



**Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del IPN**

**Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas**

**LA COHOMOLOGÍA DE $F(\mathbb{R}^m, r)$
COMO Σ_r -MÓDULO**

TESIS

Presentada por:

Higinio Serrano García¹

Para obtener el título de:

**Maestro en Ciencias
con especialidad en Matemáticas**

Director de tesis

Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mis padres, Higinio Serrano Regalado y Abigail García Aguilar, todo lo que soy se lo debo a ellos. Gracias por su incommensurable amor, por sus consejos y por su apoyo incondicional.

A mis amigos, Sahory, Ivan y Enrique, Juanita, Alejandro, por todas las vivencias que hemos compartido a lo largo de estos años de conocernos.

A mi asesor, el Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino, por todo su apoyo, paciencia, sugerencias y correcciones a la hora de realizar este trabajo. A la Dra. Rita Jiménez Rolland y al Dr. Juan Manuel Burgos, por haber accedido a revisar este trabajo, así por sus valiosos comentarios y sugerencias. También a los diversos profesores del departamento de quienes tanto he aprendido como matemático y persona.

Finalmente agradezco el apoyo del CONACyT por la beca de maestría otorgada y el apoyo a través del proyecto de ciencia básica CB-2017-2018-A1-S-30345, y al CINVESTAV por permitirme realizar mis estudios de maestría en sus instalaciones.

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	7
1. La cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ y submódulos asociados a ella	12
1.1. La cohomología de los espacios de configuraciones euclidianos	13
1.2. Preliminares de los grupos de permutaciones y particiones	18
1.3. Gráficas y módulos asociados a monomios admisibles	24
1.4. $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ como $\mathbb{Q}[\Sigma_r]$ -módulo	34
1.5. Ejemplos	42
2. Estabilidad de las representaciones $H^iF(\mathbb{R}^m, r)$	46
2.1. Una descomposición para $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$	47
2.2. Estabilidad de representaciones	55
2.3. Estabilidad de representaciones para la sucesión $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$. .	60
2.4. Ejemplos	65
3. El punto de vista de los FI-módulos	67
3.1. FI -módulos	67
3.2. FI -módulos finitamente generados	72
3.3. Ejemplos	81
A. Teoría de representaciones de grupos finitos	83
A.1. Representaciones y caracteres	83
A.2. La representación inducida	86

A.3. Las representaciones del grupo simétrico	87
B. Teorema de punto fijo de Lefschetz	94
Bibliografía	96

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la acción del grupo simétrico Σ_r en la cohomología racional de los espacios de configuraciones euclidianos:

$$F(\mathbb{R}^m, r) = \{(x_1, \dots, x_r) \in (\mathbb{R}^m)^r \mid x_i \neq x_j\}$$

y describir las representaciones asociadas. Esto se hace expresando a tales representaciones en términos de ciertas representaciones conocidas de Σ_r y mostrando que éstas se estabilizan cuando r crece. Por ejemplo, siguiendo a [18] y [7] se muestra que existe un isomorfismo entre la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ y la representación regular de Σ_r para m impar. Posteriormente, al enfocarnos en una dimensión fija i como lo hacen en [5], observamos que las representaciones irreducibles en la descomposición de $H^i(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ mantienen la misma forma y multiplicidad conforme r crece. Finalmente esta estabilidad de representaciones se traduce al lenguaje de los FI -módulos, cómo se hace en [4]. En particular, veremos que a cada sucesión $\{H^i(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})\}_r$ se le puede asociar un FI -módulo finitamente generado. Estos últimos corresponden a sucesiones de representaciones que satisfacen la condición de estabilidad uniforme.

Abstract

The aim of this work is to study the action of the symmetric group Σ_r on the rational cohomology of euclidean configuration spaces

$$F(\mathbb{R}^m, r) = \{(x_1, \dots, x_r) \in (\mathbb{R}^m)^r \mid x_i \neq x_j\}$$

and describe the associated representations. This is done by expressing such representations in terms of known representations of Σ_r and showing these stabilize when r grows. For instance, following [6] and [16] we show there is an isomorphism between the cohomology of $F(\mathbb{R}^m, r)$ and the regular representation of Σ_r , for r odd. Later on, we focus on a fixed dimension i as done in [4], and we observe that the irreducible representations in the descomposition of $H^i(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ keep the same form and multiplicity as r grows. Finally, this representation stability is translated to the language FI -modules, as done in [3]. In particular, we associate to every sequence $\{H^i(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})\}_r$ a finitely generated FI -module. These correspond to sequences of representations which are uniformly representation stable.

Introducción

El objeto central de estudio de este trabajo es el espacio de configuraciones ordenadas de puntos distintos en \mathbb{R}^m :

$$F(\mathbb{R}^m, r) = \{(x_1, \dots, x_r) \in (\mathbb{R}^m)^r \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

bajo la acción natural del grupo simétrico Σ_r por permutación de coordenadas.

Estos espacios se encuentran en diversos ámbitos de la ciencia pues son ideales para modelar “sistemas de partículas” en los que no se permite que existan colisiones. En topología, estos espacios se comenzaron a estudiar en 1962 por Fadell y Neuwirth [9] y R. Fox y L. Neuwirth en [11], pues resultaron ser un “modelo topológico” de los grupos de trenzas de Artin, ver [2]. Desde entonces los espacios de configuraciones han sido extensamente estudiados.

El inicio del primer capítulo se enfoca en calcular la cohomología de los espacios $F(\mathbb{R}^m, r)$. Generadores para la cohomología están dados por:

$$A_{ij} \text{ para } 1 \leq j < i \leq r$$

con $|A_{ij}| = m - 1$, sujetos a las siguientes relaciones:

1. $A_{ij}^2 = 0$.
2. $A_{kj}A_{ki} = A_{ij}(A_{ki} - A_{kj})$ para $j < i < k$ (relación de tres términos).
3. Asociatividad y conmutatividad graduada.

El monomio $A_{i_1 j_1} \dots A_{i_s j_s}$ se denotará por A_I donde $I = ((i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s))$. A los monomios de la forma $A_I = A_{i_1 j_1} \dots A_{i_s j_s}$ con $i_1 < \dots < i_s$ se les llamará admisibles.

Toda permutación $\sigma \in \Sigma_r$ determina un mapeo $\sigma : F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$ y un homomorfismo inducido en cohomología

$$\sigma^* : H^*F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^m, r).$$

La acción de Σ_r en las clases A_{ij} está dada por:

$$\sigma^* A_{ij} = \begin{cases} A_{\sigma(i)\sigma(j)} & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j) \\ (-1)^m A_{\sigma(j)\sigma(i)} & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j), \end{cases}$$

la cual determina una representación de Σ_r en el \mathbb{Q} -módulo $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$:

$$\rho : \Sigma_r \longrightarrow \text{End}(H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}))$$

$$\sigma \longmapsto \sigma^*$$

que será el tema central de estudio en este trabajo.

Posteriormente en el capítulo, dado un subconjunto finito $S \subset \mathbb{N}$ y una partición \mathcal{P} de S , se definen subgrupos de Σ_r asociados a la partición \mathcal{P} , siguiendo [7]. El grupo simétrico Σ_S actúa de forma natural en el conjunto de todas las particiones de S y podemos definir el subgrupo $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle \subset \Sigma_S$ que deja fija a la partición \mathcal{P} . Los resultados que allí se presenten se irán utilizando a lo largo del trabajo en diversas demostraciones por lo que podrían omitirse en una primera lectura y regresar a ellos según se requiera en cada demostración.

Siguiendo [7], se definen ciertos submódulos $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m) \subset H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ que dan una descomposición de la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$.

Definición. Para cualquier partición \mathcal{P} de $\{1, \dots, r\}$, denotamos por $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ el submódulo de $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ generado por todos los monomios admisibles A_I , cuya partición asociada es \mathcal{P} .

En la sección 1.3 se mostrará que existe un isomorfismo de representaciones:

$$H^*(F(\mathbb{R}^m, r)) \longrightarrow \bigoplus_{\mu \vdash r} \text{Ind}_{\Sigma(\mathcal{L}_\mu)}^{\Sigma_r} T(\mathcal{L}_\mu, m)$$

donde \mathcal{L}_μ es la mínima partición que realiza a μ . Este isomorfismo es uno de los resultados más importantes de la sección, como se pondrá de manifiesto en el capítulo 2.

La sección 1.4 está basada en [7] y [18] y tiene por objetivo describir la representación $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ en términos de representaciones ya conocidas. La herramienta principal aquí es el *Teorema de punto fijo de Lefschetz* y se muestra el siguiente resultado:

Corolario 1.20. *La representación $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ es isomorfa a la representación inducida:*

$$\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_r} (\mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}^-)^{\otimes m})$$

donde \mathbb{Q} es la representación trivial y \mathbb{Q}^- es la representación signo.

Si m es impar, entonces se concluye que $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ es isomorfa a la representación $\text{ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_r} (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}^-)$. Esta última representación es isomorfa a la representación regular $\mathbb{Q}[\Sigma_r]$.

El enfoque anterior cambia para el capítulo 2 y está basado en [5]. Dados i y $m \geq 2$, la atención se centrará en la representación:

$$H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}).$$

En la sección 2.1 nos dedicaremos a dar los preparativos para demostrar el Teorema 4.1 de [5] y Teorema 2.14 de este trabajo. En esencia, este teorema afirma que, al fijar i , para todo $r \gg i$ la descomposición de $H^i(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ como suma de representaciones irreducibles de Σ_r , contiene los mismos sumandos $V_r(\mu_1, \dots, \mu_k)$. Es decir, si

$$H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{\mu} V_r(\mu)^{\oplus c_{\mu, r}}$$

entonces $c_{\mu,r}$ no depende de r para $r \gg i$.

Para terminar la sección se trabajan dos ejemplos ilustrativos, cuando $i = 1$ y es m par e impar. Se muestra que existe un isomorfismo

$$H^{m-1}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} V_{\underbrace{\square \square \square \square \square \square}_r} \oplus V_{\underbrace{\square \square \square \square \square}_r} \oplus V_{\underbrace{\square \square \square \square}_r} & \text{si } m \text{ es par,} \\ V_{\underbrace{\square \square \square \square \square}_r} \oplus V_{\underbrace{\square \square \square \square}_r} & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

En la sección 2.2 veremos que para toda r existe un homomorfismo natural

$$\phi_r : H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r+1); \mathbb{Q})$$

tal que ϕ_r conmuta con la acción de Σ_r . El sistema $\{H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}), \phi_r\}$ es un ejemplo de lo que llamaremos una sucesión de representaciones consistente.

Otro ejemplo muy importante de una sucesión de representaciones consistente es

$$\{Ind_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (V_\lambda \boxtimes \mathbb{Q})\}_r.$$

Estas sucesiones de representaciones son la clave para demostrar la estabilidad de representaciones de la sucesión $\{H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}), \phi_r\}$, que se define como:

Definición. Sea $\{V_r\}_r$ una sucesión de Σ_r -representaciones consistente. La sucesión $\{V_r\}_r$ cumple con la **estabilidad de representaciones** si para r suficientemente grande se satisfacen cada una de las siguientes condiciones:

1. Las transformaciones lineales $\phi_r : V_r \rightarrow V_{r+1}$ son inyectivas.
2. El espacio vectorial generado por la Σ_{r+1} -órbita de $\phi_r(V_r)$ es igual a V_{r+1} .
3. Al descomponer V_r en suma de representaciones irreducibles:

$$V_r = \bigoplus_{\lambda} V(\lambda)_r^{\oplus c_{\lambda,r}},$$

$\forall \lambda$, las multiplicidades $c_{\lambda,r}$ son eventualmente independientes de r .

Demostraremos que la sucesión de representaciones inducidas $Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V \boxtimes \mathbb{Q})$ satisface estabilidad de representaciones y veremos que esto implica dicha propiedad para la sucesión de representaciones $\{H^{i(m-1)}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})\}_r$.

Teorema 2.14 (Estabilidad de representaciones de las configuraciones). *Para toda $i \geq 0$, la sucesión de Σ_r -representaciones $\{H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$ cumple con la estabilidad de representaciones y se estabiliza para $r \geq 4i$.*

Finalmente llega el capítulo 3. Aquí se abordará la estabilidad de representaciones desde otro punto de vista basado en la teoría de categorías, para ser más precisos, en la categoría de los FI -módulos. Nos basamos aquí en el trabajo de T. Church, S. Ellenberg y B. Farb [4]. Este enfoque, al igual que el anterior, hace fuerte uso de las representaciones del tipo $Ind_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} V \boxtimes \mathbb{Q}$, así como del Teorema A.8. Pero una vez desarrollada la teoría de los FI -módulos, la estabilidad de representaciones uniforme de $\{H^{(m-1)i}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})\}$ se traduce en encontrar una colección finita de elementos en $\bigsqcup_r H^{(m-1)i}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ tales que el espacio vectorial generado por su Σ_r -órbita es igual a $H^{(m-1)i}(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$.

Usando este método se puede mostrar, como en [4], la estabilidad de representaciones uniforme de $\{H^i(F(M, r); \mathbb{Q})\}$ donde M es una variedad orientable y conexa de dimensión al menos 2.

Capítulo 1

La cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ y submódulos asociados a ella

En este capítulo presentamos el cálculo de la cohomología de los espacios de configuraciones $F(\mathbb{R}^m, r)$, se dan generadores explícitos y se describe su estructura como anillo graduado.

El grupo simétrico Σ_r actúa de manera natural en $F(\mathbb{R}^m, r)$ y esta acción induce una acción en la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ con coeficientes racionales, esto es, se tiene una representación del grupo simétrico en el \mathbb{Q} -módulo $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$. Esta representación será ampliamente estudiada a lo largo de todo este trabajo. Para este propósito se introducen algunos subgrupos de Σ_r asociados a particiones de conjuntos finitos de los números naturales, los cuales usaremos para obtener submódulos de $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ invariantes bajo la acción de dichos subgrupos y así, poder descomponer la representación $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ como suma de presentaciones más sencillas.

Al final del capítulo se calcula el carácter de la representación $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ usando el *Teorema de Punto Fijo de Lefschetz* para estudiar los puntos fijos de funciones asociadas a permutaciones. Así podremos comparar el carácter de la representación estudiada con el carácter de la representación $Ind_{\Sigma_2}^{\Sigma_r}(\mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}^-)^{\otimes m})$ para poder concluir que son isomorfas.

1.1. La cohomología de los espacios de configuraciones euclidianos

Dado X un espacio topológico y $r \in \mathbb{N}$, se define el espacio de configuraciones ordenadas de r puntos en X como el conjunto

$$F(X, r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X^r \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

con la topología de subespacio de X^r .

Notemos que el r -ésimo grupo simétrico Σ_r actúa en $F(X, r)$ de manera natural, por permutación de coordenadas.

Cuando X es una variedad, una forma de estudiar la cohomología de estos espacios es a través de las fibraciones de Fadell y Neuwirth, [9], definidas a continuación. Para $r > s$, consideramos la proyección en las primeras s coordenadas:

$$\pi : F(X, r) \longrightarrow F(X, s)$$

$$(x_1, \dots, x_r) \longmapsto (x_1, \dots, x_s).$$

Teorema 1.1 (Fibraciones de Fadell y Neuwirth). *Sean M una variedad suave (sin frontera) y conexa de dimensión ≥ 2 y $s < r$. Entonces, la proyección $\pi : F(M, r) \longrightarrow F(M, s)$ en las primeras s coordenadas es un haz fibrado localmente trivial y la fibra sobre el punto $(x_1, \dots, x_s) \in F(M, s)$ es homeomorfa a $F(M - \{x_1, \dots, x_s\}, r - s)$.*

Demostración. Puede verse en [9]. □

En el caso en que $M = \mathbb{R}^m$ y $r \geq 2$, por el Teorema 1.1, la proyección en las

primeras $r - 1$ coordenadas es un haz localmente trivial:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^m, r) & \longleftarrow & \mathbb{R}^m - \{x_1, \dots, x_{r-1}\} \simeq \bigvee_{r-1} S^{m-1} \\ \downarrow \pi & & \\ F(\mathbb{R}^m, r-1) & & \end{array}$$

Este haz admite una sección como a continuación se muestra. Sea e_1 el primer vector canónico de \mathbb{R}^m definimos la sección

$$\begin{aligned} s : F(\mathbb{R}^m, r-1) &\longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r) \\ (x_1, \dots, x_{r-1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{r-1}, \left(\max_{1 \leq i \leq r-1} \{\|x_i\|\} + 1 \right) e_1). \end{aligned}$$

Es bien sabido que para $r \geq 3$ el espacio $F(\mathbb{R}^m, r)$ no es del tipo de homotopía del producto de $F(\mathbb{R}^m, r-1) \times \bigvee_{r-1} S^{m-1}$. Sin embargo, al estudiar la sucesión espectral de Serre de la fibración anterior se puede mostrar que la segunda página $E_2^{*,*}$ es isomorfa al producto tensorial $H^*F(\mathbb{R}^m, r-1) \otimes H^*(\bigvee_{r-1} S^{m-1})$ y que la sucesión espectral colapsa en dicha página debido a la existencia de una sección. Entonces se tiene un isomorfismo

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) \cong H^*F(\mathbb{R}^m, r-1) \otimes H^*\left(\bigvee_{r-1} S^{m-1}\right) \quad (1.1)$$

como grupos abelianos graduados. Procediendo recursivamente, se tiene un isomorfismo de grupos abelianos graduados:

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) \cong H^*(S^{m-1}) \otimes H^*(S^{m-1} \vee S^{m-1}) \otimes \dots \otimes H^*\left(\bigvee_{r-1} S^{m-1}\right).$$

Por lo tanto, la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ está concentrada en dimensiones múltiplos de $m-1$. A saber, si $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ii-1}$ denotan a los generadores naturales del factor $H^*(\bigvee_{i-1} S^{m-1}) = \mathbb{Z}^{i-1}$, entonces $H^{(m-1)\ell}F(\mathbb{R}^m, r)$ está generado aditivamente por

todos los monomios de la forma:

$$A_{i_1 j_1} \otimes \dots \otimes A_{i_\ell j_\ell} \quad \text{con } 2 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq r.$$

La estructura de anillo se presenta a continuación. Para el caso $m = 2$ la demostración se debe a V. Arnold [1], mientras que el resto de los casos se debe a F. Cohen [6]:

Teorema 1.2. *El anillo de cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ con coeficientes en \mathbb{Z} tiene generadores $\{A_{ij}\}$, con $1 \leq j < i \leq r$ y $|A_{ij}| = m - 1$, sujetos a las siguientes relaciones:*

1. $A_{ij}^2 = 0$
2. $A_{kj}A_{ki} = A_{ij}(A_{ki} - A_{kj})$ para $j < i < k$ (relación de tres términos)
3. Asociatividad y conmutatividad graduada.

Los generadores A_{ij} también se pueden obtener explícitamente como sigue. Consideremos la función:

$$\pi_{ij} : F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow S^{m-1} \quad (1.2)$$

dada por $\pi_{ij}(x_1, \dots, x_r) = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$. Al pasar a cohomología tenemos:

$$H^{m-1}(F(\mathbb{R}^m, r)) \longleftarrow^{\pi_{ij}^*} H^{m-1}(S^{m-1}).$$

Entonces ponemos

$$A_{ij} = \pi_{ij}^*(\iota)$$

donde $\iota \in H^{m-1}(S^{m-1})$ es la clase fundamental.

La relación de tres términos se puede demostrar como sigue. Notemos que en el caso $r = 3$, la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, 3)$ está dada aditivamente por

$$H^*F(\mathbb{R}^m, 3) \cong \langle A_{21} \rangle \otimes \langle A_{31}, A_{32} \rangle$$

y que el producto de los generadores de factores distintos ésta dado por $A_{21} \cdot A_{31} = A_{21} \otimes A_{31}$ y $A_{21} \cdot A_{32} = A_{21} \otimes A_{32}$. Así, para determinar completamente la estructura multiplicativa en $H^*F(\mathbb{R}^m, 3)$ basta expresar el producto $A_{31} \cdot A_{32}$ como combinación lineal de $A_{21}A_{32}$ y $A_{21}A_{31}$. Pongamos entonces

$$A_{31}A_{32} = \alpha A_{21}A_{31} + \beta A_{21}A_{32}.$$

Esta expresión debe ser compatible con la acción del grupo simétrico Σ_3 . Aplicando las transposiciones (12) y (23) obtenemos $\alpha = -1$ y $\beta = 1$. Así:

$$\begin{aligned} A_{31}A_{32} &= A_{21}A_{32} - A_{21}A_{31} \\ &= A_{21}(A_{32} - A_{31}). \end{aligned}$$

Finalmente notemos que el resultado en el caso general se sigue por naturalidad. Para $r \geq 3$, consideremos la función:

$$\begin{aligned} \pi_{jik} : F(\mathbb{R}^m, r) &\longrightarrow F(\mathbb{R}^m, 3) \\ (x_1, \dots, x_r) &\longmapsto (x_j, x_i, x_k) \end{aligned}$$

la cual da lugar a los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\pi_{jik}} & F(\mathbb{R}^m, 3) \\ & \searrow \pi_{ki} & \downarrow \pi_{32} \\ & & S^{m-1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\pi_{jik}} & F(\mathbb{R}^m, 3) \\ & \searrow \pi_{kj} & \downarrow \pi_{31} \\ & & S^{m-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\pi_{jik}} & F(\mathbb{R}^m, 3) \\ & \searrow \pi_{ij} & \downarrow \pi_{21} \\ & & S^{m-1}. \end{array}$$

Pasando a cohomología, tenemos que:

$$\begin{aligned}\pi_{jik}^*(A_{21}) &= A_{ij}, \\ \pi_{jik}^*(A_{31}) &= A_{kj}, \\ \pi_{jik}^*(A_{32}) &= A_{ki}.\end{aligned}$$

De esta forma, la relación $A_{31}A_{32} = A_{21}(A_{32} - A_{31})$ en $H^*F(\mathbb{R}^m, 3)$ implica la relación general $A_{kj}A_{ki} = A_{ij}(A_{ki} - A_{kj})$ en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$.

El monomio $A_{i_1j_1} \dots A_{i_sj_s}$ se denotará por A_I donde $I = ((i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s))$. A los monomios de la forma $A_I = A_{i_1j_1} \dots A_{i_sj_s}$ con $i_1 < \dots < i_s$ se les llamará **admisibles**. Usando la relación de tres términos se ve que estos monomios admisibles generan libremente a la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$.

Toda permutación $\sigma \in \Sigma_r$ determina un mapeo $\sigma : F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$ y un homomorfismo inducido en cohomología

$$\sigma^* : H^*F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^m, r).$$

Proposición 1.3. *La acción de Σ_r en las clases A_{ij} está dada por:*

$$\sigma^* A_{ij} = \begin{cases} A_{\sigma(i)\sigma(j)} & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j) \\ (-1)^m A_{\sigma(j)\sigma(i)} & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j). \end{cases}$$

Demostración. Consideremos los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} S^{m-1} & \xrightarrow{id} & S^{m-1} \\ \uparrow \pi_{\sigma(i)\sigma(j)} & & \uparrow \pi_{ij} \\ F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\sigma} & F(\mathbb{R}^m, r) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S^{m-1} & \xrightarrow{-id} & S^{m-1} \\ \uparrow \pi_{\sigma(j)\sigma(i)} & & \uparrow \pi_{ij} \\ F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\sigma} & F(\mathbb{R}^m, r) \end{array}$$

donde el primero corresponde al caso en que $\sigma(i) > \sigma(j)$, mientras que el segundo al caso en que $\sigma(i) < \sigma(j)$. Al pasar a cohomología obtenemos los diagramas

conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{m-1}(S^{m-1}) & \xleftarrow{id} & H^{m-1}(S^{m-1}) \\
 \downarrow \pi_{\sigma(i)\sigma(j)}^* & & \downarrow \pi_{ij}^* \\
 H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) & \xleftarrow{\sigma^*} & H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \\
 \\
 H^{m-1}(S^{m-1}) & \xleftarrow{(-1)^m id} & H^{m-1}(S^{m-1}) \\
 \downarrow \pi_{\sigma(j)\sigma(i)}^* & & \downarrow \pi_{ij}^* \\
 H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) & \xleftarrow{\sigma^*} & H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r).
 \end{array}$$

□

La acción anterior determina una representación de Σ_r en el \mathbb{Q} -módulo $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$:

$$\rho : \Sigma_r \longrightarrow \text{End}(H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q}))$$

$$\sigma \longmapsto \sigma^*.$$

1.2. Preliminares de los grupos de permutaciones y particiones

Esta sección contiene resultados técnicos concernientes a particiones del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$ y subgrupos asociados a estas particiones. Aunque estos resultados se van a usar a lo largo de todo el trabajo, esta sección se puede omitir en una primera lectura y regresar a ésta conforme sea necesario.

- Dado un subconjunto finito $S \subset \mathbb{N}$, una **partición** \mathcal{P} de S es una colección de subconjuntos no vacíos de S cuya unión es S . A los subconjuntos de S que aparezcan en \mathcal{P} les llamaremos **componentes** de \mathcal{P} y al conjunto de componentes lo denotaremos por $\pi_0(\mathcal{P})$.

- Para cada $i = 1, \dots, |S|$ denotemos por $\mathcal{P}\langle i \rangle$ a la unión sobre todas las componentes de \mathcal{P} de cardinalidad i .
- Sea $Part(S)$ el conjunto de todas las particiones de S y notemos que existe una acción natural de Σ_S , el grupo simétrico de biyecciones de S , en $Part(S)$. Dos particiones de S se dicen **similares** si están en la misma órbita de esta acción.

El subgrupo $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle$ asociado a la partición \mathcal{P}

Sea $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle$ el subgrupo de Σ_S que deja fija a la partición \mathcal{P} , es decir, el estabilizador de \mathcal{P} bajo la acción de Σ_S . Este subgrupo será referido como el **subgrupo asociado a la partición \mathcal{P}** . Notemos que $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle$ se puede ver de manera natural como un subgrupo de $\Sigma_{\mathcal{P}\langle 1 \rangle} \times \dots \times \Sigma_{\mathcal{P}\langle |S| \rangle}$.

Si tomamos $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle i \rangle := \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle \cap (1 \times \dots \times \Sigma_{\mathcal{P}\langle i \rangle} \times \dots \times 1)$, entonces tenemos el resultado:

Lema 1.4. *Existe un isomorfismo:*

$$\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle \cong \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle 1 \rangle \times \dots \times \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle |S| \rangle.$$

Demostración. Un isomorfismo está dado por:

$$\phi : \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle \longrightarrow \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle 1 \rangle \times \dots \times \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle |S| \rangle$$

$$\sigma \longmapsto (\sigma|_{\mathcal{P}\langle 1 \rangle}, \dots, \sigma|_{\mathcal{P}\langle |S| \rangle}).$$

□

El subgrupo $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle$ en términos de productos trenzados elementales

Definición. Dado un grupo H , se define el **producto trenzado**, $\Sigma_S \wr H$, como el producto semidirecto $\Sigma_S \ltimes H^{|S|}$ donde Σ_S actúa en $H^{|S|}$ por permutación de coordenadas.

Definición.

- Sea $\Sigma[o\mathcal{P}]$ el subgrupo de $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ que consiste de las permutaciones $\sigma \in \Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ tales que σ restringida a toda componente de \mathcal{P} **preserva el orden**.
- El **subgrupo de Young** correspondiente a \mathcal{P} , denotado por $Y\langle\mathcal{P}\rangle$, es el subgrupo de Σ_S que manda cada componente de \mathcal{P} en si misma, es decir,

$$Y\langle\mathcal{P}\rangle = \times_{T \in \pi_0(\mathcal{P})} \Sigma_T.$$

Notemos que el subgrupo de Young $Y\langle\mathcal{P}\rangle$ es normal en $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ y se tiene:

Lema 1.5. *El subgrupo asociado a la partición \mathcal{P} , $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$, es isomorfo al producto semidirecto:*

$$\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle \cong \Sigma[o\mathcal{P}] \ltimes Y\langle\mathcal{P}\rangle.$$

Demostración. Se hará uso del hecho de que si G es un grupo, $H, N \subset G$ dos subgrupos con N normal tales que $G = HN$ y $N \cap H = \{e\}$. Entonces $G \cong H \ltimes N$.

Si $T = \{t_1 < \dots < t_k\} \in \pi_0(\mathcal{P})$ y $\sigma \in \Sigma[o\mathcal{P}] \cap Y\langle\mathcal{P}\rangle$, entonces $\sigma(T) = T$ y σ preserva el orden en T , así $\sigma|_T = id_T$ y por tanto $\Sigma[o\mathcal{P}] \cap Y\langle\mathcal{P}\rangle = \{id\}$. Por otro lado, es claro que cualquier permutación $\sigma \in \Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ se puede expresar como producto de dos elementos $\sigma_1 \in \Sigma[o\mathcal{P}]$ y $\sigma_2 \in Y\langle\mathcal{P}\rangle$. \square

Lema 1.6. *Existe un isomorfismo:*

$$\Sigma[o\mathcal{P}] \cong \times_{e_i(\mathcal{P}) \neq 0} \Sigma_{e_i(\mathcal{P})}$$

donde $e_i(\mathcal{P})$ denota el número de componentes de \mathcal{P} de cardinalidad i . Además existe un isomorfismo:

$$\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle \langle i \rangle \cong \Sigma_{e_i(\mathcal{P})} \wr \Sigma_i.$$

Por lo tanto, el subgrupo $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ asociado a la partición \mathcal{P} es producto de “**productos trenzados**”.

Demostración. Un isomorfismo para la primer parte está dado por:

$$\psi : \Sigma[o\mathcal{P}] \longrightarrow \prod_{e_i(\mathcal{P}) \neq 0} \Sigma_{e_i(\mathcal{P})}$$

$$\sigma \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_{|S|})$$

donde σ_i es la permutación que σ genera en el conjunto de componentes de \mathcal{P} de cardinalidad i .

Un isomorfismo para la segunda parte está dado por:

$$\phi : \Sigma\langle\mathcal{P}\rangle\langle i \rangle \longrightarrow \Sigma_{e_i(\mathcal{P})} \wr \Sigma_i$$

$$\sigma \mapsto (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{e_i(\mathcal{P})})$$

donde α es la permutación que induce σ en las componentes de \mathcal{P} de cardinalidad i y α_j es la restricción de σ a la componente j -ésima de \mathcal{P} de cardinalidad i . \square

Orden en los subconjuntos finitos de un conjunto ordenado \mathcal{O}

Sean X y Y dos subconjuntos finitos de un conjunto ordenado \mathcal{O} , digamos $X = \{x_1 < \dots < x_r\}$ y $Y = \{y_1 < \dots < y_s\}$. Diremos que $X < Y$ (equivalentemente $Y > X$) si y sólo si $|X| < |Y|$ o si $|X| = |Y|$ y $x_\ell < y_\ell$ para algún ℓ , $1 \leq \ell \leq r$ con $x_j = y_j$ para todo j , $\ell < j \leq r$. Notemos que para cuales quiera dos subconjuntos finitos de \mathcal{O} , digamos X y Y , se cumple exactamente una de las siguientes condiciones $X < Y$, $X > Y$ o $X = Y$. Por tanto el conjunto de todos los subconjuntos finitos de \mathcal{O} está ordenado y nos referiremos a este orden como el **orden inducido**.

Para $S \subset \mathbb{N}$ finito, sea $Part(|S|)$ el conjunto de todas las particiones del número $|S|$. Notemos que se tiene una suprayección natural

$$p : Part(S) \longrightarrow Part(|S|)$$

$$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\} \mapsto \{|P_1|, \dots, |P_k|\}.$$

Como S está ordenado, consideramos el orden inducido en $Part(S)$ descrito anteriormente y definimos una sección para p :

$$\begin{aligned} s : Part(|S|) &\longrightarrow Part(S) \\ \mu &\longmapsto \mathcal{L}_\mu \end{aligned}$$

que manda a una partición μ de $|S|$ a la mínima partición de S que la induce \mathcal{L}_μ .

Ejemplo: Tomamos $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $|S| = 10$.

- Si $\mu = 4 + 3 + 2 + 1$, entonces

$$\mathcal{L}_\mu = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{8, 9\}, \{10\}\}.$$

- Si $\alpha = 3 + 3 + 3 + 1$, entonces

$$\mathcal{L}_\alpha = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10\}\}.$$

Además se tiene que $\mathcal{L}_\mu > \mathcal{L}_\alpha$.

Proposición 1.7. Sean $\mathcal{L} = \{T_1, \dots, T_k\}$ y $\mathcal{P} = \{U_1, \dots, U_q\}$ dos particiones de S que inducen la misma partición de $|S|$. Entonces existe un único elemento $\nu \in \Sigma_S$ con las siguientes tres propiedades:

- $\nu(\mathcal{L}) = \mathcal{P}$.
- Si $T_j \leq T_l$, entonces $\nu(T_j) \leq \nu(T_l)$.
- ν preserva el orden cuando se restringe a cada T_l , $1 \leq l \leq k$.

Demostración. Sean $\mathcal{L} = \{T_1 \leq \dots \leq T_k\}$ y $\mathcal{P} = \{U_1 \leq \dots \leq U_q\}$ dos particiones de S que inducen la misma partición en $|S|$. Entonces $k = q$ y $|T_i| = |U_i|$ para todo $1 \leq i \leq k$. Basta probar el Teorema para el caso en que $\mathcal{P} = \mathcal{L}_\mu$, donde μ es la partición de $|S|$ que induce \mathcal{L} , pues para el caso general basta componer la permutación encontrada para \mathcal{L} con la inversa de la permutación encontrada para \mathcal{P} .

Con las simplificaciones anteriores, la permutación $\sigma \in \Sigma_r$ queda unívocamente

determinada por el hecho de que debe preservar el orden en cada una de las componentes de la partición. Si suponemos que $T_i = \{t_{i,1} < \dots < t_{i,|T_i|}\}$, entonces σ está dada por:

$$\sigma(t_{1,j}) = j$$

$$\sigma(t_{i,j}) = |T_1| + \dots + |T_{i-1}| + j.$$

□

Ejemplo: Sea $S = \{1, 2, \dots, 13\}$ y $\mathcal{L} = \{\{11\}, \{2, 5\}, \{7, 13\}, \{3, 6, 8, 10\}, \{1, 4, 9, 12\}\}$. Arreglamos las particiones de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 12 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 7 & 13 & & \\ \hline 11 & & & \\ \hline \end{array} \quad \mathcal{L}_\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & & \\ \hline 11 & 12 & & \\ \hline 13 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\sigma : S \longrightarrow S$$

$$3 < 6 < 8 < 10 \longmapsto 1 < 2 < 3 < 4$$

$$1 < 4 < 9 < 12 \longmapsto 5 < 6 < 7 < 8$$

$$2 < 5 \longmapsto 9 < 10$$

$$7 < 13 \longmapsto 11 < 12$$

$$11 \longmapsto 13.$$

El siguiente resultado es inmediato:

Proposición 1.8. *Existe una biyección entre el espacio de órbitas $Part(S)/\Sigma_S$ y el conjunto $Part(|S|)$.*

Demostración. Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Part(S) & \xrightarrow{p} & Part(|S|) \\ \downarrow & \nearrow \bar{p} & \\ Part(S)/\Sigma_S & & \end{array}$$

La Proposición 1.7 muestra que \bar{p} es inyectiva. Como p es suprayectiva, entonces \bar{p} también lo es. \square

Representación asociada a un producto trenzado de grupos

Recordamos aquí una construcción clásica en teoría representaciones que ayudará a dar una descomposición más fina de $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$.

Sean H un grupo, M una representación graduada de H (es decir, un espacio vectorial graduado) y $q \in \mathbb{N}$. Considérese el q -ésimo producto tensorial de M , $M^{\otimes q}$. Cada $h \in H$ determina un homomorfismo, $M \rightarrow M$, y al tomar el producto tensorial de q de ellos se produce una acción de H^q en $M^{\otimes q}$. El grupo simétrico, Σ_q , actúa en $M^{\otimes q}$ de la siguiente manera:

$$(i\ j)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_q) = (-1)^{|x_i||x_j|} x_{(i\ j)1} \otimes \cdots \otimes x_{(i\ j)q}.$$

Estas dos acciones se combinan para dar lugar a una acción del producto trenzado, $\Sigma_q \wr H$, en $M^{\otimes q}$. La correspondiente representación de $\Sigma_q \wr H$ se denotará por $\Sigma_q \wr M^{\otimes}$.

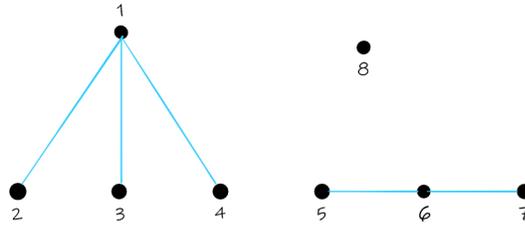
1.3. Gráficas y módulos asociados a monomios admisibles

Siguiendo [7], en esta sección daremos una descomposición de $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ como suma directa de representaciones más pequeñas de Σ_r , asociadas a particiones de r y gráficas provenientes de monomios admisibles. A partir de ahora la cohomología racional $H^*(F(\mathbb{R}^m, r), \mathbb{Q})$ se denotará por $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ y todas las representaciones se tomarán sobre el campo de los racionales \mathbb{Q} . Notemos que a todo monomio $A_I = A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\ell j_\ell} \in H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ le podemos asociar una **gráfica** $\Gamma(I)$ de la manera siguiente:

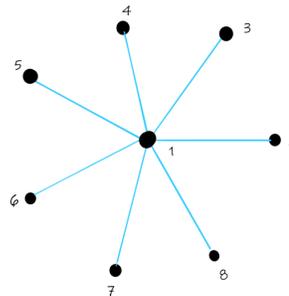
- Los vértices de $\Gamma(I)$ están dados por el conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$.
- Hay una arista entre i_t y j_t para todo t , $1 \leq t \leq \ell$.

Ejemplos: Supongamos $r = 8$.

- Si $A_I = A_{21}A_{31}A_{41}A_{65}A_{76}$, entonces la gráfica asociada a A_I es



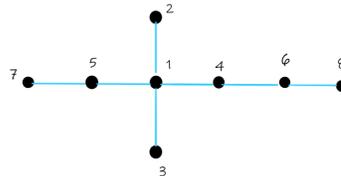
- Si $A_{21}A_{31}A_{41}A_{51}A_{61}A_{71}A_{81}$, entonces la gráfica asociada a A_I es



- Si $A_{21}A_{32}A_{43}A_{54}A_{65}A_{76}A_{87}$, entonces la gráfica asociada a A_I es



- Si $A_{21}A_{31}A_{41}A_{51}A_{64}A_{75}A_{86}$, entonces la gráfica asociada a A_I es



A cada componente conexa x de $\Gamma(I)$, le asociamos el subconjunto $T_x \subset \{1, \dots, r\}$, que consiste de todos los vértices en x . Los conjuntos T_x son disjuntos y su unión es

$\{1, 2, \dots, r\}$, es decir, forman una partición de $\{1, \dots, r\}$. Denotaremos a esta partición por $\mathcal{P}(I)$ y la llamaremos **la partición asociada al monomio** A_I . Recíprocamente, para toda partición \mathcal{P} de $\{1, \dots, r\}$ existe al menos un monomio admisible, A_I , tal que $\mathcal{P}(I) = \mathcal{P}$.

Definición. Para cualquier partición \mathcal{P} de $\{1, \dots, r\}$, denotemos por $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ el submódulo de $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ generado por todos los monomios admisibles A_I cuya partición asociada es \mathcal{P} .

Ejemplos: Supongamos $r = 8$.

- Si $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{8\}\}$, entonces

$$\mathbf{T}(\mathcal{P}, m) = \langle 1 \rangle = H^0 F(\mathbb{R}^m, 8) = \mathbb{Q}.$$

- Si $\mathcal{P} = \{\{1, 2, \dots, 8\}\}$, entonces

$$\mathbf{T}(\mathcal{P}, m) = \langle A_{2j_2} A_{3j_3} \dots A_{8j_8} \mid 1 \leq j_i < i \leq 8 \rangle = \mathbb{Q}^{7!} = \mathbb{Q}^{5040}.$$

Los monomios admisibles para la partición $\{\{1, 2, \dots, 8\}\}$ están en correspondencia con los árboles cuya raíz es 1 y las aristas están etiquetadas de manera creciente al alejarse de la raíz. Esto es, el número de monomios básicos en el producto tensorial:

$$\langle A_{21} \rangle \otimes \langle A_{31}, A_{32} \rangle \otimes \dots \otimes \langle A_{81}, \dots, A_{81} \rangle$$

es decir, $7! = 5040$. Ejemplos de monomios y sus árboles asociados para esta partición aparecen en los tres últimos incisos de la serie de ejemplos anterior.

- Si $\mathcal{P} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$, entonces

$$\mathbf{T}(\mathcal{P}, m) = \langle A_{21} A_{31} A_{54}, A_{21} A_{32} A_{54} \rangle = \mathbb{Q}^2.$$

- Si $\mathcal{P} = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 8\}, \{4, 6\}, \{7\}\}$, entonces

$$\mathbf{T}(\mathcal{P}, m) = \langle A_{21} A_{51} A_{64} A_{83}, A_{21} A_{52} A_{64} A_{83} \rangle = \mathbb{Q}^2.$$

Lema 1.9. Si $\sigma \in \Sigma_r$ y \mathcal{P} es una partición de $\{1, \dots, r\}$, el morfismo inducido por σ en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ se restringe a

$$\mathbf{T}(\mathcal{P}, m) \longrightarrow \mathbf{T}(\sigma(\mathcal{P}), m).$$

Demostración. Dado un monomio admisible $A_I \in \mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$, entonces, usando las fórmulas explícitas de la Proposición 1.3, de la acción de Σ_k en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ se sigue que $\sigma(A_I) = \pm A_J$ para algún monomio ordenado $A_J = A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_k j_k}$ con $i_1 \leq \dots \leq i_k$ y $j_t < i_t \forall t = 1, \dots, k$. Notemos que $\Gamma(J) = \Gamma(\sigma(I))$ y que claramente la partición asociada al monomio A_J (equivalentemente, a la gráfica $\Gamma(J)$) es $\sigma(\mathcal{P})$. En general, el monomio A_J no es admisible pero aplicando repetidamente las relación de tres términos se puede expresar como combinación lineal de monomios admisibles.

Solo hace falta verificar que las particiones asociadas a los monomios resultantes de aplicar las relaciones de tres términos son iguales. Sea A_J un monomio ordenado y supongamos que podemos aplicar la relación de tres términos, es decir, que existe t tal que $i_t = i_{t+1}$: supongamos $A_J = A_{J\langle 0 \rangle} - A_{J\langle 1 \rangle}$. Sea G el complejo simplicial formado por $\Gamma(J)$ más una arista adicional entre j_t y j_{t+1} y un 2-simplejo cuyos tres vértices son i_t, j_t y j_{t+1} , es decir, el complejo, G , se obtiene de $\Gamma(J)$ por medio de una expansión elemental. Por tanto la inclusión $\Gamma(J) \subset G$ es una equivalencia homotópica. Pero G también se obtiene de $\Gamma(J\langle 0 \rangle)$ (y de $\Gamma(J\langle 1 \rangle)$) por una expansión elemental, ver figura 1.3. Por tanto las particiones asociadas a $J, J\langle 0 \rangle$ y $J\langle 1 \rangle$ son todas iguales. \square

Proposición 1.10. Sea $I = ((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k))$ cualquier sucesión de parejas con $1 \leq j_\ell < i_\ell \leq r$ para todo ℓ . Entonces $A_I = 0$ si y sólo si $H_1(\Gamma(I)) \neq 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$, ya que permutar los factores del monomio A_I no cambia la gráfica y solo modifica al monomio por un signo.

Al aplicar la relación de tres términos, vamos obteniendo monomios cuyas gráficas son todas homotópicas a $\Gamma(I)$ y por tanto tienen la misma homología que $\Gamma(I)$

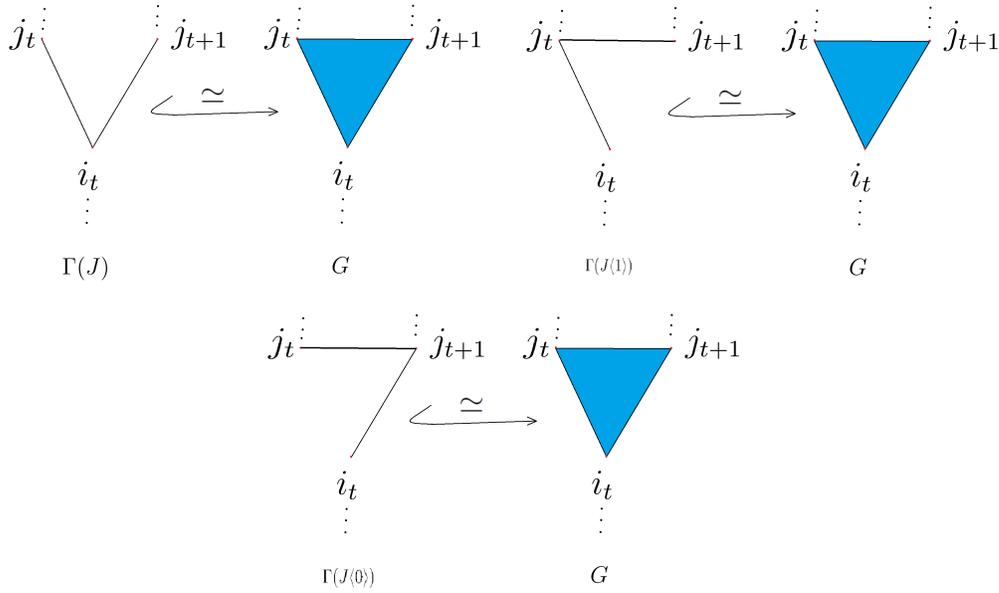


Figura 1.1: Visualización de $\Gamma(J)$, $\Gamma(J\langle 0 \rangle)$, $\Gamma(J\langle 1 \rangle)$ y de G

(ver demostración anterior). La expansión de A_I , usando la relación de tres términos, eventualmente termina en alguno de los siguientes dos casos:

- Obtenemos dos copias de algún A_{ij} en algún sumando. En este caso, la gráfica asociada tiene dos aristas entre los vértices i y j , y por tanto tenemos un ciclo, el cual provee un elemento no cero en homología.
- Todos los monomios son admisibles. Como los monomios admisibles tienen por gráficas uniones disjuntas de árboles, entonces $H_1(\Gamma(I)) = 0$.

Por tanto, A_I se expande como una suma de monomios admisibles si y sólo si $H_1(\Gamma(I)) = 0$, de otra manera se expande como suma monomios todos ceros.

Notemos que al aplicar la relación de tres términos:

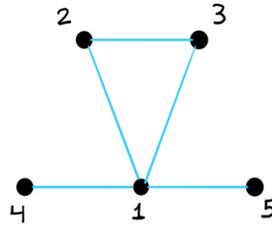
$$A_{kj}A_{ki} = A_{ij}A_{ki} - A_{ij}A_{kj}$$

los subíndices j, i del lado izquierdo aparecen en el mismo orden solo en el primer sumando del lado derecho. Entonces como existe un solo monomio en la expansión

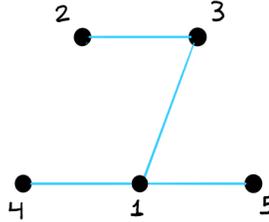
de A_I con las mismas segundas coordenadas de I , A_I se expande como suma de monomios admisibles si y sólo si $A_I \neq 0$. \square

Por el Lema anterior, se sigue que $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle$ el subgrupo asociado a la partición \mathcal{P} actúa en el \mathbb{Q} -módulo $T(\mathcal{P}, m)$ y por tanto tenemos una representación de dicho grupo.

Ejemplo: Si $r = 5$, esto es en $H^*F(\mathbb{R}^m, 5)$, se tiene $A_{31}A_{51}A_{21}A_{32}A_{41} = 0$ pues la gráfica asociada está dada por



Por otro lado $A_{31}A_{51}A_{32}A_{41} \neq 0$ pues la gráfica asociada está dada por



Recordamos a continuación una construcción de la teoría de representaciones conocida como la representación inducida (ver apéndice A). Sean G un grupo, $H \subset G$ un subgrupo y W una representación de H . Se define la representación inducida, denotada por $W|G$ ó también por $Ind_H^G W$ como el G -espacio vectorial:

$$W \otimes_{\mathbb{Q}[H]} \mathbb{Q}[G].$$

Aquí se optará por usar la notación $Ind_H^G W$ como lo hacen en [18] y [5], la notación $W|G$ se utiliza en [7]. De manera más explícita, una elección de representantes para

$G/H = \{g_1H, \dots, g_lH\}$ da lugar a un isomorfismo de representaciones:

$$\text{Ind}_H^G W \longrightarrow \bigoplus_i g_i W.$$

Lema 1.11. *Dada una partición \mathcal{L} del conjunto $S = \{1, 2, \dots, r\}$, existe un isomorfismo de espacio vectoriales:*

$$\text{Ind}_{\Sigma\langle\mathcal{L}\rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}, m) \cong \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$$

donde la suma se toma sobre todas las particiones \mathcal{P} similares a \mathcal{L} . Ambos lados son Σ_r -módulos y el isomorfismo es un isomorfismo de Σ_r -módulos.

Demostración. Se sabe que la representación inducida se puede descomponer como

$$\text{Ind}_{\Sigma\langle\mathcal{L}\rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}, m) \longrightarrow \bigoplus_i g_i \mathbf{T}(\mathcal{L}, m) \subset H^* F(\mathbb{R}^m, r)$$

donde $\{g_1, \dots, g_l\}$ es un conjunto completo de representantes para $\Sigma_r/\Sigma\langle\mathcal{L}\rangle$. Por la Proposición 1.7, si $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\ell\}$ es un conjunto de particiones similares a \mathcal{L} (es decir, inducen la misma partición de $|S|$), entonces existen permutaciones ν_1, \dots, ν_ℓ tales que $\mathcal{P}_i = \nu_i(\mathcal{L})$. Como $|\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\ell\}| = |\Sigma_r/\Sigma\langle\mathcal{L}\rangle|$ y cada ν_i pertenece a una clase lateral izquierda distinta, entonces el conjunto $\{\nu_1, \dots, \nu_\ell\}$ es un conjunto completo de representantes para $\Sigma_r/\Sigma\langle\mathcal{L}\rangle$. Por el Lema 1.9, se tiene que $\nu_i(\mathbf{T}(\mathcal{L}, m)) = \mathbf{T}(\nu_i(\mathcal{L}), m) = \mathbf{T}(\mathcal{P}_i, m)$. \square

Proposición 1.12. *Existe un isomorfismo de Σ_r -módulos*

$$H^* F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$$

donde la suma corre sobre todas las particiones \mathcal{P} del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$.

Demostración. Por el Teorema 1.2 la cohomología $H^* F(\mathbb{R}^m, r)$ está generada por los monomios A_I , más aún, podemos considerar solo monomios admisibles gracias a la relación de tres términos. Es claro que al variar \mathcal{P} sobre todas las particiones del

conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$ obtendremos todos los monomios admisibles de $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$.

□

Teorema 1.13. *Existe un isomorfismo de representaciones*

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\mu \vdash r} \text{Ind}_{\Sigma\langle \mathcal{L}_\mu \rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$$

donde \mathcal{L}_μ es la mínima partición que realiza a μ y la suma corre sobre todas las particiones μ de r .

Demostración. Por la Proposición 1.12, tenemos un isomorfismo

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) = \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$$

donde la suma corre por todas las particiones de $\{1, \dots, r\}$. Agrupando los sumandos del lado derecho tenemos

$$\bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbf{T}(\mathcal{P}, m) = \bigoplus_{\mu \vdash r} \left(\bigoplus_{\mathcal{P} \text{ induce } \mu} \mathbf{T}(\mathcal{P}, m) \right).$$

Por el Lema 1.11, la expresión entre paréntesis del lado derecho es igual a $\text{Ind}_{\Sigma\langle \mathcal{L}_\mu \rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$.

□

Concluimos esta sección con una descripción de $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$. Para $S \subset \{1, 2, \dots, r\}$, ponemos

$$\mathbf{T}(S, m) := \mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$$

donde \mathcal{P} es la partición de $\{1, 2, \dots, r\}$ que tiene a S como una componente y el resto sus componentes son unipuntuales. En particular, denotamos por $\mathbf{T}(k, m)$ a $\mathbf{T}(\{1, \dots, k\}, m)$. Si $S, S' \subset \mathbb{N}$ son dos conjuntos finitos de la misma cardinalidad, entonces la biyección canónica que preserva el orden

$$S \longrightarrow S'$$

induce un isomorfismo de $\Sigma_{|S|}$ -módulos

$$\mathbf{T}(S, m) \longrightarrow \mathbf{T}(S', m). \quad (1.3)$$

Si S tiene un solo elemento, entonces por convención $\mathbf{T}(S, m) = \mathbb{Q}$ y estará generado por $A_\emptyset = 1 \in H^*F(\mathbb{R}^m, r)$.

Lema 1.14. *Si $S \subset \mathbb{N}$ con $|S| = k$, entonces existe un isomorfismo de representaciones del grupo Σ_k :*

$$\mathbf{T}(S, m) \longrightarrow H^{(m-1)(k-1)}F(\mathbb{R}^m, k).$$

Demostración. Sea $S = \{x_1 < x_2 < \dots < x_k\}$. Consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi : S &\longrightarrow \{1, \dots, k\} \\ x_i &\longmapsto i. \end{aligned}$$

Entonces esta función induce un isomorfismo:

$$\mathbf{T}(S, m) \longrightarrow H^{(m-1)(k-1)}(F(\mathbb{R}^m, k))$$

que en los elementos básicos tiene la forma:

$$A_{x_{i_1}x_{j_1}} \cdots A_{x_{i_k}x_{j_k}} \longmapsto A_{i_1j_1} \cdots A_{i_kj_k}.$$

□

Lema 1.15. *Sea \mathcal{P} una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$ cuyas componentes son T_1, \dots, T_k .*

(a) *El producto en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ induce una inclusión (monomorfismo)*

$$\mathbf{T}(T_1, m) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}(T_k, m) \hookrightarrow H^*F(\mathbb{R}^m, r)$$

cuya imagen es $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$.

(b) $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ actúa en $\mathbf{T}(T_1, m) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}(T_k, m)$ y el isomorfismo entre $\mathbf{T}(T_1, m) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}(T_k, m)$ y $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ es $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ -equivariante.

(c) $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ está concentrado en:

$$H^{(m-1)(r-|\pi_0(\mathcal{P})|)}(F(\mathbb{R}^m, r)).$$

Demostración. Nótese que si la partición \mathcal{P} tiene como componentes a $\{T_1, \dots, T_k\}$, entonces el producto en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ induce la inclusión

$$\mathbf{T}(T_1, m) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}(T_k, m) \hookrightarrow H^*F(\mathbb{R}^m, r)$$

$$A_{I_1} \otimes \cdots \otimes A_{I_k} \longmapsto A_{I_1} \cdots A_{I_k}$$

cuya imagen es $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$. Para el segundo inciso es claro que el isomorfismo respeta la acción en ambos lados. Para el tercer inciso usamos el Lema 1.14 y el inciso anterior. \square

Lema 1.16. *Si T_1, \dots, T_k son las componentes de \mathcal{P} , entonces existe un isomorfismo $\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle$ -equivariante:*

$$\mathbf{T}(T_1, m) \otimes \cdots \otimes \mathbf{T}(T_k, m) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^k (\Sigma_{e_i(\mathcal{P})} \wr \mathbf{T}(i, m)^{\otimes}).$$

Demostración. Usando la ecuación 1.3 se obtiene un isomorfismo entre $\mathbf{T}(T_t, m)$ y $\mathbf{T}(|T_t|, m)$. El resto consiste en agrupar las componentes de \mathcal{P} de cardinalidad fija. La equivarianza se obtiene de usar los lemas 1.4 y 1.6 para obtener un isomorfismo

$$\Sigma\langle\mathcal{P}\rangle \cong \bigtimes_{i=1}^k \Sigma_{e_i(\mathcal{P})} \wr \Sigma_i.$$

\square

Combinando el segundo inciso del Lema 1.15, el Lema 1.16 y el Teorema 1.13 obtenemos el siguiente resultado:

Existe un isomorfismo de Σ_r -módulos:

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\mu \vdash r} \text{Ind}_{\Sigma(\mathcal{L}_\mu)}^{\Sigma_r} \left(\bigotimes_{i=1}^r \Sigma_{\#\mu\langle i \rangle} \wr \mathbf{T}(i, m)^{\otimes} \right)$$

donde $\#\mu\langle i \rangle$ es igual al número de veces que i aparece en la partición μ .

1.4. $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ como $\mathbb{Q}[\Sigma_r]$ -módulo

En esta sección probaremos que la representación $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ es isomorfa a la representación inducida $\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_r}(\mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}^-)^{\otimes m})$ donde \mathbb{Q} y \mathbb{Q}^- denotan la representación trivial y la representación signo, respectivamente. El argumento se divide de manera natural en dos casos: m par y m impar y en cada caso se calcula el carácter de la representación correspondiente con la ayuda del teorema de punto fijo de Lefschetz (ver apéndice B). Este es básicamente el esquema de la demostración en [7] y [18].

El caso en que m es impar es el más sencillo, ya que el carácter evaluado en una permutación es igual al número de Lefschetz de dicha permutación. El caso en que m es par es más elaborado pues el carácter y el número de Lefschetz no coinciden. En este caso, la cohomología se expresa como suma directa de dos submódulos A_{par} y A_{impar} los cuales se analizan usando el teorema de punto fijo de Lefschetz y el carácter se calcula usando inducción en r .

Para poder aplicar el Teorema de punto fijo de Lefschetz al siguiente mapeo

$$\sigma : F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r) \text{ con } \sigma \in \Sigma_r$$

basta saber que existe un CW -complejo finito X_r , con una acción de Σ_r y una equivalencia homotópica $f_r : X_r \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$ Σ_r -equivariante. Notemos que:

- $\forall \sigma \in \Sigma_r$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_r & \xrightarrow{f_r} & F(\mathbb{R}^m, r) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ X_r & \xrightarrow{f_r} & F(\mathbb{R}^m, r). \end{array}$$

- Si $\sigma \neq 1$, $\sigma : X_r \rightarrow X_r$ no tiene puntos fijos.

De lo contrario:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot x = x &\implies f_r(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f_r(x) = f_r(x) \\ &\implies \sigma = 1. \end{aligned}$$

- Como $f_r : X_r \rightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$ es una equivalencia homotópica, el morfismo inducido en cohomología $f_r^* : H^*F(\mathbb{R}^m, r) \rightarrow H^*(X_r)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, el número de Lefschetz para $\sigma : F(\mathbb{R}^m, r) \rightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$, Λ_σ , está bien definido y es igual al número de Lefschetz para $\sigma : X_r \rightarrow X_r$.
- Así, por el Teorema de punto fijo de Lefschetz:

$$\Lambda_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq 1, \\ \chi_{F(\mathbb{R}^m, r)} & \text{si } \sigma = 1. \end{cases}$$

En [19] se define el espacio de configuraciones de Fulton-MacPherson $C_r(\mathbb{R}^m)$. Este espacio es un CW -complejo finito, con una acción de Σ_r y una equivalencia homotópica $f_r : C_r(\mathbb{R}^m) \rightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$ que es Σ_r -equivariante.

Teorema 1.17. *Si m es impar y χ es el carácter de la representación natural de Σ_r en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$, entonces:*

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq 1, \\ r! & \text{si } \sigma = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ es la representación regular de Σ_r .

Demostración. Recordemos que la cohomología de $F(\mathbb{R}^m, r)$ está concentrada en dimensiones múltiplos de $m-1$: $H^*F(\mathbb{R}^m, r) = \bigoplus_{j=0}^{r-1} H^{j(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$. Como $m-1$ es par, se tiene:

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma &= \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j(m-1)} \text{tr} [\sigma^* : H^{j(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^{j(r-1)}F(\mathbb{R}^m, r)] \\ &= \text{tr} [\sigma^* : H^*F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^m, r)] = \chi(\sigma). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que para $\sigma \neq 1$, $\chi(\sigma) = \Lambda_\sigma = 0$.

Por otro lado, $\chi(1) = \dim_{\mathbb{Q}} H^*F(\mathbb{R}^m, r)$. Entonces, del isomorfismo de espacios vectoriales graduados

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) \cong H^*(S^{m-1}) \otimes H^*(S^{m-1} \vee S^{m-1}) \otimes \dots \otimes H^*\left(\bigvee_{r-1} S^{m-1}\right)$$

se tiene que $\chi(1) = r!$. □

Procedemos ahora a estudiar el caso par. Notemos que podemos escribir:

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) = A_{par}(m, r) \oplus A_{impar}(m, r)$$

donde $A_{par}(m, r)$ y $A_{impar}(m, r)$ representan los submódulos de elementos concentrados en grados pares e impares, respectivamente. Por el Teorema de punto fijo de Lefschetz se sigue que para $\sigma \neq 1$:

$$\chi_{A_{par}(m, r)}(\sigma) - \chi_{A_{impar}(m, r)}(\sigma) = \Lambda_\sigma = 0.$$

Por otro lado, para $\sigma = 1$ se tiene que

$$\chi_{A_{par}(m, r)}(1) - \chi_{A_{impar}(m, r)}(1)$$

es precisamente la característica de Euler de $F(\mathbb{R}^m, r)$, la cual es cero en este caso. Esto se puede ver fácilmente de la fibración dada por la proyección en las primeras dos coordenadas

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & F(\mathbb{R}^m, r) \\ & & \downarrow \\ & & F(\mathbb{R}^m, 2) \simeq S^{m-1}. \end{array}$$

De lo anterior se concluye que las representaciones $A_{par}(m, r)$ y $A_{impar}(m, r)$ tienen el mismo carácter y por tanto son isomorfas. Denotemos al carácter en común de ambas representaciones por $\chi_{\frac{1}{2}}^r$. y notemos que en este caso el carácter de la representación $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ está dado por $\chi_{H^*F(\mathbb{R}^m, r)} = 2\chi_{\frac{1}{2}}^r$.

Teorema 1.18. *Las representaciones $A_{par}(m, r)$ y $A_{impar}(m, r)$ del grupo simétrico Σ_r son isomorfas a la representación inducida $Ind_{\Sigma_2}^{\Sigma_r} \mathbb{Q}$, donde \mathbb{Q} es la representación trivial de Σ_2 . El carácter común de ambas está dado por:*

$$\chi_{\frac{1}{2}}^r(\sigma) = \begin{cases} r!/2 & \text{si } \sigma = 1, \\ (r-2)! & \text{si } \sigma \text{ es una transposición,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ es isomorfa a la suma de dos copias de la representación $\mathbb{Q}[\Sigma_r/\Sigma_2]$.

Demostración. Consideremos la reflexión en la primera coordenada en \mathbb{R}^m :

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (-x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

y denotemos por $F(c, r)$ el homeomorfismo inducido en $F(\mathbb{R}^m, r)$. Consideremos el

diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{F(c,r)} & F(\mathbb{R}^m, r) \\ \pi_{i,j} \downarrow & & \downarrow \pi_{i,j} \\ S^{m-1} & \xrightarrow{c|_{S^{m-1}}} & S^{m-1} \end{array}$$

donde $\pi_{i,j}$ es el mapeo $\pi_{i,j}(x_1, \dots, x_r) = (x_i - x_j)/|x_i - x_j|$. Al aplicar $H^{m-1}(_)$ tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) & \xleftarrow{F(c,r)^*} & H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \\ \pi_{i,j}^* \uparrow & & \uparrow \pi_{i,j}^* \\ H^{m-1}(S^{m-1}) & \xleftarrow{\times(-1)} & H^{m-1}(S^{m-1}). \end{array}$$

Esto implica que el morfismo inducido por $F(c, r)$ en cohomología

$$F(c, r)^* : H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r)$$

manda A_{ij} en $-A_{ij}$ y en general

$$A_I \longmapsto \begin{cases} -A_I & \text{si } A_I \text{ de grado impar,} \\ A_I & \text{si } A_I \text{ de grado par.} \end{cases}$$

Por lo tanto, al calcular el número de Lefschetz de la composición $F(c, r) \circ \sigma$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Lambda_{F(c,r) \circ \sigma} &= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i(m-1)} \text{tr} [\sigma^* \circ F(c, r)^* : H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)] \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \text{tr} [\sigma^* : H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)] = 2\chi_{\frac{1}{2}}^r. \end{aligned}$$

De manera similar a como se hizo al inicio de la sección se puede ver que es posible

aplicar el Teorema de punto fijo de Lefschetz al mapeo $F(c, r) \circ \sigma : F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$, aunque por brevedad omitiremos los detalles. Notemos que al ser $F(c, r)$ una involución que conmuta con el mapeo $\sigma : F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$ dado por la permutación $\sigma \in \Sigma_r$, es fácil ver que $F(c, r) \circ \sigma$ tiene un punto fijo $(x_1, \dots, x_r) \in F(\mathbb{R}^m, r)$ si y sólo si

$$\sigma^2(x_1, \dots, x_r) = (x_1, \dots, x_r).$$

Como la acción de Σ_r en $F(\mathbb{R}^m, r)$ es libre, esto implica que $\sigma^2 = 1$, es decir σ es un producto de transposiciones disjuntas o bien es la identidad. Por lo tanto, si $\sigma \in \Sigma_r$, $\sigma \neq 1$, no es producto de transposiciones disjuntas, entonces $\chi_{\frac{1}{2}}^r(\sigma) = 0$. Así, es suficiente calcular $\chi_{\frac{1}{2}}^r$ para permutaciones $\sigma \neq 1$ que son producto de transposiciones disjuntas.

El cálculo del carácter $\chi_{\frac{1}{2}}^r$ se divide en dos casos:

1. Supongamos que σ es un producto de transposiciones disjuntas y que no fija ningún elemento de $\{1, 2, \dots, r\}$. Esto significa que $r = 2\ell$ y salvo conjugación σ se puede tomar como la permutación $\sigma_\ell = (1\ 2)(3\ 4) \dots (2\ell - 1\ 2\ell)$.

Tenemos un isomorfismo de $\Sigma_{r-2} \times \Sigma_{\{r-1, r\}}$ -módulos:

$$\begin{aligned} H^*F(\mathbb{R}^m, r) &\cong H^*F(\mathbb{R}^m, r-2) \otimes \left(H^*\left(\bigvee_{r-2} S^{m-1}\right) \otimes H^*\left(\bigvee_{r-1} S^{m-1}\right) \right) \\ &= H^*F(\mathbb{R}^m, r-2) \otimes \left(\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r-1i} \rangle \oplus \langle A_{rj} \rangle \oplus \langle A_{r-1i}A_{rj} \rangle \right). \end{aligned}$$

Sea $\sigma_\ell = \sigma_{\ell-1} \times (r-1\ r)$ y notemos que

$$\chi_{\frac{1}{2}}^r(\sigma) = \chi_{\frac{1}{2}}^{r-2}(\sigma_{\ell-1}) \cdot \chi(\sigma)$$

donde $\chi(\sigma_\ell)$ es la traza de σ_ℓ actuando en el módulo $\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r-1i} \rangle \oplus \langle A_{rj} \rangle \oplus \langle A_{r-1i}A_{rj} \rangle$. Procedemos por inducción sobre ℓ , comenzando con $\ell = 2$, $r = 4$ y $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$. Analizando la acción de σ en $A_{\text{impar}}(m, 4) = \langle A_{ij} \mid 1 \leq j < i \leq 4 \rangle \oplus \langle A_{21}A_{3i}A_{4j} \mid i = 1, 2 \text{ y } j = 1, 2, 3 \rangle$ tenemos que:

- La matriz de $\sigma^* : H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, 4) \longrightarrow H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, 4)$ con respecto a la

base $A_{21}, A_{31}, A_{32}, A_{41}, A_{42}, A_{43}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad tr = 2.$$

- La matriz de $\sigma^* : H^{3(m-1)}F(\mathbb{R}^m, 4) \longrightarrow H^{3(m-1)}F(\mathbb{R}^m, 4)$ con respecto a la base $A_{21}A_{31}A_{41}, A_{21}A_{32}A_{41}, A_{21}A_{31}A_{42}, A_{21}A_{32}A_{42}, A_{21}A_{31}A_{43}, A_{21}A_{32}A_{43}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad tr = -2.$$

Por lo tanto $\chi_{\frac{1}{2}}^4 = 0$. Por inducción obtenemos que $\chi_{\frac{1}{2}}^r(\sigma) = 0$.

- Supongamos que σ es producto de transposiciones disjuntas y que deja al menos un elemento fijo en $\{1, 2, \dots, r\}$. Procedemos por inducción sobre r . Para $r = 2$, la única permutación posible es $\sigma = 1$ y en este caso sabemos que $\chi_{\frac{1}{2}}^r(1) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Q}} H^*F(\mathbb{R}^2, m) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Q}} H^*(S^{m-1}) = 1$. Supongamos válida la fórmula para $\chi_{\frac{1}{2}}^{r-1}$ y recordemos que existe un isomorfismo de Σ_{r-1} -módulos

$$\begin{aligned} H^*F(\mathbb{R}^m, r) &\cong H^*F(\mathbb{R}^m, r-1) \otimes H^*\left(\bigvee_{r-1} S^{m-1}\right) \\ &= H^*F(\mathbb{R}^m, r-1) \otimes (\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 2\chi_{\frac{1}{2}}^r &= \chi_{H^*F(\mathbb{R}^m, r)} \\ &= \chi_{H^*F(\mathbb{R}^m, r-1)} \cdot \chi_{\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle} \\ &= 2\chi_{\frac{1}{2}}^{r-1} \cdot \chi_{\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle} \end{aligned}$$

de donde:

$$\chi_{\frac{1}{2}}^r = \chi_{\frac{1}{2}}^{r-1} \cdot \chi_{\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle}.$$

Si σ es un producto de 2 o más transposiciones, entonces

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}}^r(\sigma) &= \chi_{\frac{1}{2}}^{r-1}(\sigma) \cdot \chi_{\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle}(\sigma) \\ &= 0 \cdot \chi_{\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle}(\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Si σ es una transposición, entonces salvo conjugación $\sigma = (1\ 2)$ y

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}}^r(\sigma) &= \chi_{\frac{1}{2}}^{r-1} \cdot (\sigma) \chi_{\mathbb{Q} \oplus \langle A_{r1}, \dots, A_{rr-1} \rangle}(\sigma) \\ &= (r-3)!(r-2) \\ &= (r-2)!. \end{aligned}$$

□

De los Teoremas anteriores obtenemos:

Corolario 1.19. *Si m es impar, entonces $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ contiene una copia de la representación trivial en dimensión 0. Si m es par, entonces hay dos copias de la representación trivial, una en dimensión 0 y la otra en dimensión $m-1$ generada por $\sum_{1 \leq j < i \leq r} A_{ij}$.*

Corolario 1.20. *La representación $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ es isomorfa a la representación inducida:*

$$\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_r} (\mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}^-)^{\otimes m})$$

donde \mathbb{Q} es la representación trivial y \mathbb{Q}^- es la representación signo.

Es importante recalcar que si m es impar, entonces la Σ_r -representación $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ es isomorfa a la representación regular $\mathbb{Q}[\Sigma_r]$ de Σ_r .

1.5. Ejemplos

En esta sección se presentan ejemplos que ilustran el Corolario anterior para ciertos valores de r y m . Estos ejemplos hacen uso de algunas propiedades de las representaciones inducidas que se pueden consultar en el apéndice A.

- Si $m = 2$ y $r = 3$, entonces

$$\begin{aligned} H^*F(\mathbb{R}^2, 3) &\cong \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3} (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}) \\ &= \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3} (V_{\square\square} \oplus V_{\square\square}) \\ &= \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3} V_{\square\square} \oplus \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3} V_{\square\square} \\ &= V_{\square\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\square\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \\ &= \left(V_{\square\square\square} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2}. \end{aligned}$$

- Si $m = 2$ y $r = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
H^*F(\mathbb{R}^2, 4) &\cong \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_4}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4}(\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q})) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} \left(\left(V_{\square\square\square} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \right) \\
&= \left(\text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} V_{\square\square\square} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(\text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \\
&= \left(V_{\square\square\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \\
&= \left(V_{\square\square\square\square} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 4} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2}.
\end{aligned}$$

- Si $m = 3$ y $r = 3$, entonces

$$\begin{aligned}
H^*F(\mathbb{R}^3, 3) &\cong \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}^-) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(V_{\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3} V_{\square\square} \oplus \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3} V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \\
&= V_{\square\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \\
&= V_{\square\square\square} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}.
\end{aligned}$$

- Si $m = 3$ y $r = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
H^*F(\mathbb{R}^3, 4) &\cong \text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_4}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}^-) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4}(\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}^-)) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} \left(V_{\square\square\square} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}} \right) \\
&= \text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} V_{\square\square\square} \oplus \left(\text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} V_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus \text{Ind}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4} V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}} \\
&= V_{\square\square\square\square} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}} \\
&= V_{\square\square\square\square} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 3} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 3} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}.
\end{aligned}$$

En los siguientes dos casos los cálculos son similares, por esta razón no se muestran.

- Si $m = 2$ y $r = 5$, entonces

$$\begin{aligned}
H^*F(\mathbb{R}^2, 5) &\cong \\
&\left(V_{\square\square\square\square\square} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 6} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 6} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 6} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 2}.
\end{aligned}$$

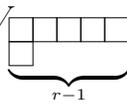
- Si $m = 3$ y $r = 5$, entonces

$$\begin{aligned}
H^*F(\mathbb{R}^3, 5) &\cong \\
&V_{\square\square\square\square\square} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 4} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 5} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 6} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 5} \oplus \left(V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \right)^{\oplus 4} \oplus V_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}.
\end{aligned}$$

Como se puede ver, aunque en principio los cálculos no son difíciles, estos se vuelven tediosos ya para valores pequeños de r . Este es una de las razones por las cuales no existen muchos ejemplos en la literatura.

Notemos que tanto en el caso en que m es par como impar, en la descomposición de $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ aparecen nuevas representaciones y algunas con multiplicidades cada vez mayores conforme r aumenta. Por ejemplo, la representación

$$V \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$



aparece en $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ con multiplicidad $r - 1$ si m es impar y con multiplicidad $2(r - 2)$ si m es par. En contraste con este fenómeno, en el siguiente capítulo veremos que al considerar los grupos de cohomología en una sola dimensión específica $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$ dicha representación se estabiliza (en cierto sentido) al aumentar r .

Capítulo 2

Estabilidad de las representaciones

$H^i F(\mathbb{R}^m, r)$

Hasta ahora se ha analizado la estructura de $H^* F(\mathbb{R}^m, r)$ como Σ_r -módulo, llegando a describirla en términos de representaciones del grupo Σ_r ya conocidas. A partir de ahora se centrará la atención en la estructura de cada $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)$ como Σ_r -módulo. Las ideas que aquí se exponen provienen del trabajo que hicieron T. Church y B. Farb en [5].

Comenzamos por dar una descomposición de $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)$ en términos de los submódulos $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$. Posteriormente se define la estabilidad de representaciones para una sucesión de presentaciones consistente y se dan ejemplos, entre ellos se encuentra la sucesión $\{Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} V \boxtimes \mathbb{Q}\}_r$ que resulta ser la piedra angular de esta teoría pues cumple con la estabilidad de representaciones y transfiere esta propiedad a otras sucesiones. Veremos que la descomposición de $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)$ dada al inicio en términos de los $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ se puede transformar en una descomposición en términos de $Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} V \boxtimes \mathbb{Q}$, lo cual implica la estabilidad de las representaciones $\{H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$.

2.1. Una descomposición para $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$

Recordemos que las representaciones irreducibles de Σ_r sobre \mathbb{Q} están en correspondencia biyectiva con las particiones de r . A saber, a cada partición μ de r le corresponde la representación irreducible V_μ correspondiente al diagrama de Young asociado a μ .

Ejemplo: Si $r = 6$

$$\mu = \{3, 2, 1\} \quad \longleftrightarrow \quad V_\mu = V_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}}.$$

Si $d \leq r$ y $\mu = \{\mu_1 \geq \dots \geq \mu_\ell\} \vdash d$ es una partición de d con $r - d \geq \mu_1$, definimos una partición de r por $\mu[r] := \{r - d, \mu_1, \dots, \mu_\ell\}$ y denotamos a la representación irreducible asociada por

$$V(\mu)_r := V_{\mu[r]}.$$

Ejemplos:

- Si $d = 1$ y $\mu = \{1\}$, entonces para toda $r \geq 2$ se tiene que $\mu(1)_r = \{r - 1, 1\}$ y

$$V(\mu)_r = V(1)_r = V_{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}}_{r-1}}.$$

- Si $d = 2$ y $\mu = \{1, 1\}$, entonces para toda $r \geq 3$ se tiene que $\mu_r = \{r - 2, 1, 1\}$ y

$$V(\mu)_r = V(1, 1)_r = V_{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array}}_{r-2}}.$$

- Si $d = 2$ y $\mu = \{2\}$, entonces para toda $r \geq 3$ se tiene que $\mu_r = \{r - 2, 2\}$ y

$$V(\mu)_r = V(2)_r = V_{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array}}_{r-2}}.$$

En el caso extremo $d = 0$, la partición $\mu = \{0\}$ da lugar a la partición $\mu[r] = \{r\}$ de r y $V(0)_r$ denota la representación irreducible de Σ_r asociada a dicha partición, la cual es la representación trivial de Σ_r . Este es el único caso en que permitiremos a 0 en las particiones.

Observación: Sea $\alpha = \{\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k\}$ una partición de r , pongamos $d = \sum_{j=2}^k \alpha_j$ y consideremos la partición $\mu = \{\alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k\}$ de d . Entonces se tiene que $\mu[r] = \alpha$ y por lo tanto toda partición α de r es de la forma $\mu[r]$ para alguna partición μ de algún $d \leq r$. Así toda representación irreducible V_α de Σ_r es la forma $V(\mu)_r$.

El propósito de este capítulo es mostrar que al fijar i y m las representaciones $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$ de Σ_r admiten una expresión como suma de representaciones irreducibles del siguiente tipo:

$$H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\mu} V(\mu)_r^{\oplus c_{\mu,r}}$$

y que para $r \gg i$ las multiplicidades $c_{\mu,r}$ no depende de r .

Recordemos que por la Proposición 1.12 se tiene el isomorfismo de espacios vectoriales:

$$H^*F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$$

donde la suma corre sobre todas las particiones \mathcal{P} del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$ y $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ es el submódulo generado por todos los monomios admisibles cuya partición asociada es \mathcal{P} .

Una pregunta que surge de manera natural es, ¿qué sumandos $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ contribuyen a $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$?. Por el Lema 1.15 (c) sabemos que son aquellos $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ cuya partición \mathcal{P} tiene $r - i$ componentes, luego por el teorema 1.13 se tiene:

Proposición 2.1. *Existe un isomorfismo de Σ_r -módulos:*

$$H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\substack{\mu \vdash r \\ |\pi_0(\mu)|=r-i}} \text{Ind}_{\Sigma(\mathcal{L}_\mu)}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$$

donde \mathcal{L}_μ es la mínima partición de $\{1, 2, \dots, r\}$ que realiza a μ y la suma corre sobre todas las particiones μ de r que tienen $r - i$ componentes.

Nos enfocaremos en analizar la descomposición anterior para obtener más información acerca de las representaciones irreducibles que aparecen en $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$. Esto nos lleva a analizar 3 elementos principales que aparecen en

$$\bigoplus_{\substack{\mu \vdash r \\ |\pi_0(\mu)|=r-i}} \text{Ind}_{\Sigma(\mathcal{L}_\mu)}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$$

las particiones μ de r , los submódulos $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$ y el conjunto indexante de la suma.

- **Los submódulos.** Se va a mostrar que al agregar una caja (al final) del diagrama de Young asociado a μ , estos submódulos $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$ preservan su forma. Esto es que si α es una partición que se obtiene al agregar cajas (al final) de la primer columna de μ , entonces los submódulos $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$ y $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\alpha, m)$ son isomorfos.

Dados dos naturales $r < n$ y una partición $\mu = \{\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell\} \vdash r$, se define una partición de n de la manera siguiente:

$$\mu\langle n \rangle := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-r}\}.$$

Similarmente, si \mathcal{P} es una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$, se define una partición de $\{1, 2, \dots, n\}$ por:

$$\mathcal{P}\langle n \rangle = \mathcal{P} \cup \{\{r+1\}, \dots, \{n\}\}.$$

Notemos que si μ es una partición de r , entonces $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m) \subset H^*F(\mathbb{R}^m, r)$,

mientras que $\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\mu\langle r+1 \rangle}, m) \subset H^* F(\mathbb{R}^m, r+1)$. Notemos también que las gráficas asociadas a monomios admisibles en $\mathbf{T}(\mathcal{P}\langle r+1 \rangle, m)$ son las mismas que las gráficas asociadas a monomios admisibles en $\mathbf{T}(\mathcal{P}, m)$ más un vértice aislado extra. Por lo tanto:

Proposición 2.2. *Existe un isomorfismo de $\Sigma\langle \mathcal{L}_\mu \rangle$ -módulos:*

$$\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m) \cong \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\mu\langle r+1 \rangle}, m).$$

- **Las particiones.** A continuación mostraremos que para $r \geq 2i$ las particiones μ de r con $r - i$ componentes están en correspondencia biyectiva con las particiones ν de $r + 1$ con $(r + 1) - i$ componentes.

Proposición 2.3. *Sea $\nu \vdash r + 1$ con $(r + 1) - i$ componentes, tal que $r \geq 2i$. Entonces existe una partición $\mu \vdash r$ tal que $\nu = \mu\langle r + 1 \rangle$. En otras palabras, una tal partición ν debe terminar en al menos un 1.*

En términos de diagramas de Young, todo diagrama con $r + 1$ cajas y $(r + 1) - i$ filas debe tener una única caja en su última fila.

Demostración. Supóngase lo contrario, es decir, la última fila del diagrama de Young asociado a ν tiene al menos dos cajas. Entonces cada una de las filas superiores debe contener el menos dos cajas. Por lo tanto el número de cajas es al menos

$$2(r + 1 - i) = r + 2 + (r - 2i) \geq r + 2.$$

□

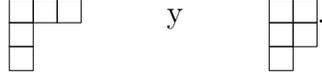
Ejemplos:

- Si $i = 1$ y $r = 2i = 2$, entonces la única partición de $r + 1 = 3$ con $(r + 1) - i = 2$ filas es



Vemos que este diagrama contiene una única caja al final.

- Si $i = 2$ y $r = 2i = 4$, entonces las particiones de $r+1 = 5$ con $(r+1)-i = 3$ filas son



De nuevo estos diagramas contienen una sola caja al final.

Ahora bien, para i fijo y $r \geq 2i$, las proposiciones 2.1, 2.2 y 2.3 implican que:

$$\begin{aligned}
H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r+1) &\cong \bigoplus_{\substack{\nu \vdash r+1 \\ |\pi_0(\nu)|=(r+1)-i}} \text{Ind}_{\Sigma\langle\mathcal{L}_\nu\rangle}^{\Sigma_{r+1}} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\nu, m) \\
&\cong \bigoplus_{\substack{\mu \vdash r \\ |\pi_0(\mu)|=r-i}} \text{Ind}_{\Sigma\langle\mathcal{L}_{\mu\langle r+1\rangle}\rangle}^{\Sigma_{r+1}} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\mu\langle r+1\rangle}, m) \\
&\cong \bigoplus_{\substack{\mu \vdash r \\ |\pi_0(\mu)|=r-i}} \text{Ind}_{\Sigma\langle\mathcal{L}_{\mu\langle r+1\rangle}\rangle}^{\Sigma_{r+1}} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)
\end{aligned}$$

donde esta última expresión es completamente similar a:

$$H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\substack{\mu \vdash r \\ |\pi_0(\mu)|=r-i}} \text{Ind}_{\Sigma\langle\mathcal{L}_\mu\rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m).$$

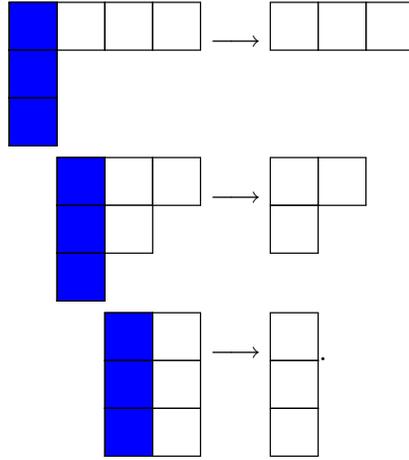
- **El conjunto de índices** en la suma no depende de r .

Proposición 2.4. *Si $r \geq 2i$, entonces las particiones $\mu \vdash r$ con $r-i$ componentes están en correspondencia biyectiva con las particiones $\nu \vdash i$. Una biyección está dada por eliminar la primer columna de μ .*

Dada una partición $\nu \vdash i$, denotamos por $\bar{\nu}$ la partición de r en $r-i$ filas que le corresponde bajo la biyección inversa.

Ejemplo: Si $i = 3$ y $r = 6$, entonces tenemos la biyección:

$$\{\mu \vdash r \text{ y } \pi_0(\mu) = r-i\} \longrightarrow \{\nu \vdash i\}$$



Usando la Proposición anterior, obtenemos la siguiente descomposición:

Proposición 2.5. Para $r \geq 2i$, existe un isomorfismo de Σ_r -módulos:

$$H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\nu \vdash i} \text{Ind}_{\Sigma_{\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}(r)} \rangle}}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m)$$

donde la suma corre por todas las particiones ν de i .

Cabe recalcar que $\bar{\nu}$ es la partición de $2i$ que se obtiene de ν añadiendo una columna de tamaño de i al inicio de su diagrama de Young.

En la siguiente sección se mostrará que para $\nu \vdash i$ y su partición asociada $\bar{\nu} \vdash r$ (con $r - i$ filas), la sucesión de representaciones

$$\{\text{Ind}_{\Sigma_{\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}(r)} \rangle}}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m)\}_r$$

se estabiliza. En el resto de esta sección se muestran algunos cálculos con $i = 1$.

Consideremos las funciones de clase $\chi_i : \Sigma_r \rightarrow \mathbb{Z}$ dadas por

$$\chi_i(\sigma) = \begin{array}{l} \text{Número de } i\text{-ciclos en la descomposición} \\ \text{de } \sigma \text{ como producto de ciclos disjuntos.} \end{array}$$

En particular, $\chi_1(\sigma)$ es el número de elementos fijos de la permutación $\sigma : \{1, 2, \dots, r\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, r\}$.

Teorema 2.6. *El carácter de la representación $H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r)$ está dado por:*

$$\chi = \frac{\chi_1(\chi_1 - 1)}{2} + (-1)^m \chi_2$$

y es independiente de r .

Demostración. Recordemos que $\forall \sigma \in \Sigma_r$ el homomorfismo inducido $\sigma^* : H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ está dado en la base $\{A_{ij}\}_{1 \leq j < i \leq r}$ por

$$\sigma^*(A_{ij}) = \begin{cases} A_{\sigma(i)\sigma(j)} & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j), \\ (-1)^m A_{\sigma(j)\sigma(i)} & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j). \end{cases}$$

Por lo tanto $\sigma^*(A_{i,j}) = \pm A_{i',j'}$. Luego, para calcular $\chi(\sigma) = \text{tr}(\sigma^*)$ hay que identificar los elementos A_{ij} tales que $\sigma^*(A_{i,j}) = \pm A_{i,j}$.

Notemos que $\sigma^*(A_{ij}) = \pm A_{ij}$ si sólo si:

- σ fija a i y j . En tal caso $\sigma^*(A_{ij}) = A_{ij}$. O bien:
- σ intercambia a i y j . Esto es, si la descomposición de σ en ciclos disjuntos contiene a la transposición $(i j)$, en cuyo caso $\sigma^*(A_{ij}) = (-1)^m A_{ij}$. Notemos que además el número de parejas (i, j) con $i > j$ tales que $\sigma(i) = i$ y $\sigma(j) = j$ es igual a $\frac{\chi_1(\sigma)(\chi_1(\sigma)-1)}{2}$. De aquí se sigue que

$$\text{tr}(\sigma^*) = \frac{\chi_1(\sigma)(\chi_1(\sigma) - 1)}{2} + (-1)^m \chi_2(\sigma).$$

□

Este resultado es interesante en si mismo pues implica que el carácter de $H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r)$ se puede calcular con un polinomio que no depende de r . Más precisamente, nos afir-

ma que existen dos polinomios $p, q \in \mathbb{Q}[\chi_1, \chi_2]$

$$p(\chi_1, \chi_2) = \frac{\chi_1(\chi_1 - 1)}{2} + \chi_2$$

$$q(\chi_1, \chi_2) = \frac{\chi_1(\chi_1 - 1)}{2} - \chi_2$$

tales que para $r \geq 2$ se tiene que

$$\chi = \begin{cases} p(\chi_1, \chi_2) & \text{si } m \text{ par,} \\ q(\chi_1, \chi_2) & \text{si } m \text{ impar.} \end{cases}$$

Teorema 2.7. Si $r \geq 4$, entonces la descomposición de $H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r)$ como suma de representaciones irreducibles del grupo simétrico Σ_r para m par está dada por:

$$H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \cong V(0)_r \oplus V(1)_r \oplus V(2)_r = V \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_r \oplus V \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \end{array}}_{r-1} \oplus V \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}}_{r-2}$$

y si m es impar por:

$$H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \cong V(1)_r \oplus V(1, 1)_r = V \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \end{array}}_{r-1} \oplus V \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}}_{r-2}$$

Demostración. Si m es par, por el Corolario 1.19, tenemos una copia de la representación trivial $V_r(0)$ en dimensión de cohomología $m - 1$. Más aún, esta copia de la representación trivial está dada por el submódulo generado por el elemento:

$$\sum_{1 \leq j < i \leq r} A_{ij}.$$

Por otro lado, por el teorema A.6 del apéndice conocemos los caracteres de las representaciones irreducibles $V(1)_r$, $V(2)_r$ y $V(1, 1)_r$ del grupo simétrico Σ_r . Al sumar

los caracteres obtenemos:

$$\begin{aligned}\chi_{V(0)_r \oplus V(1)_r \oplus V(2)_r} &= 1 + \chi_1 - 1 + \frac{\chi_1(\chi_1 - 3)}{2} + \chi_2 \\ &= \frac{\chi_1(\chi_1 - 1)}{2} + \chi_2.\end{aligned}$$

Ahora se procede de manera similar para m impar:

$$\begin{aligned}\chi_{V(1)_r \oplus V(1,1)_r} &= \chi_1 - 1 + \frac{\chi_1(\chi_1 - 3)}{2} - \chi_2 + 1 \\ &= \frac{\chi_1(\chi_1 - 1)}{2} - \chi_2.\end{aligned}$$

De aquí se concluye que las representaciones con isomorfismos en cada caso pues el carácter determina unívocamente a cada representación. \square

2.2. Estabilidad de representaciones

En esta sección se van a formalizar las propiedades de estabilidad observadas en $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$, sección 2 de [5]. Se van a definir las representaciones $\text{Ind}_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} V \boxtimes \mathbb{Q}$ que juegan un papel muy importante en esta teoría pues son estas representaciones las que proveen la estabilidad de las representaciones $\{H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$.

Cabe señalar que en este trabajo solo se trabajarán con representaciones finitas sobre \mathbb{Q} .

Definición. Sea V_r una sucesión de Σ_r -representaciones, provistas con transformaciones lineales $\phi_r : V_r \longrightarrow V_{r+1}$ tales que el siguiente diagrama conmuta $\forall g \in \Sigma_r$:

$$\begin{array}{ccc} V_r & \xrightarrow{\phi_r} & V_{r+1} \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ V_r & \xrightarrow{\phi_r} & V_{r+1}. \end{array}$$

En tal caso diremos que $\{V_r, \phi_r\}_r$ es una **sucesión de representaciones consistente**.

Ejemplo: Para $i \geq 1$ y $m \geq 2$ fijos consideremos la sucesión de representaciones $\{H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$. Notemos que la proyección en las primeras r coordenadas:

$$\pi_r : F(\mathbb{R}^m, r+1) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, r)$$

$$(x_1, \dots, x_{r+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$$

satisface $\sigma \circ \pi_r = \pi_r \circ \sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma_r$, donde σ actúa en $F(\mathbb{R}^m, r+1)$ permutando las primeras r coordenadas. Por lo tanto, al pasar a cohomología se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\pi_r^*} & H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r+1) \\ \downarrow \sigma^* & & \downarrow \sigma^* \\ H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r) & \xrightarrow{\pi_r^*} & H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r+1). \end{array}$$

De esta manera la sucesión $\{H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$ es consistente.

Otro ejemplo que resulta importante en este trabajo es el siguiente:

Ejemplo: Fijemos un subgrupo H del grupo simétrico Σ_k y una representación V de H . Para $r \geq k$ podemos extender la acción de H en V al subgrupo $H \times \Sigma_{r-k} \subset \Sigma_r$ haciendo actuar Σ_{r-k} trivialmente. Esta representación de $H \times \Sigma_{r-k}$ se denotará por $V \boxtimes \mathbb{Q}$. Finalmente, consideremos la representación inducida

$$\text{Ind}_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (V \boxtimes \mathbb{Q})$$

pensada como representación de Σ_r .

Notemos que $V \boxtimes \mathbb{Q}$ no es más que el producto tensorial exterior de la represen-

tación V de H con la representación \mathbb{Q} de Σ_{r-k} .

Proposición 2.8. *La sucesión de representaciones $\{Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V \boxtimes \mathbb{Q})\}_r$ es consistente.*

Demostración. Consideremos la inclusión canónica

$$\mathbb{Q}[\Sigma_r] \xrightarrow{\iota_r} \mathbb{Q}[\Sigma_{r+1}]$$

que da lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[\Sigma_r] \times (V \boxtimes \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathbb{Q}[\Sigma_r] \otimes_{\mathbb{Q}[H \times \Sigma_{r-k}]} (V \boxtimes \mathbb{Q}) \\ & \searrow \iota_r \otimes id & \downarrow \overline{\iota_r \otimes id} \\ & & \mathbb{Q}[\Sigma_{r+1}] \otimes_{\mathbb{Q}[H \times \Sigma_{(r+1)-k}]} (V \boxtimes \mathbb{Q}). \end{array}$$

Sabiendo que $Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V \boxtimes \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\Sigma_r] \otimes_{\mathbb{Q}[H \times \Sigma_{r-k}]} (V \boxtimes \mathbb{Q})$ (ver apéndice A) tomamos $\phi_r = \overline{\iota_r \otimes id}$. La conmutatividad de ϕ_r con la acción de Σ_r se sigue de que dicha acción en tensores elementales está dada por:

$$g(a \otimes b) = (ga) \otimes b.$$

□

Otros ejemplos de sucesiones de representaciones consistentes son $V_r = \mathbb{Q}[\Sigma_r]$, $\mathbb{Q}^r = \mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}$ y las sucesiones constantes dadas por la representación trivial \mathbb{Q} o la representación signo \mathbb{Q}^- .

Definición (Estabilidad de representaciones). *Sea $\{V_r\}_r$ una sucesión de Σ_r -representaciones consistente. La sucesión $\{V_r\}_r$ cumple con la **estabilidad de representaciones** si para r suficientemente grande se satisfacen cada una de las siguientes condiciones:*

1. Las transformaciones lineales $\phi_r : V_r \rightarrow V_{r+1}$ son inyectivas.
2. El espacio vectorial generado por la Σ_{r+1} -órbita de $\phi_r(V_r)$ es igual a V_{r+1} .

3. Al descomponer V_r en suma de representaciones irreducibles:

$$V_r = \bigoplus_{\lambda} V(\lambda)_r^{\oplus c_{\lambda,r}},$$

$\forall \lambda$ las multiplicidades $c_{\lambda,r}$ son eventualmente independientes de r .

Ejemplo: Consideremos la sucesión de representaciones $V_r = \mathbb{Q}^r$ donde el grupo Σ_r actúa permutando las coordenadas y los morfismos

$$\phi_r : \mathbb{Q}^r \longrightarrow \mathbb{Q}^{r+1}$$

dados por la inclusión canónica de \mathbb{Q}^r en las primeras r coordenadas de \mathbb{Q}^{r+1} . Al hacer actuar la transposición $(1 j)$ en el elemento básico e_1 de \mathbb{Q}^r obtenemos el básico e_j de \mathbb{Q}^{r+1} para toda $j = 1, 2, 3, \dots, r + 1$. La descomposición de cada V_r en suma de irreducibles se muestra a continuación:

$$V(0)_1 \xrightarrow{\phi_1} V(0)_2 \oplus V(1)_2 \xrightarrow{\phi_2} V(0)_3 \oplus V(1)_3 \xrightarrow{\phi_3} \dots \xrightarrow{\phi_{r-1}} V(0)_r \oplus V(1)_r \xrightarrow{\phi_r} \dots$$

Vemos que se cumple la estabilidad de representaciones para $\{\mathbb{Q}^r, \phi_r\}$.

No Ejemplo: Consideremos la sucesión de representaciones regulares

$$\{\mathbb{Q}[\Sigma_r]\}_r$$

con transformaciones lineales

$$\phi_r : \mathbb{Q}[\Sigma_r] \longrightarrow \mathbb{Q}[\Sigma_{r+1}]$$

dadas por la inclusión canónica de Σ_r en Σ_{r+1} . Es claro que esta sucesión de representaciones es consistente y que satisface las primeras dos condiciones de la definición para estabilidad de representaciones. Sin embargo, no satisface la tercera condición. Se puede mostrar que la representación regular $\mathbb{Q}[\Sigma_r]$ contiene una copia de cada representación irreducible V_{λ} de Σ_r con multiplicidad igual a la dimensión de V_{λ} , en particular contiene la representación $V(1)_r$ con multiplicidad $r - 1$. Este hecho

también se puede apreciar en los ejemplos de la sección 1.5 ya que $H^*F(\mathbb{R}^m, r)$ con m impar es la representación regular.

Como otro ejemplo de estabilidad de representaciones tenemos:

Teorema 2.9. *La sucesión $\{H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$ cumple con la estabilidad de representaciones.*

Demostración. Los morfismos inducidos $\pi_r^* : H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \longrightarrow H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r+1)$ por las proyecciones en las primeras r coordenadas son inyectivos $\forall r$. Para la segunda condición basta notar que

$$A_{r+1j} = (1j)^*(2r+1)^*A_{21}.$$

La tercera condición se sigue del teorema 2.7 ya que para $r \geq 4$

$$H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r) \cong \begin{cases} V(1)_r \oplus V(1, 1)_r & \text{si } m \text{ es par,} \\ V(0)_r \oplus V(1)_r \oplus V(2)_r & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

□

Como una primera aplicación podemos apreciar que la estabilidad de representaciones implica estabilidad homológica clásica, más precisamente:

Teorema 2.10. *Supongamos que para toda r tenemos un recubrimiento dado por*

$$\Sigma_r \hookrightarrow \tilde{X}_r \longrightarrow X_r.$$

Si la sucesión $\{H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})\}_r$ cumple con la estabilidad de representaciones (para i fijo), entonces la sucesión $\{X_r\}_r$ es (co)homológicamente estable, es decir, existe $N(i) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(X_{N(i)}; \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X_r; \mathbb{Q})$$

para todo $r \geq N(i)$.

Demostración. Para toda r , usando el transfer se obtiene un isomorfismo

$$H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})^{\Sigma_r} \cong H^i(X_r; \mathbb{Q})$$

donde $H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})^{\Sigma_r}$ es el subespacio de elementos invariantes de $H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})$ bajo la acción de Σ_r (ver [14]). Tomando $V_r = H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})$; se sigue que

$$H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})^{\Sigma_r} = V(0)_r^{\oplus c_{0,r}}$$

es decir, $H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})^{\Sigma_r}$ es el sumando asociado a la representación trivial de Σ_r en $H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})$. Como $\{H^i(\tilde{X}_r; \mathbb{Q})\}_r$ cumple con la estabilidad de representaciones, entonces la multiplicidad $c_{0,r}$ es eventualmente independiente de r . Por lo tanto

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(X_r; \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\tilde{X}; \mathbb{Q})^{\Sigma_r} = c_{0,r}.$$

□

Ejemplo: El espacio de órbitas de $F(\mathbb{R}^m, r)$ bajo la acción libre de Σ_r , $B(\mathbb{R}^m, r) = F(\mathbb{R}^m, r)/\Sigma_r$, se conoce como el espacio de configuraciones desordenadas de r puntos en \mathbb{R}^m . En este caso, la proyección canónica es un recubrimiento de la forma

$$\Sigma_r \hookrightarrow F(\mathbb{R}^m, r) \twoheadrightarrow B(\mathbb{R}^m, r).$$

Así, por el teorema anterior la sucesión de espacios $\{B(\mathbb{R}^m, r)\}_r$ es (co)homológicamente estable.

2.3. Estabilidad de representaciones para la sucesión $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)$

El objetivo principal de esta sección es mostrar que para i fija la sucesión

$$\{H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$$

cumple con la estabilidad de representaciones, para lo cual probaremos primero que la sucesión de representaciones inducidas $\{Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V \boxtimes \mathbb{Q})\}_r$ es estable por representaciones.

Teorema 2.11. *Dado $k \geq 1$ fijo, la sucesión de representaciones inducidas $\{Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V \boxtimes \mathbb{Q})\}_r$ cumple con la estabilidad de representaciones y se estabiliza para $r \geq 2k$.*

Para este propósito y basándonos en [15] vamos a verificar únicamente la tercera condición para la sucesión $\{Ind_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V_\lambda \boxtimes \mathbb{Q})\}_r$ donde $\lambda \vdash k$ y posteriormente para la sucesión $\{Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V \boxtimes \mathbb{Q})\}_r$. Las primeras dos condiciones se verifican de manera rutinaria.

1. Recordemos que si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ es una partición de k , entonces la representación irreducible de Σ_k asociada a λ , de acuerdo a la sección 2.1, es $V(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\ell)_k$. Si $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_\ell\}$ es una partición cualquiera, denotamos por $|\mu|$ a la suma $\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j$.

La regla de Pieri (teorema A.8 del apéndice A.3) nos da la siguiente descomposición:

$$Ind_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r}(V_\lambda \boxtimes \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mu} V(\mu)_r$$

donde la suma corre sobre todas las particiones $\mu[r] \vdash r$ cuyo diagrama de Young asociado a $\mu[r]$ se obtiene del diagrama de Young de λ agregando $r - k$ cajas a $r - k$ columnas distintas.

Lema 2.12. *Si $2k \leq r$, entonces tenemos la descomposición:*

$$Ind_{\Sigma_k \times \Sigma_{(r+1)-k}}^{\Sigma_{r+1}}(V_\lambda \boxtimes \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mu} V(\mu)_{r+1}$$

donde la suma corre sobre todas las particiones $\mu[r] \vdash r$ cuyo diagrama de Young asociado a $\mu[r]$ se obtiene del diagrama de Young de λ agregando $r - k$ cajas a $r - k$ columnas distintas.

Demostración. Consideremos la descomposición dada por la regla de Pieri

$$\text{Ind}_{\Sigma_k \times \Sigma_{(r+1)-k}}^{\Sigma_r} (V_\lambda \boxtimes \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\eta} V(\eta)_{r+1}$$

donde la suma corre sobre todas las particiones $\eta[r+1]$ cuyo diagrama de Young se obtiene a partir del diagrama de Young de λ agregando $(r+1) - k$ cajas a $(r+1) - k$ columnas distintas.

Si μ es una partición tal que el diagrama de Young asociado a $\mu[r]$ se obtiene del diagrama de Young asociado a λ agregando $r - k$ cajas a $r - k$ columnas distintas, entonces $V(\mu)_{r+1}$ va a aparecer en $\bigoplus_{\eta} V(\eta)_{r+1}$.

Recíprocamente, sea α una partición tal que $V(\alpha)_{r+1}$ aparece en $\bigoplus_{\eta} V(\eta)_{r+1}$. Como $\lambda_1 \leq k \leq r - k < r + 1 - k$, entonces sumando $k + |\alpha|$ en ambos extremos obtenemos

$$\lambda_1 + k + |\alpha| < r + 1 - |\alpha|$$

pero como $\alpha_1 \leq |\alpha|$, entonces obtenemos $\alpha_1 < (r + 1) - |\alpha|$ y por tanto

$$\alpha_1 \leq r - |\alpha|.$$

Entonces tiene sentido considerar $V(\alpha)_r$ y además dicha representación aparece en $\bigoplus_{\mu \in A} V(\mu)_r$. \square

2. Consideremos la descomposición en irreducibles

$$\text{Ind}_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (V \boxtimes \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mu \in A} V(\mu)_r^{\oplus c_{\mu,r}}.$$

Proposición 2.13. *Si $2k \leq r$, entonces*

$$\text{Ind}_{H \times \Sigma_{(r+1)-k}}^{\Sigma_{r+1}} (V \boxtimes \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mu \in A} V(\mu)_{r+1}^{\oplus c_{\mu,r}}.$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (V \boxtimes \mathbb{Q}) &= \text{Ind}_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} \left(\text{Ind}_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}} (V \boxtimes \mathbb{Q}) \right) \\ &= \text{Ind}_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} \left(\left(\text{Ind}_H^{\Sigma_k} V \right) \boxtimes \mathbb{Q} \right). \end{aligned}$$

Entonces basta aplicar el Lema 2.12 a cada parte irreducible de la representación $\text{Ind}_H^{\Sigma_k} V$. \square

Ahora estamos en posición de demostrar el resultado principal del capítulo:

Teorema 2.14 (Estabilidad de representaciones de las configuraciones). *Para toda $i \geq 0$, la sucesión de Σ_r -representaciones $\{H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$ cumple con la estabilidad de representaciones y se estabiliza para $r \geq 4i$.*

Demostración. Por la Proposición 2.5 sabemos que se tiene a la descomposición

$$H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\nu \vdash i} \text{Ind}_{\Sigma\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}(r)} \rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m)$$

y por lo tanto basta analizar cada una de las sucesiones de representaciones inducidas

$$\{\text{Ind}_{\Sigma\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}(r)} \rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m)\}.$$

Los Lemas 1.4 y 1.6 nos dicen que el grupo $\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle$ tiene la descomposición:

$$\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle \cong \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle 1 \rangle \times \cdots \times \Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle |S| \rangle \quad \text{página 19}$$

con

$$\Sigma\langle \mathcal{P} \rangle\langle j \rangle \cong \Sigma_{e_j(\mathcal{P})} \wr \Sigma_j. \quad \text{página 20}$$

En particular para $\mathcal{P} = \mathcal{L}_{\bar{\nu}}$ y $j = 1$, se tiene

$$\Sigma\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}} \rangle\langle 1 \rangle \cong \Sigma_{e_1(\mathcal{L}_{\bar{\nu}})} \wr \Sigma_1 = \Sigma_{e_1(\mathcal{L}_{\bar{\nu}})} = \Sigma_{e_1(\bar{\nu})}$$

y por lo tanto se tiene la descomposición

$$\Sigma\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}} \rangle \cong (\Sigma\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}} \rangle\langle 2 \rangle \times \cdots \times \Sigma\langle \mathcal{L}_{\bar{\nu}} \rangle\langle |S| \rangle) \times \Sigma_{e_1(\bar{\nu})}.$$

Si ponemos $H := \Sigma\langle\mathcal{L}_{\bar{\nu}}\rangle\langle 2 \rangle \times \cdots \times \Sigma\langle\mathcal{L}_{\bar{\nu}}\rangle\langle |S| \rangle$, $k := r - e_1(\bar{\nu})$, entonces

$$\Sigma\langle\mathcal{L}_{\bar{\nu}}\rangle = H \times \Sigma_{r-k}.$$

Por la forma en que están definidos los subespacios $\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m)$, se sigue que el grupo Σ_{r-k} actúa trivialmente pues dicho grupo actúa sobre subíndices que no aparecen en los monomios A_I .

Como $\bar{\nu}\langle r+1 \rangle$ se obtiene a partir de $\bar{\nu}$ agregando un 1, entonces $e_1(\bar{\nu}\langle r+1 \rangle) = e_1(\bar{\nu}) + 1$ y además

$$\Sigma\langle\mathcal{L}_{\bar{\nu}\langle r+1 \rangle}\rangle = H \times \Sigma_{r+1-k}.$$

Por otro lado, por el teorema 2.2 tenemos que

$$\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m) \cong \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}\langle r+1 \rangle}, m).$$

Este isomorfismo implica, entre otras cosas, que basta fijarnos en la partición $\beta(\bar{\nu})$ que se obtiene a partir de la partición $\bar{\nu}$ al quitar todos los 1's. Lo anterior se resume en que

$$\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m) \cong \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\beta(\bar{\nu})}, m)$$

y por lo tanto las representaciones en cuestión toman la forma

$$Ind_{\Sigma\langle\mathcal{L}_{\bar{\nu}}\rangle}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m) = Ind_{H \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\beta(\bar{\nu})}, m) \boxtimes \mathbb{Q}).$$

Estas sucesiones de representaciones, según el teorema 2.11, cumplen con la estabilidad de representaciones y se estabilizan para $r \geq 2k$. Ahora solo falta calcular el valor de k que se definió como $k = r - e_1(\bar{\nu})$. Notemos que $\beta(\bar{\nu}) \vdash k$. El máximo valor que puede tomar k es cuando

$$\beta(\bar{\nu}) = \{2, 2, \dots, 2\}.$$

En este caso $k = 2n$ donde n es el número de filas de $\beta(\bar{\nu})$. Como $\bar{\nu}$ es una partición con $r - i$ filas, entonces

$$\begin{aligned}
n + e_1(\bar{\nu}) &= r - i \\
n &= r - e_1(\bar{\nu}) - i = k - i \\
n &= 2n - i \\
n &= i
\end{aligned}$$

y por tanto $r \geq 4i$. □

2.4. Ejemplos

En la sección 2.1 se presentó la descripción explícita de las representaciones $H^{(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \forall r \geq 4$. En particular, si $m = 2$

$$H^1F(\mathbb{R}^2, r) \cong V(0)_r \oplus V(1)_r \oplus V(2)_r$$

para $r \geq 4$.

A continuación presentamos la descomposición para los casos $H^2F(\mathbb{R}^2, r)$ y $H^4F(\mathbb{R}^2, r)$ que aparecen en [10].

$$H^2F(\mathbb{R}^2, r) \cong V_r(1)^{\oplus 2} \oplus V_r(1, 1)^{\oplus 2} \oplus V_r(2)^{\oplus 2} \oplus V_r(2, 1)^{\oplus 2} \oplus V_r(3) \oplus V(3, 1)$$

para $r \geq 8$.

$$\begin{aligned}
H^4F(\mathbb{R}^2, r) &\cong V_r(1)^{\oplus 2} \oplus V_r(2)^{\oplus 6} \oplus V_r(1, 1)^{\oplus 6} \oplus V_r(3)^{\oplus 8} \oplus V_r(1, 1, 1)^{\oplus 9} \oplus V_r(2, 1)^{\oplus 16} \\
&\oplus V_r(4)^{\oplus 6} \oplus V_r(1, 1, 1, 1)^{\oplus 5} \oplus V_r(5)^{\oplus 2} \oplus V_r(2, 2)^{\oplus 12} \oplus V_r(3, 1)^{\oplus 19} \\
&\oplus V_r(2, 1, 1)^{\oplus 17} \oplus V_r(4, 1)^{\oplus 12} \oplus V_r(2, 1, 1, 1)^{\oplus 7} \oplus V_r(3, 2)^{\oplus 14} \oplus V_r(2, 2, 1)^{\oplus 10} \\
&\oplus V_r(5, 1)^{\oplus 3} \oplus V_r(3, 3)^{\oplus 4} \oplus V_r(3, 1, 1)^{\oplus 16} \oplus V_r(2, 2, 2)^{\oplus 2} \oplus V_r(4, 2)^{\oplus 7} \\
&\oplus V_r(4, 1, 1)^{\oplus 8} \oplus V_r(5, 2) \oplus V_r(2, 2, 1, 1)^{\oplus 2} \oplus V_r(3, 1, 1, 1)^{\oplus 5} \oplus V_r(5, 1, 1)^{\oplus 2} \\
&\oplus V_r(4, 3)^{\oplus 2} \oplus V_r(3, 2, 1)^{\oplus 9} \oplus V_r(4, 1, 1, 1)^{\oplus 2} \oplus V_r(3, 3, 1)^{\oplus 2} \oplus V_r(3, 2, 2)^{\oplus}
\end{aligned}$$

$$\oplus V_r(4, 2, 1)^{\oplus 3} \oplus V_r(3, 2, 1, 1) \oplus V_r(5, 1, 1, 1) \oplus V_r(4, 3, 1)$$

para $r \geq 16$.

No es difícil ver que conforme i aumenta estas descomposiciones para $H^i F(\mathbb{R}^2, r)$ crecen muy rápido. La descripción explícita de la descomposición estable para $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)$ continua siendo un problema abierto.

Capítulo 3

El punto de vista de los FI -módulos

En este capítulo se abordará la estabilidad de representaciones desde un punto de vista más conceptual que involucra a la teoría de categorías, en concreto, a la categoría de los FI -módulos. Nos basaremos en el trabajo de T. Church, J. S. Ellenberg y B. Farb [4].

Este punto de vista requiere de la estabilidad de representaciones uniforme que se obtiene al modificar la tercera condición de estabilidad de representaciones. Una vez desarrollada la teoría de los FI -módulos, la estabilidad uniforme por representaciones de $\{H^{(m-1)i}F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$ se traduce en encontrar una colección finita de elementos en la unión disjunta $\bigsqcup_r H^{(m-1)i}F(\mathbb{R}^m, r)$ tales que el FI -módulo generado por dichos elementos es igual al FI -módulos del que proviene la sucesión $\{H^{(m-1)i}F(\mathbb{R}^m, r)\}_r$. Usando este método se puede mostrar, de manera más general la estabilidad de representaciones uniforme de $\{H^iF(M, r)\}_r$ donde M es una variedad orientable y conexa de dimensión al menos 2. ver [4].

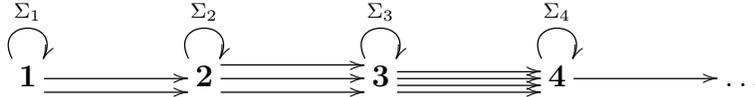
3.1. FI -módulos

Sea FI la categoría cuyos objetos son subconjuntos finitos de \mathbb{N} y sus morfismos son funciones inyectivas. Esta categoría es equivalente a la categoría cuyos objetos son $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ y sus morfismos son funciones inyectivas. El conjunto de

endomorfismos de \mathbf{n} resulta ser

$$\text{End}_{FI}(\mathbf{n}) = \Sigma_n.$$

Al pensar en la categoría FI , se debe tener en mente el siguiente diagrama

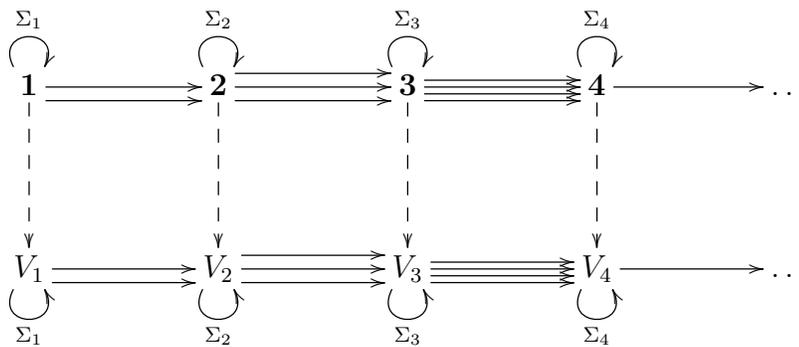


Definición. La categoría de los FI -módulos es la categoría cuyos objetos son los funtores $V : FI \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$, de la categoría FI a la categoría de los espacios vectoriales sobre \mathbb{Q} , y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre funtores.

Para especificar un FI -módulo V es necesario dar:

- $\forall n$ un \mathbb{Q} -espacio vectorial $V(\mathbf{n})$, que también denotaremos por V_n
- y \forall morfismo $f : \mathbf{n} \hookrightarrow \mathbf{m}$ una transformación lineal $V(f) : V_n \rightarrow V_m$.

Al pensar en un FI -módulo debemos tener en mente un diagrama como el siguiente:



Para todo FI -módulo V , el grupo de endomorfismos $\text{End}_{FI}(\mathbf{r}) = \Sigma_r$ actúa en V_r y por lo tanto podemos considerar a V_r como una Σ_r -representación. Más aún, las inyecciones canónicas $f : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{r} + \mathbf{1}$ inducen transformaciones lineales ϕ_r que son Σ_r -equivariantes. En consecuencia:

Lema 3.1. *Si V es un FI -módulo, entonces $\forall r$ existe una transformación lineal*

$$\phi_r : V_r \longrightarrow V_{r+1}$$

tal que $\{V_r, \phi_r\}_r$ es una sucesión de representaciones consistente.

Ejemplo: Sea M una variedad conexa de $\dim M \geq 2$. Para i fijo la sucesión de representaciones consistente $\{H^i F(M, r), \phi_r\}_r$ donde $\phi_r : H^i F(M, r) \longrightarrow H^i F(M, r+1)$ es el morfismo inducido por la proyección en las primeras r coordenadas $\pi_r : F(M, r+1) \longrightarrow F(M, r)$ da lugar a un FI -módulo

$$\begin{aligned} H^i F(M, \bullet) : FI &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}} \\ \mathbf{r} &\longmapsto H^i F(M, r). \end{aligned}$$

Para definir V en morfismos notemos que el espacio de configuraciones admite la siguiente interpretación

$$F(M, r) = \{\alpha : \mathbf{r} \longrightarrow M \mid \alpha \text{ es inyectiva}\}.$$

Todo morfismo $f : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{n}$ da lugar a una función continua entre los espacios de configuraciones

$$\begin{aligned} \pi_f : F(M, n) &\longrightarrow F(M, r) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \circ f. \end{aligned}$$

Entonces definimos $H^i F(M, \bullet)$ en morfismos como sigue:

$$\mathbf{r} \xhookrightarrow{f} \mathbf{n} \quad \longmapsto \quad H^i F(M, r) \xrightarrow{\pi_f^*} H^i F(M, n).$$

No toda sucesión de representaciones consistente da lugar o proviene de un FI -módulo como se muestra en el siguiente no ejemplo.

No ejemplo: Consideremos la sucesión de representaciones consistente $\{\mathbb{Q}[\Sigma_r], \phi_r\}_r$ donde $\phi_r : \mathbb{Q}[\Sigma_r] \rightarrow \mathbb{Q}[\Sigma_{r+1}]$ está dada por la inclusión canónica de Σ_r en Σ_{r+1} . Supongamos que existe un FI -módulo V tal que $\forall r V_r = \mathbb{Q}[\Sigma_r]$ y que $\phi_r = V(\iota_r)$ donde $\iota_r : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{r}+1$ es la inclusión canónica. Sea $\sigma \in \Sigma_{r+2}$ la transposición $\sigma = (r+1 \ r+2)$ y consideremos siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r} & \xrightarrow{\iota_{r+1} \circ \iota_r} & \mathbf{r}+2 \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbf{r} & \xrightarrow{\iota_{r+1} \circ \iota_r} & \mathbf{r}+2. \end{array}$$

Al aplicar V obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[\Sigma_r] & \xrightarrow{\phi_{r+1} \circ \phi_r} & \mathbb{Q}[\Sigma_{r+2}] \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{Q}[\Sigma_r] & \xrightarrow{\phi_{r+1} \circ \phi_r} & \mathbb{Q}[\Sigma_{r+2}]. \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama anterior implica que σ actúa trivialmente en elementos de Σ_{r+2} que dejen fijo al conjunto $\{r+1, r+2\}$ lo cual es falso.

Otro ejemplo muy importante de FI -módulo es el siguiente.

Ejemplo: Sea $k \geq 1$ fijo. Definimos el FI -módulo $\mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, -)]$ como sigue:

- En objetos: $\mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, -)](\mathbf{r}) = \mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{r})]$.
- En morfismos: una inclusión $f : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{n}$ induce la transformación lineal

$$\mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, f)] : \mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{r})] \rightarrow \mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{n})]$$

$$g \mapsto f \circ g.$$

Una descripción alternativa, como veremos en el Teorema 3.2, del *FI*-módulo $\mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, -)]$ es la siguiente.

Ejemplo: Para $k \geq 1$ fijo y W una representación de Σ_k , definimos el *FI*-módulo $M(W)$ como:

- En objetos: $M(W)_r = \text{Ind}_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (W \boxtimes \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\Sigma_r] \otimes_{\mathbb{Q}[\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}]} (W \boxtimes \mathbb{Q})$.

Antes de definir $M(W)$ en morfismo notemos que toda inyección $f : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{n}$ se puede escribir como

$$f = \sigma \circ \iota$$

donde $\sigma \in \Sigma_n$ y $\iota : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{n}$ es la inclusión canónica. Esta descomposición no es única, sin embargo, si $\sigma \circ \iota = f = \sigma' \circ \iota$, entonces $\sigma' \sigma^{-1} = \tau$ donde $\tau \in \Sigma_{n-r}$.

- En morfismos: una inclusión $f : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{n}$ induce la transformación lineal

$$M(W)(f) : M(W)_r \longrightarrow M(W)_n$$

que evaluado en tensores elementales toma la forma

$$a \otimes b \longmapsto (\sigma \cdot a) \otimes b$$

donde $f = \sigma \circ \iota$ y a se piensa como una permutación en Σ_n mediante la inclusión canónica $\Sigma_r \subset \Sigma_n$.

Si $W = \mathbb{Q}[\Sigma_k]$, entonces denotamos al *FI*-módulo $M(\mathbb{Q}[\Sigma_k])$ por $M(k)$.

Teorema 3.2. *Dado k , el *FI*-módulo $\mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, -)]$ es isomorfo (en la categoría de los *FI*-módulos) al *FI*-módulo $M(k)$.*

Demostración. Los isomorfismos en este caso están dados por transformaciones naturales que además son isomorfismos. Para todo objeto $\mathbf{r} \in FI$ definimos la transformación lineal:

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{r}} : \mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{r})] &\longrightarrow M(k)_r \\ f &\longmapsto \sigma \otimes 1 \end{aligned}$$

donde $f = \sigma \circ \iota$. Se puede mostrar que η_r es isomorfismo y que además el siguiente diagrama conmuta para todo \mathbf{r} y \mathbf{n} con $r \leq n$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}[Hom_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{r})] & \xrightarrow{\mathbb{Q}[Hom_{FI}(\mathbf{k}, g)]} & \mathbb{Q}[Hom_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{n})] \\
 \downarrow \eta_r & & \downarrow \eta_n \\
 M(k)_r & \xrightarrow{M(k)(g)} & M(k)_n.
 \end{array}$$

□

3.2. FI -módulos finitamente generados

En esta sección se introducen dos conceptos muy importante que relacionan a los FI -módulos y las sucesiones consistentes del capítulo anterior: los FI -módulos finitamente generados y la estabilidad de representaciones uniforme. Veremos que un FI -módulo V es finitamente generado si y sólo si la sucesión de representaciones consistente $\{V_r, \phi_r\}_r$ satisface la estabilidad de representaciones uniforme.

Sea V un FI -módulo. Un **sub- FI -módulo** de V será un FI -módulo W tal que $W_r \subset V_r$ para todo r y además, para todo morfismo $f \in Hom_{FI}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 W_r & \xrightarrow{W(f)} & W_n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_r & \xrightarrow{V(f)} & V_n.
 \end{array}$$

En tal caso escribiremos $W \subset V$ para indicar que W es un sub- FI -módulo de V .

Definición. Sea V un FI -módulo y S un subconjunto de la unión disjunta $\bigsqcup_r V_r$. Definimos el FI -módulo generado por S como el mínimo FI -módulo que contiene a todo elemento de S . Dicho sub- FI -módulo será denotado por $span_V(S)$.

Lema 3.3. Sea V un FI -módulo.

- La elección de un elemento $v \in V_k$ determina un morfismo

$$M(k) \longrightarrow V.$$

La imagen de este morfismo es $\text{span}_V(v)$.

- Más generalmente, si S es la unión disjunta de conjuntos $S_r \subset V_r$, la imagen del morfismo natural

$$\bigoplus_r M(r)^{\oplus S_r} \longrightarrow V$$

es $\text{span}_V(S)$

Demostración. Como $M(k) \cong \mathbb{Q}[\text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, -)]$, entonces dado $v \in V_k$ definimos el morfismo:

$$M(k) \longrightarrow V$$

que evaluado en la función identidad de \mathbf{k} es

$$id_{\mathbf{k}} \in M(k)_k \longmapsto v \in V_k$$

y si $f \in M(k)_r$ es cualquier otra función inyectiva $f : \mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{r}$, entonces extendemos el morfismo anterior de manera natural como

$$f = f \circ id_{\mathbf{k}} \longmapsto V(f)(v).$$

Denotemos por W a la imagen de este morfismo, es decir, $W_{\mathbf{r}} = \text{im}(M(k)_r \longrightarrow V_r)$ para todo r . Claramente $v \in W_k$ y por tanto $\text{span}_V(v) \subset W$. También es claro que W_r es el subespacio vectorial de V_r generado por los elementos de la forma $V(f)(v)$ donde $f \in \text{Hom}_{FI}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ y por tanto $W \subset \text{span}_V(v)$. El caso general se demuestra de manera similar. \square

Definición. Diremos que un FI-módulo V es **finitamente generado** si existe una cantidad finita de elementos v_1, v_2, \dots, v_r tales que $v_i \in V_{m_i}$ y

$$\text{span}_V(v_1, v_2, \dots, v_r) = V.$$

Diremos que V es **finitamente generado en grado $\leq n$** si $m_i \leq n$ para todo i .

En la teoría de R -módulos (R un anillo conmutativo con 1), un R -módulo V es finitamente generado si existe un epimorfismo $R^{\oplus I} \longrightarrow V$ con $|I|$ finito. A los R -módulos de la forma $R^{\oplus I}$ con $|I|$ finito se les llama módulos libres finitamente generados. En este sentido, los FI -módulos $M(r)$ son los objetos libres en la categoría de los FI -módulos ya que satisfacen la siguiente propiedad:

Proposición 3.4. *Un FI -módulo V es finitamente generado si y solo si existe un epimorfismo $\bigoplus_i^\ell M(m_i) \longrightarrow V$ para una colección finita m_1, m_2, \dots, m_ℓ .*

Demostración. Si V es finitamente generado, entonces $V = \text{span}_V(v_1, \dots, v_r)$ para algunos $v_i \in V$. Por el lema 3.3, existe un epimorfismo $\bigoplus_i M(m_i) \longrightarrow V$. Recíprocamente, si existe un epimorfismo $F : \bigoplus_i M(m_i) \longrightarrow V$, entonces por el lema 3.3, $V = \text{span}_V(F(\text{id}_{\mathbf{m}_1}), \dots, F(\text{id}_{\mathbf{m}_r}))$. \square

A continuación vamos a introducir la estabilidad de representaciones uniforme.

Definición (Estabilidad de representaciones uniforme). *Sea $\{V_r, \phi_r\}$ una sucesión consistente de Σ_r -representaciones. La sucesión $\{V_r, \phi_r\}$ satisface la **estabilidad de representaciones uniforme con rango estable $r \geq N$** si cumple cada una de las siguientes condiciones:*

- Las transformaciones lineales $\phi_r : V_r \longrightarrow V_{r+1}$ son inyectivas, $\forall r \geq N$.
- El espacio vectorial generado por la Σ_r -órbita de $\phi_r(V_r)$ es V_{r+1} , $\forall r \geq N$.
- Al descomponer V_r como suma de representaciones irreducibles

$$V_r = \bigoplus_{\mu} V(\mu)_r^{\oplus c_{\mu,r}},$$

$\forall \mu$ las multiplicidades $c_{\mu,r}$ son independientes de r , $\forall r \geq N$.

Ahora estamos en posición de enunciar el teorema 1.13 de [4] que relaciona estabilidad de representaciones uniforme y FI -módulos finitamente generados.

Teorema 3.5. *Un FI-módulo V es finitamente generado si y solo si la sucesión de representaciones $\{V_r, \phi_r\}$ satisface estabilidad de representaciones uniforme.*

A continuación presentamos las ideas principales de la demostración del Teorema 3.5. Una demostración detallada se puede consultar en [4].

Notación: Si V_r es una representación de Σ_r , recordemos que el subespacio de coinvariantes $(V_r)_{\Sigma_r}$ está dado por $V_r \otimes_{\mathbb{Q}[\Sigma_r]} \mathbb{Q}$ y es el máximo cociente del Σ_r -módulo V_r en el que Σ_r actúa trivialmente.

Si $\mathbf{a}, \mathbf{r} \in FI$, entonces denotamos por $\mathbf{a} + \mathbf{r}$ al conjunto $\{1, \dots, a, a + 1, \dots, a + r\}$. Dado un FI-módulo V y $a \geq 1$ definimos el siguiente espacio vectorial graduado $\Phi_a(V) = \bigoplus_r \Phi_a(V)_r$ como

$$\Phi_a(V)_r = (V_{\mathbf{a} + \mathbf{r}})_{\Sigma_r}$$

donde la acción de Σ_r está inducida por la acción de Σ_r en los últimos r elementos de $\mathbf{a} + \mathbf{r}$. Dada una inyección $f : \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{r} + \mathbf{1}$, definimos la inyección

$$id_{\mathbf{a}} \sqcup f : \mathbf{a} + \mathbf{r} \hookrightarrow \mathbf{a} + (\mathbf{r} + \mathbf{1})$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq a, \\ f(x - a) + a & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Consideremos la transformación lineal dada por $V(id_{\mathbf{a}} \sqcup f) : V_{\mathbf{a} + \mathbf{r}} \longrightarrow V_{\mathbf{a} + (\mathbf{r} + \mathbf{1})}$. Por último consideremos la transformación lineal

$$T : \Phi_a(V)_r \longrightarrow \Phi_a(V)_{r+1}$$

inducida por $V(id_{\mathbf{a}} \sqcup f)$. Notemos que esta definición no depende de la elección de f .

Definición. *Sea V un FI-módulo.*

- *Al mínimo $s \geq 0$ tal que $\forall a \geq 0$ la transformación lineal $T : \Phi_a(V)_r \longrightarrow \Phi_a(V)_{r+1}$ es un isomorfismo $\forall r \geq s$, lo llamaremos el **grado de estabilidad** de V y lo denotaremos por $grd.est(V)$. Si tal s no existe, diremos que $grd.est(V) = \infty$.*

- Al máximo de $|\lambda|$, de entre todos los λ asociados a las componentes irreducibles $V(\lambda)_r$ que aparecen en las Σ_r -representaciones V_r lo llamaremos el **peso** de V y lo denotaremos $\text{peso}(V)$. Si $V = 0$ ponemos $\text{peso}(V) = 0$.

Proposición 3.6. *Si V es un FI-módulo finitamente generado en grado $\leq d$, entonces:*

- *El grado de estabilidad de V cumple que $\text{grad.est}(V) \leq d$.*
- *El peso de V cumple que $\text{peso}(V) \leq d$.*

La idea de la demostración es acotar el grado de estabilidad y el peso de los FI-módulos $M(k)$ y posteriormente acotar el grado de estabilidad y el peso de V usando el epimorfismo de $\bigoplus_i^\ell M(m_i)$ a V que da la Proposición 3.4.

Proposición 3.7. *Sea V un FI-módulo finitamente generado en grado $\leq d$.*

1. *Si W es un cociente de V , entonces W es finitamente generado en grado $\leq d$.*
2. *Propiedad Noetheriana. Si $W \subset V$ es un sub-FI-módulo, entonces W es finitamente generado en grado $\leq d$.*

Esta proposición se puede parafrasear diciendo que **subcocientes de FI-módulos finitamente generados son finitamente generados**.

Demostración. 1. Se sigue inmediatamente de la definición de generación finita.

2. Supongamos que V está finitamente generado en grado $\leq d$. Por la Proposición 3.4 sabemos que para todo r el espacio vectorial V_r es de dimensión finita. Como $W \subset V$ y tomar coinvariantes (sobre \mathbb{Q}) es un funtor exacto izquierdo, entonces $\Phi_d(W) \subset \Phi_d(V)$. El espacio vectorial graduado $\Phi_d(V) = \bigoplus_r \Phi_d(V)_r$ se puede considerar como un $\mathbb{Q}[T]$ -módulo por evaluación del morfismo $T : \Phi_d(V)_r \longrightarrow \Phi_d(V)_{r+1}$ y la Proposición 3.6 muestra que $\Phi_d(V)_r$ es un $\mathbb{Q}[T]$ -módulo graduado finitamente generado. Como $\mathbb{Q}[T]$ es un anillo noetheriano y $\Phi_d(V)$ es finitamente generado, entonces $\Phi_d(V)$ es un $\mathbb{Q}[T]$ -módulo noetheriano y por lo tanto $\Phi_d(W)$ es un $\mathbb{Q}[T]$ -módulo finitamente generado pues es un $\mathbb{Q}[T]$ -submódulo de $\Phi_d(V)$. Estos generadores pueden ser escogidos homogéneos, es decir, $\Phi_d(W)$ es un $\mathbb{Q}[T]$ -módulo graduado

finitamente generado.

Tomemos un conjunto finito generadores x_1, \dots, x_ℓ de $\Phi_d(V)$ como un $\mathbb{Q}[T]$ -módulo graduado con $x_i \in \Phi_d(V)_{r_i}$. Como $\Phi_d(W)_r = (W_{d+r})_{\Sigma_r}$ es un cociente de W_{d+r} , entonces para todo i podemos seleccionar una preimagen $w_i \in W_{d+r_i}$ que se proyecte sobre x_i . Sea \widetilde{W} el sub-*FI*-módulo de W generado por las preimágenes w_1, \dots, w_ℓ junto con un conjunto finito de generadores para W_1, \dots, W_{d-1} . Claramente \widetilde{W} es un *FI*-módulo finitamente generado y además $\widetilde{W}_r = W_r$ para todo $r < d$. Luego, para probar la afirmación basta mostrar que $\widetilde{W}_r = W_r$ para $r > d$.

Como $\widetilde{W} \subset W$, entonces $\Phi_d(\widetilde{W}) \subset \Phi_d(W)$. $\Phi_d(\widetilde{W})$ contiene al conjunto de generadores $\{x_i\}$ de $\Phi_d(W)$ y por lo tanto $\Phi_d(\widetilde{W}) = \Phi_d(W)$. Como Φ_d es exacto, entonces $\Phi_d(W/\widetilde{W}) = 0$.

Para todo r consideremos la descomposición de $(W/\widetilde{W})_r$ como suma de representaciones irreducibles de Σ_r :

$$(W/\widetilde{W})_r = \bigoplus_{\lambda} N_{\lambda} \otimes V(\lambda)_r$$

donde la acción de Σ_r en N_{λ} es trivial y dicho espacio vectorial contiene la información de la multiplicidad de $V(\lambda)_r$ en $(W/\widetilde{W})_r$. Como W/\widetilde{W} es un subcociente de V , entonces $\text{peso}(W/\widetilde{W}) \leq \text{peso}(V)$ y por la Proposición 3.6 se tiene que

$$\text{peso}(W/\widetilde{W}) \leq d.$$

Por otro lado, tenemos la descomposición

$$\Phi_d(W/\widetilde{W})_{r-d} = (W/\widetilde{W})_r \otimes_{\mathbb{Q}[\Sigma_{r-d}]} \mathbb{Q} = \bigoplus_{\lambda} N_{\lambda} \otimes (V(\lambda)_r \otimes_{\mathbb{Q}[\Sigma_{r-d}]} \mathbb{Q}).$$

Se puede demostrar usando la regla de Pieri (ver apéndice A.8) y argumentos de la teoría clásica de representaciones que $V(\lambda)_r \otimes_{\mathbb{Q}[\Sigma_{r-d}]} \mathbb{Q} = (V(\lambda)_r)_{\Sigma_{r-d}} \neq 0$ para $|\lambda| \leq d$. Pero hemos visto que $\Phi_d(W/\widetilde{W}) = 0$, esto implica que $N_{\lambda} = 0 \forall \lambda$ y por lo tanto $(W/\widetilde{W})_r = 0$ para $r \geq d$ que es lo que deseábamos probar. \square

Una de las ventajas de introducir el peso y el grado de estabilidad de un FI-módulo V es que podemos mejorar el Teorema 3.5 dando cotas para el rango de estabilidad de la sucesión de representaciones $\{V_r, \phi_r\}$, como se muestra a continuación.

Teorema 3.5'. *Sea V un FI-módulo. Si V es finitamente generado, entonces la sucesión de representaciones $\{V_r, \phi_r\}$ satisface la estabilidad de representaciones uniforme con rango estable $r \geq \text{grad.est}(V) + \text{peso}(V)$.*

Si $\{V_r, \phi_r\}$ satisface la estabilidad de representaciones uniforme con rango estable $r \geq N$, entonces V es finitamente generado en grado $\leq N$.

Idea de la demostración del Teorema 3.5. Supongamos que V es finitamente en grado $\leq d$. Por la Proposición 3.6 sabemos que $\text{grad.est}(V), \text{peso}(V) \leq d$. Entonces ambos grados son finitos y por lo tanto tiene sentido considerarlos como cotas para el rango de estabilidad de $\{V_r, \phi_r\}$.

Sean K_r el kernel de la transformación lineal Σ_r -equivariante $\phi : V_r \longrightarrow V_{r+1}$ y C_r el cokernel de la transformación lineal Σ_r -equivariante $\phi'_r : \text{Ind}_{\Sigma_r}^{\Sigma_{r+1}} V_r \longrightarrow V_{r+1}$ inducida de manera natural por ϕ_r . La primera y segunda condición para la estabilidad de representaciones uniforme se traducen en mostrar que $K_r = 0$ y $C_r = 0 \forall r \geq \text{grad.est}(V) + \text{peso}(V)$. Esto, a su vez, se traduce en mostrar que $(K_r)_{\Sigma_{r-\text{peso}(V)}} = 0$ y $(C_{r+1})_{\Sigma_{r+1-\text{peso}(V)}} = 0$ para $r - \text{grad.est}(V) \geq \text{peso}(V)$. Esto último puede ser probado usando teoría clásica de presentaciones.

La tercera condición sobre la no dependencia de r en las multiplicidades $c_{\lambda,r}$ de $V(\lambda)_r$ en V_r para $r \geq \text{grad.est}(V) + \text{peso}(V)$ se prueba por inducción sobre $|\lambda|$ y se analizan los coinvariantes de $V(\lambda)_r$.

Ahora supongamos que la sucesión $\{V_r, \phi_r\}$ satisface la estabilidad de representaciones uniforme con rango estable $r \geq N$. Entonces V_{r+1} es el espacio vectorial generado por la Σ_r -órbita de $\phi_r(V_{r+1})$ para todo $r \geq N$. Esto implica que $V = \text{span}_V(\bigsqcup_{r \leq N} V_r)$

pero todo V_r es de dimensión finita y por lo tanto V es finitamente generado en grado $\leq N$. \square

El siguiente resultado que vamos a demostrar en este capítulo es la generación finita del FI -módulo $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, \bullet)$ introducido en la sección anterior. En este caso, por el Teorema 3.5 tendríamos que la sucesión $\{H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r), \phi_r\}$ satisface la estabilidad de representaciones uniforme. En la práctica, cuando se tiene una sucesión de presentaciones consistente $\{V_r, \phi_r\}$ inducida por un FI -módulo V se trata de probar que dicho FI -módulo es finitamente generado para poder concluir que la sucesión de representaciones satisface la estabilidad de representaciones uniforme.

Teorema 3.8. *Para todo $i \geq 0$, el FI -módulo $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, \bullet)$ es finitamente generado en grado $\leq 2i$.*

Demostración. Por la Proposición 2.5 tenemos el siguiente isomorfismo:

$$H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{i \vdash \nu} \text{Ind}_{\Sigma(\mathcal{L}_{\bar{\nu}(r)})}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m)$$

para $r \geq 2i$, recordando que $\bar{\nu}$ es una partición de $2i$ que se obtiene a partir de ν añadiendo una columna de tamaño i a su diagrama de Young. La descomposición anterior implica que los monomios admisibles que generan a los subespacios vectoriales $\mathbf{T}(\mathcal{L}_{\bar{\nu}}, m) \subset H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, 2i)$ son suficientes para generar a $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$ mediante la acción del grupo simétrico Σ_r para $r \geq 2i$ y por lo tanto $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, \bullet)$ está finitamente generado en grado $\leq 2i$. \square

El rango estable $N = 4i$ que presentamos en el Teorema 2.14 del capítulo anterior para la estabilidad de representaciones uniforme de $H^{i(m-1)}F(\mathbb{R}^m, r)$ no es el óptimo, en [16] se muestra que los rangos estables óptimos para esta sucesión son:

$$N = \begin{cases} 3i & \text{si } m \text{ es impar,} \\ 3i + 1 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

En este trabajo hemos presentado resultados concernientes a los espacios de configuraciones $F(\mathbb{R}^m, r)$, sin embargo de manera reciente han aparecido generalizaciones al

caso de $F(M, r)$, para M una variedad conexa, orientable, de $\dim \geq 2$ (por ejemplo, ver [3] o [4]). Para poder enunciar uno de tales resultados, introducimos primero la noción de FI -módulo graduado.

Definición. FI -módulo graduado es un funtor $V : FI \longrightarrow \text{Grad.Vect}_{\mathbb{Q}}$ de la categoría FI a la categoría de los \mathbb{Q} -espacios vectoriales graduados. Entonces para todo r tenemos que $V_r = \bigoplus_{j \geq 0} V_r^j$ y al fijar j obtenemos un FI -módulo V^j dado por $(V^j)_r = V_r^j$.

Un FI -módulo graduado V se dice ser de **tipo finito** si todo FI -módulo V^j es finitamente generado.

El siguiente resultado fue probado por Church y Eilenberg en [4].

Teorema 3.9. Sea M una variedad, orientable y conexa de dimensión al menos 2 tal que $\dim_{\mathbb{Q}} H^*(M; \mathbb{Q}) < \infty$. Entonces el FI -módulo graduado $H^*F(M, \bullet)$ es de tipo finito.

La demostración de este hecho utiliza la sucesión espectral de Leray asociada a la inclusión $F(M, r) \hookrightarrow M^r$ con coeficientes en \mathbb{Q} que converge a $H^*(F(M, r); \mathbb{Q})$. En general no se sabe mucho sobre los diferenciales de la página $E_2^{*,*}$ de esta sucesión espectral. Sin embargo, B. Totaro en [21] mostró que la página E_2 está generada por $E_2^{0, r-1} \cong H^{m-1}F(\mathbb{R}^m, r)$ y por $E_2^{p, 0} \cong H^p(M^r; \mathbb{Q})$. Con esta descripción en [4] (Teorema 6.2.1) se muestra que $E_2(r)$ es un FI -módulo graduado de tipo finito donde $E_2(r)$ es la segunda página de la sucesión espectral asociada a la inclusión $F(M, r) \hookrightarrow M^r$. Como E_{∞} se obtiene a partir de E_2 por medio de subcocientes, entonces E_{∞} también es de tipo finito. Finalmente, como $E_{\infty}^{*,*}(r)$ está relacionado con $H^*(F(\mathbb{R}^m, r); \mathbb{Q})$ por medio de una filtración de este último, se puede mostrar también que $H^*(F(M, r); \mathbb{Q})$ es de tipo finito.

En los últimos años se han calculado cotas para el grado de generación del FI -módulo $H^i F(M, \bullet)$. Un ejemplo de esto es el trabajo de J. Miller y J. Wilson en [17]:

Teorema 3.10. Sea M una variedad, conexa de $\dim = 2$. Entonces el FI -módulo

$H^i F(M, \bullet)$ es finitamente generado en grado $\leq 4i + 1$. Si $\dim M \geq 3$, entonces el FI -módulo $H^i F(M, \bullet)$ es finitamente generado en grado $\leq 2i + 1$.

Cabe señalar que el resultado anterior se obtiene con coeficientes enteros y que los FI -módulos que se consideran son funtores de la categoría FI a la categoría de grupos abelianos.

3.3. Ejemplos

A continuación se dan ejemplos de generadores explícitos para los FI -módulos $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, \bullet)$. Recordemos que por la Proposición 2.1 (Capítulo 2) tenemos un isomorfismo:

$$H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r) \cong \bigoplus_{\substack{\mu \vdash r \\ |\pi_0(\mu)|=r-i}} \text{Ind}_{\Sigma(\mathcal{L}_\mu)}^{\Sigma_r} \mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$$

que se cumple para $r \geq 2i$. De esta descomposición se sigue que un conjunto de generadores para $H^{i(m-1)} F(\mathbb{R}^m, r)$ está dado por generadores para cada uno de los submódulos $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$ donde μ es una partición de r en $r - i$ componentes. Si μ es una partición de r en $r - i$ componentes, entonces generadores para $\mathbf{T}(\mathcal{L}_\mu, m)$ vienen dados por los monomios admisibles A_I tales que la partición asociada $\mathcal{P}(I)$ es la mínima partición que realiza a μ .

- Supongamos $m = 2$ y $i = 1$. Entonces para $r = 2i = 2$, la única partición μ de $r = 2$ en $r - i = 2 - 1$ componentes es $\mu = \{2\}$, la mínima partición de $\{1, 2\}$ que realiza μ es $\{\{1, 2\}\}$ y el único monomio admisible asociado a dicha partición es A_{21} . Por tanto A_{21} genera a los módulos $H^{m-1} F(\mathbb{R}^m, r)$ mediante permutaciones y combinaciones lineales para todo $r \geq 2i = 2$.
- Para $i = 2$, $r = 2i = 4$ (se obtienen los mismos generadores independientemente de que m sea par o impar):

$\mu \vdash 4$ y $\pi_0(\mu) = 4 - 2 = 2$	\mathcal{L}_μ	Monomios admisibles
2+2	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$	$A_{21}A_{43}$
3+1	$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$	$A_{21}A_{31}$ $A_{21}A_{32}$

- Para $i = 3$, $r = 2i = 6$:

$\mu \vdash 6$ y $\pi_0(\mu) = 6 - 3 = 3$	\mathcal{L}_μ	Monomios admisibles
2+2+2	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$	$A_{21}A_{43}A_{65}$
3+2+1	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$	$A_{21}A_{31}A_{54}$ $A_{21}A_{32}A_{54}$
4+1+1	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\} \cdot \{6\}\}$	$A_{21}A_{31}A_{41}$ $A_{21}A_{32}A_{41}$ $A_{21}A_{31}A_{42}$ $A_{21}A_{32}A_{42}$ $A_{21}A_{31}A_{43}$ $A_{21}A_{32}A_{43}$

- Para $i = 4$, $r = 2i = 8$:

$\mu \vdash 8$ y $\pi_0(\mu) = 8 - 4 = 4$	\mathcal{L}_μ	Monomios admisibles
2+2+2+2	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$	$A_{21}A_{43}A_{65}A_{87}$
3+2+2+1	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8\}\}$	$A_{21}A_{3\alpha}A_{54}A_{76}$ $\alpha = 1, 2$
3+3+1+1	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\} \cdot \{7\}, \{8\}\}$	$A_{21}A_{3\alpha}A_{54}A_{6\beta}$ $\alpha = 1, 2 \quad \beta = 4, 5$
4+2+1+1	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\} \cdot \{7\}, \{8\}\}$	$A_{21}A_{3\alpha}A_{4\beta}A_{65}$ $\alpha = 1, 2 \quad \beta = 1, 2, 3$
5+1+1+1	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$	$A_{21}A_{3\alpha}A_{4\beta}A_{5\gamma}$ $\alpha = 1, 2 \quad \beta = 1, 2, 3$ $\gamma = 1, 2, 3, 4$

Notemos que el número de monomios van creciendo rápidamente, sin embargo, estos no son conjuntos minimales de generadores. Por ejemplo para $i = 2$ el monomio $A_{21}A_{31}$ se puede obtener de $A_{21}A_{32}$ aplicando la permutación (12). En cada caso es posible elegir un conjunto minimal de generadores.

Apéndice A

Teoría de representaciones de grupos finitos

Presentamos aquí las definiciones y resultados básicos de la teoría de representaciones de grupos finitos sobre un campo de característica cero. Todo este material es estándar y puede ser consultado por ejemplo en [13] y [20]. A lo largo de todo este apéndice vamos a considerar espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{K} de característica cero. Denotaremos por $GL(V)$ al grupo de transformaciones lineales invertibles de V en V .

A.1. Representaciones y caracteres

Definición. Una **representación** de un grupo finito G es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ para algún espacio vectorial V (de dimensión finita). La dimensión de V es llamada el grado de ρ . Usualmente escribimos ρ_g para $\rho(g)$ y $\rho_g(v)$ para la acción de ρ_g en $v \in V$.

Ejemplos:

- La representación trivial de G en V está dada por

$$\begin{aligned}\rho : G &\longrightarrow V \\ g &\longmapsto id_V.\end{aligned}$$

- Si X es un conjunto sobre el que G actúa, denotamos por $\mathbb{K}[X]$ al espacio vectorial que tiene como base $\{e_x \mid x \in X\}$ y definimos la representación

$$\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{K}[X])$$

dada por:

$$\rho_g(e_x) = e_{gx}.$$

Esta representación se conoce como la representación por permutaciones asociada a X .

- Si en el caso anterior tomamos $X = G$ con la acción de multiplicación izquierda, entonces la representación obtenida recibe el nombre de **representación regular** de G .
- La **representación signo** del grupo simétrico Σ_r está dada por el homomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \Sigma_r &\longrightarrow GL(\mathbb{K}) \\ \sigma &\longmapsto \text{sign}(\sigma). \end{aligned}$$

Se pueden construir nuevas representaciones a partir de representaciones dadas usando las operaciones entre espacios vectoriales. Así podemos construir sumas directas, productos tensoriales, duales, etc., de representaciones como se verá a continuación.

Definición. Sean (V, ρ) y (W, ρ') dos representaciones.

- La **suma directa de representaciones** $(V \oplus W, \rho \oplus \rho')$ está dada por

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus W) \\ g &\longmapsto \begin{pmatrix} \rho_g & 0 \\ 0 & \rho'_g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- El **producto tensorial** de representaciones $(V \otimes W, \rho \otimes \rho')$ está dado por

$$\rho \otimes \rho' : G \longrightarrow GL(V \otimes W)$$

$$g \mapsto \rho_g \otimes \rho'_g.$$

Definición. Un homomorfismo entre dos representaciones (V, ρ) y (W, ρ') está dado por una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \rho_g \downarrow & & \downarrow \rho'_g \\ V & \xrightarrow{T} & W. \end{array}$$

Dos representaciones (V, ρ) y (W, ρ') se dicen isomorfas si existe un homomorfismo de representaciones $T : V \rightarrow W$ y además T es un isomorfismo.

Si (V, ρ) es una representación y $W \subset V$ es un subespacio tal que $\rho_g(W) \subset W$, $\forall g \in G$, entonces W se llamará una subrepresentación de V .

Definición. Si una representación (V, ρ) tiene como únicas subrepresentaciones a $\{0\}$ y V , entonces diremos que (V, ρ) es **irreducible**.

Teorema A.1. Toda representación (V, ρ) es isomorfa a una suma directa de representaciones irreducibles. Más aún, esta descomposición es única salvo orden de los sumandos.

El teorema anterior implica que dada una representación (V, ρ) , existen una colección finita de representaciones irreducibles $\{(V_i, \rho_i)\}_i$ y una colección de enteros positivos $\{c_i\}_i$ tales que (V, ρ) no es isomorfa a (V_j, ρ_j) y

$$V \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus c_i}.$$

Esto sugiere que las representaciones irreducibles son los bloques de los cuales se construyen todas las demás representaciones de G y por eso son de vital importancia estudiarlas. Una herramienta esencial para estudiar las representaciones irreducibles son los caracteres.

Definición. Sea (V, ρ) una representación de G . El **carácter** de G se define como la función:

$$\begin{aligned}\chi_V : G &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longmapsto \text{tr}(\rho_g).\end{aligned}$$

Teorema A.2.

- $\chi_V(1) = \dim V$.
- $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ para todo $g, h \in G$, es decir, χ_V es constante en clases de conjugación.
- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.
- $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$.

Usando la teoría de caracteres se puede demostrar lo siguiente:

Teorema A.3. *Dos representaciones son isomorfas si y solo si sus caracteres son iguales.*

Si \mathbb{K} es algebraicamente cerrado, entonces usando estos caracteres se puede probar que existe una biyección:

$$\{\text{Representaciones irreducibles de } G\} \longleftrightarrow \{\text{Clases de conjugación de } G\}.$$

Para el caso en $G = \Sigma_r$ y \mathbb{K} no necesariamente algebraicamente cerrado también se tiene la biyección anterior como veremos en el apéndice A.3.

A.2. La representación inducida

Sean V una representación de G , $H \subset G$ un subgrupo y $W \subset V$ un subespacio H -invariante. Para todo $g \in G$, el subespacio $gW = \{gw \mid w \in W\}$ depende solo en la clase lateral izquierda gH pues $ghW = g(hW) = gW$.

Dada un clase lateral izquierda $\sigma \in G/H$, definimos σW como gW para algún $g \in \sigma$. Diremos que V está inducida por W si todo elemento de V se puede expresar de manera única como suma de elementos en dichos trasladados de W , es decir,

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

En este caso escribiremos $V = \text{Ind}_H^G W = \text{Ind} W$.

A continuación se darán algunos resultados de esta construcción.

Teorema A.4. ■ $\text{Ind}_H^G W \cong \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} W$

- Si $W = \bigoplus_i W_i$, entonces $\text{Ind} W = \bigoplus_i \text{Ind} W_i$.
- Si $H \subset K \subset G$ son subgrupos, entonces $\text{Ind}_H^G W = \text{Ind}_K^G(\text{Ind}_H^K W)$.
- Si C es una clase de conjugación de G , y $C \cap H$ se descompone en clases de conjugación D_1, \dots, D_r de H , entonces el carácter de $\text{Ind} W$ evaluado en C es:

$$\chi_{\text{Ind} W}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W(D_i).$$

En particular, si W es la representación trivial de H , entonces

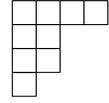
$$\chi_W(C) = \frac{[G : H]}{|C|} |C \cap H|.$$

A.3. Las representaciones del grupo simétrico

El número de representaciones irreducibles del grupo simétrico Σ_r es el número de clases de conjugación, que es igual al número de particiones de r : $r = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ con $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$.

A toda partición $\lambda = \{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k\}$ de r se le asocia un diagrama de Young T definido como un arreglo de cajas en filas con λ_i cajas en la i -ésima fila, las filas de cajas deben estar alineadas a la izquierda. Por ejemplo:

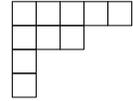
- A la partición $\mu : 4 + 2 + 2 + 1$ le asociamos el diagrama:



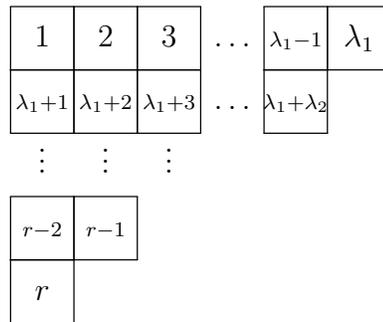
- A la partición $\mu : 3 + 2$ le asociamos el diagrama:



- A la partición $\mu : 5 + 3 + 1 + 1$ le asociamos el diagrama:



Los diagramas de Young a veces facilitan el manejo de las particiones, es por eso que a lo largo del trabajo no hacemos distinción entre particiones y diagramas de Young. Dada un partición λ de r , numeramos las cajas del correspondiente diagrama de Young de forma consecutiva:



Más generalmente, se define un **tablero de Young** como alguna numeración de un diagrama de Young con los enteros $1, 2, \dots, r$. Dado un tablero de Young, digamos el canónico mostrado arriba, definimos dos subgrupos del grupo simétrico Σ_r

$$P_\lambda = \{\sigma \in \Sigma_r \mid \sigma \text{ preserva las filas}\},$$

$$Q_\lambda = \{\sigma \in \Sigma_r \mid \sigma \text{ preserva las columnas}\}.$$

En el álgebra de grupo $\mathbb{K}[\Sigma_r]$ definimos dos elementos como sigue:

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in P_\lambda} e_\sigma \quad \text{y} \quad b_\lambda = \sum_{\sigma \in Q_\lambda} \text{sgn}(\sigma) e_\sigma.$$

Finalmente definimos:

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{K}[\Sigma_r].$$

Estos elementos permiten definir representaciones de Σ_r que, como lo enuncia el siguiente teorema, son todas sus las representaciones irreducibles. En dicho teorema supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y posteriormente se mencionará como quitar esta restricción, como lo hacen en el libro de Fulton y Harris [13].

Teorema A.5. *Un múltiplo escalar de c_λ es idempotente, es decir, existe $n_\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$, y la imagen de c_λ (por multiplicación derecha en $\mathbb{C}[\Sigma_r]$) es una representación irreducible V_λ de Σ_r .*

Toda representación irreducible de Σ_r se puede obtener de esta forma a partir de una única partición λ .

Notemos que, como Corolario de este Teorema, toda representación irreducible de Σ_r sobre \mathbb{C} puede ser definida sobre el campo de los racionales \mathbb{Q} pues c_λ pertenece al álgebra de grupo racional $\mathbb{Q}[\Sigma_r]$. Más aún, como todo campo de característica cero \mathbb{K} contiene al campo de los racionales \mathbb{Q} , entonces toda representación irreducible de Σ_r sobre \mathbb{C} puede ser definida sobre el campo \mathbb{K} .

Ahora veremos ejemplos de estas representaciones V_λ . En todos los ejemplos tomamos $r = 4$

- La representación $V_{\square\square\square\square}$ es la representación trivial de Σ_4 . En general, la representación $V_{(r)}$ es la representación trivial de Σ_r para todo r .
- La representación $V_{\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}}$ es la representación signo de Σ_4 . En general, la representación $V_{(1,1,\dots,1)}$ es la representación signo de Σ_r para todo r .
- La representación $V_{\begin{array}{c} \square\square\square \\ \square \end{array}}$ es la representación estándar de Σ_4 descrita como sigue.

La acción de Σ_4 en \mathbb{K}^4 por permutación de coordenadas define una representación de $\dim 4$. La representación estándar de Σ_4 estará dada por restringir

la acción anterior al subespacio $\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{K}^r \mid \sum_i x_i = 0\}$. Notemos que esta acción se puede definir de manera similar para cualquier $r \geq 2$.

De nuevo, la representación $V_{(r,1)}$ es la representación estándar de Σ_r para toda r .

Ahora introduciremos los elementos necesarios para poder calcular el carácter χ_λ de V_λ . Denotemos por $C_{\mathbf{i}}$ a la clase de conjugación de Σ_r definida por

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \text{ con } \sum_{\alpha} \alpha i_{\alpha} = r$$

donde $C_{\mathbf{i}}$ consiste de las particiones que tienen i_1 1-ciclos, i_2 2-ciclos, \dots , y i_r r -ciclos en su descomposición como producto de ciclos disjuntos.

Dada una partición $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ de r definimos los siguientes polinomios en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$:

$$P_j(x_1, \dots, x_k) = x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j \text{ para } j = 1, 2, \dots, r$$

$$\Delta(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

También definimos la sucesión de enteros no negativos:

$$\ell_j = \lambda_1 + k - j \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Teorema A.6 (Fórmula de Frobenius). *El carácter de V_λ evaluado en la clase de conjugación $C_{\mathbf{i}}$ está dado por el coeficientes del monomio $x_1^{\ell_1} \dots x_k^{\ell_k}$ en el polinomio:*

$$\Delta(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^k P_{\lambda_j}(x_1, \dots, x_k)^{i_j}.$$

Ejemplos: Usando la fórmula anterior se pueden calcular los caracteres de algunas representaciones explícitas. Para tal efecto, definimos las funciones de clase $\chi_{\mathbf{i}} : \Sigma_r \rightarrow \mathbb{K}$ dadas por

$\chi_i(\sigma) =$ Número de i -ciclos en la descomposición de σ como producto de ciclos disjuntos.

- El carácter de la representación trivial $V_{(r)}$ está dado por

$$\chi_{V_{(1)}} = 1.$$

- El carácter de la representación signo $V_{(1,1,\dots,1)}$ está dado por

$$\chi_{V_{(1,1,\dots,1)}}(\sigma) = \text{sign}(\sigma).$$

- El carácter de la representación estándar $V_{(r-1,1)}$ está dado por:

$$\chi_{V_{(r-1,1)}} = \chi_1 - 1.$$

- El carácter de la representación $V_{(r-2,2)}$ está dado por

$$\chi_{V_{(r-2,2)}} = \frac{\chi_1(\chi_1 - 3)}{2} + \chi_2.$$

- El carácter de la representación $V_{(r-2,1,1)}$ está dado por

$$\chi_{V_{(r-2,1,1)}} = \frac{\chi_1(\chi_1 - 3)}{2} - \chi_2.$$

Las representaciones irreducibles V_λ de Σ_r inducen representaciones de Σ_{r+1} , que en general no son irreducibles y el siguiente resultado provee la descomposición de dicha representación como suma de irreducibles.

Teorema A.7. *Dada una partición λ de r , entonces existe un isomorfismo de Σ_{r+1} -representaciones:*

$$\text{Ind}_{\Sigma_r}^{\Sigma_{r+1}} V_\lambda \cong \bigoplus_{\mu} V_\mu$$

donde la suma corre sobre todas las particiones μ de $r+1$ tales que μ se puede obtener añadiendo una caja a λ .

Un resultado más general que el anterior está dado por la regla de Pieri que se enuncia a continuación. Sea $\lambda \vdash k$ y consideremos la representación irreducible V_λ de Σ_k . Si $r \geq k$, podemos extender la acción de Σ_k en V_λ a una acción de $\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}$ al hacer actuar a Σ_{r-k} trivialmente en V_λ . Esta representación del grupo $\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}$ la denotaremos por $V_\lambda \boxtimes \mathbb{K}$.

Teorema A.8 (Regla de Pieri). *Sea λ una partición de k , entonces*

$$\text{Ind}_{\Sigma_k \times \Sigma_{r-k}}^{\Sigma_r} (V_\lambda \boxtimes \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mu} V_\mu$$

donde la suma corre sobre todas las particiones μ de r tales que el diagrama de Young de μ se puede obtener mediante el diagrama de Young de λ agregando $r - k$ cajas en $r - k$ columnas distintas.

Una demostración se puede consultar en el Corolario 2 de 7.3 en [12].

Una representación muy importante para este trabajo es la representación regular. La representación regular de Σ_r está dada por el módulo $\mathbb{K}[\Sigma_r]$ donde Σ_r actúa por multiplicación por la izquierda. A continuación se presentan algunas características de esta representación:

- $\mathbb{K}[\Sigma_2] = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}^- = V_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \oplus V_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}$ donde \mathbb{K} es la representación trivial y \mathbb{K}^- es la representación signo.
- $\mathbb{K}[\Sigma_{r+1}] = \text{Ind}_{\Sigma_r}^{\Sigma_{r+1}} \mathbb{K}[\Sigma_r]$ pues $\text{Ind}_{\Sigma_r}^{\Sigma_{r+1}} \mathbb{K}[\Sigma_r] \cong \mathbb{K}[\Sigma_{r+1}] \otimes_{\mathbb{K}[\Sigma_r]} \mathbb{K}[\Sigma_r] \cong \mathbb{K}[\Sigma_{r+1}]$.
- El carácter de la representación regular $\mathbb{K}[\Sigma_r]$ está dado por

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq 1, \\ r! & \text{si } \sigma = 1. \end{cases}$$

Otra representación muy importante para el trabajo es $\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_r} (\mathbb{K} \oplus \mathbb{K})$ donde \mathbb{K} es la representación trivial de Σ_2 . Su carácter, usando las fórmulas de la sección pasada,

está dado por:

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} r! & \text{si } \sigma = 1, \\ (r-2)! & \text{si } \sigma \text{ es una transposición,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También se puede demostrar que existe un isomorfismo de Σ_r -representaciones:

$$\text{Ind}_{\Sigma_2}^{\Sigma_r} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}[\Sigma_r/\Sigma_2]$$

donde el grupo Σ_r actúa por multiplicación a la izquierda en las clases laterales Σ_r/Σ_2 .

Apéndice B

Teorema de punto fijo de Lefschetz

Dada una función continua $f : X \longrightarrow X$ de un espacio topológico en sí mismo, es natural preguntarse si f tiene puntos fijos y en tal caso, cuántos de ellos existen. El teorema de punto fijo de Lefschetz responde a esta pregunta en el caso en que X es un espacio triangulable compacto, es decir, homeomorfo a un complejo simplicial finito. Esta clase de espacios incluye por ejemplo a las variedades compactas. En tal situación, el homomorfismo inducido en homología racional $f_* : H_*(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(X; \mathbb{Q})$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, $\forall i$.

Teorema B.1 (de punto fijo de Lefschetz). *Sea $f : X \longrightarrow X$ una función continua de un complejo simplicial finito en sí mismo. Definimos el número de Lefschetz*

$$\Lambda(f) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(f_* : H_i(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(X; \mathbb{Q})).$$

Si $\Lambda(f) \neq 0$ entonces f tiene un punto fijo.

En particular, si f el mapeo identidad u homotópico al mapeo identidad, entonces $\Lambda(f)$ coincide con la característica de Euler de X , $\chi(X)$. Más aún, si el número de puntos fijos es finito, entonces $\Lambda(f)$ cuenta el número de puntos fijos con ciertas multiplicidades. Claramente, el número de Lefschetz $\Lambda(f)$ está definido aún si X es retracto por deformación de un complejos simplicial finito y en este caso, si $f : X \longrightarrow X$ no tiene puntos fijos, entonces $\Lambda(f) = 0$. Una demostración se puede consultar en [8].

De manera equivalente, este resultado se puede enunciar y probar usando cohomología singular. Una de las ventajas es la estructura adicional de anillo graduado y el Teorema de Dualidad de Poincaré.

Bibliografía

- [1] ARNOL'D, V. I. The cohomology ring of the group of dyed braids. *Mat. Zametki* 5 (1969), 227–231.
- [2] ARTIN, E. Theory of braids. *Ann. of Math. (2)* 48 (1947), 101–126.
- [3] CHURCH, T. Homological stability for configuration spaces of manifolds. *Invent. Math.* 188, 2 (2012), 465–504.
- [4] CHURCH, T., ELLENBERG, J. S., AND FARB, B. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. *Duke Math. J.* 164, 9 (2015), 1833–1910.
- [5] CHURCH, T., AND FARB, B. Representation theory and homological stability. *Adv. Math.* 245 (2013), 250–314.
- [6] COHEN, F. R., LADA, T. J., AND MAY, J. P. *The homology of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [7] COHEN, F. R., AND TAYLOR, L. R. On the representation theory associated to the cohomology of configuration spaces. In *Algebraic topology (Oaxtepec, 1991)*, vol. 146 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 91–109.
- [8] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.
- [9] FADELL, E., AND NEUWIRTH, L. Configuration spaces. *Math. Scand.* 10 (1962), 111–118.

-
- [10] FARB, B. Representation stability. *Proceedings of the ICM 2* (2014), 1173–1196.
- [11] FOX, R., AND NEUWIRTH, L. The braid groups. *Math. Scand.* 10 (1962), 119–126.
- [12] FULTON, W. *Young tableaux*, vol. 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [13] FULTON, W., AND HARRIS, J. *Representation theory*, vol. 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [14] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [15] HEMMER, D. J. Stable decompositions for some symmetric group characters arising in braid group cohomology. *J. Combin. Theory Ser. A* 118, 3 (2011), 1136–1139.
- [16] HERSH, P., AND REINER, V. Representation stability for cohomology of configuration spaces in \mathbb{R}^d . *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 5 (2017), 1433–1486. With an appendix written jointly with Steven Sam.
- [17] MILLER, J., AND WILSON, J. C. H. FI-hyperhomology and ordered configuration spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 148, 3 (2020), 993–1002.
- [18] OSSA, E. On the cohomology of configuration spaces. In *Algebraic topology: new trends in localization and periodicity (Sant Feliu de Guíxols, 1994)*, vol. 136 of *Progr. Math.* Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 353–361.
- [19] SALVATORE, P. Configuration spaces with summable labels. In *Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998)*, vol. 196 of *Progr. Math.* Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 375–395.
- [20] SERRE, J.-P. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.

- [21] TOTARO, B. Configuration spaces of algebraic varieties. *Topology* 35, 4 (1996), 1057–1067.