



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE  
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO  
POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICAS**

**Número de cruce rectilíneo**

**TESIS**

Que presenta

**JENIFER VIAFARA CHANCHI**

Para obtener el grado de  
**MAESTRA EN CIENCIAS  
EN LA ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICAS**

Director de Tesis: **Dr. Ruy Fabila Monroy**

Ciudad de México

Agosto 8, 2019



*A mi amado padre*



---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de grafos . . . . .	1
1.2. Rudimentos de geometría combinatoria y algoritmos . .	7
<b>2. Número de cruce</b>	<b>9</b>
2.1. Cotas inferiores para el número de cruce rectilíneo para el grafo completo . . . . .	17
2.2. Cotas superiores para el número de cruce rectilíneo para el grafo completo . . . . .	25
2.2.1. Como encontrar puntos candidatos recorriendo celdas . . . . .	26
2.2.2. Un algoritmo para calcular $\overline{cr}(K_n)$ en tiempo cuadrático . . . . .	27
2.2.3. Duplicación de puntos . . . . .	30
2.2.4. Tiempo de ejecución para calcular el número de cruce rectilíneo al actualizar su conjunto de puntos	32

<b>3. Número de cruce rectilíneo para grafos en general</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

---

# AGRADECIMIENTOS

---

Quiero agradecer al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) por su contribución en mi formación matemática, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que sin lugar a duda me permitió realizar mi maestría. Este trabajo tesis fue parcialmente apoyado por el proyecto de Ciencia Básica CONACYT número 253261.

Agradezco al Dr. Ruy Fabila Monroy, por su orientación como mi asesor en temas tan interesantes de la matemática, por el tiempo y la confianza depositada en mi durante estos dos años.

A mi madre, abuela y hermana por ser los pilares de mi vida, guiarme y creer en mi capacidad para la culminación de esta etapa. A Pablo Cruz, por impulsarme a ser mi mejor versión, y su apoyo incondicional en este proceso de aprendizaje, agradezco profundamente su compañía. Agradezco a mi amiga Lidia por mantenerme motivada, y mis compañeros por hacer amena mi estancia en México.



---

# RESUMEN

---

Este trabajo versa sobre el estado del arte del número de cruce rectilíneo del grafo completo. Se presentan algunos de los avances más significativos sobre el problema de minimizar dicho número. En particular presentamos los conceptos de  $j$ -aristas,  $k$ -conjuntos, mutación secuencias circulares, duplicación de puntos y algunos patrones que recopilan la información del número de cruce rectilíneo. Por medio de estos se consiguieron las mejores cotas inferiores y superiores.

Para este problema el uso de computadores en busca de una solución ha sido primordial, por lo que también serán descritos algoritmos que faciliten este cálculo, en particular un algoritmo de tiempo  $O(n^2 \log(n))$  para calcular los cruces de cualquier grafo geométrico.



---

# ABSTRACT

---

This work presents the state of the art on the research on the rectilinear crossing number of the complete graph. We highlight some of the most significant progress on the problem of minimizing this number. In particular we study concepts of  $j$ -edges,  $k$ -sets, mutation, circular sequences, duplication of points, and some patterns that collect the information of the rectilinear crossing number. These have been instrumental in obtaining the best lower and upper bounds for this number. The use of computers have been instrumental for obtaining the upper bound. We describe the algorithms used in obtaining the upper bound. We also describe an  $O(n^2 \log n)$  time algorithm for computing the number of pairs of edges that cross in a given geometric graph.



---

# INTRODUCCIÓN

---

El problema del número de cruce en grafos, consiste en dado un grafo encontrar el mínimo de cruces entre sus aristas sobre todos los dibujos del grafo. Donde cada cruce es la intersección de dos aristas, menos en el caso en que se unan en sus extremos. Existen diversas variantes del número de cruce como el algebraico, pseudolineal, rectilíneo etc.

David Eppstein [18] enunció las primeras referencias donde aparece el interés en minimizar cruces. Estos se remontan a la sociología, en el área de sociometría, especialmente por la construcción de diagramas de interacción, en los que cuanto menor sea el número de cruce mejor es el diagrama.

La primera vez que fue estudiado el problema de calcular la menor cantidad de cruces que podía tener el grafo completo para grafos arbitrarios se le atribuye a Harary y Hill, aunque Paul Edős afirmó en 1960 que había estado trabajando en el problema por al menos 20 años. Según algunas notas no publicadas, todo parece indicar que las primeras investigaciones del problema se deben al artista Inglés Anthony Hill, quien en los años 50 estableció la que es probablemente la primera conjetura para el número de cruce de el grafo completo.

**Conjetura 1.** El número de cruce del grafo completo de  $n$  vértices es

$$\begin{cases} (1/64)(n-1)^2(n-3)^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ (1/64)(n)(n-2)^2(n-4) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Alrededor de los años sesenta Hill compartió sus resultados con el matemático Frank Harary, con quien formalizó los resultados obtenidos hasta entonces en [27]. Tiempo después Guy [26] demostró que la conjetura es cierta para valores de  $n \leq 10$ .

Mientras que en el caso de los grafos completos bipartitos sus inicios se remontan a la Segunda Guerra Mundial cuando el matemático Paul Turán se encontraba en un campo de trabajo cerca a Budapest, a continuación veremos una carta de Turán a Richard Guy que data del año 1944 que ilustra la situación que motivo el problema.

In 1944 our work combattation had the extreme luck to work-thanks to some very rich comrades-in a brick factory near Budapest. Our work was to bring out bricks from the ovens where they were made and carry them on small vehicles which run on rails in some of several open stores which happened to be empty. Since we had to settle a fixed amount of loaded cars daily it was our interest to finish it as soon as possible. After being loaded in the (rather warm) ovens the vehicles run smoothly with not much effort; the only trouble arose at the crossing of two rails. Here the cars jumped out, the bricks fell down; a lot of extra work and loss of time arose. Having this experience a number of times it occurred to me why on earth did they build the rail system so uneconomically; minimizing the number of crossings the production could be made much more economical.

([9])

En la actualidad, el estudio del número de cruce rectilíneo esta en expansión. Este tiene aplicaciones a la geometría computacional y

combinatoria. En este trabajo estamos interesados principalmente en el número de cruce rectilíneo.

Esta tesis contiene tres capítulos, los dos primeros proveen herramientas necesarias que muestran tanto la historia del número de cruce general y rectilíneo, como algunas técnicas usadas para el desarrollo de los avances que se han hecho para la mejora de cotas. En el primer capítulo se darán definiciones fundamentales para los siguientes capítulos como grafo, planaridad y algunos ejemplos también resultados requeridos de algoritmos y geometría discreta. En el segundo capítulo se recopilarán a grandes rasgos los avances en el intento de establecer el número de cruce rectilíneo, esto se hará en dos secciones, la primera cubrira las cotas inferiores y la segunda las cotas superiores.

Finalmente, el capítulo tres corresponde al estudio de “*Counting the Number of Crossings in Geometric Graphs*”, en el que se exhibe un algoritmo con el cual es posible calcular el número de cruces que posee un grafo rectilíneo cualquiera, por medio de este algoritmo esto se puede hacer en tiempo  $O(n^2 \log(n))$ ; pero para grafos que pertenezcan a ciertas familias se mostrará que puede realizarse en tiempo cuadrático.



# 1

---

## PRELIMINARES

---

*En este capítulo definiremos nociones básicas de teoría de grafos, algoritmos y geometría combinatoria. También abordaremos algunas propiedades interesantes y ejemplos imprescindibles para abordar las temáticas de los capítulos siguientes.*

### 1.1 TEORÍA DE GRAFOS

Un *grafo*  $G = (E, V)$  es un par de conjuntos tal que  $E \subset [V]^2$ , así que los elementos de  $E$  son subconjuntos de 2-elementos de  $V$ . Los elementos de  $V$  son sus *vértices* y los de  $E$  sus *aristas*.

Un vértice  $v$  es *incidente* con una arista  $e$  si  $v \in e$ ; los dos vértices incidentes en una arista son sus extremos. El número de aristas que inciden en un vértice  $v$  es su grado; lo denotamos como  $d_G(v)$  o  $d(v)$  (en caso de que no haya confusión sobre a que grafo pertenece  $v$ ). Dos vértices  $x, y$  de  $G$  son *adyacentes*, o vecinos, si  $\{x, y\}$  es una arista de  $G$ ; dos aristas  $e \neq f$  son adyacentes si tienen un extremo común.

Los grafos no vacíos y para los cuales cualquier par de vértices están conectados por un camino en  $G$  se dicen *conexos*. Para la primera parte de este trabajo estaremos interesados en los grafos *completos*;

estos grafos tienen todos sus vértices adyacentes a pares. Al grafo completo de  $n$  vértices lo denotamos como  $K_n$ .

Sea  $r \geq 2$  un entero. Un grafo  $G = (V, E)$  se dice *r-partito* si  $V$  admite una partición en  $r$  clases tal que todas las aristas tienen sus extremos en diferentes clases, los vértices en la misma clase de partición no deben ser adyacentes.

Un grafo *r-partito* en el cual cada par de vértices de distintas clases son adyacentes se dice *completo r-partito*. Si las cardinalidades de cada clase de vértices en dicho grafo son  $n_1, \dots, n_r$  entonces lo denotamos como  $K_{n_1, \dots, n_r}$ . Los *caminos* son grafos no vacíos  $P = (V, E)$  de la forma  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ,  $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$  donde los  $x_i$  son todos distintos. Si  $P = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  es un camino y  $k \geq 3$ , entonces  $c := P + x_{k-1}x_0$  es un *ciclo*.

Se dice que  $G'$  es un subgrafo de  $G$ , si su conjunto de vértices y su conjunto de aristas son respectivamente subconjuntos de los conjuntos de vértices y aristas de  $G$ , denotado  $G' \subset G$ .

Un conjunto de vértices o aristas se dicen *independientes* si ningún par de sus elementos es adyacente. Un conjunto  $M$  de aristas independientes en un grafo  $G = (V, E)$  es llamado un *emparejamiento*.  $M$  es un emparejamiento de  $U \subset V$  si todo vértice en  $U$  es incidente con una arista en  $M$ . Los vértices en  $U$  se dicen emparejados por  $M$ .

Sin embargo un dibujo de un grafo en el que sus vértices son representados como puntos en el plano Euclideo, sus aristas son representadas como curvas simples entre estos puntos y diferentes curvas solo se intersectan en extremos comunes son llamados *grafos planos*. De manera formal un grafo plano es un par  $(V, E)$  de conjuntos finitos con las siguientes propiedades

(I)  $V \subset \mathbb{R}^2$

(II) Toda arista es un arco entre dos vértices

(III) Aristas diferentes tienen diferentes conjuntos de extremos

- (IV) El interior de una arista no contiene vértices ni puntos de ninguna otra arista.

Es natural preguntarse si es posible dibujar cualquier grafo de tal forma que ningún par de aristas se crucen en un punto que no sea su extremo común. La respuesta es no,  $K_5$  y  $K_{3,3}$  (ver Figura 1.1) son los grafos no planos en cierto sentido minimales.

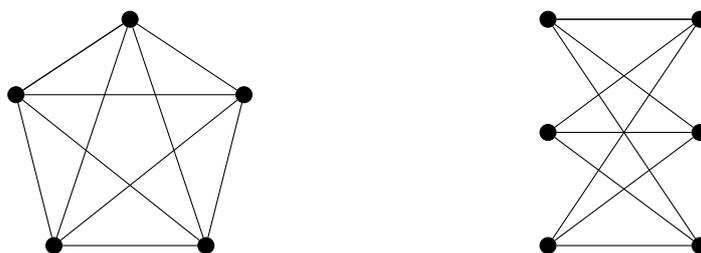


Figura 1.1:  $K_5$  y  $K_{3,3}$  respectivamente

Para un grafo abstracto  $G$  un *encaje planar*, es un isomorfismo entre  $G$  y un grafo planar  $H$ , este último será llamado *dibujo*. Un *dibujo rectilíneo* de un grafo  $G$  es un dibujo de  $G$  en el plano, donde no más de dos vértices en el grafo son colineales y sus aristas son segmentos de líneas rectas.

Para poder enunciar el resultado que caracteriza los grafos planos establecido por el matemático Kazimierz Kuratowski hace falta conocer dos relaciones de contención importantes (subdivisión y menor); una *subdivisión* de  $X$ , es el resultado de reemplazar algunas aristas de  $X$  con nuevos caminos entre los extremos, tal que ninguno de estos caminos tenga un vértice interior en  $V(x)$  o en otro nuevo camino.

Cuando  $Y$  contiene una subdivisión de  $X$  como subgrafo, decimos que el grafo  $X$  es un *menor topológico* de  $Y$ .

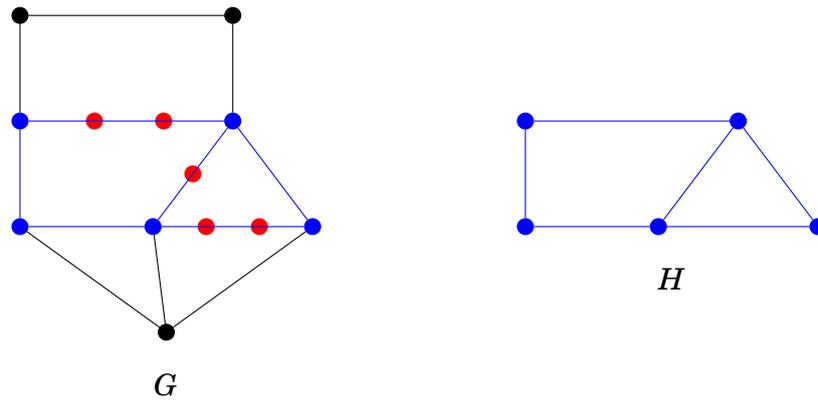


Figura 1.2:  $H$  es un menor topológico de  $G$

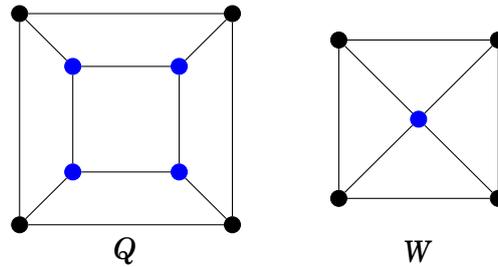
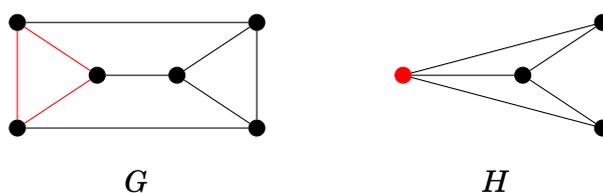


Figura 1.3:  $W$  no es un menor topológico de  $G$

Similarmente, al reemplazar los vértices  $x$  de  $X$  con grafos conexos disjuntos  $G_x$ , y las aristas  $xy$  de  $X$  con conjuntos no vacíos de aristas  $G_x - G_y$ , se produce un grafo que llamaremos  $IX$ . De manera más formal, un grafo  $G$  es un  $IX$  si su conjunto de vértices admite una partición  $\{V_x \mid x \in V(X)\}$  en subconjuntos conexos  $V_x$  tal que vértices distintos  $xy \in X$  son adyacentes en  $X$  si y sólo si  $G$  contiene una  $V_x - V_y$  arista.

Si un grafo  $Y$  contiene un  $IX$  como subgrafo, entonces  $X$  es un *menor* de  $Y$ .

Figura 1.4:  $H$  es un menor de  $G$ 

**Teorema 1.1** (Kuratowski). *Sea  $G$  un grafo, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (I)  $G$  es planar
- (II)  $G$  no contiene ni a  $K^5$  ni a  $K_{3,3}$  como menor
- (III)  $G$  no contiene ni a  $K^5$  ni a  $K_{3,3}$  como menor topológico.

Existen diversas herramientas para verificar la no planaridad de un grafo, como la *fórmula de Euler*; que relaciona la cantidad de vértices  $|V|$ , aristas  $|E|$  y caras del grafo  $|F|$ , entendiendo las *caras* de un grafo como las regiones conexas del plano que resultan cuando se eliminan todos los puntos del plano que están en el dibujo rectilíneo del grafo.

**Teorema 1.2** (Fórmula de Euler). *Sea  $G = (E, V)$  un grafo conexo y planar, y  $d$  un dibujo rectilíneo asociado a  $G$ , entonces*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

*Demostración.* Remueva las aristas de  $G$  del dibujo en cualquier orden. Con cada arista que se remueve hay dos posibilidades:

- (1) La arista  $e$  separa dos caras diferentes. Al remover  $e$  el número de caras disminuye en 1, pero el número de componentes se mantiene invariante.

- (2) La arista  $e$  es incidente a la misma cara en ambos lados. Entonces eliminar  $e$  incrementa el número de componentes en 1 y deja el número de caras invariantes.

En el grafo inicial tenemos una componente y  $|F|$  caras. El grafo final está formado por  $v$  componentes y una cara. Por tanto, el número de las aristas removidas de tipo 1 y 2 fue  $|F - 1|$  y  $|V - 1|$  respectivamente. De aquí que  $|E| = |F - 1| + |V - 1|$   $\square$

En ocasiones al querer probar que un grafo es no planar el uso del Teorema de Kuratowski puede resultar complicado, una manera más fácil para decidir viene dada por el siguiente resultado

**Corolario 1.3.** *Si  $G = (E, V)$  es un grafo conexo y planar entonces las siguientes afirmaciones se cumplen*

- (I) *Si  $|V| \geq 3$  entonces  $|E| \leq 3|V| - 6$ .*  
 (II) *Si  $|V| \geq 3$  y no existen ciclos de longitud 3,  $|E| \leq 2|V| - 4$ .*

*Demostración.* Sea  $f_k$  el número de caras con  $k$  aristas en la frontera, claramente  $\sum f_k = f$ .

Si se cuentan las aristas en la frontera de todas las caras, contamos toda arista a lo más dos veces, es decir  $\sum k f_k = 2|E|$ . Como cada cara tiene al menos 3 aristas en su frontera, entonces  $2|E| \geq 3|F|$ . Reemplazando esto en tenemos  $|E| \leq 3|E| - 3|F| = 3|V| - 6$ .

De otro lado, si  $G$  no posee 3-ciclos toda cara tiene al menos 4 aristas en su frontera así  $2|E| \geq 4|F|$ , por tanto  $2|V| - 4 = 2|E| - 2|F| \geq |E|$ .  $\square$

Tomando en consideración el Corolario 1.3 y dado que  $K_{3,3}$  tiene 6 vértices, 9 aristas y ningún ciclo de longitud 3 por el punto (II) no puede ser planar,  $K_5$  no verifica (I) así que tampoco es planar.

## 1.2 RUDIMENTOS DE GEOMETRÍA COMBINATORIA Y ALGORITMOS

Al trabajar en geometría combinatoria estamos interesados en ciertos conjuntos que no tengan coincidencias no deseadas, en particular un conjunto de puntos está en *posición general* si no tiene 3 puntos colineales. Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^d$  es *convexo* si para cada par de puntos  $x, y \in C$  el segmento  $xy$  está contenido en  $C$ .

En la mayor parte de este trabajo nos concentraremos en el comportamiento asintótico de funciones que dependen del tamaño del conjunto de puntos. Para ordenar en forma creciente una lista de números existen diferentes algoritmos como Quicksort y Heapsort, este último algoritmo se usa para ordenar de manera no recursiva, no estable, con complejidad computacional  $\Theta(n \log n)$ . Diferentes algoritmos requieren posiblemente una cantidad diferente de pasos para realizarlos, para listas con una cantidad grande de números queremos ver el comportamiento asintótico, para hacer más compacta la escritura de ciertas funciones haremos uso de la siguiente notación:

- $f(n)$  se dice  $O(g(n))$  si existen  $c > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $f(n) \leq cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .
- $f(n)$  se dice  $\Omega(g(n))$  si existen  $c > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $f(n) \geq cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .
- $f(n)$  se dice  $\Theta(g(n))$  si existen  $c_1, c_2 \geq 1$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



## NÚMERO DE CRUCE

---

*Este capítulo será dedicado a la historia y desarrollo de avances sobre el número de cruces, específicamente el número de cruce rectilíneo del grafo completo  $K_n$ . Las técnicas y construcciones empleadas aquí han sido de gran relevancia.*

El *número de cruce* de un grafo simple  $G$  se denota por  $cr(G)$  y es definido como el número mínimo de pares de aristas que se cruzan en cualquier dibujo de  $G$  en el plano. Si ahora en lugar de considerar cualquier dibujo nos restringimos a la clase de los dibujos rectilíneos, entonces se tiene el *número de cruce rectilíneo*  $\overline{cr}(G)$  de un grafo  $G$ , este es el número mínimo de pares de aristas del grafo que se cruzan en cualquier dibujo rectilíneo.

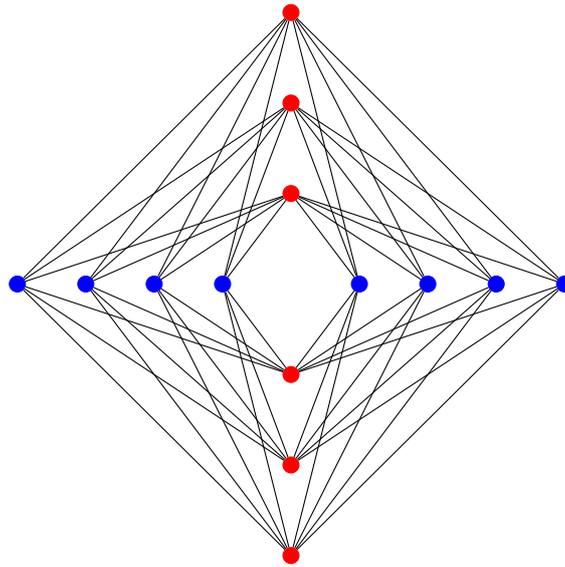
El problema del número de cruces del grafo bipartito tuvo sus orígenes en un campo de trabajo específicamente en una fábrica de ladrillos donde Turán era prisionero, todos los hornos donde se hacían ladrillos estaban conectados con todos los patios de almacenamiento, el trabajo se volvía realmente complicado en los cruces, los ladrillos se caían lo que generaba pérdidas y problemas, a Turán se le ocurrió que este problema debía poder minimizarse. Zarankiewicz y Turán se

conocieron en la primera visita de Turán a Polonia donde le comentó el problema. Zarankiewicz pensó haber resuelto el problema, pero esta demostración presentaba problemas y hasta la fecha no ha sido probado, dando paso a la siguiente conjetura.

**Conjetura 2.1** (Zarankiewicz). [40]

$$cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Esta Conjetura se ha comprobado para ciertos valores de  $m$  y  $n$  [25]. Existe una construcción que alcanza esta cota: Sea  $\lceil m \rceil = 2s$  y  $\lceil n \rceil = 2t$  y definamos los siguientes conjuntos  $X = \{(-a, 0), (+a, 0) : 0 < a \leq s\}$  y  $Y = \{(0, -b), (0, +b) : 0 < b \leq t\}$  si  $m$  o  $n$  es impar borre un punto de  $X$  o  $Y$ . Finalmente, conecte cada punto en  $X$  por un segmento de recta con cada punto de  $Y$ .



Lo que nos lleva a que en el momento que se pruebe la conjetura se tendrá que  $cr(K_{m,n}) = \overline{cr}(K_{m,n})$ . Esto desencadenó el interés sobre el cálculo del  $cr(K_n)$ . Guy [26] probó que el número de cruce rectilíneo

y el número de cruce pueden diferir, para esto mostró que  $cr(K_8) = 18$  y  $\overline{cr}(K_8) = 19$ .

**Teorema 2.2.** *Para todo entero positivo  $m$  existe un grafo con  $cr(G) = 4$  y  $\overline{cr}(G) \geq m$ .*

*Demostración.* Una concha es un dibujo como el de la figura 2.1, consta de dos trayectorias de longitud dos, donde solamente los vértices interiores están en la cara exterior. Claramente este dibujo no se puede realizar de manera rectilínea.

En el grafo de la figura 2.2, para cada arista en negrilla trace  $m$  dos trayectorias estas serán consideradas las aristas gruesas, las restantes se llamarán delgadas. Un dibujo rectilíneo tendrá cruces entre las aristas gruesas o entre una gruesa y una delgada, esto pasa pues en alguna de las dos partes aparecerá una concha. El grafo que resulta de esto verifica el Teorema.

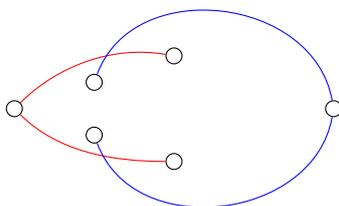


Figura 2.1: Dibujo de una concha

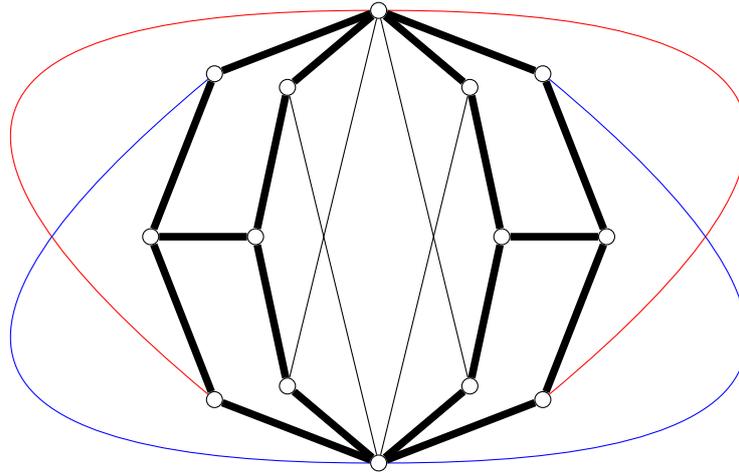


Figura 2.2: construcción

□

Este teorema deja claro cuán grande puede ser la diferencia entre estos dos valores, la construcción anterior se debe a Bienstock y Dean [10]. Erdős y Guy [19] conjeturaron que el número de cruce es  $\frac{cm^3}{n^2}$  para alguna constante  $c$ . La primera prueba fue dada por Szemerédi [7]. El siguiente resultado es una cota inferior para el número de cruce de un grafo que es, salvo la constante óptima para grafos con un número de aristas mayor que lineal.

**Teorema 2.3.** [31][Lema de los cruces] Sea  $G$  un grafo simple con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Si  $m \geq 4n$  entonces  $cr(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$

*Demostración.* Fijemos un dibujo de  $G$  con número minimal de cruces y construyamos aleatoriamente un subgrafo de  $H$  como sigue. Considere una moneda que sale cara con probabilidad  $p$ . El grafo  $H$  es construido arrojando la moneda para cada vértice  $v$  de  $G$ , si la moneda cae en cara, entonces se elige  $v$  para  $H$ , de otra forma no. El grafo  $H$  es el grafo inducido por los vértices aceptados.

Sean  $n(H)$  y  $m(H)$  el número de vértices y aristas de  $H$ . Sea  $cruce(H)$  el número de cruces en el dibujo inducido por  $H$ , claramente  $cruce(H) \geq$

$cr(H)$ . Como  $H$  es un grafo aleatorio estas cantidades son variables aleatorias. Los valores esperados son faciles de calcular, por ejemplo para que aparezca una arista dada en el grafo inducido, se tiene que cumplir que se elijan sus extremos; esto pasa con probabilidad  $p^2$

$$\begin{aligned} E[n(H)] &= p \cdot n(G) \\ E[m(H)] &= p^2 \cdot m(G) \\ E[cruce(H)] &= p^4 \cdot cr(G) \end{aligned}$$

Los vértices se eligen con probabilidad  $p$ . Recordemos que para todo grafo  $G$ , con  $n$  vértices y  $m$  aristas, tenemos un subgrafo minimal planar  $H'$ , toda arista que no esta en  $H'$  se cruza con alguna arista de  $H'$  y como  $H'$  tiene a lo mas  $3n - 6$  aristas tenemos que todo grafo con las características ya dichas tiene al menos  $m - 3n + 6$ .

Por lo que  $cruce(H) - m(H) + 3n(H) \geq 0$ , si se aplica esperanza a ambos lados

$$\begin{aligned} E[(cruce(H)) - m(H) + 3n(H)] &\geq 0 \\ E[(cruce(H))] &\geq E[m(H)] - E[3n(H)] \\ p^4 \cdot cr(G) &\geq p^2 \cdot m(G) - 3p \cdot n(G) \\ cr(G) &\geq \frac{m(G)}{p^2} - \frac{3n(G)}{p^3} \end{aligned}$$

Ahora escojamos  $p = \frac{4n}{m}$ , de hipótesis tenemos  $m \geq 4n$ , reemplazando este valor de  $p$  tenemos

$$cr(G) \geq \frac{m^3}{16n^2} - \frac{3m^3}{64n^2} = \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

□

El objetivo es mejorar la constante, algunas mejoras se han conseguido aplicando el método probabilístico a una desigualdad de la forma

$$cr(G) \geq tm - \left( \binom{t}{2} + 3t \right) n.$$

Pach y Tóth [34] mejoraron la constante de  $\frac{1}{64} \approx 0.015$  a 0,029. La última mejora de la constante de número de cruce se debe a Pach, Tardos y Tóth [35], la nueva constante es 0,31.

**Teorema 2.4.** *Si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices y  $m > 6n$  aristas, entonces  $cr(G) \geq \frac{1}{36} \frac{m^3}{n^2}$ .*

Saber el número de cruce de un grafo dado es un problema NP-COMPLETO esto fue demostrado por Garey y Johnson [22], por tanto el desarrollo de esta área se ha enfocado en el estudio de familias particulares de grafos, como los grafos completos que veremos durante este capítulo. De hecho una conjetura famosa para grafos completos es la conjetura de Harary y Hill [28] en la que se establece que

**Conjetura 2.5** (Harary y Hill).

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

En [11] los autores probaron que la fórmula anterior es una cota superior. Los valores para el número de cruce rectilíneo para  $K_n$  para  $n \leq 7$ , son fáciles de calcular, Guy [26] determino el valor de  $\overline{cr}(K_8)$  y  $\overline{cr}(K_9)$ . Luego Aichholzer et al. usaron estos datos para ampliar los valores de  $\overline{cr}(K_n)$  para  $n \leq 27$ , a finales del 2016 probaron que  $\overline{cr}(K_{18}) = 1029$ , Aichholzer logró probar sin el uso de computadora el valor de  $\overline{cr}(K_n)$  para  $n$  impar con  $11 \leq n \leq 17$ .

La conjetura 2.5 sólo se ha probado para  $n \leq 12$ . La siguiente construcción de Hill [27] fue popularizada por Guy, en esta construcción se producen dibujos cilíndricos, que son dibujos en los que los vértices se

dibujan en dos círculos concéntricos de manera balanceada que serán las tapas del cilindro y donde ninguna arista intersecta a estos círculos; dentro de cada círculo se dibujan de manera rectilínea las aristas, los vértices que van de un círculo a otro se unen por medio de geodésicas, véase figura 2.3. Esta construcción garantiza que la conjetura es una cota superior de la ecuación 2.5.

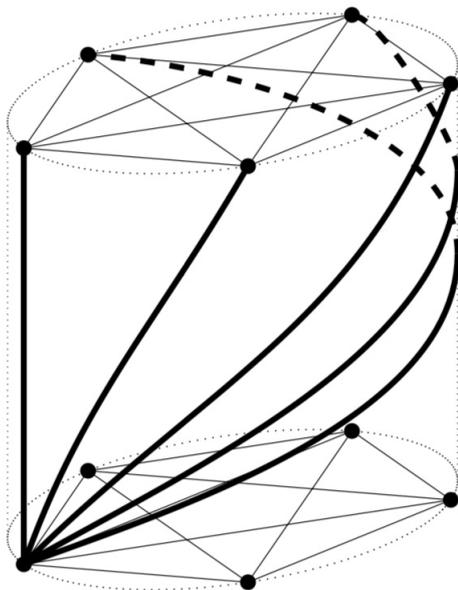


Figura 2.3: Dibujo cilíndrico de  $K_{10}$

En 1865 Sylvester se preguntó por la probabilidad de que cuatro puntos escogidos aleatoriamente en un conjunto  $R \subset \mathbb{R}^2$  tenga por cierre convexo a un cuadrilátero. Dependiendo de  $R$  y la distribución de probabilidad usada para elegir puntos de  $R$ , un número diferente de soluciones es posible. Sea  $R$  un área finita y abierta Scheinerman y Wilf [37] consideraron  $q_* = \lim_n \frac{cr(K_n)}{\binom{n}{4}}$ .

La idea es minimizar la cantidad de cruces para un dibujo rectilíneo dado, una buena forma de hacerlo sería encontrar una distribución que minimice la probabilidad de encontrar cuadriláteros conve-

xos.

**Teorema 2.6.** [37][El problema de los cuatro puntos de Sylvester]  
Existe una constante  $v$  tal que  $0 < v < \infty$  y

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{cr}(K_n)}{\binom{n}{4}} = \sup_n \frac{\overline{cr}(K_n)}{\binom{n}{4}}$$

*Demostración.* Consideremos la sucesión  $A_n = \frac{\overline{cr}(K_n)}{\binom{n}{4}}$ , como  $\overline{cr}(K_n) < \binom{n}{4}$  esta sucesión esta acotada por 1.

Sean  $m < n$  y  $H$  un dibujo rectilíneo de  $K_n$ , tal que  $\overline{cr}(K_n) = \overline{cr}(H)$ . Sea  $B$  un subgrafo inducido de  $H$  por un conjunto de  $m$  vértices, así  $\overline{cr}(B)$  cuenta las intersecciones de aristas que hay en  $B$ .

Note que por cada intersección hay cuatro vértices relacionados con ellos, en total hay  $\binom{n-4}{m-4}$  subgrafos inducidos de  $H$  con  $m$  vértices, las intersecciones se han contado  $\binom{n-4}{m-4}$  veces, de aquí

$$\binom{n-4}{m-4} \overline{cr}(K_n) \geq \binom{n}{m} \overline{cr}(K_m).$$

Recordemos que

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-4}{m-4}} = \frac{\binom{n}{4}}{\binom{m}{4}}$$

así que  $A_n \geq A_m$ . Como la sucesión es monótona y acotada el resultado se tiene.  $\square$

**Teorema 2.7.** La constante  $v$ , coincide con el límite cuando  $n$  tiende a infinito del número de cruce rectilíneo

$$q_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{cr}(K_n)}{\binom{n}{4}}$$

$q_*$  se conoce como la constante de cruce rectilíneo.

2.1 COTAS INFERIORES PARA EL NÚMERO DE CRUCE RECTILÍNEO PARA EL GRAFO COMPLETO

A continuación nos interesa conocer algunas de las herramientas que ayudaron a minimizar el número de cruces para los grafos completos. En principio las mejores cotas inferiores para este concepto se obtuvieron por medio de los grafos para los cuales se conocía el valor su número de cruce rectilíneo, por ejemplo  $\overline{cr}(K_5) = 1$  entonces  $\overline{cr}(K_n) \geq \frac{1}{5} \binom{n}{4}$ , Wagner [38] fue el primero en usar una manera diferente de aproximación y probó que  $\nu \geq 0.3288$ , luego por medio de secuencias permitidas Lovász et al. [32] probaron que  $\nu \geq \frac{3}{8} = 0.375$ . Balogh y Salazar [8] refinaron la técnica dando como resultado  $\nu \geq 0.37533$ . Dado un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general  $S$ , cada pareja de puntos  $u$  y  $v$  definen una recta orientada. Sea  $uv$  la recta orientada que pasa por los puntos  $u$  y  $v$ , si a la derecha de esta recta quedan exactamente  $j$  puntos del conjunto  $S$ , diremos que  $uv$  es una  $j$ -arista. Denotemos  $e_j(S)$  el número  $j$ -aristas del conjunto  $S$ .

Un subconjunto  $T \subset S$ , de cardinal  $k$ , es un  $k$ -conjunto si  $T$  y  $S \setminus T$  pueden ser separados por una recta, el número de  $k$ -conjuntos de  $S$  será denotado  $g_k(S)$ .

Este par de conceptos están estrechamente relacionados con el problema del número cruce, para esto es necesario acotar en términos de  $|S|$  el mínimo de  $j$ -aristas que puede tener un conjunto  $S$ .

De manera breve y presentando en el orden que han sido desarrollados haremos un recuento de los avances del calculo de cotas inferiores para el número de cruces.

Ábrego y Fernández- Merchant [1] encontraron una relación entre el vector de  $j$ -aristas de un conjunto  $S$  con el número de cuadriláteros convexos que contiene.

**Teorema 2.8.** *Si  $S$  es un conjunto de puntos en posición general,  $e_j(S) = g_{j+1}(S)$  para todo  $0 \leq j \leq n - 2$ .*

*Demostración.* Para cada  $(j+1)$ - conjunto  $T$ , existe una única  $j$ -arista que tiene  $T$  a su derecha y tal que  $p \in S \setminus T$  y  $q \in T$ . Recíprocamente, a una  $j$ -arista que deja al conjunto  $T'$  a su derecha, le podemos asignar el  $(j+1)$ - conjunto  $T' \cup \{q\}$ . Esta relación es una biyección.  $\square$

Al considerar las  $j$ -aristas orientadas, si  $uv$  es una  $j$ -arista, entonces  $vu$  es una  $(n-j-2)$ -arista así que  $e_j(S) = e_{n-j-2}(S)$ , por esto solo estamos interesados las  $e_j$  con  $j \leq \frac{n-2}{2}$ . De manera similar se tiene que  $g_k(S) = g_{n-k}(S)$ .

**Observación 2.9.** Las  $\frac{n-2}{2}$  - aristas se conocen como las *rectas bisectrices* de  $S$ . El número de rectas bisectrices de  $S$  se denotará  $b(s)$ .

**Teorema 2.10.** [13] Para cualquier conjunto  $n$  puntos en posición general se tiene que  $b(n) = O(n^{\frac{4}{3}})$ .

**Teorema 2.11.** [20] Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general, y sea  $T$  un  $k$ -conjunto de  $S$ . Si  $0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ , el número de  $j$ -aristas  $uv$  tales que  $u \in T$  y  $v \in S \setminus T$  es exactamente  $\min\{k, n-k, j+1\}$ .

**Teorema 2.12.** [32] Si  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos en posición general y  $j \leq \frac{n-2}{2}$ , se tiene que  $e_j(S) \geq 2j+3$ . Además, la cota es óptima

*Demostración.* Sea  $j \leq \frac{n-3}{2}$  y sea  $uv$  una  $j$ -arista de  $S$ . Consideremos una recta  $l$  paralela a la  $j$ -arista  $uv$ , y tal que  $|l^+ \cap S| = 2$  con  $l^+$  el semiplano a la derecha de la recta orientada  $l$ . Según el Teorema 2.11, el número de aristas definidas por un punto a cada lado de  $l$  es exactamente  $2 \min\{j+1, j+2, n-j-2\} = 2(j+1)$ ; como  $j \leq \frac{n-3}{2}$  al agregar la arista  $uv$  se tiene el resultado.  $\square$

En adelante consideraremos  $b(n) := e_{\frac{n}{2}}(n)$ . Los últimos avances en el problema de determinar el valor exacto de  $b(n)$  se deben a Ábrego, Fernández- Merchant et al., que han obtenido cotas inferiores para  $b(n) = O(n^{2-\epsilon})$  que alcanzan las construcciones de Aichhólzer hasta  $n = 26$ .

En un principio se pensaba que era necesario encontrar conjuntos de  $n$  puntos con muchas rectas bisectrices, pues existen distribuciones de puntos en las que se alcanzan los valores óptimos de las rectas bisectrices y mínimo número de cruce rectilíneo, apesar de esto no existe una fórmula que establezca la relación de hecho se ha visto que esto no es cierto; para  $K_4$  que tiene número de cruce rectilíneo igual a cero y 3 rectas bisectrices.

Una de las técnicas para crear conjuntos con muchas rectas bisectrices es la duplicación de puntos, que consiste en reemplazar cada punto del conjunto  $S$  por dos puntos, de tal forma que la recta definida por estos sea bisectriz. De manera más formal si  $uv$  es una recta bisectriz de  $S$ , y reemplazamos los puntos  $u$  y  $v$  por los puntos  $u_1, u_2, v_1$  y  $v_2$  de tal manera que las rectas formadas por los puntos  $u_i v_j$  dividan  $S$  como lo hacia  $uv$ , dos de las rectas  $u_i v_j$  son bisectrices del nuevo conjunto, así que esto duplica el número de bisectrices, una mejor descripción de esta técnica será dada en la siguiente sección.

Esta cota se ha conseguido mejorar implementando diversas técnicas. El concepto de  $j$ -aristas puede refinarse un poco más. Sea  $k \leq \frac{n}{2} - 1$ , una arista  $uv$  es una  $(\leq k)$ -arista de  $S$  si a la derecha de la recta definida por  $uv$  hay como mucho  $k$  puntos de  $S$ . La cantidad de  $(\leq k)$ -aristas de  $S$  se denotara  $E_j(S)$ .

**Observación 2.13.** Note que  $E_i(S) = \sum_{i=0}^j e_i(S)$ . Para  $n$  par se tiene que  $E_{\frac{n-2}{2}}(S) = \binom{n}{2} + \frac{1}{2}b(S)$ , pues las aristas bisectrices se cuentan doble.

En adelante nos concentraremos en el problema del número de cruce rectilíneo. De manera intuitiva observemos que cada vez que tenemos 4 puntos en el plano estos pueden estar en posición convexa (aquellos cuyo cierre convexo es un cuadrilátero), o puede ocurrir que uno de ellos este contenido en el triángulo generado por los otros 3 puntos. Como estamos considerando el grafo completo, debemos analizar que ocurre al dibujar los segmentos de recta que unen a todos los

puntos entre si. De lo anterior sabemos que el número de cuadriláteros convexos generados por  $S$  denotado por  $\square(S)$ , coincide con  $\overline{c\bar{r}}(S)$ .

**Teorema 2.14.** *Un conjunto de cinco puntos en posición general en el plano siempre determina al menos un cuadrilátero convexo.*

Esto implica que  $\square(S)(n-4) \geq \binom{n}{5}$  y por tanto  $\square(S) \geq \binom{n}{4}$  para todo conjunto  $S$  de  $n$  puntos, lo interesante es determinar buenas cotas para la constante que acompaña el coeficiente binomial.

Ahora, veremos unas cuantas de las herramientas empleadas para calcular cotas inferiores para  $\overline{c\bar{r}}(K_n)$ . El estudio del número de cruce rectilíneo lleva más de 40 años, pese a eso los avances más relevantes se han dado en los últimos años.

Lovász et al. [32], Ábrego y Fernández-Merchant et al. [1] demostraron de forma independiente la siguiente relación entre  $\square$  y el número de  $j$ -aristas.

**Teorema 2.15.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general,*

$$\square(S) = \sum_{j < \frac{n-2}{2}}^j e_j(S) \left( \frac{n-2}{2} - j \right)^2 - \frac{3}{4} \binom{n}{3}$$

*Demostración.* Sea  $\Delta(S)$  el número de 4-tuplas no convexas de  $S$ . Sabemos que  $4\square(S) + 6\Delta(S) = \binom{n}{4}$ . Consideremos las 4-tuplas ordenadas  $(u, v, w, z)$  tales que  $w$  está a la derecha de la recta dirigida  $uv$  y  $z$  a la izquierda. Cuatro puntos en posición convexa producen 4 de estas 4-tuplas, mientras que cuatro puntos en posición no convexa producen 6. Por tanto  $S$  tiene  $4\square(S) + 6\Delta(S)$  de estas 4-tuplas. Una  $j$ -arista  $uv$  se puede completar a  $j(n-j-2)$  4-tuplas de la forma  $(u, v, w, z)$ , de donde

$$\square(S) + \Delta(S) = \sum_{j=0}^{n-2} e_j(S) j(n-j-2).$$

Dado que  $\sum_{j=0}^{n-2} e_j(S) = n(n-1)$  y  $e_j(S) = e_{n-j-2}(S)$  se obtiene el resultado. □

Utilizando este Teorema, y la cota del Teorema 2.12 obtenemos una cota inferior para  $\overline{cr}(K_n)$ . Pero esta cota se puede mejorar, utilizando el concepto de  $(\leq k)$ -aristas y al hacer el cambio de variable  $e_j(S) = E_j(S) - E_{j-1}(S)$ . Como resultado se tiene

$$\square(S) = \sum_{j < \frac{n-2}{2}}^j E_j(S)(n - 2j - 3) - \frac{3}{4} \binom{n}{3} \quad (2.1)$$

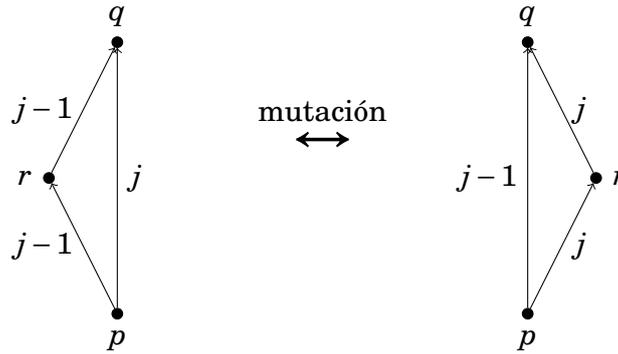
En el Teorema 2.15 simplifiquemos lo obtenido por  $\left(\frac{n-2}{2} - j\right)^2 - \left(\frac{n-2}{2} - (j+1)\right)^2 = n - 2j - 3$ .

Edelsbrunner [17] enunció la cota  $E_j(S) \geq 3 \binom{j+2}{2}$ , pero fue probada por Lovász et al. [32] y Ábrego y Fernández-Merchant [1] independientemente. Esta cota es óptima para  $j \leq \frac{n}{3} - 1$ .

Si se reemplaza esta cota en el Teorema 2.11 se tiene  $\overline{cr}(K_n) \geq \frac{3}{8} \binom{n}{4} + O(n^3)$ , haciendo uso de un resultado de Welzl [39], Lovász et al. [32] lograron obtener una pequeña mejora  $\overline{cr}(K_n) \geq \frac{3}{8} \binom{n}{4} + O(n^3)$  con  $(\epsilon \approx 1.08 \times 10^{-5})$ .

Esta mejora es interesante pues muestra que  $\overline{cr}(K_n)$  y  $cr(K_n)$  son muy diferentes en su comportamiento asintótico, en el término de orden  $n^4$ .

Para saber más sobre la cota inferior de  $\overline{cr}(S)$  o  $E_j(S)$ , quisieramos caracterizar o conocer las propiedades de los conjuntos que los minimizan. El siguiente Lema implica un resultado importante que nos ayudará con el objetivo planteado anteriormente, para su prueba es necesario introducir el concepto de *mutación*, una mutación ocurre cuando tres puntos se mueven a través de una colinealidad de manera continua, para que esto suceda es necesario que el conjunto de puntos que va a ser movido esté en posición general salvo en una cantidad finita de momentos. Cuando más de dos puntos son colineales, esta colinealidad no debe involucrar más de tres puntos y máximo debe ocurrir una situación de colinearidad en cada momento.



Se conjeturaba que el cierre convexo de los conjuntos óptimos era un triángulo. Luego Pedro Ramos et al. [6] verificaron el resultado como lo muestran el Lema 2.16 y el Teorema 2.17.

**Lema 2.16.** [6] *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general. Siempre existe un conjunto  $S'$  cuyo cierre convexo es un triángulo tal que  $E_j(S') \leq E_j(S)$  para todo  $0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ .*

*Demostración.* Sea  $j \leq \frac{n}{2} - 1$  y sea  $uv$  una  $j$ -arista antes de la mutación. Es decir, antes de la mutación  $uw$  y  $wv$  eran  $(j-1)$ -aristas, luego de la mutación los índices se intercambian,  $uv$  es una  $(j-1)$ -arista mientras que  $uw$  y  $wv$  se vuelven  $j$ -aristas. Denotemos por  $S_t$  al conjunto  $S$  en el tiempo  $t$ , se tiene que  $e_j(S_\epsilon) = e_j(S_{-\epsilon}) + 1$  y  $e_{j-1}(S_\epsilon) = e_{j-1}(S_{-\epsilon}) - 1$  por lo tanto, para las  $(\leq j)$ -aristas,  $E_j(S_\epsilon) = E_j(S_{-\epsilon})$  y  $E_{j-1}(S_\epsilon) = E_{j-1}(S_{-\epsilon}) - 1$ .

Sea  $p$  un vértice en el cierre convexo y sea  $l$  una recta que pasa por  $p$  y deja a cada lado no más de  $\frac{n}{2}$  puntos de  $S$ . Si movemos  $p$  en la dirección de  $l$ , y alejándolo del conjunto, las rectas que atraviesa  $p$  están definidas por dos puntos a un mismo lado de  $l$ . Antes de la mutación, la arista  $uv$  deja del lado de  $p$  menos de la mitad de los puntos así que, la mutación disminuye el número de  $(\leq j)$ -aristas.

Por tanto, si  $S$  tiene más de tres vértices en el cierre convexo, sean  $q_1$  y  $q_2$  dos vértices no consecutivos, y elijamos dos direcciones  $l_1$  y  $l_2$  como en el párrafo anterior. Las rectas  $l_1$  y  $l_2$  se cortan en el interior

del cierre convexo, así que al mover los puntos suficientemente lejos, desaparecen del cierre convexo los vértices entre  $q_1$  y  $q_2$ . Iterando el procedimiento, terminaremos con un conjunto  $S'$  con cierre convexo triangular y tal que  $E_j(S') \leq E_j(S)$  para todo  $0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ .  $\square$

**Teorema 2.17.** [6] *El cierre convexo de los conjuntos que minimizan el número de cuadriláteros convexos es un triángulo.*

*Demostración.* De la ecuación 2.1 tenemos que, si  $E_j(S') \leq E_j(S)$  para todo  $j$  entonces  $\square(S') \leq \square(S)$  y por el Lema 2.16 el resultado se tiene.  $\square$

Las figuras 2.4 y 2.5 muestran dibujos de conjuntos de 15 y 75 puntos respectivamente que minimizan el número de cruce rectilíneo

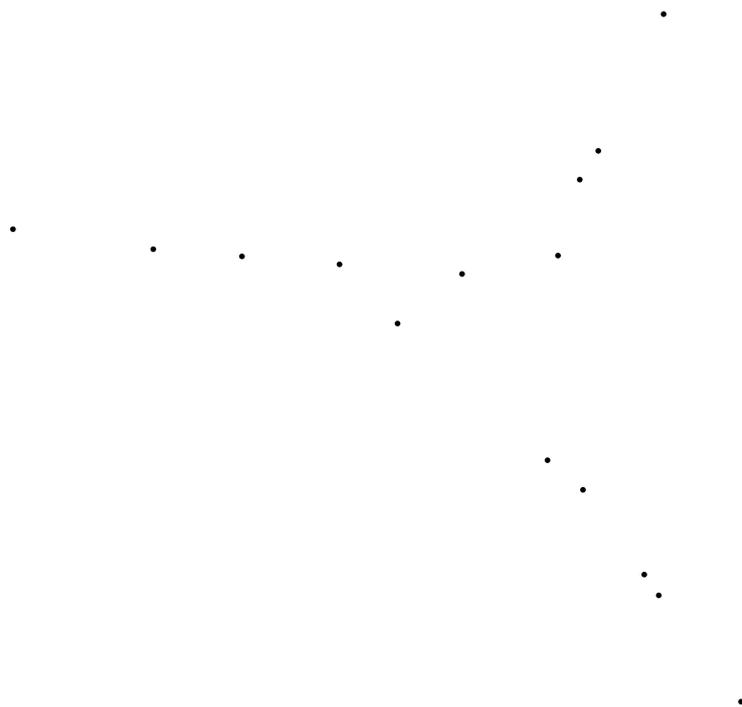


Figura 2.4: conjunto óptimo de 15 puntos

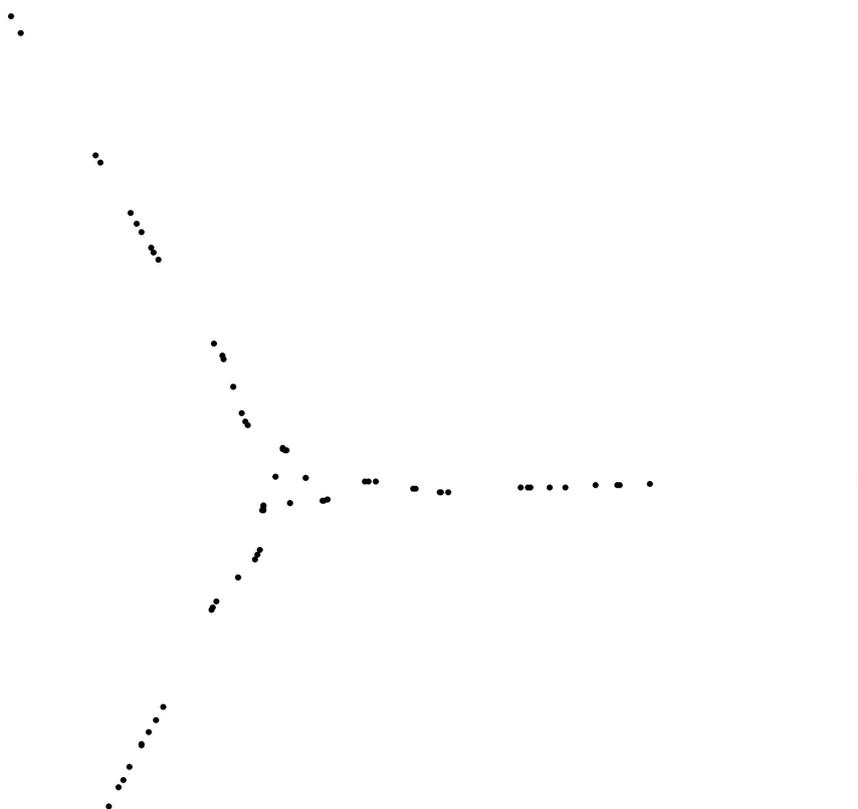


Figura 2.5: conjunto óptimo de 75 puntos

La mejor cota inferior para el problema de número de cruce rectilíneo se debe a Ábrego et al. [2], se prueba haciendo uso del Teorema 2.15, la relación de  $\square$  con  $E_j$ -aristas y usando el concepto de *secuencias circulares* y algunas propiedades que definiremos a continuación.

Para acotar los  $k$ -conjuntos, rectas bisectrices y el número de cruce rectilíneo, una herramienta importante son las secuencias de per-

mutaciones. Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general, con los elementos de  $S$  etiquetados del 1 al  $n$ , tal que al reunir los segmentos de recta que unen estos puntos, no hay segmentos paralelos. Sea  $l$  una recta dirigida, tal que todos los puntos de  $S$  están a la izquierda de la recta. Al proyectar los puntos de  $S$  ortogonalmente sobre  $l$ , obtenemos un orden digamos  $(1, 2, \dots, n)$ . Al girar  $l$  en sentido antihorario y proyectar de nuevo, en algún momento obtendremos una permutación diferente. Continuando con este proceso, al girar  $l$   $180^\circ$  tendremos una secuencia de  $\binom{n}{2}$  permutaciones. Tal que dos permutaciones consecutivas difieren solo en una transposición de elementos vecinos, y la última permutación es  $(n, n-1, \dots, 1)$ .

A cada configuración de puntos en el plano, podemos asignarle una secuencia circular. Pero hay secuencias que no se pueden representar geoméricamente. Goodman y Pollack [23] también probaron que toda secuencia de a lo más 4 valores, si se puede representar.

La mejor cota inferior para el número de cruce rectilíneo actualmente es[3]

$$0.379972 \binom{n}{4} + \Theta(n^3) \geq \overline{cr}(K_n).$$

## 2.2 COTAS SUPERIORES PARA EL NÚMERO DE CRUCE RECTILÍNEO PARA EL GRAFO COMPLETO

El problema del número de cruce tiene muchas aplicaciones a la geometría discreta y la ciencia computacional véase [33]. En la presente sección veremos los avances sobre las cotas superiores para el número de cruces rectilíneo, primero veamos un poco de la historia, a comienzos de los setentas Jensen [30] logró  $v \leq \frac{7}{18} < 0.3888$ , Singer [36] obtuvo  $v \leq \frac{5}{13} < 0.38462$ . Tiempo después Brodsky [12] construyó conjuntos de puntos con triángulos anidados no concéntricos.

Durante la primera parte de esta sección pondremos nuestra atención en los algoritmos que llevaron a la obtención de la mejor co-

ta superior actual, los dibujos rectilíneos de  $K_n$  están determinados por la posición de sus vértices véase la figura 2.6. En adelante sea  $S := \{p_1, \dots, p_n\}$  un conjunto de puntos en posición general. Los conjuntos que minimizan el número de cruce tienen un número superlineal de rectas bisectrices, esto ayuda a que todos tengan un emparejamiento de rectas bisectrices.

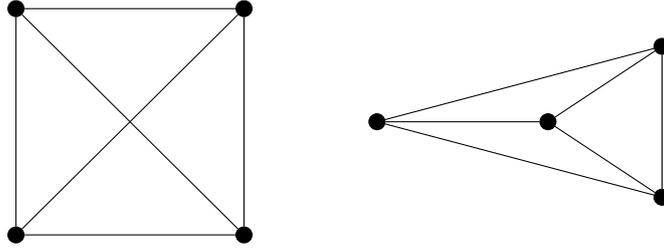


Figura 2.6: Dos dibujos rectilíneos de  $K_4$

### 2.2.1 Como encontrar puntos candidatos recorriendo celdas.

En el proceso de buscar puntos que sean candidatos a reemplazar, es necesario poder explorar todas las vecindades, en [29] se exhibe un algoritmo para encontrar conjuntos de puntos con propiedades invariantes dentro de las celdas. Para esto considere el arreglo de líneas  $\mathcal{A}$ , generado por las líneas que pasan a través de cada par de puntos de  $S \setminus \{p\}$ . Sea  $C$  una celda de  $\mathcal{A}$  y sea  $q$  un punto en  $C$ . Note que  $\overline{cr}(S \setminus \{p\} \cup \{q\})$  tiene el mismo valor sin importar la elección de  $q$  siempre que  $p$  y  $q$  esten en la misma celda.

Este algoritmo se mueve entre celdas adyacentes, y encuentra la celda que contiene un punto  $p$  en tiempo  $O(n^2 \log(n))$ , moverse entre celdas adyacentes y encontrar un punto dentro de ellas toma tiempo  $O(\log^2(n))$ . Con esto los autores de [5] produjeron una secuencia  $C = C_1, \dots, C_m$  de celdas consecutivas adyacentes. En cada  $C_i$  escogemos un punto  $q_i$  como candidato para reemplazar a  $p$  en  $S$ . Con esto se garantiza que ninguna celda haya sido olvidada.

Es posible, que a partir de un grafo completo  $K_m$  con pocos cruces

se pueda extraer otro dibujo rectilíneo de un grafo completo de menos vértices que también posea pocos cruces. Una buena manera es removiendo un punto de  $S$  a la vez, para obtener un dibujo más pequeño. Para esto se calcula  $\overline{cr}(S \setminus \{p\})$ :  $p \in S$  y removemos el punto  $p$  que minimiza dicho valor así se encuentra un dibujo rectilíneo de  $K_{m-1}$ . Al iterar el proceso se puede encontrar un dibujo rectilíneo de  $K_{m-i}$  con pocos cruces. Es necesario resaltar que si en lugar de remover un punto a la vez se remueven varios se pueden obtener buenos resultados, además es posible obtener dibujos que al remover un punto a la vez no, pero haciendo esto se pierde la velocidad conseguida con el algoritmo que se presento anteriormente.

El algoritmo anterior exhibe un método para mejorar dibujos rectilíneos de  $K_n$  a partir de un dibujo base como conjunto inicial se escogió el mejor conjunto de puntos conocido, bajado de la página de Oswin Aichholzer [4] en el que al perturbar algunos puntos y calcular nuevamente la cantidad de intersecciones podría haber disminuido. Al mover ciertos candidatos a la vez el resultado es un algoritmo más eficiente con tiempo de ejecución  $O(n^2)$ .

### 2.2.2 Un algoritmo para calcular $\overline{cr}(K_n)$ en tiempo cuadrático.

A continuación se presenta el algoritmo de Fabila y López [21] para calcular  $\overline{cr}(K_n)$ , para formalizar la relación usada en este algoritmo para determinar  $\square(S)$ , consideremos un subconjunto  $C$  de un espacio vectorial  $V$ , dicho  $C$  se dice un *cono* si para cada  $x \in C$  y cada escalar positivo  $\alpha$ , el producto  $\alpha x$  está en  $C$ , un cono  $C$  se dice *cono convexo* si  $\alpha x + \beta y$  está en  $C$ , Siempre que  $x, y \in C$ .

Sea  $(p, q)$  un par ordenado de puntos distintos en  $S$ , y  $\{r, s\}$  un conjunto de 2 puntos de  $S \setminus \{p, q\}$ . Decimos que  $((p, q), \{r, s\})$  es un *patrón*. Un patrón se dice de *tipo-A* si  $q$  cae en el interior del cono convexo con punta  $p$  y acotado por los rayos  $\overrightarrow{pr}$  y  $\overrightarrow{ps}$ , de otra manera se dice de *tipo-B*, el número de patrones de tipo A y de tipo B en  $S$  se denotaran

respectivamente  $A(S)$  y  $B(S)$ .

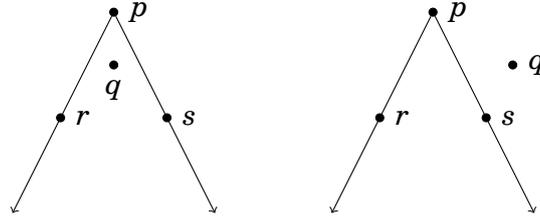


Figura 2.7: patrones de tipo A y B respectivamente

**Teorema 2.18.**  $\square(S) = \frac{3A(S)-B(S)}{4}$

*Demostración.* Notemos que por cada conjunto de 4 puntos en posición convexa tendremos 4 patrones de tipo-A y 8 patrones de tipo-B, si los 4 puntos no están en posición convexa obtendremos 3 patrones de tipo-A y 9 de tipo-B, y dado que por cada cuadrilátero convexo tenemos un cruce, estamos interesados en saber la cantidad de cuadriláteros convexos en  $S$ .

Para esto resolvamos el sistema de ecuaciones

$$4x + 8y = 1$$

$$3x + 9y = 0$$

de donde  $x = \frac{3}{4}, y = \frac{-1}{4}$  luego sumando sobre todos los cuadriláteros convexos se tiene

$$\square(S) = \frac{3A(S)}{4} + \frac{-B(S)}{4}$$

□

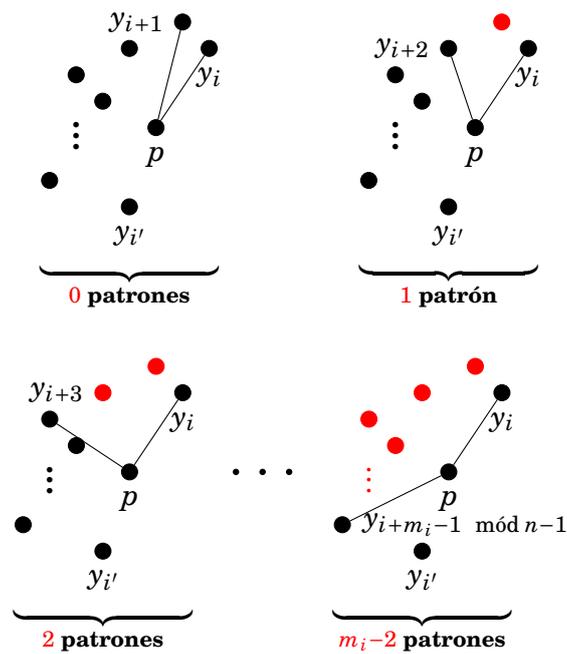
Dado que todo patrón es o bien de tipo-A o bien de tipo-B, tenemos que  $A(S) + B(S) = (n(n-1)(n-2)(n-3))/2$ , luego

$$\square(S) = 4A(S) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2},$$

por tanto basta conocer el valor de  $A(S)$  para los conos convexos con apéndice en  $p$ . Para esto debemos ordenar los puntos de  $S \setminus \{p\}$  con respecto al ángulo que forman con  $p$ , dualizando  $S$  a un conjunto de  $n$  rectas, este arreglo de rectas se puede construir en tiempo  $O(n^2)$  con algoritmos estandar.

**Lema 2.19.** *El orden en sentido de las manecillas del reloj de  $S \setminus \{p\}$  alrededor de  $p \in S$  se puede extraer del arreglo de líneas y esto se puede calcular en tiempo cuadrático.*

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  los  $S \setminus \{p\}$  puntos ordenados alrededor de  $p$ . Para  $1 \leq i \leq n-1$ , empezando en  $y_i$  y yendo en sentido contrario a las manecillas del reloj, sea  $i'$  el primer índice tal que el ángulo  $\angle y_i p y_{i'}$  es mayor que  $\pi$ . Sea  $m_i$  tal que  $m_i = i' - i \pmod{n-1}$  y  $1 \leq m_i \leq n-1$ . Para  $1 \leq j \leq m_i - 1$ , hay exactamente  $j-1$  patrones de tipo-A la forma  $(p, q)\{y_i, y_k\}$  con  $1 \leq k \leq n-1$  y  $k = i + j \pmod{n-1}$ .



Con lo anterior la cantidad de patrones de tipo-A con apéndice en

$p$  es  $\sum_{j=1}^{m_i-1} (j-1) = \binom{m_i-1}{2}$ . Por tanto el número total de patrones de tipo-A en  $S$  es  $\sum_{i=1}^{n-1} \binom{m_i-1}{2}$ .

$y_{1'}$  y  $m_1$  se pueden calcular en tiempo lineal, para  $i = 2, y_{2'}$  es el  $y_i$  siguiente a  $y_{1'}$  y  $m_2 = 1' + 1 - 2$ , este proceso se puede seguir inductivamente, es decir, si conocemos  $y_{i'}$  y  $m_i$  obtenemos  $y_{(i+1)'}$  como el siguiente de  $y_{i'}$  y  $m_{i+1} = (i' + 1) - (i + 1)$ .

Con este algoritmo se consiguió mejorar los conjuntos de puntos con pocos cruces conocidos de la página de Oswin Aichholzer, realizando el siguiente procedimiento, escoja un punto  $p \in S$  al azar, luego escoja un punto  $q$  en una vecindad de  $p$ . Si  $\overline{cr}(S \setminus \{p\} \cup \{q\}) \leq \overline{cr}(S)$ , entonces actualice  $S$  a  $S := S \setminus \{p\} \cup \{q\}$ , luego comience de nuevo.

**Observación 2.20.** Aplicando iteradamente este procedimiento se consiguió mejorar muchos conjuntos de puntos con pocos cruces conocidos, además permite construir conjuntos de puntos más grandes con pocos cruces a partir de otros conjuntos con menos puntos y número de cruce pequeño.

**2.2.3 Duplicación de puntos.** Veremos ahora una manera de construir tales conjuntos, esta fue dada por Ábrego, M. Cetina, S. Fernández-Merchant, J. Leños, and G. Salazar en [2].

Sea  $l$  una recta bisectriz, note que si  $n$  es impar  $l$  pasa solo por un punto, si  $n$  es par pasa por 2. Sea  $G$  un grafo bipartito con partición de vértices  $(A, B)$  donde  $A := S$  y  $B$  es el conjunto de rectas bisectrices de  $S$ . Un par  $(p, l)$  en  $(A, B)$  es adyacente en  $G$  si y solo si  $l$  pasa por  $p$ . Un emparejamiento de  $G$ , en el cual todo punto de  $A$  es emparejado con una línea de  $B$  es un *emparejamiento de rectas bisectrices*, su existencia estará garantizada siempre que  $n$  sea par. Para realizar la duplicación sea  $M = \{(p_1, l_1), \dots, (p_n, l_n)\}$  un emparejamiento de rectas bisectrices de  $S$  para todo  $l_i$  supongamos que  $l_i$  está dirigido

y sea  $\vec{v}_i$  su vector director; sea  $S'$  el conjunto de puntos que resulta de reemplazar  $p_i$  en  $S$  con el par de puntos  $p_i + \epsilon \vec{v}_i$  y  $p_i - \epsilon \vec{v}_i$  (para  $\epsilon$  pequeño).

Dado que obtener un “buen” número de cruce rectilíneo depende de tener un buen dibujo, se quisiera poder mejorar los buenos dibujos que ya se conocen, una manera de hacerlo es reemplazando algunos puntos por otros. De manera fomal, sea  $K_n$  con conjunto de vértices  $S$  y  $p \in S$ , escojamos un punto  $q$  en una vecindad de  $p$ , si  $\overline{cr}(S \setminus \{p\} \cup \{q\}) \leq \overline{cr}(S)$  entonces reemplace  $p$  con  $q$  en  $S$ . Si luego de un tiempo no se encuentra mejora entonces la vecindad de  $p$  se debe hacer más pequeña.

Estas mejoras se realizaron a conjuntos de  $n$  puntos con  $3 \leq n \leq 100$ , en particular para  $n = 75$  el mejor conjunto de puntos conocido tenía 450550 y se mejoró a 450492. Esto mejoro la cota superior por medio de los siguientes resultados.

**Lema 2.21.** *Si  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos, con  $n$  par, y  $S$  tiene un emparejamiento de rectas bisectrices, entonces existe un conjunto de puntos  $T = T(S)$  en posición general,  $|T| = 2n$ ,  $T$  también tiene un emparejamiento de rectas bisectrices, y  $\overline{cr}(T) = 16\overline{cr}(S) + \frac{n}{2}(2n^2 - 7n + 5)$ .*

La prueba del Lema 2.21 y del Teorema 2.22 se encuentran en [2]. El siguiente teorema es muy fuerte pues puede mejorar la cota superior, para esto solo necesitamos un conjunto de puntos  $S$  con un emparejamiento de rectas bisectrices.

**Teorema 2.22.** [2] *Si  $S$  es un conjunto de  $m$  elementos en posición general, con  $m$  impar, entonces*

$$\overline{cr}(K_n) \leq \frac{24\overline{cr}(S) + 3m^3 - 7m^2 + (\frac{30}{7})m}{m^4} \binom{n}{4} + \Theta(n^3).$$

*Demostración.* Sea  $S_0 = S$  y  $S_{k+1} = T(S_k)$  para  $k \geq 0$ , con  $T(S_k)$  cumpliendo las condiciones del lema 2.21. Por inducción y el lema 2.21 tenemos

$$\overline{cr}(S_k) = 16^k \overline{cr}(S) + m^3 8^{k-1} (2^k - 1) - \frac{7}{6} m^2 4^{k-1} (4^k - 1) + \frac{5}{14} m 2^{k-1} (8^k - 1).$$

Sea  $m = |S_k| = 2^k m$  tenemos

$$\overline{cr}(m) \leq \overline{cr}(S_k) = \frac{24cr(S) + 3m^3 - 7m^2 + (\frac{30}{7})m}{24m^4} - \frac{1}{8}m^3 + \frac{7}{24}m^2 - \frac{5}{28}m.$$

□

Con los algoritmos presentados anteriormente es posible mejorar conjuntos de puntos y calcular el número de cruces que tiene un dibujo rectilíneo de un grafo completo. Puesto que mover un punto de posición puede generar un dibujo con número de cruce mejor. El algoritmo presentado por Frank Duque [16], en el que dado un punto  $p$  y  $n$  candidatos para su nueva ubicación, calcula el número de cruce para cada uno de ellos en tiempo total  $O(n^2 \log n)$  para cada punto. Para valores más grandes de  $n$  presenta buenos resultados con mayor velocidad.

**2.2.4 Tiempo de ejecución para calcular el número de cruce rectilíneo al actualizar su conjunto de puntos.** Lo siguiente en la lista de interés es conocer el tiempo que lleva calcular  $\overline{cr}(S')$  una vez que es conocido  $\overline{cr}(S)$ , donde  $S'$  es el conjunto de puntos que resulta de añadir, borrar o mover un punto de  $S$ ; el contenido de esta subsección fue tomado de [14] para esto necesitaremos los siguientes Lemas. Denotaremos el conjunto de puntos en  $S$  a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $q$  como  $S_p(q)$ , para  $p$  y  $q$  puntos distintos no necesariamente en  $S$ . Para  $p = q$ ,  $S_p(q) = \emptyset$ .

**Lema 2.23.** [14] *Sea  $p$  un punto fuera de  $S$ , supongamos que cada*

punto  $r \in S$  tiene un peso  $\omega(r)$  asignado y que el orden en sentido contrario a las manecillas del reloj al rededor de  $p$  de los puntos en  $S$  se conoce. Entonces el conjunto de valores

$$\left\{ \sum_{r \in S_p(q)} \omega(r) : q \in S \right\}$$

se puede calcular en tiempo lineal.

*Demostración.* Sea  $q_1$  un punto en  $S$ . Sea  $l$  la recta dirigida de  $p$  a  $q_1$ . Rote  $l$  en sentido contrario a las manecillas del reloj al rededor de  $p$ , y sean  $(q_1, \dots, q_n)$  los puntos de  $S$  en el orden que son encontrados por  $l$  durante su rotación. Este orden puede ser calculado del orden contrario a las manecillas del reloj de los puntos en  $S$  alrededor de  $p$  en tiempo  $O(n)$ .

Calcular  $\sum_{r \in S_p(q_1)} \omega(r)$  en tiempo  $O(n)$ , como  $\sum_{r \in S_p(q_i)} \omega(r)$  puede calcularse de

$$\sum_{r \in S_p(q_{i-1})} \omega(r)$$

en tiempo constante, se tiene el resultado. □

Sean  $p, q$  un par de puntos no necesariamente en  $S$ . Sea  $\lambda_S(p, q)$  el número de puntos de  $S$  que quedan al lado izquierdo de la recta dirigida de  $p$  a  $q$ , en el caso que  $p = q$ , decimos que  $\lambda_S(p, q) := 0$ . Sean  $p_1, p_2, \dots, p_n$  los puntos de  $S$ . La  $\lambda$ -matriz de  $S$  [24] es la matriz cuya entrada  $(i, j)$  es igual a  $\lambda_S(p_i, p_j)$ .

**Lema 2.24.** [14] *la  $\lambda$ -matriz de un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano puede calcularse en tiempo  $O(n^2)$ .*

Para conjuntos de puntos finitos  $P$  y  $Q$ , definimos

$$f_S(P, Q) := \sum_{p \in P} \sum_{q \in Q} \binom{\lambda_S(p, q)}{2}$$

**Lema 2.25.** [14]  $\overline{cr}(S) = f_S(S, S) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$

*Demostración.* Sean  $p, q, r$  y  $s$  4 puntos diferentes de  $S$ . Notemos que los patrones definidos anteriormente se pueden redefinir como sigue, si en la tupla  $((p, q), \{r, s\})$  los puntos  $r$  y  $s$  están ambos a la izquierda ambos a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $q$ , decimos que  $((p, q), \{r, s\})$  es un patrón de *tipo A*, de otra forma diremos que es de *tipo B*. Nuevamente se denotarán  $A(S)$  y  $B(S)$  el número de patrones de tipo A y B respectivamente.

Sea  $P$  un conjunto de cuatro puntos. Si  $P$  está en posición convexa, entonces  $P$  determina 4 patrones de tipo A y 9 de tipo B. Si  $P$  no está en posición convexa, entonces  $P$  determina 3 patrones de tipo A y 9 de tipo B. Sea  $\square(S)$  el número de subconjuntos de  $S$  de cuatro puntos en posición convexa, y sea  $\Delta(S)$  el número de subconjuntos de  $S$  de cuatro puntos que no están en posición convexa. Así

$$A(S) = 4\square(S) + 3\Delta(S)$$

y

$$B(S) = 8\square(S) + 9\Delta(S).$$

Notemos que

$$A(S) + B(S) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$

$$\overline{cr}(S) = \square(S),$$

$$A(S) = \sum_{p, q \in S} \binom{\lambda_S(p, q)}{2}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\overline{cr}(S) &= A(S) - \frac{A(S) + B(S)}{4} \\ &= f_S(S, S) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}\end{aligned}$$

□

Para poder realizar la prueba de los Teoremas que se presentan a continuación será siempre necesario conocer el orden de los puntos que están en  $S \setminus \{p\}$  en sentido contrario a las manecillas del reloj al rededor de cada  $p$ .

**Teorema 2.26.** [14] *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano. Entonces el conjunto de valores*

$$\{\overline{cr}(S \setminus \{p\}) : p \in S\}$$

*puede ser calculado en tiempo  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Para todo punto  $p$  en  $S$ , calcule el orden en sentido de las manecillas del reloj de  $S \setminus \{p\}$  al rededor de  $p$ , después calcule la  $\lambda$ -matriz de  $S$ .

Por los Lemas 2.19 y 2.24 esto se puede hacer en tiempo  $O(n^2)$ . Usando la  $\lambda$ -matriz de  $S$  calcule los siguientes valores  $f_S(S, S)$ ,  $\{f_S(\{p\}, S) : p \in S\}$  y  $\{f_S(S, \{p\}) : p \in S\}$  en tiempo  $O(n^2)$ .

Note que por el Lema 2.25, para todo  $p \in S$  tenemos que

$$\overline{cr}(S \setminus \{p\}) = f_{S \setminus \{p\}}(S \setminus \{p\}, S \setminus \{p\}) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8}$$

Así que basta calcular  $\{f_{S \setminus \{p\}}(S \setminus \{p\}, S \setminus \{p\}) : p \in S\}$  en tiempo  $O(n^2)$ , para todo  $p \in S$ , sea

$$\nabla_p := f_{S \setminus \{p\}}(S \setminus \{p\}, S \setminus \{p\}) - f_S(S, S) + f_S(\{p\}, S) + f_S(S, \{p\})$$

para calcular  $\{f_{S \setminus \{p\}}(S \setminus \{p\}, S \setminus \{p\}) : p \in S\}$  en tiempo  $O(n^2)$ , calculemos  $\nabla_p : p \in S$  en tiempo  $O(n^2)$ . Note que

$$\begin{aligned} \nabla_p &= \sum_{q \in S \setminus \{p\}} \sum_{r \in S \setminus \{p\}} \binom{\lambda_{S \setminus \{p\}}(q, r)}{2} - \sum_{p, q \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \\ &+ \sum_{p \in \{p\}} \sum_{q \in S} \binom{\lambda_S(p, q)}{2} + \sum_{p \in S} \sum_{q \in \{p\}} \binom{\lambda_S(p, q)}{2} \\ &= \sum_{p, q \in S \setminus \{p\}} \binom{\lambda_{S \setminus \{p\}}(p, q)}{2} - \sum_{p \in S \setminus \{p\}} \sum_{q \in S} \binom{\lambda_S(p, q)}{2} + \sum_{p \in S} \sum_{q \in \{p\}} \binom{\lambda_S(p, q)}{2} \\ &= \sum_{p, q \in S \setminus \{p\}} \left( \binom{\lambda_{S \setminus \{p\}}(p, q)}{2} - \binom{\lambda_S(p, q)}{2} \right) \end{aligned}$$

Consideremos  $r$  un punto en  $S \setminus \{p\}$ . Note que si  $p$  está a la derecha de la recta dirigida de  $q$  a  $r$  entonces

$$\binom{\lambda_{S \setminus \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} = 0;$$

y si está a la izquierda de la línea dirigida de  $q$  a  $r$  entonces

$$\binom{\lambda_{S \setminus \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} = 1 - \lambda_S(q, r).$$

Más aún,  $p$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $q$  a  $r$  si y solo si  $r$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $q$ .

Para todo  $q \in S$  y todo  $r \in S \setminus \{q\}$  asigne el peso  $\omega_q(r) := 1 - \lambda_S(q, r)$ . Entonces

$$\sum_{r \in S \setminus \{p\}} \left( \binom{\lambda_{S \setminus \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \right) = \sum_{r \in S_p(q)} \omega_q(r).$$

Por el Lema 2.23, para  $q \in S$  fijo, el conjunto de valores

$$\left\{ \sum_{r \in S_p(q)} \omega_q(r) : p \in S \setminus \{q\} : q \in S \right\}$$

puede ser calculado en tiempo  $O(n^2)$ , así

$$\{\nabla_p : p \in C\}$$

puede calcularse en tiempo  $O(n^2)$ , el resultado se sigue. □

**Teorema 2.27.** [14] *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano, sea  $C$  un conjunto de  $\Theta(n)$  puntos candidatos, tal que  $S \cup C$  esté en posición general y  $C \cap S = \emptyset$ . Entonces el conjunto de valores*

$$\{\overline{cr}(S \cup \{q\}) : q \in C\}$$

*pueden ser calculados en tiempo  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Sea  $X := S \cup C$ . Para todo punto  $p \in X$ , calculemos el orden en sentido de las manecillas del reloj de  $X \setminus \{p\}$  al rededor de  $p$ , por el Lema 2.19, esto se puede hacer en tiempo  $O(n^2)$ . Para todo punto  $p \in X$  asigne un peso de  $\omega(p) = 0$  si  $p$  está en  $C$ .

Usando el Lema 2.23 para calcular el conjunto de valores

$$\left\{ \sum_{r \in X_p(q)} \omega(r) : p, q \in X \right\}$$

en tiempo  $O(n^2)$ . Notemos que para cada par de puntos  $p, q \in X$  se tiene que

$$\lambda_S(p, q) = \sum_{r \in X_p(q)} \omega(r).$$

Por lo tanto,  $f_S(S, S), \{f_S(\{p\}, S \cup \{p\}) : p \in S\}$  y  $\{f_S(S \cup \{p\}, \{p\}) : p \in S\}$  pueden calcularse en tiempo  $O(n^2)$ .

Por el Lema 2.25, para todo  $p \in C$  tenemos que

$$\overline{cr}(S \cup \{p\}) = f_{S \cup \{p\}}(S \cup \{p\}, S \cup \{p\}) - \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{8},$$

así que basta calcular  $f_{S \cup \{p\}}(S \cup \{p\}, S \cup \{p\}) : p \in C$  en tiempo  $O(n^2)$ .

Para todo  $p \in C$ , sea

$$\nabla_p := f_{S \cup \{p\}}(S \cup \{p\}, S \cup \{p\}) - f_S(S, S) - f_S(\{p\}, S) - f_S(S, \{p\}).$$

Para calcular  $f_{S \cup \{p\}}(S \cup \{p\}, S \cup \{p\}) : p \in C$  en tiempo  $O(n^2)$ .

Note que

$$\begin{aligned} \nabla_p &= f_{S \cup \{p\}}(S \cup \{p\}, S \cup \{p\}) - f_S(S, S) - f_S(\{p\}, S) - f_S(S, \{p\}) \\ &= \sum_{q \in S \cup \{p\}} \sum_{r \in S \cup \{p\}} \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \sum_{q \in S} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \\ &\quad - \sum_{q \in \{p\}} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} - \sum_{q \in S} \sum_{r \in \{p\}} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \\ &= \sum_{q \in S} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} + \sum_{q \in \{p\}} \sum_{r \in S \cup \{p\}} \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} \\ &\quad + \sum_{q \in S} \sum_{r \in \{p\}} \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \sum_{q \in \{p\}} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \\ &\quad - \sum_{q \in S} \sum_{r \in \{p\}} \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \sum_{q \in S} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \\ &= \sum_{q \in S} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \sum_{q \in S} \sum_{r \in S} \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \\ &= \sum_{q \in S} \sum_{r \in S} \left( \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \right) \end{aligned}$$

Sea  $r$  un punto en  $S$ . Si  $p$  está a la derecha de la recta dirigida de

$q$  a  $r$  entonces

$$\binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} = 0$$

y si  $p$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $q$  a  $r$  entonces

$$\binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} = \lambda_S(q, r).$$

Más aún,  $p$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $q$  a  $r$  si y solo si  $r$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $q$ .

Para todo punto  $q \in S$ , realice el siguiente procedimiento. A cada punto  $r \in S$  asigne un peso  $\omega_q(r) := \lambda_S(q, r)$ . Así,

$$\sum_{r \in S \cup \{p\}} \left( \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \right) = \sum_{r \in S_p(q)} \omega_q(r)$$

Por el Lema 2.23 para un  $q$  fijo, el conjunto de valores

$$\left\{ \sum_{r \in S_p(q)} \omega_q(r) : p \in C \right\}$$

puede calcularse en tiempo lineal, esto implica que el conjunto

$$\left\{ \sum_{r \in S \cup \{p\}} \left( \binom{\lambda_{S \cup \{p\}}(q, r)}{2} - \binom{\lambda_S(q, r)}{2} \right) = \sum_{r \in S_p(q)} \omega_q(r) : q \in S \right\}$$

se puede calcular en tiempo  $O(n^2)$ . Por tanto,

$$\{\nabla_p : p \in C\}$$

puede calcularse en tiempo  $O(n^2)$ , el resultado se sigue. □

**Teorema 2.28.** [14] Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano, sea  $C$  un conjunto de  $\Theta(n)$  puntos candidatos, tales que

$S \cup C$  esté en posición general y  $C \cap S = \emptyset$ . Sea  $p$  un punto en  $S$ , entonces el conjunto de valores

$$\{\overline{cr}(S') : S' = S \setminus \{p\}, q \in C\}$$

puede ser calculado en tiempo  $O(n^2)$ .

*Demostración.* Aplicando el Teorema 2.27 con  $S \setminus \{p\}$  como conjunto de puntos inicial y  $C$  como el conjunto de nuevos puntos posibles.  $\square$

Se usaron los algoritmos presentados anteriormente, para encontrar un conjunto de  $m = 2643$  y  $\overline{cr}(S) = 771218743336$ . Reemplazando estos valores en el Teorema 2.22 se obtuvo una mejora para la cota superior de  $\overline{cr}(K_n)$  como se ilustra en el siguiente Teorema

**Teorema 2.29.** [15]

$$\overline{cr}(K_n) < 0.3804492011 \binom{n}{4} + \Theta(n^3).$$

### 3

---

## NÚMERO DE CRUCE RECTILÍNEO PARA GRAFOS EN GENERAL

---

*A lo largo de éste capítulo será descrito un algoritmo de tiempo de ejecución  $O(n^2 \log(n))$  con el que es posible calcular el número de cruce rectilíneo para cualquier dibujo rectilíneo de un grafo.*

En el capítulo anterior se estudio un algoritmo para calcular el número de cruce rectilíneo para grafos completos. El objetivo del presente capítulo es estudiar el algoritmo dado en [15] por medio de una modificación de los patrones definidos en [5], esta nueva manera de definir los patrones no es equivalente a la anterior pues aunque también provee una relación con  $\overline{cr}(G)$ , en [5] cada par de vértices de un grafo eran adyacentes, por lo que es necesario ajustar la definición como sigue.

Sean  $v, w, r, s$  puntos de  $G$  tales que  $vw$  y  $rs$  son aristas de  $G$ ,  $((v, w), \{r, s\})$  se dice un *patrón*, este será de *tipo I* si la arista  $rs$  interseca al rayo que sale de  $v$  en dirección a  $w$   $\overrightarrow{vw}$ , o de *tipo II* si el rayo  $\overleftarrow{vw}$  que sale de  $v$  en con la dirección opuesta a  $\overrightarrow{vw}$  es intersecado por

la arista  $rs$ . Usaremos  $\alpha$  y  $\beta$  para denotar al número de patrones de tipo I y II respectivamente. El siguiente teorema establece la relación entre  $\alpha, \beta$  y  $\overline{cr}(G)$ .

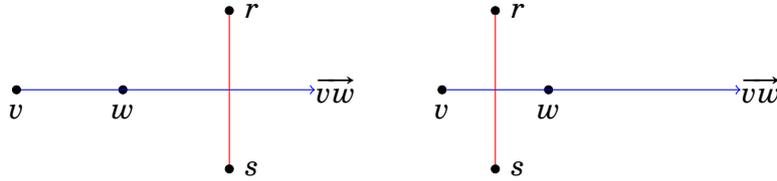


Figura 3.1:  $((u, v), \{r, s\})$  patrón de tipo I.

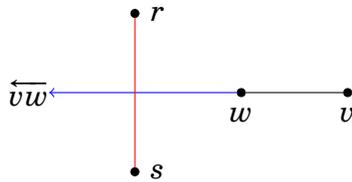


Figura 3.2:  $((u, v), \{r, s\})$  patrón de tipo II.

**Teorema 3.1.**  $\overline{cr}(G) = (\alpha - \beta)/4$ .

*Demostración.* Note que cada patrón  $((v, w), \{r, s\})$  de tipo II es un patrón  $((w, v), \{r, s\})$  de tipo I en el que  $rs$  no interseca  $vw$ . Además el patrón  $((v, w), \{r, s\})$  de tipo I en el que  $vw$  y  $rs$  se intersectan es igual a  $((v, w), \{r, s\}) = ((w, v), \{r, s\}) = ((w, v), \{s, r\})$ , por tanto al contar los patrones de tipo I se habrán contado cuatro veces los cruces entre las aristas de  $G$  y una vez los patrones de tipo II.  $\square$

Para calcular estos patrones seguiremos los siguientes pasos. Primero ordene los vértices de  $V \setminus \{v\}$  alrededor de  $v$  en sentido anti-horario como en [5], esto puede hacerse en tiempo  $O(n^2)$ . Sean  $v$  y  $w$  vértices de  $G$ , denotemos  $vw^+$  el número de vecinos de  $w$  a la izquierda de la recta dirigida de  $v$  a  $w$ , y  $vw^-$  los que están a la derecha.

**Lema 3.2.** *Calcular  $vw^+$  y  $vw^-$  para todo par de vértices en  $G$  lleva tiempo  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Ordene los vértices de  $G$ , de acuerdo a su orden de aparición al rotar una recta que pase por  $v$  en sentido antihorario. Sean  $w_1, \dots, w_{n-1}$  los vértices ya ordenados; usando el orden en sentido antihorario de los vértices de  $V \setminus \{v\}$  alrededor de  $v$  se puede calcular el orden de los  $w_i$  en tiempo lineal. Calcular  $vw_{i+1}^+$  y  $vw_{i+1}^-$  una vez conocidos  $vw_i^+$  y  $vw_i^-$  lleva tiempo constante. Así que calcular todos los valores de  $vw_i^+$  y  $vw_i^-$  puede hacerse en tiempo cuadrático.  $\square$

Para cada vértice  $v$  de  $G$ ,  $h_v$  denotará el rayo horizontal que sale de  $v$  hacia la derecha.

**Lema 3.3.** *Para cada par de vértices en  $G$  calcular  $h_v$  lleva tiempo  $O(n^2 \log(n))$ .*

*Demostración.* Sin perder generalidad podemos asumir que ninguna arista del dibujo rectilíneo de  $G$  es vertical. En efecto, en caso contrario basta con rotar un poco el dibujo para obtener un nuevo dibujo con esta propiedad y preservando todas las propiedades respecto a los cruces. La manera de contar las aristas de  $G$  que se cruzan con  $h_v$  se basa en la siguiente observación: si  $uw$  interseca a  $h_v$ , el vértice  $u$  debe estar arriba de  $v$  y además si se ordenan los vértices alrededor de  $u$ , en ese orden se encuentra primero a  $v$  que a  $w$ . Sean  $v_1, \dots, v_m$  los vértices de  $G$  que están abajo de  $u$  ordenados por su altura, con  $v_1$  el más cercano a  $u$ . Con estos vértices construya un árbol binario casi completo cuyas hojas son los  $v_1, \dots, v_m$  ordenados de izquierda a derecha según su orden alrededor de  $u$  en sentido antihorario, este se puede construir en tiempo lineal.

Sea  $d_{uv}$  el número de aristas incidentes a  $u$  que intersecan  $h_v$ , si se quiere calcular  $d_{uv_i}$  se deben marcar las hojas que correspondan a los vértices que sean adyacentes a  $u$  y al mismo tiempo esten abajo

de  $v_i$ . En cada nodo se almacena el número de hojas marcadas en el subárbol derecho e izquierdo. Para calcular el caso  $i = 1$  se requiere tiempo lineal. Mientras que para  $i > 1$ , actualizar  $i := i + 1$  solo se debe desmarcar el vértice  $v_i$  y actualizar la información guardada en los nodos que están en el camino que une a esta hoja con la raíz, esto lleva tiempo  $O(\log(n))$ .

Por tanto  $d_{uv_i}$  es el número de vértices marcados en el árbol a la derecha de  $v_i$ . La información almacenada anteriormente es importante pues nos permite contar los vértices marcados a la derecha de otro, si  $v_j$  está a la derecha de  $v_i$  en el árbol es por que  $v_j$  está en el subárbol derecho del primer ancestro común de  $v_j$  y  $v_i$ , luego todos los  $d_{uv_i}$  se pueden calcular en tiempo  $O(n \log(n))$ . Como  $h_v$  es la suma de los  $d_{uv}$  tales que  $u$  está arriba de  $v$ ,  $h_v$  se puede calcular en tiempo  $O(n^2 \log(n))$ .

□

**Ejemplo 3.4.** En el siguiente ejemplo ilustraremos como funciona el algoritmo.

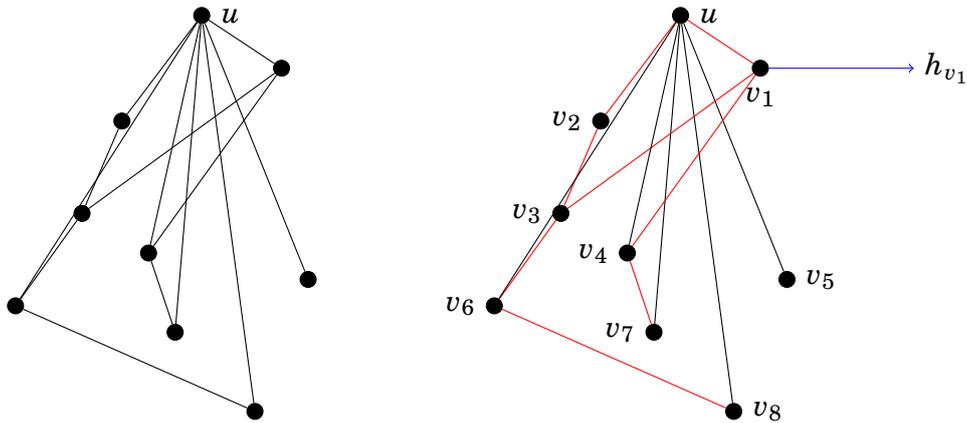


Figura 3.3

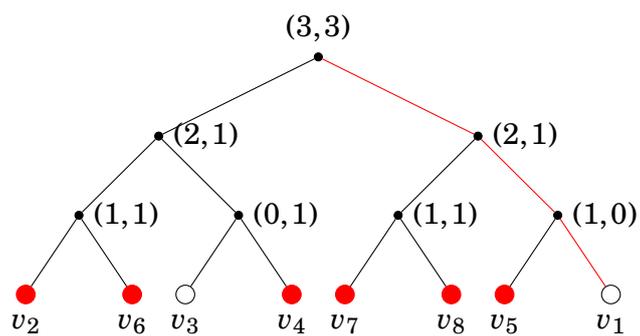


Figura 3.4:  $d_{uv_1} = 0$

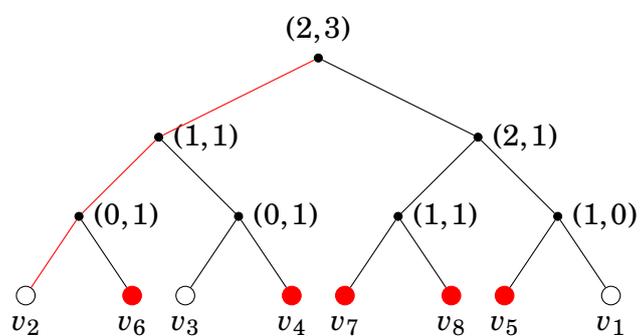


Figura 3.5:  $d_{uv_2} = 5$

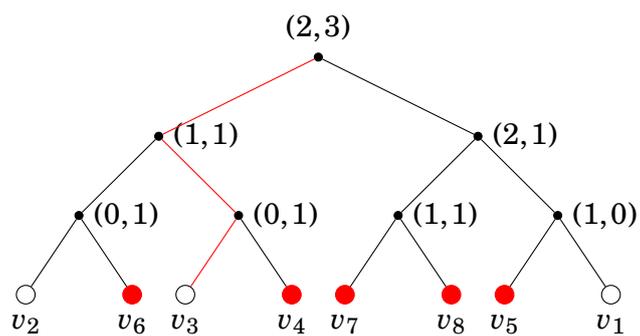
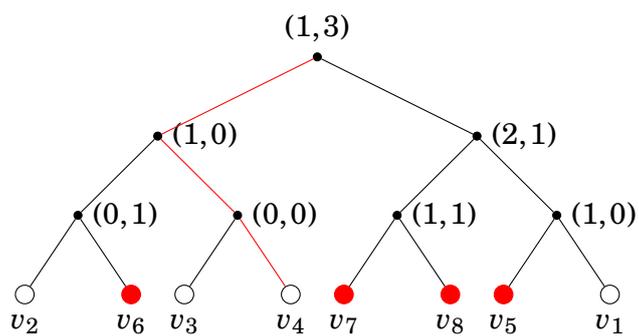
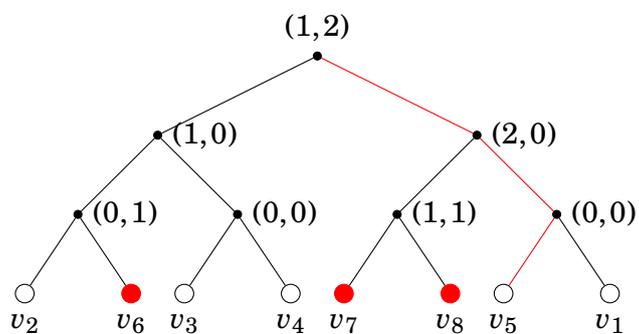
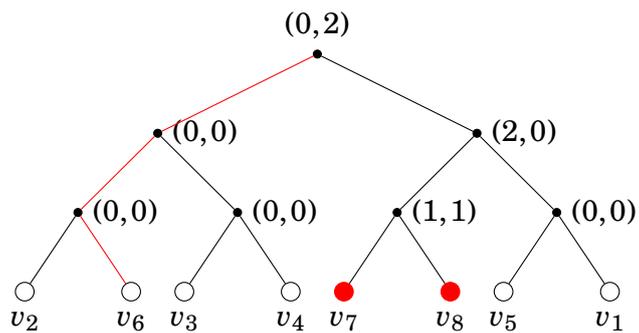
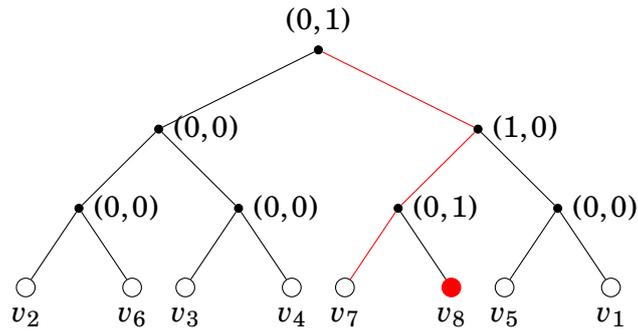
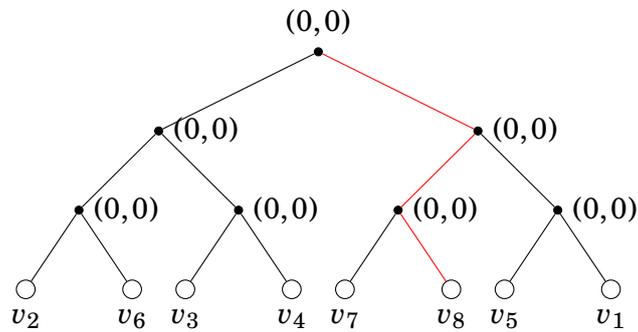


Figura 3.6:  $d_{uv_3} = 4$

Figura 3.7:  $d_{uv_4} = 3$ Figura 3.8:  $d_{uv_5} = 0$ Figura 3.9:  $d_{uv_6} = 2$

Figura 3.10:  $d_{uv_7} = 1$ Figura 3.11:  $d_{uv_8} = 0$ 

Con esto  $\alpha$  y  $\beta$  pueden calcularse de la siguiente manera, sean  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ ,  $\alpha_{uv}$  denota el número de aristas de  $G$  que intersecan  $\vec{uv}$  y  $\beta_{uv}$  el número de aristas de  $G$  que intersecan  $\overleftarrow{uv}$ , entonces  $\alpha = \sum_{u \in V} \sum_{v \in N(u)} \alpha_{uv}$  y  $\beta = \sum_{u \in V} \sum_{v \in N(u)} \beta_{uv}$ .

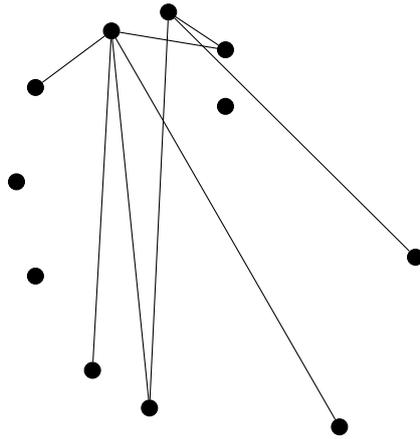
**Lema 3.5.**  $\alpha_{uv}$  y  $\beta_{uv}$  pueden calcularse en tiempo cuadrático para todo par de vértices  $u, v$  de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $u$  un vértice de  $G$ . Al rotar en sentido antihorario  $h_u$  se obtiene un orden de los vértices de  $V \setminus \{u\}$ , sean  $v_1, \dots, v_{n-1}$  los vértices ordenados de dicha manera. Por la manera en que los  $v_i$  fueron ordenados, toda arista que cruce  $\alpha_{uv_1}$  debió cruzar  $h_u$ , pero

entre las aristas que cruzan a  $h_u$  están también los vecinos de  $v_1$  que están a la derecha de  $\overrightarrow{uv_1}$ , entonces debemos restar  $uv_1^-$ . Para  $i > 1$ , haciendo un cálculo similar se tiene  $\alpha_{uv_i} = \alpha_{uv_{i-1}} + uv_{i-1}^+ - uv_i^-$ .

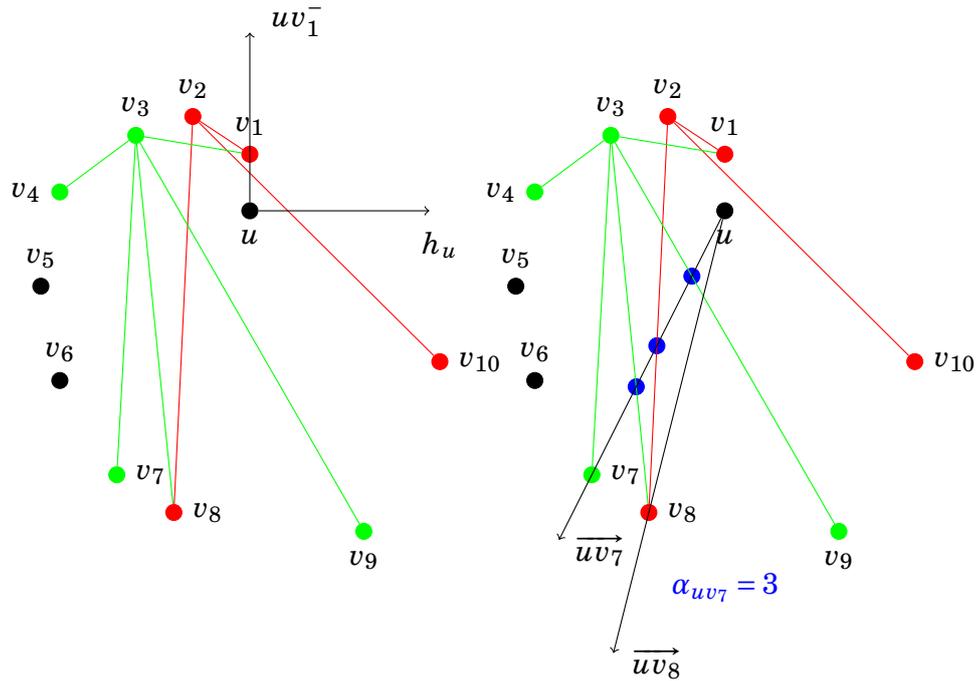
Ahora ordenemos los vértices de  $V \setminus \{u\}$  así  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , tal que  $v_1$  es el primer vértice encontrado al rotar el rayo horizontal que sale de  $u$  hacia la izquierda  $h'_u$  en sentido antihorario al rededor de  $u$ . Es necesario resaltar que entre  $\overleftarrow{uv_i}$  y  $h'_u$  pueden haber vértices de  $G$ , para calcular  $\beta_{uv_1}$  sean  $w_{11}, \dots, w_{1k_1}$  dichos vértices ordenados en sentido antihorario a partir de  $\overleftarrow{uv_i}$  entoces  $\beta_{uv_1} = \sum_{j=1}^{k_1} (uw_{1j}^+ - uw_{1j}^-)$ . Para  $i > 1$ , de nuevo ordene los vértices entre  $\overleftarrow{uv_{i-1}}$  y  $\overleftarrow{uv_i}$ , sean  $w_{i1}, \dots, w_{ik_i}$  los vértices ya ordenados en sentido antihorario alrededor de  $u$  empezando en  $\overleftarrow{uv_{i-1}}$ . Entonces  $\beta_{uv_i} = \beta_{uv_{i-1}} + \sum_{j=1}^{k_i} (uw_{ij}^+ - uw_{ij}^-)$  □

**Ejemplo 3.6.** Consideremos el siguiente grafo  $G$ .



Para este grafo, calculemos algunos valores de  $\alpha_{uv_i}$  y  $\beta_{uv_i}$ , para esto elijamos un vértice nombremoslo  $u$  y ordenemos los puntos alrededor de el en sentido antihorario.

Para calcular en la figura  $\alpha_{uv_i}$  veamos primero el caso  $\alpha_{uv_1} = h_u - uv_1^-$  mientras que para  $i = 7$  véase la figura 3.12 el cálculo es como sigue  $\alpha_{uv_8} = \alpha_{uv_7} + uv_7^+ - uv_8^- = 3 + 0 - 2 = 1$ , esto pues toda arista que

Figura 3.12:  $\alpha_{uv_7}$ 

cruza  $\overrightarrow{uv_8}$  debió cruzar  $\overrightarrow{uv_7}$  pues no hay vértices de  $G$  en medio de  $v_7$  y  $v_8$  por la manera en la que se ordenaron los vértices al rededor de  $u$ , falta por agregar los vecinos de  $v_7$  que están a la izquierda de  $\overrightarrow{uv_7}$  y eliminar todos los vecinos adyacentes a  $v_8$  que están a la derecha del rayo  $\overrightarrow{uv_8}$

Para el calculo de los  $\beta_{uv_i}$ , el calculo difiere de los  $\alpha_{uv_i}$  puesto que entre  $\overleftarrow{uv_k}$  y  $\overleftarrow{uv_{k+1}}$  pueden haber puntos del grafo  $G$ . Para calcular  $\beta_{uv_6}$  como lo ilustra la figura 3.13 es necesario conocer las aristas que cruzan  $\overleftarrow{uv_6}$ , luego etiquetar todos los vértices en medio de  $\overleftarrow{uv_6}$  y  $\overleftarrow{uv_7}$  conforme van apareciendo al rotar  $h'_u$  iniciando en  $\overleftarrow{uv_6}$ , teniendo en cuenta que todos los vecinos de  $w_{7k}$  que se encuentran a la derecha de  $\overleftarrow{uw_{7k}}$  no cruzan  $\overleftarrow{uv_7}$  deben ser eliminados de la cuenta y se deben adicionar los vecinos izquierdos de los  $w_{7k}$ , aún en el caso en que  $w_{7s}$  y  $w_{7k}$  fueran adyacentes esto no afecta las cuentas pues, se anulan

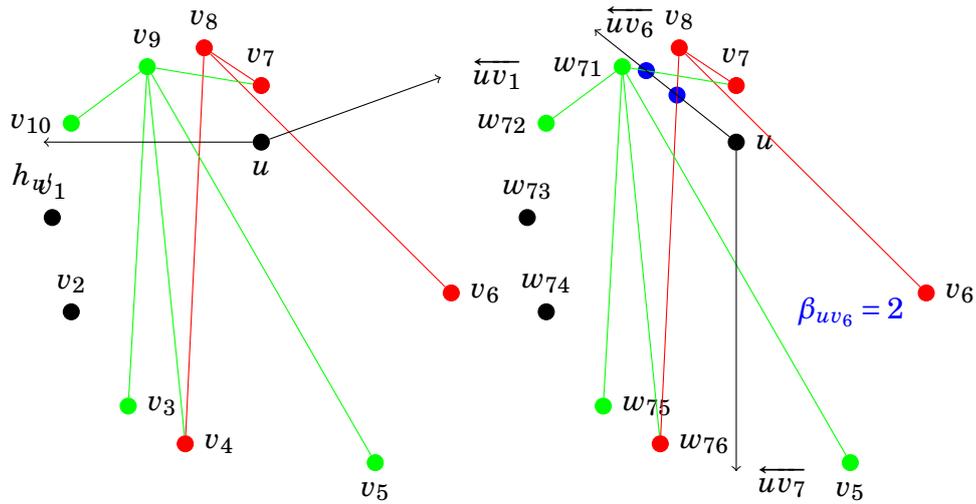


Figura 3.13:  $\beta_{uv_6}$

en la suma. Así que  $\beta_{uv_7} = \beta_{uv_6} + (uv_{71}^+ - uv_{71}^- + uv_{72}^+ - uv_{72}^- + uv_{73}^+ - uv_{73}^- + uv_{74}^+ - uv_{74}^- + uv_{75}^+ - uv_{75}^- + uv_{76}^+ - uv_{76}^-) = 2 + (3 - 1 + 0 - 1 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 1 + 0 - 2) = 3 - 2 = 1$ .

Dado que todos los pasos de este algoritmo requieren tiempo  $O(n^2)$  para ejecutarse, salvo el paso en que se calculan las aristas que cruzan  $h_u$ , si encontramos grafos en los que este paso se pueda calcular a lo más en tiempo cuadrático, tendremos un algoritmo que calcule en tiempo  $O(n^2)$  su número de cruce rectilíneo. Un grafo *geométrico* es un grafo cuyos vértices son puntos en el plano en posición general, sus aristas son segmentos de rectas que unen sus vértices. Un grafo en *capas* es un grafo geométrico cuyo conjunto de vértices está particionado en conjuntos  $L_1, \dots, L_r$  llamados capas que cumplen lo siguiente: los vértices en la capa  $L_i$  tienen la misma coordenada  $y_i$  en  $y$ ,  $y_1 < y_2 < \dots < y_r$  y los vértices en la capa  $L_i$  solo son adyacentes a vértices en las capas  $L_{i-1}$  y  $L_{i+1}$ . Un grafo *convexo geométrico* es un grafo geométrico que tiene sus vértices en posición convexa.

Los grafos geométricos convexos y los grafos en capas son dos familias de grafos que cumplen esta condición. En el caso de los grafos

geométricos convexos se puede escoger  $h_u$  de tal forma que no interseque la cerradura convexa de  $G$ ,  $h_u$  no es intersectada por ninguna arista. Por tanto calcular  $h_u$  para todo vértice de  $G$  puede hacerse en tiempo  $O(n \log(n))$ . Ahora veamos el caso de los grafos en capas; sea  $G$  un grafo en capas con capas  $L_1, \dots, L_r$ . Sea  $G_i$  el subgrafo de  $G$  inducido por  $L_i$  y  $L_{i+1}$ , este subgrafo es del tipo convexo geométrico y como  $\overline{cr}(G)$  es la suma de  $\overline{cr}(G_i)$ ,  $\overline{cr}(G)$  se puede calcular en tiempo cuadrático.



# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] B. M. Ábrego and S. Fernández-Merchant. A lower bound for the rectilinear crossing number. *Graphs Combin.*, 21(3):293–300, 2005.
- [2] B. M. Ábrego and S. Fernández-Merchant. Geometric drawings of  $K_n$  with few crossings. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(2):373–379, 2007.
- [3] B. M. Ábrego, S. Fernández-Merchant, J. Leanos, and G. Salazar. A central approach to bound the number of crossings in a generalized configuration. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:273–278, 2008.
- [4] O. Aichholzer.
- [5] O. Aichholzer, F. Duque, R. Fabila Monroy, O. E. García-Quintero, and C. Hidalgo-Toscano. An ongoing project to improve the rectilinear and the pseudolinear crossing constants. Preprint.
- [6] O. Aichholzer, J. García, D. Orden, and P. Ramos. New lower bounds for the number of ( $\leq k$ )-edges and the rectilinear crossing number of  $K_n$ . *Discrete Comput. Geom.*, 38(1):1–14, 2007.

- [7] M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn, and E. Szemerédi. Crossing-free subgraphs. *North-Holland Mathematics Studies*, 60(C):9–12, 1982.
- [8] J. Balogh and G. Salazar.  $k$ -sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of  $K_n$ . *Discrete & Computational Geometry*, 35(4):671–690, 2006.
- [9] L. Beineke and R. Wilson. The early history of the brick factory problem. *The Mathematical Intelligencer*, 32(2):41–48, 2010.
- [10] D. Bienstock and N. Dean. Bounds for rectilinear crossing numbers. *Journal of Graph Theory*, 17(3):333–348, 1993.
- [11] J. Blazek and M. Koman. A minimal problem concerning complete plane graphs. *Theory of graphs and its applications, Czech. Acad. of Sci*, pages 113–117, 1964.
- [12] A. Brodsky, S. Durocher, and E. Gethner. Toward the rectilinear crossing number of  $K_n$ : new drawings, upper bounds, and asymptotics. *Discrete Mathematics*, 262(1-3):59–77, 2003.
- [13] T. K. Dey. Improved bounds for planar  $k$ -sets and related problems. *Discrete & Computational Geometry*, 19(3):373–382, 1998.
- [14] F. Duque and R. Fabila-Monroy. Updating the number of crossings in rectilinear drawings of the complete graph. *arXiv preprint arXiv:1609.00867*, 2016.
- [15] F. Duque, R. F. Monroy, C. Hernández-Vélez, and C. Hidalgo-Toscano. Counting the number of crossings in geometric graphs. *CoRR*, abs/1904.11037, 2019.

- [16] F. R. Duque. Algoritmo amortizado para el número de cruces rectilíneos sobre gráficas completas. Master's thesis, Departamento de Matemáticas Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional México, Febrero 2014.
- [17] H. Edelsbrunner, N. Hasan, R. Seidel, and X. J. Shen. Circles through two points that always enclose many points. *Geom. Dedicata*, 32(1):1–12, 1989.
- [18] D. Eppstein. An early reference on crossing minimization. <https://11011110.github.io/blog/2013/03/27/early-reference-on.html>, last accessed 9/21/2017).
- [19] P. Erdős and R. K. Guy. Crossing number problems. *Amer. Math. Monthly*, 80:52–58, 1973.
- [20] P. Erdős, L. Lovász, A. Simmons, and E. G. Straus. Dissection graphs of planar point sets. pages 139–149, 1973.
- [21] R. Fabila-Monroy and J. López. Computational search of small point sets with small rectilinear crossing number. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 18(3):393–399, 2014.
- [22] M. R. Garey and D. S. Johnson. Crossing number is NP-complete. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 4(3):312–316, 1983.
- [23] J. E. Goodman and R. Pollack. On the combinatorial classification of nondegenerate configurations in the plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 29(2):220–235, 1980.
- [24] J. E. Goodman and R. Pollack. Multidimensional sorting. *SIAM Journal on Computing*, 12(3):484–507, 1983.
- [25] R. K. Guy. The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. In *Proof Techniques in Graph Theory (Proc. Second Ann Arbor*

- Graph Theory Conf., Ann Arbor, Mich., 1968*), pages 63–69. Academic Press, New York, 1969.
- [26] R. K. Guy. Crossing numbers of graphs. pages 111–124, 1972.
- [27] F. Harary and A. Hill. On the number of crossings in a complete graph. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 13(4):333–338, 1963.
- [28] F. Harary and A. Hill. On the number of crossings in a complete graph. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 13(4):333–338, 1963.
- [29] C. M. Hidalgo Toscano. Un algoritmo para recorrer las celdas de un arreglo de rectas. Master’s thesis, Departamento de Matemáticas Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional México, Agosto 2015.
- [30] H. Jensen. An upper bound for the rectilinear crossing number of the complete graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 10(3):212–216, 1971.
- [31] T. Leighton. Complexity issues in vlsi, foundations of computing series, 1983.
- [32] L. Lovász, K. Vesztergombi, U. Wagner, and E. Welzl. Convex quadrilaterals and  $k$ -sets. In *Towards a theory of geometric graphs*, volume 342 of *Contemp. Math.*, pages 139–148. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [33] J. Matoušek. *Lectures on discrete geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [34] J. Pach and G. Tóth. Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica*, 17(3):427–439, 1997.

- [35] J. Pach and G. Tóth. Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica*, 17(3):427–439, 1997.
- [36] J. Pach and G. Tóth. Thirteen problems on crossing numbers. *Geombinatorics*, 9(4):194–207, 2000.
- [37] E. R. Scheinerman and H. S. Wilf. The rectilinear crossing number of a complete graph and Sylvester’s “four point problem” of geometric probability. *Amer. Math. Monthly*, 101(10):939–943, 1994.
- [38] U. Wagner. On the rectilinear crossing number of complete graphs. In *Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 583–588. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [39] E. Welzl. More on  $k$ -sets of finite sets in the plane. *Discrete Comput. Geom.*, 1(1):95–100, 1986.
- [40] K. Zarankiewicz. On a problem of P. Turan concerning graphs. *Fund. Math.*, 41:137–145, 1954.