

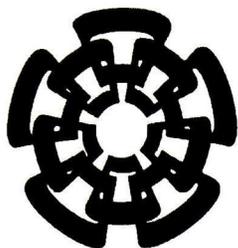
BC-610
Don. - 2011

xx(178939.1)

TK165.G8

E48

2010



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Técnicas H-Infinito en Sistemas Estocásticos

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Jose Santiago Elvira Ceja

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos

Dr. Mikhail Valentinovich Basin



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

CLASIF.:TK165.G8 E48 2010
ADQUIS.:EX-610
FECHA: 14 - Julio - 2011
PROCED.:Don - 2011
\$ _____

10.173885-1001

Técnicas H-Infinito en Sistemas Estocásticos

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Jose Santiago Elvira Ceja
Ingeniero en Electrónica

Instituto Tecnológico de Morelia 2002-2007

Becario de CONACyT, expediente no. 219146

Directores de Tesis

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Dr. Mikhail Valentinovich Basin

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Noviembre de 2010.

Abstract

This thesis provides a solution to the filtering and control problems for linear stochastic systems affected for integral-quadratically bounded disturbances, under the approach of the H_∞ theory. As result, the existence conditions for the filter and controller were obtained, as well as its respective algorithms.

In order to evaluate the synthesized algorithms performance, these are compared against the H_∞ filter and controller available for deterministic systems via numerical simulations.

Finally, the obtained algorithms are applied to the linear stochastic model corresponding to the helicopter of two degrees of freedom to stabilize the system by the controller, and estimate the angular positions by means of the filter, as well as its respective algorithms, so that meets certain performance measure.

Resumen

En esta tesis se da solución al problema de filtrado y control para sistemas estocásticos lineales afectados por perturbaciones de energía finita, bajo el enfoque de la teoría H_∞ . Como resultado, se obtienen las condiciones de existencia para el filtro y el controlador, así como sus respectivos algoritmos.

Para evaluar el desempeño de los algoritmos sintetizados, éstos son comparados con el filtro y controlador H_∞ para sistemas lineales deterministas mediante simulaciones numéricas.

Finalmente los algoritmos obtenidos se aplican al modelo estocástico lineal de un helicóptero de dos grados de libertad para estabilizar el sistema por parte del controlador, y estimar las posiciones angulares por medio del filtro, de tal forma que se minimize el criterio de desempeño respectivo.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Agradecimientos	IX
1. Introducción	1
2. Fundamentos Teóricos	3
2.1. Probabilidad y Procesos Estocásticos	3
2.2. Señales y Sistemas	5
2.3. Filtro de Kalman-Bucy	7
2.4. Control H_∞ de Información Completa	10
2.5. Filtro H_∞	14
2.6. Control H_∞ por Retroalimentación .	18
3. Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático	25
3.1. Formulación del Problema	25
3.1.1. Sistema Lineal Estocástico	25
3.1.2. Problemas de Filtrado	26
3.2. Síntesis del Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, t_f]$	26
3.2.1. Filtro 1	27
3.2.2. Filtro 2	30
3.3. Síntesis del Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, \infty)$	31
3.3.1. Filtro 3	31
3.4. Ejemplo	32
3.4.1. Aplicación de Filtro 1	33
3.4.2. Aplicación de Filtro 2	33
3.4.3. Aplicación del Filtro H_∞ .	34
3.4.4. Parámetros de Simulación	34
3.4.5. Resultados Gráficos	35

4. Controlador H_∞ en Promedio Cuadrático	39
4.1. Formulación del Problema	39
4.1.1. Sistema Lineal Estocástico	39
4.1.2. Problemas de Control .	40
4.2. Síntesis del Control H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, t_f]$	40
4.2.1. Control 1	40
4.2.2. Control 2	45
4.3. Síntesis del Control H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, \infty)$	46
4.3.1. Control 3	46
4.4. Ejemplo	48
4.4.1. Aplicación de Control 1	49
4.4.2. Aplicación de Control 2	50
4.4.3. Aplicación del Control H_∞ por Retroalimentación	51
4.4.4. Parámetros de Simulación	52
4.4.5. Resultados Gráficos	52
5. Aplicación a un Helicóptero de Dos Grados de Libertad	55
5.1. Descripción del Sistema	55
5.2. Modelo Matemático .	55
5.2.1. Modelo No Lineal	55
5.2.2. Modelo Lineal	57
5.2.3. Sistema Estocástico Lineal	58
5.3. Aplicación del Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático	58
5.3.1. Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático	58
5.3.2. Resultados Gráficos	60
5.4. Aplicación del Control H_∞ en Promedio Cuadrático	63
5.4.1. Control H_∞ en Promedio Cuadrático	63
5.4.2. Aplicación del Control H_∞ en Promedio Cuadrático en Estado Estacionario	65
5.4.3. Resultados Gráficos	66
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	71
6.1. Conclusiones	71
6.2. Trabajo Futuro	71
Bibliografía	75
A. Optimización	77
A.1. Variación	77
A.2. Multiplicadores de Lagrange	78
A.3. Juegos Diferenciales	78
B. Publicaciones	81

Índice de figuras

2.1. Configuración del filtro de varianza mínima.	7
2.2. Filtro de Kalman-Bucy.	10
2.3. Configuración del control H_∞ de información completa.	10
2.4. Configuración del filtro H_∞ .	15
2.5. Filtro H_∞ central sub-óptimo.	18
2.6. Configuración del control H_∞ por retroalimentación.	18
2.7. Control H_∞ central sub-óptimo.	23
3.1. Configuración del filtro H_∞ en promedio cuadrático.	26
3.2. Filtro H_∞ en promedio cuadrático.	32
3.3. Norma H_∞ de ω del Caso 1 al error de estimación.	35
3.4. $Z(t)$, $\hat{Z}(t)$ y $\bar{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 1 está presente.	36
3.5. $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$ y $\bar{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 1 está presente.	36
3.6. Norma H_∞ de ω del Caso 1 al error de estimación.	37
3.7. $Z(t)$, $\hat{Z}(t)$ y $\bar{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 2 está presente.	37
3.8. $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$ y $\bar{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 2 está presente.	38
4.1. Configuración del control H_∞ en promedio cuadrático.	41
4.2. Control H_∞ en promedio cuadrático. .	48
4.3. Norma H_∞ de $\omega(t)$ a $Z(t)$.	53
4.4. Señal controlada: $Z_1(t) = X_1(t)$.	53
4.5. Señal controlada: $Z_2(t) = u(t)$.	54
5.1. Helicóptero.	56
5.2. Ángulo de elevación	61
5.3. Ángulo de rotación	61
5.4. Error de estimación	62
5.5. Medida del desempeño del filtro	62
5.6. Perturbaciones en $\mathcal{L}_2[0, 80s]$	63
5.7. Ángulo de elevación	67
5.8. Ángulo de rotación	67
5.9. Voltaje para controlar la elevación	68

5.10. Voltaje para controlar la rotación	68
5.11. Norma H_∞ del sistema en lazo cerrado: $\ z\ _2/\ \omega\ _2$	69
5.12. Perturbaciones en $\mathcal{L}_2[0, \infty)$	69

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mi esposa Rosita Roque Bautista por todo el apoyo que me ha brindado y sobre todo por su gran paciencia, cariño y amor.

Quiero agradecer:

A mis padres Aurora Ceja Hurtado y Salvador Elvira Capíz por el apoyo y cariño proporcionado en todo momento, así como a mis hermanos que aprecio y quiero mucho.

Al Doctor Edgar Nelson Sánchez Camperos y Doctor Mikhail Valentinovich Basin por asesorarme en la realización de este trabajo.

A mis compañeros y amigos de generación: Laura De la Mora, Rocío Hernández, Víctor Huidobro, Carlos Limón, Oscar Carbajal, Andrés Bueno, Sergio Aguilar, Christian Álvarez, Axel Padilla, Oscar Aroche y Roberto Loera por todos los momentos agradables que pasamos.

Al CINVESTAV Unidad Guadalajara, por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León por permitirme realizar una estancia de investigación en sus instalaciones.

Y sobre todo al CONACyT, por el apoyo económico proporcionado en estos dos años.

Capítulo 1

Introducción

El problema de control y de filtrado desde un enfoque de la teoría H_∞ , ha sido ampliamente estudiado desde la década de los ochenta, por presentar propiedades de robustez y optimización, lo cual hacen de este estudio un tema de gran importancia aún en la actualidad. La técnica de control H_∞ para sistemas en espacio de estado, fue introducida y publicada por J. C. Doyle et al. en 1989 en [12]. Mientras que el problema de estimación H_∞ fue tratado en los artículos [33], [27] y [21]. A partir de [12]-[21], se estableció una base para tratar consistentemente el problema de control y filtrado en el sentido de la teoría H_∞ , del cual se han publicado una gran variedad de resultados respecto a este tema para diferentes sistemas (ver por ejemplo, para control [22], [24], [10], [29], [32], [34], y para filtrado [23], [5], [19], [31], [7], [30], [28], [8], [11], [36], [35], [6], [1], [2]).

El filtrado y control H_∞ es un problema de maximización y minimización, puesto que se trata de minimizar el efecto producido por la máxima perturbación que pudiera afectar la dinámica del sistema.

En esta tesis, se da solución al problema de filtrado y de control para sistemas estocásticos lineales afectados por perturbaciones determinísticas (perturbaciones de energía finita), bajo el enfoque de la teoría H_∞ . Como resultado, se obtienen algoritmos para el filtro y el controlador, así como sus respectivas condiciones de existencia.

El sintetizar un controlador y filtro H_∞ para sistemas estocásticos lineales presenta ventajas significantes en lo teórico como en lo práctico, ya que permite tratar problemas de control y filtrado para sistemas estocásticos lineales variantes en el tiempo. Además, son algoritmos óptimos (respecto a un nivel de atenuación) y de dimensión finita.

Los algoritmos de control y filtrado desarrollados en esta tesis, son comparados con los existentes para sistemas lineales variantes en el tiempo, con el propósito de mostrar el desempeño de cada uno en un sistema estocástico lineal.

Finalmente los algoritmos diseñados se aplican en un helicóptero de dos grados de libertad para estimar el ángulo de elevación por parte del filtro, y estabilizar el sistema con el controlador.

El contenido de esta tesis se organiza de la siguiente manera:

En Capítulo 2, se presentan conceptos relacionados con la teoría de la probabilidad, procesos estocásticos, sistemas lineales y teoría H_∞ . Además, se incluye de forma detallada la síntesis del filtro de Kalman-Bucy, controlador H_∞ de información completa, filtro H_∞ y el controlador H_∞ por

retroalimentación, todos estos algoritmos para sistemas lineales variantes en el tiempo.

El Capítulo 3 muestra el análisis para la obtención del filtro H_∞ en promedio cuadrático sub-óptimo para un sistema estocástico lineal variantes en el tiempo, en presencia de perturbaciones cuadrado integrables acotadas, así como la aplicación a un sistema estocástico lineal particular, con la finalidad de verificar el desempeño del filtro sintetizado frente al filtro H_∞ central sub-óptimo. El análisis se establece para intervalos de tiempo finito e infinito.

El Capítulo 4 presenta el análisis para la obtención de un controlador H_∞ en promedio cuadrático sub-óptimo central para sistemas estocásticos lineales variantes e invariantes en el tiempo, en presencia de perturbaciones deterministas cuadrado integrables acotadas, afectando el sistema y la medición. Además, se muestra mediante un ejemplo la aplicación de la ley de control y la robustez del controlador para un sistema estocástico lineal; así mismo se compara con un control H_∞ sub-óptimo central diseñado para el sistema determinista correspondiente. El análisis se establece para un intervalo de tiempo finito cuando el sistema es variante en el tiempo, e infinito para sistemas invariantes en el tiempo.

En el Capítulo 5 se aplican los algoritmos desarrollados a un helicóptero de dos grados de libertad y se prueban a nivel simulación.

Finalmente, el Capítulo 6 presenta las conclusiones del presente trabajo, además se plantea el trabajo futuro.

Adicionalmente, en el Apéndice A, se incluyen conceptos básicos de variación, multiplicadores de Lagrange y juegos diferenciales; y en el Apéndice B, se enlistan las publicaciones realizadas que son producto de este trabajo.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios, para el estudio y análisis de los temas expuestos en los capítulos siguientes. Las fuentes consultadas principalmente son: para probabilidad y procesos estocásticos ([13], [26], [17] y [3]); señales y sistemas ([9], [21] y [15]) y para control H_∞ y filtro H_∞ ([4], [9], [24],[14], [12] y [21]).

2.1. Probabilidad y Procesos Estocásticos

Definición 1. La tripleta (Ω, F, P) se le conoce como espacio de probabilidad asociado con un experimento aleatorio, donde:

- (i) Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento aleatorio, y se conoce como espacio de muestreo.
- (ii) F es una familia de subconjuntos de Ω , el cual tiene la estructura de una σ -álgebra:
 - a) $\emptyset \in F$,
 - b) Si $A \in F$, entonces su complemento A^c también pertenece a F ,
 - c) $A_1, A_2, \dots \in F \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.
- (iii) P es una función la cual asocia un número $P(A)$ a cada subconjunto $A \in F$ con las siguientes propiedades:
 - a) $0 \leq P(A) \leq 1$,
 - b) $P(\Omega) = 1$,
 - c) Para cualquier secuencia A_1, A_2, \dots de subconjuntos disjuntos en F (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definición 2. Un espacio de probabilidad se define completo si para cada subconjunto de un conjunto nulo ($P(N) = 0$), éste pertenece a la σ -álgebra F y obviamente tiene probabilidad cero ($M \subset N \Rightarrow M \in F$ y $P(N) = 0$).

Definición 3. Si (Ω, F, P) es un espacio de probabilidad, entonces la función $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define F -medible si

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in F,$$

para todos los conjuntos abiertos $U \in \mathbb{R}^n$

Definición 4. Una variable aleatoria $X = X(\omega)$ es una función F -medible. Es decir, para todo número real k , la desigualdad

$$X(\omega) \leq k$$

define un conjunto ω cuya probabilidad está definida.

Definición 5. Un proceso estocástico $X(t) = \{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ es una colección parametrizada de variables aleatorias, definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P) . El parámetro T representa al conjunto $\{t : t \geq 0\}$.

Proceso de Wiener y Ruido Blanco

El proceso de Wiener o comúnmente llamado movimiento Browniano es un ejemplo de un proceso estocástico. Fue determinado por el botánico inglés Robert Brown y representa el movimiento de una partícula de polen inmersa en líquido. Actualmente el proceso se usa en muchas áreas de la ciencia como la física, la biología, la economía o las finanzas. A continuación se presenta una definición del proceso de Wiener.

Definición 6. Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y $\{F_t\}_{t \geq 0}$ una familia de sub σ -álgebras de F crecientes, es decir, $F_s \subseteq F_t, s < t$. Un proceso estocástico $W(t) = \{W_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ es un proceso de Wiener estándar sobre (Ω, F, P) si satisface las siguientes condiciones:

1. $P(W(0) = 0) = 1$,
2. Para $0 \leq s \leq t < \infty$, los incrementos $W(t) - W(s)$, tienen distribuciones Gaussianas con media cero y varianza $t - s$; es decir, tiene incrementos estacionarios.
3. Para $0 \leq s \leq t < \infty$, el incremento $W(t) - W(s)$ es independiente de F_s ; es decir, tiene incrementos independientes.

Definición 7. El Ruido Blanco se define como un proceso $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ tal que sus incrementos $\xi(t+s) - \xi(t)$ tiene distribución normal y son estacionarios, la esperanza de $\xi(t)$ igual a cero ($E[\xi(t)] = 0$) y tal que su función de densidad espectral $f(\lambda)$ (transformada de Fourier de la función de correlación) es constante e igual a:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} C(t) dt = \frac{c}{2\pi} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $c > 0$ y $C(t) = E[\xi(s)\xi(t+s)]$ la función de covarianza de $\xi(t)$.

La relación entre el ruido blanco y el proceso de Wiener es la siguiente

$$W(t) = \int_0^t \xi(s) ds$$

o bien

$$dW(t) = \xi(t)dt.$$

Esta última expresión es en el sentido de funciones generalizadas y no en el sentido usual de ecuaciones diferenciales ordinarias, pues el proceso de Wiener $W(t)$ no es diferenciable en ningún punto.

2.2. Señales y Sistemas

Definición 8. Una señal $f(t)$ es una función medible, que realiza una transformación de \mathbb{R} a \mathbb{R}^n . Es decir,

$$f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Definición 9. La norma 2 de una señal $f(t)$ en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$, está dada por

$$\|f(t)\|_{2,[0,t_f]} = \left\{ \int_0^{t_f} f^T(t)f(t)dt \right\}^{1/2}$$

Si $t_f = \infty$ la norma 2 para $f(t)$ es

$$\|f(t)\|_{2,[0,\infty)} = \left\{ \int_0^{\infty} f^T(t)f(t)dt \right\}^{1/2}$$

La norma 2 sirve para medir la energía de una señal.

Definición 10. \mathcal{L}_2 se define como el espacio 2 de Lebesgue, el cual representa el conjunto de señales $f(t)$ con energía finita. Si \mathcal{L}_2 se define en el intervalo $[0, t_f]$, se representa como

$$\mathcal{L}_2[0, t_f] = \{f(t) \in S_+ : \|f\|_{2,[0,t_f]} < \infty\},$$

donde $S_+ = \{f(t) : f(t) = 0 \text{ para todo } t < 0\}$.

Una señal $f(t)$ está en $\mathcal{L}_2[t_0, t_f]$ si y sólo si la señal desplazada en el tiempo $g(t) = f(t + t_0)$ está en $\mathcal{L}_2[0, t_f - t_0]$.

El espacio de Lebesgue en un intervalo infinito es definido por

$$\mathcal{L}_2[0, \infty) = \{f(t) \in S_+ : \|f\|_{2,[0,\infty)} < \infty\}.$$

Definición 11. Un sistema es una transformación desde el espacio de la señal de entrada al espacio de la señal de salida:

$$\begin{aligned} G : \mathcal{S}_1 &\rightarrow \mathcal{S}_2 \\ : u &\rightarrow y = Gu. \end{aligned}$$

Definición 12. Un sistema se dice que es casual si la salida y hasta el tiempo t_1 sólo depende de la entrada u hasta t_1 , para cada t_1 .

Definición 13. Si la respuesta a la entrada desplazada en el tiempo $u(t-t_1)$ es $y(t-t_1)$, el sistema se llama invariante en el tiempo.

Definición 14. Un sistema G es estable si $y = Gu$ está en $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ siempre que u esté en $\mathcal{L}_2[0, \infty)$.

Definición 15. Un sistema $G : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ es lineal si

$$G(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha G u_1 + \beta G u_2$$

para todo escalar α, β y para toda $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_1$.

Definición 16. La norma infinito de un sistema G está dado por el supremo

$$\|G_{yu}\|_{\infty} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}.$$

Considere el sistema lineal en variables de estado:

$$\begin{aligned} \mathbf{SL} : \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), & t &\in [0, t_f] \end{aligned}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es la salida medida y $u(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada de control. Se supone que las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones continuas acotadas de dimensión apropiada.

Definición 17. El sistema (SL) se dice que es estabilizable si existe una función acotada $K(t)$ tal que el sistema $\dot{x}(t) = (A - BK)(t)x(t)$ es exponencialmente estable. Se usará la terminología $(A(t), B(t))$ *estabilizable* para denotar esta propiedad.

Definición 18. El sistema (SL) se dice que es detectable si existe una función acotada $L(t)$ tal que el sistema $\dot{x}(t) = (A - LC)(t)x(t)$ es exponencialmente estable. Se usará la terminología $(C(t), A(t))$ *detectable* para denotar esta propiedad.

Definición 19. El sistema adjunto asociado a (SL) se define como

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A^T(t)\tilde{x}(t) + C^T(t)\tilde{y}(t), \quad \tilde{x}(t_0)$$

$$\tilde{u}(t) = B^T(t)\tilde{x}(t) + D^T(t)\tilde{y}(t).$$

Una propiedad importante del sistema adjunto y SL, es que la norma dos e infinito para ambos sistemas es igual.

2.3. Filtro de Kalman-Bucy

Planteamiento del Problema

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo, con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ continuas por la derecha y crecientes, y sea $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos de Wiener independientes, con media cero y covarianza unitaria. Considérese el proceso estocástico $[X^T(t), Y^T(t)]^T$ descrito por las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + B(t)dW_1(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.1)$$

$$dY_1(t) = C(t)X(t)dt + D(t)dW_2(t), \quad (2.2)$$

donde $X(t) \in \mathbb{R}^n$ es el proceso estocástico no observable, $Y_1(t) \in \mathbb{R}^m$ es el proceso observable, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ matrices conocidas variantes en el tiempo y de dimensión adecuada. La condición inicial $X(t_0)$ es una variable aleatoria Gaussiana, tal que $X(t_0)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ son independientes.

Considerando la relación entre un proceso de Wiener y el ruido blanco, el sistema (2.1)-(2.2) se representa de forma equivalente (ver, [13], Sección 5.1) por:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)\Psi_1(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.3)$$

$$\bar{Y}_1(t) = C(t)X(t) + D(t)\Psi_2(t), \quad (2.4)$$

donde $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son procesos de ruido blanco Gaussiano.

El problema de estimación se centra en determinar el estimado $\hat{X}(t)$ del proceso estocástico $X(t)$, que minimice la esperanza condicional del proceso estocástico $(X(t) - \hat{X}(t))^T(X(t) - \hat{X}(t))$ con respecto a la σ -álgebra F_t generada por los valores del proceso observable $Y = \{Y_1(s), t_0 \leq s \leq t\}$, en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$. Es decir, minimizar

$$E[(X(t) - \hat{X}(t))^T(X(t) - \hat{X}(t)) \mid F_t^Y] \quad (2.5)$$

en cada instante de tiempo t .

La Figura 2.1 muestra a través de un diagrama a bloques, la interconexión de la planta (2.3)-(2.4) y el filtro que da solución al problema de estimación.

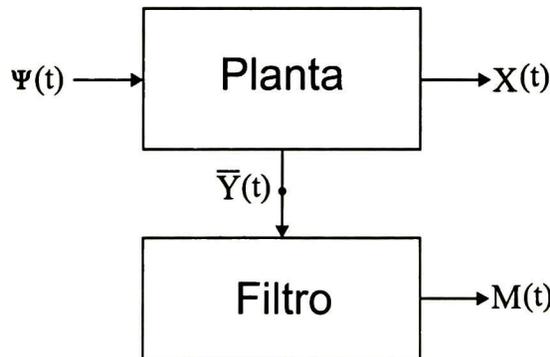


Figura 2.1: Configuración del filtro de varianza mínima.

Solución

De acuerdo a ([26], Subsección 5.10.2) el estimado $\hat{X}(t)$ que minimiza ecuación (2.5), está dado por

$$\hat{X}(t) = E[X(t) | F_t^Y], \quad (2.6)$$

que es el estimado óptimo de $X(t)$ y se representará con $M(t)$. La efectividad del estimador es caracterizada por la varianza condicional del error de estimación

$$P(t) = E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))^T | F_t^Y]. \quad (2.7)$$

La solución propuesta se basa en las fórmulas diferenciales de Itô para la esperanza condicional $E[X(t) | F_t^Y]$ y su varianza $P(t)$ [26], tal como se muestra a continuación.

La diferencial estocástica del estimado óptimo $M(t)$, está dada por

$$\begin{aligned} dM(t) = & E[A(t)X(t)|F_t^Y]dt + E[X(t)(C(t)X(t) - E[C(t)X(t)|F_t^Y])^T | F_t^Y] \\ & \times (D(t)D^T(t))^{-1}(dY_1(t) - E[C(t)X(t)|F_t^Y]dt). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta (2.7) y reemplazando $E[X(t)|F_t^Y]$ por el estimado óptimo, la ecuación (2.8) se simplifica a

$$dM(t) = A(t)M(t)dt + P(t)C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C(t)M(t)dt), \quad (2.9)$$

con condición inicial $M(t_0) = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$.

En el caso de la varianza del error de estimación, la diferencial estocástica se define como

$$\begin{aligned} dP(t) = & \{E[(X(t) - M(t))(A(t)X(t))^T | F_t^Y] \\ & + E[A(t)X(t)(X(t) - M(t))^T | F_t^Y] + B(t)B^T(t) \\ & - E[X(t)(C(t)X(t) - E[C(t)X(t)|F_t^Y])^T | F_t^Y](D(t)D^T(t))^{-1} \\ & \times E[(C(t)X(t) - E[C(t)X(t)|F_t^Y])X^T(t)|F_t^Y]\}dt \\ & + E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))(C(t)X(t) - E[C(t)X(t)|F_t^Y])^T | F_t^Y] \\ & \times (D(t)D^T(t))^{-1}(dY_1(t) - E[C(t)X(t)|F_t^Y]dt). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aplicando la definición de $M(t)$ y $P(t)$ en la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} dP(t) = & \{P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + B(t)B^T(t) \\ & - P(t)C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}C(t)P^T(t)\}dt \\ & + E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))^T | F_t^Y](D(t)D^T(t))^{-1} \\ & \times (dY_1(t) - C(t)M(t)dt). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dado que (2.11) aún depende de la variable a estimar $X(t)$, se lleva a cabo el siguiente análisis. Sabiendo que el proceso de observación es lineal, el proceso de innovación $w(t) = Y_1(t) - \int_{t_0}^t C(t)M(t)dt = \int_{t_0}^t C(t)X(t)dt + \int_{t_0}^t D(t)dW_1(t) - \int_{t_0}^t C(t)M(t)dt = \int_{t_0}^t C(t)(X(t) - M(t))dt +$

$\int_{t_0}^t D(t)dW_1$ es un proceso de Wiener con respecto a las observaciones (ver, por ejemplo, [20], fórmula 31 y el párrafo siguiente). Por lo tanto, la variable aleatoria $C(t)(X(t) - M(t))$ es condicionalmente Gaussiana con respecto a las observaciones para todo $t \geq t_0$. Si la matriz $C^{-1}(t)$ existe, entonces la variable aleatoria $X(t) - M(t)$ también es condicionalmente Gaussiana para todo $t \geq t_0$ ([25], Sección 5.3). Por lo anterior, se establecen las siguientes consideraciones:

- El tercer momento $E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))^T | F_t^Y]$ de $X(t) - M(t)$ es igual a cero.
- Todos los momentos condicionales impares de $X(t) - M(t)$ son igual a cero: $E[(X(t) - M(t)) | F_t^Y] = E[(X(t) - M(t))^3 | F_t^Y] = \dots = 0$.
- Todos los momentos condicionales pares de $X(t) - M(t)$ son diferentes a cero y son función de $P(t)$: $E[(X(t) - M(t))^2 | F_t^Y] = P(t)$, $E[(X(t) - M(t))^4 | F_t^Y] = 3P^2(t)$, $E[(X(t) - M(t))^6 | F_t^Y] = 15P^3(t), \dots$ etc.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, la ecuación diferencial para la varianza en función de $P(t)$ y $M(t)$, viene dada por

$$dP(t) = (P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + B(t)B^T(t) \quad (2.12)$$

$$- P(t)C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}C(t)P(t))dt,$$

con condición inicial $P(t_0) = E[(X(t_0) - M(t_0))(X(t_0) - M(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Las ecuación (2.9) y (2.12) conforman el filtro óptimo, mejor conocido como filtro de Kalman-Bucy [16].

La matriz $C(t)$ no necesariamente debe ser invertible para obtener las ecuaciones de filtrado. Por otro lado, $D(t)D^T(t)$ debe ser invertible.

Considerando las ecuaciones (2.3)-(2.4), la dinámica del estimado óptimo está dada por:

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t) + P(t)C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}(\bar{Y}_1(t) - C(t)M(t)), \quad (2.13)$$

con condición inicial $M(t_0) = M_0 = E[X(t_0) | F_{t_0}^Y]$.

En la Figura 2.1 muestra de forma esquemática el filtro de Kalman-Bucy, utilizando la representación equivalente (ecuación 2.13).

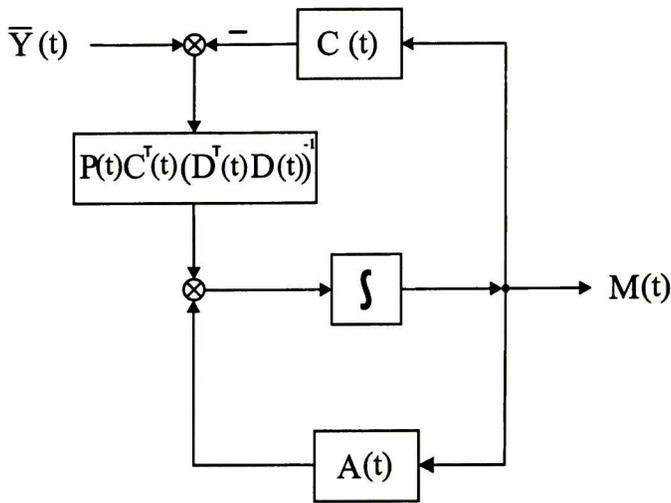


Figura 2.2: Filtro de Kalman-Bucy.

2.4. Control H_∞ de Información Completa

Consiste en un controlador que minimice la norma infinito, en un sistema en lazo cerrado, de la perturbación entrante a la señal controlada, suponiendo que los estados del sistema y las perturbaciones están disponibles para la retroalimentación, como se muestra en la Figura 2.3.

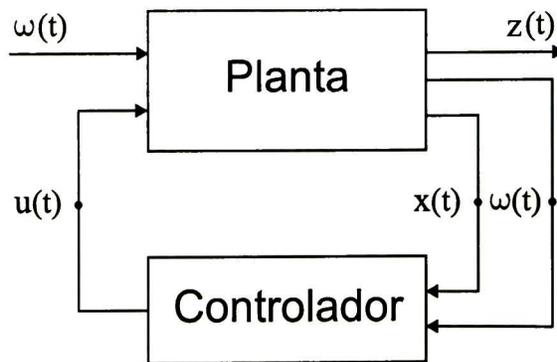


Figura 2.3: Configuración del control H_∞ de información completa.

Formulación del Problema

Considérese el sistema a controlar, representado en variables de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\omega(t); \quad x(0) = 0 \quad (2.14)$$

$$z(t) = G(t)x(t) + H(t)u(t), \quad (2.15)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ es la señal por controlar, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada de control y $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s[0, t_f]$ es la perturbación de energía finita. Las matrices $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $G(t)$ y $H(t)$ son conocidas variantes en el tiempo y de dimensión adecuada.

Suponiendo que se cumple las siguientes condiciones, en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$:

$$1. H^T(t)G(t) = 0.$$

$$2. H^T(t)H(t) = I_l.$$

El problema de control H_∞ consiste en encontrar un controlador por retroalimentación, utilizando el estado y la perturbación, que minimice la norma infinito del sistema en lazo cerrado ($G_{z\omega}: \omega \rightarrow z = G_{z\omega}\omega$):

$$\|G_{z\omega}\|_{\infty, [0, t_f]} = \sup_{\|\omega(t)\|_{2, [0, t_f]} \neq 0} \frac{\|z(t)\|_{2, [0, t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2, [0, t_f]}}. \quad (2.16)$$

El argumento t en las señales y matrices se omite para simplificar la notación, en algunas partes de lo que resta de esta sección, sin perder generalidad.

Solución

El determinar un controlador que minimice (2.16) implica dar solución a un problema de optimización, el cual genera un controlador que minimiza una función de costo.

Para que el problema de optimización tenga solución tratable, es necesario una función de costo cuadrática, que puede obtenerse al considerar una cota sobre (2.16):

$$\|G_{z\omega}\|_{\infty, [0, t_f]} = \sup_{\|\omega\|_{2, [0, t_f]} \neq 0} \frac{\|z\|_{2, [0, t_f]}}{\|\omega\|_{2, [0, t_f]}} < \gamma, \quad (2.17)$$

donde γ define un *nivel de atenuación*. Un controlador que cumple con esta cota se llama controlador H_∞ sub-óptimo. Si el controlador sub-óptimo cumple (2.17), también cumple con:

$$\|G_{z\omega}\|_{\infty, [0, t_f]}^2 = \sup_{\|\omega\|_{2, [0, t_f]} \neq 0} \frac{\|z\|_{2, [0, t_f]}^2}{\|\omega\|_{2, [0, t_f]}^2} < \gamma^2 \quad (2.18)$$

Para que el supremo cumpla con la desigualdad (2.18), el argumento de éste se acota en un valor menor que γ^2 ; es decir, para un ε ,

$$\frac{\|z\|_{2, [0, t_f]}^2}{\|\omega\|_{2, [0, t_f]}^2} \leq \gamma^2 - \varepsilon^2.$$

Multiplicando ambos lados por el denominador e intercambiando términos, la desigualdad anterior obtiene la siguiente forma

$$\|z\|_{2, [0, t_f]}^2 - \gamma^2 \|\omega\|_{2, [0, t_f]}^2 \leq -\varepsilon^2 \|\omega\|_{2, [0, t_f]}^2. \quad (2.19)$$

Cumpliendo con la desigualdad (2.19), para toda perturbación y un ε , se asegura que la norma infinito del sistema en lazo cerrado es menor al nivel de atenuación γ . Por lo tanto, la parte izquierda de (2.19) es usada como la función objetivo a minimizar:

$$J_\gamma(x, u, \omega) = \|z\|_{2,[0,t_f]}^2 - \gamma^2 \|\omega\|_{2,[0,t_f]}^2. \quad (2.20)$$

El criterio a minimizar (2.20) representa una función cuadrática Bolza-Meyer modificada, ya que se agrega el término de atenuación con signo negativo. Determinar un controlador que minimice (2.20), en presencia de la perturbación en el peor de los casos, representa un problema de optimización con restricciones. Para poder resolver el problema por medio de variaciones, es necesario aplicar el método de multiplicadores de Lagrange presentado en el Apéndice A.2.

El juego diferencial (ver Apéndice A.3) especificado por la función objetivo (2.20) y la dinámica del juego (2.14) generan un problema mini-max con restricciones. Un nuevo problema de optimización sin restricciones de orden mayor, consiste en encontrar las condiciones, tal que se minimice la función de costo aumentada

$$J_{a,\gamma}(u, \omega, p) = J_\gamma(x, u, \omega) + 2 \int_0^{t_f} p^T (Ax + B_1 u + B_2 \omega - \dot{x}) dt, \quad (2.21)$$

donde p es el multiplicador de Lagrange. Notese que la dinámica del sistema (2.14) se agrega para formar parte de la condición que se debe cumplir al resolver el problema de optimización sin restricciones. El factor 2 que multiplica la ecuación de restricción se usa sólo para simplificar los resultados finales.

De forma equivalente, la función objetivo aumentada se presenta en términos de sus componentes elementales como

$$J_{a,\gamma}(u, \omega, p) = \int_0^{t_f} [x^T G^T G x + u^T u - \gamma^2 \omega^T \omega + 2p^T (Ax + B_1 u + B_2 \omega - \dot{x})] dt. \quad (2.22)$$

Una condición necesaria para tener un punto silla es que la variación de (2.22) sea cero (ver Apéndice A.3). La variación se obtiene al calcular el incremento de (2.22) (ver Apéndice A.1), resultando

$$\begin{aligned} \Delta J_{a,\gamma}(u, \omega, p, \delta u, \delta \omega, \delta p) &= J_{a,\gamma}(u + \delta u, \omega + \delta \omega, p + \delta p) - J_{a,\gamma}(u, \omega, p) \\ &= \int_0^{t_f} \{ (x + \delta x)^T G^T G (x + \delta x) + (u + \delta u)^T (u + \delta u) - \gamma^2 (\omega + \delta \omega)^T (\omega + \delta \omega) \\ &\quad + 2(p + \delta p)^T [A(x + \delta x) + B_1(u + \delta u) + B_2(\omega + \delta \omega) - (\dot{x} + \delta \dot{x})] \} dt \\ &\quad - \int_0^{t_f} [x^T G^T G x + u^T u - \gamma^2 \omega^T \omega + 2p^T (Ax + B_1 u + B_2 \omega - \dot{x})] dt. \end{aligned}$$

Expandiendo la expresión anterior y agrupando términos, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta J_{a,\gamma} &= \int_0^{t_f} [\delta x^T G^T G \delta x + \delta u^T \delta u - \gamma^2 \delta \omega^T \delta \omega \\ &\quad + 2\delta p^T (A\delta x + B_1\delta u + B_2\delta \omega - \delta \dot{x}) + 2(x^T G^T G + p^T A)\delta x + 2(u^T + p^T B_1)\delta u \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$-2(\gamma^2\omega^T - p^T B_2)\delta\omega + 2\delta p^T(Ax + B_1u + B_2\omega - \dot{x}) - 2p^T\delta\dot{x}dt.$$

Aplicando integración por partes al último término de (2.23), se llega a:

$$\int_0^t p^T\delta\dot{x}dt = p^T(t_f)\delta x(t_f) - p^T(0)\delta x(0) - \int_0^{t_f} \dot{p}^T\delta xdt, \quad (2.24)$$

el cual será usado para eliminar la variación de la derivada del estado. Además, como la condición inicial del estado está fija, $\delta x(0)$ es cero, sustituyendo esta condición en (2.24) se puede calcular la variación de la función de costo aumentada.

Finalmente, la variación es

$$\begin{aligned} \delta J_{a,\gamma} = & -2p^T(t_f)\delta x(t_f) + 2 \int_0^{t_f} [(x^T G^T G + p^T A + \dot{p}^T)\delta x + (u^T + p^T B_1)\delta u \\ & - (\delta^2\omega^T - p^T B_2)\delta\omega + \delta p^T(Ax + B_1u + B_2\omega - \dot{x})]dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Igualando a cero la variación, se generan las condiciones necesarias para que x , p , u , y ω , sean un punto silla:

$$p(t_f) = 0 \quad (2.26a)$$

$$\dot{p} = -G^T Gx - A^T p \quad (2.26b)$$

$$u = -B_1^T p \quad (2.26c)$$

$$\omega = \gamma^{-2} B_2^T p \quad (2.26d)$$

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2\omega. \quad (2.26e)$$

Sustituyendo (2.26c) y (2.26d) en (2.26e) y combinando la ecuación resultante con (2.26b) se formula el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_1 B_1^T + \gamma^{-2} B_2 B_2^T \\ -G^T G & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

el cual representa el sistema Hamiltoniano asociado al problema de control H_∞ de información completa.

El control H_∞ sub-óptimo se obtiene al resolver (2.27) sujeto a (2.26a), cuya solución en t_f , dada una condición inicial en t , es

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f - t) & \Phi_{12}(t_f - t) \\ \Phi_{21}(t_f - t) & \Phi_{22}(t_f - t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

donde $\Phi(t_f - t)$ representa la matriz de transición de estado de (2.27)

Sustituyendo la condición terminal en (2.28), se resuelve para $p(t)$:

$$p(t) = -\Phi^{-1}(t_f - t)\Phi(t_f - t)x(t) = Q(t)x(t), \quad (2.29)$$

donde $Q(t)$ es la matriz de proporcionalidad entre $p(t)$ y $x(t)$, la cual se expresa como la solución a la ecuación diferencial de Riccati

$$\dot{Q} = -QA - A^T Q - G^T G + Q(B_1 B_1^T - \gamma^{-2} B_2 B_2^T)Q, \quad (2.30)$$

con condición terminal $Q(t_f) = 0$.

El control H_∞ sub-óptimo por lo tanto se obtiene de (2.26c) y (2.29), como:

$$u = -B_1^T Qx. \quad (2.31)$$

Del análisis anterior, la ley de control y sus condiciones de existencia se resumen en el teorema siguiente.

TEOREMA 1: *Para el sistema (2.14, 2.15), donde $x(t)$ y $\omega(t)$ son medibles, el control H_∞ central sub-óptimo que cumple (2.17), existe si y sólo si la ecuación diferencial de Riccati*

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -Q(t)A(t) - A^T(t)Q(t) - G^T(t)G(t) \\ & + Q(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))Q(t), \quad Q(t_f) = 0 \end{aligned}$$

tiene solución en el intervalo $[0, t_f]$. En este caso, la ley de control es

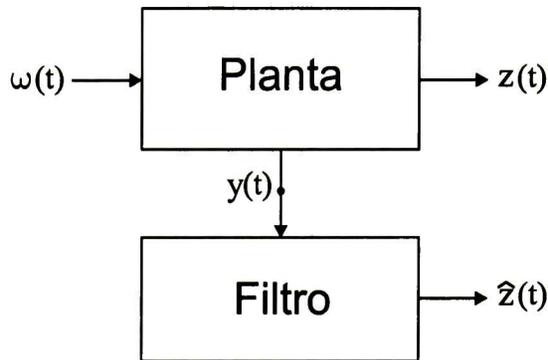
$$u(t) = -B_1^T(t)Q(t)x(t).$$

Es importante señalar que siempre y cuando el controlador (2.31) exista, se puede generar una familia de controladores que satisfagan (2.17). El controlador presentado en esta sección se conoce frecuentemente como controlador central. Los detalles para la síntesis de la familia de controladores se encuentra en ([9], página 232), y en ([14], página 431).

Finalmente, si el nivel de atenuación γ se disminuye hasta un valor tal que ya no exista un controlador sub-óptimo superior, se dice que el controlador es óptimo.

2.5. Filtro H_∞

En esta sección se presenta la síntesis del filtro H_∞ , como el dual del control H_∞ de información completa, tal que la ganancia de energía entre la perturbación y el error de estimación sea menor un nivel específico. El problema de filtrado, por medio de un diagrama a bloques, se presenta en la Figura 2.4.

Figura 2.4: Configuración del filtro H_∞ .

Formulación del Problema

Considérese el sistema en variables de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t), \quad x(0) = 0; \quad (2.32)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)\omega(t), \quad (2.33)$$

$$z(t) = G(t)x(t), \quad (2.34)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es la salida medible, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ es la señal por estimar y $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s[0, t_f]$ es la perturbación. Las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ y $G(t)$ son conocidas y de dimensión adecuada.

Para el sistema (2.32-2.34), se consideran las siguientes suposiciones en el intervalo $[0, t_f]$:

1. $D(t)B^T(t) = 0$.
2. $D(t)D^T(t) = I_m$.

El problema del filtrado H_∞ consiste en encontrar un estimado $\hat{z}(t) = G\hat{x}(t)$ de $z(t)$, que minimice la ganancia en el peor de los casos entre la perturbación y el error de estimación $e(t) = Gx(t) - \hat{z}(t)$:

$$\|G_{e\omega}\|_{\infty, [0, t_f]} = \sup_{\omega(t) \neq 0} \frac{\|e(t)\|_{2, [0, t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2, [0, t_f]}}. \quad (2.35)$$

Solución

El problema de filtrado se resuelve utilizando la dualidad entre filtrado y control. Por lo tanto, se usa el sistema adjunto para convertir el problema de filtrado en un problema de control equivalente. Los resultados obtenidos en la sección previa correspondientes al control H_∞ de información completa, se utilizan para resolver el problema de filtrado. Agregando el error de estimación al sistema (2.32-2.34), se tiene

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\omega(t), \quad x(0) = 0; \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}y(t) &= C(t)x(t) + D(t)\omega(t), \\e(t) &= G(t)x(t) - \hat{z}(t),\end{aligned}$$

donde $e(t)$ representa la nueva señal por estimar.

El sistema adjunto correspondiente a (2.36), viene dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(\tau) &= A^T(\tau)\tilde{x}(\tau) + C^T(\tau)\tilde{y}(\tau) + G^T(\tau)\tilde{e}(\tau), \quad \tilde{x}(0) = 0; \\ \tilde{\omega}(\tau) &= B^T(\tau)\tilde{x}(\tau) + D^T(\tau)\tilde{y}(\tau), \\ \tilde{z}(\tau) &= -\tilde{e}(\tau),\end{aligned}\tag{2.37}$$

el cual representa un sistema a controlar, donde $\tilde{x}(\tau)$ representa el estado del sistema, $\tilde{y}(\tau)$ representa la entrada de control, $\tilde{e}(\tau)$ representa la perturbación, $\tilde{z}(\tau)$ representa la salida medible y $\tilde{\omega}(\tau)$ representa la señal por controlar que se desea que se mantenga pequeña.

La variable de tiempo en el sistema adjunto, se define como $\tau = t_f - t$, el cual reforza la idea de que el sistema adjunto es el inverso del sistema original.

Considerando las suposiciones 1, 2 y 3 para el sistema (2.32-2.34), el sistema adjunto está sujeto a:

- $D(t)(\tau)B^T(\tau) = 0.$
- $D(t)(\tau)D^T(\tau) = I_m.$

Se puede observar en (2.37) que sólo se tiene acceso a la perturbación $\tilde{e}(\tau)$. Sin embargo, para poder aplicar los resultados del control H_∞ de información completa es necesario conocer $\tilde{x}(\tau)$.

Como alternativa, se crea un estimador a partir de (2.37)

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = A^T(\tau)\hat{x}(\tau) + C^T(\tau)\tilde{y}(\tau) + G^T(\tau)\tilde{e}(\tau), \quad \hat{x} = 0\tag{2.38}$$

donde $\tilde{y}(\tau)$ es el control H_∞ sub-óptimo

$$\tilde{y}(\tau) = -C(\tau)\tilde{Q}(\tau)\hat{x}(\tau).\tag{2.39}$$

Combinando (2.38) y (2.39), se tiene

$$\dot{\hat{x}}(\tau) = [A^T(\tau) - C^T(\tau)C(\tau)\tilde{Q}(\tau)]\hat{x} + G^T(\tau)\tilde{e}(\tau),\tag{2.40}$$

donde $\tilde{Q}(\tau)$ es la solución a la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{Q}}(\tau) &= -\tilde{Q}(\tau)A^T(\tau) - A(\tau)\tilde{Q}(\tau) - B(\tau)B^T(\tau) + \tilde{Q}(\tau)[C^T(\tau)C(\tau) - \gamma^{-2}G^T(\tau)G(\tau)]\tilde{Q}(\tau), \\ &\tilde{Q}(t_f) = 0.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Con las ecuaciones (2.39-2.41) el controlador queda completo. Por lo tanto se calcula el filtro sub-óptimo, que viene dado por el sistema adjunto de (2.39-2.41), tal como se presenta a continuación.

TEOREMA 2.1: Para el sistema (2.32-2.34), el filtro H_∞ central sub-óptimo que cumple (2.35) existe si y sólo si la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= S(t)A^T(t) + A(t)S(t) + B(t)B^T(t) - S(t)[C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t)]S(t), \\ S(0) &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución en el intervalo $[0, t_f]$. En este caso, el filtro está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + S(t)C^T(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(t) &= G(t)\hat{x}(t). \end{aligned}$$

Si la condición inicial del sistema (2.32) se desconoce, el filtro H_∞ se modifica tal como se muestra en el teorema siguiente.

TEOREMA 2.2: Para el sistema (2.32-2.34) con condición inicial desconocida x_0 , el filtro H_∞ central sub-óptimo que cumple

$$\sup \left[\frac{\|z(t) - \hat{z}(t)\|_{2,[0,t_f]}^2}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 + x_0^T R x_0} \right]^{1/2} < \gamma,$$

existe si y sólo si la ecuación diferencial de Riccati

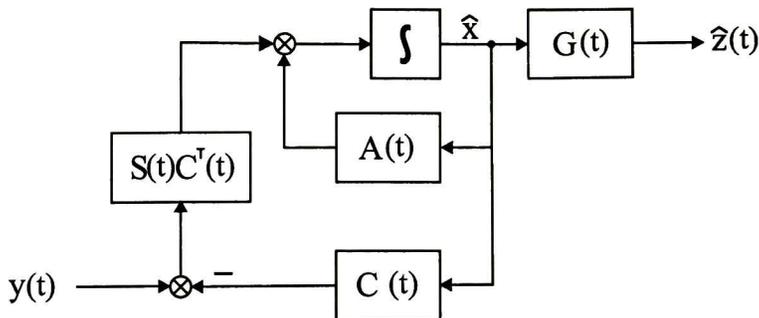
$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= S(t)A^T(t) + A(t)S(t) + B(t)B^T(t) - S(t)[C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t)]S(t), \\ S(0) &= R^{-1} \quad R = R^T > 0 \end{aligned}$$

tiene solución definida positiva en el intervalo $[0, t_f]$. En este caso, el filtro está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + S(t)C^T(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(t) &= G(t)\hat{x}(t). \end{aligned}$$

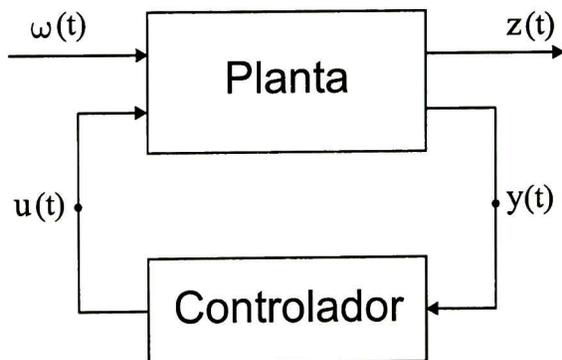
El parámetro R en Teorema 2.1 indica aproximadamente que tan cierto puede ser que $x(0)$ sea cero. Si se está seguro que la condición inicial es cero, entonces R toma un valor grande y viceversa.

En la Figura 2.4 se presenta el filtro resultante.

Figura 2.5: Filtro H_∞ central sub-óptimo.

2.6. Control H_∞ por Retroalimentación

El control H_∞ por retroalimentación utiliza una medición, que consiste de los estados del sistema afectados por perturbaciones, para generar el control tal como se muestra en la Figura 2.6. Este controlador es resultado de combinar el control H_∞ de información completa y el filtro H_∞ .

Figura 2.6: Configuración del control H_∞ por retroalimentación.

Formulación del Problema

El problema de control H_∞ sub-óptimo se obtiene considerando el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\omega(t), \quad x(0) = 0; \quad (2.42a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)\omega(t); \quad (2.42b)$$

$$z(t) = G(t)x(t) + H(t)u(t), \quad (2.42c)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es la salida medible, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ es la señal por controlar, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada de control y $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s[0, t_f]$ es la perturbación. Las matrices $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $G(t)$ y $H(t)$ son conocidas y de dimensión adecuada.

Para el sistema (2.42), se suponen las siguientes condiciones, en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$:

$$1. H^T(t)H(t) = I_l \text{ y } H^T(t)G(t) = 0.$$

$$2. D(t)D^T(t) = I_m \text{ y } D(t)B_2^T(t) = 0.$$

El objetivo de control es sintetizar un controlador por retroalimentación, tal que la norma infinito del sistema en lazo cerrado ($G_{z\omega}:\omega \rightarrow z = G_{z\omega}\omega$) se minimice, es decir

$$\|G_{z\omega}\|_{\infty,[0,t_f]} = \sup_{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]} \neq 0} \frac{\|z(t)\|_{2,[0,t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}} \quad (2.43)$$

debe ser minimizado.

Solución

El controlado H_∞ sub-óptimo se sintetiza al combinar los resultados obtenidos en el control H_∞ de información completa y en filtro H_∞ . Para lo cual, se supone que el controlador de información completa existe.

Estableciendo una cota γ para (2.6), se obtiene un controlador sub-óptimo, el cual debe minimizar

$$J_\gamma = \|z(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 - \gamma^2 \|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}^2, \quad (2.44)$$

de forma equivalente (ver [4], Sección 9.2.3)

$$J_\gamma = \|u(t) + B_1^T(t)Q(t)x(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 - \gamma^2 \|\omega(t) - \gamma^{-2}B_2^T(t)Q(t)x(t)\|_{2,[0,t_f]}^2. \quad (2.45)$$

Reescribiendo (2.45) en la forma de (2.6), se tiene

$$\|G\|_{\infty,[0,t_f]} = \sup_{(\omega(t) - \gamma^{-2}B_2^T(t)Q(t)x(t)) \neq 0} \frac{\|u(t) + B_1^T(t)Q(t)x(t)\|_{2,[0,t_f]}}{\|\omega(t) - \gamma^{-2}B_2^T(t)Q(t)x(t)\|_{2,[0,t_f]}} < \gamma. \quad (2.46)$$

Por lo tanto, el controlador que cumpla con (2.46) también cumple con (2.6) y de esta manera es la solución del problema de control H_∞ por retroalimentación de salida.

De ecuación (2.46), se puede notar que si

$$u(t) = -B_1^T(t)Q(t)x(t), \quad (2.47)$$

se cumple (2.46). Sin embargo, como no se conoce x es necesario estimarlo, para lo cual se formula el siguiente problema: Estimar $u(t)$ tal que cumpla (2.46), dado que se conoce $y(t)$ de (2.42).

Modificando el sistema (2.42), se tiene un nuevo sistema que se utiliza para resolver un problema de filtrado, como alternativa al problema de control. Si se agrega y se resta $\gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t)x(t)$ en la ecuación (2.42a), se tiene

$$\dot{x}(t) = (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t))x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\Delta_\omega(t), \quad x(0) = 0, \quad (2.48)$$

donde $\Delta_\omega(t) = \omega(t) - \gamma^{-2}B_2^T(t)Q(t)x(t)$.

Con respecto a ecuación (2.42b), se agrega el término $-\gamma^{-2}D(t)B_2^T(t)Q(t)x(t)$, el cual no modifica (2.42) ya que $D(t)B_2^T(t) = 0$:

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)\Delta_\omega(t), \quad (2.49)$$

con la finalidad de que $y(t)$ dependa de $x(t)$ y $\Delta_\omega(t)$.

La señal a estimar en este caso es

$$\bar{z}(t) = -B_1^T(t)Q(t)x(t). \quad (2.50)$$

Utilizando las nuevas variables del sistema (2.48-2.50) la norma infinito a minimizar es

$$\|G_\Delta\|_{\infty,[0,t_f]} = \sup_{\|\Delta_\omega(t)\|_{2,[0,t_f]} \neq 0} \frac{\|\bar{z}(t) - \hat{\bar{z}}(t)\|_{2,[0,t_f]}}{\|\Delta_\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}} < \gamma. \quad (2.51)$$

Resolviendo el problema de filtrado descrito por (2.48-2.51) de acuerdo al Teorema 2.1, el filtro H_∞ sub-óptimo es

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t))\hat{x}(t) + B_1(t)u(t) + \hat{S}(t)C^T(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \quad (2.52)$$

$$\hat{z}(t) = \hat{u}(t) = -B_1^T(t)Q(t)\hat{x}(t)$$

donde $\hat{S}(t)$ es la solución a la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{\hat{S}}(t) &= \hat{S}(t)(A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t))^T + (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t))\hat{S}(t) \\ &+ B_2(t)B_2^T(t) - \hat{S}(t)(C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}Q(t)B_1(t)B_1^T(t)Q(t))\hat{S}(t), \\ \hat{S}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

El estimador obtenido es usado como el controlador por retroalimentación en el sistema (2.42), a fin de mantener (2.6) en un valor inferior del nivel de atenuación γ . Sustituyendo $u = \hat{u}$ en (2.52) y sabiendo que

$$\hat{S}(t) = S(t)(I_n - \gamma^{-2}Q(t)S(t))^{-1} \quad (2.54)$$

es la solución de (2.53). El controlador resultante es

$$u(t) = -B_1^T(t)Q(t)\hat{x}(t), \quad (2.55)$$

tal que $\hat{x}(t)$, está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t) - B_1(t)B_1^T(t)Q(t))\hat{x}(t) \\ &+ (I_n - \gamma^{-2}S(t)Q(t))^{-1}S(t)C^T(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde $Q(t)$ y $S(t)$ son las soluciones a las ecuaciones diferenciales de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = -Q(t)A(t) - A^T(t)Q(t) + Q(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))Q(t) - G^T(t)G(t), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
Q(t_f) &= 0; \\
\dot{S}(t) &= A(t)S(t) + S(t)A^T(t) - S(t)(C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t) + B_2(t)B_2^T(t), \quad (2.58) \\
S(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Del análisis presentado, el controlador y sus condiciones de existencia se resumen en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1: *Existe un controlador para el sistema (2.42) que cumple*

$$\sup_{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]} \neq 0} \frac{\|z(t)\|_{2,[0,t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}} < \gamma,$$

si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes, en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$:

- *La ecuación diferencial de Riccati*

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(t) &= -Q(t)A(t) - A^T(t)Q(t) - G^T(t)G(t) \\
&+ Q(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))Q(t), \quad Q(t_f) = 0
\end{aligned}$$

tiene solución.

- *La ecuación diferencial de Riccati*

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= A(t)S(t) + S(t)A^T(t) + B_2(t)B_2^T(t) \\
&- S(t)(C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \quad S(0) = 0
\end{aligned}$$

tiene solución.

El máximo valor propio de QS es menor que γ^2 .

En tal caso, el controlador H_∞ central sub-óptimo está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t) - B_1(t)B_1^T(t)Q(t))\hat{x} \\
&+ (I_n - \gamma^{-2}S(t)Q(t))^{-1}S(t)C^T(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \\
\hat{x}(0) &= 0
\end{aligned}$$

$$u(t) = -B_1^T(t)Q(t)\hat{x}(t).$$

Si la condición inicial del sistema (2.42a) se desconoce, el controlador presentado en Teorema 3.1 se modifica, tal como se muestra a continuación. Además, se incluye un peso Δ sobre el estado del sistema en el instante t_f .

TEOREMA 3.2: *Considérese el sistema (2.42), con condición inicial desconocida x_0 . Sean R y Δ matrices simétricas, tal que Δ es semidefinida positiva y R es definida positiva. Un controlador H_∞ en promedio cuadrático que cumple*

$$\sup \left[\frac{\|z(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 + x^T(t_f)\Delta x(t_f)}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 + x_0^T R x_0} \right]^{1/2} < \gamma,$$

existe si y sólo si, en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$,

- Existe una función matricial simétrica $Q(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) - G^T(t)G(t) \\ & + Q(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))Q(t), \quad Q(t_f) = \Delta \end{aligned}$$

$$\text{y } Q(0) < \gamma^2 R.$$

- Existe una función matricial simétrica $S(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & A(t)S(t) + S(t)A^T(t) + B_2(t)B_2^T(t) - S(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \\ & S(t_0) = R^{-1} \end{aligned}$$

- $\rho(Q(t)S(t)) < \gamma^2$.

En tal caso, el controlador H_∞ central sub-óptimo está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t) - B_1(t)B_1^T(t)Q(t))\hat{x} \\ & + (I_n - \gamma^{-2}S(t)Q(t))^{-1}S(t)C^T(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \\ & \hat{x}(0) = 0 \end{aligned}$$

$$u(t) = -B_1^T(t)Q(t)\hat{x}(t).$$

(En el teorema anterior $\rho(\cdot)$ representa el radio espectral.)

Por medio de un diagrama a bloques, el control H_∞ por retroalimentación se presenta en la Figura 2.7.

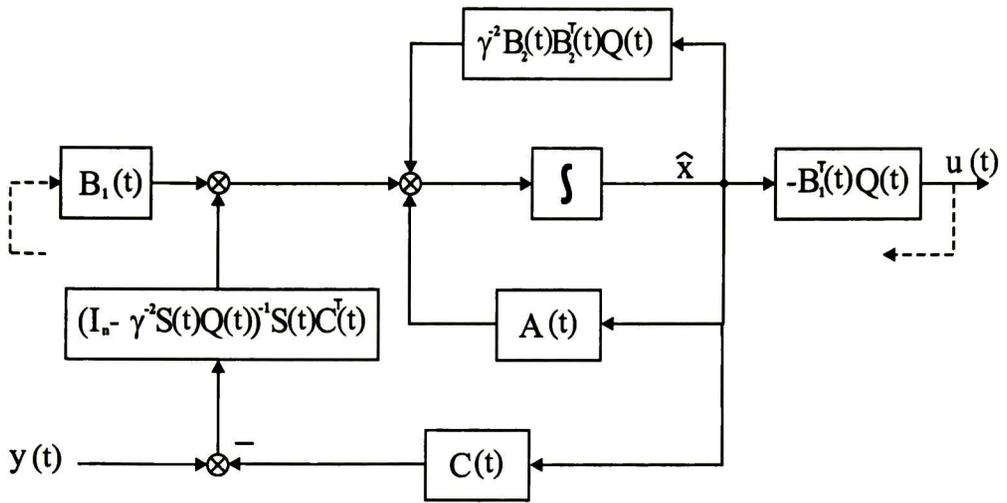


Figura 2.7: Control H_∞ central sub-óptimo.

Capítulo 3

Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático

En este capítulo se presenta la síntesis del filtro H_∞ en promedio cuadrático para sistemas lineales estocásticos afectados por perturbaciones de energía finita, que resulta de aplicar el filtro de Kalman-Bucy y el filtro H_∞ central sub-óptimo. Como resultado, se presenta el algoritmo de filtrado, así como las condiciones de existencia de éste. Finalmente, por medio de un ejemplo numérico se compara el desempeño entre el filtro H_∞ en promedio cuadrático y el filtro H_∞ central sub-óptimo en un sistema lineal estocástico.

3.1. Formulación del Problema

3.1.1. Sistema Lineal Estocástico

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ crecientes y continuas por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos de Wiener independientes con media cero y covarianza unitaria. Considérese el siguiente sistema estocástico lineal:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + B_1(t)\omega(t))dt + B_2(t)dW_1(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (3.1)$$

$$dY_1(t) = C_1(t)X(t)dt + D_1(t)dW_2(t) \quad (3.2)$$

$$Y_2(t) = C_2(t)X(t) + D_2(t)\omega(t) \quad (3.3)$$

$$Z(t) = G(t)X(t) \quad (3.4)$$

donde $X(t) \in \mathbb{R}^n$ es el proceso estocástico no medible, $Y_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ y $Y_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ son procesos medibles, $Z(t) \in \mathbb{R}^q$ es el proceso por estimar, $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s$ es la perturbación determinística, mientras que $A(t), B_1(t), B_2(t), C_1(t), C_2(t), D_1(t), D_2(t)$ y $G(t)$ son matrices de funciones continuas variantes en el tiempo, conocidas y de dimensión adecuada. La condición inicial $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria Gaussiana tal que $X(t_0), W_1(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ y $W_2(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ sean independientes.

La ecuación diferencial estocástica de Itô (3.1) y la ecuación de medición de Itô (3.2) se representan de forma equivalente (ver [13], Sección 5.1) como:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B_1(t)\omega(t) + B_2(t)\Psi_1(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (3.5)$$

y

$$\bar{Y}_1(t) = C_1(t)X(t) + D_1(t)\Psi_2(t), \quad (3.6)$$

respectivamente. Donde $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son procesos de ruido blanco Gaussiano.

3.1.2. Problemas de Filtrado

Problema 1: Para el sistema (3.1)-(3.4), sintetizar un filtro que obtenga el estimado $\hat{Z}(t)$ de $Z(t)$, tal que minimice

$$\sup_{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,t_f]} \neq 0} \frac{\|Z(t) - \hat{Z}(t)\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,t_f]}}, \quad (3.7)$$

para $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s[t_0, t_f]$.

Problema 2: Para el sistema (3.1)-(3.4), sintetizar un filtro estable que obtenga el estimado $\hat{Z}(t)$ de $Z(t)$, tal que $G_{z\omega} : \omega(t) \rightarrow (Z(t) - \hat{Z}(t))$ sea estable y minimice

$$\sup_{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,\infty)} \neq 0} \frac{\|Z(t) - \hat{Z}(t)\|_{2,[t_0,\infty)}}{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,\infty)}}, \quad (3.8)$$

para $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s[t_0, \infty)$.

Utilizando las ecuaciones equivalentes de (3.1)-(3.2), la Figura 3.1 muestra la relación que existe entre la planta y el filtro por sintetizar.

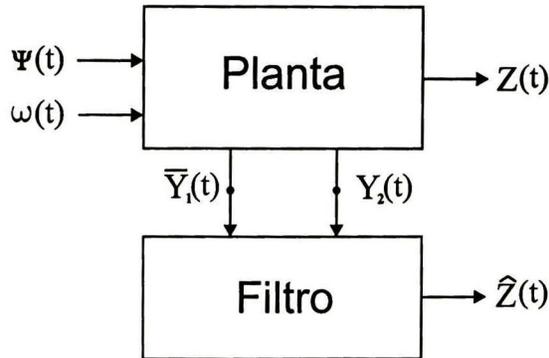


Figura 3.1: Configuración del filtro H_∞ en promedio cuadrático.

3.2. Síntesis del Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, t_f]$

En esta sección se sintetizan dos filtros (Filtro 1 y Filtro 2) para dar solución al problema de filtrado 1 en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$. Además, en cada filtro se consideran dos situaciones para los parámetros del sistema.

3.2.1. Filtro 1

Para el sistema (3.1)-(3.4), se consideran las suposiciones siguientes (S_1) en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$:

(i) $D_2(t)B_1^T(t) = 0$.

(ii) $D_2(t)D_2^T(t) = I_{m_2}$.

(iii) $D_1(t)D_1^T(t)$ definido positivo.

La suposición (i) indica que la perturbación determinística que afectan la planta es independiente de aquella presente en la medición. La normalización de las perturbaciones en la medición se establece en la suposición (ii). Suposición (iii) se establece para que la ganancia de Kalman exista.

Para dar solución al problema 1 es necesario aplicar la teoría de filtrado H_∞ presentada en la Sección 2.5. Sin embargo, por tratarse de un sistema estocástico, no se puede aplicar de forma directa el filtro presentado en Teorema 2.1 o Teorema 2.2. Por tanto, se requiere obtener un sistema determinístico que estime la dinámica del sistema (3.1).

Con base en la teoría presentada en la Sección 2.3, el proceso estocástico $X(t)$ del sistema (3.1)-(3.4) es estimado por medio de

$$M(t) = E[X(t) | F_t^Y],$$

el cual representa la esperanza condicional del proceso estocástico $X(t)$ con respecto a la σ -álgebra F_t generada por los valores del proceso medible $Y = \{Y_1(s), t_0 \leq s \leq t\}$, tal que la varianza condicional del error de estimación,

$$P(t) = E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))^T | F_t^Y],$$

sea mínima en cada instante de tiempo.

Las ecuaciones de filtrado (Filtro de Kalman-Bucy) se describe mediante las ecuaciones diferenciales para el estimado óptimo (varianza mínima) y la varianza del error de estimación:

$$dM(t) = (A(t)M(t) + B_1(t)\omega(t))dt + P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt), \quad (3.9)$$

$$M(t_0) = M_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$$

y

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B_2(t)B_2^T(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)P(t), \quad (3.10)$$

$$P(t_0) = P_0 = E[(X(t_0) - E[X(t_0)|F_{t_0}^Y])(X(t_0) - E[X(t_0)|F_{t_0}^Y])^T | F_{t_0}^Y],$$

respectivamente.

Se puede notar que la ecuación (3.10), a diferencia de (3.9), es independiente del proceso medible $dY_1(t)$. Por lo tanto, la ganancia de Kalman $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}$ se puede calcular aun cuando no se tengan mediciones.

Sustituyendo el término $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}dY_1(t)/dt$ por la función $f(t)$, la ecuación dinámica (3.9) se expresa como

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) &= [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]M(t) + B_1(t)\omega(t) + f(t), \\ M(t_0) &= M_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y].\end{aligned}\quad (3.11)$$

Considerando la ecuación dinámica determinística (3.11) y la esperanza condicional de $Y_2(t)$ ($\bar{Y}_2(t)$), es posible aplicar el filtro presentado en Teorema 2.1. Por lo tanto, el filtro H_∞ central sub-óptimo que estima $M(t)$, tal que

$$\sup_{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,t_f]} \neq 0} \frac{\|G(t)M(t) - G(t)\hat{M}(t)\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,t_f]}} < \gamma, \quad (3.12)$$

está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{M}}(t) &= [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]\hat{M}(t) + f(t) \\ &+ \bar{S}(t)C_2^T(t)(\bar{Y}_2(t) - C_2(t)\hat{M}(t)), \quad \hat{M}(t_0) = \hat{M}_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y],\end{aligned}\quad (3.13)$$

donde $\bar{S}(t)$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned}\dot{\bar{S}}(t) &= [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]\bar{S}(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ &+ \bar{S}(t)[A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]^T - \bar{S}(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))\bar{S}(t), \\ \bar{S}(t_0) &= 0.\end{aligned}\quad (3.14)$$

A pesar de que $M(t)$ es el estimado óptimo de $X(t)$, por el hecho de que $E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$ es un estimado de X_0 , existe un error de estimación, el cual no se considera en (3.13). Por tanto, es necesario incluir en las ecuaciones de filtrado un parámetro que considere la diferencia $E[X(t_0)|F_{t_0}^Y] - X_0$.

Remplazando $\bar{Y}_2(t)$ por $Y_2(t)$ y considerando el Teorema 2.2, las ecuaciones de filtrado (3.13), (3.14) se modifican tal como se muestra a continuación.

El filtro H_∞ central sub-óptimo resultante, nombrado filtro H_∞ en promedio cuadrático, está dado por

$$\begin{aligned}d\hat{X}(t) &= A(t)\hat{X}(t)dt + P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)\hat{X}(t)dt) \\ &+ S(t)C_2^T(t)(Y_2(t) - C_2(t)\hat{X}(t))dt, \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y],\end{aligned}\quad (3.15)$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]S(t) + B_1(t)B_1^T(t) \\ &+ S(t)[A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]^T - S(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \\ S(t_0) &= S_0 = R^{-1}, \quad R = R^T > 0.\end{aligned}\quad (3.16)$$

El filtro H_∞ en promedio cuadrático cumple con

$$\sup \left[\frac{\|Z(t) - \hat{Z}(t)\|_{2,[0,t_f]}^2}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 + (\hat{X}_0 - X_0)^T R (\hat{X}_0 - X_0)} \right]^{1/2} < \gamma, \quad (3.17)$$

donde $\hat{Z}(t) = G(t)\hat{X}(t)$. El parámetro R indica aproximadamente que tan cierto puede ser que \hat{X}_0 sea X_0 . Si se está seguro que la condición inicial es X_0 , entonces R toma un valor grande y viceversa.

Proposición 1.1: *Considérese el sistema estocástico (3.1)-(3.4) sujeto a S_1 . El filtro H_∞ en promedio cuadrático (3.15) que cumple (3.17) existe si y sólo si:*

- La ecuación diferencial (3.10) tiene solución para todo $t \in [t_0, t_f]$.
- La ecuación diferencial (3.16) tiene solución definida positiva acotada para todo $t \in [t_0, t_f]$.

Simplificando S_1 , las ecuaciones (3.15), (3.16) son modificadas tal como se presenta a continuación.

Para el sistema (3.1)-(3.4), se considera que se cumplen las siguientes suposiciones (S_2) en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$:

- (i) $D_2(t)B_1^T(t)$ diferente de cero.
- (ii) $D_2(t)D_2^T(t)$ definido positivo.
- (iii) $D_1(t)D_1^T(t)$ definido positivo.

La modificación de las ecuaciones (3.15), (3.16) se fundamenta en resultados presentados en [21] y [14].

En este caso, el filtro H_∞ en promedio cuadrático está dado por

$$\begin{aligned} d\hat{X}(t) = & [A(t) - B_1(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]\hat{X}(t)dt \\ & + P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)\hat{X}(t)dt) \\ & + [S(t)C_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}(Y_2(t) - C_2(t)\hat{X}(t)) + B_2(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}]dt, \\ & \hat{X}(t_0) = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y], \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $S(t)$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t) - B_1(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]S(t) \\ & + S(t)[A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t) - B_1(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]^T \\ & + [B_1(t)(I_s - D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}D_2(t))[B_1(t)(I_s - D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}D_2(t))]^T \\ & - S(t)(C_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \\ & S(t_0) = S_0 = R^{-1}, \quad R = R^T > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Proposición 1.2: *Considérese el sistema estocástico (3.1)-(3.4) sujeto a \mathbb{S}_2 . El filtro H_∞ en promedio cuadrático (3.18) que cumple (3.17) existe si y sólo si:*

- *La ecuación diferencial (3.10) tiene solución para todo $t \in [t_0, t_f]$.*
- *La ecuación diferencial (3.19) tiene solución definida positiva acotada para todo $t \in [t_0, t_f]$.*

3.2.2. Filtro 2

En esta sección, al igual que la anterior, se da solución al problema de filtrado 1, siguiendo la metodología presentada en la sección anterior. Teniendo por diferencia, la forma como se considera el término $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt)$ de la ecuación (3.9).

Dado que el término $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt)$ representa el comportamiento estocástico del sistema (3.1), es necesario mantenerlo como tal en la síntesis del filtro. Por tanto, dicho término es reemplazado por $g(t)$ multiplicado por dt .

Aplicando la teoría, presentada en el Capítulo 2, al sistema

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t) + B_1(t)\omega(t) + g(t), \quad M(t_0) = M_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y], \quad (3.20)$$

y procediendo de la misma manera como se hizo en Filtro 1, se obtiene el filtro siguiente.

El filtro H_∞ en promedio cuadrático, considerando que se cumple \mathbb{S}_1 , está dado por (3.15). En este caso, $S(t)$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) + S(t)A(t)^T + B_1(t)B_1^T(t) - S(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \quad (3.21)$$

$$S(t_0) = S_0 = R^{-1}, \quad R = R^T > 0.$$

Proposición 2.1: *Considérese el sistema estocástico (3.1)-(3.4) sujeto a \mathbb{S}_1 . El filtro H_∞ en promedio cuadrático (3.15) que cumple (3.17) existe si y sólo si:*

La ecuación diferencial (3.10) tiene solución para todo $t \in [t_0, t_f]$.

La ecuación diferencial (3.21) tiene solución definida positiva acotada para todo $t \in [t_0, t_f]$.

Si la suposición \mathbb{S}_1 se simplifica a \mathbb{S}_2 , las ecuaciones de filtrado (3.15), (3.21) son modificadas tal como se presenta a continuación.

La modificación de las ecuaciones (3.15), (3.21) se fundamenta en resultados presentados en [21] y [14]. La ecuación dinámica del estimado es (3.18), donde $S(t)$ es la solución de

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & [A(t) - B_1(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]S(t) \\ & + S(t)[A(t) - B_1(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]^T \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
& -S(t)(C_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t) \\
& + [B_1(t)(I_s - D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}D_2(t))] [B_1(t)(I_s - D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}D_2(t))]^T \\
& S(t_0) = S_0 = R^{-1}, \quad R = R^T > 0.
\end{aligned}$$

Proposición 2.2: *Considérese el sistema estocástico (3.1)-(3.4) sujeto a \mathbb{S}_2 . El filtro H_∞ en promedio cuadrático (3.18) que cumple (3.17) existe si y sólo si:*

La ecuación diferencial (3.10) tiene solución para todo $t \in [t_0, t_f]$.

- *La ecuación diferencial (3.22) tiene solución definida positiva acotada para todo $t \in [t_0, t_f]$.*

3.3. Síntesis del Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, \infty)$

En esta sección se presenta el filtro H_∞ en promedio cuadrático estable (Filtro 3), el cual da solución al problema de filtrado 2 en el intervalo de tiempo $[t_0, \infty)$. Las ecuaciones de filtrado se obtienen a partir del Filtro 2 y resultados presentados en [21].

3.3.1. Filtro 3

La solución al problema de filtrado 2 está sujeta a las suposiciones siguientes (\mathbb{S}_3) en el intervalo de tiempo $[t_0, \infty)$:

- (i) $D_2(t)B_1^T(t) = 0$.
- (ii) $D_2(t)D_2^T(t) = I_{m_2}$.
- (iii) $D_1(t)D_1^T(t)$ definido positivo.
- (iv) $(A(t), B_1(t))$ estabilizable y $(C_2(t), A(t))$ detectable.
- (v) $(A(t), B_2(t))$ estabilizable y $(C_1(t), A(t))$ detectable.

La suposición (i) indica que las perturbaciones determinísticas que afectan la planta son independientes de aquellas presentes en la medición. La normalización de las perturbaciones en la medición se establece en la suposición (ii). Suposición (iii) se establece para que la ganancia de Kalman exista. Las suposiciones (iv) y (v) aseguran que el error de estimación converja a cero (ver [13],[21]).

Para dar solución al problema de filtrado, se sigue la metodología del Filtro 2, además se consideran las condiciones establecidas en el Teorema 4 de [21]. El filtro resultante está dado por (3.15), (3.10) y (3.21).

Proposición 3.1: *Considérese el sistema estocástico (3.1)-(3.4) sujeto a \mathbb{S}_3 . El filtro H_∞ en promedio cuadrático estable (3.15) que cumple*

$$\sup \left[\frac{\|Z(t) - \hat{Z}(t)\|_{2,[0,\infty)}^2}{\|\omega(t)\|_{2,[0,\infty)}^2 + (\hat{X}_0 - X_0)^T R (\hat{X}_0 - X_0)} \right]^{1/2} < \gamma,$$

existe si y sólo si:

La ecuación diferencial (3.10) tiene solución para todo $t \geq t_0$.

- La ecuación diferencial (3.21) tiene solución definida positiva acotada para todo $t \geq t_0$, y tal que el sistema

$$\dot{p}(t) = [A(t) - S(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))]p(t)$$

sea exponencialmente estable.

Utilizando las ecuaciones (3.3)-(3.6), la estructura del filtro H_∞ en promedio cuadrático sujeto a \mathbb{S}_1 se presenta en la Figura 3.2.

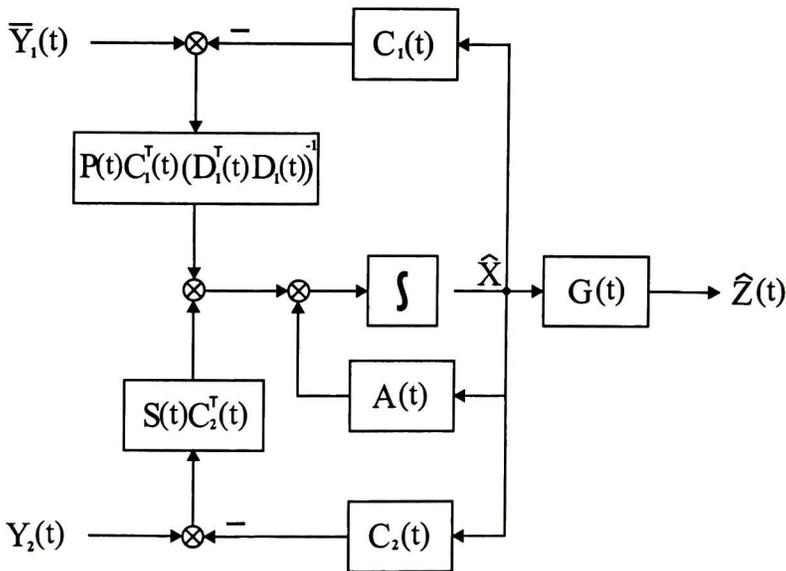


Figura 3.2: Filtro H_∞ en promedio cuadrático.

3.4. Ejemplo

En esta sección se estima el proceso estocástico no medible de un sistema lineal estocástico, tal que la ganancia máxima de energía de las perturbaciones determinísticas al error de estimación sea

menor a un γ en el intervalo de simulación. Por tanto, se implementan los filtros diseñados y el filtro H_∞ central sub-óptimo.

Sea $X(t)$ el proceso no medible cuya dinámica está dada por la ecuación diferencial estocástica de Itô

$$dX(t) = (e^{-t}X(t) + 0.5\omega_1(t))dt + dW_1(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.23)$$

con los procesos medibles

$$dY_1(t) = X(t)dt + dW_2(t), \quad (3.24)$$

$$Y_2(t) = X(t) + \omega_2(t), \quad (3.25)$$

y el proceso por estimar

$$Z(t) = X(t), \quad (3.26)$$

donde $\omega(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t)]^T$ es una perturbación en $\mathcal{L}_2^2[t_0, t_f]$; $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos de Wiener independientes con media cero y covarianza unitaria; la condición inicial $X(t_0)$ es una variable aleatoria Gaussiana tal que $X(t_0)$, $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son independientes.

3.4.1. Aplicación de Filtro 1

Se puede verificar fácilmente que el sistema (3.23)–(3.26) cumple con la suposición \mathbb{S}_1 .

Aplicando el filtro H_∞ en promedio cuadrático de Proposición 1A, las ecuaciones de filtrado están dadas por

$$\dot{\hat{X}}(t) = G(t)\hat{X}(t), \quad (3.27)$$

$$d\hat{X}(t) = e^{-t}\hat{X}(t)dt + P(t)(dY_1(t) - \hat{X}(t)dt) + S(t)(Y_2(t) - \hat{X}(t))dt \quad (3.28)$$

con condición inicial $\hat{X}(t_0) = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$, donde $P(t)$ y $S(t)$ son las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Riccati siguientes

$$\dot{P}(t) = 2e^{-t}P(t) - P^2(t) + 1, \quad (3.29)$$

$$P(t_0) = E[(X(t_0) - E[X(t_0) | F_{t_0}^Y])(X(t_0) - E[X(t_0) | F_{t_0}^Y])^T | F_{t_0}^Y],$$

y

$$\dot{S}(t) = 2(e^{-t} - P(t))S(t) - (1 - \gamma^{-2})S^2(t) + 0.25, \quad S(t_0) = S_0 = R^{-1}, \quad (3.30)$$

respectivamente.

3.4.2. Aplicación de Filtro 2

Dado que el sistema estocástico (3.23)–(3.26) cumple con \mathbb{S}_1 , se aplica el filtro de Proposición 2.1. Las ecuaciones de filtrado en este caso están dadas por

$$\bar{Z}(t) = G(t)\bar{X}(t), \quad (3.31)$$

$$d\bar{X}(t) = e^{-t}\bar{X}(t)dt + P(t)(dY_1(t) - \bar{X}(t)dt) + \bar{S}(t)(Y_2(t) - \bar{X}(t))dt \quad (3.32)$$

con condición inicial $\hat{X}(t_0) = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$, donde $P(t)$ y $\bar{S}(t)$ son la solución de las ecuaciones diferenciales de Riccati siguientes

$$\dot{P}(t) = 2e^{-t}P(t) - P^2(t) + 1, \quad (3.33)$$

$$P(t_0) = E[(X_0 - E[X(t_0) | F_{t_0}^Y])(X(t_0) - E[X_0 | F_{t_0}^Y])^T | F_{t_0}^Y],$$

y

$$\dot{\bar{S}}(t) = 2e^{-t}\bar{S}(t) - (1 - \gamma^{-2})\bar{S}^2(t) + 0.25, \quad \bar{S}(t_0) = \bar{S}_0 = R^{-1}, \quad (3.34)$$

respectivamente.

3.4.3. Aplicación del Filtro H_∞

El filtro H_∞ central sub-óptimo, se diseña para el sistema determinístico correspondiente a (3.23), es decir, se omite la parte aleatoria.

De acuerdo al algoritmo presentado en la Sección 2.5 y considerando la incertidumbre en la condición inicial, las ecuaciones de filtrado son:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = G(t)\tilde{x}(t), \quad (3.35)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = e^{-t}\tilde{x}(t) + S(t)(y_2(t) - \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 = 0, \quad (3.36)$$

donde $\bar{S}(t)$ está dada por:

$$\dot{\bar{S}}(t) = 2e^{-t}\bar{S}(t) - (1 - \gamma^{-2})\bar{S}^2(t) + 0.25, \quad \bar{S}(t_0) = \bar{S}_0 = R^{-1}. \quad (3.37)$$

3.4.4. Parámetros de Simulación

Para mostrar y comparar el desempeño de los filtros, se realiza la simulación numérica utilizando las ecuaciones equivalentes del sistema (3.23-3.26), filtro (3.28) y filtro (3.32). Los parámetros de simulación son los siguientes:

- Intervalo de tiempo de simulación: $[0, 15s]$.
- Nivel de atenuación: $\gamma = 1.01$.

Condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} X(0) = 0.5 & \hat{X}_0 = 0.3 & \bar{X}_0 = 0.3 & \tilde{x}_0 = 0 \\ R = 0.2 & P_0 = 10 & S_0 = 5 & \bar{S}_0 = 5 \end{bmatrix}$$

Perturbaciones en \mathcal{L}_2 :

Caso 1:

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 0.1/(0.1 + t) \\ 1/(1 + t) \end{bmatrix}$$

Caso 2:

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/(1 + t) \end{bmatrix}$$

- Para simular los procesos de ruido blanco Gaussiano, se utiliza un bloque en MATLAB que genera señales aleatorias con distribución normal. En este caso, la señal aleatoria tiene media cero y varianza unitaria.

3.4.5. Resultados Gráficos

Con el objeto de mostrar el desempeño de los filtros, se obtienen resultados gráficos considerando diferentes perturbaciones en la ecuación diferencial estocástica de Itô.

En las gráficas presentadas a continuación, los estimados $\hat{Z}(t)$, $\bar{Z}(t)$ y $\tilde{z}(t)$ son representados como estimado 1, estimado 2 y estimado 3, respectivamente.

La figura 3.3 muestra el valor de $\| \|Z(t) - Z'(t)\|_2 / \|\omega(t)\|_2 + (X'_0 - X_0)^T R (X'_0 - X_0) \|^{1/2}$ en cada instante en el intervalo $[0, 15s]$, considerando la perturbación $\omega(t)$ del caso 1. $Z'(t)$ y X'_0 representan el proceso estimado y la condición inicial del estimado correspondiente al filtros en cuestión.

Los valores de la norma H_∞ obtenidos por (3.27-3.30), (3.31-3.34) y (3.35-3.37) son 0.1029, 0.7651 y 0.8855, respectivamente, tal como se muestra en ??.

Para corroborar los resultados de la Figura 3.3, en Figura 3.4 y Figura 3.5 se muestra el proceso no medible y los estimados.

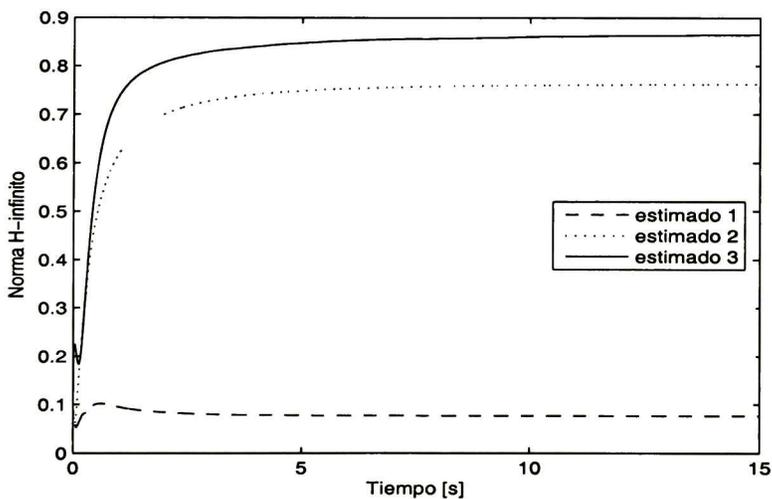


Figura 3.3: Norma H_∞ de ω del Caso 1 al error de estimación.

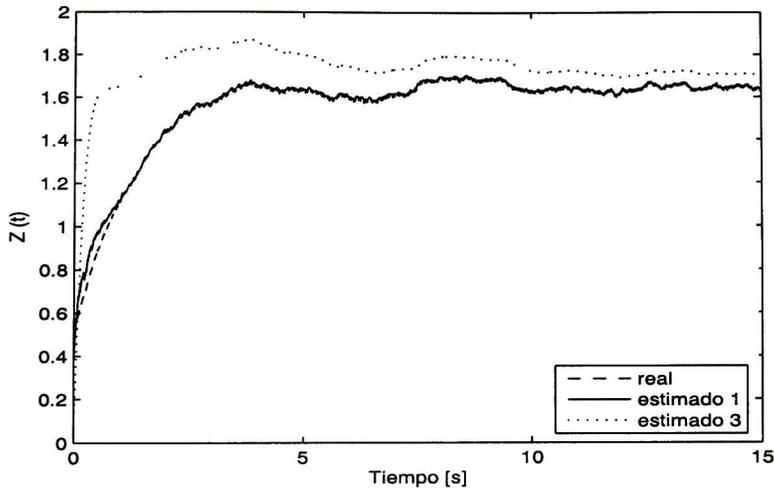


Figura 3.4: $Z(t)$, $\hat{Z}(t)$ y $\bar{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 1 está presente.

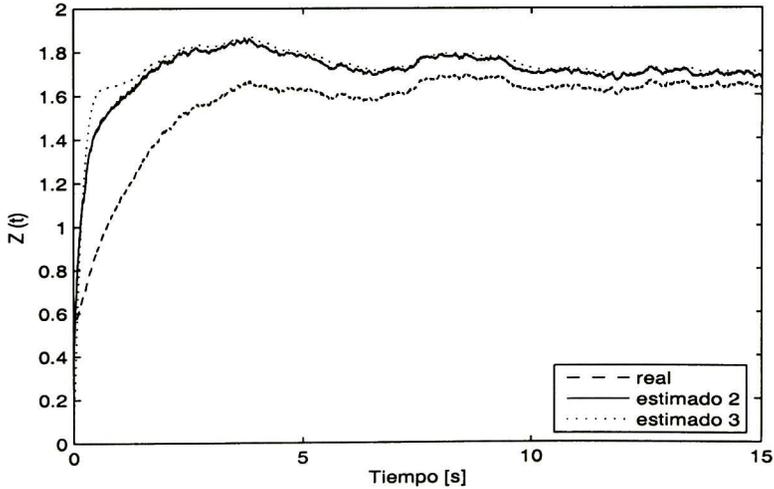


Figura 3.5: $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$ y $\bar{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 1 está presente.

Aplicando $\omega(t)$ del Caso 2, se obtienen las siguientes gráficas: En la Figura 3.6 se puede observar que 0.3852, 0.3696 y 0.4536 son los valores de la norma H_∞ al aplicar el filtro (3.28), (3.32) y (3.36), respectivamente; Figura 3.7 presenta el proceso $Z(t)$ y el estimado generado por el filtro (3.28) y

(3.36); En la Figura 3.7 se muestra el proceso $Z(t)$ y el estimado generado por el filtro (3.32) y (3.36).

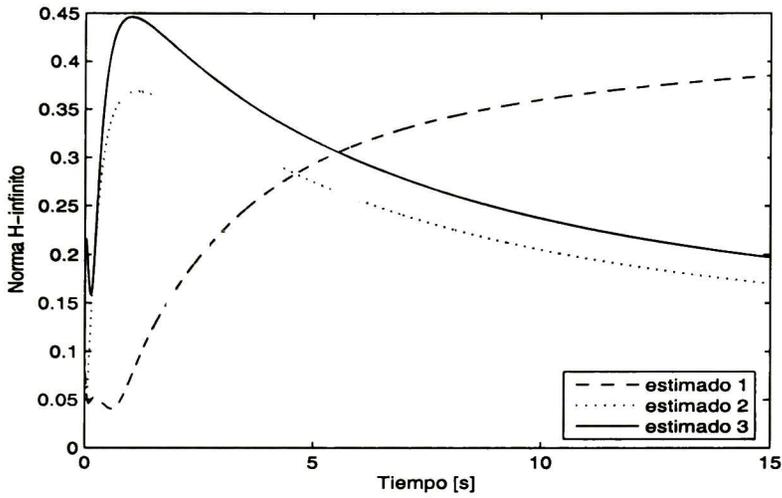


Figura 3.6: Norma H_∞ de ω del Caso 1 al error de estimación.

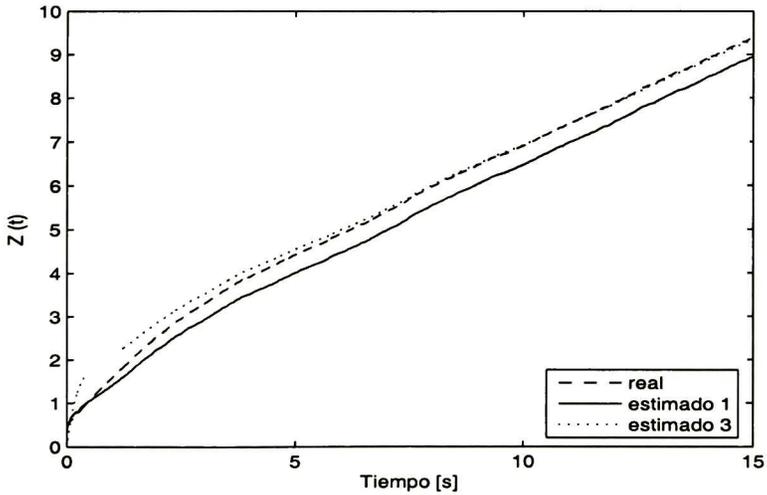


Figura 3.7: $Z(t)$, $\hat{Z}(t)$ y $\tilde{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 2 está presente.

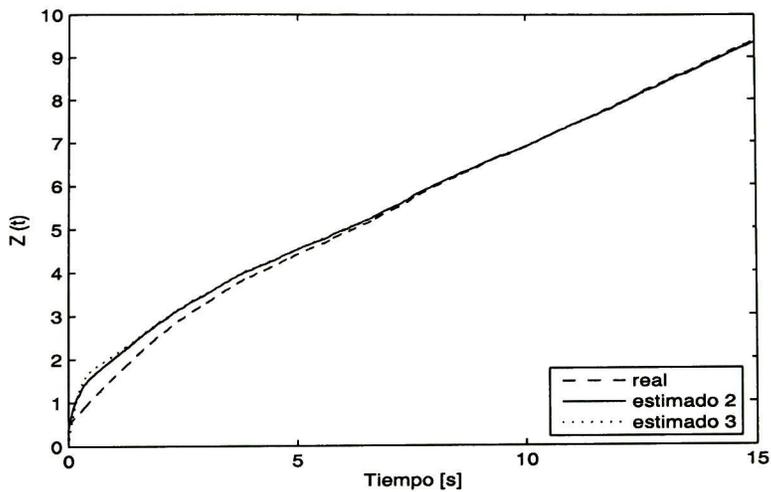


Figura 3.8: $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$ y $\tilde{z}(t)$ cuando $\omega(t)$ del caso 2 está presente.

Con base en los resultados gráficos, se concluye que los filtros H_∞ en promedio cuadrático son mejores que el filtro H_∞ central sub-óptimo para sistemas estocásticos lineales.

Si la perturbación determinística que afecta la dinámica del sistema estocástico es desvaneciente se recomienda utilizar el filtro 1, por lo contrario el filtro 2 debe ser utilizado.

Capítulo 4

Controlador H_∞ en Promedio Cuadrático

En este capítulo se presenta la síntesis del controlador H_∞ en promedio cuadrático para sistemas lineales estocásticos, que consiste en la aplicación del filtro de Kalman-Bucy y del control H_∞ por retroalimentación, así como las condiciones de existencia del controlador resultante. Además, se presenta un ejemplo numérico, en el cual se prueba el controlador propuesto y se compara con el controlador H_∞ por retroalimentación.

4.1. Formulación del Problema

4.1.1. Sistema Lineal Estocástico

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una familia de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$ crecientes y continuas por la derecha, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos de Wiener independientes con media cero y covarianza unitaria. Considérese el siguiente sistema estocástico lineal:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\omega(t))dt + B_3(t)dW_1(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (4.1)$$

$$dY_1(t) = C_1(t)X(t)dt + D_1(t)dW_2(t) \quad (4.2)$$

$$Y_2(t) = C_2(t)X(t) + D_2(t)\omega(t) \quad (4.3)$$

$$Z(t) = G(t)X(t) + H(t)u(t), \quad (4.4)$$

donde $X(t) \in \mathbb{R}^n$ es el proceso estocástico no medible, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ es la entrada de control, $Y_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ y $Y_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ son procesos medibles, $Z(t) \in \mathbb{R}^q$ es el proceso por controlar, $\omega(t) \in \mathcal{L}_2^s$ es la perturbación determinística, mientras que $A(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t), C_1(t), C_2(t), D_1(t), D_2(t), G(t)$ y $H(t)$ son matrices de funciones continuas, variantes en el tiempo, conocidas y de dimensión adecuada. La condición inicial $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria Gaussiana, tal que $X(t_0), W_1(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ y $W_2(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ sean independientes.

La ecuación diferencial estocástica de Itô (4.1) y la ecuación de medición de Itô (4.2) se representan de forma equivalente (ver, [13], Sección 5.1) como:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\omega(t) + B_3(t)\Psi_1(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (4.5)$$

y

$$\bar{Y}_1(t) = C_1(t)X(t) + D_1(t)\Psi_2(t), \quad (4.6)$$

respectivamente. Donde $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son procesos de ruido blanco Gaussiano.

4.1.2. Problemas de Control

Problem 1: Sintetizar un controlador para el sistema (4.1)-(4.4), tal que el máximo valor de la relación entre la energía del proceso por controlar $Z(t)$ y la energía de la perturbación determinística $\omega(t)$ se minimice, en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$. Es decir, minimizar

$$\sup_{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]} \neq 0} \frac{\|Z(t)\|_{2,[0,t_f]}}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}}, \quad (4.7)$$

con $\omega \in \mathcal{L}_2^s[t_0, t_f]$.

Problem 2: Sintetizar un controlador admisible para el sistema (4.1)-(4.4) con parámetros invariantes en el tiempo, tal que minimice

$$\sup_{\|\omega(t)\|_{2,[0,\infty)} \neq 0} \frac{\|Z(t)\|_{2,[0,\infty)}}{\|\omega(t)\|_{2,[0,\infty)}}, \quad (4.8)$$

donde $\omega \in \mathcal{L}_2^s[t_0, \infty)$.

Un controlador admisible es aquel que proporciona estabilidad interna. Donde estabilidad interna significa que los estados del sistema en lazo cerrado se van a cero a partir de cualquier condición inicial.

Teniendo en cuenta la representación equivalente de las ecuaciones (4.5)-(4.6), la configuración del controlador se muestra en la Figura 4.1.

4.2. Síntesis del Control H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, t_f]$

En esta sección se sintetizan dos controladores (Control 1 y Control 2) para dar solución al problema de control 1, en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$. Además, en cada control se consideran dos situaciones en los parámetros del sistema.

4.2.1. Control 1

La síntesis del controlador que da solución al problema 1, se basa en los resultados obtenidos en la teoría de filtrado óptimo, así como del control H_∞ presentados en el Capítulo 2.

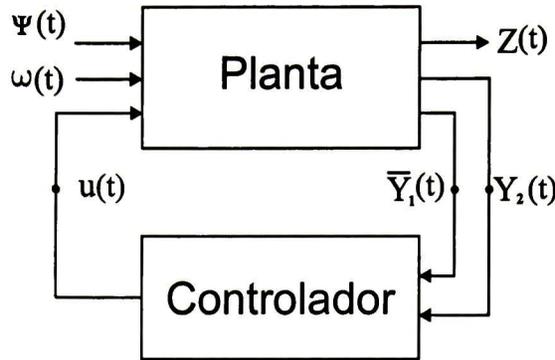


Figura 4.1: Configuración del control H_∞ en promedio cuadrático.

El filtrado óptimo (filtro de Kalman-Bucy) juega un papel primordial en la solución del problema, ya que el sistema a controlar es un proceso estocástico y por su naturaleza el estado del sistema es aleatorio. Por esta razón, es necesario estimar el estado del sistema.

Dadas las características que presenta el proceso estocástico (4.1) y (4.2), como son: linealidad, $W_1(t)$ y $W_2(t)$ procesos de Wiener independientes, además de que la condición inicial del sistema es independiente de los procesos de Wiener, se implementa el filtro de Kalman-Bucy para obtener un estimado óptimo del estado $X(t)$, el cual asegura que la varianza del error de estimación sea mínima.

Por otro lado, la técnica de control H_∞ se aplica al sistema estimado óptimo, para obtener un controlador por retroalimentación que dependa del estimado óptimo.

Lo anterior se describe de manera formal como se muestra a continuación.

En la síntesis de este controlador se asumen las siguientes suposiciones \bar{S}_1 , en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$.

- (i) $H^T(t)G(t) = 0$ y $H^T(t)H(t) = I_l$.
- (ii) $D_2(t)B_2^T(t) = 0$ y $D_2(t)D_2^T(t) = I_{m_2}$.
- (iii) $D_1(t)D_1^T(t)$ definido positivo.

La suposición (i) establece la ortogonalidad entre $G(t)X(t)$ y $H(t)u(t)$. Además, la matriz de ponderación del vector de control es la matriz identidad. La (ii) equivale a (i) para las matrices de las perturbaciones determinísticas que actúan sobre el sistema y sobre la medición. Suposición (iii) es una condición que se establece para que la ganancia de Kalman exista.

Establecidas las condiciones sobre el sistema, se procede a la síntesis del controlador. Como primer paso se estima el proceso X del sistema estocástico (4.1),(4.2) por medio del filtro de Kalman-Bucy, logrando así un estimado

$$M(t) = E[X(t) | F_t^Y],$$

que representa la esperanza condicional del proceso estocástico $X(t)$ con respecto a la σ -álgebra F_t generada por los valores del proceso medible $Y(t) = \{Y_1(s), t_0 \leq s \leq t\}$ en el intervalo de tiempo

$[t_0, t]$, tal que (la varianza condicional del error de estimación)

$$E[(X(t) - M(t))(X(t) - M(t))^T | F_t^Y] \quad (4.9)$$

sea mínima en cada instante de tiempo.

La ecuación diferencial estocástica para $M(t)$ (esperanza condicional de $X(t)$) se describe como

$$dM(t) = (A(t)M(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\omega(t)) dt \quad (4.10)$$

$$+ P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt), \quad M(t_0) = M_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y].$$

La variable $P(t)$ representa la varianza del error de estimación, la cual se define como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)P(t) + B_3(t)B_3^T(t), \quad (4.11)$$

$$P(t_0) = P_0 = E[(X(t_0) - E[X(t_0)|F_{t_0}^Y])(X(t_0) - E[X(t_0)|F_{t_0}^Y])^T | F_{t_0}^Y].$$

Teniendo el estimado de (4.1) y $Y_2(t)$, se diseña el control H_∞ siguiendo la metodología presentada en la Sección 2.6.

Considerando $u^*(t) = -B_1^T(t)Q(t)M(t)$ como el control H_∞ , $\omega^*(t) = \gamma^{-2}B_2^T(t)Q(t)M(t)$ como la peor perturbación y sabiendo que $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt)$ estima la parte estocástica de (4.1), el problema de control se resuelve al dar solución al siguiente problema:

Obtener un filtro H_∞ que estime

$$u^*(t) = -B_1^T(t)Q(t)M(t), \quad (4.12)$$

tal que

$$\sup_{\|\Delta_\omega(t)\|_{2,[0,t_f]} \neq 0} \frac{\|u^*(t) - \hat{u}^*(t)\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|\Delta_\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}} < \gamma, \quad (4.13)$$

para el sistema

$$\dot{M}(t) = (A(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t))M(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)\Delta_\omega(t) + f(t), \quad (4.14)$$

$$M(t_0) = M_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$$

$$\bar{Y}_2(t) = C_2(t)M(t) + D_2(t)\Delta_\omega(t), \quad (4.15)$$

donde $\hat{u}^*(t) = -B_1^T(t)Q(t)\hat{M}(t)$, $\Delta_\omega(t) = \omega(t) - \gamma^{-2}B_2^T(t)Q(t)M(t)$, $\bar{Y}_2(t) = E[Y_2(t)|F_{t_0}^Y]$ y $f(t) = P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt)/dt$.

De acuerdo a resultados presentados en la Sección 2.5 y 2.6, el filtro que estima $M(t)$ y que además satisface (4.13) es:

$$\dot{\hat{M}}(t) = (A(t) - B_1(t)B_1^T(t)\bar{Q}(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)\bar{Q}(t))\hat{M}(t) \quad (4.16)$$

$$+(I_n - \gamma^{-2}\bar{S}(t)\bar{Q}(t))^{-1}\bar{S}(t)C_2^T(t)(\bar{Y}_2(t) - C_2(t)\hat{M}(t)) + f(t), \quad \hat{M}(t_0) = \hat{M}_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y],$$

con $\bar{Q}(t)$ y $\bar{S}(t)$ las soluciones a las ecuaciones diferenciales de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Q}}(t) = -A^T(t)\bar{Q}(t) - \bar{Q}(t)A(t) + \bar{Q}(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))\bar{Q}(t) - G^T(t)G(t) \\ \bar{Q}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}}(t) = A(t)\bar{S}(t) + \bar{S}(t)A^T(t) - \bar{S}(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))\bar{S}(t) + B_2(t)B_2^T(t), \\ \bar{S}(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

respectivamente.

Sustituyendo el valor de $f(t)$, el valor real de $\bar{Y}_2(t)$ y considerando que $E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]$ es un estimado de X_0 , las ecuaciones de filtrado (4.16)-(4.18) se modifican de acuerdo al Teorema 3.2 como se muestra a continuación.

El controlador H_∞ central resultante, nombrado *controlador H_∞ en promedio cuadrático*, está dado por

$$u(t) = -B_1^T(t)Q(t)\hat{X}(t), \quad (4.19)$$

donde $\hat{X}(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} d\hat{X}(t) = (A(t) - B_1(t)B_1^T(t)Q(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t))\hat{X}(t)dt \\ + P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)\hat{X}(t)dt) \\ + (I_n - \gamma^{-2}S(t)Q(t))^{-1}S(t)C_2^T(t)(Y_2(t) - C_2(t)\hat{X}(t))dt, \\ \hat{X}(t_0) = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Las funciones matriciales $Q(t)$ y $S(t)$ son las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = -A(t)^T Q(t) - Q(t)A(t) - G^T(t)G(t) + Q(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))Q(t) \\ Q(t_f) = \Delta \end{aligned} \quad (4.21)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = A(t)S(t) + S(t)A^T(t) + B_2(t)B_2^T(t) - S(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \\ S(t_0) = S_0 = R^{-1} \quad R = R^T > 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

respectivamente.

El controlador H_∞ en promedio cuadrático cumple con

$$\sup \left[\frac{\|Z(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 + X^T(t_f)\Delta X(t_f)}{\|\omega(t)\|_{2,[0,t_f]}^2 + (\hat{X}_0 - X_0)^T R (\hat{X}_0 - X_0)} \right]^{1/2} < \gamma. \quad (4.23)$$

El parámetro R indica aproximadamente que tan cierto puede ser que \hat{X}_0 sea X_0 . Si se está seguro que la condición inicial es X_0 , entonces R toma un valor grande y viceversa. La matriz simétrica semidefinida positiva Δ pondera $X(t)$ en t_f .

Proposición 1A: *Considérese el sistema estocástico (4.1)-(4.4) sujeto a \bar{S}_1 . El controlador H_∞ en promedio cuadrático (4.19)-(4.20) que cumple (4.23) existe si y sólo si:*

La ecuación diferencial (4.11) tiene solución en todo $t \in [t_0, t_f]$.

La ecuación diferencial (4.21) tiene solución definida positiva en todo $t \in [t_0, t_f]$ y $Q(t_0) < \gamma^2 R$.

- La ecuación diferencial (4.22) tiene solución en todo $t \in [t_0, t_f]$.
- $\rho(Q(t)S(t)) < \gamma^2$ en todo $t \in [t_0, t_f]$.

(En Proposición 1A $\rho(\cdot)$ representa el radio espectral.)

Simplificando \mathbb{S}_1 , las ecuaciones (4.19)-(4.22) son modificadas tal como se presenta a continuación.

Para el sistema (4.1)-(4.4) se considera que se cumplen las siguientes suposiciones ($\bar{\mathbb{S}}_2$), en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$:

- (i) $H^T(t)G(t)$ y $D_2(t)B_2^T(t)$ diferentes de cero.
- (ii) $D_1(t)D_1^T(t)$, $D_2(t)D_2^T(t)$ y $H^T(t)H(t)$ matrices definidas positivas.

La modificación de las ecuaciones (4.19)-(4.22) se fundamenta en resultados presentados en [24] y [14]. En este caso, el controlador H_∞ en promedio cuadrático está dado por

$$u(t) = -(H^T(t)H(t))^{-1}(B_1^T(t)Q(t) + H(t)G(t))\hat{X}(t), \quad (4.24)$$

donde $\hat{X}(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} d\hat{X}(t) = & [A(t) - B_1(t)(H^T(t)H(t))^{-1}(B_1^T(t)Q(t) + H(t)G(t)) \\ & + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t)]\hat{X}(t)dt + P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)\hat{X}(t)dt) \\ & + (I_n - \gamma^{-2}S(t)Q(t))^{-1}(S(t)C_2^T(t) + B_2(t)D_2^T(t))(D_2(t)D_2^T(t))^{-1} \\ & \cdot [Y_2(t) - (C_2(t) + \gamma^{-2}D_2(t)B_2^T(t)Q(t))\hat{X}(t)]dt, \quad \hat{X}(t_0) = E[X(t_0) | F_{t_0}^Y] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Las funciones matriciales $Q(t)$ y $S(t)$ son las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -[A(t) - B_1(t)(H^T(t)H(t))^{-1}H^T(t)G(t)]^T Q(t) \\ & -Q(t)[A(t) - B_1(t)(H^T(t)H(t))^{-1}H^T(t)G(t)] - [(I_q - H(t)(H^T(t)H(t))^{-1} \\ & \cdot H^T(t)G(t)]^T [(I_q - H(t)(H^T(t)H(t))^{-1}H^T(t)G(t)] \\ & + Q(t)[B_1(t)(H^T(t)H(t))^{-1}B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)]Q(t), \quad Q(t_f) = \Delta \end{aligned} \quad (4.26)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & [A(t) - B_2(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]S(t) \\ & + S(t)[A(t) - B_2(t)D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t)]^T + [B_2(t)(I_s - D_2^T(t) \\ & \cdot (D_2(t)D_2^T(t))^{-1}D_2(t))] [B_2(t)(I_s - D_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}D_2(t))]^T \\ & - S(t)(C_2^T(t)(D_2(t)D_2^T(t))^{-1}C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \quad S(t_0) = R^{-1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

respectivamente.

Proposición 1B: *Considérese el sistema estocástico (4.1)-(4.4) sujeto a \bar{S}_2 . El controlador H_∞ en promedio cuadrático (4.24)-(4.25) que cumple (4.23) existe si y sólo si:*

- La ecuación diferencial (4.11) tiene solución en todo $t \in [t_0, t_f]$.

La ecuación diferencial (4.26) tiene solución definida positiva en todo $t \in [t_0, t_f]$ y $Q(t_0) < \gamma^2 R$.

- La ecuación diferencial (4.27) tiene solución en todo $t \in [t_0, t_f]$.
- $\rho(Q(t)S(t)) < \gamma^2$ en todo $t \in [t_0, t_f]$.

4.2.2. Control 2

El controlador diseñado en esta sección, al igual que el controlador 1, da solución al problema de control 1. Teniendo por diferencia la forma de considerar el sistema (4.10) al momento de diseñar el controlador H_∞ por retroalimentación.

En este caso, el término $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}(dY_1(t) - C_1(t)M(t)dt)$ de la ecuación (4.10) se expande, considerando $P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}dY_1(t)/dt = g(t)$. Es decir, el sistema para el cual se estima $u^*(t) = -B_1^T(t)Q(t)M(t)$ está dado por:

$$\dot{M}(t) = [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t) + \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t)Q(t)]M(t) \quad (4.28)$$

$$+ B_1(t)u(t) + B_2(t)\Delta_\omega(t) + g(t), \quad M(t_0) = M_0 = E[X(t_0)|F_{t_0}^Y],$$

$$\tilde{Y}_2(t) = C_2(t)M(t) + D_2(t)\Delta_\omega(t). \quad (4.29)$$

El controlador H_∞ en promedio cuadrático, considerando que se cumple \bar{S}_1 , está dado por (4.19)-(4.20). En este caso, $Q(t)$ y $S(t)$ son las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\dot{Q}(t) = -[A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]^T Q(t) - G^T(t)G(t) \quad (4.30)$$

$$- Q(t)[A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]$$

$$+ Q(t)(B_1(t)B_1^T(t) - \gamma^{-2}B_2(t)B_2^T(t))Q(t), \quad Q(t_f) = \Delta$$

y

$$\dot{S}(t) = [A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]S(t) + B_2(t)B_2^T(t) \quad (4.31)$$

$$+ S(t)[A(t) - P(t)C_1^T(t)(D_1(t)D_1^T(t))^{-1}C_1(t)]^T$$

$$- S(t)(C_2^T(t)C_2(t) - \gamma^{-2}G^T(t)G(t))S(t), \quad S(t_0) = R^{-1}.$$

Proposición 2A: *Considérese el sistema estocástico (4.1-4.4) sujeto a \bar{S}_1 . El controlador H_∞ en promedio cuadrático (4.19)-(4.20) que cumple (4.23) existe si y sólo si:*

- La ecuación diferencial (4.11) tiene solución en todo $t \in [t_0, t_f]$.
- La ecuación diferencial (4.30) tiene solución definida positiva en todo $t \in [t_0, t_f]$ y $Q(t_0) < \gamma^2 R$.

La ecuación diferencial (4.31) tiene solución en todo $t \in [t_0, t_f]$.

- $\rho(Q(t)S(t)) < \gamma^2$ en todo $t \in [t_0, t_f]$.

4.3. Síntesis del Control H_∞ en Promedio Cuadrático en $[t_0, \infty)$

En esta sección se presenta un controlador H_∞ en promedio cuadrático admisible (Control 3), el cual da solución al problema de control 2 en el intervalo de tiempo $[t_0, \infty)$. Las ecuaciones del controlador se obtienen a partir del Control 1 y resultados presentados en [24].

4.3.1. Control 3

El sistema estocástico (4.1)-(4.4) con parámetros invariantes está dado por

$$dX(t) = (AX(t) + B_1u(t) + B_2\omega(t))dt + B_3dW_1(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (4.32)$$

$$dY_1(t) = C_1X(t)dt + D_1dW_2(t) \quad (4.33)$$

$$Y_2(t) = C_2X(t) + D_2\omega(t) \quad (4.34)$$

$$Z(t) = GX(t) + Hu(t) \quad (4.35)$$

donde $A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_1, D_2, G$ y H son matrices constantes, conocidas y de dimensión adecuada.

Se considera que el sistema (4.32)-(4.35) cumple con las siguientes suposiciones \bar{S}_3 , en el intervalo de tiempo $[t_0, \infty)$:

i $H^T G = 0$ y $H^T H = I_l$.

ii $D_2 B_2^T = 0$ y $D_2 D_2^T = I_{m_2}$.

iii $D_1 D_1^T$ invertible.

iv (A, B_1) es estabilizable y (C_2, A) es detectable,

v (A, B_2) estabilizable y (G, A) detectable.

vi (A, B_3) es estabilizable y (C_1, A) es detectable,

La suposición (i) establece la ortogonalidad entre $GX(t)$ y $Hu(t)$. Además, la matriz de ponderación del vector de control es la matriz identidad. La (ii) equivale a (i) para las matrices de las perturbaciones determinísticas que actúan sobre el sistema y sobre la medición. Suposición (iii) se establece para que exista la ganancia de Kalman.

Por otro lado, la suposición (iv) es necesaria y suficiente para la existencia del controlador admisible [24]. Suposición (vi) se establece para obtener un filtro óptimo estable (ver, [18], [13]). La suposición (v) es una suposición técnica que se explica en [14], [24].

Con base en [24] y la síntesis del Control 1, el controlador que da solución al problema de control 2 está dado por

$$u(t) = -B_1^T Q \hat{X}(t), \quad (4.36)$$

donde $\hat{X}(t)$ es el estimado generado por la ecuación dinámica

$$\begin{aligned} d\hat{X}(t) &= (A - B_1 B_1^T Q + \gamma^{-2} B_2 B_2^T Q) \hat{X}(t) dt + P C_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} \\ &\cdot (dY_1(t) - C_1 \hat{X}(t) dt) + (I_n - \gamma^{-2} S(t) Q)^{-1} S(t) C_2^T (Y_2(t) - C_2 \hat{X}(t)) dt, \\ \hat{X}(t_0) &= E[X(t_0) | F_{t_0}^Y]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Las funciones matriciales Q y $S(t)$ son las soluciones de

$$A^T Q + Q A - Q(B_1 B_1^T - \gamma^{-2} B_2 B_2^T) Q + G^T G = 0 \quad (4.38)$$

y

$$\dot{S}(t) = A S(t) + S(t) A^T - S(t)(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} G^T G) S(t) + B_2 B_2^T, \quad (4.39)$$

$$S(t_0) = R^{-1}, \quad (4.40)$$

respectivamente.

Proposición 3A: *Considérese el sistema estocástico (4.32)-(4.35) sujeto a \bar{S}_3 . El controlador H_∞ en promedio cuadrático admisible (4.36)-(4.37) que cumple*

$$\sup \left[\frac{\|Z(t)\|_{2,[0,\infty)}^2}{\|\omega(t)\|_{2,[t_0,\infty)}^2 + (\hat{X}_0 - X_0)^T R (\hat{X}_0 - X_0)} \right]^{1/2} < \gamma, \quad (4.41)$$

existe si y sólo si:

La ecuación diferencial (4.11) tiene solución definida positiva en todo $t \geq 0$.

Existe una matriz simétrica Q ($0 \leq Q < \gamma^2 R$) que cumple (4.38) tal que $A - (B_1 B_1^T - \gamma^{-2} B_2 B_2^T) Q$ sea asintóticamente estable.

- *Existe una función matricial simétrica acotada $S(t) > 0$ que satisface (4.39) para $t \geq 0$ tal que el sistema dinámico*

$$\dot{p}(t) = [A - S(t)(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} G^T G)] p(t)$$

sea exponencialmente estable.

- *La función $[1 - \rho(\gamma^{-2} S(t) Q)]^{-1} > 0$ para todo $t \geq 0$ y acotada.*

Utilizando las ecuaciones (4.5, 4.6, 4.3 y 4.4), la estructura del controlador H_∞ en promedio cuadrático sujeto a \bar{S}_1 se representa por medio de un diagrama a bloques en la Figura 4.2.

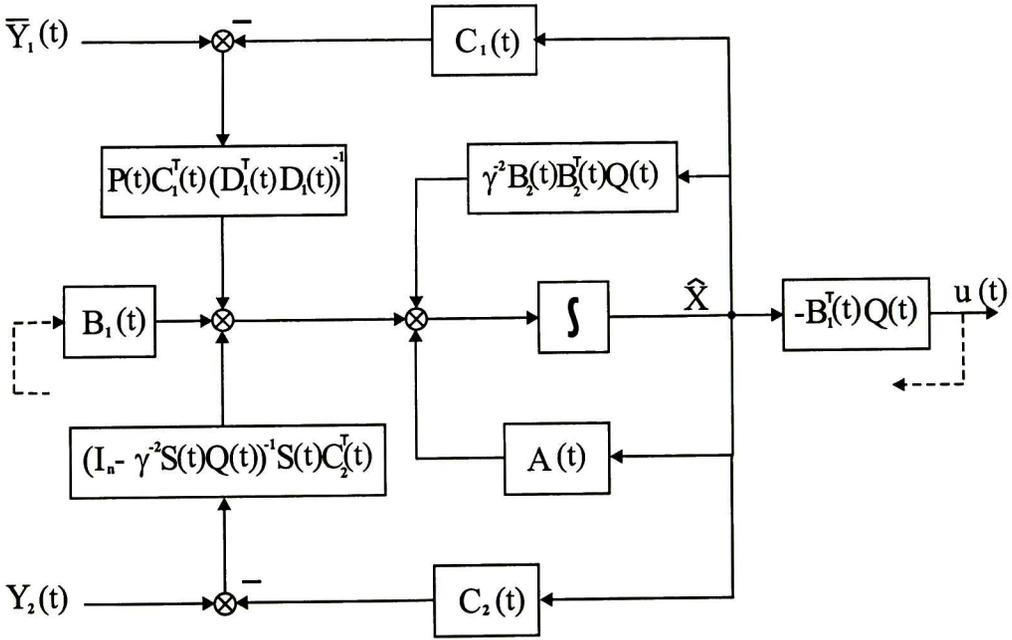


Figura 4.2: Control H_∞ en promedio cuadrático.

4.4. Ejemplo

En esta sección se presenta la aplicación de los controladores propuestos a un sistema estocástico lineal en tiempo finito, así como la implementación del controlador H_∞ por retroalimentación diseñado para el sistema determinístico correspondiente.

Sistema Estocástico

Sea $[X^T(t), Y_1^T(t)]^T$ un proceso descrito por la ecuación diferencial estocástica de Itô

$$dX(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega(t) \right) dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dW_1(t) \quad (4.42)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad dY_1 = [0 \ 1] X dt + [0 \ 1] dW_2(t), \quad (4.43)$$

junto con el proceso

$$Y_2(t) = [1 \ 0] X(t) + [0 \ 1] \omega(t). \quad (4.44)$$

El proceso por controlar es

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.45)$$

En las ecuaciones (4.42) y (4.44), la perturbación determinística $\omega(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t)]^T$ es una señal con norma 2 acotada; $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos de Wiener independientes, la condición inicial $X(t_0)$ es una variable aleatoria Gaussiana tal que $W_1(t)$, $W_2(t)$ y $X(t_0)$ sean independientes.

Objetivo

Dado el sistema estocástico (4.42)-(4.45), aplicar los controladores H_∞ en promedio cuadrático y el controlador H_∞ por retroalimentación, tal que la ganancia máxima de energía de la perturbación $\omega(t)$ al proceso por controlar $Z(t)$ sea menor que 1.91425.

4.4.1. Aplicación de Control 1

Se puede verificar que el sistema estocástico (4.42)-(4.45) cumple con \bar{S}_1 . Por lo tanto, se aplica el algoritmo de control presentado en Proposición 1A.

El controlador resultante está dado por:

$$\hat{u}(t) = -Q_{12}(t)\hat{X}_1(t) - Q_{22}(t)\hat{X}_2(t). \quad (4.46)$$

El vector de estado $\hat{X} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2]^T$ se define por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} d\hat{X}_1(t) = & -\hat{X}_2(t)dt + P_{12}(t)(dY_1(t) - \hat{X}_2 dt) \\ & + (1/\Lambda)[S_{11}(t) - \gamma^{-2}(S_{11}(t)S_{22}(t)Q_{22}(t) - S_{12}^2(t)Q_{22}(t))](Y_2(t) - \hat{X}_1(t))dt, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} d\hat{X}_2(t) = & \{[1 + (\gamma^{-2} - 1)Q_{12}(t)]\hat{X}_1(t) + [0.1 + (\gamma^{-2} - 1)Q_{22}(t)]\hat{X}_2(t)\}dt \\ & + P_{22}(t)(dY_1(t) - \hat{X}_2(t)dt) \\ & + (1/\Lambda)[S_{12}(t) + \gamma^{-2}(S_{11}(t)S_{22}(t)Q_{12}(t) - S_{12}^2(t)Q_{12}(t))](Y_2(t) - \hat{X}_1(t))dt, \end{aligned}$$

con $\hat{X}(t_0) = E(X(t_0) | F_{t_0}^Y)$, y

$$\begin{aligned} \Lambda = & 1 - \gamma^{-2}(S_{11}(t)Q_{11}(t) + 2S_{12}(t)Q_{12}(t) + S_{22}(t)Q_{22}(t)) \\ & + \gamma^{-4}[S_{11}(t)S_{22}(t)(Q_{11}(t)Q_{22}(t) - Q_{12}^2(t)) - S_{12}^2(t)(Q_{11}(t)Q_{22}(t) - Q_{12}^2(t))]. \end{aligned}$$

Las variables $P_{ij}(t)$, $Q_{ij}(t)$ y $S_{ij}(t)$ son elementos de P , Q y S , respectivamente, que están relacionadas por

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \quad Q(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{12}(t) & Q_{22}(t) \end{bmatrix} \quad S(t) = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{12}(t) & S_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Expresando las ecuaciones diferenciales de Riccati en términos de sus componentes, de acuerdo a Proposición 1A, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{P}_{11}(t) &= 1 - 2P_{12}(t) - P_{12}^2(t) \\ \dot{P}_{12}(t) &= P_{11}(t) + 0.1P_{12}(t) - P_{22}(t) - P_{12}(t)P_{22}(t) \\ \dot{P}_{22}(t) &= 2P_{12}(t) + 0.2P_{22}(t) - P_{22}^2(t),\end{aligned}\tag{4.48}$$

con $P(t_0) = E((X(t_0) - \hat{X}(t_0))(X(t_0) - \hat{X}(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$,

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{11}(t) &= -1 - 2Q_{12}(t) - Q_{12}^2(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{Q}_{12}(t) &= Q_{11}(t) - 0.1Q_{12}(t) - Q_{22}(t) - Q_{12}(t)Q_{22}(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{Q}_{22}(t) &= 2Q_{12}(t) - 0.2Q_{22}(t) - Q_{22}^2(t)(\gamma^{-2} - 1),\end{aligned}\tag{4.49}$$

con condición terminal $Q(t_f) = 0$ y

$$\begin{aligned}\dot{S}_{11}(t) &= -2S_{12}(t) + S_{11}^2(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{S}_{12}(t) &= S_{11}(t) + 0.1S_{12}(t) - S_{22}(t) + S_{11}(t)S_{12}(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{S}_{22}(t) &= 2S_{12}(t) + 0.2S_{22}(t) + S_{12}^2(t)(\gamma^{-2} - 1) + 1,\end{aligned}\tag{4.50}$$

con condición inicial $S(t_0) = R^{-1}$

4.4.2. Aplicación de Control 2

Aplicando el algoritmo de control correspondiente a Proposición 2A al sistema (4.42)-(4.45), el controlador resultante está dado por:

$$\tilde{u}(t) = -\tilde{Q}_{12}(t)\tilde{X}_1(t) - \tilde{Q}_{22}(t)\tilde{X}_2(t).\tag{4.51}$$

El vector de estado $\tilde{X} = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]^T$ se define por las ecuaciones diferenciales siguientes

$$\begin{aligned}d\tilde{X}_1(t) &= -\tilde{X}_2(t)dt + P_{12}(t)(dY_1(t) - \tilde{X}_2 dt) \\ &+ (1/\Gamma)[\tilde{S}_{11}(t) - \gamma^{-2}(\tilde{S}_{11}(t)\tilde{S}_{22}(t)\tilde{Q}_{22}(t) - \tilde{S}_{12}^2(t)\tilde{Q}_{22}(t))](Y_2(t) - \tilde{X}_1(t))dt,\end{aligned}\tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}d\tilde{X}_2(t) &= \{[1 + (\gamma^{-2} - 1)\tilde{Q}_{12}(t)]\tilde{X}_1(t) + [0.1 + (\gamma^{-2} - 1)\tilde{Q}_{22}(t)]\tilde{X}_2(t)\}dt \\ &+ P_{22}(t)(dY_1(t) - \tilde{X}_2(t)dt) \\ &+ (1/\Gamma)[\tilde{S}_{12}(t) + \gamma^{-2}(\tilde{S}_{11}(t)\tilde{S}_{22}(t)\tilde{Q}_{12}(t) - \tilde{S}_{12}^2(t)\tilde{Q}_{12}(t))](Y_2(t) - \tilde{X}_1(t))dt,\end{aligned}$$

con $\tilde{X}(t_0) = E(X(t_0) | F_{t_0}^Y)$, y

$$\Gamma = 1 - \gamma^{-2}(\tilde{S}_{11}(t)\tilde{Q}_{11}(t) + 2\tilde{S}_{12}(t)\tilde{Q}_{12}(t) + \tilde{S}_{22}(t)\tilde{Q}_{22}(t))$$

$$+\gamma^{-4}[\tilde{S}_{11}(t)\tilde{S}_{22}(t)(\tilde{Q}_{11}(t)\tilde{Q}_{22}(t) - \tilde{Q}_{12}^2(t)) - \tilde{S}_{12}^2(t)(\tilde{Q}_{11}(t)\tilde{Q}_{22}(t) - \tilde{Q}_{12}^2(t))].$$

Las variables $P_{ij}(t)$, $\tilde{Q}_{ij}(t)$ y $\tilde{S}_{ij}(t)$ son elementos de P , \tilde{Q} y \tilde{S} , respectivamente, que están relacionan por

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{Q}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11}(t) & \tilde{Q}_{12}(t) \\ \tilde{Q}_{12}(t) & \tilde{Q}_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{S}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}(t) & \tilde{S}_{12}(t) \\ \tilde{S}_{12}(t) & \tilde{S}_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Expresando las ecuaciones diferenciales de Riccati, correspondientes a Proposición 2A en función de sus componentes, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{P}_{11}(t) &= 1 - 2P_{12}(t) - P_{12}^2(t) \\ \dot{P}_{12}(t) &= P_{11}(t) + 0.1P_{12}(t) - P_{22}(t) - P_{12}(t)P_{22}(t) \\ \dot{P}_{22}(t) &= 2P_{12}(t) + 0.2P_{22}(t) - P_{22}^2(t), \end{aligned} \quad (4.53)$$

con $P(t_0) = E((X(t_0) - \hat{X}(t_0))(X(t_0) - \hat{X}(t_0))^T | F_{t_0}^Y)$,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Q}}_{11}(t) &= -1 - 2\tilde{Q}_{12}(t) - \tilde{Q}_{12}^2(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{\tilde{Q}}_{12}(t) &= (1 + P_{12}(t))\tilde{Q}_{11}(t) - (0.1 + P_{22}(t))\tilde{Q}_{12}(t) - \tilde{Q}_{22}(t) - \tilde{Q}_{12}(t)\tilde{Q}_{22}(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{\tilde{Q}}_{22}(t) &= 2(1 + P_{12}(t))\tilde{Q}_{12}(t) - 2(0.1 + P_{22}(t))\tilde{Q}_{22}(t) - \tilde{Q}_{22}^2(t)(\gamma^{-2} - 1), \end{aligned} \quad (4.54)$$

con condición terminal $\tilde{Q}(t_f) = 0$ y

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{S}}_{11}(t) &= -2(1 + P_{12}(t))\tilde{S}_{12}(t) + \tilde{S}_{11}^2(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{\tilde{S}}_{12}(t) &= \tilde{S}_{11}(t) + (0.1 - P_{22}(t))\tilde{S}_{12}(t) - (1 + P_{12}(t))\tilde{S}_{22}(t) + \tilde{S}_{11}(t)\tilde{S}_{12}(t)(\gamma^{-2} - 1) \\ \dot{\tilde{S}}_{22}(t) &= 2\tilde{S}_{12}(t) + 2(0.1 - P_{22}(t))\tilde{S}_{22}(t) + \tilde{S}_{12}^2(t)(\gamma^{-2} - 1) + 1, \end{aligned} \quad (4.55)$$

con condición inicial $\tilde{S}(t_0) = R^{-1}$

4.4.3. Aplicación del Control H_∞ por Retroalimentación

De la Sección 2.6, se sabe que este tipo de controlador es aplicable sólo a sistemas lineales determinísticos (no estocásticos). Por lo tanto, para sintetizar un controlador H_∞ por retroalimentación, el proceso de Wiener $W_1(t)$ presente en (4.42)-(4.45) se considera nulo.

Teniendo en cuenta la suposición anterior, el sistema de control está dado por:

$$\bar{u}(t) = -Q_{12}(t)\bar{x}_1(t) - Q_{22}(t)\bar{x}_2(t), \quad (4.56)$$

donde $\bar{x}_1(t)$ y $\bar{x}_2(t)$ son los estados el sistema dinámico

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_2(t) + (1/\Delta)[S_{11}(t) - \gamma^{-2}Q_{22}(t)(S_{11}(t)S_{22}(t) - S_{12}^2(t))](Y_2(t) - \bar{x}_1(t)), \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 = & [1 + (\gamma^{-2} - 1)Q_{12}(t)]\bar{x}_1(t) + [0.1 + (\gamma^{-2} - 1)Q_{22}(t)]\bar{x}_2(t) \\ & + (1/\Delta)[S_{12}(t) + \gamma^{-2}(S_{11}(t)S_{22}(t)Q_{12}(t) - S_{12}^2(t)Q_{12}(t))](Y_2(t) - \bar{x}_1(t)), \end{aligned}$$

con $\bar{x}(t_0) = 0$. Las variables Λ , Q_{ij} y S_{ij} son igual a las establecidos para el controlador H_∞ en promedio cuadrático (Control 1).

4.4.4. Parámetros de Simulación

La simulación numérica presentada en este apartado, consiste en la aplicación de los controladores diseñados para el sistema (4.42)-(4.45), considerando los siguientes valores.

- Intervalo de tiempo: $[0, 10s]$.
- Condiciones iniciales:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \hat{X}(0) = \tilde{X}(0) = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.6 \end{bmatrix} \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Condición terminal:

$$Q(10) = \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Perturbaciones en \mathcal{L}_2 :

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.1\text{sen}(18.85t) \\ 1/(1+t) \end{bmatrix}$$

La simulación numérica se realiza en MATLAB, por lo cual el sistema (4.42)-(4.45) y los controladores se pasan a la forma equivalente.

Los procesos $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ se simulan con el bloque que genera señales aleatorias con distribución Gaussiana (se considera media cero y covarianza unitaria).

4.4.5. Resultados Gráficos

En esta sección se presentan de forma gráfica los resultados obtenidos al implementar los controladores H_∞ en promedio cuadrático al sistema estocástico (4.42)-(4.45), así como también el controlador H_∞ por retroalimentación.

En la Figura 4.3 se grafica la relación $[\|Z(t)\|_2^2/\|\omega(t)\|_2^2 + (X'_0 - X_0)^T R(X'_0 - X_0)]^{1/2}$ de 0 a 10 segundos. El parámetro X'_0 representa a las condiciones iniciales de cada controlador; es decir, \hat{X}_0 , \tilde{X}_0 y \bar{x}_0 .

El valor de norma H_∞ obtenido al implementar $\hat{u}(t)$, $\tilde{u}(t)$ y $\bar{u}(t)$ son 1.016, 1.454 y 2.204, respectivamente. Por lo tanto, los controladores H_∞ en promedio cuadrático son mejores que el controlador H_∞ por retroalimentación.

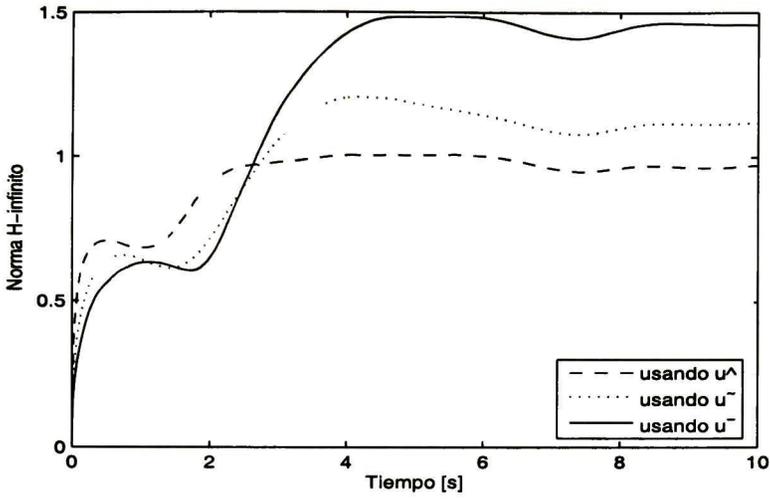


Figura 4.3: Norma H_∞ de $\omega(t)$ a $Z(t)$.

Para corroborar los resultados de la Figura 4.3, en la Figura 4.4 y Figura 4.5 se presenta la dinámica de $Z(t) = [Z_1(t), Z_2(t)]^T = [X_1(t), u(t)]^T$ al implementar los tres controles ($\hat{u}(t)$, $\tilde{u}(t)$ y $\bar{u}(t)$).

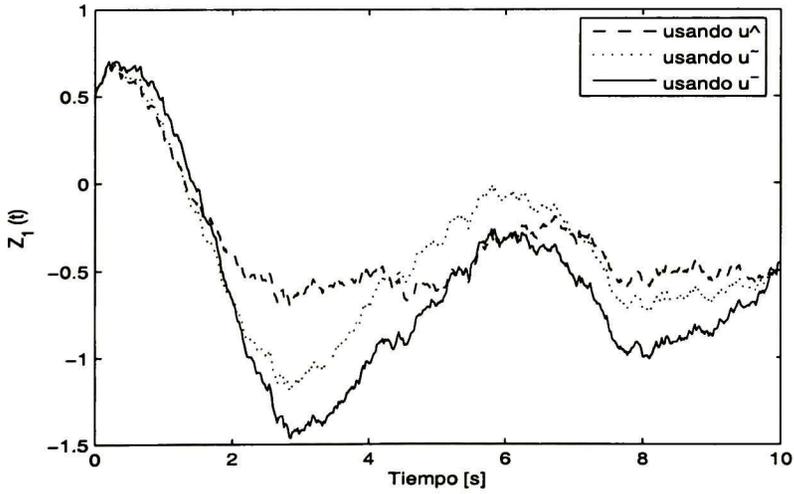


Figura 4.4: Señal controlada: $Z_1(t) = X_1(t)$.

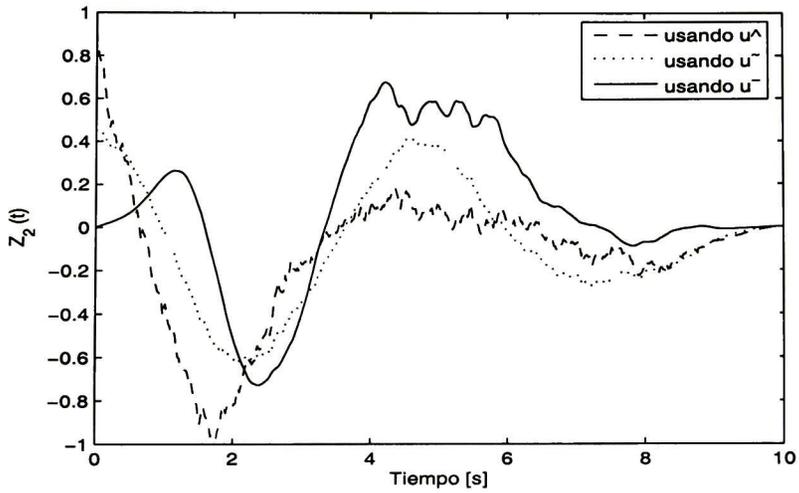


Figura 4.5: Señal controlada: $Z_2(t) = u(t)$.

Por la simplicidad del algoritmo y menor norma H_∞ obtenida, es recomendable utilizar el controlador H_∞ en promedio cuadrático obtenido en Control 1.

Capítulo 5

Aplicación a un Helicóptero de Dos Grados de Libertad

En este capítulo se presenta el diseño del filtro y controlador H_∞ en promedio cuadrático para el helicóptero de dos grados de libertad. Así mismo, por medio de gráficas se ilustran los resultados al implementar los algoritmos diseñados a nivel simulación.

5.1. Descripción del Sistema

El helicóptero de dos grados de libertad gira sobre el eje de inclinación a un ángulo θ y sobre el eje de rotación un ángulo ψ . Como se muestra en la Figura 5.1, la inclinación se define positiva cuando la parte delantera del helicóptero se eleva y una rotación positiva se define con un giro en el sentido de las manecillas del reloj.

5.2. Modelo Matemático

5.2.1. Modelo No Lineal

$$\begin{aligned} (J_{eq,p} + m_{heli}l_{cm}^2)\ddot{\theta} &= K_{pp}V_{m,p} + K_{py}V_{m,y} \\ &- m_{heli}gl_{cm} \cos \theta - B_p\dot{\theta} - m_{heli}l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2, \\ (J_{eq,y} + m_{heli}l_{cm}^2 \cos^2 \theta)\ddot{\psi} &= K_{yy}V_{m,y} + K_{yp}V_{m,p} \\ &- B_y\dot{\psi} + 2m_{heli}l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Especificaciones

- Amortiguamiento viscoso equivalente sobre el eje de inclinación:

$$B_{eq,p} = 0.800N/V$$

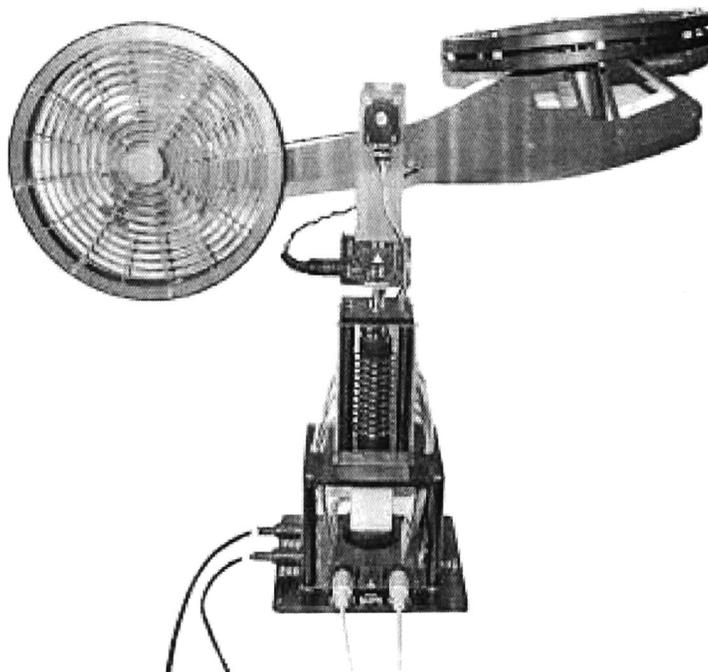


Figura 5.1: Helicóptero.

- Amortiguamiento viscoso equivalente sobre el eje de rotación:

$$B_{eq,y} = 0.318N/V$$

- Masa total en movimiento del helicóptero:

$$m_{heli} = 1.3872kg$$

- Distancia del centro de masa al eje de inclinación:

$$l_{cm} = 0.186m$$

- Momento de inercia total sobre el eje de elevación:

$$J_{eq,p} = 0.0384kg \cdot m^2$$

- Momento de inercia total sobre el eje de rotación:

$$J_{eq,y} = 0.0432kg \cdot m^2$$

Constante de torque producido por el motor 1 sobre el eje de inclinación:

$$K_{pp} = 0.204N \cdot m/V$$

- Constante de torque producido por el motor 2 sobre el eje de rotación:

$$K_{yy} = 0.072N \cdot m/V$$

- Constante de torque producido por el motor 1 sobre el eje de rotación:

$$K_{py} = 0.0068N \cdot m/V$$

- Constante de torque producido por el motor 2 sobre el eje de inclinación:

$$K_{yp} = 0.0219N \cdot m/V$$

- Constante gravitacional:

$$g = 9.81m/s^2$$

5.2.2. Modelo Lineal

Para obtener el modelo lineal, se linealiza el sistema (5.1) en $\theta = 0$ y $\psi = 0$, obteniendo la siguiente representación en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -B_p/Jp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_y/Jy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ K_{pp}/Jp & K_{py}/Jp \\ K_{yp}/Jy & K_{yy}/Jy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

con $Jp = J_{eq,p} + m_{heli}l_{cm}^2$ y $Jy = J_{eq,y} + m_{heli}l_{cm}^2$.

El modelo de estado anterior considera el cambio de variable siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{m,p} \\ V_{m,y} \end{bmatrix}$$

5.2.3. Sistema Estocástico Lineal

El modelo estocástico lineal se obtiene a partir del modelo linealizado (5.2), al cual se agrega la parte estocástica y las perturbaciones determinísticas. Las matrices de poderación, correspondientes al proceso de Wiener y a la perturbación determinística, son seleccionadas de manera que el sistema estocástico esté normalizado.

El sistema estocástico lineal correspondiente al helicóptero de dos grados de libertad está dado por:

Ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3667 & 0.0790 \\ 0.2410 & 0.7913 \end{bmatrix} u(t)dt \quad (5.3)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9024 & 0.0876 & 0 & 0 \\ 0.0919 & 0.8772 & 0 & 0 \end{bmatrix} \omega(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.9024 & 0.0876 \\ 0.0919 & 0.8772 \end{bmatrix} dW_1(t)$$

con condición inicial

$$X(t_0) = X_0 = \begin{bmatrix} -0.7069 \\ 0.0012 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procesos de observación

$$dY_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dW_2(t) \quad (5.4)$$

y

$$Y_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \omega(t). \quad (5.5)$$

5.3. Aplicación del Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático

El objetivo de esta sección es diseñar un filtro H_∞ en promedio cuadrático para estimar el ángulo de elevación y rotación, de tal manera que se minimice la relación entre la energía del vector error de estimación y la energía de las perturbaciones mas un término que considera la incertidumbre en la condición inicial.

5.3.1. Filtro H_∞ en Promedio Cuadrático

Sea el sistema estocástico lineal (5.3)-(5.5) y el proceso por estimar

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t). \quad (5.6)$$

Las matrices del sistema estocástico (5.3)-(5.5) cumplen con las suposiciones de S_1 , por esta razón y por simplicidad en las ecuaciones de filtrado se implementa filtro H_∞ en promedio cuadrático sujeto a Proposición 2.1.

La solución al problema de filtrado se establece en el intervalo de tiempo $[0, 80s]$, sobre el cual

$$\sup \left[\frac{\|Z(t) - \hat{Z}(t)\|_{2,[0,80]}^2}{\|\omega(t)\|_{2,[0,80]}^2 + (\hat{X}_0 - X_0)^T R (\hat{X}_0 - X_0)} \right]^{1/2} < \gamma, \quad (5.7)$$

se debe cumplir. El nivel de atenuación γ se fija en 1.1.

Mediante simulación, se verifica que las soluciones a las ecuaciones diferenciales de Riccati existen.

Las condiciones iniciales consideradas son: Para la varianza del error de estimación

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

y para $S(t)$

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}^{-1}$$

Dado que el sistema cumple con las condiciones establecidas en Proposición 2.1, el filtro que cumple (5.7) está dado por

$$d\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \hat{X}(t)dt \quad (5.8)$$

$$+P(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(dY_1(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}(t)dt \right)$$

$$+S(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(Y_2(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}(t) \right) dt, \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0 \begin{bmatrix} 0.1745 \\ -0.5236 \\ -0.15 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

La matriz $S(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{S}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} S(t) + S(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$-S(t) \begin{bmatrix} 0.1736 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1736 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8220 & 0.1597 \\ 0 & 0 & 0.1597 & 0.7779 \end{bmatrix} S(t_0) = S_0$$

mientras que $P(t)$ está dada por

$$\dot{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} P(t) + P(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$-P(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8220 & 0.1597 \\ 0 & 0 & 0.1597 & 0.7779 \end{bmatrix}, \quad P(t_0) = P_0.$$

5.3.2. Resultados Gráficos

Con el objeto de mostrar el desempeño del filtro diseñado, se obtienen los resultados gráficos siguientes.

El sistema (5.3)–(5.4) es afectado por funciones determinísticas arbitrarias en $\mathcal{L}_2[0, 80]$, mostradas en la Figura 5.6. Es decir, el vector $\omega(t)$ está dado por

$$\omega(t) = \left[\frac{1}{1+t} \quad 0.1(1 - e^{-0.3t}) \quad \frac{0.1745}{1+t} \quad 0.0873(1 - e^{-0.3t}) \right]^T \quad (5.11)$$

En Figura 5.2 y 5.3, se muestran las posiciones angulares reales y estimadas. Obteniendo excelentes resultados, lo cual es corroborado en la Figura 5.4 y 5.5.

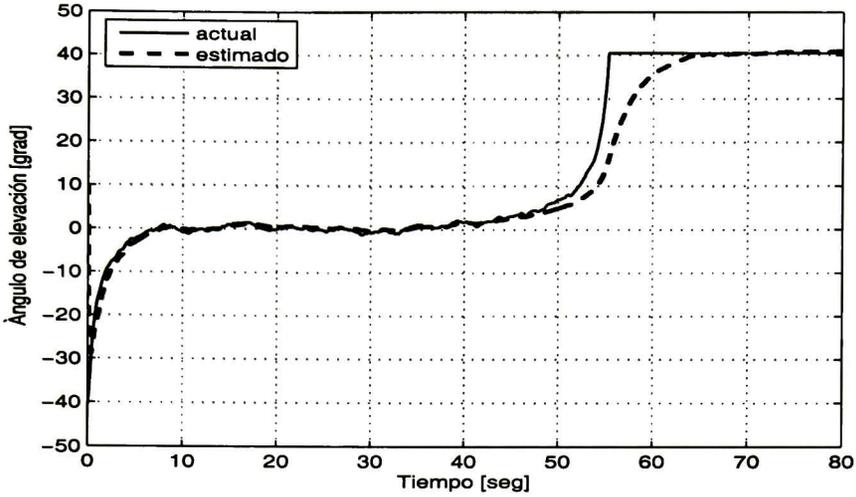


Figura 5.2: Ángulo de elevación

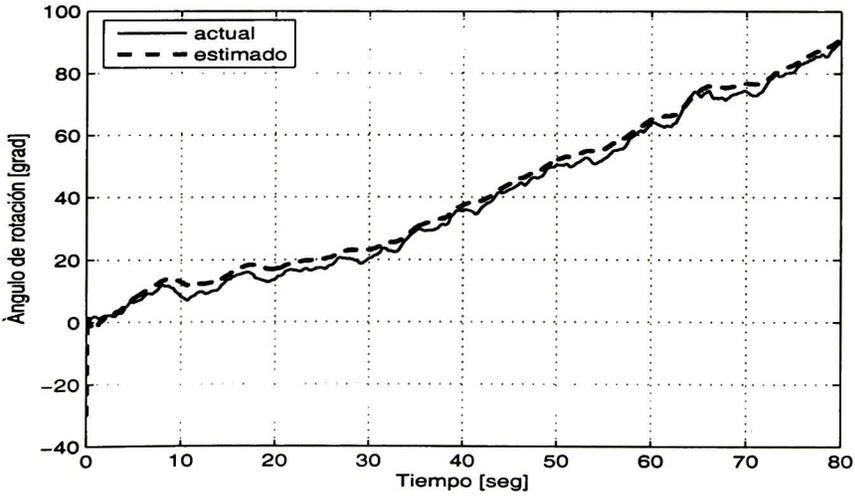


Figura 5.3: Ángulo de rotación

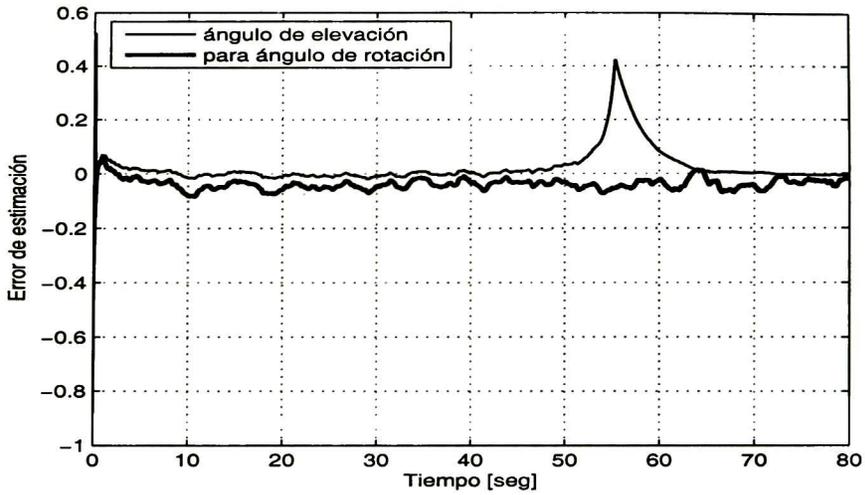


Figura 5.4: Error de estimación

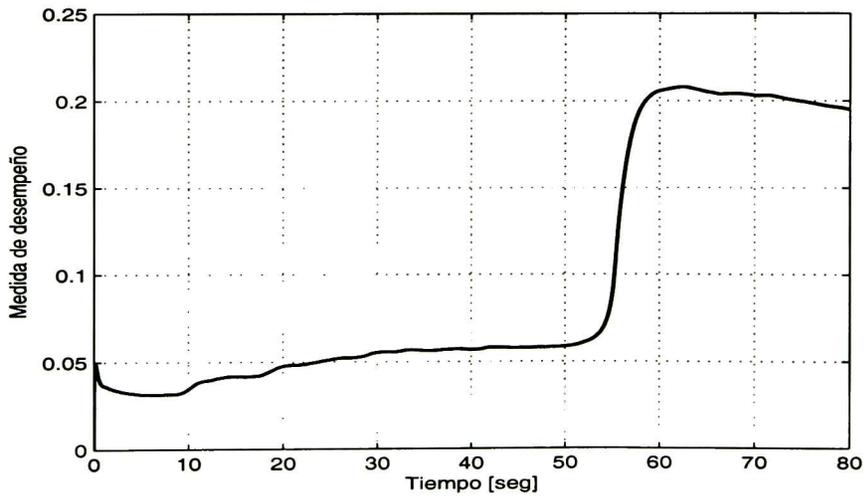
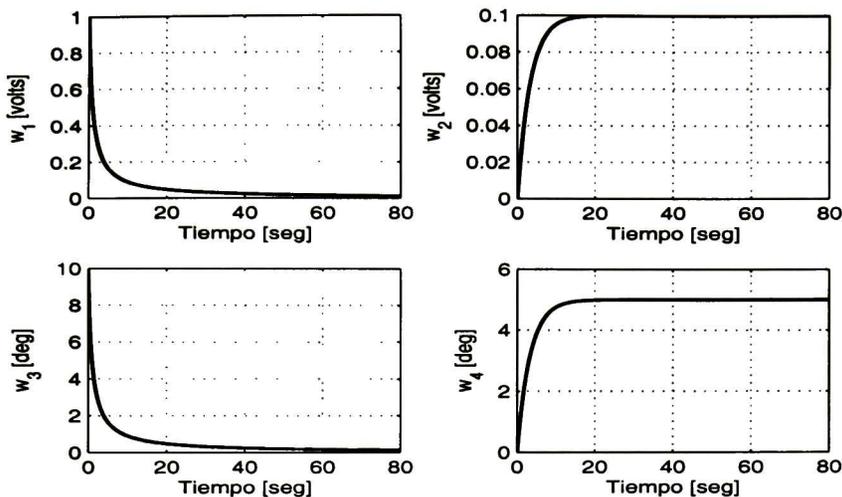


Figura 5.5: Medida del desempeño del filtro

Figura 5.6: Perturbaciones en $\mathcal{L}_2[0, 80s]$

5.4. Aplicación del Control H_∞ en Promedio Cuadrático

5.4.1. Control H_∞ en Promedio Cuadrático

Dado que el sistema (5.3)-(5.12) cumple con las suposiciones establecidas en $\bar{\mathcal{S}}_1$, se aplica el controlador H_∞ en promedio cuadrático de acuerdo a Proposición 1A; tal que la relación entre la energía del vector $Z(t)$ y la energía del vector de perturbaciones $\omega(t)$ sea menor que $\gamma = 1.5238$, considerando nula la ponderación del estado final ($\Delta = 0$).

La señal por controlar es:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (5.12)$$

Aplicando el controlador establecido en Proposición 1A, la ley de control está dada por

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.3667 & 0.2410 \\ 0 & 0 & 0.0790 & 0.7913 \end{bmatrix} Q(t) \hat{X}(t), \quad (5.13)$$

donde $\hat{X}(t)$ es descrito por la dinámica

$$d\hat{X}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.2535 & -0.5641 \\ 0 & 0 & -0.5641 & -0.3492 \end{bmatrix} Q(t) \right) \hat{X}(t) dt$$

$$+P(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(dY_1(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}(t) dt \right) \quad (5.14)$$

$$+(I_4 - \gamma^2 S(t)Q(t))^{-1} S(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(Y_2(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}(t) \right) dt.$$

Las funciones matriciales $P(t)$, $Q(t)$ y $S(t)$ son las soluciones a las ecuaciones diferenciales de Riccati siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} P(t) + P(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \\ & -P(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8220 & 0.1597 \\ 0 & 0 & 0.1597 & 0.7779 \end{bmatrix} \quad (5.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} Q(t) - Q(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \\ & +Q(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5.2535 & 0.5641 \\ 0 & 0 & 0.5641 & 0.3492 \end{bmatrix} Q(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} S(t) + S(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix} \\ & -S(t) \begin{bmatrix} 0.5693 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5693 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8220 & 0.1597 \\ 0 & 0 & 0.1597 & 0.7779 \end{bmatrix} \quad (5.17) \end{aligned}$$

Si se analiza el Hamiltoniano correspondiente a la ecuación diferencial (5.16),

$$H_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 & 0 & 0 & -5.2535 & -0.5641 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 & 0 & 0 & -0.5641 & -0.3492 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3.4955 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

se obtiene los siguientes valores propios:

$$9.2718, -9.2718, 3.4914, -3.4914, 0.2622, -0.2622, 0.1451, -0.1451.$$

Para (5.17), el Hamiltoniano asociado es:

$$J_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5693 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5693 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9.2751 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.4955 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0.8220 & -0.1597 & 0 & 0 & 9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1597 & -0.7779 & 0 & 0 & 0 & 3.4955 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

con valores propios:

$$9.2748, -9.2748, 3.4903, -3.4903, 0.1913, -0.1913, 0.0720, -0.0720.$$

Dado que los valores propios de los Hamiltoniano son reales, se afirma que la solución $Q(t)$ y $S(t)$ existen. Sin embargo, al resolver (5.16) en MATLAB, la solución diverge aproximadamente en 5.74 segundos. Este problema ocurre debido a la exactitud con la que se debe establecer la condición inicial $Q(0)$.

Como solución alterna, se aplica el control H_∞ en promedio cuadrático para un intervalo de tiempo infinito.

5.4.2. Aplicación del Control H_∞ en Promedio Cuadrático en Estado Estacionario

Dado que el sistema (5.3)-(5.12) cumple con \bar{S}_3 , se implementa un controlador admisible para resolver el problema de control H_∞ .

Este controlador considera el estado estacionario de (5.15), (5.16) y (5.17) de acuerdo a [24]. A continuación se presenta $P(t)$, $Q(t)$ y $S(t)$ en estado estacionario.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_\infty = \begin{bmatrix} 0.0962 & 0.0138 & 0.0047 & 0.0034 \\ 0.0138 & 0.2434 & 0.0013 & 0.0297 \\ 0.0047 & 0.0013 & 0.0443 & 0.0125 \\ 0.0034 & 0.0297 & 0.0125 & 0.1111 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q_{\infty} = \begin{bmatrix} 4.4126 & -1.1264 & 0.4643 & -0.3218 \\ -1.1264 & 6.6877 & -0.1214 & 1.8332 \\ 0.4643 & -0.1214 & 0.0494 & -0.0347 \\ -0.3218 & 1.8332 & -0.0347 & 0.5133 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_{\infty} = \begin{bmatrix} 0.1277 & 0.0184 & 0.0047 & 0.0034 \\ 0.0184 & 0.3252 & 0.0013 & 0.0302 \\ 0.0047 & 0.0013 & 0.0443 & 0.0125 \\ 0.0034 & 0.0302 & 0.0125 & 0.1112 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Para asegurar la existencia del controlador en el intervalo de tiempo infinito se realiza el siguiente análisis.

Valores propios de P_{∞} : $\{0.0416, 0.0952, 0.1072, 0.2511\}$.

Valores propios de Q_{∞} : $\{0.0006, 0.01, 4.0233, 7.6292\}$.

Valores propios de $A - (B_1 B_1^T - \gamma^{-2} B_2 B_2^T) Q_{\infty}$: $\{-9.2718, -3.4914, -0.2622, -0.1451\}$.

Valores propios de S_{∞} : $\{0.0418, 0.1091, 0.1264, 0.3311\}$.

Valores propios de $A - S_{\infty} (C_2^T C_2 - \gamma^{-2} G^T G)$: $\{-9.2748, -3.4903, -0.0720, -0.1913\}$.

El máximo valor propio de $Q_{\infty} S_{\infty}$ es 2.3215 y γ^2 igual que 2.3220.

De los valores propios obtenidos se verifica que se cumplen las condiciones de la Proposición 3A; por tanto, el controlador H_{∞} en promedio cuadrático en estado estacionario existe y tiene la forma siguiente:

$$u(t) = \begin{bmatrix} -1.9212 & -0.1545 & -0.1087 & -0.0416 \\ 0.2179 & -1.4410 & 0.0235 & -0.4034 \end{bmatrix} \hat{X}(t), \quad (5.23)$$

donde $\hat{X}(t)$ es el estimado que satisface la ecuación diferencial siguiente.

$$d\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} -0.39341 & 14.510 & 1 & 0 \\ 14.510 & -1623.9 & 0 & 1 \\ -2.1334 & -15.625 & -9.5153 & -0.1073 \\ 2.4802 & -294.98 & 0.0158 & -3.6552 \end{bmatrix} \hat{X}(t)dt \quad (5.24)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.0962 & 0.0138 \\ 0.0138 & 0.2434 \\ 0.0047 & 0.0013 \\ 0.0034 & 0.0297 \end{bmatrix} dY_1 + \begin{bmatrix} 0.29716 & -14.524 \\ -14.524 & 1623.7 \\ -1.2886 & 15.227 \\ -2.6331 & 294.38 \end{bmatrix} Y_2 dt,$$

suponiendo la condición inicial $\hat{X}(0) = [0.1745, -0.5236, -0.15, -0.4]^T$.

5.4.3. Resultados Gráficos

En esta sección, se presentan los resultados gráficos obtenidos al aplicar la ley de control (5.23) al modelo no lineal que describe la dinámica real del helicóptero de dos grados de libertad.

La dinámica de la señal por controlar, conformado por las posiciones angulares y entradas de control, se presenta en las Figuras 5.7-5.10, en las cuales se aprecia que las señales tienden a disminuir su tamaño con forme transcurre el tiempo.

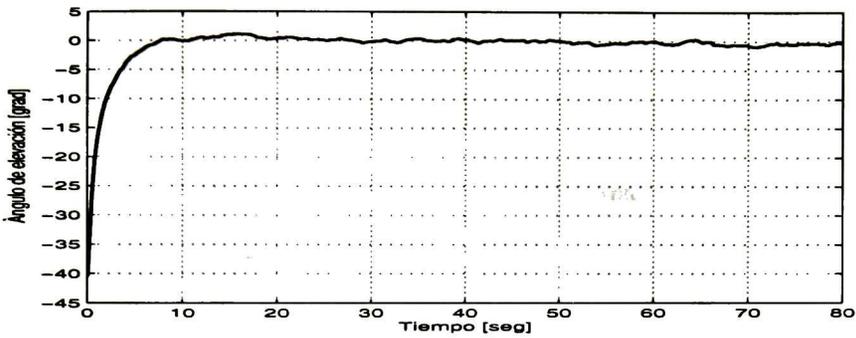


Figura 5.7: Ángulo de elevación

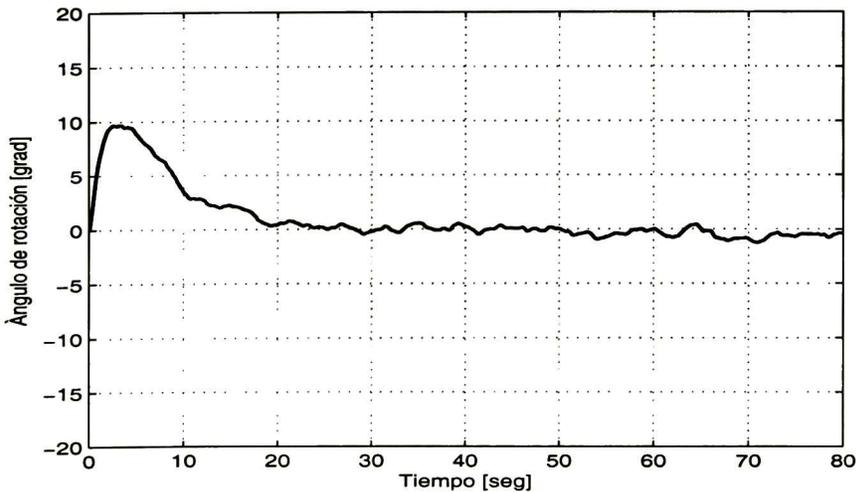


Figura 5.8: Ángulo de rotación

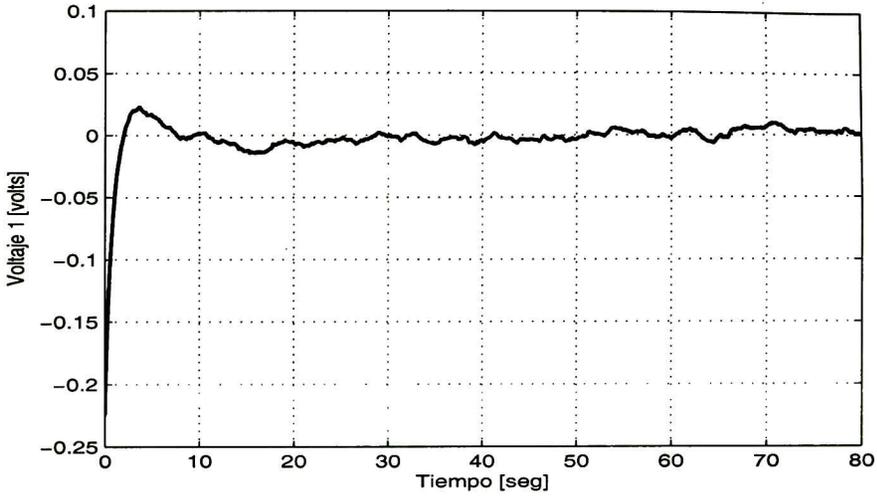


Figura 5.9: Voltaje para controlar la elevación

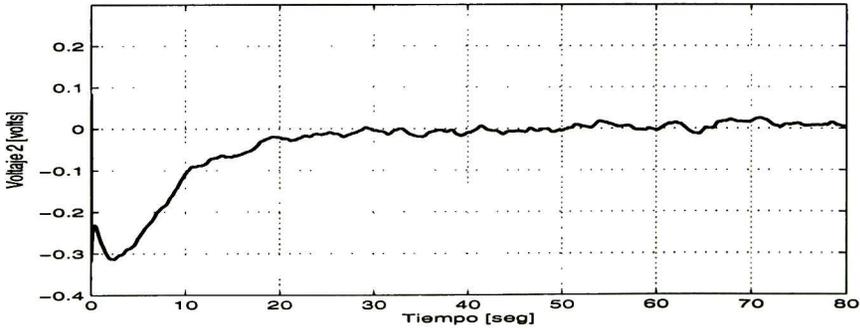


Figura 5.10: Voltaje para controlar la rotación

Aplicando la ley de control sobre la planta no lineal, la norma infinito del sistema en lazo cerrado en cada instante del tiempo se muestra en la Figura 5.11. El valor máximo alcanzado es 0.778, el cual cumple con el nivel de atenuación requerido.

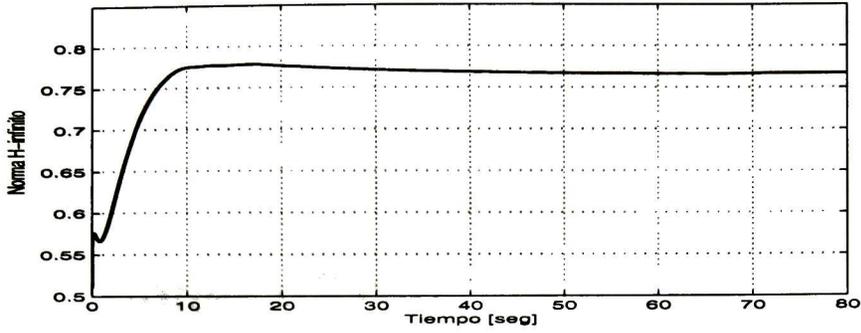


Figura 5.11: Norma H_∞ del sistema en lazo cerrado: $\|z\|_2/\|\omega\|_2$

Las perturbaciones, empleadas para afectar la dinámica de la planta, se muestran en la Figura 5.12. Se observa que éstas son funciones cuadrado integrables acotadas en el intervalo $[0, \infty)$.

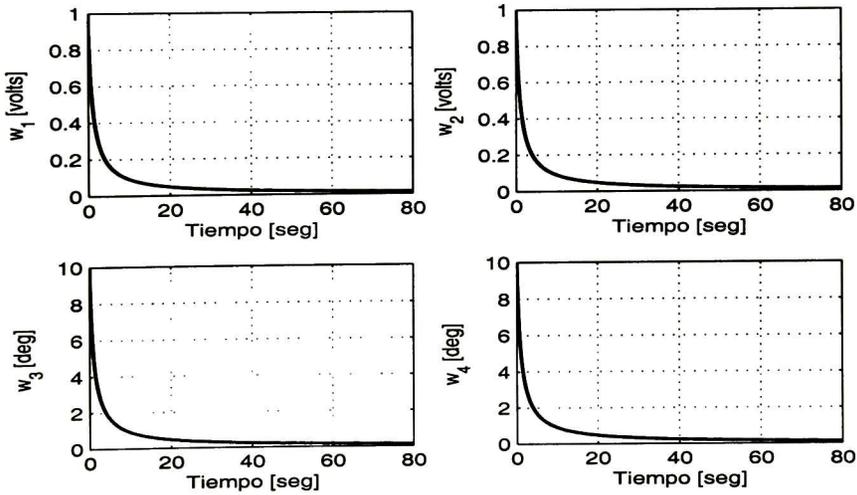


Figura 5.12: Perturbaciones en $\mathcal{L}_2[0, \infty)$

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1. Conclusiones

Con el desarrollo de este trabajo se han obtenido algoritmos para el controlador y el filtro en el sentido de la teoría H_∞ para sistemas estocásticos lineales afectados por perturbaciones en \mathcal{L}_2 , considerando intervalos de tiempo finito e infinito.

Los algoritmos desarrollados son sub-óptimos, puesto que sólo logran satisfacer un nivel de desempeño especificado. Por otro lado, si se consigue el mínimo en la atenuación entre la señal objetivo y la perturbación en \mathcal{L}_2 , se dice que el controlador o filtro es óptimo.

Para evaluar el desempeño de los algoritmos desarrollados, éstos se probaron a nivel simulación en dos sistemas estocásticos lineales dados; además se compararon con el controlador y el filtro H_∞ para los correspondientes sistemas determinísticos, obteniéndose niveles de atenuación menores con los algoritmos propuestos.

Finalmente los algoritmos desarrollados se aplicaron al helicóptero de dos grados de libertad, obteniéndose resultados satisfactorios.

6.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se propone, obtener el algoritmo de control y del filtro H_∞ en promedio cuadrático para sistemas estocásticos no lineales afectados por perturbaciones en \mathcal{L}_2 .

Bibliografía

- [1] O. Sename A. Fattou and J. Dion. H_∞ observer design for time-delay systems. *Proc. 37th IEEE Conf. Decision Control*, 50:4545–4546, 1998.
- [2] U. Shaked A. Pila and C. E. de Souza. H_∞ filtering for continuous-time linear systems with delay. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44:1412–1417, 1999.
- [3] M. V. Basin. *New trends in optimal filtering and control for polynomial and time-delay systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2008.
- [4] J. B. Burl. *Linear Optimal Control: H_2 and H_∞ methods*. Addison-Wesley, California, USA, 1998.
- [5] U. Shaked E. Fridman. On regional nonlinear H_∞ filtering. *Systems and Control Letters*, 29:233–240, 1997.
- [6] H. Gao and T. W. Chen. H_∞ estimation for uncertain systems with limited communication capacity. *IEEE Trans. Automat. Control*, 52:2070–2084, 2007.
- [7] H. Gao and C. Wang. Delay-dependent robust H_∞ and L_2 - L_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48:1661–1666, 2003.
- [8] H. Gao and C. A. Wang. A delay-dependent approach to robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52:1631–1640, 2004.
- [9] M. Greene and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1995.
- [10] L. Guo and J. Lam. Robust H_∞ performance problem for linear systems with nonlinear uncertainties in all system matrices. *International J. Systems Science*, 33:885–900, 2002.
- [11] L. Xie H. Gao, J. Lam and C. Wang. New approach to mixed H_2/H_∞ -filtering for polytopic discrete-time systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53:3183–3192, 2005.
- [12] P. P. Khargonekar J. C. Doyle, K. Glover and B. A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:831–847, 1989.
- [13] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, USA, 1970.

- [14] with J. C. Doyle K. Zhou and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1995.
- [15] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1980.
- [16] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering)*, 83:95–108, 1961.
- [17] B. K. Øksendal. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [18] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, USA, 1972.
- [19] W. M. McEneaney. Robust H_∞ filtering for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 33:315–325, 1998.
- [20] S. K. Mitter. Filtering and stochastic control: a historical perspective. *IEEE Control Systems Magazine*, 16:67–76, 1996.
- [21] K. M. Nagpal and P.P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an H^∞ setting. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36:152–166, 1991.
- [22] S. K. Nguang. Global robust H_∞ control for a class of nonlinear systems. *International J. Robust and Nonlinear Control*, 7:75–84, 1997.
- [23] S. K. Nguang and M. Y. Fu. Robust nonlinear H_∞ filtering. *Automatica*, 32:1195–1199, 1996.
- [24] K. M. Nagpal P.P. Khargonekar and K. R. Poolla. H^∞ control with transients. *SIAM J. Control and Optimization*, 29:1373–1393, 1991.
- [25] V. S. Pugachev. *Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers*. Pergamon, London, England, 1984.
- [26] V. S. Pugachev and I. N. Sinitsyn. *Stochastic Systems: Theory and Applications*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [27] U. Shaked. H infinity minimum error state estimation of linear stationary processes. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35:554–558, 1990.
- [28] B. S. Chen W. H. Zhang and C. S. Tseng. Robust H_∞ filtering for nonlinear stochastic systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53:589–598, 2005.
- [29] S. Xu and T. Chen. Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 47:2089–2094, 2002.
- [30] S. Y. Xu and T. W. Chen. Robust H_∞ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements. *Automatica*, 39:509–516, 2003.

-
- [31] S. Y. Xu and P. V. Dooren. Robust H_∞ filtering for a class of nonlinear systems with state delay and parameter uncertainty. *Int. J. Control*, 75:766–774, 2002.
- [32] Z. D. Wang Y. R. Liu and X. H. Liu. Robust H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems with mixed time delay. *International J. Robust and Nonlinear Control*, 17:1525–1551, 2007.
- [33] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to optimal linear estimation in the minimum H_∞ norm sense. *Proc. 28th IEEE Conf. Decision Control*, pages 421–425, 1989.
- [34] Y. Liu Z. D. Wang, D. W. C. Ho and X. Liu. Robust H_∞ infinity control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements. *Automatica*, 45:684–691, 2009.
- [35] C. S. Zhang Z. S. Duan, J. X. Zhang and E. Mosca. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42:1919–1926, 2006.
- [36] C. S. Zhang Z. S. Duan, J. X. Zhang and E. Mosca. A simple design method of reduced-order filters and its applications to multirate filter bank design. *Signal Processing*, 86:1061–1075, 2006.

Apéndice A

Optimización

La información presentada en este apéndice es tomado de [4].

A.1. Variación

La variación es una generalización de diferenciación, que es de gran utilidad en la teoría de control óptimo. Con esta herramienta es posible calcular la diferenciación de una función escalar real con respecto a una variable dependiente del tiempo.

Sea $J(x)$ una función escalar real. Se dice que $J(x)$ tiene un mínimo local en x^* si y sólo si

$$J(x^* + \delta x) \geq J(x^*) \quad (\text{A.1})$$

para todo δx suficientemente pequeño. Una forma equivalente de establecerlo es que

$$\Delta J(x^*, \delta x) = J(x^* + \delta x) - J(x^*) \geq 0.$$

Expresado $J(x^* + \delta x)$ en una serie de Taylor alrededor de x^* , la condición de optimalidad (A.1) puede ser escrita por

$$\Delta J(x^*, \delta x) = J(x^* + \delta x) - J(x^*) = \frac{dJ(x^*)}{dx} \delta x + \frac{d^2 J(x^*)}{\delta x^2} dx^2 + O \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

donde O incluye los términos de alto orden. Cuando J es una funcional (una función escalar real de funciones), δx se llama la variación de x , y el término en ΔJ que es lineal en δx se llama la variación de J y se denota con $\delta J(x^*, \delta x)$. La variación de J es una generalización de la diferencial y puede ser aplicado a la optimización de una funcional.

La condición necesaria para que x^* sea un mínimo local, es que $\delta J(x^*, \delta x)$ sea cero en x^* para todo δx . La condición anterior es sólo aplicable a problemas de minimización sin restricciones. Si el problema es con restricciones (la función de costo está sujeta a las restricciones sobre el estado y el control) es necesario formularlo como un problema de minimización sin restricciones.

A.2. Multiplicadores de Lagrange

El procedimiento para dar solución al problema de optimización con restricciones por medio de la solución del problema de optimización sin restricciones se llama método de multiplicadores de Lagrange. Considérese el problema en el cual se desea minimizar $J(x)$, donde x es un vector, tal que

$$c(x) = 0. \quad (\text{A.3})$$

La ecuación (A.3) establece una superficie en el espacio de x . Las condiciones necesarias para la optimización de $J(x)$ en el punto x^* es que x^* satisfaga (A.3) y que la derivada direccional de $J(x)$ en x^* sea cero en todas las direcciones de la superficie. La segunda condición se cumple si el gradiente de $J(x)$ es normal a la superficie en x^* . Por lo tanto, la segunda condición se cumple si el gradiente de $J(x)$ es paralelo al gradiente de $c(x)$ en x^* , es decir

$$\frac{\partial J(x^*)}{\partial x} + p \frac{\partial c(x^*)}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.4})$$

para algún escalar p . Ecuación (A.3) y (A.4) forman un conjunto de condiciones necesarias para dar solución al problema de optimización con restricciones. Las condiciones (A.3) y (A.4) pueden ser obtenidas como la solución a un problema de optimización sin restricciones con la función de costo:

$$J_a(x, p) = J(x) + pc(x), \quad (\text{A.5})$$

donde p es el multiplicador de Lagrange.

Con la nueva formulación del problema se puede aplicar la condición para que x^* sea un mínimo, tal como se estableció en el Apéndice A.1.

El método de multiplicadores de Lagrange se aplica en la Sección 2.5, para dar solución al problema de control de información completa.

A.3. Juegos Diferenciales

Un controlador H_∞ óptimo minimiza la ganancia del sistema, cuando se presenta la peor perturbación. Este problema puede ser visto como un juego con dos participantes: el diseñador, quien trata de obtener un control que minimice la ganancia, y la naturaleza, que busca una perturbación que maximice la ganancia. Juegos de este tipo son juegos diferenciales cuando la dinámica del juego está descrita por ecuaciones diferenciales.

Un juego diferencial está descrito por la dinámica del juego y la función objetivo. La dinámica del juego es modelada por la ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2\omega(t), \quad (\text{A.6})$$

donde $u(t)$ es la entrada de control, la cual es seleccionada por el diseñador, y $\omega(t)$ es la perturbación seleccionada por la naturaleza. La función objetivo es una función real (no necesariamente definida positiva) del estado, el control y la perturbación:

$$J\{x(t), u(t), \omega(t)\}. \quad (\text{A.7})$$

La solución del juego diferencial consiste de una trayectoria de control óptima $u^*(t)$ y de la perturbación entrante en el peor caso $\omega^*(t)$. Esta solución es necesariamente un punto silla de la función objetivo, la cual se define por la desigualdad siguiente:

$$J\{x(u^*, \omega), u^*(t), \omega(t)\} \leq J\{x(u^*, \omega^*), u^*(t), \omega^*(t)\} \leq J\{x(u, \omega^*), u(t), \omega^*(t)\}. \quad (\text{A.8})$$

El estado en función de las entradas, hace énfasis en que depende completamente del control y de la perturbación (con condición inicial cero para el estado).

Un punto silla se puede definir también como el argumento del problema mini-max:

$$\min_u (\max_{\omega} J\{x(u, \omega), u(t), \omega(t)\}).$$

Los multiplicadores de Lagrange pueden ser usados para convertir un problema mini-max con restricciones en uno sin restricciones de orden superior. Agregando la ecuación (A.6) a la función objetivo (A.7) se obtiene la función objetivo aumentada:

$$J_a(x, u, \omega, p) = J(x, u, \omega) + \int_0^{t_f} p^T(t) \{Ax(t) + B_a u(t) + B_{\omega} \omega(t) - \dot{x}(t)\} dt. \quad (\text{A.9})$$

Una condición necesaria para un punto silla es que la variación de la función objetivo aumentada (con respecto a la perturbación en el estado, al control, la perturbación y el multiplicador de Lagrange) sea cero.

Apéndice B

Publicaciones

En revista:

- M. V. Basin, S. Elvira-Ceja, and E. N. Sanchez, “Central Suboptimal Mean-Square H_∞ Controller Design for Linear Stochastic Time-Varying Systems”, *International Journal of Systems Science*, 2010.

En congresos:

- M. V. Basin, S. Elvira-Ceja, and E. N. Sanchez, “Central Suboptimal Mean-Square H_∞ Controller Design for Linear Stochastic Systems”, *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Yokohama, Japan, September, 2010.
- M. V. Basin, S. Elvira-Ceja, and E. N. Sanchez, “Central Suboptimal Mean-Square H_∞ Filter Design for Linear Stochastic Time-Varying Systems”, *8th International Symposium on Intelligent Automation and Control*, Kobe, Japan, September 2010.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

"2010, Año de la Patria, Bicentenario del Inicio de la Independencia
y Centenario del Inicio de la Revolución"

Guadalajara, Jalisco, a 29 de Octubre de 2010

Lic. María Eugenia Romero Valencia
Subdirector de posgrado
CINVESTAV del IPN
Presente.

La presente es para informar a usted que el Comité Tutorial aprueba el contenido de la tesis de **MAESTRÍA** del (la) C.

Jose Santiago ELVIRA CEJA

titulada

Técnicas H-Infinito en Sistemas Estocásticos

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Mikhail Valentinovich Basin
Profesor Investigador 1A
Universidad Autónoma de Nuevo León



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0009810