



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Zacatenco**

**Aplicaciones de la Descomposición Empírica Modal al Diseño de
Estrategias de Inversión en Mercados Financieros**

Tesis que presenta

Ángel Gabriel Elías Díaz

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

En la Especialidad de Matemáticas

Director de Tesis:
Dr. Feliú Davino Sagols Troncoso

Con todo mi cariño, admiración y respeto:

A mis padres
Pedro Ángel Elías
Isabel Díaz

Agradecimientos

Presento mi gratitud a mis padres y hermanos, que siempre me han apoyado en cada etapa de mi vida.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. Feliú Sagols, por sus conocimientos invaluable, los cuales me ayudaron a culminar esta tesis. Y que apesar de sus ocupaciones, siempre tuvo el tiempo para ayudarme.

Un agradecimiento especial al Dr. Andrés Téllez, que siempre tuvo la amabilidad y disponibilidad para ayudarme a resolver mis dudas.

Agradezco a los sinodales por revisar esta tesis, y dar sus aportaciones para mejorarla.

Agradezco el apoyo de CONACyT para el financiamiento de mis estudios y hacer posible esta maestría.

Índice

1. Resumen	5
2. Abstract	7
3. Introducción	9
4. Preliminares	11
4.1. Análisis de Fourier	11
4.1.1. Series de Fourier	11
4.1.2. Transformada de Fourier	12
4.2. Describiendo señales a través del tiempo y frecuencia	13
4.2.1. Descripción de las señales a través del tiempo	14
4.2.2. Descripción de las señales a través de las frecuencias	16
4.3. Análisis de ondículas (wavelets)	16
5. El Espectro de Hilbert y la Descomposición Empírica Modal	18
5.1. Frecuencia instantánea	19
5.1.1. Señales analíticas	21
5.2. Funciones modales intrínsecas	26
5.3. La Descomposición Empírica Modal	26
5.4. Completitud y Ortogonalidad	32
5.5. El Espectro de Hilbert	37
5.6. Validación y Calibración del Espectro de Hilbert	41
6. Aplicaciones de la EMD en el Análisis Técnico	44
6.1. Estrategias de Inversión	45
6.1.1. Media Móvil de Longitud Variable	47
6.1.2. Promedio Móvil Fijo	48
6.1.3. Ruptura del Rango de Negociación (Trading Range Break)	49
6.1.4. Índice de Fortaleza Relativo	49
6.1.5. Momentos de Intradía e Interdía	50
6.2. Implementación de la EMD en estrategias del análisis técnico	51
6.3. Resultados experimentales	51
7. Conclusiones	52

1. Resumen

El propósito de este trabajo es estudiar y analizar la Descomposición Empírica Modal (EMD, por sus siglas en inglés) a través de la transformada de Hilbert, y aplicar este método a estrategias de inversión ampliamente conocidas dentro de lo que se conoce como análisis técnico en mercados financieros y poder mejorar las ganancias que se obtienen normalmente.

La EMD es una descomposición que se aplica a series de tiempo, y se puede usar cuando los datos no son estacionarios ni lineales. El propósito del método es identificar una sucesión de oscilaciones, cada una se define apropiadamente a partir de los valores mínimos y máximos de la oscilación anterior. Por la naturaleza de la construcción, cada una de estas oscilaciones cuenta con su propia escala de tiempo. Cada oscilación se deriva empíricamente de los datos y se conoce como función modal intrínseca (IMF, por sus siglas en inglés). Una IMF debe cumplir dos criterios:

1. El número de extremos (máximos y mínimos locales) y el número de ceros deben ser iguales, o diferentes, a lo sumo, en uno.
2. Para cada punto t de la serie de tiempo, el valor medio de la envolvente superior definida por los máximos y la envolvente inferior definida por los mínimos debe ser igual a cero.

Las IMFs se obtienen a través de un proceso que utiliza extremos locales para separar las oscilaciones, comenzando con la frecuencia más alta. Por lo tanto, dada una serie de tiempo $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, el método la descompone en un número finito de IMFs denotadas como $\text{IMF}_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ y un residuo $r_n(t)$.

El residuo es la tendencia no oscilante de la serie de tiempo. Al final del proceso de descomposición, la serie de tiempo original se puede reconstruir como:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \text{IMF}_k(t) + r_n(t). \quad (1.1)$$

Los detalles de la EMD pueden observarse en la definición 5.6.

En la sección 5.4 se comprueba, computacionalmente, que las IMFs extraídas de la EMD junto con el residuo, forman un conjunto ortogonal, utilizando el producto interno habitual de \mathbb{R}^T .

Para estudiar la distribución frecuencia-tiempo-amplitud, se utiliza la transformada de Hilbert descrita en las secciones 5.5 y 5.6. Es sabido que la transformada de Fourier no proporciona información exacta cuando se aplica a series de tiempo que no son estacionarias ni lineales, por lo que, cuando se trabaja con este tipo de series, comúnmente se utiliza la transformada de ondícula (wavelet). Aún así, esta transformada tiene sus deficiencias, y se puede observar en dos ejemplos de la sección 5.6 que la transformada de Hilbert da una mejor distribución frecuencia-tiempo-amplitud, que la transformada de ondícula, y utilizando las transformadas marginales de ambas, junto con la transformada de Fourier, se comprueba que la transformada marginal de Hilbert da una mejor representación de la distribución frecuencia-tiempo en esos ejemplos específicos.

Habiendo hecho este estudio de la EMD y la transformada de Hilbert, procederemos a utilizarlo para hacer aplicaciones en estrategias de inversión en mercados financieros. Escogimos varias estrategias de

inversión que se utilizan en el análisis técnico, las cuales hacen uso de los gráficos de velas, que se describen en el capítulo 6, para crear señales de compra y venta. Se utilizan 5 estrategias sobre un total de 14 activos financieros.

Se calcula el Porcentaje de Rendimiento Anualizado (**APR** por sus siglas en inglés) de una estrategia preestablecida sobre una serie de tiempo, representada a través de un gráfico de velas; a continuación se recolecta una serie de tiempo por cada día correspondiente a la serie de tiempo original y a una frecuencia de un segundo. Procedemos a calcular la EMD para cada serie de tiempo y con todos los residuos obtenidos formamos una nueva gráfica de velas. Con base a esta nueva gráfica de velas, se generan señales de compra y venta, y se calcula su **APR**. Terminamos verificando si las utilidades de la estrategia mejoran.

Se aplica este mismo método para cada estrategia y para cada activo financiero a utilizar. Y calculamos el porcentaje de estrategias en las cuales se mejoró el **APR** utilizando la EMD.

Finalizamos con los resultados obtenidos y algunas conclusiones.

2. Abstract

The aim of this work is to study and analyze Empirical Mode Decomposition (EMD) through Hilbert transform, and to apply this method to technical analysis strategies markets, in order to improve utilities.

The empirical mode decomposition is a fully data-driven decomposition that can be applied to non-stationary and non-linear data. The purpose of the method is to identify a finite set of oscillations with scale defined by the local maxima and minima of the data itself. Each oscillation is empirically derived from the data and is referred as an intrinsic mode function (IMF). An IMF must satisfy two criteria:

1. The number of extrema and the number of zero crossings must either be equal or differ at most by one.
2. At any point, the mean value of the envelope defined by the local maxima and the envelope defined by the local minima is zero.

The IMFs are obtained through a process that makes use of local extrema to separate oscillations starting with the highest frequency. Hence, given a time series $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, the process decomposes it into a finite number of intrinsic mode functions denoted as $\text{IMF}_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ and a residue $r_n(t)$. The residue is the non-oscillating drift of the data. At the end of the decomposition process, the original time series can be reconstructed as:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \text{IMF}_k(t) + r_n(t). \quad (2.1)$$

The EMD comprises the following steps:

1. Initialize the residue to the original time series $r_0(t) = x(t)$ and set the IMF index $k = 1$.
2. Extract the k th IMF:
 - a) initialize $h_0(t) = r_{k-1}(t)$ and the iteration counter $i = 1$;
 - b) find the local maxima and the local minima of $h_{i-1}(t)$;
 - c) create the upper envelope $E_u(t)$ by interpolating between the local maxima (lower envelope $E_l(t)$ by interpolating the local minima, respectively);
 - d) calculate the mean of both envelopes as $m_{i-1}(t) = \frac{E_u(t) + E_l(t)}{2}$;
 - e) subtract the envelope mean of the input time series, obtaining $h_i(t) = h_{i-1}(t) - m_{i-1}(t)$;
 - f) verify if $h_i(t)$ satisfies the IMF's conditions:
 - if $h_i(t)$ does not satisfy the IMF's conditions, increase $i = i + 1$ and repeat the sifting process from step (b);
 - if $h_i(t)$ satisfies the IMF's conditions, set $\text{IMF}_k(t) = h_i(t)$ and define $r_k(t) = r_{k-1}(t) - \text{IMF}_k(t)$.
3. When the residue $r_k(t)$ is either a constant, a monotonic slope or contains only one extrema stop the process, otherwise we continue the decomposition from step 2 setting $k = k + 1$.

Orthogonality cannot be theoretically guaranteed, but in most cases it is nearly satisfied. By including the residue as the last component and rewriting Eq. (2.1) as

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k(t), \quad (2.2)$$

where $C_k(t) = \mathbf{IMF}_k(t)$ for $k = 1, \dots, n$ and $C_{n+1}(t) = r_n(t)$. The square of the values of $x(t)$ can be expressed as:

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|C_i(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} C_i(t) \cdot C_j(t), \quad (2.3)$$

where “ \cdot ” is the habitual scalar product in \mathbb{R}^T .

If the decomposition is orthogonal, the cross terms should be zero. An index of orthogonality (IO) is defined as

$$IO = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} C_i(t) \cdot C_j(t). \quad (2.4)$$

To study the frequency-time-amplitude distribution, it utilizes Hilbert transform described in Sections 5.5 and 5.6. It’s known that the Fourier transform doesn’t provide exact information when it applies to time series that neither are stationary nor linear. That is the reason why these types of series are better decomposed by the so called wavelet transform. Even so, this transformation has deficiencies which are described in Section 5.6. From practical comparisons of the Fourier’s transform against the Hilbert’s one we conclude that the second yields a better representation of the frequency-time-amplitude distribution.

Once we finish our basic study on EMD and Hilbert transform, we proceed to apply them to the design of financial market trading strategies. We selected some basic strategies for technical analysis based on candle time series (see Chapter 6) to create buy and sell signals. Our experiments considered five strategies over fourteen financial instruments.

For each one of the fourteen financial instruments considered, we downloaded two historical time series: one with candles lasting one second and the other one lasting one day. Then we applied the EMD to compute the daily IMF residuals on the one second time series, and we transformed all these residuals into one day candles, to build a smooth daily time series. Finally, we backtested all the strategies with the original daily series and with the smooth daily series too. After comparing the Annual Percentage Rates (**APR**) of both backtesting we reported the results for each strategy and instrument.

This same method is applied for each strategy and utilized financial asset. We calculate the percentage of strategies in which it improved the APR using EMD.

3. Introducción

A lo largo de los últimos años las estrategias de inversión en mercados financieros se han ido incrementando y hoy en día hay muchas formas de invertir dinero. La pregunta que nos formulamos es ¿Cómo podemos modificar esas estrategias de tal manera que las ganancias se incrementen?

Instrumentos indispensables para analizar estrategias de inversión son las **series de tiempo** o **series de precios**, las cuales podemos definir como una colección de datos recolectados cronológicamente en un cierto periodo de tiempo. Las series de tiempo a utilizar serán siempre discretas y finitas. Un ejemplo de ellas se puede observar en la Gráfica 1 de la Figura 12.

Muchas veces es conveniente utilizar una serie de tiempo modificada para aplicarla a una estrategia de inversión. Un ejemplo muy común de esto es utilizar, en lugar de la serie original, los logaritmos de esos datos. En este trabajo utilizaremos la descomposición empírica modal (EMD por sus siglas en inglés) para encontrar una nueva serie de tiempo, y con ella tratar de mejorar las ganancias de ciertas estrategias.

En esencia, una estrategia de inversión consiste en crear una serie de tiempo, basándose en una serie de precios de cierto activo, que nos da una señal de compra (1), venta (-1) o neutral (con el valor 0 y quiere decir que no se compra ni se vende) en un determinado día. Para medir las ganancias obtenidas durante cierto tiempo en el que se esté ejecutando cierta estrategia de inversión, utilizaremos el **APR** (Rendimiento Promedio Anual, por sus siglas en inglés), el cual se calcula como se describe a continuación; asumiendo que se trabaja sobre la serie de tiempo $x(t)$, $t = 1, \dots, T$:

1. Se calcula la diferencia entre las utilidades menos pérdidas por cada día t . Llamamos a esa serie de tiempo $PU(t)$.
2. Se calcula el valor en el mercado del portafolio de inversión para cada día. Es decir la suma a precio de mercado de todos los instrumentos en los que se haya invertido. Llamamos a esa serie de tiempo $M(t)$.
3. Se calculan los rendimientos diarios como $PU(t)/M(t)$ para $t = 1, \dots, T$. Llamamos a esa serie de tiempo $ret(t)$.
4. Calculamos el **APR** con la siguiente ecuación:

$$\text{APR} = \left(\prod_{t=0}^T (1 + ret(t)) \right)^{252/T} - 1. \quad (3.1)$$

La serie de tiempo $ret(t)$ proporciona el porcentaje de ganancia o pérdida que se obtuvo en el tiempo t , sobre el valor del mercado $M(t)$, por lo que el valor $1 + ret(t)$ nos proporciona el porcentaje sobre $M(t)$ de dinero que obtenemos en el tiempo t .

El término APR nos muestra el porcentaje de ganancia que obtenemos al año.

Para hacer nuestras pruebas de las estrategias, utilizaremos series de tiempo de años pasados y veremos las ganancias que se hubieran obtenido si se hubiera invertido en ese tiempo. A estas pruebas se le conoce como **backtesting**.

Los aspectos teóricos de esta tesis se basan especialmente en el artículo “The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis” [7] y los libros “Hilbert transforms” [9] y “Time-frequency analysis” [5].

En cuanto a las aplicaciones en el trabajo, se hicieron adaptaciones del artículo “EMD-CANDLESTICK: METHODOLOGY AND APPLICATIONS” [4] utilizando algunas de las estrategias descritas en los artículos “Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns” [2], “How rewarding is technical analysis? Evidence from Singapore stock market” [13], “Profitability of intraday and interday momentum strategies” [12].

Contenido de la tesis. El contenido de esta tesis se compone de la siguiente manera: el capítulo 4 consiste de conceptos básicos necesarios sobre el análisis de Fourier y el análisis de ondícula (wavelets). El capítulo 5 cubre los aspectos teóricos acerca de la EMD y la transformada de Hilbert. En el capítulo 6 se desarrollan las aplicaciones de la EMD al análisis técnico.

4. Preliminares

En este capítulo repasaremos algunos conceptos básicos del análisis de Fourier y del análisis de ondícula (wavelet) que nos servirán para tener una mejor comprensión y probar la eficacia de la EMD a través de la **transformada de Hilbert**, la cual definiremos y estudiaremos posteriormente. Las demostraciones y cálculos de este capítulo se pueden consultar en los libros “Hilbert transforms” [9] y “Time-frequency analysis” [5].

4.1. Análisis de Fourier

4.1.1. Series de Fourier

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

Definición 4.1. Una función x es **periódica** si existe un $P > 0$ tal que, para todos los valores de t , se cumple:

$$x(t \pm P) = x(t). \quad (4.1)$$

El valor más pequeño P para el cual se cumple la ecuación, es llamado el **periodo**, y definimos su **frecuencia** f como $f = 1/P$.

Algunos ejemplos de funciones periódicas son $\cos t$ y $\sen t$, ya que

$$\cos t = \cos(t + 2\pi) = \cos(t + 4\pi) = \cos(t + 6\pi) = \dots,$$

$$\sen t = \sen(t + 2\pi) = \sen(t + 4\pi) = \sen(t + 6\pi) = \dots.$$

El periodo en ambos casos es 2π . Para las funciones $\cos(n\pi t/L)$ y $\sen(n\pi t/L)$ con n un entero positivo, el periodo es $2L$.

Definición 4.2. Una función x es **continua a trozos** en el intervalo (a, b) si satisface las siguientes condiciones: El intervalo (a, b) puede ser particionado en un número finito de subintervalos en los cuales x es continua, y los límites cuando t se aproxima a los extremos de cada subintervalo son finitos.

Definición 4.3. Sea x una función definida en el intervalo $(-L, L)$, periódica con periodo $2L$, entonces la **expansión en series de Fourier** está definida por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right). \quad (4.2)$$

A los coeficientes a_n y b_n se les llama **de Fourier**, y se definen así:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (4.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (4.4)$$

Esas expresiones se siguen de las siguientes integrales elementales:

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi t}{L}\right) dt = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) dt = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi t}{L}\right) dt = 0$$

donde m y n son valores enteros.

Las condiciones suficientes para que x pueda escribirse como una expansión en serie de Fourier son:

- x tiene un número finito de discontinuidades.
- x es periódica con periodo $2L$.
- x y su derivada son continuas a trozos.

Con esas mismas condiciones, es posible escribir las series de Fourier para x en forma compleja:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L} \quad (4.5)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x(t) e^{in\pi t/L} dt. \quad (4.6)$$

4.1.2. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una herramienta matemática apropiada para cambiar una función que está en el dominio del tiempo a una función que está en el dominio de las frecuencias. Con esta nueva función es posible visualizar la distribución de energía sobre las frecuencias en la descomposición en serie de Fourier para la función en el dominio del tiempo.

Definición 4.4. Sea x una función sobre \mathbb{R} absolutamente integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty; \quad (4.7)$$

entonces la **transformada de Fourier** de x está definida por

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-it\omega} dt. \quad (4.8)$$

La transformada inversa, escrita simbólicamente como $\mathcal{F}^{-1}[X]$, está dada por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{it\omega} d\omega. \quad (4.9)$$

La transformada de Fourier satisface las siguientes expresiones:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi t\omega} dt, \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X](t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i2\pi t\omega} d\omega. \quad (4.10)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-it\omega} dt, \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{it\omega} d\omega. \quad (4.11)$$

Proposición 4.5. La transformada de Fourier de la función $x(t) = \frac{1}{\pi t}$ es:

$$\mathcal{F}[x](\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -i & \text{si } \omega > 0 \\ i & \text{si } \omega < 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Definición 4.6. La *convolución* de dos funciones x e y definidas sobre \mathbb{R} está dada por

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t - \omega)d\omega, \quad (4.13)$$

siempre que la integral exista.

Teorema 4.7. Sean x y y dos funciones sobre \mathbb{R} continuas a trozos y absolutamente integrables. Entonces

$$\mathcal{F}[x * y](\omega) = \mathcal{F}[x](\omega)\mathcal{F}[y](\omega). \quad (4.14)$$

Teorema 4.8. Fórmulas de Parseval y Plancherel. Sean x e y dos funciones tales que $x, y \in L^2(\mathbb{R})$, X y Y denotan sus transformadas de Fourier, y $y^*(t)$ y $Y^*(\omega)$ son los conjugados de $y(t)$ y $Y(\omega)$ respectivamente, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega. \quad (4.16)$$

Ahora mostramos un ejemplo de la transformada de Fourier.

Ejemplo 4.9. Sea $x(t) = 5 \sin(2\pi t) + 4 \sin(2(2\pi)t) + 3 \sin(3(2\pi)t)$ como se muestra en la Figura 1. Según la transformada de Fourier, esta función puede descomponerse en tres funciones, como se muestra en las Figuras 2 y 3. Las frecuencias correspondientes a cada componente de la descomposición son 1, 2 y 3, respectivamente. Finalmente, la Figura 4 muestra la gráfica de la parte real de la transformada de Fourier, que comúnmente se le conoce como **el espectro de Fourier**. Esta nueva función, la transformada de Fourier, se dice que está definida en el dominio de las frecuencias, como se muestra en la Figura 4.

4.2. Describiendo señales a través del tiempo y frecuencia

Definición 4.10. En procesamiento de señales, una **señal** es una función que brinda información sobre un fenómeno. En electrónica y telecomunicaciones, una señal se refiere a cualquier voltaje, corriente u onda electromagnética variable en cualquier momento que transporta información. En este trabajo, una señal será sinónimo de una serie de tiempo.

Sea $s(t)$ una señal en función del tiempo, y sea $S(\omega)$ su correspondiente transformada de Fourier. Decimos entonces que $S(\omega)$ describe también al fenómeno que describe $s(t)$, en el **dominio de las frecuencias**. Llamamos a la función $S(\omega)$ el espectro de la señal. Para nuestro interés la consideraremos una señal como una serie de tiempo.

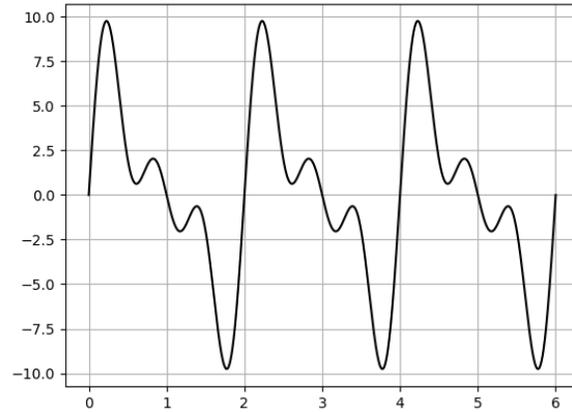
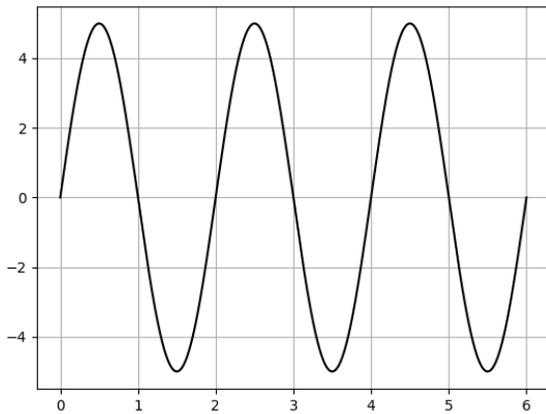
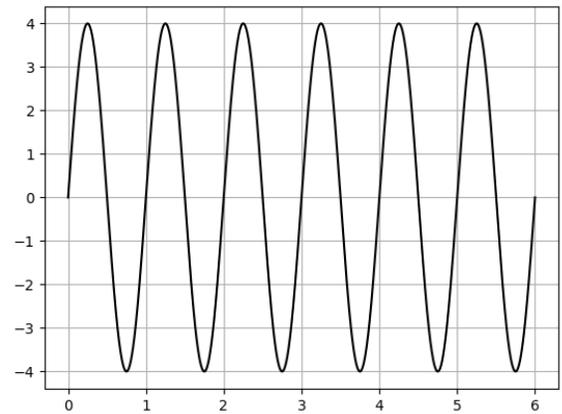


Figura 1: $x(t) = 5 \sin(2\pi t) + 4 \sin(2(2\pi)t) + 3 \sin(3(2\pi)t)$.



(a) $5 \sin(2\pi t)$.



(b) $4 \sin(2(2\pi)t)$.

Figura 2: Primera y segunda componente de la descomposición de $x(t)$.

4.2.1. Descripción de las señales a través del tiempo

Definimos una señal $s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, en su forma compleja como

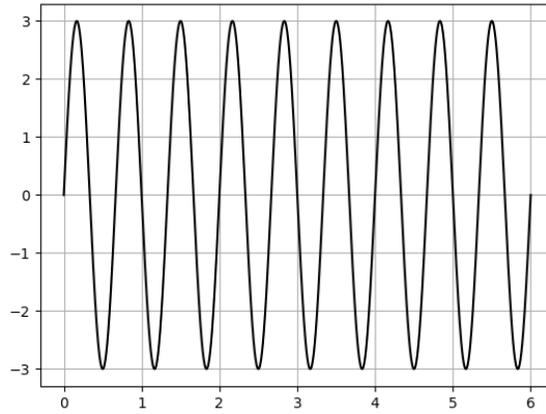
$$s(t) = a(t)e^{i\theta(t)} = s_r(t) + is_j(t), \quad (4.17)$$

donde $s_r(t) = a(t) \cos(\theta(t))$ la parte real y $s_j(t) = a(t) \sin(\theta(t))$ la parte imaginaria.

Densidad de energía o potencia instantánea. En general, la energía o la intensidad de una señal está definida, matemáticamente, por $|s(t)|^2$. Esto es, en un intervalo muy pequeño de tiempo Δt , la señal produce $|s(t)|^2 \Delta t$ cantidad de energía. En otras palabras tenemos:

$|s(t)|^2$ = energía o intensidad por unidad de tiempo en el tiempo t .

$|s(t)|^2 \Delta t$ = fracción de energía en el intervalo Δt al tiempo t .



(a) $3 \sin(3(2\pi)t)$.

Figura 3: Tercera componente de la descomposición de $x(t)$.

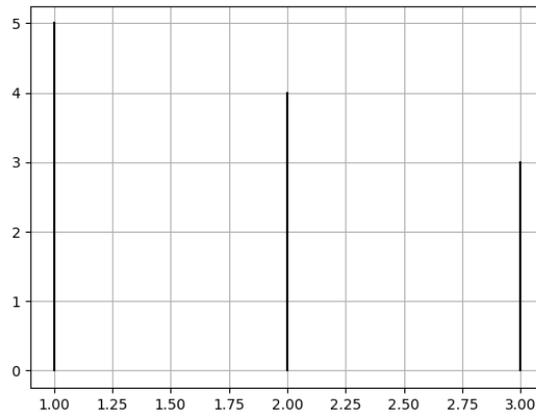


Figura 4: Espectro de Fourier de la función $x(t)$.

La energía total está dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (4.18)$$

Definición 4.11. Si consideramos $|s(t)|^2$ como una densidad en el tiempo, definimos el tiempo medio como

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt. \quad (4.19)$$

Y definimos la desviación estándar como

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |s(t)|^2 dt = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2. \quad (4.20)$$

La desviación estándar es un indicador de la duración de la señal: en un tiempo de $2\sigma_t$ la mayor parte de la señal habrá pasado. Si la desviación estándar es pequeña, la mayor parte de la señal se concentra alrededor del tiempo medio y pasará rápidamente, lo cual es una indicación de que tenemos una señal de corta duración; si la desviación estándar es grande la señal es de larga duración. Cabe señalar que hay señales para las cuales la desviación estándar es infinita.

4.2.2. Descripción de las señales a través de las frecuencias

Definición 4.12. Como en las señales en función del tiempo, es conveniente escribir el espectro en términos de la amplitud y la fase:

$$S(\omega) = b(\omega)e^{i\psi(\omega)}, \quad (4.21)$$

y llamamos $b(\omega)$ la amplitud espectral y a $\psi(\omega)$ la fase espectral.

Análogamente con la señal, definimos:

$|S(\omega)|^2$ = energía o intensidad por unidad de frecuencia en la frecuencia ω .

$|S(\omega)|^2\Delta\omega$ = fracción de energía en el intervalo de frecuencia $\Delta\omega$ en la frecuencia ω .

Utilizando el teorema de parseval, tenemos que la energía total está dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.22)$$

Si consideramos $|S(\omega)|^2$ como una densidad en las frecuencias, su valor medio y el ancho de banda se definen respectivamente como:

$$\langle\omega\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.23)$$

$$B^2 = \sigma_\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle\omega\rangle)^2 |S(\omega)|^2 d\omega = \langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2. \quad (4.24)$$

Teniendo $s(t)$ como en la ecuación (3.17), podemos reescribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

$$\langle\omega\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta(t)}{dt} a^2(t) dt, \quad (4.25)$$

y

$$B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\theta(t)}{dt} - \langle\omega\rangle\right)^2 a^2(t) dt. \quad (4.26)$$

4.3. Análisis de ondículas (wavelets)

En esta sección estudiamos **la transformada de ondícula** o únicamente **ondícula**, la cual es utilizada para analizar señales o series de tiempo que no son estacionarias. Para nuestros fines, estudiaremos **la transformada de ondícula de Morlet** o únicamente **la ondícula de Morlet**, que es un caso particular de las ondículas. A diferencia del análisis de Fourier, las ondículas son transformadas que describen la señales en un dominio bidimensional: **tiempo-frecuencia**.

El enfoque de la ondícula de Morlet, y de las ondículas en general, es esencialmente un análisis espectral de Fourier de ventana ajustable con la siguiente definición general:

$$W(a, b; x, \psi) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (4.27)$$

donde x es la señal a la que se le aplica la transformada, a es el factor de dilatación, b es la traslación del origen y $\psi^*(\cdot)$ es la función de wavelet básica que satisface ciertas condiciones muy generales.

Aunque el tiempo y la frecuencia no aparecen explícitamente en el resultado transformado, la variable $1/a$ proporciona la escala de frecuencia y b , la ubicación temporal de un evento. Una explicación física intuitiva de la ecuación es: $W(a, b; x, \psi)$ es la “energía” de x de la escala a en $t = b$.

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{t-b}{a}$ en la integral de la ecuación (4.27) obtenemos la siguiente forma alternativa:

$$W(a, b; x, \psi) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(at - b) \psi^*(t) dt. \quad (4.28)$$

Debido a esta forma básica de $at + b$ involucrada en la transformada, también se conoce como análisis de wavelet afín. Para aplicaciones específicas, la función wavelet básica, $\psi^*(\cdot)$, se puede modificar de acuerdo con las necesidades especiales, pero la forma se debe dar antes del análisis. Sin embargo, en las aplicaciones más comunes, la wavelet de Morlet se define como grupos de onda senoidal y cosenoidal de una cobertura Gaussiana con 5.5 ondas. Generalmente, $\psi^*(\cdot)$ no es ortogonal para diferentes a para wavelets continuas. Aunque se puede hacer que la wavelet sea ortogonal seleccionando un conjunto discreto de a , este análisis de wavelet discreta perderá señales físicas que tengan una escala diferente del conjunto discreto seleccionado de a . Continuo o discreto, el análisis wavelet es básicamente un análisis lineal. Una característica muy atractiva del análisis wavelet es que proporciona una resolución uniforme para todas las escalas.

El análisis de wavelet es muy útil para analizar datos con cambios graduales de frecuencia. La mayoría de sus aplicaciones han sido de detección de bordes y compresión de imágenes. También se han hecho aplicaciones limitadas a la distribución de frecuencia de tiempo en series de tiempo e imágenes bidimensionales.

Si bien la onduleta de Morlet es la más comúnmente utilizada por su enorme versatilidad, la fuga de información que genera la longitud limitada de la función de onduleta básica dificulta definir cuantitativamente la distribución energía-frecuencia-tiempo. A veces, la interpretación del análisis de wavelet también puede ser contra intuitiva. Por ejemplo, para definir un cambio que ocurre localmente, uno debe buscar el resultado en el rango de alta frecuencia, cuanto mayor sea la frecuencia, más localizada será la wavelet básica. Si un evento local ocurre solo en el rango de baja frecuencia, uno todavía se verá obligado a buscar sus efectos en el rango de alta frecuencia. Aunque de ser posible, su interpretación sería complicada. Otra dificultad del análisis de wavelet es su naturaleza no adaptativa. Una vez que se selecciona la wavelet básica, habrá que usarla para analizar todos los datos. Dado que la onduleta de Morlet más utilizada se basa en el análisis de Fourier, también sufre muchas de sus deficiencias: solo puede dar una interpretación físicamente significativa de los fenómenos lineales.

5. El Espectro de Hilbert y la Descomposición Empírica Modal

El análisis de datos es una parte necesaria en investigación pura y aplicaciones prácticas. Por imperfectos que puedan ser algunos datos, representan la realidad percibida por nosotros; en consecuencia, el análisis de datos tiene dos propósitos: determinar los parámetros necesarios para construir el modelo necesario y confirmar el modelo que construimos para representar el fenómeno. Desafortunadamente, los datos probablemente tendrán uno o más de los siguientes problemas:

1. el rango total de datos es demasiado corto;
2. los datos no son estacionarios;
3. los datos representan procesos no lineales.

Aunque es posible cualquier combinación de estos problemas, los dos primeros están estrechamente relacionados, ya que podríamos estar ante la presencia de una sección de datos más corta que el período de un proceso estacionario.

Históricamente, el análisis espectral de Fourier ha proporcionado un método general para examinar las distribuciones globales de frecuencia de energía. En parte esto se debe a sus propiedades básicas y en parte a su simplicidad. El análisis de Fourier ha dominado los esfuerzos de análisis de datos prácticamente desde su introducción, y se ha aplicado a todo tipo de datos. Aunque la transformada de Fourier es válida en condiciones extremadamente generales, existen algunas restricciones cruciales del análisis espectral de Fourier: el sistema debe ser lineal; y los datos deben ser estrictamente periódicos o estacionarios; de lo contrario, el espectro resultante carecerá de sentido físico.

Una vez presentadas estas dificultades, pasamos a definir linealidad y estacionariedad:

1. Estacionariedad.

Definición 5.1. Sea $x(t)$ una serie de tiempo. Decimos que es **estacionaria** si cumple, para todo t :

- a) $E(|x(t)|^2) < \infty$,
- b) $E(x(t)) = m$,
- c) $C(x(t_1), x(t_2)) = C(x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau))$,

donde $E(\cdot)$ es la esperanza y $C(\cdot)$ es la función de covarianza. La estacionariedad en sentido amplio también se conoce como estacionariedad débil, estacionariedad de covarianza o estacionariedad de segundo orden. Una serie temporal, $x(t)$, es **estrictamente estacionaria**, si las distribuciones conjuntas de $[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ y $[x(t_1 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)]$ coinciden. Por lo tanto, un proceso estrictamente estacionario con segundos momentos finitos también es débilmente estacionario, pero lo inverso no es cierto.

Ambas definiciones son rigurosas pero idealizadas. En la práctica, solo podemos tener datos para períodos de tiempo finitos; por lo tanto, incluso para verificar estas definiciones, tenemos que hacer aproximaciones. Pocos conjuntos de datos, ya sea de fenómenos naturales o de fuentes artificiales, pueden satisfacer estas definiciones. Se puede argumentar que la dificultad de invocar la estacionariedad no es por principio sino por practicidad; por lo tanto, la mayoría de los casos que enfrentamos son de naturaleza transitoria.

2. Linealidad.

Además de la estacionariedad, el análisis espectral de Fourier también requiere linealidad. Aunque muchos fenómenos naturales pueden ser aproximados por sistemas lineales, también tienden a ser no lineales siempre que sus variaciones se vuelven finitas en amplitud. Para agravar estas complicaciones está la imperfección de nuestras sondas de medición o modelos de procesamiento numérico; las interacciones de las sondas imperfectas incluso con un sistema lineal perfecto pueden hacer que los datos finales no sean lineales. Por las razones anteriores, los datos disponibles suelen tener duración finita, ser no estacionarios y/o pertenecer a sistemas que no son lineales. Esto como una consecuencia intrínseca del fenómeno modelado, o por la forma de medición o de cálculo numérico, ya sea intrínsecamente o mediante interacciones con sondas imperfectas o esquemas numéricos. En estas condiciones, el análisis espectral de Fourier es de uso limitado. Sin embargo, por falta de alternativas, el análisis espectral de Fourier todavía se utiliza para procesar dichos datos. En conclusión, el uso acrítico del análisis espectral de Fourier y la adopción poco inteligente de los supuestos estacionarios y lineales pueden dar resultados engañosos.

5.1. Frecuencia instantánea

Antes de dar una definición formal de frecuencia instantánea, daremos una explicación intuitiva a través de un ejemplo.

Ejemplo 5.2. Sea la señal $x(t) = \cos(\frac{2}{30}\pi t) + \cos(\frac{2}{34}\pi t)$ cuya gráfica se muestra en la Figura 5.

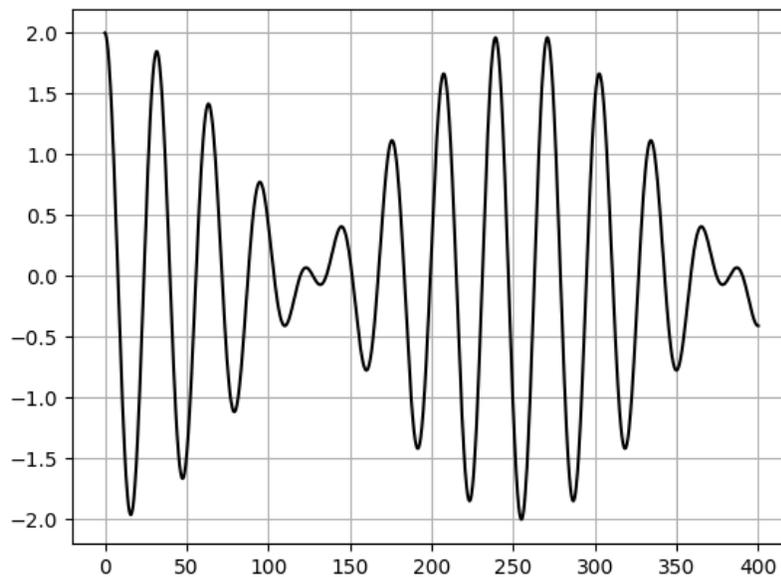
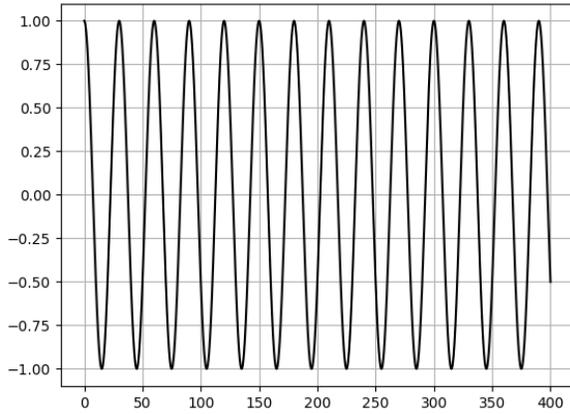
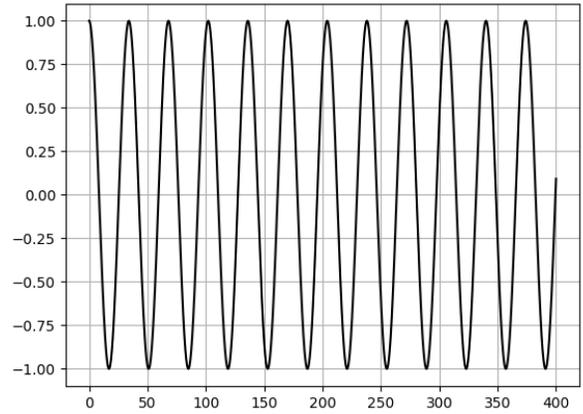


Figura 5: Gráfica de la señal: $x(t) = \cos(\frac{2}{30}\pi t) + \cos(\frac{2}{34}\pi t)$.

Por medio de la transformada de Fourier, dicha señal puede descomponerse en las dos señales $x_1(t) = \cos(\frac{2}{30}\pi t)$ y $x_2(t) = \cos(\frac{2}{34}\pi t)$, con frecuencias $1/30$ y $1/34$ respectivamente, y sus gráficas se pueden observar en la figura 6.



(a) $x_1(t) = \cos(\frac{2}{30}\pi t)$.



(b) $x_2(t) = \cos(\frac{2}{34}\pi t)$.

Figura 6: Componentes de la señal $x(t)$.

Si se quisiera la frecuencia exacta o instantánea de la señal x en $t = t_0$ nos encontraríamos con la siguiente dificultad: observando las frecuencias de x_1 y x_2 , la señal x “tendría dos frecuencias” en t_0 , lo cual no tendría sentido. Sin embargo, sí tiene sentido hablar de frecuencia instantánea para las componentes x_1 y x_2 , cuya frecuencia instantánea en cada punto coincide con la frecuencia de cada señal.

Dado lo anterior, tenemos que la frecuencia instantánea solo puede ser definida para una familia especial de señales, a la cuales se les llama “monocomponente”. Una característica muy particular de x_1 y x_2 es que el ancho de banda es cero en cada caso, una característica que utilizaremos más adelante.

Para una señal del tipo $x(t) = a(t)\cos(\theta(t))$ en la cual $\theta(t)$ es monótona, se cumple una onda completa de la señal cuando $\theta(t)$ recorre el intervalo completo $[a, a + 2\pi]$ y definimos la frecuencia media para $t_0 \in \theta^{-1}([a, a + 2\pi])$ como

$$freq_m = \frac{\theta(t_0 + h) - \theta(t_0)}{2\pi h},$$

tenemos la frecuencia instantánea como

$$freq_{inst} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt},$$

y aplicándolo a x_1 y x_2 del ejemplo anterior, obtenemos las frecuencias ya encontradas.

Hay dos dificultades básicas cuando se define la frecuencia instantánea. La primera está dada por la teoría espectral de Fourier, la cual define la frecuencia para las funciones seno y coseno que abarca toda la longitud de los datos con una amplitud constante. Como una extensión de esta definición, las frecuencias instantáneas también tienen que relacionarse con una función seno o coseno. Por lo tanto, necesitamos al menos una oscilación completa de una onda senoidal o cosenoidal para definir el valor de frecuencia local. Según esta lógica, nada más corto que una oscilación completa servirá. Dicha definición no tendría sentido para los datos no estacionarios para los cuales la frecuencia tiene que cambiar los valores. La

segunda dificultad surge de la manera no única de definir la frecuencia instantánea. Sin embargo, esta dificultad ya no es grave desde la introducción de los medios para hacer que los datos sean analíticos.

A continuación se presentan conceptos necesarios para definir la **frecuencia instantánea**.

Definición 5.3. Sea x una función sobre \mathbb{R} que tiene una singularidad en $r \in (\alpha, \beta)$. El **valor principal de Cauchy**, está dado por la siguiente ecuación:

$$P \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\alpha}^{r-\epsilon} x(t) dt + \int_{r+\epsilon}^{\beta} x(t) dt \right]. \quad (5.1)$$

Muchas de las transformadas de integrales pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$y(t) = \int_a^b k(t, r) x(r) dr,$$

donde $k(t, r)$ es llamado el kernel de la función.

Definición 5.4. Sea x una función sobre \mathbb{R} . La transformada de Hilbert sobre \mathbb{R} , la recta real, está definida para $t \in \mathbb{R}$ por

$$Hx(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(r)}{t-r} dr. \quad (5.2)$$

El kernel de la función en esta definición está dada por

$$k(t, r) = \frac{1}{\pi(t-r)}. \quad (5.3)$$

También podemos definir la transformada de Hilbert como la convolución de la función $x(t)$ y $y(t) = \frac{1}{\pi t}$.

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos funciones sobre \mathbb{R} . Se cumplen las siguientes propiedades:

- **linealidad:** $H\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha Hx(t) + \beta Hy(t)$.
- **conjugación compleja:** $(Hx^*) = (Hx)^*$.
- **Par de transformadas de Hilbert:**

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(r)}{t-r} dr, \quad (5.4)$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(r)}{t-r} dr. \quad (5.5)$$

5.1.1. Señales analíticas

Definición 5.5. Sea $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una señal real. Definimos la señal compleja como

$$z(t) = x(t) + iHx(t), \quad (5.6)$$

y decimos que $z(t)$ es una señal analítica.

Retomando $z(t)$ de la definición anterior, y escribiendo $y(t) = Hx(t)$ podemos reescribirla de la siguiente manera

$$z(t) = x(t) + iy(t) = a(t)e^{i\theta(t)}, \quad (5.7)$$

con

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad (5.8)$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \quad (5.9)$$

y definimos $a(t)$ y $\theta(t)$ como la amplitud y la fase respectivamente.

Por la proposición 4.5 y el teorema 4.7 obtenemos el siguiente resultado:

$$\mathcal{F}[z](\omega) = \begin{cases} 2\mathcal{F}[x](\omega) & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Con la idea de que el espectro de una señal analítica es cero para frecuencias negativas, otra alternativa de definir una señal analítica es la siguiente:

Si la señal real, $x(t)$, tiene espectro, $X(\omega)$, entonces la señal compleja, $z(t)$, cuyo espectro está compuesto solo por las frecuencias positivas de $X(\omega)$, está dada por la transformada inversa de $X(\omega)$, donde la integral solo pasa por las frecuencias positivas,

$$z(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.11)$$

El factor 2 se agrega de modo que la parte real de la señal analítica sea $x(t)$, de lo contrario sería la mitad de eso.

Ahora obtendremos la forma explícita de $z(t)$:

$$\begin{aligned} z(t) &= 2\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-i\omega t'} e^{j\omega t} dt' d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega, \end{aligned} \quad (5.12)$$

usando la ecuación:

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \pi\delta(t) + \frac{i}{t}, \quad (5.13)$$

obtenemos:

$$z(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \left[\pi\delta(t-t') + \frac{i}{t-t'} \right] dt', \quad (5.14)$$

y finalmente obtenemos la expresión para $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt' = x(t) + iHx(t). \quad (5.15)$$

De lo anterior concluimos que el espectro de la señal definida en (5.6) solo puede ser distinto de cero con frecuencias positivas. Los cálculos y demostraciones de lo anterior, se pueden consultar en los libros “Time-frequency analysis” [5] y “Hilbert transforms” [9].

Teóricamente, existen infinitas maneras de definir la parte imaginaria de un señal, pero la transformada de Hilbert es una manera de formar una señal compleja que también es analítica [6]. Ya que la transformada de Hilbert está dada por la convolución con $\frac{1}{t}$, esta resalta las propiedades locales de la señal. La forma polar de la señal analítica aclara aún más la naturaleza local de esta representación: es el mejor ajuste local de una función trigonométrica que varía de amplitud y fase. Dado esto, tenemos la siguiente definición.

Definición 5.6. Sea $x(t)$ una señal analítica, como en la ecuación (5.6), definimos la **frecuencia instantánea** como

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (5.16)$$

Ahora introducimos el término “función monocomponente”. En principio, son necesarias algunas limitaciones en la señal, ya que la frecuencia instantánea dada en la ecuación (5.16) es una función de valor de tiempo único. En un momento dado, solo hay un valor de frecuencia; por lo tanto, solo puede haber una componente y de ahí el nombre “monocomponente”. Para caracterizar las funciones monocomponentes, nos basaremos en el ancho de banda descrita en la sección 4.2, y pediremos que ésta sea pequeña, es decir, que las funciones sean de “banda estrecha”, y luego observaremos algunas propiedades física que deben cumplir.

Comenzamos deduciendo una propiedad que debe cumplir una señal para que sea monocomponente, y se deduce a través del “ancho de banda”, que es la que resalta las propiedades probabilísticas de una señal. Los detalles de los siguientes cálculos que a continuación se muestran, pueden estudiarse en el artículo “The statistical analysis of a random, moving surface” [10].

Sea $x(t)$ una señal y asumimos que es Gaussiana y estacionaria. Asumimos esto porque las señales monocomponentes suelen tener este comportamiento.

El valor esperado de ceros de $x(t)$ por unidad de tiempo está dado por

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2}, \quad (5.17)$$

mientras que el número esperado de valores extremos (mínimos y máximos locales) de $x(t)$ por unidad de tiempo está dado por

$$N_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2}, \quad (5.18)$$

donde m_i es el i -ésimo momento del espectro. Por tanto, el parámetro, ν , definido como

$$N_1^2 - N_0^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{m_4 m_0 - m_2^2}{m_2 m_0} = \frac{1}{\pi^2} \nu^2, \quad (5.19)$$

nos da una medida de ancho de banda estándar. Si $x(t)$ tiene un ancho de banda estrecha, $\nu = 0$, el número esperado de valores extremos y ceros de $x(t)$ tienen que ser iguales. A esto le llamaremos, la propiedad 1.

Otra definición de ancho de banda, es como la que se dio en la ecuación (4.26) del capítulo anterior.

Para una señal de banda estrecha, este valor debe ser pequeño, entonces tanto a como θ de la ecuación (4.26) tienen que ser funciones que varían gradualmente. Desafortunadamente, ambas ecuaciones definen el ancho de banda en el sentido global; Ambos son demasiado restrictivos y carecen de precisión

al mismo tiempo. En consecuencia, la limitación de ancho de banda en la transformada de Hilbert para dar una frecuencia instantánea significativa nunca se ha establecido firmemente.

Para estudiar las restricciones físicas, consideramos el siguiente ejemplo.

Sea $s(t) = \alpha + \sin(t)$ una señal, y analizaremos los casos para $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$ y $\alpha > 1$ y vemos las Figuras 7 – 10.

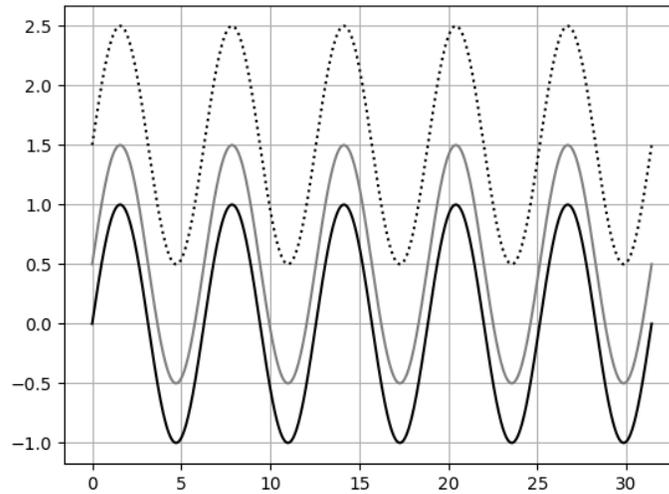


Figura 7: Gráfica de las señales: gráfica color negro: $\alpha = 0$, gráfica color gris: $0 < \alpha < 1$, gráfica punteada: $\alpha > 1$.

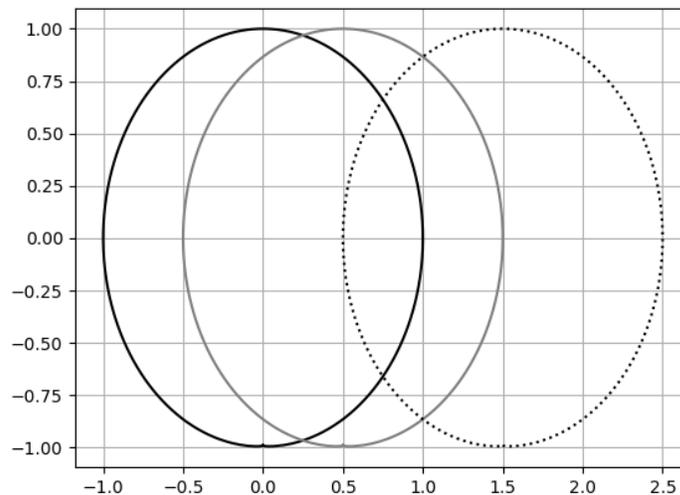


Figura 8: Gráfica de las señales analíticas dadas por la ecuación (5.6): gráfica color negro: $\alpha = 0$, gráfica color gris: $0 < \alpha < 1$, gráfica punteada: $\alpha > 1$.

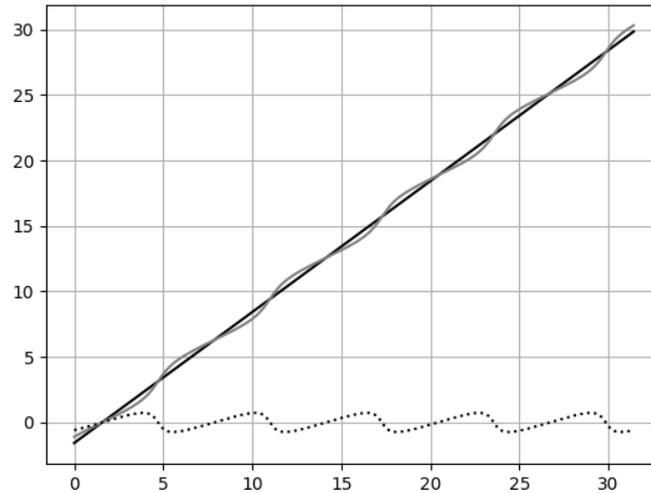


Figura 9: Gráficas de las fases de las señales analíticas con respecto al tiempo, dadas por la ecuación 5.9: gráfica color negro: $\alpha = 0$, gráfica color gris: $0 < \alpha < 1$, gráfica punteada: $\alpha > 1$.

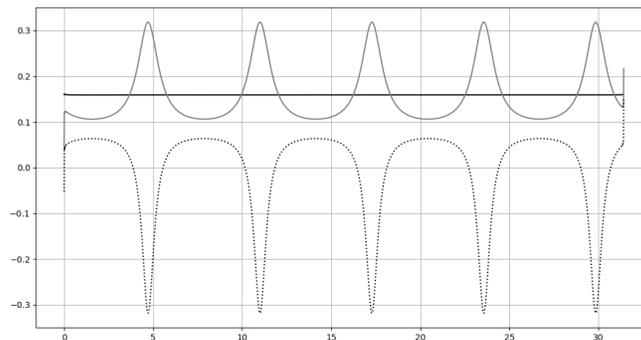


Figura 10: Gráficas de las frecuencias instantáneas de las señales analíticas con respecto al tiempo, dada por la ecuación (5.16): gráfica color negro: $\alpha = 0$, gráfica color gris: $0 < \alpha < 1$, gráfica punteada: $\alpha > 1$.

Estos ejemplos simples ilustran físicamente que, para una señal simple como una función sinusoidal, la frecuencia instantánea puede definirse solo si restringimos la función para que sea simétrica localmente con respecto a la media cero. A esto le llamaremos la propiedad 2.

Para datos en general, cualquier onda en fase (lo cual significa que existe un mínimo entre dos máximos locales consecutivos que es mayor que cero o que existe un máximo entre dos mínimos locales que es menor que cero) será equivalente al caso de $\alpha > 1$ localmente; cualquier onda defasada será equivalente al caso de $0 < \alpha < 1$, localmente. Para tener una frecuencia instantánea significativa, esta restricción local debe usarse. Además, esta restricción local también sugiere un método para descomponer los datos en componentes para los que se puede definir la frecuencia instantánea. Sin embargo, los ejemplos presentados anteriormente en realidad nos conducen a la definición de una clase de funciones, basada en sus propiedades locales, designadas como función modal intrínseca (**IMF**) para las cuales la frecuen-

cia instantánea se puede definir en todas partes. La limitación de interés aquí no está en la existencia de la transformada de Hilbert, que es general y global, sino en la existencia de una frecuencia instantánea significativa que sea restrictiva y local.

5.2. Funciones modales intrínsecas

Los ejemplos simples dados anteriormente proporcionan una interpretación más física de las condiciones restrictivas; también sugieren una forma práctica de descomponer los datos para que todas las componentes cumplan las condiciones que se les imponen. Físicamente, las condiciones necesarias para que podamos definir una frecuencia instantánea significativa es que las funciones son simétricas con respecto a la media cero local y tienen la misma cantidad de cruces por cero y extremos. En base a estas observaciones, se proponen una clase de funciones designadas como funciones modales intrínsecas con la siguiente definición formal.

Definición 5.7. *Una función modal intrínseca (IMF) es una función que satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *En todo el conjunto de datos, el número de extremos y el número de cruces por cero deben ser iguales o difieren a lo sumo por uno.*
2. *Para cualquier punto, el valor medio de la envoltura definida por los máximos locales y la envoltura definida por los mínimos locales es cero.*

La primera condición viene dada por la propiedad 1, definida en la sección anterior, es similar a la tradicional banda estrecha requerida para un proceso gaussiano estacionario. La segunda condición es una nueva idea basada en la propiedad 2 de la sección anterior; modifica el requisito global clásico a uno local; es necesario para que la frecuencia instantánea no tenga las fluctuaciones no deseadas inducidas por las formas de onda asimétricas, como vimos en el ejemplo. Idealmente, el requisito debería ser “la media local de los datos sea cero”. Para los datos no estacionarios, la “media local” implica una “escala de tiempo local” para calcular la media, que es imposible de definir. Como sustituto, usamos la media local de las envolventes definidas por los máximos y mínimos locales para forzar la simetría local. Esta es una aproximación necesaria para evitar la definición de una escala de tiempo promedio local.

Se adopta el nombre “función modal intrínseca” porque representa el modo de oscilación incrustado en los datos. Con esta definición, la IMF en cada ciclo, definido por los cruces por cero, involucra solo un modo de oscilación, no se permiten ondas de conducción complejas. Con esta definición, una IMF no está restringida a una señal de banda estrecha, y puede modularse tanto en amplitud como en frecuencia. De hecho, puede ser no estacionaria. Las funciones puramente moduladas en frecuencia o amplitud pueden ser IMF aunque tengan un ancho de banda finito de acuerdo con la definición tradicional. Una IMF típica se muestra en la Figura 11.

5.3. La Descomposición Empírica Modal

Conocer el buen comportamiento de la transformada de Hilbert de las componentes del IMF es solo el punto de partida. Sin embargo, la mayoría de los datos no son IMF. En cualquier momento, los datos pueden involucrar más de un modo oscilatorio; es por eso que la simple transformada de Hilbert no puede proporcionar la descripción completa del contenido de frecuencia para los datos generales. Tenemos que

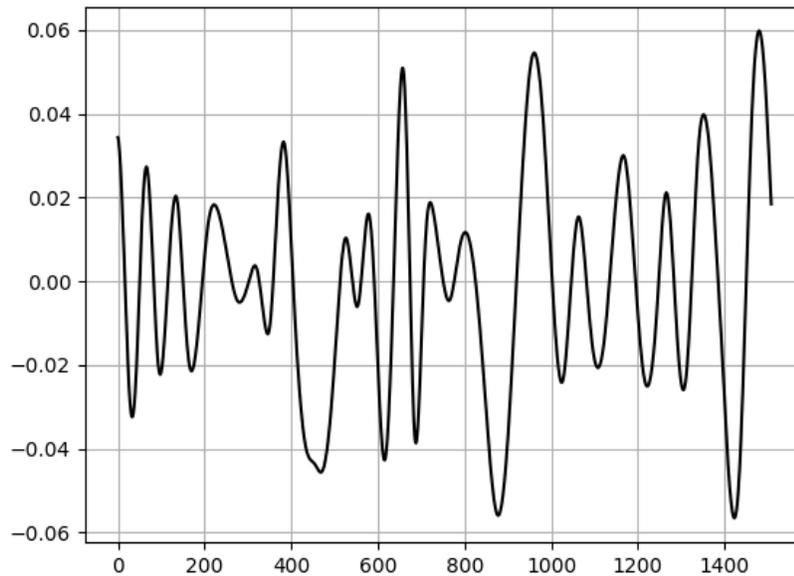


Figura 11: Ejemplo de IMF.

descomponer los datos en componentes **IMFs**.

Se presentará a continuación un nuevo método para tratar con datos no estacionarios y no lineales, descomponiendo la señal primero, y analizando dichas componentes con el espectro de Hilbert. Este nuevo método es intuitivo, directo y adaptativo.

La esencia del método es identificar empíricamente los modos oscilatorios intrínsecos por sus escalas de tiempo, y luego descomponer los datos en consecuencia. El primer paso del análisis de datos es examinar los datos a simple vista. De este examen, uno puede identificar inmediatamente las diferentes escalas directamente de dos maneras: por el lapso de tiempo entre las alternancias sucesivas de máximos y mínimos locales; y por el lapso de tiempo entre los sucesivos cruces por cero. Los extremos locales entrelazados y los cruces por cero nos dan información muy relevante: una ondulación se monta encima de otra, y ambas, a su vez, se montan en otras ondulaciones, y así sucesivamente. Cada una de estas ondulaciones define una escala característica de los datos. Es intrínseco al proceso. Hemos decidido adoptar el lapso de tiempo entre extremos sucesivos como la definición de la escala de tiempo para el modo oscilatorio intrínseco, porque no solo proporciona una resolución mucho más fina de los modos oscilatorios, sino que también se puede aplicar a datos con una media distinta de cero, ya sea todos los valores positivos o negativos, sin cruces por cero. Una manera sistemática de extraerlos, designada como el proceso de cribado, se describe a continuación.

Se trabajará sobre la señal $X(t)$.

En virtud de la definición de **IMF**, el método de descomposición simplemente puede usar las envolturas definidas por los máximos y mínimos locales por separado. Una vez que se identifican los extremos, todos ellos se conectan por medio de un spline cúbico como la envoltura superior. Se repite el procedimiento para los mínimos locales para producir la envoltura inferior. Las envolturas superior e inferior deben cubrir todos los datos entre ellos. Su media se designa como $m_1(t)$, y la diferencia entre los datos

y $m_1(t)$ es el primer componente, $h_1(t)$, es decir

$$X(t) - m_1(t) = h_1(t). \quad (5.20)$$

Idealmente, $h_1(t)$ debería ser una **IMF**, ya que la construcción de $h_1(t)$ descrita anteriormente parece haberse realizado para satisfacer todos los requisitos de la **IMF**. Sin embargo, en realidad, los sobreimpulsos y los subimpulsos son comunes, lo que también puede generar nuevos extremos y cambiar o exagerar los existentes. Sin embargo, sus efectos no son directos, ya que es la media, no las envolturas, lo que entrará en el proceso de cribado. Sin embargo, el problema es real. Incluso si el ajuste es perfecto, se puede amplificar una joroba suave en una pendiente para convertirse en un extremo local al cambiar el cero local de un sistema de coordenadas rectangular a un sistema curvilíneo. Después de la primera ronda de cribado, la joroba puede convertirse en un máximo o un mínimo local en el mismo tiempo. Los nuevos extremos generados de esta manera en realidad recuperan los modos adecuados perdidos en el examen inicial. De hecho, el proceso de cribado puede recuperar olas de baja amplitud con cribados repetidos.

Otra complicación más es que la media de la envoltura puede ser diferente de la media local verdadera para datos no lineales; en consecuencia, todavía pueden existir algunas formas de onda asimétricas, sin importar cuántas veces se criben los datos.

Uno de los propósitos del proceso de cribado es que los perfiles de onda sean más simétricos. Con este fin, el proceso de cribado debe repetirse más veces. En el segundo proceso de cribado, $h_1(t)$ se trata como los datos, luego:

$$h_1(t) - m_{11}(t) = h_{11}(t). \quad (5.21)$$

Podemos repetir este proceso de cribado k -veces hasta que $h_{1k}(t)$ es una **IMF**, esto es:

$$h_{1(k-1)}(t) - m_{1k}(t) = h_{1k}(t). \quad (5.22)$$

Entonces, es definido como

$$c_1 = h_{1k} \quad (5.23)$$

la primer componente **IMF** de los datos.

En todo este proceso el problema básico está en la forma de cribado: Para ello se separa primero el modo local más fino de los datos basándose únicamente en la escala de tiempo característica. Sin embargo, el proceso de cribado tiene dos efectos: (a) eliminar las ondas en fase; y (b) suavizar amplitudes desiguales.

Si bien la primera condición es absolutamente necesaria para que la frecuencia instantánea sea significativa, la segunda condición también es necesaria en caso de que las amplitudes de onda vecinas tengan una disparidad demasiado grande. Desafortunadamente, el segundo efecto, cuando se lleva al extremo, podría eliminar las fluctuaciones de amplitud físicamente significativas. Por lo tanto, el proceso de cribado debe aplicarse con cuidado, ya que llevar el proceso al extremo podría hacer que la **IMF** resultante sea una señal puramente modulada en frecuencia de amplitud constante. Para garantizar que las componentes de la **IMF** retengan suficiente sentido físico de las modulaciones de amplitud y frecuencia, tenemos que determinar un criterio para que el proceso de cribado se detenga. Esto se puede lograr limitando el tamaño de la desviación estándar, SD , calculada a partir de los dos resultados de cribado consecutivos como

$$SD = \sum_{t=0}^T \frac{|h_{1(k-1)}(t) - h_{1k}(t)|^2}{h_{1(k-1)}^2(t)}, \quad (5.24)$$

donde T es el total de datos de la señal $X(t)$.

Un valor típico para SD se puede establecer entre 0.2 y 0.3. Un valor de SD que pertenezca al intervalo $[0.2, 0.3]$ para el procedimiento de cribado es una limitación muy rigurosa para la diferencia entre estos.

En general, c_1 debe contener la escala más fina o el componente de período más corto de la señal. Podemos separar c_1 del resto de los datos por

$$X(t) - c_1(t) = r_1(t). \quad (5.25)$$

Ya que el residuo, r_1 , todavía contiene información de componentes de períodos más largos, se trata como los nuevos datos y se somete al mismo proceso de cribado que se describió anteriormente. Este procedimiento se puede repetir en todos los r_j posteriores, y el resultado es:

$$r_1 - c_2 = r_2, \dots, r_{n-1} - c_n = r_n. \quad (5.26)$$

El proceso de cribado puede detenerse mediante cualquiera de los siguientes criterios: cuando el residuo, r_n , se vuelve una función monotónica, constante o que tenga un único valor extremo, es decir, de la que no se puede extraer más **IMF**. Incluso para datos con media cero, el residuo final puede ser diferente de cero; para datos con una tendencia, entonces el residuo final debe ser esa tendencia. Al resumir las ecuaciones (5.25) y (5.26), finalmente obtenemos

$$X(t) = \sum_{i=1}^n c_i + r_n. \quad (5.27)$$

Por lo tanto, logramos una descomposición de los datos en modos n -empíricos, y un residuo, r_n , que puede ser la tendencia media o una constante.

Resumimos la descomposición empírica modal en la siguiente definición:

Definición 5.8. *La EMD comprende los siguientes pasos:*

1. *Se inicializa el residuo con la señal original $r_0(t) = X(t)$ y se establece el índice de la **IMF** en $k = 1$.*
2. *Se extrae la k -ésima **IMF**:*
 - a) *Se inicializa $h_0(t) = r_{k-1}(t)$ y se inicializa el contador $i = 1$;*
 - b) *Se encuentran los máximos y mínimos locales de $h_{i-1}(t)$;*
 - c) *Se crea la cubierta superior $E_u(t)$ interpolando con un spline cúbico entre los máximos locales (cubierta inferior $E_l(t)$ interpolando con un spline cúbico entre los mínimos locales, respectivamente);*
 - d) *Calcular la media de ambas cubiertas como $m_{i-1}(t) = \frac{E_u(t) + E_l(t)}{2}$;*
 - e) *Restar la cubierta media de la señal de entrada, obteniendo $h_i(t) = h_{i-1}(t) - m_{i-1}(t)$;*
 - f) *verificar si $h_i(t)$ satisface las condiciones de **IMF**:*
 - *si $h_i(t)$ no cumple las condiciones de **IMF**, incrementar $i = i + 1$ y repetir el proceso de cribado desde el paso b);*
 - *si $h_i(t)$ cumple las condiciones de **IMF** o si se cumple que $SD \notin [0.2, 0.3]$ donde SD está dada por la ecuación 5.24, establecer $c_k(t) = h_i(t)$ y definir $r_k(t) = r_{k-1}(t) - c_k(t)$.*

3. cuando el residuo $r_k(t)$ es ya sea, constante, monótonica o contiene un solo extremo se detiene el proceso, de otra manera continuar la descomposición del paso 2 estableciendo $k = k + 1$.

A continuación se muestra un ejemplo de la EMD:

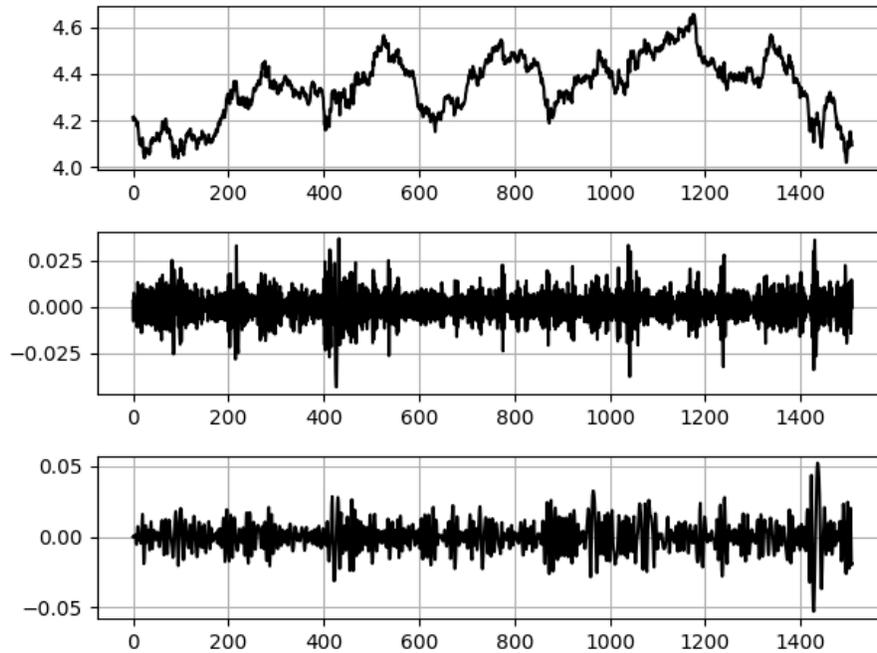


Figura 12: Gráfica 1 es la serie original, gráfica 2 – 3: IMF1 e IMF2, respectivamente.

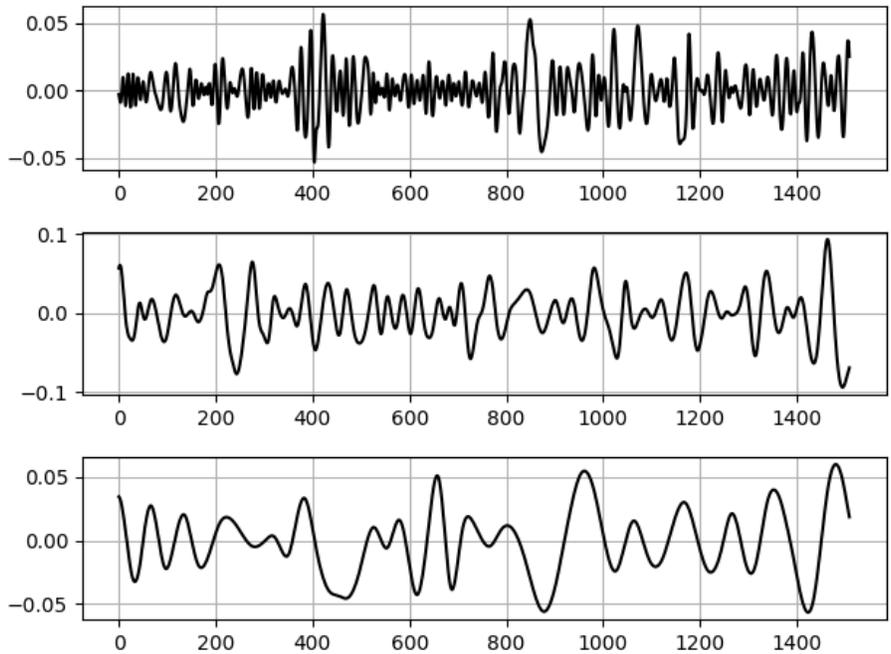


Figura 13: Gráficas de las IMF's 3, 4, 5.

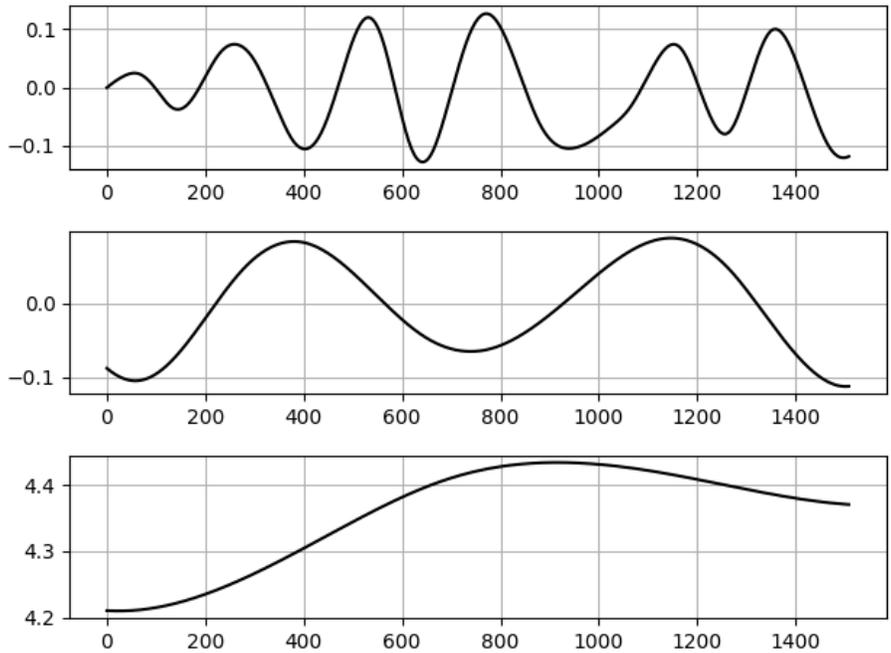


Figura 14: Las primeras dos gráficas corresponden a las IMF's 6, 7 respectivamente, gráfica 3 el residuo.

5.4. Completitud y Ortogonalidad

La completitud en la descomposición EMD está dada por la Ecuación (5.27). Esto se puede verificar computacionalmente y así se ejemplifica en la serie de Figuras 15 a 18.

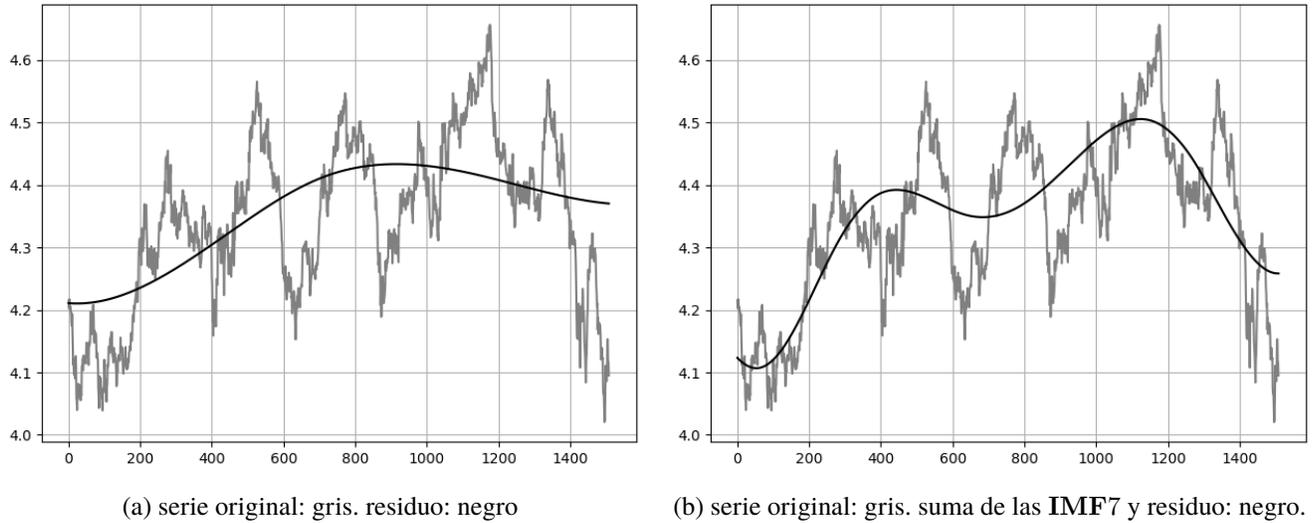


Figura 15: Ejemplo de reconstrucción de una señal.

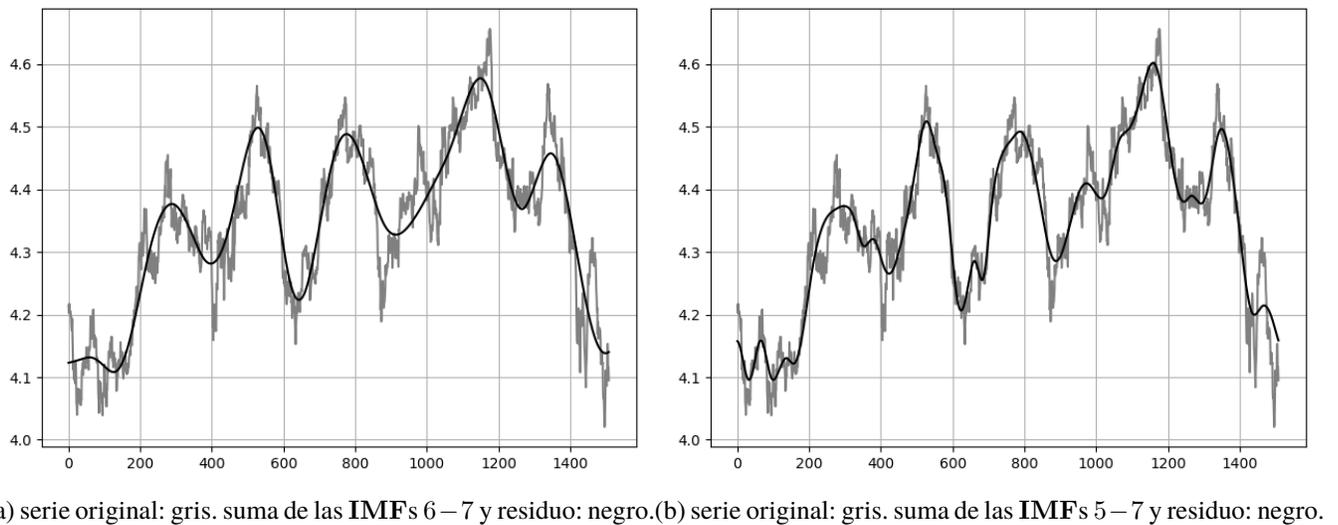
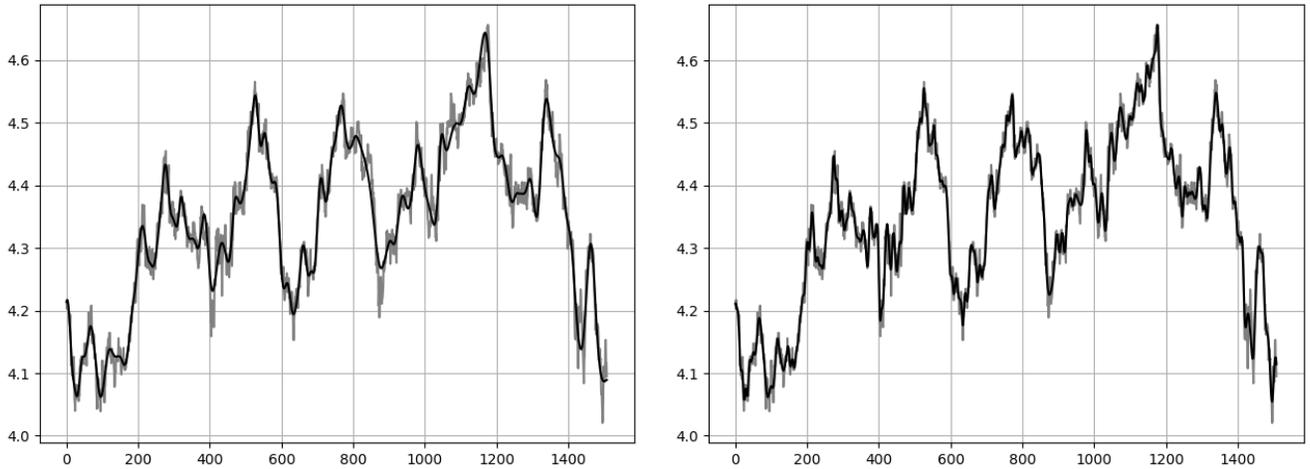


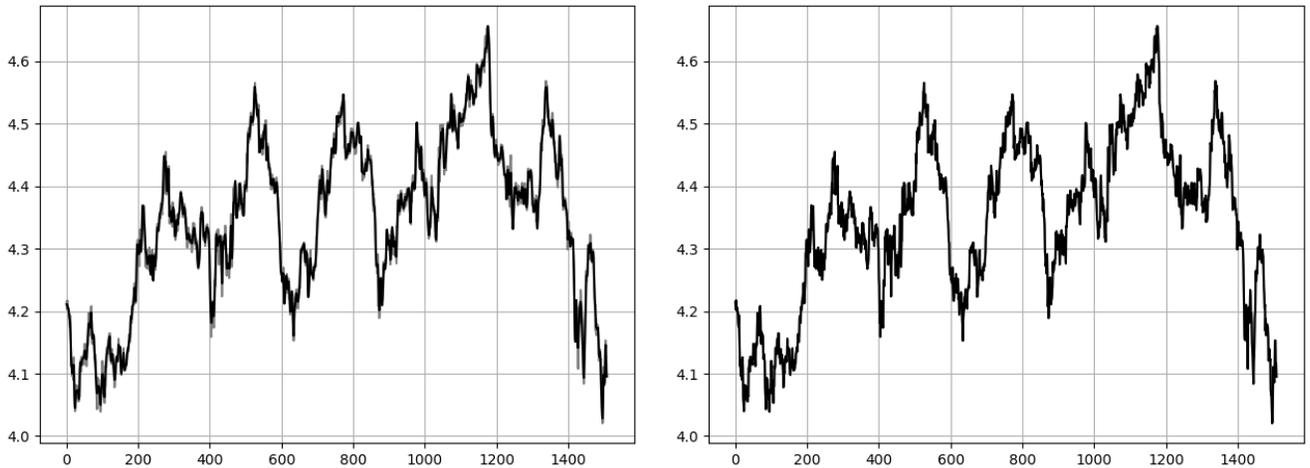
Figura 16: Ejemplo de reconstrucción de una señal.

La diferencia entre la serie original y la serie reconstruida, se puede observar en la Figura 19. Y vemos que la amplitud máxima es menor, en valor absoluto, que 0.75×10^{-15} , el error de redondeo de la precisión de la computadora. Por lo tanto, la completitud está dada teóricamente por la ecuación (5.27), y numéricamente por la Gráfica de la Figura 19.



(a) serie original: gris. suma de las IMF's 4–7 y residuo: negro. (b) serie original: gris. suma de las IMF's 3–7 y residuo: negro.

Figura 17: Ejemplo de reconstrucción de una señal.



(a) serie original: gris. suma de las IMF's 2–7 y residuo: negro. (b) serie original: gris. suma de las IMF's 1–7 y residuo: negro.

Figura 18: Ejemplo de reconstrucción de una señal.

La ortogonalidad no se satisface teóricamente, únicamente se satisface en la práctica, y para comprobarlo hacemos lo siguiente:

Sea T el número de datos de la serie de tiempo $X(t)$, y consideraremos las series de tiempo como un vector en \mathbb{R}^T . Para hacer el siguiente análisis, utilizaremos el producto escalar habitual en \mathbb{R}^T , que lo denotamos por “ \cdot ” y también hacemos uso de la siguiente proposición:

Proposición 5.9. Sean $x, y \in \mathbb{R}^T$ entonces x e y son ortogonales si y sólo si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Esta proposición se sigue directamente de la siguiente expresión:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \cdot y). \quad (5.28)$$

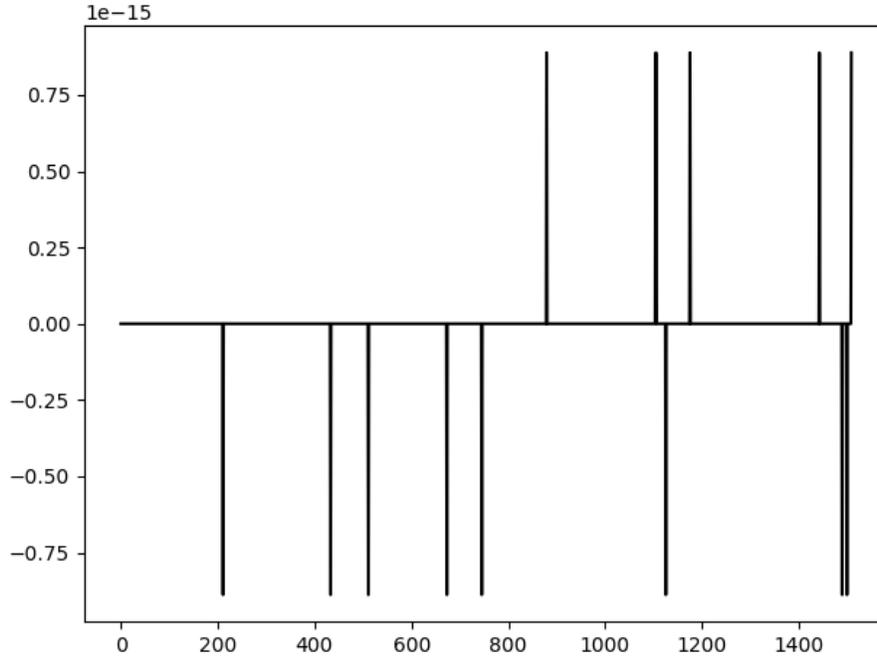


Figura 19: Diferencia de la señal original y la señal reconstruida

El producto escalar viene siendo la covarianza entre I_1 e I_2 , donde I_1 e I_2 representan dos IMF's distintas, y ambas, por como están definidas, tienen media cero.

Ahora escribimos la serie de tiempo, luego de haber aplicado la EMD y haber obtenido las IMF's C_1, \dots, C_n y residuo r_n , de la siguiente manera:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n+1} C_i(t), \quad (5.29)$$

en el cual, $r_n(t) = C_{n+1}(t)$ y en este caso lo consideraremos como una IMF. Para verificar la ortogonalidad de dos IMF's, definimos un índice IO_{ij} , la cual mide la ortogonalidad de las IMF's j e i , y está basada en la proposición anterior:

$$IO_{ij} = \frac{C_i(t) \cdot C_j(t)}{\|C_i(t)\|^2 + \|C_j(t)\|^2}. \quad (5.30)$$

Aplicamos este índice a 10 activos financieros para comprobar la ortogonalidad, y obtuvimos los resultados en la tabla 1 a la 10:

Con los datos obtenidos hemos verificado la ortogonalidad dos a dos.

Ahora definiremos un índice de ortogonalidad IO considerando todas las IMF's.

Primero observamos la siguiente expresión:

$$\|X(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|C_i(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} C_i(t) \cdot C_j(t). \quad (5.31)$$

SNP								
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	IMF7	Residuo
IMF1	0.5	0.009	-0.013	-0.006	-0.0008	-0.0001	-0.0017	-1×10^{-5}
IMF2		0.5	0.007	-0.006	0.006	-0.002	-0.003	4×10^{-5}
IMF3			0.5	0.002	-0.007	-0.001	-0.005	-9×10^{-6}
IMF4				0.5	0.037	0.014	0.02	0.0004
IMF5					0.5	-0.007	-0.025	-2×10^{-4}
IMF6						0.5	-0.017	-0.001
IMF7							0.5	-6×10^{-4}
Residuo								0.5

Tabla 1: Índices de ortogonalidad para el stock SNP.

AXP							
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	Residuo
IMF1	0.5	-0.002	-0.004	0.008	0.002	0.003	2×10^{-6}
IMF2		0.5	-0.006	0.016	0.008	-0.002	-2×10^{-5}
IMF3			0.5	-0.025	-0.027	-0.027	0.0001
IMF4				0.5	0.021	-0.031	-4×10^{-4}
IMF5					0.5	-0.015	-4×10^{-4}
IMF6						0.5	4×10^{-4}
Residuo							0.5

Tabla 2: Índices de ortogonalidad para el stock AXP.

BA							
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	Residuo
IMF1	0.5	0.033	-0.013	0.004	-0.007	-0.003	1.8×10^{-5}
IMF2		0.5	0.022	-0.036	-0.009	0.004	3×10^{-5}
IMF3			0.5	-0.007	0.004	0.005	-4×10^{-5}
IMF4				0.5	-0.021	-0.039	-4×10^{-4}
IMF5					0.5	0.013	2.1×10^{-4}
IMF6						0.5	1.8×10^{-4}
Residuo							0.5

Tabla 3: Índices de ortogonalidad para el stock BA.

Aunque no se cumpla la proposición 5.9 para cuando se tienen más de dos IMFs. Sin embargo, si todas la C_i son ortogonales entre sí, se debe cumplir que el sumando derecho del lado derecho de la ecuación (5.31) debe ser cero, el reverso no necesariamente se cumple. A partir de esto definimos el índice como:

$$IO = \frac{1}{\|X(t)\|^2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} C_i(t) \cdot C_j(t). \quad (5.32)$$

DD							
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	Residuo
IMF1	0.5	0.01	-0.018	-3.4×10^{-4}	0.001	-0.002	-2.5×10^{-5}
IMF2		0.5	-0.012	-1.5×10^{-4}	0.001	0.005	-3.7×10^{-6}
IMF3			0.5	-0.013	-0.014	-0.01	9×10^{-5}
IMF4				0.5	0.037	0.011	-5.2×10^{-4}
IMF5					0.5	0.054	0.003
IMF6						0.5	-0.005
Residuo							0.5

Tabla 4: Índices de ortogonalidad para el stock DD.

DIS								
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	IMF7	Residuo
IMF1	0.5	0.027	-0.028	2×10^{-4}	-0.005	-0.003	9.3×10^{-5}	-7.7×10^{-6}
IMF2		0.5	-0.008	0.003	-5.3×10^{-4}	-0.006	2.6×10^{-4}	3.8×10^{-5}
IMF3			0.5	-0.004	-0.015	-0.008	0.002	2.8×10^{-5}
IMF4				0.5	-0.042	0.01	-0.006	-3.2×10^{-5}
IMF5					0.5	0.019	0.012	1.2×10^{-4}
IMF6						0.5	0.005	3.9×10^{-4}
IMF7							0.5	0.014
Residuo								0.5

Tabla 5: Índices de ortogonalidad para el stock DIS.

GE							
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	Residuo
IMF1	0.5	0.005	-0.005	-0.002	-0.004	-3×10^{-4}	-1.9×10^{-5}
IMF2		0.5	-0.021	5.2×10^{-4}	-0.005	0.004	2.8×10^{-5}
IMF3			0.5	0.015	-0.012	-0.002	2.1×10^{-4}
IMF4				0.5	-0.013	-0.008	4×10^{-4}
IMF5					0.5	-0.01	1.4×10^{-4}
IMF6						0.5	-0.001
Residuo							0.5

Tabla 6: Índices de ortogonalidad para el stock GE.

Y para los mismos activos financieros obtenemos los resultados de la tabla 11.

Y así hemos comprobado experimentalmente la ortogonalidad.

Calculamos los índices según el artículo “The orthogonal Hilbert-Huang transform and its application in earthquake motion recordings analysis” [8].

IMB								
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	IMF7	Residuo
IMF1	0.5	-0.02	-0.014	-0.001	0.003	-0.001	-0.001	-1.5×10^{-5}
IMF2		0.5	0.002	-0.021	8.1×10^{-5}	-0.005	2×10^{-4}	9×10^{-5}
IMF3			0.5	0.03	-0.008	-0.014	-5.3×10^{-4}	-2.9×10^{-5}
IMF4				0.5	0.082	-0.006	-0.006	-8×10^{-5}
IMF5					0.5	-0.044	-0.007	7.3×10^{-5}
IMF6						0.5	0.009	1.1×10^{-4}
IMF7							0.5	0.005
Residuo								0.5

Tabla 7: Índices de ortogonalidad para el stock IBM.

KO								
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	IMF7	Residuo
IMF1	0.5	-0.002	-0.004	0.004	0.005	0.002	-9×10^{-4}	1.3×10^{-6}
IMF2		0.5	0.026	-0.008	7.1×10^{-4}	0.004	0.001	-4.3×10^{-5}
IMF3			0.5	0.022	-0.014	-0.015	-4.5×10^{-4}	2.3×10^{-5}
IMF4				0.5	0.01	0.006	0.022	9.1×10^{-5}
IMF5					0.5	0.002	-0.02	8×10^{-4}
IMF6						0.5	0.048	-2.3×10^{-4}
IMF7							0.5	-7.8×10^{-4}
Residuo								0.5

Tabla 8: Índices de ortogonalidad para el stock KO.

PG								
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	IMF7	Residuo
IMF1	0.5	-0.003	-0.012	-0.009	-0.002	-0.001	-0.002	3.2×10^{-5}
IMF2		0.5	-0.005	-0.013	0.004	-0.004	-0.003	-5.7×10^{-5}
IMF3			0.5	0.011	-6×10^{-4}	3.6×-4	-9.3×10^{-4}	5.6×10^{-5}
IMF4				0.5	0.053	-0.024	-0.015	1.4×10^{-4}
IMF5					0.5	-0.056	0.029	-1.8×10^{-4}
IMF6						0.5	0.079	-0.001
IMF7							0.5	-0.002
Residuo								0.5

Tabla 9: Índices de ortogonalidad para el stock PG.

5.5. El Espectro de Hilbert

Habiendo obtenido las IMF's de una señal o serie de tiempo, no tendremos dificultad en aplicar la transformada de Hilbert a cada componente, y calcular la frecuencia instantánea, según la Ecuación de

UTX								
IMFs	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4	IMF5	IMF6	IMF7	Residuo
IMF1	0.5	0.025	-0.019	-0.006	-0.001	0.002	-0.001	1.2×10^{-5}
IMF2		0.5	0.01	-0.009	0.002	0.003	8.7×10^{-4}	-2.1×10^{-5}
IMF3			0.5	0.038	-0.003	0.001	0.005	3.9×10^{-5}
IMF4				0.5	0.04	-0.024	0.01	1.1×10^{-4}
IMF5					0.5	0.04	-2.1×10^{-5}	-2.6×10^{-4}
IMF6						0.5	0.113	-1.8×10^{-4}
IMF7							0.5	0.003
Residuo								0.5

Tabla 10: Índices de ortogonalidad para el stock UTX.

IO	
SNP	-0.00536
AXP	-0.00087
BA	-7.84×10^{-5}
DD	-0.00514
DIS	0.028213
GE	-0.00115
IBM	0.00987
KO	-0.00026
PG	-0.00498
UTX	0.00575

Tabla 11: Cálculo del IO para 10 stocks.

5.16. Luego de aplicar la transformada de Hilbert a cada componente **IMF**, podemos expresar los datos de la siguiente manera:

$$X(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) e^{i \int \omega_j(t) dt}. \quad (5.33)$$

Aquí hemos omitido el residuo, r_n , ya que es una función monótonica o una constante. Aunque la transformada de Hilbert puede tratar la tendencia monótonica como parte de una oscilación más larga, la energía involucrada en la tendencia residual podría ser demasiado poderosa. Teniendo en cuenta la incertidumbre de la tendencia más larga, y en interés de la información contenida en los otros componentes de baja energía y alta frecuencia, el residuo debe omitirse.

La ecuación, proporciona la amplitud y la frecuencia de cada componente en función del tiempo. Los mismos datos, si se expanden en representación de Fourier, serían:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\omega_j t}, \quad (5.34)$$

con ambos a_j y ω_j constantes. El contraste entre las ecuaciones es claro: las IMF's representan una expansión de Fourier generalizada. La amplitud variable y la frecuencia instantánea no solo han mejorado en gran medida la eficiencia de la expansión, sino que también han permitido que la expansión acomode datos no estacionarios. Con la expansión de las IMF's, la amplitud y las modulaciones de frecuencia también están claramente separadas. Por lo tanto, hemos superado la restricción de la amplitud constante y la expansión de Fourier de frecuencia fija, y hemos llegado a una representación de amplitud y frecuencia variable. Esta expresión es numérica.

La ecuación también nos permite representar la amplitud y la frecuencia instantánea como funciones del tiempo en un diagrama tridimensional, en el que la amplitud puede graficarse en el plano frecuencia-tiempo. Esta distribución frecuencia-tiempo de la amplitud se designa como espectro de amplitud de Hilbert, $H(\omega, t)$, o simplemente espectro de Hilbert. Una forma explícita del espectro de Hilbert la encontramos en la siguiente definición:

Definición 5.10. *Sea la señal $X(t)$ descompuesta como en la ecuación (5.33), entonces el espectro de Hilbert para cada IMF está dado por:*

$$H_j(\omega, t) = \begin{cases} a_j(t) & \text{si } \omega = \omega(t), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El espectro de Hilbert para la señal completa $X(t)$, está dada por:

$$H(\omega, t) = \sum_{j=1}^n H_j(\omega, t). \quad (5.35)$$

A partir de la definición anterior, damos también la definición de espectro marginal de Hilbert:

Definición 5.11. *Sea $H(\omega, t)$ el espectro de Hilbert de la señal $X(t)$. Definimos el **espectro marginal de Hilbert**, o únicamente **espectro marginal**, como:*

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t) dt. \quad (5.36)$$

El espectro marginal ofrece una medida de la contribución de amplitud total (o energía) de cada valor de frecuencia. Representa la amplitud acumulada en todo el intervalo de datos en un sentido probabilístico. La frecuencia en $H(\omega, t)$ o $h(\omega)$ tiene un significado totalmente diferente del análisis espectral de Fourier. En la representación de Fourier, la existencia de energía a una frecuencia, ω , significa que una componente de una onda senoidal o cosenoidal persistió durante el período de tiempo de los datos. Aquí, la existencia de energía en la frecuencia, ω , significa solo que, en todo el lapso de tiempo de los datos, existe una mayor probabilidad de que tal onda haya aparecido localmente. El peso asignado a cada celda de frecuencia de tiempo es la amplitud local. En consecuencia, la frecuencia en el espectro marginal indica solo la probabilidad de que exista una oscilación con tal frecuencia. El tiempo exacto de ocurrencia de esa oscilación se da en todo el espectro de Hilbert.

Además del espectro marginal, también podemos definir el nivel de densidad de energía instantánea, IE , como

$$IE(t) = \int_{\omega} H^2(\omega, t) d\omega. \quad (5.37)$$

Como es de esperar, IE depende únicamente del tiempo; puede ser usada para verificar la fluctuación de energía.

Ahora se puede discutir la definición de estacionariedad cuantitativamente. Como se mencionó al principio del capítulo, las definiciones clásicas de estacionariedad dadas son dicotómicas: un proceso es estacionario o no estacionario, la descripción es solo cualitativa. Dichas definiciones son estrictas e inútiles al mismo tiempo: pocos conjuntos de datos pueden satisfacer el rigor de estas definiciones; en consecuencia, nadie se molesta en usarlos para verificar la estacionariedad. Para cuantificar aún más los procesos estadísticos, se necesita un índice para dar una medida cuantitativa de cuán lejos se desvía el proceso de la estacionariedad. Ahora, una vez establecido el espectro de Hilbert, podemos introducir el índice de estacionariedad de la siguiente manera.

El primer paso para definir el grado de estacionariedad, $DS(\omega)$ es encontrar la media del espectro marginal $n(\omega)$ como:

$$n(\omega) = \frac{1}{T}h(\omega). \quad (5.38)$$

Entonces el grado de estacionariedad es definido como

$$DS(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{H(\omega, t)}{n(\omega)} \right)^2 dt, \quad (5.39)$$

en el que el integrando es similar a la intermitencia definida en el análisis wavelet. Se adopta la representación de integración porque proporciona una medida cuantitativa de todo el conjunto de datos. Para un proceso estacionario, el espectro de Hilbert no puede ser una función del tiempo. Entonces, el espectro de Hilbert consistirá solo en líneas de contorno horizontales y espectro marginal sería T -veces el espectro de Hilbert; $DS(\omega)$ será entonces idénticamente cero. Solo bajo esta condición el espectro marginal será idéntico al espectro de Fourier. Si el espectro de Hilbert depende del tiempo, el índice no será cero. Cuanto mayor sea el valor del índice, más no estacionario es el proceso.

La ecuación define la estacionariedad como una función de frecuencia. Esto es necesario, ya que ciertos componentes de frecuencia pueden ser no estacionarios, mientras que otros componentes permanecen estacionarios. Un ejemplo son las olas de viento esporádicas que circulan en un oleaje uniforme: el componente del oleaje de baja frecuencia es estacionario, mientras que las ondas de viento de alta frecuencia son intermitentes y, por lo tanto, no estacionarias.

El grado de estacionariedad también puede ser una función implícita del tiempo, ya que la definición depende del tiempo de integración en las ecuaciones. Por lo tanto, un proceso puede ser estacionario por partes. Por otro lado, para un estallido singular en una señal estacionaria, el proceso puede considerarse casi estacionario si tomamos un tiempo largo, pero no estacionario si miramos al vecino inmediato. La estacionariedad puede ser una propiedad complicada del proceso: para cualquier dato más corto que un período típico de onda larga, el proceso puede parecer transitorio, pero a medida que la longitud de los datos se alarga, el proceso puede tener muchos períodos de onda más largos y volverse estacionario. Por otro lado, los datos pueden ser localmente estacionarios, mientras que en un sentido prolongado no son estacionarios.

Definimos entonces una nueva forma de medir la estacionariedad con una ventana de tiempo ΔT de la siguiente manera:

$$DSS(\omega, \Delta T) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\overline{H(\omega, t)}}{n(\omega)} \right)^2 dt, \quad (5.40)$$

donde la línea indica un promedio sobre un lapso de tiempo definido pero más corto, ΔT , que la duración del tiempo total de los datos, T . Para movimientos periódicos, el ΔT puede ser el período. Sin embargo, esta escala de tiempo es difícil de definir con precisión para sistemas dinámicos no estacionarios de alta dimensión. Incluso con esta dificultad, la definición de DSS podría ser más útil para caracterizar variables aleatorias a partir de fenómenos naturales.

5.6. Validación y Calibración del Espectro de Hilbert

Mediante la descomposición empírica modal y el análisis espectral de Hilbert asociado, obtuvimos la representación probabilística del espectro de Hilbert de los datos no estacionarios. Ahora, validaremos el enfoque y los resultados, y calibraremos su fidelidad en comparación con el mejor método existente, el análisis wavelet. Antes de continuar, examinemos primero el significado físico de la EMD.

Históricamente, hay dos métodos importantes para expandir una función en series: las expansiones de Taylor y Fourier, ambas poderosas pero con enfoques totalmente diferentes. La serie de Taylor para una función, $f(t)$, se expande cerca de un punto, t_0 , como

$$f(t + t_0) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \dots, \quad (5.41)$$

en el cual las primas y (n) indican el orden de derivación. La expansión de Fourier de la misma función se expande por la siguiente expresión:

$$f(t) = \sum_j^n a_j e^{i\omega_j t}, \quad (5.42)$$

en el cual los coeficientes a_j están dados por

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_t f(t) e^{-i\omega_j t} dt. \quad (5.43)$$

La diferencia matemática entre las dos expansiones es la siguiente: Mientras la expansión de Taylor es basada en las propiedades de la función a través de la derivación, la expansión de Fourier es basada en las propiedades de la función a través de la integración. Aunque ambas expansiones son válidas dentro del rango de convergencia, existen diferentes requisitos para cada función: una de las condiciones necesarias para que exista la expansión de Taylor es que la función debe ser analítica en el n -ésimo orden. Dicha restricción no es necesaria para la expansión de Fourier, que puede aplicarse a funciones con saltos finitos numerables. La expansión de Fourier introduce una idea poderosa: expandir una función con cualquier base ortogonal y completa. Por lo tanto, hay infinitas maneras de descomponer una señal. Por ejemplo, una señal puede descomponerse en componentes armónicos simples con la transformada de Fourier. Del mismo modo, la misma señal también puede descomponerse en polinomios de Hermite, o algunas otras funciones especiales como los polinomios de Legendre o Laguerre. De hecho, cualquier colección de funciones ortogonales puede servir como base para una descomposición de un sistema lineal.

La expansión EMD es al mismo tiempo diferente y similar a las expansiones anteriores. Se basa en la integración, como en la transformada de Hilbert, y en la diferenciación, como en la frecuencia instantánea. La integración en la transformación de Hilbert no es exactamente global, ya que es la convolución de la función con $1/t$, hace que el resultado sea extremadamente local. Esencialmente, la transformada de Hilbert proporciona el mejor ajuste con una función sinusoidal a los datos ponderados por $1/t$.

Ahora mostraremos dos ejemplos y los compararemos con las transformadas ya conocidas.

Ejemplo 5.12. Sea $x(t)$ la señal descrita en la Figura 20, la cual consta de un solo pulso.

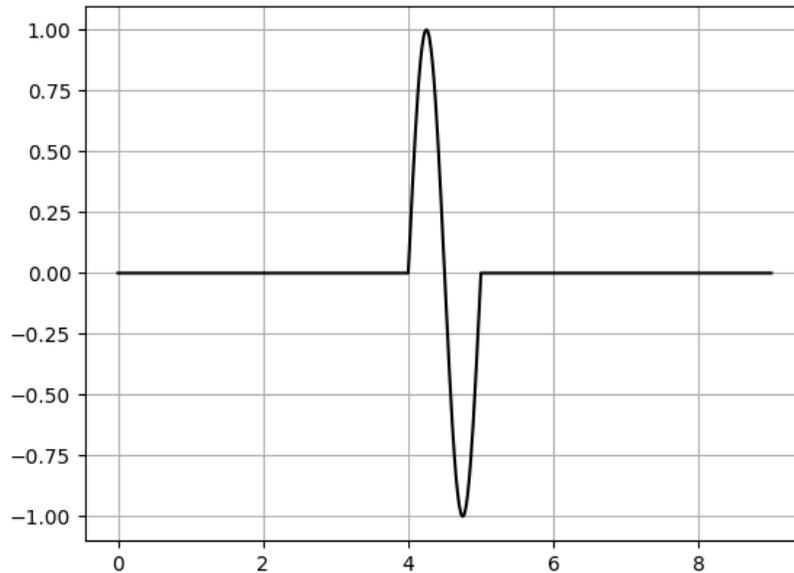


Figura 20: Señal que consiste de un solo pulso.

Calculamos sus respectivos espectros de Hilbert y wavelet que se muestran en las figuras 21 y 22, respectivamente (se grafican sus curvas de nivel).

Se puede observar de las gráficas, que el espectro de Hilbert muestra una mejor localización de la energía a comparación de la de wavelet, que distribuye energía donde prácticamente no hay.

Ejemplo 5.13. Ahora consideraremos la señal $x(t) = e^{-0.01t} \cos(\frac{2}{32}\pi t)$ que a simple vista se ve que tiene una frecuencia de $\frac{1}{32} = 0.03125$. Su gráfica se refleja en la Figura 23.

El espectro de Hilbert se refleja en la Figura 24 y su gráfica de curvas de nivel se observa en la Figura 25. EL espectro de wavelet puede verse en la Figura 26.

Al igual que el ejemplo anterior, el Espectro de Hilbert muestra una mejor localización de la energía, y se concentra muy cerca de la frecuencia teórica.

Por último hacemos una comparación de el espectro marginal de Hilbert y wavelet, junto con el espectro de Fourier, y obtenemos los resultados de la Figura 27.

Y podemos concluir de los resultados, que el espectro de Hilbert expresa mejor la distribución de energía real, a comparación de los otros dos espectros.

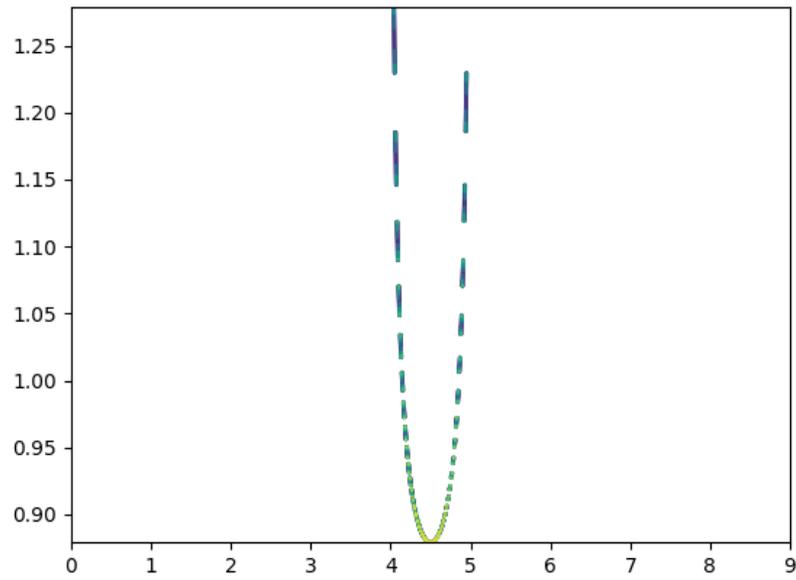


Figura 21: Curvas de nivel del espectro de Hilbert. El eje “x” representa el tiempo y el eje “y” representa las frecuencias.

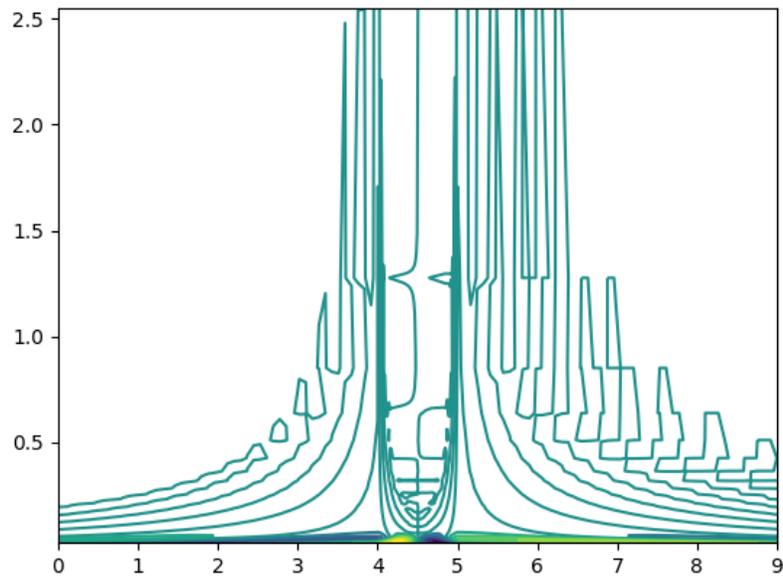


Figura 22: Curvas de nivel del espectro de wavelet. El eje “x” representa el tiempo y el eje “y” representa las frecuencias.

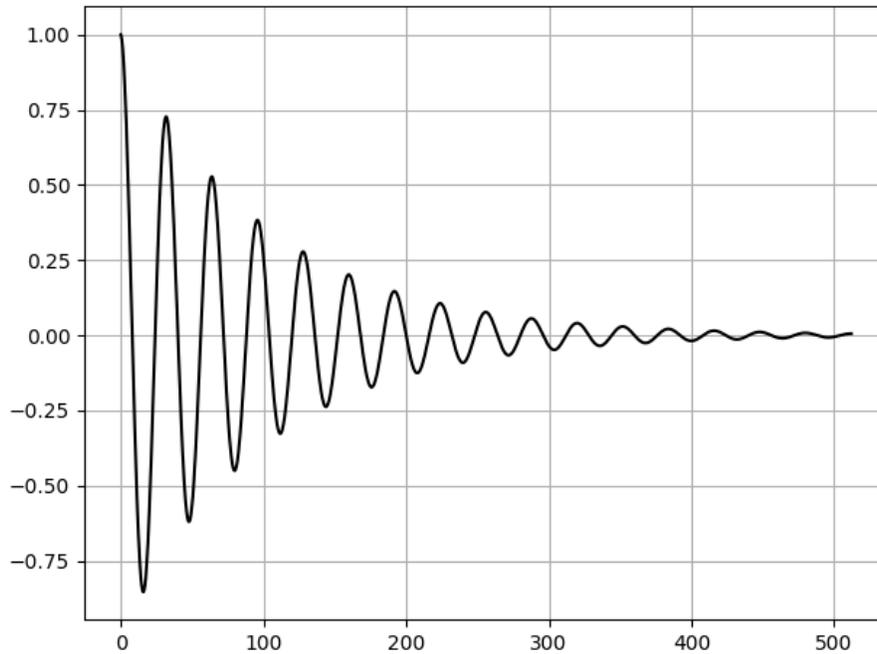


Figura 23: Señal $x(t) = e^{-0.01t} \cos(\frac{2}{32}\pi t)$.

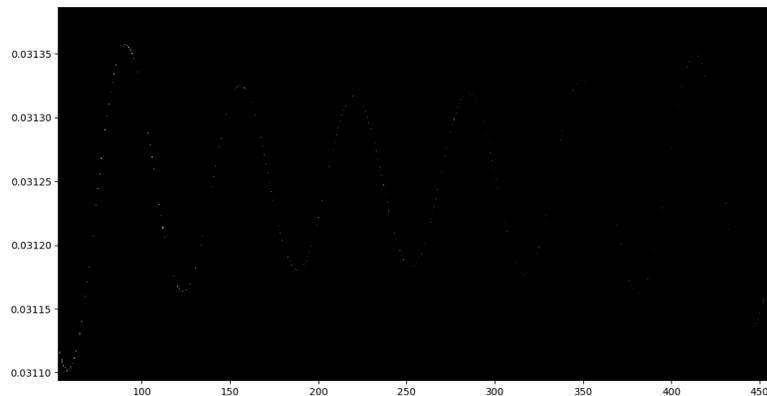


Figura 24: Espectro de Hilbert de la señal $x(t)$. El eje “x” representa el tiempo y el eje “y” representa las frecuencias.

6. Aplicaciones de la EMD en el Análisis Técnico

El análisis técnico es el estudio de los movimientos de precios o movimientos de mercado, principalmente mediante el uso de gráficos, con el propósito de pronosticar las futuras tendencias de los precios y poder diseñar estrategias de inversión.

Existen diversas herramientas en el análisis técnico. Para nuestras aplicaciones utilizaremos las **Gráficas de velas**, y podemos ver un ejemplo de estas gráficas en la Figura 28.

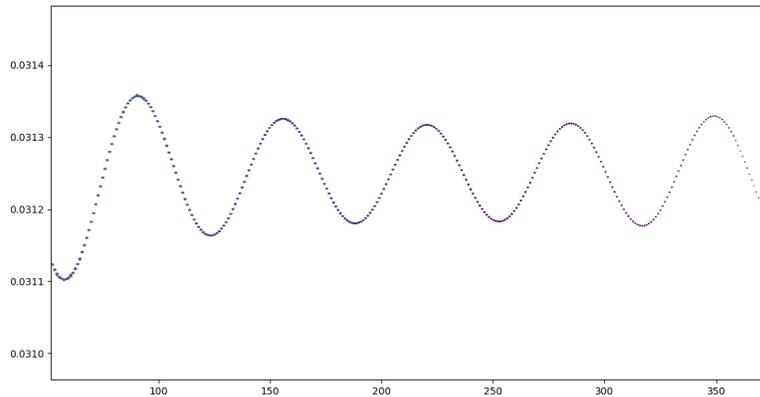


Figura 25: Curvas de nivel del espectro de Hilbert de la señal $x(t)$. El eje “x” representa el tiempo y el eje “y” representa las frecuencias.

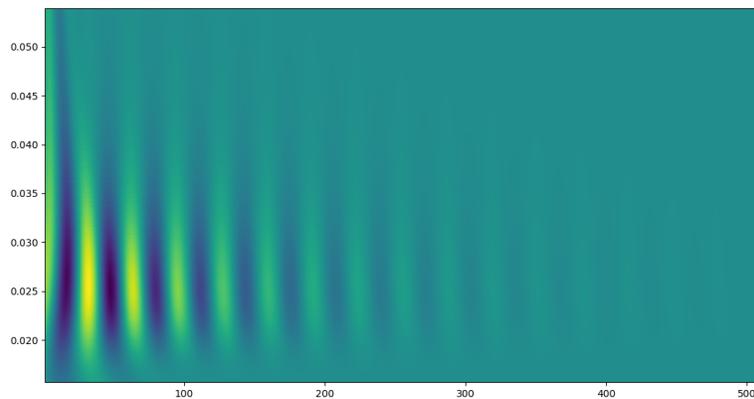


Figura 26: Espectro de wavelet de la señal $x(t)$. El eje “x” representa el tiempo y el eje “y” representa las frecuencias.

En la que cada vela proporciona la siguiente información: precio de apertura, precio máximo, precio mínimo y precio de cierre de una acción en un día en específico. Según su color tienen un significado, que se observa en la Figura 29.

6.1. Estrategias de Inversión

Una estrategia de inversión es un método de compra y venta en los mercados financieros, basándose en algoritmos predefinidos que utilizan precios históricos. El algoritmo genera como salida una serie de tiempo con señales de compra-venta de cierto activo financiero de manera diaria. Escencialmente hace lo siguiente:

1. El algoritmo recibe una serie tiempo, con datos suficientes, que representa los precios de un activo financiero (normalmente la serie termina el mismo día en el que se quiere hacer la operación).

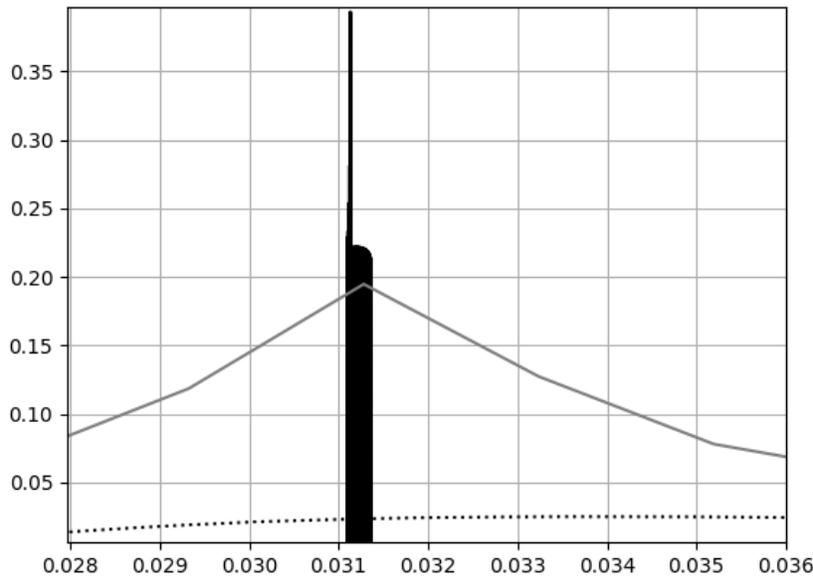


Figura 27: Gráfica negra: Espectro marginal de Hilbert, Gráfica gris: Espectro de Fourier, Gráfica punteada: Espectro marginal de wavelet. El eje “x” representa las frecuencias y el eje “y” la amplitud acumulada sobre todos los t.

2. El algoritmo retorna solamente uno de los siguientes valores: 1, -1 o 0, que representa una señal de compra, venta o neutral (no se compra ni se vende), respectivamente.

Los activos financiero son aquellas inversiones intangibles. Representan la propiedad sobre una compañía, o sirven de evidencia que alguien debe al inversionista. Algunos ejemplos de activos financieros son: acciones, bonos, letras de cambio, fondos cotizados o ETF (singlas correspondientes al término en inglés Exchange-Traded Funds), certificados de depósito y futuros financieros.

Para comprobar o refutar la efectividad de cierta estrategia, utilizamos técnicas de **backtesting**, que consiste en ejecutar el algoritmo para una serie de tiempo, simulando las operaciones de inversión generadas por la estrategia, y observar las ganancias que se obtendrían. La efectividad de las ganancias se evalúa en términos del **APR**.

Es muy común utilizar **ventanas móviles** sobre series de tiempo en estrategias de inversión, las cuales consisten en seleccionar todas las series de tiempo de cierta longitud fija y orden cronológico sobre una serie de tiempo y realizarle una operación, por ejemplo, calcularle la media (a esta ventana en específico se le conoce como **media móvil**, si calculáramos la desviación estándar se le llamaría **desviación estándar móvil**). Por ejemplo, si tenemos la serie de tiempo $X(t)$ para $t = 1, 2, 3, 4, 5$ con $X(t) = t$ y encontramos la media móvil de longitud 2, tendríamos la serie $m(t) = (2t - 1)/2$ para $t = 2, \dots, 5$ y esa sería la media móvil.



Figura 28: Ejemplo de una gráfica de velas.

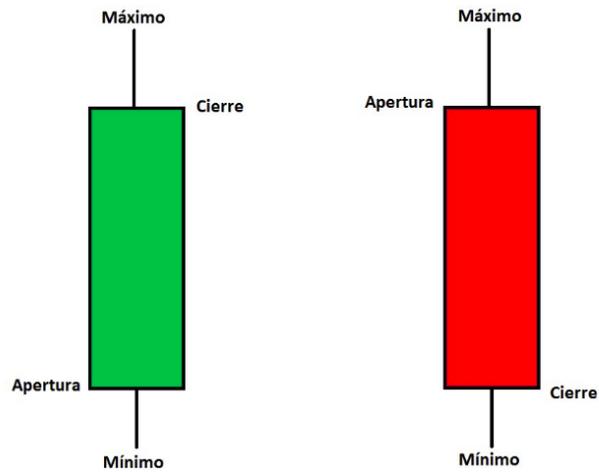


Figura 29: Fuente: www.rankia.cl.

6.1.1. Media Móvil de Longitud Variable

En la estrategia que se explica en esta sección y en la Sección 6.1.2, se utilizan dos medias móviles: a la de mayor período le llamaremos **media móvil larga** y a la de menor período **media móvil corta**.

Sobre la media móvil larga se forma una banda con cierto porcentaje de anchura, a la cual únicamente llamaremos **banda**. Cuando el porcentaje de anchura es cero, la banda coincide con la media móvil larga.

Las estrategias de inversión de Media Móvil de Longitud Variable [2] (VMA por sus siglas en inglés), generan una señal de compra (venta) cuando la media móvil corta está por encima (debajo) de la banda. Para una banda de anchura cero, todos los días se clasifican como “comprar” o “vender”. Para una banda de anchura distinta de cero, todos los días se clasifican como “comprar”, “vender” o “neutral”, cuando no hay señal generada.

Las estrategias más populares, y las que utilizaremos, son 1 – 50 (el período de la media móvil corta es 1 día y el período de la media móvil larga es de 50 días), 1 – 150, 5 – 150, 1 – 200, 2 – 200. La bandas que se utilizan para cada estrategia son de anchura del 0 % y 1 % con respecto a la media móvil larga. Con lo anterior tenemos un total de 10 estrategias.

Un ejemplo de cómo se generan las señales de compra, venta o neutral, se puede observar en la Figura 30.

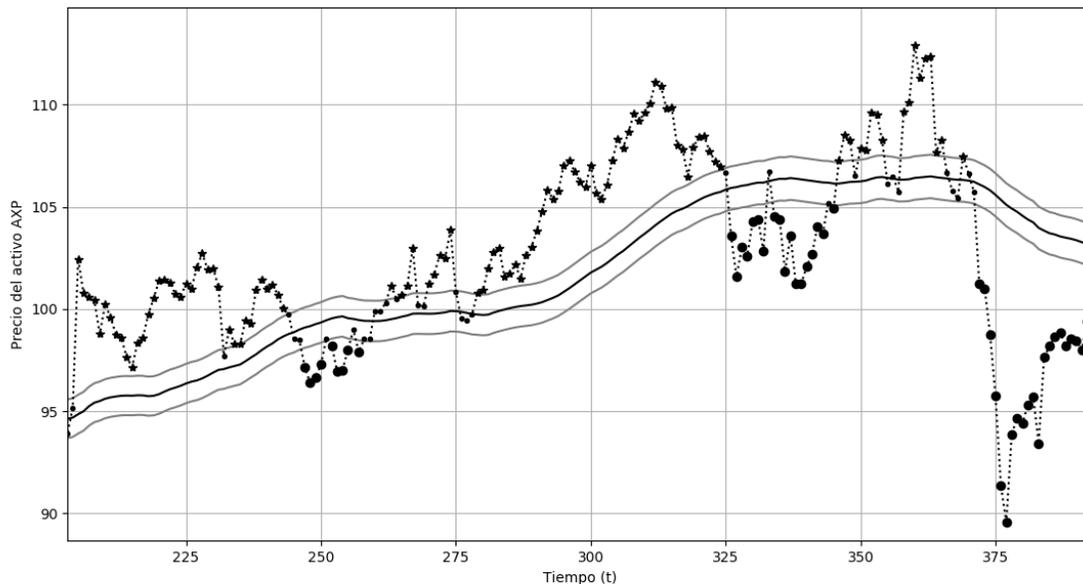


Figura 30: Las gráficas grises forman la banda, la gráfica negra en la media móvil larga y la gráfica punteada es la media móvil corta. Los asteriscos en el tiempo t son las señales de compra. Los puntos pequeños en el tiempo t son señales neutras. Los puntos grandes en el tiempo t son las señales de venta.

6.1.2. Promedio Móvil Fijo

De manera parecida a las estrategias VMA, las estrategias de Promedio Móvil Fijo [2] (FMA por sus siglas en inglés) generan una señal de compra (venta) cuando la media móvil corta traspasa la banda desde abajo (arriba). Luego de traspasar la banda, la señal de compra o venta se mantiene por un periodo fijo de 10 días y se ignoran todas las señales que ocurren durante este período. Utilizaremos las mismas estrategias que VMA, es decir, 1 – 50, 1 – 150, 5 – 150, 1 – 200, 2 – 200, con una banda de 0 % y 1 % con respecto a la media móvil larga. En total son 10 estrategias.

6.1.3. Ruptura del Rango de Negociación (Trading Range Break)

En la Estrategia de Ruptura del Rango de Negociación [2] (TRB por sus siglas en inglés) es necesario crear dos series de tiempo de la siguiente manera: Se crea primero una ventana móvil de n días, y para cada ventana se encuentra el máximo, y para esta serie de tiempo se crea una banda de cierto porcentaje de anchura, llamamos a esa banda “máximos”. Análogamente, con la misma ventana móvil, encontramos el mínimo para cada ventana y de nuevo creamos una banda anchura del mismo porcentaje, llamamos a esa banda “mínimos”.

Las estrategias TRB generan una señal de compra (venta) cuando el precio sube por encima (cae por debajo) de máximos (mínimos). Las estrategias que utilizaremos son para $n = 50, 150, 200$ y con anchura del 0% y 1% sobre máximos y mínimos. En total son 6 estrategias.

Cabe mencionar que para estas tres estrategias se ha utilizado solo los precios de cierre del gráfico de velas.

6.1.4. Índice de Fortaleza Relativo

Las estrategias de Índice de Fortaleza Relativo [13] (RSI por sus siglas en inglés) consisten en lo siguiente. Sea $C(t)$ la serie de tiempo de los precios de cierre en las gráficas de velas. Definimos entonces:

$$U(t) = \begin{cases} C(t) - C(t-1) & \text{si } C(t) > C(t-1) \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$D(t) = \begin{cases} C(t-1) - C(t) & \text{si } C(t-1) > C(t) \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Con $U(t)$ y $D(t)$ definimos:

$$U_N(t) = \frac{\sum_{r=t-N+1}^t U(r)}{N}, \quad (6.3)$$

$$D_N(t) = \frac{\sum_{r=t-N+1}^t D(r)}{N}, \quad (6.4)$$

$$RS_N(t) = \frac{U_N(t)}{D_N(t)}. \quad (6.5)$$

Y el RSI en el tiempo t está definido como:

$$RSI_N(t) = 100 - \frac{100}{1 + RS_N(t)} \quad (6.6)$$

La estrategia RSI genera una señal de compra cuando el RSI es mayor que 50 y se genera una señal de venta cuando RSI es menor que 50. Utilizaremos $N = 5, 10, 20, 30$.

6.1.5. Momentos de Intradía e Interdía

Las estrategias de Momentos de Intradía e Interdía [12] (IIM por sus siglas en inglés) se dividen en 5 estrategias, que se describen a continuación. Sean $O(t)$, $H(t)$, $L(t)$ y $C(t)$, los precios de apertura, máximo, mínimo y de cierre en el día t . Definimos primero la Media del Momento Intradía (AIM) como:

$$AIM = \frac{\sum_{r=t-N+1}^t |C(r) - O(r)|}{N}, \quad (6.7)$$

y la Media del Momento Interdía (AOM) como:

$$AOM = \frac{\sum_{r=t-N+1}^t |C(r) - C(r-1)|}{N}. \quad (6.8)$$

En esta parte tenemos 5 estrategias:

■ Estrategia 1.

Compra:

$$C(t) > O(t) \text{ y } C(t) - O(t) > k * AIM_N(t), \quad (6.9)$$

venta:

$$O(t) > C(t) \text{ y } O(t) - C(t) > k * AIM_N(t). \quad (6.10)$$

■ Estrategia 2.

Compra:

$$(6.9) \text{ y } C(t) - O(t) > H(t) - C(t) + O(t) - L(t), \quad (6.11)$$

venta:

$$(6.10) \text{ y } O(t) - C(t) > H(t) - O(t) + C(t) - L(t). \quad (6.12)$$

■ Estrategia 3.

Compra:

$$C(t) > C(t-1) \text{ y } C(t) - C(t-1) > k * AOM_N(t), \quad (6.13)$$

venta:

$$C(t-1) > C(t) \text{ y } C(t-1) - C(t) > k * AOM_N(t). \quad (6.14)$$

■ Estrategia 4.

Compra:

$$(6.9) \text{ o } (6.13) \quad (6.15)$$

venta:

$$(6.10) \text{ o } (6.14) \quad (6.16)$$

■ Estrategia 5.

Compra:

$$(6.9) \text{ y } (6.13) \quad (6.17)$$

venta:

$$(6.10) \text{ y } (6.14) \quad (6.18)$$

En estas estrategias utilizaremos los parámetros: $N = 10, 20, 50$ y $k = 1, 1.5, 2$ y tenemos un total de 45 estrategias.

6.2. Implementación de la EMD en estrategias del análisis técnico

La metodología que utilizaremos es la siguiente: Se calcula el APR para cada una de las estrategias descritas en la sección anterior, sobre cada uno de los siguientes activos financieros (que es una serie de tiempo de velas, las cuales proporcionan los precios de apertura, máximo, mínimo y cierre para cada día): AXP, BA, CAT, DD, DIS, GE, IBM, JPM, KO, MCD, MMM, MRK, PG, UTX. Ahora para aplicar la EMD a cada estrategia, haremos lo siguiente:

1. Para cada día tomamos una serie de tiempo donde cada vela corresponde a un segundo.
2. Aplicamos la EMD a esa serie de tiempo y conservamos únicamente el residuo. En otras palabras, quitamos el ruido a esa serie de tiempo y utilizaremos solo la tendencia de ésta.
3. Para ese residuo que obtuvimos, encontramos los precios de: apertura, máximo, mínimo y cierre, y creamos una nueva vela para cada día.
4. A esa nueva serie de tiempo de velas se le aplica la misma estrategia y calculamos el APR.

6.3. Resultados experimentales

Como se describió en la sección 6.2, utilizaremos 14 activos financieros, que en este caso son acciones (stocks) que conforman el índice DJIA (Dow Jones Industrial Average), para un total de 45 estrategias de inversión.

Nuestro análisis de los resultados lo haremos de la siguiente manera: Sea r un vector en \mathbb{R}^{14} que representa los APRs para una estrategia en específico de cada acción. Análogamente, sea $r' \in \mathbb{R}^{14}$ que representa los APRs para una estrategia en específico de cada acción pero utilizando la metodología descrita en la sección 6.2. r y r' son muestras de esa estrategia. Sea μ_1 y μ_2 las medias de los APRs en r y r' respectivamente. Para investigar si las ganancias mejoran utilizando la EMD, haremos la prueba de hipótesis nula, la cual es:

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$, con la hipótesis alternativa: $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$.

Usaremos el t-test para comparar dichas medias, ya que es la indicada cuando se quieren comparar dos medias, y lo definimos como:

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{s^2/n}} \quad (6.19)$$

donde \bar{d} es la diferencia de las medias de las dos muestras μ_1 y μ_2 , s^2 la varianza de de la muestra, n el tamaño de la muestra y $n - 1$ los grados de libertad.

NOTA: LOS RESULTADOS SERÁN MOSTRADOS HASTA EL DÍA DE LA PRESENTACIÓN FINAL DEL TRABAJO, DEBIDO A QUE LA DESCARGA DE LAS SERIES DE TIEMPO NECESARIAS DEMORA MUCHO TIEMPO.

7. Conclusiones

La combinación de la Descomposición Empírica Modal (EMD) y el espectro de Hilbert da como resultado una herramienta muy útil para hacer análisis de series de tiempo que no son estacionarias ni lineales, como lo son, en general, las series de precios de los activos financieros. Un aspecto muy importante de la EMD es la forma de extraer las IMF's, a través del “cribado”, que permite que datos muy complicados puedan descomponerse en componentes donde se puede definir la frecuencia instantánea. Estas IMF's que conforman la descomposición son prácticamente ortogonales y completos. La expansión en términos de IMF's tiene la apariencia de una expansión en series de Fourier, con la diferencia que la amplitud y la frecuencia son variables.

Existen muchas aplicaciones de la EMD y el espectro de Hilbert, además de las que mostramos en este trabajo. Como se puede observar en la sección 9 del artículo “The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis” [7] se han hecho aplicaciones a datos de olas y tsunamis, datos de altímetro del océano ecuatorial, datos de terremotos, entre otro. Esto nos da la premisa, al ser la EMD un método creado hace pocos años, que pueden hacerse muchas más aplicaciones y explotar más su utilidad.

Referencias

- [1] Álvarez, A. (2014). *Fundamentos generales de matemáticas financieras* (chapter 1). Medellín, Colombia: Centro Editorial Esumer. Recuperado el, 1.
- [2] Brock, W., Lakonishok, J., & LeBaron, B. (1992). Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *The Journal of finance*, 47(5), 1731-1764.
- [3] Chan, E. (2013). *Algorithmic trading: winning strategies and their rationale* (Vol. 625). John Wiley & Sons.
- [4] Chan, R. H., Ma, A. K. C., & Pan, H. (2016). EMD-CANDLESTICK: METHODOLOGY AND APPLICATIONS. *Journal of Technical Analysis*, (69), 21-38.
- [5] Cohen, L. (1995). *Time-frequency analysis* (Vol. 778, Chapter 1 & 2). Prentice hall.
- [6] Hahn, S. L., & Snopek, K. M. (2016). *Complex and hypercomplex analytic signals: Theory and applications*, (chapter 5). Artech House.
- [7] Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Shih, H. H., Zheng, Q., *et al.*, & Liu, H. H. (1998). The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences*, 454(1971), 903-995.
- [8] Huang, T. L., Ren, W. X., & Lou, M. L. (2008, October). The orthogonal Hilbert-Huang transform and its application in earthquake motion recordings analysis. In *14th World Conference on Earthquake Engineering, Beijing* (pp. 12-17).
- [9] King, F. W. (2009). *Hilbert transforms* (Vol. 1, Chapter 1 & 2). Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] Longuet-Higgins, M. S. (1957). The statistical analysis of a random, moving surface. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 249(966), 321-387.
- [11] Nava, N., Di Matteo, T., & Aste, T. (2016). Anomalous volatility scaling in high frequency financial data. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 447, 434-445.
- [12] Wing-Shing Lam, V., Chong, T. T. L., & Wong, W. K. (2007). Profitability of intraday and interday momentum strategies. *Applied Economics Letters*, 14(15), 1103-1108.
- [13] Wong, W. K., Manzur, M., & Chew, B. K. (2003). How rewarding is technical analysis? Evidence from Singapore stock market. *Applied Financial Economics*, 13(7), 543-551.