

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Nombre de Tesis**

Modelo Simplicial para Espacios de Configuraciones

Tesis que presenta

**Emilio José González Rivero**

Para Obtener el Grado de  
Maestro en Ciencias  
En la Especialidad de  
Matemáticas

Director de la Tesis: Dr. Jesús González Espino Barros

Ciudad de México

Agosto, 2019



*A Juana Ruíz, mi abuela querida, donde quiera que esté.*



---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Complejos Celulares y Complejos Simpliciales</b>	<b>1</b>
1.1. Nociones Básicas de Teoría de Homotopía . . . . .	1
1.2. Complejos Celulares . . . . .	2
1.3. Complejos Simpliciales . . . . .	6
<b>2. Modelo Simplicial Ordenado para Espacios de Configuraciones</b>	<b>11</b>
2.1. Definiciones Preliminares y Enunciado del Resultado Fundamental del Capítulo.	11
2.2. Diferencia Simplicial . . . . .	16
<b>3. Modelo Simplicial Desordenado para Espacios de Configuraciones</b>	<b>23</b>
3.1. Construcción del Modelo . . . . .	23
3.2. Relación entre el Modelo Ordenado y el Modelo Desordenado . . . . .	31
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>



---

# AGRADECIMIENTOS

---

Quiero agradecer al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo. También a cada persona que me acompañó en la realización de este trabajo: al doctor Jesús González por su paciencia, dedicación y por permitirme desarrollar bajo su dirección y orientación este trabajo de grado. Quiero agradecer también a todos los profesores que he tenido en Cuba y en México, a la Universidad Central de las Villas en Cuba por formarme como Licenciado, a todos mis amigos y en especial a mi familia por su amor y apoyo a pesar de la distancia.





---

# RESUMEN

---

El estudio de los espacios de configuraciones se hace cada vez más importante y atractivo para la comunidad matemática por sus aplicaciones en distintas áreas como la robótica y los grupos de trenzas. En este trabajo se muestra en detalle la construcción de un complejo simplicial para la diferencia  $X - A$ , donde  $X$  es un complejo simplicial y  $A$  es subcomplejo arbitrario de  $X$ . Utilizando esto y siguiendo las ideas en [13] se muestra un modelo simplicial para espacios de configuraciones ordenados, cuyo espacio base sea un complejo simplicial. Como contribución original de este trabajo se propone un nuevo modelo simplicial para espacios de configuraciones desordenados cuyo espacio base sea un complejo simplicial y se muestra su relación con el modelo para el caso ordenado.



---

# ABSTRACT

---

The study of configuration spaces is becoming increasingly important and attractive to the mathematical community through its applications in different areas such as robotics and braids groups. This thesis shows in details the construction of a simplicial complex for the difference  $X - A$ , where  $X$  is a simplicial complex and  $A$  is an arbitrary subcomplex of  $X$ . Using this fact and following the ideas in [13], a simplicial model for ordered spaces of configurations is presented, whose base space is a simplicial complex. In addition, and as an original contribution in this thesis, we propose a new simplicial model for unordered spaces of configurations whose base space is a simplicial complex and we show its relationship to the model for the ordered case.



---

# INTRODUCCIÓN

---

Los espacios de configuraciones tienen varios significados distintos. En la mecánica clásica, los espacios de configuraciones son variedades de todos los estados posibles de un sistema mecánico. El concepto de espacio de configuración proporciona una herramienta importante que permite la aplicación de métodos topológicos en ingeniería: en lugar de estudiar un sistema mecánico particular, se puede estudiar su espacio de configuración y traducir los problemas de la teoría de control a los geométricos y topológicos. Entre los ejemplos específicos interesantes se encuentran los espacios de configuraciones relativos a la planeación motriz de un robot. Originalmente, los espacios de configuraciones se introdujeron en 1962 por E. Fadell y L. Neuwirth como variedades de todas las posiciones posibles de  $n$  puntos distintos en un espacio euclidiano. Los espacios de configuraciones están estrechamente relacionados con la teoría de trenzas. Otra aplicación es que cualquier gráfica conexa genera un espacio de configuraciones que consiste en ubicaciones sin colisiones de  $n$  partículas en este gráfico. Los espacios de configuraciones de las gráficas son importantes en robótica topológica. El estudio de los espacios de configuraciones comenzó hace apenas unos años y muchos problemas importantes relacionados con estos espacios de configuraciones aún permanecen abiertos. Como ejemplos de trabajos relevantes sobre los espacios de configuraciones podemos ver [1], donde el autor propone un modelo combinatorio para espacios de configuraciones (tanto ordenados como desordenados) siendo el espacio base una gráfica y [11] donde también se da un modelo combinatorio para espacios de configuraciones siendo el espacio base una gráfica, este último modelo resulta ser más eficiente que el anterior. En este trabajo se muestra en detalle la construcción de un complejo simplicial para la diferencia  $X - A$ , donde  $X$  es un complejo simplicial y  $A$  es subcomplejo arbitrario de  $X$ . Utilizando esto se muestra un modelo simplicial para espacios de configuraciones ordenados, cuyo espacio base sea un complejo simplicial. Además el autor propone un nuevo modelo simplicial para espacios de configuraciones desordenados cuyo espacio base sea un complejo simplicial y muestra su relación con el modelo para el caso ordenado.



# 1

---

## COMPLEJOS CELULARES Y COMPLEJOS SIMPLICIALES

---

*En este capítulo definiremos nociones básicas como CW Complejos, Complejos Simpliciales y enunciaremos algunas de sus propiedades fundamentales.*

Las definiciones y resultados expuestos en este capítulo han sido tomados de [8, Apéndices][2, Capítulo 1]

### 1.1 NOCIONES BÁSICAS DE TEORÍA DE HOMOTOPÍA

#### **Definition 1.1.** Deformación por Retracción

Una deformación por retracción de un espacio  $X$  en un subespacio  $A$  es una familia de mapeos  $f_t : X \rightarrow X$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que  $f_0 = \mathbb{1}$  (el mapeo identidad),  $f_1(X) = A$ , y  $f_t|_A = \mathbb{1}$ ,  $t \in [0, 1]$ . La familia de funciones  $f_t$  debe ser continua en el sentido de que el mapeo asociado  $X \times I \rightarrow X$ ,  $(x, t) \rightarrow f_t(x)$  es continuo.

Intuitivamente podemos decir que una deformación por retracción es una forma continua de retraer todo el espacio  $X$  a un subespacio  $A$ , dejando fijo los puntos de este último.

#### **Definition 1.2.** Homotopía

Una homotopía es una familia de mapeos  $f_t : X \rightarrow Y$ ,  $t \in I$ , tal que el mapeo asociado  $F : X \times I \rightarrow Y$ , dado por  $F(x, t) \rightarrow f_t(x)$  es continuo. Se dice que los mapeos  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  son homotópicos y se denota  $f_0 \simeq f_1$ , si existe una homotopía  $F : X \times I \rightarrow Y$ , tal que  $F(x, 0) = f_0(x)$  y  $F(x, 1) = f_1(x)$ .

De la definición anterior tenemos que una *deformación por retracción* no es más que una homotía entre el mapeo identidad  $\mathbb{1}: X \rightarrow X$  y una *retracción* de  $X$  en un subespacio  $A$ , es decir un mapeo  $r: X \rightarrow X$  tal que  $r(X) = A$  y  $r|_A = \mathbb{1}$ .

**Definition 1.3.** Homotopía relativa

Una homotopía  $f_t: X \rightarrow X$ , cuya restricción a un subespacio  $A \subset X$  es la identidad para todo  $t$  es llamada una homotopía relativa a  $A$ , y se denota *homotopía rel  $A$* .

Notemos que si  $X$  se deforma por retracción sobre un subespacio  $A$  vía  $f_t: X \rightarrow X$ , entonces si  $r: X \rightarrow A$  denota la retracción y  $i: A \rightarrow X$  denota la inclusión, se tiene que  $ri = \mathbb{1}$  y  $ir \simeq \mathbb{1}$ , donde esta última homotopía está dada por  $f_t$ . La generalización de esta situación da como resultado la siguiente :

**Definition 1.4.** Equivalencia Homotópica

Un mapeo  $f: X \rightarrow Y$  es llamado una *equivalencia homotópica* si existe un mapeo  $g: Y \rightarrow X$ , tal que  $fg \simeq \mathbb{1}$  y  $gf \simeq \mathbb{1}$ . En tal caso los espacios  $X$  y  $Y$  se dice que tienen el mismo *tipo de homotopía* y se denota  $X \simeq Y$ .

Se prueba que la relación de equivalencia homotópica es una relación de equivalencia, luego induce una partición en clases de equivalencias del conjunto de los espacios topológicos, permitiendo una mejor clasificación de estos. Además es fácil darse cuenta de que todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica luego la clasificación de los espacios según su tipo de homotopía es más general que si los clasificamos por la relación de equivalencia inducida por homeomorfismos. Estas son algunas de las razones por las cuales el concepto de equivalencia homotópica es uno de los más importantes conceptos en topología algebraica.

## 1.2 COMPLEJOS CELULARES

En esta sección vamos a definir un tipo muy especial de espacios topológicos, llamados complejos celulares. Estos espacios son de gran importancia pues son bastante "*amigables*" para el trabajo con ellos, esto hace que muchas veces sea conveniente utilizarlos como representantes de sus clases de equivalencia homotópica.

**Definition 1.5.** Un complejo celular o *CW* complejo es un espacio

$$X = \bigcup_{n \in J \subseteq \mathbb{N}} X^n,$$

con los espacios  $X^n$  contruidos como sigue:



- 1) Comencemos con un espacio discreto  $X^0$ , cuyos puntos los vamos a considerar como  $0$ -*celdas*.
- 2) Inductivamente, construimos el  $n$ -*esqueleto*  $X^{n-1}$  pegando al  $(n-1)$ -*esqueleto* celdas de dimensión  $n$  vía mapeos  $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Esto significa que  $X^n$  es el espacio cociente de la unión disjunta  $X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n$  de  $X^{n-1}$  con una colección de  $n$ -*discos*  $D_\alpha^n$  sobre la identificaciones  $x \sim \phi_\alpha(x)$  para todo  $x \in \partial D_\alpha^n$ . Luego como conjunto,

$$X^n = X^{n-1} \sqcup_\alpha e_\alpha^n,$$

donde cada  $e_\alpha^n$  es homeomorfo a un disco abierto.

- 3) Este proceso inductivo se puede parar luego de una cantidad finita de pasos y obtenemos  $X = X^n$  para algún  $n < \infty$ , o se puede continuar infinitamente y obtenemos el espacio  $X = \bigcup_n X^n$ . En este último caso  $X$  se toma con la topología débil:  $A \subset X$  es abierto (cerrado) si y solo si  $A \cap X^n$  es abierto (cerrado) para cada  $n$ .

Si  $X = X^n$  para algún  $n$ , entonces se dice que  $X$  es finito dimensional. La dimensión  $n$  de  $X$  coincide con la máxima dimensión de las celdas de  $X$ .

**Ejemplo 1.6.** Un complejo celular de dimensión 1,  $X = X^1$  es llamado una gráfica en topología algebraica. Sus vértices son las  $0$ -*celdas* y sus aristas son las  $1$ -*celdas* que se pegan sobre  $X^0$ , se permite que los dos extremos de un arista se peguen sobre el mismo vértice.

**Ejemplo 1.7.** La esfera  $S^n$  tiene estructura de complejo celular con solo dos celdas,  $e^0$  y  $e^n$ , con la  $n$ -*celda* pegando por el mapeo constante  $S^n \rightarrow e^0$ . Notar que esto es equivalente a ver  $S^n$  como el espacio cociente  $D^n/\partial D^n$ .

Cada celda  $e_\alpha^n$  en un complejo celular  $X$  tiene un mapeo característico  $\chi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$  que extiende el mapeo de pegado  $\phi_\alpha$  y es un homeomorfismo del interior de  $D_\alpha^n$  a  $e_\alpha^n$ . Se puede ver a  $\phi_\alpha$  como la composición

$$D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X,$$

donde el mapeo del medio es la proyección en clases de equivalencia.

La Topología de un CW complejo  $X$  también se puede describir de la siguiente forma:

$$\forall A \subset X, A \text{ abierto (Cerrado)} \Leftrightarrow \chi_\alpha^{-1} \text{ es abierto (cerrado) en } D_\alpha^n \forall \chi_\alpha.$$

Como consecuencia de esta caracterización se tiene que  $X$  es espacio cociente de  $\sqcup_{\alpha, n} D_\alpha^n$ .

**Definición 1.8.** Un subcomplejo de un complejo celular  $X$  es un subespacio cerrado  $A \subset X$  que es una unión de celdas de  $X$ . Dado que  $A$  es cerrado, el mapeo característico de cada celda en  $A$ , tiene imagen contenida en  $A$ , y en particular la imagen del mapeo de pegado de cada celda en  $A$  tiene imagen contenida en  $A$ , luego  $A$  es en sí mismo un complejo celular. Al par  $(X, A)$  que consiste de un complejo celular  $X$  y un subcomplejo  $A$  se le llama un *CW* par.

Veamos ahora algunas operaciones fundamentales que podemos hacer con estos espacios:

**Definición 1.9.** Si  $X$  y  $Y$  son complejos celulares, entonces  $X \times Y$  tiene la estructura de un complejo celular con celdas

$$e_\alpha^n \times e_\beta^n: e_\alpha^n \in X \text{ y } e_\beta^n \in Y.$$

En un caso general la topología de  $X \times Y$  como complejo celular puede ser más fina que la topología producto. Estas dos topologías coincide si y solo si ambos espacios tienen una cantidad finita de celdas o si ambos espacios tienen una cantidad contable de celdas.

**Definición 1.10.** Si  $(X, A)$  es un *CW* par, entonces el espacio cociente  $X/A$  hereda de  $X$ , de forma natural, una estructura de complejo celular. Las celdas de  $X/A$  son las celdas de  $X - A$  más una nueva *0-celda* que es la imagen de  $A$  en  $X/A$ . Para una celda  $e_\alpha^n$  de  $X - A$  con mapeo de pegado  $\phi_\alpha: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ , su correspondiente mapeo de pegado en  $X/A$  es la composición  $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/A^{n-1}$ .

**Ejemplo 1.11.** Sea  $S^{n-1}$  con alguna estructura de complejo celular, si construimos  $D^n$  a partir de  $S^{n-1}$ , pegandole una *n-celda*, entonces el cociente  $D^n/S^{n-1}$  es el complejo  $S^n$  con su estructura usual.

**Definición 1.12.** Para un espacio  $X$ , la suspensión  $SX$  es el espacio cociente de  $X \times I$  dado por colapsar  $X \times 0$  a un punto y  $X \times 1$  a otro punto.

**Ejemplo 1.13.** El ejemplo que motiva la definición anterior es  $X = S^n$ , pues  $SX = S^{n+1}$ , con los dos puntos suspensión coincidiendo con el polo norte y el polo sur de  $S^{n+1}$ . Se puede considerar a  $SX$  como un doble cono sobre  $X$ , la unión de dos copias del cono  $CX = (X \times I)/(X \times 0)$ . Si consideramos a  $I$  como el complejo formado por dos *0-celdas* y una *1-celda*, entonces tanto  $SX$  como  $CX$  se pueden ver como el complejo cociente del producto  $X \times I$ .

**Proposición 1.14.** *Un subespacio compacto de un CW complejo está contenido en un subespacio finito de CW.*

El uso de *CW* para nombrar los complejos celulares viene dado de las siguientes dos propiedades:

- (1) Finititud de la clausura: La clausura de cada celda se intersecciona solo con un número finito de otras celdas, todas ellas de dimensión menor. Esto es claro por la proposición anterior, ya que la clausura de cada celda es compacta.
- (2) Topología débil: Un conjunto es cerrado si y solo si su intersección con cada celda es un conjunto cerrado.

A continuación se enuncian algunas propiedades fundamentales de los *CW* complejos:

**Proposición 1.15.** *Dado un espacio de Hausdorff  $X$  y una familia de mapeos  $\chi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$ , entonces esos mapeos son los mapeos característicos para una estructura de complejo celular de  $X$  si y solo si:*

- (i) *Cada  $\chi_\alpha$  se restringe a un homeomorfismo del interior de  $D_\alpha^n$  a su imagen.*
- (ii) *Para cada celda  $e_\alpha^n$ ,  $\chi_\alpha(\partial D_\alpha^n)$  está contenida en la unión de un número finito de celdas de dimensión menor a  $n$ .*
- (iii) *Un subconjunto de  $X$  es cerrado si y solo si la intersección de este con cada celda es un cerrado.*

**Proposición 1.16.** *Los *CW* son espacios normales y en particular espacios de Hausdorff.*

**Proposición 1.17.** *Cada punto en un *CW* complejo tiene una vecindad arbitrariamente pequeña contráctil. Luego los *CW* complejos son localmente contráctiles.*

Veamos ahora una definición que caracteriza a una importante subclase de los complejos celulares.

**Definición 1.18.** Un *CW* complejo se dice ser regular si sus mapeos característicos son encajes. Con esto la clausura de las celdas son homeomorfas a las bolas cerradas y por tanto podemos hablar de celdas cerradas en los *CW* regulares.

Los *CW* regulares juegan un papel fundamental en la topología algebraica, una muestra de esto se expondrá en la próxima sección, donde definiremos a los complejos simpliciales.

## 1.3 COMPLEJOS SIMPLICIALES

**Definición 1.19.** Sea  $Z$  un conjunto y  $X \subseteq \mathcal{P}(Z)$ . Se dice que  $X$  es un complejo simplicial abstracto si para cada conjunto  $A$  en  $X$  y para cada subconjunto no vacío  $B$  en  $A$ , se tiene que  $B$  está en  $X$ . En otras palabras  $X$  es cerrado bajo subconjuntos.

Los conjuntos finitos que pertenecen a  $X$  son llamados caras del complejo y una cara  $A$ , se dice ser cara de  $B$ , si  $A \subset B$ . Luego la definición de un complejo simplicial abstracto puede enunciarse en términos de caras de la siguiente forma:

$X$  es un complejo simplicial abstracto si y solo si toda cara de una cara de  $X$ , es en sí misma una cara de  $X$ .

El conjunto de vértices de un complejo simplicial abstracto  $X$  es  $V(X) = \bigcup_{A \in X} A$ . Como consecuencia directa de la definición de  $X$ , tenemos que  $v \in V(X) \Rightarrow \{v\} \in X$ .

**Definición 1.20.** Se define la dimensión de una cara  $A$  de  $X$  como

$$\dim(A) = |A| - 1.$$

**Definición 1.21.** Sobre los elementos de  $X$  podemos establecer una relación de orden parcial dada por  $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$  y con esta relación los elementos máximos son aquellos que no pueden ser caras de otros. Se define la dimensión de  $X$  como

$$\dim(X) = \max\{\dim(A) : A \text{ es maximal en } X\},$$

si todos los elementos de  $X$  son finitos, sino se dice que  $X$  es de dimensión infinita.

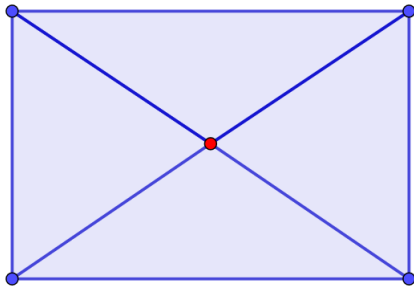
**Definición 1.22.** Un subcomplejo  $Y$  de un complejo simplicial abstracto  $X$ , es un complejo simplicial abstracto en sí mismo, pero que está contenido en  $X$ , es decir  $Y \subseteq X$ . Un subcomplejo con un elemento máximo bajo la relación de subconjunto es también llamado un simplejo.

**Definición 1.23.** El  $k$ -esqueleto de un complejo simplicial abstracto  $X$  se define como el conjunto de todas las caras de  $X$  con dimensión a los más  $k$ .

**Definición 1.24.** El *link* de una cara  $Y \in X$ , se denota por  $X/Y$  o  $lk_X(Y)$ , es el subconjunto de  $X$  definido por

$$lk_X = \{A \in X : A \cap Y = \emptyset, A \cup Y \in X\}.$$

**Ejemplo 1.25.** Sea  $X$  tal que  $|X|$  es el rectángulo triangulado como se muestra en la figura: (ver *definición 1.28*)



y tomemos  $A \in X$  como el vértice central señalado en rojo, entonces tenemos que el  $lk_X(A)$  se corresponde con toda la frontera del rectángulo, como en la figura:



**Proposición 1.26.** Si  $X$  es complejo simplicial abstracto y  $Y \in X$ , entonces  $lk_X(Y)$  es un subcomplejo simplicial abstracto de  $X$ .

**Definición 1.27.** Sean  $X$  y  $Y$  dos complejos simpliciales abstractos y sea  $f : X \rightarrow Y$ , se dice que  $f$  es una función simplicial si:

- (i)  $f|_{V(X)} : V(X) \rightarrow V(Y)$ , o más claramente,  $f$  manda los vértices de  $X$  en vértices de  $Y$ .
- (ii) Si  $A \in X$ , entonces  $f(A) \in Y$ .

Las funciones simpliciales se comportan como morfismos de complejos y por tanto se define al conjunto de los complejos simpliciales abstractos, junto con las funciones simpliciales como la *categoría* de los complejos simpliciales abstractos.

A cada complejo simplicial abstracto  $X$  se le puede asociar un espacio topológico llamado realización geométrica de  $X$  y se denota  $|X|$ . A los efectos de esta tesis  $X$  será un complejo simplicial abstracto finito y la realización geométrica utilizada será la realización geométrica utilizando coordenadas baricéntricas. Por eso la siguiente definición hará referencia solo a este tipo de realización.

**Definición 1.28.** Sea  $X$  un complejo simplicial abstracto con  $k = |V(X)|$ . Definimos

$$|X| = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1; \{i : x_i > 0\} \in X\}.$$

Este conjunto lo podemos ver como la unión disjunta de las realizaciones de los simplejos de  $X$ , con la identificación dada por caras comunes. Dado que la realización de un simplejo es homeomorfa a un disco abierto de su misma dimensión y este homeomorfismo restringido a sus caras de dimensión inmediata inferior es la frontera de tal disco, entonces es claro que  $|X|$  tiene estructura de complejo celular.

**Proposición 1.29.** Si  $X$  es un complejo simplicial abstracto, entonces  $|X|$  es un complejo celular regular.

**Definición 1.30.** A los complejos celulares que son realizaciones geométricas de complejos simpliciales abstractos se les llama simplemente complejos simpliciales y sus celdas son llamadas simplejos.

**Definición 1.31.** El conjunto de los complejos simpliciales tomado con las funciones continuas entre ellos que preservan identificaciones es llamado la categoría de los complejos simpliciales.

**Proposición 1.32.**  $|\cdot| : X \rightarrow |X|$  es un funtor que va de la categoría de complejos simpliciales abstractos a la categoría de complejos simpliciales.

**Definición 1.33.** Si  $|X|$  es un complejo simplicial, entonces se define el complejo simplicial subdivisión baricéntrica de  $|sd(X)|$  como la realización del complejo:

- (i) Sus vértices son  $\{b_\alpha : \alpha \in X\}$ .
- (ii)  $\{b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \dots, b_{\alpha_k}\}$  es un simplejo de  $X$  si y solo si  $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \dots \subset \alpha_k \in X$ .

**Proposición 1.34.** Si  $|X|$  es un complejo simplicial y  $|sd(X)|$  es su subdivisión baricéntrica, entonces  $|X| \cong |sd(X)|$ .

**Definición 1.35.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  una cubierta de  $X$ . Se le llama Nervio de la Cubierta  $\mathcal{U}$  a

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{(i_1, i_2, \dots, i_k) : \bigcap_{i=1}^k U_{i_i} \neq \emptyset\}.$$

**Proposición 1.36.** *El nervio de una cubierta  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  es un complejo simplicial con vértices  $I$ .*

**Lema 1.37.** *Lema del Nervio*

*Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  una cubierta de  $X$ , tal que la intersección de un número finito de elementos en  $\mathcal{U}$  es siempre vacía o contráctil. Entonces se dice que  $\mathcal{U}$  es una "good cover" y se tiene que  $X \simeq |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ .*





## 2

---

# MODELO SIMPLICIAL ORDENADO PARA ESPACIOS DE CONFIGURACIONES

---

*En este capítulo se define la diferencia simplicial y se propone un modelo simplicial para el estudio de espacios de configuraciones ordenados.*

En lo adelante para este capítulo y el próximo consideraremos la siguiente notación:

$X$ - Complejo simplicial abstracto con un conjunto finito de vértices.

$|X|$ - Realización geométrica del complejo simplicial  $X$ .

$Conf(n, Z)$ - Espacio de configuraciones del espacio  $Z$  en  $n - puntos$ .

Los resultados que se expondrán en este capítulo están basados en el artículo [13].

### 2.1 DEFINICIONES PRELIMINARES Y ENUNCIADO DEL RESULTADO FUNDAMENTAL DEL CAPÍTULO.

**Definition 2.1.** Matriz de configuración.

Dado un orden parcial sobre los vértices de  $X$ , que se restringe a un orden total sobre cada cara  $\sigma \in X$ , una matriz de configuración es una matriz  $(v_{ij})$  de vértices en  $X$  tal que:

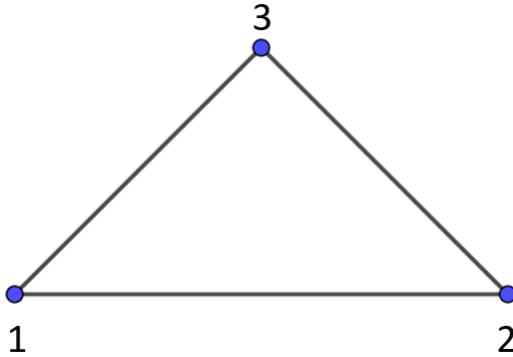
- 1) Cada fila está ordenada en orden no decreciente.
- 2) El conjunto de vértices que aparecen en cada fila, eliminando repeticiones, forman una cara de  $X$ .

3) No tiene filas repetidas.

**Definition 2.2.** Matriz de configuración minimal.

Una matriz de configuración se dice ser minimal si y solo si el resultado de eliminar cualquiera de sus columnas es una matriz con filas repetidas.

**Ejemplo 2.3.** Sean  $\{1,2,3\}$  los vértices de  $X$  con la relación de orden usual y las caras  $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ .



Existen 60 matrices de configuración minimales con tres filas. Es claro que el grupo simétrico de tres elementos,  $\Sigma_3$  actúa libre sobre estas matrices, con la acción dada por permutar filas. Tomando un representante por cada clase obtenemos las siguientes matrices de configuración minimales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

**Definition 2.4.**  $C(n, X)$

Se define  $C(n, X)$  como el complejo simplicial tal que:

- (i) Sus vértices son las matrices de configuraciones minimales con  $n$  filas y elementos en  $X$ .
- (ii) Una colección de estos vértices forma un simplejo si y solo si sus columnas se pueden intercalar en una matriz, de forma tal que el resultado sea una matriz de configuración.

Con las definiciones anteriores ya estamos en condiciones de enunciar el resultado fundamental de este capítulo:

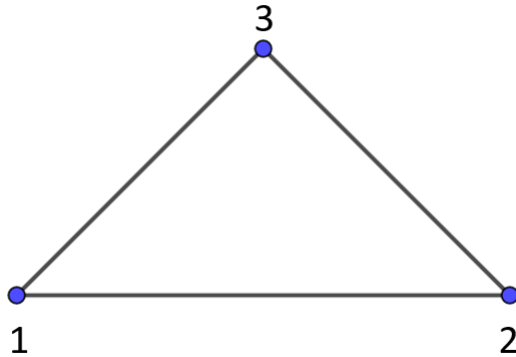
**Teorema 2.5.**  $|C(n, X)|$  tiene el mismo tipo de homotopía que el espacio de configuraciones de la realización geométrica de  $X$  con  $n$  puntos, es decir:

$$|C(n, X)| \simeq \text{Conf}(n, |X|).$$

Veamos algunos ejemplos relativos al *Teorema 2.5*:

**Ejemplo 2.6.** Es conocido que  $\text{Conf}(2, S^1) \cong S^1 \times (S^1 - 1) \simeq S^1$ . Veamos cómo está dado el modelo  $C(2, S^1)$ ,

Tomemos  $S^1$  con su estructura simplicial dada por la frontera del triángulo:



Las matrices de configuraciones minimales satisfacen:

- 1) No se repiten filas.
- 2) Las filas están ordenadas en orden no decreciente y sus elementos forman una cara.
- 3) Al quitar cualquier columna la matriz resultante tiene filas repetidas.

En nuestro ejemplo se puede ver fácilmente que las únicas matrices de configuración minimales posibles, tienen solo una columna y son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

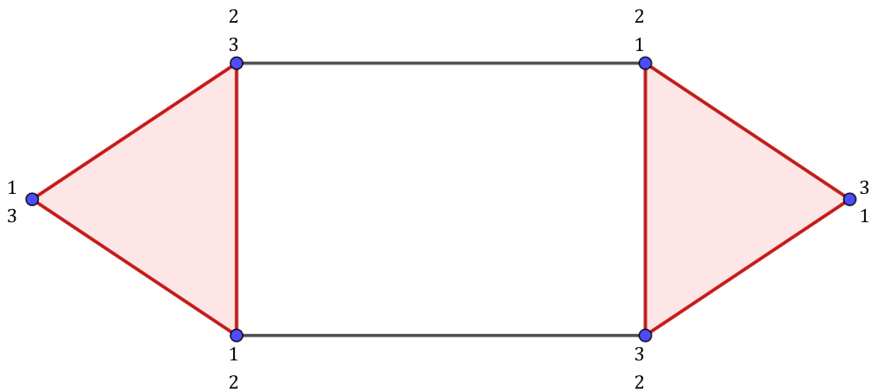
Entonces  $C(2, S^1)$  tiene los siguientes simplejos de dimensión uno:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y los siguientes simplejos de dimensión dos:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

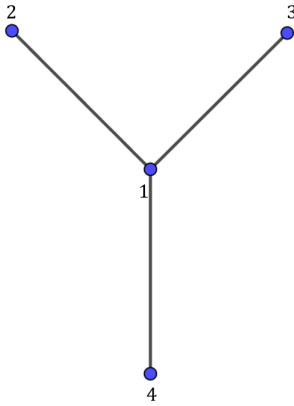
y  $C(2, S^1)$  no tiene simplejos de dimensión mayor a dos. Luego  $C(2, S^1)$  se realiza como



y en efecto es homotópico a  $S^1$ .

**Ejemplo 2.7.** Es fácil ver que la gráfica tipo "Y" tiene  $Conf(2, Y) \simeq S^1$ . Veamos el modelo  $C(2, Y)$ :

La gráfica tipo "Y" tiene estructura simplicial dada por



y los vértices de  $C(2, Y)$  son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es fácil observar que  $C(2, Y)$  no tiene simplejos de dimensión mayor o igual a dos y sus simplejos de dimensión uno son:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; & \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que  $C(2, Y)$  se realiza como la siguiente figura,



que en efecto es homotópica a  $S^1$ .

## 2.2 DIFERENCIA SIMPLICIAL

Sea  $A$  un subcomplejo de un complejo simplicial  $X$ , entonces desde un punto de vista topológico podemos pensar en el espacio  $|X| - |A|$  dado que  $|A| \subseteq |X|$ . Sin embargo este espacio diferencia no tiene porque ser la realización geométrica de un complejo simplicial. En esta sección se propone un modelo simplicial, cuya realización geométrica tiene el mismo tipo de homotopía que  $|X| - |A|$ .

### Definición 2.8. Diferencia Simplicial

Sean  $X$  y  $A$  complejos simpliciales abstractos, con  $A$  subcomplejo de  $X$ . Se define la diferencia simplicial  $X \ominus A$  como el complejo simplicial abstracto siguiente:

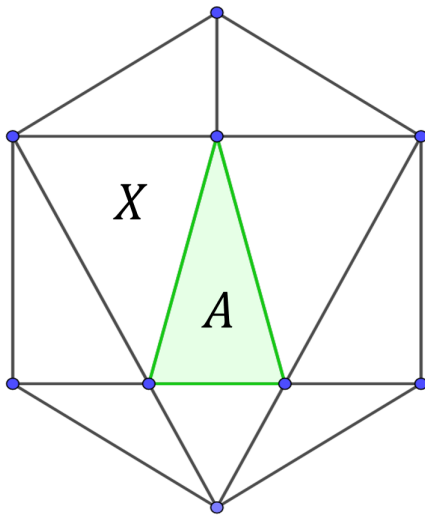
- (i) Sus vértices son los elementos minimales (respecto a la inclusión de conjuntos) de la familia de caras de  $X$  que no son caras de  $A$ .
- (ii) Una colección de estos vértices forman un simplejo si y solo si su unión es una cara de  $X$ .

**Teorema 2.9.** Si  $X$  es un complejo simplicial abstracto y  $A \subseteq X$  es un subcomplejo, entonces:

$$|X \ominus A| \simeq |X| - |A|.$$

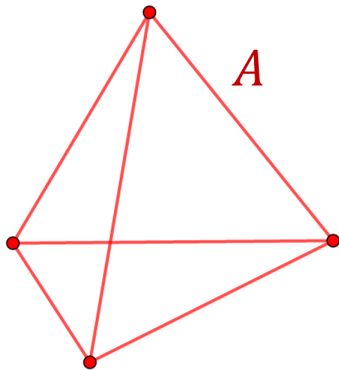
Antes de pasar a la prueba del teorema anterior veamos algunos ejemplos relativos a este.

**Ejemplo 2.10.** En la figura



$A$  es el triángulo central y  $X$  es el hexágono triangulado como se muestra. Entonces  $|X| - |A|$  es el hexágono con el hueco triangular central, el cual es homotópico a  $S^1$ . Por otra parte, los vértices de  $X \ominus A$  se reducen a los seis vértices en la periferia del hexágono, por lo que  $X \ominus A$  solo tiene caras de dimensión uno, precisamente la periferia del hexágono.

**Ejemplo 2.11.** Un ejemplo en el que el conjunto de los vértices de  $X \ominus A$  es más grande que  $V(X) - V(A)$  es el caso en que  $X = \Delta^3$  y  $A$  es su esqueleto de dimensión uno, como se muestra en la figura



En tal caso es claro que  $|X| - |A|$  es contráctil. Por otra parte  $V(X \ominus A)$  son las cuatro caras de dimensión dos de  $X$  y de hecho  $X \ominus A$  es el 3-simplejo completo en tales cuatro vértices.

*Demostración.* 2.9

Supongamos que los vértices de  $X$  son  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Utilicemos la realización geométrica estandar (utilizando coordenadas baricéntricas) para realizar a  $X$ .

$$|X| = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k : \alpha_i \geq 0; \sum \alpha_i = 1 \text{ y } \text{Supp}(\alpha) \in X\},$$

donde  $Supp(\alpha) = \{i : \alpha_i > 0\}$ .

Para un simplejo  $\sigma \in X$  definimos el subconjunto abierto de  $X$ :

$$U_X(\sigma) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in |X| : \forall i \in \sigma, \alpha_i > 0\}.$$

Es claro que  $U_X(\sigma)$  es un conjunto abierto no vacío.

Definamos  $b_\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  donde  $\alpha_i = \frac{1}{d+1}$  si  $i \in \sigma$  y  $\alpha_i = 0$  si  $i \notin \sigma$ ;  $d = |\{i \in \sigma\}|$ .

Notar que  $b_\sigma$  no es más que el baricentro de la realización geométrica de  $\sigma$ .

Como observación inicial tenemos que  $Supp(b_\sigma) \subseteq Supp(u)$ ,  $\forall u \in U_X(\sigma)$ .

Probemos ahora que  $U_X(\sigma)$  es contráctil. Para esto veamos que es un conjunto estrellado relativo a  $b_\sigma$ .

Sea  $u \in U_X(\sigma)$ ,  $t \in [0, 1] = I$ , y sea

$$\phi(t) = tb_\sigma + (1-t)u$$

el segmento de recta que une a  $b_\sigma$  con  $u$ .

Debemos probar que:

$$\phi(I) \subset U_X(\sigma).$$

Pero para  $t \in I$  con  $0 < t < 1$  se tiene que

$$Supp(\phi(t)) = Supp(tb_\sigma + (1-t)u) = Supp(u) \in U_X(\sigma),$$

lo que garantiza que  $\phi(t) \in U_X(\sigma)$ . Luego  $U_X(\sigma)$  es estrellado, abierto y por tanto contráctil.

Antes de continuar con la demostración veamos la siguiente:

**Proposición 2.12.** *El conjunto*

$$\mathcal{U} = \{U_X(\sigma) : \sigma \text{ es minimal en el conjunto de las caras de } X \text{ que no son caras de } A\}$$

es cubierta abierta de  $|X| - |A|$ . De hecho  $|X| - |A| = \bigcup U_X(\sigma)$ , donde la unión corre sobre los elementos minimales de las caras de  $X$  que no son caras de  $A$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha \in |X| - |A| \Rightarrow Supp(\alpha) \notin A$ , ahora podemos pensar en el conjunto

$$\{\beta : \beta \text{ es cara de } Supp(\alpha) \text{ y } \beta \notin A\}$$

ordenado por la inclusión y tomar minimales (notar que este conjunto no es vacío pues



$Supp(\alpha)$  pertenece a él). Sea ahora  $\beta_{min}$  uno de esos elementos minimales, entonces es claro que  $\alpha \in U_X(\beta_{min})$  y como  $\alpha$  fue un punto arbitrario en  $|X| - |A|$ , esto concluye la prueba de  $|X| - |A| \subseteq \bigcup U_X(\sigma)$ . La otra inclusión es evidente pues es fácil observar que  $U_X(\sigma) \subseteq |X| - |A|, \forall \sigma \notin A$  y en particular para los  $\sigma$  minimales.

□

Observemos que evidentemente

$$\bigcap_{j=1}^l U_X(\sigma_{i_j}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \bigcup_{j=1}^l \sigma_{i_j} \notin X, \\ U_X(\bigcup_{j=1}^l \sigma_{i_j}), & \text{si } \bigcup_{j=1}^l \sigma_{i_j} \in X. \end{cases}$$

Luego, hemos probado que la intersección de un conjunto finito de elementos de  $\mathcal{U}$  es vacía o contráctil.

Ahora, por el Lema del Nervio se tiene que

$$|X| - |A| \simeq |\mathcal{N}(\mathcal{U})|,$$

donde  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  es el nervio de la cubierta  $\mathcal{U}$ ; pero es fácil observar que  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  coincide con la definición de  $X \ominus A$ .

Por tanto:

$$|X \ominus A| \simeq |X| - |A|$$

y con esto termina la prueba del teorema.

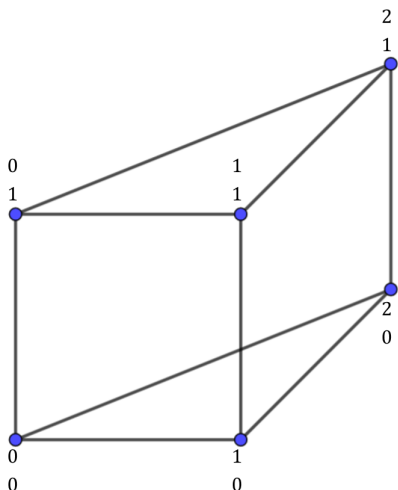
□

**Lema 2.13.** [4]

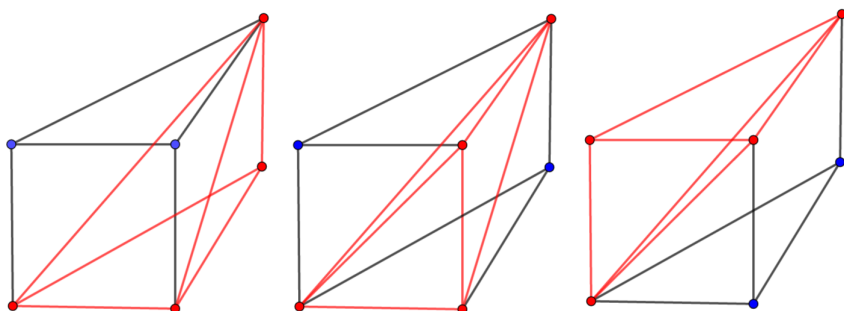
*Supongamos que  $X$  y  $Y$  son complejos simpliciales tales que cada uno tiene asociado un orden parcial sobre sus vértices que se restringe a un orden total sobre cada cara. Sea  $X \times Y$  el complejo simplicial cuyos vértices son los pares  $(x, y)$  con  $x \in X, y \in Y$  y las caras de  $X \times Y$  son de la forma  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_d, y_d)\}$  con  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_d; y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_d$  y la proyección a cada componente es una cara de su respectivo espacio; entonces:*

$$|X \times Y| \cong |X| \times |Y|.$$

**Ejemplo 2.14.** Veamos cómo queda el complejo simplicial producto  $\Delta^2 \times \Delta^1$  con la triangulación dada por el lema anterior:



En la figura anterior  $\Delta^2$  es el simplejo con vértices 0,1,2 mostrado horizontalmente, mientras que  $\Delta^1$  es el simplejo con vértices 0,1 mostrado verticalmente. Observemos los tres tetraedros en los que se está subdividiendo el prisma.



El primero (el inferior) está determinado por los vértices  $(0,0), (1,0), (2,0), (2,1)$ . Nótese que tales vértices están puestos de manera no decreciente y, de hecho, la forma en que crecen los índices de cada par corresponde a la barajada dada por recorrer primero los vértices de la base en su orden y luego subir. Lo mismo sucede con los otros dos tetraedros. Por ejemplo el intermedio tiene vértices  $(0,0), (1,0), (1,1), (2,1)$ .

Una propiedad importante en la subdivisión de  $\Delta^n \times \Delta^n$  según el lema anterior es que la diagonal en  $|\Delta^n \times \Delta^n| = |\Delta^n| \times |\Delta^n|$  está realizada por el subcomplejo  $D$  del producto  $\Delta^n \times \Delta^n$  consistente de los simplejos de la forma  $\{(i_0, i_0), (i_1, i_1), \dots, (i_d, i_d)\}$  con  $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_d \leq n$ . Más generalmente, la diagonal gorda en  $|X^n| = |X|^n$ , está realizada por el subcomplejo  $F$  de  $X^n$  consistente de los simplejos de la forma

$$(v_{10}, v_{20}, \dots, v_{n0}), (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n1}), \dots, (v_{1d}, v_{2d}, \dots, v_{nd})$$

con  $v_{i0} \leq v_{i1} \leq \dots \leq v_{id}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  y de modo que

$$(v_{i0} \leq v_{i1} \leq \dots \leq v_{id}) = (v_{j0} \leq v_{j1} \leq \dots \leq v_{jd})$$

para algún par de índices  $i, j$  distintos.

Además, en términos de la identificación anterior, la diagonal gorda está realizada por el subcomplejo  $F$  determinada por las caras de  $X^n$  cuya representación matricial tenga un par de filas coincidentes.

Veamos ahora la demostración del *Teorema 2.5*:

*Demostración.* Usando el *teorema 2.7* y *lema 2.9* tenemos

$$|X^n \ominus F| \simeq |X^n| - |F| = |X|^n - |F| = \text{Conf}(n, |X|)$$

y la conclusión se tiene de simplemente de observar que la definición de  $C(n, X)$  coincide con la descripción de  $X^n \ominus F$ .

□



# 3

---

## MODELO SIMPLICIAL DESORDENADO PARA ESPACIOS DE CONFIGURACIONES

---

*En este capítulo el autor de esta tesis propone un modelo simplicial para los espacios de configuraciones desordenados.*

**Definition 3.1.** Sea  $Z$  un espacio topológico,  $\Sigma_n$  el grupo simétrico en  $n$  letras y  $F$  la diagonal gorda en  $Z^n$ , entonces se define el espacio de configuraciones desordenadas del espacio  $Z$  en  $n$  puntos como:

$$\text{Conf}(n, Z)/\Sigma_n = (Z^n - F)/\Sigma_n.$$

### 3.1 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

En el capítulo anterior se construyó una good cover para  $|X| - |A|$ , dada por

$$\mathcal{U} = \{U_X(\sigma) : \sigma \text{ es minimal en el conjunto de las caras de } X \text{ que no son caras de } A\},$$

se probó también que  $\forall \alpha \notin A$ ,  $U_X(\alpha)$  es contráctil. Y para esto se utilizó de forma implícita la homotopía de "estrellar" dada por

$$\begin{aligned} H_\alpha : U_X(\alpha) \times I &\rightarrow U_X(\alpha) \\ H_\alpha(x, t) &= ta + (1-t)x \end{aligned}$$

donde  $a$  es el baricentro de  $\alpha$ .

Es claro que  $\Sigma_n$  actúa de manera natural sobre  $X^n$  con la acción dada por permutar filas, además como esta acción no influye sobre la condición de no tener filas repetidas entonces se puede restringir al conjunto  $X^n - F = \{\sigma \in X^n : \sigma \notin F\}$ . Esta acción es simplicial y pasa functorialmente mediante la realización geométrica a una acción topológica sobre el espacio  $|X|^n$  y su restricción a  $|X|^n - |F|$  también es acción topológica. Además si  $sd(X)$  denota la subdivisión baricéntrica de  $X$ , entonces las mismas afirmaciones anteriores son válidas para  $sd(X^n) - sd(F)$  y para  $|sd(X^n)| - |sd(F)|$ .

A partir de este párrafo en lo adelante consideraremos el espacio  $|sd(X^n)| - |sd(F)|$  y su correspondiente cubierta:

$$\mathcal{U}' = \{U_X(\sigma) : \sigma \text{ es minimal en } sd(X) - sd(F)\},$$

Aplicando los resultados del capítulo anterior, obtenemos directamente que

$$Conf(n, sd(X)) \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U}') = C(n, sd(X))$$

Observaciones importantes:

- (1) Si  $\sigma$  es minimal en el conjunto de los simplejos de  $sd(X)$  que no son caras de  $sd(F)$ , entonces  $\forall g \in \Sigma_n$ ,  $g \cdot \sigma$  también lo es. Esto se debe a que la acción de permutar filas no influye sobre la condición de no tener filas repetidas, ni sobre la minimalidad de esta.
- (2)  $\forall g \in \Sigma_n$  y  $\forall x \in |sd(X)|$  se tiene que  $g \cdot Supp(x) = Supp(g(x))$ .
- (3)  $\forall g \in \Sigma_n$ , se tiene

$$g(H_\sigma(x, t)) = g(t \cdot a + (1 - t)x) = t \cdot g(a) + (1 - t)g(x) = H_{g \cdot \sigma}(g(x), t).$$

**Lema 3.2.**  $\forall g \in \Sigma_n$ ,  $\forall U_X(\sigma) \in \mathcal{U}'$ , se tiene que  $g(U_X(\sigma)) = U_X(g \cdot \sigma)$ .

Para probar este lema nos basaremos en las observaciones (1) y (2). Además utilizaremos la equivalencia  $x \in U_X(\sigma) \Leftrightarrow Supp(x) \supseteq \sigma$ .

*Demostración.* Sea  $g(x) \in g(U_X(\sigma))$ , entonces

$$Supp(g(x)) = g \cdot Supp(x) \supseteq g \cdot \sigma \Rightarrow g(x) \in U_X(g \cdot \sigma),$$

luego  $g(U_X(\sigma)) \subseteq U_X(g \cdot \sigma)$ .

Sea ahora  $z \in U_X(g \cdot \sigma)$ , entonces

$$Supp(z) \supseteq g \cdot \sigma \Rightarrow g^{-1} \cdot Supp(z) = Supp(g^{-1}(z)) \supseteq \sigma \Rightarrow g^{-1}(z) \in U_X(\sigma)$$

pero  $g \cdot g^{-1}(z) = z$ , luego  $z \in g(U_X(\sigma))$ , de aquí se tiene que  $U_X(g \cdot \sigma) \supseteq g(U_X(\sigma))$ . Por tanto  $g(U_X(\sigma)) \in U_X(g \cdot \sigma)$ .

□

Definamos ahora  $\bar{U}(\bar{\sigma}) = \pi(U_X(\sigma))$ , donde  $\pi$  es la proyección en clases y  $U_X(\sigma) \in \mathcal{U}'$ . La notación  $\bar{\sigma}$  se justifica porque  $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \bar{\sigma}$ , se tiene  $\pi(U_X(\sigma_1)) = \pi(U_X(\sigma_2))$ .

**Proposición 3.3.**

$$\bar{\mathcal{U}} = \{\bar{U}_{\bar{\sigma}} : \sigma \text{ es minimal } |sd(X) - sd(F)|\}$$

es una cubierta abierta de  $(|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n$ . De hecho se tiene la igualdad

$$(|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n = \bigcup_{\bar{\sigma}} \bar{U}_{\bar{\sigma}}.$$

*Demostración.* Es claro que  $\bar{U}(\bar{\sigma})$  es abierto pues  $\pi$  es una función abierta en este caso.

Sea  $\bar{x} \in (|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n \Rightarrow x \in |sd(X)|^n - |sd(F)| \Rightarrow \exists \sigma : x \in U_X(\sigma) \Rightarrow \pi(x) = \bar{x} \in \bar{U}(\bar{\sigma})$ ,  
luego

$$(|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n \subseteq \bigcup_{\bar{\sigma}} \bar{U}_{\bar{\sigma}}.$$

La otra inclusión es evidente pues es claro que

$$\begin{aligned} U_X(\sigma) &\subseteq |sd(X)|^n - |sd(F)| \\ \Rightarrow \pi(U_X(\sigma)) &\subseteq (|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n \\ \Leftrightarrow \bar{U}(\bar{\sigma}) &\subseteq (|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n. \end{aligned}$$

Por tanto

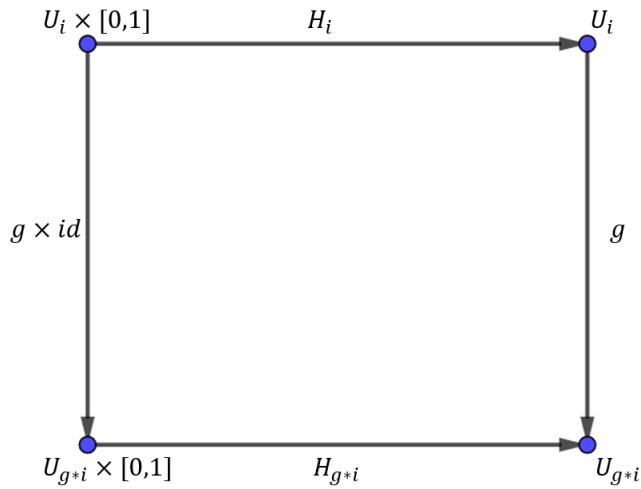
$$(|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n = \bigcup_{\bar{\sigma}} \bar{U}_{\bar{\sigma}},$$

como se quería probar.

□

Antes de continuar con la construcción pasemos a probar el siguiente:

**Lema 3.4.** Sean  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta de un espacio  $X$ ,  $\{H_i : U_i \times [0,1] \rightarrow U_i\}$  una familia de homotopías y  $G$  un grupo que actúa sobre  $X$  y actúa sobre  $I$  de forma tal que  $g(U_i) = U_{g \cdot i}$  y el siguiente diagrama es conmutativo para todo  $g \in G$ .



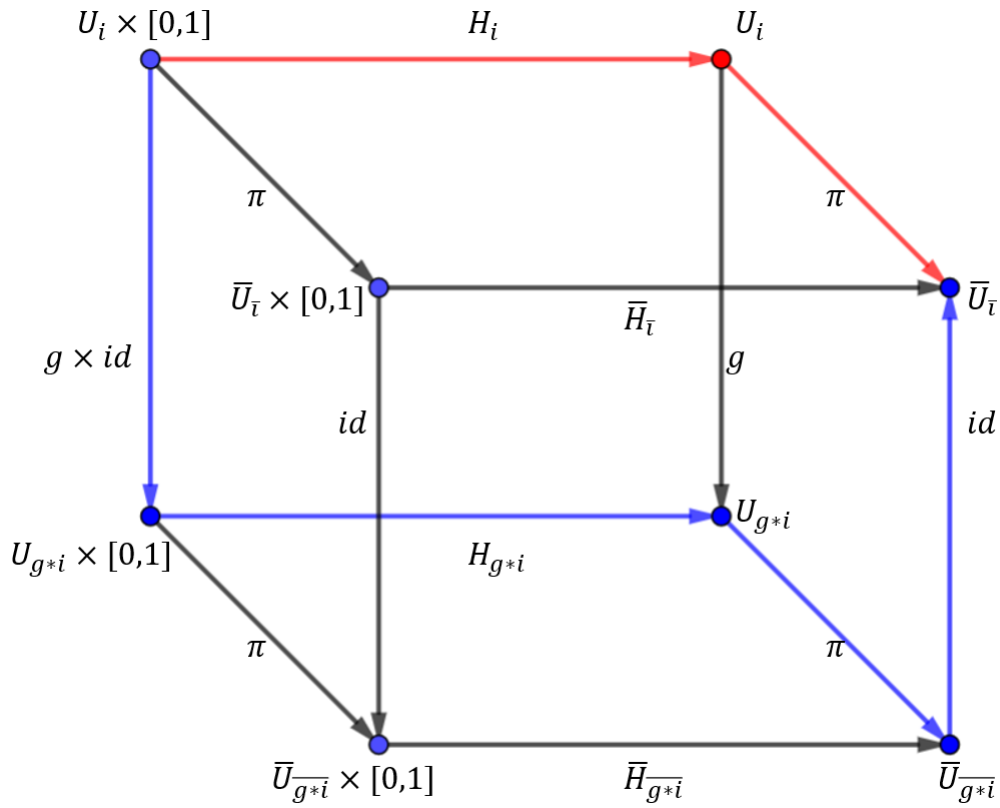
Entonces:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\bar{i}} : [\bar{U}_{\bar{i}} = \pi(U_i)] \times [0,1] &\rightarrow \bar{U}_{\bar{i}} \\ \bar{H}_{\bar{i}}(\bar{x}, t) &= \overline{H_i(x, t)}, \quad x \in \bar{x} \cap U_i \end{aligned}$$

es una homotopía.

*Demostración.* Basemos la prueba en el siguiente diagrama:





Por la hipótesis (3) tenemos que el cuadrado de atrás es conmutativo.

Veamos ahora que las caras laterales del cubo son conmutativas, notar que es suficiente verlo para una sola.

Es fácil ver que está bien definido pues  $\pi(U_{g \cdot i}) = \pi(U_i)$ . Sea  $x \in U_i$ , entonces  $id(\pi(g(x))) = id(\bar{x}) = \bar{x} = \pi(x)$ .

Por tanto las caras laterales son conmutativas.

La conmutatividad de la cara frontal es inmediata, puesto que si  $x \in \bar{U}_{\bar{i}}$ , entonces

$$\overline{H_{\bar{i}}}(x, t) = \overline{H_i}(x, t) = \overline{g(H_i(x, t))} = \overline{(H_{g \cdot i}(g(x), t))} = \overline{H_{g \cdot i}}(g(x), t).$$

Como resultado inmediato de la afirmación anterior se obtiene que  $\overline{H_{\bar{i}}}$  está bien definida.

Veamos ahora que la tapa de arriba es conmutativa:

Sea  $x \in U_i$ , de la conmutatividad de los cuadros que ya hemos visto se deduce que obtenemos el mismo resultado al seguir el camino rojo que al seguir el azul, por tanto

$$id(\pi(H_{g \cdot i}(g(x), t))) = \pi(H_{g \cdot i}(g(x), t)) = \pi(g(H_i(x, t))) = \overline{g(H_i(x, t))} = \overline{H_i}(x, t) = \overline{H_{\bar{i}}}(x, t).$$

De la conmutatividad de estas caras se infiere la conmutatividad de todo el cubo y la continuidad de  $\overline{H}_i(\bar{x}, t)$ , como se quería probar.  $\square$

Regresando a la construcción que se estaba realizando, ya habíamos observado que  $\mathcal{U}$ ,  $G$  y  $\{H_i\}_{i \in I}$  cumplen con las hipótesis del lema anterior. Luego como resultado directo obtenemos la siguiente:

**Proposición 3.5.**  $\overline{U}(\bar{\sigma}) = \pi(U_X(\sigma))$  es contráctil.

Vemos ahora qué pasa con la intersección de un número finito de elementos en  $\overline{\mathcal{U}}$ .

**Proposición 3.6.**

$$\pi(U_X(\sigma_1)) \cap \dots \cap \pi(U_X(\sigma_k)) = \bigcup_{g_1, \dots, g_k \in \Sigma_n} \pi(U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k))$$

*Demostración.*

Sea  $\bar{x} \in \pi(U_X(\sigma_1)) \cap \dots \cap \pi(U_X(\sigma_k))$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x} \in \pi(U_X(\sigma_1)), \dots, \bar{x} \in \pi(U_X(\sigma_k)) \\ &\Rightarrow \exists g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_k^{-1} \in \Sigma_n : g_1(x) \in U_X(\sigma_1), \dots, g_k(x) \in U_X(\sigma_k) \\ &\Rightarrow x \in U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k) \end{aligned}$$

Luego como  $\bar{x}$  se tomó como un elemento arbitrario, entonces tenemos que

$$\pi(U_X(\sigma_1)) \cap \dots \cap \pi(U_X(\sigma_k)) \subseteq \bigcup_{g_1, \dots, g_k \in \Sigma_n} \pi(U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k))$$

Por otro lado, la inclusión

$$\pi(U_X(\sigma_1)) \cap \dots \cap \pi(U_X(\sigma_k)) \supseteq \bigcup_{g_1, \dots, g_k \in \Sigma_n} \pi(U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k))$$

se tiene de forma natural, pues cada elemento de la unión está contenido en la intersección que aparece en el miembro izquierdo.

Por tanto tenemos la doble inclusión y con ello la igualdad que se quería probar.  $\square$

**Definition 3.7.** Un complejo simplicial  $K$ , dado con una acción simplicial de un grupo  $G$  sobre  $K$  se le llama un  $G$ - complejo.

**Definition 3.8.** Un  $G$ - complejo  $K$  se dice semiregular si se cumple que  $\forall g \in G$  y  $\forall \sigma \in K$ ,  $g$  deja fijo los vértices de  $\sigma \cap g \cdot \sigma$ .

**Definition 3.9.** Un  $G$ - complejo  $K$  se dice regular si dados  $g_1, g_2, \dots, g_m \in G$ , tales que  $v_1, v_2, \dots, v_m$  son vértices de un simplejo en  $K$  y  $g_1 \cdot v_1, g_2 \cdot v_2, \dots, g_m \cdot v_m$  son vértices de un simplejo en  $K$ . Entonces  $\exists g \in G: g \cdot v_i = g_i \cdot v_i, i = 1, \dots, m$ .

**Proposición 3.10.** Si  $K$  es un  $G$ - complejo semiregular entonces  $sd(K)$  es un  $G$ - complejo regular.

Las dos definiciones anteriores, así como la proposición anterior y su demostración las podemos encontrar en [2, Capítulo 2].

**Lema 3.11.**

$\forall g \in \Sigma_n$  y  $\forall \sigma \in X^n$ , se tiene que si  $v$  es un vértice de  $\sigma \cap g \cdot \sigma$ , entonces  $g \cdot v = v$ .

*Demostración.* Recordemos que  $X$  es finito y posee un orden parcial que se restringe a un orden total sobre sus caras. Como  $X$  es finito podemos extender el orden parcial sobre  $X$  a un orden total. Luego consideremos a  $X$  como un conjunto totalmente ordenado con un orden que sobre sus caras coincide con el orden original.

Sea  $v \in X^n$  un vértice y sea  $g \in \Sigma_n$  tal que  $v \neq g \cdot v$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $v$  está ordenado, es decir  $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  (transpuesto) con  $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$ . Como  $v \neq g \cdot v$ , entonces existe un  $i$ , tal que  $v_{g \cdot i} \neq v_i$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $v_{g \cdot i} > v_i$ , entonces necesariamente tiene que existir un  $j < i$  tal que  $v_{g \cdot j} < v_j$ . Luego

$$v^T = (v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n), (g \cdot v)^T = (v_{g \cdot 1}, \dots, v_{g \cdot j}, \dots, v_{g \cdot i}, \dots, v_{g \cdot n})$$

y si intentáramos juntarlos claramente tendríamos una contradicción de órdenes en sus filas  $j$  e  $i$ . Por tanto  $\sigma$  y  $g \cdot \sigma$  no pueden formar un simplejo y claramente tampoco pueden ser vértices de un mismo simplejo.

Sea ahora  $v \in \sigma \cap g \cdot \sigma$ , entonces  $v \in g \cdot \sigma$  y  $g \cdot v \in g \cdot \sigma$ , del análisis hecho en el párrafo anterior tenemos que  $g \cdot v = v$ , como se quería probar.

□

Luego con el lema anterior hemos probado que  $X^n$  es un  $\Sigma_n$ - complejo semiregular y por tanto  $sd(X^n)$  es un  $\Sigma_n$ - complejo regular.

**Teorema 3.12.**

$$\bar{U}_{\sigma_1} \cap \bar{U}_{\sigma_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{\sigma_k} = \pi(U_X(\sigma_1)) \cap \dots \cap \pi(U_X(\sigma_k))$$

es vacía o contráctil.

*Demostración.* Por la *proposición 3.6* tenemos que

$$\bar{U}_{\sigma_1} \cap \bar{U}_{\sigma_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{\sigma_k} = \bigcup_{g_1, \dots, g_k \in \Sigma_n} \pi(U_X(g_1 \cdot \sigma_1)) \cap \pi(U_X(g_2 \cdot \sigma_2)) \cap \dots \cap \pi(U_X(g_k \cdot \sigma_k)),$$

de aquí que si todos los elementos de la unión en el miembro derecho de esta última igualdad son vacíos, entonces

$$\bar{U}_{\sigma_1} \cap \bar{U}_{\sigma_2} \cap \dots \cap \bar{U}_{\sigma_k} = \emptyset.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g_2 \cdot \sigma_2) \cap \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k) \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^k g_i \cdot \sigma_i \in sd(X) - sd(F) \\ & \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^k g g_i \cdot \sigma_i \in sd(X) - sd(F), \quad \forall g \in \Sigma_n \\ & \Rightarrow U_X(g g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g g_2 \cdot \sigma_2) \cap \dots \cap U_X(g g_k \cdot \sigma_k) \neq \emptyset, \quad \forall g \in \Sigma_n. \end{aligned}$$

Ahora sean

$$U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g_2 \cdot \sigma_2) \cap \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k) \neq \emptyset$$

y

$$U_X(g'_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g'_2 \cdot \sigma_2) \cap \dots \cap U_X(g'_k \cdot \sigma_k) \neq \emptyset,$$

entonces

$$\bigcup_{i=1}^k g_i \cdot \sigma_i \in sd(X) - sd(F) \subset sd(X) \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^k g'_i \cdot \sigma_i \in sd(X) - sd(F) \subset sd(X),$$

además

$$g'_1 g_1^{-1} g_1 \cdot \sigma_1 = g'_1 \cdot \sigma_1, \quad g'_2 g_2^{-1} g_2 \cdot \sigma_2 = g'_2 \cdot \sigma_2, \dots, \quad g'_k g_k^{-1} g_k \cdot \sigma_k = g'_k \cdot \sigma_k,$$

es claro que estas dos últimas afirmaciones también son válidas para los vértices de los  $\sigma_i$ ,

luego utilizando la *Proposición 3.10* tenemos que  $\exists g \in \Sigma_n$  tal que

$$\begin{aligned} g \cdot g_1 \cdot \sigma_1 &= g'_1 \cdot \sigma_1, \quad g \cdot g_2 \cdot \sigma_2 = g'_2 \cdot \sigma_2, \dots, \quad g \cdot g_k \cdot \sigma_k = g'_k \cdot \sigma_k \\ \Rightarrow U_X(g'_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g'_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g'_k \cdot \sigma_k) &= g(U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k)) \\ \Rightarrow \pi(U_X(g'_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g'_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g'_k \cdot \sigma_k)) &= \pi(g(U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k))) \\ \Rightarrow \pi(U_X(g'_1 \cdot \sigma_1) \cap U_X(g'_2 \cdot \sigma_2) \dots \cap U_X(g'_k \cdot \sigma_k)) &= \pi(U_X(g_1 \cdot \sigma_1) \cap \dots \cap U_X(g_k \cdot \sigma_k)) \end{aligned}$$

Luego

$$\overline{U}_{\sigma_1} \cap \overline{U}_{\sigma_2} \cap \dots \cap \overline{U}_{\sigma_k} = \pi(U_X(\sigma_1) \cap U_X(\sigma_2) \cap \dots \cap U_X(\sigma_k))$$

y por el *lema 3.4* es contráctil, como se quería probar. □

Con todo lo visto anteriormente hemos probado el siguiente:

**Teorema 3.13.**  $\overline{\mathcal{U}}$  es una good cover y por el lema del nervio tenemos que

$$(|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n \simeq |\mathcal{N}(\overline{\mathcal{U}})|.$$

### 3.2 RELACIÓN ENTRE EL MODELO ORDENADO Y EL MODELO DESORDENADO

Al inicio de este capítulo vimos que

$$|sd(X)|^n - |sd(F)| \simeq |\mathcal{N}(U')| = |sd(X)^n \ominus sd(F)| = C(n, sd(X)),$$

en este capítulo también hemos construido el complejo simplicial  $\mathcal{N}(\overline{\mathcal{U}})$  y probado que

$$\pi(|sd(X)|^n - |sd(F)|) = (|sd(X)|^n - |sd(F)|)/\Sigma_n \simeq |\mathcal{N}(\overline{\mathcal{U}})|,$$

entonces es natural preguntarse qué relación existe entre  $\mathcal{N}(\overline{\mathcal{U}})$  y  $\pi(C(n, sd(X))) = C(n, sd(X))/\Sigma_n$ .

La respuesta a esta pregunta la da el siguiente:

**Teorema 3.14.** Los complejos simpliciales  $\mathcal{N}(\overline{\mathcal{U}})$  y  $\pi(C(n, sd(X))) = C(n, sd(X))/\Sigma_n$  son isomorfos. Es decir

$$\mathcal{N}(\overline{\mathcal{U}}) \cong C(n, sd(X))/\Sigma_n.$$

*Demostración.*

Definamos:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{N}(U')/\Sigma_n &\rightarrow \overline{\mathcal{U}}, \\ f(\overline{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}) &= (\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \dots, \overline{\sigma_k}). \end{aligned}$$

Primero veamos que cada elemento tiene imagen:

Sea  $\overline{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}')/\Sigma_n \Rightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in \mathcal{N}(\mathcal{U}')$ , a su vez esto implica que existen abiertos  $U_X(\sigma_1), U_X(\sigma_2), \dots, U_X(\sigma_k) \in \mathcal{U}'$  tales que

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^k U_X(\sigma_i) \neq \emptyset &\Rightarrow \pi(\bigcap_{i=1}^k U_X(\sigma_i)) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \bigcap_{i=1}^k \pi(U_X(\sigma_i)) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \overline{U_{\sigma_1}}, \overline{U_{\sigma_2}}, \dots, \overline{U_{\sigma_k}} \in \overline{\mathcal{U}} \text{ y } \bigcap_i^k \overline{U_{\sigma_i}} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \dots, \overline{\sigma_k}) \in \overline{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Ahora veamos que  $f$  está bien definida:

Sean  $\overline{\alpha}, \overline{\alpha'} \in \mathcal{N}(\mathcal{U})/\Sigma_n$ , con  $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$ , entonces

$$\begin{aligned} \alpha' = g \cdot \alpha &\Rightarrow \forall, \sigma'_i = g_i \cdot \sigma_i \\ &\Rightarrow \overline{\sigma'_i} = \overline{\sigma_i}, \forall i \\ &\Rightarrow f(\overline{\alpha'}) = f(\overline{\alpha}), \end{aligned}$$

como se quería probar.

Además es fácil darse cuenta de que si  $\overline{\alpha} \subseteq \overline{\beta}$ , entonces  $f(\overline{\alpha}) \subseteq f(\overline{\beta})$ . Luego  $f$  es una función simplicial.

De igual forma podemos definir:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \overline{\mathcal{U}} &\rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})/\Sigma_n, \\ f^{-1}(\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \dots, \overline{\sigma_k}) &= \overline{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}. \end{aligned}$$

Similarmente a como se hizo con  $f$ , se prueba que  $f^{-1}$  está bien definida y además es claro que  $f^{-1}$  es inversa de  $f$ . Por tanto  $f$  es un isomorfismo de complejos simpliciales, como se quería probar.

□

Luego podemos describir a  $C(n, sd(X))/\Sigma_n$  como el complejo simplicial tal que:

- (i) Sus vértices son las proyecciones a clases de los vértices en  $C(n, sd(X))$ .
- (ii) Una colección  $\{\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \dots, \overline{\sigma_k}\}$  de estos vértices forman un simplejo en  $C(n, sd(X))/\Sigma_n$  si y solo si existen representantes  $\sigma_1 \in \overline{\sigma_1}, \sigma_2 \in \overline{\sigma_2}, \dots, \sigma_k \in \overline{\sigma_k}$ , tales que  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$  formen un simplejo en un simplejo en  $C(n, sd(X))$ .

Otra pregunta interesante que podemos hacernos es, ¿qué relación existe entre  $sd(C(n, X))$  y  $C(n, sd(X))$  y sus correspondientes espacios cocientes? La respuesta viene dada por el siguiente:

**Teorema 3.15.**

$$sd(C(n, X)) \cong C(n, sd(X)) \text{ y por consiguiente } sd(C(n, X))/\Sigma_n = C(n, sd(X))/\Sigma_n.$$

*Demostración.*

Similarmente a como se probó el teorema anterior, construyamos:

$$q : sd(C(n, X)) \rightarrow C(n, sd(X)),$$

$$q((b_{\sigma_{11}\sigma_{12}\dots\sigma_{1r_1}}, b_{\sigma_{11}\sigma_{12}\dots\sigma_{1r_1}\sigma_{21}\sigma_{22}\dots\sigma_{2r_2}}, \dots, b_{\sigma_{11}\sigma_{12}\dots\sigma_{1r_1}\dots\sigma_{k1}\sigma_{k2}\dots\sigma_{kr_k}})) =$$

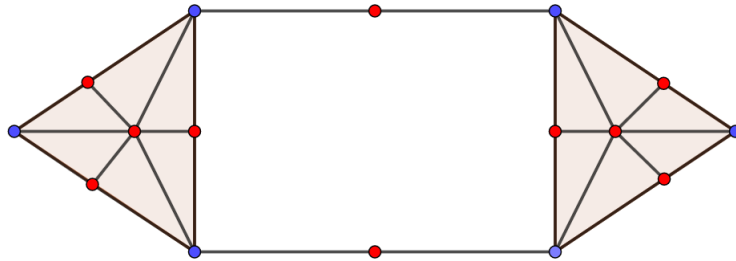
$$(b_{\sigma_{11}} b_{\sigma_{11}\sigma_{12}} \dots b_{\sigma_{11}\sigma_{12}\dots\sigma_{1r_1}}, b_{\sigma_{21}} b_{\sigma_{21}\sigma_{22}} \dots b_{\sigma_{21}\sigma_{22}\dots\sigma_{2r_2}}, \dots, b_{\sigma_{k1}} b_{\sigma_{k1}\sigma_{k2}} \dots b_{\sigma_{k1}\sigma_{k2}\dots\sigma_{kr_k}}).$$

Si observamos que  $(\sigma_{j1}\sigma_{j2}\dots\sigma_{jr_j})$  es un vértice de  $X \ominus F$  si y solo si  $b_{\sigma_{j1}} b_{\sigma_{j1}\sigma_{j2}} \dots b_{\sigma_{j1}\sigma_{j2}\dots\sigma_{jr_j}}$  es un vértice para todo  $j$ , entonces es sencillo probar que  $q$  está bien definido y tiene una inversa "natural"  $q^{-1}$ , con lo que se concluye la prueba.

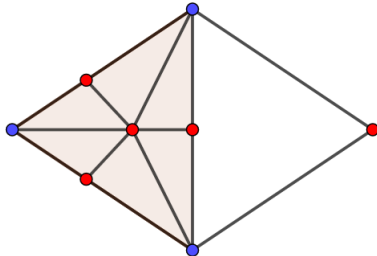
□

**Ejemplo 3.16.**

En el capítulo anterior vimos una realización para la estructura simplicial de  $C(2, S^1)$ .



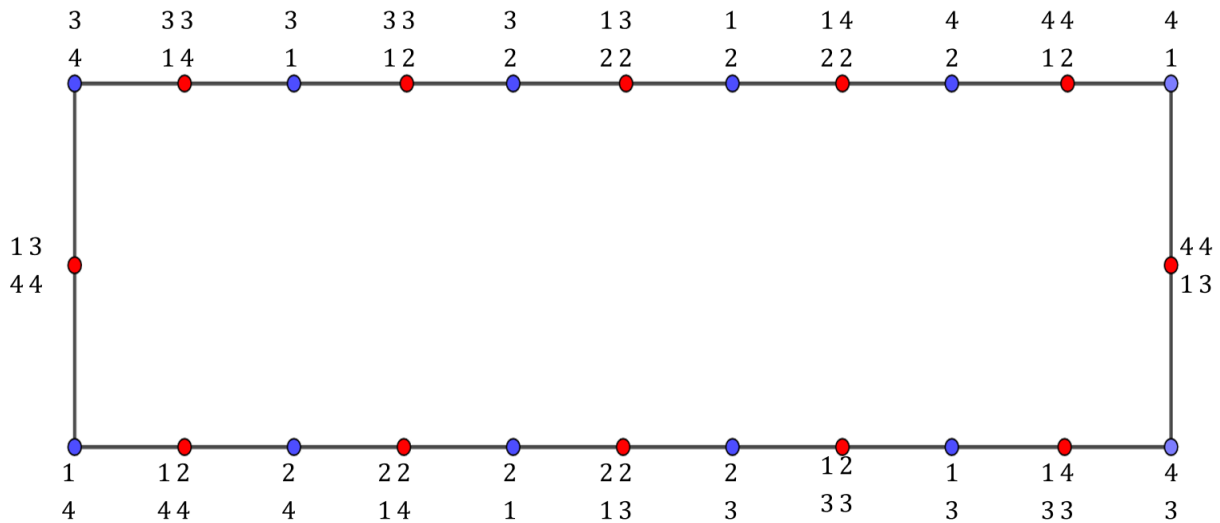
En la figura los puntos rojos representan a los nuevos vértices que aparecen al tomar baricentro. A partir de esta veamos ahora la estructura de  $sd(C(2, S^1))/\Sigma_2$ .



Esta figura es el resultado de primero hacer reflexión con respecto al eje imaginario que pasa por los baricentros de los símplexes maximales de dimensión uno y luego identificar estos puntos.

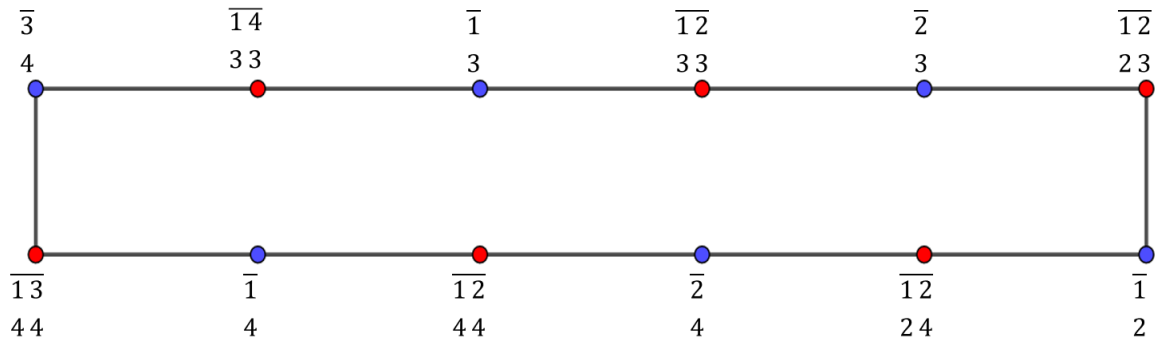
**Ejemplo 3.17.** También vimos en el capítulo anterior el modelo para las configuraciones en dos puntos del gráfico tipo "Y",  $C(2, Y)$ . Veamos ahora el modelo cociente para  $sd(C(2, Y))/\Sigma_2$ .

Al subdividir a  $C(2, Y)$  obtenemos la siguiente realización



En la figura estamos identificando el baricentro de un simplejo con el nombre de este simplejo.

Luego al pasar al cociente nos queda la siguiente estructura:





## CONCLUSIONES

---

En este trabajo se mostró en detalle la construcción de un complejo simplicial para la diferencia  $X - A$ , donde  $X$  es un complejo simplicial y  $A$  es subcomplejo arbitrario de  $X$ . Utilizando esto se mostró un modelo simplicial para espacios de configuraciones ordenados, cuyo espacio base sea un complejo simplicial. Como contribución original de este trabajo se propuso un nuevo modelo simplicial para espacios de configuraciones desordenados cuyo espacio base sea un complejo simplicial y se muestra su relación con el modelo para el caso ordenado. Como trabajos futuros se propone aplicar los modelos expuestos anteriormente a los espacios de configuraciones de esferas y de sus esqueletos de dimensión arbitraria utilizando Teoría de Morse Discreta para reducir su dimensión. En este sentido, al momento, ya se tiene como resultado la construcción de un campo gradiente discreto sobre el espacio ordenado, y para el caso de las configuraciones en dos puntos, ya se obtuvieron los resultados teóricos esperados, se está trabajando en la caracterización de las celdas críticas para luego proceder en su conteo en un caso general, en este sentido se ha experimentado computacionalmente y los resultados obtenidos son consecuentes con otros resultados conocidos por otras teorías como la homología y la cohomología. Como resultados inmediatos se espera que próximamente se obtengan los resultados teóricos esperados para espacios de configuraciones ordenados de esferas y de sus esqueletos. Como resultado a mediano plazo se espera poder calcular la dimensión homotópica de los espacios de configuraciones de esferas desordenados y de sus esqueletos, hoy en día estas dimensiones son desconocidas.



# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] A. D. Abrams. *Configuration spaces and braid groups of graphs*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2000. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley.
- [2] R. Ayala, E. Domínguez, and A. Quintero. *Elementos de la teoría de homología clásica*, volume 65. Universidad de Sevilla, 2002.
- [3] K. Barnett and M. Farber. Topology of configuration space of two particles on a graph, i. *Algebraic & Geometric Topology*, 9(1):593–624, 2009.
- [4] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of algebraic topology*, volume 2193. Princeton University Press, 2015.
- [5] E. Fadell and L. Neuwirth. Configuration spaces. *Mathematica Scandinavica*, 10:111–118, 1962.
- [6] M. Farber and E. Hanbury. Topology of configuration space of two particles on a graph, ii. *Algebraic & Geometric Topology*, 10(4):2203–2227, 2010.
- [7] R. Ghrist. Configuration spaces, braids, and robotics. In *Braids: Introductory Lectures on Braids, Configurations and Their Applications*, pages 263–304. World Scientific, 2010.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [9] D. Lütgehetmann. *Configuration spaces of graphs*. PhD thesis, Master’s thesis, Freie Universität Berlin, 2014.
- [10] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC Press, 2018.

- [11] J. Świątkowski. Estimates for homological dimension of configuration spaces of graphs. In *Colloq. Math.*, volume 89, pages 69–79, 2001.
- [12] B. Totaro. Configuration spaces of algebraic varieties. *Topology*, 35(4):1057–1067, 1996.
- [13] J. D. Wiltshire-Gordon. Models for configuration space in a simplicial complex. *Colloq. Math.*, 155(1):127–139, 2019.