

EC-618

Don. - 2011

xx(178992.1)

TK165.G8

L68

2010



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Consenso y seguimiento de referencia de una clase de sistemas lineales SISO

CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS

Tesis que presenta:

Carlos Aurelio López Limón

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. José Javier Ruíz León
Dr. Antonio Ramírez Treviño

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, Agosto de 2010.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

Consenso y seguimiento de referencia de una clase de sistemas lineales SISO

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Carlos Aurelio López Limón
Ingeniero en Electrónica

Universidad Politécnica de Aguascalientes 2003-2006

Becario de CONACYT, expediente no. 219300

Directores de Tesis

Dr. José Javier Ruíz León
Dr. Antonio Ramírez Treviño

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2010.

CLASIF.: JK165.G8 L68 2010
ADQUIS.: PC-618
FECHA: 14-Julio-2011
PROCED.: Don. - 2011
\$

10: 173974-1001

Resumen

Se propone una ley de control para lograr que un grupo sistemas alcance el consenso y seguimiento de trayectoria. Se utiliza un líder virtual para generar una trayectoria, la cual los elementos del grupo deben seguir. Los modelos de los sistemas pueden ser distintos, incluso en la dimensión de su espacio de estados, pero el grado relativo debe ser el mismo para todos. La topología de comunicación puede cambiar, pero aún así el consenso y seguimiento de referencia se deben garantizar por la acción de control.

Abstract

A control law to achieve that a group of systems reach consensus and tracking is proposed. A Virtual leader is used to generate the reference trajectory, which the elements of the group must follow. The system's model may be different, even in the dimension of its state space, but the relative degree must be the same for everyone. Communication topology can change but the consensus and tracking must be guaranteed by the controller.

Agradecimientos

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico y al CINVESTAV por el apoyo tanto material como humano brindado para la realización de esta tesis.

A mis asesores el Dr. José Javier Ruíz León y el Dr. Antonio Ramírez Treviño en primera instancia por su apoyo, aceptación y confianza para el desarrollo del presente trabajo y la realización del mismo, así como por sus enseñanzas, su paciencia y todo el tiempo extra dedicado a la realización de este trabajo, también por su predisposición permanente e incondicional a aclarar mis dudas y por sus sustanciales sugerencias durante la realización de la presente tesis.

A mis queridos compañeros de control automático y computación por todo su apoyo incondicional.

Dedicatoria

A mis padres, Federico Guillermo López Macías y Dolores Limón Ramos por su amor, comprensión y apoyo en todo momento, porque nos han sacado adelante a mi hermana y a mí.

A mi hermana, Ana Rosa López Limón por la ayuda y apoyo brindado cuando lo necesitaba.

A mis amigos y compañeros de control y computación por brindarme su apoyo en todo momento.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
1. Introducción	1
1.1. Definiciones básicas de consenso	2
1.2. Revisión bibliográfica	4
1.3. Objetivos y Metas	10
1.4. Estructura de la Tesis	11
2. Conceptos Básicos	13
2.1. Sistemas Híbridos	14
2.1.1. Eventos de conmutación	15
2.1.2. Sistemas Lineales Conmutados	18
2.2. Estabilidad de Sistemas Conmutados	18
2.2.1. Estabilidad de Sistemas Lineales Conmutados	22
2.3. Consenso	24
2.3.1. Topologías de comunicación	24
2.3.2. Algoritmo de consenso	27

2.3.3. Algoritmo de consenso para dinámicas de un integrador	30
2.4. Seguimiento asintótico de salida	35
3. Diseño del control	39
4. Aplicación de la ley de control	49
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	57
5.1. Conclusiones	57
5.2. Trabajo Futuro	58
A. Sistemas en la forma normal	59

Capítulo 1

Introducción

Actualmente los trabajos sobre formación de vehículos autónomos (tales como robots, aviones, carros, etc.) ha ganado gran interés en la comunidad científica ya que, a partir de las formaciones, se puede llegar a la realización de tareas y trabajos cooperativos de diversa índole. Por ejemplo, si se trata de transportar equipo o piezas pesadas o material peligroso que ningún vehículo pueda cargar por sí solo, varios vehículos manteniendo la formación apropiada lo pueden lograr. Otro ejemplo puede ser el tráfico vehicular, donde el avance de los carros guardando formaciones permite avanzar más rápido y consumiendo menos energía. Otros ejemplos se dan en exploraciones submarinas o espaciales, así como en formaciones militares.

En este trabajo se aborda el problema de varios sistemas lineales manteniendo una formación y seguimiento de una trayectoria simultáneamente, donde el modelo dinámico de los sistemas lineales es heterogéneo (i.e. no todos los sistemas lineales son iguales) y por otro lado existe una red de comunicaciones entre los sistemas, cuya estructura y protocolos son transparentes para este trabajo y se supone que nunca falla. Sin embargo, dado que los sistemas lineales evolucionan dentro de la formación, la topología (i.e. la comunicación directa entre sistemas) de la red puede cambiar.

Este escenario no ha sido tratado en la literatura en su totalidad, sin embargo ya existe un gran número de reportes donde algunos de los problemas ya han sido abordados. El problema así planteado está dentro de los problemas de consenso, donde

el conjunto de sistemas debe ponerse de acuerdo para guardar la formación, también es un problema de seguimiento de trayectoria por múltiples objetos y finalmente el sistema (sistemas lineales y red de comunicaciones) es un sistema híbrido, ya que la estructura del sistema cambia bruscamente con la ocurrencia asíncrona de un evento (cambio de topología de la red, llegada o salida de vehículos, lo que agrega complejidad al problema.

Los problemas relacionados de por qué se elige una formación, trayectoria a seguir o número de sistemas dependen de la misión a realizar, el ambiente donde se desenvuelven los sistemas y las estrategias de optimización, estos problemas, sin embargo, no son abordados en este momento y se dejan para un trabajo futuro.

1.1. Definiciones básicas de consenso

En líneas anteriores se dijo que se aborda el tema de seguimiento de trayectoria manteniendo una formación. De acuerdo con [1] este problema cae dentro del tema de consenso, donde los sistemas se ponen de acuerdo para mantener la formación. Para llegar al consenso se debe lograr que cada sistema conozca el estado del resto. Esto se logra seleccionando una topología de comunicación o de red adecuada. A continuación se presenta la definición de topología de red.

Definición 1.1. *Una topología de comunicación (a veces llamado protocolo en el contexto de consenso) o red, se define como el conjunto de reglas de interacción y especifican el intercambio de información entre un agente y todos sus vecinos en la red [1].*

En este caso los agentes serán los sistemas lineales y la topología de comunicaciones define cuáles sistemas se comunican entre sí y cuáles lo hacen a través de otros sistemas que funcionan como intermediarios para la red de comunicaciones. Además define el intercambio de información que existe entre los elementos.

El papel que desempeña la red de comunicaciones en el trabajo cooperativo es primordial y de manera intuitiva se puede asegurar que *el compartir información es una condición necesaria para la cooperación [2].*

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo no se aborda el diseño de la red de comunicaciones, y se toma como un medio de transporte de información que no introduce retardos, nunca falla y tiene una topología que se describe por un grafo conexo, donde los nodos son los sistemas y las aristas la comunicación bidireccional entre ellos. En otras palabras, cualquier par de sistemas se puede comunicar entre sí. Este tipo de topología es necesaria para poder resolver el consenso en el grupo de agentes [1]. Entonces el problema de consenso se define como sigue.

Definición 1.2. *Consenso, en redes de agentes o SMA, significa coincidir hacia cierto valor de interés que depende del valor de los estados de los agentes [1].*

Es decir, los estados de los agentes (sistemas lineales en este trabajo) llegan a un valor común, lo cual se logra mediante un algoritmo llamado de consenso. En ciertas ocasiones, el consenso puede mantener ciertas distancias entre agentes, así como orientaciones y alineamientos entre ellos, en este caso se dice que al llegar al consenso se ha llegado también a una formación. Las formaciones son un punto primordial al momento de realizar trabajo cooperativo, pues le indica a cada sistema la posición que debe tener con respecto a los demás elementos del grupo para realizar una tarea.

En este trabajo no se aborda el problema de por qué generar cierta formación, pero sí de cómo generarla y hacer que los sistemas se auto organicen para lograr la formación solicitada. Este problema ha sido abordado por otros autores, pero sin tomar en cuenta la dinámica de los sistemas, lo cual consideramos un problema porque en general el comportamiento de los agentes no puede desarrollar cualquier trayectoria (por ejemplo líneas con ángulos de noventa grados); también ha sido abordado pensando que todos los vehículos son iguales, pero esto es una limitante, ya que por lo general, los sistemas son diferentes.

Finalmente, otro tema que también aborda este trabajo es el de seguimiento de trayectoria por múltiples sistemas. Este tema se ha tratado en la literatura desde diferentes puntos de vista [3], [4], [5], [6], [7], [8], sin embargo en esos casos se supone que la red de comunicaciones conmuta de acuerdo a ciertas reglas definidas a priori, suposición que no siempre es cierta, dado que a lo largo de la evolución la topología

puede cambiar debido al estado de los sistemas o a condiciones ambientales. Cuando se toma en cuenta esta característica, las ecuaciones que miden el error de la formación cambian bruscamente, dando lugar a sistemas híbridos.

Aunque existe una definición de seguimiento de trayectoria en [9] para sistemas dinámicos, para el caso de consenso y seguimiento de trayectoria la comunidad científica hace referencia a la siguiente definición.

Definición 1.3. *En sistemas multiagentes, el seguimiento de trayectoria y formación se refiere a que un punto arbitrario de la formación, pero fijo con respecto al centro geométrico de la formación, siga una trayectoria especificada a priori.*

Así, puede darse el caso que ningún sistema siga la trayectoria especificada, pero el grupo siempre evoluciona manteniendo una formación, donde un punto ficticio dentro de la formación sigue la trayectoria fijada. Puede tomarse como ejemplo el caso donde se mueven construcciones de un sitio a otro, montando la construcción sobre gatos móviles. Los gatos se colocan debajo de los castillos y puntos de carga de la casa y no necesariamente uno de ellos coincide con el punto que se elige para controlar todo el desplazamiento de la formación.

1.2. Revisión bibliográfica

En [1] se presenta un marco teórico para el análisis de los algoritmos de consenso de SMA, mencionando la importancia del flujo de la información, robustez del sistema bajo cambios de la topología de comunicación por causas de fallas, tiempos de retardo en las comunicaciones, entre otros aspectos. Se proporciona una visión general de los conceptos básicos del consenso de la información en las redes así como los métodos de convergencia y análisis de rendimiento de los algoritmos. El marco de análisis se basa en herramientas de álgebra lineal, teoría de grafos y teoría de control. Se discute la relación entre el problema de consenso en una red de sistemas y sus aplicaciones, incluyendo la sincronización de osciladores acoplados, control de formaciones, balanceo de carga en redes, entre otros. Éste es sólo una recopilación de los trabajos referentes a consenso.

En los trabajos presentados en [10], [11], [12], [13] se aborda el problema fundamental de sincronizabilidad de redes desde un enfoque gráfico-teórico y se presentan algunos ejemplos de osciladores. Se discute la relación entre la sincronizabilidad y parámetros estructurales de la red, tales como la distancia promedio y la distribución de grado. Se establece una teoría básica de subgrafos y grafos complementarios para estimar la sincronizabilidad. Además se presentan condiciones de necesidad y suficiencia para determinar una equivalencia entre la sincronizabilidad de una red y su red complementaria. Aquí se trata el problema del consenso pero el problema de seguimiento de referencia no es tocado.

En [14], [15], [16] se trabaja con las redes de sensores y observabilidad. Se realiza una caracterización del sensado bajo una topología de comunicación con ruido. Se analiza la relación entre la observabilidad de la red y los grafos dirigidos entre los agentes. Se realiza un análisis de la estabilidad de los sistemas con observador.

En [17] se introducen algoritmos de consenso, tanto lineales como no lineales, de *SMA* para alcanzar una forma cooperativa de forma distribuida. Se considera el caso cuando las topologías de comunicación cuentan con retardos y canales que tienen efectos de filtrado. Se analiza la convergencia, empleando una función de Lyapunov, de una clase de consenso no lineal utilizando señales de control acotadas. No se manejan topologías variantes en el tiempo y los agentes son solamente de dinámica tipo integrador.

Las propiedades de estabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo se analizan en [18], pues esta clase de problemas se presenta en el problema de control distribuido y sincronización de *SMA* cuando las topologías de comunicación varían en el tiempo. Se muestran condiciones suficientes para garantizar la estabilidad exponencial.

En el trabajo mostrado en [19] se da un riguroso análisis matemático de la dinámica de un sistema que consiste de varios robots móviles, los cuales se desplazan de manera coordinada utilizando sólo la información de los agentes cercanos. Se muestran las condiciones bajo las cuales se alcanza el consenso. Pero sólo muestra dinámicas de un integrador y no habla del seguimiento de referencia.

En [20] se discute el problema de *SMA* con topologías de comunicación variantes en el tiempo. Se analizan topologías de comunicación variantes sin retardos en el tiempo y

topologías fijas pero con retardos en el tiempo. Para cada caso se presentan algoritmos distribuidos de consenso y se proveen los análisis de convergencia para los algoritmos propuestos. Se presenta un análisis de estabilidad considerando al *SMA* como un sistema conmutado y se busca una función de Lyapunov común. Aunque la velocidad de la conmutación está limitada por la dinámica de los agentes, los cuales se consideran como sistemas de un integrador.

En [3] se analiza el control de formaciones de vehículos considerando una función de costo para el movimiento, es decir, se propone un control óptimo. Utiliza herramientas de control lineal para el análisis. Se propone un método descentralizado para el control de los vehículos para el trabajo cooperativo. Aunque trata dinámicas lineales en general no manejan dinámicas distintas entre los agentes y sólo se enfoca en el consenso, dejando a un lado el seguimiento de referencia.

El problema de la cooperación entre un conjunto de vehículos es presentado en [4], donde se requiere realizar una tarea compartida utilizando una comunicación entre vehículos, con el fin de coordinar sus acciones. Se aplican herramientas de teoría de grafos para relacionar la topología de comunicación con la estabilidad de la formación. Se prueba un criterio de Nyquist que utiliza los valores propios de la matriz del Laplaciano, relacionado la topología de comunicación, para determinar el efecto del grafo en la estabilidad de la formación. También se propone un método de intercambio de información descentralizada entre los vehículos, este enfoque provee un sistema dinámico que proporciona a cada vehículo una referencia común usada para el movimiento del conjunto. Se realiza la prueba de un principio de separación, éste indica que la estabilidad de la formación es alcanzada si el flujo de información es estable para un grafo dado y si además el controlador local estabiliza al vehículo. Sin embargo, en este trabajo no se maneja el seguimiento de una señal de referencia.

En [21] se propone un algoritmo de consenso descentralizado, cada agente utiliza sólo la información de sus vecinos para alcanzar el consenso. Se estudia el caso de las formaciones y del trabajo cooperativo entre agentes. Muestra resultados de convergencia para los algoritmos presentados y prueba la estabilidad del sistema lineal conmutado presente en los *SMA* con topologías de comunicación variantes en el tiempo. Pero sólo

trata dinámicas de un integrador y no maneja el seguimiento de referencia.

Los resultado de [22] tratan el problema de consenso de *SMA* bajo topologías con información limitada o poco fiable. Se analiza tanto el esquema continuo como el discreto en el flujo de la información. Se muestra que el consenso bajo topologías de comunicación cambiantes en el tiempo, puede ser alcanzado si la unión entre los grafos, para ciertos intervalos de tiempo, tienen un árbol de expansión. Aunque maneja topologías variantes en el tiempo, sólo maneja dinámicas de un integrador y no trata el seguimiento de referencia.

En [23] se presenta un marco teórico para el diseño y análisis de algoritmos distribuidos para la migración de grupos grandes de agentes, esto es mejor conocido como *flocking*. Para el desplazamiento se maneja tanto un espacio libre como uno con obstáculos. Se utilizan agentes virtuales para la migración de los grupos de agentes. Se analiza la convergencia de los algoritmos propuestos. Pero no maneja un seguimiento de trayectoria como tal y sólo maneja dinámicas de un integrador.

Una ley de control por retroalimentación es propuesta en [5] para alcanzar formaciones predefinidas para un *SMA*. Se utilizan agentes virtuales como líderes para lograr que el grupo de agentes siga un camino deseado. Se maneja un control para cesar las comunicaciones entre agentes bajo ciertas condiciones y se analizan los algoritmos con un control en la comunicación. Aunque sólo maneja agentes con dinámicas iguales y de un integrador.

En el trabajo presentado en [6] se desarrolla un método general de diseño de controladores para preservar la formación con el trazado de trayectorias de los agentes y se analiza bajo topologías cambiantes en el tiempo, todo esto sólo para dinámicas de un integrador. Sin embargo no se asegura un seguimiento de la trayectoria con error cero y no se manejan dinámicas más complejas y mucho menos diferencias entre ellas.

El problema del consenso de *SMA*, con retardos no uniformes en el tiempo en la comunicación, es tratado en [24]. Se introduce un algoritmo lineal para realizar el control del consenso para agentes con dinámicas de dos integradores. Mediante propiedades de matrices no negativas se obtienen condiciones de necesidad y suficiencia para alcanzar el consenso de los sistemas. Pero no trata el seguimiento de referencia ni dinámicas

distintas entre los agentes del *SMA*.

En [2] se presenta una revisión general del problema de consenso así como de algunos algoritmos básicos. Se muestran condiciones de necesidad y suficiencia para alcanzar el consenso bajo topologías de comunicación tanto invariantes en el tiempo como dinámicas. Tanto la comunicación continua como la discreta es considerada, así como entradas de control acotadas. Además se incluye el problema del consenso con seguimiento de una señal de referencia y las condiciones necesarias para que un *SMA* logre alcanzarlo, pero todo esto sólo para dinámicas de agentes de uno o dos integradores.

En el trabajo mostrado en [7] se analizan varias técnicas de control cooperativo para *SMA* donde los agentes son vehículos terrestres o aéreos, las dinámicas presentadas son más complejas y enfocadas a elementos móviles. Sin embargo no presenta el caso cuando los agentes tienen dinámicas distintas entre ellos.

Se considera el problema de seguimiento de trayectoria para *SMA* en [8]. También se analiza la evasión de obstáculos mediante campos potenciales. Se trabaja con un control distribuido y considerando sólo la información de los vecinos. Pero tampoco trata el caso donde la dinámica de algún agente es distinta a los demás elementos del *SMA*.

Los resultados de [25] presentan una estructura de control distribuido para *SMA* donde los agentes se consideran como sistemas lineales. Se realiza una parametrización y relación de las estructuras geométricas de los controles de coordinación para *SMA* con topologías fijas. Se obtienen condiciones de necesidad y suficiencia para caracterizar la estabilidad de los controladores de consenso, además se considera el caso de topologías de comunicación que conmutan. Sin embargo la velocidad de conmutación está limitada por el polo más lento del sistema y sólo se consideran dinámicas iguales para los agentes. El diseño del control es bastante complejo.

El problema de consenso líder-seguidor (*leader-follower*) de *SMA* con una topología de comunicación invariante en el tiempo es propuesto en [26]. Además se incluye observador lineal basado en mediciones de la salida y se muestra que la estabilidad del consenso líder-seguidor de *SMA* puede ser probada mediante matrices. Se presenta el diseño del observador y condiciones de necesidad y suficiencia, esto para la estabilidad

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

del sistema en lazo cerrado y para el sistema con el observador. Aunque se manejan sistemas lineales de múltiple entrada y salida, la topología es fija, sólo se presenta la existencia del control pero no su diseño y las dinámicas de los agentes son iguales.

Hasta ahora se han recapitulado algunos trabajos relacionados con *SMA*, donde se analiza el consenso de los sistemas, pero la mayoría sólo con dinámicas de uno o dos integradores y donde se manejan dinámicas más complejas, como sistemas lineales en general y sistemas no lineales de agentes móviles, realmente no tratan el problema del seguimiento de trayectoria como tal, pues le dan mayor importancia a la formación y no aseguran un seguimiento asintótico de la salida. Además, para los sistemas con dinámicas más complejas, generalmente sólo se demuestra la existencia de una ley de control. Este trabajo se centra en el diseño de una ley de control para *SMA*, donde las dinámicas de los agentes son sistemas lineales *SISO*, esta ley de control abarca tanto el consenso como el seguimiento de una función de referencia además de asegurar un seguimiento asintótico de la salida y la estabilidad de los agentes.

Además, este trabajo considera topologías cambiantes en el tiempo, que a diferencia de los trabajos anteriores, no presenta tantas limitaciones en la velocidad de conmutación, a excepción de los *SMA* con agentes de dinámicas de uno o dos integradores. En los resultados anteriores a este trabajo sólo se aseguraba la convergencia de los algoritmos de consenso, pero solo si la velocidad con la que conmuta la topología de comunicación es menor a la velocidad del estado más lento de la dinámica del los agentes, pero ésto es muy limitante ya que en un ambiente real no es posible conocer en que momento va a cambiar la topología de comunicación.

Otra diferencia con los trabajos anteriores y quizá la más importante es que se introduce el consenso de *SMA* donde los agentes tienen dinámicas distintas entre ellos, es decir, los sistemas lineales que los representan no son iguales, incluso se analizan los casos cuando el espacio de estados es diferente.

1.3. Objetivos y Metas

El escenario de trabajo es un conjunto de sistemas, cada uno representado por su ecuación diferencial lineal de una sola entrada y una sola salida (SISO). Las ecuaciones no tienen por que ser iguales ni del mismo número de estados. La topología de comunicaciones puede cambiar abruptamente de acuerdo a una señal discreta externa.

Objetivos:

- Establecer mecanismos de consenso para el sistema anteriormente descrito. Las consignas que se le den a cada sistema deben ser físicamente realizables por los agentes.

Establecer condiciones para que el sistema anteriormente descrito pueda seguir una trayectoria manteniendo el consenso.

- Proponer leyes de control para que los mecanismos dados en los puntos anteriores garanticen la estabilidad del sistema para cualquier posible topología de comunicaciones dada.

Metas:

- Definir al problema de formación de agentes (consenso) como un problema de control.
- Proponer leyes de control estables para garantizar el consenso bajo cualquier posible topología.
- Definir el problema de seguimiento de agentes en formación como un problema de control.

Proponer leyes de control estables para garantizar el seguimiento de trayectoria de la formación.

1.4. Estructura de la Tesis

Esta tesis est organizada de la siguiente manera.

- **Capítulo 2:** En este capítulo se presentan los conceptos básicos relacionados con los sistemas híbridos, estabilidad, consenso, topologías de comunicación y seguimiento de referencia para sistemas lineales tipo *SISO*. Además se muestran condiciones bajo las cuales se puede encontrar una ley de control estable que garantiza el consenso de *SMA*, esto para agentes con dinámicas de un integrador.
- **Capítulo 3:** En este capítulo se presenta formalmente al problema a tratar. Se explica el diseño de la ley de control para alcanzar el consenso y seguimiento de una función de referencia también se presenta la demostración de la estabilidad del control propuesto para los *SMA*.
- **Capítulo 4:** Aquí se presentan algunos ejemplos donde se muestra como es alcanzado el consenso y seguimiento de referencia de dos *SMA*, gracias a la acción del control diseñado. El control es probado tanto para una topología fija como para una variante en el tiempo, además las dinámicas de los agentes son iguales en un caso y en el otro son distintas.
- **Capítulo 5:** En este capítulo, finalmente se presentan las conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

En este capítulo se presentan conceptos y resultados previos en los cuales se ha basado este trabajo. En la sección 2.1 se presentan definiciones y resultados acerca de sistemas híbridos, enfocándose en los sistemas conmutados y las diferentes clases de conmutación así como en los sistemas lineales conmutados, estos últimos son los de mayor interés para el presente trabajo.

En la sección 2.2 se presentan importantes conceptos y resultados sobre la estabilidad de sistemas conmutados. Se parte de una definición general y finalmente se expone un concepto de estabilidad para sistemas lineales conmutados donde, sí es posible encontrar una función de Lyapunov común para todos los subsistemas que conforman al sistema híbrido, nos permite asegurar la estabilidad asintótica del sistema.

La sección 2.3 presenta una visión general del problema de consenso, así como una revisión de los algoritmos básicos para alcanzar una formación deseada además de seguir una señal de referencia pero solamente manejando dinámicas de un integrador. También se muestran resultados de como alcanzar el consenso bajo topologías de comunicación tanto invariantes en el tiempo como variantes en el tiempo, especialmente las topologías de comunicación que conmutan.

La sección 2.4 trata del diseño de una ley de control para sistemas lineales, ésta asegura un seguimiento asintótico de la salida de una función de referencia deseada. En esta última sección sólo se considera un sistema lineal, es decir, no se manejan conjuntos

de sistemas ni topologías de comunicación, propias de un SMA.

2.1. Sistemas Híbridos

Muchos sistemas encontrados en la práctica presentan un acoplamiento entre dinámicas continuas y eventos discretos. Dichos sistemas, donde ambos tipos de dinámicas están presentes e interactúan entre sí, son generalmente llamados *sistemas híbridos*.

Algunos ejemplos de fenómenos físicos que dan lugar a un comportamiento híbrido son: la apertura y cierre de una válvula o un interruptor; el cambio de estado de apagado a calentar un termostato; el proceso de crecimiento o división en células biológicas; el proceso de ingreso, cruce, o salida de una aeronave en una zona de control de tráfico aéreo; etc.

En la mayoría de los casos, la parte continua de los sistemas físicos puede ser modelada mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & x(t_0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo del dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y de forma similar $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^q$. Las variables $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^p$, $y \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}^q$, con \mathcal{X} , \mathcal{U} y \mathcal{Y} son los espacios de los estados, entradas y salidas respectivamente, x_0 es la condición inicial de los estados.

Los sistemas híbridos continuos en el tiempo con eventos discretos de conmutación se conocen como *sistemas conmutados (SC)*.

Un SC se representa por una familia de subsistemas dinámicos continuos

$$S_i : \begin{cases} \dot{x} = f_i(t, x, u), & x(t_0) = x_0 \\ y = h_i(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, para $i = 1, 2, \dots, k$, es un conjunto finito de subsistemas continuos además consta de una dinámica discreta que determina cul subsistema S_i está en evolución en el tiempo t , a continuación se analizan los casos de cómo pueden

ocurrir los eventos de conmutación de la dinámica discreta.

2.1.1. Eventos de conmutación

Los *SC* se catalogan por la forma en que ocurre la conmutación. Una clasificación es:

- Conmutación dependiente de los estados contra dependiente del tiempo,
- Conmutación controlada contra autónoma

Conmutación dependiente de los estados

Con esta clase de conmutación, el espacio de estados \mathcal{X} se particiona en un número finito o infinito de *regiones de operación*, donde está definido un subsistema dinámico para cada una de ellas. La separación entre regiones de operación se realiza a través de las *superficies de conmutación*. Estas superficies determinan la transición del subsistema S_i al S_j . Los sistemas con este tipo de conmutación se pueden especificar por:

- El conjunto de superficies de conmutación y las regiones de operación resultantes

La familia de subsistemas dinámicos, uno por cada región de operación

El mapa de restablecimiento (función de las condiciones iniciales para cada S_i)

En la Fig. 2.1 se observa el ejemplo de un espacio de estados en \mathbb{R}^2 , el cual está separado por las superficies de conmutación (líneas gruesas punteadas). Las líneas continuas denotan la trayectoria de estados y las líneas punteadas simbolizan los saltos de estado, los que se conocen como *efecto impulso*. Cuando el *efecto impulso* no se presenta, el mapa de restablecimiento es la identidad, por lo que la trayectoria de estados es continua en todas partes, aunque generalmente se pierde diferenciabilidad cuando se pasa por una superficie de conmutación.

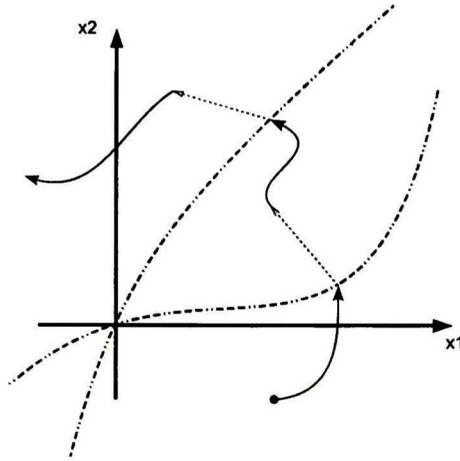


Figura 2.1: Conmutación dependiente de estados

Conmutación dependiente del tiempo

Sea una familia de subsistemas que evoluciona en \mathbb{R}^n

$$S_p, \quad p \in P \quad (2.3)$$

donde P es un subconjunto finito con $p = 1, 2, \dots, k$. La señal de conmutación, determinada por la parte discreta del sistema, es una función constante a tramos $\sigma : [0, \infty) \rightarrow P$. La función σ tiene un número finito de discontinuidades, llamadas *tiempos de conmutación*, en cada intervalo finito de tiempo y toma un valor constante en cada intervalo entre dos tiempos de conmutación consecutivos. La función σ especifica, para cada instante de tiempo t , el índice $\sigma(t) \in P$ del conjunto S , y por lo tanto indica qué subsistema S_i está evolucionando. La función σ es continua por la derecha,

$$\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau), \quad \text{para todo } \tau \geq 0, \quad (2.4)$$

entonces siempre existe un subsistema continuo activo, y sólo uno, para cada instante de tiempo.

Así un *SC*, cuya conmutación depende del tiempo, se describe por la ecuación

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(t, x, u) \quad (2.5)$$

donde la función σ es el sistema discreto, dependiente del tiempo, que indica la ley de conmutación entre los subsistemas continuos.

En la Fig. 2.2 se muestra un ejemplo con una señal de conmutación con $p = 1, 2$.

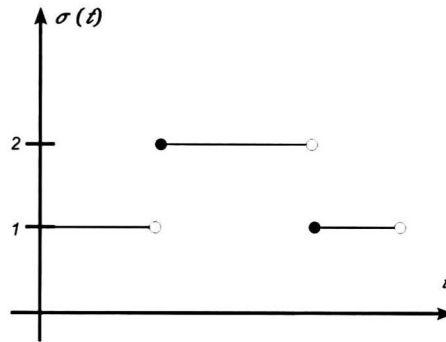


Figura 2.2: Señal de conmutación dependiente del tiempo

Conmutación autónoma y controlada

Un evento de conmutación autónomo está presente donde el mecanismo de conmutación que dispara el evento discreto no se controla directamente. En esta categoría se incluyen los *SC* de conmutación dependiente de los estados, en donde la ubicación de las *superficies de conmutación* está predeterminada por el valor de los estados, también se incluyen los sistemas de conmutación dependiente del tiempo cuando los tiempos de

conmutación son desconocidos.

2.1.2. Sistemas Lineales Conmutados

El caso particular de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo (SL) se representa mediante

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

donde A , B y C de matrices con las dimensiones adecuadas y con todos sus elementos constantes. Así, un *sistema lineal conmutado (SLC)* es una dupla $\mathcal{G} = \langle \mathcal{S}, \sigma_t \rangle$, donde $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ es un conjunto de SL y $\sigma_t : [t_0, \infty) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ es la señal de conmutación que determina qué SL está evolucionando en el tiempo t :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{\sigma_t}x(t) + B_{\sigma_t}u(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y &= C_{\sigma_t}x(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde A_{σ_t} , B_{σ_t} y C_{σ_t} son matrices constantes de las dimensiones apropiadas. Para el caso de sistemas lineales *SISO* las dimensiones de las matrices B_{σ_t} , C_{σ_t} son de $n \times 1$ y $1 \times n$ respectivamente.

2.2. Estabilidad de Sistemas Conmutados

En esta sección se presentan algunas nociones de estabilidad para los SC , la estabilidad es una de las propiedades más importantes de los sistemas dinámicos, ésta toma un papel importante en el análisis de sistemas, especialmente en el área de control.

Antes de continuar, se definirá que es un *sistema autónomo*.

Definición 2.1. *Sea una entrada de control $u = g(x(t), t)$, el sistema (2.1) puede*

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS

reescribirse, en lazo cerrado, como

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.8}$$

para un caso especial donde (2.8) no depende explícitamente del tiempo t , se tiene una función de la forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.9}$$

en este caso se dice que el sistema es autónomo e invariante en el tiempo, ya que sólo depende de la dinámica propia sistema y el valor de sus estados.

Enseguida se introducirá un concepto importante para la estabilidad de los sistemas dinámicos. Para un sistema de la forma (2.9), los puntos de equilibrio son las raíces reales $\bar{x} \in D$ de la ecuación

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Tales puntos pueden ser estables, asintóticamente estables o inestables. A continuación se presentará una definición de la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Definición 2.2. *El punto de equilibrio $x=0$ de (2.9) es*

- *Estable si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *Inestable en el caso contrario*
- *Asintóticamente estable si es estable y δ puede ser seleccionada tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

La estabilidad de puntos de equilibrio es usualmente caracterizada mediante una función de Lyapunov, donde un punto de equilibrio es estable si todas sus soluciones

que comienzan en un punto cercano se mantienen cerca, si esto no se cumple se dice que es inestable. El teorema que se muestra a continuación ofrece condiciones de suficiencia para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio.

Teorema 2.1. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.9). Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$\begin{aligned} V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \\ \dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Ver prueba en [27].

Para un sistema como en (2.6), se dice que la matriz A es estable o *Hurwitz* cuando todos los valores propios satisfacen $Re\lambda_i < 0$, es decir que todos los valores propios tienen parte real negativa. También es posible determinar la estabilidad mediante una función cuadrática de Lyapunov P con la siguiente ecuación

$$V(x) = x^T P x$$

donde P es una matriz simétrica definida positiva. Una matriz P es simétrica definida positiva si $v^T P v > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. Además, la matriz P cumple con la siguiente desigualdad

$$A^T P + P A = -Q$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva o manera similar si P cumple con

$$A^T P + P A < 0. \tag{2.11}$$

Ahora, como introducción al tema de la estabilidad de *SLC* se analiza el ejemplo de la Fig. 2.3, donde se muestra el plano de fase de algunos sistemas continuos. En el inciso (a) se observan dos subsistemas, S_1 y S_2 , ambos son inestables, éstos conforman al *SC* S_c de (a), donde al establecer una ley de conmutación adecuada es posible hacer

que el SC pierda energía, es decir, que un conjunto de subsistemas inestables puede convertirse en un SC estable dependiendo de la ley de conmutación. Del mismo modo, en la Fig. 2.3 (b) se tienen dos subsistemas, S_1 y S_2 que son estables, los cuales se vuelven inestables bajo la conmutación establecida en S_c de (b).

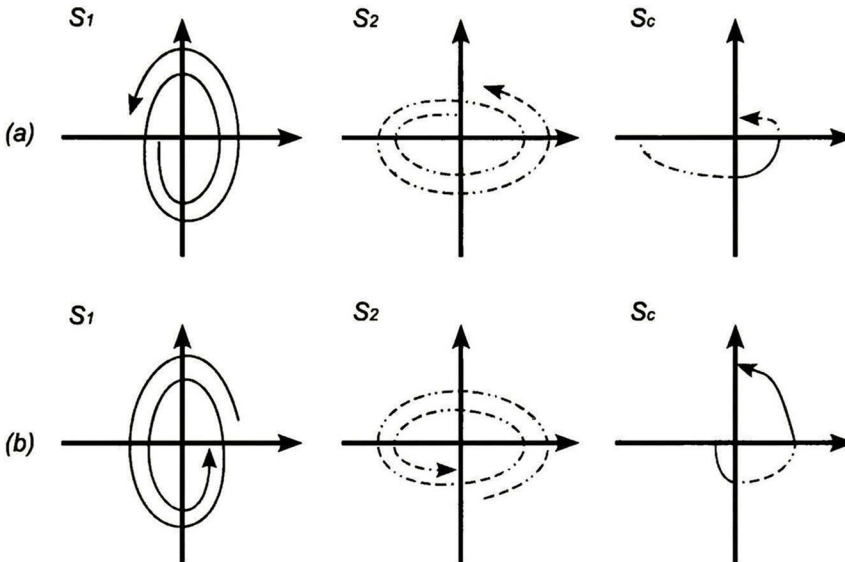


Figura 2.3: (a) Conmutación entre subsistemas inestables que nos producen un comportamiento estable (b) Conmutación entre subsistemas estables que nos producen un comportamiento inestable.

Después de analizar los ejemplos ilustrados en la Fig. 2.3 es posible deducir algunos hechos básicos de la estabilidad de SC :

- Mediante una conmutación arbitraria es posible desestabilizar un SC aún y cuando cada subsistema de la familia S sea estable.
- Puede ser posible estabilizar un SC por medio de una secuencia de conmutación adecuada, incluso si cada elemento de la familia S es inestable.

Para este trabajo es necesario conocer las condiciones que garantizan la estabilidad

asintótica de un *SLC* para una secuencia de conmutación arbitraria, ya que es un punto a considerar para el diseño de la ley de control.

2.2.1. Estabilidad de Sistemas Lineales Conmutados

Ahora se establecerán las condiciones para determinar la estabilidad de *SLC*, pero se definirán las funciones de clase \mathcal{K} y clase \mathcal{KL} .

Definición 2.3. Una función continua $\mu : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que pertenece a la clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\mu(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ si $a = 0$ y $\mu(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Definición 2.4. Una función continua $\gamma : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que pertenece a la clase \mathcal{KL} si, para cada valor s fijo, el mapeo $\gamma(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r y, para cada valor fijo de r , el mapeo $\gamma(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\gamma(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Un *SC*, donde los subsistemas continuos son de la forma (2.9), se dice que es *uniformemente asintóticamente estable* si existe una constante $\delta > 0$ y una función γ clase \mathcal{KL} tal que para toda secuencia de conmutación la solución del *SC* autónomo con $|x(0)| < \delta$ satisface la desigualdad

$$|x(t)| \leq \gamma(|x(0)|, t), \quad \forall t > 0. \quad (2.12)$$

Si la función γ toma la forma $\gamma(r, s) = cre^{-\lambda s}$ para alguna $c, \lambda > 0$, entonces la ecuación anterior toma la forma

$$|x(t)| \leq c|x(0)|e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0 \quad (2.13)$$

así el *SC* autónomo es llamado *uniformemente asintóticamente estable*. Además, si (2.12) y (2.13) se cumplen para toda señal de conmutación y para toda condición inicial, se obtiene un sistema *globalmente uniformemente asintóticamente estable* (en inglés

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS

GUAS) y *globalmente uniformemente exponencialmente estable* (en inglés *GUES*), respectivamente.

Para el caso de *SLC* se presenta el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *El SLC (2.7) es GUES si y sólo si es localmente atrayente para cada señal de conmutación.*

Ver prueba en [27].

Ahora, se considera una *función de Lyapunov* similar a (2.11), es propuesta una función P tal que

$$A_p^T P + P A_p < 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2.14)$$

donde, si la *desigualdad matricial lineal* (2.14) se cumple, se tiene una *función cuadrática de Lyapunov común* y por lo tanto el *SLC* es *GUES*.

Como ejemplo se tienen los siguientes sistemas lineales autónomos $\dot{x} = A_1 x$ y $\dot{x} = A_2 x$, donde las matrices A_1 y A_2 son Hurwitz, es decir, todos los valores propios de las matrices tienen parte real negativa

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Para asegurar que el *SC*, que se compone por los dos subsistemas anteriores, es estable se procede a buscar una matriz P tal que cumpla con la ecuación (2.14). Es fácil comprobar que una solución a la *desigualdad matricial lineal* es

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Ya que existe solución para el problema, se dice que el *SLC* es *GUES*, pero en caso de no encontrar una P común no es posible asegurar lo contrario, ya que el Teorema 2.2 sólo implica suficiencia.

2.3. Consenso

Hasta ahora se conoce que la idea básica de un algoritmo de consenso es que el valor estados de los agentes, propios de la dinámica de cada elemento, coincidan en algún valor común. Se considera que cada agente tiene una dinámica que puede ser representada mediante un sistema de ecuaciones, como en (2.1). Entre estos agentes existe una comunicación que es indispensable para el trabajo cooperativo del *SMA*.

2.3.1. Topologías de comunicación

En un *SMA* se establece una red de comunicación entre los agentes, que si es la adecuada es posible realizar una comunicación continua, así la información de actualización de estados es modelada mediante una ecuación diferencial. Existen N agentes que conforman todo el sistema. La topología de comunicación del sistema multiagentes es representada comúnmente por medio de un grafo dirigido $G = (\mathcal{V}, \xi, \mathcal{A}(t))$, donde \mathcal{V} es un conjunto de nodos, $\xi \in \{\mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ es un conjunto de lazos que conectan un nodo a otro, los autolazos no están permitidos. Se representa con $\mathcal{A}(t) = [\alpha_{i,j}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a la matriz de adyacencia cuyos elementos son pesos positivos que representan la comunicación y que por simplicidad se escribe \mathcal{A} . Un lazo $(\nu_i, \nu_j) \in \xi$ significa que el nodo ν_j puede obtener información del nodo ν_i . Si un lazo (ν_i, ν_j) está contenido en ξ , implica que el término $\alpha_{j,i}$ de la matriz de adyacencia es diferente de cero y viceversa, sin embargo esto no implica que el lazo (ν_j, ν_i) también está contenido en ξ . Para el lazo (ν_i, ν_j) , ν_i es el *nodo padre* y ν_j es el *nodo hijo*.

Una *conexión directa* es una secuencia de lazos en una grafo dirigido de la forma $(\nu_1, \nu_2), (\nu_2, \nu_3), \dots$. Un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si existe una conexión directa de cada nodo a todos los demás nodos. Un *árbol dirigido* es un grafo dirigido en el que cada nodo tiene exactamente un nodo padre, con excepción de un nodo al que se denomina raíz, que no cuenta con un nodo padre y que tiene un camino dirigido a todos los demás nodos. Un *subgrafo* (\mathcal{V}^s, ξ^s) de (\mathcal{V}, ξ) es un grafo tal que $\mathcal{V}^s \subseteq \mathcal{V}$ y $\xi^s \subseteq \xi \cap \{\mathcal{V}^s \times \mathcal{V}^s\}$. Un *árbol de expansión dirigido* (\mathcal{V}^s, ξ^s) del grafo dirigido $(\mathcal{V}, \xi, \mathcal{A}(t))$ es un subgrafo de (\mathcal{V}, ξ) tal que (\mathcal{V}^s, ξ^s) es un árbol dirigido y se cumple que $\mathcal{V}^s = \mathcal{V}$.

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS

Como ejemplo, se presenta un sistema de 4 agentes comunicándose entre ellos, donde es posible representar la topología de comunicación mediante un grafo dirigido, en la Fig. 2.4 se muestra la representación de los agentes (nodos) mediante círculos y el intercambio de información (lazos) mediante flechas.

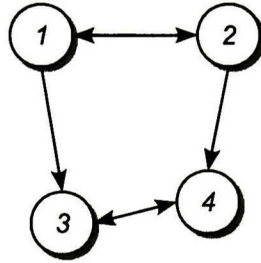


Figura 2.4: Grafo de topología de comunicación

Los lazos que unen los nodos de la Fig. 2.4 tienen un peso correspondiente representado por un valor positivo conforme a una regla de peso, la cual puede depender de la cercanía de los agentes, el medio ambiente, entre otros factores. A continuación se muestra un ejemplo de una matriz de adyacencia \mathcal{A} correspondiente al grafo de la Fig. 2.4,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1.1 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

para este ejemplo los pesos de los lazos fueron seleccionados arbitrariamente.

La topología de comunicación puede variar en el tiempo conforme los agentes se mueven o las comunicaciones fallan y por lo tanto también cambia la matriz de adyacencia \mathcal{A} . En la Fig. 2.5 se muestran tres diferentes topologías de comunicación para tres agentes.

Para la clase de *SMA* que se estudian en este trabajo se considera que $(\nu_i, \nu_j) \in \xi \Leftrightarrow (\nu_j, \nu_i) \in \xi$, es decir que la comunicación es bidireccional entre los agentes. La topología de comunicación puede variar en el tiempo por el movimiento de los

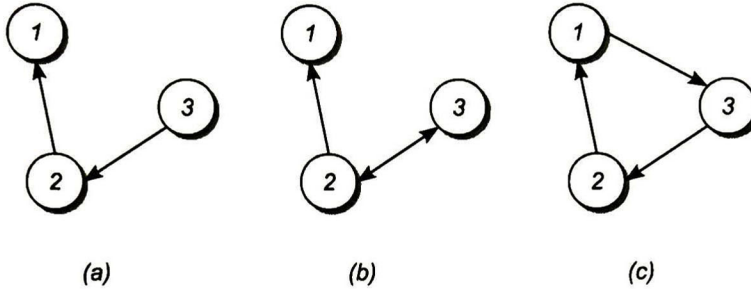


Figura 2.5: Tres diferentes topologías de comunicación de tres agentes. El grafo (c) es fuertemente conexo ya que existe un camino directo entre cada par de nodos. Sin embargo, (a) y (b) no son fuertemente conexos.

agentes. El conjunto de vecinos del nodo i en el tiempo t se denota por $\Theta_i(t) = \{\nu_j : (\nu_j, \nu_i) \in \xi, j = 1, \dots, N\}$.

En el presente trabajo los elementos de la matriz de adyacencia \mathcal{A} se definen como $\alpha_{ii} = 0$, $\alpha_{ij} = 1$ si $(\nu_i, \nu_j) \in \xi$ y 0 de otra forma, con lo que se denota la existencia o no de la comunicación. En este trabajo se utilizará una topología donde siempre se cumple que

$$(\nu_i, \nu_j) \in \xi \Leftrightarrow \Theta_i(t) = \Theta_j(t) \quad (2.15)$$

este requerimiento se utilizará más adelante para la ley de control que garantiza alcanzar el consenso. Cabe aclarar que si el agente i se comunica con el agente k no necesariamente significa que existe una comunicación directa entre ellos, puede existir un agente j que realiza la comunicación entre ambos, aún así la matriz de adyacencia se representa como una comunicación directa entre k e i .

Un ejemplo de estas topologías se muestra en la Fig. 2.6, donde se exponen dos diferentes topologías que considerando lo anterior comparten una matriz de adyacencia

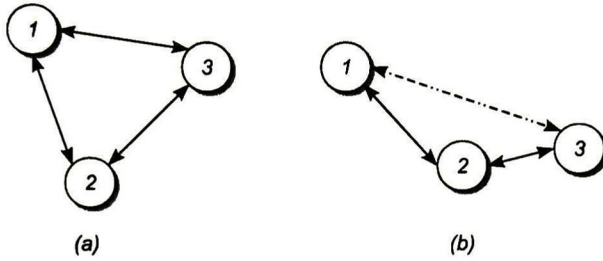


Figura 2.6: (a) Todos los elementos están conectados directamente (b) Todos los elementos están conectados pero la información de los agentes 1 y 3 fluye a través del agente 2.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta topología de comunicación puede ser variante en el tiempo, pero se conserva la estructura de (2.15). La ley bajo la cual se determina cuando se conmuta entre las topologías se definirá más adelante.

2.3.2. Algoritmo de consenso

Ya que un *SMA* cuenta con la dinámica de los agentes y la comunicación que existe entre ellos, se debe incluir tanto la información de los estados de cada agente así como la topología de la comunicación. Por lo que el algoritmo general, para el consenso de la información de los estados, está dado por

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}(t)(x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

donde $\alpha_{i,j}$ es el elemento (i, j) de la matriz de adyacencia \mathcal{A} asociada con G en el tiempo t y x_i es la información de los estados del i -ésimo agente.

De manera matricial, el algoritmo de consenso (2.16), se escribe de la siguiente manera

$$\dot{x} = -\mathcal{L}(t)x(t), \quad (2.17)$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ es la información de los estados y \mathcal{L} es la matriz del laplaciano, la cual se define a continuación.

Definición 2.5. La matriz $\mathcal{L} = [\ell_{i,j}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se conoce como la matriz del laplaciano, donde cada elemento $\ell_{i,j}$ está determinado por la matriz de adyacencia de la siguiente manera:

- $\ell_{ii} = -\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}$,
- $\ell_{ij} = \alpha_{ij}$

para toda $i, j = 1, 2, \dots, N$

El consenso se logra o alcanza por los estados si éstos llegan al mismo valor, es decir que son iguales y por lo tanto se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad \forall x_i(0) \text{ y } \forall i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.18)$$

Al considerar la topología de comunicación correspondiente al grafo de la Fig. 2.6, la matriz del laplaciano \mathcal{L} está dada por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Convergencia del algoritmo de consenso

Las condiciones bajo las cuales el algoritmo (2.16) para un SMA converge, cuando la topología es invariante en el tiempo, son presentadas enseguida

Proposición 2.1. *Sea G un grafo dirigido. Entonces, cero es un valor propio de multiplicidad algebraica uno para el laplaciano \mathcal{L} si y sólo si G tiene un árbol de expansión dirigido.*

Ver prueba en [28].

Este resultado implica que el algoritmo (2.16) alcanza el consenso si y sólo si la topología de la comunicación tiene un *árbol de expansión dirigido* o la topología de comunicación indirecta está conectada. Entonces se dice que un grafo es *fuertemente conexo* si existe un lazo directo de cada nodo a todos los demás nodos y un árbol de expansión es un grafo donde cada nodo tiene un camino directo a todos los demás nodos. Esto es importante ya que indica cuándo un grafo G tiene un *árbol de expansión dirigido*, ésto al analizar la matriz del laplaciano, lo cual se realiza con herramientas bastante conocidas de álgebra lineal.

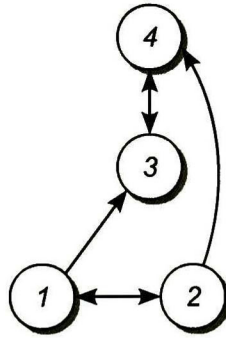


Figura 2.7: Grafo dirigido con árbol de expansión dirigido.

En la Fig. 2.7 se muestra una topología de comunicación donde se tiene un árbol de expansión dirigido, a este grafo le corresponde la siguiente matriz \mathcal{L} como laplaciano

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

de donde es fácil comprobar que la matriz anterior cuenta con sólo con un valor propio cero de multiplicidad uno, lo que concuerda con la Proposición 2.1.

2.3.3. Algoritmo de consenso para dinámicas de un integrador

Sean N elementos en un SMA cuya dinámica de estado está dada por

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$ es la información del estado y $u_i \in \mathbb{R}$ es la información de la entrada de control del i -ésimo agente. La ley de control para alcanzar el consenso para en tiempo continuo está dada por

$$u_i = - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}(t)(x_i - x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.20)$$

Si que la topología de comunicación es invariante en el tiempo, es decir que los valores $\alpha_{i,j}$ son constantes, entonces \mathcal{L} también es constante. A continuación se deducirán las condiciones de necesidad y suficiencia para el consenso de los agentes cuando la información es continua.

Primero se considera el caso cuando la topología de comunicación es constante. Después se considera el caso donde la topología conmuta con el tiempo.

Lema 2.1. ([2]) *La ley de control para tiempo continuo (2.20) alcanza el consenso para los agentes si y sólo si*

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) = I_N + \int_0^t -\mathcal{L}(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^t -\mathcal{L}(\sigma_1) \int_0^{\sigma_1} -\mathcal{L}(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ + \dots \rightarrow \mathbf{1}_N c^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

cuando $t \rightarrow \infty$, donde I_N es una matriz identidad de $N \times N$, $\mathbf{1}_N$ denota un vector columna de $N \times 1$ donde todos sus elementos son iguales a 1 y c es un vector de N coeficientes constantes.

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS

Demostración. ([2]) Nótese que el equipo de agentes alcanza el consenso asintóticamente si y sólo si el conjunto

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = x_2 = \cdots = x_N\}$$

es atrayente e *invariante positivo*, donde el conjunto \mathcal{S} se dice que es *invariante positivo* si $x(0) \in \mathcal{S}$ implica que $x(t) \in \mathcal{S}$, $\forall t \geq 0$.

Ya que $x(t) = [\Phi(t, 0)]x(0)$, entonces (2.21) implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (\mathbf{1}_N c^T) x(0),$$

lo que implica que \mathcal{S} es atrayente e invariante positiva.

Por el otro lado, si \mathcal{S} es atrayente e invariante positiva, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\Phi(t, 0)]x(0) = \alpha \mathbf{1}_N,$$

donde α es un elemento constante, que a su vez implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, 0) = \mathbf{1}_N c^T$$

□

Se presenta el siguiente Lema, donde se habla de la relación de los valores propios de la matriz \mathcal{A} y su relación con obtener un árbol de expansión directo.

Lema 2.2. *Dada una matriz $\mathcal{A} = [\alpha_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $\alpha_{i,i} \leq 0$, $\alpha_{i,j} \geq 0$, $\forall i \neq j$ y $\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} = 0$ para cada i , entonces \mathcal{A} tiene al menos un valor propio cero con un vector propio asociado $\mathbf{1}_N$ y todos los valores propios diferentes de cero están en el semiplano izquierdo. Además, \mathcal{A} tiene exactamente un valor propio cero si y sólo si el grafo dirigido de \mathcal{A} tiene un árbol de expansión dirigido.*

Ver prueba en [2].

Teorema 2.3. *Sea \mathcal{A} una matriz constante y la ley de control propuesta en (2.20),*

se logra el consenso asintóticamente si y sólo si el grafo dirigido G tiene un árbol de expansión dirigido.

Ver prueba en [2].

Hasta ahora sólo se ha considerado alcanzar el consenso, lo que es la base para crear formaciones de agentes, pero si además se requiere que los agentes se trasladen en formación es necesario que sigan una referencia, lo que es tratado a continuación.

Consenso y seguimiento de referencia para dinámicas de un integrador

Sea un SMA que consta de N agentes con la dinámica de (2.19), además de un agente virtual x^r que se considera como el agente $N + 1$ y que actúa como el único líder. El agente x^r tiene la información del valor que deben de tener los agentes en cada momento, es decir, hacia qué valor se dirige el consenso. Además, x^r cumple que es acotado, continuo a tramos en t y es localmente Lipschitz.

Ahora, continuando con el problema de *seguimiento de referencia* para un SMA, donde el objetivo es que los estados de los agentes sean iguales a los de la referencia, entonces el problema se resuelve si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = x^r \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

por lo que el consenso y seguimiento de referencia constante se resuelve con la ecuación

$$u_i = - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} (x_i - x_j) - \alpha_{i,N+1} (x_i - x^r), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.23)$$

enseguida se dan las condiciones para alcanzar el consenso y seguimiento de referencia constante.

Teorema 2.4. *Sea A una matriz con valores constantes. El problema de consenso y seguimiento de referencia constante se resuelve con la ecuación (2.23) si y sólo si el grafo dirigido G tiene un árbol de expansión dirigido, nótese que el agente de referencia x^r sólo tiene lazos de salida.*

Ver prueba en [2].

Para el caso donde la referencia no es constante se plantea la siguiente ecuación

$$u_i = - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} (x_i - x_j) - \alpha_{i,N+1} (x_i - x^r) + \alpha_{i,N+1} \dot{x}^r \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

se presenta el siguiente teorema para un consenso y seguimiento de referencia variante en el tiempo

Teorema 2.5. *Sea A una matriz con valores constantes. Si $\alpha_{i,N+1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$, entonces el problema de consenso y seguimiento de referencia variante en el tiempo se resuelve con la ecuación (2.24).*

Ver prueba en [2].

En la Fig. 2.8 se observa una topología de comunicación que tiene un árbol de expansión dirigido, entre los elementos se encuentra un *agente virtual* que comparte la información de la referencia a todos los demás agentes, en nuestro caso, esto no necesariamente significa que existe una entidad que realice la comunicación con cada agente.

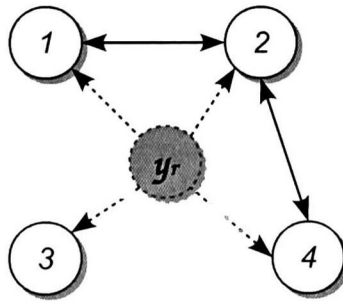


Figura 2.8: Topología de comunicación con un agente virtual.

La matriz \mathcal{L} del laplaciano correspondiente a la topología de comunicación de la Fig. 2.8 se muestra enseguida

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Así mismo se revisa la siguiente ecuación, donde se considera que las topologías de comunicación son variantes en el tiempo, este algoritmo asegura la convergencia de un SMA aún y cuando la topología de comunicación conmuta.

$$\begin{aligned} u_i = & \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} [\dot{x}_j - \mu(x_i - x_j)] \\ & + \frac{1}{\eta_i} \alpha_{i,N+1} [\dot{x}^r - \mu(x_i - x^r)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Teorema 2.6. *Sea \mathcal{A} una matriz con elementos variantes en el tiempo que es continua a tramos, además, cada elemento diferente de cero tiene un valor positivo seleccionado de un conjunto compacto $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$, donde $\underline{\alpha}$ y $\bar{\alpha}$ son constantes positivas. Sea t_0 el tiempo inicial. También sean t_1, t_2, \dots los tiempos de conmutación para \mathcal{A} . La ecuación (2.25) como solución única para u_i , $i = 1, 2, \dots, N$ existe si y sólo si el grafo dirigido G tiene un árbol de expansión dirigido a través de cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots$. Además, el problema de consenso y seguimiento de trayectoria se resuelve si el grafo dirigido $G(t)$ tiene un árbol de expansión dirigido a través de cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots$.*

Ver prueba en [2].

Consenso y seguimiento de referencia con separación

Para un caso más general, donde se incluye una separación deseada entre los agentes, se tiene la siguiente ecuación

$$u_i = \dot{x}_{di} + \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \{ \dot{x}_j - \dot{x}_{dj} - \mu [(x_i - x_j) - (x_{di} - x_{dj})] \} + \frac{1}{\eta_i} \alpha_{i,N+1} [\dot{x}^r - \mu(x_i - x_{di} - x^r)], \quad (2.26)$$

donde $\Delta_{ij} \triangleq x_{di} - x_{dj}$ es la separación deseada entre los estados de los agentes, μ es un escalar constante positivo y $\eta_i \triangleq \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j}$.

Teorema 2.7. *Sea \mathcal{A} una matriz con valores constantes. Con la ecuación (2.26) se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^r + x_{di}, y$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = \Delta_{ij},$$

si y sólo si el grafo dirigido G tiene un árbol de expansión dirigido.

Ver prueba en [2].

2.4. Seguimiento asintótico de salida

El problema de producir una salida que independientemente de la condición inicial del sistema *converja asintóticamente* a una función de referencia $y_r(t)$ se conoce como problema de seguimiento asintótico de salida $y_r(t)$.

Sea un sistema lineal en la llamada forma normal (Apéndice A),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{q-1} &= z_q \\ \dot{z}_q &= f(z) + bu \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde q es el grado relativo. El grado relativo se define como la diferencia de los grados del numerador y denominador de una función de transferencia, es decir, si $Z(s) =$

2.4. SEGUIMIENTO ASINTÓTICO DE SALIDA

$n(s)/d(s)$ es una función de transferencia, el grado relativo $q = \text{deg}(d) - \text{deg}(n)$.

Ahora se propone una entrada de la forma

$$u = \frac{1}{b}(-f(z) + y_r^{(q)} - \sum_{i=1}^q c_{i-1}(z_i - y_r^{(i-1)})) \quad (2.28)$$

donde c_0, \dots, c_{q-1} son números reales. Definimos una función del error $e(t)$ como la diferencia entre la salida real del sistema $y(t)$ y la salida de la referencia $y_r(t)$

$$e(t) = y(t) - y_r(t).$$

Ahora, ya que por construcción $z_i = y^{(i-1)}(t)$ para $i = 1, 2, \dots, q$, se tiene que la entrada (2.28) es de la forma

$$u = \frac{1}{b} \left(-f(z) + y_r^{(q)} - \sum_{i=1}^q c_{i-1} e^{(i-1)} \right) \quad (2.29)$$

Nótese que la entrada en cuestión, para el caso donde $e(t) = 0 \forall t$, se reproduce exactamente la entrada necesaria para obtener $y_r(t)$ como salida. Aplicando la entrada (2.28), se obtiene

$$\dot{z}_q = y^{(q)} = y_r^{(q)} - c_{q-1} e^{q-1} - c_1 e^1 - c_0 e,$$

esto es

$$e^q + c_{q-1} e^{q-1} + \dots + c_1 e^1 + c_0 e = 0. \quad (2.30)$$

La función del error $e(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal, de orden q , cuyos coeficientes se seleccionan arbitrariamente. Las raíces de la ecuación característica asociada con (2.30) se asignan de manera arbitraria y se concluye que bajo el efecto de una entrada de la forma (2.28) la salida del sistema realiza el seguimiento de la salida deseada $y_r(t)$, con un error que converge a cero con una velocidad exponencial de decaimiento arbitraria. Es importante mencionar que la función de referencia debe ser una función continua además de suave y lo mismo para sus derivadas, las cuales tienen que ser acotadas, por lo que se requiere que estas funciones sean localmente Lipschitz.

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS

Enseguida se define que es una función Lipschitz y localmente Lipschitz.

Definición 2.6. Se dice que una función $f(t, x)$ es Lipschitz si satisface la desigualdad

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para toda (t, x) y (t, y) en algún vecindario de (t_0, x_0) .

Definición 2.7. Se dice que una función es localmente Lipschitz en un dominio (conjunto abierto y conexo) $D \subset R^n$ si cada punto de D tiene un vecindario D_0 tal que f satisface la condición de Lipschitz para todos los puntos en D_0 con alguna constante Lipschitz L_0 .

Proposición 2.2. Sean las funciones $y_r(t), y_r^{(1)}(t), \dots, y_r^{(q-1)}(t)$ definidas para todo $t \geq 0$ y localmente Lipschitz. Además sea el polinomio

$$s^q + c_{q-1}s^{q-1} + \dots + c_1s + c_0 = 0$$

con todas sus raíces con parte real negativa. Entonces para una $a < 0$ suficientemente pequeña, si

$$|z_i(\tau) - y_r^i(\tau)| < a, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

la respuesta correspondiente $z_i(t)$, $t \geq \tau \geq 0$, del sistema retroalimentado con (2.28) es acotada. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|z_i(\tau) - y_r^i(\tau)| < \delta \Rightarrow |z_i(t) - y_r^i(t)| < \epsilon, \quad \forall t \geq \tau \geq 0.$$

Ver prueba en [9].

Hasta ahora se revisó una ley de control para sistemas lineales que asegura un seguimiento asintótico de la salida de función de referencia deseada, pero este control no considera que varios sistemas pueden trabajar simultáneamente, es decir, no se manejan conjuntos de sistemas ni topologías de comunicación, características propias un SMA.

2.4. SEGUIMIENTO ASINTÓTICO DE SALIDA

En el próximo capítulo se propondrá una ley de control similar a (2.28), pero ahora aplicado a un *SMA*.

Capítulo 3

Diseño del control

En este capítulo se propone una ley de control para alcanzar el consenso y seguimiento de señal de referencia para un *SMA*, donde los agentes cuentan con dinámicas lineales *SISO*, se extienden los resultados de algoritmos que sólo consideran dinámicas de uno o dos integradores, además se analiza el consenso cuando las dinámicas de los agentes son diferentes, incluso con un espacio de estados de dimensiones distintas. La ley de control propuesta está definida para topologías de comunicación que conmutan en el tiempo, aunque es posible trabajar topologías fijas, ya que son un caso particular. La dinámica de la topología de comunicación se considera como un sistema híbrido, en este caso un *SLC*, lo que permite analizar el sistema de manera convencional. La estabilidad de la dinámica del error de consenso de salida, bajo la ley de control propuesta, es demostrada así como la estabilidad del sistema de cada agente.

Para comenzar con el diseño del control antes se analiza el ejemplo de un *SMA*. Sean dos agentes con dinámicas lineales tipo *SISO* cuyas ecuaciones son las siguientes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i,1} \\ \dot{x}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i \quad (3.1)$$
$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix}; i = 1, 2.$$

puede comprobarse fácilmente que el sistema es observable, estabilizable y el grado relativo $q = 1$. Ahora se necesita establecer una ecuación del error que incluya tanto la parte del consenso como del seguimiento de referencia, por lo que se define el error de la siguiente manera

$$e_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} (y_i - y_j) + (y_i - y_r). \quad (3.2)$$

Ahora, se sigue el procedimiento visto en la sección 2.4 y se procede a derivar (3.2)

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} (\dot{y}_i - \dot{y}_j) + (\dot{y}_i - \dot{y}_r), \quad (3.3)$$

al sustituir las salidas derivadas por los estados correspondientes se obtiene

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} [(x_{i,1} + 0.5x_{i,2} + u_i) - (x_{j,1} + 0.5x_{j,2} + u_j)] + [(x_{i,1} + 0.5x_{i,2} + u_i) - \dot{y}_r], \quad (3.4)$$

si se establece un cambio de variable para representar el error donde $\zeta_{i,1} = e_i$, $\zeta_{i,2} = \dot{e}_i$ y se reescribe (3.4) como una ecuación matricial

$$\dot{\zeta}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta_i + \left(1 + \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x_i - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x_j - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix} + \left(1 + \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_j. \quad (3.5)$$

Para que el sistema de error sea exponencialmente estable, se necesita que la matriz correspondiente a ζ_i sea *Hurwitz*, entonces la u_i tiene que retroalimentar los estados de ζ_i , es decir el error y su derivada. Ésto implica que se deben de conocer las salidas de los agentes que están cercanos además de la referencia. También se necesita tener acceso de alguna manera a x_i para eliminar su dinámica en la ecuación del error, entonces se intuye que el *sistema tiene que ser observable*. Además se observa que el sistema de (3.4) cambia en el tiempo, por lo que la dinámica del error se considera como un *SLC*.

Con el análisis del ejemplo anterior, ahora se propone una ley de control para alcanzar el consenso y seguimiento de referencia de los SMA.

Definición 3.1. Sea $F = \{S_1, \dots, S_N\}$ un conjunto finito de subsistemas lineales SISO donde $S_i = \{\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i; y_i = C x_i\}$. El error de consenso se define como

$$e_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} (y_i - y_j + y_{dj} - y_{di}) + \alpha_{i,N+1} (y_i - y_{di} - y_r) \quad (3.6)$$

donde y_r es una señal de referencia que debe de seguir la salida y_i de cada uno de los subsistemas del conjunto F . La matriz de adyacencia A tiene un tiempo de conmutación $\tau > 0$. La función y_{di} es una separación (no necesariamente constante) de y_i que es medida a partir de y_r , tanto y_r como y_{di} son funciones de clase C^q y localmente Lipschitz. El problema de consenso se traduce en obtener una entrada de control u_i tal que $\forall_i \lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$.

Es importante mencionar que el elemento $\alpha_{i,N+1}$ representa al agente virtual, éste siempre debe de ser conocido por cada agente, como se menciona anteriormente, lo que implica que $\alpha_{i,N+1} = 1, \forall t$. Además, cada agente cuenta con un control propio, es decir, que el control para el consenso y seguimiento de referencia es descentralizado, esto brinda muchas ventajas en cuanto al consumo de recursos para el procesamiento de la ley de control y transmisión de información además que hace más flexible al SMA. Algo a considerar para determinar la ley de control es el caso similar mostrado en [29], donde se realiza el consenso con respecto a la salida de los agentes. Para el presente trabajo la ley de control se diseña para alcanzar un consenso con respecto a la salida de los elementos del SMA, lo que reduce la cantidad de información que debe ser transmitida por cada agente, ya que no es necesario para el control conocer todos los estados de los demás agentes. Esta modificación permite que el consenso se realice entre agentes de diferente dimensión, pues lo único que se considera es la salida.

Teorema 3.1. Sea el problema definido anteriormente cuando cada S_i es observable,

se propone la entrada u_i de los agentes como

$$u_i = \frac{1}{\beta_{i,q}} \left[-\Gamma_{i,q} x_i + \overset{(q)}{y_{di}} + \overset{(q)}{y_r} - kp \Upsilon_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{i,j} e_j \right] \quad (3.7)$$

donde el $\text{rank} \begin{bmatrix} B_i & A_i B_i & \dots & A_i^{n_i-1} B_i \end{bmatrix}$ debe de ser igual al grado relativo q , que es el mismo para cada subsistema del conjunto finito F , $\beta_{i,q} = C_i A_i^{(q-1)} B_i$, $\Gamma_{i,m} = C_i A_i^{(m)}$ $m \in [1, \dots, q]$, $k_{i,j}$ es el j -ésimo elemento del vector

$$k_i = \frac{k}{-\ell_{i,i} + 1} \begin{bmatrix} \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{i,i-1} & 2 & \alpha_{i,i+1} & \dots & \alpha_{i,N} \end{bmatrix}$$

\mathcal{N}_i denota el conjunto de vecinos del agente i , la variable k es un elemento escalar que pertenece al vector $[k \ kp]$ el cual define a los coeficientes de un polinomio estable. Se define Υ_i como un vector de $q - 1$ elementos, los cuales están conformados de la dinámica del i -ésimo agente, las derivadas de la función de referencia y las derivadas de la función de separación.

De esta forma, bajo la topología descrita en (2.15), el conjunto de subsistemas F logra el consenso y seguimiento de trayectoria con una dinámica del error GUES.

Demostración. Sea F un conjunto de N subsistemas lineales SISO donde cada subsistema S_i es observable y cumple que el grado relativo $q = \text{rank} \begin{bmatrix} B_i & A_i B_i & \dots & A_i^{n_i-1} B_i \end{bmatrix}$ para todos los elementos del conjunto F , cuya topología de comunicación cumple con (2.15), su ecuación de consenso está dada por (3.6) y al derivar el error se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{e}_i = & \alpha_{i,(N+1)} \left[(C_i A_i x_i + C_i B_i u_i - \dot{y}_r) - \dot{y}_{di} \right] + \\ & \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left[(C_i A_i x_i + C_i B_i u_i - C_j A_j x_j - C_j B_j u_j) - (\dot{y}_{di} - \dot{y}_{dj}) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

al reescribir la última ecuación y al derivarla hasta alcanzar el grado relativo q se tiene que

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_i &= \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{i,1} x_i + \beta_{i,1} u_i - \dot{y}_{di} - \dot{y}_r \right) - \\
 &\quad \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{j,1} x_j + \beta_{j,1} u_j - \dot{y}_{dj} - \dot{y}_r \right) \\
 \ddot{e}_i &= \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{i,2} x_i + \beta_{i,2} u_i - \ddot{y}_{di} - \ddot{y}_r \right) - \\
 &\quad \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{j,2} x_j + \beta_{j,2} u_j - \ddot{y}_{dj} - \ddot{y}_r \right) \\
 &\quad \vdots \\
 {}^{(q)}e_i &= \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{i,q} x_i + \beta_{i,q} u_i - {}^{(q)}y_{di} - {}^{(q)}y_r \right) - \\
 &\quad \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{j,q} x_j + \beta_{j,q} u_j - {}^{(q)}y_{dj} - {}^{(q)}y_r \right)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ahora se realiza un cambio de coordenadas en ζ_i y se define que $e_i = \zeta_{i,1}$, $\dot{e}_i = \dot{\zeta}_{i,1} = \zeta_{i,2}$. Así la ecuación (3.9) se representa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}_{i,m} = \zeta_{i,m+1} &= \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{i,m} x_i + \beta_{i,m} u_i - {}^{(m)}y_{di} - {}^{(m)}y_r \right) - \\
 &\quad \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{j,m} x_j + \beta_{j,m} u_j - {}^{(m)}y_{dj} - {}^{(m)}y_r \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

los términos $C_i A_i^{m-1} B_i$ son iguales a cero cuando $m = 1, 2, \dots, q-1$, se reescribe la última ecuación del sistema (3.10) y se define

$$\Upsilon_{i,m} = \Gamma_{i,m} x_i - {}^{(m)}y_{di} - {}^{(m)}y_r$$

de lo anterior se obtiene la siguiente ecuación

$$\zeta_{i,m+1} = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(\Upsilon_{i,m} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(\Upsilon_{j,m} \right) \tag{3.11}$$

con la derivada de $\zeta_{i,q}$ se obtiene la siguiente ecuación, donde la entrada aparece por primera vez

$$\dot{\zeta}_{i,q} = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{i,q} x_i + \beta_{i,q} u_i - y_{di}^{(q)} - y_r^{(q)} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(\Gamma_{j,q} x_j + \beta_{j,q} u_j - y_{dj}^{(q)} - y_r^{(q)} \right). \quad (3.12)$$

En (3.12) el producto $\beta_{i,q}$ resulta ser escalar diferente de cero. Entonces ahora es posible introducir una ley de control, por lo que se aplica la entrada propuesta (3.7) en (3.12) y si además se considera que $\sum_{j \in N_i} k_{i,j} e_j = k_i e$, donde $e = \begin{bmatrix} \zeta_{1,1} & \zeta_{2,1} & \cdots & \zeta_{N,1} \end{bmatrix}^T$ y $k_i = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,N} \end{bmatrix}$, podemos llegar a la siguiente ecuación

$$\dot{\zeta}_{i,q} = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(kp \Upsilon_i \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(kp \Upsilon_j \right) + \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(k_i e \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(k_j e \right) \quad (3.13)$$

donde $\Upsilon_i = [\Upsilon_{i,1} \ \Upsilon_{i,2} \ \cdots \ \Upsilon_{i,q-1}]^T$. Se puede observar que $\zeta_{i,m}$ con $m = 2, \dots, q-1$ se completa mediante Υ_i pero ya que se desea obtener una ganancia fija para $e_i = \zeta_{i,1}$ se necesita resolver el problema de la siguiente ecuación

$$\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{i,j} \left(k_i e \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \left(k_j e \right) = -k \zeta_{i,1} \quad (3.14)$$

La cual puede ser reescrita de manera matricial como

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} & -\alpha_{i,2} & \cdots & -\alpha_{i,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & k_{1,N} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & k_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{N,1} & k_{N,2} & \cdots & k_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{1,1} \\ \zeta_{2,1} \\ \vdots \\ \zeta_{N,1} \end{bmatrix} = -k \zeta_{i,1} \quad (3.15)$$

Si se consideran todos los agentes se observa que la matriz similar al Laplaciano aparece, sólo que no aparece la columna ni la fila correspondiente al agente virtual, a esta matriz

se define como \mathcal{L}_R . Ahora el problema se traduce a resolver una ecuación de la forma

$$-\mathcal{L}_R K = -k \mathbf{I}_N$$

donde las matrices $\mathcal{L}_R, K, \mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$

Para comenzar a resolver esta ecuación anterior se analiza primero el caso donde la comunicación es fuertemente conexas, es decir, que cada agente conoce la salida de todos los demás, así \mathcal{L}_R toma la forma

$$\mathcal{L}_R = \begin{bmatrix} -N & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -N & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -N \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

de esta manera, la solución a la ecuación $K = k \mathcal{L}_R^{-1}$ tiene la forma

$$K = \frac{-k}{N+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

también es necesario considerar el caso cuando la topología conmuta respetando la configuración descrita en (2.15). Este problema puede resolverse ya que siempre es posible que la matriz \mathcal{L}_R tome una forma diagonal a bloques mediante una transformación de similitud y la solución se obtiene de una forma similar a la vista anteriormente,

$$K = \frac{-k}{-\ell_{R(i,i)} + 1} \begin{bmatrix} 2 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{N,1} \\ \alpha_{1,2} & 2 & \cdots & \alpha_{N,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,N} & \alpha_{2,N} & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

con la última ecuación es posible determinar de donde proviene la forma del vector k_i

y ahora se deduce la siguiente ecuación

$$\dot{\zeta}_{i,q} = -[k \ kp]\zeta_i \quad (3.17)$$

La dinámica del error del i -ésimo agente se describe mediante

$$\dot{\zeta}_i = G\zeta_i$$

donde G es una matriz Hurwitz cuyos valores propios se determinan por el vector $[k \ kp]$. La matriz G tiene la forma

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k & -kp_1 & -kp_2 & \cdots & -kp_{q-1} \end{bmatrix}$$

y se obtiene una matriz diagonal a bloques al considerar cada $\zeta_{i,j}$ de las ecuaciones del error

$$G' = \text{diag} \left(G \ G \ G \ \cdots \ G \right)$$

donde cada bloque G es estable y por lo tanto G' también lo es, además se cumple con el Teorema 2.2 ya que para toda topología que cumple con (2.15) la matriz G' no cambia, así $\dot{\zeta} = G'\zeta$ es *GUES* y por lo tanto la dinámica del error e es estable.

Más aún, se sabe que la dinámica de ζ es *GUES* y el error e es estable además de que es posible llevar cada subsistema S_i a la forma normal mediante un cambio de coordenadas, en nuestro caso llamaremos estas nuevas coordenadas z . Además, las dinámicas que se presentan después de obtener el grado relativo se consideran como una perturbación desvaneciente, ya que son estables. Siguiendo la Proposición 2.2 se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |z_{j,1}(t) - y_{dj}(t) - y_r(t)| = 0$$

lo que implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_{i,1}(t) - y_{di}(t) - y_r(t)| = 0$$

y dado que el sistema esta en la forma normal también se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_{i,j}(t) - y_{dj}^{(j)}(t) - y_r^{(j)}(t)| = 0, j = 1, 2, \dots, q$$

de este modo la dinámica de cada agente también es estable. □

Capítulo 4

Aplicación de la ley de control

En este capítulo se desarrollan dos simulaciones con ejemplos de *SMA*. El primer ejemplo consta de un grupo de tres agentes con una topología de comunicación fija. La segunda simulación se realiza con tres agentes, donde uno de ellos tiene una dinámica diferente, además la topología de comunicación cambia conforme la distancia entre los agentes varía.

Ejemplo I

Sean tres subsistemas lineales con las ecuaciones dinámicas siguientes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i,1} \\ \dot{x}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \quad (4.1)$$
$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix}; i = 1, 2, 3$$

es fácil comprobar que los subsistemas de (4.1) son estabilizables y observables.

La topología de comunicación que se maneja está dada por el grafo de la Fig. 4.1, donde además se muestra al agente virtual, el cual se maneja sólo como una información predefinida en cada agente.

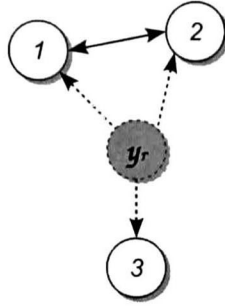


Figura 4.1: Grafo de la topología de comunicación de los sistemas de (4.1).

La función de referencia para este ejemplo está dada por

$$y_r = t,$$

la cual siempre es conocida por los agentes, así como su derivada, lo que asegurara la comunicación, aún y cuando alguno de los elementos no está conectado con los demás.

También se desea una separación de cada agente con respecto a las función de referencia y_r , los valores correspondientes son $y_{d1} = 0.5$, $y_{d2} = 1$ y $y_{d3} = -1$. Las condiciones iniciales de los agentes se toman como $x_1(0) = [2 \ 2]^T$, $x_2(0) = [1 \ -1]^T$ y $x_3(0) = [-1 \ -2]^T$.

Se selecciona un polinomio estable $s^2 + 4s + 2$, el vector de retroalimentación correspondiente $[k \ k_p] = [2 \ 4]$ y los vectores k_i , de acuerdo a la matriz \mathcal{L} correspondiente al grafo de la Fig. 4.1, quedan de la forma

$$\begin{aligned} k_1 &= (2/(-\ell_{R(1,1)} + 1)) [2 \ \alpha_{2,1} \ \alpha_{3,1}] = (2/3)[2 \ 1 \ 0], \\ k_2 &= (2/(-\ell_{R(2,2)} + 1)) [\alpha_{1,2} \ 2 \ \alpha_{3,2}] = (2/3)[1 \ 2 \ 0], \\ k_3 &= (2/(-\ell_{R(3,3)} + 1)) [\alpha_{1,3} \ \alpha_{2,3} \ 2] = [0 \ 0 \ 2]. \end{aligned}$$

Con los valores de k y k_p seleccionados, se obtiene una matriz G de la forma

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

la cual es una matriz Hurwitz, esto asegura que la dinámica del error sea estable bajo la topología comunicación fija, que cumple con (2.15).

Las ecuaciones del error, e_i con $i = 1, 2, 3$, quedan de la forma

$$\begin{aligned} e_1 &= (y_1 - y_2 + y_{d2} - y_{d1}) + (y_1 - y_{d1} - y_r), \\ e_2 &= (y_2 - y_1 + y_{d1} - y_{d2}) + (y_2 - y_{d2} - y_r), \\ e_3 &= y_3 - y_{d1} - y_r. \end{aligned}$$

Con (4.1), la función de referencia y las funciones de separación, se obtiene que $\beta_{i,2} = 1$, $\Gamma_{i,2} = [1 \ 2]$, $\dot{y}_r = 1$, $\ddot{y}_r = 0$, $\dot{y}_{di} = \ddot{y}_{di} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Así las entradas quedan de la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= (-[1 \ 2]x_1 - 4\Upsilon_1 - k_{1,1}e_1 - k_{1,2}e_2), \\ u_2 &= (-[1 \ 2]x_2 - 4\Upsilon_2 - k_{2,1}e_1 - k_{2,2}e_2), \\ u_3 &= (-[1 \ 2]x_3 - 4\Upsilon_3 - k_{3,3}e_3). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Los resultados del control de (4.2) aplicado al *SMA*, compuesto por la topología de la Fig. 4.1 y los agentes de 4.1, son presentados enseguida. La simulación se realizó durante 10 segundos, los resultados se muestra en la Fig. 4.2 y la Fig. 4.3. Se observa como la salida de cada agente evoluciona en el tiempo y alcanza la separación deseada (y_{di}) además de seguir la función de referencia (y_r).

La Fig. 4.3 muestra como el error decrece conforma los agentes alcanzan el consenso y siguen la función de referencia (y_r). En este caso la topología de comunicación es fija, por lo que el error decae exponencialmente en cada uno de los agentes.

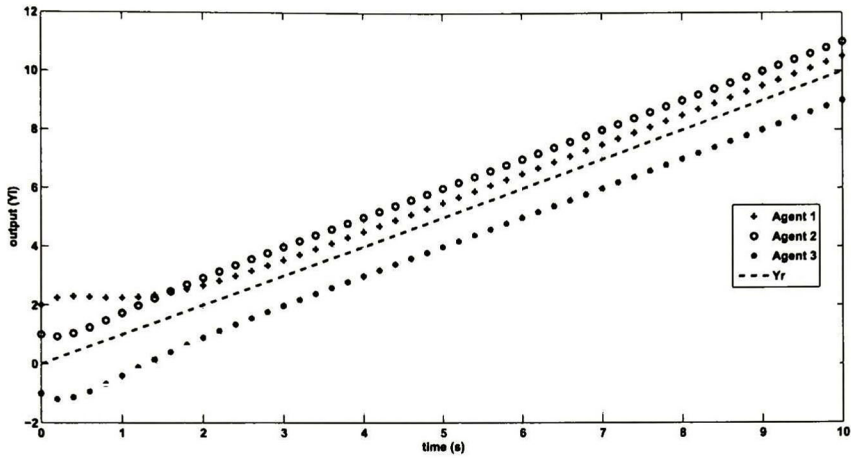


Figura 4.2: Trayectoria de salida de cada agente con respecto a la señal de referencia y_r bajo una topología fija.

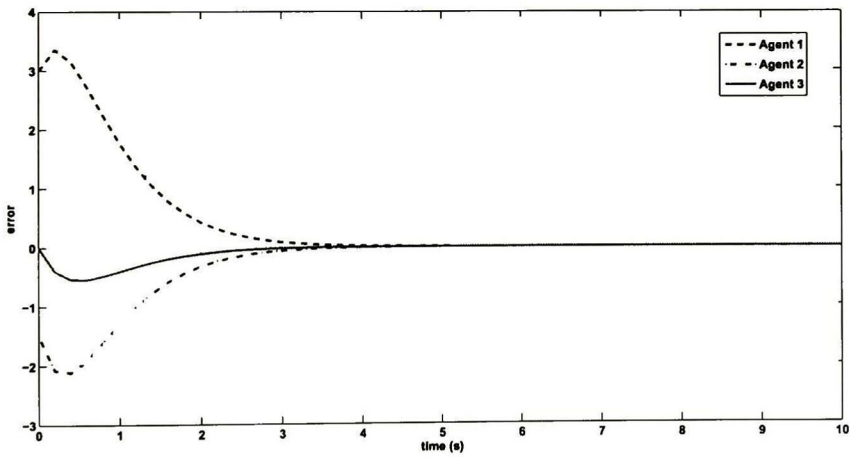


Figura 4.3: Error del consenso y seguimiento de referencia de cada agente con una topología de comunicación fija.

Ejemplo II

Sean tres subsistemas lineales con las ecuaciones dinámicas siguientes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i,1} \\ \dot{x}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \quad (4.3)$$

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2.,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{3,1} \\ \dot{x}_{3,2} \\ \dot{x}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 \quad (4.4)$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{bmatrix}$$

los subsistemas de (4.3) y (4.4) son estabilizables y observables. Los elementos de la matriz de adyacencia \mathcal{A} están determinados por

$$\alpha_{i,j} = 1 \text{ si } \|y_i - y_j\| \leq r \text{ para } j \neq i,$$

$$\alpha_{i,j} = 1 \text{ si } \alpha_{i,k} = 1 \text{ y } \alpha_{k,j} = 1$$

y cero para los demás elementos, donde r es el radio de acción de cada agente.

Se define la función de referencia como

$$y_r = \text{sen}(t)$$

siempre es conocida por los agentes, es decir que siempre existe una conexión directa con el agente virtual.

Además se desea una separación de cada agente con respecto a las función de re-

ferencia y_r , los valores correspondientes son $y_{d1} = 1$, $y_{d2} = 0$ y $y_{d3} = -1$ con un radio $r = 1.5$. Las condiciones iniciales de los agentes están dadas por $x_1(0) = [-0.5 \ 1]^T$, $x_2(0) = [5 \ -1]^T$ y $x_3(0) = [-2 \ 3 \ 0.5]^T$

En la Fig. 4.4 se muestra como la topología de comunicación conmuta conforme los agentes se van acercando.

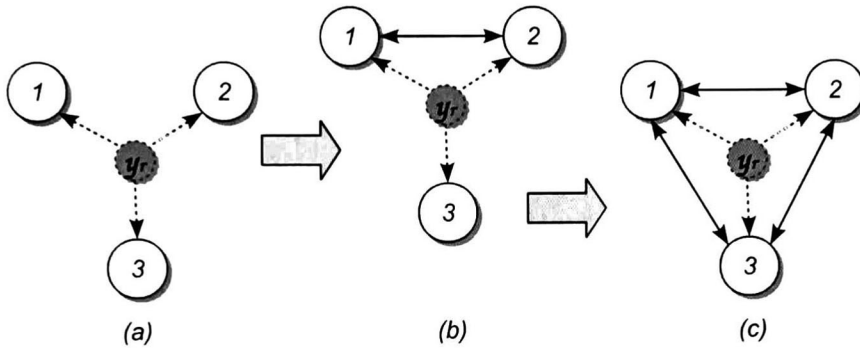


Figura 4.4: (a) Topología inicial, todos los agentes están sin comunicación entre ellos (b) Topología en que sólo se comunican una parte de los elementos (c) Topología final, todos los agentes se comunican.

Es seleccionado un polinomio estable $s^2 + 3s + 1$, cuyo vector de retroalimentación es $[k \ k_p] = [1 \ 3]$ y los vectores k_i , quedan de la forma

$$\begin{aligned} k_1 &= (1/(-\ell_{R(1,1)} + 1)) [2 \ \alpha_{2,1} \ \alpha_{3,1}], \\ k_2 &= (1/(-\ell_{R(2,2)} + 1)) [\alpha_{1,2} \ 2 \ \alpha_{3,2}], \\ k_3 &= (1/(-\ell_{R(3,3)} + 1)) [\alpha_{1,3} \ \alpha_{2,3} \ 2]. \end{aligned}$$

La matriz G , con los valores de k y k_p seleccionados previamente, queda de la forma

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

la cual se puede verificar fácilmente que es estable, por lo tanto la dinámica del error

también lo es. Aún y cuando la topología comunicación, que siempre cumple con (2.15), está conmutando.

La ecuación del error e_i queda de la forma

$$e_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j} (y_i - y_j + y_{dj} - y_{di}) + (y_i - y_{d1} - y_r), \quad i = 1, 2, 3.$$

Con (4.3), (4.4), la función de referencia y las funciones de separación, se obtiene que $\Gamma_{1,2} = \Gamma_{2,2} = [0 \ 1]$, $\Gamma_{3,2} = [1 \ 0 \ -1]$, $\dot{y}_r = \cos(t)$, $\ddot{y}_r = -\text{sen}(t)$, $\beta_{i,2} = 1$, $\dot{y}_{di} = \ddot{y}_{di} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Así las entradas quedan de la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= (-[0 \ 1]x_1 + (-\cos(t)) - 3\Upsilon_1 - \sum_{j=1}^3 k_{1,j}e_j), \\ u_2 &= (-[0 \ 1]x_2 + (-\cos(t)) - 3\Upsilon_2 - \sum_{j=1}^3 k_{2,j}e_j), \\ u_3 &= (-[1 \ 0 \ -1]x_3 + (-\cos(t)) - 3\Upsilon_3 - \sum_{j=1}^3 k_{3,j}e_j). \end{aligned} \quad (4.5)$$

A continuación se presentan los resultados del control de (4.5) aplicado al *SMA*, compuesto por los agentes de (4.3), (4.4) y la topología conmutada de la Fig. 4.4. La simulación fue realizada durante 15 segundos y muestran los resultados en la Fig. 4.5 y la Fig. 4.6. Se observa como la salida de cada agente evoluciona en el tiempo y alcanza la separación deseada (y_{di}) además de seguir la función de referencia (y_r). Nótese en la Fig. 4.6 que aún y cuando el valor del error cambia de manera abrupta, a causa de la conmutación de la topología de comunicación, continúa disminuyendo conforme sigue evolucionando el sistema.

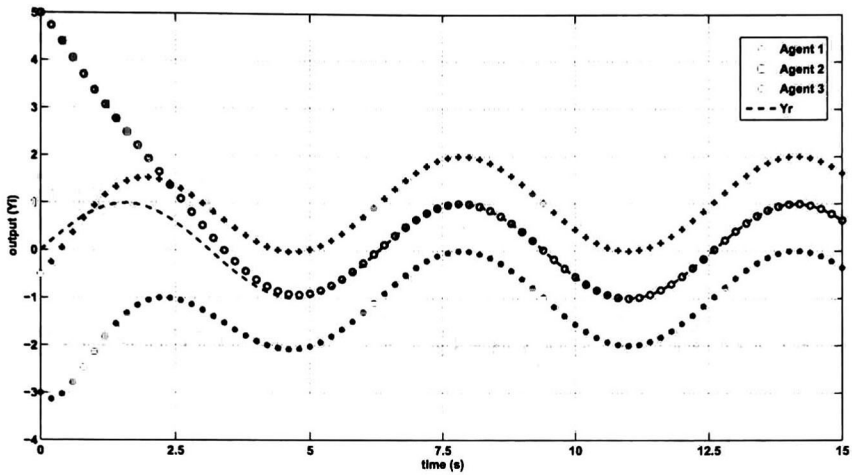


Figura 4.5: Trayectoria de salida de cada agente con respecto a la señal de referencia y_r bajo una topología que conmuta en el tiempo.

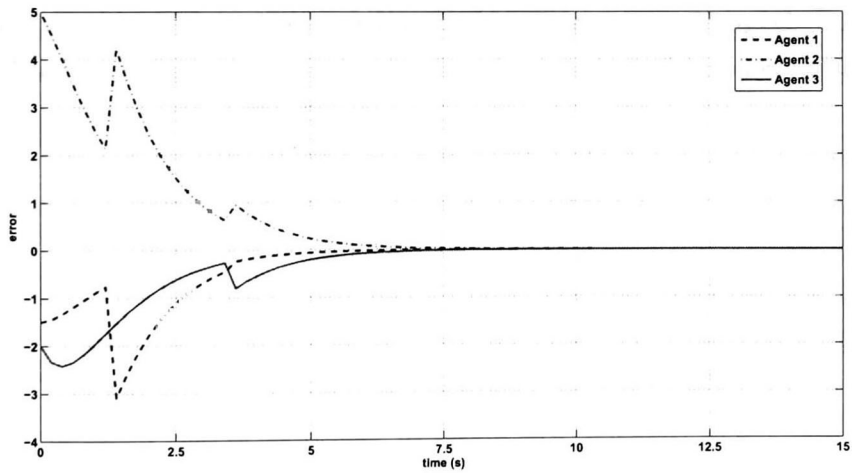


Figura 4.6: Error del consenso y seguimiento de referencia de cada agente con una topología de comunicación que conmuta en el tiempo.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

5.1. Conclusiones

En este trabajo, se presentó una ley de control para el seguimiento de una señal de referencia y formación de agentes, tanto para las topologías de comunicación fijas como cambiantes en el tiempo de *SMA*. La función de referencia es considerada como un agente virtual, cuyos estados siempre son conocidos por cada agente, con esto se asegura que la topología de comunicación para cualquier configuración definida tenga siempre un árbol de expansión directo.

Los agentes son modelados como sistemas lineales *SISO*, lo que es una extensión de los resultados anteriores a este trabajo para el seguimiento de trayectoria en *SMA*, los cuales se basan en dinámicas de uno o dos integradores.

Cada agente puede poseer una dinámica lineal del tipo *SISO* distinta a la de los otros elementos del grupo, incluso de diferente dimensión en su espacio de estados. Lo anterior es otra importante contribución del trabajo al área de *SMA*, ya que a nuestro saber, esto no había sido propuesto en ningún trabajo previo y esto extiende las aplicaciones de los *SMA*, pues los agentes con dinámica distinta pueden considerarse como variaciones físicas de los agentes, puesto que es muy difícil que todos los elementos sean idénticos. Las dinámicas diferentes también pueden considerarse como perturbaciones del ambiente o averías, lo que nos acerca cada vez más a la realidad y por lo tanto a

una correcta implementación del control para *SMA*.

Además, se trabaja con topologías de comunicación cambiantes en el tiempo, y se relajan las limitaciones en cuanto a la velocidad de conmutación. Ya que en los resultados anteriores a este trabajo, a excepción de los *SMA* con agentes de dinámicas de uno o dos integradores, sólo se aseguraba la convergencia de las leyes de control para el consenso si la velocidad con la que conmutaba la topología de comunicación era menor a la velocidad del estado más lento de la dinámica del los agentes, lo que en la práctica es muy difícil de obtener.

Con la ley de control propuesta, se garantiza que la dinámica de error es *GUES* aún y cuando la topología de la configuración cambie, esto se logra teniendo una función de Lyapunov común. Más aún, se muestra que la dinámica de cada agente es estable con la ley de control propuesta.

5.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro, se pretende relajar las condiciones de las topologías de comunicación propuesta pero aun así alcanzar el consenso y seguimiento de señal de referencia. Pues en el caso actual, la información que necesitan transmitir los agentes a sus vecinos puede llegar a ser bastante grande, ya que incluye a los vecinos de los vecinos, por lo que es necesario realizar un algoritmo que trabaje de una manera más local, es decir, una comunicación exclusivamente con los vecinos más cercanos.

Analizando el diseño de la ley de control, puede observarse que es posible extender el resultado para *SMA* donde las dinámicas de los agentes sean multivariable.

Los resultados pueden aplicarse de manera similar a cierta clase de sistemas no lineales, lo que aumenta en gran medida las aplicaciones del consenso a otros sistemas.

El estudio de otras técnicas de control, como lo es la regulación, para garantizar el consenso y seguimiento de referencia.

Considerar el caso cuando la información es discreta, es decir, sólo se conoce cada cierto intervalo de tiempo.

Apéndice A

Sistemas en la forma normal

Definición A.1. Sea λ una función real valuada definida en un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n , la derivada parcial de λ con respecto a x_i es llamada la diferencial exacta que se muestra a continuación

$$d\lambda(x) = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}. \quad (\text{A.1})$$

Definición A.2. Sea f un campo vector definido en un subconjunto U de \mathbb{R}^n , la derivada de λ a través de f , también escrita como $L_f\lambda$, se denota por la siguiente ecuación

$$L_f\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} f_i(x) \quad (\text{A.2})$$

para cada x de U .

Un sistema es descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & x(t_0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo del dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n y de forma similar $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^q$. Las variables $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^p$, $y \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}^q$. con \mathcal{X} , \mathcal{U} y \mathcal{Y} son los espacios de

los estados, entradas y salidas respectivamente, x_0 es la condición inicial de los estados.

Proposición A.1. *Sea un sistema que tiene grado relativo q en el punto x^0 . Entonces $r \leq n$. Se selecciona*

$$\begin{aligned}\phi_1 x &= h(x) \\ \phi_2 x &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \phi_q x &= L_f^{q-1} h(x).\end{aligned}$$

Si q es estrictamente menor que n , siempre es posible encontrar $n - r$ funciones adicionales $\phi_{q+1}(x), \dots, \phi_n(x)$, tales que el mapeo

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 x \\ \vdots \\ \phi_n x \end{pmatrix}$$

tiene una matriz de jacobiano que es no singular en x^0 y entonces se dice que es una transformación local de coordenadas en un vecindario de x^0 . El valor en x^0 de estas funciones adicionales puede ser seleccionado arbitrariamente. Además, siempre es posible seleccionar $\phi_{q+1}(x), \dots, \phi_n(x)$, tal que

$$L_g \phi_i(x) = 0 \quad \forall q+1 \leq i \leq n \text{ y toda } x \text{ al rededor de } x^0.$$

Ver prueba en [9].

La descripción del sistema en las nuevas coordenadas $z_i = \phi_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{q-1} &= z_q \\
 \dot{z}_q &= b(z) + a(z)u \\
 \dot{z}_{q+1} &= q_{q+1}(z) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= q_n(z)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $a(z) = L_g L_f^{q-1} h(\Phi^{-1}(z))$, $b(z) = L_f^q h(\Phi^{-1}(z))$ y $q_i(z) = L_f \phi_i(\phi^{-1}(z))$, $\forall q + 1 \leq i \leq n$. La salida $y = h(x)$ en las nuevas coordenadas queda de la forma $y = z_1$. Cuando un sistema esta en esta estructura de ecuaciones se dice que está en la *forma normal*.

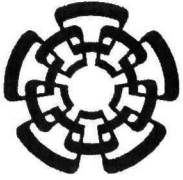
Bibliografía

- [1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, y R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [2] W. Ren y R. W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2008.
- [3] J. A. Fax, "Optimal and cooperative control of vehicle formations," Ph.D. dissertation, California Institute of Technology Pasadena, California, 2002.
- [4] J. A. Fax y R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004.
- [5] X. Xi y E. H. Abed, "Formation control with virtual leaders and reduced communications," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1854–1860, 2005.
- [6] Z. Wu, Z. Guan, y T. L. Xianyong Wu, "Consensus based formation control and trajectory tracing of multi-agent robot systems," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 48, pp. 397–410, 2007.
- [7] M. Shahab, "Cooperative control of multi-vehicle systems," *Project paper*, 2008.
- [8] J. Yan, X. ping Guan, y F. xiao Tan, "Target tracking and obstacle avoidance for multi-agent systems," *International Journal of Automation and Computing*, 2009.
- [9] A. Isidori, *Non Linear Control Systems*. Springer, 1995.

-
- [10] G. Chen y Z. Duan, "Network synchronizability analysis: A graph-theoretic approach," *chaos*, vol. 18, no. 3, pp. 037 102–037 102, 2008.
- [11] X. F. Wang y G. Chen, "Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility," 2001.
- [12] G. Chen y X. Yu, *Chaos Control Theory and Applications*. Springer, 2003.
- [13] W. Ren, "Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction," *Automatica*, vol. 44.
- [14] J. Sandhu, M. Mesbahi, y T. Tsukamaki, "Relative sensing networks: Observability, estimation, and the control structure," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 401–420, 2005.
- [15] R. Olfati-Saber y J. S. Shamma, "Consensus filters for sensors networks and distributed sensor fusion," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6698–6703, 2005.
- [16] V. Saligrama, M. Alanyali, y O. Savas, "Asynchronous distributed detection in sensor networks," *Preprint*, 2005.
- [17] R. Olfati-Saber y R. M. Murray, "Consensus protocols for networks of dynamic agents," *Proceedings of the American Control Conference, Denver, CO, USA*, pp. 951–956, 2003.
- [18] L. Moreau, "Stability of continuous-time distributed consensus algorithms," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3998–4003, 2004.
- [19] A. V. Savkin, "Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: Analysis of vicsek's model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 6, pp. 981–982, 2004.
- [20] R. O. Saber y R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.

BIBLIOGRAFÍA

- [21] A. Jadbabaie, J. Lin, y A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.
- [22] W. Ren y R. W. Beard, "Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.
- [23] R. Olfati-Saber, "Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401–420, 2006.
- [24] P. Lin y Y. Jia, "Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies," *Automatica*, vol. 45.
- [25] X. Wang y Y. Hong, "Parametrization and geometric analysis of coordination controllers for multi-agent systems," *Kybernetika*, vol. 45, no. 5, pp. 785–800, 2009.
- [26] Z. Li, Z. Duan, y L. Huang, "Leader-follower consensus of multi-agent systems," *American Control Conference*, pp. 3256–3261, 2009.
- [27] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, 2003.
- [28] G. Lafferriere, A. Williams, J. Caughman, y J. Veerman, "Decentralized control of vehicle formations," *Systems and control letters*, vol. 54, no. 9, pp. 899–910, 2005.
- [29] C. Ma y J. Zhang, "Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 5, pp. 1263–1268, 2010.
- [30] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.
- [31] M. T. P. Lancaster, *The Theory of Matrices: With Applications*. Academic Press, 1985.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

"2010, Año de la Patria, Bicentenario del Inicio de la Independencia
y Centenario del Inicio de la Revolución"

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Consenso y seguimiento de referencia de una clase de sistemas
lineales SISO

del (la) C.

Carlos Aurelio LÓPEZ LIMÓN

el día 27 de Agosto de 2010.

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Luis Ernesto López Mellado
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0009808