



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Operadores de transmutación
para la ecuación de Bessel perturbada
y aproximación analítica de sus soluciones**

Tesis que presenta

Jessica Yuniver Santana Bejarano

Para Obtener el Grado de:

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de
Matemáticas

Director de Tesis: Dr. Vladyslav Kravchenko Cherkasski

**Transmutation operators
for the perturbed Bessel equation
and analytic approximation of its solutions**

By
Jessica Yuniver Santana Bejarano

*A Dissertation Submitted to the Department of Mathematics of Cinvestav-IPN in Partial
Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Mathematics*

Advisor:
Vladislav V. Kravchenko

August 2016
Santiago de Querétaro, Querétaro, México

No sé que le parece al mundo, pero, a mi juicio, no he sido más que un niño que se dedicó a jugar en la playa regocijándose al encontrar un guijarro más pulido que los demás o una concha marina más bonita que las ordinarias, mientras el océano de la verdad yacía ante mi esperando que lo descubriera.

Isaac Newton

Dedico este trabajo a las personas que mas amo:

A mi mamá
Margarita Bejarano Murrieta

*Por su constante esfuerzo y dedicación en formarme y educarme.
Por su apoyo incondicional en cada reto que me propongo.*

A mis hermanos:

Vitaliano, Dupret, Hildegardo, Uriel, Edna, Cinthya, Jaziel y Belem.

A mis sobrinos:

Sahak, Bastian, Merak, Scarlett, Victoria,...

A
Nelson

A la memoria de un gran amigo y hermano:

Enrique Rodríguez Castillo

17 de Diciembre de 1982-29 de Julio de 2016

**Operadores de transmutación
para la ecuación de Bessel perturbada
y aproximación analítica de sus soluciones**

JESSICA YUNIVER SANTANA BEJARANO
Cinvestav del IPN

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este espacio para agradecer a todos aquellos que siempre estuvieron cerca de mí y muy al pendiente de cada paso o decisión que yo tome durante estos últimos años, años llenos de aprendizaje y con tantas experiencias. Les aseguro a todos que todo este tiempo ha sido muy bien empleado y lo he aprovechado al máximo para seguirme formando tanto en lo profesional como en lo personal.

A todas aquellas personas que me extendieron la mano cuando más lo necesité y que siempre creyeron en mí, les agradezco todo lo que me apoyaron.

A mi director de tesis, el Dr. Vladyslav V. Kravchenko Cherkasski por extenderme la mano cuando más lo he necesitado y por compartirme un poco de su conocimiento, por ser un gran ejemplo a seguir. Por las largas horas de trabajo que me dedicó en estos años para que yo pudiera sacar adelante el trabajo que ahora culmino, por toda la paciencia que me tuvo y por todo el apoyo que de usted recibí.

Al Dr. Sergii Torba por todo el tiempo que me dedicó durante mi estancia en Querétaro para que yo pudiera comprender mejor la idea del trabajo que estuve desarrollando y por las sugerencias que aportó para poder culminar este proyecto con éxito, por todo el apoyo brindado en particular en la parte numérica del artículo.

En verdad siento un gran aprecio por ambos doctores, ojalá existieran muchos como ustedes en México, dispuestos a colaborar con los avances en ciencia y tecnología y sobre todo a apoyar a jóvenes que llegan a diversas instituciones con hambre de seguir aprendiendo y de superarse.

Agradezco a CONACYT por el apoyo que me brindó durante mis estudios de doctorado.

A mis sinodales y a todo el comité revisor de tesis por todas las sugerencias y correcciones que me hicieron para que el presente trabajo culminará con éxito, y fuera agradable y más comprensible tanto para mí como para el lector.

A la Dra. Martha Dolores Guzmán Partida y al Dr. Martín Gildardo García Alvarado porque a pesar de la distancia nunca se han olvidado de mí y siempre han estado ahí cuando los he necesitado. Por apoyar a que mis conocimientos sigan creciendo y por toda la confianza que han depositado en mí. Por ser un gran ejemplo a seguir.

A mis compañeros y amigos, tanto de Cinvestav Zacatenco en el DF como a los que me acompañaron los últimos años de mi preparación doctoral en Cinvestav Juriquilla en Querétaro: Olivia, Selvasankar, Barbara, Briceyda, Criseida, Miriam, Nelson, Liliana, Flor, Ulises.

Al Dr. Michael Porter por el tiempo que me brindo para que yo pudiera pulir mis ideas sobre este trabajo y por sus sugerencias para que esta tesis fuera más agradable al lector.

A mis amigos casi hermanos de mi querida sonora que nunca dudaron de mí, Marysol, Enrique, Misahel y Diana, que siempre estuvieron presentes en cada momento a pesar de la distancia.

Realmente este trabajo de tesis ha sido una gran experiencia para mí y ha enriquecido de gran manera mis conocimientos. Es bonito cuando uno sólo empieza a obtener resultados propios y sobre todo cuando tienes a tu lado a investigadores dispuestos a colaborar contigo,

aportando por medio de discusiones sugerencias varias, fue muy interesante para mi encontrarme con tal tipo de investigadores y ver como es que la ciencia se va descubriendo por medio de varias ideas que te van sugiriendo el camino a seguir, y sorprenderse porque de pronto obtienes algo inesperado o comprendes que no era tan fácil como pensabas pero aún así buscar como concluir. Además de bastos resultados que surgen al desarrollar varios caminos.

Es muy motivante ver como se va construyendo la ciencia, como los resultados van surgiendo de manera natural y sobre todo como varias áreas de las matemáticas pueden ser utilizadas para lograr una misma meta, y de tal manera encontrar el uso y sentido de muchas bases que fueron aprendidas anteriormente y de muchas otras que se van aprendiendo en el proceso.

En verdad fué una gran experiencia el haber compartido con investigadores como el Dr. S. Torba y el Dr. V. Kravchenko largas horas de discusiones en las que aportabamos ideas para continuar con el tema de investigación en diversas ocasiones.

A mis hermanos y sobrinos por siempre estar ahí cuando los necesite, por ser la fuerza que me impulsaba a seguir cuando yo flaqueaba. Se que siempre están al pendiente de todo lo que me ocurre y que al igual que yo, a veces sufrí por acá lejos de ustedes, sé que ustedes también pasaron muchos momentos difíciles, momentos que quizá yo no logre alcanzar a visualizar nunca, pero sé que en muchas ocasiones dejaron mucho por mi.

A mi madre y mis hermanos porque a pesar de todos los momentos difíciles que hemos pasado aún seguimos adelante y muy unidos. Nunca podré devolver todo el apoyo que me brindaron en los momentos difíciles, por eso al menos tengo que corresponder a todo ese apoyo con la meta que me fije y por la cuál tanto me apoyaron pero ya concluida.

A mi madre por confiar en mí, por acompañarme en cada momento, por las desveladas y preocupaciones que le ocasiona al estar sola y tan lejos de casa. Por inyectarme esos animos para que yo pudiera lograr todas mis metas hasta ahora, por ser paciente, por mi ausencia todos estos años y empujarme a que siguiera adelante cuando yo pensaba que ya no podía. Aquí está un logro más dedicado con mucho cariño para ti mami.

JYSB

Abstract

In this thesis a method of approximation of solutions of perturbed Bessel equations is proposed, which was obtained using properties of transmutation operators.

The method consists in an approximate representation for regular solutions of the perturbed Bessel equation involving certain recursive integrals. The representation admits estimates uniform with respect to the spectral parameter and offers an efficient method for computing large sets of eigendata. To obtain this result we used transmutation operators whose composition relates the second derivative with the operator $\mathbf{L} := \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$, $l \geq -\frac{1}{2}$, $q \in C([0, b])$.

The following table shows the essential steps we made to obtain the method. The content of the table is described in detail below.

	Second derivative	Bessel operator	Perturbed Bessel operator
Ordinary differential operators	$B := \frac{d^2}{dx^2}$	$\mathbf{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$, $l \geq -\frac{1}{2}, l \in \mathbb{R}$.	$\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$, $q \in C([0, b])$.
Definition of transmutations	$Y_{l,x} f(x) = \frac{x^{-l}}{a} \int_0^x (x^2 - s^2) f(s) ds$ $Y_{l,x}^{-1} f(x) = a_1 x \left(\frac{d}{2x dx}\right)^n \int_0^x (x^2 - s^2)^{-(l+2)+n} s^{l+1} f(s) ds$		$\mathbf{T}[\varphi(x)] = \varphi(x) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt$ $\mathbf{T}^{-1}[\varphi(x)] = \varphi(x) - \int_0^x K(t, x) \varphi(t) dt$
PDE's	$\square \omega(x, t) = 0$	$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2}\right) U(x, t) = 0$	$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x)\right) u(x, t) = 0$
Generalized polynomial solutions	Wave polynomials	$\{U_m(x, t)\}_{m=0}^\infty$	$\{u_m(x, t)\}_{m=0}^\infty$
	Runge type theorems		Approximation of $K(x, t)$ by lineal combinations of u_m and approximation of the solution of $-\mathbf{L}u = \lambda u$.

Table 1. Detailed description of the steps to obtain the method for the solution of perturbed Bessel type equations.

Following ([12],[33],[64],[65],[70]), we introduce the transmutation operator $Y_{l,x}: C([0, b]) \rightarrow C([0, b])$ that relates the second derivative B with $\mathbf{L}_0 := \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$. We study the images of the solutions of the equation $v'' + \lambda v = 0$ under the action of $Y_{l,x}$ and among other properties, we show that $Y_{l,x}[x^k] = C_k x^{k+l+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, the continuity of the operator and we find its inverse operator $Y_{l,x}^{-1}$ as an Erdelyi-Kober operator.

In order to construct a complete system of solutions for the equation

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2}\right) U(x, t) = 0 \quad (1)$$

considered in a square centered in the origin we use the operator $Y_{l,x}Y_{l,t}$, which is a continuous transmutation operator and possessing an inverse operator $Y_{l,t}^{-1}Y_{l,x}^{-1}$. As a contribution we show that the “fourth” part of the wave polynomials under the action of this operator are mapped into solutions of equation (1). Namely, such that $m = 0$ or $m = 4n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, those are:

$U_0(x, t) = C_0^2 x^{l+1} t^{l+1}$, $U_{4n-1}(x, t) = \sum_{\substack{2n \\ \text{even } k=0}} \alpha_k x^{2n-k+l+1} t^{k+l+1}$, α_k being constants. $U_0(x, t)$, $U_{4n-1}(x, t)$ are called generalized wave polynomials associated with equation (1).

We study the well known operator \mathbf{T} (see [71]), which relates \mathbf{L}_0 with \mathbf{L} . In particular, we are interested in the function $\mathbf{T}[\mathbf{d}_l(x, \lambda)]$ which is a regular solution of the equation $-\mathbf{L}u = \lambda u$ on $(0, b]$. Here $\mathbf{d}_l(x, \lambda) := \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)$.

Using a mapping property of \mathbf{T} discovered in [10] we obtain a family of solutions of the equation

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x) \right) u(x, t) = 0 \quad (2)$$

as images of $\{U_0, U_{4n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ under the action of \mathbf{T} . We denote them by $u_k(x, t)$ and call generalized wave polynomials associated with equation (2).

We prove the transmutation property for the inverse operator $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}[\varphi(x)] = \mathbf{L}_0\mathbf{T}^{-1}[\varphi(x)]$, and establish the Goursat problem for $K(x, t)$, the kernel of the operator \mathbf{T} on $0 \leq x \leq t \leq b$ of its domain of definition, with this we extend the definition domain of the kernel of the operator. After that, we prove the transmutation property for the preimage of the kernel under the action of \mathbf{T} , $\mathbf{L}\mathbf{T}[k(x, t)] = \mathbf{T}\mathbf{L}_0[k(x, t)]$ and also we establish its Goursat problem in $0 \leq x \leq t \leq b$.

The stability of this Goursat problem is proved as well as an uniform approximation of its solution $k(x, t) = \mathbf{T}^{-1}[K(x, t)]$ by linear combinations of the generalized wave polynomials associated with (1).

Next, we show that solution of the one-dimensional approximation problem: find such $N \in \mathbb{N}$ and $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ that

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds - \sum_{\kappa=0}^N a_{\kappa} u_{\kappa}(x, x) \right| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

leads to an approximate solution of the equation $-\mathbf{L}u = \lambda u$ on $(0, b]$ which admits a difference estimate independent of λ and constitutes the main result of the present work.

Since the solution of the one-dimensional approximation problem (3) involves the traces of the generalized wave polynomials associated with (2) we establish some properties of them studying the system of Sturm-Liouville equations

$$\begin{cases} V'' - \frac{2(l+1)}{x} V' + \frac{2(l+1)}{x^2} V - q(x) V = 2\lambda W', \\ W'' + \frac{2(l+1)}{x} W' - q(x) W = 2\lambda V'. \end{cases}$$

We show that the SPPS representation for solutions of this system leads to a convenient contribution and reveals additional properties of the traces $u_k(x, x)$.

Resumen

En esta tesis se propone un método de aproximación de soluciones de ecuaciones de Bessel perturbadas, el cual se obtuvo utilizando las propiedades de operadores de transmutación.

El método consiste en una representación aproximada para soluciones regulares de la ecuación de Bessel perturbada que involucra ciertas integrales recursivas. La representación admite estimaciones uniformes con respecto al parámetro espectral y ofrece un método eficiente para calcular conjuntos grandes de eigendatos. Para obtener este resultado utilizamos operadores de transmutación cuya composición relaciona a la segunda derivada con el operador $\mathbf{L} := -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$, $l \geq -\frac{1}{2}$, $q \in C([0, b])$.

La siguiente tabla muestra los pasos esenciales que realizamos para obtener el método. El contenido de la tabla se describe en detalle abajo.

	Segunda derivada	Operador de Bessel	Operador de Bessel perturbado
Operadores diferenciales ordinarios	$B := \frac{d^2}{dx^2}$	$\mathbf{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$, $l \geq -\frac{1}{2}, l \in \mathbb{R}$.	$\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$, $q \in C([0, b])$.
Definición de transmutaciones	$Y_{l,x} f(x) = \frac{x^{-l}}{a} \int_0^x (x^2 - s^2) f(s) ds$ $Y_{l,x}^{-1} f(x) = a_1 x \left(\frac{d}{2x dx}\right)^n \int_0^x (x^2 - s^2)^{-(l+2)+n} s^{l+1} f(s) ds$		$\mathbf{T}[\varphi(x)] = \varphi(x) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt$ $\mathbf{T}^{-1}[\varphi(x)] = \varphi(x) - \int_0^x K(t, x) \varphi(t) dt$
EDP's	$\square \omega(x, t) = 0$	$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2}\right) U(x, t) = 0$	$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x)\right) u(x, t) = 0$
Soluciones polinomiales generalizadas	Polinomios de onda	$\{U_m(x, t)\}_{m=0}^\infty$	$\{u_m(x, t)\}_{m=0}^\infty$
	Teoremas de tipo Runge		Aproximación de $K(x, t)$ por combinaciones lineales de u_m y aproximación de la solución de $-\mathbf{L}u = \lambda u$.

Tabla 2. Descripción detallada de los pasos para obtener el método para la solución de ecuaciones de Bessel perturbadas.

Siguiendo ([12],[33],[64],[65],[70]), introducimos al operador de transmutación $Y_{l,x}: C([0, b]) \rightarrow C([0, b])$ que relaciona la segunda derivada B con $\mathbf{L}_0 := \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$. Estudiamos las imágenes de las soluciones de la ecuación $v'' + \lambda v = 0$ bajo la acción de $Y_{l,x}$ y entre otras propiedades, mostramos que $Y_{l,x}[x^k] = C_k x^{k+l+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, la continuidad del operador y encontramos su operador inverso $Y_{l,x}^{-1}$ en forma de un operador de Erdélyi-Kober.

Para construir un sistema completo de soluciones para la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2}\right) U(x, t) = 0 \quad (4)$$

considerado en un cuadrado centrado en el origen utilizamos el operador $Y_{l,x} Y_{l,t}$, el cual es un ope-

rador de transmutación continuo y posee un operador inverso $Y_{l,t}^{-1}Y_{l,x}^{-1}$. Como una contribución mostramos que la “cuarta” parte de los polinomios de onda bajo la acción de este operador son enviados en soluciones de la ecuación (4). Es decir, tales que $m = 0$ o $m = 4n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, estos son: $U_0(x, t) = C_0^2 x^{l+1} t^{l+1}$, $U_{4n-1}(x, t) = \sum_k^{\text{par}=0} \alpha_k x^{2n-k+l+1} t^{k+l+1}$, donde las α_k son constantes. $U_0(x, t)$, $U_{4n-1}(x, t)$, son llamados polinomios de onda generalizados asociados con la ecuación (4).

Estudiamos el conocido operador \mathbf{T} (ver [71]), que relaciona a \mathbf{L}_0 con \mathbf{L} . En particular, estamos interesados en la función $\mathbf{T}[\mathbf{d}_l(x, \lambda)]$ la cual es una solución regular de la ecuación $-\mathbf{L}u = \lambda u$ en $(0, b]$. Aquí $\mathbf{d}_l(x, \lambda) := \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x})$.

Utilizando una propiedad de mapeo de \mathbf{T} descubierta en [10] obtuvimos una familia de soluciones de la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x) \right) u(x, t) = 0 \quad (5)$$

como imágenes de $\{U_0, U_{4n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ bajo la acción de \mathbf{T} . Los denotamos por $u_k(x, t)$ y los llamamos polinomios de onda generalizados asociados con la ecuación (5).

Probamos la propiedad de transmutación para el operador inverso $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}[\varphi(x)] = \mathbf{L}_0\mathbf{T}^{-1}[\varphi(x)]$, y establecimos el problema de Goursat que satisface $K(x, t)$, el kernel del operador \mathbf{T} en $0 \leq x \leq t \leq b$ de su dominio de definición, con esto extendimos el dominio de definición del núcleo del operador. Luego, mostramos la propiedad de transmutación para la pre-imagen del kernel bajo la acción de \mathbf{T} , $\mathbf{L}\mathbf{T}[k(x, t)] = \mathbf{T}\mathbf{L}_0[k(x, t)]$ y también establecimos su problema de Goursat en $0 \leq x \leq t \leq b$.

La estabilidad de este problema de Goursat se prueba así como una aproximación uniforme de su solución $k(x, t) = \mathbf{T}^{-1}[K(x, t)]$ por combinaciones lineales de los polinomios de onda generalizados asociados con (4).

A continuación mostramos que la solución del problema de aproximación uno-dimensional: encontrar $N \in \mathbb{N}$ and $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds - \sum_{\kappa=0}^N a_{\kappa} u_{\kappa}(x, x) \right| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

lleva a una solución aproximada de la solución de la ecuación $-\mathbf{L}u = \lambda u$ en $(0, b]$ la cual admite una estimación de la diferencia independiente de λ y constituye el resultado principal de este trabajo.

Como la solución del problema de aproximación uno-dimensional (6) involucra las trazas de los polinomios de onda generalizados asociados con (5) establecimos algunas propiedades de ellas estudiando el sistema de ecuaciones de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} V'' - \frac{2(l+1)}{x} V' + \frac{2(l+1)}{x^2} V - q(x) V = 2\lambda W', \\ W'' + \frac{2(l+1)}{x} W' - q(x) W = 2\lambda V'. \end{cases}$$

Mostramos que la representación SPSS para soluciones de este sistema nos lleva a una conveniente contribución y revela propiedades adicionales de las trazas $u_k(x, x)$.

Introducción

La teoría de transmuciones forma parte de las matemáticas y es utilizada en diferentes áreas como lo son las ecuaciones diferenciales e integrales, el análisis funcional, la teoría de funciones, el análisis complejo, entre otras, y está estrechamente relacionada con muchas aplicaciones en diversos campos de las matemáticas, como lo son los problemas inversos, la teoría de dispersión, la teoría espectral, los problemas de Sturm-Liouville, la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, etcétera.

Para el estudio que realizaremos se considerarán aquellos operadores de transmutación que nos llevan de lo regular a lo singular, por lo que consideramos un enfoque relacionado a la ecuación de Bessel cuyas soluciones son las funciones de Bessel de primer tipo o funciones cilíndricas $J_n(x)$ las cuáles fueron introducidas por Bessel Friedrich Wilhelm.

Las funciones especiales son muy importantes por sus vastas aplicaciones, siendo las funciones de Bessel de las más utilizadas pues al surgir en la solución de ecuaciones diferenciales las encontramos en varias ramas de la ciencia y la tecnología. Las aplicaciones aparecen en varios problemas, principalmente relacionados con el método de separación de variables en la ecuación de onda, de Helmholtz o de Schrödinger, en coordenadas cilíndricas o esféricas como la propagación de ondas, elasticidad, movimiento de fluidos, teoría del potencial, teoría de difusión, difusión de una red, procesamiento de señales y modulación de frecuencias.

Las funciones de Bessel aparecieron por primera vez en las investigaciones de Daniel Bernoulli sobre las oscilaciones de la cadena colgante. Luego aparecieron en la teoría de Euler de las vibraciones de una membrana circular. Después, Bessel las utilizó en la mecánica gravitatoria, en sus estudios acerca del movimiento de los planetas, las cuáles aparecen como coeficientes en las series de expansión de la perturbación indirecta de un planeta causada por el movimiento del sol.

Las características de onda de las funciones de Bessel se parecen mucho a las ondas de agua, las cuales podrían generarse por ejemplo al soltar una piedra en medio de un gran pozo de agua, las ondas así generadas se asemejarían a una superficie de revolución generada al girar las curvas de la superficie alrededor de un eje. En la teoría de hidrodinámica ocurren tales ondas con formas de funciones de Bessel.

Las guías de ondas son otra aplicación. Debido a efectos difractivos, los haces de luz van incrementando su sección transversal a medida que viajan en el espacio libre. Estos efectos

pueden corregirse mediante lentes, de hecho los primeros sistemas de comunicaciones a través del espacio libre se basaron en el uso de estos dispositivos para lograr transmitir el haz a distancias muy grandes. La alternativa es el empleo de conductos dieléctricos que confinan la luz y permiten que viaje por grandes distancias con pérdidas mínimas. Por ello, las guías de ondas se usan en microondas, a pesar de su ancho de banda limitado y volumen, mayor que el de líneas impresas o coaxiales para la misma frecuencia.

Actualmente, son especialmente importantes, y lo serán más en el futuro, las guías de onda dieléctricas trabajando a frecuencias de la luz visible e infrarroja, habitualmente llamadas fibra óptica, útiles para transportar información de banda ancha, sustituyendo a los cables coaxiales y enlaces de microondas en las redes telefónicas y, en general, las redes de datos.

Como hemos visto la ecuación de Bessel y sus soluciones aparecen en una gran variedad de aplicaciones, de aquí que sea y seguirá siendo de gran importancia desarrollar métodos que nos ayuden a simplificar los problemas con los que nos encontramos en la vida diaria y llevarlos a la práctica. En particular para el método de nuestro interés es importante informarnos sobre los avances que se han generado en el estudio de la teoría de operadores de transmutación y en especial sobre problemas de Sturm-Liouville singulares.

I. Estado del Arte

Las bases de la teoría de Sturm-Liouville fueron creadas entre 1825 y 1840 por los matemáticos franceses Jacques Charles François Sturm y Joseph Liouville.

El problema consiste en encontrar los valores del parámetro espectral, eigenvalores, para los cuales la ecuación de Sturm-Liouville tiene soluciones, eigenfunciones, no triviales bajo ciertas condiciones frontera.

Un intento de simplificación del problema lo propuso el matemático francés Jean Frédéric Auguste Delsarte [16] en 1938, quien propuso buscar un operador lineal T con la propiedad $AT = TB$, donde B es un operador diferencial sencillo del cuál se conocen las propiedades y A es un operador más elaborado al cuál se copian las propiedades de B , en otras palabras se relaciona dos operadores diferenciales lineales y le permite transformar una ecuación más complicada $Ay = -\lambda y$ en una básica $Bu = -\lambda u$. Introduciendo así una de las herramientas matemáticas más importantes para abordar los problemas relacionados. Delsarte y Lions [17] llamaron a tales operadores T "Operadores de transmutación".

Desde el primer reporte de Jean Delsarte en 1938, los operadores de transmutación son una de las herramientas principales en la teoría espectral de operadores diferenciales ([3], [17], [46], [54], [65]). Muy a menudo en la literatura a los operadores de transmutación se les llama operadores de transformación. En particular, es bien conocido que para los operadores $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ y $B = -\frac{d^2}{dx^2}$, $q \in C(-b, b)$, existe un operador tal que $ATu = TBu$ para cualquier $u \in C^2([b, b])$ y que también tiene la forma de un operador de Volterra

$$Tu(x) = u(x) + \int_{-x}^x K(x, t) u(t) dt$$

con un núcleo K de clase C^1 , su núcleo integral se puede obtener como una solución de un determinado problema de Goursat para la ecuación de Klein-Gordon con un coeficiente variable. A pesar de sus propiedades atractivas e importancia, existen muy pocos ejemplos de los núcleos de transmutación disponibles (ver [40]).

J. Lions en sus extensas investigaciones [49], [50], [51], [52], [53], eligió espacios de funciones donde la transmutación es un isomorfismo en el sentido de que hay una transmutación inversa. Estos resultados tuvieron contribuciones subsecuentes por R. Carroll y J. Donaldson [8], R. Hersh [28] y M. Thyssen [67], [68]. En [51] Lions habla de los operadores de transmutación singulares y varias aplicaciones. Se da el problema de Cauchy para una ecuación hiperbólica singular, se habla de integración fraccionaria y una propiedad asintótica de los operadores de transmutación.

Los libros [5], [6], [7], [70] y artículos [3], [19] son dedicados por completo a la teoría de transmutaciones y sus aplicaciones. Por otro lado, parte esencial de [9], [39], [46], [54] incluyen material sobre transmutaciones. En [19] los autores probaron la existencia de transmutaciones para ecuaciones diferenciales con coeficientes variables de orden alto, incluyendo la corrección de errores de artículos previos de Delsarte y Lions.

En [8] y [28] se puede encontrar el problema diferencial que el kernel satisface, si el operador de transmutación es un operador integral con kernel una función o distribución.

Las investigaciones en el área de la teoría de Sturm-Liouville han tenido gran actividad científica; además de una amplia gama de problemas espectrales directos e inversos relacionados, son una de las líneas centrales en la física matemática moderna y sus numerosas aplicaciones. Desde el trabajo de Joseph Fourier en la teoría del calor y su método de separación de variables, las propiedades y métodos para resolver diferentes tipos de problemas de Sturm-Liouville espectrales fueron estudiados en varias publicaciones.

El primer trabajo en el que los operadores de transmutación fueron utilizados en teoría espectral es el de A. Ya. Povzner [59], donde construyó operadores de transmutación para ecuaciones de Sturm-Liouville arbitrarias y los utilizó para obtener la expansión de eigenfunciones para una ecuación de Sturm-Liouville con un potencial decreciente.

En [54] se muestran algunos resultados de los operadores de transmutación en teoría espectral, incluye aplicaciones de los operadores de transmutación y problemas relacionados con el uso de la teoría espectral en el estudio de las ecuaciones no lineales. Se utilizan los operadores de transmutación para investigar el problema de contorno generado en un intervalo finito por el operador de Sturm-Liouville con condiciones de contorno no degeneradas arbitrarias.

I.M. Gelfand y B. M. Levitan [24] encontraron que estos operadores pueden ser utilizados para dotar de una solución completa al problema de recuperar una ecuación de Sturm-Liouville de su función espectral. B. M. Levitan [47] probó la forma general del teorema de equiconvergencia. B. Ya. Levin [45] introdujo un nuevo tipo de operadores de transmutación que preservan la asintótica de las soluciones en infinito y V. A. Marchenko [55] los utilizó para resolver el problema inverso de dispersión.

Kipriyanov [32] introdujo espacios de funciones que influyeron importantemente en la teoría

de ecuaciones diferenciales parciales con operadores de Bessel y en un sentido más general la teoría de ecuaciones singulares y degeneradas.

En el artículo [64], S. M. Sitnik describe información histórica, los principales hechos conocidos, los resultados del autor original sobre la teoría de las transmuciones y algunas aplicaciones. Se clasifican las transmuciones de Buschman-Erdelyi, se estudian propiedades como condiciones de transmutación, factorizaciones, estimaciones de normas, conexiones con transformaciones integrales clásicas, y aplicaciones a ecuaciones diferenciales parciales singulares. Los operadores de Buschman-Erdelyi fueron estudiados primero por E. T. Copson, R.G. Buschman y A. Erdelyi como operadores integrales. El término “transmuciones de Buschman-Erdelyi” fue introducido por Sitnik. Las ecuaciones integrales con estos operadores fueron estudiadas a mediados de 1950. Sitnik fue el primero en probar la naturaleza transmucional de estos operadores. Los operadores clásicos de Sonine y Poisson son casos especiales de los casos de transmuciones de Buschman-Erdelyi y las transmuciones de Sonine-Dimovski y Poisson-Dimovski son sus generalizaciones para ecuaciones hiper-Bessel. Las transmuciones para funciones hiper-Bessel son una generalización de las transmuciones de Sonine-Poisson-Delsarte.

A. Gasmi y M. Sifi [23] describen todos los operadores de transmutación del operador de Bessel-Struve al operador segunda derivada. Definen y caracterizan las funciones semi periódicas en el espacio H de funciones enteras y caracterizan los mapeos lineales continuos de H en el mismo que conmutan con el operador de Bessel-Struve.

A. Prykarpatsky, A. Samoilenko y Y. Prykarpatsky [61] describen la estructura geométrica diferencial de los operadores de transmutación en multidimensión y discuten aplicaciones al problema inverso de transformación espectral. Luego, [25] construyen un análogo a las ecuaciones integrales de Gelfan-Levitan-Marchenko para operadores de transmutación multi-dimensional mediante el estudio de su estructura geométrica diferencial basados en la identidad de Lagrange clásica para un par de operadores diferenciales formalmente conjugados. Sugieren una extensión del método para el caso pencils afines de operadores diferenciales. Además, A. Prykarpatsky, A. Samoilenko, Y. Prykarpatsky y V. Samoilenko [62] estudiaron las propiedades de la estructura de operadores de transmutación multi-dimensional de Delsarte-Darboux en espacios funcionales paramétricos mediante herramientas geométrico diferenciales y topológicas.

Virginia Kiryakova [33] aplica una generalización de las transformaciones integrales de tipo Poisson propuestas por Dimovski a ecuaciones diferenciales hiper-Bessel de orden arbitrario como un operador de transmutación. Sus soluciones son escritas en forma explícita, evaluando los operadores del cálculo fraccionario generalizado de funciones trigonométricas generalizadas. Propone un análogo a las transformaciones de Poisson-Dimovski y se ilustran sus aplicaciones a ecuaciones hiper-Bessel “esféricas”.

H. Chebli, A. Fitouhi y M. Hamza [12] dan otra prueba del resultado obtenido por A. Fitouhi y M. Hamza [20] que los conduce a un dominio grande de convergencia uniforme, y estudian un operador de transmutación entre dos clases de operadores de Bessel perturbados.

V. Ya. Volk en su artículo [71] de 1953, muestra que una solución acotada de la ecuación

$$y'' + \left[\lambda - q(x) - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] y = 0$$

puede ser representada como $\varphi(x, \lambda) = j_p(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) j_p(t, \lambda) dt$, donde $K(x, t)$ es una función continua y $j_p = \sqrt{x\sqrt{\lambda}} \mathbf{J}_p(\sqrt{\lambda}x)$, con \mathbf{J}_p una función cilíndrica de orden p , lo que lo lleva a mostrar las condiciones que debe cumplir $K(x, t)$, es decir su problema de Goursat. Por otro lado, V. V. Stashevskaya [66] realiza un estudio sobre el problema inverso del análisis espectral para un operador con una singularidad en cero.

En trabajos recientes ([4], [40], [42], [44]) desarrollados por los doctores V. Kravchenko, S. Torba y su escuela se han obtenido nuevas propiedades sobre operadores de transmutación, su relación con la teoría de funciones pseudo-analíticas [39] y como resultado se ha desarrollado un método para construir el núcleo K y solución de los problemas espectrales asociados al operador A , y operadores de Sturm-Liouville más complicados.

En [4] los doctores H. Campos, V. Kravchenko y S. Torba estudiaron operadores de transmutación relacionados a L , un operador diferencial ordinario de segundo orden, en términos de la transformación de potencias de la variable independiente $\left\{ (x - x_0)^k \right\}_{k=0}^{\infty}$ en elementos de una L -base y establecieron una forma precisa del operador de transmutación realizando esta transformación. Utilizaron tal operador de transmutación para establecer una completación de un sistema infinito de soluciones de la ecuación de Schrödinger. El sistema de soluciones es obtenido como una aplicación de la teoría de funciones pseudo-analítica bicompleja y su completación fue el resultado buscado. Ha sido considerado su uso para construir núcleos reproductores y resolver problemas frontera y de eigenvalores.

En particular en [44] se obtuvo una representación para el núcleo integral de operadores de transmutación de Delsarte que relaciona al operador de Schrödinger A con B como una componente compleja de una función pseudo-analítica con valores bicomplejos de una variable hiperbólica [39] una solución de una ecuación de Vekua hiperbólica. La otra componente de esa función pseudo-analítica es el núcleo de transmutación correspondiente a un operador de Schrödinger Darboux asociado [40]. Esto junto con algunos resultados nuevos sobre funciones pseudo-analíticas hiperbólicas ha permitido obtener [44] una representación para el kernel de transmutación en términos de los llamados polinomios de onda generalizados [39]. Al realizar implementaciones numéricas han demostrado que el método obtenido, a diferencia de otros métodos conocidos, puede encontrar miles de eigenvalores y eigenfunciones de problemas espectrales, todos con la misma y notable precisión.

V. V. Kravchenko y R. M. Porter [38] consideran una representación para la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville como series de potencias del parámetro espectral (SPPS) entre otras cosas muestran que es aplicable a una amplia clase de problemas de Sturm Liouville singulares. V. Kravchenko y S. Torba [41] dan una visión general de los acontecimientos recientes en teoría de Sturm-Liouville relacionada con operadores de transmutación y el SPPS. La posibilidad de escribir las ecuaciones de dispersión de una variedad de problemas espectrales relacionados a ecuaciones de Sturm Liouville en forma analítica es un atractivo del método SPPS, el cuál está basado en el cálculo de ciertos sistemas de integrales recursivas, los cuáles son completos y resultan ser imágenes de las potencias enteras no-negativas de la variable independiente bajo la acción de un operador de transmutación correspondiente.

Los doctores R. Castillo, V. Kravchenko y S. Torba [10] obtuvieron la representación SPPS para soluciones regulares de ecuaciones de Sturm Liouville de tipo Bessel singulares con coeficientes complejos así como una representación SPPS para la función característica en un intervalo finito. En [11] desarrollan un enfoque basados en el método SPPS para el análisis de las fibras ópticas de índice gradual. La ecuación característica del problema de eigenvalores para el cálculo de modos guiados obtenidos en forma analítica en términos del método SPPS. El truncamiento de la serie y la consideración de la ecuación característica aproximada da un método numérico simple y eficiente para resolver el problema. Obteniendo un método con el enfoque SPPS con claras ventajas comparado con resultados obtenidos por otras técnicas.

Después de empaparnos acerca de la información ya conocida sobre operadores de transmutación y la ecuación de Sturm-Liouville principalmente en el caso singular, podemos plantearnos algunos objetivos entorno de los cuáles girarán los estudios realizados en cada uno de los capítulos que componen este trabajo de tesis doctoral.

II. Objetivos

En este trabajo nuestro principal interés, basados en el estudio de la ecuación de Bessel perturbada (4.1), la cual surge en numerosos modelos físicos que describen la propagación de ondas en forma axial o esférica de medios no homogéneos (ver [21], [57]), está motivado en el resultado principal del artículo [42] de los doctores V. Kravchenko y S. Torba, donde estudiando la ecuación de onda perturbada aproximaron el núcleo del operador de transmutación por medio de los polinomios de onda generalizados bajo ciertas condiciones. Esto se puede hacer debido a que el núcleo integral es solución de la ecuación diferencial parcial. Obteniendo con ello estimaciones para aproximar las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

Con el objetivo de generalizar tal resultado proponemos el análisis relacionado al paso del caso regular al caso singular en el estudio de problemas de Sturm-Liouville utilizando el método aproximación analítica de operadores de transmutación (AATO) y el método series de potencias del parámetro espectral (SPPS) para establecer ciertas propiedades adicionales.

Lo novedoso es que tratamos con el caso singular. Para el estudio que desarrollaremos a lo largo de este trabajo nos enfocaremos en la solución regular de la ecuación de Bessel perturbada $-\mathbf{L}u = \lambda u$ en $(0, b]$, donde $\mathbf{L} := \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$, la cuál se expresa en términos de funciones de Bessel de primer tipo. Cabe mencionar que el caso cuando $l = 0$ no es importante en el desarrollo del objetivo, pues estaríamos considerando el caso de la ecuación regular el cuál ya ha sido ampliamente estudiado.

Para lograr nuestro objetivo, primero nos planteamos el problema de encontrar un sistema de polinomios de onda generalizados que son soluciones de la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{l(l+1)}{t^2} \right) U(x, t) = 0 \quad (7)$$

como imágenes de los polinomios de onda (una familia de soluciones polinomiales de la ecuación de onda [30]) bajo la acción de la composición del conocido operador integral de transmutación

$Y_{l,x}$ (ver [64] y [65]), que relaciona a la segunda derivada $B := \frac{d^2}{dx^2}$ con $\mathbf{L}_0 := \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$, con el operador $Y_{l,t}$ (el mismo operador pero con respecto a la variable t). Después, nos planteamos el problema de construir un sistema de polinomios de onda generalizados para la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x) \right) u(x, t) = 0, \quad (8)$$

como imágenes del sistema de polinomios de onda generalizados construidos previamente bajo la acción del operador de transmutación \mathbf{T} que relaciona a \mathbf{L}_0 con \mathbf{L} .

Parte esencial para lograr este objetivo fue probar la estabilidad del problema de Goursat para la pre-imagen del núcleo y probar que las trazas de los polinomios de onda generalizados, que son solución de la ecuación (7), son completas en el espacio $C_0^1([0, b])$, lo cual fue establecido en Lemas tipo Müntz. También probamos que la pre-imagen admite una aproximación uniforme por combinaciones lineales de los polinomios de onda generalizados $U_{4n-1}(x, t)$ que son soluciones de (7) y de aquí deducimos que K admite una aproximación uniforme por medio de combinaciones lineales de los polinomios de onda generalizados $u_{4n-1}(x, t)$ que son soluciones de (8).

Un objetivo más es el de mostrar como obtener los coeficientes de la aproximación mediante la solución de un problema de aproximación en el segmento $[0, b]$ de la condición frontera de Goursat correspondiente al núcleo K .

Otro objetivo es el que corresponde a un resultado acerca de la aproximación de la solución \mathbf{u}_N de la ecuación de Bessel perturbada obtenida con la ayuda de la aproximación del núcleo del operador de transmutación estableciendo la pequeñez de la diferencia entre las soluciones exacta y aproximada, la estimación

$$\left| \int_0^x (\mathbf{L} + \lambda) [\mathbf{u}_N(s)] ds \right| \leq 2\varepsilon\sqrt{x}$$

es válida, independientemente de $\lambda \in \mathbb{R}$ lo que hace al método propuesto atractivo para resolver la ecuación de Bessel perturbada en intervalos grandes respecto a λ .

Es un objetivo más el construir un sistema de integrales recursivas por medio del método SPSS para encontrar la representación de las trazas de los polinomios de onda generalizados en términos de dichas potencias formales.

III. Descripción del contenido

Un estudio riguroso de la teoría de Sturm-Liouville exige conocimientos avanzados de análisis funcional, análisis complejo, teoría de la medida, ecuaciones diferenciales, teoría de operadores, teoría espectral y métodos de la Física-Matemática. En este trabajo de tesis, sólo presentaremos las herramientas necesarias para abordar el estudio del método de aproximación de soluciones de la ecuación de Bessel perturbada utilizando la teoría de operadores de transmutación, generalizando así el método utilizado por los doctores V. Kravchenko y S. Torba [42] realizado en el caso regular.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos y la lectura y comprensión del mismo supone del lector un bagaje mínimo de análisis, álgebra lineal, análisis funcional, ecuaciones diferenciales, teoría de operadores, ecuaciones integrales y teoría de Sturm-Liouville.

En el capítulo 1 presentamos resultados diversos como requisito para la mejor comprensión de los capítulos siguientes. De mención especial es el operador estudiado por V. Ya. Volk en [71].

En el capítulo 2 introducimos al conocido operador de transmutación de Poisson-Sonine-Delsarte $Y_{l,x}$, el cuál nos permite relacionar la segunda derivada $B = \frac{d^2}{dx^2}$ con $\mathbf{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$. Estudiamos diversas propiedades de dicho operador como la propiedad de transmutación, la continuidad, la forma de su operador inverso en términos de los operadores de Erdélyi-Kober, la imagen de las potencias positivas de x y la imagen bajo $Y_{l,x}$ de las soluciones de la ecuación regular $v'' + \lambda v = 0$.

Como una aportación más del capítulo mostramos cuál es la forma de los polinomios de onda generalizados los cuáles son las imágenes de los polinomios de onda bajo la acción de $Y_{l,x}Y_{l,t}$, es decir nuestro operador de transmutación envía soluciones de la ecuación de onda en soluciones de la ecuación $\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2}\right)U(x,t) = 0$. Nos dimos cuenta que del total de polinomios de onda, los cuáles son solución para la ecuación de onda, sólo la “cuarta” parte de ellos son enviados en una solución para la ecuación en consideración.

En el capítulo 3 obtenemos una representación en series de potencias del parámetro espectral (SPPS), para la solución regular del sistema acoplado de ecuaciones de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} V'' - \frac{2(l+1)}{x}V' + \frac{2(l+1)}{x^2}V - q(x)V = 2\lambda W', \\ W'' + \frac{2(l+1)}{x}W' - q(x)W = 2\lambda V', \end{cases} \quad (9)$$

donde $l \geq -\frac{1}{2}$, q es una función continua a valores complejos en $(0, b]$ y λ es un parámetro espectral complejo. Como primer paso analizamos a que sistema de ecuaciones satisface el producto de Cauchy de la solución encontrada en [10] para la ecuación $-\mathbf{L}u = -\lambda^2 Ru$, donde $\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$ con $l \geq -\frac{1}{2}$, $x \in (0, a]$ y $R = r_0u + r_1u'$, $r_{0,1} \in C([0, a])$; con la solución de la ecuación $-\mathbf{L}_0y = -\lambda^2y$, obteniendo así el sistema de ecuaciones (9). Luego se construye una solución particular de (9) la cuál no tiene ceros en $[0, b]$ excepto en $x = 0$ y con ella presentamos la factorización de Pólya para cada ecuación en el sistema de ecuaciones encontrado. Por otro lado, utilizando la propiedad del mapeo del operador \mathbf{T} encontrada en [10], en la primera sección de este capítulo obtenemos la forma que toman los polinomios de onda generalizados bajo la acción de tal operador de transmutación el cual fue estudiado por V. Ya. Volk [71] obteniendo así los polinomios de onda generalizados que son solución para la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x)\right)u(x,t) = 0. \quad (10)$$

Se obtienen las trazas de dichos polinomios de onda generalizados y se representan en términos de las potencias formales encontradas mediante el método SPPS. Mostramos que la representación SPPS para soluciones de este sistema nos lleva a una conveniente contribución y revela propiedades adicionales de las trazas $u_k(x, x)$.

En el capítulo 4 se obtuvo un método de aproximación de soluciones de ecuaciones tipo Bessel perturbadas $-\mathbf{L}u = \lambda u$ en $(0, b]$ donde \mathbf{L} , es como en el capítulo 3, q es una función continua a valores complejos y λ es un parámetro espectral complejo, basado en la aproximación de la solución regular de la ecuación la cuál toma la forma $\mathbf{T}[\mathbf{d}_l(x, \lambda)] = \mathbf{d}_l(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt$, donde $\mathbf{d}_l(x, \lambda) = \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)$ y \mathbf{T} es el operador estudiado por V. Ya. Volk.

Se estudia la propiedad de transmutación del operador \mathbf{T} que relaciona al par de operadores \mathbf{L}_0, \mathbf{L} para funciones pertenecientes a una clase de funciones continuas el cuál denotamos por \mathcal{A}_1 . Se muestra la correspondiente propiedad de transmutación para el operador inverso \mathbf{T}^{-1} y con ello se extiende el dominio de definición del núcleo de transmutación del operador \mathbf{T} a todo el cuadrado $[0, b] \times [0, b]$, estableciendo con ello el problema de Goursat que satisface el núcleo del operador de transmutación en $0 \leq x \leq t \leq b$.

Utilizando el operador inverso y trabajando con la pre-imagen del núcleo, logramos obtener varios resultados entre los cuales por medio del resultado auxiliar $\mathbf{L}\mathbf{T}[k(x, \tau)] = \mathbf{T}\mathbf{L}_0[k(x, \tau)]$ para $0 < x < \tau < b$ obtuvimos el problema de Goursat para la pre-imagen $k(x, \tau)$ y luego mediante un par de Lemas de tipo Müntz la aproximación de la derivada de la pre-imagen del núcleo por la derivada de las trazas de los polinomios de onda generalizados. Después, por un resultado de V. Ya. Volk en su artículo [71] mostramos que es posible aproximar a la pre-imagen del núcleo en $0 \leq x \leq t \leq b$, después de mostrar que el problema de Goursat para la pre-imagen del núcleo es estable.

Finalmente utilizando estos resultados y que el operador \mathbf{T} es acotado nos llevaron a mostrar que existen constantes complejas tales que el núcleo se puede aproximar uniformemente en la característica por una combinación lineal finita de los polinomios de onda generalizados correspondientes, pero debido a que para lograr dicha aproximación tuvimos que trabajar con la pre-imagen del núcleo en el segundo paso, no podemos saber cuál es la forma que toman tales coeficientes.

Por último, obtuvimos un resultado en el cual logramos mostrar que la solución del problema de aproximación uno-dimensional: encontrar $N \in \mathbb{N}$ and $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds - \sum_{\kappa=0}^N a_{\kappa} u_{\kappa}(x, x) \right| \leq \varepsilon, \quad (11)$$

lleva a una solución aproximada de la solución de la ecuación $-\mathbf{L}u = \lambda u$ en $(0, b]$ la cual admite una estimación de la diferencia independiente de λ y constituye el resultado principal de este trabajo.

Como la solución del problema de aproximación uno-dimensional (11) involucra las trazas de los polinomios de onda generalizados asociados con (10) establecimos algunas propiedades de ellas estudiando el sistema de ecuaciones de Sturm-Liouville (9).

Con este método cumplimos el principal objetivo que nos hemos planteado generalizamos el método presentado en [42], en el que para el caso regular se aproxima el núcleo del operador de transmutación para la ecuación de Sturm-Liouville por medio de los polinomios de onda

generalizados correspondientes y con ello se obtienen estimaciones para aproximar a la solución.

Esperamos que este proyecto de tesis pueda servir como referencia tanto para estudiantes como investigadores de diversas áreas tanto científicas como tecnológicas interesados en la ecuación de Bessel, la teoría de transmutaciones y en los métodos AATO o SPSS. Además de que pueda ser de gran utilidad como método y principalmente en la práctica, por ejemplo en el caso de guías de ondas no homogéneas, en particular en la fibra óptica con índice gradual.

IV. Aprobación

Las principales aportaciones desarrolladas en esta tesis se encuentran en el artículo:

- Vladislav V. Kravchenko, Sergii M. Torba and Jessica Yu. Santana-Bejarano, *Generalized wave polynomials and transmutations related to perturbed Bessel equations*. En proceso,

el cual fue enviado a la revista: **Applied Mathematics and Computation** y se encuentra disponible en: <http://arxiv.org/abs/1606.07850>.

Los resultados contenidos en esta tesis fueron aceptados para ser expuestos en el siguiente congreso:

- International Conference Waves in Science and Engineering (WIS&E), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav-IPN, Santiago de Querétaro, Querétaro, México, 2016.

Contenido

Agradecimientos	xiii
Abstract	xv
Resumen	xvii
Introducción	xix
I. Estado del Arte	xx
II. Objetivos	xxiv
III. Descripción del contenido	xxv
IV. Aprobación	xxviii
1 Preliminares	1
1.1 Problemas de la física matemática y Ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas	1
1.2 El problema de Sturm-Liouville	3
1.2.1 Factorización de Pólya	7
1.3 La ecuación de Bessel	8
1.4 Operador de transmutación	11
1.4.1 Transmutaciones de Sonine-Poisson-Delsarte	12
1.5 Algunos resultados de Aproximación	13
1.6 Ecuación de onda y polinomios de onda	13
1.7 Integrales y derivadas fraccionarias	15
1.7.1 Definición de integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville .	16
1.7.2 Otras formas de integrales y derivadas fraccionarias de RL	17

1.8	Sistemas de integrales recursivas	18
1.9	Existencia de la transmutación para ecuaciones de Bessel perturbadas	22
2	Operador de transmutación y polinomios de onda relacionados con la ecuación de Bessel	25
2.1	Definición del operador que relaciona a \mathbf{L}_0 con B	25
2.2	Propiedad de transmutación del operador $Y_{l,x}$	27
2.3	Análisis del comportamiento de $Y_{l,x}f$ alrededor de 0	31
2.4	Imágenes bajo la acción de $Y_{l,x}$ de las soluciones de la ecuación de SL regular $v'' + \lambda v = 0$	33
2.5	Continuidad del operador $Y_{l,x}$ y su derivada	37
2.6	El operador inverso	38
2.7	Polinomios de onda generalizados	41
3	Serie de potencias del parámetro espectral para un sistema de ecuaciones de Bessel	47
3.1	Polinomios de onda generalizados	47
3.2	El sistema de ecuaciones (3.1)	49
3.3	Soluciones particulares V_0 y W_0	55
3.4	Sistema de integrales recursivas	59
4	Método de aproximación de soluciones de ecuaciones tipo Bessel perturbadas	67
4.1	Propiedades del operador de transmutación	68
4.2	Extensión del núcleo de transmutación	69
4.3	La pre-imagen del núcleo de transmutación	73
4.4	Aproximación analítica del kernel de transmutación	76
4.4.1	Estabilidad del problema de Goursat para $k(x, t)$	81
4.4.2	Aproximación del núcleo integral $K(x, t)$	89
4.5	Aproximación de la solución	91
4.6	Descripción de los pasos del algoritmo	95
	Conclusiones e ideas para el trabajo futuro	97
	Bibliografía	99

Capítulo



Preliminares

*The unified character of mathematics lies in its very nature;
indeed, mathematics is the foundation of all exact natural sciences.*

David Hilbert

En este apartado haremos un recuento de algunos resultados y conceptos, como por ejemplo el problema de Sturm-Liouville, la factorización de Pólya, la ecuación de Bessel, la función de Bessel de primer tipo, operador de transmutación, el teorema de Müntz, la ecuación de onda, los polinomios de onda, integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, sistema de integrales recursivas, el operador de transmutación estudiado por Volk entre otros. Los resultados aquí presentados serán utilizados en los capítulos posteriores de este trabajo.

1.1 Problemas de la física matemática y Ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas

En esta sección hablaremos a grandes rasgos de algunos conceptos y resultados muy conocidos que son esenciales para el objetivo principal del Capítulo 4 los cuales podemos encontrar en [14], [22], [36], [48] y [56].

Un problema matemático se dice **bien planteado** si satisface los siguientes requisitos:

1. Existencia: Existe al menos una solución.
2. Unicidad: Existe a lo más una solución.
3. Continuidad: La solución depende continuamente de los datos.

Consideremos una ecuación diferencial parcial de segundo orden para la función u en las variables independientes z y s y supongamos que esta ecuación puede resolverse explícitamente para u_{ss} por lo que puede ser representada en la forma

$$u_{ss} = F(z, s, u, u_z, u_s, u_{zz}, u_{zs}). \quad (1.1)$$

Para algún valor $s = \eta$, describimos los valores iniciales de la función desconocida y de la derivada con respecto a s

$$u(z, \eta) = f(z), \quad u_s(z, \eta) = g(z). \quad (1.2)$$

El problema de determinar la solución de la ecuación (1.1) que satisface las condiciones iniciales (1.2) es conocido como el **problema de valores iniciales**. En problemas de valores iniciales, los valores iniciales usualmente se refieren a los datos en la línea $s = \eta$. No es esencial que estos valores sean dados a lo largo de la línea $s = \eta$; se describen muy bien a lo largo de una curva D en el plano zs . En tal contexto, el problema es llamado **el problema de Cauchy** en vez de problema de valores iniciales, a pesar de ello actualmente los dos nombres son sinónimos.

El método de Riemann [36] es una técnica clásica para resolver el problema de Cauchy para ecuaciones lineales hiperbólicas en dos variables; en particular provee información para dominios de dependencia e influencia de soluciones.

Consideremos la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial s} + a(z, s) \frac{\partial u}{\partial z} + b(z, s) \frac{\partial u}{\partial s} + c(z, s) u + f(z, s) = 0, \quad (1.3)$$

donde a, b, c y f son funciones continuas en un dominio finito.

Sea D una curva en el plano con variables z y s con la propiedad de que cada línea paralela a cada uno de los ejes de coordenadas la cruza en un solo punto. Denotemos por P a un punto arbitrario fuera de la curva D . Se trazan las rectas PC y PB paralelas a los ejes de coordenadas a través del punto P .

Es muy conocido [48] que la **función de Riemann** de la ecuación (1.3) es la función $v(z, s; \xi, \eta)$ con las siguientes propiedades:

1. v como función de las variables z y s satisface la ecuación adjunta homogénea

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial s} - \frac{\partial}{\partial z} [av] - \frac{\partial}{\partial s} [bv] + cv = 0.$$

2. En la línea PC $v = e^{\int_{\xi}^x b dx}$.
3. En la línea PB $v = e^{\int_{\eta}^y a dy}$.

De las propiedades 2 y 3 se tiene la propiedad

4. $v = 1$ en el punto P .

El problema de Goursat es el problema de resolver una ecuación hiperbólica con datos dados en las características. Por lo tanto este problema también es llamado **el problema en las características**. Es conveniente considerar la forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas para la cual las características son paralelas a los ejes de coordenadas. Por simplicidad limitandonos a ecuaciones lineales, el siguiente es una representación de un problema de Goursat

$$u_{xy} = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u + f(x, y), \quad (x, y) \in \Pi, \quad (1.4)$$

$$u \Big|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad u \Big|_{y=y_0} = \psi(x). \quad (1.5)$$

Con x, y las variables independientes, $u(x, y)$ es la función desconocida y $\Pi = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$ es un rectángulo. La ecuación (1.4) tiene dos familias de características $x = c_1$ y $y = c_2$. Así, las condiciones (1.5) son condiciones en las características $x = x_0$ y $y = y_0$.

Definición 1.1. La función $u(x, y)$ es llamada una solución del problema (1.4)-(1.5) si $u(x, y)$ está definida y es continua con derivadas u_x, u_y, u_{xy} en el rectángulo Π y satisface (1.4) y (1.5).

Teorema 1.2. ([22]) Sean las funciones a, b, c, f continuas en Π y sean las funciones ϕ y ψ continuamente diferenciables con $\phi(y_0) = \psi(x_0)$. Entonces la solución del problema (1.4)-(1.5) existe y es única.

Finalmente, definimos la estabilidad de la solución del problema de Goursat.

Definición 1.3. ([22]) La solución del problema de Goursat es llamada estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $(|\varphi^{(\nu)}(y) - \tilde{\varphi}^{(\nu)}(y)| \leq \delta, |\psi^{(\nu)}(y) - \tilde{\psi}^{(\nu)}(y)| \leq \delta, \nu = 0, 1, x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1],$ entonces $|u(x, y) - \tilde{u}(x, y)| \leq \varepsilon, |u_x(x, y) - \tilde{u}_x(x, y)| \leq \varepsilon, |u_y(x, y) - \tilde{u}_y(x, y)| \leq \varepsilon,$ para toda $(x, y) \in \Pi$. Con $\tilde{u}(x, y)$ la solución del problema de Goursat para los datos $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$.

1.2 El problema de Sturm-Liouville

En esta sección haremos un breve recuento de algunos resultados importantes de la teoría de Sturm-Liouville sin incluir demostraciones, para los propósitos que después emplearemos en los siguientes capítulos, para ello haremos uso de [2], [29] y [54].

Consideremos la **ecuación diferencial ordinaria de segundo orden** en un intervalo I finito, dada por

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1.6)$$

donde $a_0, a_1, a_2,$ y f son funciones complejas dadas en I .

Cuando $f = 0$ en I , la ecuación es llamada **homogénea**, de otra forma es **no-homogénea**. Cualquier función (compleja) $\varphi \in C^2(I)$ es una **solución** de (1.6) si la sustitución de y por φ resulta en la identidad $a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x)$, para toda $x \in I$.

Si denotamos al operador diferencial parcial de segundo orden $a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$ por L , entonces la ecuación (1.6) puede escribirse en la forma $Ly = f$. El operador L es lineal, de aquí que (1.6) sea llamada **ecuación diferencial lineal**. Una propiedad fundamental de las ecuaciones lineales homogéneas es que cualquier combinación lineal de soluciones de la ecuación es también una solución; esto es conocido como el **principio de superposición**.

Si la función a_0 no se anula en algún punto en I , la ecuación (1.6) se divide por a_0

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x), \quad (1.7)$$

donde $q = \frac{a_1}{a_0}$, $r = \frac{a_2}{a_0}$ y $g = \frac{f}{a_0}$. Las ecuaciones (1.6) y (1.7) son equivalentes, en el sentido de que tienen el mismo conjunto de soluciones.

De acuerdo al teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales, si las funciones q, r y g son continuas en I y x_0 es un punto en I , entonces para cualesquiera dos números ξ y

η , existe una única solución φ de (1.7) en I tal que

$$\varphi(x_0) = \xi, \quad \varphi'(x_0) = \eta. \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.8) son llamadas **condiciones iniciales**, y el sistema de ecuaciones (1.7) y (1.8) es llamado un **problema de valores iniciales**.

Con $I = [a, b]$, las soluciones de (1.6) pueden ser sujetas a **condiciones frontera** en a y b . Las cuales pueden tomar las siguientes formas:

$$(i) \quad y(c) = \xi, \quad y'(c) = \eta, \quad c \in \{a, b\},$$

$$(ii) \quad y(a) = \xi, \quad y(b) = \eta,$$

$$(iii) \quad y'(a) = \xi, \quad y'(b) = \eta.$$

Cuando las condiciones frontera son dadas en el mismo punto, como en (i) se conocen usualmente como **condiciones iniciales**. Las formas (i) – (iii) de las condiciones frontera se generalizan por el par de ecuaciones:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \xi, \quad (1.9)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y'(a) = \eta, \quad (1.10)$$

donde α_i y β_i son constantes que satisfacen $\sum_{i=1}^4 |\alpha_i| > 0$ y $\sum_{i=1}^4 |\beta_i| > 0$. El sistema de ecuaciones (1.6), (1.9) y (1.10) es llamado un **problema de valores frontera**.

Las condiciones frontera (1.9) y (1.10) son llamadas **homogéneas** si $\xi = \eta = 0$, y **separadas** si $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. Un par de condiciones homogéneas, que resultan de una elección especial de los coeficientes en (1.9) y (1.10), está dado por

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b). \quad (1.11)$$

Las ecuaciones (1.11) son llamadas **condiciones frontera periódicas**.

Lema 1.4. ([2]) Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea $y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$, $x \in I$, donde $q \in C(I)$, entonces el Wronskiano de y_1 y y_2 es cero para toda $x \in I$ o es diferente de cero para cualquier $x \in I$.

Lema 1.5. ([2]) Dos soluciones y_1, y_2 de $y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$, $x \in I$, son linealmente independientes si y sólo si el Wronskiano de y_1, y_2 es diferente de cero en I .

Regresando a la forma general de (1.6) en una notación ligeramente modificada

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad (1.12)$$

ahora investigaremos las propiedades de ortogonalidad de sus soluciones. (1.12) puede escribirse en la forma $Ly = 0$ donde

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x), \quad (1.13)$$

es un operador diferencial lineal de segundo orden y $y \in \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I)$, el cual es un espacio vectorial lineal.

En lo que sigue obtendremos la forma del **operador adjunto** de $L : \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I) \rightarrow \mathcal{L}^2(I)$ definido por (1.13), donde $p, q, r \in C^2(I)$. Denotando al adjunto de L por L' , por definición de L' se tiene,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L'g \rangle \quad \text{para toda } f, g \in C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I). \quad (1.14)$$

Elijiendo $I = (a, b)$ donde el intervalo I puede ser finito o infinito, utilizando integración por partes en (1.14), se tiene:

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b (pf'' + qf' + rf) \bar{g} dx \\ &= [pf'\bar{g} - f(p\bar{g})'] \Big|_a^b + \int_a^b f(p\bar{g})'' dx + qf\bar{g} \Big|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})' dx + \int_a^b fr\bar{g} dx \\ &= \langle f, (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \rangle + [p(f'\bar{g} - f\bar{g}' + (q-p')f\bar{g})] \Big|_a^b, \end{aligned}$$

donde las integrales son consideradas impropias si (a, b) es infinito o cualquiera de los dos integrandos es no acotado en a o b . El lado derecho está bien definido si $p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$, y $r \in C(a, b)$. Entonces, para toda $f, g \in \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I)$,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle + [p(f'\bar{g} - f\bar{g}' + (q-p')f\bar{g})] \Big|_a^b, \quad (1.15)$$

donde $L^*g = (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g = \bar{p}g'' + (2\bar{p}' - \bar{q})g' + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})g$. El operador $L^* = \bar{p} \frac{d^2}{dx^2} + (2\bar{p}' - \bar{q}) \frac{d}{dx} + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})$ se llama **adjunto formal** de L . L se dice **formalmente auto-adjunto** cuando $L^* = L$, esto es, cuando $\bar{p} = p, 2\bar{p}' - \bar{q} = q, \bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r} = r$. Estas tres ecuaciones se satisfacen si y sólo si las funciones p, q y r son reales y $q = p'$. En este caso $Lf = pf'' + p'f' + rf = (pf')' + rf$. Así, cuando L es formalmente auto-adjunto, tiene la forma $L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + r$, y la ecuación (1.15) se reduce a

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + p(f'\bar{g} - f\bar{g}') \Big|_a^b. \quad (1.16)$$

L se dice **auto-adjunto** cuando $L = L'$. Comparando (1.14) y (1.16) vemos que el operador formalmente auto-adjunto L es auto-adjunto si

$$p(f'\bar{g} - f\bar{g}') \Big|_a^b = 0 \quad \text{para toda } f, g \in C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I). \quad (1.17)$$

Ahora estamos interesados en el problema de eigenvalores para el operador $-L$, esto es, soluciones de la ecuación

$$Lu + \lambda u = 0. \quad (1.18)$$

Cuando $u = 0$ esta ecuación se satisface para todo valor de λ . Cuando $u \neq 0$, se satisface para ciertos valores de λ . Estos son los **eigenvalores** de $-L$. Cualquier función $u \neq 0$ en $C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$ la cual satisface (1.18) para algunos números complejos λ es una **eigenfunción** de $-L$ correspondiente al eigenvalor λ . Cuando se agregan condiciones frontera apropiadas a la ecuación (1.18), el sistema resultante es llamado **problema de eigenvalores de Sturm-Liouville**. Claramente, $-L$ es (formalmente) auto-adjunto si y sólo si L es formalmente auto-adjunto. La razón por la cuál buscamos los eigenvalores de $-L$ en vez de los de L es que, L tiene eigenvalores negativos cuando p es positivo. En el siguiente teorema se resumen los resultados obtenidos

Teorema 1.6. ([2]) Sea $L : \mathcal{L}^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow \mathcal{L}^2(a, b)$ un operador diferencial lineal de segundo orden definido por $Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u$, $x \in (a, b)$, donde $p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$, y $r \in C(a, b)$. Entonces

- (i) L es **formalmente auto-adjunto**, esto es, $L^* = L$, si los coeficientes p, q y r son reales y $q \equiv p'$.
- (ii) L es **auto-adjunto**, esto es $L' = L$, si es formalmente auto-adjunto y (1.17) se satisface.
- (iii) Si L es auto-adjunto, entonces los eigenvalores de la ecuación $Lu + \lambda u = 0$ son todos reales y cualquier par de eigenfunciones asociado con eigenvalores distintos son ortogonales en $\mathcal{L}^2(a, b)$.

El siguiente corolario es una extensión de (iii) del Teorema 1.6:

Corolario 1.7. ([2]) Si $L : \mathcal{L}^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow \mathcal{L}^2(a, b)$ es un operador lineal auto-adjunto y ρ es una función continua positiva en $[a, b]$, entonces los eigenvalores de la ecuación $Lu + \lambda \rho u = 0$ son todos reales y cualquier par de eigenfunciones asociadas con distintos eigenvalores son ortogonales en $\mathcal{L}^2_\rho(a, b)$.

Sea L un operador formalmente auto-adjunto de la forma

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x). \quad (1.19)$$

La ecuación de eigenvalores

$$Lu + \lambda \rho(x)u = 0, \quad x \in (a, b), \quad (1.20)$$

sujeta a las condiciones frontera homogéneas separadas

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \quad (1.21)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0, \quad (1.22)$$

donde α_1 y β_1 son constantes reales, es llamado un **problema de eigenvalores de Sturm-Liouville**.

Como L es auto-adjunto bajo estas condiciones frontera, del Corolario 1.7 sabemos que si existen las eigenfunciones de la ecuación de eigenvalores (1.20) son reales y sus eigenfunciones son ortogonales en $\mathcal{L}_\rho^2(a, b)$. Cuando el intervalo (a, b) es acotado y p no se anula en $[a, b]$, el sistema de ecuaciones (1.20)-(1.22) es llamado un **problema regular de Sturm-Liouville**, de otra forma es singular. En el problema regular, no hay pérdida de generalidad en asumir que $p(x) > 0$ en $[a, b]$. Las soluciones del problema de Sturm-Liouville son las eigenfunciones del operador $-\frac{L}{\rho}$ en C^2 el cuál satisface las condiciones frontera (1.21) y (1.22).

De hecho se tiene que el problema regular de Sturm-Liouville no sólo tiene soluciones, sino que son suficientes para generar a $\mathcal{L}^2(a, b)$.

En la ecuación $Lu + \lambda\rho u = (pu')' + ru + \lambda\rho u = 0$, $a < x < b$, donde p es suave y ρ es positiva y continua, asumimos que p no se anula en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Al relajar las condiciones nos lleva a un problema singular. Un **problema de Sturm-Liouville singular** resulta de una u otra de las siguientes situaciones:

1. $p(x) = 0$ en $x = a$ y/o $x = b$.
2. El intervalo (a, b) es infinito.

Un ejemplo típico de ecuación singular de Sturm-Liouville es la ecuación de Bessel:

$$xu'' + u' - \frac{n^2}{x}u + \lambda xu = 0, \quad x > 0.$$

Ambas funciones $p(x) = x$ y $\rho(x) = x$ se anulan en $x = 0$.

1.2.1 Factorización de Pólya

El siguiente teorema establece la factorización de Pólya de la ecuación diferencial $Lu = 0$:

Teorema 1.8. ([29]) **Factorización de Pólya.** *Supongamos que $Lu = 0$ tiene una solución positiva u_0 en $J \subset I$, J intervalo. Entonces*

$$Lu(x) = \frac{1}{u_0(x)} \frac{d}{dx} p(x) u_0^2(x) \frac{d}{dx} \frac{u(x)}{u_0(x)}, \quad \text{para } x \in J.$$

En el artículo [10] se tiene la forma de la factorización de Pólya siguiente.

Supongamos que u_0 es una solución particular de

$$-u'' + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right) u = \lambda (r_1(x) u' + r_0(x) u)$$

para $\lambda = \lambda_0$, tal que u_0 no tiene ceros excepto probablemente en $x = 0$. Entonces el operador

$$L_0 u := -u'' - \lambda_0 r_1 u' + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) - \lambda_0 r_0 \right) u = 0,$$

admite la siguiente factorización de Pólya:

$$L_0 u = -\frac{1}{p u_0} \frac{d}{dx} p u_0^2 \frac{d}{dx} u,$$

donde $p(x) = e^{\lambda_0 \int_0^x r_1(s) ds}$ es el factor integrante.

1.3 La ecuación de Bessel

Para esta sección utilizaremos [2] y [34] para hablar a grandes rasgos de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (1.23)$$

donde ν es un parámetro no-negativo, (1.23) surge en algunas situaciones donde se utiliza la separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Es llamada **ecuación de Bessel**, y es un ejemplo de una ecuación de eigenvalores de Sturm-Liouville la cual genera ciertas funciones especiales, llamadas **funciones de Bessel**.

La ecuación (1.23) tiene un punto singular en $x = 0$, entonces no podemos expandir la solución en una serie de potencias alrededor de tal punto. En vez de ello, utilizamos un método debido a Georg Frobenius para construir una solución en términos de potencias reales (no necesariamente enteras) de x . El método se basa en la premisa de que toda ecuación de la forma $y'' + \frac{q(x)}{x} y' + \frac{r(x)}{x^2} y = 0$, donde las funciones q y r son analíticas en $x = 0$, tiene una solución de la forma

$$y(x) = x^t \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^t (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots), \quad (1.24)$$

donde t es un número real (o complejo) y la constante c_0 es no-cero. Claramente t siempre puede elegirse tal que $c_0 \neq 0$. La expresión (1.24) es una serie de potencias cuando t es un entero no-negativo.

Sustituyendo (1.24) en (1.23), tenemos $\sum_{k=0}^{\infty} (k+t)^2 c_k x^{k+t} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t} = 0$.

Recopilando los coeficientes de las potencias $x^t, x^{t+1}, x^{t+2}, \dots, x^{t+j}$, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$t^2 c_0 - \nu^2 c_0 = 0 \quad (1.25)$$

$$(t+1)^2 c_1 - \nu^2 c_1 = 0 \quad (1.26)$$

$$(t+2)^2 c_2 - \nu^2 c_2 + c_0 = 0$$

$$\vdots$$

$$(t+j)^2 c_j - \nu^2 c_j + c_{j-2} = 0 \quad (1.27)$$

De la ecuación (1.25) concluimos que $t = \pm \nu$. Suponiendo, iniciar con (1.25), que $t = \nu$, la ecuación (1.26) es $(\nu+1)^2 c_1 - \nu^2 c_1 = (2\nu+1) c_1 = 0$. Como $2\nu+1 \geq 1$, esto implica $c_1 = 0$.

Ahora la ecuación (1.27) nos da $[(\nu + j)^2 - \nu^2] c_j + c_{j-2} = j(j + 2\nu) c_j + c_{j-2} = 0$, y por lo tanto

$$c_j = -\frac{1}{j(j + 2\nu)} c_{j-2}. \quad (1.28)$$

Ya que $c_1 = 0$, se sigue que $c_j = 0$ para todos los valores impares de j , y podemos suponer que $j = 2m$, donde m es un entero positivo. La relación de recursión (1.28) ahora toma la forma $c_{2m} = -\frac{1}{2m(2m+2\nu)} c_{2m-2} = -\frac{1}{2^2 m(\nu+m)} c_{2m-2}$, $m \in \mathbb{N}$, lo que nos ayuda a expresar c_2, c_4, c_6, \dots en términos de la constante arbitraria c_0 :

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2^2(\nu+1)} c_0 \\ c_4 &= -\frac{1}{2^2 2(\nu+2)} c_2 = \frac{1}{2^4 2! (\nu+1)(\nu+2)} c_0 \\ &\vdots \\ c_{2m} &= \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} c_0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

La solución resultante de la ecuación de Bessel es por lo tanto la serie formal

$$x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m}. \quad (1.30)$$

Eligiendo $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ los coeficientes (1.28) están dados por $c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)}$. La serie resultante $x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m}$ es llamada **función de Bessel de primer tipo de orden** ν , y se denota $\mathbf{J}_\nu(x)$. Así,

$$\mathbf{J}_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \quad (1.31)$$

y es una manera simple para verificar que la serie de potencias $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \Gamma(m+\nu+1)} x^{2m}$ converge en \mathbb{R} por la prueba de la razón. Con $\nu \geq 0$ la potencia x^ν está bien definida cuando x es positiva, por lo tanto la función de Bessel $\mathbf{J}_\nu(x)$ está bien definida por (1.31) en $(0, \infty)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{J}_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu > 0, \end{cases}$$

la función \mathbf{J}_ν será extendida como una función continua a $[0, \infty)$ por la definición $\mathbf{J}_\nu(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{J}_\nu(x)$ para toda $\nu \geq 0$.

Ahora, si elegimos $t = -\nu < 0$ en (1.24), esto es, si cambiamos el signo de ν en (1.31), entonces

$$\mathbf{J}_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \quad x > 0, \quad (1.32)$$

sigue siendo una solución de la ecuación de Bessel, porque la ecuación es invariante bajo tal cambio de signo. Pero no será necesario ser acotada en $x = 0$, lo que se enuncia en el siguiente resultado

Teorema 1.9. ([2]) *Las funciones de Bessel \mathbf{J}_ν y $\mathbf{J}_{-\nu}$ son linealmente independientes si y sólo si ν no es un entero.*

Basados en este teorema podemos concluir que, cuando ν no es un entero, la solución general de la ecuación de Bessel en $(0, \infty)$ está dada por $y(x) = c_1 \mathbf{J}_\nu(x) + c_2 \mathbf{J}_{-\nu}(x)$. La solución general cuando ν es un entero se sigue de la función de Bessel de segundo tipo.

Las funciones de Bessel de orden entero, dadas por

$$\mathbf{J}_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.33)$$

son analíticas en $(0, \infty)$, y tienen extensiones analíticas a \mathbb{R} como funciones pares o impares, dependiendo de cuando n es par o impar. La similaridad entre las expansiones de \mathbf{J}_0 y \mathbf{J}_1 por un lado, y las de las funciones coseno y seno son bastante sorprendentes.

Por el Teorema 1.9 es natural preguntarse cómo se ve la solución general de la ecuación de Bessel cuando ν es un entero n . Hay varias maneras de definir una segunda solución de la ecuación de Bessel la cual es independiente de \mathbf{J}_n . El enfoque más común es definir la función de Bessel de segundo tipo de orden ν por

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \nu\pi} [\mathbf{J}_\nu(x) \cos \nu\pi - \mathbf{J}_{-\nu}(x)], & \nu \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu, & \nu = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Regresando a la ecuación de Bessel (1.23), después de dividir por x toma la forma

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0, \quad (1.34)$$

con operador diferencial $L = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx}\right) + x - \frac{\nu^2}{x}$ formalmente auto-adjunto, donde $p(x) = x$ y $r(x) = -\frac{\nu^2}{x}$ en la forma estandar (1.19). Comparando con (1.20) muestra que $\rho(x) = x$ es la función peso, pero el parámetro eigenvalor no aparece explícitamente en la ecuación (1.34). Por lo tanto introducimos un parámetro μ a través del cambio de variables $x \mapsto \mu x, y(x) \mapsto y(\mu x) = u(x)$.

Diferenciando con respecto a x , $u'(x) = \mu y'(\mu x)$ y $u''(x) = \mu^2 y''(\mu x)$. Bajo esta transformación, la ecuación (1.34) toma la forma

$$xu'' + u' + \left(\mu^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)u = 0, \quad (1.35)$$

donde el parámetro de eigenvalores es ahora $\lambda = \mu^2$. Las ecuaciones (1.34) y (1.35) son equivalentes para $\mu \neq 0$.

Si la ecuación (1.35) está dada en el intervalo (a, b) , donde $0 \leq a < b < \infty$, entonces podemos imponer las condiciones frontera separadas homogéneas $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$, $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$, para obtener un problema de eigenvalores de Sturm-Liouville regular. Las eigenfunciones entonces toman la forma $c_\mu \mathbf{J}_\nu(\mu x) + d_\mu Y_\nu(\mu x)$, donde μ , c_μ , y d_μ son elegidas tal que las condiciones frontera se satisfacen.

Tomando $a = 0$ para simplificar las cosas. Supongamos, por lo tanto, que la ecuación (1.35) está dada en el intervalo $(0, b)$. Como $p(0) = 0$, no se necesitan condiciones frontera en $x = 0$, excepto que exista el límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$. En $x = b$ tenemos

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \quad (1.36)$$

El par de ecuaciones (1.35) y (1.36) ahora posee un problema de eigenvalores singular de Sturm-Liouville, basados en la Sección 1.1, tiene un conjunto ortogonal de soluciones el cual es completo en $\mathcal{L}_x^2(0, b)$. Por simplicidad restringimos ν a los enteros no-negativos. La solución general de la ecuación (1.35) entonces está dada por $u(x) = c_n \mathbf{J}_n(\mu x) + d_n Y_n(\mu x)$. La condición de que $u(x)$ tiene un límite en $x = 0$ fuerza a los coeficientes de Y_n a anularse, y nos quedamos con $\mathbf{J}_n(\mu x)$ como la única solución admisible.

Solo mencionaremos que para el caso especial de (1.36) cuando $\beta_2 = 0$; esto es, $u(b) = 0$. Aplicando esta condición a la solución $\mathbf{J}_n(\mu x)$ da $\mathbf{J}_n(\mu b) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. La condición más general (1.36), requiere más trabajo. Si $\beta_1 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta_2 = 1$. La solución $u(x) = \mathbf{J}_n(\mu x)$ debe entonces satisfacer

$$\beta_1 \mathbf{J}_n(\mu b) + \mu \mathbf{J}'_n(\mu b) = 0. \quad (1.37)$$

1.4 Operador de transmutación

Iniciaremos esta sección dando la definición de un operador de transmutación. Sea E un espacio lineal topológico y E_1 un subespacio lineal de E (no necesariamente cerrado). Sean A y B operadores lineales: $E_1 \rightarrow E$.

Definición 1.10. *Un operador lineal invertible T definido en todo el espacio E tal que E_1 es invariante bajo la acción de T es llamado un **operador de transmutación** para el par de operadores A y B si satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *El operador T y su inverso T^{-1} son continuos en E ;*
2. *La siguiente igualdad de operadores es válida*

$$AT = TB \quad (1.38)$$

1.4.1 Transmutaciones de Sonine-Poisson-Delsarte

El siguiente es un resultado que aparece en el artículo de S. M. Sitnik [64] el cuál nos provee de una fórmula para obtener el operador de transmutación presentado en el Capítulo 2, el cuál envía soluciones de la ecuación de onda en soluciones de la ecuación de Bessel (2.1).

Consideremos primero a las transmutaciones conocidas, [64], para el operador de Bessel L_ν y el operador segunda derivada B :

$$L_\nu T f = T B f, \quad L_\nu = B + \frac{2\nu + 1}{x} D, \quad B = \frac{d^2}{dx^2}, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

El operador que buscamos, está definido en términos de la transmutación de Poisson, a continuación definimos las transmutaciones de Sonine S_ν y de Poisson P_ν :

Definición 1.11. *La transmutación de Poisson está definida por*

$$P_\nu f(x) = \frac{1}{2^\nu x^{2\nu} \Gamma(\nu + 1)} \int_0^x (x^2 - s^2)^{\nu - \frac{1}{2}} f(s) ds, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, \quad (1.39)$$

La transmutación de Sonine está definida por

$$S_\nu f(x) = \frac{2^{\nu + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\nu - \frac{1}{2}} s^{2\nu + 1} f(s) ds, \quad \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}, \quad (1.40)$$

donde Γ es la función Gamma de Euler .

Como un par para el operador de Bessel L_ν consideremos uno relacionado a él:

$$\mathbf{L}_\nu = B - \frac{\nu(\nu + 1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right)$$

el cuál para $\nu \in \mathbb{N}$ es un operador de momento angular de física cuántica. Sus relaciones de transmutación se establecen en el siguiente teorema:

Teorema 1.12. ([64]) *Para un par de transmutaciones X_ν, Y_ν*

$$X_\nu \mathbf{L}_\nu = B X_\nu, \quad Y_\nu B = \mathbf{L}_\nu Y_\nu, \quad (1.41)$$

definimos al nuevo par de transmutaciones por las fórmulas

$$S_\nu = X_{\nu - \frac{1}{2}} x^{\nu + \frac{1}{2}}, \quad P_\nu = x^{-(\nu + \frac{1}{2})} Y_{\nu - \frac{1}{2}}. \quad (1.42)$$

Entonces para el nuevo par S_ν, P_ν las siguientes fórmulas son válidas:

$$S_\nu L_\nu = B S_\nu, \quad P_\nu B = L_\nu P_\nu. \quad (1.43)$$

1.5 Algunos resultados de Aproximación

La siguiente definición será utilizada principalmente en el capítulo 4 y podemos encontrarla en [15].

Definición 1.13. *Un sistema finito o infinito de elementos, x_1, x_2, \dots , en un espacio normado X es llamado completo si todo $x \in X$ puede ser aproximado arbitrariamente cerca por combinaciones lineales finitas de los x_i . Esto es, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, podemos encontrar constantes*

$$a_1, \dots, a_n \text{ tales que } \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \varepsilon.$$

El siguiente resultado, fue de gran importancia en [30] para mostrar la completez de cierto sistema infinito de soluciones (polinomios de onda) de la ecuación de onda.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Los polinomios armónicos son combinaciones lineales de los polinomios $Re(z - z_0)^n$ y $Im(z - z_0)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, donde z_0 es un punto arbitrario en Ω y z es una variable compleja.

Teorema 1.14. (de Runge) *Cualquier función armónica en Ω puede ser aproximada uniformemente en cualquier subconjunto compacto en el interior de Ω por polinomios armónicos.*

El Teorema 1.14 de Runge refleja la completez del sistema de polinomios armónicos

$$\{Re(z - z_0)^n, Im(z - z_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$$

en el espacio de todas las funciones en Ω en el sentido de la convergencia normal.

El siguiente resultado el cual puede revisarse en [15] será de gran importancia para establecer algunos Lemas tipo Müntz que muestran la completez de las trazas de los polinomios de onda generalizados en el capítulo 4.

Teorema 1.15. (de Müntz) *Sea $\{P\}$ una sucesión de números no-negativos diferentes. Para que $\{x^P\}$ sea completa en $C([0, 1])$ es suficiente que:*

Una de las P_j 's sea 0 y $\{P\}$ contenga una sucesión $\{P_j\}$ para la cual

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j = \infty \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ P_j \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{P_j} = \infty.$$

1.6 Ecuación de onda y polinomios de onda

En esta sección presentamos algunos resultados obtenidos en [30] los cuáles utilizaremos en el Capítulo 2 para obtener los polinomios de onda generalizados.

En vez de la ecuación de Laplace consideremos la ecuación de onda

$$\square \omega = 0, \tag{1.44}$$

donde \square es el D'Alembertiano definido como $\square := \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Sea z la variable hiperbólica $z = x + jt$ donde en vez de la unidad imaginaria compleja consideramos a j la unidad imaginaria hiperbólica, $j^2 = 1$.

Análogamente al caso elíptico el sistema de polinomios: $\{Re(x + jt)^n \text{ y } Im(x + jt)^n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema infinito de soluciones de la ecuación de onda (1.44).

Se puede ver que

$$Re(x + jt)^n = \frac{1}{2}((x + t)^n + (x - t)^n) \quad \text{y} \quad Im(x + jt)^n = \frac{1}{2}((x + t)^n - (x - t)^n).$$

Reordenemos estos polinomios como sigue:

$$p_0(x, t) = 1, \quad p_1(x, t) = Re(x + jt) = x, \quad p_2(x, t) = Im(x + jt) = t,$$

$$p_3(x, t) = Re(x + jt)^2 = x^2 + t^2, \quad p_4(x, t) = Im(x + jt)^2 = 2xt, \dots$$

La familia obtenida de soluciones de (1.44) será llamada **polinomios de onda**. Los polinomios de onda también se pueden escribir como:

$$p_0(x, t) = 1, \quad p_{2m-1}(x, t) = \sum_{k \text{ par}=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} t^k, \quad p_{2m}(x, t) = \sum_{k \text{ impar}=1}^m \binom{m}{k} x^{m-k} t^k.$$

Es conveniente escribirlos de la siguiente forma:

$$p_0(x, t) = 1, \quad p_m(x, t) = \begin{cases} \sum_{k \text{ par}=0}^{\frac{m+1}{2}} \binom{\frac{m+1}{2}}{k} x^{\frac{m+1}{2}-k} t^k, & m \text{ impar} \\ \sum_{k \text{ impar}=1}^{\frac{m}{2}} \binom{\frac{m}{2}}{k} x^{\frac{m}{2}-k} t^k, & m \text{ par.} \end{cases} \quad (1.45)$$

Nuestro objetivo es utilizar estos polinomios de onda para construir un sistema de soluciones de la ecuación (2.1).

Uno de los principales resultados de [30] es un teorema tipo Runge el cual establece que cualquier solución regular de (1.44) en un cuadrado \bar{R} con vértices $(\pm 2b, 0)$ y $(0, \pm 2b)$, $b > 0$ puede ser uniformemente aproximado en \bar{R} por los polinomios de onda:

Teorema 1.16. ([30]) *Sea $\omega \in C^2(\bar{R})$ una solución de la ecuación de onda (1.44) en R .*

Entonces existe una sucesión de polinomios de onda $P_N = \sum_{n=0}^N a_n p_n$ uniformemente convergente a ω en \bar{R} .

Este resultado muestra la completez de los polinomios de onda en el espacio lineal de soluciones regulares de la ecuación de onda con respecto a la norma del máximo.

En [42] y [44] se mostró que la ecuación correspondiente al caso regular

$$(\square - q(x)) u(x, t) = 0$$

admite un sistema completo de soluciones llamados polinomios de onda generalizados introducidos en [30] los cuáles pueden construirse usando un cierto procedimiento de integración recurrente, ver la sección 1.7. En particular, el núcleo de transmutación puede ser aproximado globalmente por los polinomios de onda generalizados, y los coeficientes de aproximación pueden ser encontrados de las condiciones del problema de Goursat.

En la siguiente sección incluimos una breve introducción de derivadas e integrales fraccionarias de Riemann-Liouville, ver las secciones 2 y 18 de [63]; ya que para encontrar al operador inverso en el Capítulo 2 necesitamos representar a nuestro operador como un operador de Erdélyi-Kober, los cuáles son una modificación de las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.

1.7 Integrales y derivadas fraccionarias

El cálculo fraccionario surge de dar respuesta a la pregunta: Si podemos calcular la derivada de orden entero de una función, ¿Cómo podemos calcular la derivada de orden fraccionario? Los primeros en trabajar en una respuesta para esta pregunta fueron Riemann y Liouville.

A partir de la solución de la ecuación integral de Abel se introducen las derivadas e integrales fraccionarias, las cuales son llamadas **derivadas e integrales fraccionarias de Riemann-Liouville** (RL). Tales construcciones generalizan las ideas de integración y diferenciación ordinarias.

La idea de la integración fraccionaria está estrechamente relacionada con la **ecuación integral de Abel**:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad x > 0, \quad (1.46)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $a > -\infty$ y la ecuación es considerada en un intervalo finito $[a, b]$. Si (1.46) tiene solución es única y está dada por: $\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}$. Análogamente para la ecuación de Abel de la forma:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x \leq b \quad (1.47)$$

para $0 < \alpha < 1$ se tiene: $\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}$.

1.7.1 Definición de integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

Hay una fórmula muy conocida para una integral n -veces iterada:

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \cdots \int_a^x \varphi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt, \quad (1.48)$$

la cual se puede probar por inducción. Como $(n-1)! = \Gamma(n)$ observamos que el lado derecho de (1.48) puede tener un significado para valores no enteros de n . Entonces es natural definir la integración de un orden no entero como sigue:

Definición 1.17. Sea $\varphi(x) \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Las integrales

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a \\ (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$, son llamadas *integrales fraccionarias de orden α* . El nombre que se acepta para estas integrales es **integrales fraccionarias de Riemann-Liouville**.

Así una integral fraccionaria es una construcción ya conocida para nosotros por la ecuación de Abel. Por la fórmula de inversión de la ecuación de Abel tenemos la siguiente definición:

Definición 1.18. Para funciones $f(x)$ dadas en un intervalo $[a, b]$, cada una de las expresiones

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \\ (D_{b-}^\alpha f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \end{aligned}$$

son llamadas *derivadas fraccionarias de orden α , $0 < \alpha < 1$, izquierda y derecha respectivamente*. Usualmente llamadas **derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville**.

Pasando ahora a derivadas fraccionarias de ordenes $\alpha \geq 1$, denotemos por $[\alpha]$ a la parte entera de α y por $\{\alpha\}$, $0 \leq \{\alpha\} < 1$ a la parte fraccionaria de α , entonces $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$.

Si α es un entero, la derivada de orden α se entiende en el sentido de la diferenciación usual:

$$D_{a+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \quad D_{b-}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Si α no es entero, es usual introducir

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f &\stackrel{def}{=} \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} D_{a+}^{\{\alpha\}} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f, \\ D_{b-}^\alpha f &\stackrel{def}{=} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} D_{b-}^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f, \end{aligned}$$

entonces,

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n = [\alpha] + 1,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, n = [\alpha] + 1.$$

1.7.2 Otras formas de integrales y derivadas fraccionarias de RL

En muchas investigaciones de ecuaciones integrales y algunas otras aplicaciones se utilizan mucho las siguientes modificaciones de integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville:

$$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad (1.49)$$

$$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = x^{-\sigma(\alpha+\eta)} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n x^{\sigma(\alpha+n+\eta)} I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha+n} f(x), \quad \alpha > -n, \quad (1.50)$$

$$I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad (1.51)$$

$$I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = x^{\sigma\eta} \left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n x^{\sigma(n-\eta)} I_{b-;\sigma,\eta-n}^{\alpha+n} f(x), \quad \alpha > -n, \quad (1.52)$$

donde $0 \leq a < x < b \leq \infty$ para cualquier σ real o $-\infty \leq a < x < b \leq \infty$ para σ entero. En particular, si $a = 0$, $b = \infty$ y $\sigma = 1$ las integrales (1.49) y (1.51) son:

$$I_{\eta,\alpha}^{+} f(x) = I_{0+;1,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{x^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad (1.53)$$

$$K_{\eta,\alpha}^{-} f(x) = I_{\infty-;1,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} t^{-\eta-\alpha} f(t) dt, \quad \alpha > 0. \quad (1.54)$$

Los operadores (1.49) y (1.51) con $a = 0$ y $b = \infty$ son llamados **operadores de Erdélyi** mientras que las integrales (1.53) y (1.54) son llamadas **operadores de Kober**. Es natural llamar a los operadores (1.49)-(1.52) **operadores de Erdélyi-Kober**.

Después del cambio de variables $x^{\sigma} = y$, $t^{\sigma} = \tau$ (1.49)-(1.52) se reducen a las integrales y derivadas fraccionarias usuales de Riemann-Liouville:

$$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = y^{-(\alpha+\eta)} (I_{a^{\sigma+}}^{\alpha} \varphi)(y), \quad \varphi(y) = y^{\eta} f(x), \quad x^{\sigma} = y \quad (1.55)$$

$$I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = y^{\eta} (I_{b^{\sigma-}}^{\alpha} \psi)(y), \quad \psi(y) = y^{-(\alpha+\eta)} f(x), \quad x^{\sigma} = y. \quad (1.56)$$

Las integrales (1.55) y (1.56) nos ayudan a extender las propiedades conocidas de las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville I_{a+}^{α} y I_{b-}^{α} a operadores de tipo Erdélyi Kober.

Las expresiones para el inverso de los operadores están dadas por:

$$(I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha})^{-1} f(x) = I_{a+;\sigma,\eta+\alpha}^{-\alpha} f(x), \quad (1.57)$$

$$(I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha})^{-1} f(x) = I_{b-;\sigma,\eta+\alpha}^{-\alpha} f(x). \quad (1.58)$$

En la siguiente sección presentamos un breve bosquejo del sistema de integrales recursivas, ver [30] y algunos resultados de [10] los cuales utilizaremos en el Capítulo 3.

1.8 Sistemas de integrales recursivas

Sea $f \in C^2((a, b)) \cap C^1([a, b])$ una función a valores complejos y $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [a, b]$. El intervalo (a, b) se supone ser finito. Consideremos la siguiente familia auxiliar de funciones

$$\tilde{X}^{(0)}(x) \equiv X^{(0)}(x) \equiv 1, \quad (1.59)$$

$$\tilde{X}^{(n)}(x) = n \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) (f^2(s))^{(-1)^{n-1}} ds, \quad (1.60)$$

$$X^{(n)}(x) = n \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(s) (f^2(s))^{(-1)^n} ds, \quad (1.61)$$

donde x_0 es un punto fijo arbitrario en $[a, b]$. Introducimos el sistema infinito de funciones $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ definido como sigue

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} f(x) X^{(k)}(x), & k \text{ impar} \\ f(x) \tilde{X}^{(k)}(x), & k \text{ par,} \end{cases} \quad (1.62)$$

donde la definición de $X^{(k)}$ y $\tilde{X}^{(k)}$ está dada por (1.59)-(1.61) con x_0 un punto arbitrario del intervalo $[a, b]$.

El siguiente resultado obtenido en [37] establece la relación entre el sistema de funciones $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ y las ecuaciones de Sturm-Liouville.

Teorema 1.19. ([37]) *Sea q una función continua a valores complejos de una variable real independiente $x \in [a, b]$, λ un número complejo arbitrario. Supongamos que existe una solución f de la ecuación*

$$f'' - qf = 0$$

en (a, b) tal que $f \in C^2([a, b])$ y $f \neq 0$ en $[a, b]$. Entonces, la solución general de la ecuación

$$u'' - qu = \lambda u$$

en (a, b) tiene la forma

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes complejas arbitrarias,

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2k)!} \varphi_{2k} \quad y \quad u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2k+1)!} \varphi_{2k+1}$$

y ambas series convergen uniformemente en $[a, b]$.

Las soluciones u_1 y u_2 satisfacen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= f(x_0), & u_1'(x_0) &= f'(x_0), \\ u_2(x_0) &= 0, & u_2'(x_0) &= \frac{1}{f(x_0)}. \end{aligned}$$

Junto con la familia de funciones $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ consideramos un sistema dual de integrales recursivas definidas por la siguiente relación que envuelve la “segunda mitad” de las potencias formales (1.59)-(1.61),

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{X}^{(k)}(x)}{f(x)}, & k \text{ impar} \\ \frac{X^{(k)}(x)}{f(x)}, & k \text{ par.} \end{cases} \quad (1.63)$$

Definición 1.20. Símbolo de Pochhammer Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, el símbolo de Pochhammer está definido por

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}.$$

En [10] para la ecuación de Bessel perturbada (1.67) se construye una solución por medio del método parámetro espectral en series de potencias, el cuál se describe a continuación:

Considerando el operador de Bessel perturbado (también conocido como un operador de Schrödinger esférico)

$$\mathbf{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2} + q(x), \quad l \geq -\frac{1}{2}, \quad x \in (0, a], \quad (1.64)$$

donde el potencial q es en general una función continua complejo valuada en $(0, a]$ que satisface la condición

$$q(x) = O(x^\alpha), \quad x \rightarrow 0 \quad (1.65)$$

para algún $\alpha > -2$.

Si $l \neq 0$ o $q \in \mathcal{L}^1((0, a])$, el punto extremo izquierdo es singular. A pesar de ello, la ecuación $\mathbf{L}u = 0$ posee una solución $\phi(x)$ acotada en $x = 0$ y satisface las siguientes asintóticas en $x = 0$

$$\phi(x) \sim x^{l+1} \quad \text{y} \quad \phi'(x) \sim (l+1)x^l, \quad x \rightarrow 0. \quad (1.66)$$

Junto con \mathbf{L} consideremos un operador diferencial lineal $Ru = r_0u + r_1u'$ de orden a lo más uno, donde $r_{0,1} \in C([0, a])$ son funciones complejo valuadas, y consideramos la siguiente ecuación diferencial que envuelve un parámetro espectral λ

$$\mathbf{L}u = \lambda Ru \quad \text{o} \quad -u'' + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right) u = \lambda (r_1(x)u' + r_0(x)u). \quad (1.67)$$

Para construir una representación parámetro espectral en series de potencias de una solución no singular de (1.67) supongamos que existe una solución u_0 complejo valuada, no nula en $(0, a]$ de la ecuación

$$-u_0'' + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right) u_0 = 0 \quad (1.68)$$

la cual satisface junto con su primer derivada las asintóticas en (1.66).

Definamos el siguiente sistema de integrales recursivas

$$\tilde{X}^{(0)} \equiv 1, \quad \tilde{X}^{(-1)} \equiv 0,$$

$$\tilde{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_0^x u_0(t) R[u_0(t) \tilde{X}^{(n-1)}(t)] dt, & n \text{ impar} \\ - \int_0^x \frac{\tilde{X}^{(n-1)}(t)}{u_0^2(t)} dt, & n \text{ par} \end{cases}. \quad (1.69)$$

El siguiente lema establece que todas las integrales involucradas en (1.69) están bien definidas y nos provee algunas estimaciones para las funciones $\tilde{X}^{(n)}$.

Lema 1.21. ([10]) Si (1.68) admite una solución $u_0 \in C([0, a]) \cap C^2((0, a])$ la cual no tiene otros ceros en $[0, a]$ excepto en $x = 0$ y satisface las relaciones asintóticas (1.66). Entonces el sistema de funciones $\{\tilde{X}^{(n)}\}$ está bien definido por (1.69) y las funciones $\tilde{X}^{(n)}$ satisfacen las desigualdades

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{C^{2n} x^n}{(2l+2)_n}, \quad \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \frac{(n+1) C^{2n+1} x^{2(l+1)+n}}{(2l+2)_{n+1}} \quad (1.70)$$

donde $(x)_n$ es el símbolo de Pochhammer, $C = \max\{1, C_1, C_2, C_3\}$ y las constantes C_1, C_2 y C_3 son tales que para cualquier $t \in (0, a]$ se valen las siguientes desigualdades:

$$|u_0(t) R[u_0](t)| \leq C_1 t^{2l+1}, \quad \left| \frac{1}{u_0^2(t)} \right| \leq C_2 t^{-2(l+1)}, \quad |r_1(t)| \leq C_3. \quad (1.71)$$

En el caso particular cuando $r_1 \equiv 0$, es decir el lado derecho de (1.67) no depende de la derivada de u , las estimaciones del Lema 1.21 pueden ser mejoradas, y el siguiente enunciado es válido:

Lema 1.22. ([10]) Bajo las condiciones del Lema 1.21 supongamos adicionalmente que $r_1 \equiv 0$. Entonces, las funciones $\tilde{X}^{(n)}$ definidas por (1.69) satisfacen las desigualdades

$$\left| \tilde{X}^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{C^{2n} x^{2n}}{2^{2n} n! \left(l + \frac{3}{2}\right)_n}, \quad \left| \tilde{X}^{(2n+1)}(x) \right| \leq \frac{C^{2n+1} x^{2n+1+2(l+1)}}{2^{2n+1} n! \left(l + \frac{3}{2}\right)_{n+1}} \quad (1.72)$$

donde $(x)_n$ es el símbolo de Pochhammer y $C = \max\{C_1, C_2\}$, donde las constantes C_1 y C_2 son tales que para cualquier $t \in (0, a]$ las siguientes desigualdades son válidas

$$\left| r_0(t) u_0^2(t) \right| \leq C_1 t^{2l+2}, \quad \left| \frac{1}{u_0^2(t)} \right| \leq C_2 t^{-2(l+1)}. \quad (1.73)$$

En el siguiente teorema se enuncia la representación en series de potencias del parámetro espectral (SPPS) de una solución acotada de la ecuación (1.67).

Teorema 1.23. ([10]) Si (1.68) admite una solución $u_0 \in C([0, a]) \cap C^2((0, a])$ la cual no tiene otros ceros en $[0, a]$ excepto en $x = 0$ y satisface las relaciones asintóticas (1.66). Entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ la función

$$u = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)} \quad (1.74)$$

es una solución de (1.67) perteneciente a $C([0, a]) \cap C^2((0, a])$ y la serie converge uniformemente en $[0, a]$. La primera derivada de u está dada por

$$u' = \frac{u'_0}{u_0} u - \frac{1}{u_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k-1)} \quad (1.75)$$

y las series para la primera y segunda derivada convergen uniformemente en un compacto arbitrario $K \subset (0, a]$.

También se explica como construir una solución particular de (1.68) que satisfaga las relaciones asintóticas (1.66) y se presentan algunas condiciones suficientes para que sea no nula para $x > 0$.

Para construir una representación SPPS para la solución particular se reescribe (1.68) en la forma:

$$y'' - \frac{l(l+1)}{x^2} y = q(x) y. \quad (1.76)$$

La ecuación $y'' - \frac{l(l+1)}{x^2} y = 0$, posee dos soluciones $y_1(x) = x^{-l}$ y $y_2(x) = x^{l+1}$, para $l \geq -\frac{1}{2}$ la segunda solución es regular y satisface las relaciones (1.66). Como el potencial q tal vez sea singular en el origen, no podemos aplicar el Teorema 1.23 directamente. Sin embargo, debemos construir el sistema de integrales recursivas de la misma manera que en (1.69) y sólo tenemos que mostrar la convergencia de las integrales y obtener algunas estimaciones justificando la representación SPPS.

Consideremos el siguiente sistema de integrales recursivas

$$\tilde{Y}^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_0^x \tilde{Y}^{(n-1)}(t) t^{2(l+1)} q(t) dt, & n \text{ impar} \\ \int_0^x \tilde{Y}^{(n-1)}(t) t^{-2(l+1)} dt, & n \text{ par} \end{cases}. \quad (1.77)$$

Notesé que como el potencial $q \in C((0, a])$ satisface la condición (1.65) para algún $\alpha > -2$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$|q(x)| \leq Cx^\alpha \quad (1.78)$$

para toda $x \in (0, a]$.

Lema 1.24. Supongamos que el potencial complejo valuado $q \in C((0, a])$ satisface la desigualdad (1.78) para alguna $C > 0$ y $\alpha > -2$. Entonces las funciones $\tilde{Y}^{(n)}$ están bien definidas por (1.77) y las siguientes estimaciones se valen

$$\left| \tilde{Y}^{(2n)}(x) \right| \leq \frac{C^n x^{n(2+\alpha)}}{(2+\alpha)^{2n} n! \left(\frac{2l+1}{2+\alpha} + 1\right)_n} \quad \text{y} \quad \left| \tilde{Y}^{(2n-1)}(x) \right| \leq \frac{C^n x^{2l+1+n(2+\alpha)}}{(2+\alpha)^{2n-1} n! \left(\frac{2l+1}{2+\alpha} + 1\right)_n},$$

$x \in (0, a]$.

Proposición 1.25. *Supongamos que el potencial complejo valuado $q \in C(0, a]$ satisface la desigualdad (1.78) para alguna $C > 0$ y $\alpha > -2$. Entonces la función*

$$u_0(x) = x^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{Y}^{(2k)}(x),$$

donde las funciones $\tilde{Y}^{(2k)}$ están definidas por (1.77), es una solución particular de (1.76) en $(0, a]$ que satisface las relaciones asintóticas (1.66). Más aún, u_0 satisface la siguiente estimación para cualquier $x \in (0, a]$

$$|u_0(x)| \leq \Gamma\left(\frac{2l+1}{2+\alpha} + 1\right) (2+\alpha)^{\frac{2l+1}{2+\alpha}} C^{-\frac{2l+1}{2+\alpha}} \sqrt{x} I_{\frac{2l+1}{2+\alpha}}\left(\frac{2\sqrt{Cx^{2+\alpha}}}{2+\alpha}\right)$$

donde $I_{\frac{2l+1}{2+\alpha}}\left(\frac{2\sqrt{Cx^{2+\alpha}}}{2+\alpha}\right)$ es la función de Bessel modificada de primer tipo.

El siguiente corolario nos provee una condición suficiente para que la solución particular construida en la Proposición 1.25 sea no nula.

Corolario 1.26. *Bajo las condiciones de la Proposición 1.25 supongamos adicionalmente que $q(x) \geq 0$, $x \in (0, a]$. Entonces $u_0(x) \geq x^{l+1}$ para alguna $x \in (0, a]$.*

En el artículo [10] se encontró que la propiedad del mapeo para el operador de transmutación \mathbf{T} relacionado al par de operadores $\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$ y $\mathbf{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$, los cuáles estudiaremos con mayor detalle en los Capítulos 3 y 4, está dada por

$$\mathbf{T}[x^{2k+l+1}] = (-1)^k 2^{2k} k! \left(l + \frac{3}{2}\right)_k u_0(x) \tilde{X}^{(2k)}(x), \quad (1.79)$$

donde u_0 es como en el Teorema 1.23 y $\tilde{X}^{(2k)}(x)$ son como en (1.69).

1.9 Existencia de la transmutación para ecuaciones de Bessel perturbadas

Consideremos la ecuación de Bessel perturbada

$$-\mathbf{L}u(x) := -u''(x) + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x)\right)u(x) = \lambda u(x), \quad l \geq -\frac{1}{2}, \quad x \in (0, b] \quad (1.80)$$

donde q es una función continua complejo valuada en $[0, b]$ y λ es un número complejo arbitrario.

En [66] y [71] se mostró el siguiente resultado,

Teorema 1.27. ([66], [71]) Existe un operador integral de Volterra \mathbf{T} definido por

$$\mathbf{T}[\varphi(x)] = \varphi(x) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt \quad (1.81)$$

para cualquier $\varphi \in C([0, b])$, y con un kernel continuo K tal que una solución regular de (1.80) se puede representar como

$$\mathbf{u}(x, \lambda) = \mathbf{T}[\mathbf{d}_l(x, \lambda)],$$

donde $\mathbf{d}_l(x, \lambda) := \sqrt{x}\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x})$ es una solución regular de la ecuación

$$-\mathbf{L}_0 y(x) := -y''(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}y(x) = \lambda y(x) \quad (1.82)$$

con $\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}$ la función de Bessel de primer tipo de orden $l + \frac{1}{2}$.

En términos generales, conocer al kernel K nos permite prescindir del potencial q reduciendo la ecuación (1.80) a una más elemental (1.82).

El núcleo K del operador de transmutación (1.81) es una solución de cierto problema de Goursat descrito por el siguiente teorema

Teorema 1.28. ([71]) Existe una única función $K(x, t)$ continua en el triángulo $0 \leq t \leq x \leq b$ tal que las siguientes propiedades se satisfacen:

1. K es una solución de (3.2) en el dominio $0 < t \leq x \leq b$.

2. $\frac{dK(x,x)}{dx} = \frac{q(x)}{2}$, $x \in [0, b]$.

3.

$$K(x, 0) = 0, \quad x \in [0, b] \quad (1.83)$$

y adicionalmente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(x, t) \cdot t^l = 0 \quad \text{cuando} \quad -\frac{1}{2} \leq l < 0. \quad (1.84)$$

Observación 1.29. La propiedad 3. del Teorema 1.28 está ligeramente modificada comparada con la formulación original de este teorema en [71], donde sólo aparece (1.84). Sin embargo el hecho de que $K(x, 0) = 0$ sólo para $l \geq -\frac{1}{2}$ puede establecerse fácilmente utilizando los resultados de V. Ya. Volk en [71] en los que considerando que la función K admite la representación $K(x, t) = (z-s)^{-l}u(z, s)$ donde $z = \frac{1}{4}(x+t)^2$, $s = \frac{1}{4}(x-t)^2$ y $u(z, s) = O((z-s)^{1+l-\varepsilon})$, para $0 \leq \varepsilon < 1$, se tiene que:

$$K(x, t) = \left\{ \frac{1}{4} [(x+t)^2 - (x-t)^2] \right\}^{-l} \left\{ \frac{1}{4} [(x+t)^2 - (x-t)^2] \right\}^{1+l-\varepsilon} = C [(x+t)^2 - (x-t)^2]^{1-\varepsilon},$$

entonces tomando el límite cuando $t \rightarrow 0$ se tiene que $K(x, 0) = C \lim_{t \rightarrow 0} [(x+t)^2 - (x-t)^2]^{1-\varepsilon} = 0$.

El resultado principal de [71] establece que la función $u_l(x, \lambda) = \mathbf{T}[\mathbf{d}_l(x, \lambda)]$ es una solución regular de (1.80) con \mathbf{T} de la forma (1.81) con K definido por el Teorema 1.28. Note también que el operador $\mathbf{T} : C([0, b]) \rightarrow ([0, b])$ es una biyección.

Gráficamente, el dominio de definición del núcleo del operador \mathbf{T} es el triángulo $0 \leq t \leq x \leq b$ y se muestra en la Figura 1.1.

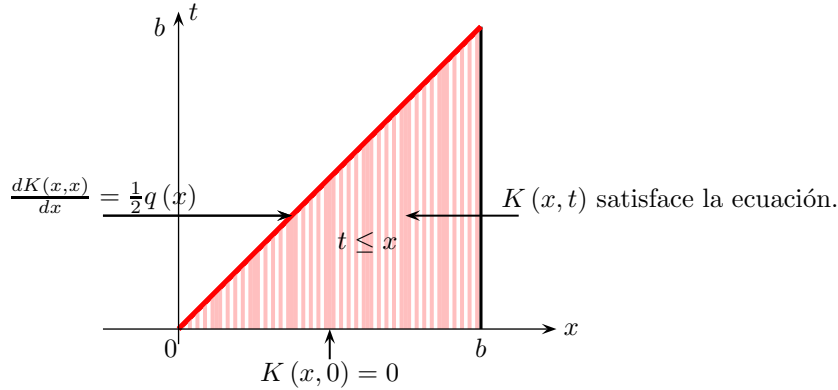


Figura 1.1: Dominio de definición del núcleo $K(x, t)$ del operador \mathbf{T} .

Introduzcamos algunas definiciones y un poco de notación que necesitaremos principalmente en el Capítulo 4, denotaremos como $C_0([0, b])$, $C_0^1([0, b])$ y \mathcal{A}_l a los espacios siguientes:

$$C_0([0, b]) = \{\varphi \in C([0, b]) : \varphi(0) = 0\}, \quad C_0^1([0, b]) = \{\varphi \in C^1([0, b]) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}$$

y

$$\mathcal{A}_l = C_0([0, b]) \cap C^2((0, b]) \cap \{\varphi : \varphi' \in C[0, b], l > 0 \text{ y } \varphi'(t) = O(t^l) \text{ cuando } t \rightarrow 0, l < 0\}.$$

Capítulo

2

Operador de transmutación y polinomios de onda relacionados con la ecuación de Bessel

*The profound study of nature is the most fertile source
of mathematical discoveries.*

Joseph Fourier

En este capítulo mostraremos un operador de transmutación con el cual estudiamos las propiedades del operador $\mathbf{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$, con $l \geq -\frac{1}{2}$, a partir de las propiedades conocidas para el operador $B = \frac{d^2}{dx^2}$. Veremos cuál es una forma integral de tal operador y bajo que condiciones envía soluciones de la ecuación de onda (1.44) en soluciones de la ecuación:

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) U(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

donde $\square := \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $x, t \in (0, b]$, $l \geq -\frac{1}{2}$ real; tales polinomios serán llamados polinomios de onda generalizados.

2.1 Definición del operador que relaciona a \mathbf{L}_0 con B

En esta sección introducimos al operador de transmutación de Poisson-Sonine-Delsarte, el cual ya es muy conocido [12], [64], [65]. Dicho operador lo obtuvimos a partir del Teorema 1.12, el cual es un resultado que aparece en el artículo [64] de S. M. Sitnik. No sólo presentaremos la forma que toma nuestro operador de transmutación, sino que entre otras propiedades presentamos las condiciones bajo las cuales envía soluciones de (1.44), en soluciones de la ecuación (2.1). Tales polinomios son llamados **polinomios de onda generalizados**.

De la segunda igualdad de (1.42) se sigue que:

$$Y_{\nu-\frac{1}{2}} = x^{\nu+\frac{1}{2}} P_\nu. \quad (2.2)$$

De (1.39) y (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} Y_{\nu-\frac{1}{2}} f(x) &= x^{\nu+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2^\nu x^{2\nu} \Gamma(\nu+1)} \int_0^x (x^2 - s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} f(s) ds \right] \\ &= \frac{x^{-\nu+\frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^x (x^2 - s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} f(s) ds, \quad \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tomando a $l = \nu - \frac{1}{2}$, consideremos al operador integral definido en $C([0, b])$:

$$Y_l f(x) = \frac{x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \int_0^x (x^2 - s^2)^l f(s) ds, \quad l \geq -\frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Para nuestros propósitos tomamos $l \geq -\frac{1}{2}$, ya que este operador es válido no solo para estos valores sino para $l > -1$.

Ahora iniciaremos el estudio de nuestro operador de transmutación, el cuál por (1.38) debe satisfacer la siguiente **propiedad de transmutación** para los operadores L_0 y B :

$$L_0 Y_l [f(x)] = Y_l [f''(x)]. \quad (2.4)$$

Pero antes veamos a donde manda el operador Y_l a las potencias de x :

Proposición 2.1. *El operador (2.3) envía a las potencias de x en:*

$$Y_l [x^k] = C_k x^{k+l+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

donde

$$C_k := \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{k+3}{2})}.$$

Demostración: Por definición de Y_l tenemos que:

$$Y_l [x^k] = \frac{x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \int_0^x (x^2 - s^2)^l s^k ds, \quad x > 0, \quad l \geq -\frac{1}{2}.$$

Para resolver esta integral utilizaremos el cambio de variable $s = x \sin \varphi$ y la fórmula 3.642.1 de [26] con $a = b = 1$, así,

$$\begin{aligned} Y_l [x^k] &= \frac{x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x^2 \sin^2 \varphi)^l x^k \sin^k \varphi x \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{x^{k+l+1}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \varphi \cos^{2l+1} \varphi d\varphi \\ &= \frac{x^{k+l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \left[\mathbf{B} \left(\frac{k+1}{2}, l+1 \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{k+3}{2}+l)} x^{k+l+1}. \end{aligned}$$

■

El siguiente es un ejemplo de una función que no satisface la propiedad de transmutación (2.4):

Ejemplo 2.2. Consideremos la función $f(x) = x$, en (2.4) entonces:

$$Y_l B[f(x)] = Y_l \frac{d^2}{dx^2} [x] = Y_l [0] = 0,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_l [f(x)] &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) Y_l [x] = \frac{d^2}{dx^2} Y_l [x] - \frac{l(l+1)}{x^2} Y_l [x] \\ &= \frac{d^2}{dx^2} [C_1 x^{l+2}] - \frac{l(l+1)}{x^2} [C_1 x^{l+2}] \\ &= C_1 [(l+2)(l+1) - l(l+1)] x^l \neq 0, \end{aligned}$$

en la segunda igualdad se utiliza la Proposición 2.1.

Por lo tanto no se satisface la propiedad de transmutación (2.4), es decir nuestro operador no transmuta a la función $f(x) = x$; por lo que nuestro operador no es de transmutación para toda función. ◆

De aquí que nuestra tarea sea ahora investigar bajo que condiciones Y_l es un operador de transmutación, lo cual veremos en la Sección 2.2. Cabe mencionar que en el resultado que aparece en el artículo [64] nunca se menciona que el operador no funcione como transmutación para todas las funciones.

De ahora en adelante para referirnos a que el operador depende de la variable x o de la variable t lo denotaremos como $Y_{l,x}$, $Y_{l,t}$ respectivamente y denotaremos por a a la constante $2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})$:

$$\begin{aligned} Y_{l,x} f(x) &= \frac{x^{-l}}{a} \int_0^x (x^2 - s^2)^l f(s) ds, \\ Y_{l,t} f(t) &= \frac{t^{-l}}{a} \int_0^t (t^2 - s^2)^l f(s) ds. \end{aligned}$$

2.2 Propiedad de transmutación del operador $Y_{l,x}$

En esta sección hemos completado el resultado sobre el operador de transmutación que aparece en el artículo de S. M. Sitnik [64] ya que como vimos en el Ejemplo 2.2, $Y_{l,x}$ no funciona como transmutación para toda función.

Antes de iniciar, realizamos el cambio de variable $s = xz$, $ds = xdz$ a nuestro operador $Y_{l,x}$ para facilitar los cálculos:

$$Y_{l,x} f(x) = \frac{x^{-l+1}}{a} \int_0^1 (x^2 - x^2 z^2)^l f(xz) dz = \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1 - z^2)^l f(xz) dz. \quad (2.6)$$

Estudiando la propiedad (1.38) de operador de transmutación, nos encontramos con que una condición que debe de satisfacer la función f para que se cumpla (2.4) es que f debe ser dos veces continuamente diferenciable con $f'(0) = 0$.

En el siguiente teorema anexamos esta propiedad y mostramos directamente la propiedad de transmutación modificada como se muestra en (2.7).

Teorema 2.3. *Para cualquier $f \in C^2([0, b])$ la siguiente igualdad es válida*

$$\mathbf{L}_0 Y_{l,x}[f(x) - f'(0)x] = Y_{l,x}[f''(x)], \quad \forall x \in [0, b]. \quad (2.7)$$

Demostración: El lado derecho de (2.7) tiene la forma:

$$Y_{l,x}[f''(x)] = \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f''(xz) dz.$$

Luego, el primer término del lado izquierdo de (2.7) es:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x}[f(x)] &= \mathbf{L}_0 \left\{ \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f(xz) dz \right\} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f(xz) dz \right\} - \frac{l(l+1)x^{l-1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f(xz) dz \\ &= \frac{2(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z f'(xz) dz + \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z^2 f''(xz) dz. \end{aligned}$$

El segundo término del lado izquierdo de (2.7) es:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x}[f'(0)x] &= \mathbf{L}_0 \left\{ \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f'(0)xz dz \right\} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{x^{l+2}}{a} f'(0) \int_0^1 (1-z^2)^l z dz \right\} - \frac{l(l+1)x^l f'(0)}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z dz \\ &= \frac{2(l+1)x^l f'(0)}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z dz. \end{aligned}$$

Entonces para la expresión del lado izquierdo de (2.7) tenemos:

$$\mathbf{L}_0 Y_{l,x}[f(x) - f'(0)x] = \frac{2(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z [f'(xz) - f'(0)] dz + \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z^2 f''(xz) dz.$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x}[f(x) - f'(0)x] - Y_{l,x}[f''(x)] &= \frac{2(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z [f'(xz) - f'(0)] dz - \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^{l+1} f''(xz) dz \\ &= \frac{2(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z [f'(xz) - f'(0)] dz \\ &\quad - \frac{x^{l+1}}{a} \left[\frac{(1-z^2)^{l+1}}{x} f'(xz) \Big|_0^1 + \frac{2(l+1)}{x} \int_0^1 (1-z^2)^l z f'(xz) dz \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{x^l}{a} f'(0) \left[-2(l+1) \int_0^1 (1-z^2)^l z dz + 1 \right] = 0$$

donde utilizamos integración por partes y la fórmula 3.251.1 de [26] para encontrar el valor de la última integral.

Por lo tanto, se sigue (2.7). ■

Ahora estamos listos para mencionar algunos ejemplos, en donde utilizaremos las formas recursivas (2.27) y (2.28) de los coeficientes C_{2k} , C_{2k+1} y la Proposición 2.1.

Ejemplo 2.4. a) Para $f(x) = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x} [f(x)] &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) Y_{l,x} [1] = \frac{d^2}{dx^2} Y_{l,x} [x^0] - \frac{l(l+1)}{x^2} Y_{l,x} [x^0] \\ &= \frac{d^2}{dx^2} C_0 x^{l+1} - \frac{l(l+1)}{x^2} C_0 x^{l+1} \\ &= C_0 l(l+1) x^{l-1} - C_0 l(l+1) x^{l-1} = 0, \end{aligned}$$

por otro lado, $Y_{l,x} B [f(x)] = Y_{l,x} \left(\frac{d^2}{dx^2} [1] \right) = Y_{l,x} [0] = 0$.

Por lo tanto, se satisface (2.7). ◆

b) Para $f(x) = x^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x} [f(x)] &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) Y_{l,x} [x^2] = \frac{d^2}{dx^2} Y_{l,x} [x^2] - \frac{l(l+1)}{x^2} Y_{l,x} [x^2] \\ &= \frac{d^2}{dx^2} C_2 x^{l+3} - \frac{l(l+1)}{x^2} C_2 x^{l+3} \\ &= C_2 [(l+3)(l+2) - l(l+1)] x^{l+1}, \end{aligned}$$

por otro lado, $Y_{l,x} B [f(x)] = Y_{l,x} \frac{d^2}{dx^2} [x^2] = Y_{l,x} [2] = 2Y_{l,x} [x^0] = 2C_0 x^{l+1}$.

Luego, $[(l+3)(l+2) - l(l+1)] C_2 = (4l+6) C_2 = (4l+6) \frac{\frac{1}{2} C_0}{(l+\frac{3}{2})} = \frac{2(2l+3)C_0}{2l+3} = 2C_0$.

Utilizando (2.27) se obtiene la segunda igualdad. Por lo tanto se satisface (2.7). ◆

c) Para $f(x) = x^3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x} [f(x)] &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) Y_{l,x} [x^3] = \frac{d^2}{dx^2} Y_{l,x} [x^3] - \frac{l(l+1)}{x^2} Y_{l,x} [x^3] \\ &= \frac{d^2}{dx^2} C_3 x^{l+4} - \frac{l(l+1)}{x^2} C_3 x^{l+4} \\ &= C_3 [(l+4)(l+3) - l(l+1)] x^{l+2}, \end{aligned}$$

por otro lado, $Y_{l,x} B [f(x)] = Y_{l,x} \left(\frac{d^2}{dx^2} [x^3] \right) = Y_{l,x} [6x] = 6Y_{l,x} [x] = 6C_1 x^{l+2}$.

Luego, $[(l+4)(l+3) - l(l+1)]C_3 = 6(l+2)C_3 = \frac{6(l+2)C_1}{l+2} = 6C_1$. Utilizando (2.28) se tiene la segunda igualdad. Por lo tanto se satisface la ecuación (2.7). \blacklozenge

En general la igualdad de operadores (2.4) se satisface para toda $f(x) = x^n$, con $n \neq 1$.

Nuestro siguiente objetivo es usar los polinomios de onda generalizados (1.45) para construir un sistema de soluciones de la ecuación (2.1). Para esto junto con el operador $Y_{l,x}$ consideramos al operador $Y_{l,t}$ (el mismo operador pero con respecto a la variable t), el cual después de realizar el cambio de variables $s = xz$, $ds = xdz$ toma la misma forma que (2.6).

De manera similar al Teorema 2.3 se tiene el siguiente resultado para funciones de dos variables:

Debido al Teorema 2.3 una solución $\omega(x, t)$ de la ecuación de onda se transforma en una solución de (2.1) por la composición de los operadores $Y_{l,x}Y_{l,t}$ siempre que $\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$. Claramente, si esto es cierto, de (2.7) obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.5. Sea $f(x, t) \in C^2([0, b] \times [0, b])$ tal que

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \quad (2.8)$$

Entonces,

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2}\right) Y_{l,x}Y_{l,t}[f(x, t)] = Y_{l,x}Y_{l,t}[\square f(x, t)], \quad (2.9)$$

para todo $x, t \in [0, b]$.

Este teorema se obtiene del Teorema 2.3 para ello solo necesitamos probar la conmutatividad del operador Y_l , es decir: $Y_{l,x}Y_{l,t}f(x, t) = Y_{l,t}Y_{l,x}f(x, t)$

$$\begin{aligned} Y_{l,x}[Y_{l,t}f(x, t)] &= Y_{l,x}\left[\frac{t^{-l}}{a} \int_0^x (t^2 - s^2)^l f(x, s) ds\right] \\ &= \frac{(xt)^{-l}}{a^2} \int_0^x (x^2 - \sigma^2)^l \int_0^t (t^2 - s^2)^l f(\sigma, s) ds d\sigma \\ &= \frac{(tx)^{-l}}{a^2} \int_0^t (t^2 - s^2)^l \int_0^x (x^2 - \sigma^2)^l f(\sigma, s) d\sigma ds \\ &= Y_{l,t}\left[\frac{x^{-l}}{a} \int_0^x (x^2 - \sigma^2)^l f(\sigma, t) d\sigma\right] = Y_{l,t}[Y_{l,x}[f(x, t)]] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Y_{l,x}$ conmuta con $Y_{l,t}$.

Observación 2.6. Si $\omega(x, t) \in C^2([0, b] \times [0, b])$, con $\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, entonces $Y_{l,x}Y_{l,t}$ mapea una solución ω de la ecuación (1.44) en una solución U de la ecuación (2.1).

Por lo tanto $U(x, t) := Y_{l,x}Y_{l,t}[\omega(x, t)]$ es una solución de (2.1).

2.3 Análisis del comportamiento de $Y_{l,x}f$ alrededor de 0

Para analizar el comportamiento asintótico de $Y_{l,x}f$ en 0 tomaremos en cuenta que f es una función diferenciable, $f(0) = a$, $f'(0) = b$, para facilitar la notación denotaremos a nuestro operador como $G_l(x)$, es decir $G_l(x) = Y_{l,x}f(x)$ y estudiaremos los resultados que arrojan $(Y_{l,x}f)(0)$ y $(Y_{l,x}f)'(0)$.

Para $l = 0$ tenemos:

$$G_0(x) = Y_{0,x}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^x (x^2 - s^2)^0 f(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \int_0^x f(s)ds, \quad (2.10)$$

entonces $G_0(0) = Y_{0,x}f(0) = 0$.

Aplicando el teorema del valor medio en (2.10) existe $\xi \in [0, x]$ tal que

$$\int_0^x f(s)ds = xf(\xi) \sim xf(0).$$

Así, para $l = 0$

$$G_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(s)ds \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}xf(0),$$

para x pequeño. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}xf(0) = 0$.

Luego,

$$G'_0(x) = (Y_{0,x}f)'(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(s)ds \right]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(s)ds \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x),$$

entonces, $G'_0(0) = (Y_{0,x}f)'(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$.

Para $l = 1$ tenemos:

$$G_1(x) = Y_{1,x}f(x) = \frac{1}{\sqrt{8}\Gamma(\frac{5}{2})x} \int_0^x (x^2 - s^2) f(s)ds = \frac{x}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(s)ds - \frac{1}{3x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x s^2 f(s)ds.$$

El primer sumando del lado derecho de $G_1(x)$ tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$. Para el segundo utilizaremos la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}x^2 f(x)}{3\sqrt{\pi}} = 0.$$

Luego,

$$G'_1(x) = (Y_{1,x}f)'(x) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^x f(s)ds + \frac{1}{x^2} \int_0^x s^2 f(s)ds \right],$$

el primer sumando del lado derecho de $G'_1(x)$ tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$. Para el segundo utilizamos la regla de L'Hopital:

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0.$$

Ahora, si $l \geq -\frac{1}{2}$ es arbitraria, utilizando el operador (2.6), se sigue que

$$\int_0^1 (1-z^2)^l f(0) dz = f(0) \int_0^1 (1-z^2)^l dz = \frac{f(0) \sqrt{\pi} \Gamma(l+1)}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})},$$

donde utilizamos la fórmula 3.251.1 que aparece en [26]:

$$\int_0^1 x^{\mu-1} (1-x^\lambda)^{\nu-1} dx = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \nu\right), \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0, \lambda > 0$$

en este caso tomamos $\mu = 1$, $\lambda = 2$, $\nu = l + 1$.

Así,

$$G_l(0) = Y_{l,x}f(0) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(l+1) (0)^{l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma^2(l+\frac{3}{2})} f(0), \quad l \geq -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} Y_{l,x}f(x) = 0$, $l \geq -\frac{1}{2}$.

Luego,

$$(Y_{l,x}f)'(x) = \frac{(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f(xz) dz + \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z f'(xz) dz,$$

entonces, basta ver como se comporta la última integral,

$$(Y_{l,x}f)'(0) = \frac{(l+1)(0)^l}{a} f(0) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(l+1)}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})} + \frac{(0)^{l+1}}{a} f'(0) \frac{\Gamma(l+1)}{2\Gamma(l+2)},$$

el valor de las integrales se obtuvieron de la fórmula 3.251.1 de [26], entonces igual que antes $G'_l(0) = (Y_{l,x}f(0))' = 0$, $\forall l > 0$. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} (Y_{l,x}f)'(0) = 0$, $\forall l > 0$.

Para $l = -\frac{1}{2}$,

$$G_{-\frac{1}{2}}(x) = Y_{-\frac{1}{2},x}f(x) = \sqrt{x} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} f(s) ds,$$

realizando el mismo cambio de variables tenemos:

$$G_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} \int_0^1 (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} f(xz) dz.$$

Entonces, $\lim_{x \rightarrow 0} Y_{l,x}f(x) = 0$. Basta checar qué pasa con la integral, por la fórmula 3.251.1 de [26] tenemos:

$$\int_0^1 \frac{f(0)}{\sqrt{1-z^2}} dz = f(0) \int_0^1 (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{f(0)}{2} \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f(0) \frac{\pi}{2}.$$

Así, $G_{-\frac{1}{2}}(0) = Y_{-\frac{1}{2},x}f(0) = \frac{\pi}{4}\sqrt{0}f(0)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} G_{-\frac{1}{2}}(0) = Y_{-\frac{1}{2},x}f(0) = 0.$$

En conclusión, se tiene el siguiente resultado acerca del comportamiento asintótico de $Y_{l,x}$ alrededor de 0.

Proposición 2.7. *Sea $Y_{l,x} : C([0, b]) \rightarrow C([0, b])$ como en (2.6) y $f \in C([0, b])$ entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} Y_{l,x}f(x) &= 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (Y_{l,x}f)'(x) &= 0, \quad \forall l > 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (Y_{0,x}f)'(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0). \end{aligned}$$

2.4 Imágenes bajo la acción de $Y_{l,x}$ de las soluciones de la ecuación de SL regular $v'' + \lambda v = 0$

Considerando que nuestro operador de transmutación (2.3) está relacionado con la ecuación de Bessel

$$-\mathbf{L}_0 u = \lambda u \tag{2.11}$$

donde λ es un número complejo arbitrario y que la solución regular de la ecuación (2.11) que satisface las condiciones asintóticas (1.66) en $x = 0$ está dada por la fórmula

$$u_l(x, \lambda) = \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) 2^{l+\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{2l+1}{4}} \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)$$

donde $\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}$ es la función de Bessel de primer tipo de orden $l + \frac{1}{2}$ definida como en (1.31), una propiedad importante para el operador Y_l consiste en ver a donde son mapeadas las soluciones de la ecuación regular

$$v'' + \lambda v = 0, \tag{2.12}$$

con condiciones iniciales $v_1(0) = 0, v_1'(0) = \sqrt{\lambda}$ y $v_2(0) = 1, v_2'(0) = 0$ tiene soluciones $v_1(x, \lambda) = \sin \sqrt{\lambda}x$ y $v_2(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x$.

Ahora, analizaremos si nuestro operador $Y_{l,x}$ transmuta a las soluciones v de la ecuación regular (2.12) en la solución regular u_l de la ecuación de Bessel (2.11).

Para ello, una manera es hacer uso de las fórmulas de integración:

$$\int_0^b (b^2 - x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2b}{a}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) H_\nu(ab), \quad \text{con } a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \tag{2.13}$$

donde $H_\nu(z)$ son **funciones de Struve** y están dadas por

$$H_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu+1}}{\Gamma(m + \frac{3}{2})\Gamma(\nu + m + \frac{3}{2})}$$

y

$$\int_0^b (b^2 - x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2b}{a}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \mathbf{J}_\nu(ab), \text{ con } a > 0, b > 0, \text{Re}\nu > -\frac{1}{2} \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{J}_\nu(z)$ son **funciones de Bessel**, (2.13) y (2.14) se encuentran en las fórmulas 3.771.6 y 3.771.8 de [26].

De esta manera se tiene que:

$$Y_{l,x}[v_1] = \frac{x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l + \frac{3}{2})} \int_0^x (x^2 - s^2)^l \text{sen } \sqrt{\lambda} s ds = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}{2\Gamma(l + \frac{3}{2})} \lambda^{-\frac{2l+1}{4}} \sqrt{x} H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)$$

y

$$Y_{l,x}[v_2] = \frac{x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l + \frac{3}{2})} \int_0^x (x^2 - s^2)^l \text{cos } \sqrt{\lambda} s ds = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}{2\Gamma(l + \frac{3}{2})} \lambda^{-\frac{2l+1}{4}} \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x).$$

Otra manera es utilizando las series de potencias de las soluciones para la ecuación regular (2.12). Así, veamos a que solución transmuta el operador $Y_{l,x}$ en la solución regular de la ecuación de Bessel (2.11).

Las series de potencias de $v_1(x, \lambda) = \text{sen } \sqrt{\lambda}x$ y de $v_2(x, \lambda) = \text{cos } \sqrt{\lambda}x$ son:

$$\text{sen } \sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad y \quad \text{cos } \sqrt{\lambda}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

respectivamente.

Así,

$$\begin{aligned} Y_{l,x}[\text{cos } \sqrt{\lambda}x] &= Y_{l,x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{(2k)!} \right] \\ &= \frac{x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l + \frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{(2k)!} \int_0^x (x^2 - s^2)^l s^{2k} ds \\ &= \frac{x^{l+1}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l + \frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen }^{2k} \varphi \text{cos}^{2l+1} \varphi d\varphi \\ &= \frac{x^{l+1}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l + \frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{(2k)!} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B}\left(k + \frac{1}{2}, l + 1\right) \right] \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{l}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma(l+1) \sqrt{\pi}}{2\Gamma(l + \frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)^{2k+l+\frac{1}{2}}}{k! \Gamma(l + \frac{1}{2} + k + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sqrt{x}\lambda^{-\frac{2l+1}{4}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}),$$

donde utilizamos el cambio de variables $s = x\text{sen } \varphi$, la fórmula 3.642.1 de [26] con $2\alpha - 1 = 2k$, $2\beta - 1 = 2l + 1$, la propiedad entre la función Beta y Gamma: $\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ y la propiedad de la función Gamma: $\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{(2k)!}{4^k k!} \sqrt{\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

El intercambio entre la serie y la integral se debe a que las series tanto de la función seno como la de la función coseno tienen radio de convergencia infinito y el intervalo de integración $[0, x]$ es cerrado y es tal que está contenido en el círculo de convergencia de las series, entonces tanto la serie del seno como la del coseno convergen uniformemente en $[0, x]$.

Por lo tanto el operador $Y_{l,x}$ transmuta a la función coseno en la solución regular de la ecuación de Bessel salvo una constante multiplicativa:

$$\frac{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)} Y_{l,x} [\cos \sqrt{\lambda x}] = u_l(x, \lambda).$$

Ahora para la segunda solución linealmente independiente obtenemos la relación:

$$\begin{aligned} Y_{l,x} [\text{sen}(\sqrt{\lambda x})] &= Y_{l,x} \left[\sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \\ &= \frac{x^{-l}\sqrt{\lambda}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{(2k+1)!} \int_0^x (x^2 - s^2)^l s^{2k+1} ds \\ &= \frac{x^{l+2}\sqrt{\lambda}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}(-\lambda)^k}{(2k+1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2l+1} \varphi \text{sen}^{2k+1} \varphi d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}x^{l+2}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B}(k+1, l+1) \right] \\ &= \frac{x^{l+2}\sqrt{\lambda}\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{\Gamma(k+l+2)(2k+1)!} \Gamma(k+1) \\ &= \frac{\Gamma(l+1)\sqrt{\pi}x^{l+2}\sqrt{\lambda}}{2^{l+\frac{5}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{2k}}{2^{2k}\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(k+l+2)} \\ &= \frac{\Gamma(l+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})} \lambda^{-\frac{l}{2}-\frac{1}{4}} \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\sqrt{\lambda x}}{2}\right)^{2k+l+\frac{3}{2}}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(k+l+2)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})} \lambda^{-\frac{2l+1}{4}} \sqrt{x} H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}), \end{aligned}$$

donde las $H_{l+\frac{1}{2}}$ son funciones de Struve de orden $l + \frac{1}{2}$, igual que antes utilizamos el cambio de variables $s = x\text{sen } \varphi$, la fórmula 3.642.1 de [26] con $2\alpha - 1 = 2k + 1$ y $2\beta - 1 = 2l + 1$ y las propiedades $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\frac{\Gamma(k+1)}{(2k+1)!} = \frac{\sqrt{\pi}2^{-(2k+1)}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}$.

La función seno no es enviada en la solución regular de la ecuación de Bessel (2.11), ahora quisieramos ver de que ecuación es solución la función $\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})}\lambda^{-\frac{2l+1}{4}}\sqrt{x}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x})$, para ello procedemos de la siguiente manera:

- Utilizando el Teorema 2.3 es fácil verificar que $h(x, \lambda) := Y_{l,x}[\text{sen}(\sqrt{\lambda x})]$ es una solución de la ecuación de Bessel no-homogénea

$$(\mathbf{L}_0 + \lambda) h(x, \lambda) = 2(l + 1)\sqrt{\lambda}C_1x^l.$$

Consideremos la propiedad de transmutación (2.4), como la función $\text{sen}\sqrt{\lambda x}$ no cumple con la propiedad de que $f'(0) = 0$, utilizando la propiedad (2.7) la aplicamos a la función $\text{sen}\sqrt{\lambda x} - \sqrt{\lambda}x$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 Y_{l,x}[\text{sen}\sqrt{\lambda x} - \sqrt{\lambda}x] &= Y_{l,x} \frac{d^2}{dx^2} [\text{sen}\sqrt{\lambda x} - \sqrt{\lambda}x] \\ \mathbf{L}_0 \left\{ Y_{l,x}[\text{sen}\sqrt{\lambda x}] - \sqrt{\lambda}Y_{l,x}[x] \right\} &= Y_{l,x}[-\lambda \text{sen}\sqrt{\lambda x}] \end{aligned}$$

entonces,

$$C \left\{ \mathbf{L}_0 \left[\sqrt{x}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right] + \lambda\sqrt{x}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right\} = \sqrt{\lambda}C_1\mathbf{L}_0[x^{l+2}],$$

donde $C = \frac{\Gamma(l+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(l+\frac{3}{2})}\lambda^{-\frac{2l+1}{4}}$ y C_1 es como en (2.28).

Luego,

$$\sqrt{\lambda}C_1\mathbf{L}_0[x^{l+2}] = 2(l + 1)\sqrt{\lambda}C_1x^l,$$

$$C\mathbf{L}_0\left[\sqrt{x}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x})\right] = C\left[\lambda\sqrt{x}\frac{d^2}{dx^2}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\frac{d}{dx}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x})\right] - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^{\frac{3}{2}}}CH_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}).$$

Así,

$$\begin{aligned} &C \left\{ \mathbf{L}_0 \left[\sqrt{x}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right] + \lambda\sqrt{x}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right\} \\ &= C \left\{ \lambda\sqrt{x}\frac{d^2}{dx^2}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\frac{d}{dx}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \left[\frac{\lambda x^2 - (l + \frac{1}{2})^2}{x^{\frac{3}{2}}} \right] H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) \right\}. \end{aligned}$$

De aquí que, $\lambda\sqrt{x}\frac{d^2}{dx^2}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\frac{d}{dx}H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \left[\frac{(\sqrt{\lambda x})^2 - (l + \frac{1}{2})^2}{x^{\frac{3}{2}}} \right] H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) = \frac{2(l+1)\sqrt{\lambda}C_1}{C}x^l$.

Multiplicando por $x^{\frac{3}{2}}$:

$$\lambda x^2 \frac{d^2}{dx^2} H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \sqrt{\lambda}x \frac{d}{dx} H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \left[(\sqrt{\lambda}x)^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \right] H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) = \frac{2(l+1)\sqrt{\lambda}C_1}{C}x^{l+\frac{3}{2}}.$$

Por último, $\frac{2(l+1)\sqrt{\lambda}C_1}{C}x^{l+\frac{3}{2}} = \frac{4\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)^{l+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(l+1)}$.

Por lo tanto, la función $Y_{l,x} [\text{sen } \sqrt{\lambda x}]$ satisface la ecuación de Bessel no homogénea:

$$(\sqrt{\lambda x})^2 \frac{d^2}{dx^2} H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \sqrt{\lambda x} \frac{d}{dx} H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) + \left[(\sqrt{\lambda x})^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] H_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda x}) = \frac{4 \left(\frac{\sqrt{\lambda x}}{2} \right)^{l+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(l+1)}.$$

2.5 Continuidad del operador $Y_{l,x}$ y su derivada

En esta sección utilizaremos el operador $Y_{l,x}$ en la forma presentada en (2.6).

Proposición 2.8. *El operador $Y_{l,x} : C([0, b]) \rightarrow C([0, b])$ es continuo.*

Demostración: Mostremos que existe una constante $C \geq 0$ tal que $\|Y_{l,x} f(x)\| \leq C \|f\|$ para toda $f \in C([0, b])$.

Sea $f \in C([0, b])$ y $Y_{l,x}$ como en (2.6). Entonces,

$$\begin{aligned} \|Y_{l,x} f(x)\| &\leq \sup_{x \in [0, b]} \left\{ \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 |(1-z^2)^l f(xz)| dz \right\} \\ &\leq \frac{b^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l dz \cdot \max_{x \in [0, b]} |f(xz)| \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi} b^{l+1} \Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma^2(l+\frac{3}{2})} \|f\|. \end{aligned}$$

Si consideramos a $f = 1$, entonces $Y_{l,x}$ alcanza su norma, es decir, $Y_{l,x} [1] = \frac{\sqrt{\pi} b^{l+1} \Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma^2(l+\frac{3}{2})}$.

Donde utilizamos la fórmula 3.251.1 de [26] para encontrar el valor de la integral. ■

Considerando al operador $Y_{l,x}$ como en (2.6), su derivada toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Y_{l,x} &: C^1([0, b]) \rightarrow C([0, b]), \quad l \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{d}{dx} [Y_{l,x} f(x)] &= \frac{(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f(xz) dz + \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z f'(xz) dz. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Proposición 2.9. *El operador $\frac{d}{dx} Y_{l,x} : C^1([0, b]) \rightarrow C([0, b])$ es continuo.*

Demostración: Sean $f \in C([0, b])$ y $\frac{dY_{l,x} f(x)}{dx}$ como en (2.15) entonces,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial Y_{l,x} f(x)}{\partial x} \right\| &\leq \max_{x \in [0, b]} \left| \frac{(l+1)x^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l f(xz) dz \right| + \max_{x \in [0, b]} \left| \frac{x^{l+1}}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l z f'(xz) dz \right| \\ &\leq \frac{(l+1)b^l}{a} \int_0^1 (1-z^2)^l dz \cdot \max_{x \in [0, b]} |f(xz)| + \frac{b^{l+1}}{a} \int_0^1 z (1-z^2)^l dz \cdot \max_{x \in [0, b]} |f'(xz)| \\ &\leq \frac{(l+1)b^l \sqrt{\pi} \Gamma(l+1)}{a \cdot 2\Gamma(l+\frac{3}{2})} \|f\| + \frac{b^{l+1} \Gamma(l+1)}{a \cdot 2\Gamma(l+2)} \|f'\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\pi}b^l\Gamma(l+2)}{2a\Gamma(l+\frac{3}{2})} \|f\| + \frac{b^{l+1}\Gamma(l+1)}{2a\Gamma(l+2)} \|f'\| \\
&\leq C [\|f\| + \|f'\|] = C \|f\|,
\end{aligned}$$

donde $C = \max \left\{ \frac{\sqrt{\pi}b^l\Gamma(l+2)}{2a\Gamma(l+\frac{3}{2})}, \frac{b^{l+1}\Gamma(l+1)}{2a\Gamma(l+2)} \right\}$ y $\|f\|$ es la norma para $C^1([0, b])$. Por lo tanto el operador $\frac{\partial Y_{l,x}f(x)}{\partial x}$ es un operador continuo. Donde utilizamos la fórmula 3.251.1 de [26] para encontrar el valor de las integrales. ■

2.6 El operador inverso

Para encontrar a nuestro operador inverso $Y_{l,x}^{-1}$ necesitamos representar a $Y_{l,x}$ como un operador de Erdélyi-Kober, los cuales son una modificación de las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, ver la Sección 1.6.

El siguiente resultado nos da una representación de $Y_{l,x}$ en términos del operador de Erdélyi-Kober (1.49).

Proposición 2.10. *El operador $Y_{l,x}$ en términos del operador de Erdélyi-Kober tiene la representación*

$$Y_{l,x}f(x) = \frac{\Gamma(l+1)x^{l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} I_{0;2,-\frac{1}{2}}^{l+1} f(x). \quad (2.16)$$

Demostración: Tomando $a = 0$, $\sigma = 2$, $\eta = -\frac{1}{2}$ y $\alpha = l+1$ en (1.49) tenemos:

$$\begin{aligned}
I_{0;2,-\frac{1}{2}}^{l+1} f(x) &= \frac{2x^{-2(l+1-\frac{1}{2})}}{\Gamma(l+1)} \int_0^x (x^2 - s^2)^{l+1-1} s^{2(-\frac{1}{2})+2-1} f(s) ds \\
&= \frac{2x^{-2(l+\frac{1}{2})}}{\Gamma(l+1)} \int_0^x (x^2 - s^2)^l f(s) ds \\
&= \frac{2^{l+\frac{3}{2}}x^{-l-1}\Gamma(l+\frac{3}{2})x^{-l}}{2^{l+\frac{1}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+1)} \int_0^x (x^2 - s^2)^l f(s) ds \\
&= \frac{2^{l+\frac{3}{2}}x^{-l-1}\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+1)} Y_{l,x}f(x).
\end{aligned}$$

Entonces, $Y_{l,x}f(x) = \frac{\Gamma(l+1)x^{l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})} I_{0;2,-\frac{1}{2}}^{l+1} f(x)$. ■

La correspondiente expresión para el operador inverso está dada por (1.57), utilizando (1.50) tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.11. *Sea n un entero arbitrario que satisface $n > l+1$. Entonces el operador inverso de $Y_{l,x}$ puede tomarse en la forma*

$$Y_{l,x}^{-1}f(x) = \frac{2^{l+\frac{5}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})x}{\Gamma(l+1)\Gamma[-(l+1)+n]} \left(\frac{d}{2xdx} \right)^n \int_0^x (x^2 - s^2)^{-(l+2)+n} s^{l+1} f(s) ds. \quad (2.17)$$

Demostración: De (1.50) y (1.57) se sigue que:

$$(I_{a+;\sigma,\eta}^\alpha)^{-1} f(x) = x^{-\sigma(-\alpha+\eta)} \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n x^{\sigma(-\alpha+n+\eta)} I_{a+;\sigma,\eta+\alpha}^{-\alpha+n} f(x), \quad \alpha > -n \quad (2.18)$$

Por lo que considerando los valores: $\alpha_1 = -\alpha = -(l+1)$ y $\eta_1 = \eta + \alpha = l + \frac{1}{2}$, el inverso resulta:

$$\begin{aligned} I_{0+;2,l+\frac{1}{2}}^{-(l+1)} f(x) &= x^{-2[-(l+1)+(l+\frac{1}{2})]} \left(\frac{d}{2x dx} \right)^n x^{2[-(l+1)+n+(l+\frac{1}{2})]} I_{0;2,l+\frac{1}{2}}^{-(l+1)+n} f(x) \\ &= x \left(\frac{d}{2x dx} \right)^n \frac{x^{2[n-\frac{1}{2}]} 2x^{-2[-(l+1)+n+(l+\frac{1}{2})]}}{\Gamma[-(l+1)+n]} \int_0^x (x^2 - s^2)^{[-(l+1)+n]-1} s^{2(l+\frac{1}{2})+2-1} f(s) ds \\ &= x \left(\frac{d}{2x dx} \right)^n \frac{2}{\Gamma[-(l+1)+n]} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-(l+2)+n} s^{2(l+1)} f(s) ds. \end{aligned}$$

Luego, sabemos que si $Y = DE$ entonces $Y^{-1} = E^{-1}D^{-1}$; de aquí que para $n > l + 1$:

$$\begin{aligned} Y_{l,x}^{-1} f(x) &= \frac{2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2}) x}{\Gamma(l+1) \Gamma[-(l+1)+n]} \left(\frac{d}{2x dx} \right)^n \int_0^x (x^2 - s^2)^{-(l+2)+n} s^{2(l+1)} s^{-(l+1)} f(s) ds \\ &= \frac{2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2}) x}{\Gamma(l+1) \Gamma[-(l+1)+n]} \left(\frac{d}{2x dx} \right)^n \int_0^x (x^2 - s^2)^{-(l+2)+n} s^{l+1} f(s) ds. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora mostraremos algunos de los ejemplos del operador $Y_{l,x}^{-1}$ donde utilizaremos la forma de los polinomios de onda generalizados dada en (2.21):

Ejemplo 2.12. Para $n = 2$, y $l = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} Y_{\frac{1}{2},x}^{-1} f(x) &= \frac{2^3 \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} x \left(\frac{d}{2x dx} \right)^2 \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{3}{2}} f(s) ds \\ &= \frac{16}{\pi} x \left(\frac{d}{2x dx} \right)^2 \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{3}{2}} f(s) ds. \end{aligned}$$

a) De la representación para $U_0(x, t)$ tenemos que $U_0(x, t) = C_0^2 x^{l+1} t^{l+1} = C_0^2 x^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}$ con $C_0 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma^2(l+\frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2})}{2^2 \Gamma^2(2)} = \frac{\pi}{8}$, de aquí que $C_0^2 = \frac{\pi^2}{64}$. Luego,

$$\begin{aligned} Y_{\frac{1}{2},t}^{-1} Y_{\frac{1}{2},x}^{-1} [C_0^2 x^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}] &= C_0^2 Y_{\frac{1}{2},x}^{-1} [x^{\frac{3}{2}}] Y_{\frac{1}{2},t}^{-1} [t^{\frac{3}{2}}] \\ &= C_0^2 \left[\frac{16}{\pi} x \left(\frac{d}{2x dx} \right)^2 \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^3 ds \right] \left[\frac{16}{\pi} t \left(\frac{d}{2t dt} \right)^2 \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^3 ds \right] \\ &= 4 \left[x \left(\frac{d}{2x dx} \right)^2 \left(\frac{1}{2} x^{2(\frac{1}{2})+2(2)-2} \mathbf{B} \left(\frac{1}{2}, 2 \right) {}_1\mathbf{F}_2 \left(2; \frac{1}{2}, \frac{5}{2}; 0 \right) \right) \right] \\ &\quad \times \left[t \left(\frac{d}{2t dt} \right)^2 \left(\frac{1}{2} t^{2(\frac{1}{2})+2(2)-2} \mathbf{B} \left(\frac{1}{2}, 2 \right) {}_1\mathbf{F}_2 \left(2; \frac{1}{2}, \frac{5}{2}; 0 \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= 4 \left[x \left(\frac{1}{2x} \right) \right] \left[t \left(\frac{1}{2t} \right) \right] = 4 \left(\frac{1}{4} \right) = p_0(x, t).$$

b) De la representación para $U_3(x, t) = C_0 C_2 [t^{l+1} x^{l+3} + t^{l+3} x^{l+1}] = C_0 C_2 [t^{\frac{3}{2}} x^{\frac{7}{2}} + t^{\frac{7}{2}} x^{\frac{3}{2}}]$, con $C_0 C_2 = \frac{\pi}{8} \frac{\frac{1}{2} C_0}{(l+\frac{3}{2})} = (\frac{\pi}{8}) (\frac{1}{4}) C_0 = (\frac{\pi}{8}) (\frac{1}{4}) (\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi^2}{256}$, tenemos

$$\begin{aligned} Y_{\frac{1}{2}, t}^{-1} Y_{\frac{1}{2}, x}^{-1} [C_0 C_2 (t^{\frac{3}{2}} x^{\frac{7}{2}} + t^{\frac{7}{2}} x^{\frac{3}{2}})] &= C_0 C_2 (Y_{\frac{1}{2}, t}^{-1} [t^{\frac{3}{2}}] Y_{\frac{1}{2}, x}^{-1} [x^{\frac{7}{2}}] + Y_{\frac{1}{2}, t}^{-1} [t^{\frac{7}{2}}] Y_{\frac{1}{2}, x}^{-1} [x^{\frac{3}{2}}]) \\ &= \left[t \left(\frac{d}{2tdt} \right)^2 \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^3 ds \right] \left[x \left(\frac{d}{2xdx} \right)^2 \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^5 ds \right] \\ &\quad + \left[t \left(\frac{d}{2tdt} \right)^2 \int_0^t (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^5 ds \right] \left[x \left(\frac{d}{2xdx} \right)^2 \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} s^3 ds \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \right] [2x^2] + [2t^2] \left[\frac{1}{2} \right] = x^2 + t^2 = p_3(x, t), \end{aligned}$$

donde ${}_1\mathbf{F}_2(a_1; b_1, b_2; z)$ es la función hipergeométrica. Para calcular las integrales de este ejemplo, hicimos uso de la fórmula 3.771.4 de [26]. \blacklozenge

Ejemplo 2.13. Para $n = 3$ y $l = 1$.

$$\begin{aligned} Y_{1,x}^{-1} f(x) &= 6\sqrt{2\pi}x \left(\frac{d}{2xdx} \right)^3 \int_0^x s^2 f(s) ds, \\ Y_{1,t}^{-1} f(t) &= 6\sqrt{2\pi}t \left(\frac{d}{2tdt} \right)^3 \int_0^t s^2 f(s) ds. \end{aligned}$$

a) De la representación para U_0 tenemos que $U_0(x, t) = C_0^2 x^{l+1} t^{l+1} = C_0^2 x^2 t^2$, con $C_0 = \frac{4}{9\sqrt{2\pi}}$, de aquí que $C_0^2 = \frac{8}{81\pi}$. Luego,

$$\begin{aligned} Y_{1,t}^{-1} Y_{1,x}^{-1} [C_0^2 x^2 t^2] &= Y_{1,t}^{-1} [C_0^2 Y_{1,x}^{-1} [x^2] t^2] = C_0^2 Y_{1,x}^{-1} [x^2] Y_{1,t}^{-1} [t^2] \\ &= C_0^2 \left[6\sqrt{2\pi}x \left(\frac{d}{2xdx} \right)^3 \int_0^x s^4 ds \right] \left[6\sqrt{2\pi}t \left(\frac{d}{2tdt} \right)^3 \int_0^t s^4 ds \right] \\ &= \frac{81\pi}{8} C_0^2 = 1 = p_0(x, t). \end{aligned}$$

b) De la representación para $U_3(x, t) = C_0 C_2 [x^{l+3} t^{l+1} + x^{l+1} t^{l+3}] = C_0 C_2 [x^4 t^2 + x^2 t^4]$, con $C_2 = \frac{4}{45\sqrt{2\pi}}$, de aquí que $C_0 C_2 = \frac{8}{405\pi}$. Luego,

$$\begin{aligned} Y_{1,t}^{-1} Y_{1,x}^{-1} [C_0 C_2 (x^4 t^2 + x^2 t^4)] &= C_0 C_2 Y_{1,t}^{-1} [Y_{1,x}^{-1} [x^4] t^2 + Y_{1,x}^{-1} [x^2] t^4] \\ &= C_0 C_2 \{ Y_{1,x}^{-1} [x^4] Y_{1,t}^{-1} [t^2] + Y_{1,x}^{-1} [x^2] Y_{1,t}^{-1} [t^4] \} \\ &= C_0 C_2 \left[6\sqrt{2\pi}x \left(\frac{d}{2xdx} \right)^3 \int_0^x s^6 ds \right] \left[6\sqrt{2\pi}t \left(\frac{d}{2tdt} \right)^3 \int_0^t s^4 ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +C_0C_2 \left[6\sqrt{2\pi}x \left(\frac{d}{2xdx} \right)^3 \int_0^x s^4 ds \right] \left[6\sqrt{2\pi}t \left(\frac{d}{2tdt} \right)^3 \int_0^t s^6 ds \right] \\
 & = \left[\frac{3240\pi}{64} \right] \left[\frac{8}{405\pi} \right] (x^2 + t^2) = x^2 + t^2 = p_3(x, t). \quad \blacklozenge
 \end{aligned}$$

2.7 Polinomios de onda generalizados

Considerando la ecuación (1.44) y la ecuación (2.1), por la Observación 2.6 del Teorema 2.5 sabemos que podemos pasar de la solución ω a la solución U aplicando el operador $Y_{l,x}Y_{l,t}$ a ω tal que $\omega(x, t) \in C^2([0, b] \times [0, b])$ con $\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$.

En el siguiente resultado establecemos cuáles son aquellos polinomios $p_m(x, t)$ que satisfacen el Teorema 2.5:

Teorema 2.14. *Los polinomios en (1.45) que satisfacen (2.8) son aquellos tales que $m = 0$ o $m = 4n - 1$.*

Demostración: Claramente $p_0((x, t) \in C^2([0, b] \times [0, b])$ y $\frac{\partial p_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$.

En general, para m impar la derivada con respecto a x es de la forma:

$$\frac{\partial p_m(x, t)}{\partial x} = \sum_{\substack{k \\ \text{par}=0}}^{\frac{m+1}{2}} \left[\frac{m+1}{2} - k \right] \binom{\frac{m+1}{2}}{k} x^{\frac{m+1}{2}-k-1} t^k.$$

Como $m = 2N - 1$ tenemos dos casos:

1. $N = 2n$, $n = 1, 2, \dots$ entonces $x^{\frac{4n-1+1}{2}-k-1} = x^{2n-k-1} = x^\alpha$, $\alpha > 0$.

Como $k = 0, 2, 4, \dots$, entonces $x^\alpha\Big|_{x=0} = 0$, de aquí que cuando $m = 4n - 1$ se tiene que $\frac{\partial p_m(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$.

2. $N = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots$ entonces $x^{\frac{4n-3+1}{2}-k-1} = x^{2n-k-2}$. Luego $2n - k - 2 = 0$ cuando $n = 1, k = 0$, así $x^0\Big|_{x=0} \neq 0$.

Por lo tanto, no satisfacen que $\frac{\partial p_m(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$.

Para m impar la derivada con respecto a t es:

$$\frac{\partial p_m(x, t)}{\partial t} = \sum_{\substack{k \\ \text{par}=0}}^{\frac{m+1}{2}} k \binom{\frac{m+1}{2}}{k} x^{\frac{m+1}{2}-k} t^{k-1}.$$

Luego, $k - 1 = 0$ implica que $k = 1$ lo cual es imposible ya que $k = 2N$. Entonces, $t^{2N-1} = t^\alpha$, $\alpha > 0$. De aquí que $t^\alpha\Big|_{t=0} = 0$.

Por lo tanto, los polinomios $p_m(x, t)$ con m impar satisfacen la propiedad de transmutación si y sólo si $m = 4n - 1$.

Ahora, verifiquemos este resultado para m par.

La derivada con respecto a x para m par es de la forma:

$$\frac{\partial p_m(x, t)}{\partial x} = \sum_{k \text{ impar}=1}^{\frac{m}{2}} \left[\frac{m}{2} - k \right] \binom{\frac{m}{2}}{k} x^{\frac{m}{2}-k-1} t^k.$$

Como $m = 2N$ tenemos dos casos:

1. $N = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ entonces $x^{\frac{4n}{2}-k-1} = x^{2n-k-1}$. El exponente $2n - k - 1 = 0$ cuando $n = 1$ y $k = 1$, de aquí que $x^0 \Big|_{x=0} \neq 0$. Por lo tanto, no satisfacen que $\frac{\partial p_m(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$.
2. $N = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots$ entonces $x^{\frac{4n-2}{2}-k-1} = x^{2n-k-2} = x^\alpha$, $\alpha > 0$. Como $k = 1, 2, 3, \dots$, $x^\alpha \Big|_{x=0} = 0$. Por lo tanto, satisfacen que $\frac{\partial p_m(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$.

Para m par la derivada con respecto a t es:

$$\frac{\partial p_m(x, t)}{\partial t} = \sum_{k \text{ impar}=1}^{\frac{m}{2}} k \binom{\frac{m}{2}}{k} x^{\frac{m}{2}-k} t^{k-1}.$$

Luego, $k - 1 = 0$ implica que $k = 1$, de aquí que $t^0 \Big|_{t=0} \neq 0$. Por lo tanto, para m par los $p_m(x, t)$ no satisfacen que su derivada en cero sea cero.

Por lo tanto, los únicos $p_m(x, t)$ que satisfacen la ecuación son aquellos con $m = 0$ o $m = 4n - 1$. ■

Observación 2.15. *Los únicos polinomios $p_m(x, t)$ que satisfacen la condición $\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ son aquellos con potencia par tanto en x como en t , con m impar tal que $m = 4n - 1$ y son de la forma*

$$p_0(x, t) = 1, \quad \text{y} \quad p_{4n-1}(x, t) = \sum_{k \text{ par}=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{2n-k} t^k, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

Ahora, tomando en cuenta la Observación 2.6 y que los polinomios de onda (1.45) son solución de (1.44), o bien la Observación 2.15 encontremos los polinomios U_{4n-1} los cuáles son solución de la ecuación (2.1):

$$U_0(x, t) = Y_{l,x} Y_{l,t} [p_0(x, t)] = Y_{l,x} Y_{l,t} [1] = Y_{l,x} Y_{l,t} [x^0 t^0] = Y_{l,x} [x^0] Y_{l,t} [t^0] = C_0^2 x^{l+1} t^{l+1} \quad (2.20)$$

donde $C_0 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})}$. Claramente $U_0(x, t)$ satisface (2.1).

Similarmente,

$$\begin{aligned}
 U_3(x, t) &= Y_{l,x}Y_{l,t}[p_3(x, t)] = Y_{l,x}Y_{l,t}[x^2 + t^2] \\
 &= Y_{l,x}Y_{l,t}[x^2t^0] + Y_{l,x}Y_{l,t}[x^0t^2] \\
 &= Y_{l,x}[x^2]Y_{l,t}[t^0] + Y_{l,x}[x^0]Y_{l,t}[t^2] \\
 &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(l+1)x^{l+3}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{5}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)t^{l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)x^{l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(l+1)t^{l+3}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{5}{2})} \\
 &= C_0C_2[t^{l+1}x^{l+3} + t^{l+3}x^{l+1}], \\
 U_7(x, t) &= Y_{l,x}Y_{l,t}[p_7(x, t)] = Y_{l,x}Y_{l,t}[x^4 + 6x^2t^2 + t^4] \\
 &= Y_{l,x}Y_{l,t}[x^4t^0] + 6Y_{l,x}Y_{l,t}[x^2t^2] + Y_{l,x}Y_{l,t}[x^0t^4] \\
 &= Y_{l,x}[x^4]Y_{l,t}[t^0] + 6Y_{l,x}[x^2]Y_{l,t}[t^2] + Y_{l,x}[x^0]Y_{l,t}[t^4] \\
 &= \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(l+1)x^{l+5}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{7}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)t^{l+1}}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})} + 6\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma^2(l+1)x^{l+3}t^{l+3}}{2^{2(l+\frac{3}{2})}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})\Gamma^2(l+\frac{5}{2})} \\
 &\quad + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})}x^{l+1}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{7}{2})}t^{l+5} \\
 &= C_0C_4x^{l+5}t^{l+1} + 6C_2^2x^{l+3}t^{l+3} + C_0C_4x^{l+1}t^{l+5},
 \end{aligned}$$

donde $C_2 = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{5}{2})}$ y $C_4 = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{7}{2})}$.

Ambos polinomios $U_3(x, t)$ y $U_7(x, t)$ satisfacen (2.1).

En general los $U_{4n-1}(x, t)$ que satisfacen la ecuación (2.1), son de la forma:

$$\begin{aligned}
 U_{4n-1}(x, t) = Y_{l,x}Y_{l,t}[p_{4n-1}(x, t)] &= Y_{l,x}Y_{l,t}\left[\sum_{\substack{2n \\ k \text{ par}=0}} \binom{2n}{k} x^{2n-k}t^k\right] \\
 &= \sum_{\substack{2n \\ k \text{ par}=0}} \binom{2n}{k} Y_{l,x}[x^{2n-k}]Y_{l,t}[t^k] \\
 &= \sum_{\substack{2n \\ k \text{ par}=0}} \binom{2n}{k} C_{2n-k}x^{2n-k+l+1}C_kt^{k+l+1} \\
 &= \sum_{\substack{2n \\ k \text{ par}=0}} C_{n,k}x^{2n-k+l+1}t^{k+l+1} \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

donde C_{2n-k}, C_k son las constantes que aparecen en la Proposición 2.1 y

$$C_{n,k} := \binom{2n}{k} \frac{\Gamma^2(l+1)\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(n+\frac{1-k}{2})}{2^{2l+3}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{k+3}{2})\Gamma(n+l+\frac{3-k}{2})}.$$

Las imágenes de los polinomios de onda bajo la acción del operador $Y_{l,x}Y_{l,t}$ son llamadas **polinomios de onda generalizados** relacionados a la ecuación (2.1).

De aquí que se satisface la siguiente:

Proposición 2.16. *Los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t)$ y $U_{4n-1}(x, t)$ satisfacen la ecuación (2.1).*

Demostración: Como se mencionó anteriormente, se puede ver fácilmente que $U_0(x, t)$ satisface la ecuación (2.1). Considerando la forma general de los polinomios de onda generalizados (2.21) mostremos que satisfacen la ecuación (2.1).

Consideremos el término k -ésimo:

$$\binom{2n}{k} \frac{\Gamma(n + \frac{1-k}{2})\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma^2(l+1)}{2^{2(l+\frac{3}{2})}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})\Gamma(n+l+\frac{3-k}{2})\Gamma(l+\frac{k+3}{2})} x^{2n-k+l+1} t^{k+l+1}. \quad (2.22)$$

Cálculando el término $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)$ se tiene

$$\binom{2n}{k} \frac{\Gamma(n + \frac{1-k}{2})\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma^2(l+1) [(2n-k+l+1)(2n-k+l) - l(l+1)]}{2^{2(l+\frac{3}{2})}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})\Gamma(n+l+\frac{3-k}{2})\Gamma(l+\frac{k+3}{2})} x^{2n-k+l-1} t^{k+l+1}. \quad (2.23)$$

Para calcular la parte con respecto a t , esto es $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{t^2}\right)$ consideremos el término que tenga los mismos exponentes que aparecen en (2.23) para x y para t , tal término del polinomio es aquel que tiene potencias $x^{2n-k+l-1} t^{k+l+3}$. Así, al calcular el término con respecto a t , se obtiene la siguiente expresión,

$$\binom{2n}{k} \frac{\Gamma(n + \frac{1-k}{2} - 1)\Gamma(\frac{k+1}{2} + 1)\Gamma^2(l+1) [(k+l+3)(k+l+2) - l(l+1)]}{2^{2(l+\frac{3}{2})}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})\Gamma(n+l+\frac{3-k}{2} - 1)\Gamma(l+\frac{k+3}{2} + 1)} x^{2n-k+l-1} t^{k+l+1}. \quad (2.24)$$

Luego, haciendo uso de la definición de las combinaciones y la propiedad de la función Gamma $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ podemos reescribir (2.23) y (2.24). Después al simplificar los términos

$$[(2n-k+l+1)(2n-k+l) - l(l+1)] \quad \text{y} \quad [(k+l+3)(k+l+2) - l(l+1)]$$

se sigue la igualdad $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{t^2}\right)$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Los coeficientes que aparecen en los polinomios $U_{4n-1}(x, t)$ y son dados por la Proposición 2.1 se relacionan de la siguiente manera:

$$C_0 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma^2(l+\frac{3}{2})}, \quad C_2 = \frac{\frac{1}{2}C_0}{(l+\frac{3}{2})}, \quad C_4 = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{2}C_0}{(l+\frac{5}{2})(l+\frac{3}{2})}, \quad C_6 = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{2}C_0}{(l+\frac{7}{2})(l+\frac{5}{2})(l+\frac{3}{2})},$$

$$C_8 = \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{2}C_0}{(l+\frac{9}{2})(l+\frac{7}{2})(l+\frac{5}{2})(l+\frac{3}{2})}, \dots \quad \text{en general,} \quad C_{2k} = \frac{\binom{2k-1}{2} \dots \binom{1}{2} C_0}{(l+\frac{2k+1}{2}) \dots (l+\frac{3}{2})}, \quad k = 1, 2, \dots \text{ o bien}$$

$$C_{2k} = \frac{\prod_{j=1}^k \binom{2j-1}{2} C_0}{\prod_{j=1}^k \left(l + \frac{2j+1}{2}\right)} \quad (2.25)$$

De la Definición 1.20, (2.25) puede escribirse como:

$$C_{2k} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k C_0}{\left(l + \frac{3}{2}\right)_k} \quad (2.26)$$

Reescribiendo los coeficientes C_n anteriores de forma recursiva tenemos:

$$C_2 = \frac{\frac{1}{2}C_0}{\left(l + \frac{3}{2}\right)}, \quad C_4 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)C_2}{\left(l + \frac{5}{2}\right)}, \quad C_6 = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)C_4}{\left(l + \frac{7}{2}\right)}, \quad C_8 = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)C_6}{\left(l + \frac{9}{2}\right)},$$

en general,

$$C_{2k} = \frac{\left(\frac{2k-1}{2}\right) C_{2(k-1)}}{\left(l + \frac{2k+1}{2}\right)}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

El siguiente es un ejemplo en el que se ilustra que la ecuación (2.1) se satisface.

Ejemplo 2.17. $U_7(x, t) = C_0 C_4 x^{l+5} t^{l+1} + 6C_2^2 x^{l+3} t^{l+3} + C_0 C_4 x^{l+1} t^{l+5}$ *satisface la ecuación (2.1).*

$$\begin{aligned} \partial_x U_7(x, t) &= C_0 C_4 (l+5) t^{l+1} x^{l+4} + 6C_2^2 (l+3) t^{l+3} x^{l+2} + C_0 C_4 (l+1) t^{l+5} x^l, \\ \partial_x^2 U_7(x, t) &= C_0 C_4 (l+5)(l+4) t^{l+1} x^{l+3} + 6C_2^2 (l+3)(l+2) t^{l+3} x^{l+1} + C_0 C_4 (l+1) t^{l+5} x^{l-1}, \\ \frac{l(l+1)}{x^2} U_7(x, t) &= C_0 C_4 l(l+1) t^{l+1} x^{l+3} + 6C_2^2 l(l+1) t^{l+3} x^{l+1} + C_0 C_4 l(l+1) t^{l+5} x^{l-1}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) U_7(x, t) &= C_0 C_4 (l+5)(l+4) t^{l+1} x^{l+3} + 6C_2^2 (l+3)(l+2) t^{l+3} x^{l+1} \\ &\quad + C_0 C_4 l(l+1) t^{l+5} x^{l-1} - C_0 C_4 l(l+1) t^{l+1} x^{l+3} \\ &\quad - 6C_2^2 l(l+1) t^{l+3} x^{l+1} - C_0 C_4 l(l+1) t^{l+5} x^{l-1} \\ &= C_0 C_4 ((l+5)(l+4) - l(l+1)) t^{l+1} x^{l+3} \\ &\quad + 6C_2^2 ((l+3)(l+2) - l(l+1)) t^{l+3} x^{l+1} \end{aligned}$$

por lo que necesitamos que $C_0 C_4 ((l+5)(l+4) - l(l+1)) = 6C_2^2 ((l+3)(l+2) - l(l+1))$, esto se puede verificar utilizando (2.26) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_0 C_4 ((l+5)(l+4) - l(l+1)) &= \frac{3C_0^2 [8l+20]}{4 \left(l + \frac{3}{2}\right) \left(l + \frac{5}{2}\right)} = \frac{6C_0^2 \left(l + \frac{5}{2}\right)}{\left(l + \frac{3}{2}\right) \left(l + \frac{5}{2}\right)} = \frac{6C_0^2}{l + \frac{3}{2}} \\ &= \frac{6C_0^2 \left(l + \frac{3}{2}\right)}{\left(l + \frac{3}{2}\right) \left(l + \frac{3}{2}\right)} = \frac{6C_0^2 [4l+6]}{4 \left(l + \frac{3}{2}\right)^2} = 6C_2^2 ((l+3)(l+2) - l(l+1)). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \partial_t U_7(x, t) &= C_0 C_4 (l+1) t^l x^{l+5} + 6C_2^2 (l+3) t^{l+2} x^{l+3} + C_0 C_4 (l+5) t^{l+4} x^{l+1} \\ \partial_t^2 U_7(x, t) &= C_0 C_4 l(l+1) t^{l-1} x^{l+5} + 6C_2^2 (l+3)(l+2) t^{l+1} x^{l+3} + C_0 C_4 (l+5)(l+4) t^{l+3} x^{l+1} \\ \frac{l(l+1)}{t^2} U_7(x, t) &= l(l+1) C_0 C_4 t^{l-1} x^{l+5} + 6C_2^2 l(l+1) t^{l+1} x^{l+3} + C_0 C_4 l(l+1) t^{l+3} x^{l+1} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\left(-\partial_t^2 + \frac{l(l+1)}{t^2}\right) U_7(x, t) &= -C_0 C_4 l(l+1) t^{l-1} x^{l+5} - 6C_2^2 (l+3)(l+2) t^{l+1} x^{l+3} \\
&\quad - C_0 C_4 (l+5)(l+4) t^{l+3} x^{l+1} + l(l+1) C_0 C_4 t^{l-1} x^{l+5} \\
&\quad + 6C_2^2 l(l+1) t^{l+1} x^{l+3} + C_0 C_4 l(l+1) t^{l+3} x^{l+1} \\
&= (-6C_2^2 (l+3)(l+2) + 6C_2^2 l(l+1)) t^{l+1} x^{l+3} \\
&\quad + C_0 C_4 (-(l+5)(l+4) + l(l+1) t^{l+3} x^{l+1}),
\end{aligned}$$

por lo que necesitamos que: $C_0 C_4 (l(l+1) - (l+5)(l+4)) = 6C_2^2 (l(l+1) - (l+3)(l+2))$, usando (2.26) vemos que:

$$C_0 C_4 (l(l+1) - (l+5)(l+4)) = \frac{-6C_0^2 (l + \frac{3}{2})}{(l + \frac{3}{2})(l + \frac{3}{2})} = \frac{6C_0^2 [-4l - 6]}{4(l + \frac{3}{2})^2} = 6C_2^2 (l(l+1) - (l+3)(l+2)).$$

De aquí que $U_7(x, t)$ satisface la ecuación (2.1). ◆

Como en algunos ejemplos hemos utilizado los coeficientes que acompañan a potencias impares de x mencionaremos la forma que toman las imágenes de los polinomios de onda que no satisfacen la propiedad (2.7) y la relación que existe entre sus coeficientes.

Notemos que para los polinomios p_{4n} , p_{4n-2} y p_{4n-3} , los cuáles no satisfacen las condiciones requeridas para cumplir con la propiedad de transmutación (2.7) por el Teorema 2.14, bajo la acción del operador $Y_{l,x} Y_{l,t}$ tienen como imágenes a:

$$\begin{aligned}
U_{4n}(x, t) &= \sum_{k \text{ impar}=1}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{\Gamma(n + \frac{1-k}{2}) \Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma^2(l+1) x^{2n-k+l+1} t^{k+l+1}}{2^{2(l+\frac{3}{2})} \Gamma^2(l + \frac{3}{2}) \Gamma(n+l + \frac{3-k}{2}) \Gamma(l + \frac{k+3}{2})} \\
U_{4n-2}(x, t) &= \sum_{k \text{ impar}=1}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \frac{\Gamma(n - \frac{k}{2}) \Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma^2(l+1) x^{2n-k+l} t^{k+l+1}}{2^{2(l+\frac{3}{2})} \Gamma^2(l + \frac{3}{2}) \Gamma(n - \frac{k}{2} + l + 1) \Gamma(l + \frac{k+3}{2})} \\
U_{4n-3}(x, t) &= \sum_{k \text{ par}=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \frac{\Gamma(n - \frac{k}{2}) \Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma^2(l+1) x^{2n-k+l} t^{k+l+1}}{2^{2(l+\frac{3}{2})} \Gamma^2(l + \frac{3}{2}) \Gamma(n - \frac{k}{2} + l + 1) \Gamma(l + \frac{k+3}{2})},
\end{aligned}$$

respectivamente y por lo tanto no son soluciones para la ecuación (2.1). A tales polinomios los acompañan los siguientes coeficientes, los cuales se relacionan de la siguiente manera:

$$C_1 = \frac{\Gamma(1)\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+2)}, \quad C_3 = \frac{C_1}{l+2}, \quad C_5 = \frac{2C_3}{l+3}, \quad C_7 = \frac{3C_5}{l+4}, \quad C_9 = \frac{4C_7}{l+5}, \quad C_{11} = \frac{5C_9}{l+6},$$

en general,

$$C_{2k+1} = \frac{kC_{2k-1}}{(l+k+1)}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

Capítulo

3

Serie de potencias del parámetro espectral para un sistema de ecuaciones de Bessel

However varied may be the imagination of man, nature is still a thousand times richer. . . . Each of the theories of physics . . . presents (partial differential) equations under a new aspect . . . without these theories, we should not know partial differential equations.

Henri Poincaré

La **representación en series de potencias del parámetro espectral SPPS** para soluciones de ecuaciones de Sturm-Liouville es una herramienta práctica y eficiente para resolver problemas espectrales y de dispersión. Se basa en un cálculo de **integrales recursivas**, a veces llamadas **potencias formales**. Originalmente el método SPPS en un primer paso requiere de construir una **solución particular** no nula (en general, complejo valuada) correspondiente al valor cero del parámetro espectral.

En este capítulo obtenemos una representación en series de potencias del parámetro espectral (SPPS) para una solución regular del sistema de ecuaciones de Sturm-Liouville tipo Bessel perturbadas

$$\begin{cases} V'' - \frac{2(l+1)}{x}V' + \frac{2(l+1)}{x^2}V - q(x)V = 2\lambda W' \\ W'' + \frac{2(l+1)}{x}W' - q(x)W = 2\lambda V' \end{cases}, \quad (3.1)$$

donde l es un número real, $l \geq -\frac{1}{2}$, q es una función continua a valores complejos en $(0, b]$ y λ es un parámetro espectral complejo.

3.1 Polinomios de onda generalizados

En esta sección utilizaremos la propiedad del mapeo (1.79) del operador \mathbf{T} definido en (1.81) para encontrar a los polinomios de onda generalizados que son solución de la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x) \right) u(x, t) = 0. \quad (3.2)$$

Esta ecuación diferencial parcial generaliza a aquella que surge en relación con el núcleo de transmutación en el caso de una ecuación regular de Schrödinger uno-dimensional.

Reescribiendo nuestros polinomios de onda generalizados (2.20) y (2.21) del Capítulo 2 tenemos:

$$U_0(x, t) = \frac{C^2 \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(l + \frac{3}{2}\right)} x^{l+1} t^{l+1},$$

$$U_{4n-1}(x, t) = C^2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2} - k\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + l + \frac{3}{2} - k\right) \Gamma\left(l + k + \frac{3}{2}\right)} x^{2n-2k+l+1} t^{2k+l+1},$$

$$\text{con } C = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}.$$

De aquí que por (1.79) obtenemos los nuevos polinomios para la ecuación (3.2) los cuales llamaremos **polinomios de onda generalizados** y son:

$$u_0(x, t) = \mathbf{T}[U_0(x, t)] = \Xi_0 u_0(x) t^{l+1}, \quad (3.3)$$

$$u_{4n-1}(x, t) = \mathbf{T}[U_{4n-1}(x, t)] = u_0(x) \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} \tilde{X}^{[2(n-k)]}(x) t^{2k+l+1}, \quad (3.4)$$

$$\text{donde } \Xi_0 = \frac{C^2 \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(l+\frac{3}{2}\right)} \text{ y } \Xi_{n,k} = C^2 \binom{2n}{2k} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-k\right) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+l+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} (-1)^{n-k} 2^{2(n-k)} (n-k)!.$$

De aquí se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Los polinomios de onda generalizados $u_0(x, t) = \mathbf{T}[U_0(x, t)]$ y $u_{4n-1}(x, t) = \mathbf{T}[U_{4n-1}(x, t)]$ satisfacen la ecuación (3.2).*

Observación 3.2. *La Proposición 3.1 se sigue de las propiedades de transmutación de los operadores \mathbf{T} y $Y_{l,x} Y_{l,t}$, de que los polinomios de onda satisfacen la ecuación de onda (1.44), de la Proposición 2.16 la cuál establece que los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t)$ y $U_{4n-1}(x, t)$ satisfacen la ecuación (2.1), y de que son tales que*

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \mathbf{T}[U_0(x, t)] = \mathbf{T}[Y_{l,x} Y_{l,t} \{p_0(x, t)\}] \\ u_{4n-1}(x, t) &= \mathbf{T}[U_{4n-1}(x, t)] = \mathbf{T}[Y_{l,x} Y_{l,t} \{p_{4n-1}(x, t)\}]. \end{aligned}$$

Para los polinomios de onda generalizados (3.3) y (3.4) de la ecuación (3.2) en la característica $x = t$, sus respectivas trazas son:

$$\mathbf{c}_0(x) = \frac{C^2 \pi}{\Gamma^2\left(l + \frac{3}{2}\right)} u_0(x) x^{l+1} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n(x) &= C^2 u_0(x) \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2} - k\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + l + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} (-1)^{n-k} 2^{2(n-k)} (n-k)! \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l+1} \\ &= \frac{\Gamma^2(l+1) \pi}{2^{2\left(l+\frac{3}{2}\right)} \Gamma^3\left(l + \frac{3}{2}\right)} u_0(x) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n)!}{4^k \Gamma(k+1) \Gamma\left(k + l + \frac{3}{2}\right)} \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l+1} \\ &= \frac{C^2 \pi}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} u_0(x) \sum_{k=0}^n \varsigma_{n,k} \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

y las derivadas de sus trazas son

$$\mathbf{c}'_0(x) = \frac{C^2\pi}{\Gamma^2(l + \frac{3}{2})} [u'_0(x) x^{l+1} + (l+1) u_0(x) x^l] \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_n(x) = & \frac{C^2\pi}{\Gamma(l + \frac{3}{2})} \left[u'_0 \sum_{k=0}^n \varsigma_{n,k} \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l+1} - \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^n \varsigma_{n,k} \tilde{X}^{(2[n-k]-1)}(x) x^{2k+l+1} \right] \\ & + \frac{C^2\pi}{\Gamma(l + \frac{3}{2})} u_0 \sum_{k=0}^n \varsigma_{n,k} (2k+l+1) \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\varsigma_{n,k} = \frac{(-1)^{n-k} (2n)!}{4^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+l+\frac{3}{2})}$, C es como se definió arriba y $\tilde{X}^{(2k)}(x)$ son como en (1.69) con $r_0 = 1$ y $r_1 = 0$.

A partir de la siguiente sección nuestro objetivo es mostrar el resultado principal de este capítulo, el cual consiste en obtener la representación (SPPS) de una solución acotada de (3.1) y se establece en el Teorema 3.11, para después encontrar la forma que toman las trazas de los polinomios de onda generalizados en términos de las potencias formales dadas por el sistema de integrales recursivas que se obtiene del método SPPS, dicho resultado se establece en la Proposición 3.14.

3.2 El sistema de ecuaciones (3.1)

En el artículo [43] Proposición 3.4, se mostró al inicio de la prueba una observación que ahora nosotros probaremos para el caso singular, en esta sección mostraremos que en efecto se satisface la siguiente proposición:

Proposición 3.3.

$$u(x, -\lambda^2) = u_0(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^{2k} \tilde{X}^{(2k)}(x) \quad (3.9)$$

es una solución de $-\mathbf{L}u = -\lambda^2 u$ si y sólo si $v(x, -\lambda^2) = j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) \cdot u(x, -\lambda^2)$ es una solución del sistema (3.1) donde

$$j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{2k+l+1}, \quad (3.10)$$

es solución de la ecuación $-\mathbf{L}_0 y = -\lambda^2 y$, $\tilde{X}^{(2k)}$ son las potencias formales (1.69) construidas en [10], $\beta_k = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} \lambda^{2k+l+1}}{2^{2k+l+\frac{1}{2}} \Gamma(k+1) \Gamma(k+l+\frac{3}{2})}$, u_0 es como en el Teorema 1.23.

Ahora analicemos el producto de las soluciones (3.9) y (3.10), para ello utilizamos el pro-

ducto de Cauchy de dos series:

$$\begin{aligned}
j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) \cdot u(x, -\lambda^2) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{2k+l+1} \right) \cdot \left(u_0(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^{2k} \tilde{X}^{(2k)}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k+l+1} \alpha_k(x) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} \gamma_j(x) = \lambda^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \sum_{j=0}^k \gamma_{k-j}(x) \alpha_j(x) \\
&= \lambda^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \sum_{j=0}^k u_0(x) \tilde{X}^{(2[k-j])}(x) \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} x^{2j+l+1} (-1)^{k-j}}{2^{2j+l+\frac{1}{2}} \Gamma(j+1) \Gamma(j+l+\frac{3}{2})} \\
&= \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}}} \lambda^{l+1} u_0(x) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} \tilde{X}^{(2[k-j])}(x) x^{2j+l+1}}{2^{2j} \Gamma(j+1) \Gamma(j+l+\frac{3}{2})},
\end{aligned}$$

donde $\alpha_k(x) = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} x^{2k+l+1}}{2^{2k+l+\frac{1}{2}} \Gamma(k+1) \Gamma(k+l+\frac{3}{2})}$ y $\gamma_j(x) = u_0(x) (-1)^k \tilde{X}^{(2j)}(x)$.

Reemplazando k por n y j por k tenemos

$$\begin{aligned}
j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) \cdot u(x, -\lambda^2) &= \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}}} u_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n+l+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l+1}}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+l+\frac{3}{2})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n+l+1} \phi_n(x),
\end{aligned}$$

donde $\phi_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}}} u_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^{2k+l+1}}{4^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+l+\frac{3}{2})}$.

Entonces,

$$\mathbf{c}_n(x) = \frac{(2n)! \Gamma^2(l+1) \pi}{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma^3(l+\frac{3}{2})} \phi_n(x). \quad (3.11)$$

De aquí que la solución del sistema este relacionada con las trazas de los polinomios de onda generalizados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) \cdot u(x, -\lambda^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma^3(l+\frac{3}{2})}{\pi (2n)! \Gamma^2(l+1)} \lambda^{l+1} \mathbf{c}_n(x) \\
&= \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma^3(l+\frac{3}{2})}{\pi \Gamma^2(l+1)} \lambda^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \mathbf{c}_n(x). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Como la solución del sistema de ecuaciones (3.1) está estrechamente relacionada con las trazas \mathbf{c}_n de los polinomios de onda generalizados u_n nos damos a la tarea de buscar la forma que toman las trazas en términos de la solución del sistema por medio de las potencias formales. Para lo cual utilizaremos el método SPSS.

Recordemos que la ecuación $-\mathbf{L}_0 y = \lambda y$ tiene una solución $j_{l+\frac{1}{2}}(x, \lambda) = \sqrt{x\sqrt{\lambda}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x\sqrt{\lambda})$, donde $\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}$ es la función de Bessel de primer tipo definida en (1.31).

Definamos a $\mathbf{b}_l(x)$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_l(x) &:= j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) = \sqrt{x\sqrt{-\lambda^2}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x\sqrt{-\lambda^2}) \\ &= \sqrt{x\sqrt{(-1)\lambda^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{i\lambda x}{2}\right)^{2k+l+\frac{1}{2}}}{k! \Gamma(k+l+\frac{3}{2})} \\ &= \sqrt{i\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+l+\frac{3}{2})} \left(\frac{i\lambda x}{2}\right)^{2k+l+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{i\lambda x} J_{l+\frac{1}{2}}(i\lambda x) \\ &= \sqrt{i\lambda x} \sqrt{\frac{2(\lambda i x)}{\pi}} j_l(i\lambda x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i\lambda x j_l(i\lambda x), \end{aligned}$$

donde $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x)$, es la **función esférica de Bessel**.

Consideremos las funciones $\mathbf{b}_l(x) := \frac{1}{\lambda} x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} \mathbf{c}_l)$ y $\mathbf{c}_l(x) := \frac{1}{\lambda} x^{l+1} \partial(x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l)$ donde \mathbf{b}_l se define como antes.

Observación 3.4. *Observemos que la función $\mathbf{b}_l(x) := j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2)$ tiene asintótica $\lambda^{l+1} x^{l+1}$ cuando $\lambda \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 0$ y que la función $\mathbf{c}_l(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(-1)^{\frac{l+1}{2}} \lambda^{2k+l+2} x^{2k+l+2}}{2^{2k+l+\frac{3}{2}} \Gamma(k+2) \Gamma(k+l+\frac{5}{2})}$ tiene asintótica $\lambda^{l+2} x^{l+2}$ cuando $\lambda \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 0$.*

Sustituyendo \mathbf{c}_l en \mathbf{b}_l tenemos

$$\mathbf{b}_l = \frac{1}{\lambda} x^{-(l+1)} \partial \left(x^{l+1} \frac{1}{\lambda} x^{l+1} \partial(x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l) \right) = \frac{1}{\lambda^2} x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} \partial(x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l)),$$

entonces $\lambda^2 \mathbf{b}_l = x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} \partial(x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l))$, definamos al operador

$$\mathbf{L}_0 := x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} \partial(x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l)).$$

Verifiquemos que con tales \mathbf{L}_0 y \mathbf{b}_l obtenemos la ecuación que satisface $j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2)$:

$$\begin{aligned} \lambda^2 V = \mathbf{L}_0 V &= x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} \partial(x^{-(l+1)} V)) \\ &= x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} [-(l+1)x^{-(l+2)} V + x^{-(l+1)} V']) \\ &= x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} [-(l+1)x^{-(l+2)} V]) + x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} x^{-(l+1)} V') \\ &= -(l+1)x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{l+1} x^{-(l+2)} V) + x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} V') \\ &= -(l+1)x^{-(l+1)} \partial(x^{l+1} x^{-1} V) + x^{-(l+1)} [(l+1)x^l V' + x^{l+1} V''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(l+1)x^{-(l+1)}\partial(x^lV) + (l+1)x^{-1}V' + V'' \\
&= -(l+1)x^{-(l+1)}[lx^{l-1}V + x^lV'] + (l+1)x^{-1}V' + V'' \\
&= -l(l+1)x^{-2}V - (l+1)x^{-1}V' + (l+1)x^{-1}V' + V'' \\
&= -l(l+1)x^{-2}V + V''
\end{aligned}$$

de aquí que $-\mathbf{L}_0V = -\lambda^2V$.

Observación 3.5. *Notemos que las funciones \mathbf{b}_l y \mathbf{c}_l fueron definidas de tal manera que al componerse obtengamos la factorización de Pólya del operador $\mathbf{L}_0V = V'' - \frac{l(l+1)}{x^2}V$.*

Sustituyendo \mathbf{b}_l en \mathbf{c}_l tenemos

$$\mathbf{c}_l = \frac{1}{\lambda}x^{l+1}\partial\left(x^{-(l+1)}\frac{1}{\lambda}x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}\mathbf{c}_l)\right) = \frac{1}{\lambda^2}x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}\mathbf{c}_l)),$$

entonces $\lambda^2\mathbf{c}_l = x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}\mathbf{c}_l))$, definamos al operador

$$\mathbf{M}_0 := x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}\mathbf{c}_l)).$$

Analicemos que ecuación satisface \mathbf{c}_l ,

$$\begin{aligned}
\lambda^2W = \mathbf{M}_0W &= x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}W)) \\
&= x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}x^{-(l+1)}[(l+1)x^lW + x^{l+1}W']) \\
&= (l+1)x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}x^{-1}W) + x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}W') \\
&= (l+1)x^{l+1}\partial(x^{-(l+2)}W) + x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}W') \\
&= (l+1)x^{l+1}[-(l+2)x^{-(l+3)}W + x^{-(l+2)}W'] \\
&\quad + x^{l+1}[-(l+1)x^{-(l+2)}W' + x^{-(l+1)}W''] \\
&= -(l+1)(l+2)x^{-2}W + (l+1)x^{-1}W' - (l+1)x^{-1}W' + W'' \\
&= -\frac{(l+1)(l+2)}{x^2}W + W'',
\end{aligned}$$

de aquí que la ecuación que satisface \mathbf{c}_l sea $-W'' + \frac{(l+1)(l+2)}{x^2}W = -\lambda^2W$.

Observación 3.6. *Notese que al sustituir \mathbf{b}_l en \mathbf{c}_l obtenemos la factorización de Pólya del operador $\mathbf{M}_0W = W'' - \frac{(l+1)(l+2)}{x^2}W$, este operador aparece en la ecuación que satisface \mathbf{c}_l .*

Definamos

$$V := \frac{1}{\lambda^{l+1}}\mathbf{b}_lu \quad y \quad W := \frac{1}{\lambda^{l+1}}\mathbf{c}_lu \quad (3.13)$$

donde u es como en (3.9).

A continuación veremos a que sistema de ecuaciones nos llevan \mathbf{L}_0V y \mathbf{M}_0W .

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0V &= x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}\mathbf{b}_lu)) \\
&= x^{-(l+1)}\partial(x^{l+1}[x^{l+1}\partial(x^{-(l+1)}\mathbf{b}_l)u + \mathbf{b}_lu'])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} [\lambda \mathbf{c}_l u + \mathbf{b}_l u']) \\
 &= \lambda x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} \mathbf{c}_l u) + x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} \mathbf{b}_l u') \\
 &= \lambda [x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} \mathbf{c}_l) u + \mathbf{c}_l u'] + x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} \mathbf{b}_l) u' + \mathbf{b}_l u'' \\
 &= \lambda [\lambda \mathbf{b}_l u + \mathbf{c}_l u'] + x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} \mathbf{b}_l) u' + \mathbf{b}_l u'' \\
 &= \lambda^2 \mathbf{b}_l u + \lambda \mathbf{c}_l u' + \left[\mathbf{b}'_l + \frac{(l+1)}{x} \mathbf{b}_l \right] u' + \mathbf{b}_l \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) + \lambda^2 \right) u \\
 &= 2\lambda^2 V + \frac{l(l+1)}{x^2} V + q(x) V + \left(\lambda \mathbf{c}_l + \mathbf{b}'_l + \frac{l+1}{x} \mathbf{b}_l \right) u', \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la fórmula $f \partial \left(\frac{1}{f} \varphi \psi \right) = f \partial \left(\frac{1}{f} \varphi \right) \psi + \varphi \psi'$, del hecho de que u es solución de la ecuación $-\mathbf{L}u = -\lambda^2 u$ y de la definición de V .

Ahora veamos que valor toma el término $(\lambda \mathbf{c}_l + \mathbf{b}'_l + \frac{l+1}{x} \mathbf{b}_l) u'$:

Por definición de V su primera y segunda derivada son $V' = \mathbf{b}'_l u + \mathbf{b}_l u'$ y $V'' = \mathbf{b}''_l u + 2\mathbf{b}'_l u' + \mathbf{b}_l u''$ de aquí que

$$2\mathbf{b}'_l u' = V'' - \mathbf{b}''_l u - \mathbf{b}_l u'' = V'' - \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + \lambda^2 \right) \mathbf{b}_l u - \mathbf{b}_l \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) + \lambda^2 \right) u,$$

entonces $\mathbf{b}'_l u' = \frac{V''}{2} - \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + \lambda^2 \right) V - \frac{q(x)}{2} V$.

Por otro lado $\lambda \mathbf{b}_l = x^{-(l+1)} \partial (x^{l+1} \mathbf{c}_l) = x^{-(l+1)} [(l+1) x^l \mathbf{c}_l + x^{l+1} \mathbf{c}'_l] = \frac{l+1}{x} \mathbf{c}_l + \mathbf{c}'_l$, entonces $\mathbf{c}'_l = \lambda \mathbf{b}_l - \frac{l+1}{x} \mathbf{c}_l$, derivando W tenemos que $\mathbf{c}_l u' = W' - \mathbf{c}'_l u$, de aquí que

$$\mathbf{c}_l u' = W' - \lambda V + \frac{l+1}{x} W.$$

Luego, $\mathbf{b}_l u' = V' - \mathbf{b}'_l u$.

Además $\lambda \mathbf{c}_l = x^{l+1} \partial (x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l) = x^{l+1} [-(l+1) x^{-(l+2)} \mathbf{b}_l + x^{-(l+1)} \mathbf{b}'_l] = -\frac{l+1}{x} \mathbf{b}_l + \mathbf{b}'_l$, entonces $\mathbf{b}'_l = \lambda \mathbf{c}_l + \frac{l+1}{x} \mathbf{b}_l$ o bien $\mathbf{b}'_l u = \lambda W + \frac{l+1}{x} V$, de aquí que

$$\mathbf{b}_l u' = V' - \lambda W - \frac{l+1}{x} V.$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathbf{c}_l u' + \mathbf{b}'_l u' + \frac{l+1}{x} \mathbf{b}_l u' &= \lambda W' - \lambda^2 V + \lambda \frac{l+1}{x} W + \frac{V''}{2} - \frac{l(l+1)}{x^2} V - \lambda^2 V \\
 &\quad - \frac{q(x)}{2} V + \frac{l+1}{x} V' - \lambda \frac{l+1}{x} W - \frac{(l+1)^2}{x^2} V \\
 &= \frac{V''}{2} + \frac{l+1}{x} V' - \frac{2l^2 + 3l + 1}{x^2} V - \frac{q(x)}{2} V - 2\lambda^2 V + \lambda W'.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto (3.14) es

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0V &= 2\lambda^2V + \frac{l(l+1)}{x^2}V + q(x)V + \frac{V''}{2} + \frac{l+1}{x}V' - \frac{2l^2+3l+1}{x^2}V - \frac{q(x)}{2}V - 2\lambda^2V + \lambda W' \\ &= \frac{V''}{2} - \frac{l^2+2l+1}{x^2}V + \frac{l+1}{x}V' + \frac{q(x)}{2}V + \lambda W',\end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{L}_0V - \frac{V''}{2} + \frac{l^2+2l+1}{x^2}V - \frac{q(x)}{2}V - \frac{l+1}{x}V' - \lambda W' = 0,$$

entonces

$$\frac{V''}{2} + \frac{l+1}{x^2}V - \frac{q(x)}{2}V - \frac{l+1}{x}V' - \lambda W' = 0.$$

Como en la definición de nuestras funciones V y W aparece el factor constante $\frac{1}{\lambda^{l+1}}$ entonces al multiplicar la igualdad anterior por tal constante no se altera el resultado.

De donde obtenemos la ecuación

$$V'' - \frac{2(l+1)}{x}V' + \frac{2(l+1)}{x^2}V - q(x)V = 2\lambda W'. \quad (3.15)$$

Para encontrar la ecuación a la que nos lleva \mathbf{M}_0W procedemos de la misma manera:

$$\mathbf{M}_0W = 2\lambda^2W + \frac{l(l+1)}{x^2}W + q(x)W + \left(\lambda\mathbf{b}_l + \mathbf{c}'_l - \frac{l+1}{x}\mathbf{c}_l\right)u'. \quad (3.16)$$

Ahora, veamos que valor toma el término $(\lambda\mathbf{b}_l + \mathbf{c}'_l - \frac{l+1}{x}\mathbf{c}_l)u'$.

Derivando W y considerando las ecuaciones que satisfacen \mathbf{c}_l y u se tiene que

$$\mathbf{c}'_l u' = \frac{W''}{2} - \left(\frac{l^2+2l+1}{x^2} + \lambda^2\right)W - \frac{q(x)}{2}W,$$

por otro lado $\mathbf{b}_l u' = V' - \lambda W - \frac{l+1}{x}V$ y $\mathbf{c}_l u' = W' - \lambda V + \frac{l+1}{x}W$.

Así, $\left(\lambda\mathbf{b}_l + \mathbf{c}'_l - \frac{l+1}{x}\mathbf{c}_l\right)u' = \frac{W''}{2} - \frac{l+1}{x}W' - \frac{2(l^2+2l+1)}{x^2}W - 2\lambda^2W - \frac{q(x)}{2}W + \lambda V'$.

De aquí que (3.16) tome la forma, $\mathbf{M}_0W = \frac{W''}{2} - \frac{l^2+3l+2}{x^2}W + \frac{q(x)}{2}W - \frac{l+1}{x}W' + \lambda V'$. Luego,

$$\mathbf{M}_0W - \frac{W''}{2} + \frac{l^2+3l+2}{x^2}W - \frac{q(x)}{2}W + \frac{l+1}{x}W' - \lambda V' = 0,$$

entonces,

$$\frac{W''}{2} - \frac{q(x)}{2}W + \frac{l+1}{x}W' - \lambda V' = 0.$$

Igual que antes, al multiplicar por el factor constante $\frac{1}{\lambda^{l+1}}$ el resultado no se altera.

De donde obtenemos la ecuación:

$$W'' + \frac{2(l+1)}{x}W' - q(x)W = 2\lambda V'. \quad (3.17)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones al que nos llevan \mathbf{L}_0V y \mathbf{M}_0W es en efecto (3.1), como se estableció en la Proposición 3.3.

Proposición 3.7. *Las funciones V y W definidas en (3.13) satisfacen que $V(0) = W(0) = 0$.*

Demostración: Por definición $V = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{b}_l u := \frac{1}{\lambda^{l+1}} j_{l+\frac{1}{2}} u$ con u definida como se describe en el Teorema 1.23. Por otro lado, si $k = 0$ entonces $\frac{1}{\lambda^{l+1}} j_{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \beta_0 x^{l+1}$, $l \geq -\frac{1}{2}$ de aquí que $\frac{1}{\lambda^{l+1}} \beta_0 x^{l+1} \Big|_{x=0} = 0$ el resto de los términos es cero en cero. Entonces, como $\frac{1}{\lambda^{l+1}} j_{l+\frac{1}{2}}(0, -\lambda^2) = 0$ y u es continua se tiene que $V(0) = 0$.

Luego, por definición $W = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{c}_l u = \left[\frac{1}{\lambda^{l+2}} x^{l+1} \partial (x^{-(l+1)} \mathbf{b}_l) \right] u(x, -\lambda^2)$, donde u es como antes y

$$\frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{c}_l = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) (-1)^{\frac{l+1}{2}} \lambda^{2k+l+2} x^{2k+l+2}}{2^{2k+l+\frac{3}{2}} \Gamma(k+2) \Gamma(k+l+\frac{5}{2})}, \quad (3.18)$$

tomando $k = 0$ en (3.18) se sigue que $\frac{\mathbf{c}_l}{\lambda^{l+1}} = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} \lambda^{l+2} x^{l+2}}{\lambda^{l+1} 2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma(l+\frac{5}{2})}$, $l \geq -\frac{1}{2}$, de aquí que

$$\frac{1}{\lambda^{l+1}} \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} \lambda^{l+2} x^{l+2}}{2^{l+\frac{3}{2}} \Gamma(l+\frac{5}{2})} \Big|_{x=0} = 0$$

el resto de los términos es cero en $x=0$. De aquí que $W(0)=0$. Por lo tanto, $V(0)=W(0)=0$. ■

3.3 Soluciones particulares V_0 y W_0

El ingrediente principal es el método series de potencias del parámetro espectral (SPPS) para la solución regular de (3.1), obtenido bajo la condición de que las ecuaciones auxiliares

$$V_0'' + \frac{2(l+1)}{x^2} V_0 - q(x) V_0 - \frac{2(l+1)}{x} V_0' = 0, \quad (3.19)$$

y

$$W_0'' + \frac{2(l+1)}{x} W_0' - q(x) W_0 = 0, \quad (3.20)$$

poseen soluciones regulares las cuales no tienen ceros en $[0, b]$ excepto en $x = 0$. Por esto, en esta sección explicamos como construir una solución particular para la ecuación (3.15) y cuál es una solución particular para la ecuación (3.17).

Para encontrar una solución particular para la ecuación (3.15) buscamos una solución de (3.19) tomando el límite cuando λ tiende a cero en V .

En el caso de u se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(x, -\lambda^2) = u_0(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (0)^{2k} \tilde{X}^{(2k)}(x),$$

la cual sólo para el caso $k = 0$ es diferente de cero. Así, cuando $k = 0$ $u(x, -\lambda^2) \Big|_{\lambda=0} = u_0$.

En el caso de $\frac{1}{\lambda^{l+1}}\mathbf{b}_l$ tenemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda^{l+1}}\mathbf{b}_l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} (0)^{2k} x^{2k+l+1}}{2^{2k+l+\frac{1}{2}} \Gamma(k+1) \Gamma(k+l+\frac{3}{2})},$$

lo cual es diferente de cero sólo para $k=0$. Luego, cuando $k=0$ se tiene que

$$\frac{1}{\lambda^{l+1}}\mathbf{b}_l \Big|_{\lambda=0} = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2})} x^{l+1}.$$

De aquí que $V_0 = \frac{1}{\lambda^{l+1}}\mathbf{b}_l(x, 0) u(x, 0) = \zeta x^{l+1} u_0$, donde $\zeta = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2})}$ es solución particular de (3.15) y solución de (3.19).

Si realizamos el mismo procedimiento para encontrar una solución particular de la ecuación (3.17) nos daremos cuenta que nos encontraremos con que $W_0 = 0$ es la solución particular que nos proporciona este procedimiento. De aquí que $(V_0, 0)^t$ sea una solución para el sistema

$$\begin{cases} V_0'' + \frac{2(l+1)}{x^2} V_0 - q(x) V_0 - \frac{2(l+1)}{x} V_0' = 0 \\ W_0'' + \frac{2(l+1)}{x} W_0' - q(x) W_0 = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Para trabajar con el método SPSPS necesitamos una solución no nula en $(0, b]$ de la ecuación (3.20) por tal motivo escogemos a $W_0 = \zeta x^{-(l+1)} u_0$, con ζ una constante.

Como el Wronskiano de V_0 y W_0 es diferente de cero: $\mathcal{W}(V_0, W_0) = -2\zeta^2(l+1)x^{-1}u_0^2 \neq 0$ entonces son dos soluciones linealmente independientes.

Observación 3.8. *Notemos que como u_0 satisface las relaciones asintóticas (1.66) entonces V_0 satisface las relaciones asintóticas $V_0 \sim \zeta x^{2(l+1)}$ y $V_0' \sim 2(l+1)\zeta x^{2l+1}$ y W_0 satisface las relaciones asintóticas $W_0 \sim \zeta$ y $W_0' \sim 0$.*

De donde obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.9. $(V_0, W_0)^t$ es una solución particular del sistema (3.1) en $(0, b]$. Donde u_0 es como en el Teorema 1.23.

Demostración: La primera y segunda derivada de V_0 son $V_0' = \zeta [(l+1)x^l u_0 + x^{l+1} u_0']$ y $V_0'' = \zeta [l(l+1)x^{l-1} u_0 + 2(l+1)x^l u_0' + x^{l+1} u_0'']$, entonces

$$\begin{aligned} V_0'' + \frac{2(l+1)}{x^2} V_0 - q(x) V_0 - \frac{2(l+1)}{x} V_0' &= \zeta [l(l+1)x^{l-1} u_0 + 2(l+1)x^l u_0' + \zeta x^{l+1} u_0''] \\ &\quad + \zeta \frac{2(l+1)}{x^2} x^{l+1} u_0 - \zeta q(x) x^{l+1} u_0 \\ &\quad - \zeta \frac{2(l+1)}{x} [(l+1)x^l u_0 + x^{l+1} u_0'] \\ &= \zeta l(l+1)x^{l-1} u_0 + 2\zeta(l+1)x^l u_0' + \zeta x^{l+1} u_0'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2\zeta(l+1)x^{l-1}u_0 - \zeta q(x)x^{l+1}u_0 \\
 & -2\zeta(l+1)^2x^{l-1}u_0 - 2\zeta(l+1)x^l u_0' \\
 = & \zeta l(l+1)x^{l-1}u_0 + \zeta x^{l+1}u_0'' + 2\zeta(l+1)x^{l-1}u_0 \\
 & -\zeta q(x)x^{l+1}u_0 - 2\zeta l(l+1)x^{l-1}u_0 - 2\zeta(l+1)x^{l-1}u_0 \\
 = & \zeta [x^{l+1}u_0'' - l(l+1)x^{l-1}u_0 - q(x)x^{l+1}u_0],
 \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
 x^{-(l+1)}\zeta [x^{l+1}u_0'' - l(l+1)x^{l-1}u_0 - q(x)x^{l+1}u_0] & = \zeta \left[u_0'' - \frac{l(l+1)}{x^2}u_0 - q(x)u_0 \right] \\
 & = \zeta \left[-u_0'' + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right) u_0 \right] = 0,
 \end{aligned}$$

ya que u_0 es solución de tal ecuación. Similarmente para W_0 .

La primera y segunda derivada de W_0 son $W_0' = \zeta [-(l+1)x^{-(l+2)}u_0 + x^{-(l+1)}u_0']$ y $W_0'' = \zeta [(l+1)(l+2)x^{-(l+3)}u_0 - 2(l+1)x^{-(l+2)}u_0' + x^{-(l+1)}u_0'']$, entonces

$$\begin{aligned}
 W_0'' + \frac{2(l+1)}{x}W_0' - q(x)W_0 & = \zeta [(l+1)(l+2)x^{-(l+3)}u_0 - 2(l+1)x^{-(l+2)}u_0' + \\
 & -\zeta q(x)x^{-(l+1)}u_0 + \frac{2(l+1)\zeta}{x} [-(l+1)x^{-(l+2)}u_0 + x^{-(l+1)}u_0'] \\
 & = \zeta [(l+1)(l+2)x^{-(l+3)}u_0 - 2(l+1)x^{-(l+2)}u_0' + x^{-(l+1)}u_0''] \\
 & -\zeta [2(l+1)^2x^{-(l+3)}u_0 - 2(l+1)x^{-(l+2)}u_0' + q(x)x^{-(l+1)}u_0] \\
 & = \zeta [l(l+1)x^{-(l+3)}u_0 + 2(l+1)x^{-(l+3)}u_0 + x^{-(l+1)}u_0''] \\
 & -\zeta [2l(l+1)x^{-(l+3)}u_0 + 2(l+1)x^{-(l+3)}u_0 + q(x)x^{-(l+1)}u_0] \\
 & = \zeta [x^{-(l+1)}u_0'' - l(l+1)x^{-(l+3)}u_0 - q(x)x^{-(l+1)}u_0],
 \end{aligned}$$

de aquí se sigue que

$$\begin{aligned}
 x^{l+1}\zeta [x^{-(l+1)}u_0'' - l(l+1)x^{-(l+3)}u_0 - q(x)x^{-(l+1)}u_0] & = \zeta \left[u_0'' - \frac{l(l+1)}{x^2}u_0 - q(x)u_0 \right] \\
 & = \zeta \left[-u_0'' + \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + q(x) \right) u_0 \right] = 0,
 \end{aligned}$$

ya que u_0 es solución de tal ecuación. ■

Como V_0 y W_0 son soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{L}}_0 V & : = V'' - \frac{2(l+1)}{x}V' + \left[\frac{2(l+1)}{x^2} - q(x) \right] V = 0, \\
 \tilde{\mathbf{M}}_0 W & : = W'' + \frac{2(l+1)}{x}W' - q(x)W = 0,
 \end{aligned}$$

respectivamente, tales que V_0 y W_0 no se anulan en $(0, b]$ (ver Proposición 3.7). Entonces, los operadores $\tilde{\mathbf{L}}_0$ y $\tilde{\mathbf{M}}_0$ admiten la siguiente factorización de Pólya:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}_0 V &= \frac{1}{pV_0} \frac{d}{dx} pV_0^2 \frac{d}{dx} \frac{V}{V_0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_0 W &= \frac{1}{pW_0} \frac{d}{dx} pW_0^2 \frac{d}{dx} \frac{W}{W_0},\end{aligned}$$

respectivamente, donde $p(x)$ es el factor integrante.

De aquí tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.10. *Una factorización de Pólya para (3.15) y (3.17) son*

$$\frac{1}{x^{-2(l+1)}V_0} \frac{d}{dx} x^{-2(l+1)}V_0^2 \frac{d}{dx} \frac{V}{V_0} = 2\lambda W', \quad (3.22)$$

y

$$\frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} \frac{d}{dx} x^{2(l+1)}W_0^2 \frac{d}{dx} \frac{W}{W_0} = 2\lambda V', \quad (3.23)$$

respectivamente.

Demostración: Para la ecuación (3.15) el factor integrante está dado por:

$$p(x) = e^{-\int_0^x \frac{2(l+1)}{x} dx} = e^{-2(l+1)\ln(x)} = x^{-2(l+1)},$$

entonces se tiene que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{-2(l+1)}V_0} \frac{d}{dx} x^{-2(l+1)}V_0^2 \frac{d}{dx} \frac{V}{V_0} &= \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} \frac{d}{dx} x^{-2(l+1)}V_0^2 \left(\frac{V'V_0 - VV_0'}{V_0^2} \right) \\ &= \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} \frac{d}{dx} [x^{-2(l+1)}(V'V_0 - VV_0')] \\ &= \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} [-2(l+1)x^{-2l-3}(V'V_0 - VV_0')] \\ &\quad + \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} [x^{-2(l+1)}(V''V_0 - VV_0'')] \\ &= -\frac{2(l+1)}{x}V' + \frac{2(l+1)}{x}\frac{V_0'}{V_0}V + V'' - \frac{V_0''}{V_0}V.\end{aligned}$$

Como V_0 es solución de la primera ecuación del sistema (3.21) entonces $\frac{V_0''}{V_0} - \frac{2(l+1)}{x}\frac{V_0'}{V_0} + \frac{2(l+1)}{x^2} - q(x) = 0$, así $\frac{V_0''}{V_0} = \frac{2(l+1)}{x}\frac{V_0'}{V_0} - \frac{2(l+1)}{x^2} + q(x)$.

De aquí que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{-2(l+1)}V_0} \frac{d}{dx} x^{-2(l+1)}V_0^2 \frac{d}{dx} \frac{V}{V_0} &= -\frac{2(l+1)}{x}V' + \frac{2(l+1)}{x}\frac{V_0'}{V_0}V + V'' \\ &\quad - \left[\frac{2(l+1)}{x}\frac{V_0'}{V_0} - \frac{2(l+1)}{x^2} + q(x) \right] V \\ &= V'' - \frac{2(l+1)}{x}V' + \frac{2(l+1)}{x^2}V - q(x)V.\end{aligned}$$

Para la ecuación (3.17) el factor integrante es: $p(x) = e^{\int_0^x \frac{2(l+1)}{x} dx} = e^{2(l+1)\ln(x)} = x^{2(l+1)}$, entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} \frac{d}{dx} x^{2(l+1)}W_0^2 \frac{d}{dx} \frac{W}{W_0} &= \frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} \frac{d}{dx} x^{2(l+1)}W_0^2 \left(\frac{W'W_0 - WW_0'}{W_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} \frac{d}{dx} [x^{2(l+1)}(W'W_0 - WW_0')] \\ &= \frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} [2(l+1)x^{2l+1}(W'W_0 - WW_0')] \\ &\quad + \frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} [x^{2(l+1)}(W''W_0 - WW_0'')] \\ &= \frac{2(l+1)}{x}W' - \frac{2(l+1)}{x}\frac{W_0'}{W_0}W + W'' - \frac{W_0''}{W_0}W. \end{aligned}$$

Como W_0 es solución de la segunda ecuación del sistema (3.21) entonces $\frac{W_0''}{W_0} + \frac{2(l+1)}{x}\frac{W_0'}{W_0} - q(x) = 0$, así $\frac{W_0''}{W_0} = q(x) - \frac{2(l+1)}{x}\frac{W_0'}{W_0}$.

De aquí que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{2(l+1)}W_0} \frac{d}{dx} x^{2(l+1)}W_0^2 \frac{d}{dx} \frac{W}{W_0} &= \frac{2(l+1)}{x}W' - \frac{2(l+1)}{x}\frac{W_0'}{W_0}W + W'' - \left[q(x) - \frac{2(l+1)}{x}\frac{W_0'}{W_0} \right]W \\ &= W'' + \frac{2(l+1)}{x}W' - q(x)W. \end{aligned}$$

■

3.4 Sistema de integrales recursivas

Cambiando x por t en las ecuaciones (3.22) y (3.23) se tiene:

$$\begin{cases} t^{2(l+1)}V_0^{-1}\partial t^{-2(l+1)}V_0^2\partial VV_0^{-1} = 2\lambda W' \\ t^{-2(l+1)}W_0^{-1}\partial t^{2(l+1)}W_0^2\partial WW_0^{-1} = 2\lambda V'. \end{cases} \quad (3.24)$$

Después de integrar (3.24) de la Proposición 3.7 se tiene que,

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{2(l+1)}V_0^{-1}(t)\partial t^{-2(l+1)}V_0^2(t)\partial V(t)V_0^{-1}(t)dt &= \int_0^x 2\lambda W'(t)dt = 2\lambda W(x) \\ \int_0^x t^{-2(l+1)}W_0^{-1}(t)\partial t^{2(l+1)}W_0^2(t)\partial W(t)W_0^{-1}(t)dt &= \int_0^x 2\lambda V'(t)dt = 2\lambda V(x). \end{aligned}$$

Luego,

$$4\lambda^2 V = \int_0^x t^{-2(l+1)}W_0^{-1}\partial t^{2(l+1)}W_0^2\partial W_0^{-1} \int_0^t s^{2(l+1)}V_0^{-1}\partial s^{-2(l+1)}V_0^2\partial V_0^{-1}V ds dt.$$

Cálculando el operador inverso:

$$\int_0^t V_0^{-2} s^{2(l+1)} \int_0^s t^{-2(l+1)} V_0 \partial W_0 \int_0^t s^{-2(l+1)} W_0^{-2} \int_0^s t^{2(l+1)} W_0 \partial V_0 dt ds dt ds.$$

Luego, la solución es de la forma

$$V = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n} X^{(2n)}(x), \quad (3.25)$$

y

$$W = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} X^{(2n+1)}(x), \quad (3.26)$$

donde $X^{(0)} \equiv 1$, $X^{(-1)} \equiv 0$,

$$X^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_0^x t^{2(l+1)} V_0^{-2} \int_0^t s^{-2(l+1)} V_0 \partial (W_0 X^{(n-1)}(s)) ds dt & n \text{ par} \\ \int_0^x t^{-2(l+1)} W_0^{-2} \int_0^t s^{2(l+1)} W_0 \partial (V_0 X^{(n-1)}(s)) ds dt & n \text{ impar} \end{cases}. \quad (3.27)$$

El sistema de integrales recursivas definido en (3.27) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$X^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_0^x \left\{ \frac{X^{(n-1)}(t)}{t^{2(l+1)}} - \frac{1}{u_0^2} \int_0^t X^{(n-1)}(s) \left[\frac{u_0 u_0'}{s^{2(l+1)}} - \frac{(l+1)u_0^2}{s^{2l+3}} \right] ds \right\} dt & n \text{ par} \\ \int_0^x \left\{ t^{2(l+1)} X^{(n-1)}(t) - \frac{1}{u_0^2} \int_0^t X^{(n-1)}(s) \left[(l+1) s^{2l+1} u_0^2 + s^{2(l+1)} u_0' u_0 \right] ds \right\} dt & n \text{ impar} \end{cases} \quad (3.28)$$

después de integrar por partes la integral interna.

Para verificar que la forma que toman V y W está dada por (3.25) y por (3.26) tomamos $V = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^{(2n)}(x)$ y le aplicamos la factorización de Pólya (3.22) para obtener la forma de W ,

$$\begin{aligned} 2\lambda W' &= x^{2(l+1)} V_0^{-1} \partial x^{-2(l+1)} V_0^2 \partial V_0^{-1} V_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^x t^{2(l+1)} V_0^{-2} \int_0^t s^{-2(l+1)} V_0 \partial (W_0 X^{(2n-1)}) ds dt \\ &= \partial \left(W_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^{(2n-1)}(x) \right), \end{aligned}$$

integrando se tiene que

$$W = W_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2\lambda} X^{(2n-1)}(x),$$

por medio de un cambio de variable obtenemos

$$W = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{2\lambda} X^{(2n+1)}(x).$$

Luego aplicamos la factorización de Pólya (3.23) a W para obtener la forma de V ,

$$\begin{aligned} 2\lambda V' &= x^{-2(l+1)} W_0^{-1} \partial x^{2(l+1)} W_0^2 \partial W_0^{-1} W_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{2\lambda} \int_0^x t^{-2(l+1)} W_0^{-2} \int_0^t s^{2(l+1)} W_0 \partial (V_0 X^{(2n)}) ds dt \\ &= \partial \left(V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{2\lambda} X^{(2n)}(x) \right) \end{aligned}$$

integrando tenemos que,

$$V = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{(2\lambda)^2} X^{(2n)}(x),$$

comparando los coeficientes de estas series tenemos que $\frac{c_{n+1}}{(2\lambda)^2} = (2\lambda)^{2n}$, de aquí que $c_{n+1} = (2\lambda)^{2n-2}$, entonces $\frac{c_n}{2\lambda} = (2\lambda)^{2n-1}$. Por lo tanto las series para V y W son de la forma (3.25) y (3.26).

En resumen lo que hemos mostrado en este capítulo queda establecido en el siguiente teorema:

Teorema 3.11. (Representación SPSS) *Supongamos que el sistema de ecuaciones (3.21) admite la solución $u_0 = (V_0, W_0)^t$ en $C([0, b]) \cap C^2((0, b])$ (en general complejo valuada), donde V_0 y W_0 no tienen ceros en $[0, b]$ excepto en $x = 0$, y satisfacen las relaciones asintóticas de la Observación 3.8. Entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ el sistema (3.1) tiene como solución a*

$$u(x) = c(V(x), W(x)){}^t = c \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n} \begin{pmatrix} V_0(x) X^{(2n)}(x) \\ 2\lambda W_0(x) X^{(2n+1)}(x) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

en $C([0, b]) \cap C^2((0, b])$, donde c es una constante compleja arbitraria, V y W son de la forma (3.25) y (3.26) con $X^{(n)}$ definida por las relaciones recursivas (3.27) o bien (3.28), y las series convergen uniformemente en $[0, b]$. La primera derivada de u está dada por:

$$u'(x) = c(V'(x), W'(x)){}^t$$

donde

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{V_0'}{V_0} V + \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} \int_0^x t^{-2(l+1)} V_0(t) W_0'(t) \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} X^{(2n-1)}(t) dt \\ &\quad + \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} \int_0^x t^{-2(l+1)} V_0(t) W_0(t) \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} (X^{(2n-1)}(t))' dt, \end{aligned} \quad (3.30)$$

y

$$\begin{aligned}
W'(x) &= \frac{W_0'}{W_0}W + \frac{x^{-2(l+1)}}{W_0} \int_0^x t^{2(l+1)}W_0(t)V_0'(t) \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} \tilde{X}^{(2n)}(t)dt \\
&\quad + \frac{x^{-2(l+1)}}{W_0} \int_0^x t^{2(l+1)}W_0(t)V_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} \left(\tilde{X}^{(2n)}(t)\right)' dt. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Más aún, las series para la primera y la segunda derivada convergen uniformemente en un compacto arbitrario $K \subset (0, b]$.

Demostración: Formalmente, diferenciando las series (3.25) y (3.26) dos veces con la ayuda de (3.27) obtenemos que V' y W' están dadas por (3.30) y (3.31):

$$\begin{aligned}
V'(x) &= V_0' \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n} X^{(2n)}(x) + V_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} (X^{(2n)}(x))' \\
&= \frac{V_0'}{V_0}V + \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} \int_0^x t^{-2(l+1)}V_0(t)W_0'(t) \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} X^{(2n-1)}(t)dt \\
&\quad + \frac{x^{2(l+1)}}{V_0} \int_0^x t^{-2(l+1)}V_0(t)W_0(t) \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} (X^{(2n-1)}(t))' dt, \\
W'(x) &= W_0' \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} X^{(2n+1)}(x) + W_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} (X^{(2n+1)}(x))' \\
&= \frac{W_0'}{W_0}W + x^{-2(l+1)}W_0^{-1} \int_0^x t^{2(l+1)}W_0(t)V_0'(t) \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} \tilde{X}^{(2n)}(t)dt \\
&\quad + x^{-2(l+1)}W_0^{-1} \int_0^x t^{2(l+1)}W_0(t)V_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} \left(\tilde{X}^{(2n)}(t)\right)' dt,
\end{aligned}$$

y V'' , W'' después de simplificar están dadas por:

$$\begin{aligned}
V''(x) &= \frac{V_0''}{V_0}V + \frac{2(l+1)}{x}V_0'V' - \frac{2(l+1)V_0'}{xV_0}V + W_0' \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n-1}(x)X^{(2n-1)}(x) + W_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} (X^{(2n-1)}(x))' \\
&= \frac{V_0''}{V_0}V + \frac{2(l+1)}{x}V_0'V' - \frac{2(l+1)V_0'}{xV_0}V + 2\lambda W' \\
W''(x) &= \frac{W_0''}{W_0}W - \frac{2(l+1)}{x}W_0'W' + \frac{2(l+1)W_0'}{xW_0}W + V_0' \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} X^{(2n)}(x) + V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} (X^{(2n)}(x))' \\
&= \frac{W_0''}{W_0}W - \frac{2(l+1)}{x}W_0'W' + \frac{2(l+1)W_0'}{xW_0}W + 2\lambda V'.
\end{aligned}$$

Faltaría ver que todas las series involucradas convergen uniformemente en un compacto arbitrario $K \subset (0, b]$ pero esto se sigue del Lema 1.21. Por lo tanto, las derivadas formales coinciden

con las usuales. Por (3.21)

$$\begin{aligned} \frac{V_0''}{V_0}V + \frac{2(l+1)}{x}V' - \frac{2(l+1)V_0'}{xV_0}V + W_0' \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} X^{(2n-1)}(x) + W_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{2n} (X^{(2n-1)}(x))' \\ = - \left(\frac{2(l+1)}{x^2} - q(x) \right) V_0 + 2\lambda W', \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{W_0''}{W_0}W - \frac{2(l+1)}{x}W' + \frac{2(l+1)W_0'}{xW_0}W + V_0' \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} X^{(2n)}(x) + V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n+1} (X^{(2n)}(x))' \\ = q(x)W + 2\lambda V', \end{aligned}$$

de aquí que V y W sean soluciones del sistema (3.1). ■

Proposición 3.12. *Las funciones $V_1 := \frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{b}_l u$ y $V_2 := V_0 \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^{2k} X^{(2k)}$ coinciden.*

Demostración: Por definición

$$\begin{aligned} V_1(x, -\lambda^2) &:= \frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{b}_l(x, -\lambda^2) u(x, -\lambda^2) = \frac{1}{\lambda^{l+1}} j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) u(x, -\lambda^2) \\ &= \frac{1}{\lambda^{l+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{2k+l+1} \right) \left(u_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^{2k} \tilde{X}^{(2k)}(x) \right). \end{aligned}$$

El término $k = 0$ en V_1 tiene asíntota:

$$V_1(x, -\lambda^2) = \frac{1}{\lambda^{l+1}} (\beta_0 x^{l+1}) (u_0 (-1)^0 \lambda^0 \tilde{X}^{(0)}(x)) = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \beta_0 x^{l+1} u_0 \sim \frac{1}{\lambda^{l+1}} (\beta_0 x^{l+1}) (x^{l+1}) = \zeta x^{2(l+1)},$$

donde $\zeta = \frac{\beta_0}{\lambda^{l+1}} = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2})}$, ya que $\tilde{X}^{(0)} \equiv 1$, y $u_0 \sim x^{l+1}$, $x \rightarrow 0$.

Por otro lado, el término $k = 0$ para V_2 tiene asíntota

$$V_2 = V_0 ((2\lambda)^0 X^{(0)}(x)) = \frac{\beta_0}{\lambda^{l+1}} x^{l+1} u_0 \sim \frac{\beta_0}{\lambda^{l+1}} x^{2(l+1)} = \zeta x^{2(l+1)}.$$

Como tanto V_1 como V_2 son soluciones de la misma ecuación entonces son linealmente independientes, de aquí que para el resto de los términos se vale que

$$V_1 = V_2. \quad \blacksquare$$

Ahora veremos un ejemplo, en el que consideramos $q(x) \equiv 0$:

Ejemplo 3.13. Sean $\mathbf{b}_l(x, -\lambda^2)$ y $u(x, -\lambda^2)$ como se definen en la Proposición 3.3.

Considerando el caso cuando $q(x) = 0$ se tiene la ecuación:

$$-\mathbf{L}_0 u = -\lambda^2 u, \quad l \geq -\frac{1}{2} \text{ y } x \in (0, b].$$

Para trabajar con este ejemplo tenemos dos opciones, una es considerar $V = \left[\frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{b}_l(x, -\lambda^2) \right]^2$ y la otra es considerando que la solución regular de la ecuación está dada por la fórmula:

$$u_l(x, -\lambda^2) = \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) 2^{l+\frac{1}{2}} (-\lambda^2)^{-\frac{2l+1}{4}} \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-\lambda^2} x\right).$$

Procederemos desarrollando la segunda opción. Simplificando $u_l(x, -\lambda^2)$ tenemos:

$$u_l(x, -\lambda^2) = x^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k k! \left(l + \frac{3}{2}\right)_k} \lambda^{2k}.$$

Luego, $V(x) = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{b}_l(x, -\lambda^2) u_l(x, -\lambda^2)$ toma la forma:

$$\begin{aligned} V(x) &:= \frac{1}{\lambda^{l+1}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) u_l(x, -\lambda^2) = \frac{1}{\lambda^{l+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{2k+l+1} \right) \left(x^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k k! \left(l + \frac{3}{2}\right)_k} \lambda^{2k} \right) \\ &= \frac{x^{2(l+1)}}{\lambda^{l+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{2k} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k k! \left(l + \frac{3}{2}\right)_k} \lambda^{2k} \right) \\ &= x^{2(l+1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \alpha_n(x) \right) \left(\sum_{k=0}^n \lambda^{2k} \gamma_k(x) \right) \\ &= x^{2(l+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \sum_{k=0}^n \gamma_{n-k}(x) \alpha_k(x) \end{aligned}$$

donde $\alpha_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} x^{2k}}{2^{2n+l+\frac{1}{2}} \Gamma(n+1) \Gamma(n+l+\frac{3}{2})}$ y $\gamma_k(x) = \frac{x^{2k}}{2^{2k} \left(l + \frac{3}{2}\right)_k}$.

De aquí que

$$V = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}}} x^{2(l+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n-k)! \left(l + \frac{3}{2}\right)_{n-k} k! \Gamma(k+l+\frac{3}{2})} \right). \quad (3.32)$$

Se puede verificar que

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n-k)! \left(l + \frac{3}{2}\right)_{n-k} k! \Gamma(k+l+\frac{3}{2})} = \frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} 2^{2n} X^{(2n)}(x).$$

Considerando $V_0 = \zeta x^{l+1} u_0(x)$ como la solución no nula en $(0, b]$ de la ecuación (3.19) en (3.32) tenemos:

$$V(x) = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{2^{l+\frac{1}{2}}} x^{2(l+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \left(\frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} 2^{2n} X^{(2n)}(x) \right) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2\lambda)^{2n} X^{(2n)}(x).$$

◆

El siguiente resultado nos muestra la forma que toman las trazas \mathbf{c}_n y \mathbf{c}_0 en términos de las potencias formales:

Proposición 3.14. *Las trazas \mathbf{c}_n y \mathbf{c}_0 en términos de las potencias formales toman la forma:*

$$\mathbf{c}_n(x) = \Theta_n x^{l+1} u_0(x) X^{(2n)}(x) \quad y \quad \mathbf{c}_0(x) = \Theta_0 x^{l+1} u_0(x), \quad (3.33)$$

y sus derivadas son:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_n(x) &= \Theta_n \left\{ [(l+1)x^l u_0 + x^{l+1} u'_0] X^{(2n)}(x) + \frac{u_0}{x^{(l+1)}} X^{(2n-1)}(x) \right\} \\ &\quad - \Theta_n \frac{x^{l+1}}{u_0} \int_0^x X^{(2n-1)}(s) \left[\frac{u_0 u'_0}{s^{2(l+1)}} - \frac{(l+1)}{s^{2l+3}} u_0^2 \right] ds \end{aligned} \quad (3.34)$$

y

$$\mathbf{c}'_0(x) = \Theta_0 [(l+1)x^l u_0 + x^{l+1} u'_0], \quad (3.35)$$

donde $\Theta_n = \frac{\pi \Gamma^2(l+1)(2n)!}{2^{2l+3} \Gamma^4(l+\frac{3}{2})}$ y u_0 solución complejo valuada no nula en $(0, b]$ de la ecuación $-\mathbf{L}u_0 = 0$ que satisface las relaciones asintóticas (1.66).

Demostración: Por la Proposición 3.12 y (3.12) se tiene que:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{1}{\lambda^{l+1}} j_{l+\frac{1}{2}}(x, -\lambda^2) u(x, -\lambda^2) = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma^3(l+\frac{3}{2})}{\pi \Gamma^2(l+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \mathbf{c}_n(x) \\ &= V_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \lambda^{2n} X^{(2n)}(x) = V_2(x). \end{aligned}$$

De aquí se tiene que:

$$\mathbf{c}_n(x) = v_n V_0(x) X^{(2n)}(x) = v_n \zeta x^{l+1} u_0(x) X^{(2n)}(x) = \Theta_n x^{l+1} u_0(x) X^{(2n)}(x)$$

y

$$\mathbf{c}_0(x) = v_0 V_0(x) = v_0 \zeta x^{l+1} u_0(x) = \Theta_0 x^{l+1} u_0(x).$$

donde $v_n = \frac{\pi \Gamma^2(l+1)(2n)!}{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma^3(l+\frac{3}{2})}$ y ζ es como se definió en la sección 3.3, de aquí que $\Theta_n = v_n \zeta$.

Para la segunda parte, es claro que la derivada de $\mathbf{c}_0(x)$ es como se indica en el enunciado. Para $\mathbf{c}'_n(x)$ se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_n(x) &= v_n \left\{ V'_0(x) X^{(2n)}(x) + V_0(x) [X^{(2n)}(x)]' \right\} \\ &= v_n \left[V'_0(x) X^{(2n)}(x) + V_0(x) \left(\frac{X^{(2n-1)}(x)}{x^{2(l+1)}} - \frac{1}{u_0^2} \int_0^x X^{(2n-1)}(s) \left[\frac{u_0 u'_0}{s^{2(l+1)}} - \frac{(l+1)}{s^{2l+3}} u_0^2 \right] ds \right) \right] \\ &= \Theta_n \left\{ [(l+1)x^l u_0 + x^{l+1} u'_0] X^{(2n)}(x) + \frac{u_0}{x^{l+1}} X^{(2n-1)}(x) \right\} \\ &\quad - \Theta_n \frac{x^{l+1}}{u_0} \int_0^x X^{(2n-1)}(s) \left[\frac{u_0 u'_0}{s^{2(l+1)}} - \frac{(l+1)}{s^{2l+3}} u_0^2 \right] ds \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\Theta_n = v_n \zeta$ con $v_n = \frac{\pi \Gamma^2(l+1)(2n)!}{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l+\frac{5}{2}} \Gamma^3(l+\frac{3}{2})}$ y ζ es como se definió en la sección 3.3. ■

La siguiente proposición nos muestra la forma que toman las potencias formales dadas por $X^{(2n)}$ considerando su asintótica en cero, ver la Observación 3.8.

Proposición 3.15. *La asintótica de las potencias formales $X^{(2n)}(x)$ cuando $x \rightarrow 0$ son:*

$$X^{(2n)}(x) \sim \frac{(l+2)_{n-1}}{4^n (2l+3)(2)_{n-1} \left(\frac{2l+5}{2}\right)_{n-1} (2l+3)_{n-1}} x^{2n}. \quad (3.37)$$

Demostración: Considerando el sistema de integrales recursivas dadas por (3.27) y las asintóticas en cero de las funciones V_0 y W_0 dadas por la Observación 3.8 podemos calcular los primeros términos de $X^{(2n)}$ y son:

$$\begin{aligned} u_0 &= X^{(0)}(x) \sim 1 \\ u_2 &= X^{(2)}(x) \sim \frac{1}{2^2 1! (2l+3)} x^2 \\ u_4 &= X^{(4)}(x) \sim \frac{l+2}{2^3 2! (2l+3)^2 (2l+5)} x^4 \\ u_6 &= X^{(6)}(x) \sim \frac{(l+2)(l+3)}{2^4 3! (2l+3)^2 (2l+4)(2l+5)(2l+7)} x^6 \\ u_8 &= X^{(8)}(x) \sim \frac{(l+2)(l+3)(l+4)}{2^5 4! (2l+3)^2 (2l+4)(2l+5)^2 (2l+7)(2l+9)} x^8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general, la fórmula (3.37) la obtuvimos por medio del programa Mathematica haciendo uso del comando `RSolve`, de la siguiente manera:

$$RSolve \left[\left\{ \frac{a[n-1](n+1)}{4n(n+2l+1)(n+l+\frac{1}{2})} == a[n], a[0] == 1 \right\}, a[n], n \right].$$

El siguiente resultado muestra la independencia lineal de las trazas \mathbf{c}_n dadas por (3.33), considerando su asintótica en cero:

Proposición 3.16. *Las trazas $\mathbf{c}_n(x)$ son linealmente independientes considerando su asintótica en cero.*

Demostración: Considerando las trazas \mathbf{c}_n presentadas en las Proposición 3.14 es suficiente mostrar que las potencias formales $X^{(2n)}$ son linealmente independientes. Entonces el resultado se sigue de la Proposición 3.15 por inducción. ■

Capítulo

4

Método de aproximación de soluciones de ecuaciones tipo Bessel perturbadas

Physics can't exist without mathematics which provides it with the only language in which it can speak. Thus, services are continuously exchanged between pure mathematical analysis and physics. It is really remarkable that among works of analysis most useful for physics were those cultivated for their own beauty. In exchange, physics, exposing new problems, is as useful for mathematics as it is a model for an artist.

Henri Poincaré

En este capítulo describiremos el **método de solución de la ecuación**

$$-\mathbf{L}u = \lambda u, \quad l > -\frac{1}{2}, \quad x \in (0, b], \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$, con q una función continua a valores complejos en $[0, b]$ y λ es un número complejo arbitrario, tal método es basado en la aproximación de la solución regular de la ecuación (4.1) que toma la forma

$$\mathbf{T}[\mathbf{d}_l(x, \lambda)] = \mathbf{d}_l(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt, \quad (4.2)$$

donde \mathbf{T} es el operador definido en (1.81) estudiado en el artículo de V. Ya. Volk [71], $K(x, t)$ es continuo y

$$\mathbf{d}_l(x, \lambda) := \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)^{2n+l+\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

es una solución regular de la ecuación $-\mathbf{L}_0 y = \lambda y$, con $\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}$ la función cilíndrica de Bessel de primer tipo de orden $l + \frac{1}{2}$.

Antes de entrar en detalles con el problema que nos interesa, mencionemos que para el presente trabajo el caso $l = 0$ no es de nuestro interés ya que caemos en el caso regular, el cuál ya ha sido ampliamente estudiado. En tal caso, tenemos la ecuación regular $y'' + \lambda y = 0$.

Con el operador utilizado por Volk estudiamos las propiedades del operador \mathbf{L} a partir de las propiedades conocidas para el operador $\mathbf{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}$.

Nuestro interés es generalizar el método empleado por los doctores V. Kravchenko y S. Torba en su artículo [42], en el que aproximaron el núcleo del operador de transmutación para la ecuación de Sturm-Liouville en el caso regular por medio de los polinomios de onda generalizados correspondientes, en nuestro caso estamos interesados en implementar este método al caso singular.

4.1 Propiedades del operador de transmutación

En esta sección estudiaremos algunas contribuciones adicionales que se obtuvieron para el operador descrito por V. Ya. Volk (ver [71]).

El siguiente resultado muestra que el operador \mathbf{T} satisface la **propiedad de transmutación** (1.38) actuando sobre las funciones φ de \mathcal{A}_l definido al final del Capítulo 1.

Teorema 4.1. *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}_l$ la siguiente igualdad es válida*

$$\mathbf{LT}[\varphi(x)] = \mathbf{TL}_0[\varphi(x)]. \quad (4.4)$$

Demostración: Desarrollando el lado izquierdo tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{LT}[\varphi(x)] = & \varphi''(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} \varphi(t) dt + \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} \right|_{t=x} \varphi(x) + \frac{dK(x,x)}{dx} \varphi(x) + K(x,x) \varphi'(x) \\ & - \frac{l(l+1)}{x^2} \varphi(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt - q(x) \varphi(x) - q(x) \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{TL}_0[\varphi(x)] = \varphi''(x) + \int_0^x K(x,t) \varphi''(t) dt - \frac{l(l+1)}{x^2} \varphi(x) - \int_0^x K(x,t) \frac{l(l+1)}{t^2} \varphi(t) dt.$$

Integrando por partes el término $\int_0^x K(x,t) \varphi''(t) dt$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x,t) \varphi''(t) dt &= K(x,x) \varphi'(x) - K(x,0) \varphi'(0) - \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=x} \varphi(x) \\ &+ \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} \varphi(0) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^x K(x,t) \varphi''(t) dt = K(x,x) \varphi'(x) - \left. \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \right|_{t=x} \varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} \varphi(t) dt,$$

donde utilizamos la suposición de que $\varphi \in \mathcal{A}_l$ así como también la propiedad 3. del Teorema 1.28 Ahora tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{LT}[\varphi(x)] - \mathbf{TL}_0[\varphi(x)] = & \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} K(x,t) + \frac{l(l+1)}{t^2} K(x,t) - q(x) K(x,t) \right] \varphi(t) dt \\ & + 2 \frac{dK(x,x)}{dx} \varphi(x) - q(x) \varphi(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Luego, en (4.5) lo que nos queda son prácticamente las propiedades 1. y 2. que $K(x, t)$ satisface y fueron establecidas en el Teorema 1.28.

Por lo tanto se tiene la igualdad (4.4). ■

La construcción del kernel K de manera cerrada es una tarea difícil. Sin embargo, siempre se puede calcular la imagen de las potencias x^{2k+l+1} para cualquier $k \in 0, 1, 2, \dots$. Estas son precisamente las potencias de x que encontramos en la representación en serie de potencias (4.3) de la función \mathbf{d}_l . Para formular esta propiedad del mapeo del operador \mathbf{T} se define el sistema de integrales recursivas (1.69) de [10] con $R = 1$.

Las funciones (1.69) con $R = 1$ surgen en relación con la representación en series de potencias del parámetro espectral (SPPS) de la solución regular de (4.1). Mantenemos la notación \tilde{X} por consistencia con las notaciones de otras publicaciones sobre el método SPPS, ver por ejemplo [31], [37], [38], [39]. Las funciones $\tilde{X}^{(n)}$ están bien definidas si suponemos que u_0 no tiene ceros en $(0, b]$. Por ejemplo, esto es cierto cuando $q(x) \geq 0$ para toda $x \in (0, b]$ (ver el Corolario 1.26). Sin embargo, de hecho necesitamos considerar no las funciones $\tilde{X}^{(n)}$ sino sus productos con u_0 (ver la igualdad (1.79)) la cuál puede ser bien definida aún cuando u_0 tenga ceros en $(0, b]$. Para no sobrecargar esta tesis con correspondientes detalles técnicos suponemos que u_0 no tiene ceros en $(0, b]$ pero enfatizamos que los resultados son válidos sin estas restricciones.

Así, utilizando (1.79) resultado de los doctores R. Castillo, S. Torba y V. Kravchenko en su artículo [10] obtuvimos la forma que toman las soluciones de la ecuación (2.1) al enviarlas en soluciones de la ecuación (3.2), a tales soluciones las llamamos **polinomios de onda generalizados** relacionados a la ecuación (3.2), y las podemos encontrar en el Capítulo 3 en (3.3) y (3.4).

4.2 Extensión del núcleo de transmutación

En esta sección mostraremos que el kernel $K(x, t)$, definido hasta ahora en el triángulo inferior $\{0 \leq t \leq x \leq b\}$, admite una extensión natural sobre el cuadrado $\{0 \leq t \leq x \leq b\} \cup \{0 \leq x \leq t \leq b\}$, en lo que sigue nos dedicaremos a extender su dominio de definición.

Para esto, consideremos al operador inverso \mathbf{T}^{-1} el cual tiene la forma

$$\mathbf{T}^{-1}[\varphi(x)] = \varphi(x) - \int_0^x L(x, t) \varphi(t) dt. \quad (4.6)$$

De forma similar al Teorema 4.1 se obtiene el resultado para el operador inverso, después del cual estableceremos el comportamiento del núcleo en el triángulo $\{0 \leq x \leq t \leq b\}$ de vértices $(0, 0)$, $(0, b)$, (b, b) .

Teorema 4.2. *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{A}_l$ la siguiente igualdad es válida*

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}[\varphi(x)] = \mathbf{L}_0\mathbf{T}^{-1}[\varphi(x)]. \quad (4.7)$$

Demostración: Desarrollando el lado derecho de (4.7) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \mathbf{T}^{-1} [\varphi(x)] &= \varphi''(x) - \int_0^x \frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial x^2} \varphi(t) dt - \frac{\partial L(x,t)}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \varphi(x) \\ &\quad + \frac{l(l+1)}{x^2} \int_0^x L(x,t) \varphi(t) dt - \frac{dL(x,x)}{dx} \varphi(x) - L(x,x) \varphi'(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L} [\varphi(x)] &= \varphi''(x) - \int_0^x L(x,t) \varphi''(t) dt - \frac{l(l+1)}{x^2} \varphi(x) + \int_0^x L(x,t) \frac{l(l+1)}{t^2} \varphi(t) dt \\ &\quad - q(x) \varphi(x) + \int_0^x L(x,t) q(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes el término $\int_0^x L(x,t) \varphi''(t) dt$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^x L(x,t) \varphi''(t) dt &= L(x,x) \varphi'(x) - L(x,0) \varphi'(0) - \frac{\partial L(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi(x) \\ &\quad + \frac{\partial L(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi(0) + \int_0^x \frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial t^2} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Así, $\int_0^x L(x,t) \varphi''(t) dt = L(x,x) \varphi'(x) - L(x,0) \varphi'(0) - \frac{\partial L(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=x} \varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial t^2} \varphi(t) dt$,
porque $\frac{\partial L(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi(0) = 0$ ya que $\varphi \in \mathcal{A}_l$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L} [\varphi(x)] - \mathbf{L}_0 \mathbf{T}^{-1} [\varphi(x)] &= \int_0^x \left[\frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} L(x,t) + \frac{l(l+1)}{t^2} L(x,t) \right] \varphi(t) dt \\ &\quad + \int_0^x q(t) L(x,t) \varphi(t) dt + L(x,t) \varphi'(t) \Big|_{t=0} \\ &\quad + 2 \frac{dL(x,x)}{dx} \varphi(x) - q(x) \varphi(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Luego, de (4.8) se tiene que $L(x,t)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} L(x,t) + \frac{l(l+1)}{t^2} L(x,t) + q(t) L(x,t) = 0 \quad (4.9)$$

y satisface las siguientes condiciones frontera:

$$\frac{dL(x,x)}{dx} = \frac{1}{2} q(x), \quad L(x,0) = 0, \quad y \quad \text{adicionalmente} \quad \lim_{t \rightarrow 0} L(x,t) t^l = 0, \quad \text{cuando} \quad -\frac{1}{2} \leq l < 0.$$

Por lo tanto se tiene la igualdad (4.7). ■

Ahora la extensión del núcleo $K(x,t)$ sobre el triángulo $0 \leq x \leq t \leq b$ se define como sigue $K(x,t) := L(t,x)$ y renombrando las variables tenemos el siguiente resultado para la **extensión del dominio del núcleo del operador de transmutación:**

Proposición 4.3. $K(x, t)$ en $\{0 \leq t \leq x \leq b\} \cup \{0 \leq x \leq t \leq b\}$ es tal que:

1. Satisface la ecuación (3.2) en $\{0 < t < x \leq b\} \cup \{0 < x < t \leq b\}$
2. $\frac{dK(x,x)}{dx} = \frac{1}{2}q(x)$, $x \in [0, b]$.
- 3.

$$K(x, 0) = 0, \quad y \quad K(0, t) = 0 \quad x, t \in [0, b]$$

y adicionalmente

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(x, t) \cdot t^l = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0} K(x, t) \cdot x^l = 0, \quad \text{cuando} \quad -\frac{1}{2} \leq l < 0.$$

Finalmente, se tiene la definición del núcleo en todo el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, b)$, $(b, 0)$, (b, b) como se muestra en la Figura 4.1.

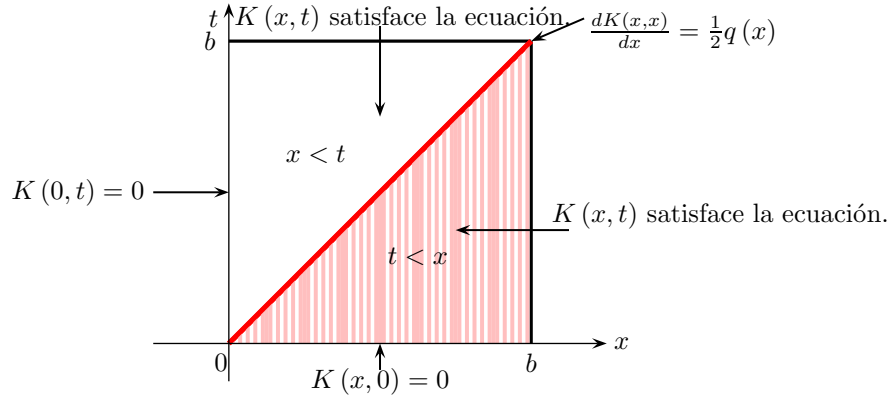


Figura 4.1: Dominio de definición extendido del núcleo $K(x, t)$ del operador \mathbf{T} .

Note que el núcleo K extendido es continuo en todo el cuadrado $[0, b] \times [0, b]$.

De ahora en adelante consideraremos este núcleo extendido y utilizaremos la misma notación K para él.

En las dos siguientes proposiciones mostramos que los polinomios de onda generalizados, los cuales son soluciones de la ecuación (3.2), satisfacen las propiedades 3. y 3 a) de la Proposición 4.3. y del Teorema 1.28.

Proposición 4.4. Los polinomios de onda generalizados $u_0(x, t)$, $u_{4n-1}(x, t)$ satisfacen las propiedades

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_0(x, t) \cdot t^l = 0, \quad \forall l \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad y \quad u_0(x, 0) = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_{4n-1}(x, t) \cdot t^l = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall l \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad y \quad u_{4n-1}(x, 0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

Demostración: Sea $l \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Consideremos $u_0(x, t) = \Xi_0 u_0(x) t^{l+1}$, donde Ξ_0 es la constante que aparece en (3.3) y $u_0(x)$ es como se describe en el Teorema 1.23, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_0(x, t) \cdot t^l = \Xi_0 u_0(x) \lim_{t \rightarrow 0} t^{2l+1} = 0$$

si $2l + 1 \neq 0$, pero es cero para $l = -\frac{1}{2}$. Entonces $u_0(x, t)$ satisface la propiedad (4.10). Ahora

consideremos a los $u_{4n-1}(x, t) = \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} u_0(x) \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) t^{2k+l+1}$, donde $\Xi_{n,k}$ es la constante que aparece en (3.4) y $u_0(x)$ es como en el Teorema 1.23 entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_{4n-1}(x, t) \cdot t^l = \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} u_0(x) \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) \lim_{t \rightarrow 0} t^{2k+2l+1} = 0$$

si $2k + 2l + 1 \neq 0$, pero es cero para $l = -\frac{1}{2}$ y $k = 0$. Entonces, $u_{4n-1}(x, t)$ satisface la propiedad (4.11).

Ahora para $l \geq -\frac{1}{2}$. Consideremos $u_0(x, t)$ como antes, entonces

$$u_0(x, 0) = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}.$$

Entonces se satisface la propiedad (4.10). Considerando ahora a los $u_{4n-1}(x, t)$ como antes

$$u_{4n-1}(x, 0) = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}.$$

Entonces, $u_{4n-1}(x, t)$ satisface la propiedad (4.11). ■

De manera similar se tiene que

Proposición 4.5. *Los polinomios de onda generalizados $u_0(x, t)$, $u_{4n-1}(x, t)$ satisfacen las propiedades*

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_0(x, t) \cdot x^l = 0, \quad \forall l \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad y \quad u_0(0, t) = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_{4n-1}(x, t) \cdot x^l = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall l \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad y \quad u_{4n-1}(0, t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.13)$$

Demostración: Sea $l \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Consideremos $u_0(x, t) = \Xi_0 u_0(x) t^{l+1}$, donde Ξ_0 es la constante que aparece en (3.3) y $u_0(x)$ es como se describe en el Teorema 1.23, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_0(x, t) \cdot x^l = \Xi_0 t^{l+1} \lim_{x \rightarrow 0} u_0(x) x^l = 0,$$

ya que u_0 es tal que $u_0 \sim x^{l+1}$ cuando $x \rightarrow 0$ y $u_0(0) = 0$. Entonces $u_0(x, t)$ satisface la

propiedad (4.12). Ahora consideremos a los $u_{4n-1}(x, t) = \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} u_0(x) \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) t^{2k+l+1}$,

donde $\Xi_{n,k}$ es la constante que aparece en (3.4) y $u_0(x)$ es como en el Teorema 1.23 entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_{4n-1}(x, t) \cdot x^l = \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} t^{2k+l+1} \lim_{x \rightarrow 0} u_0(x) \tilde{X}^{(2[n-k])}(x) x^l = 0$$

ya que u_0 es tal que $u_0 \sim x^{l+1}$ cuando $x \rightarrow 0$ y $u_0(0) = 0$. Entonces, $u_{4n-1}(x, t)$ satisface la propiedad (4.13).

Ahora para $l \geq -\frac{1}{2}$. Consideremos $u_0(x, t)$ como en (3.3)

entonces
$$u_0(0, t) = \Xi_0 u_0(0) t^{l+1} = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}.$$

Entonces se satisface la propiedad (4.12). Considerando ahora a los $u_{4n-1}(x, t)$ como en (3.4)

$$u_{4n-1}(0, t) = \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} u_0(0) \tilde{X}^{(2[n-k])}(0) t^{2k+l+1} = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}.$$

Entonces, $u_{4n-1}(x, t)$ satisface la propiedad (4.13). ■

De estas dos proposiciones se tiene que los polinomios de onda generalizados en el límite cuando $x \rightarrow 0$ o $t \rightarrow 0$ se comportan como $K(x, t)$ para toda $l > -\frac{1}{2}$.

La extensión del dominio del núcleo que hemos realizado será de gran importancia en lo que sigue, ya que para mostrar el problema de Goursat para la pre-imagen del núcleo (el cual se establece en la Proposición 4.7) trabajamos en un dominio adecuado.

4.3 La pre-imagen del núcleo de transmutación

Ahora que conocemos al operador inverso \mathbf{T}^{-1} podemos trabajar con la pre-imagen del núcleo $k(x, t)$ y obtener un resultado similar al de $K(x, t)$, el cual discutiremos en lo que sigue.

De (4.6) y (1.81) se tiene que $k(x, t)$ y $K(x, t)$ respectivamente, toman la forma:

El kernel $K(x, t)$ es la imagen de una cierta función $k(x, t)$ definida en el cuadrado $[0, b] \times [0, b]$ bajo la acción del operador \mathbf{T} ,

$$K(x, \tau) = \mathbf{T}[k(x, \tau)] = k(x, \tau) + \int_0^x K(x, t) k(t, \tau) dt. \tag{4.14}$$

Note que estamos aplicando el operador \mathbf{T} con respecto a la variable x , la variable τ sirve como un parámetro.

La extensión del núcleo de transmutación K introducido en la sección previa nos permite escribir a la pre-imagen de k en la forma

$$k(x, \tau) := \mathbf{T}^{-1}[K(x, \tau)] = K(x, \tau) - \int_0^x K(t, x) K(t, \tau) dt. \tag{4.15}$$

Ahora estamos interesados en establecer ciertas propiedades básicas de k para probar que puede ser aproximado por polinomios de onda generalizados en un dominio adecuado. Para esto necesitamos probar que k es una solución de (2.1). Considerando el triángulo $0 < t < x < b$ como el dominio no nos lleva al objetivo. Claramente, el kernel K no es necesariamente una solución de (3.2) en todo el cuadrado $\{0 < t \leq x < b\} \cup \{0 < x \leq t < b\}$ sólo en la unión de los

triángulos abiertos $\{0 < t < x < b\} \cup \{0 < x < t < b\}$. Por lo tanto no podemos verificar que k es una solución de (2.1) por sustitución directa de (4.15) en (2.1), esto requerira en los cálculos que K es solución de (3.2) en todo el cuadrado:

Si continuamos en el triángulo inferior $0 \leq \tau \leq x \leq b$ para probar que la pre-imagen del núcleo satisface la ecuación (2.1) se hace uso de la identidad $\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{L} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{\tau^2}\right)\right)K(x, \tau) = 0$, lo que nos lleva a mostrar que $\mathbf{T}^{-1}[K(x, \tau)]$ este bien definido. Del Teorema 4.2 considerando $\varphi(x, \tau) = K(x, \tau)$ en $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}[K(x, \tau)]$ entre otros términos aparece la integral $\int_0^x K(t, x) \frac{\partial^2 K(t, \tau)}{\partial t^2} dt$, la cual no está bien definida pues en algún momento t será igual a x y en tal caso podríamos obtener una función discontinua.

Sin embargo, considerando el triángulo $\{0 < x < t < b\}$ como dominio para k no se nos presenta alguna dificultad. Por esta razón de ahora en adelante consideraremos el triángulo $\{0 < x < t < b\}$ como dominio para todas las construcciones.

Iniciamos con el siguiente resultado auxiliar en esta dirección, mostraremos que se satisface (4.4) con $\varphi(x, \tau) = k(x, \tau)$.

Lema 4.6. *Para cualquier $0 < x < \tau < b$ la siguiente igualdad es válida*

$$\mathbf{LT}[k(x, \tau)] = \mathbf{TL}_0[k(x, \tau)]. \quad (4.16)$$

Demostración: Desarrollando el lado izquierdo tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{LT}[k(x, \tau)] &= \frac{\partial^2 k(x, \tau)}{\partial x^2} + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} k(t, \tau) dt + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} k(x, \tau) + \frac{dK(x, x)}{dx} k(x, \tau) \\ &\quad + K(x, x) \frac{\partial k(x, \tau)}{\partial x} - \frac{l(l+1)}{x^2} k(x, \tau) - \frac{l(l+1)}{x^2} \int_0^x K(x, t) k(t, \tau) dt \\ &\quad - q(x) k(x, \tau) - q(x) \int_0^x K(x, t) k(t, \tau) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{TL}_0[k(x, \tau)] = \frac{\partial^2 k(x, \tau)}{\partial x^2} + \int_0^x K(x, t) \frac{\partial^2 k(t, \tau)}{\partial t^2} dt - \frac{l(l+1)}{x^2} k(x, \tau) - \int_0^x K(x, t) \frac{l(l+1)}{t^2} k(t, \tau) dt.$$

Integración por partes nos lleva a la igualdad:

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, t) \frac{\partial^2 k(t, \tau)}{\partial t^2} dt &= K(x, x) \frac{\partial k(x, \tau)}{\partial x} - K(x, 0) \frac{\partial k(t, \tau)}{\partial x} \Big|_{t=0} - \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} k(x, \tau) \\ &\quad + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} k(0, \tau) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} k(t, \tau) dt, \end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que $\frac{\partial k(x, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial k(t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t=x}$.

Tomando en cuenta 3. del Teorema 1.28 y el hecho de que $\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} k(0,\tau) = 0$ ya que

$$k(0,\tau) = \mathbf{T}^{-1} [K(x,\tau)] \Big|_{x=0} = K(0,\tau) = 0, \quad (4.17)$$

obtenemos

$$\int_0^x K(x,t) \frac{\partial^2 k(t,\tau)}{\partial t^2} dt = K(x,x) \frac{\partial k(x,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=x} k(x,\tau) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} k(t,\tau) dt$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}\mathbf{T} [k(x,\tau)] - \mathbf{T}\mathbf{L}_0 [k(x,\tau)] \\ &= \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} K(x,t) + \frac{l(l+1)}{t^2} K(x,t) - q(x) K(x,t) \right] k(x,\tau) dt \\ &+ 2 \frac{dK(x,x)}{dx} k(x,\tau) - q(x) k(x,\tau) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente hay que notar que lo que queda en (4.18) son prácticamente las propiedades que $K(x,t)$ satisface. ■

En la siguiente proposición resumimos las propiedades para $k(x,t)$.

Proposición 4.7. *La función $k(x,\tau)$ definida por (4.14) satisface las siguientes propiedades:*

1. $\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) k(x,\tau) = 0$, en $0 < x < \tau < b$.
2. $\frac{dk(x,x)}{dx} \in C([0,b])$.
3. $k(0,\tau) = 0$.

Demostración:

1. Considerando $\frac{\partial}{\partial \tau} [\mathbf{T}\varphi(x,\tau)] = \mathbf{T} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(x,\tau) \right]$ y la identidad

$$\mathbf{T}^{-1} \left\{ \left(\mathbf{L} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) \right) \mathbf{T} [k(x,\tau)] \right\} = 0,$$

la propiedad 1. se sigue directamente del Lema 4.6

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{T}^{-1} \left\{ \left(\mathbf{L} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) \right) \mathbf{T} [k(x,\tau)] \right\} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \left\{ \mathbf{T}\mathbf{L}_0 k(x,\tau) - \mathbf{T} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) k(x,\tau) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{L}_0 - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) \right\} k(x,\tau) \\ &= \left\{ \mathbf{L}_0 - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) \right\} k(x,\tau) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{\tau^2} \right) k(x,\tau). \end{aligned}$$

2. Por (4.15) se tiene que $k(x, x) = K(x, x) - \int_0^x K^2(t, x)dt$, entonces

$$\frac{dk(x, x)}{dx} = \frac{dK(x, x)}{dx} - \frac{d}{dx} \int_0^x K^2(t, x)dt = \frac{1}{2}q(x) - \frac{d}{dx} \int_0^x K^2(t, x)dt = \frac{1}{2}h(x), \quad (4.19)$$

esta expresión es una función continua, debido a que q y K son funciones continuas.

3. Por último, que $k(0, \tau) = 0$ se obtuvo en (4.17). ■

En la siguiente proposición se establece que los polinomios de onda generalizados, los cuales son soluciones de la ecuación (2.1), se comportan como la pre-imagen del núcleo cuando $x = 0$ y cuando $t = 0$.

Proposición 4.8. *Los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t)$ y $U_{4n-1}(x, t)$ satisfacen las propiedades*

$$U_0(0, t) = 0 \quad y \quad U_0(x, 0) = 0, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.20)$$

$$U_{4n-1}(0, t) = 0 \quad y \quad U_{4n-1}(x, 0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.21)$$

Observación 4.9. *La Proposición 4.8 se sigue de que los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t)$ y $U_{4n-1}(x, t)$ son un caso particular de los polinomios de onda generalizados $u_0(x, t)$ y $u_{4n-1}(x, t)$ siempre que $u_0(x) = x^{l+1}$. Pues como vimos en el Capítulo 3, $u_0(x, t) = \mathbf{T}[U_0(x, t)]$ y $u_{4n-1}(x, t) = \mathbf{T}[U_{4n-1}(x, t)]$.*

Observación 4.10. *De la Proposición 4.8 obtenemos que los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t) = Y_{l,x}Y_{l,t}[p_0(x, t)]$ y $U_{4n-1}(x, t) = Y_{l,x}Y_{l,t}[p_{4n-1}(x, t)]$ satisfacen la ecuación (2.1) debido a la explicación dada en la Sección 2.7, junto con las condiciones frontera $U(0, t) = 0$ y $U(x, 0) = 0$, por definición de $Y_{l,x}$ y $Y_{l,t}$ y de la Proposición 2.1 se sigue que tienen la forma presentada en (2.20) y (2.21).*

4.4 Aproximación analítica del kernel de transmutación

El objetivo de esta sección es mostrar que el kernel de transmutación K puede ser aproximado uniformemente por combinaciones lineales de los polinomios de onda generalizados (3.3), (3.4). Para esto primero consideramos su pre-imagen k y probamos que puede ser uniformemente aproximado por los polinomios de onda generalizados (2.20), (2.21). Esto se hace mediante el establecimiento del buen planteamiento de un correspondiente problema de Goursat el cual aparece en la Proposición 4.7 y cierta completez de las trazas de (2.20), (2.21) sobre $t = x$.

Como se mencionó antes, nuestro primer objetivo de esta sección es mostrar que para $\varepsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que $|k(x, t) - k_N(x, t)| < \varepsilon$, donde $k_N(x, t) = \sum_{\kappa=0}^N a_\kappa U_\kappa(x, t)$. Antes de ello, necesitamos un resultado de aproximación

de la derivada de la pre-imagen del núcleo por medio de las derivadas de los polinomios de onda generalizados (2.20), (2.21) en la diagonal del triángulo $0 < x < t < b$, es decir, necesitamos mostrar que para $\varepsilon > 0$, existen $N \in \mathbb{N}$ y coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left| \frac{dk(x,x)}{dx} - \frac{dk_N(x,x)}{dx} \right| < \varepsilon, \text{ con } \frac{dk_N(x,x)}{dx} = \sum_{\kappa=0}^N a_\kappa \frac{dU_\kappa(x,x)}{dx}.$$

Tal aproximación en la diagonal del triángulo $0 < x < t < b$ se obtiene por medio de un par de lemas tipo Müntz en los que mostramos que **las trazas de los polinomios de onda generalizados** $U_0(x,x), U_{4n-1}(x,x)$, **son completas en el espacio** $C_0^1([0, b])$.

Antes de entrar en detalles considerando el Teorema 1.15 de Müntz, recordando la forma que toman nuestros polinomios de onda generalizados $U_0(x,t)$ y $U_{4n-1}(x,t)$ veamos si cumplen las condiciones del Teorema de Müntz y lo que nos lleva a mostrar la completez en el espacio $C_0^1([0, b])$.

Considerando a cada polinomio de onda generalizado $U_0(x,t)$ y $U_{4n-1}(x,t)$, los cuales encontramos en el Capítulo 2 y tomando $x = t$ tenemos que sus trazas son:

$$\begin{aligned} U_0(x,x) &= C_0^2 x^{2(l+1)} \\ U_3(x,x) &= 2C_0 C_2 x^{2(l+2)} \\ U_7(x,x) &= (2C_0 C_4 + 6C_2^2) x^{2(l+3)} \\ &\vdots \\ U_{4n-1}(x,x) &= \tilde{C} x^{2(n+l+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde \tilde{C} es la constante que aparece al hacer $x = t$ en $U_{4n-1}(x,t)$.

Notemos que para las trazas $U_{4n-1}(x,x)$ no tenemos potencia igual a cero, es decir $P_j \neq 0$ para toda j, l . Consideramos a $\{P_j\}_{j=0}^\infty = \{2(j+l+1)\}_{j=0}^\infty$ la cuál si satisface que $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j = \infty$

y $\sum_{\substack{j=1 \\ P_j \neq 0}}^\infty \frac{1}{P_j} = \infty$, pues es una serie armónica.

Por lo anterior no podemos mostrar la completez en $C([0, b])$. Pero la idea entonces es mostrar que $\{x^{P_j} : P_j \neq 0\}$ es completo en $C_0([0, b])$.

Lema 4.11. *Sea P_j una sucesión de números positivos distintos tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j = \infty$ y $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{P_j} = \infty$. Entonces $\{x^{P_j}\}$ es completo en $C_0([0, b])$.*

Demostración: Sea $f \in C_0([0, b])$. Como f es continua, por el Teorema 1.15 el conjunto de potencias $\{x^{P_j} : j = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{1\}$ es completo en $C([0, b])$, así, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario

existen $N \in \mathbb{N}$ y coeficientes $c_j, j=0, 1, \dots$, tales que $\left| f(x) - \sum_{j=1}^N c_j x^{P_j} - c_0 1 \right| < \varepsilon$ para toda $x \in [0, b]$.

En particular, tomando $x = 0$ se tiene que $\left| f(0) - \sum_{j=1}^N c_j(0)^{P_j} - c_0 1 \right| = |f(0) - c_0 1| = |c_0 1| = |c_0| < \varepsilon$.

Luego,

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^N c_j x^{P_j} \right| = \left| f(x) - \sum_{j=1}^N c_j x^{P_j} - c_0 1 + c_0 1 \right| \leq \left| f(x) - \sum_{j=0}^N c_j x^{P_j} \right| + |c_0| < 2\varepsilon.$$

Por lo tanto, el conjunto de potencias $\{x^{P_j} : j = 1, 2, \dots\} = \{0 < x^1 < x^2 < \dots\}$ es completo en $C_0([0, b])$. ■

Considerando la derivada de las trazas $\frac{dU_{4n-1}(x,x)}{dx}$ y $\frac{dU_0(x,x)}{dx}$ observemos que $\frac{dU_n(x,x)}{dx}$ toma la forma $\frac{dU_n(x,x)}{dx} = \bar{C}x^{2(n+l)+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, donde \bar{C} es la constante que aparece al derivar las trazas de $U_{4n-1}(x, t)$. Notemos que las derivadas no tienen una potencia igual a cero para toda l , sólo existe dicha potencia para el caso $l = -\frac{1}{2}$ y podemos elegir la sucesión $\{P_j\}_{j=0}^{\infty} = \{2(j+l)+1\}_{j=0}^{\infty}$, la cuál claramente es tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} (P_j - 1) = \infty$ y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P_j - 1} = \infty$, ya que es una serie armónica.

Por lo que la idea en este caso es mostrar la **completitud de $\frac{dU_n(x,x)}{dx}$ en el espacio $C_0^1([0, b])$** .

Lema 4.12. *Sea $\{P_j\}$ una sucesión de números $P_j > 1$ distintos para toda $j \in \mathbb{N}$, tales que $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j = \infty$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P_j} = \infty$. Entonces, $\{x^{P_j}\}$ es completa en $C_0^1([0, b])$.*

Demostración: Sea $f(x) \in C_0^1([0, b])$, por el Lema 4.11 $\{x^{P_j}\}$ es completo en $C_0([0, b])$, es decir,

$$\left| f'(x) - \sum_{j=0}^N a_j x^{P_j-1} \right| \leq \varepsilon_1, \text{ para todo } x \in [0, b]. \quad (4.22)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{j=0}^N \frac{a_j}{P_j} x^{P_j} \right| &= \left| \int_0^x f'(s) ds - \sum_{j=0}^N a_j \int_0^x s^{P_j-1} ds \right| \\ &\leq \int_0^x \left| f'(s) - \sum_{j=0}^N a_j s^{P_j-1} \right| ds \leq \varepsilon_1 \int_0^x ds \\ &\leq \varepsilon_1 x \leq \varepsilon_1 \cdot b, \quad x \in [0, b]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{x^{P_j}\}$ es completa en $C_0^1([0, b])$. ■

De estos dos lemas tipo Müntz obtenemos la **completitud de las trazas de los polinomios de onda generalizados $U_0(x, x)$ y $U_{4n-1}(x, x)$ en el espacio $C_0^1([0, b])$** .

Como mencionamos anteriormente estamos interesados en mostrar que la función $\frac{dk(x,x)}{dx}$ puede ser aproximada uniformemente por combinaciones lineales de las funciones $\frac{dU_0(x,x)}{dx}$ y $\frac{dU_{4n-1}(x,x)}{dx}$, $n = 1, 2, \dots$. Observamos que $\frac{dU_0(x,x)}{dx} = \bar{C}_0 x^{2l+1}$ y $\frac{dU_{4n-1}(x,x)}{dx} = \bar{C}_n x^{2(n+l)+1}$, $n =$

1, 2, ... donde \bar{C}_n son constantes, y por lo tanto la potencia cero de x es un elemento del conjunto $\left\{ \frac{dU_0(x,x)}{dx} \right\} \cup \left\{ \frac{dU_{4n-1}(x,x)}{dx} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sólo si $l = -\frac{1}{2}$.

Sin embargo, notemos que en la Proposición 4.13 y puede ser visto desde (4.19), que si

$$q(0) = 0 \tag{4.23}$$

la función $k(x, x)$ es un elemento de $C_0^1([0, b])$. Sin pérdida de generalidad supongamos que (4.23) siempre se cumple. Claramente, considerando $\Lambda := \lambda - q(0)$ y $Q(x) := q(x) - q(0)$ tal que $Q(0) = 0$, podemos reescribir la ecuación (4.1) en la forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - Q(x) \right) u = \Lambda u, \tag{4.24}$$

donde el potencial satisface (4.23). De ahora en adelante supondremos que se satisface (4.23).

Ahora podemos establecer el resultado acerca de la **aproximación en la diagonal de la derivada de la pre-imagen del núcleo por las derivadas de las trazas de los polinomios de onda generalizados**:

Proposición 4.13. *Para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que para todo $x \in [0, b]$ se cumple la desigualdad*

$$\left| \frac{dk(x, x)}{dx} - \frac{dk_N(x, x)}{dx} \right| \leq \varepsilon, \tag{4.25}$$

donde

$$k_N(x, t) := a_0 U_0(x, t) + \sum_{\kappa=1}^N a_{\kappa} U_{4\kappa-1}(x, t). \tag{4.26}$$

Demostración: Por el Lema 4.11 y el Lema 4.12 es suficiente mostrar que $k(x, x) \in C_0^1([0, b])$, ya que las trazas de los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t)$, $U_{4\kappa-1}(x, t)$, $\kappa = 1, 2, \dots$ en la línea $t = x$ satisfacen las condiciones de los Lemas tipo Müntz. Por la propiedad **3.** de la Proposición 4.7 sabemos que $k(0, 0) = 0$. Más aún, de (4.19) obtenemos que $\frac{dk(0,0)}{dx} = \frac{1}{2}q(0) = 0$. Así, $k(x, x) \in C_0^1([0, b])$, y la prueba se sigue de los Lemas tipo Müntz. ■

El siguiente paso es probar que la aproximación uniforme de la pre-imagen del núcleo de transmutación en la línea $t = x$ implica su aproximación uniforme en todo el triángulo superior, $0 \leq x \leq t \leq b$. Para esto necesitamos la **estabilidad del problema de Goursat** que aparece en la Proposición 4.7, esto es, demostrar que no afecta mucho a la solución si cambiamos un poco la condición frontera sobre la diagonal del triángulo superior.

Primero, en el siguiente enunciado usando el resultado de [71] escribimos su solución. Para ello utilizaremos el concepto de función de Riemann y el método de Riemann los cuales son muy conocidos y los podemos encontrar en [14], [36], [48], [56] y [71].

Proposición 4.14. *Sea $h(x)$ una función continua, la única solución en el triángulo $0 < x \leq t \leq b$ del problema de Goursat:*

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) H(x, t) = 0, \quad l \geq -\frac{1}{2} \tag{4.27}$$

$$\frac{dH(x, x)}{dx} = \frac{1}{2}h(x), \quad (4.28)$$

$$H(0, t) = 0, \quad (4.29)$$

está dada por la fórmula

$$H(x, t) = (z - s)^{-l} u(z, s), \quad (4.30)$$

con $z = \frac{1}{4}(x + t)^2$, $s = \frac{1}{4}(x - t)^2$ y u definida por

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_0^\xi v(z, 0; \xi, \eta) h(\sqrt{z}) z^{l-\frac{1}{2}} dz \quad (4.31)$$

donde v es la **función de Riemann** del problema la cuál admite una representación explícita presentada en la subsección 4.4.1 y construida de manera similar a [71].

Demostración: Al realizar el cambio de variables $z = \frac{1}{4}(x + t)^2$, $s = \frac{1}{4}(x - t)^2$, transformamos (4.27)-(4.29) en el siguiente problema de valores frontera para $u(z, s)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial s} + \frac{l}{z - s} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{l}{z - s} \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{lu}{z} = \frac{1}{4} h(\sqrt{z}) z^{l-\frac{1}{2}}, \quad s = 0 \quad (4.33)$$

$$u(z, z) = 0. \quad (4.34)$$

Denotamos por Z al dominio de este problema de valores frontera, dado por $0 \leq s \leq z \leq b^2$, $\sqrt{s} + \sqrt{z} \leq b$.

(4.32) se obtiene después de derivar (4.27) con el cambio de variables mencionado. Note que (4.33) se tiene considerando la condición frontera (4.28). Así, al derivar $H(x, x) = z^{-l} u(z, 0)$ con respecto a x se tiene que:

$$\frac{d}{dz} [z^{-l} u(z, 0)] \frac{dz}{dx} = -2\sqrt{z} \left[lz^{-(l+1)} u(z, 0) - z^{-l} \frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} \right] = -\frac{2lu(z, 0)}{z^{l+\frac{1}{2}}} + \frac{2}{z^{l-\frac{1}{2}}} \frac{\partial u(z, 0)}{\partial z}.$$

Por otro lado, $h(x) = h(\sqrt{z})$. Así,

$$\frac{1}{z^{l-\frac{1}{2}}} \frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} - \frac{lu(z, 0)}{z^{l+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} h(\sqrt{z}).$$

Multiplicando por $z^{l-\frac{1}{2}}$ se tiene (4.33). Y (4.34) se sigue directamente de (4.29). Al resolver (4.32)-(4.34) por medio del **método de Riemann**, como se detalla en el artículo de V. Ya. Volk [71], se tiene la integral (4.31). ■

4.4.1 Estabilidad del problema de Goursat para $k(x, t)$

En el apartado anterior se introdujo la fórmula (4.31), que ahora se considera como la representación integral para $u(\xi, \eta)$:

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi v(z, 0; \xi, \eta) h(\sqrt{z}) z^{l-\frac{1}{2}} dz.$$

Mostraremos que la solución integral para el problema de valores frontera (4.32)-(4.34) es acotada, y con ello la estabilidad del problema de Goursat es decir, que variando un poco la condición frontera sobre la diagonal del triángulo $0 \leq x \leq t \leq b$ no afecta mucho a la solución $H(x, t)$ definida en (4.30).

La función de Riemann $v(z, s; \xi, \eta)$ para el problema de valores frontera (4.32)-(4.34) tiene la forma [71]

$$v(z, s; \xi, \eta) = \begin{cases} v_1(z, s; \xi, \eta) & \text{si } 0 < \eta < z < \xi, \\ v_2(z, s; \xi, \eta) & \text{si } 0 < z < \eta < \xi \end{cases},$$

la cual es continua en cada una de las regiones, se expresa en términos de funciones hipergeométricas y tiene una discontinuidad en $z = \eta$, donde

$$v_1(z, s; \xi, \eta) = (\eta - z)^l (s - \xi)^l (s - z)^{-2l} {}_2F_1 \left(-l, -l; 1; \frac{(z - \xi)(s - \eta)}{(z - \eta)(s - \xi)} \right)$$

y

$$v_2(z, s; \xi, \eta) = \frac{-\text{sen}(\pi l) \{\Gamma(1+l)\}^2}{\pi \Gamma(2+2l)} (\eta - \xi)^{1+2l} (z - s)(s - \xi)^{-(l+1)} (\eta - z)^{-(l+1)} \\ \times {}_2F_1 \left(1+l, 1+l; 2+2l; \frac{(z-s)(\eta-\xi)}{(z-\eta)(s-\xi)} \right).$$

El objetivo de esta sección es proveer las estimaciones uniformes con respecto a ξ, η para las funciones v_1, v_2 y para la integral (4.31). La principal razón para la necesidad de tales nuevas estimaciones es que las presentadas en [71] contienen un error. Por ejemplo, en [71] se establece que $u(\xi, \eta) = O\left[(\xi - \eta)^{1+l-\rho}\right]$, $0 \leq \rho < 1$. De esta estimación podemos obtener que el núcleo integral K del operador de transmutación debe satisfacer la desigualdad $|K(x, t)| \leq C(xt)^{1-\rho}$ y en particular, para $x = t$, la desigualdad $|K(x, x)| \leq Cx^{2-2\rho}$ lo cual es imposible para cualquier $\rho < \frac{1}{2}$ el cual es imposible para cualquier $\rho < \frac{1}{2}$ debido a la condición de Goursat $\frac{dK(x, x)}{dx} = \frac{1}{2}q(x)$.

Lema 4.15. *Las funciones v_1 y v_2 satisfacen las siguientes desigualdades*

$$|v_1(z, 0; \xi, \eta)| \leq C_1 \frac{|\eta - z|^l \xi^l}{z^{2l}}, \quad z \in \left(\frac{2\xi\eta}{\xi + \eta}, \xi \right), \quad (4.35)$$

$$|v_1(z, 0; \xi, \eta)| \leq C_2 \frac{|\xi - z|^l \eta^l}{z^{2l}} \left(\log \left(\frac{(\xi - z)\eta}{(z - \eta)\xi} \right) + C_3 \right), \quad z \in \left(\eta, \frac{2\xi\eta}{\xi + \eta} \right), \quad (4.36)$$

$$|v_2(z, 0; \xi, \eta)| \leq C_4 \frac{(\xi - \eta)^{1+2l} z}{\xi^{1+l} (\eta - z)^{1+l}}, \quad z \in \left(0, \frac{\xi\eta}{2\xi - \eta} \right), \quad (4.37)$$

$$|v_2(z, 0; \xi, \eta)| \leq C_5 \frac{(\xi - \eta)^l}{z^l} \left(\log \left(\frac{z(\xi - \eta)}{\xi(\eta - z)} \right) + C_6 \right), \quad z \in \left(\frac{\xi\eta}{2\xi - \eta}, \eta \right), \quad (4.38)$$

donde las constantes C_i no dependen de z, ξ y η .

Demostración: Consideremos

$$v_1(z, 0; \xi, \eta) = \frac{(-1)^{-l} (\eta - z)^l \xi^l}{z^{2l}} {}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1), \quad 0 < \eta < z < \xi, \quad (4.39)$$

donde $\sigma_1 := \frac{(z-\xi)\eta}{(z-\eta)\xi}$. Cuando la variable z cambia de η a ξ , la variable σ_1 cambia de $-\infty$ a 0. Para estimar la función hipergeométrica en (4.39) consideramos dos casos, $\sigma_1 \in (-1, 0)$ y $\sigma_1 \in (-\infty, -1)$, correspondientes a $z \in \left(\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}, \xi \right)$ y $z \in \left(\eta, \frac{2\xi\eta}{\xi+\eta} \right)$, respectivamente. Para el primer caso, utilizando las propiedades de las funciones hipergeométricas de la fórmula 15.1.1 de [1] se sigue que

$${}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-l)_n}{n!} \right)^2 \sigma_1^n,$$

donde (α_n) denota el símbolo de Pochhammer. Los términos de esta serie alternan en signo y sus valores absolutos son monotonos decrecientes para $n > l$ y tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$:

1. Para $l \in \mathbb{N}_0$: existe una constante C_1 tal que $|{}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1)| \leq C_1$, con $\sigma_1 \in [-1, 0]$.
2. Para $l \notin \mathbb{N}_0$: considerando $a_n = \frac{[(-l)_n]^2}{(n!)^2}$, se tiene: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(n-l)^2} > 1$, $n > l$ entonces $a_{n+1} < a_n$.

Además, utilizando la definición de símbolo de Pochhammer y la fórmula 6.1.39 de [1] se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Por lo tanto,

$$|{}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma)| \leq \sum_{n=0}^{[l+1]} \left(\frac{(-l)_n}{n!} \right)^2 |\sigma|^n \leq \sum_{n=0}^{[l+1]} \left(\frac{(-l)_n}{n!} \right)^2 =: C_1, \quad \sigma_1 \in (-1, 0). \quad (4.40)$$

Así obtenemos la estimación (4.35)

$$\begin{aligned} |v_1(z, 0; \xi, \eta)| &= \left| \frac{(-1)^{-l} (\eta - z)^l \xi^l}{z^{2l}} {}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1) \right| = \frac{|\eta - z|^l \xi^l}{z^{2l}} |{}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1)| \\ &\leq C_1 \frac{|\eta - z|^l \xi^l}{z^{2l}}. \end{aligned}$$

Para el segundo caso, supongamos primero que $l \notin \mathbb{N}$. Usando la fórmula 2.1.4.18 de [18] obtenemos que:

$${}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1) = \frac{(-\sigma_1)^l}{\Gamma(-l)\Gamma(1+l)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-l)_n}{n!} \right]^2 \sigma_1^{-n} [\log(-\sigma_1) + h_n], \quad (4.41)$$

donde $h_n = 2\psi(1+n) - 2\psi(n-l) + \pi \cot(\pi l)$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-l)_n}{n!}\right)^2 \sigma_1^{-n}$ es acotada por la misma estimación (4.40) y, como $\psi(1+n) - \psi(n-l) = \frac{l+1}{n-l} + O(n^{-2})$ por la fórmula 1.18.7 de [18], la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-l)_n}{n!}\right)^2 \sigma_1^{-n} (\psi(1+n) - \psi(n-l))$ puede ser uniformemente acotada por la serie absolutamente convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l+1}{n-l} \left(\frac{(-l)_n}{n!}\right)^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |{}_2\mathbf{F}_1(-l, -l; 1; \sigma_1)| &= \frac{|\sigma_1|^l}{|\Gamma(-l)|\Gamma(1+l)} \left| (\log(-\sigma_1) + \cot(\pi l)) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-l)_n}{n!}\right)^2 \sigma_1^{-n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-l)_n}{n!}\right)^2 \sigma_1^{-n} (2\psi(1+n) - 2\psi(n-l)) \right| \\ &\leq \frac{|\sigma_1|^l}{|\Gamma(-l)|\Gamma(1+l)} [c_1 |\log(-\sigma_1) + \pi \cot \pi l| + c_2] \\ &\leq C_2 |\sigma_1|^l (\log(-\sigma_1) + C_3). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Así, tenemos la estimación (4.36):

$$|v_1(z, 0; \xi, \eta)| \leq \left| \frac{(-1)^l (\eta - z)^l \xi^l}{z^{2l}} \right| C_2 |\sigma_1|^l (\log(-\sigma_1) + C_3) = C_2 \frac{|\xi - z|^l \eta^l}{z^{2l}} \left(\log\left(\frac{(\xi - z)\eta}{z - \eta} \xi\right) + C_3 \right).$$

En el caso $l \in \mathbb{N}$ las funciones hipergeométricas se reducen a un caso polinomial, ver la fórmula 2.1.4.20 de [18].

Como veremos a continuación, las estimaciones (4.37) y (4.38) son completamente similares con la única diferencia de que para el caso $l \in \mathbb{N}$ utilizamos la fórmula 2.1.4.19 de [18].

Consideremos

$$v_2(z, 0; \xi, \eta) = \frac{\zeta (\eta - \xi)^{1+2l} z}{(-1)^{l+1} \xi^{l+1} (\eta - z)^{l+1}} {}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2), \quad 0 < z < \eta < \xi, \quad (4.43)$$

donde $\sigma_2 = -\frac{z(\xi-\eta)}{\xi(\eta-z)}$ y $\zeta = -\frac{\text{sen}(\pi l)\Gamma^2(l+1)}{\pi\Gamma(2+2l)}$.

Cuando la variable z cambia de 0 a η , la variable σ_2 cambia de $-\infty$ a 0. Para estimar la función hipergeométrica en (4.43) consideramos dos casos, $\sigma_1 \in (-1, 0)$ y $\sigma_2 \in (-\infty, -1)$ correspondientes a $z \in \left(0, \frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}\right)$ y $z \in \left(\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}, \eta\right)$ respectivamente.

Para el primer caso, de la fórmula 15.1.1 de [1], tenemos que ${}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1+l)_n]^2}{(2+2l)n!} \sigma_2^n$. Los términos de esta serie se alternan en signo y sus valores absolutos son monotonos decrecientes para $n \gg 0$ y tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$:

Considerando $a_n = \frac{[(1+l)_n]^2}{(2+2l)_n n!}$ se tiene que:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2+2l+n)(n+1)}{(1+l+n)^2} > 1, \quad n \gg 0,$$

entonces $a_{n+1} < a_n$ y por la fórmula 6.1.39 de [1] se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Por lo tanto,

$$|{}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+l)_n^2}{(2+2l)_n n!} =: C_4, \quad \sigma_2 \in (-1, 0). \quad (4.44)$$

Así, obtenemos la estimación (4.37)

$$|v_2(z, 0; \xi; \eta)| = \left| \frac{\zeta(\eta - \xi)^{1+2l} z}{(-1)^{l+1} \xi^{1+l} (\eta - z)^{l+1}} {}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2) \right| \leq C_4 \frac{(\xi - \eta)^{1+2l} z}{\xi^{1+l} (\eta - z)^{1+l}}, \quad (4.45)$$

donde $C_4 = C\zeta$.

Para el cuarto caso, supongamos primero que $l \in \mathbb{N}$. Usando 2.14.18 de [18] obtenemos que:

$${}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2) = \frac{\Gamma(2+2l)}{\Gamma^2 1+l} (-\sigma_2)^{-(1+l)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+l)_n (-l)_n}{(n!)^2} \sigma_2^{-n} [\log(-\sigma_2) + h_n], \quad (4.46)$$

donde $h_n = 2\psi(1+n) - \psi(1+l+n) - \psi(n-l) + \pi \cot(\pi l)$.

Considerando $a_n = \frac{(1+l)_n (-l)_n}{(n!)^2}$ se sigue que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(1+l+n)(n-l)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + n - l(l+1)} > 1,$$

entonces $a_{n+1} < a_n$.

Los términos de la primer serie en (4.46) alternan en signo, sus valores absolutos son monotonos decrecientes y tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Para la segunda serie, eligiendo $h'_n = 2\psi(1+n) - \psi(1+l+n) - \psi(n-l)$ considerando el primer término de la fórmula 6.3.18 de [1] se tiene que:

$$\begin{aligned} h'_n &\sim 2 \log(1+n) - \log(1+l+n) - \log(n-l) \sim \log\left(\frac{(1+n)^2}{n^2 + n - l(l+1)}\right) \\ &\sim \log\left(1 + \frac{2n+1}{n^2 + n - l(l+1)}\right) \sim \frac{2}{n} \end{aligned} \quad (4.47)$$

entonces $|h'_n| \leq \frac{c}{n}$.

De aquí que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+l)_n (-l)_n}{(n!)^2} h_n \sigma_2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+l)_n (-l)_n}{(n!)^2} h'_n \sigma_2^{-n} + \pi \cot(\pi l) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+l)_n (-l)_n}{(n!)^2} \sigma_2^{-n},$$

para mostrar que la primera de estas series es convergente consideramos $a'_n = \frac{1}{n} \frac{(1+l)_n (-l)_n}{(n!)^2}$, así por el teorema de Raabe se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a'_n}{a'_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n^2 + 3n + 1 + nl(l+1)}{n^3 + n^2 - nl(1+l)} \right) = 2,$$

por lo tanto para toda $l \notin \mathbb{N}$ la serie converge absolutamente por la prueba de Raabe.

Entonces,

$$|{}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2)| \leq \frac{\Gamma(2+2l)}{\Gamma^2(1+l)} |-\sigma_2|^{-(1+l)} [\varsigma \log(-\sigma_2) + \varsigma_1], \quad l \notin \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

Así,

$$|v_2(z, 0; \xi, \eta)| = \left| \frac{\zeta(\eta - \xi)^{1+2l} z}{(-1)^{l+1} \xi^{l+1} (\eta - z)^{l+1}} {}_2\mathbf{F}_1(1+l, 1+l; 2+2l; \sigma_2) \right| \quad (4.49)$$

$$\leq \frac{|\operatorname{sen}(\pi l)|}{\pi} \left| \frac{(\xi - \eta)^l}{z^l} (\varsigma_1 [\log(-\sigma_2) + \pi \cot(\pi l)] + \varsigma_2) \right| \quad (4.50)$$

$$\leq C_5 \frac{(\xi - \eta)^l}{z^l} \left(\log \left(\frac{z(\xi - \eta)}{\xi(\eta - z)} \right) + C_6 \right). \quad (4.51)$$

Ahora, para el caso $l \in \mathbb{N}$ se utiliza la fórmula 2.1.4.19 de [18]. ■

En el siguiente lema estimamos las integrales que involucra la función de Riemann.

Lema 4.16. *Las siguientes desigualdades son válidas:*

$$\int_{\eta}^{\xi} |v_1(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz \leq A_1 (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}) \quad (4.52)$$

y

$$\int_0^{\eta} |v_2(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz \leq A_2 (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}), \quad (4.53)$$

donde las constantes A_1, A_2 no dependen de ξ y η .

Demostración: Utilizando las estimaciones (4.35) y (4.36) vemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\xi} |v_1(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz &\leq C_2 \eta^l \int_{\eta}^{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} \frac{|\xi - z|^l}{z^{l+\frac{1}{2}}} \log \left(\frac{(\xi - z)\eta}{(z - \eta)\xi} \right) z^{l-\frac{1}{2}} dz + C_2 C_3 \eta^l \int_{\eta}^{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} \frac{|\xi - z|^l}{z^{l+\frac{1}{2}}} dz \\ &\quad + C_1 \xi^l \int_{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}}^{\xi} \frac{|\eta - z|^l}{z^{l+\frac{1}{2}}} dz =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Para acotar la primera integral, note que el argumento de la función logaritmo pertenece a $[1, \infty)$ y para cualquier $x \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ la siguiente desigualdad es válida:

$$\log x \leq \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon e}.$$

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{2C_2\eta^{l+\frac{1}{2}}}{e\xi^{\frac{1}{2}}} \int_{\eta}^{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} \frac{(\xi-z)^{l+\frac{1}{2}}}{z^{l+\frac{1}{2}}(z-\eta)^{\frac{1}{2}}} dz \leq \frac{2C_2(\xi-\eta)^{l+\frac{1}{2}}}{e\xi^{\frac{1}{2}}} \int_{\eta}^{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} \frac{dz}{(z-\eta)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4C_2(\xi-\eta)^{l+\frac{1}{2}}}{e\xi^{\frac{1}{2}}} \frac{\eta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\xi-\eta}}{\sqrt{\xi+\eta}} \leq \frac{8C_2}{e} (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}). \end{aligned}$$

La última desigualdad es válida ya que $9(\xi+\eta)^2 \geq 4\xi\eta$ implica que $\frac{1}{\sqrt{\xi+\eta}} \leq \frac{2}{\sqrt{\xi}+\sqrt{\eta}}$.

Para acotar la segunda integral notemos que $\frac{\xi-\eta}{2\eta} \leq \frac{\xi-z}{z} \leq \frac{\xi-\eta}{\eta}$, es decir, $\frac{(\xi-z)^l}{z^l} \leq C_l \frac{(\xi-\eta)^l}{\eta^l}$ donde $C_l = \max(1, 2^{-l})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_2 C_3 C_l (\xi-\eta)^l \int_{\eta}^{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2C_2 C_3 C_l (\xi-\eta)^l \left(\sqrt{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} - \sqrt{\eta} \right) \\ &\leq 2C_2 C_3 C_l (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}). \end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene ya que $\eta < \xi$.

La tercera integral puede ser estimada de manera similar, notemos que $\frac{(\xi-\eta)^l}{z^l} \leq C_l \frac{(\xi-\eta)^l}{\xi^l} \leq C_l \frac{(\xi-\eta)^l}{2^l \xi^l}$ donde $C_l = \max(1, 2^{-l})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{C_1 \xi^l C_l}{2^l \xi^l} (\xi-\eta)^l \int_{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}}^{\xi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{C_1 C_l}{2^{l-1}} (\xi-\eta)^l \left(\sqrt{\xi} - \sqrt{\frac{2\xi\eta}{\xi+\eta}} \right) \\ &\leq 2^{1-l} C_1 C_l (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}). \end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene ya que $\eta < \xi$.

Sumando las desigualdades obtenidas se tiene (4.52):

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\xi} |v_1(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz &\leq \frac{4C_2}{e} (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi-\eta}) + 2C_2 C_3 C_l (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}) \\ &\quad + 2^{1-l} C_1 C_l (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}) \\ &= A_1 (\xi-\eta)^l (\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta}), \end{aligned}$$

donde $A_1 = \frac{4C_2}{e} + 2C_2 C_3 C_l + 2^{1-l} C_1 C_l$.

Para la integral (4.53) usando las estimaciones (4.37) y (4.38) tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\eta |v_2(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz &\leq C_4 \frac{(\xi - \eta)^{1+2l}}{\xi^{1+l}} \int_0^{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}} \frac{z^{l+\frac{1}{2}}}{(\eta - z)^{l+1}} dz \\ &\quad + C_5 (\xi - \eta)^l \int_{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}}^\eta \log\left(\frac{z(\xi - \eta)}{\xi(\eta - z)}\right) \frac{dz}{\sqrt{z}} + C_5 C_6 (\xi - \eta)^l \int_{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}}^\eta \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &=: I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

La integral I_4 se puede encontrar como sigue:

$$\begin{aligned} I_4 &= C_4 \frac{(\xi - \eta)^{1+2l}}{\eta \xi^{1+l}} \int_0^{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}} \left(\frac{z}{\eta - z}\right)^{l+\frac{1}{2}} (\eta - z)^{\frac{3}{2}} d\left(\frac{z}{\eta - z}\right) \\ &\leq C_4 \frac{(\xi - \eta)^{1+2l}}{\eta \xi^{1+l}} \frac{\eta^{\frac{3}{2}} (\xi - \eta)^{\frac{3}{2}}}{(2\xi - \eta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}} \left(\frac{z}{\eta - z}\right)^{l+\frac{1}{2}} d\left(\frac{z}{\eta - z}\right) \\ &= \frac{C_4 (\xi - \eta)^{l+1} \eta^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}}}{(l + \frac{3}{2}) (2\xi - \eta)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2C_4}{l + \frac{3}{2}} (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}). \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene considerando que $\xi^2 < (\xi + (\xi - \eta))^2$ y $\eta < (\xi + (\xi - \eta))$ implican que $\frac{\xi^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}}{(\xi+(\xi-\eta))^{\frac{3}{2}}} < 1$, lo que nos lleva a mostrar que $\frac{(\xi-\eta)(\xi\eta)^{\frac{1}{2}}}{(2\xi-\eta)^{\frac{3}{2}}} \leq (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}) 2 \cdot 1$.

Para la integral I_5 tenemos:

$$\begin{aligned} I_5 &= C_5 (\xi - \eta)^l \int_{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}}^\eta \log\left(\frac{z(\xi - \eta)}{\xi(\eta - z)}\right) \frac{dz}{\sqrt{z}} \leq \frac{2C_5 (\xi - \eta)^{l+\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{1}{2}} e} \int_{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}}^\eta \frac{dz}{(\eta - z)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4C_5 (\xi - \eta)^{l+1} \eta^{\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{1}{2}} e (2\xi - \eta)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{8C_5}{e} (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}). \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene considerando que $\xi^{\frac{1}{2}} < (\xi + (\xi - \eta))^{\frac{1}{2}}$ implica que $\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+(\xi-\eta))^{\frac{1}{2}}} < 1$, lo que nos lleva a mostrar que $\frac{(\xi-\eta)}{(2\xi-\eta)^{\frac{1}{2}}} \leq 2(\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta})$.

Para la integral I_6 tenemos:

$$\begin{aligned} I_6 &= C_5 C_6 (\xi - \eta)^l \int_{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}}^\eta \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2C_5 C_6 (\xi - \eta)^l \left(\sqrt{\eta} - \sqrt{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}} \right) \\ &= 2C_5 C_6 (\xi - \eta)^l \frac{\eta(\xi - \eta)}{(2\xi - \eta) \left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\frac{\xi\eta}{2\xi-\eta}} \right)} \leq 2C_5 C_6 (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}). \end{aligned}$$

Para obtener la desigualdad consideremos que $\xi\eta < 16\xi^2 + 9\eta^2 - 24\xi\eta$ implica que $\sqrt{\xi\eta} < 4\xi - 2\eta$, de aquí que $\frac{\sqrt{\eta}(\sqrt{\xi} + \sqrt{\eta})}{2(2\xi - \eta)} < 1$.

Sumando las desigualdades obtenidas se tiene (4.53):

$$\int_0^\eta |v_2(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz \leq \frac{2C_4}{l+\frac{3}{2}} (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}) + \frac{8C_5}{e} (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}) \\ + 2C_5C_6 (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}) = A_2 (\xi - \eta)^l (\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}),$$

donde $A_2 = \frac{2C_4}{l+\frac{3}{2}} + \frac{8C_5}{e} + 2C_5C_6$. ■

Notemos que $\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta} \leq \sqrt{\xi - \eta}$, por lo tanto inmediatamente obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.17. *Las siguientes desigualdes son válidas:*

$$\int_\eta^\xi |v_1(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz \leq A_1 (\xi - \eta)^{l+\frac{1}{2}} \quad (4.54)$$

y

$$\int_0^\eta |v_2(z, 0; \xi, \eta)| z^{l-\frac{1}{2}} dz \leq A_2 (\xi - \eta)^{l+\frac{1}{2}}, \quad (4.55)$$

donde las constantes A_1, A_2 no dependen de ξ y η .

En el siguiente enunciado auxiliar establecemos la **estabilidad del problema de Goursat** (4.27)-(4.29).

Proposición 4.18. *Existe una constante $C > 0$ tal que si H es solución de (4.27)-(4.29) y h en (4.28) tal que para $\varepsilon > 0$ satisface que $\|h\|_{C([0,b])} \leq \varepsilon$, entonces*

$$\max_{0 \leq x \leq t \leq b} |H(x, t)| \leq \varepsilon C.$$

Demostración: Consideremos que la solución H del problema de Goursat está definida en términos de u por (4.30). Debido al Corolario 4.17 tenemos que para $\|h\|_{C([0,b])} \leq \varepsilon$, la función u definida por (4.31) puede ser acotada como sigue (ver (4.54) y (4.55))

$$|u(\xi, \eta)| \leq \frac{1}{4} \varepsilon (\xi - \eta)^{l+\frac{1}{2}} A_2 + \frac{1}{4} \varepsilon (\xi - \eta)^{l+\frac{1}{2}} A_1 = \frac{\varepsilon (A_1 + A_2)}{4} (\xi - \eta)^{l+\frac{1}{2}}, \quad (4.56)$$

donde $A := \frac{A_1 + A_2}{4}$ es una constante positiva. Por lo tanto de (4.30) obtenemos

$$\max_{0 \leq x \leq t \leq b} |H(x, t)| = \max_{(z,s) \in Z} |(z-s)^{-l} u(z, s)| \leq \max_{(z,s) \in Z} \left\{ A \varepsilon |(z-s)^{-l}| (z-s)^{l+\frac{1}{2}} \right\} \\ \leq \varepsilon A \max_{0 \leq s \leq z \leq b^2} (z-s)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon A b. \quad \blacksquare$$

Observación 4.19. *Considerando $k(x, t)$ y $h(x) := 2 \frac{dk(x,x)}{dx}$, entonces por la Proposición 4.18 se sigue que el problema de Goursat depende continuamente de los datos en la frontera.*

Ahora, estamos listos para establecer el resultado de **aproximación de la pre-imagen del núcleo**. Para ello consideraremos $k_N(x, t)$ como se introduce al principio de la Sección 4.4 y en (4.26).

Proposición 4.20. *Sea $\varepsilon > 0$. Existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tal que la desigualdad*

$$|k(x, t) - k_N(x, t)| \leq \varepsilon$$

se satisface para todo $0 \leq x \leq t \leq b$, donde $k_N(x, t)$ es de la forma (4.26).

Demostración: Elijamos $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{C}$ donde C es la constante de la Proposición 4.18. De acuerdo a la Proposición 4.13, existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que $\left| \frac{dU_\varepsilon(x, x)}{dx} \right| \leq \varepsilon_1$ donde $U_\varepsilon(x, t) := k(x, t) - k_N(x, t)$. Como por la Proposición 2.16 los polinomios de onda generalizados $U_0(x, t)$, $U_{4n-1}(x, t)$ satisfacen la ecuación 2.1, y por la Proposición 4.8 se tiene que $U_0(0, t) = 0$, $U_{4n-1}(0, t) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, entonces $U_\varepsilon(x, t)$ también satisface la ecuación (2.1) y la condición frontera 3. de la Proposición 4.7. Debido a la Proposición 4.18 sobre la estabilidad del problema obtenemos que $\max_{0 \leq x \leq t \leq b} |U_\varepsilon(x, t)| \leq \varepsilon$. ■

4.4.2 Aproximación del núcleo integral $K(x, t)$

Ahora, podemos mostrar que el núcleo del operador de transmutación se puede aproximar por medio de los polinomios de onda generalizados $u_{4n-1}(x, t)$, $u_0(x, t)$; es decir, mostremos que existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tal que $K(x, t)$ se puede aproximar por medio de la combinación lineal finita de los polinomios de onda generalizados $K_N(x, t) = \sum_{\kappa=1}^N a_\kappa u_\kappa(x, t)$.

Consideremos al operador \mathbf{T} definido en (1.81) y denotemos por $\|\mathbf{T}\|$ a su norma uniforme. Como \mathbf{T} es un operador de Volterra con núcleo continuo entonces es acotado y tiene inverso el cual también es acotado. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.21. *El operador de Volterra (1.81) es acotado en $C([0, b])$, más aún*

$$\|\mathbf{T}[\varphi(x)]\| \leq \left\{ 1 + \max_{x \in [0, b]} \int_0^x |K(x, t)| dt \right\} = C. \quad (4.57)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}[\varphi(x)]\| &\leq \max_{\|\varphi\|=1} \left\{ |\varphi(x)| + \int_0^x |K(x, t)| |\varphi(t)| dt \right\} \\ &\leq \max_{x \in [0, b]} |\varphi(x)| + \max_{x \in [0, b]} \int_0^x |K(x, t)| dt \max_{x \in [0, b]} |\varphi(x)| \\ &= \|\varphi(x)\| \left\{ 1 + \max_{x \in [0, b]} \int_0^x |K(x, t)| dt \right\} \\ &= \left\{ 1 + \max_{x \in [0, b]} \int_0^x |K(x, t)| dt \right\} = C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente teorema establece que se puede aproximar el núcleo del operador de transmutación por medio de los polinomios de onda generalizados, en particular podemos aproximar

a la función $K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds$ por medio de las trazas de los polinomios de onda generalizados $\mathbf{c}_n(x)$. Esto gracias a la igualdad $u_0(x, t) = \mathbf{T}[U_0(x, t)]$, $u_{4n-1}(x, t) = \mathbf{T}[U_{4n-1}(x, t)]$ junto con la completez de las trazas de los polinomios de onda generalizados $U_{4n-1}(x, t)$, $U_0(x, t)$ y el acotamiento de \mathbf{T} .

Teorema 4.22. *Para cualquier $\varepsilon > 0$, existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que la desigualdad*

$$|K(x, t) - K_N(x, t)| \leq \varepsilon, \quad (4.58)$$

se satisface para todo $0 \leq x \leq t \leq b$, donde

$$K_N(x, t) := a_0 u_0(x, t) + \sum_{\kappa=1}^N a_\kappa u_{4\kappa-1}(x, t). \quad (4.59)$$

En particular,

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds - \sum_{\kappa=0}^N a_\kappa \mathbf{c}_\kappa(x) \right| \leq \varepsilon \quad (4.60)$$

para todo $x \in [0, b]$.

Demostración: Elijamos $\varepsilon > 0$ y consideremos $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{T}\|}$. Debido a la Proposición 4.20 existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tales que la desigualdad

$$\|k - k_N\| := \max_{0 \leq x \leq t \leq b} |k(x, t) - k_N(x, t)| \leq \varepsilon_1$$

se satisface. Consideremos

$$\|K - K_N\| = \|\mathbf{T}(k - k_N)\| \leq \|\mathbf{T}\| \|k - k_N\| \leq \varepsilon_1 \|\mathbf{T}\| = \varepsilon.$$

La desigualdad (4.60) se sigue de la última desigualdad tomando en cuenta que $K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds$. \blacksquare

Hemos mostrado que podemos aproximar a $K(x, t)$ por medio de los polinomios de onda generalizados $u_0(x, t)$, $u_{4n-1}(x, t)$, pero debido a que para lograr dicha aproximación tuvimos que trabajar con la pre-imagen del núcleo $k(x, t)$ en el segundo paso, no podemos saber como son los coeficientes.

Observación 4.23. *Notemos que como el trabajo fue realizado utilizando la pre-imagen del núcleo, no tenemos el resultado que nos garantiza la completez de las derivadas de las trazas $\mathbf{c}'_N(x)$, es decir no podemos asegurar que existe una buena aproximación entre el potencial y las derivadas de las trazas. En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$ no conocemos los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_N tales que nos garanticen que*

$$\left| \frac{q(x)}{2} - \sum_{\kappa=0}^N a_\kappa \mathbf{c}'_\kappa(x) \right| < \varepsilon. \quad (4.61)$$

El Teorema 4.22 no nos da el método práctico para encontrar los coeficientes.

No obtuvimos el resultado que nos garantiza la aproximación global $|K(x, t) - K_N(x, t)| < \varepsilon$, sin embargo si logramos aproximar a la solución de la ecuación, lo cuál desarrollamos a continuación.

4.5 Aproximación de la solución

De acuerdo al Teorema 4.22 para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tal que la desigualdad (4.60) es válida.

A partir de esta sección consideraremos a (4.60) como un problema de aproximación y supondremos que existen $N \in \mathbb{N}$ y coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ tal que (4.60) se satisface.

Denotemos por $K_N(x, t) := \sum_{n=0}^N a_n u_n(x, t)$ al correspondiente kernel de transmutación aproximado y por $q_N(x) := \frac{2dK_N(x, x)}{dx}$.

Notemos que (4.60) implica la desigualdad

$$\left| \int_0^x [q(t) - q_N(t)] dt \right| \leq \varepsilon. \quad (4.62)$$

Estamos interesados en la correspondiente solución aproximada

$$\mathbf{u}_N(x, \lambda) := \mathbf{d}_l(x, \lambda) + \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt, \quad l \geq -\frac{1}{2}. \quad (4.63)$$

Iniciaremos mostrando la relación que existe entre la solución y la aproximación de la solución:

Proposición 4.24.

$$(\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(x) = [q_N(x) - q(x)] \mathbf{d}_l(x, \lambda), \quad (4.64)$$

donde λ es un parámetro complejo.

Demostración: Desarrollando el lado izquierdo de (4.64) tenemos que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(x) &= \mathbf{d}_l''(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K_N(x, t)}{\partial x^2} \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt + \frac{\partial K_N(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} \mathbf{d}_l(x, \lambda) + \frac{dK_N(x, x)}{dx} \mathbf{d}_l(x, \lambda) \\ &\quad + K_N(x, x) \mathbf{d}_l'(x, \lambda) - \frac{l(l+1)}{x^2} \mathbf{d}_l(x, \lambda) - \frac{l(l+1)}{x^2} \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt - q(x) \mathbf{d}_l(x, \lambda) \\ &\quad - q(x) \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt + \lambda \mathbf{d}_l(x, \lambda) + \lambda \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{d}_l(x, \lambda)$ es solución de la ecuación de Bessel $(\mathbf{L}_0 + \lambda) \mathbf{d}_l(x, \lambda) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(x) &= \int_0^x \frac{\partial^2 K_N(x, t)}{\partial x^2} \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt + \frac{\partial K_N(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} \mathbf{d}_l(x, \lambda) + \frac{dK_N(x, x)}{dx} \mathbf{d}_l(x, \lambda) \\ &\quad + K_N(x, x) \mathbf{d}_l'(x, \lambda) - \frac{l(l+1)}{x^2} \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt - q(x) \mathbf{d}_l(x, \lambda) \\ &\quad - q(x) \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt + \lambda \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Además, como $K_N(x, t)$ satisface la ecuación (3.2) tenemos que

$$\int_0^x [\mathbf{L}K_N(x, t)] \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt = \int_0^x \left(\frac{d^2 K_N(x, t)}{dt^2} - \frac{l(l+1)}{t^2} K_N(x, t) \right) \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt.$$

Integrando por partes el término $\int_0^x \frac{\partial^2 K_N(x, t)}{\partial t^2} \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial^2 K_N(x, t)}{\partial t^2} \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt &= \frac{\partial K_N(x, t)}{\partial t} \mathbf{d}_l(t, \lambda) \Big|_{t=x} - \frac{\partial K_N(x, t)}{\partial t} \mathbf{d}_l(t, \lambda) \Big|_{t=0} - K_N(x, x) \mathbf{d}'_l(x, \lambda) \\ &\quad + K_N(x, t) \mathbf{d}'_l(t, \lambda) \Big|_{t=0} + \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}''_l(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Noté que $K_N(x, t)$ tiene la forma $t^{l+1} \sum_{n=0}^N \kappa_n(x) t^{2n}$, mientras que $\mathbf{d}_l(t, \lambda) \sim ct^{l+1}$ y $\mathbf{d}'_l(t, \lambda) \sim c(l+1)t^l$, cuando $t \rightarrow 0$ con $c = \frac{\lambda^{\frac{2l+1}{4}}}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l+\frac{3}{2})}$, lo que nos lleva a la conclusión de que

$$-\frac{\partial K_N(x, t)}{\partial t} \mathbf{d}_l(t, \lambda) \Big|_{t=0} + K_N(x, t) \mathbf{d}'_l(t, \lambda) \Big|_{t=0} = 0$$

para cualquier $l \geq -\frac{1}{2}$.

Así

$$\int_0^x \frac{\partial^2 K_N(x, t)}{\partial t^2} \mathbf{d}_l(t, \lambda) dt = \frac{\partial K_N(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=x} \mathbf{d}_l(x, \lambda) - K_N(x, x) \mathbf{d}'_l(x, \lambda) + \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}''_l(t, \lambda) dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(x) &= \left[2 \frac{dK_N(x, x)}{dx} - q(x) \right] \mathbf{d}_l(x, \lambda) \\ &\quad + \int_0^x \left\{ \frac{d^2 \mathbf{d}_l(t, \lambda)}{dt^2} - \frac{l(l+1)}{t^2} \mathbf{d}_l(t, \lambda) + \lambda \mathbf{d}_l(t, \lambda) \right\} K_N(x, t) dt. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{d}_l(t, \lambda)$ satisface la ecuación $(\mathbf{L}_0 + \lambda) u = 0$ entonces la última integral se anula.

De aquí que,

$$(\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(x) = \left[2 \frac{dK_N(x, x)}{dx} - q(x) \right] \mathbf{d}_l(x, \lambda) = [q_N(x) - q(x)] \mathbf{d}_l(x, \lambda).$$

Por lo tanto se tiene la igualdad deseada. ■

El siguiente resultado nos dice qué tan próxima es la solución de la solución aproximada, en otras palabras el enunciado nos ayuda a estimar el residuo de la solución aproximada. Algo importante es que la cota encontrada no depende de λ , con lo que se conserva la uniformidad al momento de seguir buscando eigenfunciones en el plano complejo.

Teorema 4.25. Para la solución aproximada (4.63) la siguiente desigualdad es válida

$$\left| \int_0^x (\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(s) ds \right| \leq 2\varepsilon\sqrt{x}, \quad (4.65)$$

Demostración: Integrando (4.64) y considerando el lado derecho tenemos:

$$\int_0^x [q_N(s) - q(s)] \mathbf{d}_l(s, \lambda) ds = \mathbf{d}_l(x, \lambda) \int_0^x [q_N(s) - q(s)] ds - \int_0^x \mathbf{d}'_l(s, \lambda) \int_0^s [q_N(\sigma) - q(\sigma)] d\sigma ds,$$

Para acotar esta integral recordemos la definición de $\mathbf{d}_l(x, \lambda) = \sqrt{x} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x, \lambda)$ y que la función cilíndrica de Bessel $\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x, \lambda)$ es acotada por uno pues en general se tiene que $|\mathbf{J}_\nu(x)| \leq 1$, para cualquier $\nu \geq 0$, y toda $x \in \mathbb{R}$, ver la fórmula 10.14.1 de [58]. Entonces se sigue que, $|\mathbf{d}_l(x, \lambda)| \leq \sqrt{x}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x (\mathbf{L} + \lambda) \mathbf{u}_N(s) ds \right| &= \left| \int_0^x [q_N(s) - q(s)] \mathbf{d}_l(s, \lambda) ds \right| \leq |\mathbf{d}_l(x, \lambda)| \varepsilon + \left| \int_0^x \mathbf{d}'_l(s, \lambda) \varepsilon ds \right| \\ &\leq \varepsilon \left(\sqrt{x} + \left| \int_0^x \mathbf{d}'_l(s, \lambda) ds \right| \right) \leq 2\varepsilon\sqrt{x}, \end{aligned}$$

por (4.62). ■

En lo que resta de esta sección explicaremos la conveniencia especial de la aproximación del kernel del operador de transmutación $K(x, t)$ en términos de los polinomios de onda generalizados u_n . Consideremos el kernel aproximado $K_N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n u_{4n-1}(x, t)$, sustituyendo en (4.63) obtenemos la solución aproximada:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N(x, \omega) &= \mathbf{d}_l(x, \omega) + \int_0^x K_N(x, t) \mathbf{d}_l(t, \omega) dt \\ &= \mathbf{d}_l(x, \omega) + \int_0^x \left(a_0 u_0(x, t) + \sum_{\kappa=1}^N a_\kappa u_{4\kappa-1}(x, t) \right) \mathbf{d}_l(t, \omega) dt, \end{aligned}$$

donde $\omega = \sqrt{\lambda}$.

Por definición de los polinomios de onda generalizados $u_{4n-1}(x, t)$, $u_0(x, t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N(x, \omega) &= \mathbf{d}_l(x, \omega) + \int_0^x \sum_{n=0}^N a_n u_0(x) \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} \tilde{X}^{[2(n-k)]}(x) t^{2k+l+1} \mathbf{d}_l(t, \omega) dt \\ &= \mathbf{d}_l(x, \omega) + u_0(x) \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} \tilde{X}^{[2(n-k)]}(x) \int_0^x t^{2k+l+1} \mathbf{d}_l(t, \omega) dt, \quad (4.66) \end{aligned}$$

donde $\Xi_{n,k}$ es como en (3.4).

Las integrales que se presentan aquí pueden ser calculadas explícitamente. En un importante caso especial para $l \in \mathbb{N}$, puede ser utilizada la fórmula 1.8.1.6 de [60], así:

$$\begin{aligned} \int t^{(2k+l+1)+\frac{1}{2}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\omega t) dt &= \frac{1}{\omega^{2k+l+\frac{5}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{l\pi}{2} \right) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2k+l}{2} \rfloor} C_{2k+l-2j} (\omega t)^{2k+l-2j} \\ &\quad + \frac{1}{\omega^{2k+l+\frac{5}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{cos} \left(\omega t - \frac{l\pi}{2} \right) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2k+l+1}{2} \rfloor} C_{2k+l+1-2j} (\omega t)^{2k+l+1-2j}, \end{aligned}$$

donde $2k+l+1 \geq l$, $C_{2k+l+1} = -1$, $C_{2k+l-j} = (-1)^j [P_{j+1} - (2k+l+1-j) C_{2k+l+1-j}]$, $j = 0, 1, \dots, 2k+l$; $P_j = (-1)^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{(l+j)!}{j!(l-j)!2^j}$ para $j = 0, 1, \dots, l$, $P_j = 0$ para $j > l$ y $[\cdot]$ denota la parte entera de un número.

En general podemos utilizar la fórmula 1.8.1.5 de [60]:

$$\int t^\lambda \mathbf{J}_\nu(t) dt = t [(\lambda + \nu - 1) \mathbf{J}_\nu(t) s_{\lambda-1, \nu-1}(t) - \mathbf{J}_{\nu-1}(t) s_{\lambda, \nu}(t)],$$

donde $s_{\mu, \nu}(z) := \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} {}_1\mathbf{F}_2 \left(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{z^2}{4} \right)$ son las funciones de Lommel. De donde obtenemos:

$$\begin{aligned} \int t^{2k+l+\frac{3}{2}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\omega t) dt &= \frac{t^{2k+l+\frac{5}{2}}}{2(k+1)\omega} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\omega t) {}_1\mathbf{F}_2 \left(1; k+2, k+l+\frac{3}{2}; -\frac{(\omega t)^2}{4} \right) \\ &\quad - \frac{t^{2k+l+\frac{7}{2}}}{2(k+1)[2(k+l)+3]} \mathbf{J}_{l-\frac{1}{2}}(\omega t) {}_1\mathbf{F}_2 \left(1; k+2, k+l+\frac{5}{2}; -\frac{(\omega t)^2}{4} \right). \end{aligned}$$

O también podríamos utilizar la fórmula 1.8.1.1 de [60], de acuerdo a la cual:

$$\int_0^x t^{2k+l+\frac{3}{2}} \mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(\omega t) dt = \frac{\omega^{l+\frac{1}{2}} x^{2(k+l)+3}}{2^{l+\frac{1}{2}} [2(k+l)+3] \Gamma(l+\frac{3}{2})} {}_1\mathbf{F}_2 \left(\frac{2(k+l)+3}{2}; \frac{2(k+l)+5}{2}, l+\frac{3}{2}; -\frac{(\omega x)^2}{4} \right).$$

Finalmente, mostramos la forma que toma la derivada de la solución considerando (4.66).

Derivando tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_N(x, \omega)}{dx} &= \frac{\mathbf{J}_{l+\frac{1}{2}}(x, \omega)}{2\sqrt{x}} + \frac{\omega\sqrt{x}}{2} \left\{ \mathbf{J}_{l-\frac{1}{2}}(x, \omega) - \mathbf{J}_{l+\frac{3}{2}}(x, \omega) \right\} \\ &\quad + \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} \left(u'_0(x) \tilde{X}^{[2(n-k)]}(x) - \frac{\tilde{X}^{[2(n-k)-1]}(x)}{u_0} \right) \int_0^x t^{2k+l+1} \mathbf{d}_l(t, \omega) dt \\ &\quad + \frac{\mathbf{d}_l(x, \omega)}{u_0} \sum_{n=0}^N a_n \sum_{k=0}^n \Xi_{n,k} \tilde{X}^{[2(n-k)]}(x) x^{2k+l+1}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde las constantes $\Xi_{n,k}$ son como en (3.4).

En la siguiente sección describimos cada uno de los pasos necesarios para implementar el método de solución de ecuaciones de Bessel perturbadas que hemos desarrollado durante esta tesis.

4.6 Descripción de los pasos del algoritmo

Una de las posibles aplicaciones de la aproximación propuesta es la solución numérica de problemas espectrales. Recordemos (ver, [10], [35], [72]) que la formulación clásica de problemas espectrales para ecuaciones (4.1) consiste en encontrar los valores del parámetro espectral para el cuál la solución regular u de (4.1) satisface

$$\beta u(b, \lambda) + \gamma u'(b, \lambda) = 0 \quad (4.68)$$

para algunas $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tal que $|\beta| + |\gamma| \neq 0$. La solución regular (la cual es acotada alrededor de $x = 0$) es única hasta una constante multiplicativa para $l > 0$, entonces no se requiere alguna condición frontera adicional, mientras que para $-\frac{1}{2} \leq l < 0$ una de las maneras equivalentes para definir la solución regular es por su asintótica $u(x, \lambda) \sim x^{l+1}$, $x \rightarrow 0$. En ambos casos es la solución regular considerada en las secciones previas.

Basados en la aproximación analítica que se realizó a lo largo de esta tesis, podemos proponer el siguiente algoritmo para aproximar soluciones de problemas espectrales para la ecuación (4.1).

1. Transformar la ecuación (4.1) en la forma (4.24) tomando $\Lambda := \lambda - q(0)$ y $Q := q - q(0)$.
2. Encontrar una solución particular u_0 de (4.24) para $\Lambda = 0$ que satisfaga las relaciones asintóticas

$$u_0(x) \sim x^{l+1} \text{ y } u'_0(x) \sim (l+1)x^l, \quad x \rightarrow 0.$$

El método descrito en la Sección 1.8 de esta tesis o en la Sección 3 de [10] será utilizado.

3. Construir las funciones $\{\mathbf{c}_n\}_{n \geq 0}$ usando (3.6).
4. Encontrar N y los coeficientes a_0, \dots, a_N minimizando el lado izquierdo de la expresión (4.60), es decir, resolviendo el problema de aproximación uniforme uno-dimensional.
5. Encontrar los eigenvalores aproximados como ceros de (4.68), la solución aproximada \mathbf{u}_N y la derivada aproximada u'_N son calculadas para todos los valores requeridos de λ por (4.66) y (4.67).

Referimos al lector a [10], [30] y [42] para detalles adicionales sobre la realización del algoritmo propuesto, en particular, para métodos de calcular las integrales recursivas (1.69) con $R = 1$ y de soluciones del problema de aproximación (4.60).

Conclusiones e ideas para el trabajo futuro

*“One cannot understand...the universality of laws of nature,
the relationship of things,
without an understanding of mathematics.
There is no other way to do it.”*

Richard Feynman

Conclusiones

En este trabajo de tesis doctoral se estudian los operadores de transmutación cuya composición relacionan a la segunda derivada con el operador de Bessel perturbado $\mathbf{L} := \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - q(x)$ donde $l \geq -\frac{1}{2}$ y $q \in C([0, b])$ y la aproximación analítica de las soluciones regulares de la ecuación $-\mathbf{L}u = \lambda u$ en $(0, b]$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es el parámetro espectral.

Lo novedoso de este trabajo de investigación es que se estudia el paso del caso regular al caso singular, para lo cual nos enfocamos en la solución regular de la ecuación $-\mathbf{L}u = \lambda u$.

Encontramos un sistema de polinomios de onda generalizados, los cuáles son soluciones de la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{l(l+1)}{t^2} \right) U(x, t) = 0, \quad (4.69)$$

como imágenes de los polinomios de onda bajo la acción del operador $Y_{l,x}Y_{l,t}$ y en un siguiente paso se construyó un sistema de polinomios de onda generalizados para la ecuación

$$\left(\square - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{l(l+1)}{t^2} - q(x) \right) u(x, t) = 0,$$

como imágenes del sistema mencionado anteriormente bajo la acción del operador de transmutación \mathbf{T} .

Como resultado principal de este proyecto después de un estudio exhaustivo de los operadores de transmutación $Y_{l,x}$ y \mathbf{T} se obtuvo un método de aproximación de soluciones de ecuaciones tipo Bessel perturbadas, basados en la solución regular de la ecuación dada en términos de un operador de Volterra con forma la suma de un operador identidad más la integral de

un núcleo continuo por una función actuando en t . El método consiste en una representación aproximada para soluciones regulares de la ecuación de Bessel perturbada el cuál involucra ciertas integrales recursivas. La representación admite estimaciones uniformes con respecto al parámetro espectral y ofrece un método eficiente para calcular conjuntos grandes de eigendatos.

Se mostró la estabilidad del problema de Goursat para la pre-imagen del núcleo y que las trazas de los polinomios de onda generalizados que son solución de la ecuación (4.69) son completas en el espacio $C_0^1([0, b])$. También se probó que la pre-imagen del núcleo admite una aproximación uniforme por medio de una combinación lineal finita de los polinomios de onda generalizados construidos como imágenes del operador $Y_{l,x}Y_{l,t}$ y después de extender el dominio del operador de transmutación \mathbf{T} a todo el cuadrado $\{0 \leq t \leq x \leq b\} \cup \{0 \leq x \leq t \leq b\}$ se establece el problema de Goursat que satisface el núcleo del operador de transmutación en $0 \leq x \leq t \leq b$, con todo esto y que el operador \mathbf{T} es acotado se probó que existen constantes complejas tales que el núcleo se puede aproximar en la característica por medio de una combinación lineal finita de los polinomios de onda generalizados correspondientes, en particular podemos aproximar a la función $K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds$ por medio de las trazas de tales polinomios de onda generalizados.

Como el trabajo fue realizado utilizando la pre-imagen del núcleo, no tenemos el resultado que nos garantiza la completez de las derivadas de las trazas, es decir, no pudimos asegurar que existe una buena aproximación entre el potencial y las derivadas de las trazas.

La existencia de las constantes complejas tales que se puede aproximar al núcleo del operador por medio de una combinación lineal de los polinomios de onda generalizados correspondientes está garantizada en este trabajo, pero no obtuvimos el resultado global $|K(x, t) - K_N(x, t)| < \varepsilon$.

Sin embargo, si logramos aproximar a la solución de la ecuación. Dicha aproximación se obtuvo con la ayuda de la aproximación del núcleo del operador de transmutación estableciendo la pequeñez de la diferencia entre la solución exacta y aproximada, la estimación $\left| \int_0^x (\mathbf{L} + \lambda) [\mathbf{u}_N(s)] ds \right| \leq 2\varepsilon\sqrt{x}$ es válida, independientemente del parámetro espectral λ , lo que hace al método propuesto atractivo para resolver la ecuación de Bessel perturbada en intervalos grandes respecto a λ .

Con lo que logramos generalizar el método de los doctores Vladislav Kravchenko y Sergii Torba para el caso regular al caso singular, el cual realizaron en su artículo [42].

Recomendaciones para el trabajo futuro

En el capítulo 4 se muestra la importancia del operador de transmutación \mathbf{T} y de la pre-imagen k del núcleo integral del operador por lo que para trabajos futuros es de nuestro interés precisar su comportamiento con mayor detalle.

También sería de nuestro interés buscar una manera directa de abordar el problema en el que se logre obtener la completez de las funciones $\{\mathbf{c}'_n\}_{n \geq 0}$ en el espacio $C_0([0, b])$ y así modificar el algoritmo en donde en vez de minizar el problema (4.60), se minimiza (4.61).

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 55, 1972.
- [2] M. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer, 2000.
- [3] H. Begehr and R. Gilbert, *Transformations, transmutations and kernel functions*, vol. 1-2, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1992.
- [4] H. Campos, V. Kravchenko and S. Torba, *Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane*, J. Math. Anal. Appl., 389 (2012), no. 2, 1222-1238.
- [5] R. Carroll, *Transmutation and Operator Differential Equations*, North Holland, 1979.
- [6] R. Carroll, *Transmutation, Scattering Theory and Special Functions*, North Holland, 1982.
- [7] R. Carroll, *Transmutation Theory and Applications*, North Holland, 1986.
- [8] R. Carroll and J. Donaldson, *Algunos resultados sobre ecuaciones diferenciales abstractas relacionadas*, Portug. Math.
- [9] R. Carroll and R. Showalter, *Singular and Degenerate Cauchy problems*, N. Y., Academic Press, 1976.
- [10] R. Castillo, V. Kravchenko and S. Torba, *Spectral parameter power series for perturbed Bessel equations*, Applied Mathematics and Computation, 2013, v.220, issue 1, 676-694.
- [11] R. Castillo, V. Kravchenko and S. Torba, *Analysis of graded-index optical fibers by the spectral parameter power series method*, Journal of Optics, 2015, v. 17, Issue 2, No. 025607, available at arXiv:1408.4147.
- [12] H. Chebli, A. Fitouhi, and M. Hamza, *Expansion in Series of Bessel Functions and Transmutations for Perturbed Bessel Operators*, Journal of Mathematical analysis and applications, 181, 789-802 (1994).

-
- [13] E. Copson, *On the Riemann-Green Function*, Communicated by A. Erdélyi, Received February 17, 1958, pp. 324-348.
- [14] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol II*, Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, Third Printing, July 1966, USA.
- [15] P. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, Inc., New York, 1975.
- [16] J. Delsarte, *Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*, C. R. Acad. Sc. 206(1938), 178-182.
- [17] J. Delsarte and J. Lions, *Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe*, Complement. Math.Helv., 32(1956), 113-128.
- [18] A. Erdélyi, *Higher transcendental Functions, vol. I*, McGraw-Hill book company, Inc., 1953.
- [19] M. Fage and N. Nagnibida, *Equivalence problem for ordinary differential operators*, Nauka, Novosibirsk, 1977 (in Russian).
- [20] A. Fitouhi and M. Hamza, *A uniform expansion for the eigenfunction of a singular second-order differential operator*, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), no. 6, 1619-1632. MR 1075594 (92a:33006), <http://dx.doi.org/10.1137/0521088>
- [21] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Berlin Heidelberg: Springer, 1994.
- [22] G. Freiling and V. Yurko, *Lectures on Differential Equations of Mathematical Physics: A first course*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2008.
- [23] A. Gasmi and M. Sifi, *The Bessel-Struve Intertwining operator on \mathbb{C} and mean-periodic functions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 3171-3185.
- [24] I. Gelfand and B. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 15, No.4(1951), 309-360; English transl.: Amer. Mat. Soc. Transl. (2) 1(1955), 253-304.
- [25] J. Golenia, A. Prykarpatsky and Y. Prykarpatsky, *The structure of Gelfand-Levitan-Marchenko type equations for Delsarte transmutation operators of linear multi-dimensional differential operators and operator pencils. Part 1*. arXiv: math-ph/0403056 v1. 2004.
- [26] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 1980.
- [27] A. Gray and G. Mathews, *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*, Macmillan and Co, and New York, 1895.
- [28] R. Hersh, *The method of transmutations, part. diff. eqs. and related topics*, Lect. Notes, 446, Springer, N. Y. 1975, pp. 264-282.

-
- [29] W. Kelley and A. Peterson, *The theory of differential equations, Classical and qualitative*, Pearson, Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [30] K. Khmelnytskaya, V. Kravchenko, S. Torba and S. Tremblay, *Wave polinomials, transmutations and Cauchy's problem for the Klein-Gordon equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 399(2013) 191-212.
- [31] K. Khmelnytskaya, V. Kravchenko and H. Rosu, *Eigenvalue problems, spectral parameters power series, and modern applications*, Math. Methods Appl. Sci. 38 (2015), 1945-1969.
- [32] I. Kipriyanov, *Fourier-Bessel Transforms and Imbedding Theorems for Weighted Classes*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 89, (1967), 130-213. (in Russian).
- [33] V. Kiryakova, *Transmutations method for solving hyper-Bessel differential equations based on the Poisson-Dimovski transformation*, Fractional calculus and applied analysis, an international Journal for theory and applications, Vol. 11, No. 3, (2008).
- [34] B. Korenev, *Bessel functions and their applications*, Taylor Francis, Analytical Methods and Special Functions, London and New York, 2002.
- [35] A. Kostenko and G. Teschl, *On the singular Weyl-Titchmarsh function of perturbed spherical Schrödinger operators*, J. Differential Equations, 250 (2011) 3701-3739.
- [36] N. Koshlyakov, M. Smirnov and E. Gliner, *Differential equations of mathematical physics*, North-Holland publishing company-amsterdam, 1964.
- [37] V. Kravchenko, *A representation for solutions of the Sturm-Liouville Equation*, Complex Variables and Elliptic Equations, 2008, v.53, No. 8, 775-789.
- [38] V. Kravchenko and R. Porter, *Spectral parameter power series for Sturm-Liouville problems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2010, v. 33, issue 4, 459-468, available from arXiv:0811.4488 Available in arXiv:0811.4488 v1, 2008.
- [39] V. Kravchenko, *Applied pseudoanalytic function theory*, Basel: Birkhäuser, Series: Frontiers in Mathematics, 2009.
- [40] V. Kravchenko and S. Torba, *Transmutations for Darboux transformed operators with applications*, J. Phys. A: Math. Theor., 45 (2012), No. 075201 (21 pp.).
- [41] V. Kravchenko and S. Torba, *Transmutations and Spectral Parameter Power Series in Eigenvalue Problems*, Operator Theory: Advances and Applications, 2013, v.228, 209-238.
- [42] V. Kravchenko and S. Torba, *Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, v.275, 1-26.
- [43] V. Kravchenko and S. Torba, *Analytic approximation of transmutation operators and related systems of functions*, arXiv:1509.04680v1 [math.CA] 15 Sep 2015.

-
- [44] V. Kravchenko and S. Torba, *Construction of Transmutation Operators and Hyperbolic Pseudoanalytic Functions*, Complex Anal. Oper. Theory 9 (2015), no. 2, 379-429.
- [45] B. Levin, *Fourier and Laplace-type transformations by means of solutions of a second-order differential equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 106, No. 2 (1956), 187-190. (Russian)
- [46] B. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville problems*, VSP, Zeist, 1987.
- [47] B. Levitan, *On the asymptotic behavior of the spectral function of a self-adjoint differential equation of second order and an expansion in eigenfunctions*. I. II, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 17, No. 4(1953), 331-364; 19, No. 1(1955), 33-58; English Transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 102(1973), 191-229; 110(1977), 165-188.
- [48] B. Levitan, *The expansion of the Bessel functions in Fourier series and integrals*, UMN, 1951, Volume 6, Issue 2 (42), 102-143. (In Russian)
- [49] J. Lions, *Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes*, Bull. Soc. Math. France, 84(1956), 9-95.
- [50] J. Lions, *Equations d'Euler-Poisson-Darboux généralisées*, C. R. Acad. Sci. Paris, 246(1958), 208-210.
- [51] J. Lions, *Opérateurs de transmutation singuliers et équations d'Euler-Poisson-Darboux généralisées*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milanon, 28(1959), 3-16.
- [52] J. Lions, *On the generalized radiation problem of Weinstein*, Jour, Math. Mech., 8(1959), 873-888.
- [53] J. Lions, *Equations différentielles-opérationnelles*, Springer, Berlin, 1961.
- [54] V. Marchenko, *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, Vol. 22, Germany, 1986.
- [55] V. Marchenko, *Reconstruction of the potential energy from the phases of the scattered waves*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 104, No. 5 (1955), 695-698. (Russian)
- [56] T. Myint-U and L. Debnath *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, Fourth edition, 2007.
- [57] K. Okamoto, *Fundamentals of optical waveguides*, San Diego: Academic Press, 2000.
- [58] F. Olver, D. Lozier, R. Boisvert and Ch. Clark, *NIST Handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [59] A. Ya Povzner, *On differential equations of Sturm-Liouville type on a half-axis*, Mat. Sb., 23(65) (1948), 3-52; English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (1) 4(1962), 24-101.
- [60] A. Prudnikov, Yu. Brychkov and O. Marichev, *Integrals and Series. Special Functions*, Gordon and breach science publishers, v.2, 1992.

-
- [61] Y. Prykarpatsky, A. Samoilenko and A. Prykarpatsky, *The multidimensional Delsarte transmutation operators, their differential-geometric structure and applications. Part 1*, 2003.
- [62] Y. Prykarpatsky, A. Samoilenko, A. Prykarpatsky and V. Samoilenko, *The Delsarte-Darboux type binary transformations and their differential-geometric and operator structure. Part 1*, arXiv:math-ph/0403055 v1. 2004.
- [63] S. Samko, A. Kilbas and O. Marichev, *Fractional integrals and derivatives, theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [64] S. Sitnik, *Buschman-Erdélyi transmutations, classification and applications*, Belgorod State University Scientific Bulletin, Mathematics. Physics. 2010, N°5(76).
- [65] S. Sitnik, *Transmutations and applications: a survey*, in Yu. F. Korobeinik, A. G. Kusraev (Eds.), Vladikavkaz: Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences and Republic of, North Ossetia-Alania, 2008, pp. 226-293, Available from: arXiv:1012.3741v1 (Originally published in the book: Advances in Modern Analysis and Mathematical Modeling).
- [66] V. Stashevskaya, *On the inverse problem of spectral analysis for a differential operator with a singularity at zero*, Zap. Mat. Otdel. Fiz.-Mat.Fak.KhGU i KhMO 25 (4) (1957) 49-86 (in Russian).
- [67] M. Thyssen, *Opérateurs de Delsarte particuliers*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 26(1957), 87-96.
- [68] M. Thyssen, *Sur certains opérateurs de transmutation particuliers*, Mem. Soc. Roy. Sci Liège, 6(1961), 7-32.
- [69] K. Trimeche, *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$* , J. Math. Pures Appl. 60(1981), 51-98.
- [70] K. Trimeche, *Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators*, Harwood Academic Publishers, 1988.
- [71] V. Ya. Volk, *On inversion formulas for a differential equation with a singularity at $x = 0$* , Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 8(4(56)) (1953) 141-151
- [72] A. Zettl, *Sturm-Liouville theory*, Mathematical Surveys and Monographs, 121. Providence, RI:American Mathematical Society, 2005.