CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Representaciones de Álgebras C^* y Algunas Aplicaciones

Tesis que presenta

Jesus Alexis Aburto Duarte

Para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la Especialidad de

Matemáticas

Directora de Tesis:
Dra. Maribel Loaiza Leyva

Ciudad de México

Agosto 2020

Podemos representarnos mentalmente un hecho simple
que entra en conflicto con las leyes de la física,
pero no uno que contradiga las leyes de la geometría.

Dedicatorias

A mi Padre y Madre

Ezequiel y Estela.

A pesar de que no entiendan lo que está aquí escrito, el esfuerzo dedicado a este trabajo es por ustedes, en gratitud por todo su apoyo. Principalmente por hacer que tenga una vida tan bella.

A mis hermanos

Brenda, Ezequiel y Walter.

Con quienes he compartido la vida y agradables momentos.

A mi novia

Gabriela.

A quien conocí en esta etapa de mi vida, quien me apoyó, estuvo conmigo siempre, y me ha hecho feliz.

A mis amigos

L, R, C, M, G, J, S, A, J, I y R.

Los responsables de las dificultades en la maestría.

AGRADECIMIENTOS

A mi Directora de Tesis:

Dra. Maribel Loaiza Leyva.

Por su infinita paciencia. Por su valioso tiempo y por mostrarme el camino cuando estaba perdido.

Extras.

Gracias a todos los profesores que me transmitieron su conocimiento. Al CONACYT por la imprescidible beca. A las secretarias del departamento de Matemáticas por su incansable amabilidad.

Índice general

Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio de las propiedades más importantes de álgebras de Banach y de álgebras C^*. Iniciamos estudiando los funcionales lineales multiplicativos de un álgebra de Banach y demostramos que tanto el álgebra de matrices $M_n(\mathbb{C})$ $(n > 1)$ y $B(\mathcal{H})$ no tienen funcionales lineales multiplicativos. Una de las cosas que incluimos aquí es el teorema del mapeo espectral y la fórmula del radio espectral. El capítulo 2 está dedicado al estudio de álgebras C^*. En particular, se demuestra que cada álgebra C^* conmutativa es isomorfa al álgebra de funciones continuas definidas en su espacio de ideales maximales. Dado que el espacio el espacio de ideales maximales del álgebra C^* $\mathcal{A}[x]$, generada por un elemento normal x, es homeomorfo al espectro de x (denotado por $\sigma(x)$) se tiene que $\mathcal{A}[x]$ es isomorfa a $C(\sigma(x))$. Por ello a cada función continua f, definida en $\sigma(x)$, podemos asociar un elemento $f(x)$ en $\mathcal{A}[x]$. Esta asociación se llama cálculo funcional continuo. Para finalizar este capítulo estudiamos un tipo especial de funcionales, llamados estados y calculamos el espacio de estados de $M_n(\mathbb{C})$. La parte principal de esta tesis es el estudio de las representaciones de un álgebra C^*, una de las cuales es la representación dada en la construcción de GNS. Incluimos aquí el Lema de Schur que es el resultado más importante pues caracteriza a las representaciones irreducibles. Las representaciones irreducibles se agrupan en clases de equivalencias y a estas clases de equivalencia se les da la topología de Jacobson, formando así lo que se llama el espectro del álgebra. La parte final de esta tesis está dedicada al estudio de las representaciones irreducibles de algunas álgebras concretas.

ABSTRACT

This work is devoted to the study of the main properties of Banach and C* algebras. We begin by studying the multiplicative linear functionals of a Banach algebra and we show that $M_n(\mathbb{C})$ $(n > 1)$ and $B(\mathcal{H})$ do not have multiplicative linear functionals. We also include the Spectral Mapping Theorem and the spectral radius formula.

Chapter 2 is devoted to the study of C^* algebras. In particular, we show that each commutative C^* algebra $\mathcal{A}$ is isomorphic to $\mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$, where $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ denotes the maximal ideal space of $\mathcal{A}$. Thus the C^* algebra $\mathcal{A}[x]$, generated by a normal element x, is isomorphic to $\mathbf{C}(\sigma(x))$, where $\sigma(x)$ is the spectrum of x. Therefore, to each function $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$ we can associate an element $f(x) \in \mathcal{A}[x]$. This correspondence is called the continuous functional calculus. To finish Chapter 2 we study a special kind of functionals, called states, and we calculate the space of states of $M_n(\mathbb{C})$. The main part of this work is the study of the representations of a C^* algebra, including the one given by the GNS construction. We include the Schur Lemma that characterizes irreducible representations and we study the spectrum of a C* algebra. Finally we study the irreducible representations of some concrete C* algebras.

Introducción

La idea fundamental de la teoría de representaciones es estudiar cómo pueden actuar los elementos de una cierta estructura algebraica A sobre un conjunto X. Quizá el caso más simple es cuando A es un grupo y X es un simple conjunto sin ninguna estructura adicional. Esto se conoce como la acción de un grupo sobre un conjunto. En esta tesis tratamos con el caso en que A es un álgebra C^* y X es un espacio de Hilbert.

El tema de representaciones de álgebras es muy extenso y tiene conexiones con distintas áreas de la matemática como la teoría del índice para foliaciones, representaciones de grupo, teoría de nudos, la conjetura de Novikov, la teoría de ondículas y con la física matemática, específicamente con la teoría cuántica de campos [1], [2], [4], [3].

Uno de los objetivos principales en teoría de representaciones es clasificar las representaciones irreducibles. Una manera de hacer esto es estudiando los estados puros de un álgebra C^*, ya que cada estado puro da origen a una representación irreducible mediante la construcción Gelfand-Naimark-Segal, y cada representación irreducible es equivalente a una de este tipo.
Las recientes investigaciónes llevadas a cabo en el área de álgebras C^* suelen involucrar técnicas de teoría de conjuntos muy sofisticadas, por ejemplo en el estudio de los automorfismos del álgebra de Calkin $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. I. Farah mostró, asumiendo el axioma de Todorcevic que cada automorfismo del álgebra de Calkin es interno. Por otro lado N. Phillips y Nick Weaver mostraron, asumiendo la hipótesis del continuo, que el álgebra de Calkin tiene automorfismos externos [19].

El álgebra $B(\mathcal{H})$ de operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es el ejemplo principal de álgebras C^*, esto se debe al hecho de que cada álgebra C^* es isomorfa a una subálgebra de $B(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ [5]. Por tanto es de gran interes calcular las representaciones de $B(\mathcal{H})$. En este trabajo veremos que podemos obtener las representaciones irreducibles de un álgebra de operadores $\mathcal{R} \subset B(\mathcal{H})$ calculando las representaciones del álgebra cociente $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ y las representaciones de $\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{R}$. Cuando $\mathcal{I}$ es el álgebra de operadores compactos entonces cada representación irreducible es equivalente a la representación identidad. Dicho esto es natural querer clasificar las representaciones del álgebra de Calkin. Sin embargo este problema sigue sin resolverse [29].

A diferencia de las representaciones de grupos finitos donde el teorema de Maschke afirma que cada representación de un grupo finito se descompone como suma directa de representaciones irreducibiles, en teoría de representaciones de álgebras C^* no hay un análogo a este teorema. Lo más cercano que se tiene hasta el momento es que cada representación es aproximadamente equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles.

Las principales resultados que usaremos para calcular representaciones de álgebras serán los siguientes:

$i)$ Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* e $\mathcal{I}$ es un ideal bilateral cerrado, entonces

$$\widehat{\mathcal{A}} \simeq \widehat{\mathcal{A}/\mathcal{I}} \sqcup \widehat{\mathcal{I}},$$

$ii)$ Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$, entonces

$$\widehat{\mathcal{A}} \simeq \bigsqcup_{i=1}^{n} \widehat{\mathcal{A}_i}.$$

Capítulo 1
Álgebras de Banach

1.1 Algebras de Banach

Este capítulo contiene una breve introducción a la teoría de álgebras de Banach y álgebras C^*. Para una mejor exposición de estos temas véase por ejemplo [5], [7], [10], [14], [15]. La teoría de álgebras de Banach surgió en los inicios de la década de 1940, teniendo a Izrail M. Gelfand como uno de sus principales pioneros.

Recordemos que un álgebra $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos denotado por $\mathbb{C}$, en el que existe un producto entre vectores que cumple lo siguiente:
Para cada $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$
$i) x(y+z) = xy + yz$,
$ii) (x+y)z = xz + yz$,
$iii) (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$.

$\mathcal{A}$ es asociativa si para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$

$$(xy)z = x(yz).$$

Un álgebra $\mathcal{A}$ es unitaria si tiene un neutro multiplicativo el cual será denotado por $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$. Omitiremos el subíndice $\mathcal{A}$ cuando sea claro sobre que álgebra se está tomando la unidad.

Definición 1.1 Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ dotada de una norma que convierte a $\mathcal{A}$ en un espacio vectorial completo tal que:
$i)$ $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ para cada $x, y \in \mathcal{A}$.
Si $\mathcal{A}$ tiene identidad pediremos que
$ii)$ $\|\mathbf{1}\| = 1$.

En este trabajo asumiremos que cada álgebra de Banach es unitaria a menos que otra cosa sea establecida. Así que escribiremos simplemente álgebra de Banach en lugar de álgebra de Banach unitaria.

El ejemplo más simple de álgebra de Banach es el campo de los números complejos. El siguiente ejemplo importante es $\mathbf{C}(K)$, el espacio vectorial de funciones continuas $\mathbb{C}$-valuadas definidas en K, con K siendo un espacio compacto y Hausdorff. Si el conjunto K es localmente compacto (pero no compacto) y Hausdorff, entonces el espacio vectorial $\mathbf{C}_0(K)$ de funciones continuas que se anulan en el infinito es un álgebra de Banach sin unidad. La norma en ambos conjuntos se define como

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Éstos son ejemplos de álgebras de Banach conmutativas, mientras que los siguientes ejemplos no lo son.
El espacio vectorial $B(\mathcal{H})$ de operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con la multiplicación dada por la composición de operadores y la norma de operadores

$$\|T\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|Tv\|,$$

es un álgebra de Banach. Cuando $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $B(\mathcal{H})$ puede ser identificado con $M_n(\mathbb{C})$. Note que para $n = 1$, $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach conmutativa.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y suponga que $\dim(\mathcal{H}) = \infty$. Denotemos por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ al subespacio de $B(\mathcal{H})$ que consiste de todos los operadores lineales compactos. Ya que $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, la bola unitaria centrada en 0 de $\mathcal{H}$ no es compacta. Implicando así que el operador identidad no es compacto.
Es conocido de la teoría de operadores acotados que si $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $T \in B(\mathcal{H})$, entonces TS y ST pertenecen a $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Además, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un subespacio cerrado de $B(\mathcal{H})$, de hecho es la cerradura del conjunto de operadores de rango finito con la norma de operadores. La anterior discusión muestra que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un álgebra de Banach no unitaria.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Como $\mathcal{A}$ es en particular un anillo, podemos considerar un ideal bilateral cerrado $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ y pasar al cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Entonces $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach con la norma cociente. En particular si $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ e $\mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$$

es un álgebra de Banach y es llamada el álgebra de Calkin.

Considere el espacio vectorial normado $L^1[0,1]$ de funciones integrables sobre $[0,1]$. El álgebra de Volterra $\mathcal{V}$ es el espacio $L^1[0,1]$ con el producto dado por

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy, \quad f, g \in L^1[0,1].$$

Note que $\mathcal{V}$ es un álgebra de Banach conmutativa sin unidad.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y S un subconjunto de $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{A}[S]$ al álgebra generada por S. Si $S = \{x\}$ escribimos simplemente $\mathcal{A}[x]$. Un elemento y en $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}[x]$ si y solo si existe una sucesión de polinomios en x que converge a y.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach $\mathcal{A}$. El conjunto $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ es un espacio vectorial con las operaciones puntuales. Si definimos el producto y la norma en $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ por

$$(x, \lambda_1) \cdot (y, \lambda_2) = (xy + \lambda_2 x + \lambda_1 y, \lambda_1 \lambda_2) \quad \text{y} \quad \|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|,$$

entonces $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ se convierte en un álgebra de Banach con identidad y la denotamos por $\widetilde{\mathcal{A}}$. $\widetilde{\mathcal{A}}$ es llamada la unitización de $\mathcal{A}$. Note que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a un ideal maximal de $\widetilde{\mathcal{A}}$ bajo el mapeo $x \mapsto (x, 0)$.

Para un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, denotamos por $G(\mathcal{A})$ al subconjunto de $\mathcal{A}$ que consta de los elementos invertibles. Obsérvese que $G(\mathcal{A})$ es un grupo con la multiplicación del álgebra.

Ahora bien, si $\|x\| < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n < \infty$ y dado que $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en $\mathcal{A}$ y además cumple que

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{1.1}$$

Observe que

$$\|(\mathbf{1} - x)^{-1}\| \leq (1 - \|x\|)^{-1}. \tag{1.2}$$

Definición 1.2 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y x un elemento de $\mathcal{A}$. El espectro de x que denotamos por $\sigma(x)$ o $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ cuando queremos hacer énfasis en el álgebra que contiene a x, se define como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \notin G(\mathcal{A})\}.$$

El complemento de $\sigma(x)$ se llama el resolvente de x y usualmente se denota como $\rho(x)$.

En el caso del álgebra de Banach $\mathbf{C}(K)$ donde K es un conjunto compacto y Hausdorff, tenemos que

$$\sigma(f) = f(K), \quad f \in \mathbf{C}(K). \tag{1.3}$$

La definición de espectro implica que si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, entonces el espectro de una matriz A coincide con el conjunto de eigenvalores de A.
Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita entonces cada eigenvalor de $T \in B(\mathcal{H})$ pertenece al espectro de T, sin embargo no es cierto que cada elemento del espectro de T es un eigenvalor de T, incluso hay operadores que no tienen eigenvalores, por ejemplo: el operador de multiplicación M_x actuando en $L^2[0,1]$ y definido por

$$[M_x f](x) := xf(x), \quad x \in [0,1].$$

A pesar de que existen elementos en un álgebra de Banach que no tienen eigenvalores, el siguiente teorema muestra que el espectro de cualquier elemento en un álgebra de Banach siempre es no vacío. Para este hecho es crucial que el álgebra sea compleja.

Teorema 1.3 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Demostración
Cuando x no es invertible el resultado es claro, pues $0 \in \sigma(x)$. Tomemos un elemento invertible x y supongamos que $\sigma(x) = \emptyset$. Entonces para cada $z \in \mathbb{C}$, el elemento $(z\mathbf{1} - x)^{-1}$ es invertible en $\mathcal{A}$. Fijemos un funcional lineal acotado F definido en $\mathcal{A}$. La función

$$f(z) := F((z\mathbf{1} - x)^{-1}),$$

está definida en todo el plano complejo. Puesto que el mapeo $x \mapsto x^{-1}$ es continuo en $G(\mathcal{A})$ y F es acotado. Tenemos para cada $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} \\
&= F\left(\lim_{z \to z_0} \frac{(z_0\mathbf{1} - x)^{-1} - (z\mathbf{1} - x)^{-1}}{z_0 - z} \right) \\
&= F\left(\lim_{z \to z_0} \frac{(z_0\mathbf{1} - x)^{-1}(z - z_0)(z\mathbf{1} - x)^{-1}}{z_0 - z} \right) \\
&= F\left(\lim_{z \to z_0} -(z_0\mathbf{1} - x)^{-1}(z\mathbf{1} - x)^{-1} \right) \\
&= -F((z_0\mathbf{1} - x)^{-2}).
\end{aligned}$$

Esto implica que f es una función entera.
La desigualdad 1.2 implica que $f(z) \longrightarrow 0$ cuando $|z| \longrightarrow \infty$. Por el Teorema de Liouville obtenemos que $f = 0$, esto es, $F((z\mathbf{1} - x)^{-1}) = 0$. Ya que F se tomó arbitrario, el Teorema de Hanh-Banach implica que $(z\mathbf{1} - x)^{-1} = 0$. Esto es una clara contradicción, pues el cero no es invertible. Por tanto $\sigma(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in \mathcal{A}$. ∎

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach en la que cada elemento no cero es invertible. Fijemos $x \in \mathcal{A}$. Por el teorema 1.3 existe al menos un elemento λ en el espectro de x. Entonces $\lambda\mathbf{1} - x$ es no invertible, así que necesariamente $x = \lambda\mathbf{1}$. Por consiguiente $\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}$ con el isomorfismo isométrico dado por

$$f(x) = \lambda. \tag{1.4}$$

Proposición 1.4 Para cada $x \in \mathcal{A}$, el espectro de x es un conjunto compacto y contenido en la bola de radio $\|x\|$ centrada en el origen.

Demostración.
Fijemos $x \in \mathcal{A}$. De la ecuación 1.1 se deduce que el espectro de x está acotado por $\|x\|$. De modo que $\sigma(x)$ está contenido en la bola compacta de radio $\|x\|$ centrada en el origen. Ahora sea $\lambda_0 \in \rho(x)$. El conjunto

$$\{y \in \mathcal{A} : \|y - (\lambda_0\mathbf{1} - x)\| < \|(\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1}\|\}$$

es un conjunto abierto de $\mathcal{A}$ que contiene a $\lambda_0\mathbf{1} - x$ y está contenido en $G(\mathcal{A})$. Esto implica que el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1}\|)\}$ es abierto, contiene a λ_0 y está contenido en $\rho(x)$. Así, $\rho(x)$ es un conjunto abierto y por tanto $\sigma(x)$ es cerrado. Siendo $\sigma(x)$ cerrado y contenido en un conjunto compacto, el resultado se obtiene. ■

Un homomorfismo $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre álgebras de Banach es una transformación lineal tal que:
$i)\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$, para cada $x, y \in \mathcal{A}$,
$ii)\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$.

Si además Φ es inyectivo, entonces Φ es llamado un isomorfismo.
Note que $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1}$ si $x \in G(\mathcal{A})$.

Es fácil ver que si $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un homomorfismo de álgebras de Banach entonces

$$\sigma(\Phi(x)) \subset \sigma(x) \quad \text{para } x \in \mathcal{A},$$

y si Φ es un isomorfismo entonces

$$\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x) \quad x \in \mathcal{A}.$$

Considere el álgebra de Banach $B(\ell^2(\mathbb{N}))$ y sea $L \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ el operador de desplazamiento a la izquierda, esto es,

$$L(\{a_1, a_2, a_3, ...\}) = \{a_2, a_3, a_4...\}.$$

Es claro que $\|L\| = 1$. Por lo que cada $\lambda \in \sigma(T)$ cumple que $|\lambda| \leq 1$. Por otro lado cada $\lambda \in \mathbb{C}$ de norma menor que 1 es un eigenvalor de L con eigenvector $\{\lambda^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(L)$. Ya que el espectro es un conjunto cerrado concluimos que $\sigma(L) = \overline{D}$.

En el Teorema 1.4 probamos que el espectro de un elemento en un álgebra de Banach es un conjunto compacto. A continuación mostramos que para cualquier subconjunto compacto K del plano complejo existe un operador lineal $T \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ tal que $\sigma(T) = K$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y K un conjunto compacto en $\mathbb{C}$. Sea $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Definimos $T \in B(\mathcal{H})$ mediante

$$Tv = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \langle v, v_i\rangle v_i \quad \text{para cada } v = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle v, v_i\rangle v_i \in \mathcal{H},$$

donde $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto denso y contable en K. Observe que $\|T\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{|\lambda_i|\}$. Es claro que cada v_i es un eigenvector de T con eigenvalor λ_i, de modo que $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \sigma(T)$. Ya que el espectro es un conjunto cerrado

$$K = \overline{\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(T).$$

Sea $\alpha \in K^c$, entonces existe ϵ tal que $|\lambda_i - \alpha| > \epsilon$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Note que $(\alpha I - T)v = \sum_{i\in\mathbb{N}}(\alpha - \lambda_i)\langle v_i, v\rangle v_i$. En consecuencia

$$(\alpha I - T)^{-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i v_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\beta_i}{\alpha - \lambda_i} v_i, \quad \beta_i \in \mathbb{C}.$$

Dado que $|\frac{1}{\alpha-\lambda_i}| < \frac{1}{\epsilon}$, se sigue que el operador lineal $(\alpha I - T)^{-1}$ es continuo y definido en $\ell^2(\mathbb{N})$. Así $K^c \subset \sigma(T)^c$. Por tanto $K = \sigma(T)$.

Dado que el espectro de un elemento x en un álgebra de Banach está acotado por $\|x\|$, el supremo de $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ es finito. A este número se le llama el radio espectral de x y se denota por $r(x)$.

Sean x, y en un álgebra de Banach. Si $\lambda\mathbf{1} - xy$ es invertible con $\lambda \neq 0$, se puede verificar mediante cálculos directos que $(\lambda\mathbf{1} - yx)^{-1} = \lambda^{-1}[y(\mathbf{1} - xy)^{-1}x + \mathbf{1}]$. Recíprocamente, si $\lambda\mathbf{1} - yx$ es invertible entonces $(\mathbf{1} - xy)^{-1} = \lambda^{-1}[y(\mathbf{1} - yx)^{-1}x + \mathbf{1}]$. Por tanto

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}. \tag{1.5}$$

En consecuencia $r(xy) = r(yx)$.

Proposición 1.5 Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra abeliana maximal de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$. Entonces $1 \in \mathcal{B}$ y $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ para cada $x \in \mathcal{B}$.

Demostración.
Si $\mathcal{A}$ es abeliana las conclusiones se cumplen trivialmente. Supongamos que $\mathcal{A}$ es no abeliana. Definimos

$$\mathcal{C} = \{\lambda \mathbf{1} + y : \lambda \in \mathbb{C}, y \in \mathcal{B}\}.$$

Claramente $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es abeliana. Por tanto $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ ya que $\mathcal{B}$ es maximal. Así que $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$.
Para $x \in \mathcal{B}$, la contención $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ siempre se cumple. Para ver la otra contención, tomemos $x \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)^c$. Entonces

$$y_1 := (\lambda \mathbf{1} - x) \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad y_2 := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}.$$

Para cada $z \in \mathcal{B}$ tenemos que $zy_1 = y_1 z$, se sigue que $zy_2 = y_2 z$ y por tanto $\mathcal{C}' := \{p(y_2)z : p \text{ es un polinomio y } z \in \mathcal{B}\}$ es una subálgebra abeliana tal que $y_2 \in \mathcal{C}'$ y contiene a $\mathcal{B}$, de nuevo por la maximalidad $\mathcal{B} = \mathcal{C}'$. Así que $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)^c$. Concluimos que $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. ■

1.2 FUNCIONALES LINEALES MULTIPLICATIVOS

Un funcional lineal multiplicativo definido en un álgebra de Banach conmutativa es un homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. El conjunto de funcionales lineales multiplicativos de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es denotado por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y es llamado el espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}$.
Es sencillo ver que para cada $x \in \mathcal{A}$ y $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Además como $r(x) \leq \|x\|$ se sigue que $|\varphi(x)| \leq \|x\|$. Entonces cada $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es acotado. De hecho como $\varphi(\mathbf{1}) = 1$

$$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}.$$

Hay álgebras de Banach en las cuales es clara la existencia de funcionales lineales multiplicativos. Por ejemplo, si K es un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces en el álgebra $\mathbf{C}(K)$ el funcional de evaluación

$$\varphi_x(f) := f(x), \quad \text{con } x \in K \text{ y } f \in \mathbf{C}(K)$$

es multiplicativo. Más aún $\mathcal{M}_{\mathbf{C}(K)} \simeq K$ [5, pág 35].
En contraparte tenemos que si $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ con $n > 1$ entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \emptyset$ como se verá a continuación.

Supóngase que existe un funcional lineal multiplicativo φ actuando en $M_n(\mathbb{C})$. Sea E_{ij} la matriz con 1 en la entrada (i,j) y 0 en las demás entradas.
Para cada $i \in \{1,...,n\}$ tenemos que

$$\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{i1}E_{1i}) = \varphi(E_{i1})\varphi(E_{1i}) = \varphi(E_{1i})\varphi(E_{i1}) = \varphi(E_{1i}E_{i1}) = \varphi(E_{11}).$$

Por otro lado

$$0 = \varphi(0) = \varphi(E_{11}E_{22}) = \varphi(E_{11})\varphi(E_{22}) = \varphi(E_{11})^2.$$

Así que $\varphi(I) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_{ii}) = 0$. Contradiciendo el hecho de que $\varphi(I) = 1$ para cada $\varphi \in \mathcal{M}_{M_n(\mathbb{C})}$. Por tanto el espacio de ideales maximales de $M_n(\mathbb{C})$ es vacío.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Si $x \notin Ker\varphi$ entonces para cada $y \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$y = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x + \frac{\varphi(x)y - \varphi(y)x}{\varphi(x)}.$$

Note que el segundo término de la derecha pertenece a $Ker\varphi$. Así que $\mathcal{A} = \mathbb{C}x + Ker\varphi$. Esto implica que la codimensión de $Ker\varphi$ es uno.

Ahora sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Mostremos que $\mathcal{M}_{B(\mathcal{H})} = \emptyset$.
Obsérvese que los operadores de desplazamiento en $\mathcal{H}$ son linealmente independientes y no compactos, por tanto

$$\dim \mathcal{C}(\mathcal{H}) \geq 2. \tag{1.6}$$

Supongamos que existe $\varphi \in \mathcal{M}_{B(\mathcal{H})}$. Recordemos que $Ker\varphi$ es un ideal cerrado no trivial de $B(\mathcal{H})$. Por otro lado tenemos que el único ideal cerrado no trival de $B(\mathcal{H})$ es $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ [26, I.8.7.2]. Entonces

$$1 = \dim B(\mathcal{H})/Ker\varphi = \dim B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \dim \mathcal{C}(\mathcal{H}).$$

Esto contradice la ecuación 1.6. Concluimos que

$$\mathcal{M}_{B(\mathcal{H})} = \emptyset \quad \text{si } \mathcal{H} \text{ es separable.} \tag{1.7}$$

Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert no separable. Sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base ortonormal y asuma que existe un funcional lineal multiplicativo $\varphi \in \mathcal{M}_{B(\mathcal{H})}$. Fijemos $T_0 \in B(\mathcal{H})$ tal que $\varphi(T_0) \neq 0$. Dado que $T_0 \neq 0$, existe $v_0 \in \mathcal{H}$ tal que $T_0 v_0 \neq 0$. La desigualdad de Bessel implica que $\langle v_0, v_\alpha \rangle \neq 0$ para a lo más una cantidad contable de $\alpha \in I$. Definimos

$$\mathcal{H}_0 := \overline{span\{v_\alpha : \alpha \in I, \langle v, v_\alpha \rangle \neq 0\}}.$$

Entonces φ es un funcional lineal multiplicativo definido en $B(\mathcal{H}_0)$, con $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert separable. Contradiciendo así la ecuación 1.7. Así que en general $\mathcal{M}_{B(\mathcal{H})} = \emptyset$.

El espacio dual de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio topológico Hausdorff con la topología débil estrella, ésta es la topología más debil que hace que los funcionales de evaluación $\varphi_x : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{A}$, sean continuos ($\mathcal{A}^*$ denota el espacio dual de $\mathcal{A}$). Puesto que $\mathcal{M}_\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$, $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ hereda la estructura topológica de $\mathcal{A}^*$, incluida la propiedad Hausdorff.
Por el Teorema de Banach-Alaoglu la bola unitaria del espacio dual de $\mathcal{A}$ es compacta con la topología débil estrella. Ya que cada funcional lineal multiplicativo es acotado con norma uno, $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ es un subconjunto de la bola unitaria de $\mathcal{A}^*$. No es complicado ver que $\overline{\mathcal{M}_\mathcal{A}} = \mathcal{M}_\mathcal{A}$. Luego, al ser $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ un subconjunto cerrado de la bola unitaria en $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ es compacto.
Resumimos la discusión anterior en la siguiente proposición.

Proposición 1.6 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Entonces $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ es un espacio compacto Hausdorff con la topología débil estrella heredada del espacio dual de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.7 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Entonces $\mathcal{M}_A$ está en correspondencia uno a uno con el espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}$.

Demostración
Sea $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{A}$. Es rutinario ver que $Ker\varphi$ es un ideal de $\mathcal{A}$. Ahora si $x \notin Ker\varphi$, entonces

$$\mathbf{1} = \left(\mathbf{1} - \frac{x}{\varphi(x)}\right) + \frac{x}{\varphi(x)}.$$

El primer elemento de la suma anterior está en $Ker\varphi$ mientras que $x/\varphi(x)$ está en el espacio generado por x. Esto implica que cualquier ideal más grande que el $Ker\varphi$ contiene a $\mathbf{1}$ y por tanto es el espacio completo $\mathcal{A}$. Así que $Ker\varphi$ es maximal.
Obviamente si $\varphi = \psi$ entonces $Ker\varphi = Ker\psi$. Por todo lo anterior, la función

$$F(\varphi) := Ker\varphi$$

está bien definida.
Veamos que F es inyectiva, para esto supóngase que $Ker\varphi_1 = Ker\varphi_2$. Para cada $x \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))\mathbf{1} = (x - \varphi_2(x)\mathbf{1}) - (x - \varphi_1(x)\mathbf{1}).$$

El primer término y el segundo término de la derecha pertenecen a $Ker\varphi_2$ y $Ker\varphi_1$ respectivamente. Entonces $(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))\mathbf{1}$ pertenece a ambos conjuntos, los cuales no contienen a $\mathbf{1}$. Entonces, necesariamente $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Note que la cerradura de un ideal sigue siendo un ideal, por lo que un ideal maximal es siempre cerrado.
Recordemos que si un álgebra $\mathcal{A}$ es conmutativa e $\mathcal{I}$ es un ideal maximal cerrado entonces el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un campo. Luego por la ecuación 1.4, existe un isomorfismo isométrico $\Phi : \mathcal{A}/\mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ el mapeo canónico, entonces $\Phi \circ \pi$ es un funcional lineal multiplicativo sobre $\mathcal{A}$, con $Ker(\Phi \circ \pi) = \mathcal{I}$. Ya que $\mathcal{I}$ se tomó arbitrario se sigue que la función $F(\varphi) = Ker\varphi$ que va de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ al conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$ es sobreyectiva. ■

El anterior teorema le da sentido al hecho de que llamemos a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ el espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}$.
Probamos anteriormente que $M_n(\mathbb{C})$ no tiene funcionales lineales multiplicativos. Pero como $M_n(\mathbb{C})$ es no conmutativa, no se puede usar el teorema anterior para deducir que $M_n(\mathbb{C})$ no tiene ideales maximales. Sin embargo no es complicado probar esto.
Supóngase que $\mathcal{I}$ es un ideal no trivial de $M_n(\mathbb{C})$. Sea $A = [a_{ij}] \neq 0 \in \mathcal{I}$ entonces existen índices k, l tales que $a_{kl} \neq 0$. Nótese que para cada i se cumple que

$$E_{ii} = a_{kl}^{-1} E_{ik} A E_{li} \in \mathcal{I}.$$

Entonces $I = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \in \mathcal{I}$ y por lo tanto $\mathcal{I} = M_n(\mathbb{C})$, lo que contradice la elección de $\mathcal{I}$. Por tanto $M_n(\mathbb{C})$ no tiene ideales no triviales.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Una aplicación del Lema de Zorn muestra que $\mathcal{A}$ contiene al menos un ideal maximal. Por el Teorema 1.7 $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$.
Por lo anterior tenemos que si $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \emptyset$, entonces $\mathcal{A}$ no es conmutativa.

Uno podría estar tentado a creer que si un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ no es conmutativa entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \emptyset$. Pero esto no es verdad, en [42] se prueba que el álgebra de Banach no conmutativa $B(X)$ donde X es un espacio de Banach super reflexivo tiene funcionales lineales multiplicativos. De hecho la cardinalidad de $\mathcal{M}_{B(X)}$ es $\aleph_2$.

Otro ejemplo bastante peculiar surge cuando consideramos el álgebra de Volterra. Esta es un álgebra de Banach conmutativa sin funcionales lineales multiplicativos. Mostraremos esto en la siguiente sección.

1.3 LA TRANSFORMADA DE GELFAND

En la sección anterior se vio que el espacio de ideales maximales de un álgebra de Banach es un espacio compacto Hausdorff con la topología débil estrella. Entonces tiene sentido considerar el álgebra de Banach $\mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$. Más aún, podemos considerar un homomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ cuando $\mathcal{A}$ es conmutativa.

Definición 1.8 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. La transformada de Gelfand se define como

$$\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}),$$
$$\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x).$$

De las propiedades de los elementos de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ se sigue que Γ es un homomorfismo entre álgebras de Banach. Además, si $x \in \mathcal{A}$ y $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$,

$$|\Gamma(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

Tomando el supremo sobre todos los elementos de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tenemos que,

$$\|\Gamma(x)\|_{\infty} \leq \|x\|.$$

Esto muestra que Γ es un homomorfismo continuo con $\|\Gamma\| \leq 1$.
En general, no es sencillo determinar las características de la transformada de Gelfand, pero si el álgebra es conmutativa y $\|x^2\| = \|x\|^2$ para cada x en el álgebra, entonces Γ es una isometría [5, Pág 32].
Cuando un álgebra de Banach es generada por un elemento x y bajo más condiciones resulta que la transformada de Gelfand es un isomorfismo. En este caso nos interesa el homomorfismo inverso. Abordaremos esto a detalle en la sección 1.5.
Por supuesto que hay casos en los que Γ no existe, por ejemplo cuando $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, ya que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Proposición 1.9 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y sea $x \in \mathcal{A}$. Entonces $x \in G(\mathcal{A})$ si y solo si $\Gamma(x) \in G(\mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}))$. Además,

$$\sigma(x) = \sigma(\Gamma(x)) = Ran\Gamma(x). \tag{1.8}$$

Demostración
Si $x \in G(\mathcal{A})$, es fácil ver que $\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)^{-1}$.

Recíprocamente, supóngase que x no es invertible en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es conmutativa, x está contenido en un ideal maximal $\mathcal{I}$. Por el Teorema 1.7 existe $\varphi_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tal que $\mathcal{I} = \ker \varphi_0$. Esto implica que $\Gamma(x)(\varphi_0) = 0$ y por tanto $\Gamma(x)$ no es invertible.
La primer igualdad de la ecuación 1.8 es consecuencia de lo mostrado anteriormente. Mientras que la segunda igualdad se sigue de la ecuación 1.3. ■

Se puede deducir fácilmente de la ecuación 1.8 que $r(x) = \|\Gamma(x)\|_\infty$ y que si $x, y \in \mathcal{A}$ conmutan entonces $\sigma(x+y) \subseteq \sigma(x) + \sigma(y)$ y $\sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y)$.
El siguiente resultado es bastante útil para calcular el espectro de elementos de la forma $f(x)$ con $x \in \mathcal{A}$ y f una función analítica sobre el espectro de x.

Si f es una función analítica en el disco $|z| \leq \|x\|$, entonces podemos escribir a f mediante su serie de potencias,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| \leq \|x\|,\, a_n \in \mathbb{C},$$

y cumple que

$$|f(z)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n||z^n| < \infty.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge a un elemento en $\mathcal{A}$ que denotamos por $f(x)$.

Teorema 1.10 (Teorema del Mapeo Espectral)
Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Si f es una función analítica en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$, entonces

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Demostración
Fijemos $x \in \mathcal{A}$ y sea $\mathcal{B}$ la subálgebra generada por $\mathbf{1}, x, (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$ y $(\lambda\mathbf{1} - f(x))^{-1}$ con $\lambda \in (\sigma(x))^c \cap (\sigma(f(x)))^c$. Nótese que $\mathcal{B}$ es conmutativa y que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x), \quad \sigma_{\mathcal{A}}(f(x)) = \sigma_{\mathcal{B}}(f(x)). \tag{1.9}$$

Sea $\Gamma : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ la transformada de Gelfand. De la ecuación (1.8) se sigue que

$$\sigma_{\mathcal{B}}(f(x)) = \{\varphi(f(x)) : \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\} \quad \text{y} \quad \sigma_{\mathcal{B}}(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\}. \tag{1.10}$$

Por la expresión en serie de potencias de $f(x)$, tenemos para cada $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ que

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)). \tag{1.11}$$

Combinando las ecuaciones 1.10 y 1.11 obtenemos que $\sigma_{\mathcal{B}}(f(x)) = f(\sigma_{\mathcal{B}}(x).)$ Luego por (1.9) concluimos que $\sigma_{\mathcal{A}}(f(x)) = f(\sigma_{\mathcal{A}}(x))$. ■

El siguiente Teorema es conocido como la fórmula del radio espectral. Para una demostración véase [5, pág 30].

Teorema 1.11 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $x \in \mathcal{A}$. Entonces,

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

El siguiente ejemplo muestra que hay álgebras de Banach conmutativas (sin identidad) con espacio de ideales maximales vacío.
Note que si φ es un funcional lineal multiplicativo de un álgebra de Banach conmutativa sin identidad $\mathcal{A}$, entonces existe una única extensión $\widetilde{\varphi}$ a $\widetilde{\mathcal{A}}$ mediante $\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x) + \lambda$. Además $\sigma(x) := \sigma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x)$, por ello $r_{\mathcal{A}}(x) = r_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x)$.

El álgebra de Volterra $\mathcal{V}$ es el espacio $L^1[0,1]$ con el producto dado por la convolución

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \quad f, g \in \mathcal{V}.$$

Sea f_0 la función constante $f_0(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$. Observe que

$$f_0^n(t) = (f_0 * \cdots * f_0)(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.12}$$

por tanto

$$\|f_0^n\|_1 = 1/(n-1)!. \tag{1.13}$$

Sea $\mathcal{A}[f_0]$ el álgebra generada por f_0. La ecuación 1.12 implica que $\mathcal{A}[f_0]$ contiene todos los polinomios cuales son uniformemente densos en $\mathbf{C}[0,1]$. Ya que $\mathbf{C}[0,1]$ es denso en $\mathcal{V}$ se sigue que $\mathcal{A}[f_0] = \mathcal{V}$.
El álgebra $\mathcal{V}$ no tiene identidad así que pasaremos al álgebra $\widetilde{\mathcal{V}}$ para poder aplicar los resultados vistos hasta ahora.
Note que para $g \in \mathcal{V}$, $r(g) = 0$ si y solo si $\widetilde{\varphi}(g) = 0$ para cada $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{V}}}$. Así que

$$rad(\mathcal{V}) := \bigcap_{\widetilde{\varphi}\in\widetilde{\mathcal{M}}} Ker\widetilde{\varphi} = \{(g,0) \in \widetilde{\mathcal{V}} : r(g) = 0\} \subset \mathcal{V} \times \{0\}.$$

Por la Teorema 1.11 y la ecuación 1.13 tenemos que $r((f_0,0)) = 0$. Así que

$$\widetilde{\varphi}((f_0,0)) \in \sigma((f_0,0)) = \{0\}, \quad \widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Por tanto $(f_0, 0) \in rad(\mathcal{V})$. Ya que $rad(\mathcal{V})$ es cerrado $\mathcal{V} \subset rad(\mathcal{V})$. Por lo tanto

$$rad(\mathcal{V}) = (\mathcal{V}, 0) \simeq \mathcal{V}.$$

Así que $r(g) = 0$ para cada $g \in \mathcal{V}$. De modo que si hay un $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ entonces por definición debe existir $h \in \mathcal{V}$ tal que $\varphi(h) \neq 0$. Esto contradice el hecho de que $\sigma(h) = \{0\}$. Concluimos que $\mathcal{M}_{\mathcal{V}} = \emptyset$.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRAS C^*

2.1 DEFINICIONES Y RESULTADOS BÁSICOS

Definición 2.1 Una involución sobre un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es una función de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ que cumple lo siguiente: para cada $x, y \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

i) $(x^*)^* = x$,
ii) $(\alpha x + y)^* = \overline{\alpha} x^* + y^*$,
iii) $(xy)^* = y^* x^*$.

Un álgebra de Banach que poseé una involución se llama un álgebra involutiva.
Un álgebra C^* $\mathcal{A}$ es un álgebra involutiva tal que la involución cumple que:

iv) $\|xx^*\| = \|x\|^2$ para cada $x \in \mathcal{A}$.

A la propiedad *iv*) se le conoce como la propiedad C^* de la norma. El elemento x^* es llamado el adjunto de x. Nótese que en un álgebra C^* la involución es una isometría. En efecto

$$\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x\| \|x^*\|$$

de donde se deduce que

$$\|x\| \leq \|x^*\|.$$

Cambiando x por x^* obtenemos $\|x^*\| \leq \|x\|$. De modo que $\|x\| = \|x^*\|$.
Una involución sobre un álgebra C^* que satisface $\|x\|^2 \leq \|x^* x\|$ para cada $x \in \mathcal{A}$ también es una isometría.
Es fácil demostrar que si $\mathcal{A}$ tiene identidad $\mathbf{1}$, entonces $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$. Por otro lado, si x es invertible, entonces

$$x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = \mathbf{1} = (xx^{-1})^* = (x^{-1})^* x^*.$$

Lo cual implica que $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Esto muestra que x es invertible si y solo si x^* es invertible en $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$ y $r(x) = r(x^*)$.

La conjugación en $\mathbb{C}$ es una involución que convierte a $\mathbb{C}$ en un álgebra C^*. El álgebra de Banach $\mathbf{C}(K)$ con la involución dada por $f^* = \overline{f}$ es un álgebra C^* conmutativa. En general, cada álgebra C^* conmutativa es isomorfa a una de este tipo para algún espacio compacto K (Teorema 2.7).
El ejemplo principal es el álgebra de Banach $B(\mathcal{H})$, con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. El adjunto de un operador lineal acotado T es el operador T^* que cumple que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad x, y \in \mathcal{H}, \quad \text{y} \quad \|TT^*\| = \|T\|^2.$$

Si la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita entonces $A^* = \overline{A^T}$ para cada $A \in M_n(\mathbb{C})$
Supóngase que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*. Un subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ es llamado autoadjunto si $x^* \in \mathcal{B}$ para cada $x \in \mathcal{B}$. Una subálgebra $\mathcal{B}$ de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ es una subálgebra de Banach autoadjunta.
Recordemos que si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Así que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una subálgebra C^* de $B(\mathcal{H})$.
El siguiente teorema implica que $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ es un álgebra C^*. Veremos la prueba al final de la Sección 2.2.

Teorema 2.2 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* e $\mathcal{I}$ un ideal bilateral cerrado. Entonces $\mathcal{I}$ es autoadjunto y el álgebra cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra C^*.

Definición 2.3 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea $x \in \mathcal{A}$
$i)$ x es autoadjunto si $x = x^*$,
$ii)$ x es unitario si $xx^* = \mathbf{1} = x^*x$, o equivalentemente si $x^* = x^{-1}$,
$iii)$ x es normal si $xx^* = x^*x$,
$iv)$ x es positivo si existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $x = yy^*$,
$v)$ x es proyección si $x^2 = x = x^*$.

Los elementos autoadjuntos son importantes pues cada elemento de un álgebra C^* se escribe de manera única como combinación lineal de dos elementos autoadjuntos, esto es, si x pertenece a un álgebra C^* entonces

$$x = x_1 + ix_2, \quad \text{donde} \quad x_1 = \frac{x + x^*}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{x - x^*}{2i}. \tag{2.1}$$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, si $x \in \mathcal{A}$ es autoadjunto entonces el elemento $y \in \mathcal{A}$ definido como:

$$y = exp(ix) := \sum_{i \in \mathbb{N}} (ix)^n / n!$$

es unitario. En efecto, ya que la involución es continua,

$$y^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{((ix)^n)^*}{n!} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{((ix)^*)^n}{n!} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(-ix)^n}{n!} = exp(-ix) = y^{-1}.$$

Proposición 2.4 Sea x en un álgebra C^*.
$i)$ Si x es autoadjunto entonces $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.
$ii)$ Si x es unitario entonces $\sigma(x) \subset \partial D$.

Demostración
Supongamos primero que x es unitario, entonces $\|x\| = 1$ y por ello

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Se sigue que

$$\overline{\sigma(x)} = \sigma(x^*) = \sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\} \subset \{\lambda : |\lambda| \geq 1\},$$

por lo que

$$\sigma(x) \subset \partial D. \tag{2.2}$$

Ahora sea x autoadjunto. El elemento $y = exp(ix)$ es unitario y por tanto $\sigma(y)$ está contenido en ∂D.
Observe que la función $f(\lambda) = exp(i\lambda)$ es analítica en $\sigma(x)$. Entonces por el Teorema del mapeo espectral $\sigma(y) = \sigma(f(x)) = exp(i\sigma(x)) = \{exp(i\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$. Ahora supongamos que existe $\lambda = a + ib \in \sigma(x)$ con $b \neq 0$, entonces $e^{i(a+ib)} = e^{ia}e^{-b} \in \sigma(y)$, pero $|e^{ia}e^{-b}| \neq 1$, lo que contradice la ecuación 2.2. Por tanto $\sigma(x)$ debe estar contenido en $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.5 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces

$$r(x) = \|x\|.$$

Demostración
Si x es autoadjunto entonces,

$$\|x^2\| = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Por inducción se obtiene que,

$$\|x^{2n}\| = \|x\|^{2n}, \quad n \geq 1.$$

Ahora por el Teorema 1.11 tenemos

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^{2n}\|^{1/2n} = \|x\|.$$

Claramente x^*x es autoadjunto, por lo tanto $r(xx^*) = \|xx^*\|$.
Por hipótesis x conmuta con su adjunto, entonces por la fórmula del radio espectral $r(x^*x) \leq r(x^*)r(x)$. Se sigue que

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) \leq r(x^*)r(x) = r(x)^2.$$

Entonces $\|x\| \leq r(x)$. Por tanto $r(x) = \|x\|$. ■

Una consecuencia muy importante del teorema anterior es que dada una involución sobre un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que la convierte en un álgebra C^*, entonces hay única norma sobre $\mathcal{A}$, en efecto, si $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, son dos normas sobre $\mathcal{A}$, entonces

$$\|x\|_1^2 = \|xx^*\|_1 = r(xx^*) = \|xx^*\|_2^2 = \|x\|_2^2.$$

Veremos en la Sección 2.3 que la involución sobre un álgebra C^* es única.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^*. Un homomorfismo C^* $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un homomorfismo algebraico (preserva todas las operaciones) que además cumple que $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ para cada $x \in \mathcal{A}$.

Proposición 2.6 Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* y $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ homomorfismo C^*, entonces $\|\Phi(x)\| \leq \|x\|$ para cada $x \in \mathcal{A}$.

Demostración.
Ya que $\sigma(\Phi(x)) \subset \sigma(x)$ para cada $x \in \mathcal{A}$. El Teorema 1.11 implica

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) \geq r(\Phi(x)^*\Phi(x)) = \|\Phi(x)\|^2.$$

Por tanto $\|\Phi(x)\| \leq \|x\|$ ■.

La proposición anterior muestra que cada homomorfismo C^* es acotado, la propiedad C^* de la norma es crucial para tal propósito. A partir de esto es natural entonces preguntarse si cada homomorfismo entre álgebras de Banach es acotado. La respuesta es que no, por ejemplo: Si $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal no acotado y definimos el producto en $\mathcal{A}$ y en $\mathbb{C}$ como cero para cualesquiera dos elementos distintos de la unidad. Entonces Φ es un homomorfismo de álgebras de Banach no continuo. Por supuesto que no se puede dotar de este producto a un álgebra C^* ya que no se cumpliría la propiedad C^* de la norma. Para un ejemplo no trivial véase [9, Pág 9].

Nótese que si en la Proposición 2.6 sumamos la hipótesis de que Φ sea inyectivo, tendremos que

$$\|\Phi(x)\| = \|x\| \quad y \quad \sigma(x) = \sigma(\Phi(x)), \tag{2.3}$$

ya que Φ^{-1} también es un homomorfismo C^*.

Teorema 2.7 Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa entonces la transformada de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ es un isomorfismo C^* sobreyectivo isométrico.

Demostración
Ya sabemos que Γ es un homomorfismo de álgebras de Banach. Resta probar que Γ es una biyección, preserva la involución y la norma.
Usemos que $x = x_1 + ix_2$ con x_1 y x_2 autoadjuntos. Por las Proposiciones 1.9 y 2.4 tenemos para $j = 1, 2$ que

$$Ran\Gamma(x_j) = \sigma(x_j) \subset \mathbb{R}.$$

Se sigue que

$$\Gamma(x^*) = \Gamma(x_1) - i\Gamma(x_2) = \overline{\Gamma(x)} = \Gamma(x)^*.$$

Ahora por la fórmula del radio espectral y la proposición 1.9

$$\|\Gamma(x)\|_\infty^2 = \|\Gamma(x^*)\Gamma(x)\|_\infty = \|\Gamma(x^*x)\|_\infty = r(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Por tanto Γ es una isometría. Esto implica que Γ es inyectiva y la imagen de Γ en $\mathbf{C}(\mathcal{M}_\mathcal{A})$ es cerrada. Es fácil ver que $\Gamma(\mathcal{A})$ es autoadjunta, contiene las funciones constantes y separa puntos en $\mathcal{M}_\mathcal{A}$. Por el Teorema de Stone-Weirstrass $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathbf{C}(\mathcal{M}_\mathcal{A})$. ■

El recíproco del teorema anterior también se cumple. Supóngase que la transformada de Gelfand es una isometría. Para cada funcional lineal multiplicativo φ y $x, y \in \mathcal{A}$ tenemos que $\varphi(xy - yx) = 0$. Entonces $0 = \|\Gamma(xy - yx)\|_\infty = \|xy - yx\|$. Por lo tanto $xy = yx$ y así, $\mathcal{A}$ es conmutativa.
El siguiente resultado es una aplicación directa del teorema anterior.

Corolario 2.8 Sea x en un álgebra C^* conmutativa. Entonces
i) x es autoadjunto si y solo si $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$,
ii) x es unitario si y solo si $\sigma(x) \subseteq \partial D$,
iii) $x \geq 0$ si y solo si $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+$,
iv) x es proyección si y solo si $\sigma(x) \subseteq \{0, 1\}$.

Los siguientes lemas seran necesarios para demostrar el Teorema 2.11.

Lemma 2.9 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Si $(x_n) \subseteq G(\mathcal{A})$ es una sucesión convergente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \notin G(\mathcal{A})$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{-1}\| = \infty.$$

Lemma 2.10 Sean U, V subconjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ con $U \subset V$ y tal que V no contiene puntos frontera de U. Entonces U es la unión de algunas componentes conexas de V.

Teorema 2.11 Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de un álgebra C^* $\mathcal{A}$. Entonces para cada $x \in \mathcal{B}$.
$i)$ $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ es la unión de $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ y algunas (posiblemente ninguna) componentes acotadas de $(\sigma_{\mathcal{A}}(x))^c$.
$ii)$ Si $\mathcal{B}$ es unitaria entonces $x \in G(\mathcal{A})$ si y solo si $x \in G(\mathcal{B})$.
Por consiguiente

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x). \tag{2.4}$$

Demostración
$i)$ Sabemos que para cada $x \in \mathcal{B}$ se tiene que $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Tomando complementos $\sigma_{\mathcal{B}}(x)^c \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)^c$. Veamos que $\sigma_{\mathcal{A}}(x)^c$ no contiene puntos frontera de $\sigma_{\mathcal{B}}(x)^c$.
Sea λ_0 un punto frontera de $\sigma_{\mathcal{B}}(x)^c$, entonces $(\lambda_0\mathbf{1} - x) \notin G(\mathcal{B})$. Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $\sigma_{\mathcal{B}}(x)^c$ tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$. En particular $(\lambda_n\mathbf{1} - x) \in G(\mathcal{B})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(\lambda_n\mathbf{1} - x) \longrightarrow (\lambda_0\mathbf{1} - x)$, se sigue del Lema 2.9 que

$$\|(\lambda_n\mathbf{1} - x)^{-1}\| \longrightarrow \infty. \tag{2.5}$$

Si ocurriera que $\lambda_0 \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)^c$ entonces $(\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1}$ sería un buen elemento de $\mathcal{A}$. Por la continuidad de la inversión, $(\lambda_n\mathbf{1} - x)^{-1} \longrightarrow (\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1}$. Lo que contradice la ecuación 2.5. Esto muestra que $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
Aplicando el Lema 2.10 con $\sigma_{\mathcal{B}}(x)^c$ en lugar de U, obtenemos que $\sigma_{\mathcal{B}}(x)^c$ es la unión de ciertas componentes conexas de $\sigma_{\mathcal{A}}(x)^c$. Después de un razonamiento geométrico concluimos que $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ es la unión de $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ y ciertas componentes acotadas de $\sigma_{\mathcal{A}}(x)^c$.

$ii)$ Sea $x \in \mathcal{B}$. Si x es invertible en $\mathcal{B}$, claramente x es invertible en $\mathcal{A}$.
Ahora supóngase que x es invertible en $\mathcal{A}$, entonces $y := x^*x$ es invertible en $\mathcal{A}$, de modo que $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(y)$. Por la Proposición 2.4 $\sigma_{\mathcal{A}}(y) \subset \mathbb{R}$. No es difícil ver que el complemento de $\sigma_{\mathcal{A}}(y)$ no tiene componente acotadas. Luego por el inciso $i)$, $\sigma_{\mathcal{A}}(y) = \sigma_{\mathcal{B}}(y)$. Por tanto $0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(y)$, de modo que y es invertible en $\mathcal{B}$. Por tanto $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^* \in \mathcal{B}$, esto es, x es invertible en $\mathcal{B}$. ■

En el Teorema 2.11 vimos bajo que condiciones $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, para $x \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
Veamos unos ejemplos donde se muestra que cuando consideramos álgebras de Banach, el espectro de un elemento x depende del álgebra en donde se esté tomando a x.

Ejemplo 2.12 *i*) El álgebra del disco $A(D)$ se define como el espacio de funciones analíticas en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y que son continuas en $\overline{D}$. Con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y las operaciones puntuales $A(D)$ es un álgebra de Banach.
Pensemos en la función $\Phi : A(D) \to \mathbf{C}(\partial D)$ definida como $\Phi(f) = f|_{\partial D}$. Es claro que Φ es un homomorfismo entre álgebras de Banach. Además Φ es una isometría, en efecto, por el principio del módulo máximo,

$$\|\Phi(f)\| = \sup_{x\in\partial D} |f(x)| = \sup_{x\in D} |f(x)| = \|f\|.$$

Lo anterior es válido pues f es continua en $\overline{D}$ y es analítica en D. Además se tiene que $\Phi(\mathbf{1}_{A(D)}) = \mathbf{1}_{\mathbf{C}(\partial D)}$.
Sea $\mathcal{A} = \mathbf{C}(\partial D)$ y $\mathcal{B} = \Phi(A(D))$. Como Φ es un isomorfismo sobre su imagen que además mapea la identidad en la identidad, se tiene que $\sigma_{A(D)}(f) = \sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(f))$. Sea $f(z) = z, z \in \overline{D}$. Como $f \in A(D)$ y $f|_{\partial D} \in \mathcal{B}$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{B}}(f|_{\partial D}) = \sigma_{A(D)}(f) = D.$$

Por otro lado

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f|_{\partial D}) = \sigma_{\mathbf{C}(\partial D)}(f) = \partial D.$$

ii) Considere el álgebra de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$[25, Pág 5]. Sea $\mathcal{B} = \{f \in \ell^1(\mathbb{Z}) : f(n) = 0\, \forall\, n < 0\}$. Consideremos dos funciones f, g en $\mathcal{B}$. Entonces

$$(f * g)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k) = f(n)g(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} f(n-k)g(k) = 0, \text{ si } n < 0.$$

Así que $\mathcal{B}$ es una subálgebra unitaria de $\mathcal{A}$ que es claramente cerrada. Sea $e_i \in \ell^1(\mathbb{Z})$ la sucesión con 1 en la entrada i-ésima y ceros en las demás entradas. Note que $e_1 * e_{-1} = e_0$ por lo que 0 no está en $\sigma_{\mathcal{A}}(e_1)$. Pero como $e_{-1} \notin \mathcal{B}$ tenemos que $0 \in \sigma_{\mathcal{B}}(e_1)$.

2.2 TEOREMA ESPECTRAL Y APLICACIONES

En este sección se detallan hechos fundamentales sobre álgebras C^*.
Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$. En el siguiente teorema mostramos que si x es normal entonces el espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}[x]$ es isomorfo al espectro de x. Con esta identificación, el álgebra C^* $\mathbf{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}[x]})$ se convierte en un espacio más familiar. Por consiguiente será más fácil visualizar el elemento $f(x) \in \mathcal{A}[x]$ con $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$.

No es difícil ver que si x es normal en un álgebra C^* entonces $\mathcal{A}[x]$ es conmutativa. Además un elemento $y \in \mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}[x]$ si y solo si existe una sucesión de polinomios en x y x^* que converge a y.

Teorema 2.13 (Teorema espectral) Sea x normal en un álgebra C^*, entonces $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\mathcal{A}[x]}$ es homeomorfo a $\sigma(x)$. Si identificamos $\mathcal{M}$ con $\sigma(x)$ entonces la transformada de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A}[x] \longrightarrow \mathbf{C}(\sigma(x))$ tiene la propiedad de que $\Gamma(p(x, x^*)) = p(z, \overline{z})$ para cada polinomio p de dos variables.

Demostración.
Sea $\Gamma : \mathcal{A}[x] \longrightarrow \mathbf{C}(\mathcal{M})$ la transformada de Gelfand de $\mathcal{A}[x]$. Note que por la ecuación 2.4 $\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}[x]}(x)$. Veamos que la función $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \sigma(x)$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi(x)$ es un homeomorfismo.
Si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ con la topología débil estrella entonces $\Phi(\varphi_n) = \varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x) = \Phi(\varphi)$. Por ello Φ es continua.
Ya que $\mathcal{A}[x]$ es conmutativa se sigue de la Proposición 1.9 que ImΦ =Im$\Gamma(x) = \sigma(x)$. Por lo tanto Φ es sobreyectiva.
Note que para cada $\varphi \in \mathcal{M}$, $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$. La igualdad anterior más el hecho de que los elementos de $\mathcal{M}$ son multiplicativos implica que si $\varphi(x) = \psi(x)$, entonces φ y ψ coinciden sobre el conjunto

$$\{p(x, x^*) : p \text{ polinomio de dos variables}\},$$

el cual es denso en $\mathcal{A}[x]$. Se sigue que $\varphi = \psi$ y Φ es inyectiva.
Al ser Φ una función continua y biyectiva entre espacios compactos Hausdorff, Φ es un homeomorfismo.
Por lo visto anteriormente, para cada $z \in \sigma(x)$ existe $\varphi_z \in \mathcal{M}$ tal que $\varphi_z(x) = \Phi(\varphi_z) = z$. Entonces $\Gamma(x)(z) = \Gamma(x)(\varphi_z) = z$. Ya que Γ es un homomorfismo C^*, $\Gamma(p(x, x^*))(z) = p(z, \overline{z})$ para cada polinomio p de dos variables. ■

Sea x normal en un álgebra $C^*\mathcal{A}$. A partir de ahora siempre vamos a identificar el espacio de ideales maximales de $\mathcal{A}[x]$ con $\sigma(x)$. Con esta identificación la transformada de Gelfand se ve como

$$\Gamma : \mathcal{A}[x] \longrightarrow \mathbf{C}(\sigma(x)).$$

Por el Teorema 2.7 Γ es un isomorfismo C^* sobreyectivo. Por lo tanto podemos definir $\Gamma^{-1}(f)$ para cada función continua $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$.

Definición 2.14 (Cálculo funcional continuo)
Sea x normal en un álgebra C^*. Para cada $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$ definimos $f(x) \in \mathcal{A}[x]$ por

$$f(x) := \Gamma^{-1}(f).$$

El mapeo $f \mapsto f(x)$ de $\mathbf{C}(\sigma(x))$ *sobre* $\mathcal{A}[x]$ es llamado el cálculo funcional continuo.

Proposición 2.15 El cálculo funcional continuo tiene las siguientes propiedades.
i) $f \mapsto f(x)$ es un isomorfismo C^* sobreyectivo.
ii) Si $f(z) = p(z, \bar{z})$ con p un polinomio de 2 variables, entonces $f(x) = p(x, x^*)$.
iii) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ para cada $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$.
iv) Si $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un homomorfismo C^*, entonces $\Phi(f(x)) = f(\Phi(x))$ para cada $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$. Note que $f(\Phi(x))$ está bien definido ya que $\sigma(\Phi(x)) \subseteq \sigma(x)$.

Demostración
Solo probaremos *iv*). Sea $p \in \mathbf{C}(\sigma(x))$ un polinomio de dos variables. Ya que Φ es un homomorfismo C^*, $\Phi(p(x, x^*)) = p(\Phi(x), \Phi(x)^*)$. Dado que los polinomios son densos en $\mathbf{C}(\sigma(x))$, el resultado se sigue para cada $f \in \mathbf{C}(\sigma(x))$. ■

Como consecuencia de las propiedades del cálculo funcional continuo tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.16 Sea x normal en un álgebra C^*.
i) x es autoadjunto si y solo si $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$,
ii) x es unitario si y solo si $\sigma(x) \subseteq \partial D$,
iii) x es proyección si y solo si $\sigma(x) \subseteq \{0, 1\}$.

El siguiente teorema es bastante importante, pues será de ayuda para probar que cada álgebra C^* es isomorfa a una subálgebra cerrada de $B(\mathcal{H})$, para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Teorema 2.17 Sea $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un homomorfismo C^*. La imagen $\Phi(\mathcal{A})$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{B}$.

Demostración.
Tomemos $y \in \overline{\Phi(\mathcal{A})}$ y sea $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\{\Phi(x_n)\} \longrightarrow y$. Si x_n y por ende y, son autoadjuntos el procedimiento que se hará funciona tal cual. Si x_n no es autoadjunto usamos la descomposición 2.1 Ya que si $\Phi(x_{j,n}) \longrightarrow y_j$, $j = 1, 2$ entonces $\{\Phi(x_n)\} \longrightarrow y$, donde $x_{1,n} = (x_n + x_n^*)/2$ y $x_{2,n} = (x_n - x_n^*)/2$.
Ya que la sucesión $\{\Phi(x_n)\}$ es de Cauchy podemos asumir, pasando a una subsucesión si es necesario que $\|\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)\| < \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$.

Para cada $n \geq 1$ definimos

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si} \quad t \geq \frac{1}{2^n}, \\ t & \text{si} \quad -\frac{1}{2^n} \leq t \leq \frac{1}{2^n}, \\ -\frac{1}{2^n} & \text{si} \quad t \leq -\frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

Ya que $\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)$ es autoadjunto y tiene norma menor que 2^{-n}, la función f_n es la identidad sobre $\sigma(\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n))$. Luego por las propiedades del cálculo funcional continuo

$$\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) = f_n(\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)) = \Phi(f_n(x_{n+1} - x_n)).$$

También se tiene que

$$\|f_n(x_{n+1} - x_n)\|_{\mathcal{A}} = \|f_n\|_\infty = sup\{|f_n(z)| : z \in \sigma(x_{n+1} - x_n)\} \leq \frac{1}{2^n}.$$

De la ecuación anterior se sigue que el elemento x definido como

$$x = x_1 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_{n+1} - x_n),$$

pertenece a $\mathcal{A}$ y es tal que

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(f_n(x_{n+1} - x_n)) \\ &= \Phi(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) \\ &= \Phi(x_2) + \sum_{n=2}^{\infty} \Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) \\ &= \Phi(x_k) + \sum_{n=k}^{\infty} \Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) \\ &= y. \end{aligned}$$

Esto muestra que $y \in \Phi(\mathcal{A})$. ■

Para obtener una caracterización espectral de elementos positivos similar al Corolario 2.16, requerimos del siguiente lema cuya prueba omitimos.

Lemma 2.18 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Si x, y son elementos autoadjuntos tales que $\sigma(x), \sigma(y) \subset \mathbb{R}^+$. Entonces $\sigma(x+y) \subset \mathbb{R}^+$.

Teorema 2.19 Sea x un elemento normal en un álgebra C^* $\mathcal{A}$. Entonces $x \geq 0$ si y solo si $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Demostración
Si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}^+$ entonces la función $f(t) = \sqrt{t}$ pertenece a $\mathbf{C}(\sigma(x))$. Definimos mediante el cálculo funcional continuo a $y = f(x)$. Entonces $x = f(x)f(x) = y^2 = yy^*$.
Recíprocamente, si x es positivo entonces existe un $y \in \mathcal{A}$ tal que $x = y^*y$.
Ya que x es autoadjunto entonces por el Teorema de descomposición de Jordan [27, Teorema 4.4] existen $x^+, x^- \in \mathcal{A}$ autoadjuntos tales que $x = x^+ - x^-$, $x^+x^- = 0$ y $\sigma(x^+), \sigma(x^-) \subset \mathbb{R}^+$.
Sea $z = yx^-$. Ya que $x^+x^- = 0$, tenemos que

$$z^*z = x^-y^*yx^- = x^-(x^+ - x^-)x^- = -(x^-)^3.$$

El Teorema espectral implica que $\sigma(z^*z) \subset \mathbb{R}^-$, ($\mathbb{R}^- = \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$). Por la ecuación 1.5 $\sigma(zz^*) \subset \mathbb{R}^-$.
Por otro lado $z = z_1 + iz_2$ con z_i autoadjuntos $i = 1, 2$. Note que $zz^* + z^*z = 2(z_1^2 + z_2^2)$, entonces

$$z^*z = 2(z_1^2 + z_2^2) - zz^* = 2(z_1^2 + z_2^2) + (-zz^*).$$

El lado derecho de la igualdad anterior es una suma de dos elementos autoadjuntos cuyo espectro es positivo. Por el Lema 2.18 $\sigma(z^*z) \subset \mathbb{R}^+$. Combinando esto con el hecho de que $\sigma(z^*z) \subset \mathbb{R}^-$, obtenemos que $\sigma(z^*z) = \{0\}$. Por la fórmula del radio espectral $z^*z = 0$. Luego $-(x^-)^3 = 0$ y en consecuencia $x^- = 0$. Entonces $x = x^+$ y así $\sigma(x) \subset \mathbb{R}^+$. ■

Veamos unas consecuencias del Teorema 2.19 que necesitaremos en la siguiente sección.
Para cada x en un álgebra C^* el elemento xx^* es positivo. Luego por el teorema anterior $\sigma(xx^*) \subset \mathbb{R}^+$. Entonces la funcion $f(t) = \sqrt{t}$ pertenece a $\mathbf{C}(\sigma(xx^*))$. Por tanto podemos definir mediante el cálculo funcional continuo $|x| := f(xx^*) = \sqrt{xx^*}$. Es claro que $|x| \geq 0$.
Si x es un elemento autoadjunto entonces $|x| + x$ y $|x| - x$ son positivos. En efecto, ya que $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$, se sigue que la función $f(t) = |t| + t \geq 0$ pertenece a $\mathbf{C}(\sigma(x))$. Entonces

$$\sigma(|x| + x) = \sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) \subset \mathbb{R}^+. \tag{2.6}$$

Luego por el teorema anterior $|x| + x \geq 0$. De manera similar se prueba que $|x| - x \geq 0$.

Terminamos esta sección con la demostración del Teorema 2.2. Pero antes introducimos algo de terminología.

Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra no unitaria de un álgebra C^* $\mathcal{A}$. Una identidad aproximada izquierda para $\mathcal{B}$ es una red $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{B}^+$, ($\mathcal{B}^+$ denota los elementos positivos de $\mathcal{A}$) tal que:
i) $\|u_\alpha\| \leq 1$, para todo α.
ii) $\lim_\alpha u_\alpha x = \lim_\alpha x u_\alpha = x$, para cada $x \in \mathcal{B}$.

Una identidad aproximada derecha se define de manera similar.
Cada ideal izquierdo (derecho) $\mathcal{I}$ de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ tiene una identidad aproximada derecha (izquierda) [6, pág 6].
Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una identidad aproximada de un ideal izquierdo $\mathcal{I}$ contenido en un álgebra C^*. Como u_α es positivo entonces su espectro está contenido en $\mathbb{R}^+$. Ya que $\|u_\alpha\| \leq 1$ se sigue que $\sigma(u_\alpha) \subset [0,1]$. Note que la función $f(\lambda) = 1 - \lambda$ es analítica en $\sigma(u_\alpha)$. Por el teorema del mapeo espectral

$$\sigma(\mathbf{1} - u_\alpha) = \sigma(f(u_\alpha)) = f(\sigma(u_\alpha)) \subset [0,1].$$

Ya que $\mathbf{1} - u_\alpha$ es normal,

$$\|\mathbf{1} - u_\alpha\| = r(\mathbf{1} - u_\alpha) = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(u_\alpha)\} \leq 1, \text{ para cada } \alpha \in \Lambda. \tag{2.7}$$

Demostración del Teorema 2.2
Sea $x \in \mathcal{I}$ y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{I}$ una identidad aproximada de $\mathcal{I}$. Nótese que cada u_α es autoadjunto. Entonces

$$\|x^* u_\alpha - x^*\| = \|(u_\alpha x - x)^*\| = \|u_\alpha x - x\| \longrightarrow 0.$$

Ya que $x^* u_\alpha \in \mathcal{I}$ para cada α, se sigue que $x^* \in \overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$. Por tanto $\mathcal{I}$ es autoadjunto. Denotemos por $\|\cdot\|_q$ a la norma cociente. La involución en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ está dada por $[x]^* := [x^*]$. Para ver que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra C^* es suficiente probar la propiedad de la norma. Veamos primero que la siguiente igualdad se cumple,

$$\|[x]\|_q = \lim_\alpha \|x - u_\alpha x\|. \tag{2.8}$$

Sea $x \in \mathcal{A}$ y $y_0 \in \mathcal{I}$ tal que $\|[x]\|_q = \|x - y_0\|$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{1} - u_\alpha)x\| &= \|(\mathbf{1} - u_\alpha)x - (\mathbf{1} - u_\alpha)y_0 + (\mathbf{1} - u_\alpha)y_0\| \\
&\leq \|(\mathbf{1} - u_\alpha)(x - y_0)\| + \|(\mathbf{1} - u_\alpha)y_0\| \\
&\leq \|(\mathbf{1} - u_\alpha)\|\|(x - y_0)\| + \|(\mathbf{1} - u_\alpha)y_0\| \\
&\leq \|[x]\|_q + \|(\mathbf{1} - u_\alpha)y_0\|.
\end{aligned}$$

Ya que $\|(\mathbf{1} - u_\alpha)y_0\| \longrightarrow 0$ se sigue que $\lim_\alpha \|(\mathbf{1} - u_\alpha)x\| \leq \|[x]\|_q$. Para la otra desigualdad basta observar que $u_\alpha x \in I$. Esto implica que,

$$\inf_{y \in I}\{\|x - y\|\} \leq \|x - u_\alpha x\|.$$

Tomando límites conseguimos que $\|[x]\|_q \leq \lim_\alpha \|x - u_\alpha x\|$. Por lo que la ecuación 2.8 queda probada.
Finalmente, por la desigualdad de Cauchy Schwarz y por las ecuaciones 2.7 y 2.8,

$$\begin{aligned}
\|[x]\|^2 &= \lim_\alpha \|x - u_\alpha x\|^2 \\
&= \lim_\alpha \|(x - u_\alpha x)(x - u_\alpha x)^*\| \\
&= \lim_\alpha \|(x - u_\alpha x)x^*(\mathbf{1} - u_\alpha)\| \\
&\leq \lim_\alpha \|xx^* - u_\alpha xx^*\|\|(\mathbf{1} - u_\alpha)\| \\
&\leq \lim_\alpha \|xx^* - u_\alpha xx^*\| \\
&= \|[xx^*]\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|[x]\|^2 = \|[x][x]^*\|$. ■

2.3 FUNCIONALES LINEALES POSITIVOS Y ESTADOS

En esta sección estudiaremos los funcionales lineales positivos y estados. Los estados son de utilidad para mostrar si un elemento en un álgebra C^* es autoadjunto, positivo, etc. Además, cada estado sobre un álgebra C^* $\mathcal{A}$ da origen a una representación del álgebra $\mathcal{A}$. En el Capítulo 3 trataremos a detalle la teoría de representaciones.

Definición 2.20 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea φ un funcional lineal definido en $\mathcal{A}$. Decimos que,
i) φ es hermitiano si $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ para cada $x \in \mathcal{A}$,
ii) φ es positivo si $\varphi(xx^*) \geq 0$ para cada $x \in \mathcal{A}$,
iii) φ es un estado si φ es positivo y $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $v \in \mathcal{H}$ un vector de norma 1. Definimos el funcional lineal $\varphi_v : B(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\varphi_v(T) = \langle Tv, v\rangle.$$

Es trivial ver que φ_v es un estado de $B(\mathcal{H})$. Funcionales de este tipo son llamados estados vectoriales.
Sea φ un estado de $\mathcal{A}$ y $u \in \mathcal{A}$ un elemento unitario. Entonces el funcional $\varphi_u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $\varphi_u(x) = \varphi(uxu^*)$ también es un estado de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.21 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y φ un funcional lineal sobre $\mathcal{A}$. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.
$i)$ φ es hermitiano si y solo si $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ para cada elemento autoadjunto x en $\mathcal{A}$.
$ii)$ Si φ es positivo entonces φ es hermitiano.

Demostración
$i)$ Si φ es hermitiano y x es un elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$,

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)},$$

entonces $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ para cada x autoadjunto.
Ahora supongamos que $\varphi(y) \in \mathbb{R}$ para cada y autoadjunto. Dado que $x = x_1 + ix_2$ con x_1 y x_2 autoadjuntos, se sigue que

$$\varphi(x^*) = \varphi(x_1) - i\varphi(x_2) = \overline{\varphi(x)}.$$

$ii)$ Sea φ un funcional lineal positivo y $x \in \mathcal{A}$ un elemento autoadjunto. Recordemos que $|x| + x$ y $|x| - x$ son positivos (ec. 2.6). Entonces $y_1 = \varphi(|x| + x) \geq 0$ y $y_2 = \varphi(|x| - x) \geq 0$. Por lo tanto

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \in \mathbb{R}.$$

Por el inciso $i)$ de este teorema φ es hermitiano. ■

Teorema 2.22 ([5, Teorema 13.5])
Sea φ un funcional lineal sobre un álgebra C^*.
Entonces, $i)$ φ es positivo si y solo si φ es acotado con $\|\varphi\| = 1$.
$ii)$ φ es un estado si y solo si $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, denotamos por $S(\mathcal{A})$ al conjunto de estados sobre $\mathcal{A}$. Por el inciso $ii)$ del teorema anterior, $S(\mathcal{A})$ es un subconjunto de la bola unitaria con

centro en 0 del espacio dual de $\mathcal{A}$. Asignamos al conjunto de estados la topología débil estrella heredada de $\mathcal{A}^*$. El conjunto $S(\mathcal{A})$ con la topología débil estrella es llamado el espacio de estados de $\mathcal{A}$.
El siguiente teorema implica que el espacio de estados es no vacío para cada álgebra C^*.

Proposición 2.23 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$. Para cada $\lambda \in \sigma(x)$ existe $\varphi \in S(\mathcal{A})$ tal que $\varphi(x) = \lambda$.

Demostración
Sea $x \in \mathcal{A}$ y fijemos $\lambda \in \sigma(x)$. Sea $M := \{ax + b\mathbf{1} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Definimos el funcional $\varphi_0 : M \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi_0(ax + b\mathbf{1}) = a\lambda + b$. Es sencillo ver que φ_0 es lineal, $\varphi_0(x) = \lambda$ y $\varphi_0(\mathbf{1}) = 1$. Por el Teorema del mapeo espectral $\varphi_0(ax + b\mathbf{1}) \in \sigma(ax + b\mathbf{1})$ para cada $a, b \in \mathbb{C}$. Se sigue que $|\varphi_0(ax + b\mathbf{1})| \leq r(ax + b\mathbf{1}) \leq \|ax + b\mathbf{1}\|$. Por tanto $\|\varphi_0\| = 1$.
Así por el Teorema de Hanh-Banach φ_0 se extiende a un funcional lineal φ sobre $\mathcal{A}$ que cumple que $\varphi(x) = \lambda$ y $\|\varphi\| = 1$. Por el Teorema 2.22, $\varphi \in S(\mathcal{A})$. ■

Proposición 2.24 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. El espacio de estados de $\mathcal{A}$ es un conjunto Hausdorff, compacto y convexo.

Demostración.
Ya que el espacio dual es Hausdorff, entonces $S(\mathcal{A})$ también lo es.
Por el Teorema 2.22, $S(\mathcal{A})$ está contenido en la bola unitaria de $\mathcal{A}^*$. Entonces por el Teorema de Banach Alaouglu basta ver que $S(\mathcal{A})$ es cerrado para probar que es compacto.
Sea $\varphi \in \overline{S(\mathcal{A})}$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(\mathcal{A})$ una sucesión que converge a φ con la topología débil estrella. Tomemos $x \in \mathcal{A}$ positivo. Entonces

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad \varphi(\mathbf{1}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbf{1}) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Esto prueba que $\varphi \in S(\mathcal{A})$ y por lo tanto $S(\mathcal{A}) = \overline{S(\mathcal{A})}$. Así que $S(\mathcal{A})$ es compacto.
Para ver que $S(\mathcal{A})$ es convexo, sea $\varphi := \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$, donde $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathcal{A})$ y $\alpha, \beta \in (0, 1)$ tales que $\alpha + \beta = 1$.
Ya que $\varphi(\mathbf{1}) = \alpha + \beta = 1$, entonces $\|\varphi\| \geq 1$. Ahora por la desigualdad triangular

$$\|\varphi\| \leq \alpha\|\varphi_1\| + \beta\|\varphi_2\| = 1.$$

Por tanto $\|\varphi\| = 1 = \varphi(\mathbf{1})$. Por el Teorema 2.22 $\varphi \in S(\mathcal{A})$. ■

Teorema 2.25 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$.
i) $x = 0$ si y solo si $\varphi(x) = 0$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$,

ii) $x = x^*$ si y solo si $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$,
iii) $x \geq 0$ si y solo si $\varphi(x) \geq 0$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$,
iv) Si x es normal entonces existe $\varphi \in S(\mathcal{A})$ tal que $\|x\| = |\varphi(x)|$.

Demostración
i) Supóngase que $\varphi(x) = 0$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$. Luego $\varphi(x_i) = 0$ para $i = 1, 2$ con x_i autoadjuntos. Por el Teorema 2.23 $\sigma(x_i) = \{0\}$, por lo que $\|x_i\| = r(x_i) = 0$. Lo que implica que $x = 0$.
ii) Si $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$ entonces $\varphi(x_2) = \varphi((x - x^*)/2i) = 0$, para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$. Por el inciso anterior $x_2 = 0$, esto es $x = x^*$.
iii) Si $\varphi(x) \geq 0$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$, entonces por el inciso anterior x es autoadjunto. El Teorema 2.23 implica que $\sigma(x) \subset \mathbb{R}^+$, y por consecuencia $x \geq 0$.
iv) Si x es normal entonces $\|x\| = r(x)$. Ya que $\sigma(x)$ es cerrado existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $\|x\| = |\lambda|$. Entonces por el Teorema 2.23, existe $\varphi \in S(\mathcal{A})$ tal que $|\varphi(x)| = |\lambda| = \|x\|$. ■

Corolario 2.26 Existe una única involución sobre un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que la convierte en un álgebra C^*.

Demostración
Sean $*$ y $\circ$ dos involuciones sobre $\mathcal{A}$ que la convierten en un álgebra C^*. El Teorema 2.22 implica que los estados de $(\mathcal{A}, *)$ y $(\mathcal{A}, \circ)$ son los mismos, pues este Reorema nos dice que solo importa que los estados preserven la unidad y sean de norma uno. Entonces el inciso *ii*) del Teorema 2.25 implica que un elemento $x \in \mathcal{A}$ es autoadjunto con respecto a $*$ si y solo si x es autoadjunto con respecto a $\circ$.
Sea $x \in \mathcal{A}$. Entonces

$$x^* = x_1^* - ix_2^* = x_1^\circ - ix_2^\circ = x^\circ.$$

Esto es, $* = \circ$. ■

Recordemos que el espacio de estados es convexo y compacto, entonces por el Teorema de Krein-Milman [44], $S(\mathcal{A})$ es la envolvente convexa de sus puntos extremos y por tanto $S(\mathcal{A})$ tiene puntos extremos. Los puntos extremos de $S(\mathcal{A})$ son llamados estados puros y el conjunto de estados puros de $\mathcal{A}$ es denotado por $P(\mathcal{A})$.
El Teorema 2.25 se puede obtener incluso si sustituimos $S(\mathcal{A})$ por $P(\mathcal{A})$, lo que implica que los puntos extremos de $S(\mathcal{A})$ forman un conjunto suficientemente grande como para clasificar elementos en el álgebra.

Probemos ahora que los estados vectoriales de $B(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ separable, son estados puros.
Primero observemos que para un funcional lineal positivo φ sobre un álgebra

C^* $\mathcal{A}$,

$$|\varphi(x^*y)|^2 \leq \varphi(x^*x)\varphi(y^*y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathcal{A}. \tag{2.9}$$

La ecuación anterior se sigue de la desigualdad de Cauchy Schwarz y por el hecho de que φ define un semi producto interno sobre $\mathcal{A}$ mediante

$$\langle x, y\rangle := \varphi(y^*x). \tag{2.10}$$

Sea $v \in \mathcal{H}$ de norma uno. Veamos que el funcional $\varphi_v(T) = \langle Tv, v\rangle$, $T \in B(\mathcal{H})$, es un estado puro.
Tomemos una base ortonormal $\{v_i\}_{i\in\Lambda}$ con $v_1 = v$ y sea P_i la proyección ortogonal sobre el espacio generado por v_i.
Supóngase que

$$\varphi_v = \alpha\varphi + \beta\psi, \quad \varphi, \psi \in S(B(\mathcal{H})),$$

con $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $\alpha + \beta = 1$.
Ya que $I - P_1$ es una proyección, en particular $I - P_1 \geq 0$, o equivalentemente, $P_1 \leq I$, lo que implica que $\varphi(P_1), \psi(P_1) \leq 1$. Por otro lado

$$1 = \langle P_1 v, v\rangle = \varphi_v(P_1) = \alpha\varphi(P_1) + \beta\psi(P_1).$$

Entonces $\varphi(P_1) = \psi(P_1) = 1$ ó equivalentemente $\varphi(I - P_1) = 0$.
Sea $T \in B(\mathcal{H})$. Por la ecuación 2.9,

$$|\varphi(T(I - P_1))|^2 \leq \varphi(TT^*)\varphi((I - P_1)^2) = \varphi(TT^*)\varphi(I - P_1) = 0.$$

Entonces $\varphi(T) = \varphi(TP_1)$. Intercambiando T con $I - P_1$ en la ecuación anterior se obtiene que $\varphi(T) = \varphi(P_1 T)$.
Ahora si aplicamos el anterior procedimiento a TP_1 en lugar de T obtenemos que $\varphi(TP_1) = \varphi(TP_1^2) = \varphi(P_1TP_1)$. Así, $\varphi(T) = \varphi(P_1TP_1)$.
No es difícil ver que $P_1TP_1(w) = \langle Tv, v\rangle P_1$. Entonces

$$\varphi(T) = \varphi(P_1TP_1) = \langle Tv, v\rangle\varphi(P_1) = \varphi_v(T).$$

Así, $\varphi_v = \varphi$. Concluimos que φ_v es punto extremo de $S(B(\mathcal{H}))$.

Generalizemos el ejemplo anterior. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de $\mathbb{N}$. Entonces

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}(T) := \lim_{\mathcal{U}}\langle Tv_n, v_n\rangle, \quad T \in B(\mathcal{H}),$$

define un estado puro de $B(\mathcal{H})$ [40]. El limite es el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que para cada vecindad U de z_0 existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $\langle Tv_n, v_n\rangle \in U$ siempre que $n \in A$. Ya que

$\{\langle Tv_n, v_n\rangle : n \in \mathbb{N}\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$ y este último es un conjunto compacto y Hausdorff, $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}$ converge a un único punto en $\mathbb{C}$.
Si U es el ultrafiltro principal generado por $\{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el conjunto potencia de $\mathbb{N}$) entonces $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}(T)$ es simplemente el estado vectorial $\langle Tv_n, v_n\rangle$.
Un ultrafiltro de $\mathbb{N}$ se dice que es libre si

$$\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A = \emptyset,$$

por lo tanto los ultrafiltros libres tienden de alguna forma a infinito. El ultrafiltro de Frechet que se define como $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} : |\mathbb{N} - A| < \infty\}$ induce el limite clasico $\lim_{n\to\infty}$.
Mostremos que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre entonces $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}$ define un estado puro de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Acordemos por ahora que si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa entonces $P(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ (mostraremos esta afirmación en el siguiente capítulo).
Usemos que $T = T_1 + iT_2$ con T_i autoadjunto. Por el teorema espectral aplicado a T_i tenemos que

$$\sigma(T_i) = \{\varphi(T_i) : \varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}\} = \{\varphi(T_i) : \varphi \in P(\mathcal{A}[T_i])\}.$$

Ya que $\varphi_{v_n}(S) = \langle Sv_n, S_n\rangle$ es un estado puro de $\mathcal{A}[T_i]$ entonces $\langle T_i v_n, v_n\rangle \in \sigma(T_i)$. Recordemos que el único posible punto de acumulación de $\sigma(T_i)$ es cero. Asi que $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}(T_i) = 0$ y por linealidad $\Lambda_{\mathcal{U}}^{n}(T) = 0$. Por tanto $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}$ define un estado puro en $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Estados de la forma $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}$ son llamados estados diagonalizables. Una conjetura de J. Anderson afirmaba que cada estado puro de $B(\mathcal{H})$ es de la forma $\Lambda_{\mathcal{U}}^{v_n}$ para un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de $\mathbb{N}$ y alguna base ortonormal $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Hoy se sabe que esta conjetura es falsa. Un contraejemplo muy elegante lo construye Koszmider en [43].

Discutamos brevemente la relación que hay entre el espacio de estados y el espacio de funcionales lineales multiplicativos de un álgebra C^*.
Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, por el Teorema 2.22, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset S(\mathcal{A})$. De hecho $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset P(\mathcal{A})$ como mostraremos a continuación.
Sea $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y supóngase que existen estados $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathcal{A})$, y $\alpha, \beta \in (0,1)$ con $\alpha + \beta = 1$, tales que $\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$.
Sea x un elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$. Por la ecuación 2.9 $\varphi(x^2) \geq \varphi(x)^2$. Enton-

ces

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x^2) - \varphi(x)^2 \\
&= (\alpha+\beta)(\alpha\varphi_1(x^2) + \beta\varphi_2(x^2)) - (\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))^2 \\
&\geq (\alpha+\beta)(\alpha\varphi_1(x)^2 + \beta\varphi_2(x)^2)) - (\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))^2 \\
&= \alpha\beta\varphi_1(x)^2 + \alpha\beta\varphi_2(x)^2 - 2\alpha\beta\varphi_1(x)\varphi_2(x) \\
&= \alpha\beta(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2.
\end{aligned}$$

Como $\alpha \cdot \beta \neq 1$, entonces $\varphi(x) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ para cada x autoadjunto. Ya que cada elemento en $\mathcal{A}$ es combinación lineal de elementos autoadjuntos, se sigue que $\varphi(x) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ para cada $x \in \mathcal{A}$. Por tanto $\varphi \in P(\mathcal{A})$.

Mostraremos más adelante que si el álgebra C^* $\mathcal{A}$ es conmutativa entonces $P(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, en consecuencia, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = P(\mathcal{A})$. Sin embargo, la contención $P(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ no es válida para toda álgebra $\mathcal{A}$. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$, entonces existen estados puros sobre $B(\mathcal{H})$ tal que al restringirse a una subálgebra abeliana maximal no son multiplicativos. Esto se muestra en [21].
Es más sencillo ver que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq S(\mathcal{A})$. En efecto, si $\mathcal{A} = \mathbf{C}([0,1])$ y

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Entonces $\varphi \in S(\mathcal{A})$ pero $\varphi \notin \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

2.3.1 EL ESPACIO DE ESTADOS DE $M_n(\mathbb{C})$

Recordemos que el conjunto de funcionales lineales multiplicativos del álgebra de matrices es vacío. Esto no ocurre para el espacio de estados, de hecho resulta ser un espacio considerablemente grande. En lo que sigue llevaremos a cabo los cálculos para demostrar que el espacio de estados de $M_n(\mathbb{C})$ es homeomorfo al conjunto de matrices positivas de traza uno, esto es,

$$S(M_n(\mathbb{C})) \simeq \Omega := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A \geq 0, Tr(A) = 1\}. \tag{2.11}$$

Usando que una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva si y solo si $\langle Av, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$, es fácil probar que Ω es convexo. De modo que Ω tiene puntos extremos. Necesitaremos de los siguientes dos lemas para obtener (2.11).

Lemma 2.27 Las siguientes afirmaciones son equivalentes.
1) $P \in M_n(\mathbb{C})$ es una proyección de rango 1.
2)$P \in \Omega$ es un punto extremo de Ω.

Demostración.

1) implica 2).
Sea P una proyección de rango 1. Es claro que $P \geq 0$. Sea v un vector unitario tal que

$$P = vv^* = \begin{pmatrix} v_1\overline{v_1} & \cdots & v_1\overline{v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v\overline{v_1} & \cdots & v_n\overline{v_n} \end{pmatrix},$$

donde $v^* = \overline{v^T}$ ([28, Proposición 6.6]). Entonces $Tr(P) = \|v\|^2 = 1$ y en consecuencia $P \in \Omega$.
Veamos que P es un punto extremo de Ω. Suponga que existen $A, B \in \Omega$ y $a, b \in (0,1)$ con $a + b = 1$ tales que $P = aA + bB$. Entonces

$$1 = \langle v, v\rangle = \langle Pv, v\rangle = a\langle Av, v\rangle + b\langle Bv, v\rangle. \tag{2.12}$$

Por el Teorema de descomposición espectral,

$$\|C\| = \max\{\lambda : \lambda \text{ es eigenvalor de } C\} \leq Tr(C), \quad \text{para cada } C \in \Omega.$$

Entonces $\langle Av, v\rangle \leq \|A\| \leq Tr(A) = 1$. La ecuación 2.12 implica que $\langle Av, v\rangle = 1$. Entonces $\langle Av - v, v\rangle = 0$. Se sigue que

$$1 \leq \|Av - v\| + \|v\| = \|(Av - v) + v\| = \|Av\| \leq 1.$$

Por tanto $\|Av - v\| = 0$, o equivalentemente $Av = v$. Tomemos $w \in (span\{v\})^\perp$. Entonces $Pw = 0$, por tanto

$$0 = \langle Pw, w\rangle = a\langle Aw, w\rangle + b\langle Bw, w\rangle.$$

Usando que $\langle Aw, w, \rangle, \langle Bw, w, \rangle \geq 0$ y que $a, b \in (0,1)$, obtenemos que

$$\langle Aw, w\rangle = 0 = \langle Bw, w\rangle.$$

Sea $u = \alpha w + \beta v \in \mathbb{C}^n$ un vector arbitrario con $w \in (span\{v\})^\perp$. Entonces,

$$\langle Aw, u\rangle = \overline{\alpha}\langle Aw, w\rangle + \overline{\beta}\langle w, Av\rangle = \overline{\beta}\langle w, v\rangle = 0,$$

y por lo tanto $Aw = 0$ para cada $w \in (span\{v\})^\perp$. En conclusión $A = P$. Por lo tanto P es un punto extremo de Ω.

2) implica 1)
Sea $P \in \Omega$ un punto extremo. Como $P \geq 0$, el Teorema de descomposición espectral implica que existen números $\lambda_1, ..., \lambda_n$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ y proyecciones

ortogonales $P_1, ..., P_n$ de rango uno tales que $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$. El hecho de que cada $P_i \in \Omega$ implica que,

$$1 = Tr(P) = \sum_{i=i}^{n} \lambda_i Tr(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

La ecuación anterior implica que P es combinación lineal convexa de las P_i. Ya que P es un punto extremo, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_i = 0$ para $i = 2, ..., n$. Por tanto $P = P_1$ y así P es una proyección de rango uno ■

Para un funcional lineal φ sobre $M_n(\mathbb{C})$, denotamos por $[\varphi(E_{ij})]$ a la matriz con valor $\varphi(E_{ij})$ en la entrada (i, j), donde E_{ij} es la matriz con uno en la entrada (i, j) y ceros en las demás entradas.

Lemma 2.28 Sea $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces φ es un estado sobre $M_n(\mathbb{C})$ si y solo si $[\varphi(E_{ij})]$ es positiva y $Tr([\varphi(E_{ij})]) = 1$.

Demostración

Sea $\varphi \in S(M_n(\mathbb{C}))$. Entonces

$$1 = \varphi(I) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(E_{ii}) = Tr([\varphi(E_{ij})]).$$

Para un vector $v \in \mathbb{C}^n$, definimos

$$A := v^* v = \begin{pmatrix} \overline{v_1} v_1 & \cdots & \overline{v_1} v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{v_n} v_1 & \cdots & \overline{v_n} v_n \end{pmatrix}.$$

Por construcción $A \geq 0$. Así que

$$\langle [\varphi(E_{ij})] v, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(E_{ij}) \overline{v_i} v_j = \varphi(\sum_{i,j=1}^{n} \overline{v_i} v_j E_{ij}) = \varphi(A) \geq 0.$$

Por tanto $[\varphi(E_{ij})] \geq 0$.

Ahora suponga que $[\varphi(E_{ij})] \geq 0$ y que $Tr([\varphi(E_{ij})] = 1$. Entonces,

$$\varphi(I) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = Tr([\varphi(E_{ij})]) = 1.$$

Sea P una proyección de rango uno. Entonces existe un vector unitario $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $P = v^*v$. Por tanto

$$\varphi(P) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(E_{ij})\overline{v_i}v_j = \langle [\varphi(E_{ij})]v, v\rangle \geq 0.$$

Ahora sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz positiva. Por el Teorema de descomposición espectral existen existen $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ y proyecciones P_i de rango uno tales que $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$. Entonces

$$\varphi(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \varphi(P_i) \geq 0,$$

por tanto φ es un estado sobre $M_n(\mathbb{C})$. ■

Sea $\Phi : S(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \Omega$ dada por $\Phi(\varphi) = [\varphi(E_{ij})]$. Por el Lema 2.28 $\Phi(\varphi)$ es positiva y $Tr(\Phi(\varphi)) = 1$ para cada $\varphi \in S(M_n(\mathbb{C}))$, por consiguiente Φ está bien definida.

Teorema 2.29 La función Φ definida anteriormente satisface lo siguiente:
1) Φ es un homeomorfismo.
2) Si $\lambda \in (0,1)$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in S(M_n(\mathbb{C}))$ entonces

$$\Phi(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2) = \lambda\Phi(\varphi_1) + (1-\lambda)\Phi(\varphi_2). \tag{2.13}$$

3) $\varphi \in P(M_n(\mathbb{C}))$ si y solo si $\Phi(\varphi)$ es punto extremo de Ω.

Demostración.
1) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in S(M_n(\mathbb{C}))$ y supóngase que $\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2)$. Entonces $\varphi_1(E_{ij}) = \varphi_2(E_{ij})$, esto es, φ_1 y φ_2 coinciden sobre cada vector base. Por tanto $\varphi_1 = \varphi_2$.
Ahora sea $A = [a_{ij}] \in \Omega$. Definimos el funcional lineal φ_A en $M_n(\mathbb{C})$ como

$$\varphi_A([x_{ij}]) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}.$$

Nótese que $\Phi(\varphi_A) = [\varphi_A(E_{ij})] = A \geq 0$ y $Tr([\varphi_A(E_{ij})]) = Tr(A) = 1$. Por el Lema 2.28 φ_A es un estado de $M_n(\mathbb{C})$ y cumple que $\Phi(\varphi_A) = A$.
Finalmente, sea $\varphi \in S(M_n(\mathbb{C}))$ y $(\varphi_n) \subset (S(M_n(\mathbb{C}))$ una sucesión que converge a φ con la topología débil estrella. Entonces $\varphi_n(A) \longrightarrow \varphi(A)$ para cada $A \in M_n(\mathbb{C})$. En particular para cada $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$. Por lo tanto $[\varphi_n(E_{ij})] \longrightarrow [\varphi(E_{ij})]$ en la topología de la norma de operadores.

Ahora supongase que $A_n = [a_{n,ij}] \longrightarrow A = [a_{ij}]$ con la topología en norma de operadores. Entonces

$$\begin{aligned}|\varphi_{A_n}([x_{ij}]) - \varphi_A([x_{ij}])| &= |\sum_{i,j} a_{n,ij}x_{ij} - \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij}| \\ &\leq \sum_{i,j} |a_{n,ij} - a_{ij}||x_{ij}| \\ &\leq \sup_{i,j} |a_{n,ij} - a_{ij}|N,\end{aligned}$$

donde $N = \sum_{i,j} |x_{ij}|$. Ya que,

$$\sup_{i,j} |a_{n,ij} - a_{ij}| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

entonces $\varphi_{A_n} \longrightarrow \varphi_A$ con la topología debil estrella. Por tanto Φ es un homeomorfismo.

2) Es trivial.

3) Si $\varphi \in S(M_n(\mathbb{C}))$ no es un estado puro entonces se puede escribir como combinación lineal convexa de elementos de $S(M_n(\mathbb{C}))$. La ecuación 2.13 y la afirmación 1) de este teorema implican que $\Phi(\varphi)$ también se puede escribir como combinación lineal convexa de elementos de Ω. En consecuencia $\Phi(\varphi)$ no es un punto extremo de Ω. El recíproco se prueba de manera similar. ■

Observe que $\varphi \in P(\mathcal{A})$ si y solo si $[\varphi(E_{ij})]$ es una proyección sobre un subespacio de dimensión 1. Esto se obtiene combinando el inciso 3) del teorema anterior y el Lema 2.27.

Corolario 2.30 Sea $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces $\varphi \in P(\mathcal{A})$ si y solo si existe un vector unitario $v \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\varphi(A) = \langle Av, v\rangle, \quad \text{para toda } A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}). \tag{2.14}$$

Demostración
Sea $\varphi \in P(\mathcal{A})$, por 3) del Teorema 2.29 y el Lema 2.27 $[\varphi(E_{ij})]$ es una proyección de rango 1. Entonces existe un vector unitario $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $(\overline{v_i}v_j) = [\varphi(E_{ij})]$ y por tanto

$$\varphi(A) = \varphi_{[\varphi(E_{ij})]}(A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{v_i}v_j = \langle Av, v\rangle.$$

Recíprocamente, supóngase que (2.14) se cumple con $\|v\| = 1$. Por el inciso 1) del teorema anterior $\varphi = \varphi_{[\varphi(E_{ij})]}$. Por otro lado $\langle Av, v \rangle = \varphi_P(A)$, donde $P = v^*v = (\overline{v_i}v_j)$ es una proyección de rango 1. Por unicidad $[\varphi(E_{ij})] = P$.
Luego por el Lema 2.27 la matriz $[\varphi(E_{ij})]$ es un punto extremo de Ω, y en conclusión $\varphi \in P(\mathcal{A})$. ■

CAPÍTULO 3

REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS C^* Y APLICACIONES

3.1 NOCIONES BÁSICAS

Una representación de un álgebra $C^*\mathcal{A}$ es un par $(\pi, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ es un homomorfismo C^*. La dimensión de $\mathcal{H}$ se llama la dimensión de la representación. Decimos que una representación $(\pi, \mathcal{H})$ es fiel si $Ker\pi = \{0\}$.
Si $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ es una subálgebra C^*, entonces la representación $(id, \mathcal{H})$ donde id es el mapeo identidad es una representación de $\mathcal{A}$.
Considérese el álgebra de funciones continuas $\mathbf{C}([0,1])$. Sea $\mathcal{H} = L^2[0,1]$, entonces $(\pi, L^2[0,1])$ es una representación de $\mathbf{C}(K)$, donde π está dado por

$$\pi(f) = M_f, \quad M_f(g) = fg, \quad g \in L^2[0,1].$$

Dos representaciones $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ son equivalentes si existe un operador lineal unitario $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que

$$\pi_1(x) = T^*\pi_2(x)T, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathcal{A}.$$

En tal caso escribimos $\pi_1 \sim \pi_2$.
Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de un álgebra $C^*\mathcal{A}$. Un vector $v \in \mathcal{H}$ es llamado cíclico si

$$\overline{\{\pi(x)v : x \in \mathcal{A}\}} = \mathcal{H}.$$

Si existe tal vector cíclico v en $\mathcal{H}$ decimos que la representación es cíclica y que la tripleta $(\pi, \mathcal{H}, v)$ es una representación cíclica.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $\{(\pi_i, \mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ es una familia de representaciones de $\mathcal{A}$, entonces la suma directa $(\pi, \mathcal{H}) := (\bigoplus_{i \in I} \pi_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i)$ es una representación de $\mathcal{A}$. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ consiste de los vectores $v = \{v_i\}_{i \in I}, (v_i \in \mathcal{H}_i)$ tales que

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty,$$

y el producto interno en $\mathcal{H}$ se define como

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Para $x \in \mathcal{A}$, el operador lineal $\pi(x) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ está dado por

$$\pi(x)v = (\bigoplus_{i\in I} \pi_i(x))(\{v_i\}_{i\in I}) = \{\pi_i(x)v_i\}_{i\in I}.$$

No es difícil ver que $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ es un homomorfismo C^*, en consecuencia $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. De hecho

$$\|\pi(x)\| = \sup\{\|\pi_i(x)\| : i \in I\}.$$

Una representación $(\pi, \mathcal{H})$ de un álgebra $C^*\mathcal{A}$ se llama no degenerada si el subespacio $\{\pi(x)v : x \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{H}\}$ es denso en $\mathcal{H}$.

Proposición 3.1 Una representación $(\pi, \mathcal{H})$ de un álgebra $C^*\mathcal{A}$ es no degenerada si y solo si $\pi(\mathbf{1}) = I$.

Demostración.
Si $\pi(\mathbf{1}) = I$ el resultado es claro.
Supongamos que $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación no degenerada. Sea $w \in \mathcal{H}$ y $(x_n) \subset \mathcal{A}, (v_n) \subset \mathcal{H}$ sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n)v_n = w$. Como $\pi(x)$ es continuo para cada $x \in \mathcal{A}$

$$\pi(\mathbf{1})w = \pi(\mathbf{1})(\lim_{n\to\infty} \pi(x_n)v_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(\mathbf{1})\pi(x_n)v_n = \lim_{n\to\infty} \pi(x_n)v_n = w.$$

Por tanto $\pi(\mathbf{1}) = I$. ■

Sea $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ una representación. Un subespacio cerrado V de $\mathcal{H}$ se llama π-invariante si $\pi(\mathcal{A})V \subset V$.
Sea V un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $P_V : \mathcal{H} \longrightarrow V$ la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre V. Entonces V es π-invariante si y solo si,

$$P_V\pi(x)P_V = \pi(x)P_V \quad \text{para todo } x \in \mathcal{A}.$$

Esto equivale a que,

$$\pi(x)P_V = ((P_V\pi(x)P_V)^*)^* = (P_V\pi(x^*)P_V)^* = (\pi(x^*)P_V)^* = P_V\pi(x). \tag{3.1}$$

Esto es, un subespacio V de $\mathcal{H}$ es π-invariante si y solo si la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre V conmuta con $\pi(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Bajo las condiciones anteriores podemos definir

$$\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow B(V) \quad \text{como} \quad \pi_1(x) = P_V \pi(x) P_V.$$

No es difícil ver que π_1 es una representación de $\mathcal{A}$, la cual nos permitirá descomponer a π como suma directa de representaciones. En efecto, sea $P_{V^\perp}$ la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $V^\perp$. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$

$$\pi(x)P_{V^\perp} = \pi(x)(I - P_V) = (I - P_V)\pi(x) = P_{V^\perp}\pi(x).$$

Así que $V^\perp$ es también un subespacio π-invariante. Sea $\pi_2 : \mathcal{A} \longrightarrow B(V^\perp)$ dado por

$$\pi_2(x) = P_{V^\perp}\pi(x)P_{V^\perp}.$$

Entonces

$$\pi(x) = (\pi_1 \bigoplus \pi_2)(x).$$

La representación $(\pi, \mathcal{H})$ se llama irreducible si la descomposición anterior no existe.

Observación.
Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación de un álgebra C^*. Si $V \subset \mathcal{H}$ es un subespacio π-invariante entonces las representaciones π_1 y π_2 de la discusión anterior están dadas por $\pi_1(x) = \pi(x)|_V$ y $\pi_2(x) = \pi(x)|_{V^\perp}$.
Se deduce del desarrollo anterior que una representación es irreducible si y solo si no tiene subespacios cerrados invariantes no triviales.

Dado un subconjunto $\mathfrak{A}$ de $B(\mathcal{H})$, definimos el conmutador de $\mathfrak{A}$ como

$$\mathfrak{A}' := \{T \in B(\mathcal{H}) : TS = ST \text{ para todo } S \in \mathfrak{A}\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra C^* de $B(\mathcal{H})$, no es complicado ver que $\mathcal{A}'$ también es una subálgebra C^*.

Lemma 3.2 (Schur)
Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación no cero de un álgebra C^*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.
i) $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación irreducible.
ii) $\pi(\mathcal{A})' = \{T \in B(\mathcal{H}) : T\pi(x) = \pi(x)T, \forall\, x \in \mathcal{A}\} = \mathbb{C}I$.
iii) Cada vector $v \neq 0 \in \mathcal{H}$ es cíclico.

Demostración.
i) implica *iii*)

Sea $v \neq 0$ en $\mathcal{H}$. El subespacio $E = \overline{\pi(\mathcal{A})v} = \overline{\{\pi(x)v : x \in \mathcal{A}\}}$ es un subespacio cerrado invariante bajo π. Ya que $(\pi, \mathcal{H})$ es irreducible, $E = \{0\}$ o $E = \mathcal{H}$. Suponga que $E = \{0\}$. Entonces $\mathbb{C}v = \{zv : z \in \mathbb{C}\}$ es un subespacio cerrado no cero e invariante bajo π. De nuevo por la irreducibilidad de $(\pi, \mathcal{H})$, $\mathcal{H} = \mathbb{C}v$. Pero entonces tendriamos que $\pi = 0$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $\mathcal{H} = E$ y así, v es cíclico.

iii) implica *i*)
Sea $W \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado distinto de $\{0\}$ e invariante bajo π. Entonces

$$\pi(x)W \subset W \text{ para cada } x \in \mathcal{A}.$$

Al ser W cerrado tenemos que

$$\overline{\{\pi(x)w : w \in W, x \in \mathcal{A}\}} \subset W.$$

Como cada elemento no cero de $\mathcal{H}$ es cíclico, al tomar $w \neq 0$ en W tenemos que

$$\mathcal{H} = \overline{\{\pi(x)w : x \in \mathcal{A}\}} \subset W,$$

con lo cual $W = \mathcal{H}$ y $(\pi, \mathcal{H})$ es irreducible.

i) implica *ii*)
Sea $T \in \pi(\mathcal{A})'$. Pasando a la parte real e imaginaria de T si es necesario, podemos asumir que $T = T^*$. Ya que $p(T)\pi(x) = \pi(x)p(T)$ para cada $x \in \mathcal{A}$ y cada polinomio $p \in \mathbf{C}(\sigma(T))$, entonces $f(T)\pi(x) = \pi(x)f(T)$ para cada $x \in \mathcal{A}$ y $f \in \mathbf{C}(\sigma(T))$. Mostremos que $\sigma(T)$ está formado por un solo elemento λ, si tal es el caso entonces las funciones $f(t) = t$ y $g(t) = \lambda$ coinciden en $\sigma(T)$.
Supóngase que existen $\lambda, \mu \in \sigma(T)$. Entonces podemos tomar funciones $h_1, h_2 \in \mathbf{C}(\sigma(T))$ tales que

$$h_1(\lambda) = 1 = h_2(\mu) \quad \text{y} \quad h_1 \cdot h_2 = 0.$$

Entonces $h_1(T) \neq 0 \neq h_2(T)$ y $h_1(T)h_2(T) = (h_1 \cdot h_2)(T) = 0$. Sea $V := \overline{h_1(T)\mathcal{H}}$, entonces

$$\pi(\mathcal{A})V \subset \overline{\pi(\mathcal{A})h_1(T)\mathcal{H}} = \overline{h_1(T)\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}} \subset \overline{h_1(T)\mathcal{H}} = V.$$

Ya que $(\pi, \mathcal{H})$ es irreducible y $V \neq 0$,

$$V = \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Por otro lado tenemos

$$h_2(T)V \subset \overline{h_2(T)h_1(T)\mathcal{H}} = \overline{(h_1h_2)(T)\mathcal{H}} = \overline{0\mathcal{H}} = \{0\}.$$

Ya que $h_2(T) \neq 0$, la ecuación anterior implica que V no puede ser $\mathcal{H}$, contradiciendo así la igualdad 3.2. Por tanto $\sigma(T) = \{\lambda\}$, en consecuencia $T = f(T) = g(T) = \lambda I$.

ii) implica *i*)
Se sigue de la ecuación 3.1. ■

Teorema 3.3 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.
i) Cada representación $(\pi, \mathcal{H})$ no cero se descompone como suma directa de representaciones no degeneradas.
ii) Cada representación $(\pi, \mathcal{H})$ no degenerada se descompone como suma directa de representaciones cíclicas.

Demostración
i) Definimos el subespacio $V := \overline{\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}}$. Observe que V es π-invariante. Entonces podemos definir las subrepresentaciones $\pi_V : \mathcal{A} \longrightarrow B(V)$ y $\pi_{V^\perp} : \mathcal{A} \longrightarrow B(V^\perp)$ tales que π se descompone como $\pi_V \bigoplus \pi_{V^\perp}$. Veamos que π_V es no degenerada.

$$\overline{\pi_V(\mathcal{A})V} = \overline{\pi_V(\mathcal{A})\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}} = \overline{\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}} = \overline{\pi(\mathcal{A})(\mathcal{H})} = V.$$

De manera similar se prueba que $\pi_{V^\perp}$ es no degenerada.

ii) Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{H}$ un conjunto de vectores con la propiedad de que

$$\overline{\pi(\mathcal{A})}u_\alpha \perp \overline{\pi(\mathcal{A})u_\beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Considere la familia $\mathfrak{B}$ de los $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ que cumplen la propiedad anterior. Para $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{w_\beta\}_{\beta\in J} \in \mathfrak{B}$ decimos que,

$$\{u_\alpha\} \leq \{w_\beta\} \quad \text{si} \quad \overline{\pi(\mathcal{A})(\{u_\alpha\}_{\alpha\in I})} \subset \overline{\pi(\mathcal{A})(\{w_\beta\}_{\beta\in J})}.$$

Por el Lema de Zorn existe un elemento maximal $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \mathfrak{B}$. Ya que $(\pi, \mathcal{H})$ es no degenerada y por maximalidad de $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se cumple que $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha$ donde $\mathcal{H}_\alpha = \overline{\pi(\mathcal{A})v_\alpha}$. Entonces,

$$(\pi, \mathcal{H}) = (\bigoplus_{\alpha\in I} \pi_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha),$$

con $\pi_\alpha(x) = \pi(x)|_{\mathcal{H}_\alpha}$ y cada $(\pi_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ tiene a v_α como vector cíclico. ■

3.2 LA CONSTRUCCIÓN DE GELFAND-NAIMARK-SEGAL

Considere el álgebra $\mathbf{C}[0,1]$ y sea $\varphi : \mathbf{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$\varphi(f) = \int_{[0,1]} f(t)dt.$$

Note que

$$\varphi(ff^*) = \int_{[0,1]} |f(t)|^2 dt \geq 0 \quad \text{y} \quad \varphi(1) = \int_{[0,1]} 1dt = 1$$

Por tanto φ es un estado de $\mathbf{C}[0,1]$. Observe que,

$$\mathcal{I} := \{f \in \mathbf{C}[0,1] : \varphi(ff^*) = 0\} = \{0\},$$

de modo que el cociente no proporciona nueva información, en efecto

$$\mathbf{C}[0,1]/\mathcal{I} \simeq \mathbf{C}[0,1].$$

Por otro lado, $\overline{\mathbf{C}[0,1]} = L^2[0,1]$, donde la cerradura es tomada con la norma

$$\|f\|^2 = \int_{[0,1]} |f(t)|^2 dt.$$

Si definimos $\pi : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow B(\overline{\mathbf{C}[0,1]})$ como el operador de multiplicación

$$[\pi(g)](f) = gf, \quad g \in \mathbf{C}[0,1],\ f \in L^2[0,1].$$

Entonces $(\pi, L^2[0,1])$ es una representación de $\mathbf{C}[0,1]$.
La construcción Gelfand-Naimark-Segal generaliza el procedimiento anterior.

Proposición 3.4 Sea φ un estado de un álgebra $C^*\mathcal{A}$ y

$$\mathcal{L}_\varphi := \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x^*x) = 0\}.$$

Entonces $\mathcal{L}_\varphi$ es un ideal cerrado izquierdo de $\mathcal{A}$. Además, $\varphi(x^*y) = 0$ siempre que x o y pertenezca a $\mathcal{L}_\varphi$.

Demostración.
Recordemos la ecuación 1.20,

$$|\varphi(x^*y)|^2 \leq \varphi(x^*x)\varphi(y^*y), \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Entonces

$$\varphi(x^*y) = 0 \quad \text{si } x \text{ o } y \text{ pertenece a } \mathcal{L}_\varphi. \tag{3.3}$$

Dados $x, y \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\varphi((\alpha x + y)^*(\alpha x + y)) = |\alpha|^2\varphi(x^*x) + 2Re(\overline{\alpha}\varphi(x^*y)) + \varphi(y^*y). \tag{3.4}$$

Las ecuaciones 3.3 y 3.4 implican que $\mathcal{L}_\varphi$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$. Además, $\mathcal{L}_\varphi$ es cerrado en vista de que es la preimagen de $\{0\}$ bajo la función continua $x \mapsto \varphi(x^*x)$.
Finalmente veamos que $\mathcal{L}_\varphi$ es un ideal izquierdo, para esto tomemos $x \in \mathcal{L}_\varphi$ y $y \in \mathcal{A}$. Entonces por la ecuación 3.3

$$\varphi((yx)^*(yx)) = \varphi(x^*(y^*yx)) = 0.$$

Por tanto $yx \in \mathcal{L}_\varphi$ y así $\mathcal{L}_\varphi$ es un ideal izquierdo. ■

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $\varphi \in S(\mathcal{A})$. Definimos

$$\mathcal{H}^0_\varphi := \mathcal{A}/\mathcal{L}_\varphi,$$

el cociente es tomado con la estructura lineal, esto es, $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathcal{L}_\varphi$. Denotamos por $[x]$ a la clase de equivalencia de x. El espacio $\mathcal{H}^0_\varphi$ es un espacio pre-Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle [x], [y] \rangle := \varphi(y^*x) \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

La ecuación 3.3 implica que este producto interno está bien definido. Denotamos por $\mathcal{H}_\varphi$ al espacio de Hilbert que se obtiene al hacer la completación de $\mathcal{H}^0_\varphi$ con respecto al producto interno definido anteriormente.

Proposición 3.5 Sea φ un estado sobre un álgebra C^*. Para cada $x \in \mathcal{A}$ definimos el operador $T^0_x : \mathcal{H}^0_\varphi \longrightarrow \mathcal{H}^0_\varphi$ por

$$T^0_x([y]) = [xy], \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Entonces T^0_x es acotado y se extiende a un único operador lineal acotado T_x sobre $\mathcal{H}_\varphi$ con $\|T_x\| \leq \|x\|$.

Demostración.
Si $[y_1] = [y_2]$ en $\mathcal{H}^0_\varphi$ entonces $y_1 - y_2$ pertenece al ideal izquierdo $\mathcal{L}_\varphi$ y por tanto $xy_1 - xy_2 \in \mathcal{L}_\varphi$, se sigue que $[xy_1] = [xy_2]$. Así que T^0_x está bien definido.
Ahora mostremos que

$$\|T^0_x([y])\| \leq \|x\|\|[y]\|, \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Para cada $x, y \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\|x\|^2\|[y]\|^2 - \|T_x^0[y]\|^2 = \|x\|^2\varphi(y^*y) - \varphi((xy)^*(xy)) = \varphi(y^*(\|x\|^2\mathbf{1} - x^*x)y).$$

Por el inciso *iii*) del Teorema 2.25 el elemento $\|x\|^2\mathbf{1} - x^*x$ es positivo. Por ello existe $z \in \mathcal{A}$ tal que $\|x\|^2\mathbf{1} - x^*x = z^*z$. En consecuencia $y^*(z^*z)y = (zy)^*(zy) \geq 0$. Ya que φ es positivo

$$\|x\|^2\|[y]\|^2 - \|T_x^0[y]\|^2 = \varphi(y^*(\|x\|^2\mathbf{1} - x^*x)y) = \varphi((zy)^*(zy)) \geq 0.$$

De modo que $\|T_x^0([y])\| \leq \|x\|\|[y]\|$. Así T_x^0 es acotado sobre $\mathcal{H}_\varphi^0$. Por tanto T_x^0 se extiende a un único operador lineal T_x sobre $\mathcal{H}_\varphi$ cumpliendo que $\|T_x\| \leq \|x\|$. ■

El siguiente teorema muestra que cada estado de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ produce una representación de $\mathcal{A}$.

Teorema 3.6 Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y φ un estado de $\mathcal{A}$. El homomorfismo C^* $\pi_\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H}_\varphi)$ definido por

$$\pi_\varphi(x) = T_x \quad x \in \mathcal{A},$$

$$T_x([y]) = [xy], \quad [y] \in \mathcal{H}_\varphi,$$

es una representación de $\mathcal{A}$. Más aún, la representación $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ es cíclica con generador $v = [\mathbf{1}] \in \mathcal{H}_\varphi$ y cumple que

$$\langle \pi_\varphi(x)v, v\rangle = \varphi(x) \quad x \in \mathcal{A}. \tag{3.5}$$

Si $(\pi, \mathcal{H})$ es otra representación cíclica de $\mathcal{A}$ con generador $w \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle \pi(x)w, w\rangle_{\mathcal{H}} = \varphi(x), \quad \text{para cada } x \in \mathcal{A},$$

entonces π y π_φ son equivalentes.

Demostración.
Es sencillo ver que π_φ es lineal y que preserva productos. Veamos que π_φ preserva adjuntos. Para cada $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle T_{x^*}([y_1]), [y_2]\rangle &= \varphi(y_2^*x^*y_1) \\
&= \varphi((xy_2)^*y_1) \\
&= \langle [y_1], [xy_2]\rangle \\
&= \langle [y_1], T_x([y_2])\rangle \\
&= \langle T_x^*([y_1]), [y_2]\rangle.
\end{aligned}$$

por tanto $\pi_\varphi(x^*) = \pi_\varphi(x)^*$. La ecuación 3.5 se sigue de la definición del producto interno sobre $\mathcal{H}_\varphi$.
Ya que $\{\pi_\varphi(x)[\mathbf{1}] : x \in \mathcal{A}\} = \mathcal{H}^0_\varphi$ es un conjunto denso, el vector $[\mathbf{1}]$ es cíclico.
Finalmente, sea $(\pi, \mathcal{H}, w)$ otra representación cíclica que satisface $\langle \pi(x)w, w\rangle_{\mathcal{H}} = \varphi(x)$. Definimos densamente el operador lineal U_0 como $U_0(\pi_\varphi(x)v) = \pi(x)w$. U_0 está bien definido ya que si $\pi_\varphi(x)v = 0$, entonces la ecuación 3.5 implica que para cada $y \in \mathcal{A}$

$$0 = \langle \pi_\varphi(x)v, \pi_\varphi(y)v\rangle = \varphi(y^*x) = \langle \pi(y^*x)w, w\rangle = \langle \pi(x)w, \pi(y)w\rangle.$$

Y ya que $\pi(\mathcal{A})w$ es denso en $\mathcal{H}$, $\pi(x)w = 0$. Resta ver que U_0 preserva el producto interno, lo cual se sigue del siguiente desarrollo

$$\langle \pi(x)w, \pi(x)w\rangle = \langle \pi(x^*x)w, w\rangle = \varphi(xx^*) = \langle \pi_\varphi(x^*x)v, v\rangle = \langle \pi_\varphi(x)v, \pi_\varphi(x)v\rangle.$$

Esto muestra que U_0 es unitario. Entonces podemos extenderlo a un operador lineal U sobre $\mathcal{H}_\varphi$. Además U cumple que

$$U\pi_\varphi(x)(\pi_\varphi(y)v) = U\pi_\varphi(xy)v = \pi(xy)w = \pi(x)\pi(y)w = \pi(x)U(\pi_\varphi(y)v).$$

Como $\{\pi_\varphi(y)v : y \in \mathcal{A}\}$ es denso en $\mathcal{H}_\varphi$, la ecuación anterior se cumple sobre todo $\mathcal{H}_\varphi$. Por tanto $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v)$ y $(\pi, \mathcal{H}, w)$ son unitariamente equivalentes. ■

Decimos que la tripleta $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, [\mathbf{1}])$ es la representación GNS inducida por el estado φ.
Hemos probado que cada estado de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ da origen a una representación cíclica de $\mathcal{A}$. Recíprocamente, si $(\pi, \mathcal{H}, v)$ es una representación cíclica de $\mathcal{A}$ com $\|v\| = 1$. Entonces $\psi(x) := \langle \pi(x)v, v\rangle$ es un estado de $\mathcal{A}$.
Una consecuencia del teorema anterior es que si $(\pi_1, \mathcal{H}_1, v_1)$ y $(\pi_2, \mathcal{H}_2, v_2)$ son dos representaciones cíclicas de un álgebra C^* tales que $\langle \pi_1(x)v_1, v_1\rangle = \langle \pi_2(x)v_2, v_2\rangle$. Entonces las representaciones son unitariamente equivalentes, ya que el estado $\varphi(x) := \langle \pi_1(x)v_1, v_1\rangle = \langle \pi_2(x)v_2, v_2\rangle$ genera una representación GNS unitariamente equivalente a $(\pi_i, \mathcal{H}_i, v_1)$ $i = 1, 2$.

La construcción GNS da origen a una representación de un álgebra C^*, sin embargo esta representación no es en general fiel. A continuación veremos como construir una representación fiel.

Teorema 3.7 (Representación universal)
Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, entonces existe una representación $(\pi, \mathcal{H})$ fiel de $\mathcal{A}$. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y el isomorfismo C^* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ están dados por

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\varphi \in S(\mathcal{A})} \mathcal{H}_\varphi, \quad \pi(x) := \bigoplus_{\varphi \in S(\mathcal{A})} \pi_\varphi(x),$$

donde $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$ es la representación GNS inducida por el estado φ. En consecuencia cada álgebra C^* es isomorfa a una subálgebra de $B(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Demostración.
Por el Teorema 3.6 y del hecho de que la suma directa de representaciones es una representación, el par $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación de $\mathcal{A}$.
Veamos que π es inyectivo. Supóngase que $\pi(x) = 0$, entonces $\pi_\varphi(x) = 0$ para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$. Esto implica que $xy \in \mathcal{L}_\varphi$, para todo $y \in \mathcal{A}$, esto es

$$\varphi((xy)^*xy) = 0 \quad \text{para todo}\, y \in \mathcal{A},\ \text{y}\ \varphi \in S(\mathcal{A}),$$

y entonces por el Teorema 2.25 se sigue que $(xy)^*xy = 0$. Por la propiedad C^* de la norma $xy = 0$ para cada $y \in \mathcal{A}$. En particular para $y = x^*$. De nuevo por la propiedad C^* de la norma $x = 0$ y así π es inyectivo. Por lo tanto $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \pi(\mathcal{A})$ es un isomorfismo C^*.
Finalmente el Teorema 2.17 implica que $\pi(\mathcal{A})$ es una subálgebra C^* de $B(\mathcal{H})$. Por tanto $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de operadores. ■

El Teorema 2.25 puede obtenerse si reemplazamos $S(\mathcal{A})$ por $P(\mathcal{A})$. Entonces podemos obtener la representación fiel del eorema anterior con solo tomar la suma directa sobre los estados puros.
En el siguiente capítulo veremos otra manera de construir una representación fiel de un álgebra C^*.

3.3 REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

En esta sección nos vamos a enfocar en las representaciones irreducibles de un álgebra C^*. Definiremos el espectro de un álgebra C^*, el cual es una generalización del espacio de ideales maximales de un álgebra C^* conmutativa.

Teorema 3.8 Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, $\varphi \in S(\mathcal{A})$ y $(\pi, \mathcal{H}, v)$ la representación GNS inducida por φ, esto es,

$$\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v\rangle, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Entonces $\varphi \in P(\mathcal{A})$ si y solo si $(\pi, \mathcal{H}, v)$ es irreducible.

Demostración

Supongamos que φ es un estado puro y que $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v)$ no es irreducible. Entonces existe un subespacio cerrado no trivial π-invariante V de $\mathcal{H}$. El Lema de Schur implica que la proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \longrightarrow V$ pertenece a $\pi(\mathcal{A})'$. Obsérvese que $v \notin V$, pues de lo contrario V sería $\mathcal{H}$. Así que $t := \|Pv\|^2 < 1$, ya que $\|v\| = 1$. Definimos los funcionales lineales $\varphi_i, i = 1, 2$, mediante

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{t}\langle \pi(x)v, Pv\rangle, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{1-t}\langle \pi(x)v, P^\perp v\rangle,$$

donde $P^\perp = I - P$. Nótese que $\varphi = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$. Si probamos que cada φ_i es un estado refutaremos que φ es un estado puro.
Observe que,

$$t\varphi_1(x) = \langle \pi(x)v, Pv\rangle = \langle \pi(x)v, P^2 v\rangle = \langle P\pi(x)v, Pv\rangle = \langle \pi(x)Pv, Pv\rangle,$$

por lo que, $\varphi_1(\mathbf{1}) = 1$ y $\varphi(x^*x) \geq 0$, esto es, φ_1 es un estado. De manera similar se prueba que φ_2 es un estado.

Recíprocamente, suponga que $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v)$ es una representación irreducible y que

$$\varphi = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2, \quad t \in (0,1), \quad \varphi_i \in S(\mathcal{A}).$$

Mostremos que $\varphi = \varphi_1$. Definimos una forma sesquilineal $[\cdot,\cdot]$ sobre el subespacio denso $\pi(\mathcal{A})v$ mediante

$$[\pi(x)v, \pi(y)v] := t\varphi_1(y^*x), \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

Ya que los funcionales lineales φ_i son positivos tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq [\pi(x)v, \pi(x)v] \\ &= t\varphi_1(x^*x) \\ &= \varphi(x^*x) - (1-t)\varphi_2(x^*x) \\ &\leq \varphi(x^*x) \\ &= \langle \pi(x)v, \pi(x)v\rangle, \end{aligned}$$

esto implica que $[\cdot,\cdot]$ es acotada. Por el Teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales existe un $T \in B(\mathcal{H})$ tal que $[u, w] = \langle u, Tw\rangle, u, w \in \mathcal{H}$ [23, Teorema 3.8-4]. Ya que $\pi(\mathcal{A})v$ es denso en $\mathcal{H}$, el siguiente desarrollo muestra que $T \in \pi(\mathcal{A})'$,

$$\begin{aligned} \langle \pi(x)v, T\pi(y)\pi(z)v\rangle &= [\pi(x)v, \pi(y)\pi(z)v] \\ &= t\varphi_1((yz)^*x) \\ &= t\varphi_1(z^*(y^*x)) \\ &= [\pi(y^*x)v, \pi(z)v] \\ &= \langle \pi(y^*x)v, T\pi(z)v\rangle \\ &= \langle \pi(x)v, \pi(y)T\pi(z)v\rangle. \end{aligned}$$

Por el Lema de Schur existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T = \lambda I$. Por tanto

$$t\varphi_1(x) = [\pi(x)v, v] = \langle \pi(x)v, Tv \rangle = \langle \pi(x)v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda}\langle \pi(x)v, v \rangle = \overline{\lambda}\varphi(x).$$

Haciendo $x = \mathbf{1}$ obtenemos que $t = \overline{\lambda}$ y entonces $\varphi = \varphi_1$. Mostrando así que φ es un estado puro. ■.

Corolario 3.9 Cada representación irreducible de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ es equivalente a una representación GNS que proviene de un estado puro de $\mathcal{A}$.

Demostración
Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación irreducible y $v \in \mathcal{H}$ un vector cíclico de norma 1. El funcional lineal $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\varphi(x) = \langle \pi(x)v, v \rangle$ induce la representación GNS $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v_\varphi)$ que cumple que $\varphi(x) = \langle \pi_\varphi(x)v_\varphi, v_\varphi \rangle$. Por el Teorema 3.6 $(\pi, \mathcal{H})$ y $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ son equivalentes, en consecuencia $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ también es irreducible. Luego por el teorema anterior φ es un estado puro. ■

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa y $(\pi, \mathcal{H})$ una representación irreducible. Entonces tenemos la siguiente igualdad para cada $x, y \in \mathcal{A}$ y $v \in \mathcal{H}$,

$$\pi(x)\pi(y)v = \pi(xy)v = \pi(yx)v = \pi(y)\pi(x)v.$$

Por tanto $\pi(x) \in \pi(\mathcal{A})'$. Por el Lema de Schur obtenemos que

$$\pi(x) = \lambda_x I, \quad \text{para algún } \lambda_x \in \mathbb{C}.$$

La ecuación anterior implica que cada subespacio cerrado V de $\mathcal{H}$ es invariante bajo π. En particular, cada subespacio de dimensión finita es invariante bajo π. La irreducibilidad de π implica que $\dim\mathcal{H} = 1$, es decir, $\mathcal{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.
Si identificamos $B(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}$, entonces π es un funcional multiplicativo.
Recapitulamos la discusión anterior en el siguiente corolario.

Corolario 3.10 Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa entonces cada representación irreducible de $\mathcal{A}$ es de dimensión uno.

Corolario 3.11 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa. Entonces $P(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_\mathcal{A}$.

Demostración
Recordemos que $\mathcal{M}_\mathcal{A} \subset P(\mathcal{A})$. Por otro lado sea $\varphi \in P(\mathcal{A})$ y $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v)$ la representación GNS inducida por φ. Por el Teorema 3.8 la representación $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v)$ es irreducible. Luego por el corolario 3.10

$$\pi_\varphi(x) = \lambda_x \quad \text{para cada } x \in \mathcal{A}.$$

Ya que $\|v\| = 1$

$$\varphi(xy) = \langle \pi_\varphi(xy)v, v\rangle = \langle \pi_\varphi(x)\pi_\varphi(y)v, v\rangle\langle v, v\rangle = \langle \lambda_x v, v\rangle\langle \lambda_y v, v\rangle = \varphi(x)\varphi(y).$$

De modo que $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{A}$ y por lo tanto $\mathcal{M}_\mathcal{A} = P(\mathcal{A})$. ■

3.3.1 EL ESPECTRO DE UN ÁLGEBRA C^*

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Definimos

$$Irr_\mathcal{A} = \{(\pi, \mathcal{H}) : (\pi, \mathcal{H}) \text{ es rep. irreducible de } \mathcal{A}\}.$$

El Teorema 3.8 implica que el mapeo $P(\mathcal{A}) \longrightarrow Irr_\mathcal{A}$ dado por la construcción GNS está bien definido. Este mapeo no es en general inyectivo, ya que si $\varphi \in P(\mathcal{A})$ y $u \in \mathcal{A}$ es unitario, entonces el estado $\varphi_u(x) := \varphi(uxu^*)$ produce la misma representación GNS que φ. Pero si pasamos al cociente $\widehat{\mathcal{A}} := Irr_\mathcal{A}/\sim$, donde $\pi_1 \sim \pi_2$ si y solo si existe $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $T\pi_1 = \pi_2(x)T$ para cada $x \in \mathcal{A}$. Entonces

$$P(\mathcal{A}) \simeq \widehat{\mathcal{A}}, \tag{3.6}$$

mediante la correspondencia

$$\mathfrak{g}(\varphi) = [(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v_\varphi)].$$

El corolario 3.9 implica que $\mathfrak{g}$ es sobreyectivo. Ahora si $[(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v_\varphi)] = [(\pi_\psi, \mathcal{H}_\psi, v_\psi)]$, entonces

$$\varphi(x) = \langle \pi_\varphi(x)v_\varphi, v_\varphi\rangle = \langle \pi_\psi(x)v_\psi, v_\psi\rangle = \psi(x) \quad \text{para cada } x \in \mathcal{A}.$$

Mostrando así el isomorfismo 3.6.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal bilateral de un álgebras C^* $\mathcal{A}$. $\mathcal{I}$ se dice que es primitivo si es el kernel de una representación irreducible de $\mathcal{A}$. Denotamos por $Prim(\mathcal{A})$ a la familia de ideales primitivos de $\mathcal{A}$. Observe que cada $\mathcal{I} \in Prim(\mathcal{A})$ es cerrado. Tenemos entonces el siguiente mapeo sobreyectivo

$$\widehat{\mathcal{A}} \longrightarrow Prim(\mathcal{A}), \quad p([\pi]) = Ker\pi.$$

Note que si $\pi_1 \sim \pi_2$ entonces $Ker\pi_1 = Ker\pi_2$, por ello el mapeo p está bien definido. Definimos la topología de Jacobson sobre $Prim(\mathcal{A})$ declarando a los conjuntos abiertos como aquellos de la forma $\{\mathcal{J} \in Prim(\mathcal{A}) : \mathcal{J} \not\supseteq \mathcal{I}\}$ cuando $\mathcal{I}$ varía a

través de $Prim(\mathcal{A})$.
El espectro de un álgebra $\mathcal{A}$ es el conjunto $\widehat{\mathcal{A}}$ dotado con la topología

$$\{p^{-1}(U) : U \text{ es un conjunto abierto de } Prim(\mathcal{A})\}.$$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa. Recordemos que cada representación irreducible $(\pi, \mathcal{H})$ de $\mathcal{A}$ es de dimensión uno. Sean $[\pi_1], [\pi_2] \in \widehat{\mathcal{A}}$. No es difícil ver que $[\pi_1] = [\pi_2]$ si y solo si $\pi_1 = \pi_2$. Ya que podemos identificar una representación de dimensión uno con un funcional lineal multiplicativo, obtenemos que $\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Así que en efecto, el espectro de un álgebra C^* es una generalización del espacio de ideales maximales.
Observe que también pudimos haber usado la ecuación 3.6 y el corolario 3.11 para deducir que $\widehat{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Proposición 3.12 Para cada x en un álgebra C^* $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : [\pi] \in \widehat{\mathcal{A}}\}.$$

Demostración
Dado que xx^* es normal para cada $x \in \mathcal{A}$, el inciso $iv)$ del Teorema 1.36 implica que existe $\varphi_x \in S(\mathcal{A})$ tal que $\varphi_x(xx^*) = |\varphi_x(xx^*)| = \|xx^*\|$. Recordemos que para cada $\varphi \in S(\mathcal{A})$, $\varphi(xx^*) \leq \|xx^*\|$. Por tanto

$$\varphi_x(xx^*) = \sup\{\varphi(xx^*) : \varphi \in S(\mathcal{A})\} = \sup\{\varphi(xx^*) : \varphi \in P(\mathcal{A})\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|xx^*\| \\
&= \varphi_x(xx^*) \\
&= \sup\{\varphi(xx^*) : \varphi \in P(\mathcal{A})\} \\
&= \sup\{\langle \pi(xx^*)v, v\rangle : (\pi, \mathcal{H}, v) \text{ es irreducible}\} \\
&= \sup\{\langle \pi(x)v, \pi(x)v\rangle : (\pi, \mathcal{H}, v) \text{ es irreducible}\} \\
&= \sup\{\|\pi(x)v\|^2 : (\pi, \mathcal{H}, v) \text{ es irreducible}\} \\
&\leq \sup\{\|\pi(x)\|^2 : [\pi] \in \widehat{\mathcal{A}}\} \\
&\leq \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : [\pi] \in \widehat{\mathcal{A}}\}$. ■

A continuación mostramos que el espectro de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ juega el mismo papel que $S(\mathcal{A})$ en la representación universal de $\mathcal{A}$.

Teorema 3.13 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Entonces

$$(\Psi, \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{\mathcal{A}}} \mathcal{H}_\pi), \quad \text{donde } \Psi(x) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{\mathcal{A}}} \pi(x),$$

es una representación fiel de $\mathcal{A}$.

Demostración
Solo es necesario ver que Ψ es inyectivo. Observe que

$$\|\Psi(x)\| = \sup_{[\pi]\in\widehat{\mathcal{A}}} \{\|\pi(x)\|\}.$$

Luego por la Proposición 3.12 Ψ es inyectivo. ■

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* e $\mathcal{I}$ un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{A}$. Definimos

$$\widehat{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}} := \{[\pi] \in \widehat{\mathcal{A}} : \pi(\mathcal{I}) \neq 0\} \quad \text{y} \quad \widehat{\mathcal{A}_{\mathcal{I}}} := \{[\pi] \in \widehat{\mathcal{A}} : \pi(\mathcal{I}) = 0\}.$$

Observemos que

$$\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}} \cup \widehat{\mathcal{A}_{\mathcal{I}}}. \tag{3.7}$$

Teorema 3.14 Sea $\mathcal{I}$ un ideal cerrado bilateral de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ y $\pi : \mathcal{I} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ una representación no degenerada de $\mathcal{I}$. Entonces existe una única representacion $\overline{\pi} : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\overline{\pi}|_{\mathcal{I}} = \pi$.

Demostración
Para cada $x \in \mathcal{A}$ definimos $\overline{\pi}(x)$ sobre el subespacio denso $\pi(\mathcal{I})\mathcal{H}$ mediante

$$\overline{\pi}(x)(\pi(y)v) = \pi(xy)v, \quad \text{donde } y \in \mathcal{I} \text{ y } v \in \mathcal{H}.$$

Veamos que $\overline{\pi}(x)$ está bien definido. Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una unidad aproximada bilateral de $\mathcal{I}$ y $x \in \mathcal{A}$. Entonces para cada $w = \pi(y)v \in \pi(\mathcal{I})\mathcal{H}$,

$$\overline{\pi}(x)w = \overline{\pi}(x)(\pi(y)v) = \lim_{\alpha} \pi(xu_\alpha y)v = \lim_{\alpha} \pi(xu_\alpha)\pi(y)v.$$

Entonces $\overline{\pi}(x)$ no depende de la representación de $w \in \pi(\mathcal{I})\mathcal{H}$, y por lo tanto $\overline{\pi}(x)$ está bien definido.

Se puede ver fácilmente que $\overline{\pi}(x)$ es lineal y multiplicativo. Veamos que $\overline{\pi}(x)$ preserva la involución. Sean $v, w \in \pi(\mathcal{I})\mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}\langle \overline{\pi}(x)v, w\rangle &= \lim_{\alpha} \langle \pi(xu_\alpha)v, w\rangle \\ &= \lim_{\alpha} \langle v, \pi(xu_\alpha)^* w\rangle \\ &= \lim_{\alpha} \langle v, \pi(u_\alpha x^*)w\rangle \\ &= \langle v, \overline{\pi}(x^*)w\rangle.\end{aligned}$$

Así que $\overline{\pi}$ es una representación. Mostremos ahora que $\overline{\pi}(x)$ es continuo para cada $x \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}\|\overline{\pi}(x)v\| &= \lim_{\alpha} \|\pi(xu_\alpha)v\| \\ &\leq \sup_{\alpha} \|\pi(xu_\alpha)v\| \\ &\leq \sup_{\alpha} \|\pi(xu_\alpha)\|\|v\| \\ &\leq \sup_{\alpha} \|xu_\alpha\|\|v\| \\ &\leq \|x\|\|v\|.\end{aligned}$$

Por consiguiente $\overline{\pi}(x)$ es continuo. Entonces tiene una extensión a $\mathcal{H}$ que denotamos de la misma manera. Ahora si $x \in \mathcal{I}$ y $v \in \pi(\mathcal{I})\mathcal{H}$ entonces

$$\overline{\pi}(x)v = \lim_{\alpha} \pi(xu_\alpha)v = \pi(x)v.$$

Asi $\overline{\pi}|_{\mathcal{I}} = \pi$.
Finalmente, si $\widetilde{\pi}$ es otra extensión de π entonces

$$\widetilde{\pi}(x)\pi(y)v = \pi(xy)v = \overline{\pi}(x)\pi(y)v \quad \text{para cada } x \in \mathcal{A}.$$

Por densidad de $\pi(\mathcal{I})\mathcal{H}$, $\overline{\pi}(x) = \widetilde{\pi}(x)$. ∎

Sea $\mathcal{I}$ un ideal primitivo de un álgebra $\mathcal{A}$. Definimos $Prim^{\mathcal{I}}(\mathcal{A})$ y $Prim_{\mathcal{I}}(\mathcal{A})$ como el conjunto de ideales primitivos que contienen a $\mathcal{I}$ y que no contienen a $\mathcal{I}$ respectivamente. Necsesitamos del siguiente lema para obtener el resultado principal de esta sección.

Lemma 3.15 [15] Sea $\mathcal{I}$ un ideal bilateral cerrado de un álgebra C^*. Entonces los siguientes mapeos son homeomorfismos

$$Prim^{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) \longrightarrow Prim(\mathcal{A}/\mathcal{I}), \quad J \mapsto J/\mathcal{I},$$

$$Prim_{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) \longrightarrow Prim(\mathcal{I}), \quad J \mapsto J \cap \mathcal{I}.$$

Definición 3.16 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* e $\mathcal{I}$ un ideal cerrado de $\mathcal{A}$, denotamos por $\mathfrak{q} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ al mapeo cociente.

Teorema 3.17 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* e $\mathcal{I}$ un ideal cerrado de $\mathcal{A}$. Entonces los siguientes mapeos son homeomorfismos

$$f : \widehat{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{I}}, \quad f([\pi]) = [\pi|_{\mathcal{I}}].$$

$$g : \widehat{\mathcal{A}/\mathcal{I}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}_{\mathcal{I}}}, \quad g([\pi]) = [\pi \circ \mathfrak{q}].$$

Demostración.
Veamos primero que f está bien definida. Sea $[(\pi, \mathcal{H})] \in \widehat{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}}$. El hecho de que $\mathcal{I}$ es un ideal implica que $\overline{\pi(\mathcal{I})\mathcal{H}}$ es un subespacio cerrado no cero π-invariante. Luego como $(\pi, \mathcal{H})$ es irreducible se sigue que $\overline{\pi(\mathcal{I})\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Ahora sea $T \in \pi(\mathcal{I})'$. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{I}$ y $v \in \mathcal{H}$

$$T\pi(x)(\pi(y))v = T\pi(xy)v = \pi(xy)Tv = \pi(x)\pi(y)Tv = \pi(x)T(\pi(y)v). \tag{3.8}$$

Ya que $\overline{\pi(\mathcal{I})\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ se sigue que $T \in \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$. Ya que T se tomó arbitrario se obtiene que $\pi(\mathcal{I})' = \mathbb{C}I$. Por el Lema de Schur $[\pi|_{\mathcal{I}}] \in \widehat{\mathcal{I}}$.
Veamos que

$$(\pi_1, \mathcal{H}_1) \sim (\pi_2, \mathcal{H}_2) \text{ si y solo si } (\pi_1|_{\mathcal{I}}, \mathcal{H}_1) \sim (\pi_2|_{\mathcal{I}}, \mathcal{H}_2). \tag{3.9}$$

Si $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ es una equivalencia entre π_1 y π_2 entonces es una equivalencia entre $\pi_1|_{\mathcal{I}}$ y $\pi_2|_{\mathcal{I}}$.
Recíprocamente, asuma que U es una equivalencia entre $\pi_1|_{\mathcal{I}}$ y $\pi_2|_{\mathcal{I}}$. Entonces para cada $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{I}$ y $v \in \mathcal{H}$,

$$U\pi(x)(\pi(y)v) = U\pi(xy)v = \pi(xy)Uv = \pi(x)\pi(y)Uv = \pi(x)U(\pi(y)v).$$

Puesto que $\overline{\pi(\mathcal{I})\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ se sigue que U es una equivalencia entre π_1 y π_2. Esto muestra que f está bien definida.
Note que la dirección $\Longleftarrow$ en la ecuación 3.9 implica que f es inyectiva.

Por el Teorema 3.14 f es sobreyectiva y por lo tanto f es biyectiva.
No es complicado ver que g está bien definida y que g es inyectiva. Para ver que g es sobreyectiva tomemos $[\pi] \in \widehat{\mathcal{A}_{\mathcal{I}}}$ y definimos $\pi' : \mathcal{A}/\mathcal{I} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ mediante $\pi'([x]) := \pi(x)$. Si $x - y \in \mathcal{I}$ entonces $\pi'([x]) = \pi(x) = \pi(y) = \pi'([y])$. Así que π' está bien definida y es una representación de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ tal que $g([\pi']) = [\pi' \circ \mathfrak{q}] = [\pi]$. Finalmente veamos que f y g son homeomorfismos. Note que tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{A}^{\mathcal{I}}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{I}} \arrow[d] \\ Prim_{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) \arrow[r] & Prim(\mathcal{I}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{A}/\mathcal{I}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{A}_{\mathcal{I}}} \arrow[d] \\ Prim(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \arrow[r] & Prim^{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

Entonces por definición de la topología de Jacobson y usando el lema 3.15 obtenemos que f y g son homeomorfismos.

■

El siguiente corolario se obtiene al combinar la ecuación 3.7 con el teorema anterior. Este resultado nos brinda un método para calcular el espectro de un álgebra C^*.

Corolario 3.18 Para cada álgebra C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}$ un ideal cerrado de $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\widehat{\mathcal{A}} \simeq \widehat{I} \cup \widehat{\mathcal{A}/\mathcal{I}}.$$

3.4 REPRESENTACIONES DE $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Recordemos que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ denota el subconjunto de $B(\mathcal{H})$ que consiste de operadores lineales compactos y $\mathcal{C}(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
Sea $(\pi_{\mathcal{C}}, \mathcal{H}_{\mathcal{C}})$ una representación irreducible del álgebra de Calkin. Si $\pi := \pi_{\mathcal{C}} \circ \mathfrak{q}$ entonces $(\pi, \mathcal{H}_{\mathcal{C}})$ es una representación irreducible de $B(\mathcal{H})$. Por el Teorema 3.9 existe un estado puro φ definido en $B(\mathcal{H})$ tal que la representación $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v_\varphi)$ inducida por φ es equivalente a $(\pi, \mathcal{H}_{\mathcal{C}})$. Entonces

$$\varphi(T) = \langle \pi_\varphi(T)v_\varphi, v_\varphi \rangle = \langle \pi(T)w, w \rangle = 0 \quad \text{para todo } T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}). \tag{3.10}$$

Aquí $w \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ es un vector cíclico de norma uno.
Ahora suponga que φ es un estado vectorial φ_v para algún $v \in \mathcal{H}$ de norma 1. Sea

$\{v_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ con $v_1 = v$. Considérese la proyección ortogonal P_1 sobre el espacio generado por v. Entonces

$$\varphi(P_1) = \varphi_v(P_1) = \langle P_1 v, v\rangle = 1.$$

Contradiciendo así la ecuación 3.10. Por consiguiente φ no es un estado vectorial de $B(\mathcal{H})$.
Observe que la representación GNS inducida por φ y cualquier estado vectorial no pueden ser equivalentes. Esta es una forma de ver que $B(\mathcal{H})$ tiene *muchas* representaciones irreducibles.
Afortunadamente este no es el caso del álgebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, ya que como veremos en esta sección, cada representación irreducible de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es equivalente a la representación identidad.

Definición 3.19 Una subálgebra C^* de $B(\mathcal{H})$ se llama irreducible si la representación $(id, \mathcal{H})$ es irreducible.

Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})'$, $v \in \mathcal{H}$ y P_v la proyección sobre el espacio generado por v. Ya que $P_v \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$$P_v T v = T P_v v = T v.$$

Lo anterior nos dice que Tv está en el espacio generado por v. Es decir, $Tv = \alpha_v v$, $\alpha_v \in \mathbb{C}$.
Sea u otro vector de $\mathcal{H}$. Procediendo como en el razonamiento anterior, de nuevo tenemos que existe $\alpha_u \in \mathbb{C}$ tal que $Tu = \alpha_u u$ y de manera similar para $v+u$. Luego como

$$\alpha_{v+u}(v+u) = T(v+u) = T(v) + T(u) = \alpha_v v + \alpha_u u,$$

se sigue que $\alpha_{v+u} = \alpha_v = \alpha_u$. Procediendo inductivamente obtenemos que $T = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, lo que implica que $\mathcal{K}(\mathcal{H})' = \mathbb{C}I$. Por el Lema de Schur $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es irreducible.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $p \in \mathcal{A}$ una proyección. Una proyección $q \in \mathcal{A}$ es una subproyección de p si $pq = qp = q$. Una proyección $p \in \mathcal{A}$ es minimal si no tiene subproyecciones.
A continuación demostramos el Teorema de Burnside, el cual nos dice que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es la subálgebra más pequeña de $B(\mathcal{H})$ sin subespacios cerrados invariantes no triviales. Requerimos del siguiente lema cuya prueba omitimos [24, Lema 2.5.10].

Lemma 3.20 Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ una subálgebra C^* y $p \in \mathcal{A}$ una proyección. Entonces p es una proyección minimal de $\mathcal{A}$ si y solo si $p\mathcal{A}p = \mathbb{C}p$.

Teorema 3.21 (Burnside)
Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra C^* de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{A}$ es irreducible entonces $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Demostración
Sea $T \in \mathcal{A}$ autoadjunto. De el Teorema de descomposición espectral para operadores normales y compactos tenemos que,

$$T = \sum_{i \in I} \lambda_i p_i \quad p_i \in \mathcal{A}, \tag{3.11}$$

donde cada p_i es una proyección de rango finito. Así que $\mathcal{A}$ contiene proyecciones y por tanto una proyección minimal p. Mostremos que $Ran(p) = 1$.
Sean $u, v_p \in Ran(p)$ tales que $u \perp v_p$. Sea $T \in \mathcal{A}$, por el lema anterior $pTp = \lambda p$. Entonces

$$\langle u, Tv_p \rangle = \langle pu, Tpv_p \rangle = \langle u, pTpv_p \rangle = \langle u, \lambda v_p \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v_p \rangle = 0.$$

La ecuación anterior implica que $u \perp \mathcal{A}v_p$. Ya que $\mathcal{A}$ es irreducible, el Lema de Schur implica que cada vector no cero es cíclico, en particular v_p, de modo que $\overline{\mathcal{A}v_p} = \mathcal{H}$. Por tanto $(\mathcal{A}v_p)^\perp = \{0\}$, esto es, $u = 0$. Esto muestra que $Ran(p)$ tiene dimensión uno.
Observe que $pw = \langle w, v_p \rangle v_p$, $w \in \mathcal{H}$. Sea $q \in B(\mathcal{H})$ una proyección de rango uno y $v_q \in \mathcal{H}$ un vector unitario tal que $qw = \langle w, v_q \rangle v_q$, $w \in \mathcal{H}$.
Ya que $\overline{\mathcal{A}v_p} = \mathcal{H}$, existe una sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ tal que $T_n v_p \longrightarrow v_q$. Podemos asumir que $\|T_n v_p\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $T_n p T_n^* \in \mathcal{A}$ y cumple que

$$T_n p T_n^* w = T_n(\langle T_n^* w, v_p \rangle v_p) = \langle w, T_n v_p \rangle T_n v_p.$$

Lo anterior nos dice que $T_n p T_n^*$ es una proyección sobre $span\{T_n v_p\}$ y además cumple que

$$\begin{aligned}
\|T_n p T_n^* w - qw\| &= \|\langle w, T_n v_p \rangle T_n v_p - \langle w, v_q \rangle v_q\| \\
&= \|\langle w, T_n v_p - v_q \rangle T_n v_p - \langle w, v_q \rangle (v_q - T_n v_p)\| \\
&\leq \|w\| \|T_n v_p\| \|T_n v_p - v_q\| + |\langle w, v_q \rangle| \|v_q - T_n v_p\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los $w \in \mathcal{H}$ de norma menor o igual que uno, obtenemos que $T_n p T_n^* \longrightarrow q$ con la norma de operadores. Ya que $\mathcal{A}$ es cerrada, $q \in \mathcal{A}$. Así $\mathcal{A}$ contiene cada proyección de rango uno y por tanto cada proyección de rango finito. Por la ecuación 3.11 $\mathcal{A}$ contiene cada operador compacto autoadjunto y por tanto cada operador compacto. Concluimos que $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. ■

Un álgebra C^* es llamada simple si no tiene ideales cerrados no triviales. A pesar de que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ contiene ideales no triviales y no cerrados, los operadores de rango finito son un ejemplo, el siguiente corolario muestra que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es simple.

Corolario 3.22 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es simple.

Demostración
Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ un ideal cerrado no cero y fijemos un vector $v \neq 0$ en $\mathcal{H}$. Ya que $\overline{\mathcal{I}v}$ es invariante bajo $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, la cual es irreducible, se sigue que $\overline{\mathcal{I}v}$ es $\{0\}$ o $\mathcal{H}$. Si $\overline{\mathcal{I}v} = \{0\}$ entonces para cada $w \in \mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{I}$

$$0 = \langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle.$$

Lo que implica que $v \perp \mathcal{IH} \neq \{0\}$. Como $\overline{\mathcal{IH}}$ es un subespacio no cero, cerrado e invariante bajo $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces $\overline{\mathcal{IH}} = \mathcal{H}$. Por lo tanto $v = 0$, contradiciendo la elección de v. Se sigue que $\overline{\mathcal{I}v} = \mathcal{H}$. Por el Lema de Schur $\mathcal{I}$ es irreducible y por el Teorema de Burnside $\mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Se concluye que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es simple. ■

Sea $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ una subálgebra C^* irreducible tal que $\mathcal{I} := \mathcal{A} \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) \neq \{0\}$. Es fácil ver que $\mathcal{I}$ es un ideal cerrado de $\mathcal{A}$. Ya que $\mathcal{A}$ es irreducible y $\overline{\mathcal{IH}}$ es un subespacio cerrado no cero $\mathcal{A}$-invariante se sigue que $\overline{\mathcal{IH}} = \mathcal{H}$. Haciendo un desarrollo similar al hecho en la ecuación 3.8 llegamos a que $\mathcal{I}' = \mathbb{C}I$ y por tanto $\mathcal{I}$ es irreducible. Por el Teorema de Burnside $\mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y en consecuencia $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A}$. En palabras, una subálgebra C^* irreducible de $B(\mathcal{H})$ no contiene operadores compactos o bien los contiene a todos.

Lemma 3.23 Suponga que $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una subálgebra C^* y $p \in \mathcal{A}$ es una proyección minimal. Sea $u \in p\mathcal{H}$ un vector de norma uno. Si definimos $V := \overline{\mathcal{A}u}$, entonces $\mathcal{A}|_V = \mathcal{K}(V)$, en consecuencia $\mathcal{A}|_V$ es irreducible.

Teorema 3.24 Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra C^* de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación no degenerada de $\mathcal{A}$. Entonces existe una familia de representaciones irreducibles $\{(\pi_i, \mathcal{H}_i)\}_{i \in I}$ tales que

$$(\pi, \mathcal{H}_\pi) = (\bigoplus_{i \in I} \pi_i, \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i),$$

donde cada $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$ es equivalente a una subrepresentación de la identidad de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Demostración
Sea $T \in \mathcal{A}$ autoadjunto tal que $\pi(T) \neq 0$. Por el Teorema de descomposición espectral existe una proyección $q \in \mathcal{A}$ asociada a T tal que $\pi(q) \neq 0$. Por tanto $\mathcal{A}$ tiene una proyección minimal p tal que $\pi(p) \neq 0$. Por el Lema 3.19 existe $\lambda_S \in \mathbb{C}$ tal que $pSp = \lambda_S p$ para cada $S \in \mathcal{A}$.
Sean $v \in p\mathcal{H}$ y $w \in \pi(p)\mathcal{H}_\pi$ vectores unitarios. Definimos

$$V := \overline{\mathcal{A}v} \quad \text{y} \quad W := \overline{\pi(\mathcal{A})w}.$$

Por el lema anterior $\mathcal{A}|_V$ es irreducible. Mostremos que,

$$(\pi_W, W) \sim (id_V, V).$$

Sea $U_0 : \mathcal{A}v \longrightarrow \pi(\mathcal{A})w$ definido como $U_0(Tv) = \pi(T)w$ con $T \in \mathcal{A}$. Los siguientes cálculos muestran que U_0 es unitario

$$\begin{aligned}
\|\pi(T)w\|^2 &= \|\pi(T)\pi(p)w\|^2 \\
&= \|\pi(Tp)w\|^2 \\
&= \langle \pi(pT^*Tp)w, w\rangle \\
&= \langle \pi(\lambda_{T^*T}p)w, w\rangle \\
&= \lambda_{T^*T}\langle \pi(p)w, w\rangle \\
&= \lambda_{T^*T}\langle pv, v\rangle \\
&= \langle pT^*Tpv, v\rangle \\
&= \langle Tv, Tv\rangle \\
&= \|Tv\|^2.
\end{aligned}$$

Por tanto U_0 se extiende a un operador lineal unitario $U : V \longrightarrow W$.
Ahora sea $S \in \mathcal{A}|_V$ y $T \in \mathcal{A}$. Entonces

$$US(Tv) = \pi(ST)w = \pi(S)\pi(T)w = \pi_W(S)\pi(T)w = \pi_W(S)U(Tv).$$

Esto muestra que $(\pi_W, W) \sim (id_V, V)$.
Hemos probado que cada representación no degenerada tiene una subrepresentación equivalente a una subrepresentación de la identidad. No es difícil ver que $(\pi_{W^\perp}, W^\perp)$ también es una representación no degenerada de $\mathcal{A}$. Entonces aplicamos el mismo procedimiento a $(\pi_{W^\perp}, W^\perp)$ y continuando de esta manera obtenemos una familia de subrepresentaciones $\{(\pi_i, W_i)\}_{i\in I}$ con $(\pi_1, W_1) = (\pi_W, W)$ y donde cada (π_i, W_i) es equivalente a una subrepresentación de $(id, \mathcal{H})$.
Considérese a la familia $\mathfrak{F}$ de representaciones que pueden escribirse como suma directa de elementos de $\{(\pi_i, W_i)\}_{i\in I}$. El Lema de Zorn implica que $\mathfrak{F}$ tiene un elemento maximal, a saber $(\bigoplus_{i\in I}\pi_i, \bigoplus_{i\in I} W_i)$. Por maximalidad

$$\pi = \bigoplus_{i\in I}\pi_i, \quad \mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i, \quad \mathcal{H}_i = W_i \blacksquare$$

Corolario 3.25 Cada representación no degenerada $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es equivalente a un múltiplo de $(id, \mathcal{H})$ (esto es, $(n\cdot id, n\cdot\mathcal{H}) := (\bigoplus_{i\in I} id, \bigoplus_{i\in I}\mathcal{H})$ donde $n = |I|$).

Demostración
Tenemos del Teorema 3.24 que $(\pi, \mathcal{H}_\pi) = (\bigoplus_{i\in I}\pi_i, \bigoplus_{i\in}\mathcal{H}_i)$ con cada $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$ siendo equivalente a una subrepresentación de $(id, \mathcal{H})$. Pero como $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es irreducible,

$(id, \mathcal{H})$ no puede tener subrepresentaciones, así que $(\pi_i, \mathcal{H}_i) \sim (id, \mathcal{H})$. Entonces existen operadores unitarios $U_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}$, $i \in I$, tales que

$$\pi_i(T) = U_i^* T U_i \quad \text{para todo } T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Si $n = |I|$ entonces,

$$\pi(T) = U^*(n \cdot T)U, \tag{3.12}$$

donde $U = \bigoplus_{i \in I} U_i : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i \longrightarrow n \cdot \mathcal{H}$. ■

Teorema 3.26 Cada representación irreducible de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es equivalente a la representación identidad.

Demostración
Si $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible entonces $n = 1$ en la ecuación 3.12. Por lo tanto $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \sim (id, \mathcal{H})$. ■

Corolario 3.27 Si $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ es una representación irreducible de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, entonces:
i) $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación fiel.
ii) $\sigma(\pi(T)) = \sigma(T)$ y $\|\pi(T)\| = \|T\|$ para cada $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
iii) $\pi(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$.

Demostración
Sea $U : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que

$$\pi(T) = U^* T U \quad \text{para cada} \quad T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}). \tag{3.13}$$

i) Si $\pi(T_1) = \pi(T_2)$, se sigue fácilmente de la ecuación 3.13 que $T_1 = T_2$. Entonces π es inyectivo.
El inciso *ii*) es una consecuencia directa del inciso *i*).
iii) Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, y U como al inicio. Entonces $TU \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H})$. Similarmente $U^*TU \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\pi) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Entonces $\pi(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$. Tomemos ahora $T \in \mathcal{H}_\pi$. Entonces $TU^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_\pi)$. Luego $S = UTU^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y es tal que $\pi(S) = T$. Por tanto $\pi(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$. ■

Dos estados φ, ψ de un álgebra C^* $\mathcal{A}$ son equivalentes si existe un elemento unitario $u \in \mathcal{A}$ tal que

$$\varphi(x) = \psi(uxu^*), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{A}.$$

Corolario 3.28 Cada estado puro de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es de la forma φ_v para algún $v \in \mathcal{H}$ de norma uno. Por lo tanto existe un único estado puro en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ salvo isomorfismo.

Demostración
Sea $\varphi \in P(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$ y $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, v_\varepsilon)$ la representación GNS inducida por φ. Por el Teorema 3.25 existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\varphi$ tal que $\pi_\varphi(T) = UTU^*$ para todo $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces

$$\varphi(T) = \langle \pi_\varphi(T)v_\varphi, v_\varphi\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} = \langle UTU^* v_\varphi, v_\varphi\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} = \langle Tv, v\rangle_{\mathcal{H}},$$

donde $v = U^* v_\varphi$.
Sean φ_v, φ_w dos estados vectoriales de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. De nuevo por el Teorema 3.25 las representaciones GNS inducidas por φ_v, φ_w son equivalentes. Entonces existe un operador unitario $U : \mathcal{H}_{\varphi_v} \longrightarrow \mathcal{H}_{\varphi_w}$ tal que $Uv = w$. Por tanto

$$\varphi_w(T) = \langle Tw, w\rangle = \langle TUv, Uv\rangle = \varphi_v(U^*TU). \blacksquare$$

Sea $\Psi : \mathcal{K}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ un homomorfismo C^* sobreyectivo. Note que podemos interpretar a Ψ como una representación.
La igualdad $\Psi(\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ implica que Ψ es una representación irreducible. Entonces por el corolario 2.24 existe un operador lineal unitario $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que

$$\Psi(T) = UTU^*. \tag{3.14}$$

Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y V es otro operador unitario que cumple (3.14), es decir, $VTV^* = UTU^*$ para cada $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$. Entonces $TU^*V = U^*VT$, lo que implica que $U^*V \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)'$. Por el Lema de Schur $U^*V = \lambda I$, con $|\lambda| = 1$, o equivalentemente $V = \lambda U$. En conclusión

$$Aut(\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)) \simeq \mathfrak{U}(\mathcal{H}_1)/S^1.$$

Donde $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_1) \subset B(\mathcal{H}_1)$ denota el conjunto de operadores lineales unitarios.

3.5 APLICACIONES

Lemma 3.29 Si $\mathcal{A}$ es un álgebra separable entonces $S(\mathcal{A})$ es un espacio separable.

Demostración
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso de $\mathcal{A}$. Los conjuntos

$$V(x_n, z, \epsilon) = \{\varphi \in S(\mathcal{A}) : |\varphi(x) - z| < \epsilon\}, \quad z \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ \epsilon \in \mathbb{Q}$$

forman una subbase de $S(\mathcal{A})$. Entonces $S(\mathcal{A})$ tiene una base contable y por tanto es separable. ■

Teorema 3.30 Para cada álgebra C^* $\mathcal{A}$ de dimensión finita existen enteros positivos $n_1, ..., n_k$ tal que

$$\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Demostración

Ya que $\mathcal{A}$ es de dimensión finita, $\mathcal{A}$ es separable, y por el lema anterior $S(\mathcal{A})$ es separable. Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in S(\mathcal{A})$ un subconjunto denso de $S(\mathcal{A})$. Definimos

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi_n.$$

Note que si $\varphi(xx^*) = 0$ entonces $xx^* = 0$ y por tanto $x = 0$. Considere la representación GNS inducida por φ. Ya que $\mathcal{A}$ es de dimensión finita, $\mathcal{H}_\varphi$ lo es. Si $\pi_\varphi(x) = 0$ entonces $\varphi(x^*x) = 0$ y por lo tanto $x = 0$. Lo que muestra que π_φ es inyectiva. Apliquemos ahora el teorema 3.24 a la representación identidad de $\pi_\varphi(\mathcal{A}) \subset B(\mathcal{H}_\varphi) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_\varphi)$, entonces

$$\pi_\varphi(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^{k} \pi_i(\mathcal{A})$$

con cada π_i una representación irreducible. Sea $\mathcal{H}_i$ el espacio de Hilbert sobre el cual actua π_i y n_i=dim$(\mathcal{H}_i)$. Por el lema de Schur $\pi_i(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I_{\mathcal{H}_i}$ y así que $\pi_i(\mathcal{A})'' = B(\mathcal{H}_i)$. Por el teorema del doble conmutante de Von Neumann $\pi_i(\mathcal{A}) = \pi_i(\mathcal{A})''$. Por lo tanto obtenemos que

$$\mathcal{A} \simeq \pi_\varphi(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^{k} \pi_i(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^{k} B(\mathcal{H}_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C}). \quad ■$$

Dada un álgebra $C^*\mathcal{A}$ construiremos un haz $C^*(p, E, T)$ de tal manera que $\mathcal{A}$ es isomorfa al álgebra de secciones continuas de (p, E, X). Esta construcción brinda una bella conexión entre álgebra y topología.

Un haz es una tripleta (p, E, T) donde E, T son conjuntos y $p : E \longrightarrow T$ es un mapeo sobreyectivo.

Un haz de Banach es una haz (p, E, T) donde E es un espacio Hausdorff, T es un espacio localmente compacto, $p : E \longrightarrow T$ es un mapeo continuo y tal que para cada $t \in T$ la fibra $E_t := p^{-1}(\{t\})$ es una espacio de Banach, y satisface las siguientes condiciones:

i) La suma $+ : E \times E \longrightarrow E$ es continua sobre el conjunto $E_t \times E_t$ para cada $t \in T$,

ii) la multiplicación por escalar: $\mathbb{C} \times E \longrightarrow E$ es continua,

iii) la norma $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua,

iv) para todo $t \in T$, la familia $U(\mathcal{O}_t, \epsilon) = \{x \in E : \|x\| < \epsilon, p(x) \in \mathcal{O}_t\}$ donde $\mathcal{O}_t \subset T$ es un abierto que contiene a t y $\epsilon > 0$, forman un sistema fundamental de vecindades de $0 \in E_t$.

Una sección de un haz de Banach (p, E, T) es un mapeo $\mathfrak{s} : T \longrightarrow E$ tal que $p \circ \mathfrak{s} = \mathbf{I}_T$. Denotamos por $\Gamma(p, E, T)$ al conjunto de todas las secciones continuas de (p, E, T).

Definición 3.31 Sea T un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Un haz C^* es un haz de Banach (p, E, T) junto con una multiplicación $\cdot$ y una involución $*$ en cada fibra E_t tal que:

i) Para cada $t \in T, E_t$ es un álgebra C^* con la norma y la suma de E,

ii) la multiplicación $\cdot : E_t \times E_t \longrightarrow E_t$ es continua para cada $t \in T$,

ii) la involución $* : E \longrightarrow E$ es continua.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, T un conjunto no vacío e $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_t : t \in T\}$ una familia de ideales bilaterales cerrados de $\mathcal{A}$ tales que $\cap_{t \in T} \mathcal{I}_t = \{0\}$. Para cada $t \in T$ definimos el álgebra local en el punto t como

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}/\mathcal{I}_t.$$

Dos elementos $x, y \in \mathcal{A}$ son llamados locamente equivalentes en t si $\pi_t(x) = \pi_t(y)$, donde $\pi_t : \mathcal{A} \longrightarrow A_t$ es el mapeo canónico. Sea

$$E = \bigsqcup_{t \in T} \mathcal{A}_t.$$

Definimos el mapeo $p : E \longrightarrow T$ como $p(\pi_t(x)) = t$. Dotamos a E y T con topologías de tal manera que el haz (p, E, T) sea un haz C^*.
Para cada $x \in \mathcal{A}$ definimos la sección $\widetilde{x} \in \Gamma(p, E, T)$ mediante $\widetilde{x}(t) = \pi_t(x)$. Si $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{x} : x \in \mathcal{A}\}$ es claro que $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \Gamma(p, E, T)$.

Cuando T es compacto $\Gamma(p, E, T)$ adquiere la estructura de álgebra C^* con la norma y las operaciones definidas como:

Si $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in \Gamma(p, E, T)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$(\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2)(t) = \mathfrak{s}_1(t) + \mathfrak{s}_2(t), \quad (\lambda\mathfrak{s}_1)(t) = \lambda\mathfrak{s}_1(t),$$

$$(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2)(t) = \mathfrak{s}_1(t)\mathfrak{s}_2(t), \quad (\mathfrak{s})_1^*(t) = (\mathfrak{s}_1(t))^*, \quad \|\mathfrak{s}_1\| = \sup_{t \in T} \|\mathfrak{s}(t)\|.$$

Veamos ahora que si $\mathcal{A}$ es conmutativa entonces el mapeo de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathcal{M}_\mathcal{A})$ se puede ver como $\Gamma(x) = \widetilde{x}, x \in \mathcal{A}$.
Tomemos T como el espacio compacto $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ e $\mathcal{I}_\varphi = Ker\varphi$ para cada $\varphi \in \mathcal{M}_\mathcal{A}$. Recordemos que $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}/Ker\varphi \simeq \mathbb{C}$. Luego si identificamos E con $\mathbb{C} \times \mathcal{M}_\mathcal{A}$ y $p(z, \varphi) = \varphi$. Entonces para $x \in \mathcal{A}$ la función $\widetilde{x}(\varphi) = (\varphi(x), \varphi)$ es una sección de p. No es complicado ver que $\mathbf{C}(\mathcal{M}_\mathcal{A}) \simeq \Gamma(p, \mathbb{C} \times \mathcal{M}_\mathcal{A}, \mathcal{M}_\mathcal{A})$ con el mapeo

$$f \mapsto (\varphi \mapsto (\varphi(f), \varphi)).$$

El Teorema 1.18 afirma justamente que $\mathcal{A} \simeq \Gamma(p, \mathbb{C} \times \mathcal{M}_\mathcal{A}, \mathcal{M}_\mathcal{A})$.

REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS CONCRETAS

Suponga que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras C^*. Si $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un isomorfismo sobreyectivo y $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación de $\mathcal{B}$, entonces $\pi \circ \Phi$ es una representación de $\mathcal{A}$. Por tanto si $R(\mathcal{A})$ denota el conjunto de representaciones de un álgebra C^* $\mathcal{A}$, y $\mathcal{B}$ es un álgebra C^* isomorfa a $\mathcal{A}$, entonces $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B})$. En particular tenemos que $\widehat{\mathcal{A}} \simeq \widehat{\mathcal{B}}$. En este capítulo usaremos este hecho para calcular algunas representaciones de álgebras.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y P_1, P_2 en $B(\mathcal{H})$ dos proyecciones ortogonales. Sea $\mathcal{R}(I, P_1, P_2)$ el álgebra C^* generada por P_1, P_2 y el operador identidad. Denotemos por $D_n(\mathbb{C})$ el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$.
Establecemos las siguientes condiciones,

$i)$ Si $0 \in \Lambda := \sigma(P_1 - P_2)^2$ entonces $\pm 1 \in \sigma(I - P_1 - P_2)$.

$ii)$ Si $1 \in \Lambda$ entonces $\pm 1 \in \sigma(P_1 - P_2)$.

Definimos el álgebra C^* $\mathcal{D}$ formada por las funciones $f : \Lambda \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ tales que $f(\Lambda \cap \{0, 1\}) \subset D_2(\mathbb{C})$. Las operaciones de suma y producto son definidas puntualmente, por tanto la identidad del álgebra $\mathcal{D}$ es la función que a cada $t \in \Lambda$ asigna la matriz identidad de $M_2(\mathbb{C})$. La involución y la norma están dadas por

$$f^*(t) = f(t)^*, \quad \|f\| = \sup_{t \in \Lambda} \|f(t)\|.$$

Teorema 3.32 ([38]) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y P_1, P_2 dos proyecciones ortogonales que cumplen las condiciones i) y ii). Entonces el álgebra $\mathcal{R}(I, P_1, P_2)$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{D}$. El isomorfismo $\Phi : \mathcal{R}(I, P_1, P_2) \longrightarrow \mathcal{D}$ está dado mediante la siguiente aplicación sobre los generadores

$$\Phi(P_1)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Phi(P_2)(t) = \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}, \; t \in \Lambda.$$

REPRESENTACIONES DOS-DIMENSIONALES DE $\mathcal{R}(I, P_1, P_2)$.

Para cada $t \in \Lambda$ definimos el mapeo

$$\pi_t : \mathcal{D} \longrightarrow B(\mathbb{C}^2),\; \pi_t(f) = f(t)\; f \in \mathcal{D}.$$

Por la manera en que estan definidas las operaciones en $\mathcal{D}$, el mapeo π_t es un homomorfismo C^*, de modo que π_t es una representación de $\mathcal{D}$. Analizemos la irreducibilidad de π_t a partir de la elección de t.
Si $t = 0$, entonces puede verse que el espacio generado por el vector $(1, 0)$ es un subespacio propio cerrado π_0-invariante. De modo que π_0 no es una representación irreducible.
Ahora si $t = 1$ entonces el subespacio generado por el vector $(0, 1)$ es un subespacio cerrado π_1-invariante.
Finalmente veamos que si $t \neq 0, 1$ entonces π_t es irreducible. Para esto mostremos que para cada vector $v = (x, y)$ distinto de cero existe $f \in \mathcal{D}$ tal que $\pi_t(f)v$ no es un múltiplo de v.
Caso I, $x = 0$ o $y = 0$.
La función $f_2 = \Phi(P_2)$ es tal que $\pi_t(f_2)v \neq \lambda v$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.
Caso II, $x, y \neq 0$.
La función $f_1 = \Phi(P_1)$ es tal que $\pi_t(f_1)v \neq \lambda v$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.
Por lo tanto

$$\pi_t \circ \Phi : \mathcal{R}(I, P_1, P_2) \longrightarrow B(\mathbb{C}^2) \quad t \in \Lambda - \{0, 1\}$$

es una representación irreducible de $R(I, P_1, P_2)$.
Examinemos ahora si las representaciones π_t son equivalentes para $t \in \Lambda - \{0, 1\}$.
Sean $t, t' \in \Lambda - \{0, 1\}$. Por definición, $\pi_t \sim \pi_{t'}$ si y solo si existe una matriz unitaria $U \in M_2(\mathbb{C})$ tal que

$$\pi_t(f) = U^* \pi_{t'}(f) U, \quad \text{para cada } f \in \mathcal{D},$$

esto es

$$f(t) = U^* f(t') U. \tag{3.15}$$

Por los valores matriciales de las funciones $f_0 = \Phi(I)$ y f_1 obtenemos que U tiene que ser la matriz identidad. Sin embargo la matriz identidad no satisface la ecuación 3.15 para f_2. Por tanto las representaciones π_t con $t \in \Lambda - \{0,1\}$ no son equivalentes.

REPRESENTACIONES DE UNA SUMA DIRECTA DE ÁLGEBRAS C^*.

Sean $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ álgebras C^*. Considere la suma directa $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$. Es fácil ver que $\mathcal{A}$ se convierte en un álgebra C^* con las operaciones puntuales y con la involución y norma dadas por

$$(x_1, ..., x_n)^* = (x_1^*, ..., x_n^*), \quad \|(x_1, ..., x_n)\| = \text{máx}(\|x_i\|_{\mathcal{A}_i}).$$

Ahora observe que cada representación de $\mathcal{A}$ induce una representación de $\mathcal{A}_i$ para cada $i \in [n]$ ($[n] = \{1, ..., n\}$). Más precisamente, si $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación de $\mathcal{A}$, entonces la función $\pi_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow B(\mathcal{H})$ dada por

$$\pi_i(x_i) = \pi(0, ..., x_i, ..., 0),$$

es una representación de $\mathcal{A}_i$. Nótese que si π es irreducible, en general no se cumple que π_i sea irreducible. Por otro lado, si $\pi_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow B(\mathcal{H}_i)$ es una representación de $\mathcal{A}_i$ para cada $i \in [n]$. Entonces la función $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ dada por

$$\pi(x_1, ..., x_n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \pi_i(x_i) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \text{donde } \mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i,$$

es una representación de $\mathcal{A}$. Observe que si las π_i son irreducibles no implica que π lo sea. Con la siguiente proposición clasificamos las representaciones irreducibles de $\mathcal{A}$ en términos de las representaciones irreducibles de $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$.

Proposición 3.33 Sean $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ álgebras C^* y sea $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. Entonces una representación $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ es irreducible si y solo si $\pi_i(x_i) = \pi(0, ..., x_i, ..., 0)$ es irreducible para exactamente una $i \in [n]$ y $\pi_j = 0$ para cada $j \in [n] - \{i\}$. Por lo tanto

$$\widehat{\mathcal{A}} \simeq \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{\mathcal{A}_i}, \quad [\pi] \mapsto [\pi_i]. \tag{3.16}$$

Demostración
Sea π una representación irreducible de $\mathcal{A}$. Por el Lema de Schur

$$\overline{\pi(\mathcal{A})v} = \mathcal{H} \quad \text{para cada } v \in \mathcal{H}.$$

Los subespacios cerrados $V_i = \overline{\pi(0, ..., \mathcal{A}_i, .., 0)v}$ son π-invariantes, de modo que $V_i = \{0\}$ o $\mathcal{H}$. Note que V_i no puede ser $\{0\}$ para cada $i \in [n]$, pues de lo contrario π sería igual a 0. Ahora asuma que existen distintos $i, j \in [n]$ tal que $V_i = V_j = \mathcal{H}$. En particular $\pi_i, \pi_j \neq 0$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $i = 1$ y $j = 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{A}_1)(\pi_2(\mathcal{A}_2)v) &= \pi(\mathcal{A}_1, 0, ..., 0)\pi(0, \mathcal{A}_2, ..., 0)v \\ &= \pi(\mathcal{A}_1 \cdot 0, 0 \cdot \mathcal{A}_2, .., 0)v \\ &= \pi(0, ..., 0)v = \{0\}.\end{aligned}$$

Ya que $\pi_2(\mathcal{A}_2)v$ es denso en $\mathcal{H}$, se sigue que $\pi_1 = 0$. Contradiciendo el hecho de que $\pi_1 \neq 0$. Por tanto π_i es irreducible para exactamenete un $i \in [n]$ y $\pi_j = 0$ para cada $j \in [n] - \{i\}$.

Ahora supóngase que π_i es irreducible y $\pi_j = 0$ para cada $j \neq i$. Entonces $\mathcal{H}_j = \{0\}$ y por tanto $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{H}_k \simeq \mathcal{H}_i$. Por lo tanto $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ adquiere la siguiente forma

$$\pi(x_1, ..., x_n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \pi_k(x_k) = \pi_i(x_i).$$

Se sigue que $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H}_i)$ es irreducible.
Veamos que el mapeo $[\pi] \mapsto [\pi_i]$ está bien definido. Si $\pi \sim \pi'$ entonces existe un operador unitario U tal que

$$\pi(x) = U\pi'(x)U^*, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{A}.$$

Tomando $x = (0, ..., x_i, .., 0)$ obtenemos que $\pi_i \sim \pi_i'$. El isomorfismo 3.16 es entonces una consecuencia de lo mostrado. ■

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $v_0 \in \mathcal{H}$ un vector de norma uno y V_0 el subespacio generado por v_0. Sea $P : \mathcal{H} \longrightarrow V_0$ la proyección ortogonal sobre V_0.
Tomemos n proyecciones ortogonales $P_1, ..., P_n$, tales que

$$P_iP_j = \delta_{ij}P_i \quad \text{para } i, j = 1, ...n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = I.$$

Denotemos por $Im(P_i)$ a la imagen de P_i. Sea

$$\mathcal{R}(P, P_1, ..., P_n)$$

el álgebra C^* generada por P y por $P_1, ..., P_n$.

Teorema 3.34 ([39]) Si $V_0^{\perp} \cap V_i = \{0\}$ para cada $i = 1, ..., n$. Entonces el álgebra $\mathcal{R}(P, P_1, ..., P_n)$ es isomorfa a $\mathbb{C}^n \oplus M_n(\mathbb{C})$. El isomorfismo está dado por la siguiente aplicación sobre los generadores

$$P \mapsto (0, (a_{ij})), \quad P_i \mapsto (e_i, (\delta_{ii})) \quad \text{para } i = 1, ..., n.$$

Donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$, (a_{ij}) representa la matriz con entradas $a_{ij} = \|P_i(v_0)\|\|P_j(v_0)\|$ y (δ_{ii}) es la matriz con uno en la entrada ii y ceros en las demás entradas.

Sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}(I, P_1, .., P_n)$ el álgebra descrita en el teorema anterior.
Dado que $\mathbb{C}^n$ es un álgebra conmutativa tenemos que $\widehat{\mathbb{C}^n} \simeq \{x_1, ..., x_n\}$ donde los x_i son puntos de $\mathbb{C}$, es decir, las representaciones irreducibles de $\mathbb{C}^n$ son las proyecciones sobre la entrada i-ésima.
Por otro lado como $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$, tenemos entonces por el Teorema 3.26 que $\widehat{M_n(\mathbb{C})} = \{[\mathbf{1}]\}$, donde $\mathbf{1} : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ es la representación identidad. Combinando el Teorema 3.31 y la Proposición 3.30 llegamos a que

$$\widehat{\mathcal{R}} \simeq \{x_1, ..., x_n\} \bigcup \{[\mathbf{1}]\}.$$

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. A continuación llevaremos a cabo el cálculo del espectro de un álgebra de operadores actuando en $L^2(\mathbb{T})$.
Definimos $S_{\mathbb{T}} : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ mediante

$$(S_{\mathbb{T}} f)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

y las proyecciones $P_{\mathbb{T}}^{\pm} = (I \pm S_{\mathbb{T}})$. Sea $\mathcal{R}(\mathbf{C}(\mathbb{T}), S_{\mathbb{T}}) \subset B(L^2(\mathbb{T}))$ el álgebra generada por los operadores de multiplicación por funciones de $\mathbf{C}(\mathbb{T})$ y el operador $S_{\mathbb{T}}$.

Proposición 3.35 ([37])
El álgebra $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{C}(\mathbb{T}), S_{\mathbb{T}})$ contiene al ideal $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}))$, es irreducible y cada elemento de $T \in \mathcal{R}(\mathbf{C}(\mathbb{T}), S_{\mathbb{T}})$ tiene la forma

$$T = a(t)P_{\mathbb{T}}^{+} + b(t)P_{\mathbb{T}}^{-} + K, \quad \text{donde } a, b \in \mathbf{C}(\mathbb{T}) \text{ y } K \in \mathcal{K}.$$

El álgebra cociente $\mathcal{R}/\mathcal{K}$ es isométricamente isomorfa al álgebra $\mathbf{C}(\mathbb{T}) \oplus \mathbf{C}(\mathbb{T})$ y el isomorfismo está dado por

$$[T] \mapsto (a(t), b(t)).$$

Si $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{C}(\mathbb{T}), S_{\mathbb{T}})$ entonces por el corolario 3.18 y las Proposiciones 3.31 y 3.33 obtenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}} &\simeq \widehat{\mathcal{R}/\mathcal{K}} \cup \widehat{\mathcal{K}} \\ &\simeq \widehat{\mathbf{C}(\mathbb{T}) \oplus \mathbf{C}}(\mathbb{T}) \cup \{[\mathbf{1}]\} \\ &\simeq \widehat{\mathbf{C}(\mathbb{T})} \sqcup \widehat{\mathbf{C}(\mathbb{T})} \cup \{[\mathbf{1}]\} \\ &= \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \cup \{[\mathbf{1}]\}.\end{aligned}$$

Hemos usado el simbolo de unión disjunta para distinguir entre elementos del mismo conjunto $\mathbb{T}$, pues los sumandos en la suma directa son iguales.
Recordemos que el espectro de un álgebra C^* es un espacio topológico, así que el objetivo de esta última sección fué encontrar un espacio topológico familiar que sea isomorfo al espectro. Por supuesto que la esencia del espectro es codificar las representaciones irreducibles de un álgebra C^*, pero una vez calculado este espacio, hay que descifrar como un elemento del espectro induce una representación irreducible. Por ejemplo si tenemos el álgebra $\mathbf{C}[0,1]$, sabemos que $[0,1] \simeq \widehat{\mathbf{C}[0,1]}$. A esta áltura sabemos que dado $t \in [0,1]$, la representación irreducible asociada a t es el funcional de evaluación $\varphi_t(f) = f(t)$.
Se sabe que si $\mathcal{A}$ es unitaria entonces $\widehat{\mathcal{A}}$ es quasi-compacto, y que si el álgebra es separable entonces la topología de su espectro tiene una base contable. Cuestiones de este tipo quedan pendientes por investigar, por ejemplo, ¿cuando $\widehat{\mathcal{A}}$ es conexo? o, ¿que implica la conexidad de $\widehat{\mathcal{A}}$ sobre la estructura algebraica de $\mathcal{A}$?

Bibliografía

[1] H. Araki, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford University Press, 1999.

[2] A. Connes, A survey of foliations and operator algebras, in *Operator Algebras and Applications, Part I*, pp. 521-628, American Mathematical Society, 1982.

[3] G. G. Kasparov, *Equivariant K K -theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. 91 (1988), 147-201.

[4] V. F. R. Jones, *Subfactors and Knots*, American Mathematical Society, 1991.

[5] K. Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*. Estudies in Advanced Mathematics (1961)

[6] M. Rieffel, *208 C*-algebras*. Spring (2013)

[7] I. F. Putnam, *Lecture Notes on C*-algebras* (2019)

[8] F. Arici, and T. Crisp, *C*-Algebras and Representation Theory* (2017)

[9] R. J. Skillicorn, *Discontinuous Homomorphisms from Banach Algebras of Operators* (2016)

[10] D. P. Williams, *A (Very) Short Course on C*-Algebras* (2019)

[11] R. Hines, *The Gelfand-Naimark-Segal Construction* (2017)

[12] R. Yuncken, *Notes on C*-algebras* (2015)

[13] I. Farah, *C* Algebras and their Representations* (2005)

[14] I. Farah, *Combinatorial Set Theory of C*-Algebras*. Springer (2019)

[15] J. Dixmier, *C*-Algebras*, North-Holland Publishing Company (1969)

[16] T. Omland and N. Stammeier, *Introduction to C*-Algebras* (2016)

[17] P. Soltan, *C*-Algebras, Group Actions and Crossed Products (Lecture Notes)* (2007)

[18] T. Keug Lee, *Extreme Points Related to Matrix Algebras*. Kangweon-Kyungki Math. Jour. 9, 45-52 (2001)

[19] N. Weaver, *Set Theory and C*-Algebras* (2006)

[20] I. Farah and E. Wofsey, *Set Theory and Operator Algebras* (2008)

[21] C. Akemann and N. Weaver, *B(H) Has a Pure State that is not multiplicative on any masa*. PNAS April 8, vol. 105 no. 14 5313–5314 (2008)

[22] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*. Second Edition Springer (1990)

[23] E. Kreyzig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons (1978)

[24] S. Echterhoff, *Operator Algebras*.

[25] G. Ramesh, *Banach Algebras* (2013)

[26] B. Blackadar, *Operator Algebras Theory of C*-Algebras and Von Neumann Algebras* (2017)

[27] J. Derezinski, *C*-Algebras* (2006)

[28] Capítulo 6. *Proyecciones y Bases Ortonormales*

[29] G. A. Reid, *On the Calkin Representations*. Proceedings of the London Mathematical Society, Volume s3-23, Issue 3, 547-576 (1970)

[30] N. Weaver, *Mathematical Quantization*. Estudies in Advanced Mathematics (2001)

[31] N. P. Landsman, *Lecture Notes on C*-Algebras, Hilbert C*-Modules, and Quantum Mechanics* (1998)

[32] M. Forger and D. Paulino, *Locally C* Algebras, C* Bundles and Noncommutative Spaces* (2013).

[33] K. Hofmann, *Representations of Algebras by Continuous Sections*, (1972). Bulletin of the American Mathematical Society.

[34] T. Martins, *C*-bundle dynamical systems* (2018).

[35] S. Sundar, *Finite dimensional C*-algebras* (2012).

[36] Etingof, Golberg, Hensel, Liu, Schwendner, Vaintrob, and Yudovina, *Introduction to representation theory* (2011).

[37] A. Karapetyants, N. Vasilevski, V. Rabinovich, *On algebras of two-dimesional singular integral operators with homogeneous discontinuities in symbols* (2001).

[38] N. Vasilevski and I. Spitkovski, *Algebra generated by two projectors* (1981).

[39] E. Ramírez de Arellano and N. L. Vasilevski, *Bargmann Projection, three-valued functions and corresponding Toeplitz operators* (1994).

[40] J. Anderson, *Extreme Points in Sets of Positive Linear Maps on $B(\mathcal{H})$* (1979).

[41] H. G. Dales, *Maximal Ideals in Commutative Banach Algebras* (2014).

[42] P. Mankiewicz, *A superreflexive banach space X with $L(X)$ admitting a homomorphism onto the Banach algebra $\mathbf{C}(\beta\mathbb{N})$*. Israel J. Math. 65, 1–16 (1989).

[43] P. Koszmider, *A Non-Diagonzalizable Pure State*, (2020).

[44] Joaquín Rodriguez Jacinto, *El Teorema de Krein-Milman*, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Julio de 2010.