -1 \pm \sqrt{1 - n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La aproximación de las raíces del polinomio (4.6) por medio de la rutina `roots` de MATLAB, con la aritmética de precisión de máquina y  $M = 100$  entrega los resultados presentados en la segunda columna de la Cuadro 4.1. El mismo procedimiento pero con la precisión de 256 dígitos en Mathematica entrega los resultados presentados en la tercer columna de la Cuadro 4.1. Tal como se puede apreciar, los primeros eigenvalores son calculados con una precisión considerablemente mejor mientras que la precisión de los eigenvalores calculados mas altos no cambia significativamente.

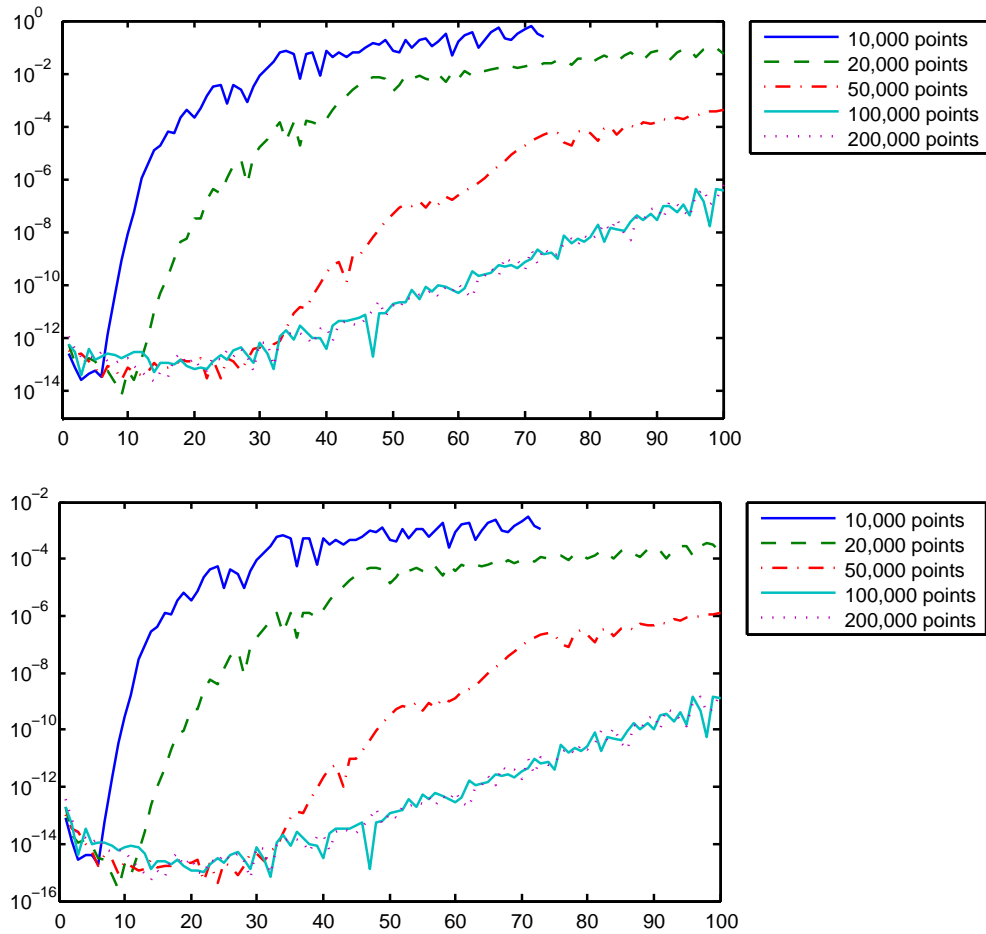
Eigenvalor	Error Abs.	Error Abs.	Error Abs.	Error Abs.
	prec. de máquina	256 digit. de prec. ( $M = 100$ )	256 digit. de prec. ( $M = 200$ )	precisión de maquina con desplazamiento espectral ( $M = 100$ )
$\lambda_{\pm 1}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-29}$	$1.4 \cdot 10^{-29}$	$6.2 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 2}$	$1.8 \cdot 10^{-13}$	$1.8 \cdot 10^{-27}$	$1.8 \cdot 10^{-27}$	$3.0 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 3}$	$3.9 \cdot 10^{-13}$	$3.0 \cdot 10^{-26}$	$3.0 \cdot 10^{-26}$	$4.0 \cdot 10^{-14}$
$\lambda_{\pm 4}$	$4.5 \cdot 10^{-12}$	$2.3 \cdot 10^{-25}$	$2.3 \cdot 10^{-25}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 5}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-24}$	$1.1 \cdot 10^{-24}$	$1.6 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 6}$	$3.7 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^{-24}$	$3.8 \cdot 10^{-24}$	$2.1 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 7}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-23}$	$1.1 \cdot 10^{-23}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 8}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-20}$	$2.9 \cdot 10^{-23}$	$2.6 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 9}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$4.5 \cdot 10^{-15}$	$6.6 \cdot 10^{-23}$	$1.8 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 10}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-22}$	$2.4 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 11}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-22}$	$3.0 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 12}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$4.9 \cdot 10^{-22}$	$3.0 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 13}$	1.5	1.9	$8.6 \cdot 10^{-22}$	$1.8 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 15}$			$2.3 \cdot 10^{-21}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 20}$			$2.4 \cdot 10^{-17}$	$7.1 \cdot 10^{-14}$
$\lambda_{\pm 25}$			2.9	$1.6 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 35}$				$9.0 \cdot 10^{-13}$
$\lambda_{\pm 50}$				$1.9 \cdot 10^{-11}$
$\lambda_{\pm 70}$				$7.8 \cdot 10^{-10}$
$\lambda_{\pm 100}$				$4.0 \cdot 10^{-7}$

**Cuadro 4.1:** Errores de los eigenvalores del ejemplo 16.

Duplicando el número de potencias formales empleadas el método entrega el doble de eigenvalores preservando la precisión de los primeros eigenvalores y mejorando la precisión de los próximos.

Esto muestra que el uso de la aritmética con precisión arbitraria permite aproximar de manera mas precisa las potencias formales lo cual deriva en una mejor precisión en los primeros eigenvalores y también permite encontrar varios eigenvalores adicionales. Mientras tanto la técnica del desplazamiento espectral descrita en la Sección 3.2 permite mejorar la precisión de los eigenvalores obtenidos así como calcular eigenvalores de orden mas alto incluso usando únicamente una aritmética de precisión de máquina.

Se emplean los valores  $\tilde{\lambda}_n = -1 - (0.1 + 3i)n$  para los desplazamientos espectrales, en cada paso se calcularon 201 potencias formales, es decir, se toma  $M = 100$  en (4.6) y se evalúa la nueva solución particular en términos de esas potencias formales y la representación SPPS. Las raíces de (4.6) mas cercanas al desplazamiento espectral actual fueron guardadas como eigenvalores aproximados. Los resultados obtenidos con el procedimiento del desplazamiento espectral son presentados en la



**Figura 4.1:** Las gráficas de los errores absolutos (arriba) y relativos (abajo) de los eigenvalores del Ejemplo 16 calculados por medio del método SPPS usando diferente número de puntos para calcular las integrales recursivas. El eje de las abscisas corresponde al número ordinal de los eigenvalores.

quinta columna de la Tabla 4.1. Los eigenvalores fueron calculados usando precisión de máquina. Se puede apreciar una mejora significativa en la precisión y en el número de eigenvalores encontrados.

Se verificó la dependencia de los errores de los eigenvalores en el número  $N$  de puntos usados para el cálculo de las integrales recursivas. Las gráficas del error absoluto y relativo de los eigenvalores para diferentes valores de  $N$  se obtuvieron usando la técnica del desplazamiento espectral descrita en la Sección 3.2 y se presentan en la Figura 4.1. El incremento del valor de  $N$  a 100000 conduce a una mejora de la precisión de los eigenvalores, mientras tanto un incremento adicional de  $N$  no lo cambia significativamente. El crecimiento lento del error para  $N = 100000$  se debe a la distancia creciente entre los valores de  $\tilde{\lambda}_n$  usado para el desplazamiento espectral y los eigenvalores. El crecimiento rápido del error observado partiendo de algún

índice de un eigenvalor particular para los valores mas pequeños de  $N$  se pueden explicar recordando que eigenfunciones del índice mas alto así como las soluciones para valores cercanos del parámetro espectral son altamente oscilatorios, esto es, tienen derivadas grandes y se toma en cuenta la fórmula para el error de la regla de integración de Newton-Cotes (vea [19, S2.4 y (2.5.26)]).

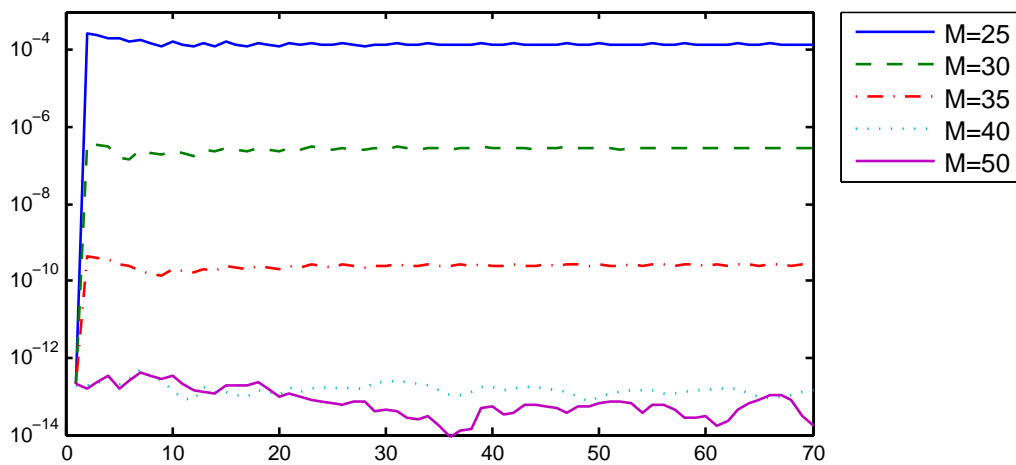
En el siguiente ejemplo se presenta un problema con coeficientes variables y se ilustra la dependencia de la precisión de los eigenvalores aproximados en el parámetro de truncamiento  $M$  en (4.6).

**Ejemplo 17.** Considere la ecuación (4.4) con  $a = x^2$  y  $b = 1$ . La ecuación característica exacta para este problema es

$$2^{\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{8}\left(6 + \sqrt{2}\lambda^{\frac{3}{2}}\right)\right)D_{\frac{1}{4}}\left(-2 - \sqrt{2}\lambda^{\frac{3}{2}}\right)\left(2^{\frac{3}{4}}\lambda^{\frac{1}{4}}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{8}\left(6 - \sqrt{2}\lambda^{\frac{3}{2}}\right)\right)D_{\frac{1}{4}}\left(-2 + \sqrt{2}\lambda^{\frac{3}{2}}\right)\left(2^{\frac{3}{4}}i\lambda^{\frac{1}{4}}\right) = 0, \quad (4.7)$$

donde  $D$  es la función parabólica del cilindro. Para comparar los resultados numéricos obtenidos por medio del método SPSPS con los eigenvalores exactos, el comando de Wolfram Mathematica `FindRoot` fue empleado para calcular las raíces de (4.7).

En la Figura 4.2 se presentan las gráficas de los errores absolutos de los eigenvalores calculados usando diferentes valores de  $M$ . Todos los cálculos fueron hechos en MATLAB usando precisión de máquina, se usaron 100000 puntos para evaluar las integrales recursivas y se aplicó la técnica del desplazamiento espectral con los desplazamientos espectrales  $\lambda_n = -1 - 4\pi ni$ ,  $n \leq 30$ . Tal como se puede ver en los gráficos presentados, el parámetro de truncamiento  $M$  en (4.6) afecta fuertemente la precisión después del primer desplazamiento espectral, mientras tanto para los desplazamientos espectrales subsecuentes la precisión es preservada. Empezando de algún valor particular de  $M$  la precisión de los eigenvalores casi no cambia, hay una pequeña diferencia entre  $M = 40$  y  $M = 50$  y ninguna diferencia visible para  $M = 60$  (no se incluyeron los errores para  $M = 60$  en los gráficos por esta razón).



**Figura 4.2:** Errores absolutos de los eigenvalores del Ejemplo 17 calculados por medio del método SPPS usando distintas cantidades de potencias formales. El eje de las abscisas corresponde al número ordinal del eigenvalor.

# 5 Sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado

Como se muestra en la introducción de este trabajo y en las referencias [3, 85], el método de la transformada de dispersión inversa reduce el estudio de la ecuación no lineal de Schrödinger al análisis espectral del sistema de Zakharov-Shabat (2.13). En el presente capítulo se reduce la ecuación de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado a una ecuación de Sturm-Liouville en haz. Se muestra como construir la solución del sistema de Zakharov-Shabat en términos de soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville en haz. Del mismo modo se muestra como construir los coeficientes espectrales y la transformada no lineal de Fourier continua y discreta en términos de las soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville en haz.

## 5.1. Una relación entre el sistema de Zakharov-Shabat generalizado y una ecuación de Sturm-Liouville en haz

Como ya se mencionó en la Sección 2.2.5, el sistema de Zakharov-Shabat surge en el método de la transformada de dispersión inversa cuando se integra la ENLS, (para mas detalles vea [3, 22, 29, 35, 55, 79, 82, 89]). En esta sección se considera el sistema generalizado de Zakharov-Shabat, también llamado algunas veces como sistema de Dirac monodimensional [35] el cual es de la forma

$$v_1' = \lambda v_1 + qv_2 \tag{5.1}$$

$$v_2' = -\lambda v_2 - pv_1, \tag{5.2}$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son funciones complejo-valuadas desconocidas de la variable independiente  $x$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  es una constante,  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones complejo-valuadas, diferenciables y que no se anulan.

La diferencia con el caso considerado en el capítulo anterior es que se considera un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado, esto es cuando el potencial  $q$  que aparece en la primera componente del sistema de Zakharov-Shabat (5.5) aparece conjugado en el sentido complejo la segunda componente (5.6), mientras que en el sistema de Zakharov-Shabat (5.1)-(5.2) es mas general en el sentido de que la función  $q$  no depende de la función  $p$ .

De (5.2) se tiene que

$$v_1 = -\frac{1}{p}(v_2' + \lambda v_2). \quad (5.3)$$

Sustituyendo esta expresión en (5.1) se obtiene una ecuación de la forma de Sturm-Liouville en haz (3.4) de orden  $N = 2$ :

$$\left(\frac{1}{p}v_2'\right)' + qv_2 = \lambda\frac{p'}{p^2}v_2 + \lambda^2\frac{1}{p}v_2. \quad (5.4)$$

De manera análoga, factorizando  $v_2$  de (5.1) y sustituyéndolo en 5.2 se obtiene una ecuación de la forma (3.4) con  $N = 2$ :

$$\left(\frac{1}{p}v_1'\right)' + pv_2 = \lambda\frac{q'}{q^2}v_2 + \lambda^2\frac{1}{q}v_2.$$

Multiplicando el parámetro espectral  $\lambda$  por  $-i$  y considerando  $p = q^*$  donde  $*$  representa el conjugado complejo y el potencial  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  complejo-valuado uno obtiene el sistema de Z-S clásico

$$v_1' = -i\lambda v_1 + qv_2, \quad (5.5)$$

$$v_2' = -q^*v_1 + i\lambda v_2. \quad (5.6)$$

Cuando el potencial  $q$  es diferenciable y no se anula es posible obtener la ecuación de Sturm-Liouville en haz

$$\left(\frac{v_2'}{q^*}\right)' + qv_2 = -\lambda\frac{i(q^*)'}{(q^*)^2}v_2 - \lambda^2\frac{1}{q^*}v_2 \quad (5.7)$$

Siguiendo el mismo proceso mostrado para sistema (5.1) y (5.2). De manera similar despejando  $v_2$  de la ecuación (5.5) y sustituyendo en la ecuación (5.6) es posible obtener la ecuación de Sturm-Liouville en haz

$$\left(\frac{v_1'}{q}\right)' + q^*v_1 = i\lambda\frac{q'}{q^2}v_1 - \lambda^2\frac{1}{q}v_1. \quad (5.8)$$

Esta es una ecuación de la forma (3.4), es decir, una ecuación de Sturm-Liouville con un haz de orden dos.

La solución general de (5.7) es

$$v_2 = c_1g_1 + c_2g_2, \quad (5.9)$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  son soluciones linealmente independientes y  $c_1, c_2$  son constantes complejas. En la Sección 3 se muestra un método para obtener una representación de la



solución de ecuaciones de Sturm-Liouville en haz, la implementación de este método al sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado se considera en la Sección 6.1.

En esta sección se obtiene la solución general de un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado en términos de la solución general de una ecuación de Sturm-Liouville en haz (5.9).

**Teorema 18.** *La solución general del sistema de Z-S (5.5), (5.6) con un potencial  $q$  complejo-valuado y que no se anula es*

$$v_1 = \frac{c_1}{q^*} (i\lambda g_1 - g_1') + \frac{c_2}{q^*} (i\lambda g_2 - g_2'), \quad (5.10)$$

$$v_2 = c_1 g_1 + c_2 g_2, \quad (5.11)$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  son soluciones linealmente independientes de (5.7) y  $c_1, c_2$  son constantes complejas.

*Demostración.* Considere la solución general  $v_2$  de (5.7) dada por (5.9). Por medio de la igualdad (5.3) (con  $p = q^*$  para el sistema de Z-S con un potencial complejo) se obtiene la expresión para  $v_1$  de la forma (5.10). Para probar que  $v_1$  y  $v_2$  son soluciones del sistema de Z-S considere la primer componente linealmente independiente de  $v_2$ , es decir,  $g_1$ . Es suficiente probar para (5.5) que

$$i\lambda \left( \frac{g_1}{q^*} \right)' - \left( \frac{-g_1'}{q^*} \right)' = -i\lambda \frac{i\lambda g_1 - g_1'}{q^*} + qg_2. \quad (5.12)$$

De la igualdad (5.7) es fácil ver que

$$\left( \frac{g_1'}{q^*} \right)' = -\lambda \frac{i(q^*)'}{q^*} g_1 - \lambda^2 \frac{1}{q^*} g_1 - qg_1,$$

sustituyendo  $\left( \frac{g_1'}{q^*} \right)'$  en (5.12) se obtiene que  $g_1$  resuelve la ecuación. Para comprobar que se satisface (5.6) el procedimiento es análogo.  $\square$

## 5.2. Coeficientes espectrales, transformada continua y discreta de Fourier para el sistema de Zakharov-Shabat con potencial complejo-valuado

Cuando se considera un potencial de soporte compacto  $q$  la condición de frontera (2.25) se reduce a

$$\vec{\phi}(-a, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda a}. \quad (5.13)$$

Considere las siguientes condiciones iniciales para  $g_1, g_2$  de la forma

$$g_1(-a) = 1, \quad g_1'(-a) = h, \quad (5.14)$$

$$g_2(-a) = 0, \quad g_2'(-a) = 1. \quad (5.15)$$

Bajo estas condiciones se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 19.** *La representación en términos de soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville (5.9) para los coeficientes espectrales Fourier con un potencial complejo-valuado  $q$  de soporte compacto que no se anula en  $[-a, a]$  es*

$$\mathbf{a}(\lambda) = \frac{-q^*(-a)}{q^*(a)} (i\lambda g_2(a) - g_2'(a)) e^{2i\lambda a} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{b}(\lambda) = -q^*(-a)g_2(a).$$

*Demostración.* Se deduce de la condición de frontera (5.13) que los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  de la solución general del sistema de Z-S (5.10) y (5.11) son

$$c_1 = 0 \quad (5.17)$$

$$c_2 = -q^*(-a)e^{i\lambda a}. \quad (5.18)$$

Con un potencial de soporte compacto las igualdades (2.28) y (2.29) para los coeficientes no lineales de Fourier se reducen a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\lambda) &= \phi_1(a)e^{i\lambda a}, \\ \mathbf{b}(\lambda) &= \phi_2(a)e^{-i\lambda a}, \end{aligned}$$

donde  $\phi_1(a)$  y  $\phi_2(a)$  son equivalentes a las soluciones  $v_1(a)$  y  $v_2(a)$  de la forma (5.10), 5.11 con los coeficientes (5.17) y (5.18).  $\square$

*Observación 20.* La igualdad (5.16) representa una función característica (o función de dispersión) para el problema espectral del sistema de Z-S ya que los ceros de esta función son los eigenvalores  $\lambda_j$ .

**Corolario 21.** *La transformada de Fourier continua y discreta para el sistema de Z-S con un potencial complejo-valuado de soporte compacto y que no se anula en  $[-a, a]$  está dada por*

$$\begin{aligned} \hat{q}(\lambda) &= \frac{-q^*(a)g_2(a)e^{-2i\lambda a}}{i\lambda g_2(a) - g_2'(a)}, \\ \tilde{q}(\lambda_j) &= \frac{-q^*(a)g_2(a)e^{-3i\lambda a}}{(i - 2a\lambda_j)g_2(a) + i\lambda_j \partial_\lambda g_2(a) - \partial_\lambda g_2'(a) - 2ia g_2'(a)}, \end{aligned}$$

donde  $\prime$  representa la derivada con respecto a  $x$  y el espectro discreto, denotado por  $\lambda_j$ , corresponde a los ceros de  $\mathbf{a}(\lambda)$ .

# 6 Solución del sistema de Zakharov-Shabat en términos del método SPPS y aplicaciones a la transformada no lineal de Fourier

En esta sección se considera el sistema de Zakharov-Shabat con potencial complejovaleado, el cual se puede reducir fácilmente a un haz polinomial de operadores de Sturm-Liouville (vea Sección 5.1) y se presenta la solución del sistema de Zakharov-Shabat en términos del método SPPS modificado.

## 6.1. Series de potencias para el sistema generalizado de Zakharov-Shabat

Aplicando el método SPPS a la ecuación (5.4) se obtiene una representación SPPS para las soluciones del sistema (5.1), (5.2). El siguiente teorema es una aplicación directa del Teorema 12 a la ecuación (5.4).

**Teorema 22.** *Suponga que en un segmento finito  $[a, b]$  la ecuación*

$$\left(\frac{1}{p}v'\right)' + qv = 0. \quad (6.1)$$

*posee una solución particular  $v_0 \in C^1[a, b]$  que no se anula y  $p$  es una función que no se anula en  $[a, b]$  de tal manera que  $\frac{v_0'}{p} \in C^1[a, b]$  y las funciones  $v_0^2 \frac{p'}{p^2}$ ,  $\frac{v_0^2}{p}$  y  $\frac{p}{v_0^2}$  son continuas en  $[a, b]$ . Entonces la solución general de (5.4) tiene la forma  $v_2 = c_1g_1 + c_2g_2$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias complejas y*

$$g_1 = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)} \quad y \quad g_2 = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} \quad (6.2)$$

con  $\widetilde{X}^{(n)}$  y  $X^{(n)}$  definidas por las relaciones recursivas

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{(n)} &\equiv X^{(n)} \equiv 0 && \text{para } n < 0, \\ \widetilde{X}^{(0)} &\equiv X^{(0)} \equiv 1, \end{aligned}$$

$y$

$$\widetilde{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x \left( \widetilde{X}^{(n-1)}(y) v_0^2(y) \frac{p'(y)}{p^2(y)} + \widetilde{X}^{(n-3)}(y) \frac{v_0^2(y)}{p(y)} \right) dy, & n- \text{ impar} \\ \int_{x_0}^x \widetilde{X}^{(n-1)}(y) \frac{p(y)}{v_0^2(y)} dy, & n- \text{ par} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$X^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(y) \frac{p(y)}{v_0^2(y)} dy, & n- \text{ impar} \\ \int_{x_0}^x \left( X^{(n-1)}(y) v_0^2(y) \frac{p'(y)}{p^2(y)} + X^{(n-3)}(y) \frac{v_0^2(y)}{p(y)} \right) dy, & n- \text{ par} \end{cases} \quad (6.4)$$

donde  $x_0$  es un punto arbitrario en  $[a, b]$ . Además, ambas series de (6.2) convergen uniformemente en  $[a, b]$ .

El Teorema 22 permite construir una solución general del sistema de Zakharov-Shabat.

**Teorema 23.** *Bajo las condiciones del Teorema 22 la solución general del sistema de Z-S (5.1), (5.2) es de la forma*

$$v_1 = -c_1 \left( \frac{v_0' + \lambda v_0}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)} + \frac{\lambda}{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k+1)} \right) - c_2 \left( \frac{v_0' + \lambda v_0}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} + \frac{1}{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k)} \right), \quad (6.5)$$

$$v_2 = c_1 v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)} + c_2 v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)}, \quad (6.6)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias complejas y las funciones  $X^{(n)}$  y  $\widetilde{X}^{(n)}$  están definidas por (6.3) y (6.4).

*Demostración.* Por el Teorema 22 una solución general de (5.4) está dada por (6.6). Es fácil ver que la derivada de  $v_2$  expresada en términos de (6.6) es

$$v_2' = c_1 v_0' \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)} + c_1 \frac{p(y)}{v_0(y)} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \widetilde{X}^{(2k+1)} + c_2 v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} + c_2 \frac{p(y)}{v_0(y)} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k)}.$$

Sustituyendo  $v_2$  y  $v_2'$  en (5.3) se obtiene (6.5). El par  $v_1, v_2$  satisfacen el sistema de Z-S (5.1), (5.2).  $\square$

*Observación 24.* En comparación a lo que se muestra en las Secciones 9.1.2, 8.1, donde se requiere que  $p = q$  en el sistema de Z-S (5.1), (5.2) y que la función  $q$  sea real valuada para poder construir una representación de la solución del sistema de Z-S, el Teorema 23 establece la representación SPPS para las soluciones del sistema de Z-S permitiendo coeficientes complejo-valuados, adicionalmente requiere que uno de ellos no se anule.

## 6.2. Problema de eigenvalores del sistema de Zakharov-Shabat

De ahora en adelante en esta sección se considera el sistema clásico de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado, es decir, un sistema de Zakharov-Shabat (5.1), (5.2) que cumple la condición  $p = q^*$  (donde  $*$  denota la conjugación compleja). Bajo esta condición se obtiene el sistema de Zakharov-Shabat tal y como se presenta en (5.5), (5.6), este sistema es

$$v_1' = \lambda v_1 + q v_2 \quad (6.7)$$

$$v_2' = -\lambda v_2 - q^* v_1, \quad (6.8)$$

Este caso surge en modelos físicos asociados con solitones ópticos, vea por ejemplo, [3, 22, 39, 41, 55, 89].

En esta sección se presentan las condiciones de frontera clásicas para un sistema de Zakharov-Shabat con potencial complejo-valuado y también se muestra como son las condiciones de frontera cuando se considera un potencial  $q$  de soporte compacto.

**Definición 25.** [39, 41] Las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat (5.1), (5.2) que satisfacen las siguientes relaciones asintóticas:

$$\vec{\sigma} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\vec{\xi} \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

para algún  $\lambda$  con  $\Re(\lambda) > 0$ , se llaman soluciones de Jost. La expresión  $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda x}$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$  significa que existe el límite  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma_1(x)}{e^{\lambda x}} = c$ ,  $c \neq 0$ , mientras  $\sigma_2(x) = o(\sigma_1(x))$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$ .

El problema de eigenvalores para el sistema de Zakharov-Shabat consiste en encontrar los valores del parámetro espectral  $\lambda$  para los cuales existe una solución no trivial de Jost.

En particular, cuando el potencial  $q$  es de soporte compacto en  $[-a, a]$ , es fácil ver que el problema de eigenvalores se reduce a encontrar tales valores de  $\lambda$  ( $\Re(\lambda) > 0$ ) para los cuales existe una solución de (5.1), (5.2) en  $(-a, a)$  que satisface las siguientes condiciones de frontera (vea, por ejemplo, [41, 40, 55])

$$v_1(-a) = 1, \quad v_2(-a) = 0, \quad (6.9)$$

$$v_1(a) = 0. \quad (6.10)$$

Asuma adicionalmente que el potencial  $q$  no se anula en su soporte.

*Observación 26.* Cuando el potencial  $q(x)$  no es de soporte compacto pero decrece suficientemente rápido cuando  $|x| \rightarrow \infty$  es posible aproximararlo por medio del potencial  $\hat{q}$  de soporte compacto en  $[-a, a]$  definido por

$$\hat{q}(x) = \begin{cases} q(x) & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Este enfoque se utiliza en diversas publicaciones (vea [55, 41, 40, 81, 86]).

### 6.3. Ecuación de dispersión para el problema de eigenvalores

En esta sección se obtiene una ecuación de dispersión (o ecuación característica) equivalente al problema de eigenvalores con un potencial de soporte compacto.

**Teorema 27.** *Sea  $q$  un potencial continuo, complejo-valuado y que no se anula en  $[-a, a]$  y  $v_0$  una solución particular que no se anula de (6.1) que satisface las condiciones del Teorema 22. Entonces  $\lambda$ , ( $\Re(\lambda) > 0$ ), es un eigenvalor del problema espectral para el sistema de Zakharov-Shabat (6.7), (6.8) bajo las condiciones de frontera (6.9), (6.10) si y sólo si se satisface la siguiente ecuación*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left( v_0(a) \left( v_0'(a) X^{(2k+1)}(a) + v_0(a) X^{(2k-1)}(a) \right) + q^*(a) X^{(2k)}(a) \right) = 0, \quad (6.11)$$

donde las funciones  $X^{(n)}$  están definidas por (6.4) con  $x_0 = -a$ .

*Demostración.* Considerando  $v_1$  y  $v_2$  del Teorema 23 con  $x_0 = -a$  se tiene  $v_1(-a) = -c_1 \left( \frac{v_0' + \lambda v_0(-a)}{Q(-a)} \right) - c_2 \left( \frac{1}{v_0(-a)} \right)$  y  $v_2(-a) = c_1 v_0(-a)$ . De la condición de frontera (6.9) se obtiene que  $c_1 = 0$  y  $c_2 = -v_0(-a)$ . De acuerdo con la condición de frontera (6.10) se obtiene que la ecuación característica es de la forma

$$\frac{v_0'(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)}(a) + \frac{1}{v_0(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k)}(a) = 0$$

la cual es equivalente a (6.11) tomando en cuenta que  $X^{(-1)} \equiv 0$ . □

*Observación 28.* Cuando  $q$  es real-valuado, se puede usar la ecuación característica presentada en la Sección 9.1.4 (vea también [55]), esta ecuación característica fue obtenida sin requerir que  $q$  no se anule.

*Observación 29.* Es posible aplicar la técnica del desplazamiento espectral descrita en la Sección 3.2 a la solución del sistema de Zakharov-Shabat. Note que se sustituye  $\lambda$  por  $\lambda - \lambda_0$  solamente en (6.2) y se mantiene el parámetro  $\lambda$  en (5.3). Entonces la ecuación característica (6.11) bajo el desplazamiento espectral se transforma en

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \left( v_0(a) \left( (v_0'(a) + \lambda_0 v_0(a)) X^{(2k+1)}(a) + v_0(a) X^{(2k-1)}(a) \right) + q^*(a) X^{(2k)}(a) \right) \quad (6.10)$$

Este teorema reduce el problema espectral para el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado de soporte compacto al problema de localizar ceros (en la mitad derecha del plano complejo) de una función analítica  $\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$  de la variable compleja  $\lambda$  con los coeficientes de Taylor  $a_k$  dados por las expresiones,

$$a_k = v_0(a) \left( v_0'(a) X^{(2k+1)} + v_0(a) X^{(2k-1)}(a) \right) + q^*(a) X^{(2k)}(a).$$

Los coeficientes  $a_k$  pueden ser calculados de manera precisa y sencilla siguiendo esta igualdad. Para poder realizar una aproximación del problema de eigenvalores se puede truncar la serie (6.11) y considerar el polinomio

$$\Phi_M(\lambda) = \sum_{k=0}^M a_k \lambda^k \quad (6.13)$$

aproximando la función  $\Phi$  con un  $M$  razonablemente grande, algunas de sus raíces dan una aproximación precisa de los eigenvalores del problema. El teorema de Rouché, vea por ejemplo, [16, Sección 3], establece que si las funciones complejo-valuadas  $f$  y  $g$  son holomorfas dentro y en algún contorno cerrado y simple, con  $|g(z)| < |f(z)|$  en  $K$ , entonces  $f$  y  $f + g$  tienen el mismo número de ceros dentro de  $K$ , donde cada cero es contado tantas veces como sea su multiplicidad. Tal como dice el teorema de Rouché, las raíces de  $\Phi_M$  que son mas cercanas a cero dan una aproximación precisa del problema de eigenvalores mientras que las raíces que son mas distantes del origen son raíces espurias que aparecen debido al truncamiento de la serie. De hecho, considere un dominio  $\Omega$  en el plano complejo de la variable  $\lambda$  de tal manera que

$$\min_{\lambda \in \partial\Omega} |\Phi_M(\lambda)| > \max_{\lambda \in \partial\Omega} |\Phi(\lambda) - \Phi_M(\lambda)| \quad (6.14)$$

(eso es,  $f = \Phi_M$ ,  $g = \Phi - \Phi_M$  y entonces  $f + g = \Phi$ ). Entonces el número de ceros de  $\Phi_M$  en  $\Omega$  coincide con el número de ceros de  $\Phi$ , o lo que es equivalente, con el número de eigenvalores localizados en  $\Omega$ . En otras palabras, en un dominio  $\Omega$  donde  $\Phi_M$  aproxima suficientemente cerca la función  $\Phi$ , es decir, donde se cumple la desigualdad (6.14), todas las raíces de  $\Phi_M$  aproximan los eigenvalores exactos del

problema espectral. Para estimar la cantidad  $\max_{\lambda \in \partial\Omega} |\Phi(\lambda) - \Phi_M(\lambda)|$  los estimados obtenidos en la prueba del Teorema 12 pueden ser usados. Obviamente si se desea aproximar las raíces cercanas a algún número complejo  $\lambda_0$  (no necesariamente cero) se puede aplicar el mismo razonamiento a la ecuación característica obtenida con la técnica del desplazamiento espectral (6.12) centrada en algún  $\lambda_0$ .

## 6.4. Coeficientes espectrales y transformada no lineal de Fourier continua y discreta

Tal como se muestra en la Sección 6.2 cuando se considera un potencial  $q$  de soporte compacto en  $[-a, a]$  permite simplificar las relaciones asintóticas (2.24) y (2.25) en condiciones iniciales para el problema del sistema de Z-S en  $-a$  y en  $a$ . Esas condiciones permiten determinar las constantes  $c_1 = 0$  y  $c_2 = -v_0(-a)e^{j\lambda a}$  para los coeficientes de las soluciones  $v_1$  y  $v_2$  del Teorema 23. Esto lleva al siguiente teorema

**Teorema 30.** *Los coeficientes espectrales de la transformada no lineal de Fourier para la ENLS con un potencial complejo-valuado  $q$  de soporte compacto y que no se anula en  $[-a, a]$ , son*

$$\mathbf{a}(\lambda) = v_0(-a)e^{2j\lambda a} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left( \frac{v_0'(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} X^{(2k+1)}(a) + \frac{X^{(2k)}(a)}{v_0(a)} \right) \quad (6.15)$$

$$\mathbf{b}(\lambda) = -v_0(-a)v_0(a) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)}(a), \quad (6.16)$$

donde las funciones  $X^{(n)}$  y  $v_0$  son las mismas que en el Teorema 22 tomando  $x_0 = -a$ .

*Demostración.* Considere  $v_1$  y  $v_2$  del Teorema 23. Tomando en cuenta que el potencial  $q$  es de soporte compacto en  $[-a, a]$ , los límites para los coeficientes espectrales (2.28) y (2.29) se reducen a

$$\mathbf{a}(\lambda) = \sigma_1(a)e^{j\lambda a} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{b}(\lambda) = \sigma_2(a)e^{-j\lambda a}, \quad (6.18)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son equivalentes a  $v_1$  y  $v_2$  con los coeficientes  $c_1 = 0$  y  $c_2 = -v_0(-a)e^{j\lambda a}$ . Las expresiones (6.17) y (6.18) son equivalentes a (6.15) y (6.16).  $\square$

Considerando la definición de la transformada no lineal de Fourier continua y discreta (2.30), (2.31) y la representación SPPS de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  del Teorema 30 se obtiene el siguiente corolario.



**Corolario 31.** *La transformada no lineal de Fourier continua y discreta para la ENLS, con un potencial complejo-valuado  $q$  de soporte compacto y que no se anula en  $[-a, a]$ , es*

$$\hat{q}(\lambda) = \frac{v_0(a)e^{-2j\lambda a} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)}(a)}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left( \frac{v_0'(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} X^{(2k+1)}(a) + \frac{1}{v_0(a)} X^{(2k)}(a) \right)}$$

$$\tilde{q}(\lambda_j) = \frac{q^*(a)v_0(a)e^{-2j\lambda_j a} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j^k X^{(2k+1)}(a)}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j^k \left( 2ja + \frac{k}{\lambda_j} \right) \left( v_0'(a)X^{(2k+1)}(a) + v_0(a)X^{(2k-1)}(a) + \frac{q^*(a)}{v_0(a)}X^{(2k)}(a) \right)},$$

donde las funciones  $X^{(n)}$  y  $v_0$  son las mismas que en el Teorema 22,  $x_0 = -a$  y  $\{\lambda_j\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  representa el espectro discreto.

## 6.5. Una relación de una ecuación de Sturm-Liouville en haz con un sistema de Dirac

Una relación entre el sistema de Dirac estacionario de una dimensión de la teoría relativista cuántica y un haz cuadrático de Sturm-Liouville se puede establecer de la siguiente manera. Considere la siguiente forma canónica del sistema de Dirac (vea, por ejemplo, [61, sección 7])

$$\begin{aligned} y_2' + (v(x) + \lambda)y_1 &= Ey_1, \\ -y_1' + (v(x) - \lambda)y_2 &= Ey_2. \end{aligned}$$

Aquí  $v$  es un potencial,  $\lambda$  correspondiente a la masa de una partícula y representa un parámetro espectral y la constante  $E$  es una energía fija. Sumando y restando las ecuaciones se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} u' + (v - E)w &= \lambda u, \\ w' - (v - E)u &= -\lambda w, \end{aligned}$$

para las funciones  $u = y_2 - y_1$  y  $w = y_2 + y_1$ . Suponiendo que  $v - E \neq 0$  en el dominio de interés, es fácil ver de la segunda igualdad que  $u = \frac{\lambda w + w'}{v - E}$ . Sustituyendo esta expresión en la primera igualdad se obtiene una ecuación de la forma de Sturm-Liouville en haz (3.4):

$$\left( \frac{w'}{v - E} \right)' + (v - E)w = \lambda^2 \frac{w}{v - E} + \lambda \left( \frac{1}{v - E} \right)' w.$$

Dado que esta ecuación es del tipo Sturm-Liouville en haz, es decir 3.1, se puede resolver usando el método de series de potencias del parámetro espectral modificado mostrado en el Capítulo 3.



# 7 Solución numérica de sistemas de Zakharov-Shabat con potenciales complejo-valorados

## 7.1. Esquema general y detalles de implementación para el método de series de potencias del parámetro espectral modificado

Considere la ecuación de Sturm-Liouville en haz (5.7) (el procedimiento para (5.8) es análogo)

$$\left(\frac{v_2'}{q^*}\right)' + qv_2 = -\lambda \frac{i(q^*)'}{(q^*)^2} v_2 - \lambda^2 \frac{1}{q^*} v_2$$

en un segmento  $[-a, a]$ . Basándose en los resultados explicados en el Capítulo (6) (vea [54]) es posible formular un algoritmo para construir los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  y la transformada no lineal de Fourier continua y discreta  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$  de un sistema de Z-S (8.1), (8.2) con un potencial complejo-valorado  $q$  de soporte compacto y que no se anula en  $[-a, a]$ . El procedimiento para construir el algoritmo es el siguiente:

1. Encuentre una solución  $v_0$  que no se anula en  $[-a, a]$  de la ecuación

$$\left(\frac{v_0'}{q^*}\right)' + qv_0 = 0.$$

2. Calcule las funciones  $X^{(n)}$ ,  $n = 0, \dots, N, \dots, 2N + 1$  usando (6.4).
3. Construya la aproximación de la solución general del sistema de Z-S presentada en el Teorema 23 truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término de la siguiente

manera:

$$v_1 \approx -c_1 \left( \frac{v'_0 + \lambda v_0}{p} \sum_{k=0}^N \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)} + \frac{\lambda}{v_0} \sum_{k=0}^N \lambda^k \widetilde{X}^{(2k+1)} \right) - c_2 \left( \frac{v'_0 + \lambda v_0}{p} \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k+1)} + \frac{1}{v_0} \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k)} \right),$$

$$v_2 \approx c_1 v_0 \sum_{k=0}^N \lambda^k \widetilde{X}^{(2k)} + c_2 v_0 \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k+1)}.$$

4. Construya la aproximación de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  de (6.15) y (6.16) truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}(\lambda) \approx v_0(-a) e^{2j\lambda a} \sum_{k=0}^N \lambda^k \left( \frac{v'_0(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} X^{(2k+1)}(a) + \frac{X^{(2k)}(a)}{v_0(a)} \right)$$

$$\mathbf{b}(\lambda) \approx -v_0(-a) v_0(a) \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k+1)}(a).$$

5. Construya la aproximación de la transformada no lineal de Fourier discreta y continua  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$  truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término de la siguiente manera:

$$\hat{q}(\lambda) \approx \frac{v_0(a) e^{-2j\lambda a} \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k+1)}(a)}{\sum_{k=0}^N \lambda^k \left( \frac{v'_0(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} X^{(2k+1)}(a) + \frac{1}{v_0(a)} X^{(2k)}(a) \right)}$$

$$\tilde{q}(\lambda_j) \approx \frac{q^*(a) v_0(a) e^{-2j\lambda_j a} \sum_{k=0}^N \lambda_j^k X^{(2k+1)}(a)}{\sum_{k=0}^N \lambda_j^k \left( 2ja + \frac{k}{\lambda_j} \right) \left( v'_0(a) X^{(2k+1)}(a) + v_0(a) X^{(2k-1)}(a) + \frac{q^*(a)}{v_0(a)} X^{(2k)}(a) \right)}.$$

## 7.2. Ejemplos numéricos

En esta sección se compara el desempeño del método SPSS modificado con los resultados presentados en [12, 78] donde el ajuste semiclásico del problema de dispersión del sistema de Zakharov-Shabat no auto-adjunto

$$i\epsilon v_x = q\omega + \Lambda v \tag{7.1}$$

$$i\epsilon \omega_x = q^* v - \Lambda \omega, \tag{7.2}$$

es considerado, vea también [38]. La función potencial  $q$  es de la forma

$$q(x) = A(x) e^{iS(x)/\epsilon}, \tag{7.3}$$

donde  $\epsilon$  es una constante.

Para aplicar los resultados de las Subsecciones 6.2 y 6.3 se aproxima el potencial  $q$  por una función de soporte compacto en  $[-a, a]$ . Si se elige  $a$  suficientemente grande el error derivado del truncamiento del potencial es suficientemente pequeño.

**Ejemplo 32.** Considere las funciones

$$A(x) = \operatorname{sech}(2x), \quad S(x) = \operatorname{sech}(2x)$$

para el potencial (7.3). Se aproxima el potencial por medio de

$$\bar{q}(x) = \begin{cases} A(x)e^{iS(x)/\epsilon}, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

para  $a = 10$ . Los eigenvalores aproximados por el método SPSS para varios valores de  $\epsilon$  se muestran en la Figura 7.1 y coinciden con los resultados mostrados en [12]. Los resultados presentados fueron obtenidos con la ayuda de la técnica del desplazamiento espectral en MATLAB usando aritmética de precisión de máquina,  $M = 250$  y 100000 puntos para el cálculo de las potencias formales. Para los valores mas pequeños de  $\epsilon$  considerados en [12] el método SPSS requiere del uso de aritmética de alta precisión debido a que el potencial  $q$  es altamente oscilatorio y la solución particular que casi se anula  $v_0$  genera valores muy grandes cuando se requiere dividir con esta función, estas características hacen complicada e inestable la aproximación numérica en el sentido de que el tiempo de cálculo se hace muy extenso y costoso, por esta razón se ha decidido no incluir esos experimentos numéricos.

**Ejemplo 33.** En [78] el sistema de Zakharov-Shabat (7.1), (7.2) con el potencial (7.3) fue considerado para

$$A(x) = -\operatorname{sech} x, \quad S'(x) = -\mu \tanh x.$$

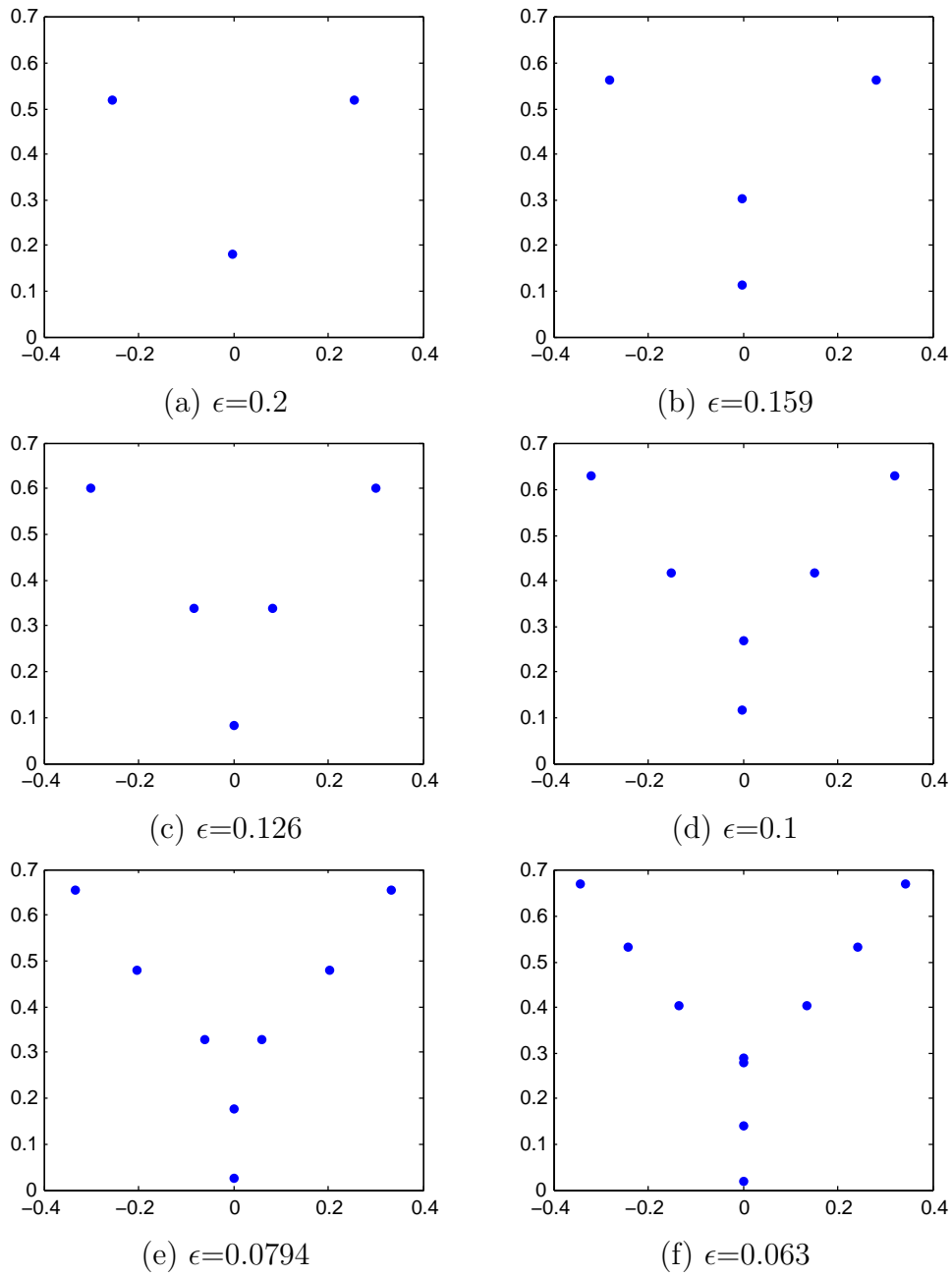
Este potencial es interesante por que se conoce una fórmula exacta para obtener sus eigenvalores. En [78] esta fórmula está dada por

$$z_n = i \left( \sqrt{1 - \frac{1}{4}\mu^2} - \epsilon \left( n - \frac{1}{2} \right) \right),$$

donde rango del índice  $n$  varía estrictamente sobre los enteros positivos que satisfacen

$$n(\mu, \epsilon) < \frac{1}{\epsilon} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}} + \frac{1}{2}. \quad (7.4)$$

Ejemplos del error absoluto del método SPSS para varios valores de  $\mu$  y  $\epsilon$  son mostrados en el Cuadro 7.1.



**Figura 7.1:** Localización de los eigenvalores del ejemplo 32 para  $\epsilon = 0.2, 0.159, 0.126, 0.1, 0.0794$  y  $0.063$ .

$\mu$	$\epsilon$	Número de eigenvalores de acuerdo a (7.4)	Eigenvalores	Error Abs.
0.5	0.5	2	$0.218245870595339i$	$3.4 \cdot 10^{-8}$
			$0.718245836551895i$	$5.5 \cdot 10^{-14}$
1	0.4	2	$0.266025403665342i$	$1.6 \cdot 10^{-11}$
			$0.666025403780913i$	$1.8 \cdot 10^{-12}$
0.5	0.3	3	$0.218245836882759i$	$1.2 \cdot 10^{-11}$
			$0.518245836565527i$	$9.3 \cdot 10^{-12}$
			$0.818245836562013i$	$6.9 \cdot 10^{-12}$
0.5	0.2	5	$0.068246698084900i$	$2.9 \cdot 10^{-9}$
			$0.268245836829048i$	$2.7 \cdot 10^{-10}$
			$0.468245836567762i$	$1.4 \cdot 10^{-9}$
			$0.668245836561404i$	$8.2 \cdot 10^{-11}$
			$0.868245836536161i$	$3.4 \cdot 10^{-12}$
1	0.15	6	$0.791025403810370i$	$7.3 \cdot 10^{-11}$
			$0.641025403330507i$	$1.8 \cdot 10^{-10}$
			$0.491025404649274i$	$3.5 \cdot 10^{-9}$
			$0.341019810999524i$	$5.8 \cdot 10^{-6}$
			$0.191026126515883i$	$1.0 \cdot 10^{-7}$
			$0.041103889485868i$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
1	0.13	7	$0.801025400788594i$	$6.7 \cdot 10^{-8}$
			$0.671025403049713i$	$3.1 \cdot 10^{-9}$
			$0.541025417533800i$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
			$0.411024735536490i$	$7.8 \cdot 10^{-5}$
			$0.281025134994191i$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
			$0.151030141516677i$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
			$0.028942251261828i$	$2.7 \cdot 10^{-3}$
1	0.12	7	$0.806025211476463i$	$4.0 \cdot 10^{-6}$
			$0.686025403243744i$	$8.8 \cdot 10^{-9}$
			$0.566025442436003i$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
			$0.446080832925892i$	$2.7 \cdot 10^{-6}$
			$0.326025177679161i$	$2.8 \cdot 10^{-6}$
			$0.206028821238862i$	$5.9 \cdot 10^{-6}$
			$0.085971656937961i$	$8.0 \cdot 10^{-5}$
0.5	0.12	8	$0.913160602214353i$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
			$0.788245879788585i$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
			$0.668245834591005i$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
			$0.548245717744945i$	$8.5 \cdot 10^{-8}$
			$0.428227707506773i$	$2.6 \cdot 10^{-5}$
			$0.308246463131394i$	$6.7 \cdot 10^{-7}$
			$0.188245728430750i$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
			$0.068265536390608i$	$1.2 \cdot 10^{-5}$

Cuadro 7.1: Errores de los eigenvalores del ejemplo 33.





# 8 Sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado

En este capítulo se muestran una técnica para reducir el sistema de Zakharov-Shabat con potencial real-valuado a una ecuación de Sturm-Liouville. Posteriormente se muestra como construir la solución del sistema de Zakharov-Shabat en términos de soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville. Del mismo modo se muestra como construir los coeficientes espectrales y la transformada no lineal de Fourier continua y discreta en términos de las soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville.

## 8.1. Relación entre una ecuación de Sturm-Liouville con un sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado

Considere un potencial real-valuado  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de soporte compacto y diferenciable. Tal como se muestra en las siguientes secciones, este caso presenta ventajas en comparación al caso donde se considera un sistema de Z-S con un potencial complejo-valuado. Una de estas ventajas es que el sistema de Z-S con potencial real-valuado se puede reducir a una ecuación de Sturm-Liouville clásica. Esto permite aplicar métodos con cualidades interesantes como el método SPSS clásico [49], el método de aproximación analítica de operadores de transmutación [50] o el método para construir los coeficientes de la serie de Taylor de una ecuación de Sturm-Liouville [48].

El sistema de Z-S con un potencial  $q(x)$  real-valuado es

$$v_1' = -i\lambda v_1 + qv_2, \tag{8.1}$$

$$v_2' = -qv_1 + i\lambda v_2. \tag{8.2}$$

Donde  $v_1$  y  $v_2$  son funciones complejo-valoradas. Considere la siguiente notación

$$u = v_1 + iv_2, \tag{8.3}$$

$$w = v_1 - iv_2, \tag{8.4}$$

$$p = iq.$$

Empleando esta notación el sistema de Z-S se transforma en

$$(\partial + p)u = -i\lambda w, \quad (8.5)$$

$$(\partial - p)w = -i\lambda u. \quad (8.6)$$

Se puede obtener de este sistema las parejas supersimétricas [55, 74]

$$(\partial + p)(\partial - p)w = -\lambda^2 w, \quad (8.7)$$

$$(\partial - p)(\partial + p)u = -\lambda^2 u. \quad (8.8)$$

Es fácil ver que las ecuaciones de este sistema son de tipo Sturm-Liouville de la forma

$$-w'' + (p^2 + p')w = \lambda^2 w \quad (8.9)$$

$$-u'' + (p^2 - p')u = \lambda^2 u. \quad (8.10)$$

A este tipo de ecuaciones se les conoce como Darboux asociadas.

En los siguientes capítulos se muestran algunos métodos para resolver las ecuaciones de Sturm-Liouville. Estos métodos son también adecuados para realizar experimentos numéricos. Una propiedad que será de utilidad a la hora de implementar numéricamente las soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville es que al estar expresadas en forma factorizada (8.7) y (8.8) tienen la característica de que cuando  $\lambda = 0$  se obtienen las ecuaciones

$$(\partial + p)(\partial - p)w_0 = 0 \quad (8.11)$$

$$(\partial - p)(\partial + p)u_0 = 0, \quad (8.12)$$

donde es fácil obtener las soluciones particulares de cada una, las cuales son  $w_0 = e^{\int p}$  y  $u_0 = e^{-\int p}$ .

La solución general de (8.9) se puede representar de la forma

$$w = Ac(\lambda, x) + Bs(\lambda, x) \quad (8.13)$$

donde  $c$  y  $s$  son soluciones linealmente independientes de la Ecuación (8.9) y los coeficientes  $A$  y  $B$  son constantes complejas. Esto lleva al siguiente teorema:

**Teorema 34.** *La solución general del sistema de Z-S (8.1), (8.2) con un potencial real-valuado  $q$  y  $\lambda \neq 0$  es*

$$v_1(x) = A((\lambda + q)c(\lambda, x) + ic_x(\lambda, x)) + B((\lambda + q)s(\lambda, x) + is_x(\lambda, x)) \quad (8.14)$$

$$v_2(x) = A(i(\lambda - q)c(\lambda, x) + c_x(\lambda, x)) + B(i(\lambda - q)s(\lambda, x) + s_x(\lambda, x)), \quad (8.15)$$

donde  $c$  y  $s$  son soluciones linealmente independientes de (8.9) y  $A, B$  son constantes complejas. La solución general del sistema de Z-S para  $\lambda = 0$  es  $v_1 = e^{\int q}$  y  $v_2 = e^{-\int q}$ .

*Demostración.* Considere la solución general  $w$  de (8.9) dada de la forma (8.13). Entonces es posible recuperar  $u$  a partir de  $w$  empleando la relación (8.6). Siguiendo este procedimiento  $u$  es de la forma

$$u = \frac{-i}{\lambda} (A(pc(\lambda, x) - c_x(\lambda, x)) + B(ps(\lambda, x) - s_x(\lambda, x))).$$

Es fácil ver de (8.3) y (8.4) que  $v_1 = \frac{1}{2}(u+w)$  y  $v_2 = \frac{-i}{2}(u-w)$ , con lo que se obtienen las expresiones (8.14) y (8.15) de  $u$  y  $w$  por sustitución simple. Para probar que un par  $v_1, v_2$  es una solución del sistema de Z-S primero considere la igualdad (8.1), sustituyendo la expresión para  $v_1$  dada por (8.14) y la expresión para  $v_2$  dada por (8.15) en la parte a mano derecha de (8.1) se obtiene

$$v_1' = qv_2 - i\lambda v_1 = \frac{(\lambda + q)(Ac_x + Bs_x) - (iAc + iBs)(\lambda^2 + q^2)}{2\lambda}. \quad (8.16)$$

Sustituyendo  $c_{xx} = (iq_x - q^2)c + \lambda^2 c$  y  $s_{xx} = (iq_x - q^2)s + \lambda^2 s$  en la derivada  $v_1'$  de (8.14) se obtiene el mismo resultado que en (8.16). Las expresiones  $c_{xx} = (iq_x - q^2)c + \lambda^2 c$  y  $s_{xx} = (iq_x - q^2)s + \lambda^2 s$  se obtienen fácilmente sustituyendo las soluciones linealmente independientes de  $w$  expresado de la forma (8.13), las cuales son  $c$  y  $s$  de (8.9). El proceso para probar que (8.14) y (8.15) satisfacen la igualdad (8.2) es análogo. Es fácil ver que  $v_1$  y  $v_2$  son soluciones linealmente independientes.  $\square$

## 8.2. Coeficientes espectrales, transformada continua y discreta de Fourier para el sistema de Zakharov-Shabat con potencial real-valuado

Para un potencial  $q$  de soporte compacto en  $[0, a]$  la condición de frontera (2.24) se reduce a

$$\vec{\phi}(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Considere las siguientes condiciones iniciales para las soluciones  $c$  y  $s$  para la ecuación de Sturm-Liouville (8.9)

$$c(0) = 1, \quad c_x(0) = h, \quad (8.18)$$

$$s(0) = 0, \quad s_x(0) = 1, \quad (8.19)$$

donde  $h$  es una constante. Bajo estas condiciones se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 35.** *Las expresiones para los coeficientes espectrales de Fourier para un potencial real-valuado de soporte compacto  $q$  en  $[0, a]$  son*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\lambda) = & \frac{e^{i\lambda a}}{2\lambda} \left( (\lambda + q(a)) (c(\lambda, a) + (i(q(0) - \lambda) - h) s(\lambda, a)) \right. \\ & \left. + i(c_x(\lambda, a) + (i(q(0) - \lambda) - h) s_x(\lambda, a)) \right), \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\lambda) = & \frac{e^{-i\lambda a}}{2\lambda} \left( i(\lambda + q(a)) (c(\lambda, a) + (i(q(0) - \lambda) - h) s(\lambda, a)) \right. \\ & \left. + (c_x(\lambda, a) + (i(q(0) - \lambda) - h) s_x(\lambda, a)) \right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

*Demostración.* Se sigue de la condición de frontera (8.17) que los coeficientes para  $A$  y  $B$  en la solución general del sistema de Z-S (8.14) y (8.15) son iguales a

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\lambda} \\ B &= \frac{i(q(0) - \lambda) - h}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Con un potencial de soporte compacto las igualdades (2.28) y (2.29) para los coeficientes no lineales de Fourier se reducen a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\lambda) &= \phi_1(a)e^{i\lambda a} \\ \mathbf{b}(\lambda) &= \phi_2(a)e^{-i\lambda a}, \end{aligned}$$

donde  $\phi_1(a)$  y  $\phi_2(a)$  son sustituidas por  $v_1(a)$  y  $v_2(a)$ . □

*Observación 36.* La igualdad (8.20) representa una función característica (o función de dispersión) para el problema espectral del sistema de Z-S, es decir, el espectro discreto denotado por  $\lambda_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , corresponde a los ceros de  $\mathbf{a}(\lambda)$ .

**Corolario 37.** *La transformada no lineal de Fourier continua y discreta para un*

sistema de Z-S con un potencial real-valuado y de soporte compacto está dada por

$$\hat{q}(\lambda) = e^{-2i\lambda a} \frac{i(\lambda - q(a))c(\lambda, a) + c_x(\lambda, a)}{\text{div}} \quad (8.22)$$

$$+ \frac{(i(q(0) - \lambda) - h)(i(\lambda - q(a))s(\lambda, a) + s_x(\lambda, a))}{\text{div}}, \quad (8.23)$$

$$\tilde{q}(\lambda_j) = \frac{e^{-i\lambda_j a} \left( i(\lambda_j + q(a))(c(\lambda_j, a) + (i(q(0) - \lambda_j) - h)s(\lambda_j, a)) \right)}{2\lambda_j \mathbf{a}_\lambda(\lambda_j)} \quad (8.24)$$

$$+ \frac{(c_x(\lambda_j, a) + (i(q(0) - \lambda_j) - h)s_x(\lambda_j, a))}{2\lambda_j \mathbf{a}_\lambda(\lambda_j)}, \quad (8.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{div} &= (\lambda + q(a))c(\lambda, a) + ic_x(\lambda, a) \\ &+ (i(q(0) - \lambda) - h)((\lambda + q(a))s(\lambda, a) + is_x(\lambda, a)), \\ \mathbf{a}_\lambda(\lambda) &= \frac{1}{2}e^{ia\lambda} \left( \frac{a(i\lambda(1 + q(a))c(\lambda, a) - c_x(\lambda, a))}{\lambda} \right. \\ &+ \frac{(\lambda - ih - q(0))(\lambda(1 + q(a))s(\lambda, a) + is_x(\lambda, a))}{\lambda} \\ &+ \frac{-ic_x(\lambda, a) + (ih - \lambda + q(0))s_x(\lambda, a)}{\lambda^2} \\ &+ (1 + q(a))(-is(\lambda, a) + c_\lambda(\lambda, a) - (h + i(\lambda - q(0)))s_{x\lambda}(\lambda, a)) \\ &\left. + \frac{s_x(\lambda, a) + ic_{x\lambda}(\lambda, a) + (\lambda - ih - q(0))s_{x\lambda}(\lambda, a)}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

El espectro discreto, denotado por  $\lambda_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , corresponde a los ceros de  $\mathbf{a}(\lambda)$ .



# 9 Métodos para solucionar el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado y aplicaciones a la transformada no lineal de Fourier

## 9.1. Series de potencias del parámetro espectral para ecuaciones de Sturm-Liouville

En el presente capítulo se resuelve el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado usando el método SPPS. La suposición de un potencial real-valuado es natural y común en la literatura de la ingeniería, la cual incluye perfiles convencionales tales como el rectangular, la Gaussiana y el pulso de Satsuma-Yajima [41, 40, 75, 22].

Esta forma SPPS de la solución general de una ecuación de S-L nos permite construir una ecuación de dispersión correspondiente al problema de eigenvalores del sistema de Z-S con un potencial de soporte compacto. De esta manera el problema de eigenvalores se reduce al problema de localizar ceros de una función analítica dada por su serie de Taylor. Para obtener una solución numérica del problema de eigenvalores uno puede considerar una serie truncada y entonces para el problema computacional práctico el problema se reduce a encontrar las raíces de un polinomio.

### 9.1.1. Aplicación del método de series de potencias del parámetro espectral a una ecuación de Sturm-Liouville

En el Capítulo 8.1 se obtienen las ecuaciones de Sturm-Liouville (8.9) y (8.10), las cuales son de la forma

$$\begin{aligned} -w'' + (-q^2 + iq')w &= \lambda^2 w \\ -u'' + (-q^2 - iq')u &= \lambda^2 u, \end{aligned}$$

del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real (8.1), (8.2). Como se mencionó en ese capítulo una cualidad de las ecuaciones (8.9) y (8.10) es que se pueden presentar en la forma factorizada (8.7) y (8.8) lo cual facilita aplicar el método SPPS dada la posibilidad de que cuando  $\lambda = 0$  se pueden escribir las soluciones exactas de (8.11) y (8.12) las cuales son  $w_0 = e^{i \int q}$  y  $u_0 = e^{-i \int q}$ . Note que para una función potencial continua  $q$  definida en un intervalo finito cerrado ambas funciones  $u_0$  y  $w_0$  carecen de ceros. En este capítulo se muestra como construir la solución general del sistema de Z-S con un potencial real (8.1), (8.2) a partir de la solución particular  $w_0$  (el proceso para construir la solución del sistema de Z-S (8.1), (8.2) a partir de la solución  $u_0$  es análogo). También considerando condiciones de frontera para un potencial  $q$  de soporte compacto se construye una ecuación característica.

Introduzca las siguientes secuencias de funciones auxiliares:

$$\left\{ X^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} \text{ y } \left\{ \tilde{X}^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

definidas en cualquier intervalo cerrado finito  $[a, b]$  donde  $q$  es continua por las relaciones recursivas

$$X^{(0)}(x) \equiv \tilde{X}^{(0)}(x) \equiv 1, \tag{9.1}$$

$$X^{(n)}(x) = \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(s) e^{(-1)^n 2Q(s)} ds, \tag{9.2}$$

$$\tilde{X}^{(n)}(x) = \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) e^{(-1)^{n+1} 2Q(s)} ds, \tag{9.3}$$

donde  $x_0$  es un punto fijo arbitrario en  $[a, b]$ .

**Teorema 38.** *Sea la función complejo-valuada  $q$  de tal manera que satisface las siguientes condiciones de suavidad en un intervalo finito  $[a, b]$ ,  $q \in C^1(a, b) \cap C[a, b]$  y sea  $\lambda$  cualquier número complejo. Entonces la solución general de la ecuación (8.7) es de la forma*

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2, \tag{9.4}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas arbitrarias y

$$w_1(x) = e^{Q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \tilde{X}^{(2n)}(x) \tag{9.5}$$

$$w_2(x) = e^{Q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} X^{(2n+1)}(x), \tag{9.6}$$

donde  $Q(x) = \int q(x) dx$ ,  $X^{(k)}$ ,  $\tilde{X}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  están definidas por (9.2) y (9.3), y ambas series en (9.5) y (9.6) convergen uniformemente en  $[a, b]$ .



*Demostración.* La prueba consiste en la aplicación del método SPPS presentado en [46, 49, 47] considerando que  $w_0 = e^Q$  es una solución particular que no se anula de (8.11). Este resultado permite obtener una solución general de la ecuación de Sturm-Liouville para cualquier valor del parámetro espectral partiendo de una solución particular que no se anula de la misma ecuación de Sturm-Liouville con algún valor fijo del parámetro espectral  $\lambda_0$ , por ejemplo  $\lambda_0 = 0$ .  $\square$

La forma obtenida de una solución general es igualmente conveniente para obtener una ecuación de dispersión (o ecuación característica) para el problema de eigenvalores tal como se muestra en el presente capítulo (vea también [14] donde se aplica un enfoque similar para el cálculo de los eigenvalores de energía de los pozos cuánticos).

### 9.1.2. Solución general del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado

En esta sección se muestra una solución general del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial  $q$  real-valuado en términos del método SPPS.

**Teorema 39.** *Sea  $q$  una función continua real valuada definida en un segmento finito  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Entonces la solución general del sistema de Z-S (8.1) y (8.2) es de la forma*

$$v_1(x) = \frac{c_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-1)^n Q(x)} \lambda^n \tilde{X}^{(n)}(x) + \frac{c_2}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-1)^{n+1} Q(x)} \lambda^n X^{(n)}(x), \quad (9.7)$$

$$v_2(x) = i \frac{c_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{(-1)^n Q(x)} \lambda^n \tilde{X}^{(n)}(x) - \frac{c_2}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{(-1)^{n+1} Q(x)} \lambda^n X^{(n)}(x) \quad (9.8)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas arbitrarias,  $Q$  es la antiderivada de  $iq$  y las series convergen uniformemente en  $[a, b]$ .

*Demostración.* En la Sección 8.1 la función  $w$ , dada de la forma (8.4), representa una solución de (8.7), de acuerdo al Teorema 38 una forma general de la solución  $w$  está dada por (9.4), (9.5) y (9.6). Se obtiene  $u$  a partir de (8.6) de la siguiente manera

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} (\partial - q(x)) w(x) = \frac{1}{\lambda} e^{Q(x)} \partial \left( e^{-Q(x)} w(x) \right).$$

Aplicando este operador a  $w_1$  expresado como (9.5) se obtiene

$$u_1(x) = \frac{1}{\lambda} (\partial - q(x)) w_1 = \frac{1}{\lambda} e^{Q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \partial \tilde{X}^{(2n)}(x),$$

siguiendo el mismo procedimiento para  $w_2$  se obtiene

$$u_2(x) = \frac{1}{\lambda} (\partial - q(x)) v_2(x) = \frac{1}{\lambda} e^{Q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \partial X^{(2n+1)}(x).$$

De las ecuaciones (9.1), (9.2) y (9.3) se obtiene que  $\partial \tilde{X}^{(0)} = 0$ ,  $\partial X^{(2n+1)} = e^{-2Q} X^{(2n)}$  y  $\partial \tilde{X}^{(2n)} = e^{-2Q} \tilde{X}^{(2n-1)}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{-Q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n+1} \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \\ u_2(x) &= e^{-Q(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} X^{(2n)}(x). \end{aligned}$$

Finalmente tomando en cuenta las relaciones

$$n_1 = \frac{1}{2}(u + v) \quad n_2 = -\frac{i}{2}(u - v)$$

se obtiene (9.7) y (9.8). □

En el Teorema 39 se construye una representación de la solución del sistema de Zakharov-Shabat en la forma de series de potencias con respecto al parámetro espectral  $\lambda$ . Vale la pena mencionar que un enfoque bien conocido que consiste en representar las soluciones como series en términos de potencias negativas del parámetro espectral lleva a métodos asintóticos diferentes y aproximaciones que son útiles en el caso cuando los parámetros tienden a infinito o son suficientemente grandes. Esto no funciona para resolver los problemas de eigenvalores del tipo que se consideran en el trabajo presente.

### 9.1.3. El problema de eigenvalores

En la Sección 8.2 se muestran como se simplifica la condición de frontera (2.24) para el sistema de Z-S cuando se considera un potencial de soporte compacto. De manera similar si el potencial  $q$  real-valuado tiene un soporte compacto en el segmento  $[-a, a]$  es fácil ver que el problema de eigenvalores se reduce a encontrar los valores de  $\lambda$ , ( $\Re(\lambda) > 0$ ) para los cuales existe una solución de el sistema de Z-S (8.1), (8.2) que satisface las condiciones de frontera  $v_1(-a) = 1$ ,  $v_2(-a) = 0$  y  $v_1(a) = 0$ .

El siguiente resultado permite estimar el número de eigenvalores reales de un potencial con soporte compacto:

**Teorema 40.** [41, 40, 75] *Asuma que  $q$  es una función de soporte compacto, integrable y real valuada y sea  $N$  el entero no negativo mas grande que cumple*

$$(2N - 1) \frac{\pi}{2} < \left| \int_{-a}^a q(x) dx \right|.$$

Entonces el sistema de Z-S con potencial real (8.1), (8.2) tiene por lo menos  $N$  eigenvalores reales. Mas aún, si  $q$  adicionalmente es una función de una sola joroba entonces el sistema de Z-S con potencial real tiene exactamente  $N$  eigenvalores reales.

### 9.1.4. Ecuación de dispersión para el problema de eigenvalores

En esta sección se construye una ecuación de dispersión (o característica) para el problema de eigenvalores del sistema de Z-S con un potencial real-valuado.

**Teorema 41.** *Sea  $q$  una función continua real valuada con un soporte compacto en el segmento  $[-a, a]$ . Entonces la constante  $\lambda$  ( $\Re(\lambda) > 0$ ) es un eigenvalor del sistema de Zakharov-Shabat si y sólo si se satisface la siguiente ecuación*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left( e^{(-1)^n Q(a)} \tilde{X}^{(n)}(a) + e^{(-1)^{n+1} Q(a)} X^{(n)}(a) \right) = 0, \quad (9.9)$$

donde  $Q(x) = i \int_{-a}^x q(t) dt$  y  $x_0 = -a$  en (9.1)-(9.3).

Este teorema reduce el problema de eigenvalores del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial de soporte compacto al problema de localizar ceros (en la mitad derecha del plano) de una función analítica

$$\kappa(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (9.10)$$

de la variable compleja  $\lambda$  con los coeficientes de Taylor  $a_n$  dados por la expresión

$$a_n = e^{(-1)^n Q(a)} \tilde{X}^{(n)}(a) + e^{(-1)^{n+1} Q(a)} X^{(n)}(a). \quad (9.11)$$

La igualdad (9.9) representa una ecuación de dispersión para el problema de eigenvalores de la forma (9.10) donde los coeficientes  $a_n$  se pueden calcular por medio de (9.11). Es posible realizar una aproximación de los eigenvalores de este problema por medio del polinomio

$$\kappa_N(\lambda) = \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n \quad (9.12)$$

que aproxima la función  $\kappa$ . Para un  $N$  suficientemente grande sus raíces cerca de  $\lambda = 0$  proporcionan una aproximación precisa de los eigenvalores del problema.

## 9.2. Aproximación analítica de operadores de transmutación

En esta sección se muestran algunos resultados mostrados en [53]. La aproximación analítica de operadores de transmutación (AATO) presentada en [50] es una técnica que permite obtener las soluciones aproximadas de los problemas espectrales

para las ecuaciones de Sturm-Liouville, esta técnica está basada en la construcción aproximada de operadores de transmutación de Delsarte. El problema de las aproximaciones numéricas de las soluciones y los eigenvalores se reduce a la aproximación de la primitiva del potencial por una combinación lineal finita de funciones obtenidas como las trazas de los polinomios de onda generalizados.

**Definición 42.** [50] Sea  $E$  un espacio topológico lineal y  $E_1$  su subespacio lineal (no necesariamente cerrado) y sean  $A, B : E_1 \rightarrow E$  operadores lineales. Un operador lineal invertible  $T$  definido en todo  $E$  de tal manera que  $E_1$  es invariante bajo la acción de  $T$  es llamado un operador de transmutación para el par de operadores  $A$  y  $B$  si satisface las siguientes dos condiciones:

1. Tanto el operador  $T$  y su inversa  $T^{-1}$  son continuos en  $E$ ;
2. La siguiente igualdad de operadores es válida

$$AT = TB$$

o lo que es lo mismo

$$A = TBT^{-1}.$$

El conocer un operador de transmutación  $T$  permite reducir la solución de una ecuación “complicada”  $Au = \lambda u$  a una ecuación simple  $Bu = \lambda u$ . En efecto, sea  $u, v \in E_1$  de tal manera que  $Bu = \lambda u$  y defina  $v = Tu$ . Entonces

$$Av = ATu = TBu = \lambda Tu = \lambda v.$$

Por lo tanto  $v$  es una solución de  $Av = \lambda v$ . Es interesante para las aplicaciones de este trabajo cuando  $A = -d_x^2 + q$  y  $B = -d_x^2$ , donde  $q$  es una función complejo-valuada,  $E = C[-a, a]$  y  $E_1 = C^2[-a, a]$ . Los operadores de transmutación se pueden construir en forma de un operador integral de Volterra [50]

$$Tu(x) = u(x) + \int_{-x}^x \mathbf{K}(x, t)u(t) \, dt$$

donde, si el potencial  $q$  es continuamente diferenciable, el núcleo  $\mathbf{K}(x, t)$  por si mismo es una solución del problema de Goursat [50]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - q(x) \right) \mathbf{K}(x, t; h) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{K}(x, t; h), \quad (9.13)$$

$$\mathbf{K}(x, x; h) = \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x g(s) \, ds, \quad (9.14)$$

$$\mathbf{K}(x, -x; h) = \frac{h}{2}, \quad (9.15)$$

donde  $h$  es una constante compleja.

Tal como se muestra en [50] un operador de transmutación  $T$  con el núcleo que satisface (9.13), (9.14) y (9.15) asigna una solución  $v$  de la ecuación  $Bv = \omega^2 v$ , esto es,  $v'' + \omega^2 v = 0$  donde  $\omega$  es un número complejo, en una solución  $u$  de la ecuación  $Au = \omega^2 u$ , esto es,

$$u'' - g(x)u + \omega^2 u = 0, \quad (9.16)$$

con la siguiente correspondencia de los valores iniciales  $u(0) = v(0)$ ,  $u'(0) = v'(0) + hv(0)$ .

Considerando  $v_1 = \cos \omega x$  y  $v_2 = \frac{\text{sen} \omega x}{\omega}$  bajo el operador de transmutación  $T$ , esto es,  $T[\cos \omega x]$  y  $T[\frac{\text{sen} \omega x}{\omega}]$  se pueden obtener las representaciones de las soluciones de una ecuación de Sturm-Liouville. Además el siguiente teorema es válido.

**Teorema 43.** [50] *Las soluciones  $c(\omega, x; h)$  y  $s(\omega, x; \infty)$  de la ecuación (9.16) que satisfacen las condiciones iniciales*

$$\begin{aligned} c(\omega, 0; h) &= 1, & c_x(\omega, 0; h) &= h \\ s(\omega, 0; \infty) &= 0, & s_x(\omega, 0; \infty) &= 1 \end{aligned}$$

se pueden representar como

$$c(\omega, x; h) = \cos \omega x + \int_0^x K_c(x, t; h) \cos \omega t \, dt \quad (9.17)$$

y

$$s(\omega, x; \infty) = \frac{\sin \omega x}{\omega} + \int_0^x K_s(x, t; h) \frac{\sin \omega t}{\omega} \, dt, \quad (9.18)$$

donde  $K_c(x, t; h) = \mathbf{K}(x, t; h) + \mathbf{K}(x, -t; h)$  y  $K_s(x, t; h) = \mathbf{K}(x, t; h) - \mathbf{K}(x, -t; h)$ .

Es suficiente conocer únicamente los núcleos  $K_c$  y  $K_s$  cuando  $0 \leq t \leq x \leq a$  para poder construir el núcleo  $\mathbf{K}$ . De ahora en adelante en este capítulo el texto se restringe al segmento real  $[0, a]$ .

### 9.2.1. Integrales recursivas y polinomios de onda generalizados

En la presente sección se presentan los resultados de [50] los cuales permiten construir la aproximación de los núcleos  $K_c$  y  $K_s$  de (9.17) y (9.18), también se agregan algunos resultados que permiten construir la transformada continua y discreta de Fourier así como los coeficientes no lineales de Fourier.

**Definición 44.** Sea  $w_0 \in C[0, a]$  una solución compleja distinta de cero en  $[0, a]$  de

$$-w_0'' + qw_0 = 0. \quad (9.19)$$

Considere dos secuencias de integrales recursivas

$$X^{(0)} \equiv 1, \quad X^{(n)}(x) = n \int_0^x X^{(n-1)}(s) \left(w_0^2(s)\right)^{(-1)^n} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

y

$$\tilde{X}^{(0)} \equiv 1, \quad \tilde{X}^{(n)}(x) = n \int_0^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) \left(w_0^2(s)\right)^{(-1)^{n-1}} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Defina dos familias de funciones  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  y  $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$  construidas de acuerdo a las relaciones

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} w_0(x)X^{(k)}(x), & k \text{ impar,} \\ w_0(x)\tilde{X}^{(k)}(x) & k \text{ par,} \end{cases} \quad (9.20)$$

y

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{X}^{(k)}(x)}{w_0(x)}, & k \text{ impar,} \\ \frac{X^{(k)}(x)}{w_0(x)}, & k \text{ par.} \end{cases} \quad (9.21)$$

Las funciones  $\varphi$ ,  $\psi$  también son conocidas como potencias formales en la teoría de funciones pseudoanalíticas [47, 49, 55].

*Observación 45.* Dado que la ecuación de Sturm-Liouville que se quiere resolver es (8.9), vale la pena considerar la solución particular  $w_0(x) = e^{Q(x)}$  de (8.11), donde  $Q(x) = i \int_0^x q(x)dx$ , como la solución particular que no se anula para esta aplicación.

A continuación se introducen los polinomios de onda generalizados. Estos polinomios son útiles para construir una representación de los núcleos de transmutación.

**Definición 46.** [50] Las siguientes funciones

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi_0(x), \\ u_{2m-1}(x, t) &= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par}}}^m \binom{m}{k} \varphi_{m-k}(x) t^k, \\ u_{2m}(x, t) &= \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impar}}}^m \binom{m}{k} \varphi_{m-k}(x) t^k, \end{aligned}$$

son llamadas polinomios de onda generalizados. Para los valores de los polinomios de onda generalizados en las características  $x = t$  y  $x = -t$ , se introducen las siguientes

notaciones adicionales

$$c_0(x) = u_0(x, x) = w_0(x)$$

$$c_m(x) = u_{2m-1}(x, x) = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par}}}^m \binom{m}{k} x^k \varphi_{m-k}(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.22)$$

$$s_m(x) = u_{2m}(x, x) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impar}}}^m \binom{m}{k} x^k \varphi_{m-k}(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.23)$$

Tal como se muestra en [50] los polinomios de onda generalizados  $\{u_m\}$  forman un sistema completo de soluciones de la ecuación (9.13) y junto con el sistema de funciones  $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ ,  $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$  y  $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$  toman un papel crucial en la construcción de los núcleos integrales de los operadores de transmutación y también en la construcción de las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville (8.9).

En el siguiente teorema se muestra como usar los polinomios de onda generalizados para aproximar los núcleos integrales de la representación de los operadores de transmutación (9.17) y (9.18).

**Teorema 47.** [50] Sea  $\bar{\mathbf{S}}$  un triángulo cerrado que une los vértices  $(0, 0)$ ,  $(a, -a)$  y  $(a, a)$ . Considere  $h = w'_0(0)$ . Sea  $N \in \mathbb{N}$  y los números complejos  $a_0, \dots, a_N$  y  $b_1, \dots, b_N$  de tal manera que

$$\left| \frac{h}{2} + \frac{1}{4} \int_0^x q(s) ds - \sum_{n=0}^N a_n c_n(x) \right| < \varepsilon_1$$

y

$$\left| \frac{1}{4} \int_0^x q(s) ds - \sum_{n=1}^N b_n s_n(x) \right| < \varepsilon_2$$

para todo  $x \in [0, a]$ . Entonces los núcleos  $K_c$  y  $K_s$  son aproximados por las funciones

$$K_{c,N}(x, t) = 2 \left( a_0 u_0(x, t) + \sum_{n=1}^N a_n u_{2n-1}(x, t) \right)$$

$$K_{s,N}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^N b_n u_{2n}(x, t)$$

de tal manera que para todo  $(x, t) \in \bar{\mathbf{S}}$  se cumplen las siguientes desigualdades

$$|K_c(x, t) - K_{c,N}(x, t)| \leq C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$|K_s(x, t) - K_{s,N}(x, t)| \leq C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

donde  $h := w'_0$  y  $C$  depende de  $a$  y  $w_0$ .

Existen diversos métodos para obtener los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  dado que es un problema clásico y bien conocido de aproximación, para mas detalles vea [50].

Considere las representaciones  $c$  y  $s$  de las soluciones de la Ecuación (9.16) dadas por (9.17) y (9.18), los resultados mostrados en el Teorema 47 para aproximar los núcleos  $K_c$  y  $K_s$  por medio de  $K_{c,N}$  y  $K_{s,N}$  permiten construir una aproximación de las funciones  $c(\lambda, x)$  y  $s(\lambda, x)$  por medio de las sumas finitas

$$s_N(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda} \left( \text{sen} \lambda x + 2 \sum_{n=1}^N b_n \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impar}}}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k}(x) \int_0^x t^k \text{sen} \lambda t \, dt \right) \quad (9.24)$$

$$c_N(\lambda, x) = \cos \lambda x + 2 \sum_{n=0}^N a_n \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par}}}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k}(x) \int_0^x t^k \cos \lambda t \, dt. \quad (9.25)$$

Es posible aproximar  $c_\lambda(\lambda, x)$  y  $s_\lambda(\lambda, x)$  por medio de las sumas finitas

$$s_\lambda(\lambda, x) \approx \frac{1}{\lambda^2} \left( \lambda x \cos(\lambda x) - \text{sen}(\lambda x) + 2 \sum_{n=1}^N b_n \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impar}}}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k}(x) \int_0^x t^k (\lambda t \cos(\lambda t) - \text{sen}(\lambda t)) \, dt \right) \quad (9.26)$$

$$c_\lambda(\lambda, x) \approx -x \text{sen}(\lambda x) - 2 \sum_{n=0}^N a_n \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par}}}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k}(x) \int_0^x t^{k+1} \text{sen}(\lambda t) \, dt. \quad (9.27)$$

A pesar de que parece que se está diferenciando directamente de (9.24) y (9.25) vale la pena mencionar que derivar una aproximación podría ocasionar un error numérico importante, sin embargo las expresiones (9.26) y (9.27) se obtienen por medio de la diferenciación de las expresiones exactas para  $c$  y  $s$ , es decir, (9.17), (9.18) y de esta manera se evita un error numérico originado por diferenciar la aproximación numérica de una función.

Tal como se explica en [50] la aproximación de  $c_x(\lambda, x)$  y de  $s_x(\lambda, x)$  está dada por

$$s_x(\lambda, x) \approx \cos \lambda x - 2 \sum_{n=0}^N b_n \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par}}}^n \binom{n}{k} \psi_{n-k}(x) \int_0^x t^k \cos(\lambda t) \, dt + \frac{w'_0}{w_0} s(\lambda, x), \quad (9.28)$$

$$c_x(\lambda, x) \approx -\lambda \text{sen} \lambda x + 2\lambda \sum_{n=1}^N a_n \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impar}}}^n \binom{n}{k} \psi_{n-k}(x) \int_0^x t^k \text{sen} \lambda t \, dt + \frac{w'_0}{w_0} c(\lambda, x). \quad (9.29)$$



De la definición de los operadores de transmutación exactos, es decir, (9.17) y (9.18), es posible calcular una aproximación de  $c_{x\lambda}(\lambda, x)$  y  $s_{x\lambda}(\lambda, x)$ , esta aproximación está dada por

$$s_{x\lambda}(\lambda, x) \approx -x \operatorname{sen} \lambda x + 2 \sum_{n=0}^N b_n \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par}}}^n \binom{n}{k} \psi_{n-k}(x) \int_0^x t^{k+1} \operatorname{sen} \lambda t \, dt + \frac{w'_0}{w_0} s_\lambda(\lambda, x), \quad (9.30)$$

$$c_{x\lambda}(\lambda, x) \approx -\operatorname{sen} \lambda x - \lambda x \cos \lambda x + 2 \sum_{n=1}^N a_n \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impar}}}^n \binom{n}{k} \psi_{n-k}(x) \int_0^x t^k (\operatorname{sen} \lambda t + \lambda t \cos \lambda t) \, dt + \frac{w'_0}{w_0} c_\lambda(\lambda, x). \quad (9.31)$$

Para un  $\lambda$  real se tiene que la precisión de la solución aproximada no se deteriora cuando  $\lambda$  incrementa, vea [50]. De hecho, considerando  $|c(\lambda, x) - c_N(\lambda, x)|$  bajo la suposición  $|K_c(x, t) - K_{c,N}(x, t)| \leq \varepsilon$  se tiene que

$$\begin{aligned} |c(\lambda, x) - c_N(\lambda, x)| &\leq \int_0^x |K_c(x, t) - K_{c,N}(x, t)| |\cos \lambda t| \, dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^x |\cos \lambda t| \, dt \leq \varepsilon |x|. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $s$  y  $c$  por  $s_N$  y  $c_N$  y las derivadas expresadas en los Teoremas 34, 35 y 37 se puede construir una aproximación de las soluciones  $v_1$  y  $v_2$  del sistema de Z-S. También es posible construir una expresión para aproximar los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  y la aproximación de la transformada continua y discreta de Fourier  $\tilde{q}$  y  $\hat{q}$  de la misma manera.

### 9.3. Método generalizado para construir los primeros coeficientes de las series de Taylor de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville

En esta sección se muestra como encontrar los primeros términos de la fórmula de la serie de Taylor para la solución de el sistema de Z-S usando una modificación del método SPPS propuesto en [48] Bajo condiciones adicionales para el potencial  $q$  del sistema de Z-S se muestra como construir dicha solución en términos de series de Taylor. A continuación se enuncia un teorema basado en los resultados mostrados en [48] el cual permite construir los coeficientes de la serie de Taylor de la solución de una ecuación de Sturm-Liouville.

**Teorema 48.** Sea  $(0, a)$  un intervalo finito y  $q(x) \in C^2(0, a) \cap C^1[0, a]$ , de tal manera que  $e^{Q(x)}$ , donde  $Q(x) = i \int q(x) dx$ , es una solución complejo-valuada de (8.11) y  $q \in C^n(x_0)$  donde  $x_0 \in [0, a]$ . Entonces las soluciones linealmente independientes  $g_1$  y  $g_2$  de la ecuación (8.9), que satisfacen las condiciones iniciales

$$g_1(x_0) = e^{Q(x_0)} \quad , \quad g_1'(x_0) = iq(x_0)e^{Q(x_0)} \quad (9.32)$$

$$g_2(x_0) = 0 \quad , \quad g_2'(x_0) = e^{-Q(x_0)} \quad (9.33)$$

tienen en el punto  $x_0$  derivadas de orden  $n$ . Las derivadas de  $\frac{g_1}{e^Q}$  y  $\frac{g_2}{e^Q}$  se pueden calcular empleando las siguientes relaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{g_1(x_0)}{e^{Q(x_0)}} \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)'(x_0) \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)''(x_0) \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)'''(x_0) \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)^{IV}(x_0) \\ \vdots \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)^{[n]}(x_0) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\lambda^2 \\ 0 \\ \lambda^4 \\ \vdots \\ \frac{1+(-1)^n}{2}(i\lambda)^n \end{pmatrix}, \quad (9.34)$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{g_2(x_0)}{e^{Q(x_0)}} \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)'(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)''(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)'''(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)^{IV}(x_0) \\ \vdots \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)^{[n]}(x_0) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\lambda^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}(i\lambda)^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (9.35)$$

donde  $[n]$  denota la  $n$ -ésima derivada y  $A_n$  se define de la siguiente forma:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-2Q(x_0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,1}(x_0) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,1}(x_0) & a_{3,2}(x_0) & e^{-2Q(x_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1}(x_0) & a_{n,2}(x_0) & a_{n,3} & \cdots & e^{(-1+(-1)^n)Q(x_0)} \end{pmatrix}$$

de tal manera que

$$a_{n,1}(x) = \left(e^{-2Q(x)}\right)^{[n-1]},$$

$$a_{n,m}(x) = \sum_{k=m-1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(e^{-2Q(x)}\right)^{[n-1-k]} b_{k,m-1}(x),$$

y

$$b_{k,1} = (e^{Q(x)})^{[k-1]},$$

y denotando  $Q(x) = Q$ , cuando  $2 \leq m \leq k$  se tiene

$$\begin{aligned} b_{k,m} &= \sum_{k_1=m-1}^{k-1} \binom{k-1}{k_1} (e^{2Q})^{[k-1-k_1]} \sum_{k_2=m-2}^{k_1-1} \binom{k_1-1}{k_2} (e^{-2Q})^{[k_1-1-k_2]} \\ &\times \sum_{k_{m-2}=2}^{k_{m-3}-1} \binom{k_{m-3}-1}{k_{m-2}} (e^{-2Q})^{[k_{m-3}-1-k_{m-2}]} \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}-1} \binom{k_{m-2}-1}{k_{m-1}} \\ &\times (e^{2Q})^{[k_{m-2}-1-k_{m-1}]} (e^{-2Q})^{[k_{m-1}-1]} \end{aligned}$$

cuando  $m$  es par. Se define

$$\begin{aligned} b_{k,m} &= \sum_{k_1=m-1}^{k-1} \binom{k-1}{k_1} (e^{2Q})^{[k-1-k_1]} \sum_{k_2=m-2}^{k_1-1} \binom{k_1-1}{k_2} (e^{-2Q})^{[k_1-1-k_2]} \\ &\times \sum_{k_{m-2}=2}^{k_{m-3}-1} \binom{k_{m-3}-1}{k_{m-2}} (e^{2Q})^{[k_{m-3}-1-k_{m-2}]} \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}-1} \binom{k_{m-2}-1}{k_{m-1}} \\ &\times (e^{-2Q})^{[k_{m-2}-1-k_{m-1}]} (e^{2Q})^{[k_{m-1}-1]} \end{aligned}$$

cuando  $m$  es impar.

*Demostración.* Este teorema es una aplicación directa de los resultados para encontrar los coeficientes de la serie de Taylor de una ecuación de Sturm-Liouville presentado en [48].  $\square$

*Observación 49.* La referencia [48] incluye una generalización de fórmula de Taylor cuyo residuo está expresado de la forma de Lagrange. Se pueden reducir las condiciones que se piden en algunos teoremas y construir los residuos de las series de acuerdo con los resultados de [48] en esta sección. Para simplificar las cosas se supone en algunos teoremas incluidos en este capítulo que  $q$  es una función real analítica y que las series de Taylor convergen.

### 9.3.1. Representación en series de Taylor de la solución general del sistema de Zakharov-Shabat

En esta sección se presenta la solución del sistema de Zakharov-Shabat en forma de series de Taylor empleando la representación para la solución  $w$  de la ecuación de Sturm-Liouville (8.9) en forma de series de Taylor. Se supone que el potencial  $q$  es una función analítica alrededor de algún punto.

**Teorema 50.** *Sea  $q$  una función continua real valuada en el intervalo  $[0, a]$  y real analítica en  $x_0 \in [0, a]$ . Entonces la solución del sistema de Zakharov-Shabat (8.1) y (8.2) con  $\lambda \neq 0$  en una vecindad de  $x_0$  es de la forma*

$$v_1(x) = c_1 \frac{e^{Q(x)}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(x_0) \right) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \\ + c_2 \frac{e^{Q(x)}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0) + \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(x_0) \right) \frac{(x-x_0)^n}{n!}, \quad (9.36)$$

$$v_2(x) = -c_1 \frac{e^{Q(x)}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0) + i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(x_0) \right) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \\ - c_2 \frac{e^{Q(x)}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0) + i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(x_0) \right) \frac{(x-x_0)^n}{n!}, \quad (9.37)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas arbitrarias,  $[n]$  representa la derivada de orden  $n$  que se puede calcular empleando las relaciones (9.34) y (9.35) del Teorema 48 y  $Q = i \int q dx$ . La solución general del sistema de Z-S cuando  $\lambda = 0$  es  $v_1 = e^{\int q}$  y  $v_2 = e^{-\int q}$ .

*Demostración.* Como se ha visto en el Teorema 48 se pueden construir los coeficientes de las series de Taylor de las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville (8.9) empleando las relaciones (9.34) y (9.35). Cuando se considera un potencial  $q$  analítico en  $x_0$  se pueden construir las series

$$\frac{g_1(x)}{e^{Q(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(x_0) \quad \text{y} \quad \frac{g_2(x)}{e^{Q(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(x_0) \quad (9.38)$$

donde  $e^{Q(x)}$ ,  $Q(x) = i \int q(x) dx$ .

A partir de la representación en forma de series de Taylor (9.38) de los componentes linealmente independientes de la solución  $w = e^Q \left( c_1 \frac{g_1(x)}{e^{Q(x)}} + c_2 \frac{g_2(x)}{e^{Q(x)}} \right)$  se puede construir  $u$  empleando la relación (8.6), la cual es de la forma  $u(x) = \frac{i}{\lambda} (\partial - p(x))w(x)$ . Considerando la factorización presentada en [55], se tiene que

$$u(x) = \frac{i}{\lambda} (\partial - iq(x))w(x) = \frac{i}{\lambda} e^{Q(x)} \partial (e^{-Q(x)} w(x)). \quad (9.39)$$

Aplicando esta igualdad a  $w = e^{Q(x)} \left( c_1 \frac{g_1}{e^{Q(x)}} + c_2 \frac{g_2}{e^{Q(x)}} \right)$  se obtiene

$$u(x) = \frac{i}{\lambda} e^{Q(x)} \partial \left( c_1 \frac{g_1(x)}{e^{Q(x)}} + c_2 \frac{g_2(x)}{e^{Q(x)}} \right). \quad (9.40)$$

Derivando las series de Taylor de  $\frac{g_1}{e^Q}$  y  $\frac{g_2}{e^Q}$  representadas de la forma (9.38) se obtiene

$$\partial \left( \frac{g_1}{e^Q} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0), \quad \partial \left( \frac{g_2}{e^Q} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0).$$

Aplicando estas derivadas a la igualdad (9.40) se obtiene la serie

$$u(x) = e^{Q(x)} \frac{i}{\lambda} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_1 \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0) + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right).$$

Tomando en cuenta las relaciones

$$v_1 = \frac{1}{2}(w+u) \quad y \quad v_2 = \frac{i}{2}(w-u)$$

se obtienen las representaciones para las soluciones del sistema de Z-S (9.36) y (9.37).  $\square$

*Observación 51.* Tal como se menciona en el Capítulo 8.1 la ecuación (8.10) es de Sturm-Liouville y tiene una solución particular  $u_0 = e^{-\int p}$  cuando (8.10) tiene un valor  $\lambda = 0$ . Esto indica que se puede construir un análogo del Teorema 48 que permita construir de la misma manera los primeros  $n$  coeficientes de Taylor de la solución  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  de la ecuación (8.10). Conociendo las soluciones  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  y  $w = c_1 g_1 + c_2 g_2$  de las ecuaciones de Sturm-Liouville (8.10) y (8.9) se pueden construir los primeros coeficientes de Taylor de la solución del sistema de Zakharov-Shabat por medio de las igualdades  $v_1 = \frac{1}{2}(u+w)$ ,  $v_2 = \frac{-i}{2}(u-w)$ . La ventaja de este enfoque es que el potencial  $q$  requiere ser una función  $q \in C^n(x_0)$ , mientras que el Teorema 50 requiere que el potencial  $q$  sea una función real analítica en  $x_0 \in [0, a]$  (la cual es una condición mas fuerte). Más aún, en este enfoque no se requiere derivar la serie de Taylor como se hace en (9.39) para obtener la solución  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ , lo cual facilita construir un análogo al Teorema de Taylor e incluso construir alguna expresión para el resto de Taylor (también conocido como residuo o remanente de la serie de Taylor) para la solución del sistema de Zakharov-Shabat (8.1) y (8.2). Se puede verificar que los primeros coeficientes de Taylor coinciden con los coeficientes de los primeros términos de (9.36) y (9.37).

**Corolario 52.** *Sea  $q$  una función real analítica, real valuada y de soporte compacto en el intervalo  $[0, a]$ . Entonces las series de Taylor alrededor de  $x_0 = 0$  para los coeficientes espectrales de Fourier del sistema de Zakharov-Shabat (8.1) y (8.2) son*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x) &= \frac{e^{Q(a)-Q(0)+i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!} \\ &+ \frac{e^{Q(a)+Q(0)+i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!}, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x) &= -\frac{e^{Q(a)-Q(0)-i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!} \\ &+ \frac{e^{Q(a)+Q(0)-i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - \lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!}, \end{aligned} \quad (9.42)$$

donde  $Q(x) = i \int q(x) dx$  y  $[n]$  representa la derivada de orden  $n$  que se puede calcular empleando las relaciones (9.34) y (9.35) del Teorema 48.

*Demostración.* Se sigue de la condición de frontera (8.17) que los coeficientes para  $c_1$  y  $c_2$  de la solución general del sistema de Z-S (9.36) y (9.37) con las condiciones (9.34) y (9.35) para  $x_0 = 0$ , son

$$c_1 = e^{-Q(0)} \quad (9.43)$$

$$c_2 = -i\lambda e^{Q(0)}. \quad (9.44)$$

Con un potencial de soporte compacto los límites (2.28) y (2.29) para los coeficientes no lineales de Fourier se reducen a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\lambda) &= \phi_1(a)e^{i\lambda a} \\ \mathbf{b}(\lambda) &= \phi_2(a)e^{-i\lambda a}, \end{aligned}$$

donde  $\phi_1(a)$  y  $\phi_2(a)$  se sustituyen por  $v_1(a)$  y  $v_2(a)$  bajo las representaciones (9.36) y (9.37) con los coeficientes (9.43) y (9.44) respectivamente para obtener las expresiones equivalentes a (9.41) y (9.42).  $\square$

**Corolario 53.** *Sea  $q$  una función real analítica, real valuada y de soporte compacto en el intervalo  $[0, a]$ . La transformada de Fourier discreta y continua para un sistema de Z-S está dada por*

$$\begin{aligned} \hat{q}(\lambda) &= e^{-2i\lambda a} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{Q(0)} \left( i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - \lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) - e^{-Q(0)} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-Q(0)} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) + e^{Q(0)} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}}, \\ \tilde{q}(\lambda) &= e^{-2i\lambda a} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{Q(0)} \left( i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - \lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) - e^{-Q(0)} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}}{ia\Sigma + \partial_\lambda \Sigma}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-Q(0)} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{Q(0)} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}, \\ \partial_\lambda \Sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-Q(0)} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{\{n+1\}}(0) - \frac{i}{\lambda^2} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{\{n\}}(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{Q(0)} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{\{n+1\}}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{\{n\}}(0) - i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}. \end{aligned}$$

Los términos  $\left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{\{n\}}(0)$  y  $\left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{\{n\}}(0)$  se calculan de acuerdo a las siguientes rela-

ciones

$$\begin{pmatrix} \frac{g_1(x_0)}{e^{Q(x_0)}} \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)\{1\}(x_0) \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)\{2\}(x_0) \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)\{3\}(x_0) \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)\{4\}(x_0) \\ \vdots \\ \left(\frac{g_1}{e^Q}\right)\{n\}(x_0) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\lambda \\ 0 \\ 4\lambda^3 \\ \vdots \\ \frac{1+(-1)^n}{2} i^n n \lambda^{n-1} \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{g_2(x_0)}{e^{Q(x_0)}} \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)\{1\}(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)\{2\}(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)\{3\}(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)\{4\}(x_0) \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)\{5\}(x_0) \\ \vdots \\ \left(\frac{g_2}{e^Q}\right)\{n\}(x_0) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\lambda \\ 0 \\ 4\lambda^3 \\ \vdots \\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} i^{n-1} (n-1) \lambda^{n-2} \end{pmatrix},$$

donde  $x_0 = 0$  y  $A_n$  se define de la misma manera que en el Teorema 48.





# 10 Ejemplos numéricos para el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado

En esta sección se muestran los pasos para implementar numéricamente el método AATO, el método SPPS y el método para construir los coeficientes de la serie de Taylor de la solución de una ecuación de Sturm-Liouville. También se presentan algunos ejemplos numéricos para exhibir las características, ventajas y desventajas de cada método.

## 10.1. Implementación de los métodos numéricos

### 10.1.1. Esquema general y detalles de implementación para la aproximación analítica de operadores de transmutación

Considere la ecuación de Sturm-Liouville (8.9), la cual es,

$$-w'' + (iq' - q^2)w = \lambda^2 w$$

donde  $q$  es una función de soporte compacto en  $[0, a]$ . Basándose en los resultados de [50] es posible formular el siguiente algoritmo para construir los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  y la transformada continua y discreta de Fourier  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$  del sistema de Z-S (8.1), (8.2) con un potencial  $q$  real de soporte compacto en  $[0, a]$ . Los pasos son los siguientes:

1. Considere la solución particular  $w_0(x) = e^{Q(x)}$ , donde  $Q(x) = i \int_0^x q(y)dy$ , de la ecuación (8.11)

$$-w_0'' + (iq' - q^2)w_0 = 0$$

en el segmento  $[0, a]$ . Note que,  $w_0$  no se anula en  $[0, a]$  y está normalizada de tal manera que  $w_0(0) = 1$ . Defina  $h := w_0'(0) = q(0)$ .

2. Calcule las funciones  $\varphi_k$  y  $\psi_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  empleando (9.20) y (9.21).
3. Calcule las funciones  $c_k$  y  $s_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  empleando (9.22) y (9.23).

4. Encuentre los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_N$  y  $b_1, b_2, \dots, b_N$  de una aproximación de las funciones

$$\frac{h}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (iq'(s) - q^2(s)) ds, \quad y \quad \frac{1}{4} \int_0^x (iq'(s) - q^2(s)) ds$$

por medio de combinaciones lineales  $\sum_{n=0}^N a_n c_n(x)$  y  $\sum_{n=1}^N b_n s_n(x)$  tal como se muestra en el Teorema 47. Fije  $b_0 = a_0$ . Note que también se puede tomar  $a_0 = \frac{h}{2}$  y aproximar la función  $\frac{h}{2} (1 + w_0(x)) + \frac{1}{4} \int_0^x (iq'(s) - q^2(s)) ds$  por medio de una combinación lineal  $\sum_{n=1}^N a_n c_n(x)$  para encontrar los coeficientes  $a_1, \dots, a_N$ .

5. Calcule las aproximaciones  $s_N(\lambda, x)$  y  $c_N(\lambda, x)$  de las soluciones  $s$  y  $c$  por medio de (9.24) y (9.25).
6. Calcule las aproximaciones de  $s_\lambda$  y  $c_\lambda$  empleando (9.27), (9.26).
7. Calcule las aproximaciones de  $s_x$  y  $c_x$  usando (9.29), (9.28).
8. Calcule las aproximaciones de las derivadas mixtas de las soluciones  $s$  y  $c$ , es decir,  $s_{x,\lambda}$  y  $c_{x,\lambda}$  empleando (9.31) y (9.30).
9. Construya la aproximación de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  usando las aproximaciones de  $s, s_x, c$  y  $c_x$  en (8.20) y (8.21).
10. Construya la aproximación de la transformada no lineal de Fourier discreta y continua, es decir  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$ , usando las aproximaciones de  $s, s_x, s_\lambda, s_{x\lambda}, c, c_x, c_\lambda, c_{x\lambda}$  en (8.22) y (8.24).

La implementación del método AATO fue realizada en el software Wolfram Mathematica dada la posibilidad de explorar las propiedades del método bajo una aritmética de precisión arbitraria. Tal como se explica en [50] la integración recursiva toma un rol crucial en la precisión y la velocidad del algoritmo del método AATO. La integración en los experimentos numéricos fue realizada utilizando el esquema de cuadratura de Clenshaw-Curtis basado en la aproximación del integrando por medio de una suma parcial de su expansión en series de polinomios de Tchevyshev e integración término por término de la aproximación. Para mas detalles, vea [50].

### 10.1.2. Esquema general y detalles de implementación para el método de series de potencias del parámetro espectral

Tal como se muestra en la Sección 9.1 es posible representar la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real en términos del método SPSS clásico (vea [49, 54, 55]). El cálculo numérico de las integrales recursivas para el método SPSS clásico es el mismo al que se lleva a cabo en la construcción de las funciones  $\varphi_k$  y  $\psi_k$  en el Paso 2 de la implementación numérica del método AATO, esto hace posible implementar numéricamente el método SPSS clásico a partir de los cálculos de las funciones  $\varphi_k$  y  $\psi_k$  de la implementación del método AATO. La complejidad numérica

para el método SPSS en este caso se reduce a la complejidad de la integración llevada a cabo en el Paso 2 de la implementación del método AATO. En este paso se emplea la cuadratura de Clenshaw-Curtis para la integración recursiva de las funciones  $\varphi_k$  y  $\psi_k$  tal como se menciona acerca de la complejidad para el método AATO.

Los pasos para implementar numéricamente el método SPSS son los siguientes:

1. Calcule las funciones  $X^{(k)}$  y  $\tilde{X}^{(k)}$  (estas funciones son calculadas en el Paso 2 de la implementación del método AATO).
2. Construya la ecuación característica  $\kappa_N(\lambda)$  de acuerdo a (9.12) para un  $N$  suficientemente grande.
3. Calcule las raíces de  $\kappa_N(\lambda)$ , estas raíces contienen una aproximación del espectro discreto.
4. Construya la aproximación de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  de (6.15) y (6.16) truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}(\lambda) \approx v_0(-a)e^{2j\lambda a} \sum_{k=0}^N \lambda^k \left( \frac{v_0'(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} X^{(2k+1)}(a) + \frac{X^{(2k)}(a)}{v_0(a)} \right)$$

$$\mathbf{b}(\lambda) \approx -v_0(-a)v_0(a) \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k+1)}(a).$$

5. Construya la aproximación de la transformada no lineal de Fourier discreta y continua  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$  truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término de la siguiente manera:

$$\hat{q}(\lambda) \approx \frac{v_0(a)e^{-2j\lambda a} \sum_{k=0}^N \lambda^k X^{(2k+1)}(a)}{\sum_{k=0}^N \lambda^k \left( \frac{v_0'(a) + \lambda v_0(a)}{q^*(a)} X^{(2k+1)}(a) + \frac{1}{v_0(a)} X^{(2k)}(a) \right)}$$

$$\tilde{q}(\lambda_j) \approx \frac{q^*(a)v_0(a)e^{-2j\lambda_j a} \sum_{k=0}^N \lambda_j^k X^{(2k+1)}(a)}{\sum_{k=0}^N \lambda_j^k \left( 2ja + \frac{k}{\lambda_j} \right) \left( v_0'(a)X^{(2k+1)}(a) + v_0(a)X^{(2k-1)}(a) + \frac{q^*(a)}{v_0(a)} X^{(2k)}(a) \right)}.$$

La razón por la cual en los pasos 4 y 5 se usan fórmulas del método SPSS modificado es por que el método SPSS modificado se reduce al método SPSS clásico cuando la ecuación de Sturm-Liouville (3.1) tiene un haz de  $N = 1$  (lo que la reduce en una ecuación de Sturm-Liouville clásica).

### 10.1.3. Esquema general y detalles de implementación la generalización del método para construir los coeficientes de la serie de Taylor de la solución de una ecuación de Sturm-Liouville

En esta sección se muestra un procedimiento para implementar el método para construir los coeficientes de la serie de Taylor de la solución de una ecuación de

Sturm-Liouville. Considere la ecuación de Sturm-Liouville (8.9), la cual es,

$$-w'' + (iq' - q^2)w = \lambda^2 w.$$

Basándose en los resultados de [48] es posible formular el siguiente algoritmo para construir una representación de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  y la transformada no lineal de Fourier continua y discreta  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$  de un sistema de Z-S (8.1), (8.2) con un potencial  $q$  real-valuado de soporte compacto en  $[-a, a]$ . El procedimiento es el siguiente:

1. Considere la función  $w_0 = e^{Q(x)}$ , donde  $Q(x) = i \int q(x) dx$ . Esta función es una solución de la ecuación (8.11) que no se anula en  $[0, a]$ .
2. Calcule las derivadas  $(e^{2Q})^{[n]}(x_0)$  y  $(e^{-2Q})^{[n]}(x_0)$ , del orden  $n = 0, \dots, N, N+1$ , para  $x_0 = 0$ .
3. Empleando las funciones  $b_{k,m}$  construya las entradas  $a_{n,m}(x)$  de la Matriz  $A_n$  tal como se muestra en el Teorema 48.
4. Construya los  $N+1$  coeficientes de Taylor  $(\frac{g_1}{e^Q})^{[n]}(x_0)$  y  $(\frac{g_2}{e^Q})^{[n]}(x_0)$  conforme a las igualdades (9.34) y (9.35).
5. Construya la aproximación de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  de (9.41) y (9.42) truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x) &\approx \frac{e^{Q(a)-Q(0)+i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^N \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!} \\ &+ \frac{e^{Q(a)+Q(0)+i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^N \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x) &\approx -\frac{e^{Q(a)-Q(0)-i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!} \\ &+ \frac{e^{Q(a)+Q(0)-i\lambda a}}{2} \sum_{n=0}^N \left( i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - \lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \frac{a^n}{n!}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

6. Construya la aproximación de la transformada no lineal de Fourier discreta y continua  $\hat{q}$  y  $\tilde{q}$  truncando las series hasta el  $N$ -ésimo término

$$\begin{aligned} \hat{q}(\lambda) &\approx e^{-2i\lambda a} \frac{\sum_{n=0}^N \left( e^{Q(0)} \left( i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - \lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) - e^{-Q(0)} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}}{\sum_{n=0}^N \left( e^{-Q(0)} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) + e^{Q(0)} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}}, \\ \tilde{q}(\lambda) &\approx e^{-2i\lambda a} \frac{\sum_{n=0}^N \left( e^{Q(0)} \left( i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - \lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) - e^{-Q(0)} \left( \frac{1}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}}{i a \Sigma_N + \partial_\lambda \Sigma_N}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Sigma_N &= \sum_{n=0}^N \left( e^{-Q(0)} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{Q(0)} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!}, \\ \partial_\lambda \Sigma_N &= \sum_{n=0}^N \left( e^{-Q(0)} \left( \frac{i}{\lambda} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{\{n+1\}}(0) - \frac{i}{\lambda^2} \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{[n+1]}(0) + \left( \frac{g_1}{e^Q} \right)^{\{n\}}(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{Q(0)} \left( \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{\{n+1\}}(0) - i\lambda \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{\{n\}}(0) - i \left( \frac{g_2}{e^Q} \right)^{[n]}(0) \right) \right) \frac{a^n}{n!},\end{aligned}$$

los términos  $\left(\frac{g_1}{e^Q}\right)^{\{n\}}(0)$  y  $\left(\frac{g_2}{e^Q}\right)^{\{n\}}(0)$  se calculan de acuerdo al Corolario 53.

Las ventajas que tiene el método de series de Taylor en comparación a los otros métodos mostrados en este trabajo es que las series de Taylor y sus propiedades son bien conocidas en la literatura. Este método también permite obtener una aproximación de la derivada de la serie lo que permite evitar el error que surge de aproximar una derivada a partir de una aproximación numérica. Otra ventaja de este método es que es sencillo de programar ya que son pocos los pasos que se requieren para llevarlo a cabo. Una desventaja de truncar una serie de Taylor es que se pierde rápidamente precisión cuando se evalúa lejos del punto  $x_0$ . Esto lo limita a considerar intervalos pequeños  $[0, a]$  para el potencial  $q$ . Debido a que aproximar una derivada de una aproximación numérica puede llevar a un error numérico importante, es conveniente que las derivadas del Paso 2 de la implementación numérica se calculen analíticamente, lo cual puede requerir de tiempo y recursos. Para este paso de la implementación numérica se calcularon las derivadas analíticamente usando una combinación de los comandos del Software Wolfram Mathematica “CoefficientList” y “Series”. Otra desventaja de este método es la alta cantidad de multiplicaciones llevadas a cabo cuando se calculan las funciones  $b_{k,m}$  de las entradas  $a_{n,m}(x)$  de la Matriz  $A_n$  en el Paso 3 de la implementación numérica las cuales elevan de manera importante la complejidad numérica del algoritmo.

## 10.2. Ejemplos numéricos

### 10.2.1. Perfil Rectangular

Existen pocos ejemplos donde es posible calcular la transformada no lineal de Fourier analíticamente. Uno de estos ejemplos es conocido como el perfil rectangular o pulso rectangular.

**Ejemplo 54.** Considere el potencial real-valuado de soporte compacto para el sis-

tema de Zakharov-Shabat dado por

$$q(t) = \begin{cases} A, & t \in [t_1, t_2] \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

El espectro continuo exacto se muestra en [85] el cual es

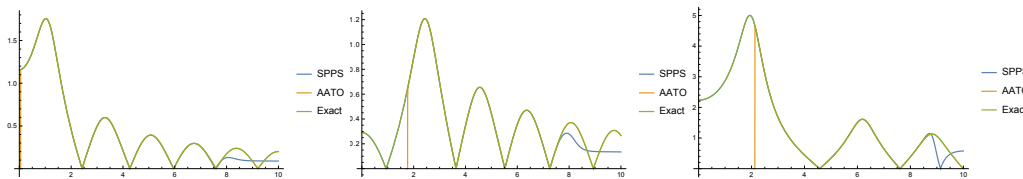
$$\hat{q}(\lambda) = \frac{A^*}{i\lambda} e^{-2j\lambda t} \left( 1 - \frac{D}{i\lambda} \cot(D(t_2 - t_1)) \right)^{-1},$$

donde  $D = \sqrt{\lambda^2 + |A|^2}$ . La ecuación de dispersión exacta es

$$e^{2j(T_2 - T_1)} \sqrt{\lambda^2 + |A|^2} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + |A|^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + |A|^2}}.$$

En el Cuadro 10.1 se muestra el espectro discreto del perfil rectangular calculado para  $A = 1, 2, 3$  y  $10$  en un intervalo  $[0, 2]$ . El método SPPS y el método AATO se calcularon juntos utilizando 80 potencias formales, 257 puntos para el intervalo  $[0, 2]$  y una aritmética de 54 dígitos para los potenciales  $A = 1, 2, 3$  y  $10$ . Debido a su alto coste numérico para construir los coeficientes para las series de Taylor se utilizaron únicamente  $N = 33$  términos para aproximar la serie (los cuales tomaron tres días en ser calculados). Como se muestra en la tabla de comparación del Cuadro 10.1 el método de series de Taylor fue el que menos precisión tiene y el que mas recursos consume en comparación al método AATO y SPPS. Debido a esto posteriormente se compara únicamente el método AATO con el método SPPS.

Tal como se muestra en la Sección 9.1 el método SPPS reduce el problema numérico de encontrar el espectro discreto al problema de encontrar las raíces de un polinomio, este método es preciso cerca del origen del plano complejo de la variable  $\lambda$ . Sin embargo el método AATO podría experimentar inestabilidad numérica cerca del origen del plano complejo dado que hay una división entre el parámetro espectral [50]. Se puede apreciar este fenómeno en las Figuras 10.1 y 10.2.



**Figura 10.1:** Comparación del espectro continuo obtenido por el método SPPS, el método AATO y el espectro continuo exacto. Se considera para cada ilustración los valores  $A = 2, 3$  y  $10$  respectivamente, fijando  $T_1 = 0$  y  $T_2 = 2$ .

Dado este fenómeno, para poder incrementar la precisión es posible combinar los resultados dados por el método AATO y el método SPPS simplemente tomando

Para  $A = 1$

$\lambda$ aprox.	SPPS	AATO	Series de Taylor
$0.3190i$	$1 \cdot 10^{-52}$	$3.5 \cdot 10^{-41}$	$3.1 \cdot 10^{-19}$

Para  $A = 2$

$\lambda$ aprox.	SPPS	AATO	Series de Taylor
$1.5713i$	$1.5 \cdot 10^{-29}$	$2.3 \cdot 10^{-31}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$

Para  $A = 3$

$\lambda$ aprox.	SPPS	AATO	Series de Taylor
$1.4738i$	$2.9 \cdot 10^{-30}$	$1.2 \cdot 10^{-24}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$
$2.6844i$	$1.3 \cdot 10^{-20}$	$7.6 \cdot 10^{-25}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$

Para  $A = 10$

$\lambda$ aprox.	SPPS	AATO
$4.6014i$	$1.6 \cdot 10^{-12}$	$2.4 \cdot 10^{-17}$
$6.6875i$	$3 \cdot 10^{-6}$	$9.9 \cdot 10^{-16}$
$8.0271i$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-15}$
$8.9402i$	0.2	$1.9 \cdot 10^{-14}$
$9.5426i$	0.4	$2.5 \cdot 10^{-14}$
$9.8875i$	0.4	$1.2 \cdot 10^{-14}$

**Cuadro 10.1:** Comparación del error absoluto del método SPPS, del método de series de Taylor y del método AATO.

el punto de intersección donde la diferencia entre estos enfoques es mínima. Bajo este esquema, fijando los parámetros  $A = 2, 3$  y  $10$ ,  $T_1 = 0$  y  $T_2 = 2$ , los errores absolutos de los experimentos numéricos usando la combinación del método SPPS y AATO para la aproximación de los eigenvalores y la transformada no lineal de Fourier discreta se muestran en el Cuadro 10.2.

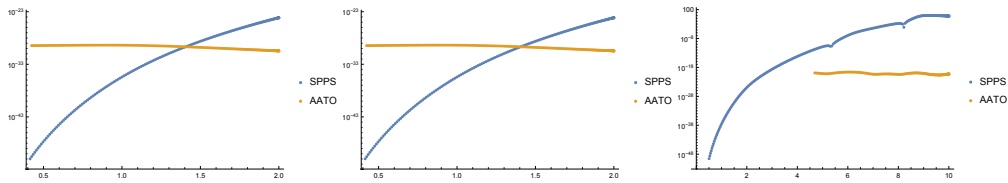
### 10.2.2. Pulso de Satsuma-Yajima

**Ejemplo 55.** Un potencial clásico cuya transformada no lineal de Fourier se conoce como el pulso de Satsuma-Yajima, este potencial es de la forma

$$q(x) = A \operatorname{sech}(x).$$

El problema de dispersión correspondiente a su sistema de Zakharov-Shabat ha sido resuelto de manera analítica con detalle en [22, 73, 86]. La función espectral continua exacta es

$$\hat{q}(\lambda) = \frac{\Gamma\left(-i\lambda + \frac{1}{2} + A\right) \Gamma\left(-i\lambda + \frac{1}{2} - A\right) \operatorname{sen}(\pi A)}{\Gamma^2\left(-i\lambda + \frac{1}{2}\right) \cosh(\pi\lambda)},$$



**Figura 10.2:** Error absoluto del método SPPS en comparación con el error absoluto del método AATO.

Para  $A = 2$

$\lambda$ aprox.	Eigenvalores	NLFT Discreta
$1.5713i$	$2.3 \cdot 10^{-31}$	$5 \cdot 10^{-30}$

Para  $A = 3$

$\lambda$ aprox.	Eigenvalores	NLFT Discreta
$1.4738i$	$2.9 \cdot 10^{-30}$	$1.8 \cdot 10^{-25}$
$2.6844i$	$7.6 \cdot 10^{-25}$	$1.9 \cdot 10^{-23}$

Para  $A = 10$

$\lambda$ aprox.	Eigenvalores	NLFT Discreta
$4.6014i$	$2.4 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-16}$
$6.6875i$	$9.9 \cdot 10^{-16}$	$5 \cdot 10^{-15}$
$8.0271i$	$6.7 \cdot 10^{-15}$	$1.2 \cdot 10^{-14}$
$8.9402i$	$1.9 \cdot 10^{-14}$	$7.1 \cdot 10^{-13}$
$9.5426i$	$2.5 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-14}$
$9.8875i$	$1.2 \cdot 10^{-14}$	$1.2 \cdot 10^{-14}$

**Cuadro 10.2:** Errores absolutos de los experimentos numéricos usando la mezcla del método SPPS y AATO para la aproximación de los eigenvalores y la transformada no lineal de Fourier discreta.

donde  $\Gamma$  es la función gamma. El espectro discreto exacto depende linealmente en  $A$  de acuerdo a [22, 73, 86], el cual se puede calcular por medio de

$$\lambda_n = i \left( A + \frac{1}{2} - n \right), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

donde  $N$  es el entero mas grande que satisface  $\Im(\lambda_n) > 0$ . El error absoluto y relativo de los experimentos numéricos usando el método SPPS y el método AATO para el espectro discreto cuando  $A = 2.7$  se muestran en la tabla del Cuadro 10.3.

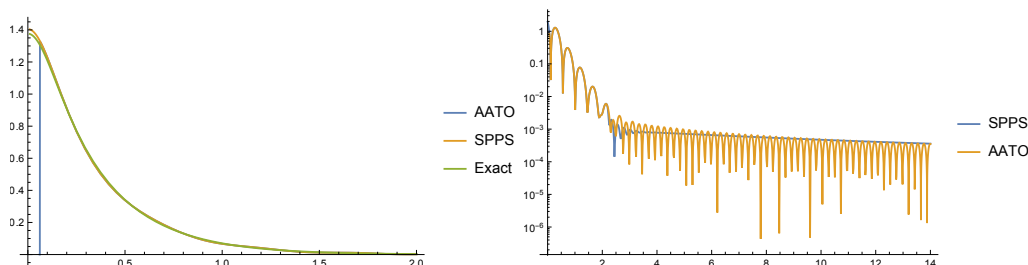
Una comparación del error absoluto del espectro continuo y discreto usando el método SPPS y el método AATO se muestran en la Figura 10.3.

Una comparación entre el error absoluto de los coeficientes no lineales de Fourier  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$  usando los métodos SPPS y AATO numéricos es mostrada en la Figura 10.4



$\lambda$	SPPS	AATO
$0.2i$	$5.7 \cdot 10^{-13}$	$5.7 \cdot 10^{-9}$
$1.2i$	$1.7 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$
$2.2i$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-9}$

**Cuadro 10.3:** Error absoluto y relativo de los experimentos numéricos usando el método SPPS y el método AATO para el espectro discreto cuando  $A = 2.7$



**Figura 10.3:** Gráfica del espectro continuo (izquierda) y el error absoluto (derecha) del experimento numérico para el pulso de Satsuma-Yajima con  $A = 2.7$  calculado con el método SPPS y el método AATO.

### 10.2.3. Potencial de dos jorobas

**Ejemplo 56.** Usando los métodos numéricos para los métodos SPPS y AATO es posible calcular el espectro para el sistema de Z-S considerando el potencial de dos jorobas

$$q(x) = 2 \left( e^{-4(x-1)^2} + e^{-4(x+1)^2} \right). \tag{10.3}$$

Este potencial se considera en [82]. La Figura 10.5 muestra la aproximación SPPS del espectro discreto el cual hace buena concordancia con los resultados gráficos mostrados en [82].

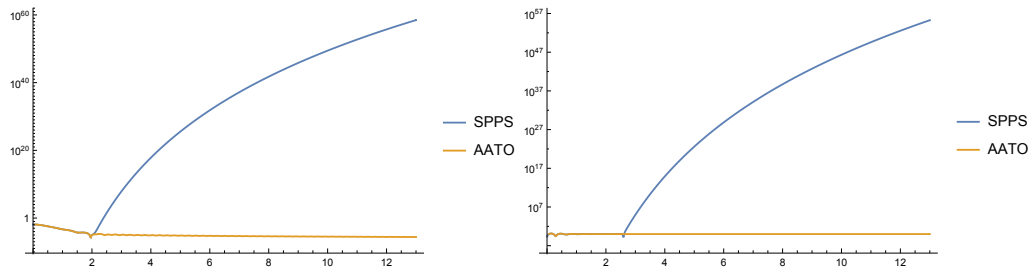
### 10.2.4. Estudio del comportamiento de los eigenvalores

El próximo ejemplo ilustra la aplicación del método SPPS a un problema espectral de Zakharov-Shabat con un potencial real de soporte compacto que admite eigenvalores complejos.

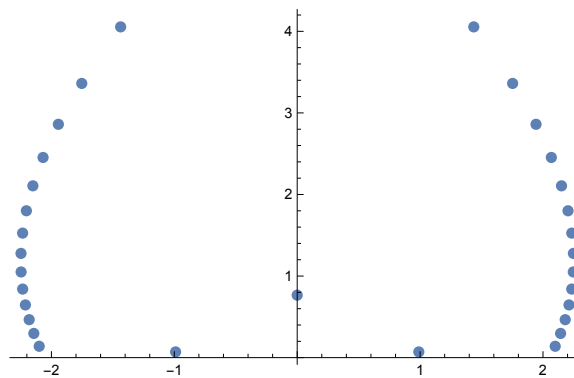
**Ejemplo 57.** Considere el sistema de Zakharov-Shabat con el potencial

$$q(x) = \begin{cases} s \left( -1 + 3\frac{\pi}{4} + 3x^2 \right), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \tag{10.4}$$

donde  $s \in \mathbb{R}$ . Este potencial fue considerado en un experimento numérico en [41].



**Figura 10.4:** Gráfica del error absoluto de los coeficientes no lineales de Fourier  $\mathbf{a}(\lambda)$  (izquierda) y  $\mathbf{b}(\lambda)$  (derecha) usando los métodos SPPS y AATO numéricos con un valor de  $A = 2.7$ .



**Figura 10.5:** Gráfica de la aproximación SPPS del sistema de Z-S con el potencial (10.3), cada punto corresponde a una raíz de la ecuación característica aproximada, las raíces que aparecen alrededor corresponde al error que induce el truncamiento de las series.

De acuerdo a [41], hay un par de eigenvalores complejos localizados simétricamente alrededor del eje real en la mitad derecha del plano complejo cuando  $s$  está en el rango  $0.956 \leq s \leq 0.9999$ . A medida que  $s$  se acerca a 0.9999 los eigenvalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se aproximan entre si y eventualmente se fusionan en un eigenvalor doble. Si se aumenta aún más el parámetro  $s$  un par de eigenvalores reales aparecen después de pasar por un estado de doble eigenvalor. El Cuadro 10.4 que muestra los resultados calculados por medio del método SPPS numérico ilustra el fenómeno descrito. Con la ayuda de la representación SPPS se encuentra de manera precisa el valor del parámetro  $s$  cuando los eigenvalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se fusionan en un eigenvalor doble. El valor  $s \approx 0.9999006472847$  corresponde al momento cuando los eigenvalores están mas cerca.

Para llevar a cabo este cálculo numérico se usa el software MathWorks MATLAB y se aproxima (6.11) con  $M = 100$  y  $v_0 = \exp(i \int Q)$  como una solución particular. Las integrales recursivas  $X^{(n)}$  son calculadas empleando la fórmula de integración de Newton-Cotes de seis puntos del séptimo orden (vea por ejemplo [19]).

$s$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0.956	$0.0000544585364 - 0.6265762379200i$	$0.0000544585364 + 0.6265762379200i$
0.967	$0.0076637690047 - 0.5443495752993i$	$0.0076637690047 + 0.5443495752993i$
0.989	$0.0227377545015 - 0.3155449553793i$	$0.0227377545015 + 0.3155449553793i$
0.9999	$0.0301375300344 - 0.0027328986939i$	$0.0301375300365 + 0.0027328986939i$
0.9999006472847	$0.0301625594632 + 5.0785 \cdot 10^{-9}i$	$0.0301635517506 - 5.0785 \cdot 10^{-9}i$
0.999901	$0.0283635450766 + 2.4 \cdot 10^{-12}i$	$0.0319628654396 - 2.4 \cdot 10^{-12}i$
0.99991	$0.0209514552194 + 4.9 \cdot 10^{-13}i$	$0.0393371418191 - 4.9 \cdot 10^{-13}i$
0.99995	$0.0089010060464 + 1.3 \cdot 10^{-13}i$	$0.0514417381256 - 1.3 \cdot 10^{-13}i$
0.99999	$0.0015563906608 + 2.8 \cdot 10^{-14}i$	$0.0588404994651 - 3.1 \cdot 10^{-14}i$

**Cuadro 10.4:** Comportamiento de los eigenvalores dependiendo del parámetro  $s$  del Ejemplo 57.

El método SPPS permite obtener una gráfica de la función característica en tres dimensiones en algunos segundos. La localización de las raíces del plano complejo para diferentes valores del parámetro  $s$  es ilustrada por la Figura 10.6 donde se trazan las gráficas de la función característica aproximada  $-\log |\Phi_M|$ .

### 10.2.5. Localización de eigenvalores empleando el principio del argumento

Dado que el lado a mano izquierda de la Ecuación (6.11) es una función analítica con respecto a  $\lambda$ , es posible aplicar el principio del argumento para localizar los ceros de esta función y calcular su orden. En el caso cuando una función característica aproximada es justamente un polinomio como en (6.13), se conocen varios métodos precios de localización de ceros de polinomios y el uso del principio del argumento puede ser excesivo. Sin embargo aun en este caso el principio del argumento puede ser útil. Como se menciona en el Capítulo 3, por el principio de Rouché varias raíces del polinomio (6.13) son aproximaciones de los eigenvalores, todas las demás raíces aparecen debido al truncamiento de la serie (6.11). La localización de diversas raíces cercanas al origen usando el principio del argumento seguido de varias iteraciones de Newton-Raphson puede ser más rápido que la localización de todas las raíces por algún método de propósito general. Más aún para condiciones de frontera mas generales, por ejemplo, las que involucran la multiplicación por una función analítica de  $\lambda$ , la función característica aproximada podría no ser un polinomio, y el principio del argumento se vuelve aún mas útil (vea, por ejemplo, [12, 20, 84]). El principio del argumento (vea, por ejemplo, [16]) consiste en lo siguiente:

**Teorema 58.** *Sea  $f$  una función analítica en un dominio  $G$  con ceros  $z_1, z_2, \dots, z_n$  contados de acuerdo con su multiplicidad. Si  $\gamma$  es una curva simple rectificable en*

$G$ , contractible a un punto en  $G$  y que no pasa a través de  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma; z_k), \quad (10.5)$$

donde  $n(\gamma; z_k)$  es el número de vueltas de  $\gamma$  alrededor de  $z_k$ .

Este teorema aplicado a la función característica aproximada (6.13) en un dominio restringido por el teorema de Rouché (vea la discusión de arriba) permite encontrar un número preciso de eigenvalores y puede también ser empleada para encontrar su posición precisa. Se ilustra este enfoque en el siguiente ejemplo para el cual una rutina de MATLAB fue escrita para localizar la posición de los ceros de la función característica aproximada (6.13) calculando el cambio del argumento usando 4000 puntos a lo largo de contornos rectangulares  $\gamma$ . Si el cambio del argumento a lo largo de cierto  $\gamma$  es cero, el programa considera otro contorno rectangular. De otro modo el programa divide el rectángulo en dos rectángulos mas pequeños y llama la rutina nuevamente en cada rectángulo hasta que cierta tolerancia deseada es alcanzada. Este programa evalúa (10.5) sobre el contorno final  $\gamma$  para encontrar el orden del cero y también refina la posición del cero por la fórmula bien conocida de residuos (vea por ejemplo [12, 45])

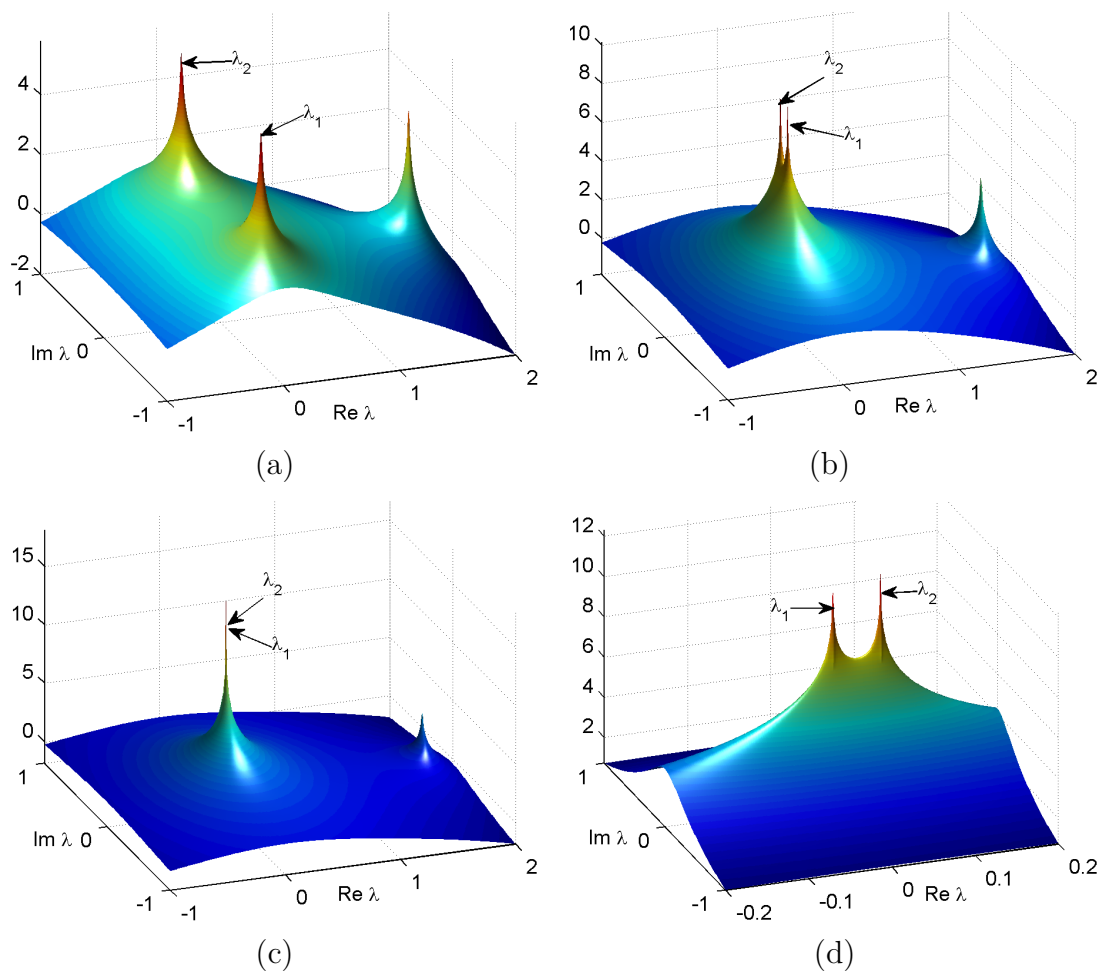
$$z_k = \frac{1}{2\pi i N(z_k)} \oint_{\gamma} \frac{z \Phi'_M(z)}{\Phi_M(z)} dz,$$

donde  $N(z_k)$  es la multiplicidad del cero  $z_k$ .

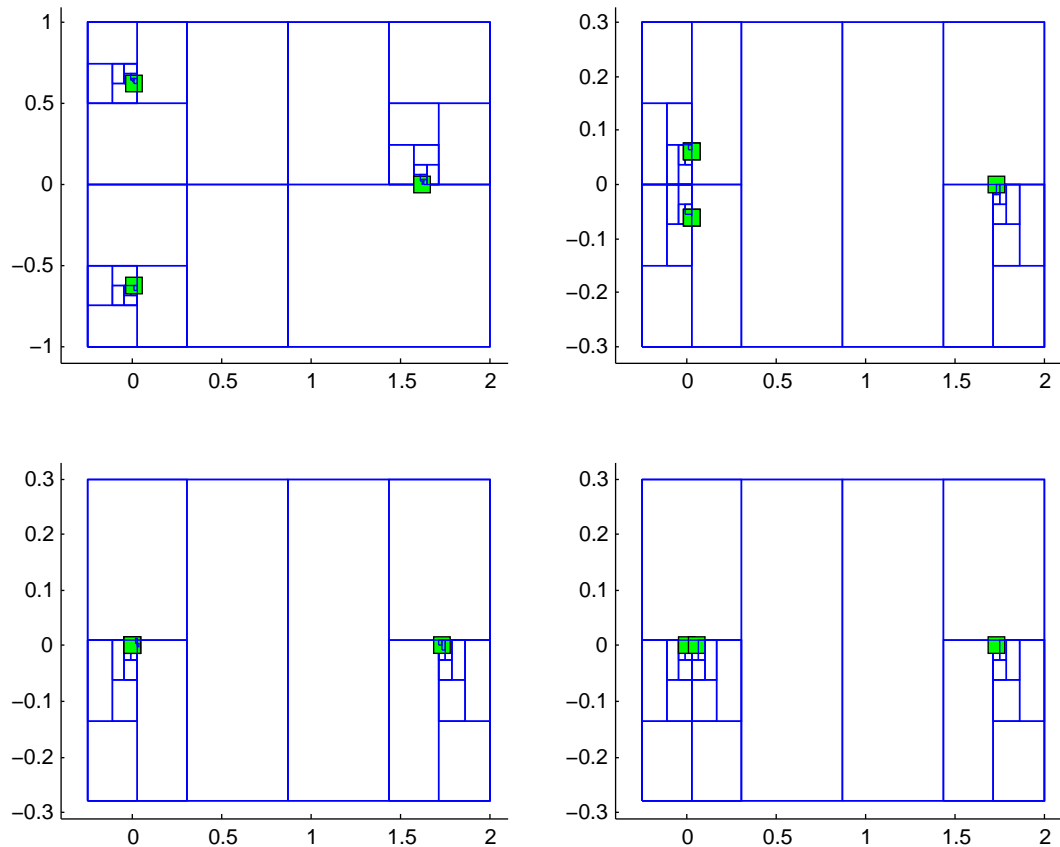
**Ejemplo 59.** Considere el sistema de Zakharov-Shabat con el potencial (10.4). Se calcula el polinomio (6.13) con  $M = 100$  y se presenta en la Figura 10.7 la ilustración del trabajo del algoritmo descrito. Las áreas sombreadas contienen los eigenvalores correspondientes. Los eigenvalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se acercan uno al otro y después se separan. Las gráficas ilustran la convergencia del procedimiento descrito para aproximar los eigenvalores presentados en el Cuadro 10.5.

$s$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_3$
0.956	$0.0124269786 \pm 0.6259290726i$	$1.6264287578 + 2 \cdot 10^{-15}i$
0.9995	$0.0299931318 \pm 0.0606462518i$	$1.7346285373 - 1.5 \cdot 10^{-14}i$
0.9999006472847	$0.0301630556 + 3.9 \cdot 10^{-15}i,$ eigenvalor doble	$1.7356369172 - 2 \cdot 10^{-15}i$
0.99999	$0.0588404994 + 3.1 \cdot 10^{-14}i,$ $0.0015563906 - 2.8 \cdot 10^{-14}i$	$1.7358620206 + 10^{-15}i.$

**Cuadro 10.5:** Comportamiento de los eigenvalores dependiendo del parámetro  $s$  en el Ejemplo 57.



**Figura 10.6:** Gráficas de la función  $-\log|\Phi_M|$  del Ejemplo 57. En (a) los picos de la izquierda muestran la posición de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  con  $s = 0.956$ . En (b) cuando  $s = 0.9995$  es posible ver que los picos en la izquierda están más cerca uno del otro. En (c) los picos de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están cerca de fusionarse en un eigenvalor doble cerca de  $s \approx 0.9999006472847$ , y finalmente en (d)  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos eigenvalores diferentes en  $s = 0.99999$ .



**Figura 10.7:** Ilustración del algoritmo basado en el principio del argumento en el Ejemplo 59 para  $s = 0.956$  (arriba a la izquierda),  $s = 0.9995$  (arriba a la derecha),  $s = 0.9999006472847$  (abajo a la izquierda) y  $s = 0.99999$  (abajo a la derecha). Los rectángulos sombreados marcan la posición de los eigenvalores.

# 11 Conclusiones y recomendaciones para el trabajo a futuro

## 11.1. Conclusiones

En el Capítulo 3 se construyó una modificación del método SPPS que permite solucionar ecuaciones de tipo S-L en haz, este método permite construir la solución general en términos de series de potencias del parámetro espectral, donde los coeficientes de las series están dados en términos de integrales recursivas que involucran una solución particular  $u_0$  de la ecuación de Sturm-Liouville en haz

$$(pu_0')' + qu_0 = u_0 \sum_{k=1}^N \lambda_0^k r_k$$

donde  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  es un número fijo.

En el Capítulo 4 se ha mostrado que el método SPPS modificado provee un método numérico eficiente para resolver problemas de valor en la frontera. Los ejemplos numéricos llevados a cabo en la Sección 4.1, como la aplicación al problema de la ecuación que describe cuerda amortiguada por ejemplo, muestran que la forma conveniente de la representación SPPS modificada se presta para construir numéricamente la solución de problemas espectrales de ecuaciones de Sturm-Liouville en haz efectivamente por medio de el cálculo de las raíces de un polinomio.

En el Capítulo 6 se ha construido una representación para la solución del sistema de Z-S en su forma mas general en términos del método SPPS modificado. Considerando un potencial de soporte compacto para el sistema de Z-S con un potencial complej-valuado en la Sección 6.2 se construye en términos del método SPPS modificado una ecuación característica (o ecuación de dispersión) para el problema de eigenvalores. Mas aún se construye una representación en términos del método SPPS modificado de los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  de la transformada no lineal de Fourier, lo que permite construir expresiones exactas para encontrar la transformada continua y discreta de Fourier.

Por medio de los resultados numéricos mostrados en el Capítulo 7 se demostró que los resultados mostrados en el Capítulo 6 son apropiados para construir métodos numéricos para el problema espectral del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complej-valuado. En este capítulo también se demostró que las representaciones en

términos del método SPPS modificado para los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  de la transformada no lineal de Fourier permiten aproximar numéricamente el espectro discreto y continuo de la transformada no lineal de Fourier de una manera eficiente.

Se construyeron diversas representaciones y aproximaciones de las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado en el Capítulo 9. Las representaciones de las soluciones están dadas en términos del método SPPS clásico y el método para construir los coeficientes de Taylor de la solución de una ecuación de Sturm-Liouville. Se construyó una aproximación de las soluciones en términos del método de la aproximación analítica de operadores de transmutación. Cuando se considera un potencial de soporte compacto estas representaciones de las soluciones para el sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado permiten construir expresiones para calcular los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  de la transformada no lineal de Fourier y expresiones exactas para encontrar la transformada continua y discreta de Fourier.

Las representaciones de las soluciones del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado mostradas Capítulo 9 son adecuadas para construir diversos métodos numéricos. En el Capítulo 10 se demuestra este hecho por medio de diversos ejemplos donde se consideran diversos potenciales real-valuados para el sistema de Zakharov-Shabat. Se aprovecharon algunos ejemplos para comparar el desempeño de cada uno de los métodos mostrados en el Capítulo 9 y se mostraron las cualidades y precisión de cada método.

## 11.2. Recomendaciones para el trabajo a futuro

En los Capítulos 7 y 10 se muestran diversos ejemplos numéricos donde se calculan con alta precisión los datos de dispersión  $SD(\lambda, 0)$ , es decir, los coeficientes espectrales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , el espectro discreto y el espectro continuo, de la transformada no lineal de Fourier para el sistema de Zakharov-Shabat con diversos potenciales. Cuando se describe la transformada no lineal de Fourier en la introducción de esta tesis se indica que los datos de dispersión  $SD(\lambda, 0)$  sirven para poder construir por medio de la ley de evolución en el tiempo los datos de dispersión  $SD(\lambda, t)$ . El trabajo a futuro natural es emplear los datos de dispersión obtenidos en los Capítulos 7 y 10 para llevar a cabo la ley de evolución de estos datos de dispersión y así obtener  $SD(\lambda, t)$ . Mas aún, es interesante para un trabajo a futuro obtener una aproximación de la solución general de la ecuación no lineal de Schrödinger  $q(t, x)$  a partir de los datos de dispersión  $SD(\lambda, t)$ .

En el experimento numérico del Ejemplo 32 del Capítulo 7 para los valores mas pequeños de  $\epsilon$  considerados en [12] el método SPPS requiere del uso de aritmética de alta precisión debido a que el potencial  $q$  es altamente oscilatorio y la solución particular que casi se anula  $v_0$  genera valores muy grandes cuando se requiere dividir con esta función, estas características hacen complicada e inestable la aproximación



numérica en el sentido de que el tiempo de cálculo se hace muy extenso y costoso, por esta razón se ha decidido no incluir esos experimentos numéricos. El trabajo a futuro consiste en mejorar el método numérico de tal manera que funcione de una manera eficiente para todos los valores de  $\epsilon$  considerados en [12].

Una desventaja de la técnica considerada en este trabajo para encontrar la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial complejo-valuado es que cuando se reduce este sistema a una ecuación de Sturm-Liouville en haz en el Capítulo 5 se necesita dividir entre el potencial en la ecuación (5.3) (con  $p = q^*$  para el sistema de Z-S con un potencial complejo), esto implica que el método necesita que el potencial  $q$  sea distinto de cero en su dominio. Como se menciona en el Capítulo 6 el sistema de Z-S es un caso particular de un sistema de Dirac y existe una reciente modificación del método SPPS presentada en [28] que permite construir una representación de las soluciones de las ecuaciones de tipo Dirac. Una característica interesante del método presentado en [28] es que no requiere una reducción del sistema de Zakharov-Shabat a una ecuación de Sturm-Liouville en haz. La ventaja de este enfoque es que permite construir una representación de la solución del sistema de Z-S con un potencial  $q$  complejo-valuado que puede tener ceros en su dominio. Un trabajo a futuro es estudiar las características, ventajas y la precisión del método de [28] aplicado al sistema de Zakharov-Shabat con potenciales como el que se muestra en el Ejemplo 32 del Capítulo 7 donde el potencial  $q$  decrece rápidamente y comparar los resultados con lo que se muestra en este trabajo.

En el Capítulo 3 se construye la modificación del método SPPS para resolver ecuaciones de Sturm-Liouville en haz de la forma

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^N \lambda^k r_k$$

para un  $N$  finito. El trabajo a futuro consiste en construir una modificación del método SPPS para resolver ecuaciones de la forma

$$(pu')' + qu = u \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k r_k,$$

es decir, cuando el parámetro espectral forma parte de una función analítica.

Tal como se menciona en la Observación 51 la ecuación (8.10) es de Sturm-Liouville y tiene una solución particular  $u_0 = e^{-\int p}$  cuando (8.10) tiene un valor  $\lambda = 0$ . Se puede construir un análogo del Teorema 48 que permita construir de la misma manera los primeros  $n$  coeficientes de Taylor de la solución  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  de la ecuación (8.10). Conociendo las soluciones  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  y  $w = c_1 g_1 + c_2 g_2$  de las ecuaciones de Sturm-Liouville (8.10) y 8.9 se puede construir la solución del sistema de Zakharov-Shabat por medio de las igualdades  $v_1 = \frac{1}{2}(u + w)$ ,  $v_2 = \frac{-i}{2}(u - w)$ . La ventaja de

este enfoque es que el potencial  $q$  requiere ser una función  $q \in C^n(x_0)$ , mientras que el Teorema 50 requiere que el potencial  $q$  sea una función real analítica en  $x_0 \in [0, a]$  (la cual es una condición mas fuerte que la anterior). Más aún, en este enfoque no se requiere derivar la serie de Taylor para obtener la solución  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ . El trabajo a futuro consiste en explorar las características de este enfoque: Escribir una fórmula para construir los primeros  $n$  coeficientes de las series de Taylor de la solución del sistema de Zakharov-Shabat real-valuado. Construir una expresión para calcular el residuo de la serie de Taylor de la solución del sistema de Zakharov-Shabat con un potencial real-valuado. Usando este resultado construir los primeros  $n$  coeficientes de las series de Taylor para los coeficientes espectrales de Fourier  $\mathbf{a}(\lambda)$  y  $\mathbf{b}(\lambda)$ . Construir los primeros  $n$  coeficientes de las series de Taylor para la transformada discreta y continua de Fourier.

# Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su incondicional apoyo, a mis profesores por compartir su conocimiento y tiempo, a todas las personas que he conocido en el Cinvestav Querétaro por su cordialidad.



# Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Method for solving the sine-Gordon equation*, Physical review letters. 30, 1262–1264 (1973).
- [2] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems*, Studies in applied mathematics, 53, 249–315 (1974).
- [3] M. J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Studies in applied mathematics, 4, SIAM, Philadelphia, (1981).
- [4] A. Agamaliyev, A. Nabiyev, *On eigenvalues of some boundary value problems for a polynomial pencil of Sturm-Liouville equation*, Applied mathematics and computation, 165 (2005) 503–515.
- [5] G. P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1992).
- [6] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd ed., Academic Press, New York, (2001).
- [7] F. V. Atkinson, *Discrete and continuous boundary problems*, New York/London: Academic Press, (1964).
- [8] B. A. Babadzhyanov, A. B. Khasanov, A. B. Yakhshimuratov, *On the inverse problem for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with periodic potential*, Differential equations 41 (2005) 310-318.
- [9] E. Bairamov, O. Çelebi, *Spectral properties of the Klein-Gordon s-wave equation with complex potential*, Indian J. Pure Appl. Math 28 (1997) 813–824.
- [10] R. Beals, R. R. Coifman, *Inverse scattering and evolution equations*, Communications on pure and applied mathematics, 38 (1985), 29-42.
- [11] R. Beals, R. R. Coifman, *Scattering and inverse scattering for first order systems*, Communications on pure and applied mathematics, 37 (1984), 39-90.
- [12] J. C. Bronski, *Semiclassical eigenvalue distribution of the non self-adjoint Zakharov-Shabat eigenvalue problem*, Physica D, 97 (1996) 376–397.
- [13] R. Castillo, K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, H. Oviedo, *Efficient calculation of the reflectance and transmittance of finite inhomogeneous layers*, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 11 (2009), 065707.

- 
- [14] R. Castillo P., V. V. Kravchenko, H. Oviedo, V. S. Rabinovich, *Dispersion equation and eigenvalues for quantum wells using spectral parameter power series*, J. Journal of mathematical physics, 52 (2011) 043522.
- [15] R. Castillo, V. V. Kravchenko, S. M. Torba, *Spectral parameter power series for perturbed Bessel equations*, Applied mathematics and computation, 220 (2013) 676–694.
- [16] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, (1978).
- [17] R. Courant, D. Gilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. I.*, New York: Interscience Publishers, (1953).
- [18] S. Cox, E. Zuazua, *The rate at which energy decays in a damped string*, Commun. Partial Differential equations 19 (1994) 213–243.
- [19] P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration. Second edition*, New York: Dover Publications, (2007).
- [20] M. Dellnitz, O. Schütze, Q. Zheng, *Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable*, Journal of computational and applied mathematics, 138 (2002) 325–333.
- [21] M. Desaix, D. Anderson, L. Helczynski, M. Lisak, *Eigenvalues of the Zakharov-Shabat Scattering Problem for Real Symmetric Pulses*, Physical review letters. Volume 90, number 1, (2003).
- [22] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, *Variational approach to the Zakharov–Shabat scattering problem*, Physical review letters, E 50 (1994) 2253–2256.
- [23] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, M. L. Quiroga-Teixeiro, *Variationally obtained approximate eigenvalues of the Zakharov-Shabat scattering problem for real potentials*, Physics letters A, Volume 212, issue 6, 8 April (1996), Pages 332–338.
- [24] L. Erbe, R. Mert, A. Peterson, *Spectral parameter power series for Sturm–Liouville equations on time scales*, Applied mathematics and computation, 218 (2012) 7671–7678.
- [25] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, (2007).
- [26] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Physical review letters 19, 1095–1097 (1967).
- [27] B. Z. Guo, W. D. Zhu, *On the energy decay of two coupled strings through a joint damper*, Journal of sound and vibration, 203 (1997) 447–455.
- [28] N. J. Gutierrez, V. V. Kravchenko, S. M. Torba, *Spectral parameter power series for the Dirac system*, In preparation.
- [29] D. B. Hinton, A. K. Jordan, M. Klaus, J. K. Shaw, *Inverse scattering on the line for a Dirac system*, J. Journal of mathematical physics, 32 (1991) 3015–3030.

- [30] M. Jaulent, *Inverse scattering problems in absorbing media*, J. Journal of mathematical physics, 17 (1976) 1351–1360.
- [31] S. Karigiannis, *The inverse scattering transform and integrability of nonlinear evolution equations*, minor thesis, june 5, (1998).
- [32] K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, J. A. Baldenebro-Obeso, *Spectral parameter power series for fourth-order Sturm-Liouville problems*, Applied mathematics and computation, 219 (2012) 3610–3624.
- [33] K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, H. C. Rosu, *Eigenvalue problems, spectral parameter power series, and modern applications*, Mathematical methods in the applied sciences, (2015).
- [34] K.V. Khmelnytskaya, V.V. Kravchenko, S.M. Torba, S. Tremblay, *Wave polynomials and Cauchy’s problem for the Klein–Gordon equation*, Journal of mathematical analysis and applications, 399 (2013) 191–212.
- [35] K. V. Khmelnytskaya, H. C. Rosu, *A new series representation for Hill’s discriminant*, Annals of physics, 325 (2010) 2512–2521.
- [36] K. V. Khmelnytskaya, I. Serroukh, *The heat transfer problem for inhomogeneous materials in photoacoustic applications and spectral parameter power series*, Mathematical methods in the applied sciences, 36 (2013) 1878–1891.
- [37] K. V. Khmelnytskaya, T. V. Torchynska, *Reconstruction of potentials in quantum dots and other small symmetric structures*, Mathematical methods in the applied sciences, 33 (2010) 469–472.
- [38] Y. Kim, L. Lee, G. D. Lyng, *The WKB approximation of semiclassical eigenvalues of the Zakharov-Shabat problem*, available at arXiv:1310.4145, (2013).
- [39] M. Klaus, J. K. Shaw, *Influence of pulse shape and frequency chirp on stability of optical solitons*, Optics Communications 197 (2001) 491-500.
- [40] M. Klaus, J. K. Shaw, *On the eigenvalues of Zakharov-Shabat systems*, SIAM J. Mathematical analysis, 34 (2003), 759-773.
- [41] M. Klaus, J. K. Shaw, *Purely imaginary eigenvalues of Zakharov-Shabat systems*, Physical review letters, E 65 (2002), paper 036607, 1-8.
- [42] L. Kobyakova, *Spectral problem generated by the equation of smooth string with piece-wise constant friction*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 8 (2012) 280–295.
- [43] D. J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves*, Philosophical magazine 39, 422–443 (1895).
- [44] V. P. Kotlyarov, *Asymptotic analysis fo the Marchenko integral equation and solitón asymptotics of a solution of the nonlinear Schrödinger equation*, Physica D 87 (1995), 176-185.

- 
- [45] P. Kravanja, T. Sakurai, M. Van Barel, *On locating clusters of zeros of analytic functions*, BIT numerical mathematics, 39 (1999) 646–682.
- [46] V. V. Kravchenko, *A representation for solutions of the Sturm-Liouville equation*, Complex variables and elliptic equations 53, (2008) 775–789.
- [47] V. V. Kravchenko, *Applied pseudoanalytic function theory*, Basel: Birkhäuser, (2009).
- [48] V. V. Kravchenko, S. Morelos, S. Tremblay, *Complete systems of recursive integrals and Taylor series for solutions of Sturm-Liouville equations*. Mathematical methods in the applied sciences, Volume 35, issue 6, 704–715, (2012).
- [49] V. V. Kravchenko, R. M. Porter, *Spectral parameter power series for Sturm-Liouville problems*. Mathematical methods in the applied sciences. Special Issue: Complex-Analytic Methods. Volume 33, issue 4, pages 459–468, (15 March 2010).
- [50] V. V. Kravchenko, S. M. Torba. *Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems*. Accepted to Journal of Computational and Applied Mathematics 275 (2015) 1–26.
- [51] V.V. Kravchenko, S.M. Torba, *Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions*, Complex analysis and operator theory, Volume 9, Issue 2, pp 379-429, (February 2015).
- [52] V. V. Kravchenko, S. M. Torba, *Transmutations and spectral parameter power series in eigenvalue problems*, in Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 228 (2013) 209–238.
- [53] V. V. Kravchenko, S. M. Torba, U. Velasco-García, *Nonlinear Fourier transform using transmutation operators and spectral parameter power series representations*, In preparation.
- [54] V. V. Kravchenko, S. M. Torba, U. Velasco-García, *Spectral parameter power series for polynomial pencils of Sturm-Liouville operators and Zakharov-Shabat systems*, Journal of Mathematical Physics 56, 073508 (2015); doi: 10.1063/1.4927253.
- [55] V. V. Kravchenko, U. Velasco-García, *Dispersion equation and eigenvalues for the Zakharov-Shabat system using spectral parameter power series*, Journal of Mathematical Physics 52, 063517 (2011); doi: 10.1063/1.3602275.
- [56] M. G. Krein, A. A. Nudelman, *On direct and inverse problems for frequencies of boundary dissipation of inhomogeneous string*, Doklady akademii nauk SSSR, 247 (1979) 1046–1049.
- [57] M. G. Krein, A. A. Nudelman, *On some spectral properties of an inhomogeneous string with dissipative boundary condition*, Journal of operator theory, 22 (1989) 369–395.
- [58] G. L. Lamb, *Elements of soliton Theory*, John Wiley & Sons, New York, (1980).



- [59] A. Laptev, R. Shterenberg, V. Sukhanov, *Inverse spectral problems for Schrödinger operators with energy depending potentials*, in CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 4, (2007) 341–352.
- [60] P. D. Lax, *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Communications on pure and applied mathematics, 21 (1968), 467–490.
- [61] B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac operators*, Kluwer academic publications, (1991).
- [62] J. Lin, Y. Li, X. Qian, *The Darboux transformation of the Schrödinger equation with an energy-dependent potential*, Physics letters, A 362 (2007) 212–214.
- [63] K. Liu, Z. Liu, *Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity*, Z. Angew. Journal of mathematical physics, 53 (2002) 265–280.
- [64] A. A. Nabiev, *Inverse scattering problem for the Schrödinger-type equation with a polynomial energy-dependent potential*, Inverse problems, 22 (2006) 2055–2068.
- [65] I. M. Nabiev, *The uniqueness of reconstruction of quadratic bundle for Sturm-Liouville operators*, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan 23 (2004) 91–96.
- [66] A. A. Nabiev, I. M. Guseinov, *On the Jost solutions of the Schrödinger-type equations with a polynomial energy-dependent potential*, Inverse problems, 22 (2006) 55–67.
- [67] S. Novikov, S. V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Consultants Vureau, New York. (1984).
- [68] V. N. Pivovarchik, *On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with one-dimensional linear part*, Ukrainian mathematical journal, J. 59 (2007) 766–781.
- [69] N. Pronska, *Reconstruction of energy-dependent Sturm-Liouville equations from two spectra*, Integral equations and operator theory, 76 (2013) 403–419.
- [70] V. S. Rabinovich, R. Castillo-Pérez, F. Urbano-Altamirano, *On the essential spectrum of quantum waveguides*, Mathematical methods in the applied sciences, 36 (2013) 761–772.
- [71] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics: Vol 1 functional analysis*. San Francisco, CA, USA: Academic Press, (1980).
- [72] J. S. Russell, *Report on waves*, Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, London, (1845), pp. 311–390.
- [73] J. Satsuma, N. Yajima, *Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media*, Progress of theoretical physics supplement, 55 (1974) 284–306.

- 
- [74] A. Schulze-Halberg, B. Roy. *Darboux partners of pseudoscalar Dirac potentials associated with exceptional orthogonal polynomials*, Annals of physics, 349 (2014), 159–170
- [75] J. K. Shaw. *Mathematical principles of optical fiber communications*. SIAM, May 1, (2004), 103 pages.
- [76] S. Tanaka 1975 Publ. RIMS (Kyoto University) 10 329
- [77] T. Tao, C. Thiele. *Nonlinear Fourier Analysis*, UCLA Department of Mathematics, (2006), Available at arXiv:1201.5129.
- [78] A. Tovbis, S. Venakides, *The eigenvalue problem for the focusing nonlinear Schrödinger equation: new solvable cases*, Physica D 146 (2000) 150–164.
- [79] E. N. Tsoy, F. Kh. Abdullaev, *Interaction of pulses in the nonlinear Schrödinger model*, Physical review letters, E 67 (2003) 056610.
- [80] S. Wahls, H. V. Poor, *Fast Numerical Nonlinear Fourier Transforms*, IEEE Transactions on Information Theory, accepted for publication. Preprint: arXiv:1402.1605 [cs.IT], (2014).
- [81] S. Wahls, H. V. Poor, *Introducing the fast nonlinear Fourier transform*, Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Vancouver, Canada, (May 2013).
- [82] J. Yang, *Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems*, Philadelphia: SIAM, (2010).
- [83] C. Yang, A. Zettl, *Half inverse problems for quadratic pencils of Sturm-Liouville operators*, Taiwanese journal of mathematics, 16 (2012) 1829–1846.
- [84] X. Ying, I. N. Katz, *A Reliable Argument Principle Algorithm to Find the Number of Zeros of an Analytic Function in a Bounded Domain*, Numer. Math. 53 (1988) 143–163.
- [85] M. I. Yousefi, F. R. Kschischang. *Information transmission using the nonlinear Fourier transform, part I: Mathematical tools*. Submitted to IEEE transactions on information theory. ArXiv:1202.3653v2, (2012).
- [86] M. I. Yousefi, F. R. Kschischang. *Information transmission using the nonlinear Fourier transform, part II: Numerical Methods*. Submitted to IEEE transactions on information theory. ArXiv:1204.0830v1, (2012).
- [87] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, *Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Physical review letters. 15, 240–243 (1965).
- [88] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, *A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem, I*, Functional analysis and its applications,, 8(3), 226-235 (1974).
- [89] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soviet physics, JETP 34, 62–69 (1972).

- [90] X. Zhou, *Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities*, Communications on pure and applied mathematics, 42 (1989), 895-938.



# Nomenclatura

AATO	Analytic approximation of transmutation operators
AKNS	Ablowitz Kaup Newell Segur
ENLS	Ecuación no lineal de Schrödinger
KdV	Korteweg deVries
S-L	Sturm-Liouville
SD	Scattering Data
SPPS	Spectral Parameter Power Series
TDI	Transformada de dispersión inversa
TNLF	Transformada no lineal de Fourier
Z-S	Zakharov-Shabat