



Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas

**Prueba de Estacionariedad de Series de Tiempo y
Algoritmo Súper Rápido para Estabilidad de
Polinomios**

TESIS

Que presenta

MSc. Andrés Felipe Téllez Crespo

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

En la especialidad de

Matemáticas

Director de Tesis:

Dr. Feliú Davino Sagols Troncoso

México, D.F.

Agosto, 2020

Agradecimientos

Agradezco al doctor Feliú Sagols por su guía y por presentarme el problema que se trabaja en esta tesis, por sus buenas sugerencias y por los cursos que tuve la fortuna de llevar con él. A CONACYT por su apoyo, sin el cual hubiera sido imposible llevar mi formación como doctor en matemáticas a feliz término. Al CINVESTAV y a los profesores de esta institución que ayudaron a mi formación. A Alex, Luisa, Max, Jenny y Pablo que no sólo fueron importantes en el desarrollo académico, sino en momentos de distracción y entretenimiento. A Diana Luz por su compañía y su apoyo emocional que hizo muy agradable esta experiencia en México. Finalmente a mis padres y familiares, porque les debo todo en la vida.

Índice general

Resumen	III
Abstract	v
Introducción	VII
Introduction	XV
1. Preliminares	1
1.1. Estabilidad de Polinomios	1
1.2. Estacionariedad de Procesos Estocásticos	5
1.3. Modelos Auto Regresivos $AR(p)$	6
2. Región de Estabilidad	15
2.1. Región de Estabilidad	15
2.2. Ecuaciones de Yule-Walker	17
2.3. Propiedades adicionales de la Región de Estabilidad	20
2.4. Puntos sobre la frontera de estabilidad.	27
2.4.1. Ortogonalidad de los puntos en las intersecciones	30
2.5. Menores centrales	35
2.6. Polinomios de Bernstein y Superficies de Bézier.	53
2.7. Caracterización de polinomios estables	62
2.7.1. Estabilidad de raíces reales	62
2.7.2. Estabilidad de raíces complejas	66
3. Algoritmo super-rápido para estabilidad de polinomios.	75
3.1. Algoritmo para los hiperplanos	75
3.2. Algoritmo para los menores centrales	76
3.2.1. Conversión de una matriz <i>Toeplitz + Hankel</i> a una matriz <i>Toeplitz</i> por bloques	77
3.2.2. Técnica de desplazamientos	85
4. Prueba de estacionariedad de series de tiempo	89
4.1. Motivación	89
4.2. Ergodicidad	91
4.3. Definición de norma que mide estacionariedad	94

4.4. Estandarización de la norma	98
4.5. Elección de τ	103
4.6. Comparación con otras pruebas de estacionariedad	106
Resumen	119
Bibliografía	122

Resumen

El teorema de Abel-Ruffini nos dice que es imposible encontrar las raíces de un polinomio general de grado $n \geq 5$ por medio de una fórmula que involucre radicales, a diferencia de los casos $n < 5$ en los que sí se puede encontrar aquella fórmula. En este documento nos interesa un resultado más débil, y es saber si todas las raíces de un polinomio tienen norma menor que algún valor fijo R (cuando $R = 1$ se habla de estabilidad de polinomios). Este problema es resoluble para todo n con unas cuantas desigualdades que no involucran radicales. En este documento hemos resuelto este problema de decisión sobre raíces unitarias utilizando el concepto de Matriz de Estabilidad (Def. 2.2.1) y caracterizamos la región geométrica que contiene los coeficientes de los polinomios estables. Esto se hizo analizando algunos menores matriciales, que también nos brindaron información relevante del número de raíces sobre el círculo unitario. También se exploró una interesante conexión con las superficies de Bézier, y esto contribuyó para encontrar un criterio de caracterización de polinomios estables. Cabe decir que a la fecha se han publicado varios criterios para verificar la estabilidad de polinomios, pero ninguno con esta metodología e interpretación.

Adicionalmente, nos interesamos en la implementación de nuestra caracterización en un algoritmo súper-rápido con tiempo de ejecución de $O(n \log^2 n)$, cabe decir que se han publicado varios algoritmos con la misma complejidad. Nuestro propósito con esta unidad es probar que la caracterización que se mencionó anteriormente es equivalente a los mejores métodos existentes desde un punto de vista algorítmico. Nuestra construcción se basó en las soluciones óptimas del Problema de Localización de Punto y la Técnica de Desplazamientos para matrices estructuradas. Un resultado adicional fue la prueba de que el ruido blanco es el modelo autoregresivo con mínima varianza.

Nuestra motivación inicial para estudiar polinomios estables fue la estacionariedad de series de tiempo. En particular, usando técnicas de cointegración y modelos de factores financieros (como el de Fama-French), vimos que era necesario caracterizar si una serie de tiempo era o no estacionaria. Las pruebas ampliamente utilizadas como la de Dickey-Fuller Aumentada (ADF) y la de Phillip-Perron (PP) nos proporcionaban resultados poco certeros. El p -value de estas pruebas variaba drásticamente cuando se introducían pequeñas variaciones en los datos. Adicionalmente, estos métodos fueron diseñados para identificar raíces unitarias y no la falta de estacionariedad, por lo que son incapaces de identificar cambios en la desviación estándar. Esta fue la principal motivación para desarrollar nuestra propia prueba de estacionariedad y los resultados mostraron valores p -value más estables al

cambiar los datos de entrada. Finalmente, se compararon las pruebas ADF, PP y la nuestra en la serie de tiempo *S&P500* durante el periodo de la crisis inmobiliaria del 2008 y nuestra prueba produjo los resultados más certeros.

Abstract

The Abel-Ruffini theorem tells us that it is impossible to find the roots of a general polynomial of degree $n \geq 5$ over the rationals by means of a formula that involves radicals, unlike cases $n < 5$ in which that formula can be found. In this document we are interested in a weaker problem, and it is to know if all the roots of a polynomial have a norm less than some fixed value R (when $R = 1$ one speaks of stable polynomials). Surprisingly, this problem is solvable for all n with few inequalities not involving radicals. We solved the unitary roots decision problem by using the Stability Matrix concept (Def. 2.2.1), and characterize the geometric region enclosing the coefficients of stable polynomials. It was performed by analyzing some matrix minors, which also yield relevant information about the number of roots over the unit circle. Then, a surprising connection to Bézier surfaces was explored, and this contributed to found a final stable polynomial characterization criteria based on the verification of a simple set of inequalities. Actually, several previous criteria to verify polynomial stability does exist, but none with this methodology and interpretation.

A second subject we were interested in was the conversion of our characterization into a $O(n \log^2 n)$ running time super-fast algorithm. In the literature several super-fast algorithms to solve the polynomial stability decision problem have been proposed. Actually, our purpose was to probe that the characterization criteria in this thesis is equivalent to the asymptotically best known methods from an algorithmic point of view. Our construction was based on the optimal known solution to the Point Location Problem and the Displacement Technique for structured matrices. An additional related result was the proof that the white noise is the autoregressive model with minimum variance.

We started this investigation of stable polynomials motivated by the study of stationary time series. In particular, we were using cointegration techniques and models of factors in finance (such as Fama-French) and we noticed it was needed to characterize if a time series was or not stationary, but widely used test like Augmented Dickey-Fuller (ADF) and the Phillip-Perron (PP) yield inaccurate results. The p – value changed dramatically, as small variations were introduced in the input time series. In addition, these tests were designed to identify unitary roots presence and not the lack of stationarity, making impossible the detection of abrupt changes in standard deviation. It was the main motivation to develop our stationary test, and the experimental results showed more stable p – values as input data changed. Augmented Dickey-Fuller, Phillip-Perron and our test were compared by applying them to the *S&P500* along the 2008's financial crisis and our test produced more accurate

stationary identification.

Introducción

Esta es una introducción amplia al trabajo para facilitar la lectura de un texto tan largo, proporciona el hilo conductor de los conceptos principales, contribuciones y resultados, además de ser una versión compacta de la tesis. Adicionalmente, se hará la referencia a los resultados propios ubicándolos entre paréntesis.

En este trabajo se tratarán dos temas principalmente, la estabilidad de polinomios y la estacionariedad de series de tiempo. El primer capítulo expondrá los preliminares sobre la estabilidad de polinomios, estacionariedad de series de tiempo y la relación entre estos dos conceptos por medio de los modelos autoregresivos. En el segundo capítulo se expondrá nuestro acercamiento a la solución de la estabilidad. En el tercer capítulo se mostrarán los detalles algorítmicos que permitirán que se pueda determinar si un polinomio de grado n es estable en un tiempo asintótico $O(n \log^2 n)$. En el cuarto capítulo finalizaremos desarrollando un método para determinar la significancia estadística de la estacionariedad de una serie de tiempo.

El problema de la estabilidad de polinomios se comenzó a estudiar a mediados del siglo XIX con los sistemas dinámicos a tiempo continuo. En ese momento se requería construir motores cada vez más poderosos, sin embargo, estas máquinas mostraban tendencia a vibrar cada vez que se aumentaba su potencia, es decir, tendían a la inestabilidad. Maxwell encontró que para algunos problemas específicos las condiciones de estabilidad estaban relacionadas con polinomios estables de grado tres. Tal progreso motivó a la Sociedad Matemática de Londres en 1868 proponer el problema de estabilidad de polinomios de grado arbitrario. La solución a este reto la obtuvo Routh en 1877 y posteriormente Hurwitz en 1895 encontró una mejor solución algorítmica. Este tipo de estabilidad es llamada estabilidad a tiempo continuo y requiere verificar que todas las raíces del polinomio tengan parte real negativa.

El problema que trabajaremos aquí será la *estabilidad a tiempo discreto*. Este problema recibió el interés de la comunidad científica a partir de la década de 1950 y con ello la localización de las raíces con respecto al círculo unitario. El problema fue resuelto por Cohn en 1922 quien adaptó un algoritmo previo de Schur de 1917. La solución se conoce ahora como el algoritmo Schur-Cohn y determina si un polinomio de grado n tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario. Este método tiene tiempo de ejecución $O(n^2)$.

Posteriormente, se desarrollaron versiones más simples del algoritmo de Schur-Cohn que preservan el orden $O(n^2)$. Estos nuevos algoritmos lograron reducir la cantidad de multiplicaciones y sumas considerando algunas simetrías, entre estos algoritmos, quizá los más famosos sean el de Jury en 1961 y el de Bistritz en 1986. A grandes rasgos, la metodología común consiste en la construcción de una sucesión de polinomios decreciente en grado, empezando con el polinomio original, hasta llegar a un polinomio constante. Luego, se cuentan

los cambios de signos de los polinomios de la sucesión cuando se evalúan en $z = 1$. Si no hay cambios de signo, se deduce que el polinomio es estable.

A diferencia de estas aproximaciones, aquí nos acercamos al problema de la estabilidad de polinomios a tiempo discreto por medio de los modelos $ARMA(p, q)$. Para el problema de determinar la estacionariedad de estos modelos, debemos fijarnos en la ubicación de las raíces de su polinomio característico. Explícitamente, un modelo $ARMA(p, q)$ es estacionario si y sólo si su polinomio característico es estable. Para determinar la estacionariedad de los modelos $ARMA(p, q)$ se utilizan las ecuaciones de Yule-Walker, de aquí se desprende nuestro propio enfoque de solución al problema.

Primero definimos la *Región de Estabilidad* (Def. 2.1.2), esta región es el conjunto $K_n \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene los coeficientes $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que el polinomio $p(x) = x^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}$ es estable. Se demuestran varias proposiciones de esta región, entre ellas que está acotada, es conexa y no convexa para $n \geq 3$ (Prop. 2.1.3, Prop. 2.1.4 y Prop. 2.3.2).

Luego definimos la *Matriz de Estabilidad* B del polinomio p (Def. 2.2.1), la cual es una reescritura de las ecuaciones de Yule-Walker que contiene sólo los coeficientes del polinomio. Es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ -\alpha_1 & 1 - \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 - \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} - \alpha_n & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema de Yule-Walker tenga solución única, es necesario que el determinante de la Matriz de Estabilidad sea distinto de cero. Esto particiona el espacio euclídeo en conjuntos con determinante distinto de cero y concluimos que para que el polinomio sea estable es necesario que sus coeficientes se encuentren en la misma clase de equivalencia del vector $(0, \dots, 0)$ (Teo. 2.2.5).

Esta clase de equivalencia resulta ser la misma Región de Estabilidad de la que hablamos antes y cuya frontera está contenida en el conjunto que cumple $\det(B) = 0$. Demostramos (Teo. 2.3.3) que esta frontera se puede factorizar como

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_i\right) \det(D)$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ -\alpha_1 + \alpha_3 & 1 + \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & \alpha_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-2} + \alpha_n & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, está compuesta por dos hiperplanos y otra variedad $\det(D) = 0$ que llamamos *frontera no lineal de estabilidad* (Def. 2.3.4). Los polinomios que pertenecen a los hiperplanos son los que cumplen que $p(1) = 0$ o $p(-1) = 0$. Por otro lado, la frontera no lineal de estabilidad contiene los polinomios con al menos un par de raíces unitarias complejas. Luego, se estudiaron los puntos pertenecientes a la intersección de estas tres variedades y se demostró (Prop. 2.4.2) que para $n \geq 3$, estos representan los coeficientes de los polinomios $(x+1)^{n-k+1}(x-1)^{k-1}$ denotados por $P_k^n \doteq (P_{k,1}^n, P_{k,2}^n, \dots, P_{k,n}^n)$ y que pertenecen a $\det(D) = 0$, además, cumplen la siguiente relación de ortogonalidad (Teo. 2.4.4)

$$\sum_{i=0}^n P_{k,i}^n P_{i+1,j}^n = 2^n \delta_{k,j+1}$$

que tendrá un uso posterior en la caracterización final de la estabilidad de polinomios (Teo.2.7.6).

No es suficiente para que un polinomio sea estable que los tres factores de $\det(B)$ sean positivos, un contraejemplo es el polinomio $P(x) = x^4 + 5x^2 + 6$ cuyas raíces tienen norma $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Como veremos más adelante, esto se debe a que $\det(D)$ es positivo si la cantidad de raíces fuera del círculo unitario es múltiplo de cuatro. A nosotros nos interesa verificar que no haya raíces fuera del círculo unitario, así que tenemos que descartar cuando hay una cantidad distinta de cero. Para resolver este problema utilizamos los menores centrales de la matriz D de la frontera no lineal de estabilidad (Def. 2.5.2). El k -menor central de D es el determinante de la submatriz que resulta de quitarle las primeras y últimas $k-1$ columnas y filas a la matriz D . Denotamos el k -menor central de una matriz de tamaño n por D_k^n , donde $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y además naturalmente $\det(D) = D_1^n$.

El primer resultado importante sobre los menores (Teo. 2.5.6) es una afirmación sobre la evaluación de éstos en un tipo particular de polinomios. Decimos que un polinomio de grado n es de la forma f_n si las raíces no reales están sobre la circunferencia unitaria y son un total de f pares (se cuentan en pares por ser conjugadas), las otras $n - 2f$ raíces son reales y se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$. Lo que dice el teorema es que si tenemos un polinomio P_f^n de la forma f_n , entonces algunos de los menores centrales de estos polinomios son cero, específicamente,

$$f \geq k \iff D_k^n(P_f^n) = 0$$

Este resultado quiere decir que los menores centrales funcionan para estos polinomios como contadores de pares de raíces complejas sobre la circunferencia unitaria. Específicamente, si el primer menor es cero, entonces sobre la circunferencia unitaria hay una cantidad par de raíces complejas mayor o igual a dos, si el segundo menor es cero, entonces hay una cantidad par de raíces complejas mayor o igual a cuatro, y así sucesivamente.

Otro resultado importante que tiene que ver con los menores centrales (Cor. 2.5.11) establece que para cualquier polinomio P_f^n de la forma f_n , se cumple $D_f^n(P_f^n) = D_1^{n-2f+2}(P_1^{n-2f+2})$. Como la evaluación $D_k^n(P_f^n)$ se hace cero para $f \geq k$, el menor central D_f^n es precisamente el último menor que con seguridad es cero para un polinomio de la forma f_n , los siguientes podrían ser distintos de cero. Así que $D_f^n(P_f^n)$ es la forma más general de la variedad $D_f^n = 0$. Lo que dice el teorema es que la estructura de esa variedad aparece también en

una dimensión inferior $m = n - 2f + 2$, pero en el primer menor central. Por lo tanto, con respecto a la estructura de la variedad sólo existe una frontera no lineal de estabilidad y es D_1^n .

Luego de encontrar una forma genérica de las superficies $D_k^n = 0$ (que realmente son $D_1^n = 0$), encontramos una interesante relación de éstas con los *polinomios base de Bernstein*. Esta base fue desarrollada por Bernstein para hacer una demostración constructiva del teorema de Stone-Weierstrass. Posteriormente, el ingeniero Bézier las utilizó para desarrollar las superficies y curvas que llevan su nombre. Las superficies de Bézier se expresan utilizando los polinomios de Bernstein y puntos de control que determinan la forma de la superficie. Probamos (Teo. 2.6.12), que la superficie no lineal de estabilidad ($D_1^n = 0$) es de Bézier. La idea principal de la prueba es que los puntos representados por los polinomios $(x + 1)^{n-k+1} (x - 1)^{k-1}$ deben ser usados como puntos de control. De hecho, el número de polinomios son $n + 1$ y el número de puntos de control necesarios son 2^{n-1} . Como se requieren muchos más puntos de control que los disponibles, se identifican varios de ellos con el mismo polinomio $(x + 1)^{n-k+1} (x - 1)^{k-1}$ para finalmente expresar la frontera de estabilidad no lineal como una superficie de Bézier.

El resultado anterior es muy importante en lo que sigue. En general, las superficies de Bézier tienen la propiedad que están contenidas en la cerradura convexa de sus puntos de control. Por lo tanto, sólo debemos encontrar un método para calcular la cerradura convexa de sus puntos de control. Esta región aislada nos permite aplicar los resultados de los menores antes mencionados, es decir, que $D_k^n > 0$ y esto asegura que los polinomios se encuentren en el interior de todas las regiones de estabilidad.

Con esto llegamos al resultado principal del capítulo, que dice que el estudio de la región de estabilidad se puede hacer separando el conjunto de desigualdades que la definen en dos componentes. Una componente que garantiza la estabilidad de raíces reales (Teo. 2.7.2) y otra que garantiza la estabilidad de las raíces complejas (Cor. 2.7.5). Estos dos resultados se unen en un Teorema que caracteriza completamente los polinomios estables sobre los reales, usando directamente desigualdades sobre sus coeficientes (Teo. 2.7.6).

El Capítulo 2 termina sugiriendo algunas posibilidades trabajos futuros. Por ejemplo, la generalización de estos resultados a otros anillos, junto con el estudio de las consecuencias topológicas de la identificación de los puntos de control cuando se relacionaron con las superficies de Bézier.

En el Capítulo 3 analizamos los aspectos algorítmicos del resultado principal del primer capítulo (Teo. 2.7.6). Decidir si un polinomio pertenece a la cerradura convexa de los puntos de control, es equivalente a la multiplicación de una matriz por un vector, lo cual puede hacerse en un tiempo $O(n^2)$. Por otro lado, la complejidad algorítmica de todo el proceso la domina la necesidad de verificar que todos los menores centrales sean positivos, cuyo cálculo directo requiere un tiempo de $O(n^4)$. Esta cota es mejorada sustancialmente por los métodos llamados “rápidos” de orden $O(n^2)$ como el de Schur-Cohn (1922) o el de Bistritz (1986). Mejores tiempos asintóticos los tienen los llamados algoritmos “súper rápidos” de orden $O(n \log^2(n))$ como el de Olshevsky (2004). Probamos que nuestro acercamiento al problema también se puede convertir en un algoritmo “super rápido” usando métodos óptimos para resolver la cerradura convexa y el cálculo de los menores centrales.

Para la implementación, el problema de decidir si un polinomio pertenece a la cerradura

convexa lo redujimos al Problema de Localización de Punto. Se empleó un resultado de Chazelle (1993) con complejidad final $O(n \log n)$, que requiere un costoso preprocesamiento de $O(n^n)$ y por fortuna sólo debe hacerse una vez para cada n .

Para evaluar los menores centrales aprovechamos que la matriz que nos interesa tiene estructura *Toeplitz + Hankel* y con esto la transformamos en una matriz *Toeplitz* por bloques. Asumiendo que el polinomio está contenido en la cerradura convexa de los puntos de control, demostramos que el criterio de estabilidad compleja se podía reexpresar de la matriz *Toeplitz + Hankel* a una matriz *Toeplitz* por bloques (Prop. 3.2.2).

Para lograr este resultado se demostró un teorema auxiliar que tiene interés por sí mismo (Teo. 3.2.1). Dice que el ruido blanco es el único modelo autorregresivo debilmente estacionario con menor varianza posible. En otras palabras, cualquier modelo autoregresivo que correlacione con eventos pasados implica un incremento en la varianza. Un ejemplo de esto es el modelo $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ que bajo condiciones de estacionariedad, es decir, $-1 \leq \alpha \leq 1$, su varianza es igual a $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$. Donde claramente se puede ver que $\gamma_0 \geq \sigma^2$ para todos los valores de α que hacen a X_t estacionario.

Finalmente, en la matriz *Toeplitz* por bloques, aplicamos la Técnica de los Desplazamientos [27] para evaluar sus menores en tiempo $O(n \log^2(n))$. Si bien el resultado es correcto, es importante considerar que las constantes asociadas a la expresión asintótica son muy grandes y los algoritmos involucrados muy complejos. En la práctica, es preferible usar los algoritmos clásicos de tiempo $O(n^2)$.

En el Capítulo 4 y último de este trabajo, abordamos el problema de la estacionariedad de series de tiempo. Nuestra motivación surgió al estudiar los modelos de factores en series de tiempo financieras. Específicamente, trabajamos con los modelos de Fama y French, CAPM y Carhart, y los aplicamos para desarrollar técnicas de inversión en mercados financieros basadas en momentos y reversión a la media. En estos métodos es fundamental verificar estacionariedad, por ejemplo, en los modelos ARMA (ampliamente usados en finanzas) las pruebas de raíz unitaria son herramientas básicas para este propósito. Entre las pruebas más utilizadas para verificar raíz unitaria están la de Dickey-Fuller aumentada (ADF) y la de Phillips-Perron (PP). Sin embargo, un error generalizado al utilizar estas pruebas es que se aplican sin verificar que el modelo sea realmente ARMA, lo cual nulifica su utilidad para determinar no estacionariedad.

Con este tipo de pruebas tuvimos principalmente dos inconvenientes. Primero, ambas pruebas son útiles para detectar reversión a la media, pero no cambios en la varianza. Segundo, las pruebas son excesivamente inestables: al mover un poco la ventana de análisis de una serie de tiempo, el *p-value* de la prueba cambiaba drásticamente. Esto nos hizo desconfiar de los resultados de estas pruebas.

Por lo tanto, decidimos desarrollar nuestra propia prueba de estacionariedad. Estábamos interesados en una herramienta práctica, y le dimos más importancia a esto que a detalles teóricos. La necesidad más importante era solucionar los dos problemas expuestos anteriormente, con errores mínimos en el caso de series no estacionarias.

Después de analizar el problema concluimos que nuestro objetivo era definir una función de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^+ , su dominio serían las series de tiempo (vistas como vectores en \mathbb{R}^n), y su kernel serían las series estacionarias. Esta función al evaluarla en otro tipo de serie de tiempo daría

un número positivo. Las funciones mas sencillas que podriamos escoger son la desviación estándar del promedio móvil de la serie original en una ventana de longitud τ , y la desviación estándar de la desviación estándar móvil de la serie original en una ventana similar. Aquí, consideramos que la serie de tiempo $\{x_i\}$ tiene longitud n . La primera función g_1^τ se encarga de registrar los cambios en la media y la segunda g_2^τ se encarga de medir los cambios en la desviación estándar, explícitamente,

$$g_1^\tau(x) = \sqrt{\text{var}_k(e_k^\tau(x))}$$

y

$$g_2^\tau(x) = \sqrt{\text{var}_k(\sigma_k^\tau(x))}$$

donde

$$e_k^\tau(x) \equiv \frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i$$

$$\sigma_k^\tau(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2}$$

Se probó (Prop. 4.3.1) que estas dos funciones son seminormas en \mathbb{R}^n sobre el campo \mathbb{R} . Como la combinación lineal positiva de seminormas es seminorma, nos da que $g^\tau(x) = C_1 g_1^\tau(x) + C_2 g_2^\tau(x)$ con $C_1, C_2 > 0$ también lo es. Esta es una forma preliminar de la función que estamos buscando. Lo que se hará posteriormente es hacer el cociente con el kernel de esta función para convertirla de seminorma en norma, y así obtener un espacio vectorial con norma $g^\tau(x)$ tal que el elemento $x = 0$ sea la clase de equivalencia de las series de tiempo estacionarias.

Nuestra intención es mejorar esta función para seguir capturando la noción de estacionariedad, pero quitando la dependencia de algunos parámetros típicos del muestreo. Como la función g^τ es una norma, un primer inconveniente es que

$$g^\tau(\alpha x) = |\alpha| g^\tau(x)$$

Esto haría que, por ejemplo, una serie financiera tuviera distintos niveles de no estacionariedad si la expresamos en divisas distintas. Un segundo inconveniente es que g^τ depende de los valores de τ , n y de la varianza de la serie de tiempo. Este problema se solucionó neutralizando la dependencia de estas variables. Finalmente las funciones g_1^τ y g_2^τ se transforman en

$$g_1^\tau(x) = \frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{\text{var}_k(e_k^\tau(x))}{d_1(\tau, n) \sigma^2}}$$

y

$$g_2^\tau(x) = \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{\text{var}_k(\sigma_k^\tau(x))}{d_2(\tau, n) \sigma^2}}$$

donde los parámetros $\sigma, K_1, K_2, d_1(\tau, n), d_2(\tau, n)$ se definen en la Sección 4.4. Estas funciones dejan de ser normas ya que $g_1^\tau(\alpha x) \neq |\alpha| g_1^\tau(x)$ y lo mismo sucede para g_2^τ .

A continuación, proponemos una metodología para seleccionar una ventana τ óptima para cada una de las funciones $g_1^\tau(x)$ y $g_2^\tau(x)$. Para ello en la Sección 4.5 utilizamos la Transformada de Fourier, lo que nos lleva a la expresión $g(x) = C_1 g_1^{\tau_1}(x) + C_2 g_2^{\tau_2}(x)$. También proponemos unos valores para C_1 y C_2 que mantienen el balance de las dos funciones, lo que finalmente nos da

$$g(x) = \frac{[g_1^{\tau_1}(x)]^2 + [g_2^{\tau_2}(x)]^2}{K [g_1^{\tau_1}(x) + g_2^{\tau_2}(x)]}$$

Luego, se calcula el valor de la función $g(x)$ para varias realizaciones del modelo $AR(1)$, con $\alpha = 1$ y $\varepsilon_t = N(0, 1)$ (notemos que no interesa la varianza porque ya se hizo la estandarización de este valor)

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

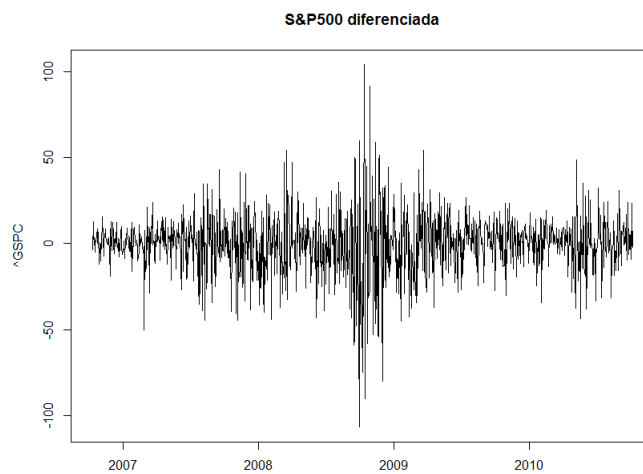
Con los valores arrojados por la función $g(x)$ se realiza un histograma, se aproxima su función de distribución acumulada empírica y se calculan algunos p -value asociados a ciertos valores de $g(x)$. Ya teniendo un p -value asociado podemos comparar nuestra prueba de estacionariedad con las pruebas ADF y PP. Se hicieron tres comparaciones: las dos primeras con modelos simulados, $AR(1)$ y $AR(2)$, esta se hizo por medio de cálculo del error tipo II, y la tercera con datos reales del $S\&P500$ durante la crisis financiera del 2008.

En la comparación con el modelo $AR(1)$ se esperaba que $g(x)$ tuviera un buen comportamiento ya que los p -value de la función $g(x)$ se ajustaron con este modelo, pero tomando en cuenta que las pruebas ADF y PP están hechas para detectar raíz unitaria también se esperaba que mostraran un buen comportamiento. El resultado es que para todos los valores de $\alpha \in [0, 1)$ en $Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$ la prueba de la función $g(x)$ fue mejor al indicar un nivel de no estacionariedad mucho menor que las otras pruebas. Para $\alpha = 1$ los resultados son similares entre las tres pruebas.

Para el modelo $AR(2)$, se usaron parámetros (α_1, α_2) que teóricamente aseguraban estacionariedad. En esta prueba tuvo un mejor resultado la prueba de $g(x)$ en el 86% de los casos, la de ADF en un 12,1% de los casos y la de PP en un 1,9% de los casos. La de ADF tuvo un mejor desempeño para los modelos con $\alpha \in [-1, 1]$ y $\alpha_2 = -1$, es decir, $Y_t = \alpha Y_{t-1} - Y_{t-2}$. La de Phillips-Perron tuvo un mejor comportamiento para unos cuantos modelos $Y_t = \alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha) Y_{t-2}$, con $\alpha \in (0, 2)$. Para el resto de modelos funcionó mejor la prueba basada en $g(x)$.

Finalmente, en el ejemplo de la serie del $S\&P500$ durante la crisis del 2008, en las pruebas de ADF y PP se notó la inestabilidad de la que se habló antes. Por el contrario, el comportamiento de la prueba de $g(x)$ fue mucho mas estable, por lo que se cumplió uno de los objetivos principales al desarrollar nuestra prueba. Adicionalmente, también se verificó la capacidad de detectar cambios en la varianza comparado con las pruebas clásicas, esto se hizo diferenciando la misma serie de $S\&P500$. $g(x)$ obtuvo un p -value de 0.25 en el momento

de mas volatilidad de la serie, mientras las otras pruebas dieron un $p - value$ de cero. Como se puede apreciar en la siguiente figura, la serie de tiempo diferenciada era obviamente no estacionaria a finales del 2008.



Introduction

This is an extended introduction of the work, written with two purposes in mind: to give a road map of the main concepts, contributions and results (the reference to our results are in parentheses), and to provide a compact English version of this Thesis.

Polynomial stability and time series stationarity are the key subjects in this Thesis. Chapter 1 establishes basic preliminaries about polynomial stability, time series stationarity, and their inter-relationship through autoregressive models. Chapter 2 introduces our approach to polynomial stability characterization. In Chapter 3 the algorithmic details to decide polynomial stability in $O(n \log^2 n)$ running time are introduced. Finally, in Chapter 4 we develop a test to decide the statistical significance of time series stationarity.

The polynomial stability problem started to be studied in the first half of XIX Century in connection to dynamical continuous time systems. At that time, the industrial revolution demanded powerful engines, but they were seriously affected by vibrations making them unstable. Maxwell found that for some specific problems the stability conditions were related to degree three stable polynomials. Such a progress motivated the London Mathematical Society to propose the arbitrary degree stability polynomial problem, and the challenge was solved by Routh in 1877. In 1895 Hurwitz found an efficient algorithmic solution. This type was named *continuous time stability* and requires that every polynomial root has negative real part.

The problem we work with is *discrete time stability*. It has been extensively studied from the 1950s decade. The problem was first solved by Cohn in 1922 who adapted a previous algorithm by Schur developed in 1917. Today this method is known as *Schur-Cohn algorithm* to decide if an n -degree polynomial has its whole root set inside the unitary circle. The method has $O(n^2)$ running time.

Later, a number of $O(n^2)$ simpler algorithms marginally improved the Schur-Cohn method. They reduced the amount of additions and multiplications by observing symmetries. Among them, probably the most relevant were the methods by Jury in 1961 and Bistritz in 1986. In both algorithms the underlying methodology consists in the construction of a succession of monotonically decreasing degree polynomials, starting with the polynomial to be tested, until a constant polynomial is reached. The sign changes of these polynomials is considered when they are evaluated in $z = 1$. No sign change reveals polynomial stability.

In contrast to these approaches, we address here the discrete time polynomial stability problem from the $ARMA(p, q)$ models perspective. To determine the stationarity of these models we should consider the position of its characteristic polynomial roots against the unitary complex circle. Explicitly, an $ARMA(p, q)$ model is stationary if and only if its characteristic polynomial is stable. In order to determine the $ARMA(p, q)$ models stationarity

we use the Yule-Walker equations, and it is the point from which our approach is different from any other known method.

We start by defining the *stability region* (Def. 2.1.2), this is the set $K_n \subseteq \mathbb{R}^n$ where we should select the coefficients $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ such that the polynomial $p(x) = x^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}$ be stable. Several propositions about this region are proved: it is bounded (Prop. 2.1.3), connected (Prop. 2.1.4) and not convex for $n \geq 3$ (Prop. 2.3.2).

Then the *Stability Matrix* B (Def. 2.2.1) of the polynomial p is defined. It is simply a matrix rewriting of the Yule-Walker equations, but organized in such a way that only the polynomial coefficients are part of the matrix. That is,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -\alpha_1 & 1 - \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 - \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} - \alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

In order to guaranty that the Yule-Walker system has unique solution, it is necessary that the stability matrix determinant be different from zero. So, the Euclidean space could be partitioned into sets having non-zero determinant. We conclude that if a polynomial is stable its coefficients vector should be in the same partition element that $(0, \dots, 0)$ (Theo. 2.2.5).

This Euclidean space region results to be precisely the stability region. Its boundary is contained in the set holding $\det(B) = 0$. We prove (Theo. 2.3.3) that this boundary could be expressed as

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) \det(D)$$

where

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ -\alpha_1 + \alpha_3 & 1 + \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & \alpha_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-2} + \alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

so, the boundary is composed by two hyperplanes and the variety $\det(D) = 0$ named *non-linear stability boundary* (Def. 2.3.4). The polynomials P belonging to these hyperplanes satisfies $P(1) = 0$ or $P(-1) = 0$. On the other hand, the non-linear boundary corresponds to polynomials with complex unitary roots. We studied the intersection points among these three varieties and proved that for $n \geq 3$ these points represent the coefficients of the polynomials $(x+1)^{n-k+1}(x-1)^{k-1}$ denoted as $P_k^n \doteq (P_{k,1}^n, P_{k,2}^n, \dots, P_{k,n}^n)$ belong to $\det(D) = 0$ (Prop. 2.4.2), and satisfy in addition the orthogonality relationship (Theo. 2.4.4).

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2^p \delta_{k,j+1}$$

which will be useful when we make the final characterization of polynomial stability (Theo. 2.7.6).

It is not enough for a polynomial P to be stable that the three factors of $\det(B)$ be positive. One counter-example is the polynomial $P(x) = x^4 + 5x^2 + 6$ whose roots have norms $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$. As we see later, $\det(D)$ is positive if the number of roots out of the complex unitary circle is multiple of four, but the unique situation in which we are interested in is when such multiple is zero. The problem was solved by using the k -central minor of matrix D (Def. 2.5.2) from the non-linear stability boundary, where $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. The k -central minor of D is the determinant of the submatrix resulting from deleting the first and last $k - 1$ columns and rows in matrix D . We denote by D_k^n the k -central minor of a n -order matrix D . In a natural way $\det(D) = D_1^n$.

Our first relevant result on minors (Theo. 2.5.6) is a claim about their evaluation on a particular polynomial type. A n -degree polynomial has the form f_n if it only has f pairs of unitary non-real roots, and the remaining $n - 2f$ roots are real inside the interval $(-1, 1)$. The claim is that if we have a polynomial P_f^n of the form f_n then some central minors are zero, specifically,

$$f \geq k \iff D_k^n(P_f^n) = 0$$

The meaning is that central minors work as complex root pair counters on the unitary circle for that type of polynomials. So, if the first minor is zero, then the unitary circle contains an even number greater than or equal to two of roots. If the second minor is zero, then the unitary circle contains an even number greater than or equal to four of complex roots, and so on.

Another important result about central minors (Cor. 2.5.11) says that for any polynomial P_f^n of the form f_n , $D_f^n(P_f^n) = D_1^{n-2f+2}(P_1^{n-2f+2})$. Since $D_k^n(P_f^n)$ is zero for $f \geq k$, the central minor D_f^n is precisely the last minor surely zero for a polynomial of the form f_n , and the next could be non-zero. In this way, $D_f^n(P_f^n)$ is the more general form of the variety $D_f^n = 0$. This theorem essentially says that the stability region variety appeared before in the lower dimension $m = n - 2f + 2$, but in the first central minor. It means that considering the variety form there is only a non-linear stability boundary and it is D_1^n .

Once the generic form of the surfaces $D_k^n = 0$ has been established (which in fact are $D_1^m = 0$), we found an interesting relationship to a very well known polynomial base: the *Bernstein polynomials*. They were developed by Bernstein to proof constructively the Stone-Weierstrass theorem. Later, Bézier used them to develop the surfaces and curves named after him, and have been extensively used in industry. They are conformed by Bernstein polynomials and the control points determining the surface form. We prove here (Theo. 2.6.12) that the non-linear stability surfaces ($D_1^n = 0$) are just Bézier. The proof is a bit technical, but the main idea is that the points represented by the polynomials $(x + 1)^{n-k+1}(x - 1)^{k-1}$ should be used as control points to model the stability surface. In fact, the number of these points is $n + 1$ but we certainly need 2^{n-1} . Since much more control points are necessary than the strictly available, we identify several of them with the same polynomial $(x + 1)^{n-k+1}(x - 1)^{k-1}$ and we finally expressed the stability boundary as a Bézier surface.

The last result is extremely important in our further development. In general, any Bézier

surface is contained in the convex hull of their control points. So, we only had to devise a method to compute the convex hull of the control points. This isolated region let us apply the results about minors we mentioned before, that is, $D_k^n > 0$ and it ensures that all polynomials are inside of all stability regions.

In this way, we reach the main result in Chapter 1, it says that to verify stability we can separate the inequalities defining the region into two sets. A set of inequalities to guaranty the real roots stability (Theo. 2.7.2) and another inequality set to guaranty the non real roots stability (Cor. 2.7.5). This separation give rise to a full characterization of the real coefficients of stable polynomials by using, exclusively, inequalities on their coefficients (Theo. 2.7.6).

Chapter 2 finishes by analyzing some future possible work. For instance, the generalization of these results to other rings and the topological consequences of the control points identification used to model the non-linear stability boundary as a Bézier surface.

In Chapter 3 we analyze the algorithmic aspects of Theorem 2.7.6. There, deciding if a polynomial belongs to the convex hull of the control points is equivalent to a vector-matrix multiplication which could be performed in $O(n^2)$ running time. On the other hand, the algorithmic complexity of the whole process is dominated by the time needed to verify that the central minors are all positive, which in the naive way could require $O(n^4)$ time when they are compute directly. This complexity is substantially improved by the so called *fast* methods which consume $O(n^2)$ time, and this is the case of the methods by Shur-Cohn (1922) and Bistritz (1986). Better algorithms named *super-fast* need $O(n \log^2(n))$ time; the method by Olshevsky (2004) belongs to this class. We prove that our approach also yields a super-fast algorithm by using the best methods available to solve some very well known problems.

We first reduced the problem of deciding if a polynomial belongs to the convex hull of some points set to the Point Location Problem. Then, we solved the last problem by applying an efficient algorithm due to Chazelle (1993), and the final complexity was $O(n \log n)$ time. An expensive preprocessing is needed ($O(n^n)$ time) but it should be done once for each fixed n .

Then, to evaluate the central minors we noticed that the matrix involved has a *Toeplitz-plus-Hankel* structure. This allowed us to transform it in a *Block- Toeplitz* matrix. Assuming the polynomial is enclosed in the control points convex hull we proved that the stability criteria could be re-interpreted from *Toeplitz-plus-Hankel* to the *Block-Toeplitz* matrices (Prop. 3.2.2).

In order to prove this result we first demonstrate an auxiliary theorem which we consider interesting by itself (Teo. 3.2.1). It says the white noise is the autoregressive model with the minimum possible variance. In other words, any autoregressive model correlating with past events implies variance increase. An instance of this is the model $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ with $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. If this model is stationary then $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$, and because $-1 \leq \alpha \leq 1$ one can conclude that $\gamma_0 \geq \sigma^2$.

In the *Block- Toeplitz* matrix we applied the Displacements Technique to evaluate its minors in $O(n \log^2(n))$ running time. Even the approach is correct it must be considered a theoretical curiosity because the constants in the asymptotic expression are large and the algorithms involved are too complex. In practice, classical $O(n^2)$ methods work better.

In Chapter 4, the last in this work, we addressed the time series stationarity problem. Our interest born from the study of factor models in financial time series. Specifically we were working on the CAPM, the Fama and French and the Carhart models, and applied them to develop investment techniques based on media reversion and momentum. In these methods it is fundamental to verify stationarity in autoregressive models, and basic tools for this purpose are unitary root tests. This is because an unitary root in the characteristic polynomial of an autoregressive model implies non-stationarity, but not the converse. Among the most used test are the Augmented Dickey-Fuller (ADF) and the Phillips-Perron (PP).

Two problems arose when we applied these tests. First, both tests are useful to detect media reversion, but not time changes in variance. Second, the tests were extremely unstable: when we moved the data analysis window a little bit the p – value of the test changed drastically. So, we were no confident in using the tests results.

Therefore we decided to develop our own stationarity test. We were interested in a practical tool which conferred much more importance to data than to theoretical issues. Actually, we needed to avoid the two problems explained before, with minimal errors in the case of non-stationary series.

After some further analysis we concluded that our objective was to define a function from the time series space whose kernel were the stationary series. This function evaluated in any other time series would yield a value greater than zero. The simplest functions are the standard deviation of the moving average of the original series over a time window of length τ , and the standard deviation of the moving standard deviation of the original series over a similar window. Here we are considering that the time series $\{x_i\}$ has length n . The first function would account the changes in the media and the second one in the standard deviation. Explicitly,

$$g_1^\tau(x) = \sqrt{\text{var}_k(e_k^\tau(x))}$$

and

$$g_2^\tau(x) = \sqrt{\text{var}_k(\sigma_k^\tau(x))}$$

where

$$e_k^\tau(x) \equiv \frac{1}{\tau + 1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i$$

$$\sigma_k^\tau(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{\tau + 1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2}$$

We proved (Prop. 4.3.1) that both functions are semi-norms in \mathbb{R}^n over the field \mathbb{R} . Since positive linear combinations preserve semi-norms, we conclude that $g^\tau(x) = C_1 g_1^\tau(x) + C_2 g_2^\tau(x)$ is a semi-norm for any positive values C_1 and C_2 . It was a preliminary form of the function we where looking for. Then we built the quotient of the time series space over the kernel of our function to make the conversion from semi-norm to norm, and it produced a

vector space with norm $g^\tau(x)$ such that the element $x = 0$ would be the representative of the class of stationary time series.

From this point our task was to improve this function in such a way that it captured the notion of stationarity, but without dependence on parameters inherent to the sampling process. Since g^τ is a norm a first inconvenient is that

$$g^\tau(\alpha x) = |\alpha| g^\tau(x)$$

For example, if we're dealing with a financial time serie, it would have different norms when we express it in different currencies. A second inconvenient is that the norm value depends on τ , n and the time series variance. Both problems were solved by neutralizing the dependence on these variables. So our norm was transformed to

$$g_1^\tau(x) = \frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{\text{var}_k(e_k^\tau(x))}{d_1(\tau, n) \sigma^2}}$$

and

$$g_2^\tau(x) = \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{\text{var}_k(\sigma_k^\tau(x))}{d_2(\tau, n) \sigma^2}}$$

the parameters σ , K_1 , K_2 , $d_1(\tau, n)$, $d_2(\tau, n)$ are defined in Section 4.4. This function is not a norm anymore because $g_1^\tau(\alpha x) \neq |\alpha| g_1^\tau(x)$, and the same happens to g_2^τ .

Then a methodology was proposed to select an optimal τ for each one of the functions $g_1^\tau(x)$ and $g_2^\tau(x)$. In Section 4.5 we used the Fourier transformation to yield $g(x) = C_1 g_1^{\tau_1}(x) + C_2 g_2^{\tau_2}(x)$. We also proposed values to C_1 and C_2 which are appropriate to keep the balance in both functions. In this way we finally produced the expression

$$g(x) = \frac{[g_1^{\tau_1}(x)]^2 + [g_2^{\tau_2}(x)]^2}{K [g_1^{\tau_1}(x) + g_2^{\tau_2}(x)]}$$

We then evaluate the function $g(x)$ on several realization of the model $AR(1)$, by taking $\alpha = 1$ and $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ (We did not consider a different variance because this value was standardized).

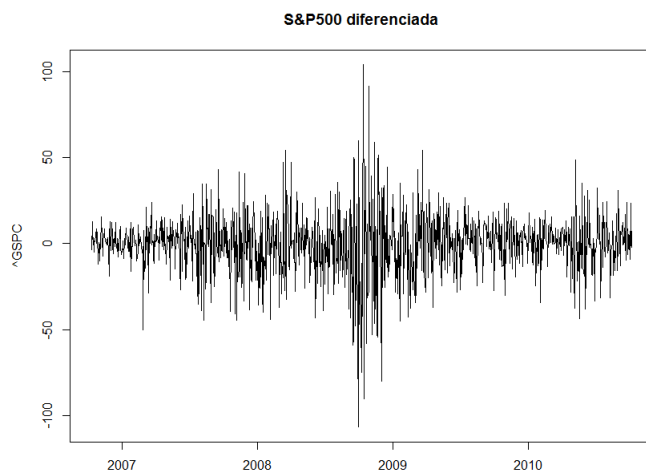
$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

With the values generated by $g(x)$ we built a histogram, then we computed its accumulated empirical distribution and compute some p -values associated to certain $g(x)$ values. With the p -values of our test we were able to compare our stationarity test to the ADF and PP tests. We performed three comparisons: the first two with simulated models $AR(1)$ and $AR(2)$, we compared the type II error on each one, and the third one with $SP\&500$ real data around the 2008 financial crisis.

We expected a good behavior with the $AR(1)$ model because the p -values of $g(x)$ were adjusted to fit this model, but the same was expected from ADF and PP tests. The result was that for each value $\alpha \in [0, 1)$ in $Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$ the $g(x)$ test yield a non-stationarity level lower than the other two test. For $\alpha = 1$ the results were similar in the three tests.

With the $AR(2)$ model, we used parameters to guaranty stationarity. From all pairs (α_1, α_2) ensuring stationarity the test $g(x)$ had a better behavior in 86 % cases, the ADT test in a 12,1 %, and the PP test in a 1,9 %. The ADF tests had a better behavior in the models with $\alpha \in [-1, 1]$ and $\alpha_2 = -1$, that is $Y_t = \alpha Y_{t-1} - Y_{t-2}$. The PP test had a better behavior for few models $Y_t = \alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)Y_{t-2}$, with $\alpha \in (0, 2)$. In the remainder models $g(x)$ yield better results.

Finally, with the $S\&P500$ time series the ADF and PP test exhibited great instability in accordance to our expectations. On the other hand, $g(x)$ was much more stable, and one of the main objectives to develop of the new test was met. In addition, we verified the potential of our test to detect changes in variance against classic tests, it was performed by differentiating the same series $S\&P500$. $g(x)$ obtained a $p - value$ of 0,25 at the highest volatility time in the series. The other test claimed stationarity at the same time. As it is appreciated in the next figure, the differentiated time series was obviously non-stationary at late 2008.



Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo haremos una introducción de dos conceptos que serán constantes a través de todo el escrito y que son el núcleo del trabajo, estos conceptos son la estabilidad de polinomios y la estacionariedad de procesos estocásticos. En la primera parte definiremos estos conceptos, posteriormente los relacionaremos por medio de los modelos Autorregresivos $AR(n)$ y se mostrará el criterio de estacionariedad para estos modelos.

1.1. Estabilidad de Polinomios

El problema de la estabilidad de polinomios tiene una relación muy cercana con la estabilidad de sistemas dinámicos lineales, teoría de control y en teoría matemática de ecuaciones diferenciales y de diferencias. Hay dos tipos de estabilidad dependiendo si el polinomio brinda estabilidad a sistemas dinámicos lineales a tiempo continuo o discreto.

Por ejemplo, sea el sistema dinámico lineal a tiempo continuo

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

que tiene asociado el polinomio característico

$$P(x) = x - a$$

cuya raíz es $x = a$.

Al solucionar la ecuación diferencial se tiene que

$$x = x(0) e^{at}$$

y si queremos que la solución sea estable (que $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$), debemos imponer la condición que $Re(a) < 0$, es decir, que su raíz tenga parte real negativa. Esta condición para sistemas lineales de mayor orden en las derivadas se generaliza de la siguiente forma.

Estabilidad Tiempo Continuo: todas las raíces complejas z de su polinomio característico P cumplen que $Re(z) < 0$.

Análogamente, sea un sistema dinámico lineal a tiempo discreto

$$x(t+1) = ax(t)$$

con polinomio asociado

$$P(x) = x - a$$

cuya raíz es $x = a$.

Al solucionar la recursión se tiene

$$x(t) = x(0) a^t$$

En este caso se debe imponer la condición $|a| < 1$ para que la solución sea estable (que $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$). Al tener sistemas lineales discretos con polinomios asociados de mayor grado se debe cumplir la siguiente condición más general.

Estabilidad Tiempo Discreto: todas las raíces complejas z de su polinomio característico P cumplen que $|z| < 1$.

Los primeros se conocen como polinomios *Hurwitz-estables* y los segundos como polinomios *Schur-estables*. Cabe resaltar que si se tiene un método para determinar una de las estabilidades se tiene un método para determinar la otra, ya que la transformación de Möbius

$$z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$$

convierte el semiplano izquierdo en el disco unitario. De tal manera que si tenemos un polinomio $P(z)$ de grado n , y definimos el polinomio

$$Q(z) = (z-1)^n P\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

resulta que estos polinomios cumplen que P es Schur-estable si y sólo si Q es Hurwitz-estable y $P(1) \neq 0$.

Históricamente, de las dos estabilidades se resolvió primero la Hurwitz-estabilidad por Routh en 1877 [18], pero fue Hurwitz en 1895 [19] quién adaptó la solución a una forma adecuada para hacer computación numérica, el algoritmo correspondiente se llama actualmente el *algoritmo Routh-Hurwitz* y se puede encontrar en muchos libros de ingeniería.

La Schur-estabilidad recibió más atención posteriormente y se necesitó un algoritmo que no involucrara la transformación de Möbius por los cálculos adicionales involucrados, de tal manera que se determinara si era estable o no con el polinomio original. Fue solucionado por Cohn en 1922 [28] quién adaptó un algoritmo previo de Schur de 1917 [29], actualmente se conoce como *algoritmo Schur-Cohn*.

Este algoritmo tiene un tiempo de ejecución $O(n^2)$, y la idea general del algoritmo es que empezando desde el polinomio original P_n se construye una sucesión particular de polinomios P_i descendiente en su grado. Para cada uno ellos se calcula un número que se llama el coeficiente de reflexión ρ_i y si cada uno de ellos cumple que $|\rho_i| < 1$, entonces el polinomio es estable. Ideas similares fueron retomadas por Jury en 1961 [20] y por Bistritz en 1986 [2]. Este último, por ejemplo, utiliza una sucesión de polinomios simétricos descendientes en grado y esto reduce algunos cálculos. Estos algoritmos con tiempo de ejecución $O(n^2)$ son llamados “rápidos”.

En los últimos años se han desarrollado algoritmos de tiempo de ejecución $O(n \log^2 n)$, estos son llamados “súper rápidos”. Estas ideas comenzaron en 1980 con Brent et al. [7] donde utilizaron la fórmula de Gohberg-Semencul [16] para la inversa de una matriz Toeplitz y el método de divide y vencerás. Estos algoritmos han seguido evolucionado hasta abarcar la solución de sistemas lineales de una gran cantidad de matrices estructuradas en tiempo $O(n \log^2 n)$ de una manera metódica por medio de la técnica de desplazamientos, como puede verse en el libro [27]. En este trabajo utilizaremos varios de sus resultados y técnicas.

Todos estos acercamientos son algorítmicos, pero ninguno aborda el problema desde el punto de vista geométrico de la región en la que se pueden escoger los coeficientes para que un polinomio sea estable. En este trabajo se estudiarán las propiedades de esta región. Finalmente, se deducirán fórmulas cerradas para el caso general y se mostrará un resultado análogo a la matriz de Hurwitz, pero para el caso de estabilidad a tiempo discreto.

Explícitamente, la matriz de Hurwitz y su criterio asociado fue demostrado en [19] y dice lo siguiente.

Teorema. [Hurwitz, 1895] *Dado un polinomio real*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

a la matriz cuadrada de dimensión $n \times n$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

se le llama matriz de Hurwitz correspondiente al polinomio P . Entonces, todas las raíces z de P , cumplen $\operatorname{Re}(z) < 0$ si y solo si todos los menores principales de la matriz H son positivos.

En este trabajo se mostrará un resultado similar pero para el caso de la Schur-estabilidad.

A partir de este momento, sólo trabajaremos con estabilidad derivada de sistemas lineales a tiempo discreto, así que siempre que hablemos de estabilidad nos referiremos a Schur-estabilidad.

Definición 1.1.1. Dado un polinomio $P(z)$ con coeficientes reales, diremos que es *estable* si $\forall z \in \mathbb{C}$ que cumple $P(z) = 0$, entonces $|z| < 1$.

Dejando de lado las soluciones algorítmicas, existen acercamientos puramente teóricos con respecto a las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que su polinomio sea estable, uno de los más conocidos es el Teorema de Eneström-Kakeya, demostrado por Eneström en 1893 [13] e independientemente por Kakeya en 1912 [21].

Teorema 1.1.2. [Kakeya, 1912] Si $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales que satisfacen $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$, entonces todos los ceros de p están en $|z| \leq 1$.

La condición sobre los coeficientes no es una caracterización completa para lograr la estabilidad. Por ejemplo, para el polinomio $p(z) = 2x^2 - x + 1$, todas sus raíces cumplen que $|z| \leq 1$, pero sus coeficientes no cumplen la condición del teorema ya que uno de ellos es negativo.

Resultados con la misma esencia de los teoremas de Hurwitz y de Eneström-Kakeya se presentarán en este documento, pero con una caracterización completa de los polinomios Schur-estables por medio de relaciones entre sus coeficientes.

1.2. Estacionariedad de Procesos Estocásticos

Los procesos estocásticos son colecciones de variables aleatorias, si esta colección es indexada por un conjunto numerable se le denomina proceso estocástico a tiempo discreto, si lo es por medio de un continuo, se le llama proceso estocástico a tiempo continuo. Lo que se busca con los procesos estocásticos es dotar a un evento aleatorio la posibilidad de cambiar sus propiedades con el tiempo. En este documento cuando hablemos de procesos estocásticos siempre nos referiremos a procesos a tiempo discreto.

Los procesos estocásticos se han utilizado ampliamente como modelos matemáticos en muchos campos aplicados y es común extender teorías y desarrollos matemáticos previos agregando el componente aleatorio propio de los procesos estocásticos. Sus aplicaciones más comunes están en Teoría de la Información [14], Química y Física [31], Finanzas [30], Telecomunicaciones [2] y Ecología [23], pero es fácil encontrarlos en otras áreas del conocimiento.

Entre los procesos estocásticos destacan los llamados estacionarios, que son procesos cuyas propiedades no cambian con el tiempo. Una de las propiedades más notables de estos procesos es que muestran reversión a la media, esta es una garantía de que no se alejarán por mucho tiempo de su media. Muchas veces para obtener este tipo de comportamiento se utiliza algún pre proceso que convierte una serie no estacionaria en una que lo es, por ejemplo, diferenciándola.

Definición 1.2.1. Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ definidas sobre un espacio de probabilidad común (Ω, \mathcal{F}, P) , donde Ω es un espacio muestral, \mathcal{F} es una σ -álgebra y P es una medida de probabilidad. Las variables aleatorias están indexadas por algún conjunto T , toman valores en el mismo espacio matemático S , que debe ser medible con respecto a alguna σ -álgebra Σ .

Con respecto al concepto de estacionariedad, se encuentran normalmente en la literatura dos definiciones.

Definición 1.2.2. Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico y sea $F_X(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_k+\tau})$ la distribución acumulada conjunta en los tiempos $t_1 + \tau, \dots, t_k + \tau$. Entonces, se dice que $\{X_t\}_{t \in T}$ es *estrictamente estacionario* si

$$F_X(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_k+\tau}) = F_X(x_{t_1}, \dots, x_{t_k}) \quad \forall k, \tau, t_1, \dots, t_k$$

Como $F_X(\cdot)$ no depende de τ , F_X no es una función del tiempo.

Dado que esta definición es muy restrictiva en las aplicaciones comunes, normalmente se emplea la definición de estacionariedad débil que damos a continuación.

Definición 1.2.3. Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico. Se dice que el proceso es *débilmente estacionario* si su media cumple

$$\mathbb{E}[X_t] = m_X(t) = m_X(t + \tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$$

y su función de auto covarianza definida por

$$K_{XX}(t_1, t_2) \equiv \mathbb{E}[(X_{t_1} - m_X(t_1))(X_{t_2} - m_X(t_2))]$$

cumple

$$K_{XX}(t_1, t_2) = K_{XX}(t_1 - t_2, 0)$$

Si $k = t_1 - t_2$, a menudo se denota la función auto covarianza como γ_k

La primera propiedad implica que la esperanza debe ser constante en el tiempo, y la segunda propiedad implica que la auto covarianza sólo depende de la diferencia $t_1 - t_2$ y no de los valores específicos de t_1 y t_2 .

La estacionariedad débil, también es llamada estacionariedad amplia, estacionariedad en covarianza o estacionariedad de segundo orden.

La diferencia entre las dos definiciones es que la segunda sólo pide condiciones sobre los dos primeros momentos, en cambio, la primera pide la condición más restrictiva que todas las funciones de distribución sean iguales en el tiempo, lo que implica que también todos los momentos posteriores al segundo también se restringen. Por lo tanto, estacionariedad estricta implica estacionariedad débil.

A partir de este momento, cada vez que hagamos referencia a estacionariedad nos estaremos refiriendo a estacionariedad débil.

1.3. Modelos Auto Regresivos $AR(p)$

En el estudio de series de tiempo, existen modelos muy conocidos que representan diferentes procesos estocásticos. Entre los que tienen gran importancia práctica se encuentran dos modelos independientes: los Modelos Auto Regresivos (AR) y los Modelos de Media Móvil (MA). Combinaciones de estos procesos básicos y otros, permiten construir modelos más complejos, como los modelos ARMA y los modelos ARIMA.

El modelo ARMA se construye a partir de los modelos AR y MA, y el modelo ARIMA a partir de los modelos AR, I y MA, donde $I(d)$ corresponde a un modelo integrado de orden d . A diferencia de los modelos ARMA, los modelos ARIMA se emplean cuando se detecta que los datos corresponden a un modelo no estacionario, en este caso, el parámetro d del modelo $I(d)$, se obtiene diferenciando la serie hasta que obtengamos una serie estacionaria. El éxito del uso de estos modelos reside en su simplicidad y en su capacidad para ajustarse a una gran variedad de problemas. Para obtener los parámetros de los modelos, se usa comúnmente el método desarrollado en 1976 conocido como Método Box–Jenkins [6].

Para empezar definiremos los modelos básicos y posteriormente se mostrarán cuándo son estacionarios, para las siguientes definiciones y pruebas se usó de apoyo [18]

Definición 1.3.1. El *Modelo Auto Regresivo* de orden p , denotado por $AR(p)$, se define como

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ son los parámetros del modelo, c es una constante y ε_t son variables aleatorias i.i.d. con distribución $N(0, \sigma^2)$.

Sin pérdida de generalidad tomaremos $c = 0$. A ε_t le llamaremos *ruido blanco Gaussiano*.

Definición 1.3.2. El *Modelo de Media Móvil* de orden q , denotado por $MA(q)$, se define como

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}$$

donde β_1, \dots, β_p son los parámetros del modelo, μ es una constante y $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ son variables aleatorias i.i.d con distribución $N(0, \sigma^2)$.

A continuación desarrollaremos dos resultados que ya hacen parte del folclore de las series de tiempo. Se darán las demostraciones aquí para una mayor completitud de la exposición y relación con los conceptos de la sección pasada. La Proposición 1.3.3 relaciona la estacionariedad con los procesos $MA(q)$ y la Proposición 1.3.7 hace lo mismo con los modelos $AR(p)$.

Proposición 1.3.3. *Los modelos $MA(q)$ siempre son estacionarios para $q < \infty$.*

Demostración. Tenemos que la media

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mu] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}] = \mu$$

es constante. Para la auto covarianza, sin pérdida de generalidad asumiremos $\mu = 0$ para simplicidad en los cálculos. Si multiplicamos a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}$ por X_{t+k} y tomamos esperanzas se tiene que

$$\mathbb{E}[X_t X_{t+k}] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}] + \mathbb{E}\left[\varepsilon_t \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t+k-i}\right] + \mathbb{E}\left[\varepsilon_{t+k} \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t+k-j}\right]$$

y considerando que $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ son variables aleatorias i.i.d. con distribución $\varepsilon_{t-i} \sim N(0, \sigma^2)$, se tiene como resultado

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \sum_{i=1}^q \beta_i^2) & \text{para } k = 0 \\ \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{k+i} & \text{para } k = 1, \dots, q \\ 0 & \text{para } k > q \end{cases}$$

donde $\beta_0 = 1$. Como ni μ ni γ_k dependen de t , entonces X_t es estacionario. \square

Nota: El caso cuando $q \rightarrow \infty$, denotado por $MA(\infty)$, es equivalente a un modelo $AR(1)$ y una condición suficiente para la estacionariedad es que $\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i| < \infty$.

Con base en las definiciones anteriores podemos definir el Modelo Auto Regresivo de Media Móvil, que como el nombre lo indica, tiene una componente Auto Regresiva y otra componente de Media Móvil.

Definición 1.3.4. El *Modelo Auto Regresivo de Media Móvil* de ordenes p y q , denotado por $ARMA(p, q)$, se define como

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}$$

donde los términos son como en las definiciones de los Modelos Auto Regresivo y de Media Móvil,

A continuación queremos establecer las condiciones que deberían cumplir los parámetros de un modelo $ARMA(p, q)$ para que éste sea estacionario. Ya comprobamos que la componente $MA(q)$ siempre es estacionaria, así que debemos enfocarnos en la componente $AR(p)$ para determinar cuándo es estacionario el modelo $ARMA(p, q)$.

Asociado a cada modelo recursivo lineal tenemos un polinomio característico, en particular también para los $AR(p)$.

Definición 1.3.5. Dado un modelo $AR(n)$ definido por

$$Y_t = \sum_{i=1}^n a_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Llamaremos *polinomio característico del modelo* al polinomio P formado por los parámetros del modelo, es decir,

$$P(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_{n-1} x - a_n$$

Se probará el resultado conocido que dicta, que para que el modelo $AR(n)$ sea estacionario debemos fijarnos en la ubicación de las raíces de su polinomio característico con respecto al círculo unitario. Primero se probará un resultado auxiliar

Lema 1.3.6. Sea A la matriz compañera definida por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces el polinomio característico de esta matriz está dado por

$$P(x) = (-1)^n (x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_n)$$

Demostración. Se demostrará por inducción.

Sea

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener su polinomio característico calculamos:

$$P_n(\lambda) = \det(A_n - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Vemos que la hipótesis se cumple para $n = 1$.

$$P_1(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^1 (\lambda - a_1)$$

Asumimos que se cumple para $n = k$, es decir, $P_k(\lambda) = (-1)^k (\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - \dots - a_k)$.

Vemos que se cumple para $n = k + 1$:

$$P_{k+1}(\lambda) = \det(A_{k+1} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & a_k & a_{k+1} \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Usando la última columna para desarrollar el determinante se tiene:

$$P_{k+1}(\lambda) = (-\lambda) \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^k a_{k+1} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Utilizando la hipótesis inductiva y el hecho que el determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal principal:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\lambda) &= (-\lambda) P_k(\lambda) + (-1)^k a_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} (\lambda^{k+1} - a_1\lambda^k - a_2\lambda^{k-1} - \dots - a_k\lambda) + (-1)^k a_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} (\lambda^{k+1} - a_1\lambda^k - a_2\lambda^{k-1} - \dots - a_{k+1}) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3.7. *El modelo $AR(p)$ es estacionario si su polinomio característico es estable.*

Demostración. Sea el modelo $AR(p)$ con media cero $\mu = 0$ definido por la siguiente ecuación:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ son los parámetros del modelo y ε_t es un ruido blanco.

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \\ Y_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que se puede ver como

$$X_t = AX_{t-1} + E_t$$

donde

$$X_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si reemplazamos para los X_i con $i < t$, tenemos

$$X_t = \sum_{i=0}^t A^{t-i} E_i$$

Asumiendo que el proceso estocástico tuvo el inicio $X_0 = E_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Como el polinomio característico de la matriz A es

$$P_p(\lambda) = (-1)^p (\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \alpha_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \alpha_p)$$

y este polinomio tiene raíces simples dependiendo de los valores que toman sus coeficientes, entonces que también depende de sus coeficientes si es A es diagonalizable. En caso de ser diagonalizable, se tiene que $A = PDP^{-1}$ donde P es una matriz invertible y D es la matriz diagonal de valores propios λ_i . Por lo tanto, $A^k = PD^kP^{-1}$.

El proceso X_t es estacionario cuando $t \rightarrow \infty$ si y sólo si su media y su covarianzas tienen un valor constante, considerando que

$$X_t = \sum_{i=0}^t A^{t-i} E_i$$

puede reescribirse como

$$X_t = P\tilde{D}P^{-1}e_1$$

donde e_1 es el vector $(1, 0, \dots, 0)$ y

$$\tilde{D} = \text{diag} \left(\sum_{i=0}^t \lambda_1^{t-i} \varepsilon_i, \dots, \sum_{i=0}^t \lambda_2^{t-i} \varepsilon_i \right)$$

como cada una de las entradas de la matriz diagonal es un $MA(\infty)$, y según la nota después de la Proposición 1.3.3 para que la media y auto covarianzas sean constantes se necesita que cada uno de los valores propios λ_j de la matriz A cumplan $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_j^i| < \infty$ y esto sucede si y sólo si $|\lambda_i| < 1$, Por el Lema 1.3.6 se tiene el resultado. \square

A continuación se mostrará un ejemplo sencillo donde podremos apreciar el resultado anterior.

Ejemplo 1.3.8. Sea el modelo $AR(1)$ definido de la siguiente manera

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde el parámetro α se tomará perteneciente al intervalo $[0, 1)$ para asegurar estacionariedad y $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Al tomar esperanzas tenemos

$$\mu = \mathbb{E}[Y_t] = \alpha \mathbb{E}[Y_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$$

como $\alpha \neq 1$ y el proceso es estacionario $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-1}]$

$$(1 - \alpha) \mathbb{E}[Y_t] = 0$$

$$\mu = \mathbb{E}[Y_t] = 0$$

Para la varianza, debemos tener en cuenta que ε_t es un ruido blanco y por lo tanto independiente de Y_{t-1} , así

$$\gamma_0 = \text{var}[Y_t] = \alpha^2 \text{var}[Y_{t-1}] + \sigma^2$$

y como $\alpha \neq 1$ y el proceso es estacionario $\text{var}[Y_t] = \text{var}[Y_{t-1}]$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

Para las auto covarianzas calculamos $\mathbb{E}[Y_t Y_{t-k}]$, consideramos que $\gamma_k = \gamma_{-k}$ y que ε_t es independiente de Y_{t-k} .

$$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-k}] = \alpha \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-k}]$$

$$\gamma_k = \alpha \gamma_{k-1}$$

resolviendo la recursión resulta

$$\gamma_k = \frac{\sigma^2 \alpha^{|k|}}{1 - \alpha^2}$$

Vemos que cada una de las auto covarianzas no están definidas cuando $\alpha = 1$.

Si intentáramos hacer lo mismo que hicimos pero considerando $\alpha = 1$ y asumiendo estacionariedad, tenemos que

$$\gamma_0 = \text{var} [Y_t] = \text{var} [Y_{t-1}] + \sigma^2$$

lo que nos da $\sigma^2 = 0$, y es una contradicción porque $\sigma^2 > 0$, por lo tanto no puede ser estacionario para $\alpha = 1$.

Pero si resolvemos la recursión tenemos que

$$\begin{aligned} \text{var} [Y_t] &= \text{var} [Y_{t-1}] + \sigma^2 \\ &= \text{var} [Y_{t-2}] + 2\sigma^2 \\ &= \text{var} [Y_{t-3}] + 3\sigma^2 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{var} [Y_t] = \text{var} [Y_{t-i}] + i\sigma^2$$

si asumimos que $Y_0 = \varepsilon_0$, tenemos que

$$\text{var} [Y_t] = t\sigma^2$$

donde vemos que la varianza no se estabiliza en una constante para tiempos suficientemente grandes, por el contrario $\text{var} [Y_t] \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En la Figura 1.3.1 se muestran tres realizaciones del modelo $AR(1)$, con $\alpha = 0$ en verde, $\alpha = 0,95$ en rojo y $\alpha = 1$ en negro.

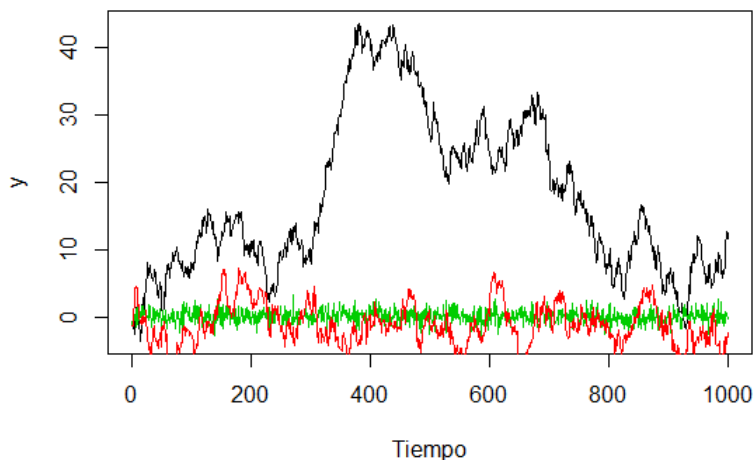


Figura 1.3.1: Realizaciones de $AR(1)$ con $\alpha = 0, 0,95, 1$

A modo de conclusión del capítulo, vemos que hay una correspondencia entre las raíces de un polinomio y la estacionariedad de los modelos Auto Regresivos, en particular, la ubicación relativa de las raíces del polinomio con respecto al círculo unitario, determina si el modelo Auto Regresivo es o no estacionario. Utilizando esta conexión, en los siguientes capítulos desarrollaremos herramientas y resultados, que nos conducirán por una parte a un criterio de estabilidad de polinomios, y por otra parte a un criterio de estacionariedad de series de tiempo.

Capítulo 2

Región de Estabilidad

En este capítulo presentaremos las conocidas ecuaciones de Yule-Walker para seguir luego con un desarrollo teórico de las condiciones que deben cumplir los coeficientes de un polinomio para asegurar la estabilidad. Estas ecuaciones se reinterpretarán y es el punto de separación de las aproximaciones conocidas al problema de estabilidad de polinomios. Definiremos la frontera de la región de estabilidad para finalmente lograr una factorización y mostrar algunas propiedades de los polinomios pertenecientes a la frontera. Se mostrarán resultados que involucran a las variedades de Bézier y sus implicaciones para el desarrollo de un algoritmo que identifica estabilidad de polinomios. Finalmente, se mostrará una caracterización de estabilidad por medio de los menores de una matriz.

2.1. Región de Estabilidad

En esta sección definiremos la región que contiene a los coeficientes de los polinomios estables (vistos como vectores en \mathbb{R}^n). Primero introducimos una notación de los polinomios para facilitar la escritura

Definición 2.1.1. Sea $P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_n$ un polinomio mónico de grado n con coeficientes reales, a menudo también nos referiremos a P por (a_1, a_2, \dots, a_n) , al que llamaremos *vector de coeficientes del polinomio P* .

El problema que abordaremos es caracterizar la región que contiene exclusivamente puntos (a_1, a_2, \dots, a_n) de tal manera que su polinomio asociado tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario en el plano complejo.

Definición 2.1.2. Llamaremos *región de estabilidad* al conjunto formado por los vectores de coeficientes (a_1, a_2, \dots, a_n) de polinomios estables. Denotaremos este conjunto por K_n .

A continuación mostraremos que K_n es una región acotada y conexa.

Proposición 2.1.3. La región K_n está acotada para cada n por la bola $B\left(0, \sqrt{\binom{2n}{n} - 1}\right)$.

Demostración. Sea el polinomio $P(x)$ denotado por su vector (a_1, a_2, \dots, a_n) con raíces $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ que cumplen que $|r_i| < 1$, entonces

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_n = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$$

Por las fórmulas de Viète se tiene que

$$\begin{cases} |a_1| = \left| -\sum_{i=1}^n r_i \right| < \binom{n}{1} = n \\ |a_2| = \left| \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j \right| < \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots \\ |a_n| = \left| (-1)^n \prod_{i=1}^n r_i \right| < \binom{n}{n} = 1 \end{cases}$$

De manera general se puede ver que

$$|a_j| = \left| (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_j} \right| < \binom{n}{j}$$

Esto demuestra que el conjunto es acotado, pero además

$$\begin{aligned} \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \\ &< \sqrt{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2} - 1 \\ &= \sqrt{\binom{2n}{n}} - 1 \end{aligned}$$

Donde la última igualdad es una aplicación directa de la identidad de Vandermonde. \square

Esta cota es justa ya que los polinomios $P(x) = (x \pm (1 - \epsilon))^n$ se acercan tanto como queramos a la cota para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño y sus raíces tienen módulo menor que la unidad.

Proposición 2.1.4. *La región K_n es conexa para toda n .*

Demostración. Sea el polinomio $P_1(x)$ denotado por su vector (a_1, a_2, \dots, a_n) con raíces $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ que cumplen que $|r_i| < 1$, entonces

$$P_1(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_n = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$$

si multiplicamos a cada raíz por $t \in [0, 1]$, estaríamos uniendo esa raíz con el cero por medio de una línea recta en el plano complejo. Como las raíces cumplen $|r_i| < 1$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces el polinomio

$$P_2(x) = (x - tr_1)(x - tr_2)\dots(x - tr_n) = x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \dots - b_n$$

también tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario complejo.

Al utilizar las fórmulas de Viète en el polinomio P_2 . Se obtienen las relaciones entre los coeficientes de P_1 y P_2 :

$$b_i = t^i a_i$$

De esta manera cualquier punto de la región K_n , por ejemplo (a_1, a_2, \dots, a_n) se puede conectar con el vector cero sin salirnos de K_n por medio de la curva

$$\gamma(t) = (ta_1, t^2a_2, \dots, t^na_n)$$

con $t \in [0, 1]$. □

Estos dos resultados caracterizan a la región K_n como un dominio acotado contenido en \mathbb{R}^n .

Basándonos en estos resultados y las ecuaciones de Yule-Walker (Udny Yule en 1927 [35] y a Gilbert Walker en 1931 [32]) podemos probar un teorema que nos acerca más a la caracterización de la región de estabilidad.

2.2. Ecuaciones de Yule-Walker

Las ecuaciones de Yule-Walker relacionan los parámetros de un modelo $AR(p)$ con sus covarianzas γ_k . Son utilizadas para ajustar los parámetros del modelo luego de hallar de manera muestral sus covarianzas, pero también sirven para encontrar expresiones cerradas de sus covarianzas dados sus parámetros.

Dado el modelo $AR(p)$ por medio de la ecuación

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Al calcular $\mathbb{E}[Y_t Y_{t-k}]$ de la manera que se hizo en el Ejemplo 1.3.8, se tiene

$$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-k}] = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{E}[Y_{t-i} Y_{t-k}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-k}]$$

Si asumimos que el proceso es estacionario, tenemos que $\mathbb{E}[Y_t Y_{t-k}] = \gamma_k$ para todo k y para todo t . De tal manera que

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_{k-i} + \sigma^2 \delta_{k,0}$$

donde $k = 0, \dots, p$, y $\delta_{k,0}$ es la función delta de Kronecker. También cabe notar que por estacionariedad se cumple también que $\gamma_k = \gamma_{-k}$. Si se organizan estas ecuaciones de manera vectorial, se tiene las famosas ecuaciones de Yule-Walker

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \\ \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_p \gamma_p + \sigma^2 \\ \alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_1 + \dots + \alpha_p \gamma_{p-1} \\ \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_0 + \dots + \alpha_p \gamma_{p-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 \gamma_{p-2} + \alpha_2 \gamma_{p-3} + \dots + \alpha_p \gamma_1 \\ \alpha_1 \gamma_{p-1} + \alpha_2 \gamma_{p-2} + \dots + \alpha_p \gamma_0 \end{pmatrix}$$

Al reorganizar las ecuaciones tenemos el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1-\alpha_3 & 1-\alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2}-\alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_{p-2} \\ \gamma_{p-1} \\ \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que si tenemos un modelo $Y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$, y queremos hallar sus covarianzas, sólo debemos reemplazar sus parámetros en el sistema anterior y resolverlo. Pero también es necesario decir que no todas las soluciones (dado un conjunto de parámetros) del sistema son válidas. Por ejemplo, si utilizamos los valores $\alpha_1 = 4,5831$, $\alpha_2 = -5,2114$, $\alpha_3 = -1,2745$. El sistema tiene la solución $\gamma_0 = -54,2817$ que no tiene sentido, ya que sabemos que la varianza debe ser positiva. Lo que haremos a continuación es determinar cuáles parámetros nos llevan a soluciones que tienen sentido.

La matriz que depende de los α_i será importante en lo que sigue del documento, así que haremos una definición para ella.

Definición 2.2.1. Sea P un polinomio y $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ su vector de coeficientes, llamaremos *matriz de estabilidad del polinomio P* a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1-\alpha_3 & 1-\alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2}-\alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyas entradas son

$$b_{i1} = -\alpha_{i-1}$$

$$b_{ij} = -\alpha_{i-j} - \alpha_{i+j-2} \quad \forall j > 1$$

donde

$$\alpha_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 0 \\ a_k & \text{si } k \in \{1, \dots, p\} \\ 0 & \text{si } k \notin \{1, \dots, p\} \cup \{0\} \end{cases}$$

La matriz de estabilidad de un polinomio con vector de coeficientes $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ la denotaremos como $ME(A)$ o $ME(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

Basándonos en la definición de matriz de estabilidad y en la proposición 2.1.4, podemos hacer una partición del espacio euclídeo por medio de una clase de equivalencia de la siguiente manera:

Definición 2.2.2. Sean $P_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $P_2 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ puntos en \mathbb{R}^n tal que $\det(ME(P_1)) \neq 0$ y $\det(ME(P_2)) \neq 0$. Diremos que están relacionados por \sim si existe un camino de P_1 hasta P_2 denotado por $\psi(t)$ con $P_1 = \psi(0)$ y $P_2 = \psi(1)$, de tal manera que para todo $\psi(t)$ con $t \in [0, 1]$ se tiene que $\det(ME(\psi(t))) \neq 0$. Denotaremos esta relación por $P_1 \sim P_2$.

La relación \sim es de equivalencia sobre el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^n \mid \det(ME(P)) \neq 0\}$ considerando que el determinante es una función continua en las entradas de la matriz (por ser polinomial) y que por lo tanto particiona a

$$\{P \in \mathbb{R}^n \mid \det(ME(P)) \neq 0\}$$

en clases de equivalencia.

Adicionalmente, el vector $\mathbf{0} \in \{P \in \mathbb{R}^n \mid \det(ME(P)) \neq 0\}$ ya que $\det(ME(\mathbf{0})) = 1$. Por lo tanto todo $P \in [\mathbf{0}]$ cumple que $\det(ME(P)) > 0$.

Definición 2.2.3. Sea $[\mathbf{0}] := \{P \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{0} \sim P\}$ la clase de equivalencia del cero. A esta clase la llamaremos *clase de estabilidad*.

Ahora podemos probar el siguiente Lema

Lema 2.2.4. *La región de estabilidad es igual a la clase de estabilidad, es decir, $K_n = [\mathbf{0}]$.*

Demostración. Si A es el vector de coeficientes de un polinomio P estable, entonces $\det(ME(A)) \neq 0$ porque el sistema derivado de las ecuaciones de Yule-Walker tiene solución única y es constante. Además, como el vector cero corresponde al polinomio estable $P(z) = z^n$, por la Proposición 2.1.4 se tiene que existe un camino que une a cero con A , es decir, $A \in [\mathbf{0}]$.

La otra implicación es similar: si $A \in [\mathbf{0}]$, entonces existe un camino que conecta a A con $\mathbf{0}$ sin que el determinante se haga cero a lo largo del camino y en A , por lo tanto, $\det(ME(A)) \neq 0$, de nuevo por la Proposición 2.1.4, A es el vector de coeficientes de un polinomio estable. \square

A manera de resumen de los resultados de la sección se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.2.5. *Sea el modelo $AR(p)$ descrito por la ecuación*

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, P su polinomio característico, A su vector de coeficientes y $B = ME(A)$ la matriz de estabilidad, entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes

1. P es estable
2. Y_t es estacionario
3. La región de estabilidad contiene al vector cero y sus elementos cumplen $\det(B) > 0$.

Demostración. La equivalencia 1) \Leftrightarrow 2) ya quedo demostrada en la Proposición 1.3.7,

Para 1) \Leftrightarrow 3). Teniendo en cuenta el Lema 2.2.4 se tiene que $\det(B) \neq 0$ y contiene al vector cero. Así que se tiene que escoger entre $\det(B) > 0$ o $\det(B) < 0$, claramente la respuesta es $\det(B) > 0$ ya que $\det(ME(0)) = 1$. \square

La parte 3 del teorema anterior será la que se utilizará más en lo que sigue del documento, principalmente en encontrar condiciones que aseguren que la región de estabilidad contenga el vector cero.

2.3. Propiedades adicionales de la Región de Estabilidad

La región de estabilidad tiene otras tres propiedades interesantes. La primera es que no sólo responde la pregunta de los polinomios con sus raíces dentro del círculo unitario, sino que con pequeñas modificaciones también responde la misma pregunta para raíces dentro de un círculo de radio arbitrario R . La segunda, que no es convexa para $n \geq 3$, es más, para n lo suficientemente grande es altamente no convexa, esto explica por qué es tan difícil encontrar cotas justas de la norma de las raíces para un polinomio arbitrario. La tercera, es que $\det(B)$ se puede factorizar de tal manera que la frontera de la región de estabilidad se puede descomponer en variedades más simples. A continuación demostraremos estas tres propiedades.

Proposición 2.3.1. *Sea $P_1(x)$ un polinomio con vector de coeficientes (a_1, a_2, \dots, a_n) , entonces todas sus raíces cumplen que $|z| < R$ si y solo si el polinomio con $P_2(x)$ con vector de coeficientes reales $(\frac{a_1}{R}, \frac{a_2}{R^2}, \dots, \frac{a_n}{R^n})$ tiene la propiedad que todas sus raíces cumplen que $|z| < 1$.*

Demostración. Sea $P_1(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_n$ un polinomio que todas sus raíces cumplen que $|z| < R$. Sean $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ sus raíces, entonces

$$P_1(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

por lo tanto, el polinomio

$$P_2(x) = \left(x - \frac{r_1}{R}\right) \left(x - \frac{r_2}{R}\right) \dots \left(x - \frac{r_n}{R}\right)$$

tiene todas sus raíces con la propiedad $|z| < 1$

Resolviendo el polinomio y usando las fórmulas de Viète finalmente se llega a:

$$P_2(x) = x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \dots - b_n = x^n - \frac{a_1}{R}x^{n-1} - \frac{a_2}{R^2}x^{n-2} - \dots - \frac{a_n}{R^n}$$

\square

Proposición 2.3.2. *La región de estabilidad K_n no es convexa para $n \geq 3$.*

Demostración. Sea $P(x) = (x+c)^n$ con $c \in (-1, 1)$. Este polinomio está en la región K_n por definición. Si conectamos este polinomio de manera lineal en los coeficientes con el polinomio $R(x) = x^n$, entonces se tiene la siguiente familia de polinomios con $t \in [0, 1]$.

$$Q_t(x) \doteq (1-t)x^n + tP(x)$$

De tal manera que si los coeficientes del polinomio P son (a_1, a_2, \dots, a_n) , entonces los coeficientes del polinomio Q son $(ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$. Esto en el espacio de los coeficientes es unir el vector (a_1, a_2, \dots, a_n) con el vector $(0, 0, \dots, 0)$ por medio de una línea recta.

Veremos que existen valores de $t \in (0, 1)$ y $c \in (-1, 1)$ para los cuales el polinomio Q tiene raíces por fuera del círculo unitario complejo para $n \geq 3$.

Sea x_0 una raíz de Q , entonces

$$(1-t)x_0^n + t(x_0+c)^n = 0$$

$$\left(1 + \frac{c}{x_0}\right)^n = \frac{t-1}{t}$$

$$x_0 = \frac{c}{\left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Sea $t = \frac{2}{3}$, entonces

$$x_0 = \frac{c}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Usando la identidad de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ tenemos que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 2^{-\frac{1}{n}} \left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2^{\frac{1}{n}} \right) + i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} |x_0| &= \frac{|c|}{2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \\ &= \frac{|c|}{2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2^{\frac{2}{n}} - 2^{\frac{1}{n}+1} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \\ &= \frac{|c|}{2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{n}} \left(2^{\frac{1}{n}} - 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}} \end{aligned}$$

usando la desigualdad

$$2^{\frac{1}{n}} - 2\cos(\theta) < \theta^2 - 2 + 2^{\frac{1}{n}}$$

tenemos que

$$|x_0| > \frac{|c|}{2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - 2 + 2^{\frac{1}{n}} \right)}}$$

si queremos que la raíz se salga del círculo unitario, se debe cumplir que

$$\frac{|c|}{2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{\pi}{n} \right)^2 - 2 + 2^{\frac{1}{n}} \right)}} > 1$$

con $|c| < 1$

Es decir, debemos encontrar para qué valores de n se cumple que

$$2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{\pi}{n} \right)^2 - 2 + 2^{\frac{1}{n}} \right)} < 1$$

Reescribiendo la anterior desigualdad llegamos a

$$\frac{\pi^2}{n^2} < 2 - 2^{-\frac{1}{n}}$$

La cual se cumple para $n > 2,85898$. Así que para valores $n \geq 3$ la región K_n no es convexa.

De esta manera para $t = 2/3$ el valor de c se puede tomar en el intervalo

$$1 > |c| > 2^{-\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{\pi}{n} \right)^2 - 2 + 2^{\frac{1}{n}} \right)}$$

Para K_0 , K_1 y K_2 se puede comprobar directamente que la región es convexa ya que se trata de un punto, una línea recta y un triángulo relleno respectivamente. \square

Según el teorema anterior, vemos que para $n = 3$, c puede tomar los valores $|c| \in (0,95548, 1)$, para $n = 10$, $|c| \in (0,31076, 1)$ y cuando $n \rightarrow \infty$, $|c| \in (0, 1)$.

Esto quiere decir que a medida que n crece, la región K_n se convierte rápidamente en una región altamente no convexa. Esta es una de las razones de la dificultad de encontrar cotas muy cerradas para la norma de las raíces de un polinomio de un grado alto como se puede ver en [14]. Al mismo tiempo, esto explica el mal condicionamiento de hallar las raíces de un polinomio a partir de sus coeficientes, como el ejemplo de [34].

Retomando el Teorema 2.2.5, en el punto 3 vemos que una de las caracterizaciones de la región de estabilidad está dada en términos de $\det(B) > 0$, donde $B = ME(A)$ y A es el vector de coeficientes del polinomio. Por lo tanto, la frontera de esta región está determinada por $\det(B) = 0$, como veremos en el siguiente teorema, $\det(B)$ se puede factorizar, de tal manera que esta n -variedad que determina la frontera es una colección de otras más simples.

Teorema 2.3.3. *Sea $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ el vector de coeficientes del polinomio P y B su matriz de estabilidad, entonces $\det(B)$ se puede factorizar de la siguiente manera:*

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i \right) \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i \right) \det(D)$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{p-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_p \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_p & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_p & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Recordamos que las entradas de la matriz B se pueden expresar así:

$$b_{i1} = -\alpha_{i-1}$$

$$b_{ij} = -\alpha_{i-j} - \alpha_{i+j-2} \quad \forall j > 1$$

donde

$$\alpha_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 0 \\ a_k & \text{si } k \in \{1, \dots, p\} \\ 0 & \text{si } k \notin \{1, \dots, p\} \cup \{0\} \end{cases}$$

Si se suman alternadamente las columnas de B denotadas por C_j y reemplazando el resultado en la primera columna denotada por C_1 . Es decir,

$$\sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} C_j \rightarrow C_1$$

Las entradas b_{i1} quedarían:

$$\sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \alpha_{i-j} + \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^j \alpha_{j+i-2}$$

que es igual a

$$(-1)^i (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^p \alpha_p)$$

Por lo tanto se tiene que $\det(B)$ se puede expresar como

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i \right) \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -1 & 1 - \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p & 0 \\ 1 & -\alpha_1 - \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{p+1} & -\alpha_{p-2} - \alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ (-1)^p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cabe resaltar que a pesar de que se cambió el signo del determinante $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ veces, al dejar las columnas C_2, \dots, C_n con el mismo signo se cambia de nuevo el signo del determinante $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ veces, es decir, no varía el signo.

A continuación se hacen las siguientes operaciones de filas para $i \in \{1, \dots, p-1\}$ en la matriz

$$R_i + R_{i+1} \rightarrow R_i$$

Lo que nos da ceros en la primer columna, excepto en la última entrada que da $(-1)^p$. Y en el resto de entradas:

$$b_{ij} = -\alpha_{i-j} - \alpha_{i+j-2} - \alpha_{i-j+1} - \alpha_{i+j-1} \quad \forall j > 1$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 - \alpha_1 - \alpha_2 & -\alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_3 - \alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-2} - \alpha_{p-1} & -\alpha_{p-1} - \alpha_p & -\alpha_p \\ 0 & 1 - \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 & -\alpha_3 + 1 - \alpha_4 & -\alpha_4 - \alpha_5 & \cdots & -\alpha_{p-1} - \alpha_p & -\alpha_p & 0 \\ 0 & -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4 & 1 - \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_5 & 1 - \alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{p-2} - \alpha_p - \alpha_{p-1} & -\alpha_{p-3} - \alpha_{p-2} & -\alpha_{p-4} - \alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 - \alpha_1 & 1 \\ (-1)^p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la dimensión de la matriz es $p+1$ al tomar el elemento $(-1)^p$ como pivote, nos queda $(-1)^{2p} = 1$, así que el determinante anterior es igual al determinante de la submatriz b_{ij} con $1 \leq i \leq p$, $2 \leq j \leq p+1$.

Renombrando los índices tenemos que nos queda la matriz K con entradas:

$$k_{ij} = -\alpha_{i-j-1} - \alpha_{i+j-1} - \alpha_{i-j} - \alpha_{i+j}$$

que en notación matricial queda

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 - \alpha_2 & -\alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_3 - \alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-2} - \alpha_{p-1} & -\alpha_{p-1} - \alpha_p & -\alpha_p \\ 1 - \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 & -\alpha_3 + 1 - \alpha_4 & -\alpha_4 - \alpha_5 & \cdots & -\alpha_{p-1} - \alpha_p & -\alpha_p & 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4 & 1 - \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_5 & 1 - \alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-2} - \alpha_p - \alpha_{p-1} & -\alpha_{p-3} - \alpha_{p-2} & -\alpha_{p-4} - \alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 - \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

A esta nueva matriz le reemplazamos la primera columna por la suma de sus columnas impares:

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} C_{2j-1} \rightarrow C_1$$

Es decir, las entradas k_{i1} quedarían

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} k_{i,2j-1} = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-\alpha_{i-2j} - \alpha_{i+2j-2} - \alpha_{i-2j+1} - \alpha_{i+2j-1})$$

El primer y tercer término son todos los α_k con $k \leq i-1$ y el segundo y cuarto término son todos los α_k con $k \geq i$. Es decir,

$$-(\alpha_{i-2} + \alpha_{i-4} + \dots + \alpha_0) - (\alpha_i + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_{p-1}) - (\alpha_{i-1} + \alpha_{i-3} + \dots + \alpha_1) - (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+3} + \dots + \alpha_p)$$

reorganizando términos queda

$$-\sum_{i=0}^p \alpha_p$$

de esta manera se puede expresar en términos del segundo factor como:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_3 - \alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-2} - \alpha_{p-1} & -\alpha_{p-1} - \alpha_p & -\alpha_p \\ 1 & -\alpha_3 + 1 - \alpha_4 & -\alpha_4 - \alpha_5 & \cdots & -\alpha_{p-1} - \alpha_p & -\alpha_p & 0 \\ 1 & 1 - \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_5 & 1 - \alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\alpha_{p-3} - \alpha_{p-2} & -\alpha_{p-4} - \alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 - \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

A la matriz resultante el hacemos las siguientes operaciones en las filas para $j \in \{1, \dots, p-1\}$.

$$R_{j+1} - R_j \rightarrow R_j$$

El resultado de la primera columna son ceros, excepto la entrada p -ésima que sería uno. Para las otras columnas:

$$k_{ij} = (\alpha_{i+j-1} - \alpha_{i+j+1}) + (\alpha_{i-j-1} - \alpha_{i-j+1})$$

Como se multiplicó $p-1$ veces las filas del determinante por -1 , se tiene un factor de $(-1)^{p-1}$ en el determinante.

es decir,

$$(-1)^{p-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 + \alpha_2 - \alpha_4 & \alpha_3 - \alpha_5 & \cdots & \alpha_{p-2} - \alpha_p & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 0 & -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 & 1 + \alpha_4 - \alpha_6 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & 0 \\ 0 & -1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 & -\alpha_1 + \alpha_5 - \alpha_7 & \cdots & \alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\alpha_{p-3} - \alpha_{p-2} & -\alpha_{p-4} - \alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 - \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Tomando como pivote el uno de la primera columna y como está en la posición p , podemos quedarnos con el determinante de la submatriz c_{ij} con $2 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p-1$, multiplicado por $(-1)^{p-1}$. Es decir, que con el $(-1)^{p-1}$ exterior queda un factor de $(-1)^{2p-2} = 1$

Reorganizando los índices tenemos una nueva matriz C con entradas

$$c_{ij} = (\alpha_{i+j} - \alpha_{i+j+2}) + (\alpha_{i-j-2} - \alpha_{i-j})$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha_2 - \alpha_4 & \alpha_3 - \alpha_5 & \cdots & \alpha_{p-2} - \alpha_p & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 & 1 + \alpha_4 - \alpha_6 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & 0 \\ -1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 & -\alpha_1 + \alpha_5 - \alpha_7 & \cdots & \alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_p - \alpha_{p-2} + \alpha_{p-4} & \alpha_{p-5} - \alpha_{p-3} & \cdots & -1 - \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ahora, del determinante que queda, hacemos las siguientes operaciones para $k \in \{1, \dots, \lceil \frac{p-1}{2} \rceil\}$:

$$\sum_{i=k}^{\lceil \frac{p-1}{2} \rceil} C_{2i} \rightarrow C_{2k}$$

$$\sum_{i=k}^{\lceil \frac{p-1}{2} \rceil} C_{2i-1} \rightarrow C_{2k-1}$$

llamando d_{ij} las entradas de esta nueva matriz, tenemos

$$d_{i,2j} = \sum_{k=j}^{\lceil \frac{p-1}{2} \rceil} c_{i,2k} = \sum_{k=j}^{\lceil \frac{p-1}{2} \rceil} (\alpha_{i+2k} - \alpha_{i+2k+2}) + (\alpha_{i-2k-2} - \alpha_{i-2k})$$

Teniendo en cuenta que se trata de series telescópicas y que los términos cuando $k = \lceil \frac{p-1}{2} \rceil$ son cero, tenemos

$$d_{i,2j} = \alpha_{i+2j} - \alpha_{i-2j}$$

de la misma manera se prueba para los impares.

Finalmente resultando que la matriz queda con entradas

$$d_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_{i-j}$$

es decir,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{p-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_p \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_p & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_p & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

□

Interpretando este teorema llegamos a la conclusión que la frontera de K_n está compuesta por tres $(n-1)$ -variedades, dos de ellas son hiperplanos y la otra es una $(n-1)$ -variedad cuya expresión algebraica está dada por el $\det(D) = 0$. Debido a que los hiperplanos son relativamente sencillos, nos referiremos a ellos directamente por su ecuación. La expresión para $\det(D)$ será de vital importancia, así que daremos una definición para ella.

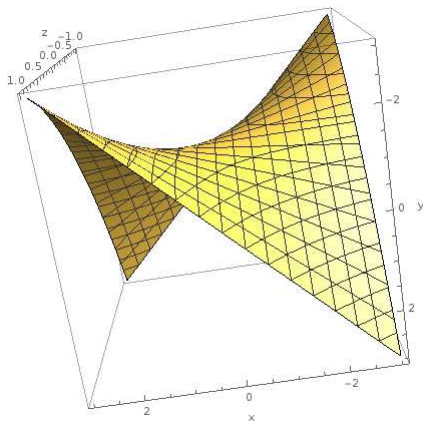


Figura 2.3.1: Frontera no lineal de estabilidad para un polinomio de grado 3

Definición 2.3.4. Llamaremos *frontera no lineal de estabilidad* a la ecuación

$$\det(D) = 0$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{p-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_p \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_p & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_p & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cabe notar que la matriz de la definición anterior es una matriz de tipo *Toeplitz+Hankel*, y esto será de mucha ayuda en el siguiente capítulo en el momento de diseñar un algoritmo de tiempo $O(n \log^2(n))$ para determinar estabilidad. En la Figura 2.3.1 se muestra la frontera no lineal de estabilidad para $p = 3$, se trata de un paraboloides hiperbólico.

2.4. Puntos sobre la frontera de estabilidad.

En la sección anterior, específicamente en el Teorema 2.3.3, demostramos que $\det(B)$ se puede factorizar, esto nos da la oportunidad de expresar la frontera $\det(B) = 0$ en términos de variedades mas simples. Veremos los puntos de intersección de estas variedades y algunas expresiones que nos permitirán saber qué tipo de polinomios viven en cada una de ellas, también se deducirán fórmulas que involucran los puntos de intersección, éstas serán útiles posteriormente para desarrollar el algoritmo de estabilidad y para caracterizar la región K_n .

En la sección anterior se demostró que

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) \det(D)$$

Por lo tanto los puntos en la región de estabilidad deben cumplir por separado

$$\begin{aligned} \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) &> 0 \\ \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) &> 0 \\ \det(D) &> 0 \end{aligned}$$

Esto debido a que el vector cero pertenece a la región de estabilidad y cada una de esas cantidades evaluadas en cero son iguales a uno. Por lo tanto, cuando un polinomio se encuentra en la frontera de estabilidad alguna de las expresiones es igual a cero.

Estamos en la búsqueda de qué tipo de polinomios vive en cada una de las expresiones $(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) = 0$, $(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i) = 0$, y $\det(D) = 0$.

Para las dos primeras, si $P(x) = x^p - \alpha_1 x^{p-1} - \dots - \alpha_p$, vemos que expresan $P(1) = 0$ y $P(-1) = 0$, por lo tanto, la primera expresión es un hiperplano en el que están los polinomios que tienen a $x = 1$ como raíz, y en la segunda, un hiperplano que tiene a los polinomios con $x = -1$ como raíz.

Para caracterizar qué tipo de polinomios están en $\det(D) = 0$ se necesita más trabajo. Para empezar, demostraremos que $\det(D) = 0$ pasa por todos los polinomios de la forma $(x-1)^{p+1-k}(x+1)^{k-1}$ con $k = 1, \dots, p+1$, para $p \geq 3$. De esta manera, por el párrafo anterior, tenemos que la intersección de $\det(D) = 0$ con el primer hiperplano $(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) = 0$ corresponde a $k = 1, \dots, p$, y con el segundo hiperplano $(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i) = 0$, corresponde a $k = 2, \dots, p+1$. Para demostrar que $\det(D) = 0$ pasa por todos los polinomios de la forma $(x-1)^{p+1-k}(x+1)^{k-1}$ con $k = 1, \dots, p+1$ con $p \geq 3$, demostraremos primero un Lema.

Lema 2.4.1. *Los coeficientes $P_{k,i}$ del polinomio*

$$(x+1)^{p-k+1}(x-1)^{k-1} = x^p - P_{k,1}x^{p-1} - P_{k,2}x^{p-2} - \dots - P_{k,p}$$

se pueden expresar como

$$P_{k,i} = \sum_{j=0}^{p-i} (-1)^{k+j} \binom{p-k+1}{p-i-j} \binom{k-1}{j}$$

donde $i = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, p+1$

Demostración. El polinomio $(x+1)^{p-k+1}$ se puede expresar como

$$\sum_{i=0}^{p+1-k} \binom{p-k+1}{i} x^i$$

de la misma manera el polinomio $(x-1)^{k-1}$ se expresa

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} x^i$$

Al multiplicar estas dos expresiones, agrupar términos y considerar que los $P_{k,i}$ son negativos por definición, vemos que el coeficiente del término x^{p-i} es:

$$P_{k,i} = \sum_{j=0}^{p-i} (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{p-i-j}$$

□

Proposición 2.4.2. Los polinomios $(x+1)^{p-k+1}(x-1)^{k-1}$ representados por los puntos $P_k \doteq (P_{k,1}, P_{k,2}, \dots, P_{k,p})$ con $k = 1, \dots, p+1$ pertenecen a la variedad $\det(D) = 0$ para $p \geq 3$.

Demostración. Para empezar, para $p = 2$ no se cumple porque $\det(D) = 1 + \alpha_2$ no toma el valor cero en el punto P_2 , que corresponde al polinomio $(x+1)(x-1)$, explícitamente:

$$P_1 = (P_{1,1}, P_{1,2}) = (-2, -1) \text{ cumple que } \det(D) = 0$$

$$P_2 = (P_{2,1}, P_{2,2}) = (0, 1) \text{ cumple que } \det(D) = 2$$

$$P_3 = (P_{3,1}, P_{3,2}) = (2, -1) \text{ cumple que } \det(D) = 0$$

Para $p \geq 3$ las entradas de D se pueden expresar de la siguiente manera:

$$d_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_{i-j}$$

donde

$$\alpha_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 0 \\ a_k & \text{si } k \in \{1, \dots, p\} \\ 0 & \text{si } k \in \{0, 1, \dots, p\}^c \end{cases}$$

Denotemos por F_i^k la i -ésima fila de la matriz D al ser evaluada en el punto P_k . Como debemos demostrar que $\det(D) = 0$ para los puntos P_k , lo haremos mostrando que la primera y la última fila cumplen que $F_1 = (-1)^k F_{p-1}$.

Para empezar mostraremos que

$$P_{k,m} = (-1)^{k+1} P_{k,p-m}$$

para todo $m \in \{0, \dots, p\}$

Es decir,

$$\sum_{j=0}^{p-m} (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{p-m-j} = (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^m (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{m-j}$$

Basta ver que se cumple para $j \in \{0, \dots, k-1\}$ ya que para otros valores de j , el factor $\binom{k-1}{j} = 0$. Así que se debe demostrar que

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{p-m-j} = (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{m-j}$$

Comparando los términos simétricos de ambas series tenemos que el término j de la izquierda es

$$(-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{p-m-j}$$

mientras que el término $k-1-j$ de la derecha es

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1+k+k-1-j} \binom{k-1}{k-1-j} \binom{p-k+1}{m-k+1+j} &= (-1)^{3k-j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{p-m-j} \\ &= (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j} \binom{p-k+1}{p-m-j} \end{aligned}$$

De tal manera que hay una correspondencia 1 – 1 entre los términos de la derecha y la izquierda, excepto por el factor $(-1)^{k+1}$. Esto muestra que $P_{k,m} = (-1)^{k+1} P_{k,p-m}$

Ahora para mostrar que $F_1 = (-1)^k F_{p-1}$ veremos que se cumple para cada una de las entradas de las filas es decir:

$$\alpha_2 - \alpha_0 = (-1)^k (\alpha_p - \alpha_{p-2}) \text{ para la entrada } 1$$

$$\text{y } \alpha_{1+j} = (-1)^k (-\alpha_{p-1-j}) \text{ para las entradas } 2 \leq j \leq p-1$$

Lo cual se prueba reemplazando $\alpha_m = P_{k,m}$ y usando lo anteriormente demostrado, es decir, $P_{k,m} = (-1)^{k+1} P_{k,p-m}$. \square

2.4.1. Ortogonalidad de los puntos en las intersecciones

Adicionalmente estos puntos $P_{k,i}$ cumplen una propiedad de ortogonalidad que será muy importante después. Primero se demostrará un lema.

Lema 2.4.3. Sean $P_k^p = (P_{k,1}^p, \dots, P_{k,p}^p)^T$ los coeficientes del polinomio $(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-1} = x^p - P_{k,1}^p x^{p-1} - P_{k,2}^p x^{p-2} - \dots - P_{k,p}^p$, entonces se cumplen las siguientes recursiones:

$$P_k^p = \begin{pmatrix} P_k^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ P_k^{p-1} \end{pmatrix} \quad \forall k \{1, \dots, p\}$$

$$P_k^p = \begin{pmatrix} P_{k-1}^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{k-1}^{p-1} \end{pmatrix} \quad \forall k \{2, \dots, p+1\}$$

donde $\begin{pmatrix} P_k^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ representa al vector $\begin{pmatrix} P_{k,1}^{p-1} \\ \vdots \\ P_{k,p-1}^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ P_k^{p-1} \end{pmatrix}$ representa al vector

$$\begin{pmatrix} -1 \\ P_{k,1}^{p-1} \\ \vdots \\ P_{k,p-1}^{p-1} \end{pmatrix}, \text{ además, } P_0^0 = -1.$$

Demostración. Por la definición de $P_{k,i}^p$:

$$P_k^p = \text{coef} \left[(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-1} \right] = (P_{k,1}^p, \dots, P_{k,p}^p)^T$$

vemos que

$$P_k^{p-1} = \text{coef} \left[(x+1)^{p-k} (x-1)^{k-1} \right] = (P_{k,1}^{p-1}, \dots, P_{k,p-1}^{p-1})^T$$

pero

$$\text{coef} \left[(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-1} \right] = \text{coef} \left[(x+1)^{p-k} (x-1)^{k-1} (x+1) \right] \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

$$\left(P_{k,1}^p, \dots, P_{k,p}^p \right)^T = \left(-1 + P_{k,1}^{p-1}, P_{k,1}^{p-1} + P_{k,2}^{p-1}, \dots, P_{k,p-2}^{p-1} + P_{k,p-1}^{p-1}, P_{k,p-1}^{p-1} + 0 \right)^T \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

Para el otro caso se procede igual pero notando que:

$$\text{coef} \left[(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-1} \right] = \text{coef} \left[(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-2} (x-1) \right] \quad \forall k \in \{2, \dots, p+1\}$$

y usando

$$P_{k-1}^{p-1} = \text{coef} \left[(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-2} \right] = (P_{k-1,1}^{p-1}, \dots, P_{k-1,p-1}^{p-1})^T$$

de donde se obtiene que

$$\left(P_{k,1}^p, \dots, P_{k,p}^p \right)^T = \left(1 + P_{k,1}^{p-1}, -P_{k,1}^{p-1} + P_{k,2}^{p-1}, \dots, -P_{k,p-2}^{p-1} + P_{k,p-1}^{p-1}, -P_{k,p-1}^{p-1} + 0 \right)^T \quad \forall k \in \{2, \dots, p+1\}$$

□

Basándonos en este lema podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.4.4. Sean $P_{k,i}^p$ los coeficientes del polinomio $(x+1)^{p-k+1} (x-1)^{k-1} = x^p - P_{k,1}^p x^{p-1} - P_{k,2}^p x^{p-2} - \dots - P_{k,p}^p$, entonces cumplen que.

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2^p \delta_{k,j+1} \quad \forall k \in \{1, \dots, p+1\} \forall j \in \{0, \dots, p\}$$

donde $\delta_{k,j+1} = 1$ sólo si $k = j+1$ y $\delta_{k,j+1} = 0$ en otro caso. Por consistencia se toma $P_{k,0}^p = -1$.

Demostración. Se demostrará por inducción, primero veamos que se cumple para $p = 1$.

Para este caso los puntos son los coeficientes de

$$x+1 = -P_{1,0}^1 x - P_{1,1}^1$$

y

$$x - 1 = -P_{2,0}^1 x - P_{2,1}^1$$

por lo tanto,

$$P_{1,0}^1 = -1, P_{1,1}^1 = -1, P_{2,0}^1 = -1, P_{2,1}^1 = 1$$

$$\sum_{i=0}^1 P_{k,i}^1 P_{i+1,j}^1 = P_{k,0}^1 P_{1,j}^1 + P_{k,1}^1 P_{2,j}^1$$

Es decir, al organizarlo como matriz tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

Y se tiene el resultado para $p = 1$.

La demostración del paso inductivo se hará en dos partes, la primera cubre el caso cuando $k \neq p + 1$ y la segunda el caso cuando $k = p + 1$.

Caso $k \neq p + 1$

Reescribiendo la primera y segunda igualdad del lema anterior quedarían

$$P_{k,i}^p = P_{k,i}^{p-1} + P_{k,i-1}^{p-1} \quad k < p + 1$$

$$P_{i+1,j}^p = P_{i,j}^{p-1} - P_{i,j-1}^{p-1} \quad i > 0$$

con $P_{k,0}^p = -1$ y $P_{k,p}^{p-1} = 0$

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p + P_{k,p}^p P_{p+1,j}^p$$

Aplicando la primera recursión del lema anterior al primer término del lado derecho de la igualdad.

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^p + \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i-1}^{p-1} P_{i+1,j}^p + P_{k,p}^p P_{p+1,j}^p$$

Aplicando de nuevo la primera recursión del lema anterior al primer término del lado derecho y empezando la segunda sumatoria del lado derecho en $i = 1$:

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} P_{k,i-1}^{p-1} P_{i+1,j}^p + P_{k,p}^p P_{p+1,j}^p$$

Aplicando la segunda recursión del lema anterior a la tercera sumatoria del lado derecho y renombrando índices

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-2} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + P_{k,p}^p P_{p+1,j}^p$$

Al completar la tercera y cuarta suma del lado derecho hasta $i = p - 1$ y usando que $P_{p+1,j}^p = P_{p,j}^{p-1} - P_{p,j-1}^{p-1}$

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + P_{p+1,j}^p (P_{k,p}^p - P_{k,p-1}^{p-1})$$

Es decir

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p &= 2 \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + P_{p+1,j}^p (P_{k,p}^p - P_{k,p-1}^{p-1}) \\ \sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p &= 2 \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + P_{p+1,j}^p (P_{k,p}^{p-1} + P_{k,p-1}^{p-1} - P_{k,p-1}^{p-1}) \end{aligned}$$

Como la suma dentro del paréntesis es 0, entonces nos quedamos con

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2 \sum_{i=0}^{p-1} P_{k,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1}$$

Por hipótesis inductiva se tiene el resultado

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2^p \delta_{k,j+1}$$

Caso $k = p + 1$

Reescribiendo la segunda igualdad del lema anterior quedaría

$$P_{k+1,i}^p = P_{k,i}^{p-1} - P_{k,i-1}^{p-1} \quad k > 1$$

con $P_{k,0}^p = -1$ y $P_{k,p}^{p-1} = 0$

Aplicando la segunda igualdad del lema anterior y separando el término $i = p$

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j}^p - \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i-1}^{p-1} P_{i+1,j}^p + P_{p+1,p}^p P_{p+1,j}^p$$

Usando la primera igualdad del lema anterior

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i-1}^{p-1} P_{i+1,j}^p + P_{p+1,p}^p P_{p+1,j}^p$$

Reorganizando los índices de la tercera suma y completando hasta $i = p - 1$

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+2,j}^p + P_{p+1,p}^p P_{p+1,j}^p + P_{p,p-1}^{p-1} P_{p+1,j}^p$$

Aplicando la segunda igualdad del lema anterior a la tercera sumatoria

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j}^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + P_{p+1,j}^p (P_{p+1,p}^p + P_{p,p-1}^{p-1})$$

Sumando términos semejantes

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = 2 \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1} + P_{p+1,j}^p (P_{p,p}^{p-1} - P_{p,p-1}^{p-1} + P_{p,p-1}^{p-1})$$

Lo que resulta en

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = 2 \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,j-1}^{p-1}$$

Si $k = j + 1$, entonces como estamos en el caso $k = p + 1$, $j = p$.

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,p}^p = 2 \sum_{i=0}^{p-1} P_{p,i}^{p-1} P_{i+1,p-1}^{p-1}$$

y por inducción se sigue el resultado

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,p}^p = 2^p$$

si $k \neq j + 1$ entonces $j \neq p$ y también por hipótesis inductiva se tiene que

$$\sum_{i=0}^p P_{p+1,i}^p P_{i+1,j}^p = 0$$

□

Esta curiosa relación de los coeficientes de los polinomios $(x + 1)^{p-k+1} (x - 1)^{k-1}$ nos da como resultado adicional la siguiente igualdad

Corolario 2.4.5. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$\sum_{i=0}^p \sum_{m=0}^{p-i} \sum_{n=0}^{p-j} (-1)^{i+k+m+n} \binom{p-k}{p-i-m} \binom{p-i}{p-j-n} \binom{k}{m} \binom{i}{n} = 2^p \delta_{k,j}$$

De la que se tiene la relación

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} = 2^p$$

cuando $k = j = 0$.

Demostración. El resultado es inmediato a partir del anterior teorema y por el Lema 2.4.1

$$P_{k,i}^p = \sum_{j=0}^{p-i} (-1)^{k+j} \binom{p-k+1}{p-i-j} \binom{k-1}{j}$$

Luego de cambiár el índice $k \rightarrow k+1$ se obtiene el resultado.

Para la segunda formula si $k = j = 0$ entonces

$$\sum_{i=0}^p \sum_{m=0}^{p-i} \sum_{n=0}^p (-1)^{i+m+n} \binom{p}{p-i-m} \binom{p-i}{p-n} \binom{0}{m} \binom{i}{n}$$

por lo tanto $m = 0$

$$\sum_{i=0}^p \sum_{n=0}^p (-1)^{i+n} \binom{p}{p-i} \binom{p-i}{p-n} \binom{i}{n}$$

$\binom{p-i}{p-n} \binom{i}{n} \neq 0$ sólo si $n = i$, por lo tanto

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{p-i} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} = 2^p \delta_{0,0} = 2^p$$

□

A modo de resumen de la sección. Vimos qué forma tenían los puntos de intersección de la frontera no lineal de estabilidad con cada uno de los hiperplanos (Lema 2.4.1 y Proposición 2.4.2) y una manera recursiva de hallar estos puntos (Lema 2.4.3). Una propiedad de ortogonalidad de los puntos de intersección (Teorema 2.4.4) que como subproducto se obtuvo una bonita relación de combinatoria (Corolario 2.4.5).

2.5. Menores centrales

Repasemos lo que se ha hecho hasta el momento. Hemos dado condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de polinomios (Teorema 2.2.5). La condición que estamos tratando de depurar es la que dice que la región de estabilidad contiene el vector cero y que además $\det(B) > 0$. El punto crucial si queremos tener éxito en esta aproximación es decidir cuándo un polinomio está en la misma clase del vector cero, ya que un polinomio puede cumplir que $\det(B) > 0$ y no ser estable. Por ejemplo:

$$P(x) = x^4 + 5x^2 + 6$$

cuya matriz de estabilidad es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta que $\det(B) = 7200 > 0$, pero sus raíces tienen norma $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ y por lo tanto, no es estable el polinomio. En lo que sigue de la sección desarrollaremos nuevas herramientas que nos permitirán descartar este tipo de polinomios.

También vimos que la frontera de la región, $\det(B) = 0$, es la unión de tres fronteras; dos hiperplanos y una variedad que hemos llamado frontera no lineal de la región de estabilidad y que hemos denotado por $\det(D) = 0$. Sabemos que el interior de la frontera no lineal no contiene polinomios con raíces $z = \pm 1$ (porque pertenecen a los hiperplanos). Adicionalmente, como los polinomios en cuestión tienen coeficientes reales debe haber una cantidad k_1 de parejas de raíces complejas unitarias, k_2 parejas de raíces complejas con norma menor que uno y $n - 2(k_1 + k_2)$ raíces reales. Es decir, son de la forma

$$\prod_{i=1}^{k_1} (x^2 + 2u_i x + 1) \prod_{k=1}^{k_2} (x^2 + 2w_k r_k x + r_k^2) \prod_{j=1}^{n-2(k_1+k_2)} (x + v_j)$$

con $u_i, w_k, r_k^2, v_j \in (-1, 1)$

De estos tres factores del polinomio, el único que aporta para que esté en $\det(D) = 0$, es el que tiene raíces unitarias, es decir,

$$\prod_{i=1}^{k_1} (x^2 + 2u_i x + 1)$$

Los otros factores y en especial las constantes w_k, r_k^2, v_j funcionan como parámetros de la superficie. Por otro lado, un polinomio de la forma $x^2 + 2w_k r_k x + r_k^2$ y un par de polinomios de la forma $(x + v_{j_1})(x + v_{j_2}) = x^2 + (v_{j_1} + v_{j_2})x + v_{j_1}v_{j_2}$, consta cada uno de dos parámetros, el primero de w_k, r_k y el segundo de v_{j_1}, v_{j_2} , respectivamente. Así que para efectos de la parametrización de la superficie sólo es necesario usar una de las dos representaciones, $\prod (x^2 + 2w_k r_k x + r_k^2)$ o $\prod (x + v_j)$, así representen polinomios distintos sobre la superficie facilita mucho los cálculos al disponer de fórmulas menos complicadas en lo que sigue del documento, al fin y al cabo se trata de raíces que se encuentran en el interior del círculo unitario. Adicionalmente, con los factores del tipo $\prod (x + v_j)$ podemos incluir polinomios de grado impar, mientras que con $\prod (x^2 + 2w_k r_k x + r_k^2)$ solo podríamos incluir polinomios de grado par.

Dada la discusión del párrafo anterior, vamos a intercambiar los k_2 factores de $\prod (x^2 + 2w_k r_k x + r_k^2)$ por $2k_2$ factores de $\prod (x + v_j)$. Unificando esto, sólo para efectos de parametrización y sin perder generalidad, para el estudio de la superficie $\det(D) = 0$, sólo son necesarios los polinomios de la forma

$$\prod_{i=1}^k (x^2 + 2u_i x + 1) \prod_{j=1}^{n-2k} (x + v_j)$$

donde $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ y $u_i, v_j \in (-1, 1)$. Faltaría determinar para qué valores de k se cumple que $\det(D) = 0$. Para empezar nuestra búsqueda vamos a denotar a este tipo de polinomios de una manera abreviada.

Definición 2.5.1. Sea $P(x)$ el polinomio de grado n definido por

$$\prod_{i=1}^f (x^2 + 2u_i x + 1) \prod_{j=1}^{n-2f} (x + v_j)$$

con $u_i, v_j \in (-1, 1)$. Y $1 \leq f \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Diremos que es un polinomio de la forma f_n , donde f representa la cantidad de pares de raíces complejas unitarias y el subíndice n denota el grado del polinomio.

Recordando la matriz de frontera no lineal de estabilidad

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_3 - \alpha_1 & 1 + \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & 0 \\ \alpha_4 - \alpha_2 & \alpha_5 - \alpha_1 & 1 + \alpha_6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-4} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a definir ciertas submatrices a partir de ella

Definición 2.5.2. Sea D la matriz de frontera no lineal de estabilidad de un polinomio P de grado n , entonces llamaremos *menor central de orden k* al determinante de la matriz que se obtiene al quitarle las primeras y últimas $k-1$ columnas y filas de la matriz D . Denotaremos el menor central de orden k por D_k^n , donde $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, además $\det(D) = D_1^n$.

Inmediatamente podemos notar que hay la misma cantidad de menores centrales que de formas de polinomios f_n . Esto no es coincidencia y se trata de uno de los resultados más importantes que se probarán: si el menor central $D_k^n = 0$, es porque el polinomio evaluado en él tiene una cantidad mayor o igual a k de pares de raíces complejas unitarias. Otro resultado importante de los menores centrales es que sólo importan los D_1^n , ya que cualquier otro D_k^n se puede ver como uno de tipo D_1^{n-2k+2} . Es decir, la forma de las superficies de la frontera no lineal de estabilidad para dimensiones pequeñas se preservan en las dimensiones mayores. Previo a la prueba de estos teoremas debemos incluir algunas notaciones y varios lemas.

Para empezar, haremos una simplificación necesaria y es llamar como constante r_i a la suma de todos los productos de i variables distintas tomadas de un conjunto de cardinalidad finita mayor que i , independiente de cuántos sumandos tenga. La idea atrás de esta notación es capturar la estructura, más que de un valor exacto. Por ejemplo, llamaremos r_2 tanto a

$$v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3$$

como a

$$v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_3 v_4$$

la diferencia estriba en los conjuntos de variables considerados.

Definición 2.5.3. Sea $P(x)$ el polinomio de la forma f_{s+2f} definido por

$$\prod_{i=1}^f (x^2 + 2u_i x + 1) \prod_{j=1}^s (x + v_j)$$

con $u_i, v_j \in (-1, 1)$.

Sean k_1, \dots, k_s números naturales, tales que $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq s$, entonces denotamos

$$r_i \doteq \begin{cases} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq s} v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_i} & \text{cuando } i \in \{1, \dots, s\} \\ 1 & \text{cuando } i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y de la misma manera cuando $1 \leq k_1 < \dots < k_f \leq f$

$$c_i \doteq \begin{cases} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq f} (2u_{k_1}) (2u_{k_2}) \dots (2u_{k_i}) & \text{cuando } i \in \{1, \dots, f\} \\ 1 & \text{cuando } i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado un elemento $v_{k_{s+1}}$ no contenido en el conjunto original de variables, a menudo tendremos que hacer la siguiente operación

$$v_{k_{s+1}} \cdot r_i + r_{i+1}$$

tomando en cuenta que r_i denota a la suma de todos los posibles productos de i elementos, el significado natural de esta expresión son los productos de $i + 1$ elementos

$$v_{k_{s+1}} \cdot r_i + r_{i+1} = r_{i+1}$$

Si por el contrario, se suman dos r_i sobre el mismo conjunto de variables, es decir $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq s$, sumaremos de manera ordinaria

$$r_i + r_i = 2r_i$$

No encontraremos otro tipo de sumas que involucren los términos r_i . Las mismas reglas las utilizaremos para el caso de los c_i .

Teniendo en cuenta esto, podemos demostrar el siguiente lema.

Lema 2.5.4. Sea $P(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_n$ un polinomio de la forma f_n , entonces sus coeficientes están dados por

$$a_i = - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)}$$

donde $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Se demostrará inductivamente en la forma del polinomio. Los casos base son los polinomios de la formas 1_2 y 0_1 , en el primer caso se tiene que

$$a_i = -c_0 (r_{i-2} + r_i) - c_1 (r_{i-1})$$

lo que resulta en

$$a_1 = -c_1 = -2u_1$$

$$a_2 = -c_0 = -1$$

que son los coeficientes de

$$x^2 + 2u_1x + 1$$

que es el polinomio de la forma 1_2 . En el segundo caso

$$a_i = -c_0 (r_{i-2} + r_i)$$

es decir,

$$a_1 = -r_1 = -v_1$$

que es el coeficiente de

$$x + v_1$$

que es el polinomio de la forma 0_1 .

A continuación se hará el paso inductivo. Primero nos moveremos por la raíz real.

Denotaremos por a_i a los coeficientes del polinomio de la forma f_n y por \tilde{a}_i a los coeficientes de f_{n+1} , entonces, dado que debemos multiplicar el polinomio por un factor de raíz real adicional, $(x + v_{k_j})$, tenemos lo siguiente

$$\tilde{a}_i = a_i + v_{k_j} a_{i-1}$$

$$\tilde{a}_i = - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} - v_{k_j} \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i-1+k+2(j-f)}$$

Como v_{k_j} es una nueva variable, entonces el resultado no se suma, sólo se absorbe, es decir,

$$\tilde{a}_i = - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)}$$

de donde se concluye el resultado.

Ahora veremos que se cumple lo mismo para un polinomio de la forma $(f+1)_{n+2}$, es decir, agregándole un par de raíces complejas. De nuevo, denotaremos por a_i a los coeficientes de f_n

y por \tilde{a}_i a los coeficientes de $(f+1)_{n+2}$, entonces, dado que debemos multiplicar el polinomio por un factor de raíz compleja adicional, $(x^2 + c_{k_j}x + 1)$, tenemos lo siguiente

$$\tilde{a}_i = a_i + c_{k_j}a_{i-1} + a_{i-2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i = & - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} - c_{k_j} \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i-1+k+2(j-f)} \\ & - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-(f+1))} \end{aligned}$$

Como c_{k_j} es la única variable nueva, primero se desarrollarán el primer y tercer término ya que estos comparten variables y los resultados se suman, es decir,

$$- \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-(f+1))}$$

separando al último término en la primera sumatoria sobre j y al primero en la segunda sumatoria sobre j

$$\begin{aligned} = & - \sum_{k=0}^f c_k \left(\sum_{j=0}^{f-k-1} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} + r_{i-k} \right) - \sum_{k=0}^f c_k \left(\sum_{j=0}^{f-1-k} \binom{f-k}{j+1} r_{i+k+2(j-f)} + r_{i+k-2(f+1)} \right) \\ = & - \sum_{k=0}^f c_k \left(\sum_{j=0}^{f-k-1} \binom{f+1-k}{j+1} r_{i+k+2(j-f)} + r_{i-k} + r_{i+k-2(f+1)} \right) \\ = & - \sum_{k=0}^f c_k \left(\sum_{j=1}^{f-k} \binom{f+1-k}{j} r_{i+k+2(j-(f+1))} + \binom{f+1-k}{f+1-k} r_{i-k} + \binom{f+1-k}{0} r_{i+k-2(f+1)} \right) \\ = & - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f+1-k} \binom{f+1-k}{j} r_{i+k+2(j-(f+1))} \\ = & - \sum_{k=0}^{f-1} c_{k+1} \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k-1+2(j-f)} - c_0 \sum_{j=0}^{f+1} \binom{f+1}{j} r_{i-2+2(j-f)} \end{aligned}$$

Ahora sumaremos esto al término del medio de la expresión de \tilde{a}_i , es decir, a

$$- c_{k_j} \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i-1+k+2(j-f)}$$

De esta última suma separamos el término de $k = f$

$$\tilde{a}_i = -c_0 \sum_{j=0}^{f+1} \binom{f+1}{j} r_{i-2+2(j-f)} - \sum_{k=0}^{f-1} c_{k+1} \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k-1+2(j-f)} - c_{k_j} \left[\sum_{k=0}^{f-1} c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i-1+k+2(j-f)} + c_f r_{i-1-f} \right]$$

Como c_{k_j} es una variable nueva, podemos utilizar la expresión $c_{k_j} \cdot c_k + c_{k+1} = c_{k+1}$ en la suma anterior.

$$= -c_0 \sum_{j=0}^{f+1} \binom{f+1}{j} r_{i-2+2(j-f)} - \sum_{k=0}^{f-1} c_{k+1} \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k-1+2(j-f)} - c_{f+1} r_{i-1-f}$$

que se puede expresar como

$$= - \sum_{k=0}^{f+1} c_k \sum_{j=0}^{f+1-k} \binom{f+1-k}{j} r_{i+k+2(j-(f+1))}$$

Y se concluye el resultado. \square

Vemos que la presentación de la fórmula del lema anterior se encuentran factorizados los c_k , se puede deducir una fórmula similar con los r_k factorizados.

Lema 2.5.5. *Sea $P(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_n$ un polinomio de la forma f_n , entonces sus coeficientes están dados por*

$$a_i = - \sum_{k=0}^{2f} r_{i-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{f-k+2j}{j} c_{k-2j}$$

donde $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Vamos a probar este resultado, transformando esta expresión en la expresión del lema anterior en la que están factorizados los c_k .

Para ello reemplazamos

$$k = 2(f-n) - m$$

$$j = (f-n) - m$$

con ello tenemos (aún sin tener en cuenta los límites de las sumas)

$$a_i = - \sum_{m=**}^{**} \sum_{n=**}^{**} r_{i+m+2(n-f)} \binom{f+m-2(f-n)+2(f-n)-2m}{(f-n)-m} c_{2(f-n)-m-2(f-n)+2m}$$

simplificando tenemos

$$a_i = - \sum_{m=**}^{**} \sum_{n=**}^{**} r_{i+m+2(n-f)} \binom{f-m}{n} c_m$$

Para los límites debemos expresar m y n en términos de k y j . De donde obtenemos

$$m = k - 2j$$

$$n = f - k + j$$

entonces

$$n = f - m - j$$

Ahora teniendo en cuenta que $0 \leq k \leq 2f$ y que $0 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$

$$0 \leq m \leq 2f$$

$$f - 2f - f = -2f \leq n \leq f - m$$

pero dado que hay un $\binom{f-m}{n}$ en la expresión, sólo es necesario considerar los límites

$$0 \leq m \leq f$$

$$0 \leq n \leq f - m$$

si intercambiamos las letras $m \rightarrow k$ y $n \rightarrow j$ obtenemos el resultado. \square

La importancia del siguiente resultado radica en que da una interpretación de los menores centrales, y es que un menor central de orden k es cero si el polinomio tiene una cantidad mayor o igual a k de pares de raíces complejas sobre el círculo unitario.

Teorema 2.5.6. *Sea D_k^n el menor central de orden k y P_f^n un polinomio de la forma f_n , entonces*

$$f \geq k \iff D_k^n(P_f^n) = 0$$

Demostración. Al reemplazar un polinomio de la forma f_n en el menor central D_1^n , es decir, en el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_3 - \alpha_1 & 1 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \cdots & 0 \\ \alpha_4 - \alpha_2 & \alpha_5 - \alpha_1 & 1 + \alpha_6 & \alpha_7 & \cdots & 0 \\ \alpha_5 - \alpha_3 & \alpha_6 - \alpha_2 & \alpha_7 - \alpha_1 & 1 + \alpha_8 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-4} & -\alpha_{n-5} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Para cada α_i los $r_x \neq 0$ que aparecen son los pertenecientes al conjunto $\{r_{i-2f}, \dots, r_i\} \cap \{r_0, \dots, r_s\}$, esto es por el Lema 2.5.5. Como las entradas de la matriz de D_1^n son

$$\{D_1^n\}_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_{i-j}$$

De tal manera que en cada entrada de la matriz de D_1^n los $r_x \neq 0$ son los pertenecientes al conjunto $\{r_{i-j-2f}, \dots, r_{i+j}\} \cap \{r_0, \dots, r_s\}$.

Como

$$\alpha_i = - \sum_{k=0}^{2f} r_{i-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{f-k+2j}{j} c_{k-2j}$$

Vemos que la última columna de D_1^n es

$$(\alpha_n, 0, \dots, 0, -\alpha_0)^T = (-r_s, 0, \dots, 0, 1)^T$$

Así mismo podemos calcular su penúltima columna que nos da

$$(\alpha_{n-1}, \alpha_n, 0, \dots, 0, -\alpha_0, -\alpha_1)^T = (-r_{s-1} - c_1 r_s, -r_s, 0, \dots, 0, 1, r_1 + c_1)^T$$

Denotando por C_k a las columnas de D_1^n , podemos hacer la siguiente operación:

$$-c_1 C_{n-1} + C_{n-2} \rightarrow C_{n-2}$$

de donde podemos reducir la penúltima columna a

$$(-r_{s-1}, -r_s, 0, \dots, 0, 1, r_1)^T$$

Por inducción mostraremos que la matriz D_1^n se puede reducir por medio de operaciones columna a

$$\{D_1^n\}_{i,j} = r_{i-j} - r_{i+j-2f}$$

para $j \geq f$.

Ya vimos que era cierto para las columnas $j = n-1, n-2$ (Recordar que $r_k = 0$ si $k \notin \{0, \dots, s\}$)

Asumiremos que el resultado es cierto para las últimas $p-1$ columnas, es decir cuando $j = n-p+1, \dots, n-1$, y probaremos el resultado para la columna $j = n-p$.

La operación de columnas que haremos es

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_{n-p+k} K_k + C_{n-p} \rightarrow C_{n-p}$$

Donde K_m lo tomaremos como el coeficiente de r_s en a_{n-m} . Es decir,

$$\begin{aligned} K_m &= - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2f-m}{2} \rfloor} \binom{f-2f+m+2j}{j} c_{2f-m-2j} \\ &= - \sum_{j=0}^{f-\lceil \frac{m}{2} \rceil} \binom{2j+m-f}{j} c_{2f-m-2j} \end{aligned}$$

Para que $\binom{2j+m-f}{j} \neq 0$ se debe cumplir que $j \geq f - m$, entonces el límite inferior de la suma cambia a

$$\begin{aligned} &= - \sum_{j=f-m}^{f-\lceil \frac{m}{2} \rceil} \binom{2j+m-f}{j} c_{2f-m-2j} \\ &= - \sum_{j=0}^{m-\lceil \frac{m}{2} \rceil} \binom{2(j+f-m)+m-f}{j+f-m} c_{2f-m-2(j+f-m)} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$K_m = - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{2j+f-m}{j} c_{m-2j}$$

Adicionalmente se tiene que $K_m = 0$ para $m > 2f$, ya que si

$$a \equiv m - 2f > 0$$

$$K_m = - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2f+a}{2} \rfloor} \binom{2j-f-a}{j} c_{a+2f-2j}$$

Pero para que $\binom{2j-f-a}{j} \neq 0$ se necesita que $2j - f - a > j$, es decir, que $j > f + a$. Pero el límite superior de la suma $\lfloor \frac{2f+a}{2} \rfloor = f + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$, no supera el valor $f + a$ para $a > 0$.

Al hacer la operación

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_{n-p+k} K_k + C_{n-p} \rightarrow C_{n-p}$$

el resultado nos debe dar

$$r_{i-n+p} - r_{i+s-p}$$

Por el argumento que $K_k = 0$ si $k > 2f$, podemos fijar el límite superior de la sumatoria en

$$\sum_{k=1}^{2f} C_{n-p+k} K_k + C_{n-p} \rightarrow C_{n-p}$$

nos queda

$$- \sum_{k=1}^{2f} (r_{i-n+p-k} - r_{i+s-p+k}) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j} + \sum_{k=0}^{2f} (r_{i-n+p-k} - r_{i+n-p-k}) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j}$$

Primero resolveremos los términos de $k = 0, 2f$

$$\begin{aligned} (r_{i-n+p} - r_{i+n-p}) \binom{f}{0} c_0 + (-r_{i-n+p-2f} + r_{i+n-p} + r_{i-n+p-2f} - r_{i+s-p}) \binom{f}{f} c_0 \\ = r_{i-n+p} - r_{i+s-p} \end{aligned}$$

Con lo cual tenemos el resultado que necesitamos, por lo tanto nos hace falta probar que para el resto de índices esa suma se cancela

$$\sum_{k=1}^{2f-1} (r_{i-n+p-k} - r_{i+n-p-k} - r_{i-n+p-k} + r_{i+s-p+k}) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j} = 0$$

Vemos que la parte de la izquierda es igual a

$$\sum_{k=1}^{2f-1} (-r_{i+n-p-k} + r_{i+s-p+k}) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j}$$

Así que debemos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+s-p+k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j} = \sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+n-p-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j}$$

Vamos a cambiar el índice de la izquierda por $k \rightarrow 2f - k$. Que es una biyección entre los elementos que recorre el índice.

$$\sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+s-p+2f-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2f-k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-2f+k}{j} c_{2f-k-2j} = \sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+n-p-k} \sum_{j=0}^{f-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j-f+k}{j} c_{2f-k-2j}$$

Para que $\binom{2j-f+k}{j} \neq 0$ se debe cumplir que $j \geq f - k$ lo que nos da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+n-p-k} \sum_{j=f-k}^{f-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j-f+k}{j} c_{2f-k-2j} &= \sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+n-p-k} \sum_{j=0}^{k-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2(j+f-k)-f+k}{j+f-k} c_{2f-k-2(j+f-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+n-p-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j+f-k} c_{k-2j} = \sum_{k=1}^{2f-1} r_{i+n-p-k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{2j+f-k}{j} c_{k-2j} \end{aligned}$$

que era lo que se quería probar

Por lo tanto la entrada

$$\{D_1^n\}_{i,n-p} = r_{i-n+p} - r_{i+s-p}$$

Que si la evaluamos en $p = n - f$ nos da

$$\{D_1^n\}_{i,f} = r_{i-n+n-f} - r_{i+s-n+f} = r_{i-f} - r_{i+s-2f-s+f} = r_{i-f} - r_{i-f} = 0$$

Como la columna $j = f$ es igual a 0 sin importar su fila, el determinante $D_1^n(P_f^n) = 0$ para todo $f \geq 1$. En el proceso el determinante D_2^n también se hace 0, sólo que esta vez sucede una columna antes, por lo tanto, $D_2^n(P_f^n) = 0$ para todo $f - 1 \geq 1$, es decir, para $f \geq 2$. Y el argumento sigue sucesivamente para mostrar que

$$D_k^n(P_f^n) = 0 \iff f \geq k$$

□

Interpretando el resultado anterior, lo que dice es que si un menor central de orden k es cero, eso significa que el polinomio en cuestión tiene k o más pares de raíces complejas sobre el círculo unitario, en particular, si un polinomio es estable, cada uno de los menores centrales debe ser positivo. El objetivo al final del capítulo es dar una condición adicional para que sea una doble implicación.

A continuación veremos otro teorema importante, éste muestra que todos los menores centrales de orden k son realmente copias de algún otro menor central de orden 1 en una dimensión menor. Así que el tipo de superficie lo determinan los menores centrales de orden 1.

Mostraremos un ejemplo que ilustre a qué nos referimos.

Ejemplo 2.5.7. Consideremos los polinomios

$$P_6(x) = x^6 - \tilde{a}x^5 - \tilde{b}x^4 - \tilde{c}x^3 - \tilde{d}x^2 - \tilde{e}x - \tilde{f}$$

$$P_4(x) = x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d$$

La frontera no lineal del polinomio P_6 es

$$D_1^6 = \begin{vmatrix} 1 + \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f} \\ \tilde{c} - \tilde{a} & 1 + \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f} & 0 \\ \tilde{d} - \tilde{b} & \tilde{e} - \tilde{a} & 1 + \tilde{f} & 0 & 0 \\ \tilde{e} - \tilde{c} & \tilde{f} - \tilde{b} & -\tilde{a} & 1 & 0 \\ \tilde{f} - \tilde{d} & -\tilde{c} & -\tilde{b} & -\tilde{a} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y la del polinomio P_4 es

$$D_1^4 = \begin{vmatrix} 1 + b & c & d \\ c - a & 1 + d & 0 \\ d - b & -a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

el menor central de orden 2 de la matriz D_1^6 es

$$D_2^6 = \begin{vmatrix} 1 + \tilde{d} & \tilde{e} & \tilde{f} \\ \tilde{e} - \tilde{a} & 1 + \tilde{f} & 0 \\ \tilde{f} - \tilde{b} & -\tilde{a} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

podemos ver que D_2^6 es muy parecido al menor de orden 1 de D_1^4 , sólo habría que hacer la identificación:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &\rightarrow a \\ \tilde{b} &\rightarrow b \\ \tilde{d} &\rightarrow b \\ \tilde{e} &\rightarrow c \\ \tilde{f} &\rightarrow d \end{aligned}$$

esta identificación es imposible de forma directa porque \tilde{a}_i y a_i no son independientes como se ve en el siguiente lema

Lema 2.5.8. Sean \tilde{a}_i los coeficientes de un polinomio de la forma f_n y a_i los coeficientes de un polinomio de la forma $(f-1)_{n-2}$. Donde el primero se construye al agregarle un par de raíces complejas al segundo. Entonces cumplen la siguiente recursión

$$\tilde{a}_i = a_i + a_{i-2} - c_f r_{i-f}$$

Demostración. El Lema 2.5.4 nos dice que

$$a_i = - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \sum_{j=0}^{f-1-k} \binom{f-1-k}{j} r_{i+k+2(j-f+1)}$$

entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} & a_i + a_{i-2} - c_f r_{i-f} \\ &= - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \sum_{j=0}^{f-1-k} \binom{f-1-k}{j} r_{i+k+2(j-f+1)} - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \sum_{j=0}^{f-1-k} \binom{f-1-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} - c_f r_{i-f} \\ &= - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \left(\sum_{j=0}^{f-2-k} \binom{f-1-k}{j} r_{i+k+2(j-f+1)} + r_{i-k} + \sum_{j=0}^{f-2-k} \binom{f-1-k}{j+1} r_{i+k+2(j+1-f)} + r_{i+k-2f} \right) - c_f r_{i-f} \\ &= - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \left(\sum_{j=0}^{f-2-k} \binom{f-1-k}{j} r_{i+k+2(j-f+1)} + r_{i-k} \right) - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \left(\sum_{j=0}^{f-2-k} \binom{f-1-k}{j+1} r_{i+k+2(j+1-f)} + r_{i+k-2f} \right) - c_f r_{i-f} \\ &= - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \left(\sum_{j=1}^{f-1-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} + \binom{f-k}{f-k} r_{i-k} + \binom{f-k}{0} r_{i+k-2f} \right) - c_f r_{i-f} \\ &= - \sum_{k=0}^{f-1} c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} - c_f r_{i-f} \\ &= - \sum_{k=0}^f c_k \sum_{j=0}^{f-k} \binom{f-k}{j} r_{i+k+2(j-f)} \end{aligned}$$

$$= \tilde{a}_i$$

□

También necesitaremos un Lema técnico

Lema 2.5.9. *Sea F_n definido por la recursión*

$$F_n = -F_{n-2} - c_1 F_{n-1}$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$, $F_{-1} = 0$ y $F_0 = -1$. Entonces para $n \geq 0$

$$F_n = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} c_1^{n-2i}$$

Demostración. Se procederá por inducción. Para $n = 0$ se tiene que

$$F_0 = (-1)^1 \left[(-1)^0 \binom{0}{0} c_1^0 \right] = -1$$

Asumiendo que es cierto para $n \leq k$, y que k es par, digamos $k = 2m$

$$F_{k+1} = -F_{k-1} - c_1 F_k$$

$$\begin{aligned} &= -(-1)^{2m} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2m-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{2m-1-i}{i} c_1^{2m-1-2i} - c_1 (-1)^{2m+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2m}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{2m-i}{i} c_1^{2m-2i} \\ &= (-1)^{2m+1} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{2m-1-i}{i} c_1^{2m-1-2i} - \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{2m-i}{i} c_1^{2m-2i+1} \right] \end{aligned}$$

Separando el término con $i = 0$ de la segunda sumatoria y reorganizando los índices tenemos

$$\begin{aligned} &= (-1)^{2m+1} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{2m-1-i}{i} c_1^{2m-1-2i} + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{2m-i-1}{i+1} c_1^{2m-2i-1} - c_1^{2m+1} \right] \\ &= (-1)^{2m+1} \left[\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{2m-i}{i+1} c_1^{2m-1-2i} - c_1^{2m+1} \right] \\ &= (-1)^{2m+1} \left[\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \binom{2m-i+1}{i} c_1^{2m-2i+1} - c_1^{2m+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{2m+1} \left[\sum_{i=0}^m (-1)^{i-1} \binom{2m-i+1}{i} c_1^{2m-2i+1} \right] \\
&= (-1)^{k+2} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{k+1-i}{i} c_1^{k+1-2i} \right]
\end{aligned}$$

el caso cuando k es impar es similar. \square

Teorema 2.5.10. *Sea D_k^n el menor central de orden k y P_f^n un polinomio de la forma f_n , entonces*

$$D_2^{n+2}(P_2^{n+2}) = D_1^n(P_1^n)$$

Demostración. Las últimas dos columnas de $D_2^{n+2}(P_2^{n+2})$ son de la forma

$$\begin{vmatrix}
\cdots & a_{n+1} & a_{n+2} \\
\cdots & a_{n+2} & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 1 & 0 \\
\cdots & -\tilde{a}_1 & 1
\end{vmatrix}$$

Segun el Lema 2.5.8

$$\tilde{a}_i = a_i + a_{i-2} - c_2 r_{i-2}$$

Así que

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_{-1} - c_2 r_{-1} = a_1$$

$$\tilde{a}_{n+2} = a_{n+2} + a_n - c_2 r_n = a_n$$

$$\tilde{a}_{n+1} = a_{n+1} + a_{n-1} - c_2 r_{n-1} = a_{n-1}$$

lo que da

$$\begin{vmatrix}
\cdots & a_{n-1} & a_n \\
\cdots & a_n & 0 \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 \\
\cdots & 1 & 0 \\
\cdots & -a_1 & 1
\end{vmatrix}$$

que son iguales a las de $D_1^n(P_1^n)$.

Mediante un argumento inductivo comprobaremos que cada columna de $D_2^{n+2}(P_2^{n+2})$ se puede reducir a la correspondiente columna de $D_1^n(P_1^n)$, el inicio del paso inductivo son las últimas dos columnas.

Como las entradas de la matriz $D_2^{n+2}(P_2^{n+2})$ son

$$\tilde{d}_{i,j} = \tilde{a}_{i+j+2} - \tilde{a}_{i-j}$$

al utilizar el Lema 2.5.8 nos da

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j+2} + a_{i+j} - c_2 r_{i+j} - a_{i-j} - a_{i-j-2} + c_2 r_{i-j-2}$$

A continuación describiremos las operaciones que se harán en las columnas K_j para demostrar que los dos determinantes son iguales. Asumiremos que todas las columnas posteriores a j ya corresponden a las entradas de $D_1^n(P_1^n)$. Para empezar se hará un paso previo, que denotaremos como S_{-1}

$$S_{-1} : -K_{j+2} + K_j \rightarrow K_j$$

lo que nos da

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i,j} &= a_{i+j+2} + a_{i+j} - c_2 r_{i+j} - a_{i-j} - a_{i-j-2} + c_2 r_{i-j-2} - (a_{i+j+2} - a_{i-j-2}) \\ &= a_{i+j} - a_{i-j} - c_2 (r_{i+j} - r_{i-j-2}) \end{aligned}$$

haremos los siguientes $s - j$ pasos con $0 \leq i \leq s - j - 1$:

$$S_i : c_2 F_i K_{i+j+2} + K_j \rightarrow K_j$$

donde F_i es como en el Lema 2.5.9.

Al hacer el siguiente paso, es decir el paso S_0 , los coeficientes tomarían la forma

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j} - a_{i-j} - c_2 (r_{i+j} - r_{i-j-2}) + c_2 (-1) (a_{i+j+2} - a_{i-j-2})$$

Además, debemos tener en cuenta el Lema 2.5.4, que nos da los coeficientes de un polinomio de la forma 1_{s+2} que son

$$a_i = -(r_{i-2} + r_i) - c_1 (r_{i-1})$$

y al remplazar $a_{i+j+2} - a_{i-j-2}$ por estos valores nos da nuestra base para la inducción

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i,j} &= a_{i+j} - a_{i-j} - c_2 (r_{i+j} - r_{i-j-2}) + c_2 (-1) (-r_{i+j} - r_{i+j+2} - c_1 r_{i+j+1} + r_{i-j-4} + r_{i-j-2} + c_1 r_{i-j-3}) \\ &= a_{i+j} - a_{i-j} - c_2 (-r_{i+j+2} + r_{i-j-4} - c_1 (r_{i+j+1} - r_{i-j-3})) \\ &= a_{i+j} - a_{i-j} + c_2 [(-0 - c_1 (-1)) (r_{i+j+1} - r_{i-j-3}) + (-(-1)) (r_{i+j+2} - r_{i-j-4})] \end{aligned}$$

si reemplazamos $F_{-1} = 0$ y $F_0 = -1$

$$= a_{i+j} - a_{i-j} + c_2 [(-F_{-1} - c_1 F_0) (r_{i+j+1} - r_{i-j-3}) + (-F_0) (r_{i+j+2} - r_{i-j-4})]$$

Tenemos la base inductiva de la siguiente expresión.

Por inducción probaremos que en el paso S_k la entrada $\tilde{d}_{i,j}$ tiene la forma

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j} - a_{i-j} + c_2 [(-F_{k-1} - c_1 F_k) (r_{i+j+1+k} - r_{i-j-k-3}) + (-F_k) (r_{i+j+k+2} - r_{i-j-k-4})]$$

Asumiendo cierto para S_k , veremos que es cierto para S_{k+1}

$$S_{k+1} : c_2 F_{k+1} K_{j+k+3} + K_j \rightarrow K_j$$

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j} - a_{i-j} + c_2 [(-F_{k-1} - c_1 F_k) (r_{i+j+1+k} - r_{i-j-k-3}) + (-F_k) (r_{i+j+k+2} - r_{i-j-k-4})]$$

$$+ c_2 F_{k+1} (-r_{i+j+k+1} - r_{i+j+k+3} - c_1 r_{i+j+k+2} + r_{i-j-k-5} + r_{i-j-k-3} + c_1 r_{i-j-k-4})$$

Utilizando que $F_{k+1} = -F_{k-1} - c_1 F_k$, tenemos

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j} - a_{i-j} + c_2 [(-F_k - c_1 F_{k+1}) (r_{i+j+2+k} - r_{i-j-k-4}) + (-F_{k+1}) (r_{i+j+k+3} - r_{i-j-k-5})]$$

por lo que es cierto para S_{k+1} . Al evaluar la expresión en el último paso S_{s-j-1} nos da

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j} - a_{i-j} + c_2 [(-F_{s-j-2} - c_1 F_{s-j-1}) (r_{i+s} - r_{i-s-2}) + (-F_{s-j-1}) (r_{i+s+1} - r_{i-s-3})]$$

Como la matriz D tiene $s+1$ filas, entonces $1 \leq i \leq s+1$, así que

$$i + s + 1 > s + i \geq s + 1$$

$$i - s - 3 < i - s - 2 \leq -1$$

Por lo tanto todos los r involucrados en la expresión son iguales a cero, y se tiene que

$$\tilde{d}_{i,j} = a_{i+j} - a_{i-j}$$

□

Como transformamos todo el determinante $D_2^{n+2}(P_2^{n+2})$ en el determinante $D_1^n(P_1^n)$, esto también incluye los otros menores centrales $D_k^{n+2}(P_k^{n+2})$ con $k > 2$. Es decir, se transformó también $D_3^{n+2}(P_3^{n+2})$ en $D_2^n(P_2^n)$ y por el resultado éste último se transforma en $D_1^{n-2}(P_1^{n-2})$. Por lo tanto, iterando este proceso llegamos al siguiente corolario.

Corolario 2.5.11. Sea D_k^n el menor central de orden k y P_k^n un polinomio de la forma k_n , entonces

$$D_k^n (P_k^n) = D_1^{n-2k+2} (P_1^{n-2k+2})$$

El corolario anterior nos indica que el menor central más importante con respecto a la forma de la superficies es el primero, es decir, $\det(D) = D_1^n$, los otros menores centrales distintos al primero son superficies que se han presentado en dimensiones más pequeñas como menores centrales de orden $k = 1$. Así que a partir de este momento estudiaremos las superficies que describen estos menores centrales de orden $k = 1$ cuando son igualados a cero.

Por el Teorema 2.5.6, si $f = 1$, entonces $D_1^n (P_1^n) = 0$ y $D_k^n (P_1^n) \neq 0$ para $k \geq 2$. Por lo tanto, para estudiar la frontera no lineal de estabilidad expresada por $\det(D) = 0$, debemos estudiar $D_1^n (P_1^n) = 0$, los otros $D_k^n (P_f^n)$ sirven principalmente para acotar la región de estabilidad y para asegurarnos que esta región contiene el vector 0. De tal manera que los polinomios que nos interesan son de la forma

$$(x^2 + 2ux + 1) \prod_{i=1}^{n-2} (x + v_i)$$

Esta discusión nos da un método para expresar los coeficientes de la n -variedad $\det(D) = D_1^n (P_1^n) = 0$ recursivamente en términos de los coeficientes de la $(n-1)$ -variedad $D_1^{n-1} (P_1^{n-1}) = 0$ y un parámetro adicional que es una raíz real que tiene norma menor que uno.

Proposición 2.5.12. Sea a_i^n el coeficiente de x^{n-i} en el polinomio $P_n(x) = x^n - a_1^n x^{n-1} - a_2^n x^{n-2} - \dots - a_n^n$, al incluirle una raíz real adicional a P_n , denotada por $r \in (-1, 1)$, entonces la frontera no lineal de estabilidad cumple la siguiente definición recursiva para $n \geq 2$.

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} r$$

donde $r \in (-1, 1)$, A_{n+1} representa al vector $\begin{pmatrix} a_1^{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix}$ representa al vector

$$\begin{pmatrix} a_1^n \\ \vdots \\ a_n^n \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} \text{ representa al vector } \begin{pmatrix} -1 \\ a_1^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}, \text{ además, } A_2 = \begin{pmatrix} -2u_1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Como sabemos por la discusión anterior, los polinomios de la superficie tienen la forma $(x^2 + 2u_1x + 1) \prod_{j=1}^{n-2} (x + v_j)$, entonces el caso base es $A_2 = \begin{pmatrix} -2u_1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y el resto de casos se obtienen al multiplicar sucesivamente el polinomio por $(x + r)$, con $r \in (-1, 1)$, este parámetro r hace las veces de las raíces reales v_j . De esta manera,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x)(x+r) = (x^n - a_1^n x^{n-1} - a_2^n x^{n-2} - \dots - a_n^n)(x+r)$$

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} + (-a_1^n + r)x^n + (-a_2^n - a_1^n r)x^{n-1} + (-a_3^n - a_2^n r)x^{n-2} + \dots + (-a_n^n - a_{n-1}^n r)x + (-a_n^n r)$$

y se tiene la relación de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_1^{n+1} \\ a_2^{n+1} \\ \vdots \\ a_n^{n+1} \\ a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_n^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ a_1^n \\ \vdots \\ a_{n-1}^n \\ a_n^n \end{pmatrix} r$$

□

En esta sección vimos dos formas equivalentes de expresar los coeficientes de los polinomios que viven en la frontera no lineal de estabilidad de manera paramétrica (Lema 2.5.4 y Lema 2.5.5). Se demostró un resultado que le daba significado a cada uno de los menores centrales y muestra algunos polinomios para los que ese menor es igual a cero (Teorema 2.5.6). También se demostró que todas las superficies que se obtienen al igualar los menores centrales a cero $D_k^n = 0$, son iguales a alguna superficie $D_1^m = 0$ con $m \leq n$, de tal manera que las únicos tipos de superficie son de la forma $D_1^n(P_1^n) = 0$ (Teorema 2.5.10). Finalmente se demostró una expresión recursiva para los coeficientes de los polinomios de la forma 1_n (Proposición 2.5.12), que por el teorema anterior son los importantes. Esta fórmula recursiva se utilizará en la siguiente sección, donde introduciremos las variedades de Bézier, veremos que efectivamente la frontera no lineal de estabilidad es una variedad de Bézier, y explicaremos la manera de escoger los puntos de control para obtenerla.

2.6. Polinomios de Bernstein y Superficies de Bézier.

Las superficies de Bézier fueron desarrolladas por el matemático y físico francés Paul de Casteljaou en 1959 [12] y posteriormente popularizadas en 1966 por el ingeniero francés Pierre Bézier que las utilizó para el diseño de carrocería en Renault [4]. La base de las superficies de Bézier son los polinomios de Bernstein, desarrollados por el matemático ruso Sergei Natanovich Bernshtein en 1915 [3] y fueron usados para una prueba constructiva del teorema de Stone-Weierstrass al demostrar que toda función continua f en el intervalo $[0, 1]$ podía ser aproximada por polinomios de Bernstein de tal manera que estos convergen a f de manera uniforme. Por su parte, las superficies de Bézier han tenido gran acogida en el ámbito aplicado, ampliamente usadas en gráficos por computadora, diseño asistido por computadora y modelación por elementos finitos. Empezaremos la exposición con la definición de polinomios base de Bernstein y polinomios de Bernstein.

Definición 2.6.1. Los $n + 1$ polinomios base de Bernstein de grado n se definen como

$$b_{\nu,n}(x) = \binom{n}{\nu} x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}, \quad \nu = 0, \dots, n$$

donde $\binom{n}{\nu}$ es un coeficiente binomial.

Una combinación lineal de polinomios base de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu} b_{\nu,n}(x)$$

es un polinomio en la *forma Bernstein* de grado n .

Los vectores $\beta_{\nu} \in \mathbb{R}^2$ son los *coeficientes de Bernstein* o *coeficientes de Bézier*.

Cabe resaltar que los polinomios base de Bernstein de grado n forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado máximo n [25]. Así que todo polinomio de grado máximo n se puede expresar en la forma Bernstein de grado n . Las raíces de los polinomios base de Bernstein siempre pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$.

Definición 2.6.2. Una *curva de Bézier* es un polinomio de Bernstein restringido al intervalo $[0, 1]$, y los $n + 1$ coeficientes de Bernstein son llamados *puntos de control*.

Se puede hacer una generalización de curva de Bézier a *variedad de Bézier* utilizando los mismos polinomios base de Bernstein de la siguiente manera.

Definición 2.6.3. Una n – *variedad de Bézier* la definiremos como

$$B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \prod_{k=1}^n b_{i_k, m_k}(x_k) \beta_{i_1, \dots, i_n}$$

donde $b_{i_k, m_k}(x_k) = \binom{m_k}{i_k} x_k^{i_k} (1-x_k)^{m_k-i_k}$, la variedad esta definida en $[0, 1]^n$, $m_i \in \mathbb{N}$. Y además se necesitan $\prod_{k=1}^n (m_k + 1)$ puntos de control denotados por $\beta_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{R}^{n+1}$

El objetivo de esta sección es demostrar que la frontera no lineal de estabilidad, es una $(n-1)$ – *variedad* de Bézier con los puntos P_k^n como puntos de control. Donde los puntos $P_k^n = (P_{k,1}^n, P_{k,2}^n, \dots, P_{k,n}^n)$ están definidos como los coeficientes de la familia de polinomios $(x+1)^{n-k+1} (x-1)^{k-1} = x^n - P_{k,1}^n x^{n-1} - \dots - P_{k,n}^n$, así que será conveniente cambiar nuestra definición de polinomio base de Bernstein para definir n -variedad de Bézier en $[-1, 1]^n$ en lugar de $[0, 1]^n$.

El aspecto mas importante de los polinomios base de Bernstein es que funcionan como funciones interpolación entre los puntos β_{ν} . Esto es porque

$$\sum_{\nu=0}^n b_{\nu,n}(x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} x^{\nu} (1-x)^{n-\nu} = (x+1-x)^n = 1$$

Así que si queremos mantener esta propiedad de interpolación con otras bases, debemos asegurarnos que

$$\sum_{\nu=0}^n b_{\nu,n}(x) = 1$$

que también nos asegura algo que nos será útil, y es que la superficie no se saldrá de la envoltura convexa de sus puntos de control.

A continuación la nueva definición de polinomio base de Bernstein que nos sirve para nuestros propósitos.

Definición 2.6.4. Los $n + 1$ polinomios base de Bernstein de grado n los redefinimos como

$$b_{\nu,n}(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\nu} (x+1)^{n-\nu} (1-x)^\nu, \quad \nu = 0, \dots, n$$

donde $x \in [-1, 1]$.

Donde podemos ver que con esta nueva definición logramos que los polinomios base de Bernstein formen una partición de la unidad al igual que antes, pero están definidos en $[-1, 1]$ y sus raíces ahora pertenecen al conjunto $\{-1, 1\}$.

Otro cambio que necesitaremos en las definiciones es restringir la definición de $(n-1)$ – *variedad* de Bézier, ya que para la frontera no lineal de estabilidad en dimensión n contamos con $n + 1$ puntos de control que se trata de los puntos P_k^n con $k = 1, \dots, n + 1$. Y en la definición de $(n-1)$ – *variedad* de Bézier necesitamos $\prod_{k=1}^{n-1} (m_k + 1)$ puntos de control.

Para esto tomaremos $m_k = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$, con lo que reducimos los puntos de control a 2^{n-1} , a pesar de tener muchos puntos, aún podremos hacer la caracterización de la frontera no lineal de estabilidad. Para esto deberemos identificar varios de los 2^{n-1} puntos de control hasta colapsarlos en $n + 1$ puntos que son los que disponemos. Pero por el momento escribiremos una proposición acerca de la n – *variedad* de Bézier mas restringida tomando en cuenta lo dicho anteriormente.

Proposición 2.6.5. La n – *variedad* de Bézier con los polinomios de Bernstein definidos en $[-1, 1]$ y con $m_k = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ se reduce a

$$B(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \prod_{k=1}^n \left(1 + (-1)^{i_k} x_k\right) \beta_i$$

donde i_k es el k – *ésimo* dígito del número i en binario, $\beta_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ son los puntos de control y $x_k \in (-1, 1)$.

Demostración. Al redefinir los polinomios de Bernstein en $[-1, 1]$ y fijar $m_k = 1$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ se reducen a

$$b_{0,1}(x) = \frac{1}{2} (x+1)$$

$$b_{1,1}(x) = \frac{1}{2} (1-x)$$

que se pueden expresar como

$$b_{i,1}(x) = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^i x\right), \quad i = 0, 1$$

Además como cada sumando de la n – *variedad* de Bézier tiene sólo dos factores y son n sumas, la expresión tendrá 2^n términos.

El término $\prod_{k=1}^n (1 + (-1)^{i_k} x_k)$ tendrá n factores, y el conjunto de exponentes $\{i_k\}$ irá desde $(0, \dots, 0)$ hasta $(1, \dots, 1)$ recorriendo todas las posibilidades, lo que no es otra cosa que la representación en base binaria de los números $0, \dots, 2^n - 1$. \square

Hemos visto que para caracterizar una $(n - 1) - \text{variedad de Bézier}$ necesitamos sus puntos de control, para el caso que tratamos necesitamos 2^{n-1} puntos de control y tenemos $n + 1$ que corresponden a los coeficientes P_k^n de los polinomios $(x + 1)^{n-k+1} (x - 1)^{k-1}$. Así que se hará la siguiente identificación.

Definición 2.6.6. Sea β_i con $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ uno de los 2^n puntos de control que se necesitan para definir una $n - \text{variedad de Bézier}$, y sea $[i]_2 = b_{[\ln_2 i]} \dots b_1 b_0$ la expresión en binario del índice i , entonces el punto β_i se identifica con el punto P_k^n , donde

$$k = \sum_{j=2}^{[\ln_2 i]} [b_j]_{10} + [b_1 b_0]_{10} + 1$$

al número k le llamaremos la *dirección* del punto β_i

Ejemplo 2.6.7. Mostraremos varios ejemplos de esta identificación

- β_2 , entonces $[2]_2 = 10_2$ y se identifica con P_3^n
- β_{11} , entonces $[11]_2 = 1011_2$ y se identifica con P_5^n
- β_{531} , entonces $[531]_2 = 1000010011_2$ y se identifica con P_6^n
- β_{2^p} , entonces $[2^p]_2 = 10 \dots 00_2$ y se identifica con P_2^n
- β_{2^p-1} , entonces $[2^p - 1]_2 = 11 \dots 111_2$ por lo tanto $k = \left[\sum_{i=2}^{[\ln_2 2^p-1]} 1 \right] + [11]_{10} + 1 = p - 2 + 3 + 1 = p + 2$ y se identifica con P_{p+2}^n . Esto muestra cómo 2^{n-1} puntos se identifican con $n + 1$ puntos.
- Si $n = 6$ la identificación sería

P_1^n	P_2^n	P_3^n	P_4^n	P_5^n	P_6^n	P_7^n
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
0	1	2	3			
	4	5	6	7		
	8	9	10	11		
		12	13	14	15	
	16	17	18	19		
		20	21	22	23	
		24	25	26	27	
			28	29	30	31

donde vemos como $2^{6-1} = 32$ puntos se identifican con $6 + 1 = 7$ puntos.

Definición 2.6.8. Sea

$$M_k^n = \{i \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \mid \text{tal que } \beta_i \text{ se identifica con } P_k^n\}$$

el conjunto de los índices i tales que β_i tienen dirección k .

Denominaremos *bloque j* al polinomio

$$B_j^n \equiv \sum_{i \in M_j^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + (-1)^{i_k} x_k\right)$$

donde i_k es el k -ésimo dígito de **izquierda a derecha** de la representación de $i \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ en binario usando $n - 1$ dígitos y $x_k \in [-1, 1]$.

Ejemplo 2.6.9. En la definición anterior si $k = 3$ y $n = 5$. Entonces,

$$M_3^5 = \{2, 5, 9, 12\}$$

ya que pertenecen al conjunto $\{0, \dots, 15\}$ y tienen dirección 3.

y por lo tanto

$$B_3^5 = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 - x_3)(1 + x_4) + (1 + x_1)(1 - x_2)(1 + x_3)(1 - x_4) \\ + (1 - x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 - x_4) + (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$$

porque

$$2_{10} = 0010_2, 5_{10} = 0101_2, 9_{10} = 1001_2, 12_{10} = 1100_2$$

Simplificando

$$B_3^5 = 2(x_4x_1x_2x_3 + 2x_4x_1x_2 - x_4x_1x_3 - x_4x_2x_3 - x_1x_2x_3 - x_4x_3 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3 + 2)$$

Lema 2.6.10. Los bloques B_j^n con $j = \{1, \dots, n + 1\}$ cumplen la siguiente recursión para $n \geq 3$

$$B_j^n = (1 + x_{n-1}) B_j^{n-1} + (1 - x_{n-1}) B_{j-1}^{n-1}$$

donde $x_{n-1} \in (-1, 1)$. Los valores iniciales son: $B_1^3 = (1 + x_1)(1 + x_2)$, $B_2^3 = (1 + x_1)(1 - x_2)$, $B_3^3 = (1 - x_1)(1 + x_2)$, $B_4^3 = (1 - x_1)(1 - x_2)$, $B_0^n = B_{n+2}^n = 0$

Demostración. Sea el bloque

$$B_j^n = \sum_{i \in M_j^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + (-1)^{i_k} x_k\right)$$

Ahora separamos el conjunto M_j^n en dos subconjuntos disjuntos, el de los números cuya representación binaria comienza por 1 (dígito más a la izquierda) denotado por M_{j1}^n y el de los números cuya representación binaria comienza por 0 denotado por M_{j0}^n .

$$M_j^n = M_{j0}^n \cup M_{j1}^n$$

por lo tanto

$$B_j^n = \sum_{i \in M_{j_0}^n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + (-1)^{i_k} x_k) + \sum_{i \in M_{j_1}^n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + (-1)^{i_k} x_k)$$

Si a los elementos de $M_{j_0}^n$ les quitamos el cero de su primer dígito nos queda el conjunto M_j^{n-1} ya que la dirección sigue siendo j y le hemos quitado un factor al término. Análogamente, si a los elementos de $M_{j_1}^n$ les quitamos el uno de su primer dígito nos queda el conjunto M_{j-1}^{n-1} ya que la dirección es $j-1$ y le hemos quitado un factor al término. En términos de los polinomios nos queda

$$B_j^n(x_1, \dots, x_{n-1}) = (1 + x_1) B_j^{n-1}(x_2, \dots, x_{n-1}) + (1 - x_1) B_{j-1}^{n-1}(x_2, \dots, x_{n-1})$$

donde estamos haciendo explícita la dependencia de $B_j^n(x_1, \dots, x_{n-1})$ de las variables $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, ahora simplemente reetiquetamos las variables cambiando $x_2 \rightarrow x_1, \dots, x_{n-1} \rightarrow x_{n-2}, x_1 \rightarrow x_{n-1}$ y obtenemos el resultado.

Los valores iniciales provienen de la forma como se calcula la dirección ya que se separan los dos últimos dígitos, que corresponden a $k = \{0, 1, 2, 3\}$ y por lo tanto ahí termina la recursión. \square

Lema 2.6.11. *Los bloques B_j^n con $j = \{1, \dots, n+1\}$, para $n \geq 3$ cumplen*

$$\sum_{j=1}^{n+1} B_j^n = 2^{n-1}$$

Demostración. Se procederá por inducción.

Para $n = 3$

$$(1 + x_1)(1 + x_2) + (1 + x_1)(1 - x_2) + (1 - x_1)(1 + x_2) + (1 - x_1)(1 - x_2) = 4 = 2^2$$

Supongamos que es cierto para $n = k$ y demostremos el resultado para $n = k+1$, usando el lema anterior

$$\sum_{j=1}^{k+2} B_j^{k+1} = \sum_{j=1}^{k+2} (1 + x_1) B_j^k + \sum_{j=1}^{k+2} (1 - x_1) B_{j-1}^k = (1 + x_1) \sum_{j=1}^{k+1} B_j^k + (1 - x_1) \sum_{j=1}^{k+1} B_j^k$$

Donde en la última igualdad se usó que $B_0^k = B_{k+2}^k = 0$ y se reacomodaron índices. Tomando factor común

$$\sum_{j=1}^{k+2} B_j^{k+1} = (1 + x_1 + 1 - x_1) \sum_{j=1}^{k+1} B_j^k = 2^k$$

donde al final se usó la hipótesis inductiva. \square

Este resultado nos permitirá demostrar el resultado principal de la sección

Teorema 2.6.12. Sea $P(x) = x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \dots - \alpha_n$ un polinomio de grado $n \geq 3$ con coeficientes reales y sea

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_n \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_n & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la $(n-1)$ -variedad definida por $\det(D) = 0$ es de Bézier, es decir, se puede expresar como

$$B(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + (-1)^{ik} x_k\right) \beta_i$$

para $n \geq 3$, cuyos puntos de control β_i satisfacen la identificación introducida en la Definición 2.6.6, es decir, con los coeficientes del polinomio

$$(x+1)^{n-k+1} (x-1)^{k-1} = x^n - P_{k,1}^n x^{n-1} - P_{k,2}^n x^{n-2} - \dots - P_{k,n}^n$$

Demostración. Se hará por inducción

Para $n = 3$, sean $P_1 = (-3, -3, -1)$, $P_2 = (-1, 1, 1)$, $P_3 = (1, 1, -1)$, $P_4 = (3, -3, 1)$ los coeficientes de los polinomios $(x+1)^{4-k} (x-1)^{k-1}$ que se corresponden con los puntos de control, entonces

$$B(x_1, x_2) = \frac{1}{4} [(1+x_1)(1+x_2)P_1 + (1+x_1)(1-x_2)P_2 + (1-x_1)(1+x_2)P_3 + (1-x_1)(1-x_2)P_4]$$

Se tiene que

$$B(x_1, x_2) = (-2x_1 - x_2, -2x_1x_2 - 1, -x_2)$$

que coincide con la parametrización de un polinomio de la forma 1_3 usando el Lema 2.5.4, sólo cambiando

$$2x_1 \rightarrow c_1$$

$$x_2 \rightarrow r_1$$

Por el Teorema 2.5.6, $D_1^3(P_1^3) = 0$, lo que comprueba que $B(x_1, x_2)$ es una versión parametrizada de esta superficie.

Tomando en cuenta las Definiciones 2.6.6 y 2.6.8 podemos reescribir la Proposición 2.6.5 como

$$B(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + (-1)^{i_k} x_k\right) \beta_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{n+1} B_j^n P_j^n$$

Por la Proposición 2.5.12 los coeficientes del polinomio $P(x)$ cumplen que

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_{n-1} \end{pmatrix} x_n$$

donde $x_n \in (-1, 1)$

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

Así que para demostrar que la variedad de Bézier parametrizada es igual a la variedad $D_1^n(P_1^n) = 0$, es decir,

$$A_n = B(x_1, \dots, x_{n-1})$$

es suficiente con demostrar que

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{n+1} B_j^n P_j^n = \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_{n-1} \end{pmatrix} x_n$$

y asumiendo que el resultado se cumple para n , demostraremos que también es cierto para $n + 1$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n+2} B_j^{n+1} P_j^{n+1} = \begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} x_n$$

donde $x_n \in (-1, 1)$ y A_n es la expresión paramétrica de la $(n - 1)$ - variedad .

Usando el Lema 2.6.10 y dejando fuera de la suma los términos $j = 1, n + 2$ y aplicando el Lema 2.4.3.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n+2} B_j^{n+1} P_j^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=2}^{n+1} [(1 + x_n) B_j^n + (1 - x_n) B_{j-1}^n] \left[\begin{pmatrix} P_j^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ P_j^n \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{2^n} B_{n+2}^{n+1} P_{n+2}^{n+1} + \frac{1}{2^n} B_1^{n+1} P_1^{n+1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$B_{n+2}^{n+1} = (1 - x_n) B_{n+1}^n$$

$$B_1^{n+1} = (1 + x_n) B_1^n$$

$$P_{n+2}^{n+1} = \begin{pmatrix} P_{n+1}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$P_1^{n+1} = \begin{pmatrix} P_1^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ P_1^n \end{pmatrix}$$

La expresión se reduce a

$$\frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{n+1} [(1+x_n) B_j^n + (1-x_n) B_{j-1}^n] \left[\begin{pmatrix} P_j^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ P_j^n \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{2^n} (1-x_n) B_{n+1}^n \left[\begin{pmatrix} P_{n+1}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{n+1}^n \end{pmatrix} \right]$$

Utilizando la hipótesis inductiva y usando el Lema 2.6.11 se tiene

$$\frac{(1+x_n)}{2^n} \left[2^{n-1} \begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} \right] + \frac{(1-x_n)}{2^n} \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} B_{j-1}^n \left[\begin{pmatrix} P_j^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ P_j^n \end{pmatrix} \right] + B_{n+1}^n \left[\begin{pmatrix} P_{n+1}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{n+1}^n \end{pmatrix} \right] \right\}$$

Usando de nuevo el Lema 2.4.3 vemos que

$$\begin{pmatrix} P_k^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ P_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{k-1}^n \end{pmatrix} \quad \forall k \{2, \dots, n+1\}$$

Aplicando esta igualdad y notando que $B_0^n = 0$

$$\frac{(1+x_n)}{2} \left[\begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} \right] + \frac{(1-x_n)}{2^n} \left\{ \sum_{j=2}^{n+1} B_{j-1}^n \left[\begin{pmatrix} P_{j-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{j-1}^n \end{pmatrix} \right] + B_{n+1}^n \left[\begin{pmatrix} P_{n+1}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_{n+1}^n \end{pmatrix} \right] \right\}$$

reorganizando términos

$$\frac{(1+x_n)}{2} \left[\begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} \right] + \frac{(1-x_n)}{2^n} \sum_{j=1}^{n+1} B_j^n \left[\begin{pmatrix} P_j^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ P_j^n \end{pmatrix} \right]$$

Aplicando la hipótesis inductiva

$$\frac{(1+x_n)}{2} \left[\begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} \right] + \frac{(1-x_n)}{2^n} \left[2^{n-1} \begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} - 2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} \right]$$

Resolviendo se tiene

$$\begin{pmatrix} A_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ A_n \end{pmatrix} x_n$$

□

Ya habiendo demostrado que la $(n - 1) - variedad$ es de Bézier podemos utilizar una importante y conocida propiedad: toda variedad de Bézier se encuentra contenida en la cerradura convexa de sus puntos de control, esto es una consecuencia directa de ser una partición de la unidad. Los puntos de control son los $n + 1$ puntos correspondientes a los coeficientes de los polinomios $(x + 1)^{n-k+1} (x - 1)^{k-1}$, es decir, $(P_{k,1}^n, \dots, P_{k,n}^n)$ con $k \in \{1, \dots, n + 1\}$. Como estamos en un espacio euclídeo de dimensión n , entonces la envoltura convexa de estos puntos resulta ser un $n - \acute{s}implice$. Así que una manera de comprobar que un polinomio es estable, es como primer paso determinar su pertenencia al interior de este $n - \acute{s}implice$, y como segundo paso verificar que cada uno de sus menores centrales sea mayor que cero, es decir, que $D_k^n > 0$. Esta delicada afirmación tendrá su demostración en las próximas páginas, se hará en dos partes, primero se discutirá el significado de que el polinomio pertenezca al $n - \acute{s}implice$ y segundo el significado de que todos sus menores centrales sean positivos.

2.7. Caracterización de polinomios estables

En esta sección del documento abordaremos la caracterización completa de los polinomio estables, para ello se hará en dos procesos independientes. El primero de ellos se encarga de garantizar que las raíces reales del polinomio tienen norma menor que uno y el segundo proceso garantiza que las raíces complejas del polinomio tengan norma menor que uno.

2.7.1. Estabilidad de raíces reales

Para determinar la pertenencia del polinomio al $n - \acute{s}implice$ escribiremos las ecuaciones de los hiperplanos que lo definen.

Escribiendo los puntos de control como las filas de una matriz P^n ,

$$P^n \equiv \begin{pmatrix} P_{1,0}^n & P_{1,1}^n & \cdots & P_{1,n-1}^n & P_{1,n}^n \\ P_{2,0}^n & P_{2,1}^n & \cdots & P_{2,n-1}^n & P_{2,n}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{n,0}^n & P_{n,1}^n & \cdots & P_{n,n-1}^n & P_{n,n}^n \\ P_{n+1,0}^n & P_{n+1,1}^n & \cdots & P_{n+1,n-1}^n & P_{n+1,n}^n \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la izquierda por el vector $(-1, x_1, x_2, \dots, x_n)$, obtenemos varios hiperplanos

$$\begin{aligned} HPlano_1(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow -P_{1,0}^n + P_{2,0}^n x_1 + \dots + P_{n+1,0}^n x_n \\ HPlano_2(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow -P_{1,1}^n + P_{2,1}^n x_1 + \dots + P_{n+1,1}^n x_n \\ &\vdots \\ HPlano_{n+1}(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow -P_{1,n}^n + P_{2,n}^n x_1 + \dots + P_{n+1,n}^n x_n \end{aligned}$$

Si evaluamos los hiperplanos en los puntos $(x_1, \dots, x_n) = (P_{i,1}^n, \dots, P_{i,n}^n)$ con $i \in \{1, \dots, n + 1\}$. Además, teniendo en cuenta que $P_{i,0}^n = -1$ y el Teorema 2.4.4 que dice que

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2^p \delta_{k,j+1} \quad \forall k \in \{1, \dots, p + 1\} \forall j \in \{0, \dots, p\}$$

obtenemos que

$$HPlano_j (P_{i,1}^n, \dots, P_{i,n}^n) = 2^n \delta_{i,j}$$

Es decir que el $HPlano_j$ contiene a todos los puntos excepto el punto P_j^n . De tal manera que los hiperplanos definidos de esta manera, son la cerradura convexa que buscábamos. Los polinomios que se encuentran acotados por esta cerradura convexa tienen una propiedad especial que citamos a continuación. Pero primero necesitaremos un lema técnico.

Lemma 2.7.1. *Los puntos de control $P_{i,j}^k$ cumplen la siguiente relación para todo k y para $1 \leq i \leq k+1$ y para $1 \leq j \leq k+2$*

$$(k+2-i) P_{j,i-1}^{k+1} = (j-1) P_{j-1,i-1}^k + (k+2-j) P_{j,i-1}^k$$

Proof. Se demostrará por inducción. Para $k=1$ se puede expresar de la siguiente manera y claramente es cierto.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que se cumple para k y demostraremos que se cumple para $k+1$, es decir, tenemos que verificar que para $1 \leq i \leq k+2$ y $1 \leq j \leq k+3$ se cumple

$$(k+3-i) P_{j,i-1}^{k+2} = (j-1) P_{j-1,i-1}^{k+1} + (k+3-j) P_{j,i-1}^{k+1}$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.4.3, la prueba se hará para $1 \leq j \leq k+1$ y luego se tratarán los casos $j = k+2, k+3$

Si $1 \leq j \leq k+1$ la expresión se puede escribir como

$$[(k+2-i)+1] (P_{j,i-1}^{k+1} + P_{j,i-2}^{k+1}) = (j-1) (P_{j-1,i-1}^k + P_{j-1,i-2}^k) + [(k+2-i)+1] (P_{j,i-1}^k + P_{j,i-2}^k)$$

Usando la hipótesis inductiva tenemos

$$(k+3-i) P_{j,i-2}^{k+1} + P_{j,i-1}^{k+1} = (j-1) P_{j-1,i-2}^k + (k+2-i) P_{j,i-2}^k + P_{j,i-1}^k + P_{j,i-2}^k$$

Y aplicándola nuevamente nos queda

$$P_{j,i-1}^{k+1} = P_{j,i-1}^k + P_{j,i-2}^k$$

que es claramente cierto.

Si $j = k+2, k+3$ entonces la expresión se puede escribir como

$$[(k+2-i)+1] (P_{j-1,i-1}^{k+1} - P_{j-1,i-2}^{k+1}) = [(j-2)+1] (P_{j-2,i-1}^k - P_{j-2,i-2}^k) + (k+3-i) (P_{j-1,i-1}^k - P_{j-1,i-2}^k)$$

usando la hipótesis inductiva dos veces

$$-(k+3-i)P_{j-1,i-2}^{k+1} + P_{j-1,i-1}^{k+1} = -(j-2)P_{j-2,i-2}^k + P_{j-2,i-1}^k - P_{j-2,i-2}^k - (k+3-i)P_{j-1,i-2}^k$$

$$P_{j-1,i-1}^{k+1} = P_{j-2,i-1}^k - P_{j-2,i-2}^k$$

que es cierto. \square

Theorem 2.7.2. Sea $P_n(x)$ un polinomio $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que se encuentra en el interior de la región delimitada por los planos $H\text{Plano}_j$ con $j \in \{0, \dots, n\}$, de tal manera que

$$H\text{Plano}_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,j}^n \alpha_i > 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

Entonces toda raíz $x \in \mathbb{R}$ de $P(x)$ cumple que $|x| < 1$.

Demostración. Se demostrará que cualquier combinación convexa estricta ($\forall i \ 0 < m_i < 1$) de los puntos de control tiene la propiedad que sus raíces reales cumplen $|x| < 1$.

Si $n = 1$

Sea $P_1(x) = m_1(x-1) + m_2(x+1)$, con $m_1 + m_2 = 1$, con $0 < m_i < 1$.

La raíz de P es

$$x = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = m_1 - m_2$$

por la condición de convexidad se tiene que

$$|x| = |m_1 - m_2| < 1$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$ y demostremos el resultado para $n = k+1$.

Sea

$$P_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{k+2} m_i (x+1)^{k+2-i} (x-1)^{i-1}$$

una combinación convexa de los puntos de control ($\sum_{i=1}^{k+2} m_i = 1$), teniendo en cuenta que los coeficientes de $(x+1)^{n+2-i} (x-1)^{i-1}$ están dados por $-P_{i,j}^{n+1}$, tenemos

$$P_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} x^{k+1-j} \sum_{i=0}^{k+1} (-P_{i+1,j}^{k+1}) m_{i+1}$$

entonces su derivada es

$$P'_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^k (k+1-j) x^{k-j} \sum_{i=0}^{k+1} (-P_{i+1,j}^{k+1}) m_{i+1}$$

haciendo el coeficiente principal igual a uno

$$P'_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^k x^{k-j} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{k+1-j}{k+1} (-P_{i+1,j}^{k+1} m_{i+1})$$

si éste último polinomio cumpliera con el enunciado del problema se debería poder expresar como combinación convexa de los puntos de control, es decir, se pueden encontrar $M_i \in (0, 1)$ tal que $M_1 + \dots + M_{k+1} = 1$ y

$$P'_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^k x^{k-j} \sum_{i=0}^k (-P_{i+1,j}^k M_{i+1})$$

es decir,

$$\sum_{i=0}^k (-P_{i+1,j}^k M_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{k+1-j}{k+1} (-P_{i+1,j}^{k+1} m_{i+1})$$

denotando a $M = (M_1, \dots, M_{k+1})^T$ y a $P^k = (P_{i,j}^k)$, y definiendo la matriz diagonal L con entradas

$$L_{ii} = \frac{k+2-i}{k+1}$$

el problema se reduce a encontrar M tal que $M_i \in (0, 1)$, $M_1 + \dots + M_{k+1} = 1$ y

$$(-P^k)^T M = L (-P^{k+1})^T m$$

por el Teorema 2.4.4 se tiene que $(P^k)^2 = 2^k I$, así que $(P^k)^T$ es invertible y el sistema tiene solución única. La solución es $M_i = \frac{k+2-i}{k+1} m_i + \frac{i}{k+1} m_{i+1}$ con $1 \leq i \leq k+1$. Para comprobar que es la solución expresamos la anterior ecuación en sus componentes y llegamos a que se debe cumplir que

$$\frac{1}{k+1} [(j-1) P_{j-1,i-1}^k + (k+2-j) P_{j,i-1}^k] = \frac{k+2-i}{k+1} P_{j,i-1}^{k+1}$$

lo cual es cierto por el lema anterior.

Notando que los M_i son todos positivos, sólo nos resta probar que $\sum_{i=1}^{k+1} M_i = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} M_i &= \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{k+2-i}{k+1} m_i + \frac{i}{k+1} m_{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+2-i}{k+1} m_i + \sum_{i=2}^{k+2} \frac{i-1}{k+1} m_i \\ &= m_1 + \sum_{i=2}^{k+1} \frac{k+2-i}{k+1} m_i + \sum_{i=2}^{k+1} \frac{i-1}{k+1} m_i + m_{k+2} \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} m_i = 1 \end{aligned}$$

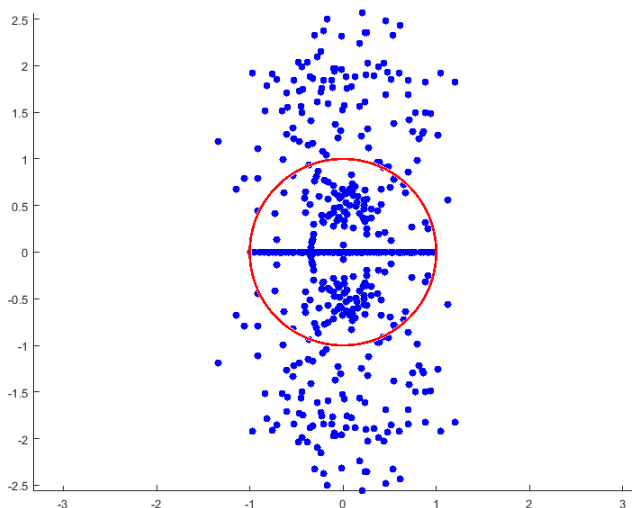


Figura 2.7.1: Polinomios no estables en el interior de la cerradura convexa de los puntos de control. Podemos notar que ninguna raíz real tiene módulo mayor a uno.

De todo esto se concluye que si $P_k(x)$ es un polinomio con todas sus raíces reales con valor absoluto menor que uno., entonces la derivada de $P_{k+1}(x)$ también tiene sus raíces con valor absoluto menor que uno. Adicionalmente, teniendo en cuenta que $P_n(1) = m_1 2^n > 0$, que $P_n(-1) = m_{n+1} (-2)^n$ es positivo cuando n es par y negativo cuando n es impar y que coincide con los signos de estos polinomios en ∞ y $-\infty$ respectivamente. Se concluye que si $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz real x_0 tal que $|x_0| \geq 1$ necesariamente su derivada tuvo que tener una raíz con norma mayor que uno y tenemos una contradicción, por lo tanto, todas las raíces reales de $P_{k+1}(x)$ cumplen que $|x_0| < 1$. \square

Por lo tanto, si un polinomio no es estable y cumple que $HPlano_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,j}^n \alpha_i > 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$. Forzosamente tiene que tener una raíz compleja con normal mayor a uno. En la Figura 2.7.1 se pueden ver las raíces de 100 polinomios de grado $n = 10$ no estables generados aleatoriamente que cumplen con la condición y en particular todas las reales están dentro del círculo unitario.

2.7.2. Estabilidad de raíces complejas

Retomando el Teorema 2.2.5, en el que mostramos lo siguiente:

Si $P_n(x) = x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \dots - \alpha_n$ y si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ -\alpha_1 & 1 - \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 - \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} - \alpha_n & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces,

Las raíces de $P_n(x)$ cumplen que $|z| < 1$ si y sólo si $\det(B) \neq 0$ y la región contiene a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$.

El gran problema es que no teníamos un método para garantizar que la región donde estaban los coeficientes del polinomio contenía al vector $(0, \dots, 0)$. Incluso no era concluyente después del Teorema 2.3.3 en el que se demostró que

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) \det(D)$$

con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{p-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_p \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_p & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_p & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ya que había regiones que cumplían que los tres factores eran mayores que cero, pero las raíces de $P_n(x)$ no cumplían $|z| < 1$, esto era porque esas regiones en cuestión, no contenían al vector $(0, \dots, 0)$. Para aclarar todos estos detalles estudiaremos un poco mas a fondo la estructura de los menores centrales, su interpretación y utilidad.

El ejercicio que haremos es comenzar con el polinomio x^n y por medio de un parámetro “ R ” lo transformaremos en $x^{n-2k} \prod_{i=1}^k (x^2 + 2Ru_i x + R^2)$. El primero corresponde a un polinomio con n raíces en el origen y el segundo a un polinomio con $n - 2k$ raíces en el origen y las otras $2k$ raíces son complejas y todas tienen módulo R . Adicionalmente se han incluido los parámetros $u_i \in (-1, 1)$ que da cuenta de la dirección de cada una de estas raíces. Un ejemplo en dimensión $n = 5$ se encuentra en la Figura 2.7.2

Esto lo hacemos con el fin de sacar todas las raíces simultáneamente del círculo unitario y no hacer más complejos los cálculos, pero para los efectos en los menores centrales es suficiente. Por el momento podemos notar que si hay $n - 2k$ raíces nulas, entonces el último coeficiente del polinomio que no es nulo es $a_{2k} = -R^{2k}$, y para $2k + 1 \leq i \leq n$ se tiene que $a_i = 0$. Al considerar todos estos coeficientes nulos y verificando cada uno de los determinantes, vemos que $D_i^n = D_i^{2k}$. Es decir, la presencia de las raíces nulas, hace que sólo sea necesario tomar en cuenta el conjunto de los D_i^{2k} asociados al polinomio $P_{2k}(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + 2Ru_i x + R^2)$. Por la forma especial de estos polinomios, sus coeficientes cumplen una relación de simetría.

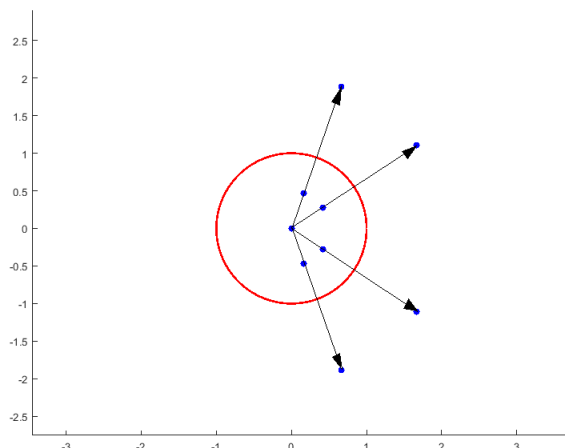


Figura 2.7.2: Raíces saliendo del círculo unitario con $R = 0, \frac{1}{2}, 2$

Lema 2.7.3. Sea P_{2k} un polinomio de la forma

$$P_{2k}(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + 2Ru_i x + R^2)$$

entonces sus coeficientes cumplen

$$a_{2k-i} = R^{2(k-i)} a_i$$

Demostración. Para $k = 1$ se cumple claramente.

Asumiendo cierto para $k = n$, probaremos que se cumple para $k = n + 1$.

Sea

$$P_{2n}(x) = x^{2n} - a_1 x^{2n-1} - a_{2n-1} x - a_{2n}$$

un polinomio tal que sus coeficientes cumplen que

$$a_{2n-i} = R^{2(n-i)} a_i$$

Ahora consideremos el polinomio

$$P_{2(n+1)}(x) = (x^2 + 2Rux + R^2) P_{2n}$$

Sus coeficientes los expresaremos por \tilde{a}_i , y al hacer la operación vemos que son iguales a

$$\tilde{a}_i = a_i + 2Rua_{i-1} + R^2 a_{i-2}$$

por lo tanto

$$\tilde{a}_{2(k+1)-i} = a_{2k+2-i} + 2Rua_{2k+1-i} + R^2 a_{2k-i}$$

Usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{2(k+1)-i} &= R^{2(k+2-i)}a_{i-2} + 2RuR^{2(k+1-i)}a_{i-1} + R^2R^{2(k-i)}a_i \\ &= R^{2(k+1-i)}(a_i + 2Rua_{i-1} + R^2a_{i-2}) \\ &= R^{2(k+1-i)}\tilde{a}_i\end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado. \square

Proposition 2.7.4. *Sea $P(x)$ un polinomio con $n - 2k$ raíces nulas y $2k$ raíces complejas de módulo R . Entonces*

$$\operatorname{sgn}(D_i^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } R < 1 \\ 0 & \text{si } R = 1 \\ (-1)^{k-i+1} & \text{si } R > 1 \end{cases}$$

donde $\operatorname{sgn}(x)$ es la función signo.

Demostración. El determinante $D_1^n = D_1^{2k}$ en la fila i tiene entradas

$$D_{ij} = a_{i+j} - a_{i-j}$$

y en la fila $2k - i$ tiene entradas

$$D_{2k-i,j} = a_{2k-i+j} - a_{2k-i-j}$$

Si sumamos las dos filas y las reemplazamos en la fila i , podemos hacer esto k veces y nos queda

$$D_{ij} = (a_{i+j} - a_{2k-(i+j)}) - (a_{i-j} - a_{2k-(i-j)})$$

para $1 \leq i \leq k$. Para los otros valores de i queda igual que antes. Al aplicar el lema anterior a esta última expresión tenemos

$$\begin{aligned}D_{ij} &= a_{i+j}(1 - R^{2(k-i-j)}) - a_{i-j}(1 - R^{2(k-i+j)}) \\ &= (1 - R) \left[a_{i+j} \sum_{m=0}^{2(k-i-j)-1} R^m - a_{i-j} \sum_{m=0}^{2(k-i+j)-1} R^m \right]\end{aligned}$$

Como esto es para la matriz D_1^{2k} y podemos sacar este factor $(1 - R)$ una cantidad k de veces, entonces para $R > 1$, $\operatorname{sgn}(D_1^{2k}) = (-1)^k$. Para la matriz D_2^{2k} como quitamos la fila superior y la inferior de D_1^{2k} , se puede sacar el factor $(1 - R)$ una cantidad $k - 1$ de veces, entonces para $R > 1$, $\operatorname{sgn}(D_2^{2k}) = (-1)^{k-1}$. Siguiendo este razonamiento tenemos que para $R > 1$

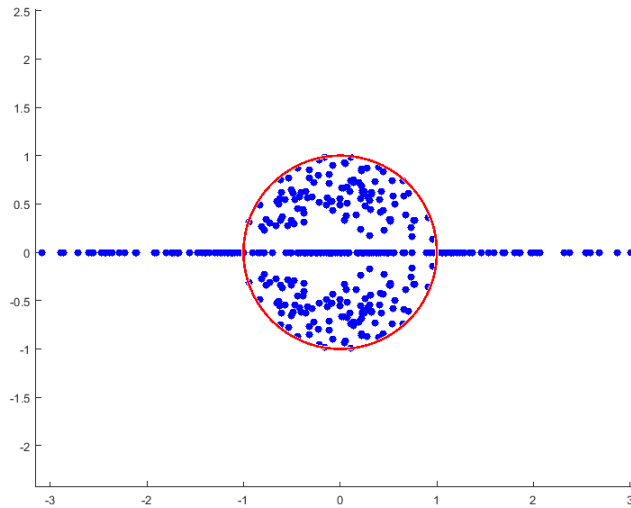


Figura 2.7.3: Polinomios no estables que cumplen que todos sus menores centrales son mayores a cero. Vemos que ninguna raíz compleja tiene módulo mayor a uno.

$$\operatorname{sgn}(D_i^n) = (-1)^{k-i+1}$$

Los casos para $R \leq 1$ son claros. □

Así pues, tenemos que la única manera para que todos los signos de D_i^n sean positivos, es que todas las raíces complejas tengan norma menor a uno. Por lo tanto tenemos el siguiente corolario inmediato.

Corolario 2.7.5. Si $P(x)$ cumple que $D_i^n > 0$ para $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ entonces toda raíz $x \in \mathbb{C}$ de $P(x)$ cumple que $|x| < 1$.

Esto se puede apreciar en la Figura 2.7.3 donde se simularon 100 polinomios de grado $n = 10$ no estables pero que cumplían que $D_i^n > 0$ para $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, podemos ver que ninguna raíz compleja tiene norma mayor que uno.

En este momento podemos resumir los resultados del Teorema 2.7.2 y del Corolario 2.7.5 en un sólo teorema que caracteriza a los polinomios estables.

Theorem 2.7.6. Sea $P_n(x) = x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \dots - \alpha_n$ un polinomio mónico con coeficientes reales de grado n , sea D la matriz con entradas

$$d_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_{i-j}$$

donde

$$\alpha_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 0 \\ \alpha_k & \text{si } k \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } k \in \{0, 1, \dots, n\}^c \end{cases}$$

entonces todas sus raíces cumplen que $|z| < 1$, si y sólo si cumple las siguientes $\lceil \frac{3n+1}{2} \rceil$ desigualdades

$$HPlano_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,j}^n \alpha_i > 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

$$D_k^n > 0 \quad \forall k \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$$

Donde $P_{k,i}^n$ son los coeficientes del polinomio $(x+1)^{p-k+1}(x-1)^{k-1} = x^p - P_{k,1}^p x^{p-1} - P_{k,2}^p x^{p-2} - \dots - P_{k,p}^p$

Cabe notar que los puntos $P_{i,j}^n$ se pueden precalcular para cualquier dimensión, es decir, son independientes del polinomio al que se le quiere verificar la estabilidad. Además, recordando la factorización

$$\det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) \det(D)$$

los factores $(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)$ y $(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i)$ se corresponden con los planos $HPlano_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $HPlano_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ respectivamente. El resto de planos se encargan de aislar la región que contiene al $(0, \dots, 0)$. Es importante notar que la condición $D_k^n > 0 \quad \forall k \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ es totalmente necesaria, por ejemplo el polinomio

$$P(x) = x^5 - 0.5844x^4 + 1.7316x^3 - 0.9644x^2 + 1.3087x - 0.6834$$

cumple que

$$HPlano_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) > 0 \quad \text{para } j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_1^5 > 0$$

pero

$$D_2^5 < 0$$

se puede verificar que las raíces del polinomio son 4 complejas y 1 real, con valores de módulo 0.5340, 1.0627, 1.0645. Por lo tanto, el polinomio no es estable.

Example 2.7.7. Encontrar condiciones suficientes y necesarias en los coeficientes del polinomio $p(x) = x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d$ para que sea estable

Usando el Lema 2.4.3, la matriz P^4 es:

$$P^4 \equiv \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

y los menores centrales son

$$D_1^4 = \begin{vmatrix} 1+b & c & d \\ c-a & 1+d & 0 \\ d-b & -a & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2^4 = 1+d$$

Por lo tanto los coeficientes deben cumplir las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 1-a-b-c-d > 0 & \iff HPlano_0 > 0 \\ 4-2a+2c+4d > 0 & \iff HPlano_1 > 0 \\ 6+2b-6d > 0 & \iff HPlano_2 > 0 \\ 4+2a-2c+4d > 0 & \iff HPlano_3 > 0 \\ 1+a-b+c-d > 0 & \iff HPlano_4 > 0 \\ (1+d)(1+b+bd-d^2) + (a-c)(c+ad) > 0 & \iff D_1^4 > 0 \\ 1+d > 0 & \iff D_2^4 > 0 \end{aligned}$$

En la discusión anterior al ejemplo vimos que las condiciones de que todos los menores centrales fueran positivos es absolutamente necesaria, no parece ser así con todos los hiperplanos, por el Teorema 2.3.3, vemos que el $HPlano_0$ y el $HPlano_n$ deben estar ya que son parte de la frontera de la región de estabilidad, pero al parecer cualquiera de los otros hiperplanos no necesariamente debe estar con tal que se cumpla la condición que el número total de desigualdades sea $n+1$.

En la investigación se ha notado que la cantidad de $\lceil \frac{3n+1}{2} \rceil$ desigualdades, es una cantidad redundante y los experimentos computacionales permiten inferir que son necesarias sólo $n+1$ ecuaciones. Las 3 ecuaciones que definen la región, las otras $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ dadas por el resto de menores centrales, y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ de cualquiera de los hiperplanos que están entre $\{HPlano_1, \dots, HPlano_{n-1}\}$. Así que tenemos la siguiente conjetura.

Conjecture 2.7.8. Sea $P_n(x) = x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \dots - \alpha_n$ un polinomio mónico con coeficientes reales de grado n , sea D la matriz con entradas

$$d_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_{i-j}$$

donde

$$\alpha_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 0 \\ \alpha_k & \text{si } k \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } k \in \{0, 1, \dots, n\}^c \end{cases}$$

entonces todas sus raíces cumplen que $|z| < 1$, si y sólo si cumple las siguientes $n+1$ desigualdades

$$D_k^n > 0 \quad \forall k \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$$

$$HPlano_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,0}^n \alpha_i > 0$$

$$HPlano_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,n}^n \alpha_i > 0$$

y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ de cualquiera de las siguientes desigualdades

$$HPlano_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,j}^n \alpha_i > 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n-1\}$$

Donde $P_{k,i}^n$ son los coeficientes del polinomio $(x+1)^{p-k+1}(x-1)^{k-1} = x^p - P_{k,1}^p x^{p-1} - P_{k,2}^p x^{p-2} - \dots - P_{k,p}^p$

Estos últimos resultados dan una caracterización y a pesar que se pueden calcular de una manera directa en un tiempo $O(n^2)$ para los hiperplanos y en $O(n^4)$ para todos los menores centrales, en el siguiente capítulo aprovecharemos la estructura matricial subyacente y la posibilidad de hacer un preprocesamiento para disminuir el primer tiempo a $O(\log(n))$ y el segundo a $O(n \log^2(n))$.

A modo de conclusión expondremos los resultados originales obtenidos en el desarrollo del capítulo. Se introdujo el objeto principal de estudio que es la región de estabilidad. Se usaron las ecuaciones de Yule-Walker para encontrar una caracterización de la región de estabilidad. Se mostro su no convexidad y una factorización de su frontera, que se divide en 2 hiperplanos y en una parte no lineal. Hablamos de los puntos de intersección de estas tres fronteras y una relación de ortogonalidad que tuvo su uso al final del capítulo. Se habló de los menores centrales y de cómo estos cumplían la importante función de contar ceros sobre el círculo unitario, además, que las superficies que se obtienen al igualarlos a cero eran superficies que tenían sus equivalentes en dimensiones menores. Se demostró que esas fronteras no lineales de estabilidad se podían ver como variedades de Bézier con los puntos de control determinados por los coeficientes de los polinomios mónicos que sólo tienen raíces en el conjunto $\{-1, 1\}$.

Todos estos resultados finalmente llevaron a una caracterización completa de la frontera de estabilidad. Es la primera vez que se muestra este tipo de resultados con los coeficientes originales del polinomio, sin hacer transformaciones para usar la estabilidad continua. Además, de la exploración de las propiedades, la interpretación exacta de cada uno de sus componentes y su relación con superficies de Bézier.

En todo este trabajo el objeto de estudio fueron los polinomios con coeficientes reales y el hecho que existían polinomios irreducibles en este cuerpo. Como trabajo futuro se quiere estudiar qué resultados sobre la estabilidad de polinomios se pueden extender a otros cuerpos, teniendo en cuenta que la irreducibilidad debe existir para algunos polinomios, como ocurre con los polinomios cuadráticos de coeficientes reales. La idea es que muchos de estos resultados se puedan extender a Anillos de Polinomios sobre Dominios Íntegros o al menos Dominios Euclideos.

En el Teorema 2.6.12, se hacen las identificaciones dictadas por la Definición 2.6.6 y que sólo involucran los puntos. Éstas muestran como identificar los 2^{n-1} vértices de $(n-1)$ -cubo con los $n+1$ puntos de control. Pero no se ha explorado las identificaciones que se dan en las caras, aristas, etc. En el caso de estabilidad en polinomios de grado 3 la identificación de estas otras componentes es trivial ya que se identifica el cuadrado con un la frontera

no lineal de estabilidad, que resulta ser un paraboloides hiperbólico, cada uno con 4 puntos, $2^{3-1} = 3 + 1$. Así que el cuadrado sólo se estira y se ubica en los puntos de control. Para las otras dimensiones ya no es tan sencillo ver como se transforma el cubo en la frontera y ocurren identificaciones poco triviales a nivel de aristas, caras, etc. Se espera explorar estos detalles a futuro con colaboradores en el área de Topología y Geometría.

Capítulo 3

Algoritmo super-rápido para estabilidad de polinomios.

En el capítulo anterior terminamos en una caracterización de la región de estabilidad, para calcular las condiciones debíamos resolver $n + 1$ desigualdades correspondientes a los hiperplanos y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ desigualdades correspondientes a los menores centrales. Si todas estas condiciones se calculan sin tomar en cuenta algunas ventajas estructurales se obtiene una complejidad computacional de $O(n^2)$ para los hiperplanos y de $O(n^4)$ para los menores centrales, por lo tanto, para determinar si un polinomio es estable tendríamos una complejidad de $O(n^4)$, que es muy alta para los denominados “algoritmos rápidos” que se han desarrollado a partir del algoritmo Schur-Cohn [29] [10]. Estos algoritmos tienen complejidad $O(n^2)$ y toman en cuenta en su mayoría de veces propiedades de las matrices estructuradas involucradas. Veremos que podemos reintrepetar nuestros resultados en términos de estas matrices para así reducir la complejidad a $O(n \log^2 n)$. Demostraremos cómo haremos esta reintrepetación, y también mostraremos superficialmente las ideas principales de la técnica de desplazamiento, por medio de la cual la complejidad algorítmica se puede reducir a lo dicho anteriormente.

3.1. Algoritmo para los hiperplanos

En el caso de los hiperplanos que se nombran en el Teorema 2.7.6, para que un polinomio sea estable se debe cumplir que

$$HPlano_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,j}^n \alpha_i > 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

Los coeficientes $P_{i+1,j}^n$ se pueden calcular previamente ya que sólo dependen de la dimensión y no del polinomio al que se le verificará la estabilidad. De tal manera que si calculamos cada una de las expresiones de forma directa nos tomaría un tiempo total de $O(n^2)$.

El problema también se puede verse una manera geométrica y resulta ser equivalente al problema de Localización de Punto. Éste problema consiste en que dada una partición del espacio euclídeo en regiones disjuntas, hay que determinar a cuál de las regiones pertenece

el punto. Al aplicarlo a este problema podremos determinar cuándo un punto pertenece al simplejo que contiene el vector 0.

En [8] se puede ver el desarrollo de los Hiperplanos de Corte y varias aplicaciones de estos resultados, y específicamente para el problema de Localización de punto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. [Chazelle, 1993] *Dada una colección H de n hiperplanos en \mathbb{R}^d , podemos preprocesarla para Localización de Punto en $O(n^d)$ de tiempo y espacio, de tal manera que cualquier punto puede ser localizado en $O(\log(n))$.*

La idea subyacente de la técnica es construir una base de datos que divide el espacio en simplejos de dimensión n . Se refina sucesivamente hasta que se llega a los simplejos contenidos en cada una de las áreas que define la colección H de hiperplanos. Después de este preprocesamiento se ubica en qué región se encuentra el punto recorriendo un árbol de manera similar a como se procede en una búsqueda binaria.

Así que finalmente determinar si un polinomio cumple

$$H\text{Plano}_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n P_{i+1,j}^n \alpha_i > 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

se puede saber en $O(\log(n))$, haciendo un preprocesamiento de $O(n^n)$ en espacio y tiempo.

Como trabajo futuro se buscará un algoritmo alternativo que no necesite tanto espacio y tiempo de preprocesamiento. Creemos que es posible un algoritmo no tan complejo al menos en tiempo de búsqueda $O(n \log^2(n))$ y mucho menos tiempo de preprocesamiento, ya que los puntos $P_{i+1,j}^n$ gozan de muchas simetrías.

3.2. Algoritmo para los menores centrales

Recordando los menores centrales de la matriz asociada a la frontera de estabilidad no lineal (Definiciones 2.3.4 y 2.5.2). Debemos calcular el determinante de la matriz D y verificar que éste sea mayor que cero.

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_3 - \alpha_1 & 1 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \cdots & 0 \\ \alpha_4 - \alpha_2 & \alpha_5 - \alpha_1 & 1 + \alpha_6 & \alpha_7 & \cdots & 0 \\ \alpha_5 - \alpha_3 & \alpha_6 - \alpha_2 & \alpha_7 - \alpha_1 & 1 + \alpha_8 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-4} & -\alpha_{n-5} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De igual manera se debe hacer para cada uno de sus menores centrales, es decir,

$$D_2^n = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_5 - \alpha_1 & 1 + \alpha_6 & \alpha_7 & \cdots & 0 \\ \alpha_6 - \alpha_2 & \alpha_7 - \alpha_1 & 1 + \alpha_8 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-4} & -\alpha_{n-5} & -\alpha_{n-6} & \cdots & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$D_3^n = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_7 - \alpha_1 & 1 + \alpha_8 & \alpha_9 & \cdots & 0 \\ \alpha_8 - \alpha_2 & \alpha_9 - \alpha_1 & 1 + \alpha_{10} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-6} & -\alpha_{n-7} & -\alpha_{n-8} & \cdots & 1 \end{vmatrix} > 0$$

y así sucesivamente.

Si intentamos hacer cada uno de los determinantes tenemos que D_1^n se puede calcular en $O((n-1)^3)$, D_2^n se puede calcular en $O((n-3)^3)$, en general D_k^n se puede calcular en $O((n+1-2k)^3)$ y $D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n$ en $O(1)$.

Si calculamos todos los determinantes de esta manera nos daría un tiempo de

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} O((n+1-2k)^3) = O(n^4)$$

Hasta el momento no hemos considerado que la matriz D tiene una estructura muy conocida, y es que se trata de una matriz *Toeplitz*+*Hankel*, nombradas por los matemáticos alemanes Otto Toeplitz [1881-1940] y Hermann Hankel [1839-1873].

3.2.1. Conversión de una matriz *Toeplitz* + *Hankel* a una matriz *Toeplitz* por bloques

A continuación se mostrará el acercamiento que se hizo al problema de disminuir este tiempo de $O(n^4)$ a un tiempo de $O(n \log^2 n)$. Primero se transformará la matriz *Toeplitz* + *Hankel* en una matriz *Toeplitz* por bloques equivalente pero del doble de tamaño.

Para empezar hagamos explícita la parte *Toeplitz* y la parte *Hankel* de la matriz D .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_n \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_n & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

en donde denotaremos la matriz

$$T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$H \equiv - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_n \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_4 & \vdots & -\alpha_n & \cdots & 0 \\ \vdots & -\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Los detalles de lo siguiente se pueden encontrar en [26].

Cabe notar que $\det(D) \neq 0$ si y sólo si el sistema $(T + H)p = b$ tiene solución única, donde $p = (p_1, \dots, p_{n-1})^T$ es un vector por determinar y $b = (b_1, \dots, b_{n-1})^T$ es un vector conocido. Sea J la matriz

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema se puede extender a uno equivalente dado por

$$\begin{pmatrix} T & T_H \\ T_H^T & T^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}$$

Donde $T_H = HJ$, $p_+ = p$ y $p_- = Jp$

Si antes el sistema era $(n-1) \times (n-1)$, ahora se ha convertido en uno de $(2n-2) \times (2n-2)$ donde cada uno de sus bloques es una matriz Toeplitz. La diferencia con este nuevo sistema es que se han duplicado las ecuaciones en orden inverso.

Ahora sea la matriz Q entrelazada de tamaño $(2n-2) \times (2n-2)$

$$\{Q\}_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } i = 2r + 1, j = r + 1, r = 0, 1, \dots, n-2 \\ 1 & \text{para } i = 2r + 2, j = n + r, r = 0, 1, \dots, n-2 \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

Esta matriz tiene la propiedad de ser unitaria. Ejemplificando para $n = 4$ sería

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si hacemos la operación

$$\left[Q \begin{pmatrix} T & T_H \\ T_H^T & T^T \end{pmatrix} Q^T \right] Q \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}$$

El sistema se transforma en

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & \cdots & R_{2-n} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{3-n} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{4-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n-2} & R_{n-3} & R_{n-4} & \cdots & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \vdots \\ \bar{p}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$\bar{p}_i = \begin{pmatrix} p_i \\ p_{n-1-i} \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}_i = \begin{pmatrix} b_i \\ b_{n-1-i} \end{pmatrix}$$

y las R_i son matrices 2×2

$$R(i, j) = R_{i-j} = \begin{pmatrix} T(i, j) & T_H(i, j) \\ T_H(j, i) & T(j, i) \end{pmatrix}$$

A la matriz completa la denotaremos por

$$\mathcal{R}_{n-2} \equiv \begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & \cdots & R_{2-n} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{3-n} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{4-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n-2} & R_{n-3} & R_{n-4} & \cdots & R_0 \end{pmatrix}$$

Adicionalmente, para cada $0 \leq k \leq n-2$ también podemos definir la versión truncada de la matriz anterior

$$\mathcal{R}_k \equiv \begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & R_{-2} & \cdots & R_{-k} \\ R_1 & R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{-k+1} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_k & R_{k-1} & R_{k-2} & \cdots & R_0 \end{pmatrix}$$

La matriz \mathcal{R}_k tiene algunas propiedades para resaltar, primero que se trata de una matriz por bloques Toeplitz cuyas entradas son matrices 2×2 y la segunda propiedad, es que se trata de una matriz centrosimétrica, es decir, si tenemos una matriz A de $n \times n$, A es centrosimétrica si cumple que $A_{i,j} = A_{n-i+1, n-j+1}$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Para resolver sistemas que involucran matrices Toeplitz, el estadounidense Norman Levinson [1912-1975] propuso un algoritmo en 1947 ahora conocido como “recursión Levinson” [24]. Este algoritmo disminuyó el tiempo de resolución del sistema y en particular el cálculo del determinante de una matriz Toeplitz de $O(n^3)$ a $O(n^2)$. Eventualmente, este algoritmo fue extendido por H. Akaike en 1973 [1] para matrices Toeplitz por bloques como es el caso que aplicaremos en este trabajo. En el algoritmo que se muestra a continuación, si A es una matriz de $n \times n$, A^τ denota la transpuesta de una matriz con respecto a la diagonal principal (la que va de la entrada (1,1) a la (n,n)) y A^π denota la transpuesta de una matriz con respecto a la contra diagonal (la que va de la entrada (1,n) a la (n,1))

Algoritmo Levinson para el cálculo del determinante de una matriz Toeplitz por bloques

Entrada: Bloques R_{-k}, \dots, R_k

Salida: $\det(\mathcal{R}_k)$

Algoritmo:

$X_0^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V_X^0 = R_0$, $\det(\mathcal{R}_k) = \det(R_0)$

para $i = 1, \dots, k$

$$X_i^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_X^i = \sum_{j=0}^{i-1} R_{i-j} X_j^{i-1}$$

$$B_X^i = [(V_X^{i-1})^{\tau\pi}]^{-1} E_X^i$$

$$V_X^i = V_X^{i-1} - (E_X^i)^{\tau\pi} B_X^i$$

para $j = 0, \dots, i$

$$X_j^i = X_j^{i-1} - (X_{i-j}^{i-1})^{\tau\pi} B_X^i$$

fin j

fin i

$$\det(\mathcal{R}_k) = \prod_{i=0}^k \det(V_X^i)$$

Este algoritmo se ejecuta en un tiempo de $O(n^2)$. Adicionalmente, en [17] se demuestra que para una matriz centrosimétrica, como lo es el caso de \mathcal{R}_k , se cumple que

$$\det(\mathcal{R}_k) = \det(T_k + H_k) \det(T_k - H_k)$$

donde T_k es la submatriz de T , con entradas $1 \leq i, j \leq k+1$ y H_k es la submatriz de H , con entradas $1 \leq i \leq k+1$ y $n-k-1 \leq j \leq n-1$.

Estas submatrices tienen una conexión con los menores centrales desarrollados en el capítulo anterior. Explícitamente si $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces

$$D_i^n = \det(T_{n-2i} + H_{n-2i})$$

Esta conexión crea condiciones adicionales (por ejemplo, cuando el subíndice de T_k y H_k sea $k = n - 2i + 1$) para la región de estabilidad que sabemos son redundantes para el caso de polinomios con coeficientes reales por el Teorema 2.7.6. Quizá se puedan generalizar muchos de los resultados del capítulo anterior con coeficientes en otros campos por medio de este indicio.

En las siguientes líneas demostraremos que en nuestro caso específico es equivalente verificar $\det(\mathcal{R}_k) > 0$ o $\det(T_k + H_k) > 0$. Para ello debemos volver nuestra motivación inicial para la estabilidad, es decir, la estacionariedad de series de tiempo. Específicamente demostraremos que de todos los procesos $AR(p)$, el que tiene menor varianza es el ruido blanco.

Teorema 3.2.1. *Sea X_t definida por medio de un modelo autorregresivo débilmente estacionario, donde $a_i \in \mathbb{R}$ son sus parámetros, y ε_t es un ruido blanco con media cero y varianza σ^2 , entonces se cumple que*

$$\text{var}(X_t) \geq \sigma^2$$

donde la igualdad se da si y sólo si $\forall i \ a_i = 0$.

Demostración. Multiplicando por X_t a ambos lados de

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

y tomando esperanzas tenemos que

$$\text{var}(X_t) = \gamma_0 = \sum_{i=1}^p a_i \gamma_i + \sigma^2$$

Por lo tanto, sólo debemos demostrar que $\sum_{i=1}^p a_i \gamma_i \geq 0$ y que la igualdad sólo se cumple cuando $\forall i \ a_i = 0$.

A continuación transformaremos el modelo a otro equivalente pero en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+2} \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \\ X_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, lo hemos transformado a una versión análoga a $AR(1)$ pero vectorial, la reescribiremos como:

$$\mathbb{X}_t = A\mathbb{X}_{t-1} + \Sigma_t$$

Multiplicando la igualdad anterior por la derecha por $\mathbb{X}_{t-1}^T A^T$ y tomando la esperanza

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}_t \mathbb{X}_{t-1}^T) A^T = \mathbb{E}(A \mathbb{X}_{t-1} \mathbb{X}_{t-1}^T A^T) + \mathbb{E}(\Sigma_t \mathbb{X}_{t-1}^T A^T)$$

tenemos que el lado izquierdo queda

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p-3} & \gamma_{p-4} & \cdots & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_{p-2} & \gamma_{p-3} & \cdots & \gamma_0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que el ruido blanco es independiente de los tiempos anteriores a él, tenemos que

$$\mathbb{E}(\Sigma_t \mathbb{X}_{t-1}^T A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el lado derecho queda

$$\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+2} \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+2} \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix}^T \right]$$

Al fijarnos en la entrada 1, 1 de ambos lados tenemos que

$$\sum_{i=1}^p a_i \gamma_i = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} \right)^2 \right] \geq 0$$

ya que el lado derecho de esta última igualdad se trata de una varianza, la cual es cero si y sólo si es una variable aleatoria constante, y la única manera que ocurra esto es si y sólo si $\forall i \ a_i = 0$. \square

Aunque este resultado nos será de utilidad un poco mas adelante, es de interés en si mismo ya que se concluye que para los modelos autorregresivos, cualquier influencia que tengamos del pasado es causante de un aumento de la varianza.

Recordando la matriz de estabilidad

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1-\alpha_3 & 1-\alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2}-\alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_{p-2} \\ \gamma_{p-1} \\ \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escrita como

$$B\Gamma = \Sigma$$

podemos calcular

$$\Gamma = B^{-1}\Sigma = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B) \Sigma$$

dado que la única componente de Σ distinta de 0 es la primera, podemos calcular γ_0 si hallamos $\text{adj}(B)_{1,1}$. No es muy complicado ver que

$$\text{adj}(B)_{1,1} = \det(T - H)$$

entonces

$$\gamma_0 = \frac{\det(T - H)}{\det(B)} \sigma^2$$

por el Teorema 3.2.1 tenemos que $\gamma_0 \geq \sigma^2$, por lo tanto,

$$\det(T - H) \geq \det(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) \det(T + H)$$

Si asumimos que se ha hecho el algoritmo de los hiperplanos previamente, entonces

$$\begin{aligned} \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) &> 0 \\ \left(1 - \sum_{i=1}^p (-1)^i \alpha_i\right) &> 0 \end{aligned}$$

Así que

$$\det(T + H) > 0 \Rightarrow \det(T - H) > 0$$

Como

$$\det(\mathcal{R}_{n-2}) = \det(T + H) \det(T - H)$$

hemos demostrado que

$$\det(T + H) > 0 \Rightarrow \det(\mathcal{R}_{n-2}) > 0$$

Para demostrar la implicación recíproca, tenemos que

$$\det(\mathcal{R}_{n-2}) > 0 \Rightarrow (\det(T + H) > 0 \wedge \det(T - H) > 0) \vee (\det(T + H) < 0 \wedge \det(T - H) < 0)$$

Si asumimos que $(\det(T + H) > 0 \wedge \det(T - H) > 0)$ es cierto entonces ya habríamos demostrado lo que queremos, así que asumiremos que la otra proposición es cierta y encontremos una contradicción, es decir,

$$\det(\mathcal{R}_{n-2}) > 0 \Rightarrow \det(T - H) < 0$$

que es equivalente a

$$\det(T - H) \geq 0 \Rightarrow \det(\mathcal{R}_{n-2}) \leq 0$$

como ya demostramos que

$$\det(T + H) > 0 \Rightarrow \det(T - H) > 0$$

esto implica que

$$\det(T + H) > 0 \Rightarrow \det(\mathcal{R}_{n-2}) \leq 0$$

y tenemos una contradicción con lo anteriormente demostrado.

Concluyendo, hemos demostrado que después de realizar el algoritmo de los hiperplanos se cumple

$$\det(T_k + H_k) > 0 \iff \det(\mathcal{R}_k) > 0$$

para todo k que en otras palabras es el siguiente resultado

Proposición 3.2.2. *Luego de verificar las desigualdades de los hiperplanos, se puede verificar la estabilidad compleja de un polinomio directamente con la matriz Toeplitz + Hankel $T_k + H_k$ o por medio de la matriz Toeplitz por bloques \mathcal{R}_k .*

Habiendo demostrado que es equivalente calcular $\det(T_k + H_k)$ o $\det(\mathcal{R}_k)$ para solucionar el problema de estabilidad de polinomios, sólo nos queda calcular este último de manera eficiente. Revisando la literatura vemos que hay un resultado en [33] donde hacen un desarrollo que culmina en un algoritmo super rápido (Tiempo de ejecución menor a $O(n^2)$) para solucionar sistemas Toeplitz por bloques, pero se han encontrado varios errores en su desarrollo, así que optaremos por la técnica de desplazamientos que ha sido estudiada en un contexto más general (otras matrices) y no sólo de Toeplitz por bloques.

La técnica de desplazamiento se caracteriza por sacar provecho de la estructura de las matrices involucradas y expresar su información relevante por medio de generadores que tienen un rango mucho menor (por lo general, rango constante) que las matrices originales, haremos énfasis en el cálculo del determinante para la matriz \mathcal{R}_k , pero este acercamiento también se puede aplicar a otros tipos de matrices estructuradas.

3.2.2. Técnica de desplazamientos

Sea $M = \mathcal{R}_k$ la matriz Toeplitz por bloques de la discusión anterior, donde cada uno de sus bloques son matrices 2×2 definidos por

$$R(i, j) = R_{i-j} = \begin{pmatrix} T(i, j) & T_H(i, j) \\ T_H(j, i) & T(j, i) \end{pmatrix}$$

Definimos los operadores

$$L_1(M) = \nabla_{A,B}(M) = AM - MB$$

y

$$L_2(M) = \Delta_{A,B}(M) = M - AMB$$

A L_1 se le conoce como un operador de tipo Sylvester y a L_2 de tipo Stein.

A grandes rasgos la técnica de desplazamiento consiste en tres etapas:

1. Compresión de la información por medio de la aplicación de un operador $L \in \{L_1, L_2\}$, que exprese la matriz M en términos de un par de generadores G y H , ambos con rango constante $O(1)$, esto reduce la representación de la matriz M . Es decir,

$$L(M) = GH^T$$

Para esto es necesario encontrar matrices A y B que logren el objetivo de disminuir el rango pero tal que sus entradas sean independientes de las entradas de M , pero que por lo general dependen del tipo de matriz estructurada que sea M (Cauchy, Toeplitz, Hankel, Vandermonde, etc).

2. Operaciones de las matrices sólo con los generadores que al tener menor cantidad de entradas se reducen los tiempos de cómputo.
3. Decompresión de la información si es necesario, es decir, recuperar la información a partir de los generadores (en nuestro caso no utilizaremos esta etapa).

Veremos que con esta técnica podremos disminuir tiempo del cálculo del determinante a $O(n \log^2 n)$. Casi toda la parte de desplazamientos ha sido tomada de [15], [27] y [9].

Para empezar veamos cómo deben escogerse las matrices, A y B para reducir el rango de una matriz *Toeplitz* por bloques.

Compresión

Sea $M = \mathcal{R}_{n-2}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces tomando

$$A = B^T = \begin{pmatrix} 0_2 & & & & \\ I_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

y recordando que donde no hay entradas, significa que son cero, tenemos

$$L_2(\mathcal{R}_{n-2}) = \Delta_{A,B}(\mathcal{R}_{n-2}) = \mathcal{R}_{n-2} - A\mathcal{R}_{n-2}B$$

Lo que resulta en

$$L_2(\mathcal{R}_{n-2}) = \begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{-n+2} \\ R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n-2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz que tiene rango 4, se puede factorizar como

$$L_2(\mathcal{R}_{n-2}) = GH^T$$

donde las matrices generadoras G y H son

$$G = \begin{bmatrix} I_2 & R_1 R_0^{-1} & \cdots & R_{n-2} R_0^{-1} \\ 0_2 & R_1 R_0^{-1} & \cdots & R_{n-2} R_0^{-1} \end{bmatrix}^T$$

$$H = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & \cdots & R_{-n+2} \\ 0_2 & -R_{-1} & \cdots & -R_{-n+2} \end{bmatrix}^T$$

Ya teniendo el operador en término de sus generadores, se hará la fase de operación pero sólo teniendo en cuenta sus generadores y las operaciones entre ellos que reducen los tiempos computacionales.

Operación

Dividiendo la matriz \mathcal{R}_{n-2} en cuatro bloques, donde \mathcal{R}_{00} es una matriz no singular de dimensiones $k \times k$, se puede calcular el determinante por medio de divide y vencerás, para esto se usa eliminación Gaussiana por bloques, lo que da

$$\mathcal{R}_{n-2} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{00} & \mathcal{R}_{01} \\ \mathcal{R}_{10} & \mathcal{R}_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{R}_{10}\mathcal{R}_{00}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{00} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{R}_{00}^{-1}\mathcal{R}_{01} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Donde

$$S = \mathcal{R}_{11} - \mathcal{R}_{10}\mathcal{R}_{00}^{-1}\mathcal{R}_{01}$$

es llamado el complemento de Schur.

Calculando el determinante vemos que $\det(\mathcal{R}_{n-2}) = \det(\mathcal{R}_{00}) \det(S)$. Siguiendo recursivamente con las matrices \mathcal{R}_{00} y S , al cabo de $\lceil \log_2(n-2) \rceil$ pasos llegamos a una factorización LDU con matriz diagonal $D = \text{diag}(d_0, \dots, d_{n-3})$, y las matrices triangulares L y U con unos en la diagonal, por lo tanto

$$\det(\mathcal{R}_{n-2}) = \prod_{i=0}^{n-3} d_i$$

Cabe notar que no sólo se ha calculado el determinante de la matriz completa, también se pueden obtener los determinantes de sus menores centrales tomando los subconjuntos apropiados del conjunto $\{d_i\}$. Explícitamente,

$$D_k = \prod_{i=k-1}^{n-k-2} d_i$$

Realmente para calcular el determinante no haremos la factorización LDU sino que calcularemos los generadores de \mathcal{R}_{00} y de S , y repetiremos el proceso hasta llegar al generador de un número. Para el generador de \mathcal{R}_{00} no hay problema ya que se pueden tomar la mitad de las entradas de los generadores de \mathcal{R}_{n-2} .

Para los generadores del complemento de Schur, sea $\{G, H\}$ un generador para \mathcal{R}_{n-2} , se obtendrán generadores $\{G_2, H_2\}$ para S por medio del Algoritmo de Schur Generalizado de $k - \text{pasos}$ versión divide y vencerás del Capítulo 5, Sección 3 de [9], que utiliza una forma polinomial de los generadores para hacer uso de la transformada rápida de Fourier y así hacer las multiplicaciones entre generadores y vectores de manera mas rápida por medio de convolución, específicamente estas multiplicaciones se hacen en $O(n \log(n))$.

Este último punto es importante para lograr que el algoritmo pueda ejecutarse en un tiempo de $O(n \log^2(n))$. Ya que si el tiempo del algoritmo para encontrar el determinante es $T(n)$, y el tiempo de multiplicación de un generador por un vector es $W(n)$, y asumiendo que se hacen M multiplicaciones su definición recursiva da

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + MW\left(\frac{n}{2}\right)$$

La manera clásica de multiplicación de una matriz por un vector tiene tiempo $W(n) = O(n^2)$, pero al utilizar de nuevo divide y vencerás, una representación polinomial de estos (tomando en cuenta que son matrices estructuradas) y convolución, se puede reducir a $W(n) = O(n \log(n))$, por lo tanto:

Si $W(n) = n^2 \Rightarrow T(n) = O(n^2)$, pero si $W(n) = O(n \log(n)) \Rightarrow T(n) = O(n \log^2(n))$.

Conclusiones

En este capítulo hemos de visto que nuestro método de verificar la estabilidad de un polinomio de coeficientes reales por medio de los hiperplanos y menores centrales puede hacerse en el mismo tiempo asintótico que los algoritmos denominados súper rápidos, es decir, $O(n \log^2(n))$. Claro está que es un resultado más de índole teórico, ya que las constantes asociadas a los tiempos asintóticos son muy grandes, sin dejar de lado que los algoritmos involucrados son extraordinariamente complejos comparados a los que tienen tiempo asintótico de $O(n^2)$, por ejemplo, en dimensiones bajas se tendrían resultados mucho más eficientes con el algoritmo de Schur, o el criterio de estabilidad de Bistritz.

El aporte principal del capítulo es el Teorema 3.2.1 que habla sobre una propiedad de los modelos autorregresivos $AR(p)$ y dice que el que tiene menor varianza de todos es el ruido blanco, cualquier incidencia del pasado implica un aumento en la varianza. Este último resultado nos da el camino para la demostración de la Proposición 3.2.2, en el que vemos que es equivalente verificar estabilidad de polinomios con la matriz *Toeplitz + Hankel* que resulta del Teorema 2.7.6 o con la matriz Toeplitz por bloques que se muestra en [26]. Finalmente

se dan las referencias donde podemos encontrar cómo resolver el problema con un algoritmo de tiempo $O(n \log^2(n))$.

Capítulo 4

Prueba de estacionariedad de series de tiempo

El objetivo de este capítulo es construir una prueba de estacionariedad adecuada para series de tiempo provenientes de realizaciones de procesos $ARMA(p, q)$. En el desarrollo utilizamos conceptos elementales provenientes de varias ramas de la matemática, entre ellas, análisis (espacio vectorial, norma, seminorma, producto interno, cociente de espacios vectoriales, espacios de Banach, espacios de Hilbert), procesos estocásticos y estadística (varianza, covarianza, ergodicidad, estacionariedad, modelos $ARMA(p, q)$, series de tiempo, criterio de información Bayesiano), análisis de Fourier (transformada rápida de Fourier, amplitud espectral).

Con la idea de mantener el texto razonablemente corto, hemos decidido omitir estas definiciones y conceptos básicos, sin embargo se pueden consultar en las referencias siguientes, para análisis funcional [22], para procesos estocásticos y series de tiempo [18].

Adicionalmente y también como generalidad del capítulo, se asumirá que todos los procesos estocásticos tienen varianza finita.

4.1. Motivación

En esta sección mostraremos una relación que existe entre la covarianza y el producto interno. Esta relación nos permitirá hacer una conexión con espacios de Hilbert mas adelante.

Como sabemos, la covarianza entre dos variables aleatorias X y Y se define como:

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

y la varianza de una variable aleatoria se define como

$$V(X) = cov(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Podemos ver su similitud con el producto interno y la norma en un espacio vectorial ya que comparten algunas de sus propiedades mas representativas:

Covarianza o Varianza	Producto Interno o Norma
$V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$	$\ \alpha X\ ^2 = \alpha^2 \ X\ ^2$
$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2cov(X_1, X_2) + V(X_2)$	$\ X_1 + X_2\ ^2 = \ X_1\ ^2 + 2\langle X_1, X_2 \rangle + \ X_2\ ^2$
$ cov(X_1, X_2) \leq \sqrt{V(X_1)V(X_2)}$	$ \langle X_1, X_2 \rangle \leq \ X_1\ \ X_2\ $

Un producto interno cumple tres propiedades:

- Ser simétrico

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

- Ser lineal

$$\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

- Ser definido positivo

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Sin embargo, la covarianza no cumple la última propiedad y en consecuencia no es un producto interno. En efecto, si $X = \alpha \neq 0$ es una variable aleatoria constante, se cumple que $var(X) = 0$ y $X \neq 0$.

Cuando una norma no cumple ser definida positiva se llama una *seminorma*. Los espacios dotados de una seminorma se pueden convertir en espacios normados haciendo el cociente del espacio V con el subespacio W de todos los elementos que tienen norma cero. En este contexto llamaremos *seminorma varianza* a la varianza de un proceso estocástico.

Para el caso de la seminorma varianza, después de hacer el cociente resulta el espacio tal que dos variables son iguales si su diferencia es igual a una constante casi en toda parte.

Suponiendo que hemos construido el espacio vectorial cociente, un proceso con varianza constante serían los procesos que se encuentran en la superficie de una bola, es decir,

$$\|X_t\|^2 = var(X_t) = R^2$$

para una constante $R \in \mathbb{R}^+$.

Adicionalmente, si asumimos sin pérdida de generalidad que la media del proceso es igual a cero, se tiene que su producto interno cumple

$$\langle X_{t_1}, X_{t_2} \rangle = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}] = f(d)$$

donde $f(d)$ es una función que sólo depende de $d = |t_1 - t_2|$. Por lo tanto, si la autocovarianza es la de un proceso estacionario, entonces a medida que transcurre el tiempo, X_t se mueve en la esfera de radio R a velocidad constante. Esto es porque que dada la misma distancia temporal, implica el mismo ángulo entre los vectores.

Por lo tanto, el lugar geométrico, en el que está un proceso estacionario, es una curva sobre una esfera en el espacio cociente de las funciones cuadrado integrables tal que el promedio de estas funciones es cero, y esta curva se recorre a velocidad constante.

En el trabajo definiremos una norma distinta g^T , pero la intuición de que la variable aleatoria debe estar cerca de la esfera y además su esperanza sea una constante, nos servirá de guía para la definición de esta nueva norma.

4.2. Ergodicidad

La norma construida a partir de la covarianza no nos sirve, ya que nuestro objetivo es encontrar una norma tal que el elemento cero sean todos los procesos estacionarios, no sólo los constantes. Pero antes de seguir debemos introducir un concepto que está muy relacionado con la estacionariedad, la ergodicidad.

Un proceso estacionario debil se llama *ergódico* si sus propiedades estadísticas se pueden obtener de una sólo realización aleatoria lo suficientemente larga. Por ejemplo, si nos interesa ergodicidad en la media y ergodicidad en la autocovarianza y denotamos por $X[n]$ a una realización específica del proceso $\{X_t\}$, μ_X a la media constante y $r_X(m)$ su función de autocovarianza, entonces debemos comprobar que se cumple lo siguiente cuando $N \rightarrow \infty$.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X[n] \rightarrow \mu_X$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X[n+m] - \mu_X)(X[n] - \mu_X) \rightarrow r_X(m)$$

Es decir, que convergen a la media y a la función de autocovarianza de las variables aleatorias.

Para que un proceso sea ergódico es necesario que sea débilmente estacionario, pero no es suficiente. Un contraejemplo de un proceso que es débilmente estacionario pero no ergódico en la media es el siguiente.

Suponga que la media $\mu^{(i)}$ de la i -ésima realización $\{Y_t^{(i)}\}_{t=0}^{\infty}$ del experimento está generada por una distribución $N(0, \lambda^2)$, es decir,

$$Y_t^{(i)} = \mu^{(i)} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t es un proceso de ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza σ^2 que es independiente de $\mu^{(i)}$. Note que

$$\mu_{Y^{(i)}} = \mathbb{E}[\mu^{(i)}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$$

pero

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^{(i)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mu^{(i)} + \varepsilon_t) = \mu^{(i)} + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t$$

Que converge a $\mu^{(i)}$ en lugar de $\mu_t = 0$.

La dificultad de medir no-estacionariedad radica en que si un proceso no es estacionario entonces no es ergódico. Por lo que sus propiedades (como sus dos primeros momentos) no las podemos obtener de una simple realización.

Un ejemplo de un proceso no estacionario es la caminata aleatoria definida por

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

con $t = 0, 1, 2, \dots$ y $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, 1)$

La media y la varianza de este proceso son

$$\mu_t = 0$$

y

$$\sigma_t = \sqrt{t}$$

Como la varianza depende del tiempo, el proceso no puede ser estacionario y por consiguiente no ergódico. Esto podemos verlo en el siguiente experimento computacional de la Figura 4.2.1.

La línea negra representa el valor teórico de $\sigma_t = \sqrt{t}$, y las líneas de color verde, rojo y azul representan tres realizaciones $i = 1, 2, 3$ de la siguiente función:

$$f^{(i)}(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{n=0}^t \left(y_n^{(i)} - \mu_t^{(i)} \right)^2}$$

donde

$$\mu_t^{(i)} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^t y_n^{(i)}$$

la función $f^{(i)}(t)$ no es otra cosa que el cálculo de la desviación estándar acumulada hasta el tiempo t .

En la Figura 4.2.2 se hizo un promedio de $N = 1000$ realizaciones de la función $f^{(i)}(t)$, es decir,

$$F(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(t)$$

podemos ver que la convergencia es razonable y se obtiene una curva roja lo suficientemente suave, donde podemos ver explícitamente que no se trata de un proceso ergódico ya que no son iguales las funciones.

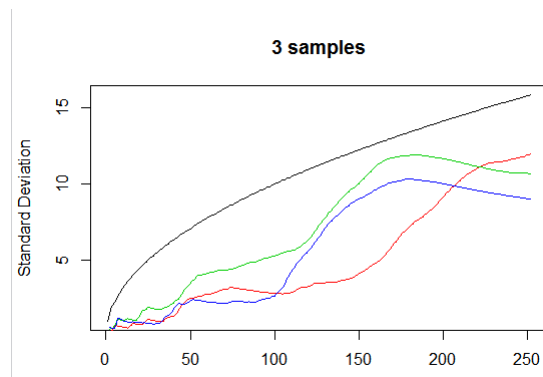


Figura 4.2.1: La línea negra representa el valor teórico de $\sigma_t = \sqrt{t}$. Las de color son tres realizaciones distintas de $f^{(i)}(t)$

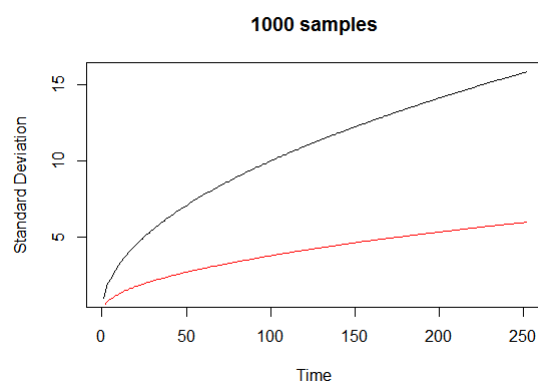


Figura 4.2.2: En negro el valor teórico. En rojo el promedio de 1000 realizaciones de $f^{(i)}(t)$

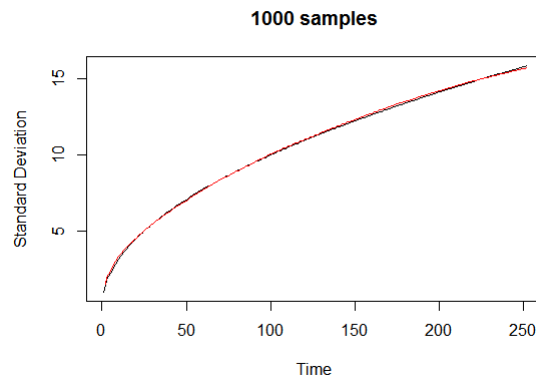


Figura 4.2.3: Promedio de $f^{(i)}(t)$ multiplicado por $C = 2,66$

Algo interesante sucede si se multiplica la función representada por la línea roja por una constante adecuada calculada por medio de mínimos cuadrados. Para fines prácticos se toma en valor $C = 2,66$, y se obtiene exactamente la función $\sigma_t = \sqrt{t}$ (Figura 4.2.3). Esto tiene algunas implicaciones, ya que a pesar de no poderse extraer información estadística directamente de una única realización, si lo podemos hacer de un conjunto suficiente grande de realizaciones del proceso.

Conjeturamos el siguiente resultado para el caso del proceso

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

con $t = 0, 1, 2, \dots$ y $\{\varepsilon_t\} \sim N(0, 1)$

$$\sigma_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{n=0}^t \left(y_n^{(i)} - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^t y_n^{(i)} \right)^2}$$

con $C \simeq 2,66$.

Desconocemos si tienen nombre esta clase de procesos estocásticos para los cuales se cumple esta propiedad límite.

4.3. Definición de norma que mide estacionariedad

El objetivo de esta sección es definir una función en el espacio de las series temporales de longitud fija n (vistas como vectores en \mathbb{R}^n). Esta función en una primera aproximación deberá cumplir las propiedades de una norma y además, el elemento 0 corresponderá al conjunto de procesos estacionarios en media y varianza.

En la sección 4.1 vimos que comprobar estacionariedad equivale a determinar que las variables aleatorias estén sobre el lugar geométrico definido por una curva sobre una esfera,

y que esta curva sea recorrida a velocidad constante. La dificultad de verificar la pertenencia a este espacio es que no contamos con las variables aleatorias en cada instante, en vez de eso tenemos una realización y no podemos confiar en ella por la falta de ergodicidad.

Para ello, definiremos funciones que miden parcialmente la cercanía de la realización al lugar geométrico del que hemos hablado, y asumiendo que se cumple la propiedad

$$\sigma_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{n=0}^t \left(y_n^{(i)} - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^t y_n^{(i)} \right)^2}$$

de la sección 4.2, tenemos que salvo una constante el valor calculado de la varianza de la realización es cercano al de la varianza del proceso estocástico.

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico que tiene como realización $\{x_t\}_{t=0}^n$ y sea $\tau \in \{0, 1, \dots, n\}$. A partir de esta realización se definen las siguientes series de tiempo.

$$e_k^\tau(x) \equiv \frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i$$

$$\sigma_k^\tau(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2}$$

donde $k \in \{0, 1, \dots, n - \tau\}$, y a partir de ellas las funciones

$$g_1^\tau(x) = \sqrt{\text{var}_k(e_k^\tau(x))} = \sqrt{\text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right)}$$

$$g_2^\tau(x) = \sqrt{\text{var}_k(\sigma_k^\tau(x))} = \sqrt{\text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} \right)}$$

En realidad, las series $e_k^\tau(x)$ y $\sigma_k^\tau(x)$ son promedios móviles y desviaciones estándar móviles respectivamente. La función $g_1^\tau(x)$ es la desviación estándar de la función $e_k^\tau(x)$ y se encarga de medir las desviaciones en la media. Por otra parte, la función $g_2^\tau(x)$ es la desviación estándar de la función $\sigma_k^\tau(x)$ y mide cercanía al lugar geométrico al que pertenecen los procesos estacionarios (la esfera de la que se habló en la Sección 4.1).

Proposición 4.3.1. *Las funciones $g_1^\tau(x)$ y $g_2^\tau(x)$ son seminormas en el espacio vectorial \mathbb{R}^n , sobre el campo \mathbb{R}*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces se cumple que las funciones $g_1^\tau(x)$ y $g_2^\tau(x)$ son absolutamente homogéneas para todo τ . Una función f es absolutamente homogénea si cumple $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$, para todo α y x .

$$\begin{aligned}
g_1^\tau(\alpha x) &= \sqrt{\text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} \alpha x_i \right)} \\
&= \sqrt{\text{var}_k \left(\frac{\alpha}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right)} \\
&= \sqrt{\alpha^2 \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right)} \\
&= |\alpha| \sqrt{\text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right)} \\
&= |\alpha| g_1^\tau(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2^\tau(\alpha x) &= \sqrt{\text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (\alpha x_i - e_k^\tau(\alpha x))^2} \right)} \\
&= \sqrt{\text{var}_k \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} \right)} \\
&= \sqrt{\text{var}_k |\alpha| \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} \right)} \\
&= \sqrt{\alpha^2 \text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} \right)} \\
&= |\alpha| g_2^\tau(x)
\end{aligned}$$

Las funciones $g_1^\tau(x)$ y $g_2^\tau(x)$ cumplen la desigualdad del triángulo para todo τ :

$$\begin{aligned}
[g_1^\tau(x+y)]^2 &= \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i + y_i) \right) \\
&= \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right) + \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} y_i \right) + 2\text{cov} \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i, \frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} y_i \right) \\
&\leq \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right) + \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} y_i \right) + \\
&\quad 2\sqrt{\text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right) \text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} y_i \right)} \\
&= \left(\sqrt{\text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i \right)} + \sqrt{\text{var}_k \left(\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} y_i \right)} \right)^2 \\
&= (g_1^\tau(x) + g_1^\tau(y))^2
\end{aligned}$$

$$g_1^\tau(x+y) \leq g_1^\tau(x) + g_1^\tau(y)$$

Donde en la tercera línea se usó la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$|\text{cov}(X, Y)|^2 \leq \text{var}(X)\text{var}(Y)$$

Desigualdad del Triángulo para $g_2^\tau(x)$:

$$\begin{aligned}
[g_2^\tau(x+y)]^2 &= \text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i + y_i - e_k^\tau(x+y))^2} \right) \\
&\leq \text{var}_k \left(\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} + \sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (y_i - e_k^\tau(y))^2} \right)^2} \right) \\
&= \text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} + \sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (y_i - e_k^\tau(y))^2} \right) \\
&\leq \left(\sqrt{\text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2} \right)} + \sqrt{\text{var}_k \left(\sqrt{\frac{1}{\tau+1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (y_i - e_k^\tau(y))^2} \right)} \right)^2 \\
&= (g_2^\tau(x) + g_2^\tau(y))^2 \\
g_2^\tau(x+y) &\leq g_2^\tau(x) + g_2^\tau(y)
\end{aligned}$$

Donde en la segunda y cuarta línea se usó la desigualdad del triángulo para variables aleatorias

$$\text{var}(X+Y) \leq \left(\sqrt{\text{var}(X)} + \sqrt{\text{var}(Y)} \right)^2$$

□

A partir de estas dos seminormas podemos construir una nueva haciendo una combinación lineal positiva de estas, es decir,

$$g^\tau(x) = C_1 g_1^\tau(x) + C_2 g_2^\tau(x)$$

es seminorma con $C_1, C_2 > 0$.

Podemos ver que $g^\tau(x) = 0$ cuando el proceso tiene esperanza y varianza constante. A continuación construiremos un espacio vectorial donde los procesos estacionarios en media y en varianza son el elemento 0.

Sea $W = \{x \in \mathbb{R}^n : g^\tau(x) = 0\}$ y $V = \mathbb{R}^n$. Como W es un subespacio cerrado de V (por ser el kernel de un operador continuo), podemos construir su espacio cociente $E = V/W$, este espacio resulta ser un espacio de Banach, pero no de Hilbert (se puede demostrar de manera rutinaria que no cumple la desigualdad del paralelogramo). En el espacio E se cumple que dos elementos $u, v \in \mathbb{R}^n$ pertenecen a la misma clase de equivalencia si $g^\tau(u-v) = 0$. Además, por el Primer Teorema de Isomorfismos de espacios vectoriales se tiene que $E \approx \text{Im}(g^\tau)$.

El espacio E resulta ser un espacio vectorial normado, con norma $g^\tau(x)$ y elemento 0, las series de tiempo estacionarias.

Los procesos debilmente estacionarios deben tener una función de autocovarianza dependiente sólo del lag m . Esto se podría hacer incluyendo funciones $g_3^{\tau,m}(x)$, para cada lag m , definidas de la siguiente manera:

$$g_3^{\tau, m}(x) = \sqrt{\text{var}_k \left(\sqrt{\left| \frac{1}{\tau + 1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x)) (x_{i+m} - e_k^\tau(x)) \right|} \right)}$$

Pero dado que el cálculo de esta última función depende de m , se necesitaría calcular una función por cada m , y esto haría muy costoso computacionalmente su cálculo. Por otro lado, para los modelos autoregresivos de media móvil (ARMA), si se tiene media y varianza constante, su función de autocovarianza no depende del tiempo. En efecto, en las ecuaciones de Yule-Walker reorganizadas

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ -\alpha_1 & 1 - \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 - \alpha_3 & 1 - \alpha_4 & -\alpha_5 & \cdots & -\alpha_p & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} - \alpha_p & -\alpha_{p-3} & -\alpha_{p-4} & \cdots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & -\alpha_{p-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_{p-2} \\ \gamma_{p-1} \\ \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vemos que γ_0 se puede hallar de manera única si y sólo si el resto de γ_i se pueden hallar también únicamente, en particular ninguna depende del tiempo y esto es porque sólo interesa que la matriz del lado izquierdo sea invertible.

Ya que los modelos ARMA son una familia importante, grande y muy utilizada de modelos, sólo verificaremos que la media y la varianza sean constantes. Evidentemente esto no coincide con la definición de es un proceso debilmente estacionario para modelos de series de tiempo en general, pero para el caso de los modelos ARMA si coincide.

4.4. Estandarización de la norma

La función $g^\tau(x)$ que desarrollamos sirve como norma para todo $\tau \in \{0, 1, \dots, n\}$, tal que los procesos estacionarios en media y varianza cumplen $g^\tau(x) = 0$. Cabe notar que el valor de ésta depende del τ en particular que elijamos, el problema de la elección lo abordaremos en la Sección 4.5. Otro problema está en la dependencia con el número de datos n , es decir, el mismo proceso podría darnos dos niveles de no estacionariedad distintos si consideramos el mismo experimento pero con un muestreo de mayor frecuencia. Adicionalmente, si tenemos un proceso que tenga un nivel de no estacionariedad de $g^\tau(x) = k$, el proceso αx tendría un nivel de no estacionariedad de $g^\tau(\alpha x) = |\alpha|k$ por las propiedades de norma. Esto es un inconveniente, ya que la propiedad de no estacionariedad no debería depender de la escala que elijamos para el proceso (por ejemplo, un activo expresado en USD o en MXN). Más aún, la dependencia de estos valores puede ser distinta tanto para $g_1^\tau(x)$ como para $g_2^\tau(x)$ como lo veremos luego.

A partir de ahora, ajustaremos la medida de no estacionariedad de las funciones $g_1^\tau(x)$ y $g_2^\tau(x)$ al modelo $AR(1)$ con $\alpha = 1$, cuya realización denotaremos por x_0 , ya que se trata del

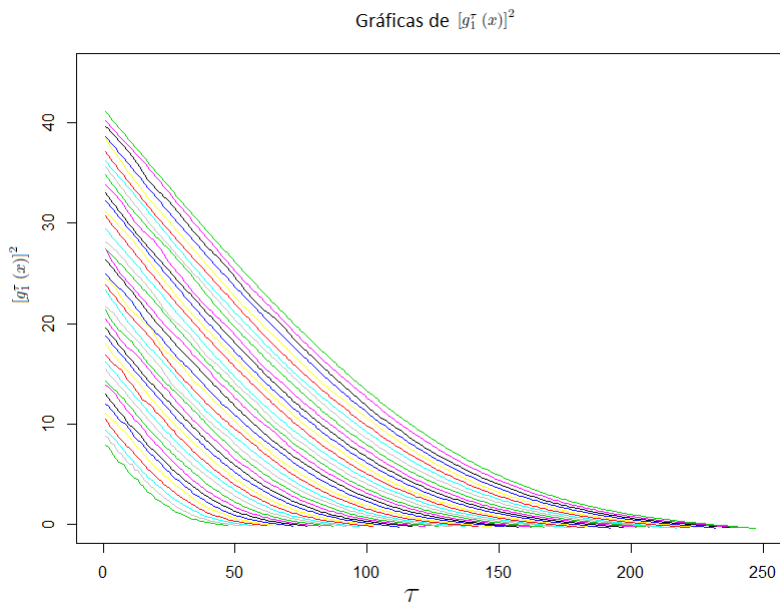


Figura 4.4.1: Valor de $[g_1^\tau(x_0)]^2$ en función de τ

ejemplo más sencillo que tiene raíz unitaria y por lo tanto, no estacionariedad. Además, para poder comparar nuestra prueba con las más utilizadas como la Augmented Dickey–Fuller (ADF) o Phillips–Perron (PP). Lo que se hará es hacer muchas realizaciones del modelo $AR(1)$ con $\alpha = 1$

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

y calcular la norma en cada caso, es decir, variando τ , n y la desviación estándar del ruido blanco del proceso $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$. Para luego estudiar su comportamiento en cada caso y así inducir patrones en la dependencia de estas variables.

Dependencia de τ , n y σ .

La Figura 4.4.1 muestra el valor de $[g_1^\tau(x_0)]^2$ en función de τ , cada gráfica representa un valor distinto de n . Denotaremos esta familia por $[g_1^{\tau,n}(x_0)]^2$ para hacer explícita la dependencia de n . Para suavizar cada gráfica se hicieron 1000 muestras y al resultado se le aplicó un *smooth spline*.

Como el objetivo es encontrar una función que sirva empíricamente para calcular estacionariedad (ya sabemos que un cálculo teórico es inviable por la falta de ergodicidad), aproximaremos la función dada por un polinomio de grado 3 (El criterio usado para determinar el grado fue el Criterio de Información Bayesiano (BIC)). Adicionalmente, sólo aproximaremos las gráficas utilizando $\tau \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2}\}$ ya que una ventana de más de la mitad de los datos no toma en cuenta muchos de los pequeños cambios de la serie. El resultado es el polinomio

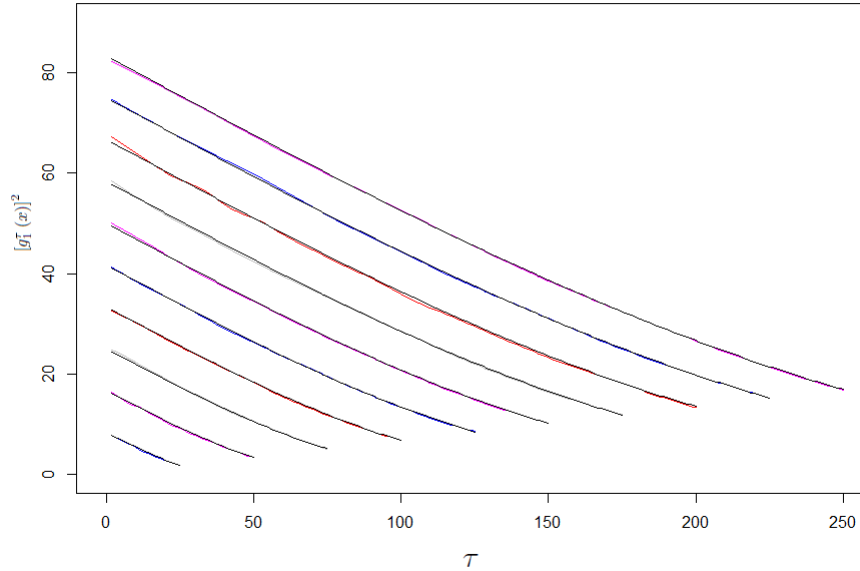


Figura 4.4.2: Aproximación de g_1^τ mediante polinomios

$$d_1(\tau, n) = A_1\tau^3 + B_1\tau^2 + C_1\tau + D_1$$

donde

$$A_1 = \frac{1}{3(n-4)^3} [128 \cdot (-0,068274 + 0,0042832 \cdot n)]$$

$$B_1 = \frac{1}{3(n-4)^3} [-32 \cdot (-2,42774 + 0,307857 \cdot n - 0,0019422 \cdot n^2)]$$

$$C_1 = \frac{1}{3(n-4)^3} [2 \cdot (-30,4386 - 27,5485 \cdot n + 8,26242 \cdot n^2 - 0,481916 \cdot n^3)]$$

$$D_1 = \frac{1}{3(n-4)^3} [-29,6801 + 46,2457 \cdot n + 7,4013 \cdot n^2 - 5,45337 \cdot n^3 + 0,498675 \cdot n^4]$$

Los funciones A_1, B_1, C_1, D_1 se calcularon por medio de mínimos cuadrados de manera simbólica (para conservar la dependencia de n). Considerando que la función debía pasar por los puntos que aproximarán las funciones en los valores $\{2, \frac{n+12}{8}, \frac{n+4}{8}, \frac{3n+4}{8}, \frac{n}{2}\}$. Estos puntos se escogieron por ser una partición regular desde 2 hasta $\frac{n}{2}$.

En la Figura 4.4.2 vemos que esta familia de polinomios aproximan muy bien las gráficas anteriores para $2 \leq \tau \leq \frac{n}{2}$

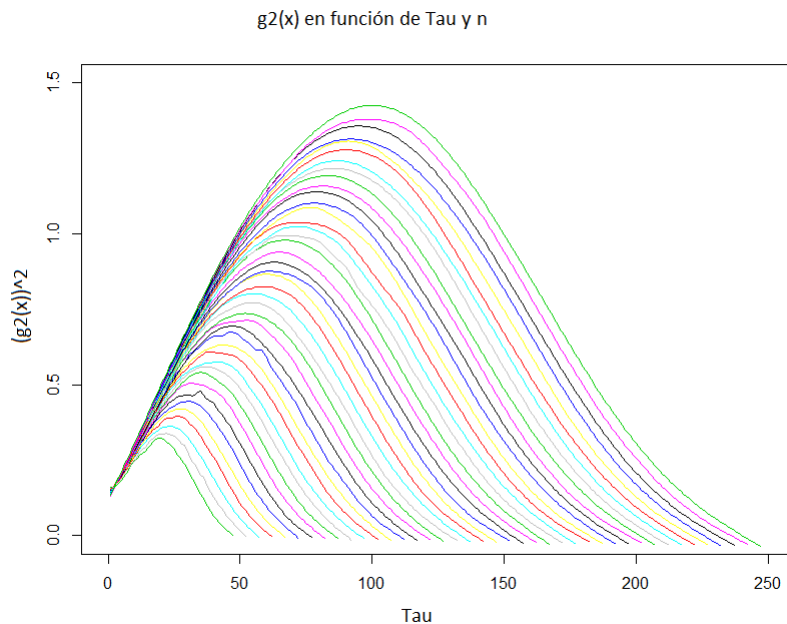


Figura 4.4.3: Valor de $[g_2^\tau(x_0)]^2$ en función de τ

Haciendo lo mismo para la función $[g_2^\tau(x)]^2$ tenemos que ésta varía con respecto a τ y n como se ve en la Figura 4.4.3:

Al igual que antes, sólo intentaremos aproximar este comportamiento hasta $\tau = \frac{n}{2}$. Esta vez, ajustaremos las gráficas por un polinomio de grado 4, este número al igual que antes, se obtuvo utilizando BIC y mínimos cuadrados para los valores de A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 . El polinomio es:

$$d_2(\tau, n) = A_2\tau^4 + B_2\tau^3 + C_2\tau^2 + D_2\tau + E_2$$

donde

$$A_2 = \frac{1}{3(n-4)^3} [512 \cdot (0,0557519 + 0,000093599 \cdot n)]$$

$$B_2 = \frac{1}{3(n-4)^3} [-128 \cdot (0,691172 + 0,272306 \cdot n + 0,000977755 \cdot n^2)]$$

$$C_2 = \frac{1}{3(n-4)^3} [8 \cdot (13,5703 + 9,52049 \cdot n + 2,17256 \cdot n^2 - 0,00317475 \cdot n^3)]$$

$$D_2 = \frac{1}{3(n-4)^3} [-2 \cdot (24,4002 + 35,1323 \cdot n + 10,1173 \cdot n^2 + 2,21537 \cdot n^3 - 0,0343887 \cdot n^4)]$$

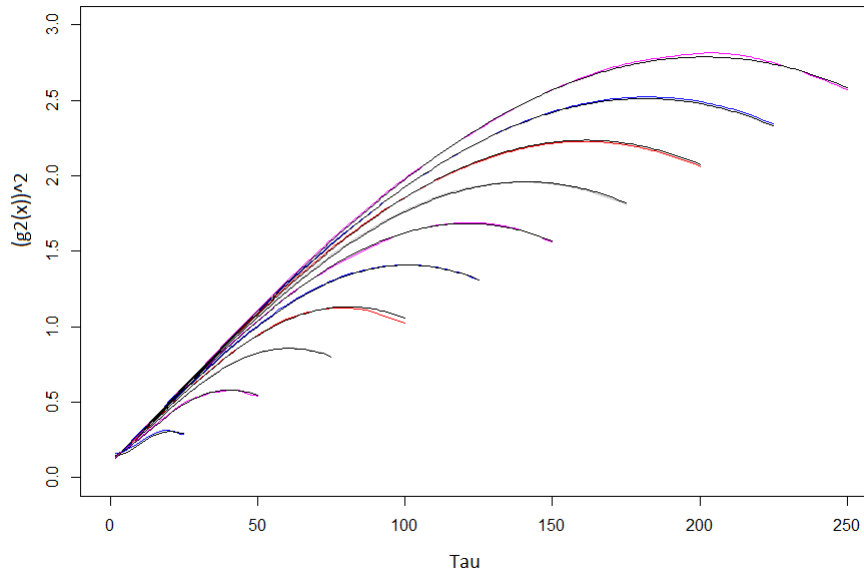


Figura 4.4.4: Aproximación de g_2^τ mediante polinomios

$$E_2 = \frac{1}{3(n-4)^3} [30,1376 - 1,8285 \cdot n + 15,3844 \cdot n^2 + 1,71734 \cdot n^3 + 0,316514 \cdot n^4 - 0,000120993 \cdot n^5]$$

De nuevo notamos en la Figura 4.4.4 que son bastante aceptables los resultados.

Adicionalmente a esta dependencia de τ y n , también existe una dependencia de la desviación estándar del ruido $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$, esta dependencia se encontró que era cuadrática en las dos funciones.

Al contrarrestar todos estos efectos, podemos reexpresar las funciones $g_1^\tau(x)$ y $g_2^\tau(x)$ para el modelo $AR(1)$ con $\alpha = 1$ como:

$$g_1^\tau(x) = \frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{\text{var}_k(e_k^\tau(x))}{d_1(\tau, n) \sigma^2}}$$

donde $d_1(\tau, n)$ es el polinomio que se definió anteriormente, la constante $K_1 \approx 0,8545908$ se escoge de tal manera que para el modelo x_0 de $AR(1)$ con $\alpha = 1$ cumpla que

$$\mathbb{E}[g_1^\tau(x_0)] = 1$$

donde la esperanza se toma sobre todas las realizaciones del modelo.

Para tener un mejor ajuste con el modelo y recuperar el ruido con el que se generó, se tomará

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(\Delta_i(x))}$$

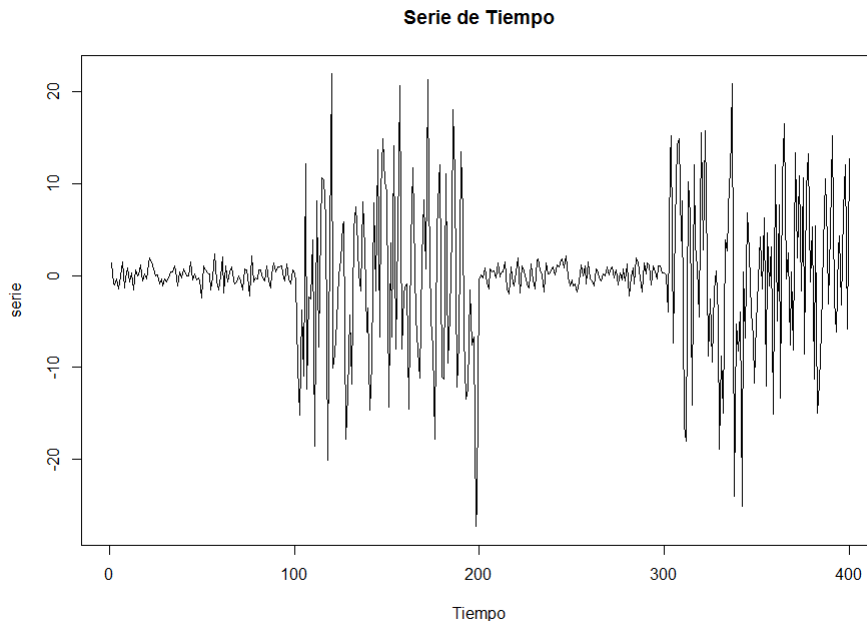


Figure 4.5.1: Ejemplo de serie de tiempo con varianza cambiante

donde $\Delta(x)$ es la serie de diferencias de la serie x .

$$\Delta_i(x) = x_i - x_{i-1}$$

De la misma manera

$$g_2^\tau(x) = \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{\text{var}_k(\sigma_k^\tau(x))}{d_2(\tau, n) \sigma^2}}$$

Donde $d_2(\tau, n)$ es el otro polinomio y $K_2 \approx 0.9204461$.

4.5. Elección de τ

Ahora que ya sabemos la dependencia de τ , sólo nos falta un criterio para escoger uno. Para esto, construimos las series $e_k^\tau(x)$ y $\sigma_k^\tau(x)$ para $\tau \in \{2, \dots, n-1\}$ y notamos que algunos τ capturan mejor la estructura interna de la serie, mientras que otros no. Por ejemplo, en la Figura 4.5.1 se graficó la serie tiempo definida por

$$x(t) = \begin{cases} X_1 \sim N(0, 1) & \text{si } t \in \{1, \dots, 100\} \cup \{201, \dots, 300\} \\ X_2 \sim N(0, 10) & \text{si } t \in \{101, \dots, 200\} \cup \{301, \dots, 400\} \end{cases}$$

Si construimos la serie $\sigma_k^\tau(x)$ con $\tau = 200$, no podemos extraer mucha información de la serie, ya que para esa ventana de tiempo, la varianza móvil es constante porque la dispersión

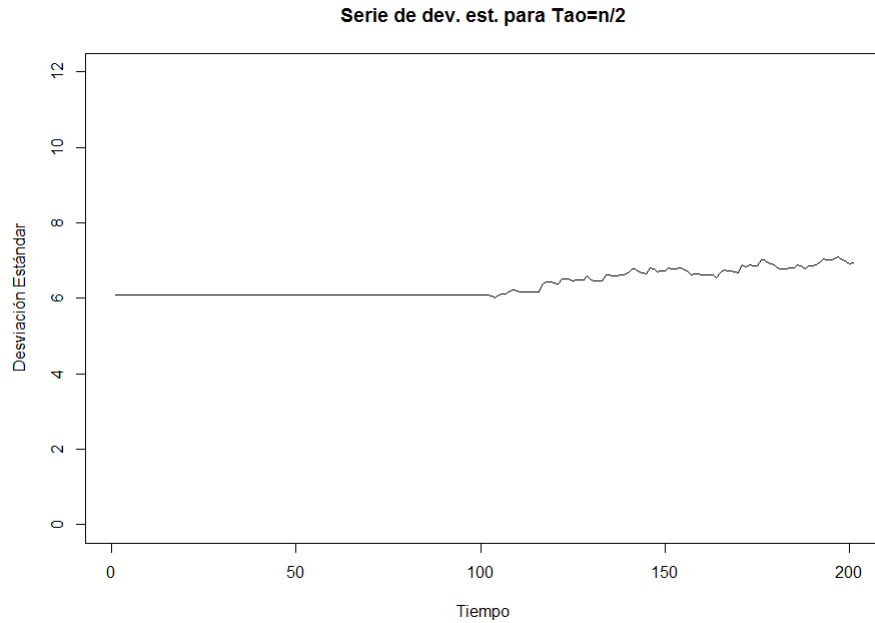


Figure 4.5.2: Desviación estándar móvil para una ventana de $\tau = 200$

que sale de la ventana es la misma que entra a medida que avanza el tiempo, como vemos en la Figura 4.5.2.

Por otro lado, si tomamos un $\tau = 32$ vemos que $\sigma_k^{32}(x)$ reproduce mejor las variaciones de varianza que suceden en la serie de tiempo, ver Figura 4.5.3.

Para la elección de un τ óptimo aplicaremos la Transformada Rápida de Fourier tanto en $e_k^\tau(x)$ como en $\sigma_k^\tau(x)$ para cada τ , obtendremos su densidad espectral $f_\tau(n)$ (donde n son los armónicos) que normalizaremos para que cumpla

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_\tau(i) = 1$$

Luego seleccionamos el máximo de esa densidad $A_\tau \equiv \max_{i \in \mathbb{N}} (f_\tau(i))$ para cada τ . Si calculamos esto para la serie del ejemplo anterior, nos da la gráfica de la Figura 4.5.4.

Podemos notar que la gráfica tiene varios mínimos y máximos locales, por ejemplo, uno de los mínimos es $\tau = 200$ y uno de los máximos es $\tau = 32$. Para el caso $\tau = 200$, la ventana de tiempo hace que $\sigma_k^\tau(x)$ no tenga ninguna frecuencia significativamente relevante, es decir, se ve la serie casi como un ruido blanco. Por otro lado, de todos los máximos locales, nos va a interesar el que mínimo $\tau \leq \frac{n}{2}$ tal que A_τ sea un máximo local y que $A_\tau > 0,5$. Queremos

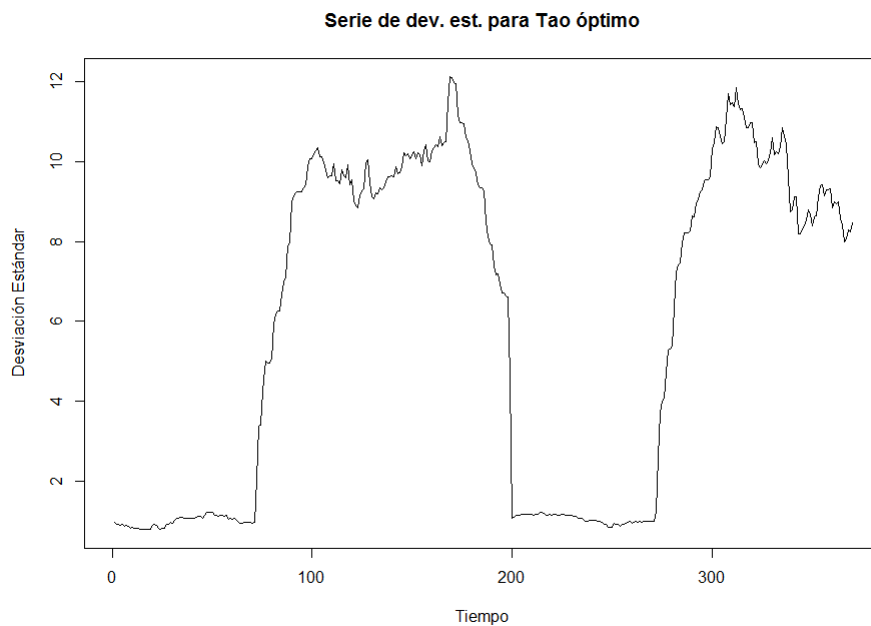


Figura 4.5.3: Desviación estándar móvil para una ventada de $\tau = 32$

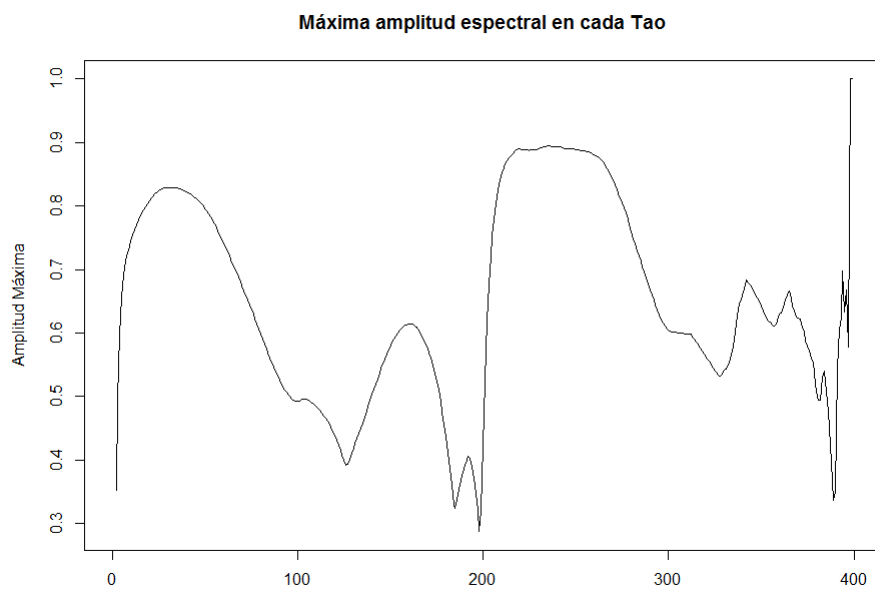


Figura 4.5.4: Máxima amplitud espectral en función de τ

que sea un máximo local porque es lo contrario de ver la serie como un ruido blanco, es decir, se puede ver alguna estructura. Queremos que sea el menor de los τ porque queremos una ventana lo suficientemente pequeña que pueda percibir los cambios. Y la condición $A_\tau > 0,5$ es un umbral arbitrario para garantizar que el armónico que se detectó es lo suficientemente relevante. Finalmente, si antes de $\frac{n}{2}$ no se ha encontrado un τ que cumpla con las condiciones, entonces hacemos $\tau = \frac{n}{2}$ para limitar la ventana de tiempo. Ya teniendo un valor de τ_1 y de τ_2 , calculamos $e_k^{\tau_1}(x)$ y $\sigma_k^{\tau_2}(x)$ y con estos valores $g_1^{\tau_1}(x)$ y $g_2^{\tau_2}(x)$.

Ahora recordemos que la función que definimos para medir estacionariedad estaba dada por

$$g(x) = C_1 g_1^{\tau_1}(x) + C_2 g_2^{\tau_2}(x)$$

con $C_1, C_2 \geq 0$.

Lo que haremos es hacer un balance entre las funciones $g_1^{\tau_1}(x)$ y $g_2^{\tau_2}(x)$ de tal manera que sean una combinación convexa, para esto utilizaremos un parámetro $R \in [0, 1]$ que tomará un valor cercano a 0 si queremos hacer más énfasis en estacionariedad en media y tendrá un valor cercano a 1 si lo queremos hacer en varianza.

$$g(x) = (1 - R) g_1^{\tau_1}(x) + R g_2^{\tau_2}(x)$$

La elección de R queda a criterio del usuario y sus necesidades, la función tendrá un parámetro para la modificación del valor. En este documento vamos a proponer un valor que estará dado por

$$R = \frac{g_2^{\tau_2}(x)}{g_1^{\tau_1}(x) + g_2^{\tau_2}(x)}$$

Este es un balance de las normas dependiendo cuál encontró más relevante. Reemplazando este valor en la función nos queda

$$g(x) = \frac{[g_1^{\tau_1}(x)]^2 + [g_2^{\tau_2}(x)]^2}{K [g_1^{\tau_1}(x) + g_2^{\tau_2}(x)]}$$

De nuevo el valor de $K \approx 1,051949$ es para asegurar que $\mathbb{E}[g(x_0)] = 1$, ya que ha sufrido un pequeño desvalance porque los valores de R que van cambiando en cada realización de x_0 . El algoritmo completo se puede ver en la Figura 4.5.5.

4.6. Comparación con otras pruebas de estacionariedad

En esta sesión compararemos nuestra prueba de estacionariedad con dos de las pruebas más utilizadas en finanzas y economía: Dickey-Fuller (DF) aumentada y Phillips-Perron (PP) (se usará la implementación en el paquete `tseries` del lenguaje de programación R).

Primero calcularemos su distribución basada en el valor que arroja $g(x)$ para la caminata aleatoria, para así poder dar un p -value asociado a esta. Luego, veremos cómo se comporta el error tipo II para ejemplos específicos de modelos como el $AR(1)$ y el $AR(2)$. Finalmente,

Algoritmo para verificar estacionariedad de series de tiempo

Entrada: Serie de tiempo: x

Salida: Valor de $g(x)$, o su p -value.

Algoritmo:

$n = longitud(x)$

para τ de $2, \dots, \frac{n}{2}$

se construyen

$$e_k^\tau(x) \equiv \frac{1}{\tau + 1} \sum_{i=k}^{k+\tau} x_i$$

$$\sigma_k^\tau(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{\tau + 1} \sum_{i=k}^{k+\tau} (x_i - e_k^\tau(x))^2}$$

se calculan cada una de sus máximas amplitudes de densidad espectral $A_e(\tau)$, $A_\sigma(\tau)$ para cada τ .

fin τ

se escoge el primer máximo local de $A_e(\tau)$ y de $A_\sigma(\tau)$ de tal manera que sea mayor que 0,5, si ninguno supera eso, se escoge $\tau = n/2$, se asocian los valores τ_1 y τ_2 respectivamente.

Finalmente se calcula

$$g(x) = \frac{[g_1^{\tau_1}(x)]^2 + [g_2^{\tau_2}(x)]^2}{K [g_1^{\tau_1}(x) + g_2^{\tau_2}(x)]}$$

con

$$g_1^{\tau_1}(x) = \frac{1}{K_1} \sqrt{\frac{var_k(e_k^{\tau_1}(x))}{d_1(\tau_1, n) \sigma^2}}$$

$$g_2^{\tau_2}(x) = \frac{1}{K_2} \sqrt{\frac{var_k(\sigma_k^{\tau_2}(x))}{d_2(\tau_2, n) \sigma^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{var(\Delta_i(x))}$$

Figura 4.5.5: Algoritmo para verificar estacionariedad de series de tiempo

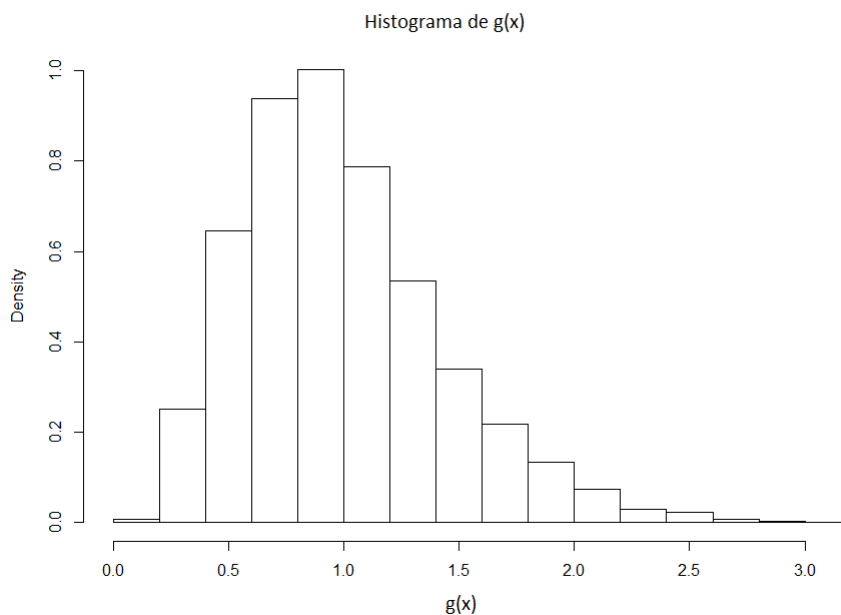


Figura 4.6.1: Histograma de $g(x)$

veremos un ejemplo real enmarcado alrededor del 10 – octubre – 2008, momento en el que ocurrió la crisis financiera de la burbuja inmobiliaria.

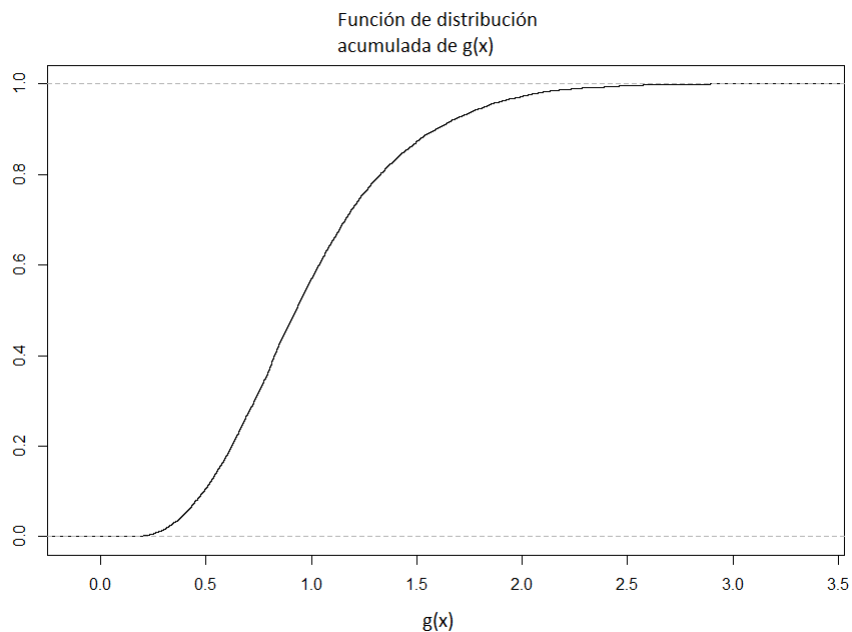
Al hacer algunas pruebas (10.000 simulaciones) de la función $g(x)$ con el modelo $AR(1)$ con $\alpha = 1$, es decir,

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

con esto construimos el histograma y la función de distribución acumulada de $g(x_0)$ que podemos ver en las Figuras 4.6.1 y 4.6.2 respectivamente.

con la que se puede obtener el p -value para cada valor de la función $g(x)$. Cuya hipótesis alternativa es que la serie tiene una raíz unitaria, es decir, que $\alpha = 1$.

Algunos valores típicos son:

Figura 4.6.2: Distribución acumulada de $g(x_0)$

$p - value$	$g(x)$
0.01	0.27
0.05	0.398
0.1	0.4891
0.2	0.62185
0.3	0.7303
0.4	0.8253
0.5	0.9278
0.6	1.0366
0.7	1.1613
0.8	1.32717
0.9	1.59257
0.95	1.8275
0.99	2.2576

Prueba con $AR(1)$

Ahora consideremos de nuevo el proceso $AR(1)$

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

y calculemos el $p - value$ para cada α de la forma $\alpha = 0,05n$ haciendo el promedio de 1000 muestras para cada uno. Sólo se mostrará el resultado para $\alpha \in [0,9, 1]$ ya que para valores menores todos los $p - values$ son muy pequeños.

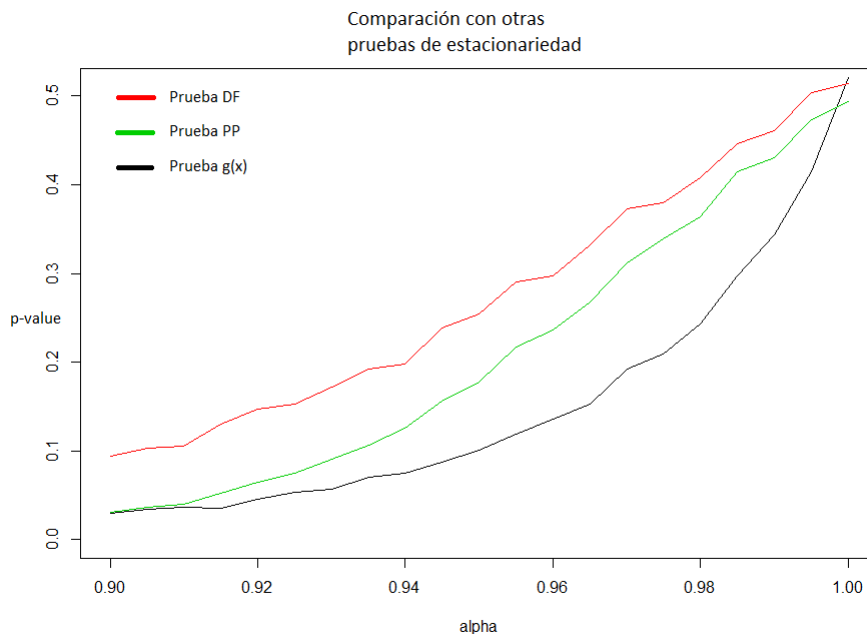


Figura 4.6.3: Error tipo II de las pruebas de estacionariedad en un modelo $AR(1)$; en rojo Dickey-Fuller, en verde Phillips–Perron y en negro $g(x)$

Si comparamos estos valores con los valores de $p - value$ de las pruebas de raíz unitaria de Dickey-Fuller (DF) aumentada y la de Phillips–Perron (PP) por medio de los errores de tipo II, tenemos el resultado que se muestra en la Figura 4.6.3

Como vemos, para esta clase de procesos, nuestra prueba funciona mejor que las otras para medir estacionariedad. Debemos tener en cuenta que el resultado teórico para estos procesos, es que el $p - value$ debería ser 0 para valores de $0 \leq \alpha < 1$, así que mientras más cercano a 0 mucho mejor.

Prueba con $AR(2)$

Adicionalmente, se hicieron pruebas con el proceso $AR(2)$

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

tomando en cuenta que para que sea estacionario este proceso debe cumplir que su polinomio característico sea estable, y por el Teorema 2.7.6, se deben cumplir las siguientes desigualdades

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$$

$$1 + \alpha_2 > 0$$

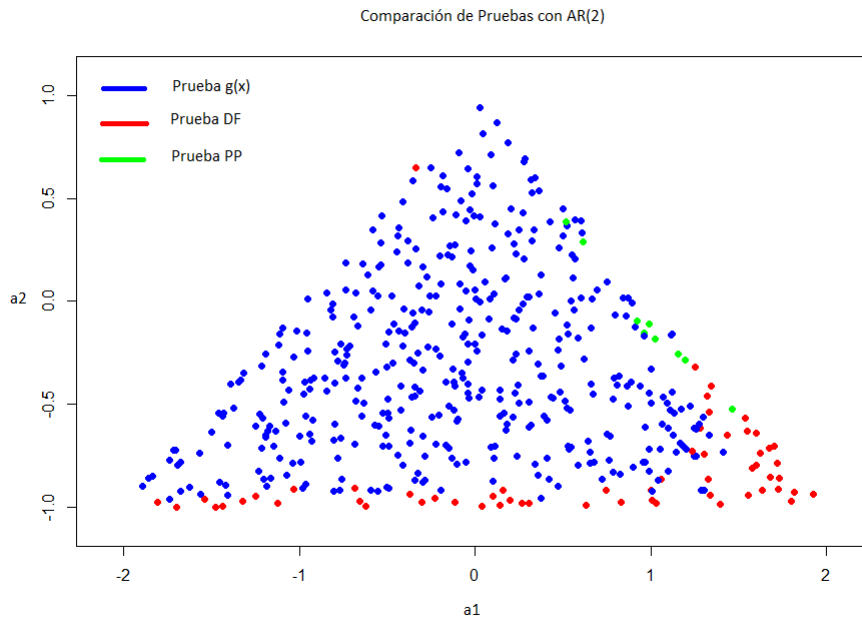


Figura 4.6.4: Error tipo II de las pruebas de estacionariedad en un modelo $AR(2)$; en rojo Dickey-Fuller, en verde Phillips–Perron y en azul $g(x)$

$$1 + \alpha_1 - \alpha_2 > 0$$

se generaron puntos que cumplieran las condiciones y en la Figura 4.6.4 se marco el punto del color de la prueba que obtuvo un menor p -value: azul para $g(x)$, rojo para DF y verde para PP.

Se puede ver que predomina la prueba de $g(x)$, específicamente la proporción de puntos es la siguiente

$$g(x) = 86,0\%$$

$$DF = 12,1\%$$

$$PP = 1,9\%$$

De esto se puede concluir que la medida de estacionariedad $g(x)$ es también mejor que las otras dos para medir estacionariedad de $AR(2)$.

Prueba con serie de tiempo real

Ahora para finalizar haremos una comparación de pruebas para el caso de la serie del $S\&P500$ del periodo del 10 de Octubre del 2006 al 10 de Octubre del 2010 al que denotaremos por L , se escogió este periodo ya que en la mitad sucedió la crisis inmobiliaria del 2008 (Figura 4.6.5). Queremos analizar cómo miden cada una de las pruebas la estacionariedad antes, durante y después del evento.

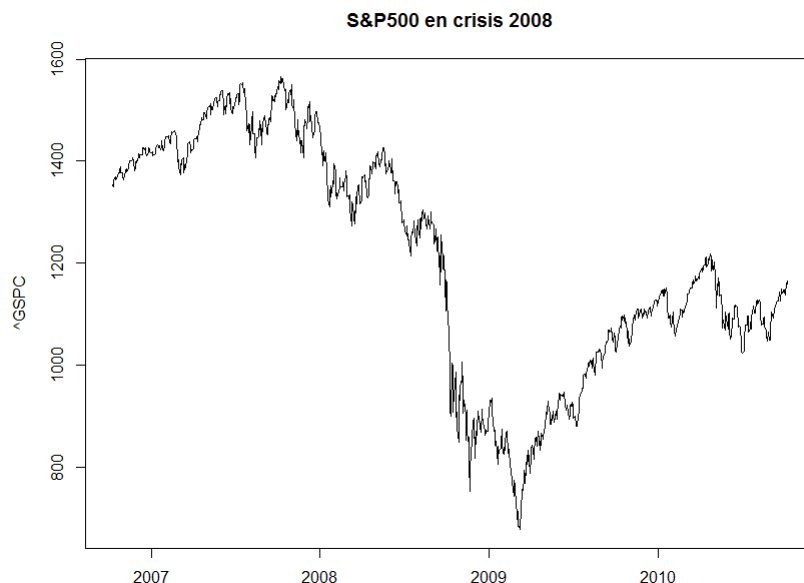


Figura 4.6.5: Serie de tiempo de $S\&P500$ durante la crisis del 2008

Se van a analizar los p – *values* para las tres pruebas de estacionariedad ($g(x)$, DF y PP), para cada $t \in L$, se tomará de la serie en el intervalo $[t - D, t]$ a la cual se le calculará la estacionariedad y se asignará al valor $p(t)$. Se asignará el valor $D = 238$ que se tomó de manera arbitraria, pero intentando que no coincidiera con algún periodo de estacionalidad como $D = 365, 183, 122, 91$ correspondientes a un año, un semestre, un cuatrimestre y un trimestre respectivamente. Se tomará un valor cercano a $2/3$ de año para que adicionalmente tenga suficientes datos para el análisis.

Estos son los resultados, la de Dickey-Fuller (DF) aumentada (Figura 4.6.6), la de Phillips-Perron (PP) (Figura 4.6.7) y la prueba $g(x)$ desarrollada en esta investigación (Figura 4.6.8)

Podemos ver que las pruebas DF y PP tienen un comportamiento similar ya que ambas están basadas en la identificación de una raíz unitaria. Una desventaja de medir estacionariedad con estos acercamientos de raíz unitaria es que son muy poco estables sus valores de p – *value*, con esto queremos decir, que si en una muestra sacamos pocos datos al principio y ponemos la misma cantidad al final de la serie, el nivel de estacionariedad puede cambiar drásticamente, algo que no se ve en nuestra prueba, que es más consistente y sus cambios son más graduales.

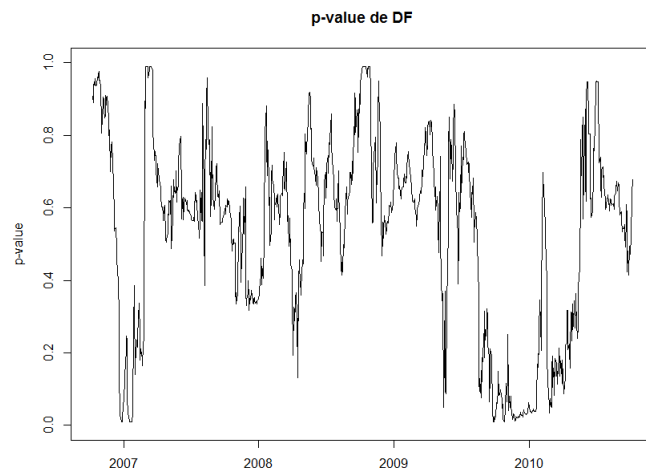


Figura 4.6.6: p – value de $S\&P500$ con DF

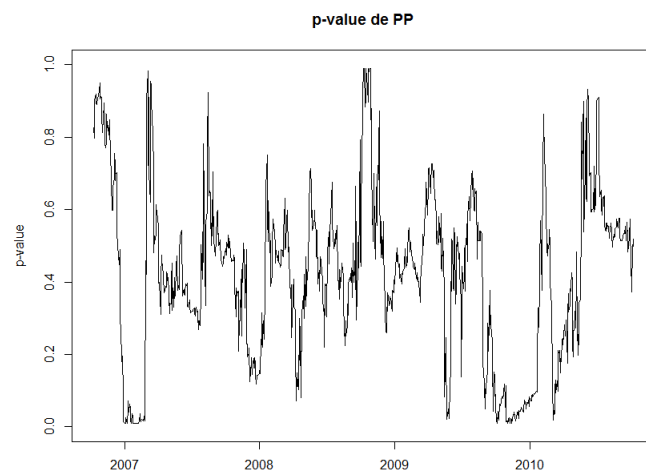


Figura 4.6.7: p – value de $S\&P500$ con PP

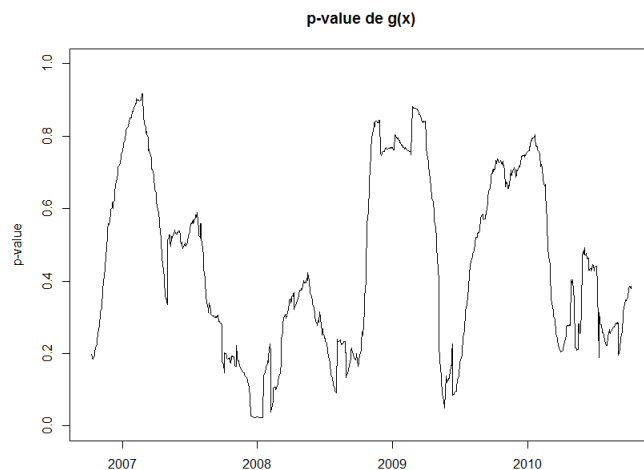


Figura 4.6.8: p – value de $S\&P500$ con $g(x)$

A cambio de eso, nuestra prueba captura el evento principal un poco después de haber ocurrido ya que necesita mas evidencia de variación y no una simple anomalía, de esta manera, el p – value supera el valor de 0,5 el 23 de Octubre de 2008, es decir, 13 días después (si hubieramos escogido un D menor hubiera sido detectado antes). Mientras que las otras pruebas superan el valor de 0,5 múltiples veces antes del evento principal.

También se puede notar que hay momentos en los que $g(x)$ da un nivel de no estacionariedad muy alto y las otras pruebas, dan uno muy bajo. Por ejemplo, el 26 de Febrero del 2007, el p – value de $g(x)$ es de 0,9173, mientras que el de DF es de 0,2342 y el de PP es de 0,0162. Esta discrepancia tan grande se puede explicar porque tanto DF como PP anulan la tendencia lineal de la serie y al restarle la tendencia la serie queda estacionaria, visualmente la serie se comporta antes de esa fecha como indica la Figura 4.6.9.

Si se quisiera lograr el mismo comportamiento sólo deberíamos restarle la tendencia lineal, pero hemos decidido mantenernos fieles a nuestra definición de estacionariedad.

Ahora realizaremos el mismo ejercicio, pero esta vez lo haremos con la serie de tiempo diferenciada que mostramos en la Figura 4.6.10.

Los resultados de las pruebas de estacionariedad se muestran en las Figuras 4.6.11, 4.6.12 y 4.6.13

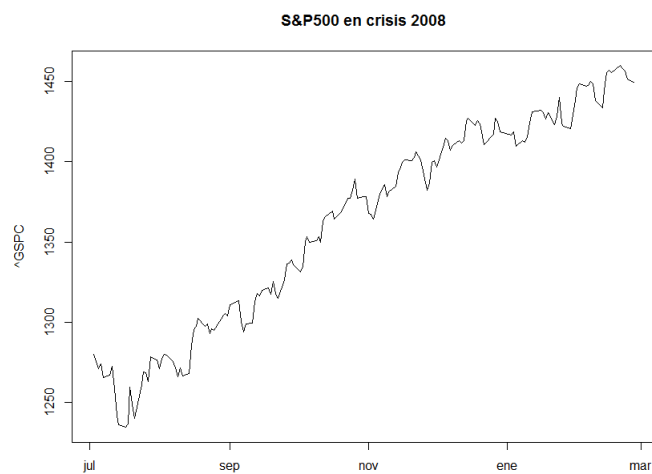


Figura 4.6.9: Caso en el que $g(x)$ muestra alta no estacionariedad y las otras pruebas muestran baja no estacionariedad

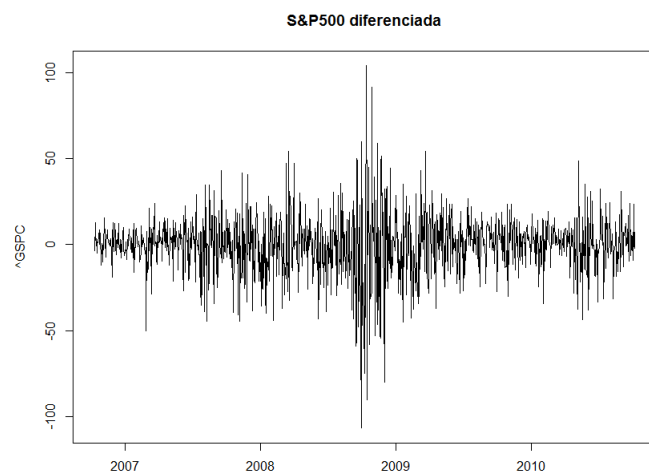


Figura 4.6.10: Serie de tiempo de $S\&P500$ diferenciada

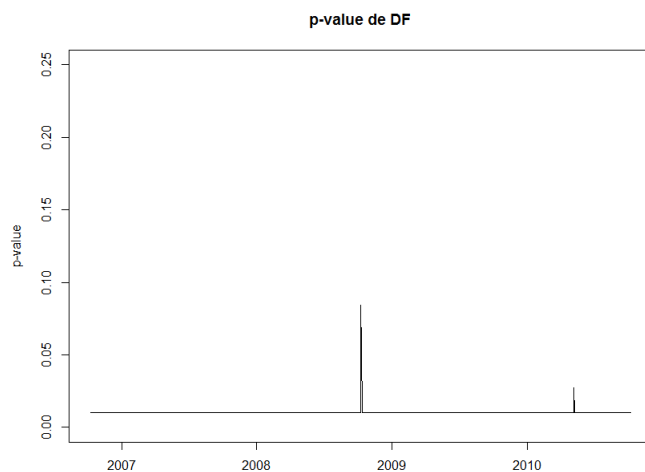


Figura 4.6.11: p - value calculado con DF de $S\&P500$ diferenciada

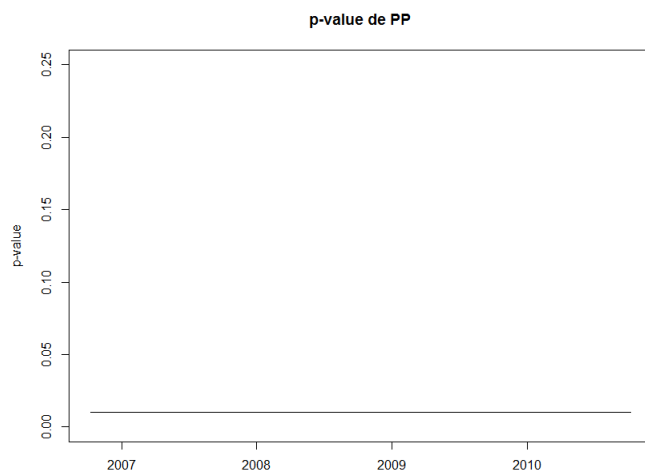


Figura 4.6.12: p - value calculado con PP de $S\&P500$ diferenciada

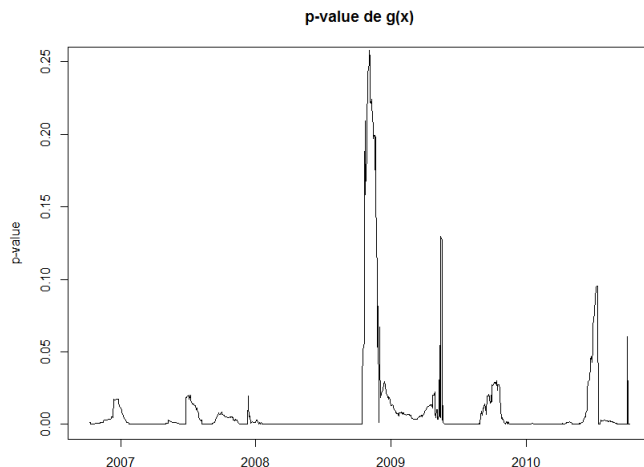


Figura 4.6.13: p – $value$ calculado con $g(x)$ de $S\&P500$ diferenciada

En este nuevo experimento, es casi nula la percepción de no estacionariedad de las pruebas clásicas. DF obtiene un máximo de p – $value$ para el evento de 0.0845, mientras que PP ni siquiera tiene un valor distinto de cero. Por el contrario $g(x)$ alcanza un valor máximo de 0,2577 y no sólo eso, también detecta varios eventos pequeños de no estacionariedad que no son percibidos por las otras pruebas. Precisamente, este comportamiento de DF y PP se debe a que no están diseñados para detectar no estacionariedad sino raíz unitaria. En cambio, nuestra prueba tiene el componente $g_2(x)$ encargado de detectar la volatilidad típica de este tiempo de eventos.

Como conclusión del capítulo podemos decir que nuestro método tiene por lo general mejor detección de no estacionariedad, quizá se pueda demorar un poco en detectarla, pero esto se debe a que la robustés del método evita falsos positivos. Un aspecto a mejorar sería su tiempo de ejecución ya que es notablemente más alto que cualquiera de los otros dos, esto es porque debe buscar todos los posibles τ , y para cada uno debe encontrar la descomposición espectral de la serie de medias y desviaciones estándar. Adicionalmente, una de las más grandes fortalezas es su versatilidad para adaptarse a diferentes modelos, en esta ocasión el método se alimentó con innovaciones que seguían una distribución normal, esta distribución del ruido blanco no tiene nada de especial y se puede cambiar por cualquier otra, incluso distribuciones de probabilidad empíricas para luego ajustar de nuevo el modelo para cada tipo de distribución y obtener mejores resultados. Por ejemplo, en el caso de las series financieras, se puede mejorar incluyendo distribuciones con colas pesadas.

Algo que es importante mencionar es que se vio que los resultados son mejores cuando se consideran series de tiempo de más de 60 datos, y después de esto, la dependencia del número de datos es casi nula, es algo similar a lo que sucede con las otras dos pruebas.

Conclusiones e investigación futura

Región de Estabilidad

- La aproximación a la estabilidad de polinomios por medio de la reorganización de las ecuaciones de Yule-Walker tiene mucho potencial. La matriz asociada (que hemos llamado Matriz de Estabilidad) es una matriz estructurada, en particular, se trata de una matriz *Toeplitz + Hankel*, en este trabajo mostramos que se pueden usar los métodos, algoritmos y resultados asociados a esta clase de matrices para el entendimiento profundo de la estabilidad y su verificación.
- El teorema sobre no-convexidad de la Región de Estabilidad demuestra la rápida deformación no-convexa que sufre la región a medida que crece el grado del polinomio. Esto a su vez demuestra que a pesar de haber una correspondencia uno a uno entre las raíces de un polinomio mónico y sus coeficientes, es muy difícil dar cotas cerradas del módulo de las raíces de un polinomio a partir de sus coeficientes como se ve en [14]. También demuestra el mal condicionamiento del problema de hallar las raíces de un polinomio a partir de sus coeficientes [34].
- Un aporte adicional es la factorización explícita de la frontera de la Región de Estabilidad en tres variedades más simples, de donde se muestra la existencia de los hiperplanos correspondientes a los polinomios que tienen $z = 1$ o $z = -1$ como una de sus raíces. A su vez, se estudian y caracterizan los polinomios pertenecientes a las intersecciones entre cada una de estas subvariedades, estos polinomios se denotan por medio de sus coeficientes como $P_k^n \doteq (P_{k,1}^n, P_{k,2}^n, \dots, P_{k,n}^n)$ y resultan ser polinomios de grado n de la forma $(x + 1)^{n-k+1} (x - 1)^{k-1}$, donde $k = \{0, \dots, n + 1\}$. Adicionalmente, estos polinomios cumplen la siguiente relación de ortogonalidad que fue de mucha importancia en el trabajo

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2^p \delta_{k,j+1}$$

Menores Centrales

- La Matriz de Estabilidad no es suficiente para determinar la estabilidad de polinomios, un aporte importante del trabajo es la necesidad de estudiar la estructura interna de la matriz. Los elementos de esta estructura interna (que denominamos Menores Centrales), dan información complementaria sobre el número de raíces que se encuentran fuera del círculo unitario.

- En los Menores Centrales se encontró una estructura geométrica reiterativa. Los k Menores Centrales de un polinomio de grado n denotados por D_k^n representan variedades adicionales que geoméricamente son similares a la Matriz no-lineal de Estabilidad D_1^m en una dimensión menor. Específicamente, se encontró que estos determinantes coinciden cuando $m = n - 2k + 2$.

Superficies de Bézier y separación de raíces entre reales y complejas

- Se demuestra que cada uno de los menores centrales se corresponde con una superficie de Bézier. Para hacer esta caracterización se expresaron los polinomios base de Bernstein de forma adecuada para el problema y se hacen identificaciones nada triviales de puntos para determinar los puntos de control necesarios.
- En las identificaciones de puntos que se hacen para poder expresar la frontera no lineal de estabilidad como una superficie de Bézier, aún queda pendiente explorar qué tipo de identificaciones suceden en elementos distintos de puntos (rectas, planos, hiperplanos, etc). Para dimensiones mayores a 3 el problema sumenta considerablemente su complejidad.
- Las superficies de Bézier tienen la propiedad de estar contenidas en su cerradura convexa, notamos la importancia de poder determinar pertenencia de un punto a esta cerradura. Para ello fue especialmente útil la relación antes mencionada

$$\sum_{i=0}^p P_{k,i}^p P_{i+1,j}^p = 2^p \delta_{k,j+1}$$

- La estabilidad de polinomios con coeficientes reales se redujo a dos problemas distintos. Primero, se demostró que la pertenencia a la cerradura convexa caracteriza los polinomios que tienen sus raíces reales con módulo menor a uno. Segundo, a los polinomios que tienen sus raíces complejas no reales con módulo menor a uno los caracteriza que todos sus menores centrales sean positivos. Esta separación quizá permita extender muchos de estos resultados a anillos que en los que existan polinomios irreducibles de grado 3 o superior. Es decir, así como la estabilidad de las raíces asociadas (reales) a polinomios irreducibles lineales se pueden abordar con hiperplanos y la estabilidad de las raíces asociadas con polinomios irreducibles cuadráticos (complejas) se pueden abordar con superficies regladas (Bézier), quizá como trabajo futuro se podría investigar una manera de abordar la caracterización de estabilidad de raíces de polinomios irreducibles de grado n (por ejemplo en anillos como los racionales), por medio de desigualdades que definan superficies convenientes.
- Con respecto al resultado anterior sobre la reducción del problema mas complejo en dos más simples. Para la cerradura convexa se necesita verificar un total de n desigualdades, para los menores centrales se necesita verificar un total de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se deja como conjetura y trabajo futuro demostrar que para la cerradura convexa se puede reducir la cantidad de desigualdades, para un total de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Algoritmo súper rápido para verificar estabilidad de polinomios.

- La metodología para determinar estabilidad de polinomios de grado n sobre los reales propuesta anteriormente se puede optimizar utilizando la técnica de los desplazamientos y lograr un tiempo asintótico teórico de $O(n \log^2 n)$. Lástimosamente, para situaciones prácticas se recomienda usar métodos más conocidos como el de Schur-Cohn o el de Bistritz. El inconveniente con nuestra aproximación es la complejidad de los algoritmos y las grandes constantes asociadas a este tiempo asintótico.
- Al considerar la familia de modelos $ARMA(p, q)$, pudimos caracterizar entre ellos al ruido blanco como el único proceso de esta familia que alcanza la mínima varianza posible. Esto sucede si consideramos a todos sus $p + q$ parámetros nulos. Aunque este resultado a primera vista parece un poco distanciado del tema de los algoritmos súper rápidos, fue necesario para expresar el cálculo del determinante de una matriz *Toeplitz + Hankel* como un determinante de una matriz *Toeplitz* por bloques. Esto ayudó a mejorar el tiempo asintótico del algoritmo.

Prueba de estacionariedad de series de tiempo

- Al realizar pruebas clásicas de estacionariedad de series de tiempo (Dickey-Fuller (DF) aumentada y Phillips-Perron (PP)), se encontró que el p -value que éstas arrojaban a medida que desplazábamos la ventana de análisis de los datos era muy inestable. Es decir, si movíamos una ventana fija unos pocos días, podía pasar de considerar una serie estacionaria a no estacionaria, ignorando mucho de su estructura interna. Con nuestra prueba de estacionariedad se logró solucionar este problema, pero también al ser más estable, se sacrifica un poco sensibilidad, y puede tardar un poco en confirmar la falta de estacionariedad.
- A diferencia de las pruebas clásicas anteriormente nombradas, nuestra prueba puede identificar cambios de varianza. Las otras pruebas carecen de esta detección porque intentan hacer una búsqueda de presencia de raíz unitaria. Cabe mencionar que en condiciones de varianza finita, raíz unitaria implica no estacionariedad pero no recíprocamente.
- En algún momento del procedimiento se usó Transformada Rápida de Fourier para seleccionar una ventana de análisis óptima que permitiera conocer mas detalles estacionales de la serie. Esto se podría mejorar haciendo una exploración de otras transformadas existentes en la literatura (Transformada de Hilbert, Transformada de Cosenos, Wavelets, etc).
- Adicionalmente, se usaron innovaciones con distribución normal. Estas distribuciones pocas veces coinciden con lo que se encuentra en aplicaciones reales. Por ejemplo, en finanzas es común tener distribuciones con colas pesadas atribuibles un aumento de eventos extraordinarios. El método desarrollado en este trabajo se puede extender a cualquier distribución que tenga media cero y no autocorrelacionada con ella misma, es decir, un ruido blanco. Esto permitiría tener mejores estimaciones del grado de estacionariedad para aplicaciones específicas.

Bibliography

- [1] Akaike, H. (1973). Block Toeplitz matrix inversion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 24(2), 234-241.
- [2] Baccelli, F., & Błaszczyszyn, B. (2010). Stochastic geometry and wireless networks: Volume II Applications. *Foundations and Trends® in Networking*, 4(1–2), 1-312.
- [3] Bernshtein, S. N. (1915). Sur un théoreme de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 15(1), 38-45.
- [4] Bézier, P. (1966). Definition numerique des courbes et surface. *Automatisme*, 11(4), 625-632.
- [5] Bistritz, Y. (1986). A circular stability test for general polynomials. *Systems & control letters*, 7(2), 89-97.
- [6] Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1976). Time series analysis. Forecasting and control. In *Holden-Day Series in Time Series Analysis, Revised ed.*, San Francisco: Holden-Day, 1976.
- [7] Brent, R. P., Gustavson, F. G., & Yun, D. Y. (1980). Fast solution of Toeplitz systems of equations and computation of Padé approximants. *Journal of Algorithms*, 1(3), 259-295.
- [8] Chazelle, B. (1993). Cutting hyperplanes for divide-and-conquer. *Discrete & Computational Geometry*, 9(2), 145-158.
- [9] Chun, J. (1989). Fast array algorithms for structured matrices. STANFORD UNIV CA DEPT OF ELECTRICAL ENGINEERING.
- [10] Cohn, A. (1922). Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Mathematische Zeitschrift*, 14(1), 110-148.
- [11] Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2012). Elements of information theory. John Wiley & Sons.
- [12] De Casteljau, P. (1959). Outillages méthodes calcul. Andr e Citro en Automobiles SA, Paris.

-
- [13] Eneström, G. (1893). Härledning af en allmä formel för antalet pensionärer som vid en godtycklig tidpunkt förefinnas inom en sluten pensionskassa. *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 50, 405-415.
- [14] Gardner, R. B., & Govil, N. K. (2014). Eneström–Kakeya Theorem and Some of Its Generalizations. In *Current Topics in Pure and Computational Complex Analysis* (pp. 171-199). Birkhäuser, New Delhi.
- [15] Gohberg, I., Kailath, T., & Olshevsky, V. (1995). Fast Gaussian elimination with partial pivoting for matrices with displacement structure. *Mathematics of computation*, 64(212), 1557-1576.
- [16] Gohberg, I., & Semencul, A. (1972). On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs. *Mat. issled*, 2, 201-233.
- [17] Good, I. J. (1970). The inverse of a centrosymmetric matrix. *Technometrics*, 12(4), 925-928.
- [18] Hamilton, J. D. (1994). Time series analysis (Vol. 2, pp. 43-71). *Princeton, NJ: Princeton university press*.
- [19] Hurwitz, A., (1895). Über die Bedingungen unter welchem eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. *Math. Ann.*, vol. 46, 273–284
- [20] Jury, E. I. (1961). A stability test for linear discrete systems in table form. *Proc. IRE*, 50, 1947-31948.
- [21] Kakeya, S. (1912). On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. *Tohoku Mathematical Journal*, First Series, 2, 140-142.
- [22] Kreyszig, E. (1898). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley.
- [23] Lande, R., Engen, S., & Saether, B. E. (2003). *Stochastic population dynamics in ecology and conservation*. *Oxford University Press on Demand*.
- [24] Levinson, N. (1946). The Wiener (root mean square) error criterion in filter design and prediction. *Journal of Mathematics and Physics*, 25(1-4), 261-278.
- [25] Lorentz, G. G. (2013). *Bernstein polynomials*. American Mathematical Soc..
- [26] Merchant, G., & Parks, T. (1982). Efficient solution of a Toeplitz-plus-Hankel coefficient matrix system of equations. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 30(1), 40-44.
- [27] Pan, V. Y. (2012). *Structured matrices and polynomials: unified superfast algorithms*. *Springer Science & Business Media*.
- [28] Routh, E.J., (1877). *A treatise on the stability of a given state of motion*. *Adams Prize Essay*, Univ. of Cambridge, England.

-
- [29] Schur, J. (1917). Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 147, 205-232.
- [30] Shreve, S. E. (2004). Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models (Vol. 11). Springer Science & Business Media.
- [31] Van Kampen, N. G. (1992). Stochastic processes in physics and chemistry (Vol. 1). Elsevier.
- [32] Walker, G. T. (1931). On periodicity in series of related terms. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 131(818), 518-532.
- [33] Wang, Y., & Krishna, H. (1989, October). On fast and superfast algorithms for solving block Toeplitz systems. In Twenty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 1989. (Vol. 2, pp. 643-647). IEEE.
- [34] Wilkinson, J. H. (1959). The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials. Part I. *Numerische Mathematik*, 1(1), 150-166.
- [35] Yule, G. U. (1927). VII. On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 226(636-646), 267-298.