Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Zacatenco

Operadores de Toeplitz Oblicuos

Tesis que presenta

Kevyn Jaime Murcia Mayorga

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la Especialidad de Matemáticas

Directora de Tesis:
Dra. Maribel Loaiza Leyva

Ciudad de México

Diciembre 2020

Dedicatoria

A Raúl Mayorga, mi abuelo una persona resiliente, modesto, sencillo paciente, del que aprendí a vivir en armonía con la naturaleza, a adaptarme y aceptar cada situación buena o mala que la vida presenta. Gracias a esto veo la vida como una aventura, como el agua que que fluye y toma la forma del camino por donde va.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de mis estudios y este proyecto.

A mi familia, (mamá y abuelo) por ser razón principal, que me brindaba la fuerza y motivación para seguir adelante y poder así concluir.

Agradezco a mi asesora de tesis, la Dra. Maribel Loaiza Leyva, por atención, comprensión, apoyo y paciencia para esperar a que este trabajo pudiera finalizar.

A mis amigos que me acompañaron y apoyaron en los momentos difíciles.

Sobretodo agradezco a Dios/Universo/Tao/La vida, por haberme otorgado la oportunidad de vivir esta aventura, darme las cualidades necesarias, rodearme de personas adecuadas, y vivir las experiencias necesarias buenas y malas de las que aprendí y me ayudaron a terminar esta empresa.

Índice general

Resumen

En este trabajo estudiamos un tipo especial de operadores de Toeplitz llamados operadores de Toeplitz oblicuos. Extendemos para $k \geq 2$ los resultados obtenidos por Mark C. Ho en [10]. Incluimos las propiedades básicas de estos operadores en el espacio de Bergman y estudiamos estos operadores en el espacio de Bergman armónico.

Abstract

In this work we study a special type of Toeplitz operators called slant Toeplitz operators. We extend to $k \geq 2$ the results made by Mark C. Ho in [10]. We include the basic properties of these operators acting on the Bergman space and we study these operators in the harmonic Bergman space of the unit disk.

Introducción.

En este trabajo se estudia un tipo especial de operadores de Toeplitz llamados operadores de Toeplitz oblicuos. Éstos surgen en aplicaciones de ondículas. Varios autores han conectado la suavidad de las ondículas con las propiedades espectrales de operadores de Toeplitz oblicuos. Algunos de ellos han asociado la regularidad de Besov de soluciones de la ecuación de refinamiento con el radio espectral de un operador de Toeplitz oblicuo asociado. Otros autores como T. Goodman, C. Micchelli y J. Ward muestran una conexión entre los radios espectrales y condiciones para las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales que se encuentran en la clase de Lipschitz.

Las propiedades matemáticas de estos operadores fueron estudiadas por primera vez por Mark C. Ho en [10], [12] y [11]. Hay varios trabajos posteriores que estudian las propiedades de estos operadores en diferentes espacios por ejemplo S. C Arora y Ruchika Batra estudian algunas propiedades de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Hardy H^2 en [1], Jun Yang, Yufeng Lu y Chaomei Liu estudian la conmutatividad de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en $L^2(\mathbb{T})$ y en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ en [18], mientras que Gopal Datt y Neelima Ohri más recientemente han estudiado algunas propiedades de los operadores de Toeplitz oblicuos esta vez en el espacio de Lebesgue del toro en [4].

Los Capítulos 1 y 2 de este trabajo resumen las propiedades principales de los operadores de Toeplitz en los espacios $L^2(\mathbb{T})$, el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y el espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$.

El Capítulo 3 se enfoca al estudio de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k. Se inluyen algunos resultados estudiados por Mark C. Ho en [10], en donde se estudian propiedades interesantes de los operadores de Toeplitz oblicuos en $L^2(\mathbb{T})$ cuando $k = 2$. Cambiando ligeramente las hipótesis, generalizamos muchos de estos resultados para cualquier $k \geq 2$. Algunos de ellos son: cálculos de la norma del operador y de su radio espectral, la caracterización de tales operadores que consiste en que son soluciones de la ecuación $XM_{z^k} = M_zX$. También demostramos que el álgebra C^* generada por estos operadores es irreducible y que espectro de un operador de Toeplitz oblicuo de orden k contiene un disco cerrado. Hasta donde sabemos esta es la primera vez que se estudian estas propiedades cuando $k > 2$. Este capítulo incluye también las propiedades de los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Bergman, estudiadas en [18]. Entre ellas la forma integral de este operador, condiciones equivalentes para la conmutatividad de estos operadores y propiedades del espectro puntual. La Sección 3.3 es un breve resumen de algunas propiedades de los operadores de Hankel oblicuos y Hankel esencialmente oblicuos de orden k. Para finalizar, incluimos el estudio de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k esta vez actuando en el espacio de Bergman armónico. Hasta donde sabemos esta es la primera vez que se estudian dichos operadores en este espacio. Algunos de los resultados que se obtienen son similares a los obtenidos en el espacio de Bergman.

Capítulo 1

Operadores de Toeplitz

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert formado por funciones que toman valores complejos y sea X un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Denotemos por $P_X : \mathcal{H} \longrightarrow X$ a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en X. Supongamos que $\mathcal{H}$ es invariante bajo operadores de multiplicación por funciones acotadas. Es decir, si φ es acotada,

$$M_\varphi \mathcal{H} \subset \mathcal{H}.$$

La idea general de un operador de Toeplitz actuando en X, es la de tomar una función acotada φ, la cual se llama el símbolo del operador, y luego tomar la composición $P_X M_\varphi$. Formalmente un operador de Toeplitz con símbolo φ es el operador $T_\varphi : X \longrightarrow X$ dado por

$$T_\varphi = P_X M_\varphi.$$

En este trabajo consideraremos operadores de Toeplitz que actuan en los siguientes espacios; el espacio de Hardy, el espacio de Bergman y el espacio de Bergman armónico. El primero se considera como funciones definidas en la circunferencia unitaria y los otros dos están formados por funciones definidas en el disco unitario. Este capítulos reune algunas de las propiedades principales de los operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Hardy y en el espacio de Bergman.

1.1. Operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy.

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$. Consideremos la medida de Lebesgue normalizada λ en $\mathbb{T}$, es decir $\lambda(\mathbb{T}) = 1$. Entonces $L^p(\mathbb{T})$ es el espacio de las funciones p-integrables con respecto a λ. El espacio de Hardy H^p, para $p = 1, 2, \cdots, \infty$, es el subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{T})$ dado por

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{in\theta} dt \ \ para \ n = 1, 2, 3, \cdots \right\}.$$

La base ortonormal estándar de $L^2(\mathbb{T})$ está dada por el conjunto de funciones $\{\chi_n = e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, por lo que H^2 es la cerradura de los polinomios trigonométricos.

Análogo al espacio de Hardy en la circunferencia $\mathbb{T}$, tenemos el espacio de Hardy en el disco $H^2(\mathbb{D})$ el cual consiste de las funciones analíticas que tienen una representación en serie de potencias cuyos coeficientes son cuadrado sumables, es decir

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_i z^n \ \text{ y } \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \right\}.$$

$H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert, donde el producto interno está dado por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Note que podemos identificar el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ con el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ mediante la asignación

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Sea P_{H^2} la proyección de $L^2(\mathbb{T})$ sobre H^2. Para $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ el **operador de Toeplitz** T_φ, con símbolo φ, actuando en H^2 está dado por

$$T_\varphi(f) = P_{H^2} M_\varphi(f) \quad \text{para todo} \quad f \in H^2.$$

La matriz del operador de Toeplitz T_φ respecto a la base $\{\chi_n = e^{in\theta}\}_{n \geq 0}$ de H^2 está dada por $(\hat{\varphi}_{n-m})_{n,m \geq 0}$ donde

$$\hat{\varphi}_{n-m} := \langle T_\varphi \chi_n, \chi_m \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi \chi_{n-m} d\lambda.$$

Por lo tanto tenemos que

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \\ \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \ddots \\ \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \ddots \\ \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

donde $\hat{\varphi}_k$ es el k-ésimo coeficiente de Fourier de φ con respecto a la base de H^2 dada anteriormente. Como podemos ver la matriz T_φ es constante en las diagonales, tales matrices son llamadas matrices de Toeplitz. Formalmente una matriz finita, doblemente infinita o infinita singular en una matriz de Toeplitz si es constante en las diagonales paralelas a la diagonal principal.

Podemos pensar en asignar a cada función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ el operador de Toeplitz con símbolo φ. Específicamente sea

$$\xi : L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow B(H^2) \ \text{ dado por } \ \xi(\varphi) = T_\varphi, \tag{1.1.2}$$

tal mapeo es contractivo y $*$-lineal pero ξ no es multiplicativo por lo que ξ no es un homomorfismo. La siguiente proposición nos dice cuando ξ es multiplicativo y cuando dos operadores de Toeplitz conmutan en el espacio de Hardy. Por lo tanto tenemos las asignaciones multiplicativas

$$\zeta : H^\infty \longrightarrow B(H^2)$$

y

$$\overline{\zeta} : \overline{H^\infty} \longrightarrow B(H^2),$$

donde $\overline{H^\infty} = \{\overline{\varphi} \ : \ \varphi \in H^\infty\}$.

Proposición 1.1.1. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces*

a) Si $\psi, \overline{\phi} \in H^\infty$, entonces $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ y $T_\phi T_\varphi = T_{\phi\varphi}$.

b) El operador de Toeplitz T_φ conmuta con T_ψ si y solo si ψ o $\overline{\psi}$ pertenecen a H^∞ .

Demostración. Si $\psi \in H^\infty$, entonces $T_\psi = M_\psi$, luego $T_\varphi T_\psi = T_\varphi M_\psi = T_{\varphi\psi}$. Por otro lado si $\overline{\phi} \in H^\infty$, entonces por el resultado anterior $T_{\overline{\varphi}} T_{\overline{\phi}} = T_{\overline{\varphi}\overline{\phi}}$. Por lo tanto $T_\phi T_\varphi = (T_{\overline{\varphi}} T_{\overline{\phi}})^* = (T_{\overline{\varphi}\overline{\phi}})^* = T_{\phi\varphi}$. El recíproco también es cierto y se puede consultar en [9], por lo tanto el literal b) se sigue de a). □

Los siguientes resultados nos dan una relación entre los operadores de Toeplitz y operadores de Hankel que veremos más adelante. Para ello dadas $f, g \in H^2$ consideremos el operador $f \otimes g : H^2 \longrightarrow H^2$ donde $f \otimes g$ está dado por

$$f \otimes g(h) = \langle h, g\rangle f.$$

Consideremos además el operador de traslación a la derecha $U : H^2 \longrightarrow H^2$ dado en la base de H^2 por

$$U(e^{in\theta}) = e^{i(n+1)\theta} \ \text{ para todo } \ n \geq 0.$$

En el Teorema 3.2.6 en [2] podemos ver que; un operador T en H^2 es un operador de Toeplitz si y solo si su matriz respecto a la base estándar de H^2 es una matriz de Toeplitz. Por lo tanto, un cálculo sencillo con los elementos de la base de H^2 para calcular los coeficientes de la matriz de cada uno de los operadores T y U^*TU, muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2. *Un operador T es un operador de Toeplitz si y solo si $U^*TU = T$.*

Proposición 1.1.3. *Si T_φ y T_ψ son operadores de Toeplitz y U es el operador traslación a la derecha, entonces*

$$U^*T_\varphi T_\psi U - T_\varphi T_\psi = P_{H^2}(e^{-i\theta}\varphi) \otimes P_{H^2}(e^{-i\theta}\overline{\psi}).$$

Demostración. Tenemos que $I = UU^* + 1 \otimes 1$, entonces

$$\begin{aligned} U^*T_\varphi T_\psi U &= U^*T_\varphi(UU^* + 1 \otimes 1)T_\psi U \\ &= U^*T_\varphi UU^*T_\psi U + U^*T_\varphi(1 \otimes 1)T_\psi U \\ &= T_\varphi T_\psi + (U^*T_\varphi(1)) \otimes (U^*T_{\overline{\psi}}(1)) \quad \text{(por la proposición anterior).} \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} U^*T_\varphi(1) &= (P_{H^2} M_{\overline{\varphi}} U)^*(1) \\ &= (P_{H^2} M_{\overline{\varphi} e^{i\theta}})^*(1) \\ &= (T_{e^{-i\theta}\varphi})(1) = P_{H^2}(e^{-i\theta}\varphi). \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $U^*T_{\overline{\psi}}(1) = P_{H^2}(e^{-i\theta}\overline{\psi})$, por lo tanto el resultado se sigue. □

Supongamos que $T_\varphi T_\psi$ es un operador de Toeplitz entonces $U^* T_\varphi T_\psi U = T_\varphi T_\psi$ y, por la Proposición 1.1.3, tenemos que

$$0 = U^* T_\varphi T_\psi U - T_\varphi T_\psi = P_{H^2}(e^{-i\theta}\varphi) \otimes P_{H^2}(e^{-i\theta}\overline{\psi}).$$

Lo cual implica que $P_{H^2}(e^{-i\theta}\varphi) = 0$ o $P_{H^2}(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = 0$. Esto equivale a $\overline{\varphi} \in H^2$ o $\psi \in H^2$. Por lo tanto tenemos el teorema siguiente, que es una forma generalizada del literal a) de la Proposición 1.1.1.

Teorema 1.1.4. *Dados $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces $T_\varphi T_\psi$ es un operador de Toeplitz si y solo si $\overline{\varphi} \in H^2$ o $\psi \in H^2$. En ambos casos $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.*

1.1.1. Propiedades espectrales de los operadores de Toeplitz.

En el Teorema 7.6 en [5] se demuestra que si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ es tal que T_φ es invertible, entonces φ es invertible en $L^\infty(\mathbb{T})$. Más aún, si $\varphi \in H^\infty$, entonces T_φ es invertible si y solo si $\varphi \in H^\infty$. Por lo tanto para $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, la ecuación $T_{\varphi-\lambda} = T_\varphi - \lambda I$ implica que

$$\sigma(M_\varphi) \subset \sigma(T_\varphi),$$

donde $\sigma(A)$ denota el espectro del operador A. De este resultado y del hecho que $essran(\varphi) = \sigma(M_\varphi)$ se desprende fácilmente que la función ξ dada por (1.1.2) es una isometría. En efecto,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \ essran(\varphi)\} \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_\lambda)\} = r(T_\varphi) \leq \|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Supongamos que el rango esencial de una función invertible $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ está contenido en el semiplano derecho, entonces podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\delta(essran(\varphi)) \subset B(1,1)$. Entonces $\|\delta\varphi - 1\| < 1$ y como ξ es una isometría, también tenemos que $\|I - T_{\delta\varphi}\| < 1$ y por lo tanto δT_φ es invertible.

De este resultado tenemos que todo semiplano abierto que contiene a $essran(\varphi)$ también contiene a $\sigma(T_\varphi)$ (haciendo una traslación y rotación de tal semiplano). Por lo tanto, dado que la envolvente convexa $CH(X)$ de un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ está dada por la intersección de todos los semiplanos abiertos que contienen a X se tiene el teorema siguiente.

Teorema 1.1.5. *(Brown-Halmos) Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $\sigma(T_\varphi) \subset CH(essran(\varphi))$.*

Para el caso particular en el que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ es una función de valor real tenemos

$$\sigma(T_\varphi) = [ess\inf(\varphi), ess\sup(\varphi)].$$

1.1.2. Subálgebras generadas por operadores de Toeplitz y compacidad.

Dado un subconjunto S de $L^\infty(\mathbb{T})$, sea $\mathcal{T}(S)$ la subálgebra cerrada más pequeña de $B(H^2)$ que contiene a $\{T_\varphi : \ \varphi \in S\}$. Las pruebas de los siguientes resultados se pueden ver en [5], Capítulo 7.

Teorema 1.1.6. *Si $\mathcal{C}$ es el ideal conmutador de $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ el mapeo $L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{C}$, inducido por ξ, es un $*$-isomorfismo isométrico. Por lo tanto existe una sucesión exacta corta*

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\}.$$

Denotaremos como $\mathcal{K}(H^2)$ al ideal de $B(H^2)$ formado por todos los operadores compactos en H^2. La siguiente proposición muestra que el ideal conmutador contiene a $\mathcal{K}(H^2)$.

Proposición 1.1.7. *El ideal conmutador en el álgebra C^* $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$ es $\mathcal{K}(H^2)$. Además el ideal conmutador $\mathcal{C}$ de $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ contiene a $\mathcal{K}(H^2)$.*

El siguiente corolario se sigue del Teorema 1.1.6 y de la proposición anterior.

Corolario 1.1.8. *Existe un $*$-homomorfismo ζ del álgebra cociente $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2)$ a $L^\infty(\mathbb{T})$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \arrow[rr, "T_\varphi \longmapsto [T_\varphi]"] \arrow[dr, "T_\varphi \longmapsto \varphi"'] & & \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2) \arrow[dl, "\zeta"] \\ & L^\infty(\mathbb{T}) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si T_φ es Fredholm entonces $[T_\varphi]$ es invertible en el álgebra de Calkin $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2)$ y, por el corolario anterior, φ es invertible en $L^\infty(\mathbb{T})$. Por lo tanto no existen operadores de Toeplitz no cero compactos. La siguiente proposición nos dá la condición en los símbolos para que el conmutador y el semiconmutador de dos operadores de Toeplitz sean compactos.

Proposición 1.1.9. *Si $\varphi \in C(\mathbb{T})$ y $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ entonces el semiconmutador $[T_\varphi, T_\psi) = T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ y el conmutador $[T_\varphi, T_\psi] = T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ son compactos.*

Del corolario y proposición anterior, restringiendo la función ξ a $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.10. *$\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$ contiene a los operadores compactos como su ideal conmutador. Además*

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{K}(H^2) \longrightarrow \mathcal{T}(C(\mathbb{T})) \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\}$$

es una sucesión exacta corta.

Por último tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.11. *(Coburn) Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ es una función no cero casi en todo punto, entonces $kerT_\varphi = \{0\}$ o $kerT_\varphi^* = \{0\}$.*

Por lo tanto si T_φ es un operador de Fredholm, entonces T_φ es invertible si y solo si $Ind(T_\varphi) = 0$.

1.2. Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman.

1.2.1. El espacio de Bergman.

Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ |z| < 1\}$ el disco unitario abierto en el plano complejo $\mathbb{C}$. Consideremos la medida de area normalizada en $\mathbb{D}$, a la cual denotaremos como $dA(z)$. En términos de coordenadas rectangulares y polares tenemos

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta \quad \text{donde } \ z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Para $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, el espacio de Bergman ponderado $\mathcal{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ es el espacio de funciones analíticas en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, donde

$$dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

El espacio de Bergman es un subespacio del espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ el cual, como veremos más adelante, es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

cuando $1 \leq p \leq \infty$, mientras que cuando $0 < p < 1$, $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sólo es un espacio métrico completo con la métrica $d(f, g) = \|f - g\|^p_{p,\alpha}$. La siguiente proposición nos permitirá demostrar que el espacio de Bergman es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y por lo tanto es también un espacio de Banach cuando $1 \leq p \leq \infty$ y un espacio métrico completo cuando $0 < p < 1$. Cuando $\alpha = 0$ escribiremos simplemente $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$.

Proposición 1.2.1. *[8] Supongamos que $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n, K, p, \alpha)$ tal que*

$$\sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq C\|f\|_{p,\alpha}$$

para todo $f \in \mathcal{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ y todo $n = 0, 1, 2 \cdots$.

En particular todo funcional de evaluación en $\mathbb{D}$ es un funcional lineal acotado en $\mathcal{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Proposición 1.2.2. *Para cada $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, el espacio de Bergman ponderado $\mathcal{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ es cerrado en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Particularmente $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces por la proposición anterior tenemos que

$$\sup\{|f_n - f_m| \ : \ z \in K\} \leq C_K\|f_n - f_m\|$$

para cada subconjunto compacto K. Lo que implica que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Como $f_n \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, entonces $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Por lo tanto f es analítica en $\mathbb{D}$ lo cual implica que $f \in \mathcal{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$. $\square$

Cuando $p = 2$, $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio de Hilbert y, por la proposición anterior, $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ también lo es.

Una base ortonormal para el espacio $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ es el conjunto $\left\{\varrho_n = \sqrt{\dfrac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}z^n\right\}_{n\geq 0}$ donde Γ es la función Gamma habitual la cual es analítica en todo el plano complejo excepto en los polos simples $\{0, -1, -2, \cdots\}$. Para verificar que $\{\varrho_n\}_n$ es base de $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ observe que

$$
\begin{aligned}
\|\varrho_n\|^2 &= \int_{\mathbb{D}} \left| \left(\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} z^n \right|^2 (\alpha+1)(1-|z^2|)^\alpha dA(z) \\
&= \frac{\Gamma(n+2+\alpha)(\alpha+1)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2n}(1-r^2)^\alpha r dr d\theta \\
&= \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(1+\alpha)\pi} \int_0^1 t^n (1-t)^\alpha \frac{rdt}{2r} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 t^n (1-t)^\alpha dt.
\end{aligned}
$$

Haciendo un cambio de variable tenemos que

$$
\int_0^1 t^n(1-t)^\alpha dt = 2\int_0^{\pi/2} sen^{2(n+1)-1}(\phi) cos^{2(\alpha+1)-1}(\phi) d\phi = B(n+1,\alpha+1),
$$

donde $B(x,y)$ es la función beta. Entonces, usando el hecho que

$$
B(n+1,\alpha+1) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2+\alpha)},
$$

se tiene que $\|\varrho_n\| = 1$.

Por otro lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle z^n, z^m \rangle &= \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z}^m dA_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z}^m (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 r^{n+m+1}(1-r^2)^\alpha dr \int_0^{2\pi} e^{(n-m)i\theta} d\theta \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ B(n+1,\alpha+1) & \text{si } n = m. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la familia $\left\{ \varrho_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}} z^n \right\}_{n\geq 0}$ es un conjunto ortonormal. Dado que los polinomios son densos en $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$, el conjunto anterior es una base para el espacio de Bergman.

Entonces para dos funciones $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ en $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ tenemos que

$$
\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2 \quad y \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n \overline{b_n}.
$$

1.2.2. El núcleo de Bergman.

Como vimos en la sección anterior el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert y, por la Proposición 1.2.1, el funcional de evaluación

$$\varphi_z : f \longmapsto f(z)$$

es acotado. Por lo tanto el Teorema de representación de Riez implica que existe una función $k_z \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ tal que $\varphi_z = \langle ., k_z \rangle$.

El **Núcleo reproductor de Bergman** es la función en dos variables $K(z, w) := \overline{k_z(w)}$. Esta función tiene la propiedad reproductora, es decir

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(u)K(z, u)dA_\alpha(u) \ \ \textit{para cada} \ \ f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}).$$

El núcleo reproductor de Bergman tiene la propiedad de simetría, es decir $K(z, w) = \overline{K(w, z)}$. En efecto, para z fijo en $\mathbb{D}$, la función $k_z \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ y por la propiedad reproductora de $K(z, w)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{K(z, w)} = k_z(w) &= \overline{\int_{\mathbb{D}} k_z(u)K(w, u)dA_\alpha(u)} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{D}} \overline{K(w, u)}K(z, u)dA_\alpha(u)} \\
&= \overline{k_w(z)} = K(w, z).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $K(z, w)$ es una función analítica en la variable z y, como consecuencia del resultado anterior, es antianalítica en w.

Si $L(z, w)$ es cualquier función con la propiedad reproductora y $l_z(w) := \overline{L(z, w)}$, entonces para cada $f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ tenemos

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(u)L(z, u)dA_\alpha(u) = \langle f, l_z \rangle = \langle f, k_z \rangle.$$

Por lo tanto $l_z = k_z$ para toda $z \in \mathbb{D}$, luego $L = K$ y por lo tanto el núcleo reproductor es único. Utilizaremos esta unicidad en el siguiente teorema para obtener una representación para el núcleo reproductor, dada una base ortonormal para $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Teorema 1.2.3. *El núcleo reproductor $K(z, w)$ tiene la representación*

$$K(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$$

para cualquer base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $L(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}$, note que $L(z, w)$ existe, pues para cada $w' \in \mathbb{D}$ fijo, $e_n(w') = \langle e_n, k_{w'} \rangle$. Es decir, para $n \in \mathbb{N}$, $e_n(w')$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de la función $k_{w'}$

luego $\sum_{n=1}^{\infty}|e_n(w')|^2 < \infty$ y por lo tanto $L(z,w') \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Veamos que $L(z,w)$ cumple con la propiedad reproductora.

Dada $f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ tenemos que $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, donde $a_n = \langle f, e_n\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f(u)L(z,u)dA_\alpha(u) &= \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n(u)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} e_m(z)\overline{e_m(u)}\right) dA_\alpha(u) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n e_m(z)\langle e_n, e_m\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n(z) = f(z).
\end{aligned}$$

Por la unicidad del núcleo reproductor tenemos que $L(z,w) = K(z,w)$. Note que esta prueba es válida para cualquier espacio de Hilbert con núcleo reproductor. $\square$

Para la base ortonormal $\left\{\varrho_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}} z^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada anteriormente tenemos que

$$K(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \overline{w}^n = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}. \tag{1.2.1}$$

Por lo tanto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.4. *El núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ está dado por*

$$K(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$.

Un resultado que nos es útil más adelante es el siguiente.

Teorema 1.2.5. *El núcleo reproductor normalizado $k_w/\|k_w\| \longrightarrow 0$ débilmente en $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$, cuando $|w| \longrightarrow 1$, donde $k_w(z) = \overline{K(w,z)} = K(z,w)$.*

Demostración. $\|k_w\| = (1-|w|^2)^{-1-\alpha/2} \longrightarrow \infty$ cuando $|\zeta| \longrightarrow 1$.

Por lo tanto para toda función acotada en $\mathbb{D}$ tenemos

$$\langle f, k_w/\|k_w\|\rangle = f(w)(1-|w|^2)^{1+\alpha/2} \longrightarrow 0 \ \text{ cuando } \ |w| \longrightarrow 1.$$

Dado que las funciones analíticas acotadas son densas en $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$, el resultado se sigue. $\square$

La siguiente proposición nos dice como está dada la proyección sobre el espacio de Bergman.

Proposición 1.2.6. *Para $-1 < \alpha < \infty$ sea P_α la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Entonces*

$$(P_\alpha f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(u)}{(1 - z\overline{u})^{2+\alpha}} dA_\alpha(u)$$

para cada $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Para $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, $P_\alpha(f) \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Entonces

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \langle P_\alpha f, k_z \rangle \\ &= \langle f, P_\alpha k_z \rangle \\ &= \langle f, k_z \rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(u) K(z, u) dA_\alpha(u). \end{aligned}$$

Dado que $K(z, w) = \dfrac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}}$, el resultado se sigue. □

Cuando $\alpha = 0$ escribiremos simplemente P. Los resultados siguientes nos ayudarán a deducir algunas propiedades para los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman. La prueba del lema siguiente se puede ver en [16].

Lema 1.2.7. *Para cada función $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ el conmutador $[P_\alpha, M_f] = P_\alpha M_f - M_f P_\alpha$ es compacto.*

Teorema 1.2.8.

a) Sea $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ y continua en todos los puntos de $\mathbb{T}$ tal que $f|_{\mathbb{T}} = 0$, entonces los operadores $M_f P_\alpha$ y $P_\alpha M_f$ son compactos.

b) Sea $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ y continua en todos los puntos de $\mathbb{T}$, entonces el conmutador $[P_\alpha, M_f]$ es compacto.

Demostración. Para el literal a) sea

$$f_{1/n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \inf_{w \in \mathbb{T}} |z - w| < \dfrac{1}{n}, \\ f(z) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el operador integral

$$M_{f_{1/n}} P_\alpha(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f_{1/n}(z) f(u)}{(1 - z\overline{u})^{2+\alpha}} dA_\alpha(u)$$

tiene kernel acotado y por lo tanto es compacto. Luego dado que $\|M_f P_\alpha - M_{f_{1/n}} P_\alpha\| \leq \|P_\alpha\| \|M_{f - f_{1/n}}\| \leq \|f - f_{1/n}\|_\infty$, tenemos que $M_f P_\alpha$ es límite de operadores compactos y por lo tanto también es compacto.
La compacidad de $P_\alpha M_f$ se sigue del hecho que $P_\alpha M_f = (M_{\overline{f}} P_\alpha)^*$.

Para demostrar el literal b) tomemos una función g continua en $\overline{\mathbb{D}}$ tal que $g|_{\mathbb{T}} = f|_{\mathbb{T}}$, entonces

$$\begin{aligned} [P_\alpha, M_f] &= [P_\alpha, M_f] + [P_\alpha, M_g] - [P_\alpha, M_g] \\ &= P_\alpha M_f - M_f P_\alpha + P_\alpha M_g - M_g P_\alpha - (P_\alpha M_g - M_g P_\alpha) \\ &= [P_\alpha, M_g] - [P_\alpha, M_{g-f}]. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.2.7 tenemos que $[P_\alpha, M_g]$ es compacto y por el literal a) $[P_\alpha, M_{g-f}]$ también es compacto. Por lo tanto el conmutador $[P_\alpha, M_f]$ es compacto al ser suma de operadores compactos. □

1.2.3. Operadores de Toeplitz.

Consideremos el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ y la proyección de Bergman P_α de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$.

Dada una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, el operador de Toeplitz T_φ con símbolo φ, actuando en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$, está dado por

$$T_\varphi = P_\alpha M_\varphi : \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$$

o en su forma integral

$$(T_\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(u) f(u)}{(1 - z\overline{u})^2} dA_\alpha(u).$$

El siguiente teorema nos brinda las propiedades básicas de los operadores de Toeplitz. La demostración de cada literal se desprende de la definición.

Teorema 1.2.9. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$, entonces*

a) *El operador T_φ es acotado en $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ y $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.*

b) $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.

c) $T^*_\varphi = T_{\overline{\varphi}}$.

El siguiente teorema es útil en la sección de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Bergman, su demostración es igual a la de la Proposición 1.1.1.

Teorema 1.2.10. *Si $\overline{\varphi}$ o $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.*

Claramente si tenemos que $\varphi = 0$ casi en todo punto el operador de Toeplitz $T_\varphi = 0$. El recíproco también es cierto. Si $T_\varphi = 0$ entonces para cada n, m en $\{0, 1, 2, \cdots\}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle T_\varphi(z^n), z^m \rangle &= \langle \varphi(z) z^n, P_\alpha z^m \rangle \\ &= \langle \varphi(z), \overline{z}^n z^m \rangle. \end{aligned}$$

Dado que los monomios $\overline{z}^n z^m$ forman un conjunto denso en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ se sigue que $\varphi = 0$ casi en todo punto y por lo tanto tenemos el teorema siguiente.

Teorema 1.2.11. *Para todo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, $T_\varphi = 0$ si y solo si $\varphi = 0$ casi en todo punto.*

De los resultados anteriores podemos ver que los operadores de Toeplitz, actuando en el espacio de Bergman, están caracterizados únicamente por su símbolo, por lo que es natural tener una asignación completamente análoga a la dada para los operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy:

$$\begin{aligned} \xi : L^\infty(\mathbb{D}) &\longrightarrow B(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})) \\ \varphi &\longmapsto T_\varphi. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Tal asignación es inyectiva por el teorema anterior y además, por Teorema 1.2.9, es $*$-lineal y acotada con $\|\xi\| \leq 1$.

El siguiente teorema nos da un subconjunto de $\mathbb{C}$ en el cual está contenido el espectro de un operador de Toeplitz.

Teorema 1.2.12. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ y M_φ es el operador de multiplicación entonces*

$$\sigma(T_\varphi) \subset CH(\sigma(M_\varphi))$$

donde CH es la envolvente convexa de $\sigma(M_\varphi)$.

1.2.4. Operadores de Toeplitz compactos.

Ahora daremos algunos de los resultados esenciales que tienen que ver con operadores de Toeplitz compactos. Denotaremos como $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$ al conjunto de todos los operadores compactos en $B(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$. El siguiente teorema nos muestra algunos resultados para el semiconmutador y el conmutador de dos operadores de Toeplitz. El literal a) se obtiene inmediatamente del Teorema 1.2.8 mientras que para demostrar el literal b) solo es cuestión de escribir el semiconmutador como combinación de operadores compactos y; para el literal c), tener en cuenta que el conmutador se puede obtener a partir del semiconmutador.

Teorema 1.2.13. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$ tal que φ, ψ son continuas en $\mathbb{T}$, entonces*

a) Si $\varphi|_{\mathbb{T}} = 0$ el operador de Toeplitz T_φ es compacto.

b) El semiconmutador $[T_\varphi, T_\psi) = T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ es compacto.

c) El conmutador $[T_\varphi, T_\psi] = T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ es compacto.

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que si φ, ψ son funciones en $L^\infty(\mathbb{D})$ tal que $\varphi = \psi$ en $\mathbb{T}$ entonces los operadores de Toeplitz correspondientes difieren en un operador compacto.

En los siguientes teoremas se darán algunos resultados para operadores de Toeplitz con símbolos particulares. Sea S un subconjunto de $L^\infty(\mathbb{D})$, denotaremos $\mathcal{T}(S)$ a la subálgebra C^* de $B(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$ generada por el conjunto $\{T_\varphi : \varphi \in S\}$.

Sea $\mathcal{K}$ el ideal de operadores compactos en $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{D}))$, podemos pensar entonces por (1.2.2) en una asignación $C(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{D}))/\mathcal{K}$ dada por $\varphi \longmapsto [T_\varphi]$. En efecto tal asignación es un isomorfismo C^* isométrico con el álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}$ como en el Teorema 1.2.15 cuya demostración se puede encontrar en [7]. Primeramente veamos que el álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ es irreducible y que contiene al ideal $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$, por lo que $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$.

Lema 1.2.14. *El álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ es irreducible y contiene a todo el ideal de operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$.*

Demostración. Probar que $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ es irreducible equivale a probar que toda proyección P, que conmuta con todos los operadores de Toeplitz con símbolos en $C(\overline{\mathbb{D}})$, es la proyección trivial.

Sea $g = P(1) \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Para cada función $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ tenemos que

$$P(\varphi) = PT_\varphi(1) = T_\varphi P(1) = T_\varphi(g) = M_g(\varphi).$$

Entonces P actua como un operador de multiplicación en el subconjunto de $C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ el cual es denso en $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$. Podemos extender P a todo el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Por lo tanto $Pf = gf$ para toda $f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ y g es una función acotada en donde

$$g = P(1) = P^2(1) = P(P1) = P(g) = g^2.$$

Entonces $g = 0$ o $g = 1$ lo cual equivale a que $P = 0$ o $P = I$.

Para ver que $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})) \subset \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$, notemos que $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})) \cap \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}})) \neq \emptyset$ por el Teorema 1.2.13, luego como $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ es irreducible debe contener a $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))$, este resultado se puede ver en el Teorema 5.39 en [5]. $\square$

Teorema 1.2.15. *Existe una sucesión exacta corta*

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}})) \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\},$$

es decir el álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}$ es C^* isométricamente isomorfa a $C(\mathbb{T})$ donde $\pi([T_\varphi]) = \varphi|_{\mathbb{T}}$.

Por lo tanto un operador $T = T_\varphi + K$ es Fredholm si y solo si su símbolo φ es invertible en $C(\mathbb{T})$ y

$$Ind(T) = -wind(\varphi(t))$$

donde $wind$ es el índice de $\varphi(t)$ alrededor de 0.

El siguiente teorema nos dice como son los elementos del álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ y una propiedad de su índice, para más detalles vea el Teorema 2.8.5 en [16].

Teorema 1.2.16. *El álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ coincide con el conjunto de todos los operadores de la forma*

$$T = T_\varphi + K$$

donde $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y K es un operador compacto.

Capítulo 2

Operadores de Hankel y operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico

En este capítulo estudiamos operadores de Hankel en el disco unitario y su relación con operadores de Toeplitz que actuan en el espacio de Bergman armónico. Iniciaremos con una breve introducción a los operadores de Hankel en el espacio de Hardy, pues su naturaleza es muy interesante. Luego daremos resultados principales de los operadores de Hankel en el disco unitario, entre estos su forma integral, funciones ortogonales dadas por operadores de Hankel, condiciones en su símbolo que nos darán las equivalencias para saber cuando es un operador de Hilbert-Schmidt, acotado y compacto, finalizamos este capítulo dando una breve reseña de los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico.

2.1. Operadores de Hankel en el espacio de Hardy.

Recordemos que la base ortonormal estándar para el espacio $L^2(\mathbb{T})$ es el conjunto $\{\chi_n = e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y para el espacio de Hardy H^2 es el conjunto $\{\chi_n = e^{in\theta}\}_{n\geq 0}$. Sea $\hat{\varphi}_k$ el $k-$ésimo coeficiente de Fourier de la función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ con respecto a la base $\{\chi_n = e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces la matriz del operador de multiplicación M_φ está dada por

$$M_\varphi = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\ddots & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \ddots & & \\
\ddots & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \ddots & \\
\ddots & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \ddots \\
\hline
\ddots & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \ddots \\
 & \ddots & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \ddots \\
 & & \ddots & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right).$$

Consideremos ahora el operador de volteo $J : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ dado por

$$J(f(e^{i\theta})) = f(e^{-i\theta}).$$

Es fácil ver que J es unitario, autoadjunto y que la matriz de JM_φ, con respecto a la base $\{\chi_n = e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, está dada por

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\ddots & \hat{\varphi}_6 & \hat{\varphi}_5 & \hat{\varphi}_4 & \hat{\varphi}_3 & \ddots & & \\
\ddots & \hat{\varphi}_5 & \hat{\varphi}_4 & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \ddots & \\
\ddots & \hat{\varphi}_4 & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \ddots \\
\hline
\ddots & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \ddots \\
 & \ddots & \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \ddots \\
 & & \ddots & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \hat{\varphi}_{-4} & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right).$$

Este tipo de matrices son llamadas matrices de Hankel. Más específicamente una matriz finita, doblemente infinita o singular infinita es una matriz de Hankel si es constante en sus diagonales paralelas a la diagonal opuesta de la diagonal principal. Esto es: $(a_{m,n})$ es una matriz de Hankel si $a_{m_1,n_1} = a_{m_2,n_2}$ cuando $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$.

El **Operador de Hankel** H_φ es la restricción a H^2 del operador $P_{H^2}JM_\varphi$ donde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Su matriz con respecto a la base ortonormal estándar de H^2 es

$$\begin{pmatrix}
\hat{\varphi}_0 & \hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \hat{\varphi}_{-4} & & \cdots \\
\hat{\varphi}_{-1} & \hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \hat{\varphi}_{-4} & & \iddots & \\
\hat{\varphi}_{-2} & \hat{\varphi}_{-3} & \hat{\varphi}_{-4} & & \iddots & & \\
\hat{\varphi}_{-3} & \hat{\varphi}_{-4} & & \iddots & & & \\
\hat{\varphi}_{-4} & & \iddots & & & & \\
 & \iddots & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{pmatrix}.$$

La función φ se llama el símbolo del operador H_φ. A diferencia de los operadores de Toeplitz, que están determinados por su símbolo de manera única, para el caso de operadores de Hankel no existe un único símbolo. Por ejemplo consideremos los operadores de Hankel $H_{\overline{z}}$ y $H_{z+\overline{z}}$, es fácil ver que sus matrices son las mismas, por lo tanto los operadores son iguales. Observando la matriz de un operador de Hankel es claro que éste está determinado por los coeficientes de Fourier no positivos de su símbolo. Esto implica que los operadores de Hankel H_φ y H_ψ son iguales si y solo si $\varphi - \psi \in e^{i\theta}H^2$.

Dada una función $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, definimos la parte coanalítica de φ como la función

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, e^{-in\theta} \rangle e^{-in\theta}. \tag{2.1.1}$$

Todo operador de Hankel tiene una matriz de Hankel. Una matriz de Hankel de un operador acotado también corresponde a un operador de Hankel como el teorema siguiente cuya demostración se puede ver en [2].

Teorema 2.1.1 (Nehari's). *Una matriz de un operador acotado de H^2 en H^2 es una matriz de Hankel si y solo si H es un operador de Hankel.*

Además podemos tomar un símbolo φ tal que $\|H_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

2.1.1. Operadores de Hankel compactos y de rango finito.

Para estudiar operadores compactos es natural comenzar con los operadores de rango uno. En este caso nos enfocaremos en los operadores de Hankel de rango uno. Más adelante demostramos que éstos están relacionados con la función

$$k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w^n} z^n = \frac{1}{1 - \overline{w} z} \in H^2,$$

donde $w \in \mathbb{D}$.

Para cada $n \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} (k_{\overline{w}} \otimes k_w)\chi_n &= \langle \chi_n, k_w \rangle k_{\overline{w}} \\ &= \langle \chi_n, \sum_{k=0}^{\infty} \overline{w^k} \chi_k \rangle k_{\overline{w}} \\ &= w^n k_{\overline{w}} = w^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} w^k \chi_k \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz de $k_{\overline{w}} \otimes k_w$ con respecto a la base estándar de H^2, es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 & & \cdots \\ w & w^2 & w^3 & & \iddots & \\ w^2 & w^3 & & \iddots & & \\ w^3 & & \iddots & & & \\ & \iddots & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Esta matriz coincide con la matriz de $PJM_{Jk_{\overline{w}}}$ restringida a H^2, entonces $k_{\overline{w}} \otimes k_w$ es un operador de Hankel. Más aún, como se demuestra en el Teorema 4.2.2 en [2], si H es un operador de Hankel de rango 1, entonces existe $w \in \mathbb{D}$ y una constante $c \in \mathbb{C}$, tal que $H = ck_{\overline{w}} \otimes k_w$.

Notemos que la función

$$Jk_{\overline{w}}(e^{i\theta}) = k_{\overline{w}}(e^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{e^{i\theta}}\right)^n, \ \textit{en} \ \mathbb{T}.$$

Si $|z| > |w|$ entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n$ converge a $\dfrac{z}{z-w}$. Por lo tanto $Jk_{\overline{w}}$ tiene la extensión meromorfa dada por la función racional $z/(z-w)$. El teorema siguiente establece que todo operador de Hankel es de rango finito si y solo si su símbolo tiene una extensión a una función racional en $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1.2 (Kronecker's)**.** *Sea*

$$H = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \iddots & \\ a_2 & a_3 & & \iddots & & \\ a_3 & & \iddots & & & \\ & \iddots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

una matriz singular infinita de Hankel. Entonces, las columnas de H son linealmente dependientes en el espacio de todas las sucesiones si y solo si

$$a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + a_3/z^3 + \cdots \quad \textit{es una función racional.}$$

Como consequencia del teorema tenemos que:

- Dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, el operador de Hankel H_φ tiene rango finito si y solo si la función

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}_k}{z^k} \quad \textit{es racional y sus polos están en } \mathbb{D}.$$

Además, dado que dos operadores de Hankel son iguales si y solo si sus símbolos tienen igual parte coanalítica (2.1.1) tenemos que:

- Sea R el conjunto de todas la funciones racionales con polos en $\mathbb{D}$. Entonces H es un operador de Hankel acotado de rango finito si y solo si $H = H_\varphi$ para alguna función $\varphi \in e^{i\theta}H^\infty + R$.

Una vez que tenemos caracterizados a los operadores de Hankel de rango finito es el turno de responder cuando un operador de Hankel es compacto. Una condición es que su símbolo sea una función continua en $\mathbb{T}$. En efecto, si φ es continua en $\mathbb{T}$, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\geq 0}$ que converge uniformemente a φ en $\mathbb{T}$. Luego

$$\|H_{p_n} - H_\varphi\| = \|H_{p_n-\varphi}\| \leq \|p_n - \varphi\|_\infty.$$

Al tener como símbolo un polinomio, cada operador H_{p_n} es de rango finito. Entonces la desigualdad anterior implica que H_φ es límite de operadores de rango finito y por lo tanto es compacto. El teorema siguiente nos da la equivalencia de estos resultados.

Teorema 2.1.3 (Hartman's)**.** *Un operador de Hankel H es compacto si y solo si existe una función continua φ tal $H = H_\varphi$. Todo operador compacto de Hankel es límite uniforme de operadores de Hankel de rango finito.*

Este resultado se puede reformular como el corolario siguiente.

Corolario 2.1.4. *El operador de Hankel H_φ es compacto si y solo si $\varphi \in H^\infty + C(\mathbb{T})$.*

2.1.2. Operadores de Hankel autoadjuntos y normales.

Dado $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ denotaremos f^* a la función $\overline{J(f)}$, es decir

$$f^*(e^{i\theta}) = \overline{f(e^{-i\theta})}.$$

Observe que $(f^*)^* = f$. Además, es fácil demostrar que $f \in H^2$ si y solo si $f^* \in H^2$. En efecto, para $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n z^n \in L^\infty(\mathbb{T})$, tenemos que $f^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}}_n z^n$. Notemos que tenemos las igualdades.

$$\|f\| = \|f^*\| \quad y \quad \|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty.$$

Es sencillo demostrar la siguiente relación especial entre los operadores de Hankel y sus adjuntos.

Teorema 2.1.5. *Si H es un operador de Hankel, entonces $H^*(f^*) = (H(f))^*$ y por lo tanto $\|H^*(f^*)\| = \|H(f)\|$ para cada $f \in H^2$.*

Dada $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, la matriz de $(H_\varphi)^*$ es la conjugada transpuesta de la matriz de H_φ la cual corresponde a la matriz de H_{φ^*}. Por lo tanto

$$H_\varphi^* = H_{\varphi^*}.$$

Si el operador H_φ es autoadjunto entonces φ y φ^* tienen igual parte coanalítica. Es decir,

$$\varphi - \varphi^* \in e^{i\theta} H^2.$$

Entonces podemos escoger un símbolo $\psi = \frac{\varphi - \varphi^*}{2} \in L^\infty(\mathbb{T})$ para tal operador, tal que $\psi = \psi^*$ casi en todo punto y $H_\varphi = H_\psi$. Podemos concluir de esta forma que un operador de Hankel H_φ es autoadjunto si $\varphi = \varphi^*$

Por último, sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y supongamos que $H_\psi \neq 0$. Si H_φ y H_ψ conmutan entonces existe un número complejo c tal que $H_\varphi = cH_\psi$ (para detalles vea el Teorema 4.4.8 en [2]). Así, todo operador de Hankel normal es múltiplo de un operador de Hankel autoadjunto.

2.2. Operadores de Hankel en el espacio de Bergman.

En esta sección expondremos los resultados básicos más importantes de los operadores de Hankel en el espacio de Bergman ponderado del disco unitario. Retomemos el espacio de Bergman $\mathcal{A}_\alpha^2(\mathbb{D})$ y la proyección de Bergman P_α como en el Capítulo 1. El **operador de Hankel con símbolo** φ, $H_\varphi : \mathcal{A}_\alpha^2(\mathbb{D}) \to (\mathcal{A}_\alpha^2(\mathbb{D}))^\perp$ se define por

$$H_\varphi(f) = (I - P_\alpha)(M_{\overline{\varphi}} f), \quad f \in \mathcal{A}_\alpha^2(\mathbb{D}). \tag{2.2.1}$$

Recordemos que, por la Ecuación 1.2.1, el núcleo de Bergman tiene la representación $k_z(w) = \dfrac{1}{(1-\overline{z}w)^{2+\alpha}}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
(H_{\overline{\varphi}}f)(z) &= ((I-P_\alpha)\varphi f)(z)\\
&= \varphi(z)f(z) - P_\alpha(\varphi f)(z)\\
&= \varphi(z)\langle f, k_z\rangle - \langle P_\alpha \varphi f, k_z\rangle \quad \text{(propiedad del núcleo reproductor)}\\
&= (\alpha+1)\left[\varphi(z)\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA(w) - \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)f(w)(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA(w)\right]\\
&= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(z)-\varphi(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} f(w)(1-|w|^2)^\alpha dA(w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$(H_\varphi f)(z) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\varphi(z)}-\overline{\varphi(w)}}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} f(w)(1-|w|^2)^\alpha dA(w). \tag{2.2.2}$$

Cálculos sencillos demuestran que el adjunto de H_φ está dado por

$$(H_\varphi^* f)(z) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)-\varphi(z)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} f(w)(1-|w|^2)^\alpha dA(w), \tag{2.2.3}$$

y

$$(H_\varphi k_w)(z) = \frac{\overline{\varphi(z)}-\overline{\varphi(w)}}{(1-\overline{w}z)^{2+\alpha}} = [\overline{\varphi(z)}-\overline{\varphi(w)}]k_w(z). \tag{2.2.4}$$

Sea $\beta_n = \dfrac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}$, entonces $\|z^n\|^2 = 1/\beta_n$ y la base ortonormal estándar para el espacio de Bergman está dada por $\{\varrho_n = \sqrt{\beta_n}z^n\}$.

Sea

$$\omega_{mn}^2 := \begin{cases} \beta_n/\beta_{n+m} & \textit{si} \quad 0 \le n < m,\\ \dfrac{\beta_n}{\beta_{n+m}} - \dfrac{\beta_{n-m}}{\beta_n} & \textit{si} \quad 1 \le m \le n. \end{cases}$$

La siguiente proposición nos proporciona información del operador de Hankel con símbolo z^m con $m \ge 1$. Su demostración es directa al desarrollar $H_{z^m}(z^n)(\zeta)$ y $H_{z^m}^*(z^n)(\zeta)$ utilizando (2.2.2) y (2.2.3).

Proposición 2.2.1. *Sea $m \ge 1$ un número natural fijo. Entonces*

a) $H_{z^m}(z^n)(\zeta) = \begin{cases} \zeta^n\overline{\zeta}^m & \textit{si} \ 0 \le n < m,\\ \zeta^n\overline{\zeta}^m - \frac{\beta_{n-m}}{\beta_n}\zeta^{n-m} & \textit{si} \ m \le n. \end{cases}$

b) Las funciones $H_{z^m}(z^n), n = 1, \ldots, \infty$, forman un conjunto ortogonal en $(\mathcal{A}_\alpha^2(\mathbb{D}))^\perp$.

c) $(H_{z^m}^* H_{z^m})(z^n)(\zeta) = \omega_{mn}^2\zeta^n$, *para todo* $n = 0, 1, 2, \cdots$.

d) $\|H_{z^m}(z^n)\| = \omega_{mn}/\sqrt{\beta_n}$.

De los literales c) y d) de la proposición anterior podemos ver que el conjunto

$$\{\upsilon_n := \sqrt{\beta_n} H_{z^m}(z^n)/\omega_{mn}\}_{n=0}^{\infty}$$

es un conjunto ortonormal en $(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))^\perp$. Entonces el operador de Hankel H_{z^m}, admite la representación

$$H_{z^m}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{mn} \langle f, \sqrt{\beta_n} z^n \rangle \upsilon_n, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}).$$

Recordemos que un operador acotado A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un operador de Hilbert-Schmidt si $\|A\|^2_{HS} := Tr(A^*A) = \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 < \infty$, donde Tr denota la traza de un operador y la familia $\{e_i : \ i \in I\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces, utilizando la base $\{\varrho_n = \sqrt{\beta_n} z^n\}$ para el espacio de Bergman y el literal d) de la proposición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} Tr(H^*_{z^m} H_{z^m}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \|H_{z^m}(\sqrt{\beta_n} z^n)\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^2_{mn} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_n}{\beta_{n+m}} + \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\beta_n}{\beta_{n+m}} - \frac{\beta_{n-m}}{\beta_n} \right) = m. \end{aligned}$$

Así, el operador H_{z^m} es un operador de Hilbert-Schmidt y por ello es compacto. Esto implica que el operador $H^*_{z^m} H_{z^m}$ es también compacto. Además tenemos que la norma de Hilbert-Schmidt de H_{z^m} es $\sqrt{m}$.

Por otro lado, los números singulares de un operador compacto $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, donde $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert, son los eingenvalores del operador positivo $\sqrt{T^*T}$. Estos se ordenan de forma decreciente $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq 0$. Cuando T es autoadjunto los números singulares corresponden a los valores absolutos de los eingenvalores de T. Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son bases ortonormales para los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente entonces T admite la representación

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \langle ., e_n \rangle f_n.$$

Decimos que el operador T pertenece a la **clase Schatten** S_p si la sucesión de números singulares $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio de sucesiones ℓ^p. Para $p \geq 1$, la clase Schatten S_p es un espacio de Banach con la norma $\|T\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p)^{1/p}$.

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2. *La base del espacio de Bergman $\{\varrho_n = \sqrt{\beta_n} z^n\}$ diagonaliza al operador $(H^*_{z^m} H_{z^m})^{1/2}$ y el conjunto $\{\omega_{mn}\}_{n=0}^{\infty}$ es su conjunto de números singulares bajo una permutación finita.*

Ya hemos demostrado que para $m > 0$, el operador de Hankel H_{z^m} es Hilbert-Schmidt. Esto es, existen operadores de Hankel con símbolos analíticos que son de Hilbert-Schmidt. Sin embargo no todo operador de Hankel con símbolo analítico satisface esta propiedad. Para ver las características que una función analítica debe cumplir para que el operador de Hankel que induce sea de Hilbert-Schmidt consideraremos los siguientes espacios. Para $\alpha > 0$, el **espacio de Dirichlet** $\mathcal{D}_\alpha$ consiste de las funciones$f$, analíticas en $\mathbb{D}$, para las cuales

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\alpha} = \left(|f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z)\right)^{1/2} < \infty.$$

Notemos que $f \in \mathcal{D}_\alpha$ si y solo si $f' \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ y que $\mathcal{D}_0$ coincide con el **2-espacio de Besov** B_2, el cual está definido como el espacio de las funciones f, analíticas en $\mathbb{D}$, para las cuales

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) < \infty.$$

En B_2 hay una seminorma la cual está dada por $\|f\|^2_{B_2} = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z)$.

Dados dos operadores A, B en S_2 que se anulan en $(\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}))^\perp$, tenemos un producto interior dado por

$$\langle A, B\rangle_{S_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \langle Az^n, Bz^n\rangle.$$

Este producto interior induce una norma $\|.\|_{S_2}$ la cual coincide con la norma de Hilbert-Schmidt. Cuando nos refiramos a tal producto interno haremos uso del subíndice S_2.

Proposición 2.2.3. *Sea $m \geq 1$ un número natural fijo. Entonces*

a) H_{z^m} es un operador de Hilbert-Schmidt y $\|H_{z^m}\|_{S_2} = \sqrt{m}$.

b) Para cada $k \geq 1$, $k \neq m$, y $n \geq 0$, tenemos $\langle H_{z^m}(z^n), H_{z^k}(z^n)\rangle = 0$.

c) Los operadores $\{H_{z^n}\}_{n=1}^{\infty}$ son ortogonales en S_2.

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes en el símbolo para que el operador de Hankel con dicho símbolo sea de Hilbert-Schmidt.

Teorema 2.2.4. *Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$. Entonces el operador de Hankel inducido por f es un operador de Hilbert-Schmidt si y solo si f pertenece al espacio de Dirichlet $\mathcal{D}_0 = B_2$.*
Además el mapeo $\Phi : \mathcal{D}_0 \longrightarrow S_2$ dado por $f \longrightarrow H_f$ es una isometría, por lo tanto, $\|f\|_{\mathcal{D}_0} = \|H_f\|_{S_2}$.

Demostración. Las funciones $\{z^n/\sqrt{n}\}$ forman una base ortonormal para el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}_0$, y sabemos que $\{H_{z^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal en S_2.

Entonces dada $f \in \mathcal{D}_0$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/\sqrt{n}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{D}_0} &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n/\sqrt{n}\right\|_{\mathcal{D}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 \\ &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_{z^n}\right\|^2_{S_2} = \|H_f\|^2_{S_2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue.

□

2.2.1. Operadores de Hankel acotados y compactos.

El **espacio de Bloch** B_∞ consiste de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ para las cuales

$$\|f\|_{B_\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2) < \infty$$

y el **pequeño espacio de Bloch** b_∞ consiste de las funciones f para las cuales $\lim_{|z|\longrightarrow 1} |f'(z)|(1-|z|^2) = 0$.

El espacio de Bloch B_∞ es el espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ más grande que es invariante bajo el grupo de Möbius y b_∞ es la clausura en el espacio B_∞ de los polinomios en z.

Proposición 2.2.5. *Sea (X,μ) un espacio medible, $K(x,y)$ una función medible en $X\times X$ y Q_K el operador integral*

$$(Q_K f)(x) = \int_X K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

Supongamos que existe una función medible u en X y una constante C tal que

$$\int_X |K(x,y)|u(y)^2 d\mu(y) \leq Cu^2(x),\ x\in X \ \ y \ \ \int_X |K(x,y)|u(x)^2 d\mu(x) \leq Cu^2(y),\ y\in Y.$$

Entonces Q_K es un operador acotado.

La demostración de la proposición anterior se puede ver en [13], de este resultado se desprende el siguiente teorema, el cual nos dice que el operador de Hankel H_f es acotado cuando su símbolo es una función de Bloch.

Teorema 2.2.6. *Sea $-1<\alpha<\infty$ y f una función de Bloch. Entonces existe una constante C tal que*

$$\|H_f\| \leq C\|f\|_{B_\infty}. \tag{2.2.5}$$

Demostración. Veamos que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)-f(w)|}{|1-z\overline{w}|^{\alpha+2}} \left[\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}\right]^{(\alpha+1)/2} (1-|z|^2)dA(z) \leq C\|f\|_{B_\infty}. \tag{2.2.6}$$

Utilizando la desigualdad para funciones de Bloch

$$|f(z)-f(w)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_{B_\infty} \log\left(\frac{1+|\varphi_w(z)|}{1-|\varphi_w z|}\right) \quad \text{donde} \quad \varphi_w \ \text{ es de la forma } \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$$

seguido del cambio de variable $\zeta = \varphi_w(z)$, la integral del lado izquierdo en (2.2.6) queda acotada por

$$\frac{1}{2}\|f\|_{B_\infty} \int_{\mathbb{D}} \log\left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right) \frac{(1-|\zeta|)^{(\alpha-1)/2}}{|1-\overline{w}\zeta|} dA(\zeta). \tag{2.2.7}$$

Y, utilizando la desigualdad $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-we^{i\theta}|} \leq M\log\left(\frac{1}{1-|w|}\right)$ cuando $|w|\nearrow 1$, (2.2.7) queda acotada por

$$\frac{M}{2}\|f\|_{B_\infty} \int_0^1 \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \log\left(\frac{1}{1-|w|r}\right) (1-r^2)^{(\alpha-1)/2} dr.$$

Dado que $\alpha > -1$, esta integral es acotada.

Sean

$$K(x,w) = \frac{f(z)-f(w)}{(1-z\overline{w})^{\alpha+2}},$$

$$u(z) = (1-|z|^2)^{-(\alpha+1)/4}$$

y

$$d\mu(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha} dA(z).$$

Se sigue entonces de la Proposición 2.2.5 que el operador T_K, el cual es igual a H_f es acotado.

Teorema 2.2.7. *Sea $-1 < \alpha < \infty$ y sea f una función analítica en $\mathbb{D}$. Entonces el operador de Hankel H_f es acotado en $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ si y solo si f es una función de Bloch. En tal caso la seminorma de Bloch de f es equivalente a la norma de H_f.*

Demostración. Si f es una función de Bloch entonces H_f es acotado. Supongamos ahora que H_f es acotado y sea $|f|_\zeta = \left\|H_f\left(\frac{k_\zeta}{\|k_\zeta\|}\right)\right\|$, claramente $|f|_\zeta \leq \|H_f\|$ para todo $\zeta \in \mathbb{D}$.

La función $J(z.w) = \dfrac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|a-\overline{z}w|^2}$ es Möbius invariante y desarrollando $|f|_\zeta$ tenemos

$$|f|_\zeta = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} |f(z)-f(\zeta)|^2 |J(z,\zeta)|^{\alpha+2} \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}.$$

La medida $dA(z)/(1-|z|^2)^2$ es Möbius invariante, por lo que tenemos la relación

$$|f\circ\varphi|_\zeta = |f|_{\varphi(\zeta)}; \qquad \varphi \in G, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{2.2.8}$$

Luego $\|H_f\| \geq \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{D}} |f|_\zeta = \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{D}} |f\circ\varphi|$ y notemos que

$$|f|_0 = \|f - f(0)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varrho_n\rangle|^2\right)^{1/2} \geq |\langle f, \varrho_1\rangle| \geq |f'(0)|/\sqrt{\beta_1}.$$

Por lo tanto $\|f\|_{B_\infty} = \sup\limits_{\varphi\in G} |(f\circ\varphi)'(0)| \leq \sqrt{\beta_1}\|H_f\|$, es decir f es una función de Bloch.

Teorema 2.2.8. *Sea $-1 < \alpha < \infty$ y sea f una función de Bloch en $\mathbb{D}$. Entonces el operador de Hankel H_f es compacto si y solo si f pertenece al pequeño espacio de Bloch b_∞.*

Demostración. Si H_f es compacto, como $k_\zeta/\|k_\zeta\| \longrightarrow 0$ débilmente (Teorema 1.2.5), entonces $\|H_f(k_\zeta/\|k_\zeta\|)\| \longrightarrow 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|H_f(k_\zeta/\|k_\zeta\|)\| &= |f|_\zeta = |f\circ\varphi_\zeta|_0 \qquad \text{(ver (2.2.8))} \\
&\geq |f|_{\varphi_\zeta(0)} = |(f\circ\varphi_\zeta)'(0)|/\sqrt{\beta_1} \\
&= (1-|\zeta|^2)f'(\zeta)/\sqrt{\beta_1}
\end{aligned}$$

por lo que $f \in b_\infty$.

Recíprocamente si f es una función en b_∞, dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio g tal que $\|f - g\|_{B_\infty} < \varepsilon$. luego por (2.2.5) tenemos

$$\|H_f - H_g\| \leq C\|f - g\|_{B_\infty}.$$

Como g es un polinomio se sigue del Teorema 2.2.8 que H_g es un operador de Hilbert-Schmidt y por lo tanto compacto. Esto último implica que H_f es límite de operadores compactos, por lo tanto compacto.

2.3. Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico.

En esta sección damos un resumen de las propiedades básicas más importantes de lo operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman armónico, las cuales utilizaremos en el Capítulo 3. Las demostraciones pueden consultarse en [3].

Una función $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es armónica si las segundas derivadas parciales de u existen, son continuas y su laplaciano es cero, es decir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ \textit{donde} \ \ z = x + iy.$$

Recordemos que una función $f \in \mathbb{C}$ es analítica cuando se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Rieman, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y},$$

y antianalítica si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dado que $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ y $y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$, podemos pensar a la función f como una función en las variables z y $\overline{z}$, entonces tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

De las fórmulas anteriores se sigue que si f es analítica entonces $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ y si f es antianalítica entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Además se obtienen las siguientes fórmulas para el laplaciano:

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} \quad \text{y} \quad \Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}.$$

Por lo tanto tenemos que si f es analítica o antianalítica entonces f es armónica, más aún tenemos que f es armónica si y solo si $\frac{\partial f}{\partial z}$ es analítica.

Proposición 2.3.1. *Una función armónica $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ se puede representar como $u = f + \overline{g}$, donde f y g son funciones analíticas. Esta representación es única salvo constantes.*

Para cualquier función armónica u, acotada por M en $\mathbb{D}$, existe una constante positiva C tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}u(z)\right| \leq CM.$$

De donde se sigue que $|u(z)-u(z_0)| \leq CM|z-z_0|$. Este resultado establece que las funciones armónicas acotadas son una familia equicontinua.

El **espacio de Bergman armónico** $b^2(\mathbb{D})$, es el conjunto de funciones armónicas $u \in \mathbb{D}$ tales que $u \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, donde dA es la medida de área normalizada. Es decir, $dA(z) = \dfrac{1}{\pi}dxdy$, $z = x + iy$.

Proposición 2.3.2. *Dado $z \in \mathbb{D}$ existe una constante $C > 0$ tal que $|u(z)| \leq C\|u\|$ para todo $u \in b^2(\mathbb{D})$.*

La proposición anterior implica que todo funcional de evaluación es continuo en $b^2(\mathbb{D})$. De esta proposición y utlizando un argumento similar al de la prueba de la Proposición 1.2.2, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. *El espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, dA)$.*

Dado que el espacio de Bergman armónico es cerrado, éste es un subespacio de Hilbert de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ y, por la Proposición 2.3.2, los funcionales de evaluación son continuos. Esto último implica que $b^2(\mathbb{D})$ es un espacio con núcleo reproductor.

Una base ortonormal para el espacio de Bergman armónico está dada por el conjunto

$$\{\varrho_n = \sqrt{n+1}\, z^n\}_{n\geq 0} \cup \{\overline{\varrho}_n = \sqrt{n+1}\, \overline{z}^n\}_{n\geq 1}.$$

Con dicha base podemos encontrar el núcleo reproductor armónico $l_z(w) = \overline{L(z,w)}$, es cual está dado por

$$L(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2} + \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} - 1.$$

Una de las propiedades de este núcleo reproductor es que es una función simétrica y de valor real. Es decir,

$$K(z,w) = K(w,z) \quad \text{y} \quad \overline{K(z,w)} = K(z,w).$$

Consideremos el espacio anti-Bergman $\widetilde{\mathcal{A}^2}(\mathbb{D})$ formado por todas las funciones antianalíticas de $L^2(\mathbb{D}, dA)$. Es decir

$$\widetilde{\mathcal{A}^2}(\mathbb{D}) = \{\overline{f} :\ f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})\,\}.$$

El espacio de anti-Bergman es un espacio con núcleo reproductor, el cual está dado por

$$\widetilde{K}(z,w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}.$$

Sea $J : L^2(\mathbb{D}, dA) \longrightarrow L^2(\mathbb{D}, dA)$ el operador de volteo con regla de correspondencia análoga al operador de volteo definido al principio de este capítulo. Es decir

$$J(f)(z) = f(\overline{z})$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$. El operador de volteo es unitario, hermitiano y por lo tanto una isometría. Dado que el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es cerrado y $J(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})) = \widetilde{\mathcal{A}^2}(\mathbb{D})$ tenemos que el espacio anti-Bergman también es cerrado. Por lo tanto existe la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\widetilde{\mathcal{A}^2}(\mathbb{D})$, llamada la proyección anti-Bergman. Dicha proyección está dada por la fórmula:

$$(\widetilde{P}f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{z}w)^2} dA(w).$$

Un cálculo sencillo muestra que $\widetilde{P} = JPJ$, donde P es la proyección de Bergman con peso igual a cero.

Teorema 2.3.4. *La proyección de Bergman armónica Q tiene la representación.*

$$Q(u) = P(u) + \widetilde{P}(u) - (\varrho_0 \otimes \varrho_0)(u).$$

2.3.1. Operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico.

Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, el operador de Toeplitz $T_\varphi : b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$ con símbolo φ está dado por

$$T_\varphi(u) = QM_\varphi(u) \quad \text{para toda} \quad u \in b^2(\mathbb{D}).$$

Los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman-armónico cumplen con las propiedades análogas a las de los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman.

Teorema 2.3.5. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces*

a) $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$,

b) $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$,

c) $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.

Consideremos ahora el operador de Hankel con símbolo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, $H_\varphi : b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow L^2(\mathbb{D}, dA)$ el cual, a diferencia de la ecuación (2.2.1) está dado sin conjugar el símbolo, es decir

$$H_\varphi(u) = (I - Q)M_\varphi(u) \quad \text{para toda} \quad u \in b^2(\mathbb{D}). \tag{2.3.1}$$

El conjunto $\mathcal{F}$ de funciones $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ tales que el operador de Hankel H_φ es compacto, es una subálgebra cerrada de $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Teorema 2.3.6. *Sea φ una función continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces el operador de Hankel H_φ es compacto.*

Como consecuencia de este torema tenemos que el conmutador y el semiconmutador de dos operadores de Toeplitz con símbolo continuo son compactos, tal como el siguiente teorema.

Teorema 2.3.7. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$. Si $\varphi, \psi \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces los operadores $T_{\varphi\psi} - T_\varphi T_\psi$ y $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ son compactos en $b^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} T_{\varphi\psi} - T_\varphi T_\psi &= QM_{\varphi\psi} - QM_\varphi QM_\psi. \\ &= QM_\varphi(I-Q)M_\psi \\ &= T_\varphi H_\psi. \end{aligned}$$

Por el teorema anterior tenemos que H_ψ es compacto, por lo tanto el resultado se sigue. Por otro lado notar que

$$\begin{aligned} T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi &= T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} + T_{\varphi\psi} - T_\psi T_\varphi \\ &= (T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}) + (T_{\varphi\psi} - T_\psi T_\varphi). \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Por último tenemos un teorema que nos da condiciones necesarias y suficientes para la compacidad de un operador de Toeplitz con símbolo continuo en $\mathbb{D}$.

Teorema 2.3.8. *Si $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces T_φ es compacto en $b^2(\mathbb{D})$ si y solo si $\varphi = 0$ en $\mathbb{T}$.*

Capítulo 3

Operadores de Toeplitz Oblicuos

En este capítulo estudiamos un tipo especial de operadores de Toeplitz llamados operadores de Toeplitz oblicuos. Éstos surgen en aplicaciones de ondículas. En los últimos años se han realizado muchos estudios de la tranfomada ondícula como alternativa para la transformada de Fourier en muchas aplicaciones, como compresión de datos o solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Varios autores en este campo han conectado la suavidad de ondículas con las propiedades espectrales de operadores de Toeplitz oblicuos, algunos de ellos han asociado la regularidad de Besov de soluciones de la ecuación de refinamiento con el radio espectral de un operador de Toeplitz oblicuo asociado. Otros autores como T. Goodman, C. Micchelli y J. Ward en [15] muestran una conexión entre los radios espectrales y condiciones para las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales que se encuentran en la clase de Lipschitz. Los supuestos que utilizan estos autores son que el símbolo es un polinomio trigonométrico y que el radio espectral es el valor más grande de los eigenvalores del operador de Toeplitz oblicuo. Estos autores no investigaron las propiedades básicas de estos operadores, pues sus trabajos se concentran principlmente en ondículas. Sus propiedades fueron estudiadas por primera vez por Mark C. Ho en [10], [12] y [11]. Hay varios trabajos posteriores que estudian las propiedades de estos operadores en diferentes espacios por ejemplo S.C Arora y Ruchika Batra estudian algunas propiedades de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Hardy H^2 en [1], Jun Yang, Yufeng Lu y Chaomei Liu estudian la conmutatividad de operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en $L^2(\mathbb{T})$ y en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ en [18], mientras que Gopal Datt y Neelima Ohri más recientemente han estudiado algunas propiedades de los operadores de Toeplitz oblicuos esta vez en el espacio de Lebesgue del toro en [4].

Nosotros incluimos las propiedades de dichos operadores en los siguientes espacios: $L^2(\mathbb{T})$, el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y el espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$. La Sección 3.1 reune muchos resultados estudiados por Mark C. Ho en [10], en donde se estudian propiedades interesantes de los operadores de Toeplitz oblicuos en $L^2(\mathbb{T})$ cuando $k = 2$. En dicha sección, cambiando ligeramente las hipótesis cuando fue necesario, generalizamos muchos de estos resultados para cualquier $k \geq 2$. Algunos de ellos son: cálculos de la norma del operador y de su radio radio espectral, la caracterización de tales operadores que consiste en que son soluciones de la ecuación $XM_{z^k} = M_z X$. También demostramos que el álgebra C^* generada por estos operadores es irreducible y que espectro de un operador de Toeplitz oblicuo de orden k contiene un disco cerrado. Hasta donde sabemos estas propiedades aún no se han trabajado para cualquier $k > 2$. La sección finaliza con los resultados dados por Jun Yang, Yufeng Lu y Chaomei Liu en [18] quienes estudian la conmutatividad de estos operadores, específicamente estudian la relación entre los símbolos cuando dos operadores de Toeplitz oblicuos de orden k conmutan. Se demuestra que la conmutatividad y la conmutatividad esencial de estos operadores son equivalentes.

En la Sección 3.2 estudiamos las propiedades de los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Bergman, estudiadas en [18]. Entre ellas la forma integral de este operador, condiciones equivalentes para la conmutatividad de estos operadores y propiedades del espectro puntual. La Sección 3.3 es un breve resumen de algunas propiedades de los operadores de Hankel oblicuos y Hankel esencialmente oblicuos de orden k.

Finalizamos con la Sección 3.4 en donde estudiamos operadores de Toeplitz oblicuos de orden k esta vez actuando en el espacio de Bergman armónico. Hasta donde sabemos esta es la primera vez que se estudian dichos operadores en este espacio. Algunos de los resultados que se obtienen son similares a los obtenidos en el espacio de Bergman.

3.1. Operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en $L^2(\mathbb{T})$.

Sea $k \geq 2$ un número natural fijo, un operador de Toeplitz oblicuo con símbolo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ es un operador que actua en $L^2(\mathbb{T})$, cuya representación matricial (a_{ij}) respecto de la base usual $\{z^i \ : \ i \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{T})$ está dada por $a_{ij} = \langle \varphi, z^{ki-j} \rangle = \hat{\varphi}_{ki-j}$. Es decir, su representación con respecto a la base estándar de $L^2(\mathbb{T})$ es

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\ddots & \hat{\varphi}_{-3k+2} & \hat{\varphi}_{-3k+1} & \ddots & & \\
\ddots & \hat{\varphi}_{-2k+2} & \hat{\varphi}_{-2k+1} & \hat{\varphi}_{-2k} & \ddots & \\
\ddots & \hat{\varphi}_{-k+2} & \hat{\varphi}_{-k+1} & \hat{\varphi}_{-k} & \hat{\varphi}_{-k-1} & \ddots \\
\hline
\ddots & \hat{\varphi}_{2} & \hat{\varphi}_{1} & \hat{\varphi}_{0} & \hat{\varphi}_{-1} & \ddots \\
 & \ddots & \hat{\varphi}_{k+1} & \hat{\varphi}_{k} & \hat{\varphi}_{k-1} & \ddots \\
 & & \ddots & \hat{\varphi}_{2k} & \hat{\varphi}_{2k-1} & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right). \tag{3.1.1}$$

Note que esta matriz puede ser obtenida a partir de la matriz del operador de multiplicación por φ, seguido de eliminar $k-1$ renglones.

Por lo tanto un operador de Toeplitz oblicuo con símbolo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ de orden k, denotado por A_φ, está dado por

$$A_\varphi(z^j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{ik-j} z^i, \ \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Sea $W_k : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ el operador definido en la base de $L^2(\mathbb{T})$ por

$$W_k(z^i) = \begin{cases} z^{i/k}, & \text{si } i \text{ es divisible por } k, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que, $\|W_k\| = 1$ y que el adjunto de W_k está dado por

$$W_k^*(z^i) = z^{ki} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

La siguiente proposición nos muestra la relación entre el operador W_k y los operadores de Toeplitz oblicuos.

Proposición 3.1.1. *El operador de Toeplitz oblicuo A_φ, de orden k, está dado por*

$$A_\varphi = W_k M_\varphi.$$

Demostración. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{aligned} W_k M_\varphi(z^i) &= W_k \left(\sum_{j=\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{j-i} z^j \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{jk-i} z^j = A_\varphi(z^i). \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Dado que

$$\|A_\varphi\| = \|W_k M_\varphi\| \leq \|W_k\| \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty,$$

el operador de Toeplitz oblicuo de orden k con símbolo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ es acotado en $L^2(\mathbb{T})$.

3.1.1. Propiedades de W_k y W_k^*.

Dado que W_k nos permite relacionar A_φ con el operador de multiplicación M_φ, veamos algunas propiedades que nos son útiles en lo que resta del capítulo.

Sea P_k la proyección de $L^2(\mathbb{T})$ sobre el subespacio de $L^2(\mathbb{T})$ generado por $\{z^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Observe que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el operador W_k cumple las siguientes propiedades:

1. $W_k^* W_k(z^{kn}) = z^{kn}$,
2. $W_k^* W_k(z^{kn+j}) = 0$ *para* $j \in \{1, 2, \cdots k-1\}$,
3. $W_k W_k^*(z^{kn}) = z^{kn}$,
4. $W_k W_k^*(z^{kn+j}) = z^{kn+j}$ *para* $j \in \{1, 2, \cdots k-1\}$.

Entonces

$$\begin{aligned} W_k W_k^* &= I, & (3.1.2) \\ W_k^* W_k &= P_k, & (3.1.3) \end{aligned}$$

y por lo tanto W_k es una coisometría.
Dada $f \in L^2(\mathbb{T})$, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle f, z^i \rangle z^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, z^{nk+i} \rangle z^{nk+i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} z^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, z^{nk+i} \rangle z^{nk}. \end{aligned}$$

Sea $f_i(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, z^{nk+i} \rangle z^n$, para $i \in \{0, 1, \cdots k-1\}$. Por lo tanto tenemos la descomposición

$$f(z) = f_0(z^k) + z f_1(z^k) + \cdots + z^{k-1} f_{k-1}(z^{k-1}). \tag{3.1.4}$$

Lema 3.1.2. *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ y $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces*

$$W_k(fg) = W_k(f)W_k(g) + z \left(\sum_{i=1}^{k-1} W_k(\overline{z}^i f) W_k(\overline{z}^{k-i} g) \right).$$

Demostración. Utilicemos (3.1.4) para escribir f y g en la siguiente forma:

$$f(z) = f_0(z^k) + z f_1(z^k) + \cdots + z^{k-1} f_{k-1}(z^{k-1}) \text{ y } g(z) = g_0(z^k) + z g_1(z^k) + \cdots + z^{k-1} g_{k-1}(z^{k-1}),$$

donde $f_i, g_i \in L^\infty(\mathbb{T})$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots k-1\}$. Entonces

$$\begin{aligned} W_k(fg) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} W_k(f_i(z^k) g_j(z^k) z^i z^j) \\ &= f_0(z) g_0(z) + z \sum_{i=1}^{k-1} f_i(z) g_{k-i}(z). \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Notemos ahora que $W_k(\overline{z}^i f) = f_i(z)$ y $W_k(\overline{z}^i g) = g_i(z)$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots k-1\}$. Así la última suma de (3.1.5) es igual a $W_k(f)W_k(g) + z \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} W_k(\overline{z}^i f) W_k(\overline{z}^{k-i} g) \right)$. ☐

Teorema 3.1.3. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $W_k M_{\varphi(z^k)} = M_\varphi W_k$ y $M_{\varphi(z^k)} W_k^* = W_k^* M_\varphi$.*

Demostración. Por el lema anterior, para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$ tenemos

$$W_k(\varphi(z^k) f) = W_k(\varphi(z^k)) W_k(f) + z \left(\sum_{i=1}^{k-1} W_k(\overline{z}^i \varphi(z^k)) W_k(\overline{z}^{k-i} f) \right),$$

pero $W_k(\overline{z}^i \varphi(z^k)) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots k-1\}$ y por lo tanto $W_k(\varphi(z^k) f) = \varphi W_k(f)$.

Para la otra igualdad basta tomar adjuntos en la ecuación $W_k M_{\overline{\varphi(z^k)}} = M_{\overline{\varphi}} W_k$. ☐

Analicemos ahora el espectro del operador W_k. Primero, dado que $\|W_k\| = 1$, el espectro de W_k está contenido en el disco unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$. Para demostrar que dicho espectro coincide con $\overline{\mathbb{D}}$ basta observar que si λ es un número complejo con $|\lambda| < 1$ el vector

$$\Lambda_\lambda^p = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i z^{k^i p}$$

es un eigenvector de W_k para todo número primo p. Si p, q son números primos distintos entonces $\langle \Lambda_\lambda^p, \Lambda_\lambda^q \rangle = 0$, por lo tanto $\dim \ker(W_k - \lambda I) = \infty$.

3.1.2. Norma, radio espectral y caracterización de un operador de Toeplitz oblicuo de orden k.

Para un operador de Toeplitz oblicuo con símbolo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ su matriz, con respecto a la base estándar de $L^2(\mathbb{T})$, está dada por (3.1.1). Por ello la matriz correspondiente para el operador adjunto A_φ^* está dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k+3} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k+3} & \ddots & & \\
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k+2} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k+2} & \overline{\hat{\varphi}}_{2} & \ddots & \\
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k+1} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k+1} & \overline{\hat{\varphi}}_{1} & \overline{\hat{\varphi}}_{k+1} & \ddots \\
\hline
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k} & \overline{\hat{\varphi}}_{0} & \overline{\hat{\varphi}}_{k} & \ddots \\
 & \ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-k-1} & \overline{\hat{\varphi}}_{-1} & \overline{\hat{\varphi}}_{k-1} & \ddots \\
 & & \ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2} & \overline{\hat{\varphi}}_{k-2} & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right).$$

Aplicando el operador W_k a A_φ^* obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{k} & \overline{\hat{\varphi}}_{2k} & \ddots & & \\
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{0} & \overline{\hat{\varphi}}_{k} & \overline{\hat{\varphi}}_{2k} & \ddots & \\
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-k} & \overline{\hat{\varphi}}_{0} & \overline{\hat{\varphi}}_{k} & \overline{\hat{\varphi}}_{2k} & \ddots \\
\hline
\ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k} & \overline{\hat{\varphi}}_{0} & \overline{\hat{\varphi}}_{k} & \ddots \\
 & \ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k} & \overline{\hat{\varphi}}_{0} & \ddots \\
 & & \ddots & \overline{\hat{\varphi}}_{-2k} & \overline{\hat{\varphi}}_{-k} & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right).$$

La cual es una matriz de Toeplitz y por lo tanto corresponde al operador de multiplicación por $W_k(\overline{\varphi})$. Así

$$W_k A_\varphi^* = M_{W_k(\overline{\varphi})}. \tag{3.1.6}$$

Proposición 3.1.4. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces el operador de Toeplitz oblicuo A_φ tiene norma igual a $\sqrt{\|W_k(|\varphi|^2)\|_\infty}$.*

Demostración. Veamos primero que $A_\varphi A_\varphi^* = M_{W_k(|\varphi|^2)}$:

$$\begin{aligned} A_\varphi A_\varphi^* = W_k M_\varphi (W_k M_\varphi)^* &= W_k M_\varphi M_{\overline{\varphi}} W_k^* \\ &= W_k M_{|\varphi|^2} W_k^* \\ &= W_k (A_{|\varphi|^2})^* = M_{W_k(|\varphi|^2)} \quad \text{(por la Ecuación 3.1.6)}. \end{aligned}$$

Luego $\|A_\varphi\|^2 = \|A_\varphi A_\varphi^*\| = \|M_{W_k(|\varphi|^2)}\| = \|W_k(|\varphi|^2)\|_\infty$. ☐

Dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, sea $\psi_n = \underbrace{W_k(W_k(\cdots(W_k}_{n\ veces}(|\varphi|^2)|\varphi|^2)\cdots|\varphi|^2)$. Utilizando inducción es sencillo demostrar que

$$A_\varphi^n (A_\varphi^*)^n = M_{\psi_n},$$

y por ello $\|A_\varphi^n\|^2 = \|\psi_n\|_\infty$. Por lo tanto de tenemos la siguiente fórmula para el radio espectral de A_φ

$$r(A_\varphi) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{\|\psi_n\|_\infty^{1/n}}.$$

Una caracterización importante para los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k es que son las soluciones de la ecuación

$$X M_{z^k} = M_z X,$$

como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. *Un operador acotado A, actuando en $L^2(\mathbb{T})$, es un operador de Toelitz oblicuo de orden k si y solo si $M_z A = A M_{z^k}$.*

Demostración. Para la parte "solo si", escribamos $A = W_k M_\varphi$, donde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces

$$\begin{aligned} A M_{z^k}(f) = A(z^k f) &= W_k M_\varphi (z^k f) \\ &= W_k (z^k \varphi f) \\ &= M_z W_k(\varphi f) = M_z A(f), \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que A es un operador que cumple que $M_z A = A M_{z^k}$. Sean $f_i(z) = \overline{z}^i A(z^i)(z^k)$ para $i \in \{0, 1, \cdots k-1\}$. Veamos que cada $f_i \in L^\infty(\mathbb{T})$. Sean $i \in \{0, 1, \cdots k-1\}$ fijo y $h \in L^2(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned} A(z^i h(z^k)) &= A\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle h, z^n\rangle z^{nk+i}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle h, z^n\rangle A(z^{nk+i}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle h, z^n\rangle A M_{z^{nk}}(z^i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle h, z^n\rangle M_{z^n} A(z^i) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle h, z^n\rangle z^n A(z^i) = h(z) A(z^i). \end{aligned}$$

Luego
$$\|M_{A(z^i)}(h)\| = \|A(z^i h(z^k))\| \leq \|A\|\|z^i h(z^k)\| \leq \|A\|\|h\| < \infty.$$

Dado que $\|M_{A(z^i)}\| = \|A(z^i)\|_\infty$, tenemos que $A_{z^i} \in L^\infty(\mathbb{T})$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots k-1\}$ y por ello $f_i \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Sea $\varphi = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} f_i(z) \in L^\infty(\mathbb{T})$. Veamos ahora que $A = A_\varphi$. Para ello sea $g \in L^2(\mathbb{T})$ y escribamos $g(z) = g_0(z^k) + zg_1(z^k) + \cdots + z^{k-1}g_{k-1}(z^k)$, como en la descomposición (3.1.4), donde $g_i \in L^\infty(\mathbb{T})$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots k-1\}$. Entonces, por el Lema 3.1.2

$$\begin{aligned}
A_\varphi(g) = W_k(\varphi g) &= W_k(\varphi)W_k(g) + z\left(\sum_{i=1}^{k-1} W_k(\overline{z}^i\varphi)W_k(\overline{z}^{k-i}g)\right) \\
&= A(1)g_0 + \sum_{i=0}^{k-1} z(\overline{z}A(z^{k-i}))(g_{k-i}(z)) \\
&= A(1)g_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(A(z^{k-i}))(g_{k-i}(z)) \\
&= A(1)g_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A(z^{k-i}g_{k-i}(z^k)) \\
&= A(g_0(z^k) + zg_1(z^k) + \cdots + z^{k-1}g_{k-1}(z^k)) = A(g).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Lema 3.1.6. *Dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, tenemos que $A_\varphi = 0$ si y solo si $\varphi = 0$.*

Demostración. Basta demostrar que si $A_\varphi = 0$ entonces $\varphi = 0$. Sea $\varphi = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_j z^j$ la representación en serie de Fourier de φ con respecto a la base estándar de $L^2(\mathbb{T})$. Por hipótesis tenemos que $A_\varphi(z^i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 = A_\varphi(z^i) = W_k(\varphi z^i) &= W_k\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_j z^{j+i}\right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{jk-i} z^j
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\varphi}_{jk-i} = 0$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $\varphi = 0$. □

El lema anterior implica que la aplicacion

$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

de $L^2(\mathbb{T})$ en $B(L^2(\mathbb{T}))$ es lineal e inyectiva.

3.1.3. Conmutador y doble conmutador del álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz oblicuos de orden k.

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k. Recordemos que $W_k = A_1$ y $W_k A^*_\varphi = M_{W_k(\overline{\varphi})}$. Por lo tanto, para todo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, usando que $\varphi = W_k W^*_k(\varphi)$, tenemos que

$$M_\varphi = W_k A_{\overline{W^*_k(\varphi)}}.$$

Por lo tanto $(M_\varphi) \subset \mathcal{A}$, donde (M_φ) denota al álgebra C^* generada por todos los operadores de multiplicación.

Dado que (M_φ) es una subálgebra máximal abeliana (para detalles vea la Proposición 4.22 en [5]) tenemos que, $\mathcal{A}' \subset (M_\varphi)' = (M_\varphi)$. Entonces si $X \in \mathcal{A}'$ existe $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $X = M_\psi$. Dado que $W_k = A_1 \in \mathcal{A}$ tenemos que $M_\psi W_k = W_k M_\psi$. Entonces para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_i = \langle \psi(z^k), z^{ki} \rangle &= \langle W^*_k(\psi(z)), W^*_k(z^i) \rangle \\
&= \langle \psi, z^i \rangle \\
&= \langle M_\psi W_k(1), z^i \rangle \\
&= \langle W_k M_\psi(1), z^i \rangle \\
&= \langle M_\psi(1), W^*_k(z^i) \rangle = \langle \psi, z^{ki} \rangle = \hat{\psi}_{ki}.
\end{aligned}$$

Dado que $\sum_{i=\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_i|^2 = \|\psi\|_2^2 < \infty$, se sigue que $\hat{\psi}_i = 0$ para todo $i \neq 0$, entonces ψ es constante. Por lo tanto tenemos

$$\mathcal{A}' = (I) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}'' = B(L^2(\mathbb{T})).$$

Por lo tanto el álgebra C^* generada por operadores de Toepliz oblicuos de orden k es irreducible.

Por el teorema del doble conmutador tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.7. *La cerradura fuerte de $\mathcal{A}$ es $\mathcal{A}'' = B(L^2(\mathbb{T}))$.*

3.1.4. Espectro de un operador de Toeplitz oblicuo de orden k.

En el siguiente lema demostramos que el espectro puntual de A_φ coincide con el espectro puntual de $A_{\varphi(z^k)}$, cuando φ es una función invertible.

Lema 3.1.8. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ es invertible entonces $\sigma_p(A_\varphi) = \sigma_p(A_{\varphi(z^k)})$, donde σ_p denota el espectro puntual.*

Demostración. Dado $\lambda \in \sigma_p(A_\varphi)$ correspondiente al eigenvector f, veamos ahora que φf es un eigenvector para $A_{\varphi(z^k)}$ correspondiente a λ. En efecto,

$$\begin{aligned}
A_{\varphi(z^k)}(\varphi f) &= W_k(\varphi(z^k)\varphi f) \\
&= \varphi(z) W_k(\varphi f) \\
&= \varphi A_\varphi f = \lambda(\varphi f).
\end{aligned}$$

Por otro lado si $\lambda \in \sigma_p(A_{\varphi(z^k)})$ correspondiente al eigenvector g, la función $\varphi^{-1}g$ es un eigenvector para A_φ:

$$\begin{aligned} A_\varphi(\varphi^{-1}g) &= W_k(\varphi\varphi^{-1}g) \\ &= W_k(g) \\ &= \varphi^{-1}\varphi W_k(g) \\ &= \varphi^{-1}W_k(\varphi(z^k)g) = \varphi^{-1}A_{\varphi(z^k)}(g) = \lambda(\varphi^{-1}g). \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Lema 3.1.9. *Dado $\varphi \in L^\infty$, tenemos que $\sigma(A_\varphi) = \sigma(A_{\varphi(z^k)})$.*

Demostración. Por las propiedades del espectro tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(A_\varphi^*) \cup \{0\} = \sigma(M_{\overline{\varphi}}W_k^*) \cup \{0\} &= \sigma(W_k^* M_{\overline{\varphi}}) \cup \{0\} \\ &= \sigma(M_{\overline{\varphi(z^k)}}W_k^*) \cup \{0\} \\ &= \sigma(A_{\varphi(z^k)}^*) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\sigma(A_\varphi) \cup \{0\} = \overline{\sigma(A_\varphi^*)} \cup \{0\} = \overline{\sigma(A_{\varphi(z^k)}^*)} \cup \{0\} = \sigma(A_{\varphi(z^k)}) \cup \{0\}.$$

Ahora solo resta ver que ambos contienen al 0. Para ello recordemos que W_k no es sobreyectiva, por lo que $A_{\varphi(z^k)}^*$ no tiene rango denso, luego $\ker(A_{\varphi(z^k)}) = (Ran(A_{\varphi(z^k)}^*))^\perp \neq 0$, por lo tanto 0 es un eigenvalor de $A_{\varphi(z^k)}$.

Si suponemos que φ es invertible, por el lema anterior tenemos $0 \in \sigma_p(A_{\varphi(z^k)}) = \sigma_p(A_\varphi)$. Dado que el conjunto $\{\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}) : \ \varphi^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T}) \ \}$ es denso, para cualquier φ existe una sucesión de funciones invertibles (φ_n) que converge a φ. Del hecho que $\|A_\varphi - A_{\varphi_n}\| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty$, tenemos una sucesión (A_{φ_n}) de operadores no invertibles que converge a A_φ. Como el espectro es cerrado se sigue que A_φ no es invertible, luego $0 \in \sigma(A_\varphi)$. □

Proposición 3.1.10. *Sea φ invertible en $L^\infty(\mathbb{T})$, entonces el espectro de A_φ contiene a un disco cerrado.*

Demostración. Supongamos que $\lambda \neq 0$, y que $A_{\varphi(z^k)}^* - \lambda I$ es sobreyectiva, entonces para cualquier $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ tenemos

$$\begin{aligned} (A_{\varphi(z^k)}^* - \lambda I)(f) &= M_{\overline{\varphi}(z^k)}W_k^*(f) - \lambda f \\ &= \overline{\varphi}(z^k)f(z^k) - \lambda(P_k(f) \oplus (I - P_k)(f)) \\ &= (W_k^*(\varphi f) - \lambda P_k(f)) \oplus (-\lambda(I - P_k)(f)). \end{aligned}$$

La notación $\oplus$ en las ecuaciones anteriores significa que los términos de la suma son ortogonales entre sí. Utilizando la Equación 3.1.3 tenemos que

$$\begin{aligned} (A_{\varphi(z^k)}^* - \lambda I)(f) &= \lambda W_k^* M_{\overline{\varphi}}(\lambda^{-1}I - M_{\overline{\varphi}^{-1}}W_k)(f) \oplus (-\lambda(I - P_k)(f)) \\ &= \lambda W_k^* M_{\overline{\varphi}}(\lambda^{-1}I - A_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)})(f) \oplus (-\lambda(I - P_k)(f)). \end{aligned}$$

Como $A^*_{\varphi(z^k)} - \lambda I$ es sobreyectiva, dado $g \in (P_k(L^2(\mathbb{T})))^\perp$ existe $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $(A^*_{\varphi(z^k)} - \lambda I)(f) = g$.

Por lo tanto $\lambda W^* M_{\overline{\varphi}}(\lambda^{-1} I - A_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)})(f) \oplus (-\lambda(I - P_k)(f)) = g \in (I - P_k)(L^2(\mathbb{T}))$. Entonces $\lambda W^* M_{\overline{\varphi}}(\lambda^{-1} I - A_{\overline{\varphi^{-1}}(z^k)})(f) = 0$, dado que $\lambda \neq 0$, W_k^* es una isometría y φ es invertible se tiene que $(\lambda^{-1} I - A_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)})(f) = 0$ lo cual implica que $\lambda^{-1} \in \sigma(A_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)})$, luego

$$\{\lambda^{-1} \ : \ \lambda \in \rho(A^*_{\varphi(z^k)})\} \subset \sigma_p(A_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)})$$

Por el lema anterior tenemos que $\sigma(A_{\overline{\varphi}^{-1}}) = \sigma(A_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)})$ y, luego de cambiar φ por $\overline{\varphi}^{-1}$, dado que el espectro es cerrado, tenemos

$$\mathcal{D} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| \leq r \left(A^*_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)} \right)^{-1} \right\} \subseteq \sigma(A_\varphi).$$

Por lo tanto el espectro de A_φ contiene a un disco cerrado de radio $r \left(A^*_{\overline{\varphi}^{-1}(z^k)} \right)^{-1}$. □

Corolario 3.1.11. *Si $|\varphi| = 1$, entonces $\sigma(A_\varphi) = \overline{\mathbb{D}}$, en particular si φ es una función interna $\sigma(A_\varphi) = \overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Dado que $|\varphi| = 1$, tenemos que $\varphi = \overline{\varphi}^{-1}$, se sigue de la fórmula del radio espectral que $r(A_\varphi) = r(A_{\overline{\varphi}^{-1}}) = 1$, por lo tanto el resultado se sigue del teorema anterior. □

3.1.5. Propiedades adicionales de los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k.

El siguiente teorema nos muestra que el único operador de Toeplitz oblicuo que es compacto es el operador cero.

Teorema 3.1.12. *Dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces A_φ es compacto si y solo si $\varphi = 0$.*

Demostración. Si A_φ es compacto, entonces lo es $W_k A^*_\varphi$. La Ecuación 3.1.6 implica que $M_{W_k(\overline{\varphi})}$ es compacto y, dado que el único operador de multiplicación compacto en $L^2(\mathbb{T})$ es el operador cero, se sigue que $W_k(\overline{\varphi}) = 0$. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle W_k(\overline{\varphi}), z^n \rangle &= \langle \overline{\varphi}, W_k^*(z^n) \rangle \\ &= \langle \overline{\varphi}, z^{kn} \rangle = \overline{\widehat{\varphi}_{kn}}. \end{aligned}$$

Ahora para $0 < j < nk$ el operador $A_\varphi M_{z^j}$ es compacto, por lo que también lo es $W_k(A_\varphi M_{z^j})^* = W_k(A_{z^j\varphi})^* = M_{W_k(\overline{z}^j \overline{\varphi})}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle W_k(\overline{z}^j \overline{\varphi}), z^n \rangle &= \langle \overline{z}^j \overline{\varphi}, W_k^*(z^n) \rangle \\ &= \langle \overline{z}^j \overline{\varphi}, z^{kn} \rangle \\ &= \langle \overline{\varphi}, z^{kn+j} \rangle = \overline{\widehat{\varphi}_{kn-j}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi = 0$. □

Para lo que resta de la sección hacemos uso de la siguiente proposición cuyo enunciado es parecido al lema 3.1.6 dado anteriormente.

Proposición 3.1.13. *Dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $W_k A_\varphi$ es un operador de Toeplitz oblicuo de orden k si y solo si $\varphi = 0$.*

Demostración. Si $W_k A_\varphi$ es un operador de Toeplitz oblicuo, entonces $W_k A_\varphi = A_\psi$ para alguna función $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{k^2 j - i} z^i &= W_k \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{kj-i} z^i \right) = W_k A_\varphi(z^i) \\ &= A_\psi(z^i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_{kj-i} z^i. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\varphi}_{k^2 j-i} = \hat{\psi}_{kj-i}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Si $j = 0$ tenemos que $\varphi = \psi$, pero entonces

$$\hat{\psi}_{k-i} = \hat{\psi}_{k^2-i} = \hat{\psi}_{k^3-i} = \cdots, \quad \text{para todo } \ i \in \mathbb{Z}.$$

Dado que $\lim_{n \longrightarrow \infty} |\hat{\varphi}_{k^n-i}| = 0$, se sigue que $\hat{\varphi}_{k-i} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\psi = \varphi = 0$. $\square$

El siguiente teorema nos da las condiciones para que el producto de dos operadores de Toeplitz oblicuos sea cero.

Teorema 3.1.14. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $A_\varphi A_\psi = 0$ si y solo si $\varphi(z^k)\psi = 0$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.3 $M_\varphi W_k = W_k M_{\varphi(z^k)}$, luego

$$A_\varphi A_\psi = W_k M_\varphi W_k M_\psi = W_k W_k M_{\varphi(z^k)\psi} = W_k A_{\varphi(z^k)\psi}.$$

Por lo tanto el resultado se sigue de la proposición anterior. $\square$

Teorema 3.1.15. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $A_\varphi A_\psi = A_\psi A_\varphi$ si y solo si $\varphi(z^k)\psi - \psi(z^k)\varphi = 0$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi &= W_k M_\varphi W_k M_\psi - W_k M_\psi W_k M_\varphi \\ &= W_k W_k M_{\varphi(z^k)\psi} - W_k W_k M_{\psi(z^k)\varphi} \\ &= W_k A_{\varphi(z^k)\psi - \psi(z^k)\varphi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue de la Proposición 3.1.13. $\square$

Lema 3.1.16. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $A_\varphi A_\psi$ es compacto si y solo si $\varphi(z^k)\psi = 0$.*

Demostración. Para $j \in \mathbb{Z}$, denotemos por a_j al k-ésimo coeficiente de Fourier de $\varphi(z^k)\psi$. Si $A_\varphi A_\psi$ es compacto entonces lo es $W_k^2(A_\varphi A_\psi)^*$. Veamos que este último es un operador de multiplicación. En efecto, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} W_k^2(A_\varphi A_\psi)^*(z^i) &= W_k^2(W_k M_\psi)^*(W_k M_\varphi)^*(z^i) \\ &= W_k^2 M_{\overline{\psi}} W_k^* M_{\overline{\varphi}} W_k^*(z^i) \\ &= W_k^2 M_{\overline{\psi}} M_{\overline{\varphi}(z^k)} (W_k^*)^2(z^i) \\ &= W_k^2 M_{\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)}(z^{k^2 i}) \\ &= W_k^2(\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k) z^{k^2 i}) = W_k M_{z^{k^2 i}}(\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)) \\ &= z^i W_k^2(\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)) = M_{W_k^2(\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k))}(z^i). \end{aligned}$$

De nueva cuenta, dado que único operador de multiplicación compacto es el operador cero, tenemos que $W_k^2(\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)) = 0$. Luego, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$0 = \langle W_k^2(\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)), z^i\rangle = \langle \overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k), z^{ik^2}\rangle.$$

Por lo tanto

$$\overline{a_{ik^2}} = 0 \tag{3.1.7}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, para todo $l \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ el operador $W_k^2(A_\varphi A_\psi M_{z^l})^*$ es compacto y, mediante un proceso análogo al anterior, es igual a $M_{W_k^2(\overline{z}^l\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k))}$. Por lo tanto $W_k^2(\overline{z}^l\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)) = 0$, lo que implica que para todo $i \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$0 = \langle W_k^2(\overline{z}^l\overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k)), z^i\rangle = \langle \overline{\psi}\overline{\varphi}(z^k), z^{ik^2-l}\rangle.$$

Por lo tanto $\overline{a_{ik^2-j}} = 0$ y, utilizando (3.1.7) se obtiene que $\varphi(z^k)\psi = 0$. La otra implicación es evidente. $\square$

Dado que $W_k = A_1$, se sigue del lema anterior que $W_k A_\varphi$ es compacto si y solo si $\varphi = 0$. Entonces del hecho que

$$A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi = W_k A_{\varphi(z^k)\psi - \psi(z^k)\varphi},$$

como en la demostración del Teorema 3.1.15, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.17. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces $A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi$ es compacto si y solo si $\varphi(z^k)\psi - \psi(z^k)\varphi = 0$.*

De los resultados anteriores se siguen fácilmente los siguientes dos teoremas, uno de ellos nos dice cuando dos operadores de Toeplitz oblicuos de orden k conmutan.

Teorema 3.1.18. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) El operador $A_\varphi A_\psi$ es compacto.

b) $A_\varphi A_\psi = 0$.

c) $\varphi(z^k)\psi = 0$.

Teorema 3.1.19. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) Los operadores A_φ y A_ψ conmutan.

b) Los operadores A_φ y A_ψ conmutan esencialmente.

c) $\varphi(z^k)\psi - \psi(z^k)\varphi = 0$.

Desarrollando una función en serie de Fourier y utilizando que los coeficientes de la serie de Fourier están en $\ell^2(\mathbb{Z})$ se puede demostrar fácilmente el siguiente lema.

Lema 3.1.20. *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $m > 1$ un entero positivo, si $f(z^m) = f(z)$, entonces f es constante.*

Teorema 3.1.21. *Sean $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y supongamos que al menos una de estas funciones es invertible en $L^\infty(\mathbb{T})$. Entonces $A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi$ es compacto si y solo si existen escalares α, β no cero tal que $\alpha\varphi + \beta\psi = 0$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que φ es invertible. Entonces si $A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi$ es compacto se tiene que $\varphi(z^k)\psi = \varphi\psi(z^k)$, luego $\psi\varphi^{-1} = \psi(z^k)\varphi^{-1}(z^k)$ y, por el lema anterior, se sigue que $\psi\varphi^{-1}$ es constante y por ello el resultado se sigue.

Por otro lado, si existen constantes α, β no cero tal que $\alpha\varphi + \beta\psi = 0$, entonces $\varphi = -(\beta/\alpha)\psi$, luego $\varphi(z^k)\psi - \varphi\psi(z^k) = 0$ por lo que $A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi$ es compacto. $\square$

3.2. Operadores de Toeplitz oblicuos en el espacio de Bergman.

A partir de esta sección consideraremos el disco unitario con la medida $dA(z) = dxdy$ donde $z = x + iy$.

De la misma forma que en la sección anterior, definimos el operador W_k en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ por

$$W_k(z^i) = \begin{cases} z^{n/k}, & \text{si } n \text{ es divisible por } k, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ y T_φ el operador de Toeplitz en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. **El operador de Toeplitz oblicuo de orden k en** $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ se define por

$$B_\varphi = W_k T_\varphi.$$

En el espacio de Bergman el operador W_k es un operador lineal y acotado y, a diferencia de $L^2(\mathbb{T})$, éste tiene norma igual a $\sqrt{k}$, como vemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. *W_k es un operador lineal y acotado y $\|W_k\| = \sqrt{k}$.*

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, una función en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Entonces

$$\begin{aligned} \|W_k f\|_2^2 &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{kn}|^2}{n+1} = k\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{kn}|^2}{kn+k}\right) \\ &\leq k\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{kn}|^2}{n+1}\right) \\ &\leq k\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|W_k\| \leq \sqrt{k}$.

Por otro lado el conjunto $\{\sqrt{kn+1} z^{kn} : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ es ortonormal en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Luego

$$\begin{aligned}\|W_k\|_2 &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|W_k(\sqrt{kn+1}z^{kn})\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sqrt{\frac{kn+1}{n+1}} = \sqrt{k}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|W_k\| = \sqrt{k}$. $\square$

Proposición 3.2.2. *$W_k^* z^n = \dfrac{kn+1}{n+1} z^{kn}$ para todo $n \in \{0,1,2,\cdots\}$ y $\|f\| \leq \|W_k^* f\| \leq \sqrt{k}\|f\|$, para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned}\langle W_k^* z^n, f(z)\rangle &= \langle z^n, W_k(f(z))\rangle = \left\langle z^n, \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} z^i \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{kn+1}{n+1} z^{kn}, \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right\rangle = \left\langle \frac{kn+1}{n+1} z^{kn}, f(z) \right\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto $W_k^* z^n = \dfrac{kn+1}{n+1} z^{kn}$, para todo $n \in \{0,1,2,\cdots\}$.

Además

$$\begin{aligned}\|W_k^* f\|^2 &= \left\| W_k^* \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{ki+1}{i+1} z^{ik} \right\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i|^2 (ki+1)}{(i+1)^2} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i|^2}{i+1} = \|f\|^2.\end{aligned}$$

Este último resultado y la proposición anterior implican que $\|f\| \leq \|W_k^* f\| \leq \sqrt{k}\|f\|$. $\square$

Dado un operador lineal y acotado T en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, la **transformada de Berezin de** T es la función $\widetilde{T}(z) = \langle T\widetilde{k}_z, \widetilde{k}_z\rangle$, donde $\widetilde{k}_z$ es el núcleo reproductor de Bergman normalizado. Es decir,

$$\widetilde{k}_z(w) = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2} = (1-|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\overline{z}w)^n.$$

Sea $J_z^k(\zeta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (kn+1)\overline{z}^n \zeta^{kn}$ para $z, \zeta \in \mathbb{D}$. Utilizando que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z}^n \zeta^{kn+1} = \frac{\zeta}{1-\overline{z}\zeta^k}$ obtenemos la siguiente igualdad

$$J_z^k(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (kn+1)\overline{z}^n \zeta^{kn} = \frac{d}{d\zeta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z}^n \zeta^{kn+1} \right) = \frac{1+(k-1)\overline{z}\zeta^k}{(1-\overline{z}\zeta^k)^2}.$$

Entonces $|J_z^k(\zeta)| = \dfrac{|1+(k-1)\overline{z}\zeta^k|}{|1-\overline{z}\zeta^k|^2} \leq \dfrac{1+(k-1)|z|}{(1-|\overline{z}||\zeta|^k)^2} \leq \dfrac{1+(k-1)|z|}{(1-|z|)^2}$. Entonces $J_z^k(\zeta)$ es acotado y por lo tanto $J_z^k(\zeta) \in H^\infty(\mathbb{D})$.

En los siguientes resultados representaremos la transformada de Berezin de W_k en términos de $J_z^k(\zeta)$. Posteriormente demostraremos que el operador W_k es un operador integral con kernel dado por $\overline{J_z^k(\zeta)}$.

Proposición 3.2.3. $(W_k\widetilde{k_z})(\zeta) = (1-|z|^2)J_{\overline{\zeta}}^2(\overline{z})$ y $\widetilde{W_k}(z) = (1-|z|^2)^2 J_{\overline{z}}^k(\overline{z})$.

Demostración. Dado que $J_{\overline{\zeta}}^k(\overline{z}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(kn+1)\overline{z}^{kn}\zeta^n$,

$$\begin{aligned}
(W_k\widetilde{k_z})(\zeta) &= W_k((1-|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\overline{z}\zeta)^n) \\
&= (1-|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}(kn+1)\overline{z}^{kn}\zeta^n \\
&= (1-|z|^2)J_{\overline{\zeta}}^k(\overline{z}).
\end{aligned}$$

Para demostrar la otra igualdad tenemos del resultado anterior que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{W_k}(z) &= \langle W_k(\widetilde{k_z}), \widetilde{k_z}\rangle \\
&= \langle (1-|z|^2)J_{\overline{\zeta}^n}^k(\overline{z}), k_z(\zeta)\rangle \\
&= (1-|z|^2)^2\left\langle \sum_{n=0}^{\infty}(kn+1)\overline{z}^{kn}\zeta^n, \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\overline{z}\zeta)^n \right\rangle \\
&= (1-|z|^2)^2\sum_{n=0}^{\infty}(kn+1)\overline{z}^{kn}z^n \\
&= (1-|z|^2)^2 J_{\overline{z}}^k(\overline{z}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado se sigue. □

El siguiente teorema afirma que el operador W_k es un operador integral.

Teorema 3.2.4. *Si* $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, *entonces* $(W_k(f))(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{J_z^k(\zeta)}dA(\zeta)$.

Demostración. Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}a_i z^i$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\overline{J_z^k(\zeta)}dA(\zeta) &= \langle f(\zeta), J_z^k(\zeta)\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{\infty}a_i\zeta^i, \sum_{i=0}^{\infty}(ki+1)\overline{z}^i\zeta^{ik} \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}a_{ki}z^i = (W_k(f))(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Corolario 3.2.5. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ y $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, entonces el operador de Toeplitz oblicuo de orden k, B_φ, está dado por*

$$(B_\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\zeta) \overline{J_z^k(\zeta)} dA(z).$$

Demostración. Por el teorema anterior tenemos:

$$\begin{aligned} (B_\varphi f)(z) = W_k T_\varphi f &= \langle T_\varphi f, J_z^k(\zeta) \rangle \\ &= \langle P \varphi f, J_z^k(\zeta) \rangle \\ &= \langle \varphi f, J_z^k(\zeta) \rangle = \int_{\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\zeta) \overline{J_z^k(\zeta)} dA(\zeta). \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

3.2.1. Algunas propiedades de los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k.

Esta sección incluye algunos de los resultados principales de los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k, actuando en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Lema 3.2.6. *Sea $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ y n un entero no negativo. Si $W_k^n T_\varphi = 0$ entonces $\varphi = 0$.*

Demostración. Sea $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 = W_k^n T_\varphi(1) &= W_k^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{k^n i} z^i. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_{ik^n} = 0$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

Ahora consideremos la función $f(z) = z^{k^n - j}$, donde $0 < j < k^n$. Entonces $0 = W_k^n(\varphi z^{k^n - j}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik^n + j} z^i$. Por lo tanto, también se tiene que $a_{ik^n+j} = 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. Así $\varphi = 0$. □

Lema 3.2.7. *Si $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $T_\varphi W_k = W_k T_{\varphi(z^k)}$.*

Demostración. Sea $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ y $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$.

Escribamos $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} a_{pk+i}z^{pk+i}$, entonces:

$$\begin{aligned}
W_kT_{\varphi(z^k)}(f) &= W_kP\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{jk}\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} a_{pk+i}z^{pk+i}\right) \\
&= W_k\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} c_j a_{pk+i}z^{jk+pk+i}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} c_j a_{pk} z^{j+p}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
T_\varphi W_k(f) &= PM_\varphi W_k\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p\right) \\
&= P\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_{pk} z^p\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{pk} c_p z^{j+p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Lema 3.2.8. *Sea φ una función analítica en $\mathbb{D}$ y $m > 1$ un número entero. Si $\varphi(z^m) = \varphi(z)$, para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces φ es una función constante.*

Demostración. Sea $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ y supongamos que $\varphi(z) = \varphi(z^m)$. Entonces $a_i = a_{im} = a_{im^2} = a_{im^3} = \cdots$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots\}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|^2 < \infty$, tenemos que $a_i = 0$, para todo $i \neq 0$. Es decir $\varphi = a_0$. □

Teorema 3.2.9. *a) Si $\overline{\varphi}$ o $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $B_\varphi T_\psi = B_{\varphi\psi}$.*

b) Si $\varphi, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $T_\psi B_\varphi = B_{\varphi\psi(z^k)}$.

c) Sean $\varphi, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $B_\varphi T_\psi = T_\psi B_\varphi$ si y solo si ψ es constante o $\varphi = 0$.

Demostración. Por el Teorema 1.2.10 si $\overline{\varphi}$ o $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$. Entonces

$$B_\varphi T_\psi = W_kT_\varphi T_\psi = W_kT_{\varphi\psi} = B_{\varphi\psi},$$

por lo que el literal a) queda demostrado.

Utilizando el Lema 3.2.7 tenemos que

$$T_\psi B_\varphi = T_\psi W_k T_\varphi = W_k T_{\psi(z^k)} T_\varphi = W_k T_{\psi(z^k)\varphi} = B_{\varphi\psi(z^k)},$$

lo cual demuestra el literal b).

Por a) y b) $B_\varphi T_\psi = T_\psi B_\varphi$ si y solo si $B_{\varphi\psi} = B_{\varphi\psi(z^k)}$ y, por el Lema 3.2.6, esto último equivale a $\varphi(\psi - \psi(z^k)) = 0$, lo cual a su vez es equivalente a que $\varphi = 0$ o $\psi(z) - \psi(z^k) = 0$. Finalmente, el Lema 3.2.8 implica que $\varphi = 0$ o ψ es constante. □

El siguiente teorema nos da algunas condiciones para que dos operadores de Toeplitz oblicuos del mismo orden conmuten.

Teorema 3.2.10. *Sean $\varphi, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Entonces $B_\varphi B_\psi = B_\psi B_\varphi$ si y solo si φ, ψ satisfacen alguna de las condiciones siguientes:*

a) $\varphi = 0$;

b) $\psi = 0$;

c) Existe una constante c tal que $\varphi = c\psi$.

Demostración. Utilizando el Lema 3.2.7 tenemos que

$$B_\varphi B_\psi = W_k T_\varphi W_k T_\psi = W_k W_k T_{\varphi(z^k)} T_\psi = W_k^2 T_{\psi\varphi(z^k)}$$

y, análogamente, $B_\psi B_\varphi = W_k^2 T_{\psi(z^k)\varphi}$. Si B_φ y B_ψ conmutan se tiene que $W_k^2 T_{\psi\varphi(z^k)-\psi(z^k)\varphi} = 0$ y, por el Lema 3.2.6, tenemos que $\psi\varphi(z^k) - \psi(z^k)\varphi = 0$, luego $\varphi = 0$ o $\psi = 0$ y, en el caso que $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$, tenemos que $\dfrac{\psi}{\varphi}(z) = \dfrac{\psi}{\varphi}(z^k)$ y por el Lema 3.2.8 $\dfrac{\psi}{\varphi}$ es constante. □

Teorema 3.2.11. *Si $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ y es invertible en $H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $\sigma_p(B_\varphi) = \sigma_p(B_{\varphi(z^k)})$, donde σ_p denota el espectro puntual.*

Demostración. Si $0 \neq \lambda \in \sigma_p(B_\varphi)$ entonces $W_k T_\varphi(f) = \lambda f$ para alguna función $f \neq 0$, por lo que $T_\varphi(f) \neq 0$. Veamos que $T_\varphi(f)$ es un eigenvector de $B_{\varphi(z^k)}$ correspondiente al eigenvalor λ. En efecto, el Lema 3.2.7 implica que

$$B_{\varphi(z^k)}(T_\varphi(f)) = W_k T_{\varphi(z^k)}(T_\varphi(f)) = T_\varphi W_k T_\varphi(f) = T_\varphi(\lambda f) = \lambda T_\varphi(f).$$

Por otro lado, si $0 \neq \lambda \in \sigma_p(B_{\varphi(z^k)})$, entonces $W_k T_{\varphi(z^k)}(f) = T_\varphi(W_k(f)) = \lambda f$ para algúna función $f \neq 0$, por lo que $W_k(f) \neq 0$. Veamos que $W_k(f)$ es un eigenvector de B_φ correspondiente al eigenvalor λ. De nuevo el Lema 3.2.7 implica que

$$B_\varphi(W_k(f)) = W_k T_\varphi W_k(f) = W_k W_k T_{\varphi(z^k)}(f) = W_k(\lambda f) = \lambda W_k(f).$$

Veamos ahora que ambos espectros contienen a 0. Sea $\varphi = \sum_{i=0}^\infty a_i z^i$, entonces

$$B_{\varphi(z^k)} z = W_k T_{\varphi(z^k)}(z) = W_k \left(\sum_{i=0}^\infty a_i z^{ik+1} \right) = 0.$$

Por otro lado, consideremos la función $T_{\varphi^{-1}}$, entonces

$$B_\varphi(T_{\varphi^{-1}}(z)) = W_k T_\varphi T_{\varphi^{-1}}(z) = W_k T_{\varphi\varphi^{-1}}(z) = W_k(z) = 0.$$

Por lo tanto $\sigma_p(B_\varphi) = \sigma_p(B_{\varphi(z^k)})$. □

3.3. Operadores de Hankel Oblicuos de orden k.

Al igual que la Ecuación 2.3.1 del Capítulo 2, utilizaremos en esta sección el operador de Hankel actuando en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, con símbolo $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, el cual está dado por

$$H_\varphi(f) = (I - P)(M_\varphi f), \quad f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

El **operador de Hankel oblicuo de orden** k en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, denotado por U_φ, se define como

$$U_\varphi = W_k H_\varphi.$$

Por el Lema 3.2.7, tenemos que $T_\varphi W_k = W_k T_{\varphi(z^k)}$ para todo $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. La misma demostración es válida para el lema siguiente.

Lema 3.3.1. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, entonces $M_\varphi W_k = W_k M_{\varphi(z^k)}$.*

Es fácil ver que $PW_k = W_k P$, por lo tanto tenemos el siguiente teorema análogo al Lema 3.2.7.

Teorema 3.3.2. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, entonces $H_\varphi W_k = W_k H_{\varphi(z^k)} = U_{\varphi(z^k)}$.*

Demostración. Para todo $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, tenemos

$$\begin{aligned} H_\varphi W_k(f) = (I-P)M_\varphi W_k(f) &= (I-P)W_k M_{\varphi(z^k)}(f) \\ &= W_k(I-P)M_{\varphi(z^k)}(f) = W_k H_{\varphi(z^k)}(f) = U_{\varphi(z^k)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Teorema 3.3.3. *Dado $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, el operador de Hankel oblicuo $U_{\varphi(z^k)}$ de orden k es acotado en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Es claro que es lineal y además

$$\|U_\varphi\| \leq \|W_k\|\|H_\varphi\| \leq \sqrt{k}\|\varphi\|_\infty.$$

3.3.1. Operadores de Hankel esencialmente oblicuos de orden k en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Un operador lineal y acotado T en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ decimos que es un **operador de Hankel esencialmente oblicuo de orden** k si

$$M_{\overline{\varphi}}T = TM_{z^k} = K \quad \text{para algún operador compacto } K \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

Sea $S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ el conjunto de todos los operadores de Hankel esencialmente oblicuos de orden k y $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ el conjunto de operadores compactos en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. En los siguientes teoremas se demuestran algunos resultados básicos para este tipo de operadores.

Teorema 3.3.4. *Si $H_1, H_2 \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, entonces $H_1 H_2 \in S(\mathcal{A}(\mathbb{D}))$ si y solo si $H_1 M_{\overline{z}} H_2 = H_1 M_{z^k} H_2 ($ mód $\mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})))$*

Demostración. Se sigue fácilmente de lo siguiente

$$M_{\overline{z}}H_1H_2 - H_1H_2M_{z^k} = H_1M_{z^k}H_2 - H_1M_{\overline{z}}H_2(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))).$$

□

Teorema 3.3.5. *Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ y $H \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, entonces HM_φ y $M_\varphi H \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$.*

Demostración. Tenemos que

$$M_{\overline{z}}(HM_\varphi) - (HM_\varphi)M_{z^k} = (M_{\overline{z}}H - HM_{z^k})M_\varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})).$$

Además

$$M_{\overline{z}}(M_\varphi H) - (M_\varphi H)M_{z^k} = M_\varphi(M_{\overline{z}}H - HM_{z^k}) \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})).$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Teorema 3.3.6. *Si $H, H^* \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, entonces $H^*(M_z + M_{z^k}) = (M_{\overline{z}} + M_{\overline{z}^k})H^*(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})))$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que existen compactos K_1 y K_2 tal que

$$M_{\overline{z}}H - H\overline{z^k} = K_1 \quad \text{y} \quad M_{\overline{z}}H^* - H^*M_{z^k} = K_2.$$

Restando ambas igualdades tenemos

$$(M_{\overline{z}} + M_{\overline{z}^k})H^* = H^*(M_z + M_{z^k})(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))),$$

y por lo tanto el resultado se sigue. □

Teorema 3.3.7. *Si H_1 conmuta esencialmente con $M_{\overline{z}}$ y $H_2 \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$, entonces $H_1H_2 \in S(\mathcal{A}^2)$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} M_{\overline{z}}H_1H_2 - H_1H_2M_{z^k} &= H_1M_{\overline{z}}H_2 + H_1H_2M_{z^k}(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))) \\ &= H_1(M_{\overline{z}}H_2 - H_2M_{z^k})(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))) \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.8. *Si $H_1 \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ y H_2 conmuta esencialmente con M_{z^k}, entonces $H_1H_2 \in S(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} M_{\overline{z}}H_1H_2 - H_1H_2M_{z^k} &= M_{\overline{z}}H_1H_2 + H_1M_{z^k}H_2(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))) \\ &= (M_{\overline{z}}H_1 - H_1M_{z^k})H_2(\text{mód } \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))) \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})). \end{aligned}$$

□

3.4. Operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Bergman armónico del disco unitario.

Recordemos del Capítulo 2 que una base ortonormal para el espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$ está dada por el conjunto

$$\{\varrho_n = \sqrt{n+1}\, z^n\}_{n\geq 0} \cup \{\overline{\varrho}_n = \sqrt{n+1}\, \overline{z}^n\}_{n\geq 1}.$$

Definimos el operador W_k actuando en el espacio de Bergman armónico de forma análoga a las secciones anteriores. Esto es

$$W_k(z^{ik}) = z^i \quad \text{y} \quad W_k(\overline{z}^{ik}) = \overline{z}^i \quad \text{para todo } \; i \geq 0,$$

$$W_k(z^i) = 0 \quad \text{y} \quad W_k(\overline{z}^i) = 0 \quad \text{si } \; i > 0 \; \text{ no es divisible por } k.$$

Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ y T_φ el operador de Toeplitz con símbolo φ actuando en el espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$.

El operador de Toeplitz oblicuo de orden k en $b^2(\mathbb{D})$ está definido como

$$V_\varphi = W_k T_\varphi.$$

Al igual que en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, el operador W_k es un operador lineal, acotado y su norma es igual a $\sqrt{k}$.

Proposición 3.4.1. *W_k es un operador lineal acotado y $\|W_k\| = \sqrt{k}$.*

Demostración. Sea $u = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^j$ una función en $b^2(\mathbb{D})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|W_k u\|^2 &= \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk} \overline{z}^j, \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk} \overline{z}^j \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_{ik}|^2}{i+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{jk}|^2}{j+1} \\
&= k \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_{ik}|^2}{ki+k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{jk}|^2}{kj+k} \right) \\
&\leq k \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_{ik}|^2}{ki+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{jk}|^2}{kj+1} \right) \leq k\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Luego $\|W_k\| \leq \sqrt{k}$. Por otro lado, el conjunto $\{\sqrt{kn+1} z^{kn} : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ es ortonormal en $b^2(\mathbb{D})$. Así

$$\begin{aligned}
\|W_k\| &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|W_k(\sqrt{kn+1} z^{kn})\| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sqrt{\frac{kn+1}{n+1}} = \sqrt{k}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|W_k\| = \sqrt{k}$. $\square$

Proposición 3.4.2. *$W_k^*(z^n) = \dfrac{kn+1}{n+1} z^{kn}$ para todo $n \geq 0$ y $W_k^*(\overline{z}^n) = \dfrac{kn+1}{n+1}\overline{z}^{kn}$ para todo $n \geq 1$. Además se cumple la desigualdad $\|u\| \leq \|W_k^*(u)\| \leq \sqrt{k}\|u\|$ para todo $u \in b^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea $u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^j \in b^2(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle W_k^*(z^n), u(z)\rangle &= \langle z^n, W_k(u(z))\rangle \\
&= \left\langle z^n, \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}\overline{z}^j \right\rangle \\
&= \frac{\overline{a_{nk}}}{n+1} = \left\langle \frac{kn+1}{n+1} z^{kn}, u(z) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Similarmente tenemos

$$\begin{aligned}
\langle W_k^*(\overline{z}^n), u(z)\rangle &= \langle \overline{z}^n, W_k(u(z))\rangle \\
&= \left\langle \overline{z}^n, \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}\overline{z}^j \right\rangle \\
&= \frac{\overline{b_{nk}}}{n+1} = \left\langle \frac{kn+1}{n+1} \overline{z}^{kn}, u(z) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Con ello hemos demostrado las primeras dos igualdades en la proposición.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\|W_k^* u\|^2 &= \|W_k^* u\|^2 = \left\| W_k^* \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^j \right) \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{ki+1}{i+1} z^{ik} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{kj+1}{j+1} \overline{z}^{jk} \right\|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i|^2 (ki+1)}{(i+1)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_j|^2 (kj+1)}{(j+1)^2} \\
&\geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i|^2}{i+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_j|^2}{j+1} = \|u\|^2,
\end{aligned}$$

por lo que $\|u\| \leq \|W_k^*(u)\|$. Además $\|W_k^*(u)\| \leq \|W_k^*\|\|u\| = \|W_k\|\|u\| = \sqrt{k}\|u\|$. □

Lema 3.4.3. *Supongamos que $\varphi \in b^2(\mathbb{D})$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $W_k^n T_\varphi = 0$, entonces $\varphi = 0$.*

Demostración. Sea $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^j \in b^2(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned}
W_k^n T_\varphi(1) &= W_k^n Q M_\varphi(1) = W_k^n(\varphi) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik^n} z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk^n} \overline{z}^j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a_{ik^n} = 0$ para todo $i \geq 0$ y $b_{jk^n} = 0$ para todo $j \geq 1$.

Sea $0 < l < k^n$ y consideremos la función $z^{k^n - l}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = W_k^n T_\varphi(z^{k^n-l}) &= W_k^n Q M_\varphi(z^{k^n-l}) \\ &= W_k^n Q \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+k^n-l} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^j z^{k^n-l} \right) \\ &= W_k^n \left(Q \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+k^n-l} \right) + Q \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^j z^{k^n-l} \right) \right) \\ &= W_k^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+k^n-l} \right) \quad \text{(note que } z^n \overline{z}^m \in b^2(\mathbb{D})^\perp \text{ para todo } n, m > 0) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik^n+l} z^{i+1}, \end{aligned}$$

por lo que $a_{ik^n+l} = 0$ para todo $i \geq 0$ y $0 < l < k^n$.

Por otro lado, utilizando la función $\overline{z}^{k^n-l}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = W_k^n T_\varphi(\overline{z}^{k^n-l}) &= W_k^n Q M_\varphi(\overline{z}^{k^n-l}) \\ &= W_k^n Q \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \overline{z}^{k^n-l} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^{j+k^n-l} \right) \\ &= W_k^n \left(a_0 \overline{z}^{k^n-l} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \overline{z}^{j+k^n-l} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{jk^n+l} \overline{z}^{j+1}, \end{aligned}$$

por lo que $b_{jk^n+l} = 0$ para todo $j \geq 0$ y $0 < l < k^n$. Por lo tanto $\varphi = 0$. □

3.4.1. Algunas propiedades de los operadores de Toeplitz oblicuos de orden k en el espacio de Bergman armónico.

Lema 3.4.4. *Si $\varphi \in b^2(\mathbb{D})$, entonces $T_\varphi W_k = W_k T_{\varphi(z^k)} = V_{\varphi(z^k)}$.*

Demostración. Sean $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \overline{z}^i \in b^2(\mathbb{D})$ y $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \overline{z}^i \in b^2(\mathbb{D})$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
T_\varphi W_k(f) &= T_\varphi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}\overline{z}^j\right)\\
&= Q\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ik}c_j z^{i+j} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ik}d_j z^i\overline{z}^j + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}c_i z^i\overline{z}^j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}d_i\overline{z}^{i+j}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ik}c_j z^{i+j} + a_0\sum_{j=1}^{\infty} d_j\overline{z}^j + c_0\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}\overline{z}^j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}d_i\overline{z}^{i+j}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
W_kT_{\varphi(z^k)}(f) &= W_kQ\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_ic_j z^{i+jk} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_id_j z^i\overline{z}^{jk} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_ib_j z^{ik}\overline{z}^j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_id_j\overline{z}^{jk+i}\right)\\
&= W_k\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_ic_j z^{i+jk} + a_0\sum_{j=1}^{\infty} d_j\overline{z}^{jk} + c_0\sum_{j=1}^{\infty} b_j\overline{z}^j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_id_j\overline{z}^{jk+i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ik}c_j z^{i+j} + a_0\sum_{j=1}^{\infty} d_j\overline{z}^j + c_0\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}\overline{z}^j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ik}d_j\overline{z}^{j+i}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $W_kT_{\varphi(z^k)} = T_\varphi W_k$. □

Consideremos ahora el operador $S_k : b^2(\mathbb{D}) \longrightarrow b^2(\mathbb{D})$, el cual está dado por

$$S_k(z^n) = z^{nk} \text{ para todo } n \geq 0 \;\text{ y }\; S_k(\overline{z}^n) = \overline{z}^{nk} \text{ para todo } n > 0. \tag{3.4.1}$$

Note que el operador S_k es acotado y actua como un inverso a la derecha para W_k, es decir $W_kS_k = I$

Teorema 3.4.5. *Sea $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Si $V_{\varphi(z^k)}$ es compacto entonces $\varphi = 0$ en $\mathbb{T}$.*

Demostración. Por el lema anterior tenemos que $V_{\varphi(z^k)} = W_kT_{\varphi(z^k)} = T_\varphi W_k$. Luego si $V_{\varphi(z^k)}$ es compacto entonces $T_\varphi W_k$ lo es, y por lo tanto $T_\varphi W_k S_k = T_\varphi$ es compacto. Por el Teorema 2.3.8 se sigue que $\varphi = 0$ en $\mathbb{T}$. □

A continuación damos resultados similares a los Teoremas 3.2.9 y 3.2.10. Denotemos por $\mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))$ al ideal de operadores compactos en el espacio de Bergman armónico $b^2(\mathbb{D})$.

Teorema 3.4.6. *a) Si $\varphi, \psi \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces $V_\varphi T_\psi = V_{\varphi\psi}(\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$.*

b) Si $\varphi, \psi \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces $T_\varphi V_\psi = V_{\varphi\psi(z^k)}(\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.7 tenemos que $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}(\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$. Luego

$$\begin{aligned}
V_\varphi T_\psi &= W_kT_\varphi T_\psi\\
&= W_kT_{\varphi\psi}(\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))\\
&= V_{\varphi\psi}(\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))).
\end{aligned}$$

Por otro lado, del Lema 3.4.4 tenemos que

$$\begin{aligned} T_\varphi V_\psi &= T_\varphi W_k T_\psi \\ &= W_k T_{\varphi(z^k)} T_\psi \\ &= W_k T_{\varphi(z^k)\psi} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= V_{\varphi(z^k)\psi} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))). \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado se sigue. □

Teorema 3.4.7. *Sean* $\varphi, \psi \in b^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. *Entonces,* $V_{\varphi(z^k)} T_{\psi(z^k)} = T_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$ *si y solo si* ψ *es constante en* $\mathbb{T}$ *o* $\varphi = 0$.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $V_{\varphi(z^k)} T_{\psi(z^k)} = V_{\varphi(z^k)\psi(z^k)} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$ y $T_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} = V_{\psi(z^k)\varphi(z^{k^2})} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$. Por lo tanto

$$V_{\varphi(z^k)} T_{\psi(z^k)} = T_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$$

si y solo si $V_{\varphi(z^k)\psi(z^k) - \varphi(z^k)\psi(z^{k^2})} = W_k T_{\varphi(z^k)\psi(z^k) - \varphi(z^k)\psi(z^{k^2})}$ es compacto.

Por el Lema 3.4.4 tenemos que $W_k T_{\varphi(z^k)\psi(z^k) - \varphi(z^k)\psi(z^{k^2})} = T_{\varphi\psi - \varphi\psi(z^k)} W_k$, y dado que $W_k S_k = I$ tenemos que el operador $T_{\varphi\psi - \varphi\psi(z^k)} W_k S_k = T_{\varphi\psi - \varphi\psi(z^k)}$ es compacto.

Por el Teorema 2.3.8 se sigue que $T_{\varphi\psi - \varphi\psi(z^k)}$ es compacto si y solo si $\varphi\psi - \varphi\psi(z^k) = 0$ en $\mathbb{T}$ y por el Lema 3.1.20 esto equivale a que ψ es constante o $\varphi = 0$ en $\mathbb{T}$. □

Del teorema anterior se sigue el siguiente corolario

Corolario 3.4.8. *Sea* $\varphi, \psi \in b^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. *Entonces* $V_{\varphi(z^k)} V_{\psi(z^k)} = V_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$ *si y solo si* φ *y* ψ *son constantes en* $\mathbb{T}$.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $V_{\varphi(z^k)} T_{\psi(z^k)} = T_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$ y $V_{\psi(z^k)} T_{\varphi(z^k)} = T_{\varphi(z^k)} V_{\psi(z^k)} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$ si y solo si φ y ψ son constantes en $\mathbb{T}$, por lo tanto se sigue que

$$\begin{aligned} V_{\varphi(z^k)} V_{\psi(z^k)} &= W_k T_{\varphi(z^k)} V_{\psi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= W_k V_{\psi(z^k)} T_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= W_k W_k T_{\psi(z^k)} T_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= W_k W_k T_{\varphi(z^k)} T_{\psi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= W_k V_{\varphi(z^k)} T_{\psi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= W_k T_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \\ &= V_{\psi(z^k)} V_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.9. *Sea* $\varphi, \psi \in b^2(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, *entonces* $V_\varphi T_\psi = V_\psi T_\varphi (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$ *y* $V_\varphi V_{\psi(z^k)} = V_\psi V_{\varphi(z^k)} (\text{mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D})))$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} V_\varphi T_\psi = W_k T_\varphi T_\psi &= W_k T_\psi T_\varphi (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \quad \text{(Teorema 2.3.7)} \\ &= V_\psi T_\varphi (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} V_\varphi V_{\psi(z^k)} &= W_k T_\varphi W_k T_{\psi(z^k)} \\ &= W_k T_\varphi T_\psi W_k \qquad \text{(Lema 3.4.4)} \\ &= W_k T_\psi T_\varphi W_k (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \quad \text{(Teorema 2.3.7)} \\ &= V_\psi W_k T_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))) \quad \text{(Lema 3.4.4)} \\ &= V_\psi V_{\varphi(z^k)} (\text{ mód } \mathcal{K}(b^2(\mathbb{D}))). \end{aligned}$$

□

El estudio de operadores de Toeplitz oblicuos en el espacio de Bergman armónico es todavía un área en desarrollo con muchos problemas abiertos. Uno de los más importantes es la descripción de las álgebras C^* generadas por este tipo de operadores. También es importante investigar las propiedades del espectro de estos operadores y si hay resultados análogos a los conocidos para el espacio de Hardy o el espacio de Bergman .

Bibliografía

[1] S. C. Arora y Ruchika Batra. “Generalized slant Toeplitz operators on H^2”. En: *Mathematische Nachrichten* 278.4 (2005), págs. 347-355. DOI: https://doi.org/10.1002/mana.200310244.

[2] Rubén A. Martínez Avendaño y Peter Rosenthal. *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*. Springer, New York, NY, 2007.

[3] María del Carmen Lozano Arizmendi. *Álgebra C^* generada por operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico*. Centro de Investigación de Estudios Avanzados del I.P.N Departamento de Matemáticas, 2010.

[4] Gopal Datt y Neelima Ohri. “Slant Toeplitz Operators on the Lebesgue Space of the Torus”. En: *Khayyam J. Math* 5.2 (2019), págs. 65-76. DOI: 10.22034/KJM.2019.86133.

[5] Ronald G. Douglas. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Academic Press, 1972.

[6] Peter L. Duren y Alexander Schuster. *Bergman Spaces*. Providence, United States: American Mathematical Society, 2004.

[7] Kunyu Guo y Dechao Zheng. “Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space”. En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 276 (2002), págs. 213-230. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00429-8.

[8] Boris Korenblum y Kehe Zhu Haakan Hedenmalm. *Theory of Bergman Spaces*. Springer, New York, NY, 2000.

[9] P.R. Halmos y Arlen Brown. “Algebraic Properties of Toeplitz operators”. En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 213 (1964), págs. 89-102. DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1964.213.89.

[10] Mark C. Ho. “Properties of Slant Toeplitz Operators”. En: *Indiana University Mathematics Journal* 45.3 (1996), págs. 843-862. DOI: https://www.jstor.org/stable/24899139.

[11] Mark C. Ho. “Adjoints of slant Toeplitz operators”. En: *Integral Equations and Operator Theory* 29 (1997), págs. 301-312. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01320703.

[12] Mark C. Ho. “Spectra of slant Toeplitz operators with continuous symbol”. En: *Michigan Math* 44 (1997), págs. 157-166.

[13] S. D. Fisher J. Arazy y J. Peetre. “Hankel Operators on Weighted Bergman Spaces”. En: *American Journal of Mathematics* 110.6 (1988), págs. 989-1053. DOI: 10.2307/2374685.

[14] Jordi Pau. “Hankel Operators on Standard Bergman Spaces”. En: *Complex Analysis and Operator Theory* 7 (2013), págs. 1239-1256. DOI: 10.1007/s11785-011-0209-3.

[15] C Micchelli y J. Ward T. Goodman. “Spectral radius formulas for subdivision operators”. En: *Recent Advances in Wavelet Analysis* (1994), págs. 335-360.

[16] Nikolai Vasilevski. *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*. Birkhäuser Basel, 2008.

[17] Jun Yang. “k-order slant Hankel operators on the Bergman space”. En: *Journal of Math* 5.42 (2019), págs. 2097-2102. DOI: 10.22034/KJM.2019.86133.

[18] Chaomei Liu Yufeng Lu y Jun Yang. “Commutativity of kth-order slant Toeplitz operators”. En: *Annalen der Physik* 283 (2010), págs. 1304-1313. DOI: 10.1002/mana.200710100.

[19] Kehe Zhu. *An Introduction to Operator Algebras*. CRC Press, 1993.