

EC 642
Don. 2011

xx(179062.1)

TK165.G3

R67

2010



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Diseño de una ley de control para alcanzabilidad en redes de Petri fluidificadas

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Roberto Ross León

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. Antonio Ramírez Treviño

Dr. José Javier Ruíz León

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, Julio de 2010.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

CLASIF.:TK165.G8 R67 2010
ADQUIS..BC-642
FECHA: 14-Julio-2011
PROCED..Don.-2011
\$

ID:173943-1001

Diseño de una ley de control para alcanzabilidad en redes de Petri fluidificadas

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Roberto Ross León

Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica
Instituto Tecnológico de Mexicali 2000-2005

Becario de CONACYT, expediente no. 13527

Directores de Tesis

Dr. Antonio Ramírez Treviño

Dr. José Javier Ruíz León

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Julio de 2010.

Resumen

En el presente documento se aborda el estudio y análisis de control de sistemas de eventos discretos a través de las redes de Petri (PN) debido a que éstas constituyen una herramienta eficiente en términos de representación y formalidad, ya que aportan una fácil comprensión visual del sistema modelado y al mismo tiempo tienen un sólido soporte matemático.

No obstante, cuando se trata de sistemas altamente traficados (marcados, en el contexto de las redes de Petri) ocurre que la cantidad de estados se dispara, haciendo que el grafo de alcanzabilidad (el cual engloba todos los posibles estados que puede alcanzar el sistema) crezca desmesuradamente, este problema es conocido como "explosión de estados". Cuando la explosión de estados se presenta en una PN temporizada ocurre que las transiciones siempre se hallan habilitadas y resulta muy complicado definir secuencias de ocurrencias realizables para alcanzar algún marcado requerido (debido a la temporización y las sincronizaciones).

Las redes de Petri continuas temporizadas o redes fluidificadas (TCPN por sus siglas en inglés) son una relajación de las redes de Petri discretas que consiste en aproximar el comportamiento de una PN temporizada por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales y continuas, tal relajación es útil para lidiar con el problema de la explosión de estados. El modelo fluidificado tiene tres características principales: 1) debido al operador *mínimo* que se presenta en las sincronizaciones es un sistema lineal conmutado (SLC), 2) la entrada debe ser no negativa y acotada por una función del estado (restricción), y 3) los modelos con algún significado real son sistemas de alto orden, es decir, con decenas o centenas de variables de estado.

En esta disertación se propone una nueva técnica en la teoría de control sobre redes de Petri, particularmente sobre las redes fluidificadas. Dicha técnica se basa en la construcción de un sistema de error que fue forzado al cero mediante una función de Lyapunov que garantiza su estabilidad. Los sistemas TCPN son una subclase de sistemas híbridos (lineal conmutado) y además son sistemas positivos, por lo que las leyes deben cumplir requisitos mayores que para el caso de sistemas lineales comunes, y esos requisitos han sido satisfechos con la ley de control propuesta.

Se propone también una metodología ascendente en la que las reacciones bioquímicas son modeladas a través de módulos elementales, se muestra cómo éstos se van uniendo para formar rutas metabólicas, y por último el metabolismo celular. El modelo resultante captura ambas dinámicas, la del estado transitorio y la del estado estacionario del metaboloma. Es importante notar que el modelo TCPN derivado condensa muchos comportamientos representados por un conjunto de ecuaciones diferenciales generados por la TCPN en sí misma.

Este trabajo presenta también el problema de alcanzar un estado requerido (marcado) representando cierto estado de concentraciones de un metaboloma. La solución es el vector de velocidades de reacción el cual es positivo o cero y menor o igual a los máximos fijados por la cinética de Michaelis-Menten para la concentración de enzima actual. Así, si la solución existe, ésta puede implementarse in vivo por mutación genética dirigida, estrategias knock-in (o knock-out) o efectos farmacológicos.

Summary

This paper addresses the control study and analysis of discrete event systems via Petri nets (PN) because they are an efficient tool in terms of representation and formality, since they provide easily understood visual modeled system and at the same time have a strong mathematical support.

However, when it comes to highly trafficked systems (marked in the context of Petri nets) the case that the number of states is triggered, causing the reachability graph (which includes all possible states that can reach the system) grow excessively, this problem is known as "state explosion" When the state explosion occurs in a timed PN happens that transitions are always enabled and it is very difficult to define sequences of occurrences feasible to achieve some required marking (due to timing and synchronization).

Timed Continuous Petri nets or fluidified nets (TCPN) are a relaxation of discrete Petri nets by approximating the behavior of a timed PN by a set of linear and continuous differential equations, such relaxation is useful to deal with the problem of state explosion. The fluidized model has three main features: 1) due to the minimum operator is presented in the timings is a switched linear system (SLC), 2) the entry must be nonnegative and bounded by a function of state (restriction), and 3) models with any real significance are higher-order systems, ie, with tens or hundreds of state variables.

In this dissertation we propose a new technique in control theory of Petri nets, particularly on fluidified nets. This technique is based on the construction of an error system that is forced to zero by a Lyapunov function that guarantees stability. TCPN systems are a subclass of hybrid systems (linear switched) systems and they are positive, so that laws must meet higher requirements for the case of common linear systems, and these requirements have been satisfied with the proposed control law.

We also propose a bottom-up method in which biochemical reactions are modeled by elementary modules, shows how they are joined together to form metabolic pathways, and finally the cell metabolism. The resulting model captures both dynamics, the transient state and steady state of the metabolome. It is important to note that the model derived TCPN condenses many behaviors represented by a set of differential equations generated by TCPN itself.

This paper also presents the problem of achieving a required state (marking) representing a certain state of concentrations of a metabolome. The solution is the vector of reaction rates which is positive or zero and less than or equal to the maximum set by the Michaelis-Menten kinetics for the concentration of enzyme present. Thus, if the solution exists, it can be implemented in vivo by targeted mutation, knock-in strategy (or knock-out) or pharmacological effects.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Antecedentes	5
1.2. Estado del arte sobre el control de redes fluidificadas	6
1.3. Perspectiva del Trabajo .	7
1.4. Contribuciones	8
1.5. Contenido	9
2. Conceptos Preliminares	11
2.1. Conceptos sobre redes de Petri .	11
2.1.1. Propiedades estructurales de las Redes de Petri	14
2.1.2. Otras Propiedades de las Redes de Petri	16
2.2. Redes de Petri Continuas .	17
2.2.1. Grado de Habilitación	17
2.2.2. Propiedades en las ContPN's .	18
2.3. Redes de Petri Continuas Temporizadas	19
2.3.1. Semánticas de Servidor	20
2.3.2. Configuraciones y Regiones	23
2.3.3. Acción de Control .	25
2.4. Comparación en tiempo entre TPN's y TCPN's	25
3. Controlabilidad	29
3.1. Controlabilidad en Sistemas Lineales	30

3.2. Controlabilidad en TCPN's	30
4. Leyes de Control	35
4.1. Control por Vector Limitante	35
4.1.1. Solución del Problema de Control de Regulación ($RCP(m_r, I_{cr})$)	37
4.2. Control por Propagación de Flujos	40
4.3. Control de Modelo Predictivo Explícito	41
5. Análisis Temporal del Control por Vector Limitante (CVL)	45
5.1. Optimalidad del CVL	45
5.2. Acciones de Control Óptimas	47
5.3. Estructuras	50
5.3.1. El Caso de Múltiples $\sigma_{\text{mín}}$	52
5.3.2. El Caso de Estructura Acelerable	53
6. Control Sobre Metabolomas Celulares	57
6.1. Metabolismo celular	57
6.2. Modelando el Metaboloma Celular	59
6.2.1. Representación de Reacciones	60
6.2.2. Unión de Módulos Elementales	61
6.2.3. Unión de Módulos Ruta	61
6.3. Control del Metaboloma Celular	62
7. Conclusiones	65
7.1. Trabajo Futuro	66
A. Teoría de Estabilidad de Lyapunov	71

Agradecimientos

A mi familia por siempre estar al pendiente de mí.

A todos mis compañeros, en especial a Riemman y Nuño por su inteligencia, disposición y facilidad de explicar las cosas.

A Liz por soportar y responder tantas preguntas obvias y reincidentes.

A la Shula más shula y mula por su amistad y todas las cachetadas morales que me dió... y seguirá dando.

A Elías por sus consejos sobre mejor no pensar.

A Mary por haberme despertado aquel día.

A Mayra por acompañarme a donde quiera que vaya.

A mis asesores, en especial a Treviño por su paciencia, apoyo y su contagiante interés por el conocimiento.

Al Cinvestav por poner su infraestructura, personal y docentes a disposición.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Los sistemas dinámicos de eventos discretos (*SED*) son aquellos que están compuestos por elementos que manejan entidades discretas, es decir numerables y diferenciables entre sí. Su funcionamiento está caracterizado por una sucesión finita o infinita de estados estables delimitados por eventos que ocurren, generalmente, de manera asíncrona.

La mayor parte de los sistemas que pueden caer en esta clasificación han sido construidos por el hombre; como ejemplos podemos citar a los sistemas de cómputo (operativos, de procesamiento de información, de comunicaciones, etc.) y a los sistemas de producción discretos también conocidos como sistemas de manufactura [19].

Existe una gran variedad de formalismos para describir o modelar el comportamiento de los *SED*. Podemos destacar las ecuaciones booleanas, las expresiones regulares, los diagramas de tiempo, las tablas de estados, los grafos o máquinas de estados, las redes de Petri y las álgebras de procesos [15].

Cada formalismo ofrece elementos y convenciones para representar el funcionamiento de un sistema en términos de estados, eventos y relaciones de precedencia entre estados. También, cada formalismo permite, con diferentes grados de claridad y compacidad, la representación de comportamientos tales como secuenciamiento, paralelismo, sincronización entre procesos que evolucionan concurrentemente, entre otros [19].

En el presente documento se aborda el estudio y análisis de control de sistemas de eventos discretos a través de las redes de Petri (*PN*) debido a que éstas constituyen una herramienta eficiente en términos de representación y formalidad, ya que aportan una fácil comprensión visual del sistema modelado y al mismo tiempo tienen un sólido soporte matemático.

No obstante, cuando se trata de sistemas altamente traficados (marcados, en el contexto de las redes de Petri) ocurre que la cantidad de estados se dispara, haciendo que el grafo

de alcanzabilidad (el cual engloba todos los posibles estados que puede alcanzar el sistema) crezca desmesuradamente, este problema es conocido como “explosión de estados”. Cuando la explosión de estados se presenta en una PN temporizada ocurre que las transiciones siempre se hallan habilitadas y resulta muy complicado definir secuencias de ocurrencias realizables para alcanzar algún marcado requerido (debido a la temporización y las sincronizaciones).

Las redes de Petri continuas temporizadas o redes fluidificadas ($TCPN$ por sus siglas en inglés) son una relajación de las redes de Petri discretas que consiste en aproximar el comportamiento de una PN temporizada por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales y continuas, tal relajación es útil para lidiar con el problema de la explosión de estados. El modelo fluidificado tiene tres características principales: 1) debido al operador *mínimo* que se presenta en las sincronizaciones es un sistema lineal conmutado (SLC), 2) la entrada debe ser no negativa y acotada por una función del estado (restricción), y 3) los modelos con algún significado real son sistemas de alto orden, es decir, con decenas o centenas de variables de estado.

1.2. Estado del arte sobre el control de redes fluidificadas

Aunque hay bastante literatura relacionada con la controlabilidad y diseño de control para SLC y también sobre el control con restricciones, se han tenido dificultades para conjuntar dichas técnicas y aplicarlas a sistemas $TCPN$. En trabajos como en [35] y [36] se trata la controlabilidad y problemas de estabilización para sistemas con entradas acotadas, sin embargo en dichos trabajos la entrada puede tomar valores negativos, lo cual está restringido en nuestro modelo. En [4] la controlabilidad sobre sistemas lineales con entradas no negativas es estudiada, pero dicha definición no aplica a los sistemas $TCPN$ ya que en estos últimos las entradas también tienen una cota superior. Respecto a SLC , en [30] es formulado un problema concerniente a sistemas de producción como un problema de control H_∞ para sistemas afines; además se propone un programa de optimización sujeto a restricciones LMI, y en [13] el problema de diseño de control para SLC se estudia a través de funciones cuadráticas de Lyapunov y optimización convexa, sin embargo, en [21] se demuestra que los sistemas $TCPN$ no son controlables en el sentido clásico, por esa razón las técnicas mencionadas no pueden ser aplicadas directamente sobre nuestro modelo.

Es por esto que se tiene la necesidad de investigar más técnicas de control sobre sistemas $TCPN$, actualmente los investigadores están buscando una ley de control estable y efectiva para los sistemas $TCPN$. En [11] se propone una ley de control por retroalimentación de estados basada en control por modelo predictivo explícito ($eMPC$ por sus siglas en inglés), pero éste tiene dos inconvenientes: no es óptimo en un horizonte infinito, por lo que es una aproximación y no una solución óptima en sí, además la complejidad y tiempo computacional lo hacen prohibitivo cuando el orden del espacio de estados, así como la longitud de horizonte de predicción, son grandes. En [1] se presenta una ley de control por propagación de flujos,

pero resulta una técnica relativamente lenta para alcanzar un estado requerido.

1.3. Perspectiva del Trabajo

Para nuestro enfoque hacemos alusión a [38], en donde se muestra que si algunas condiciones se satisfacen, entonces existe un conjunto de puntos (el conjunto de posibles puntos de operación estacionaria del modelo) en los cuales el sistema cuenta con la propiedad de controlabilidad, i.e. cualquier estado de dicho conjunto es alcanzable desde cualquier otro dentro de él. En base a tales resultados, dicho documento propone el concepto de controlabilidad para sistemas *TCPN* en particular, junto al cual también se dan condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad, definiciones que serán presentadas y utilizadas a lo largo de esta disertación para abordar el problema del control. La ley de control propuesta en la presente disertación se basa en una función de Lyapunov, a partir de la cual se obtiene un criterio de encendido-apagado que garantiza la convergencia a un estado (marcado) requerido. Las ventajas del control propuesto son: 1) bajo consumo de recursos computacionales, 2) posibilidad de encontrar una solución que minimice la cantidad de materia para alcanzar un estado requerido, y 3) rápida convergencia al estado requerido.

Es importante mencionar que aunque el uso de modelos fluidificados nos faciliten el análisis de sistemas altamente traficados, algunas características, como la secuencia de disparos y la conservación de la no-vivacidad, se pierden durante la fluidificación. En este sentido el modelo continuo es considerado una aproximación del discreto y no propiamente un modelo del sistema físico. Una comparación entre estos modelos se encuentra en [32].

Por otro lado, las principales características de las *TCPN* tales como la representación gráfica, el soporte matemático, la sincronización de actividades y la representación de relaciones causales hacen a las *TCPN* adecuadas para representar reacciones bioquímicas y el metabolismo celular. De hecho, el marcado de las *TCPN* captura la concentración de especies moleculares mientras que las ecuaciones diferenciales junto con los vectores de disparo representan las velocidades de reacción y la gráfica captura las rutas metabólicas. La *TCPN* completa captura el metaboloma celular.

Muchos trabajos modelan [12], [26], analizan [14], [2] y controlan [29], [27] rutas metabólicas. La mayoría de ellos trabajan sobre estados pseudoestacionarios de la dinámica de las reacciones bioquímicas. En la actualidad, la comunidad científica explora el uso de *PN* y sus extensiones para modelar sistemas biológicos [28], [24] debido a que las primeras son capaces de capturar el flujo de compuestos, las velocidades de reacción, la habilitación/inhabilitación de reacciones y tanto las dinámicas de estado transitorio como las de estado estacionario en un sólo formalismo.

1.4. Contribuciones

En esta disertación se propone una nueva técnica en la teoría de control sobre redes de Petri, particularmente sobre las redes fluidificadas. Dicha técnica se basa en la construcción de un sistema de error que fue forzado al cero mediante una función de Lyapunov que garantiza su estabilidad. Los sistemas *TCPN* son una subclase de sistemas híbridos (lineal conmutado) y además son sistemas positivos, por lo que las leyes deben cumplir requisitos mayores que para el caso de sistemas lineales comunes, y esos requisitos han sido satisfechos con la ley de control propuesta.

También se presentan algunos análisis estructurales para la elección adecuada del vector limitante necesario para nuestro control. El Control por Vector Limitante (*CVL*), a diferencia de las leyes de control del estado de arte, puede ejecutarse online, no requiere del consumo de grandes recursos computacionales, es efectiva y además garantiza optimalidad en tiempo de convergencia para ciertas estructuras de red y para otras propone heurísticas para minimizarlo.

Parte del aporte del presente trabajo trata sobre el modelado del metaboloma con *TCPN*. Se propone una metodología ascendente en la que las reacciones bioquímicas son modeladas a través de módulos elementales, se muestra cómo éstos se van uniendo para formar rutas metabólicas, y por último el metabolismo celular. El modelo resultante captura ambas dinámicas, la del estado transitorio y la del estado estacionario del metaboloma. Es importante notar que el modelo *TCPN* derivado condensa muchos comportamientos representados por un conjunto de ecuaciones diferenciales generados por la *TCPN* en sí misma. Por ejemplo, una sola transición con cuatro lugares de entrada (una reacción que requiere cuatro sustratos) genera un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales posibles, mientras que dos transiciones con cuatro lugares de entrada cada uno generarán un conjunto de dieciséis ecuaciones diferenciales posibles. Por eso se pueden presentar comportamientos muy complejos de pocos compuestos.

Este trabajo presenta también el problema de alcanzar un estado requerido (marcado) representando cierto estado de concentraciones de un metaboloma. La solución es el vector de velocidades de reacción el cual es positivo o cero y menor o igual a los máximos fijados por la cinética de Michaelis-Menten para la concentración de enzima actual. Así, si la solución existe, ésta puede implementarse *in vivo* por mutación genética dirigida, estrategias knock-in (o knock-out) o efectos farmacológicos.

A continuación se puntualizan las principales aportaciones:

- Se presenta un análisis temporal y se muestra una comparación entre los sistemas de red de Petri discreto temporizado y los sistemas *TCPN*.
- Se propone una ley de control para sistemas *TCPN* para el caso cuando todas las transiciones son controlables. La efectividad de esta ley de control fue demostrada a través de una función de Lyapunov (logra alcanzar el marcado requerido).

- Se realiza un análisis acerca de la optimalidad en tiempo de la ley de control propuesta y una comparación con otros métodos de la teoría de control.

Se presenta un método estructural para identificar la factibilidad de la ley de control propuesta para que por lo menos sea cercana al punto de operación óptimo en tiempo.

Se propone una metodología de modelado de sistemas metabólicos.

Se presenta un ejemplo de la aplicación del control sobre un sistema metabólico supuesto.

1.5. Contenido

El presente documento se organiza como sigue.

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos y conceptos básicos sobre redes de Petri, sus propiedades y subclases. Se presenta una ecuación de estados para las redes fluidificadas y al final de este capítulo una comparación del comportamiento en el tiempo entre la red de Petri discreta temporizada y la fluidificada. En el Capítulo 3 se expone el significado de controlabilidad partiendo de la teoría de sistemas lineales y luego se presenta la definición correspondiente para el caso de las *TCPN*'s. En el Capítulo 4 se propone una ley de control para las *TCPN*'s, se demuestra su estabilidad y se compara con otras leyes propuestas en la literatura actual, como el Control por Propagación de Flujos y el *eMPC*. En el capítulo 5 se presenta un análisis de optimalidad en tiempo de la ley de control que proponemos y se dan algunas guías estructurales para el mejor uso de dicha ley de control. En el Capítulo 6 se presenta teoría básica sobre metabolismo celular, se describe la metodología de modelado de sistemas metabólicos celulares y al final del mismo se muestra un ejemplo con la ley de control que se propone. En el Capítulo final se dan las conclusiones del presente trabajo, se resumen las contribuciones principales y se presenta una breve propuesta para trabajo futuro en la misma línea.

Capítulo 2

Conceptos Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos básicos relacionados con redes de Petri (PN), redes de Petri continuas ($ContPN$) y $TCPN$. Un lector interesado puede consultar [9], [5], [8] y [7] para una documentación más profunda. Al final de esta sección se presenta una forma útil de la ecuación de estados para $TCPN$ bajo la semántica de servidores infinitos.

Las redes de Petri son un medio completo para el modelado de sistemas de eventos discretos (SED) debido a la posibilidad del análisis gráfico y matemático. Los procesos de manufactura, sistemas de tráfico, sistemas logísticos y muchos más pueden ser modelados y estudiados con PN 's las cuales capturan características como concurrencia y asincronía de ocurrencia de eventos, distribución de sistemas y paralelismo. Además de la expresión visual, las PN 's capturan el comportamiento de los sistemas por una ecuación de estados, ésta es útil para el análisis de los SED con el soporte matemático.

2.1. Conceptos sobre redes de Petri

Una red de Petri es un grafo bipartita dirigido junto con un estado inicial llamado marcado inicial. A continuación se presentan los elementos que componen la estructura de las PN .

Definición 2.1 Una red N es una 3-tupla (P, T, F) donde P y T son dos conjuntos disjuntos y F es una relación sobre $P \cup T$ tal que $F \cap (P \times P) = F \cap (T \times T) = \emptyset$. Los elementos de P son llamados lugares y gráficamente representados por círculos. Los elementos de T son llamados transiciones y gráficamente son representados por cajas o barras. El conjunto F es llamado relación de flujo de la red, sus elementos son llamados arcos y son representados por flechas de lugares a transiciones y viceversa. Los elementos de $P \cup T$ también son llamados nodos de la red.

Un sistema de red (o simplemente un sistema) es un par (N, m_0) donde N es una red conectada con al menos un lugar y una transición, y m_0 es llamada el marcado inicial. Un

marcado es llamado alcanzable en un sistema si éste es alcanzable desde el marcado inicial.

La expresión $F \cap (P \times P) = F \cap (T \times T) = \emptyset$ indica que en el conjunto F no pueden existir relaciones de transición a transición ni de lugar a lugar.

Ahora se definirán conjuntos de elementos de acuerdo a su posición respecto a un nodo específico.

Definición 2.2 Dado un nodo x de N , el conjunto $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$ es el conjunto-Pre de x y el conjunto $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$ es el conjunto-Post de x . Los elementos en el conjunto-Pre (conjunto-Post) de un lugar son sus transiciones de entrada (salida). Similarmente, los elementos del conjunto-Pre (conjunto-Post) de una transición son sus lugares de entrada (salida). Dado un conjunto X de nodos N , se definen $\bullet X = \cup_{x \in X} \bullet x$ y $X^\bullet = \cup_{x \in X} x^\bullet$.

El estado de un sistema PN está representado por el marcado de la red, definido a continuación.

Definición 2.3 El marcado de una red N es un mapeo $m : P \rightarrow \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Un marcado es representado por el vector $[m(p_1) \dots m(p_n)]^T$ donde p_1, p_2, \dots, p_n es una numeración arbitraria pero fija de P .

Definición 2.4 El peso de arco es una función $w : F \rightarrow \mathbb{N}$, la cual asocia un número natural a cada arco.

Definición 2.5 Regla de ocurrencia. Un marcado m habilita una transición t si $\forall p \in \bullet t$, $m(p) \geq w(p, t)$. Si t está habilitada en m , entonces esta puede ocurrir, y su ocurrencia nos lleva al marcado sucesivo m' (escrito $m \xrightarrow{t} m'$) el cual está definido para todo lugar p por

$$m'(p) = \begin{cases} m(p) & \text{si } p \notin \bullet t \text{ y } p \notin t^\bullet \\ m(p) - w(p, t) & \text{si } p \in \bullet t \text{ y } p \notin t^\bullet \\ m(p) + w(t, p) & \text{si } p \notin \bullet t \text{ y } p \in t^\bullet \\ m(p) - w(p, t) + w(t, p) & \text{si } p \in \bullet t \text{ y } p \in t^\bullet \end{cases} \quad (2.1)$$

Esta regla de ocurrencia es la que define la evolución del marcado. El siguiente ejemplo muestra cómo la ocurrencia de cada transición repercute en un sistema.

Ejemplo 2.1 Sea N la red de la Figura 2.1 con $m_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0]^T$ Como inicialmente $m(p_1) = 0$ y $p_1 \in \bullet t_1$, la transición t_1 no está habilitada, de manera similar ocurre con las transiciones t_2 y t_3 (no cumplen con la condición $\forall p \in \bullet t$, $m(p) \geq w(p, t)$). Por otra parte, la transición t_4 se encuentra habilitada ya que $m(p_4) = 2$ y $p_4 \in \bullet t_4$, por lo que puede

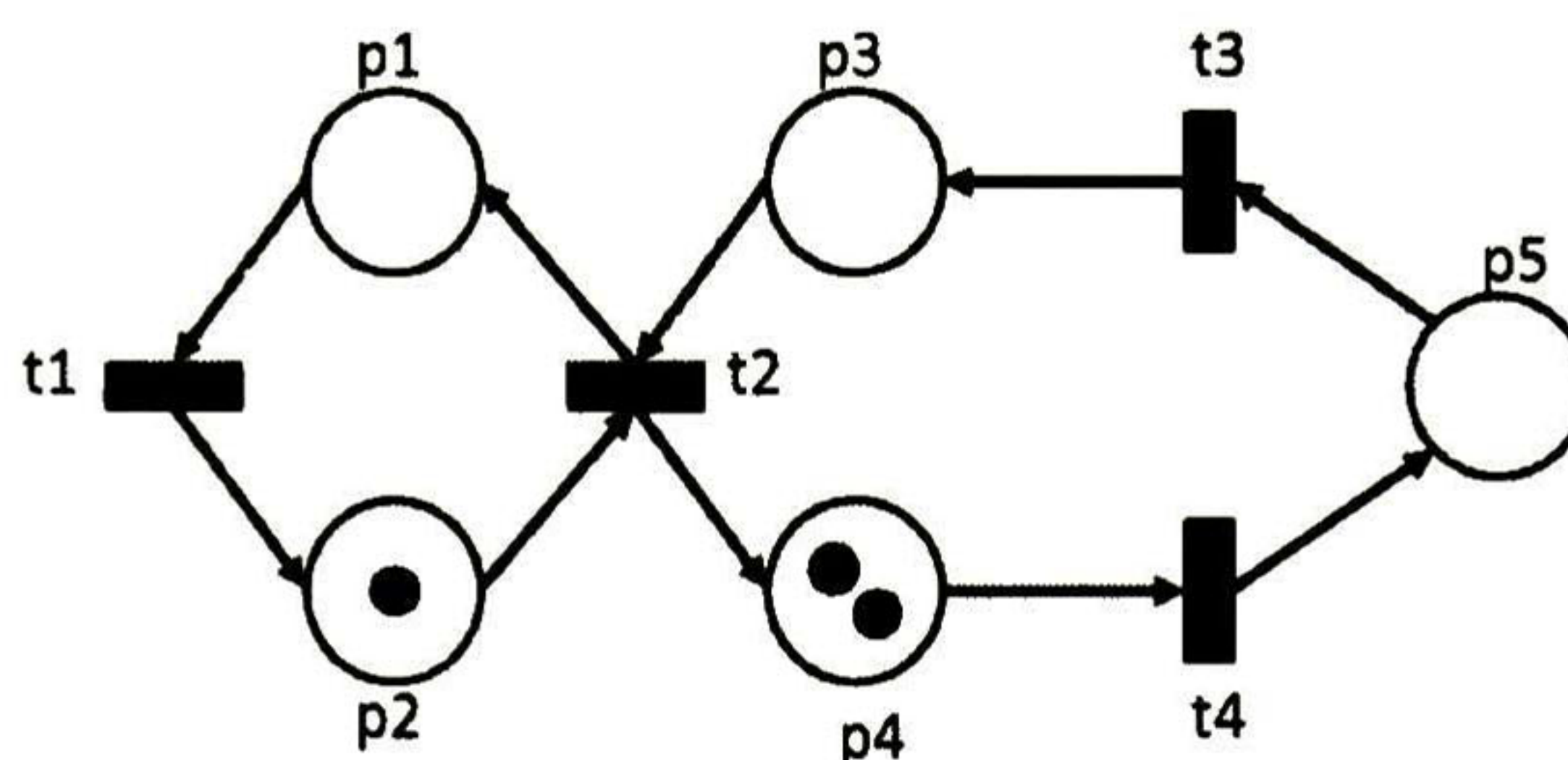


Figura 2.1: Red de Petri.

ser disparada. Ahora disparamos una vez t_4 , haciendo uso de la regla de ocurrencia (2.1) el marcado evoluciona a $m^1 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$. Con este nuevo marcado m^1 las transiciones habilitadas ahora son t_3 y t_4 . Supongamos que ahora la transición t_3 es disparada, entonces haciendo uso nuevamente de (2.1) el marcado evoluciona a $m^2 = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$. Ahora, con el marcado m^2 las transiciones habilitadas son t_2 y t_4 . De esta manera el sistema evoluciona aplicando la regla de ocurrencia con el disparo de cada transición (habilitada).

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la ocurrencia de una transición puede provocar la habilitación de otra que inicialmente se encontraba inhabilitada, por lo que el orden en que las transiciones ocurren también está restringido por la regla de ocurrencia. En este punto es importante definir el concepto de secuencia de ocurrencias.

Definición 2.6 Sea m un marcado de N . Si $m \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} m_n$ son ocurrencias de transiciones, entonces $\sigma = t_1 t_2 \dots t_n$ es una secuencia de ocurrencias que nos llevan de m a m_n y esta ocurrencia es escrita como $m \xrightarrow{\sigma} m_n$. Se escribe $m \xrightarrow{*} m'$ cuando m' es alcanzable desde m , i.e. $m \xrightarrow{\sigma} m'$ para alguna secuencia de ocurrencias σ . El conjunto de todos los marcados alcanzables desde m se denota como $RS(N, m)$.

Definición 2.7 Sea (P, F, T) una red discreta y sea σ una secuencia de transiciones. El vector de Parikh $\vec{\sigma} : T \rightarrow \mathbb{N}$ de σ mapea toda transición t de T al número de ocurrencias de t en σ .

Es importante notar que el vector de Parikh $\vec{\sigma}$ no captura el orden en que se da la secuencia de ocurrencias σ , sino la cantidad de veces que una misma ocurrencia se presenta en la secuencia.

A continuación se definen las matrices *Pre*, *Post* y de incidencia.

Definición 2.8 Sea N la red (P, F, T) . La matriz *Pre* de orden $|P| \times |T|$ está definida por

$$Pre[p, t] = \begin{cases} 0 & \text{si } (p, t) \notin F \\ w(p, t) & \text{si } (p, t) \in F \end{cases}$$

La matriz $Post$ de orden $|P| \times |T|$ está definida por

$$Post[p, t] = \begin{cases} 0 & \text{si } (t, p) \notin F \\ w(t, p) & \text{si } (t, p) \in F \end{cases}$$

La matriz de incidencia denotada como C está definida por

$$C = Post - Pre$$

La matriz de incidencia C engloba el efecto que provoca la ocurrencia de cada una de las transiciones sobre el marcado en cada uno de los lugares de la red, podría decirse que es la representación matricial de la regla de ocurrencia.

Usando la matriz de incidencia C y el vector de Parikh $\vec{\sigma}$ es posible establecer una ecuación de marcados, la cual se presenta en el siguiente lema tomado de [9].

Lema 2.1 Para toda secuencia finita $m \xrightarrow{\sigma} m'$ de una red N la siguiente ecuación de marcado prevalece:

$$m = m_0 + C\vec{\sigma}$$

Demostración. Por inducción sobre la longitud de σ .

Base: $\sigma = \epsilon$. Entonces $m = m'$. Tenemos que $\vec{\sigma} = \mathbf{0}$, lo cual prueba el resultado.

Paso: Supóngamos que σ es una secuencia no vacía. Entonces $\sigma = \alpha t$ para una secuencia α y una transición t .

Sea $m \xrightarrow{\alpha} m_\alpha \xrightarrow{t} m'$. Tenemos que

$$\begin{aligned} m' &= m_\alpha + C\vec{t} \\ &= m + C\vec{\alpha} + C\vec{t} \\ &= m + C(\vec{\alpha} + \vec{t}) \\ &= m + C\vec{\sigma} \\ &= m + C\vec{\sigma} \end{aligned}$$

■

2.1.1. Propiedades estructurales de las Redes de Petri

El invariante de un sistema dinámico es una afirmación que se mantiene en todo estado alcanzable. En el caso de los sistemas PN los invariantes están relacionados con la matriz de incidencia, presentados a continuación.

Definición 2.9 Sea N una red de Petri y sea C su matriz de incidencia. Entonces queda definido el P -invariante (o P -flujo) como la solución racional de la ecuación $Y \cdot C = \mathbf{0}$. Si la solución es no-negativa se le denomina P -semiflujo. Si además existe un P -semiflujo estrictamente positivo, es decir $y > \mathbf{0}$ tal que $y \cdot C = \mathbf{0}$, se dice que la red es conservativa.

Proposición 2.1 Sea (N, m_0) un sistema, y sea s un P -invariante de N . Si $m_0 \xrightarrow{*} m'$, entonces $s \cdot m = s \cdot m_0$ [9].

Demostración. Como $m_0 \xrightarrow{*} m'$, tenemos que $m_0 \xrightarrow{\sigma} m'$ para alguna secuencia de ocurrencias σ . De la ecuación de marcado, $m = m_0 + C\vec{\sigma}$. De ahí

$$s \cdot m = s \cdot m_0 + s \cdot C\vec{\sigma} = s \cdot m_0$$

ya que $s \cdot C = 0$. ■

Los P -invariantes están relacionados con conjuntos de lugares cuyos marcados al ser sumados siempre dan un mismo valor para todo marcado alcanzable. Para comprender mejor esta noción se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2 Sea N la red de la Figura 2.1. La matriz de incidencia de N es

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

la cual tiene los P -semiflujos $y_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ y $y_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$. Además existe un P -semiflujo estrictamente positivo $y = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, por lo que la red N es conservativa. Para comprobar que y_1 , y_2 , y y son P -semiflujos, basta con verificar que $y_1 \cdot C = y_2 \cdot C = y \cdot C = \mathbf{0}$. Haciendo un mayor análisis, podemos ver que el P -semiflujo y_1 sólo está relacionado con los lugares (filas) p_1 y p_2 de la red (matriz de incidencia), y las únicas transiciones que afectan a estos lugares son t_1 y t_2 , pero sin importar cuándo se disparen dichas transiciones siempre sucede que $m(p_1) + m(p_2) = 1$. Lo mismo sucede con y_2 y los lugares p_3 , p_4 y p_5 , cumpliéndose $\sum_{i=1}^3 m(p_i) = 2$ en todo momento. Si hacemos el mismo análisis con el P -semiflujo y tendremos un resultado similar utilizando todos los lugares p_i de la red, cumpliéndose $\sum_{i=1}^5 m(p_i) = 3$ en todo momento. En este último caso, debido a que el número de marcas circulando en toda la red siempre es el mismo, es decir, en ningún momento se pierden ni se ganan más marcas de las que inicialmente tiene la red, se puede ver que la conservatividad de la red hace alusión a esta característica.

Definición 2.10 Sea N una red de Petri y sea C su matriz de incidencia. Entonces queda definido el T -invariante (o T -flujo) como la solución racional de la ecuación $C \cdot X = \mathbf{0}$. Si la solución es no-negativa se le denomina T -semiflujo. Si además existe un T -semiflujo estrictamente positivo, es decir $x > \mathbf{0}$ tal que $C \cdot x = \mathbf{0}$, se dice que la red es consistente.

Proposición 2.2 *Sea σ una secuencia finita de transiciones de una red N la cual está habilitada en el marcado m . Entonces el vector de Parikh $\vec{\sigma}$ es un T -invariante si y sólo si $m \xrightarrow{\sigma} m$ (i.e. si y sólo si la ocurrencia de σ reproduce el marcado m) [9].*

Demostración. Sólo si: Como σ está habilitada en m , tenemos que $m \xrightarrow{\sigma} m'$ para algún marcado m' . Por la ecuación de marcado tenemos $m = m_0 + C\vec{\sigma}$. Como $\vec{\sigma}$ es un T -invariante, tenemos que $C\vec{\sigma} = 0$. Por lo que $m' = m$.

Si: Si $m \xrightarrow{\sigma} m$ entonces, de la ecuación de marcado, $C\vec{\sigma} = 0$. Por lo que $\vec{\sigma}$ es un T -invariante.

■

Los T -invariantes están relacionados con conjuntos de transiciones que al ocurrir en alguna secuencia realizable nos mantienen en un mismo marcado. Para comprender mejor esta noción se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3 *Sea N la red de la Figura 2.1. La matriz de incidencia de la red es (2.2), la cual tiene el T -semiflujo $x = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$. Como además x es estrictamente positivo, la red N es consistente. Para comprobar que x es un T -semiflujo, basta con verificar que $C \cdot x = 0$. Haciendo un mayor análisis vemos que el T -semiflujo x utiliza todas las transiciones de la red, por lo que cualquier marcado puede ser “mantenido” utilizando tal T -semiflujo, de ahí que se le llame consistente a esta característica.*

2.1.2. Otras Propiedades de las Redes de Petri

Dependiendo de la estructura y marcado inicial de una PN pueden presentarse propiedades que pueden resultar muy útiles al momento de analizar un sistema dado. A continuación se definen tales propiedades y se comentan sus ventajas.

Definición 2.11 *Un sistema es vivo si, para todo marcado alcanzable m y toda transición t , existe un marcado $m' \in RS(N, m_0)$ el cual habilita t . Si (N, m_0) es un sistema vivo, entonces también se dice que m_0 es un marcado vivo de N . Un sistema es lugar-vivo si para todo marcado alcanzable m y todo lugar p , existe un marcado $m' \in RS(N, m_0)$ que marca p . Un sistema es libre de bloqueos si todo marcado alcanzable habilita por lo menos una transición.*

En otras palabras, un sistema es vivo si toda transición siempre puede volver a ocurrir en un momento dado. Los sistemas vivos también son sistemas lugar-vivo, y además un sistema vivo implica también que es libre de bloqueos.

La vivacidad es una propiedad que describe el continuo funcionamiento de un sistema, garantizando que nunca llegará a un estado inerte (suponiendo un sistemas sin fallas).

Definición 2.12 *Un sistema es acotado si para todo lugar p hay un número natural b tal que $m(p) \leq b$ para todo marcado alcanzable $m \in RS(N, m_0)$. Si (N, m_0) es un sistema acotado, también se dice que m_0 es un marcado acotado de N . La cota de un lugar p en un sistema acotado (N, m_0) se define como:*

$$\text{máx} \{m(p) \mid m \in RS(N, m_0)\}$$

donde $\text{máx}(\cdot)$ es el operador máximo. Un sistema es llamado b -acotado si ningún lugar tiene una cota mayor que b .

En las PN , las marcas suelen representar los recursos y/o productos de un SED . El acotamiento es una propiedad que garantiza que dichos recursos o productos estarán limitados por una cota máxima en todo momento, es decir, que no habrá un acumulamiento infinito de recursos ni de productos, y por lo tanto garantiza que el número de estados alcanzables es finito.

Definición 2.13 *Una red N se dice bien formada si existe un marcado inicial m_0 de N tal que (N, m_0) es un sistema vivo y acotado.*

En una red bien formada, gracias a sus propiedades, se garantiza que el sistema nunca será bloqueado y que el número de estados alcanzables es finito. Esto también implica que las marcas presentes en el sistema (recursos, productos, etc.) nunca llegan a ser cero, es decir, se conservan dentro de cierto rango tal que $0 < m \leq \mathbf{b}$, la cota inferior se explica con la vivacidad: si no hay marcas en el sistema ninguna transición puede dispararse, en tal caso la red sería no-viva.

2.2. Redes de Petri Continuas

La estructura (red N) de una $contPN$ queda definida igual que para el caso discreto, con la diferencia de que el marcado de cada lugar puede tener valores en el campo de los reales ($m \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|P|}$). A diferencia de las PN discretas, la cantidad en que una transición puede dispararse en las $contPN$'s no está restringida a los números naturales, de hecho una transición t está habilitada en m si y sólo si $\forall p \in \bullet t, m[p] > 0$. Veamos ahora la definición de Grado de Habilitación de las transiciones.

2.2.1. Grado de Habilitación

Para habilitar una transición en las PN discretas se debe satisfacer que $\forall p \in \bullet t, m(p) \geq w(p, t) \in \mathbb{N}$. En el caso continuo esta noción cambia porque ahora el marcado tiene valores reales positivos y las transiciones pueden dispararse en una cantidad arbitraria y no necesariamente en una cantidad entera. Para habilitar una transición t es necesario que se cumpla que $\forall p \in \bullet t, m[p] > 0$.

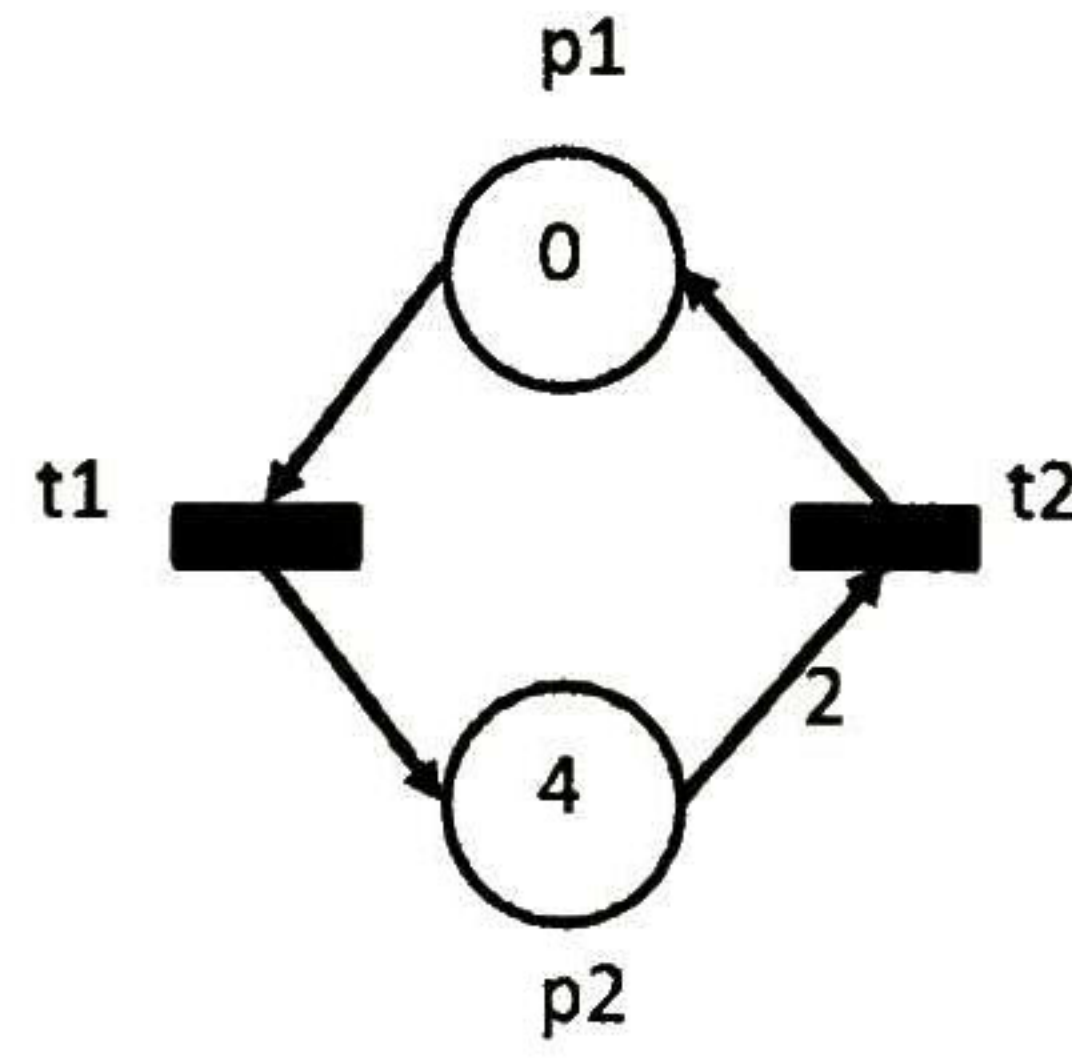


Figura 2.2: Sistema *contPN*. Sólo t_2 está habilitada para ser disparada.

Definición 2.14 El grado de habilitación de t es

$$enab(t, m) = \min_{p \in \bullet t} \frac{m[p]}{Pre[p, t]}$$

donde $\min(\cdot)$ se refiere al operador mínimo.

Estando habilitada una transición t , ésta puede dispararse en una cantidad $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq enab(t, m)$, llevando a un nuevo marcado $m' = m + \alpha C[P, t]$, donde C es la matriz de incidencia. Si m es alcanzable desde m_0 por medio de una secuencia σ , una ecuación fundamental puede ser escrita como: $m = m_0 + C\vec{\sigma}$, donde $\vec{\sigma} \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{|T|}$ es el vector contador de disparo (Parikh).

El siguiente ejemplo muestra el concepto grado de habilitación.

Ejemplo 2.4 Para el sistema *PN* continuo de la Figura 2.2, el grado de habilitación de la transición t_2 es $enab(t_2, m_0) = 2$, y el grado de habilitación de t_1 es $enab(t_1, m_0) = 0$, por lo que t_1 no puede ser disparada. Ahora suponga que la transición t_2 es disparada en una cantidad de 1,5, así el marcado alcanzado será $m = [1,5 \ 1]^T$

2.2.2. Propiedades en las ContPN's

Las propiedades meramente estructurales de las *PN* discretas se heredan de forma inmediata a las continuas, por ejemplo, P -, T -invariantes, consistencia y conservatividad. Por otro lado aquellas propiedades que tienen relación con el marcado y ocurrencias no son heredadas, como las que se presentan a continuación.

Definición 2.15 Una *contPN* es acotada cuando todo lugar es acotado ($\forall p \in P, \exists b_p \in \mathbb{R}$ con $m[p] \leq b_p$ para todo marcado alcanzable m). Es viva cuando toda transición es viva (ésta puede ocurrir a partir de todo marcado alcanzable). La vivacidad puede ser extendida a *lim-vivacidad* asumiendo que una secuencia infinita puede ocurrir.

En adelante, cuando se haga alusión a alguna propiedad de las redes se entenderá que nos referimos al caso continuo. Ahora daremos paso a las definiciones concernientes a las redes de Petri continuas temporizadas.

2.3. Redes de Petri Continuas Temporizadas

En algunos casos los *SED* toman en cuenta tiempos de ejecución, retención o retraso de eventos, como ejemplo se puede citar la planificación de tareas en el tiempo (conocido como el problema de *scheduling*). Las *PN* temporizadas (*TPN*) son aquellas capaces de capturar información temporal, esto se logra asignando un tiempo de retardo ya sea a los lugares, a los arcos o a las transiciones. La forma más habitual de introducir el tiempo en las redes discretas consiste en suponer que todas las transiciones tienen asociado un tiempo (de retardo) con función de distribución de probabilidad exponencial [25], [23], esto es, se considera un tiempo de retardo promedio para la ocurrencia de eventos.

Las redes de Petri continuas temporizadas o redes fluidificadas (*TCPN* por sus siglas en inglés) son una relajación de las redes de Petri discretas que consiste en aproximar el comportamiento de una *TPN* por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales y continuas (ver [33]). Tal relajación es útil para tratar sistemas que presentan el problema de la explosión de estados, problema que en el contexto de las redes de Petri se presenta en sistemas altamente marcados.

A continuación se presentan definiciones básicas sobre *TCPN*'s.

Definición 2.16 Una *ContPN* temporizada o *TCPN* es un sistema definido por (N, λ, m_0) , donde N es una *ContPN*, $\lambda : T \rightarrow \{\mathbb{R}^+\}^{|T|}$ es una función que asigna una tasa máxima de flujo (velocidad de ocurrencia) a cada transición, y $m_0 \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|P|}$ es el marcado inicial de la red N .

Cuando el tiempo es incluido en el modelo *ContPN*, la ecuación fundamental depende del tiempo: $m(\tau) = m(0) + C\sigma(\tau)$. Derivando esta ecuación obtenemos

$$\dot{m}(\tau) = Cf(\tau) \tag{2.3}$$

donde $f(\tau) = \dot{\sigma}(\tau)$ es llamado vector de flujos, o simplemente flujo, de las transiciones al tiempo τ .

El flujo de las transiciones tendrá un comportamiento definido por alguna de las semánticas presentadas a continuación.

2.3.1. Semánticas de Servidor

La semántica de servidor es la que define en qué proporción los recursos pueden ser consumidos o utilizados en el sistema. En el contexto de las redes de Petri, la semántica de servidor define la manera en que las transiciones pueden disponer de las marcas en la red. A continuación se presentan las definiciones de semánticas de servidor más comunes sobre las *TCPN*'s.

Definición 2.17 *Semántica de servidores finitos (SF).* Cada transición t tiene asociado un valor real $\lambda(t) > 0$ el cual es la tasa máxima de flujo de la transición y es constante. Entonces el flujo queda definido:

$$f(t_i) = \lambda(t_i) \quad (2.4)$$

donde $f(t_i)$ es el flujo de la transición t_i .

Bajo esta semántica, la velocidad de ocurrencia (flujo) es constante. La definición de semántica de servidores infinitos se presenta a continuación.

Definición 2.18 *Semántica de servidores infinitos (SI).* Cada transición t tiene asociado un valor real $\lambda(t) > 0$ el cual es la tasa máxima de flujo de la transición y es constante. En esta semántica, la velocidad de ocurrencia es sensible al grado de habilitación de la transición, entonces el flujo queda definido:

$$f_i = f(t_i) = \lambda(t_i) \cdot \text{enab}(t_i, m) = \lambda(t_i) \min_{p \in \bullet t_i} \frac{m(p)}{\text{Pre}[p, t_i]} \quad (2.5)$$

donde f_i es el flujo de la transición t_i y $p \in \bullet t_i$ es el lugar cuyo marcado $m(p)$ limita a t_i . Llamamos flujo efectivo a $f(m)$, el vector de flujos evaluado al marcado m .

Bajo esta semántica, la velocidad de ocurrencia (flujo) es variable.

Interpretando las transiciones como puntos de encuentro de clientes y servidores, la semántica más adecuada depende del número relativo de clientes y servidores que haya en el modelo discreto. Suponiendo que, cualitativamente hablando, puede haber “muchos” o “pocos” de cada uno, la fluidificación se puede aplicar a los clientes, a los servidores, o a ambos. Si hay muchos clientes y muchos servidores, el modelo continuo con semántica de servidores infinitos parece lo más razonable. Por otra parte, en el caso de muchos clientes y pocos servidores la relajación es adecuada a nivel de los clientes y la semántica de servidores finitos puede proporcionar una buena aproximación [34].

El siguiente ejemplo muestra una comparación entre las semánticas de ocurrencias de un sistema *TCPN*.

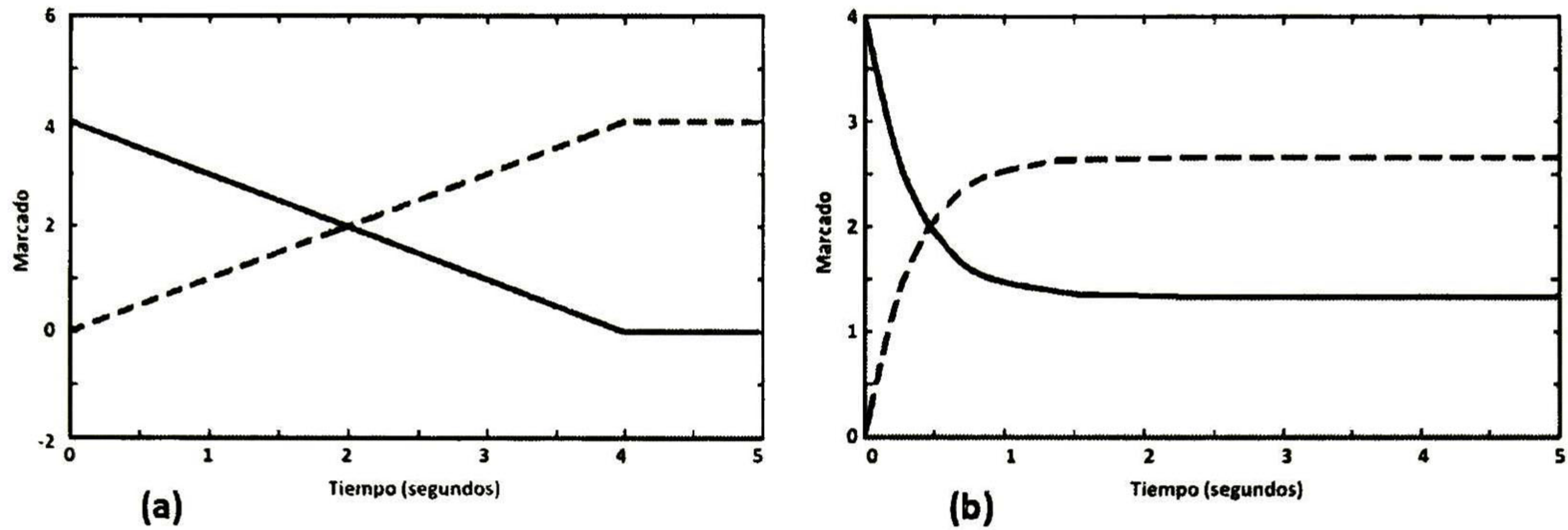


Figura 2.3: Evolución de marcado para un sistema usando semántica de servidores a) finitos; b) infinitos.

Ejemplo 2.5 Sea el sistema de la Figura 2.2 y sean las tasas máximas de flujo $\lambda(t_1) = 1$ y $\lambda(t_2) = 2$. En la Figura 2.3a se muestra el comportamiento de dicho sistema bajo la semántica de servidores finitos y en la Figura 2.3b se muestra el comportamiento bajo la semántica de servidores infinitos.

La semántica de servidores finitos muestra una evolución más lenta que la semántica de servidores infinitos, esto obedece a que el flujo para el caso de SF es constante. Para el caso de SI la evolución del marcado se comporta de manera exponencial debido a que el flujo es variable. Además, comparando ambos sistemas vemos que no llegan al mismo marcado en estado estacionario.

Como puede verse, la elección de la semántica de ocurrencias es crucial en cuanto al comportamiento del sistema modelado y estará determinada por ejemplo, por la cantidad de servidores y clientes. Un lector interesado puede remitirse a [22], en el cual se expone ampliamente por qué el uso de servidores infinitos para sistemas altamente marcados tiene mayor precisión que el uso de servidores finitos.

A lo largo de esta disertación se empleará la semántica de servidores infinitos ya que estamos interesados en sistemas que presentan la explosión de estados, y por lo tanto, altamente marcados y altamente operados por las transiciones. De la Ecuación (2.5) vemos que la definición del flujo presenta el operador *mínimo*, el cual es un operador no-lineal, característica que hereda el sistema fluidificado, más aún, el sistema fluidificado es un sistema lineal conmutado (SLC). Para comprender mejor esta noción se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6 Considere la TCPN de la Figura 2.4. Usando (2.5) tenemos que los flujos de

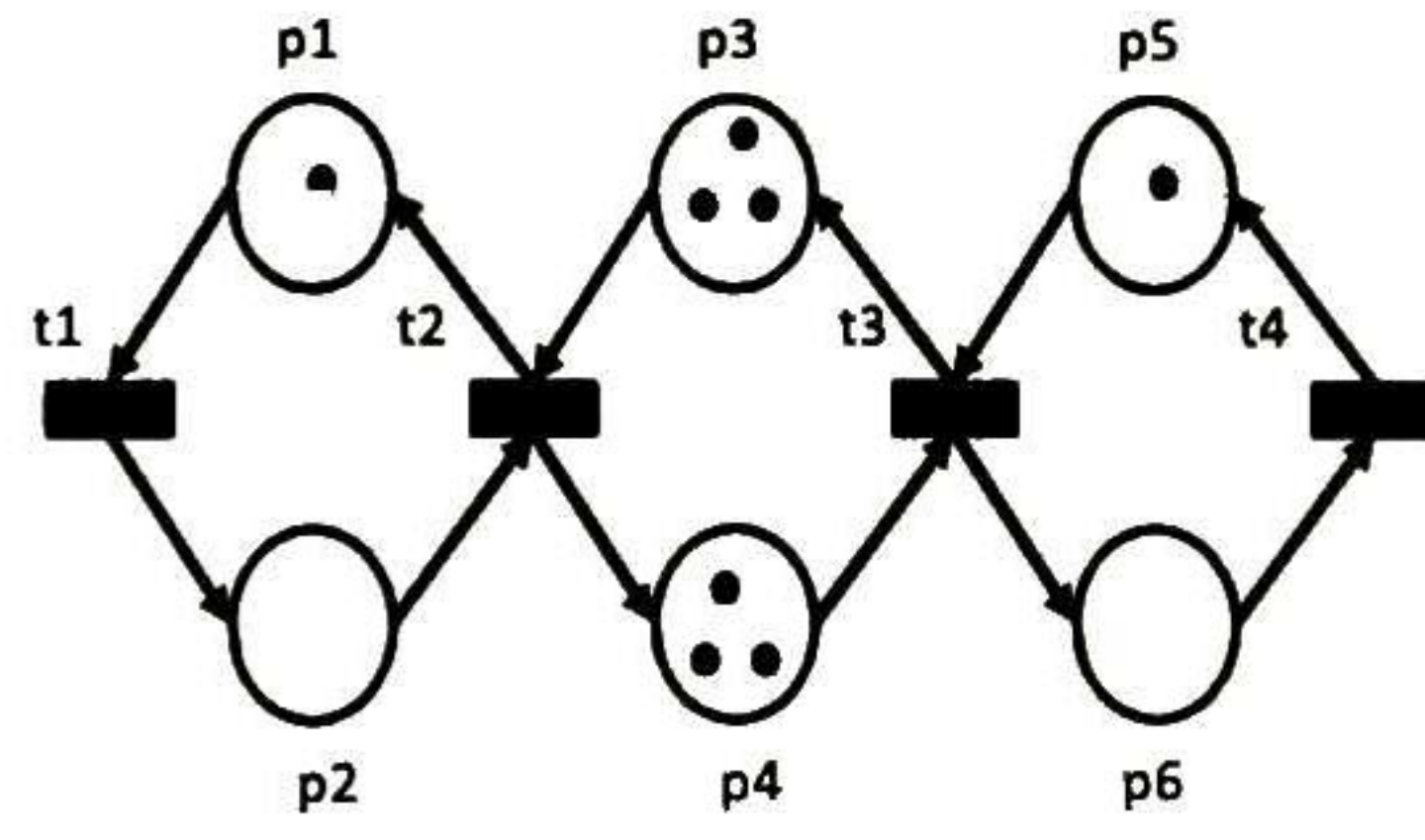


Figura 2.4: Red con cuatro configuraciones diferentes.

las transiciones están dados por:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \lambda [t_1] \cdot m [p_1] \\
 f_2 &= \lambda [t_2] \cdot \text{mín} (m [p_2], m [p_3]) \\
 f_3 &= \lambda [t_3] \cdot \text{mín} (m [p_4], m [p_5]) \\
 f_4 &= \lambda [t_4] \cdot m [p_6]
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sin pérdida de generalidad, si $\lambda [t_i] = 1$ para toda i , entonces:

$$\begin{aligned}
 \dot{m} [p_1] &= f_2 - f_1 = m [p_2] - m [p_1] \\
 \dot{m} [p_2] &= f_1 - f_2 = m [p_1] - \text{mín} (m [p_2], m [p_3]) \\
 \dot{m} [p_3] &= f_3 - f_2 = \text{mín} (m [p_4], m [p_5]) - \text{mín} (m [p_2], m [p_3]) \\
 \dot{m} [p_4] &= f_2 - f_3 = \text{mín} (m [p_2], m [p_3]) - \text{mín} (m [p_4], m [p_5]) \\
 \dot{m} [p_5] &= f_4 - f_3 = m [p_6] - \text{mín} (m [p_4], m [p_5]) \\
 \dot{m} [p_6] &= f_3 - f_4 = \text{mín} (m [p_4], m [p_5]) - m [p_6]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Resolviendo en cada instante la función de los flujos (2.6) y sustituyéndolos en (2.7), el sistema tendrá un flujo efectivo definido por el conjunto de lugares cuyo marcado limitan el flujo en las transiciones a través del operador $\text{mín}(\cdot)$. Por ejemplo, si $f_2 = \text{mín} (m [p_2], m [p_3]) = m [p_3]$ y $f_3 = \text{mín} (m [p_4], m [p_5]) = m [p_5]$, el TCPN estará evolucionando según el sistema lineal:

$$\begin{aligned}
 \dot{m} [p_1] &= m [p_2] - m [p_1] \\
 \dot{m} [p_2] &= m [p_1] - m [p_3] \\
 \dot{m} [p_3] &= m [p_5] - m [p_3] \\
 \dot{m} [p_4] &= m [p_3] - m [p_5] \\
 \dot{m} [p_5] &= m [p_6] - m [p_5] \\
 \dot{m} [p_6] &= m [p_5] - m [p_6]
 \end{aligned} = A_1 m$$

y si las condiciones cambian de tal manera que $\text{mín} (m [p_2], m [p_3]) = m [p_2]$ y $\text{mín} (m [p_4], m [p_5]) =$

$m[p_5]$, el TCPN cambia a otro sistema lineal definido por:

$$\dot{m} = \begin{matrix} \dot{m}[p_1] = m[p_2] - m[p_1] \\ \dot{m}[p_2] = m[p_1] - m[p_2] \\ \dot{m}[p_3] = m[p_5] - m[p_2] \\ \dot{m}[p_4] = m[p_2] - m[p_5] \\ \dot{m}[p_5] = m[p_6] - m[p_5] \\ \dot{m}[p_6] = m[p_5] - m[p_6] \end{matrix} = A_2 m$$

y lo mismo sucede con los otros resultados posibles de los operadores *mínimo* en los flujos. Así, aparecen no-linealidades debido a las sincronizaciones ($\forall t$ tal que $|\bullet t| > 1$). Más aún, el TCPN resultante es un SLC definido por:

$$\dot{m} = Am$$

con

$$A = \begin{cases} A_1 & \text{si } \min(m[p_2], m[p_3]) = m[p_3] \text{ y } \min(m[p_4], m[p_5]) = m[p_5] \\ A_2 & \text{si } \min(m[p_2], m[p_3]) = m[p_2] \text{ y } \min(m[p_4], m[p_5]) = m[p_5] \\ A_3 & \text{si } \min(m[p_2], m[p_3]) = m[p_3] \text{ y } \min(m[p_4], m[p_5]) = m[p_4] \\ A_4 & \text{si } \min(m[p_2], m[p_3]) = m[p_2] \text{ y } \min(m[p_4], m[p_5]) = m[p_4] \end{cases}$$

el cual irá cambiando entre las diferentes A_k con la evolución del mercado.

Es importante notar que en el ejemplo anterior, los operadores *mínimo* quedaron en función únicamente de los lugares de entrada a las transiciones, esto se debió a que el peso de todos los arcos tienen valor 1. Para el caso general, el peso de los arcos de entrada a las transiciones quedan explícitos en la matriz Pre de la red, por lo que el flujo efectivo estará fijado tanto por el mercado como por el conjunto de arcos en la matriz Pre que limitan el flujo de las transiciones.

2.3.2. Configuraciones y Regiones

El concepto de configuración nace de la necesidad de distinguir entre los sistemas lineales que se pueden presentar en un sistema TCPN.

Definición 2.19 Una configuración de una TCPN en m es un conjunto de arcos (p, t) describiendo el flujo efectivo de todas las transiciones.

$$\Pi(m)[i, j] = \begin{cases} \frac{1}{Pre[i, j]} & \text{si } \frac{m_i}{Pre[i, j]} = \min_{p_h \in \bullet t_j} \frac{m_h}{Pre[h, j]} \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (2.8)$$

El espacio de alcanzabilidad puede ser dividido en regiones, asignando a cada región una configuración, por ejemplo tenemos la configuración Π_k la cual es asignada a la región R_k de $RS(N, m_0) = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_\gamma$. Estas regiones son conjuntos disjuntos y sólo son comunes en los bordes. Algunas regiones pueden estar vacías si la estructura de la red nunca puede alcanzar la respectiva configuración. Las regiones están definidas como:

$$R_k = \left\{ m \in (\mathbb{R} \cup \{0\})^{|P|} \mid \forall t_j \in T, \frac{m(p_i)}{Pre[p_i, t_j]} = \min_{p_l \in t_j} \left\{ \frac{m(p_l)}{Pre[p_l, t_j]} \right\} \right\}$$

Ejemplo 2.7 Consideremos la red de la Figura 2.4. Dependiendo de la relación mínima de los lugares de entrada para una determinada transición pueden darse las siguientes configuraciones:

$$\Pi(m) = \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m[p_2] \leq m[p_3] \text{ y } m[p_4] \leq m[p_5] \\ \\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m[p_3] \leq m[p_2] \text{ y } m[p_4] \leq m[p_5] \\ \\ \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m[p_2] \leq m[p_3] \text{ y } m[p_5] \leq m[p_4] \\ \\ \Pi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m[p_3] \leq m[p_2] \text{ y } m[p_5] \leq m[p_4] \end{array} \right.$$

Cualquier marcado (alcanzable) define una configuración. Cuando el marcado de muchos lugares está limitando la ocurrencia de la misma transición, cualquier sistema lineal asociado puede ser usado.

El mínimo número de configuraciones (i.e. sólo un arco limitante es tomado por transición) está acotado por la estructura de la red (i.e. no depende del marcado) y es igual a $\prod_{t_i \in T} |t_i|$.

Ahora, con el fin de reescribir (2.3) y (2.5) en términos matriciales, se da la siguiente definición.

Definición 2.20 La matriz de tasas máximas de velocidad de ocurrencia se denota por $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{|T|})$.

De acuerdo a la notación previa, la ecuación fundamental y el vector de flujo son descritos por:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= C\Lambda\Pi(m) \cdot m \\ f &= \Lambda\Pi(m) \cdot m\end{aligned}\quad (2.9)$$

Observe que, dependiendo del marcado de los lugares, la evolución del sistema estará dado por uno u otro sistema lineal definido por (2.8) y (2.9).

2.3.3. Acción de Control

Observe que la única acción de control que se le puede aplicar a un sistema *TCPN* es frenar sus flujos de ocurrencia. Así, si el flujo de una transición t puede ser reducida o incluso detenida, se dirá que t es una transición controlable, de otra manera t es una transición incontrolable. A lo largo de esta disertación se considerarán todas las transiciones controlables. El flujo forzado de una transición controlable t_i ahora es $f_i - u_i$ donde f_i es el flujo de un sistema no forzado (i.e. sin control) y u es la acción de control, con $0 \leq u_i \leq f_i$. El vector de flujo controlado es:

$$f = \Lambda\Pi(m) \cdot m - u \quad (2.10)$$

$$0 \leq u_i \leq [\Lambda\Pi(m) \cdot m]_i. \quad (2.11)$$

Con el fin de obtener una versión simplificada de la ecuación de estados, el vector de entradas u se reescribe como:

$$u = I_u \Lambda\Pi(m) \cdot m \quad (2.12)$$

donde $I_u = \text{diag}(I_{u_1}, \dots, I_{u_{|T|}})$ y $0 \leq I_{u_i} \leq 1$. Sustituyendo (2.12) en (2.10) y definiendo la matriz $I_c = I - I_u$, la ecuación de estados se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= CI_c\Lambda\Pi(m) \cdot m \\ 0 &\leq I_{c_i} \leq 1\end{aligned}\quad (2.13)$$

2.4. Comparación en tiempo entre TPN's y TCPN's

Tomando en cuenta que los sistemas *TCPN* son una relajación de los sistemas *TPN*, deben considerarse ciertas pérdidas de información al momento de hacer la transformación de un sistema a otro.

El disparo de las transiciones en las *TPN*, al igual que en las *PN*, provoca un cambio en el marcado determinado por la regla de ocurrencia (2.1), pero dicho cambio en vez de ser instantáneo tiene un tiempo de retardo, por lo que las secuencias de ocurrencias estarán determinadas en gran medida por dichos tiempos de retardo asociados a cada transición. Para comprender mejor esta noción supongamos una red discreta temporizada con un lugar



Figura 2.5: Red.

p conectado a tres transiciones de salida, entonces las marcas $m(p)$ serán consumidas por aquella transición que ocurra primero. En el caso de las *TCPN*'s se considera que todas las transiciones trabajan en paralelo y sus flujos tienen una dinámica continua suavizada por la fluidificación. De manera similar que para el caso de la *TPN*, supongamos una red fluidificada con un lugar p conectado a tres transiciones de salida, entonces las marcas $m(p)$ serán consumidas por las tres transiciones en paralelo y de manera proporcional a $m(p)$ y a sus velocidades de ocurrencia.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra los diferentes comportamientos de la evolución del marcado de una *TPN* y su aproximación fluidificada.

Ejemplo 2.8 Sea N la red de la Figura 2.5 con $m_0 = 10$. Tenemos que la matriz de incidencia es $C = [-1]$. Para considerar el caso discreto temporizado con servidores infinitos le asignaremos un tiempo de retraso de 2 segundos a la transición t ($d(t) = 2$, donde $d(t)$ se refiere al tiempo de retardo de la transición t). En la Figura 2.6 puede verse en como una serie de escalones la evolución del marcado al disparar la transición t con la secuencia $5t \cdot 3t \cdot 2t$ en tres tiempos diferentes: En el segundo 1 disparamos la transición en una cantidad 5, pero por el retraso vemos la evolución del marcado hasta el segundo 3, entonces el sistema alcanza $m = 5$. Luego en el segundo 4 disparamos la transición en una cantidad de 3 y vemos la evolución del marcado en el segundo 6 siendo ahora $m = 2$. Lo mismo en el segundo 7, quedando $m = 0$ en el segundo 9. Para considerar el caso fluidificado se le asigna el equivalente al tiempo de retraso de la *TPN*, el cual se da en términos de la frecuencia de ocurrencia (tasa máxima de flujo), es decir

$$\lambda(t_i) = \frac{1}{d(t_i)}$$

que en este caso resulta $\lambda = 0,5$. En este caso suponemos que la transición siempre está a flujo máximo. La evolución se puede apreciar de la respuesta exponencial en la Figura 2.6. Es claro que las dinámicas de ambas aproximaciones son diferentes, pero lo que resulta relevante observar es que en el caso de las *TPN* se podrían ejecutar varias secuencias diferentes que convergan a $m = 0$ en 9 segundos (por ejemplo $2t \ 3t \ 5t$) y al momento de fluidificar, el comportamiento del *TCPN* equivalente sería el mismo para cualquier secuencia del caso discreto. Esto nos hace ver que en una red fluidificada, aunque seamos capaces de alcanzar

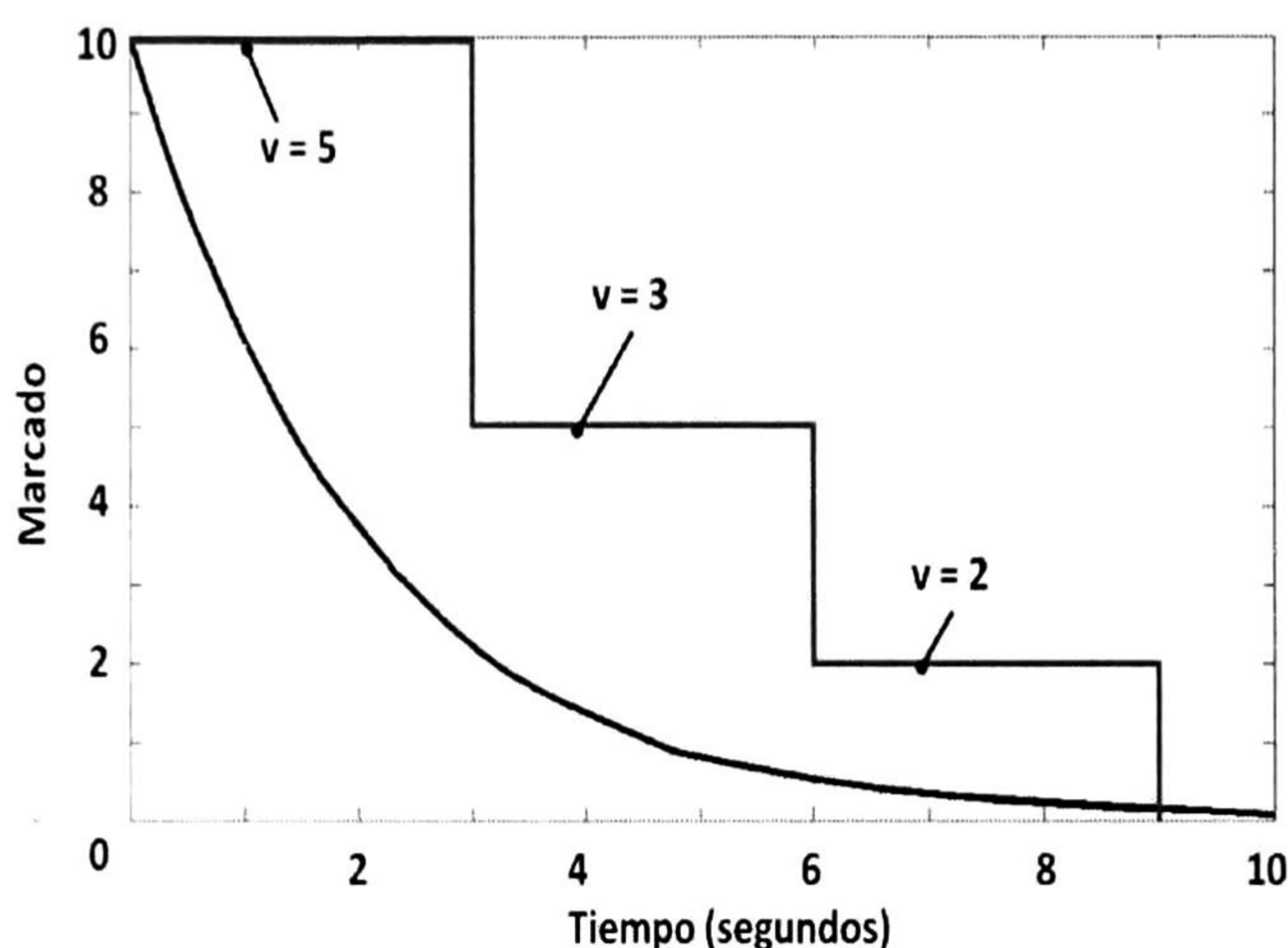


Figura 2.6: Evolución de marcado. En escalones el caso discreto y exponencial el caso fluidificado.

un marcado equivalente al caso discreto, no se puede recuperar la información secuencial con que las transiciones fueron disparadas.

Tal vez valdría la pena preguntarse qué ventajas nos da la fluidificación si al aplicarlo a un sistema real, éste tiene un comportamiento discreto en el que las secuencias sí nos resultan relevantes. En principio, como se mencionó antes, la fluidificación es principalmente aplicada a sistemas altamente marcados en los cuales hay un flujo continuo de recursos, por lo que difícilmente se puede dar una secuencia irrealizable durante el funcionamiento del sistema ya que todas las transiciones permanecen habilitadas en todo momento. Es por eso que, debido a la dificultad de establecer una secuencia específica para llevar a determinado sistema a un marcado requerido (recordando que los sistemas altamente marcados generan un grafo de alcanzabilidad enorme, imposible de analizar en la mayoría de los casos), el uso de la fluidificación proporciona ventajas en cuanto al manejo del espacio de estados y la determinación de acciones de control, como se mostrará más adelante.

Capítulo 3

Controlabilidad

En este capítulo se introduce el concepto de controlabilidad. En general, el estudio de sistemas dinámicos considera variables que pueden ser manipuladas físicamente, las llamadas variables de control. Básicamente, la controlabilidad es la propiedad que establece si es posible alcanzar cualquier estado en el sistema a través de la manipulación de las variables de control. Es por eso que vale la pena analizar la controlabilidad, ya que ayuda a determinar *a priori* los alcances del control que se tiene sobre determinado sistema.

La teoría clásica de sistemas nos provee métodos eficientes para analizar y controlar ciertas clases de sistemas de variable continua (e.g. sistemas lineales) y ciertas clases de sistemas de variable discreta (e.g. las cadenas finitas de Markov). Sin embargo, no hay disponibles generalizaciones eficientes para el análisis y control incluso para los casos más simples de sistemas híbridos. Esto parece ser un reflejo de la complejidad inherente de tales sistemas.

Los sistemas *TCPN* pertenecen a una clase de sistemas híbridos. Debido al operador *mínimo* que aparece en la ecuación de estados, el sistema fluidificado es un sistema lineal conmutado, el cual irá cambiando entre un sistema y otro dependiendo del estado presente (marcado). En [3] y [37] se presenta formalmente la complejidad del análisis de estabilidad y controlabilidad para el caso general de sistemas híbridos y se demuestra que dichos análisis son problemas NP-Difícil de resolver. No obstante, debido a que los sistemas *TCPN* caen en una subclase de sistemas híbridos con características como lo son convexidad, conmutación suave entre sistemas lineales, restricciones en la entrada de control y el estado, y sobre todo, con el soporte de la estructura de la red, el análisis ha sido posible sobre estos sistemas. Tales resultados han sido tomados de [38] para abordar el análisis de controlabilidad.

Aunque para el caso de los sistemas lineales la controlabilidad ha sido ampliamente estudiada y se cuenta con herramientas eficientes para su análisis, la definición clásica de controlabilidad en sistemas lineales no puede ser aplicada a los sistemas *TCPN*, esto se debe a que las hipótesis requeridas no se satisfacen, i.e. la entrada no debería ser acotada y el espacio de estados no debería tener restricciones (en el caso de las *TCPN* los estados sólo pueden ser positivos o cero). Es por eso que se ha definido un nuevo concepto de controlabilidad

específicamente para sistemas *TCPN*, y por lo tanto las herramientas para su análisis no pueden ser las mismas que se tienen para el caso de sistemas lineales.

A continuación se aborda primeramente el enfoque clásico de controlabilidad para sistemas lineales.

3.1. Controlabilidad en Sistemas Lineales

Los siguientes conceptos fueron tomados de [6].

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= Ax(\tau) + Bu(\tau) \\ y(\tau) &= Cx(\tau)\end{aligned}$$

donde $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(\tau) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema y $y(\tau) \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema.

Definición 3.1 *Se dice que un sistema lineal es controlable en el tiempo τ_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(\tau_0)$ a cualquier otro estado, mediante una entrada de control $u(\tau)$, en un intervalo de tiempo finito.*

En la teoría de sistemas lineales hay un criterio bien conocido para identificar si un sistema lineal es controlable o no. La matriz de controlabilidad se define como:

$$\mathbb{C} = [B \quad \dots \quad A^k B \quad \dots \quad A^{n-1} B] \quad (3.1)$$

Teorema 3.1 *Un sistema lineal es controlable si y sólo si \mathbb{C} tiene rango completo, es decir $\text{rank}(\mathbb{C}) = n$. Si \mathbb{C} no es una matriz de rango completo entonces el espacio controlable tiene la dimensión del rango de \mathbb{C} y se dice que el sistema es no controlable.*

La demostración de este teorema puede verse en [6].

El Teorema 3.1 proporciona un método sencillo para analizar la controlabilidad de sistemas lineales, pero es importante remarcar que la definición empleada no tiene restricciones en la entrada ni en el estado, como sucede con los sistemas *TCPN*.

La controlabilidad de sistemas *TCPN* se presenta en la siguiente sección.

3.2. Controlabilidad en TCPN's

Los siguientes conceptos fueron tomados de [38].

A continuación se expone cuándo un sistema TCPN es controlable utilizando el enfoque de la teoría de sistemas lineales, pero considerando la hipótesis de que todas las transiciones de la red son controlables y siguiendo las siguientes condiciones:

1.- La acción de control sobre el sistema es acotado y está en función del estado. La acción de control consiste en reducir la velocidad de flujo sobre las transiciones de la forma $f_i - u_i$, porque la velocidad de flujo sólo puede ser positiva y la máxima acción de control es $u_i = f_i$, y ya que no podemos acelerar la velocidad de flujo más allá de su máxima capacidad, la mínima acción de control es $u_i = 0$.

2.- El estado siempre tiene elementos positivos y está acotado sobre una clase de marcados alcanzables desde m_0 .

Usando la ecuación de estados de los sistemas TCPN:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= C\Lambda\Pi(m)m - Cu \\ 0 &\leq u \leq \Lambda\Pi(m)m \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se define la matriz de controlabilidad como:

$$\mathbb{C} = [C \quad \dots \quad (C\Lambda\Pi(m))^k C \quad \dots \quad (C\Lambda\Pi(m))^{n-1} C] \quad (3.3)$$

donde $\Pi(m)$ define un conjunto de sistemas lineales. Si hacemos $A = C\Lambda\Pi(m)$ y $B = C$, puede notarse que (3.3) tiene la misma forma que (3.1). Para el análisis de controlabilidad, de manera similar que en el caso de sistemas lineales, se determina el rango de (3.3), problema que puede reducirse usando la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Si todas las transiciones son controlables, $\forall m$ el espacio generado por las columnas de $\mathbb{C}(m)$ y C son iguales. Así $\text{rank}(\mathbb{C}(m)) = \text{rank}(C)$.*

Demostración. Observe que $(C\Lambda\Pi(m))^{n-1} C = C(C\Lambda\Pi(m))^{n-1}$. Así $\text{rank}(C) = \text{rank}(\mathbb{C})$.

■

Nótese que $\mathbb{C}(m)$ depende de $\Pi(m)$, pero el espacio generado por sus columnas es siempre el mismo, como el definido por la matriz C . Esto es algo que se espera porque estamos suponiendo todas las transiciones controlables. Sin embargo, este análisis resulta ambiguo o incompleto debido a que el rango de (3.3) es independiente de las restricciones sobre la entrada y los estados. Con el fin de vencer tal ambigüedad, se presentan las siguientes definiciones, primeramente se define el conjunto de estados admisibles por el sistema.

Definición 3.2 *Sea N una red de un sistema TCPN. El conjunto de estados admisibles por la estructura se define como $SASS(N) = \{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}^{|P|}$. Sea B la base del anulador izquierdo de la matriz de incidencia C . La relación $\beta : SASS(N) \rightarrow SASS(N)$ se define como $m_1\beta m_2$ si y sólo si $B^T m_1 = B^T m_2$, $\forall m_1, m_2 \in SASS(N)$. El conjunto de estados admisibles del sistema es la clase equivalente del marcado inicial $Class(m_0)$ bajo β .*

Vale la pena señalar que para el caso general de sistemas $TCPN$, todo marcado alcanzable pertenece a la clase $class(m_0)$. A continuación se presenta la definición de controlabilidad para sistemas $TCPN$ en términos de los marcados admisibles por el sistema propuesta en [38].

Definición 3.3 Sea (N, λ, m_0) un sistema $TCPN$. Éste es completamente controlable con entrada acotada (*BIFC* por sus siglas en inglés) si hay una entrada tal que para cualquier par de marcados $m_1, m_2 \in Class(m_0)$, es posible transferir el marcado de m_1 a m_2 y la entrada satisface (2.11) a lo largo de la trayectoria, y es controlable con entrada acotada (*BIC*) sobre $S \subseteq Class(m_0)$ si hay una entrada tal que para cualquier par de marcados $m_1, m_2 \in S$, es posible transferir el marcado de m_1 a m_2 y la entrada satisface (2.11) a lo largo de toda la trayectoria.

Es importante enfatizar que la controlabilidad es una propiedad *estructural*. Aunque se diga que un sistema es controlable sobre una clase equivalente de m_0 ($class(m_0)$), es el comportamiento dinámico del sistema, el cual está determinado por la estructura y el tiempo, el que determina si un sistema es controlable o no [38]. A continuación se define el concepto de punto de equilibrio en sistemas $TCPN$.

Definición 3.4 Sea (N, λ, m_0) un sistema $TCPN$. Sea $m_r \in RS(N, m_0)$ y $0 \leq I_{c_r}[i, i] \leq 1$. Entonces (m_r, I_{c_r}) es un punto de equilibrio si $\dot{m}_r = CI_{c_r} \Lambda \Pi(m_r) \cdot m_r = 0$. Entonces, el flujo en estado estacionario para (m_r, I_{c_r}) es $f_{ss}(m_r, I_{c_r}) = I_{c_r} \Lambda \Pi(m_r) \cdot m_r$.

Un punto de equilibrio representa un estado en el cual determinado sistema puede mantenerse usando alguna acción de control definida. Desde el punto de vista de sistemas lineales, los sistemas $TCPN$ se componen por un conjunto de sistemas lineales conmutados. Observando la hipótesis de un sistema $TCPN$ autónomo, cada sistema lineal debe tener su propio punto de equilibrio o variedad de puntos de equilibrio. Un amplio estudio acerca de los puntos de equilibrio en sistemas $TCPN$ puede ser encontrado en [20].

Ahora, en base a estas definiciones se presentan algunos resultados tomados de [38].

En [16] se presenta un estudio sobre la alcanzabilidad para sistemas $ContPN$ no temporizados. Un resultado importante introducido en este artículo es que un marcado m es alcanzable si y sólo si $\exists \sigma \geq 0$ tal que $m = m_0 + C\sigma$ y las transiciones en el soporte de σ son disparables. Este resultado puede ser extendido para $TCPN$'s de la siguiente manera [20]:

Proposición 3.2 Sea (N, λ, m_0) un sistema $TCPN$. Un marcado $m_1 \in Class(m_0)$ es alcanzable desde $m_0 \in int(Class(m_0))$ si y sólo si $\exists \sigma \geq 0$ tal que $C\sigma = (m_1 - m_0)$.

La siguiente proposición da condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad sobre el interior de $Class(m_0)$.

Proposición 3.3 *Sea (N, λ, m_0) un sistema TCPN y definamos el conjunto de marcados $S = \{m \in \text{Class}(m_0) \mid m > \mathbf{0}\}$. El sistema (N, λ, m_0) es BIC sobre S si y sólo si la red es consistente [38].*

Demostración. Sólo si: La proposición 2 en [20] establece que si la red es consistente, entonces la red es BIC sobre S .

Si: Considérese cualquier vector $d \in \text{span}(C)$ y un marcado $m_1 \in S$. Entonces existe un escalar $\kappa > 0$ tal que $m_1 + \kappa d \geq \mathbf{0}$. Sea $m_2 = m_1 + \kappa d$, entonces $m_2 \in \text{Class}(m_0)$. Como el sistema es BIC sobre el interior de $\text{Class}(m_0)$, m_2 es una solución particular de la ecuación fundamental, así $(m_2 - m_1) = \kappa d = C\sigma$, donde $\sigma \geq \mathbf{0}$. Por eso, $\forall d \in \text{span}(C)$, $\exists \sigma$ tal que $C\sigma = d$. Finalmente, puede probarse que esta propiedad implica que $\exists x > \mathbf{0}$ tal que $Cx = \mathbf{0}$, i.e. la red es consistente. ■

Nótese que la condición de controlabilidad (consistencia) es meramente estructural. De hecho, un sistema TCPN es BIC sobre el interior de $\text{Class}(m_0)$ si y sólo si el sistema también es BIC sobre el interior de la clase $\text{Class}(m_1)$, para todo $m_1 \geq \mathbf{0}$. La siguiente proposición da una condición para transferir el marcado del borde de $\text{Class}(m_0)$ a su interior.

Proposición 3.4 *Sea (N, λ, m_0) un sistema TCPN. Una entrada u , tal que toda transición es siempre disparada, transfiere el marcado de m_0 a algún m_f , en donde m_f no tiene elementos nulos, si y sólo si no hay algún sifón vacío en m_0 [38].*

Demostración. Si existe un sifón vacío entonces $\nexists u$ que transfiera el marcado a algún $m > \mathbf{0}$. Ahora, supongamos que una entrada u tal que para cualquier transición habilitada t_j , la entrada $u_j < [\Lambda \Pi(m) m]_j$ es aplicada. Si existe un lugar p_i que permanece sin marcas para todo tiempo, entonces para cada transición de entrada t_j de este lugar, debe haber un lugar de entrada p_k de t_j que permanece sin marcas para todo tiempo. Repitiendo este razonamiento puede verse que p_i pertenece a un sifón sin marcas. ■

El siguiente teorema introduce condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad sobre $\text{Class}(m_0)$. La demostración es inmediata de las proposiciones anteriores.

Teorema 3.2 *Sea (N, λ, m_0) un sistema TCPN. Éste es BIFC si y sólo si N es consistente y no existen sifones vacíos en cualquier marcado dentro de $\text{Class}(m_0)$ [38].*

Con esto se tienen condiciones para determinar la controlabilidad de los sistemas TCPN, ahora falta establecer la manera en que se debe aplicar el control. Dado un marcado inicial m_0 y un marcado requerido m_r , un problema de control es alcanzar m_r y otro es mantener dicho marcado. El siguiente capítulo presenta algunas leyes de control para resolver estos problemas.

Capítulo 4

Leyes de Control

En este capítulo se presentan algunas leyes de control que llevan a una clase de sistemas *TCPN* a un marcado requerido.

Anteriormente se comentó que las redes fluidificadas son una herramienta útil para tratar con *PN* altamente marcadas, en estos sistemas la explosión de estados ocasiona que todas las transiciones estén habilitadas en todo momento, pero debido a la temporización y a las sincronizaciones el problema de definir una secuencia de ocurrencias realizable para alcanzar un marcado requerido se vuelve muy complicado. Al fluidificar la *PN*, como se mostró en la Sección 2.4, la información sobre la secuencia de ocurrencias de las transiciones se pierde. No obstante, las ecuaciones diferenciales obtenidas de la fluidificación nos facilitan el manejo del control en el sentido de que no se basa en la secuencia de ocurrencias explícitamente, sino en el espacio de estados.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la única acción de control que tenemos sobre el flujo es ralentizarlo o detenerlo, las leyes de control para sistemas lineales no pueden aplicarse a los sistemas *TCPN* ya que éstas no consideran restricciones en la entrada. Más aún, debido a que los sistemas *TCPN* son una clase de *SLC*, tampoco se pueden utilizar las leyes de control existentes para sistemas lineales con entrada acotada.

A continuación se presenta la ley de control para sistemas *TCPN* que se propone en este trabajo y luego se compara con otras leyes de control en el estado del arte.

4.1. Control por Vector Limitante

El control por vector limitante (*CVL*) se basa en la construcción de un sistema de error (a partir del sistema *TCPN*), el cual es forzado a llegar al cero mediante una función de Lyapunov que garantiza su estabilidad, satisfaciendo además las restricciones de la entrada y del estado.

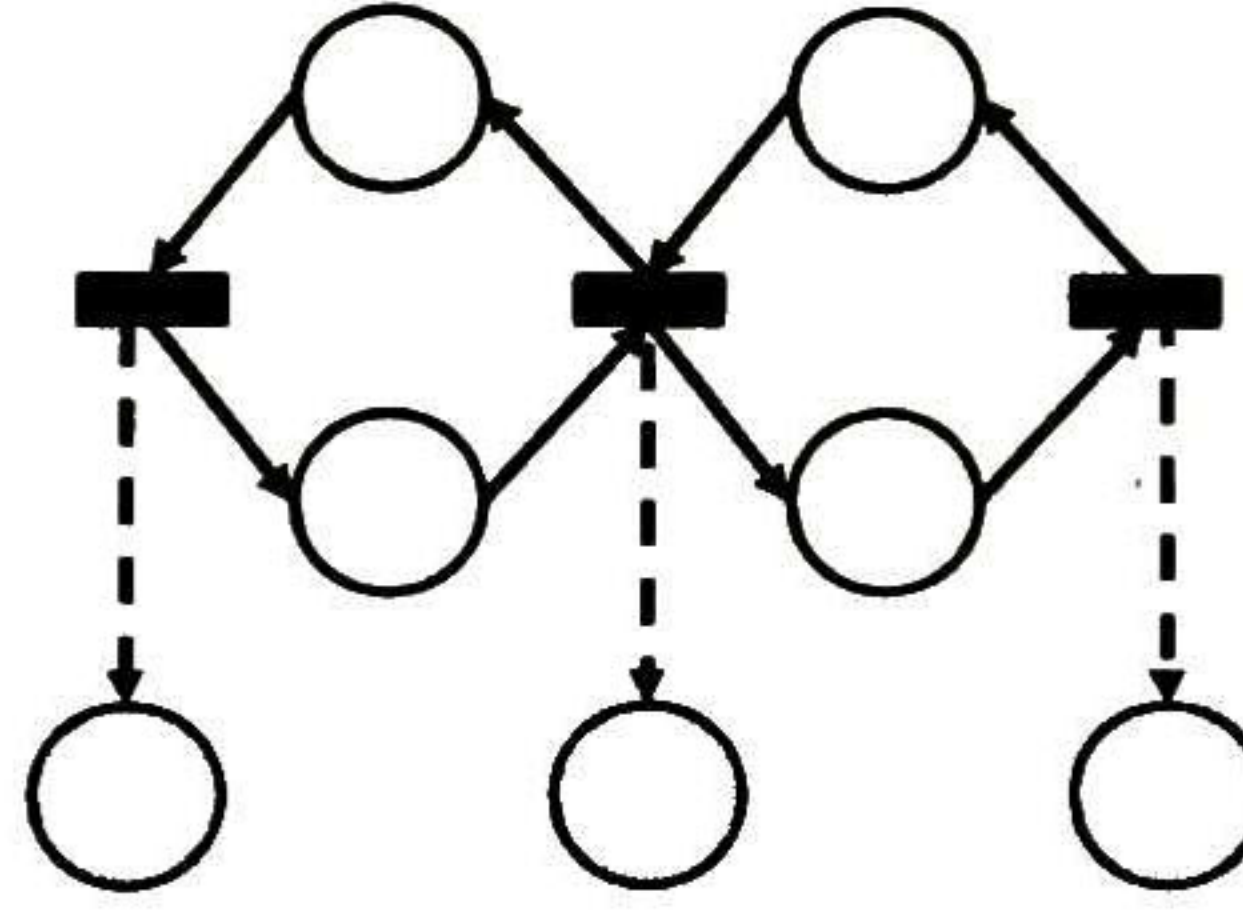


Figura 4.1: Red Extendida. Los lugares sombreados son el conjunto de lugares agregados P_a y los arcos punteados son el conjunto de arcos agregados F_a .

Primero se definirá el problema de control en los sistemas $TCPN$.

Definición 4.1 Sea (N, m_0, λ) un sistema $TCPN$. Entonces el problema de control en (m_r, I_{c_r}) ($RCP(m_r, I_{c_r})$) trata con el cómputo de una ley de control $I_c(\tau)$, $0 \leq \tau < \tau_f$ realizable en la $TCPN$ tal que $m(\tau_{ss}) = m_r$ y $I_c(\tau_{ss}) = I_{c_r}$, $\forall \tau_{ss} \geq \tau_f$.

Para resolver este problema, algunos lugares adicionales se le han agregado al sistema $TCPN$ para detectar el paso de materia a través de las transiciones. La siguiente definición muestra cómo son agregados dichos lugares al sistema $TCPN$.

Definición 4.2 Sea (N, m_0, λ) un sistema $TCPN$, donde $N = (P, T, F)$. Su extensión es definida por $xTCPN = (N_x, m_{0_x}, \lambda)$, donde $N_x = (P \cup P_a, T, F \cup F_a)$, $|P_a| = |T|$, $m_{0_x} = [m_0 \ 0_{|T|}]^T$, $F_a = \{(t_i, p_{a_i}) | \forall t_i \in T \text{ y } \forall p_{a_i} \in P_a\}$. Entonces la matriz de incidencia de $xTCPN$ es $C_x = [C \ I_{|T|}]^T$

Como $\Pi_x(m_x) = [\Pi(m) \ 0_{|T| \times |T|}]$, entonces la ecuación de estados del $xTCPN$ queda:

$$\dot{m}_x = \begin{bmatrix} \dot{m} \\ \dot{m}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CI_c \Lambda \Pi(m) \cdot m \\ I_c \Lambda \Pi(m) \cdot m \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$m(0) = m_0, m_a(0) = 0 \quad (4.2)$$

Observación 4.1 Nótese que la extensión tiene la misma dinámica sobre los lugares de N , y los lugares agregados sólo pueden incrementar su marcado. De hecho, debido a la vivacidad del sistema $TCPN$ la construcción de $xTCPN$ también es viva. Entonces siempre hay por lo menos una transición habilitada. Así $\Pi(m) \cdot m > \mathbf{0}$ (o equivalentemente $\dot{m}_a \geq \mathbf{0}$, el cero puede ser forzado con una apropiada ley de control I_c).

Ejemplo 4.1 Un ejemplo de una red extendida se presenta en la figura 4.1.

4.1.1. Solución del Problema de Control de Regulación ($RCP(m_r, I_{c_r})$)

Teorema 4.3 Sea (N, m_0, λ) un sistema TCPN y $xTCPN = (N_x, m_{0_x}, \lambda)$ su extensión. Si (N, m_0, λ) es BIFC y (I_{c_r}, m_r) es un punto de equilibrio arbitrario, entonces existe $I_c(\tau)$, $0 \leq \tau < \tau_f$ realizable en el sistema TCPN tal que $m(\tau_{ss}) = m_r$, $I_c(\tau_{ss}) = I_{c_r}$, $\forall \tau_{ss} \geq \tau_f$.

Demostración. Si el sistema es BIFC, entonces existe una solución positiva $\sigma_r(\tau)$ realizable tal que

$$m_r = m_0 + C\sigma_r \quad (4.17)$$

Este resultado fue tomado de [?]. Así, existe un $f(\tau)$ tal que:

$$\int_0^{\tau_f} f(\tau) d\tau = \int_0^{\tau_f} I_c \Lambda \Pi(m) \cdot m d\tau = \sigma_r \quad (4.18)$$

De la Ecuación (4.1):

$$m_a(\tau_f) = \sigma_r \quad (4.19)$$

Ahora, sea

$$\begin{aligned} e_x(\tau) &= \begin{bmatrix} e(\tau) & e_a(\tau) \end{bmatrix}^T \quad 0 \leq \tau \leq \tau_f \\ \begin{bmatrix} e(\tau) & e_a(\tau) \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} m_r - m(\tau) & \sigma_r - m_a(\tau) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.20)$$

y

$$V(e_x) = e_x^T P_L e_x \quad (4.21)$$

donde

$$P_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{|T|} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

y $I_{|T|}$ es una matriz identidad de orden $|T| \times |T|$. Proponemos que $V(e_x)$ es una función de Lyapunov-LaSalle, i.e es una función definida positiva y su derivada es semidefinida negativa. De la Ecuación (4.21) claramente se nota que $V(e_x)$ no es definida negativa, entonces suponemos que (4.23) es semidefinida positiva, entonces existe algún $e_x(\tau') \neq 0$ tal que:

$$V(e_x(\tau')) = \begin{bmatrix} e^T & e_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{|T|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ e_a \end{bmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

De la Ecuación (4.23) $V(e_x) = 0$ sólo cuando $e_a = \sigma_r - m_a = 0$ pero m_a es una función creciente y de $m_r = m_0 + C\sigma_r$ se tiene que $e = 0$ cuando $e_a = 0$. Así $V(e_x)$ es definida positiva.

Además, es claro que $V(e_x) = e_a^T e_a \rightarrow \infty$ cuando $e_x \rightarrow \infty$, por lo que $V(e_x)$ cumple con la condición de radialmente acotada.

Ahora, sea $S = \left\{ e_x \mid \dot{V}(e_x) = 2e_a^T \dot{e}_a = 0 \right\}$ entonces $S = \{e_x \mid e_a = 0\}$ pero $e_a = \sigma_r - m_a$ y de la ecuación fundamental tenemos que $m_r = m_0 + C\sigma_r$, y como $e = m_r - m(\tau)$ por lo que $e_a = 0$ implica $e = 0$.

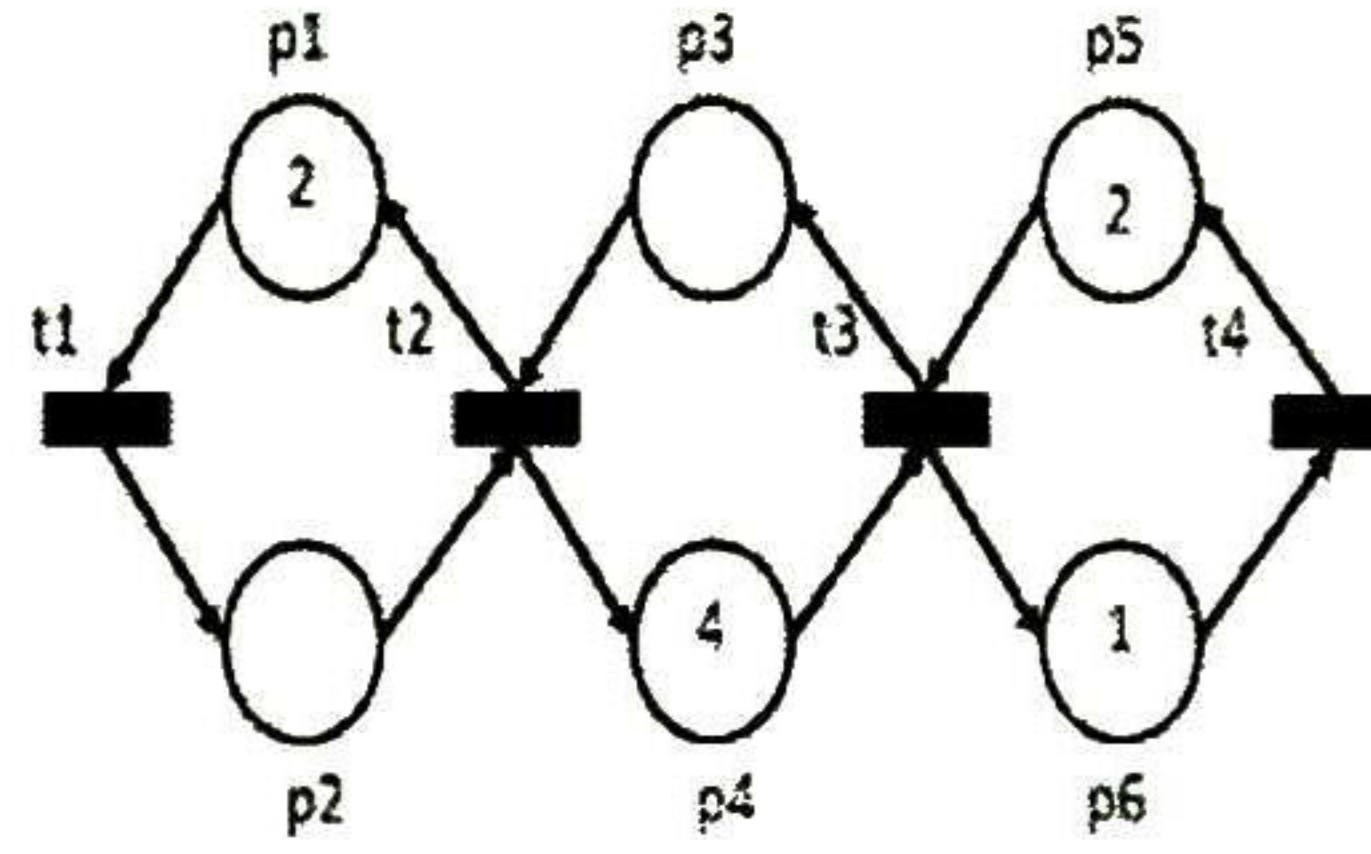


Figura 4.2: Red para el Ejemplo 4.3.

La derivada de $V(e_x)$ es:

$$\dot{V}(e_x) = 2e_a^T \dot{e}_a = -2[\sigma_r - m_a]^T \dot{m}_a \quad (4.24)$$

Luego, elegimos I_c tal que:

$$I_{c_i} = \begin{cases} 1 & \text{Si } m_a[i] < \sigma_r[i] \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.25)$$

obtenemos:

$$[\sigma_r - m_a]^T I_c \geq 0$$

así $\dot{V}(e_x) < 0$ y $\dot{V}(0) = 0$.

Como $m_a(0) = 0$ y éste sólo incrementa su valor, entonces I_{c_i} es factible para trasladar el estado de $m_a(0) = 0$ a $m_a(\tau_f) = \sigma_r$, i.e. de m_0 a m_r . En τ_f el control debe cambiar de $I_c(\tau_f)$ a $I_c(\tau_{ss}) = I_{c_r}$ y el problema de control queda resuelto. ■

Nótese que la solución al RCP (m_r, I_{c_r}) utiliza los puntos de equilibrio (m_r, I_{c_r}) una vez alcanzado el mercado requerido.

De ahora en adelante llamaremos Control por Vector Limitante (CVL) al control I_c que está definido por (4.25) y que sólo consiste en transferir un sistema de un mercado inicial m_0 a un mercado requerido m_r .

El siguiente ejemplo ilustra cómo el CVL trabaja y más adelante se mostrará una comparación con el Control por Propagación de Flujos.

Ejemplo 4.3 Sea (N, λ, m_0) el sistema TCPN de la Figura 4.2 con $\Lambda = \text{diag}(1, 0.7, 0.6, 0.8)$ y sea $m_r = [1.5 \ 0.5 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2]^T$ un mercado requerido. Buscaremos la acción de control por CVL que transfiera m_0 a m_r . Hacemos el sistema extendido como en el procedimiento mostrado en la Figura 4.1. Necesitamos la solución de σ_r de $m_r = m_0 + C\sigma_r$. Nótese que hay muchas soluciones posibles para σ_r pero sólo nos enfocamos en las que satisfacen $\sigma_r \geq 0$ porque las transiciones no se pueden disparar negativamente en los sistemas de redes de

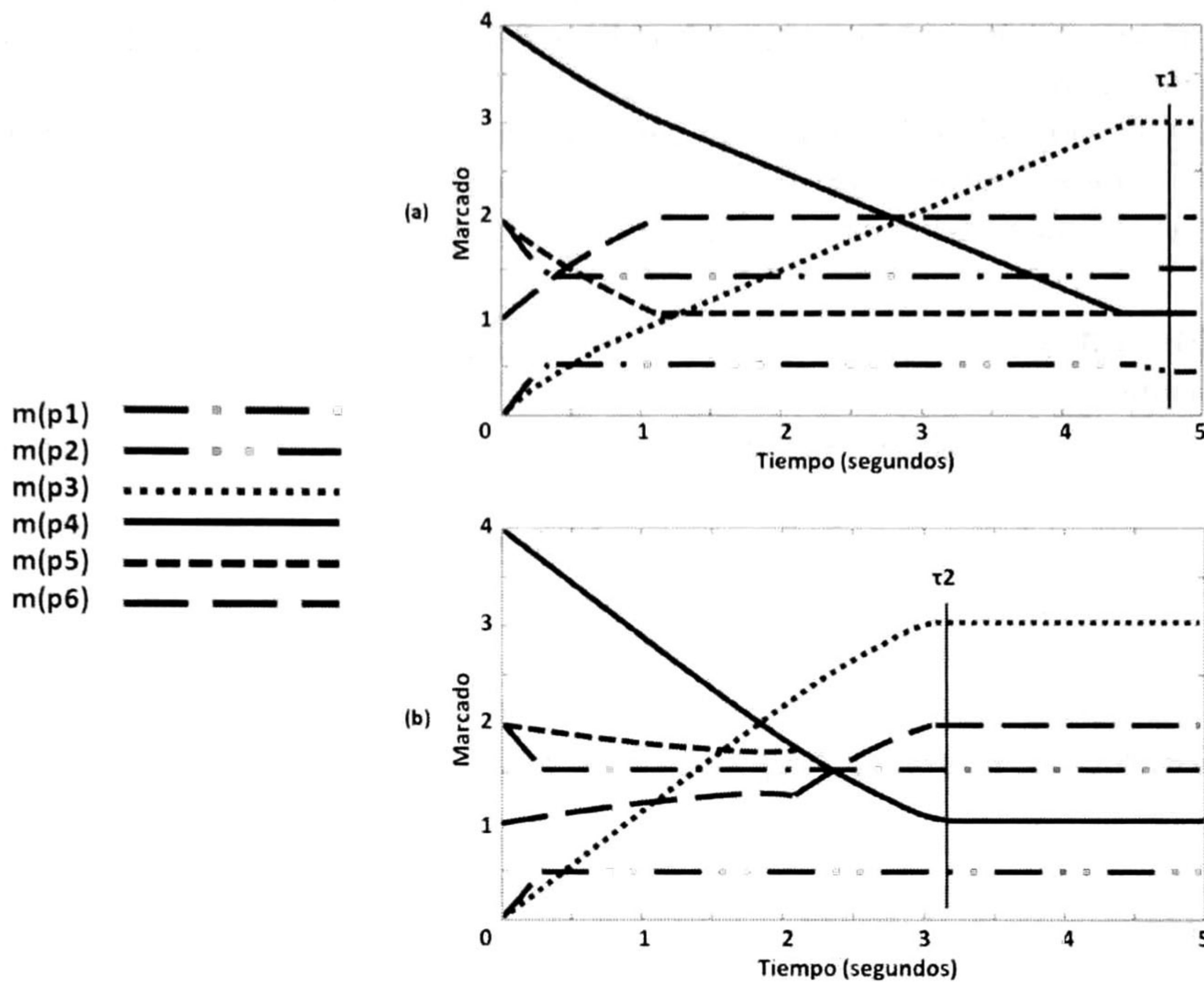


Figura 4.3: Evolución del mercado del Ejemplo 4.2 aplicando: (a) *FPC*; (b) *SLC*.

Petri. Además, escogemos una solución en la que los elementos de σ_r son los más pequeños posibles (más adelante se explica la razón). Para este ejemplo la solución es:

$$\sigma_r = [0.5 \ 0 \ 3 \ 2]^T$$

Aplicando la acción de control (4.11) el sistema transferirá el mercado inicial m_0 al mercado requerido m_r . Véase inciso b de la Figura 4.3. Estamos asumiendo que conocemos de antemano I_{c_r} tal que el sistema permanece en un punto de equilibrio para m_r . Para este ejemplo $I_{c_r} = \text{diag}(0,23333, 1, 0,58333, 0,21875)$ donde I_{c_r} es el control que mantiene m_r . Para una explicación más a detalle acerca de puntos de equilibrio puede revisarse [21].

La solución σ_r se escoge lo más pequeña posible porque de esta forma la materia trasladada para alcanzar el mercado requerido será la mínima, intuitivamente, entre menos materia es movida, más rápido se alcanzará el mercado requerido. En el siguiente capítulo se hace una explicación más completa al respecto. A continuación se presentan algunas leyes de control para propósitos de comparación.

4.2. Control por Propagación de Flujos

Es posible controlar transiciones continuas con un esquema de encendido y apagado (On/Off), donde una transición puede ser restringida a flujo cero $f_i = 0$ por la acción de control $u_i = \lambda_i enab(t_i)$ o puede ser no forzada con $f_i = \lambda_i enab(t_i)$ por la acción de control $u_i = 0$. En esta ley de control la decisión acerca de cuando abrir (On) o apagar (Off) una transición estará dada por el vector de error $e = m - m_d$ y una Matriz de Propagación que sintetiza el efecto de las transiciones sobre los lugares.

Definición 4.3 Sea $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]^T$ un vector. La función $Sign()$ de un vector está definida como:

$$Sign(v) = [Sign(v_1) \ Sign(v_2) \ \dots \ Sign(v_k)]$$

donde

$$Sign(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i > 0 \\ -1 & \text{si } v_i < 0 \\ 0 & \text{si } v_i = 0 \end{cases}$$

Definición 4.4 El Vector de Propagación de Flujos $V s_i \in \{-1, 0, 1\}^{|P|}$ se define como:

$$V s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } p_j \text{ aumenta cuando } t_i \text{ ocurre} \\ -1 & \text{si } p_j \text{ disminuye cuando } t_i \text{ ocurre} \\ 0 & \text{si } p_j \text{ no se ve afectada por } t_i \end{cases}$$

Una forma de calcular este vector es:

$$V s_{ij} = Sign(e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot Ct_i)$$

El vector de propagación $V s_i$ captura información acerca de la dirección del flujo, pero no de la magnitud.

Definición 4.5 Sea (N, λ, m_0) un sistema TCPN y sea $m_r \in RS(N, m_0)$ un marcado requerido. El vector de error está definido por:

$$e = m_r - m$$

En particular, el vector de error inicial queda definido por:

$$e_i = m_r - m_0$$

La acción de control I_c en función del error es propuesta como:

$$I_{c_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } -V s_i \cdot e > 0 \\ 0 & \text{si } -V s_i \cdot e < 0 \end{cases}$$

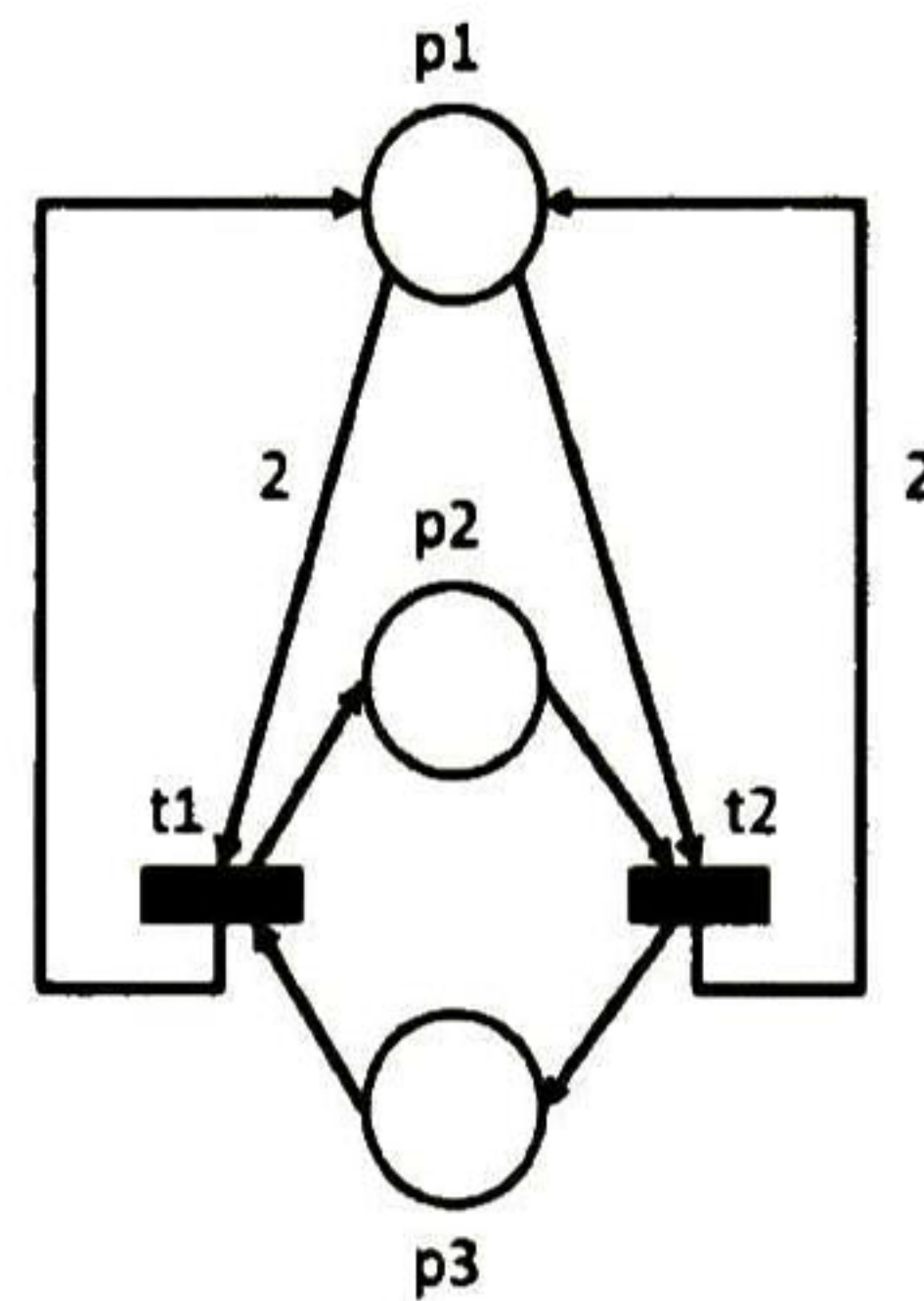


Figura 4.4: Red para el Ejemplo 4.3.

En términos coloquiales, este esquema de control revisa dónde se necesitan marcas y dependiendo del efecto de las transiciones, utiliza éstas si aportan marcas donde se necesitan hasta que el marcado requerido es alcanzado.

Aplicando la ley de control *FPC* al ejemplo anterior y comparando la evolución del marcado contra los resultados obtenidos con la ley de control *CVL* se hace evidente que la Ley de Control Estable por Lyapunov es más rápida que la Ley de Control por Propagación de Flujos. De la Figura 4.3 es fácil ver que $\tau_1 > \tau_2$ donde τ_1 y τ_2 son los tiempos en que tardan en alcanzar los sistemas un marcado requerido usando *CVL* y *FPC* respectivamente. La razón es que el *FPC* gasta tiempo en una heurística de prueba y error, y por lo mismo redundancias se pueden presentar antes de alcanzar nuestro objetivo. Por otro lado el *CVL* establece previamente la cantidad de materia que es necesario mover para alcanzar un marcado requerido, el cual se puede escoger el mínimo posible.

4.3. Control de Modelo Predictivo Explícito

La básica idea del control de modelo predictivo (*MPC*) es la siguiente: para cada tiempo de iteración, la acción de control se escoge resolviendo un problema de control óptimo que minimiza un criterio de comportamiento sobre un horizonte futuro. Solo el primer comando de control se aplicará y después en la siguiente iteración otras mediciones se obtendrán y el problema de optimización se repite. La posibilidad de aplicación de la (implícito) aproximación *MPC* se ve limitada por los requerimientos de resolver en línea (on-line) un problema de programación lineal (o cuadrático).

Una posible solución para sobrellevar esta dificultad es el *MPC explícito* (*eMPC*), el cual computa fuera de línea la solución de retroalimentación de estado explícita al problema de control óptimo lineal cuadrático sujeto a las restricciones del estado y las entradas. El *eMPC* manda todas las computaciones difíciles fuera de línea y particiona el espacio de estados

en politopos descritos por desigualdades lineales. Una ley de control de retroalimentación de estado afín es única asociada a cada región politópica. La fase en línea del método consiste en evaluar la región actual y consecuentemente el valor óptimo de la ley de control.

Como se puede ver en [11], resaltamos que el cálculo del *eMPC* puede conducirnos a controladores con complejidad prohibitiva, tanto en el tiempo de cálculo como en el número de politopos. En particular hay tres aspectos que son importantes al respecto: desempeño, estabilidad en lazo cerrado y satisfacción de las restricciones.

Sea (N, λ, m_0) un sistema *TCPN*. Es posible alcanzar un marcado requerido $m_r \in RS(N, m_0)$ en un tiempo finito optimizando un índice de desempeño cuadrático de la forma:

$$J(m(\tau), w(\tau), n) = \left\{ \bar{q} \cdot \|m(n) - m_r\|_2^2 + \sum_{k=0}^{n-1} [q(k) \cdot \|m(k) - m_r\|_2^2 + r(k) \cdot \|w(k) - w_r\|_2^2] \right\}$$

donde \bar{q} representa los pesos en el estado final (el marcado requerido después de n tiempos de horizonte); $q(k)$ y $r(k)$ representan el costo en la trayectoria intermedia y el costo en el esfuerzo de control respectivamente; por último $w(k) = f(k) - u(k)$.

Esta ley basada en el *eMPC* fue hecho sobre una Aproximación Óptima de Tiempo Finito, el desempeño será n -pasos óptimo pero no puede ser óptimo infinito. La limitación de esta aproximación es que la complejidad del controlador y el tiempo computacional se vuelven prohibitivos cuando el orden del espacio de estados, así como la longitud del horizonte de predicción n aumentan. Para una explicación más profunda, un lector interesado puede consultar [11].

Ahora, el siguiente ejemplo fue tomado de [11] para fines de comparación, los resultados de *CVL*, *FPC* y *eMPC* son expuestos a continuación.

Ejemplo 4.3 Consideremos el sistema *TCPN* de la Figura 4.4 con el marcado inicial $m_0 = [1.5 \ 3.5 \ 0.5]^T$, $\Lambda = \text{diag}(5, 1)$ y el marcado requerido $m_r = [2.5 \ 2.5 \ 1.5]^T$. Aplicando *eMPC*, el sistema alcanza m_r en aproximadamente 0.5 segundos (ver Figura 4.5a), mientras que con el *FPC* le toma aproximadamente 0.54 segundos (ver Figura 4.5b) y el *CVL* lo hace en aproximadamente 0.51 segundos (ver Figura 4.5c). *CVL* muestra una convergencia más rápida.

Por otro lado, además del tiempo gastado en el control hay otros factores a considerar como los recursos computacionales (tiempo y espacio) necesarios para resolver la acción de control. Del *FPC* podemos ver que los recursos computacionales no son extraordinarios, sin embargo puede ser una ley de control muy lenta. El *eMPC* muestra un comportamiento más rápido respecto a la convergencia del *FPC*, pero para sistemas de orden mayor, así como para longitudes del horizonte de predicción n más grandes (y exactos por lo mismo),

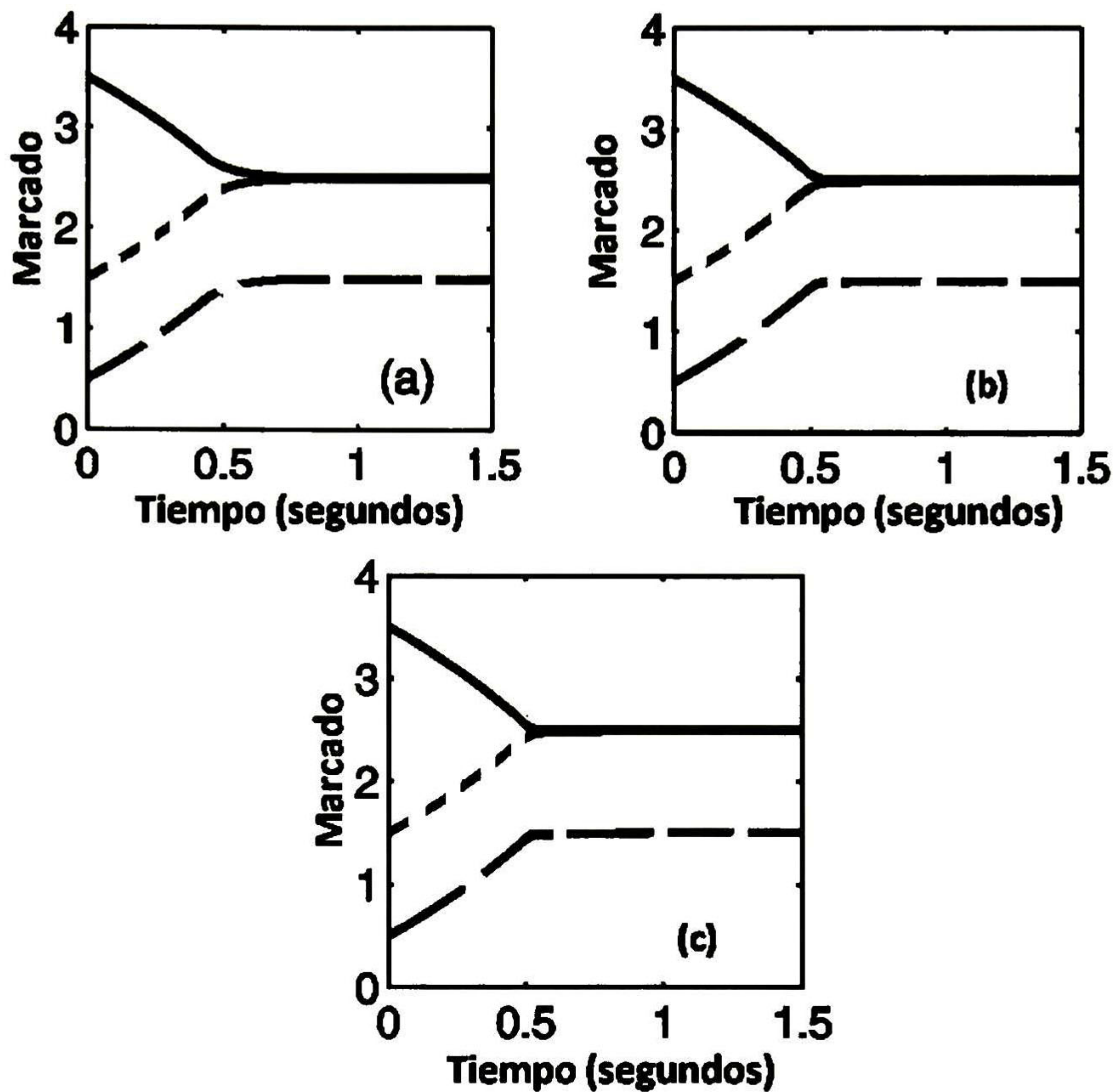


Figura 4.5: Evolución del marcado para el Ejemplo 4.3 aplicando: (a) *eMPC*; (b) *FPC*; (c) *CVL*.

los recursos computacionales se ven sobre explotados por lo que llega a volverse prohibitiva para la acción de control. No obstante, para el caso del *CVL* la complejidad computacional se reduce a la solución de v_r de la ecuación $m_r = m_0 + Cv_r$. El *CVL* también presenta una rápida convergencia al estado requerido (marcado), de hecho es la más rápida para los ejemplos estudiados en esta disertación hasta ahora, este hecho nos conduce a pensar si el *CVL* es un control óptimo en tiempo. En el siguiente capítulo se presenta un análisis temporal del *CVL*.

Capítulo 5

Análisis Temporal del Control por Vector Limitante (CVL)

En este capítulo se presenta un análisis temporal del control *CVL* y se describen algunas pautas dependientes de la estructura de la red para mejorar (disminuir) el tiempo de convergencia a un mercado requerido.

Las diferentes leyes de control que actualmente existen para sistemas *TCPN*, y de las cuales las más representativas fueron presentadas en el capítulo anterior, tienen diferente respuesta en lo que concierne al tiempo de convergencia a un mercado requerido. En los ejemplos presentados en el capítulo anterior, el control *CVL* mostró mayor rapidez para alcanzar un mercado requerido, lo que motivó a hacer un análisis sobre optimalidad de tiempo del *CVL*, ya que aparentemente no había una forma más rápida de controlar un sistema *TCPN*.

A continuación se demuestra que el *CVL* requiere de ciertas condiciones para ser un control óptimo.

5.1. Optimalidad del CVL

Con el fin de demostrar que el control por vector limitante (*CVL*) no es un control óptimo en tiempo escogiendo arbitrariamente un vector materia requerido se presenta el siguiente contraejemplo.

Sea (N, λ, m_0) el sistema *TCPN* de la Figura 5.1. Sea $\Lambda = \text{diag}(100, 100, 0.5, 1)$ la matriz de velocidades máximas de ocurrencia asociadas a las transiciones, $m_0 = [50 \ 5 \ 1]^T$ el mercado inicial y $m_r = [50 \ 4 \ 2]^T$ el mercado requerido. Aplicando *CVL* tenemos que $\sigma_r = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ es la solución mínima de $m_r = m_0 + C\sigma_r$, por lo que la acción de control sólo requiere de t_3 para alcanzar m_r garantizando que se moverá la mínima cantidad de materia. Ahora, de la red tenemos que $\text{span}^+ \left\{ [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \right\}$ es un *T-semiflujo*,

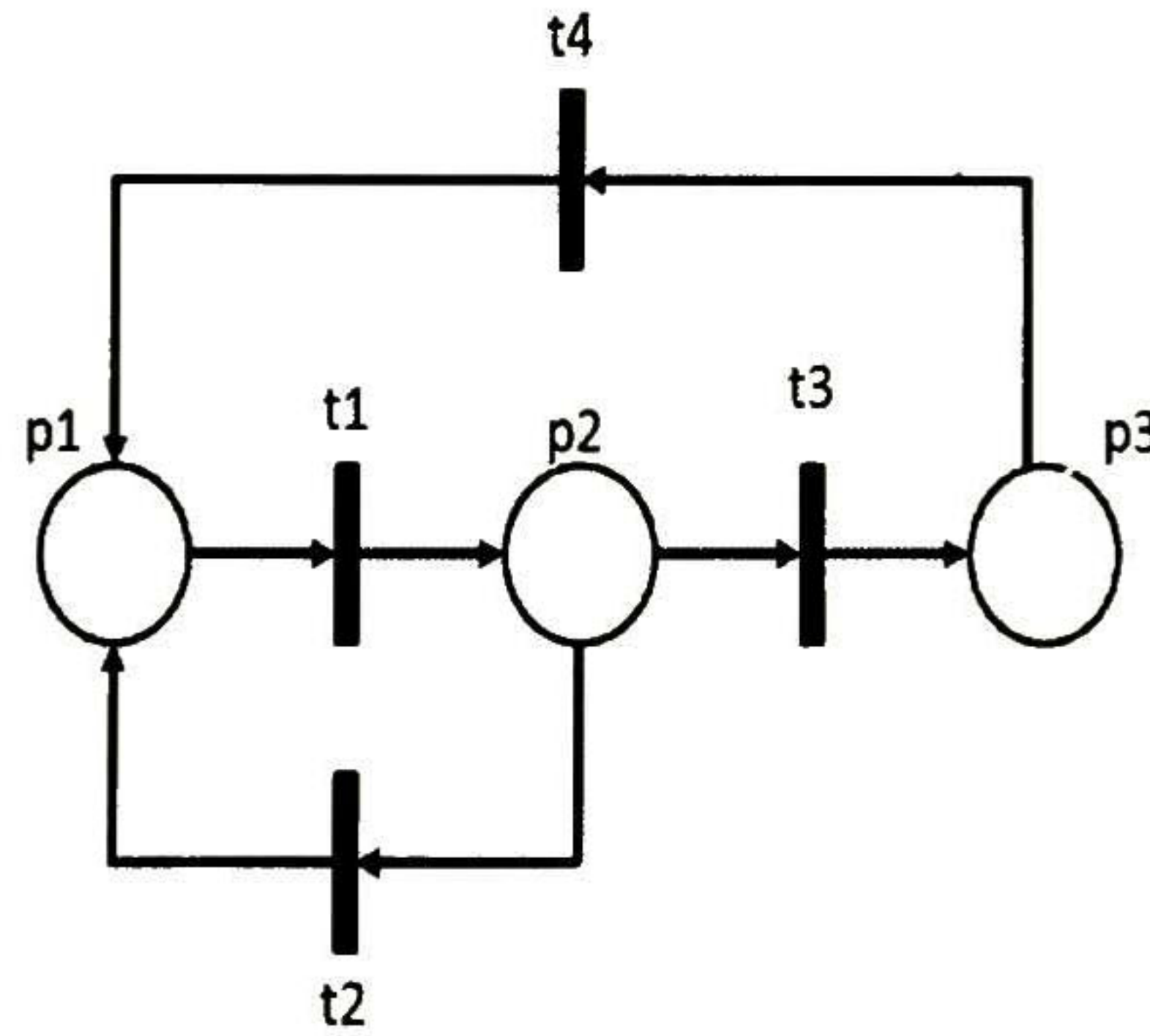


Figura 5.1: Red viva y acotada con 2 T -invariantes.

donde $\text{span}^+ \{q\}$ se refiere al espacio generado por aq con $a \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^n$, por lo que si le agregamos un elemento del T -semi flujo al vector materia requerido σ_r el estado (marcado) alcanzado será el mismo. Para apreciar esto con mayor claridad, notemos que cualquier vector requerido σ_r puede ser descompuesto de la siguiente forma:

$$\sigma_r = \sigma_{\text{mín}} + \sigma_{\text{inv}}$$

donde $\sigma_{\text{mín}}$ es la solución mínima de $m_r = m_0 + C\sigma_r$ y $\sigma_{\text{inv}} \in \ker C$ es un T -invariante, así

$$C\sigma_r = C\sigma_{\text{mín}} + C\sigma_{\text{inv}}$$

donde C es la matriz de incidencia. Entonces

$$m_r = m_0 + C\sigma_r = m_0 + C\sigma_{\text{mín}} + C\sigma_{\text{inv}} \quad (5.1)$$

Es importante notar que el T -invariante agregado al vector materia σ_r no afecta el marcado alcanzado ($C\sigma_{\text{inv}} = 0$). Usando esta noción, para la construcción de un contraejemplo agregaremos un T -invariante a σ_r . Sea $\sigma_{rc} = [30 \ 30 \ 1 \ 0]^T$ otro vector de Parikh tal que $C\sigma_r = C\sigma_{rc}$. En adición se le impondrá una secuencia de ocurrencias $t_1 t_3 t_2$ al control, i.e. aplicaremos σ_{rc} con la siguiente secuencia especificada:

$$I_c = I_c^1|_{\tau_0}^{\tau_1} + I_c^2|_{\tau_1}^{\tau_2} + I_c^3|_{\tau_2}^{\tau_f}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma(I_{c_1}) &= [30 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \sigma(I_{c_2}) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ \sigma(I_{c_3}) &= [0 \ 30 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

Es claro que $\sigma_{rc}(I_c) = \sigma(I_c^1) + \sigma(I_c^2) + \sigma(I_c^3)$.

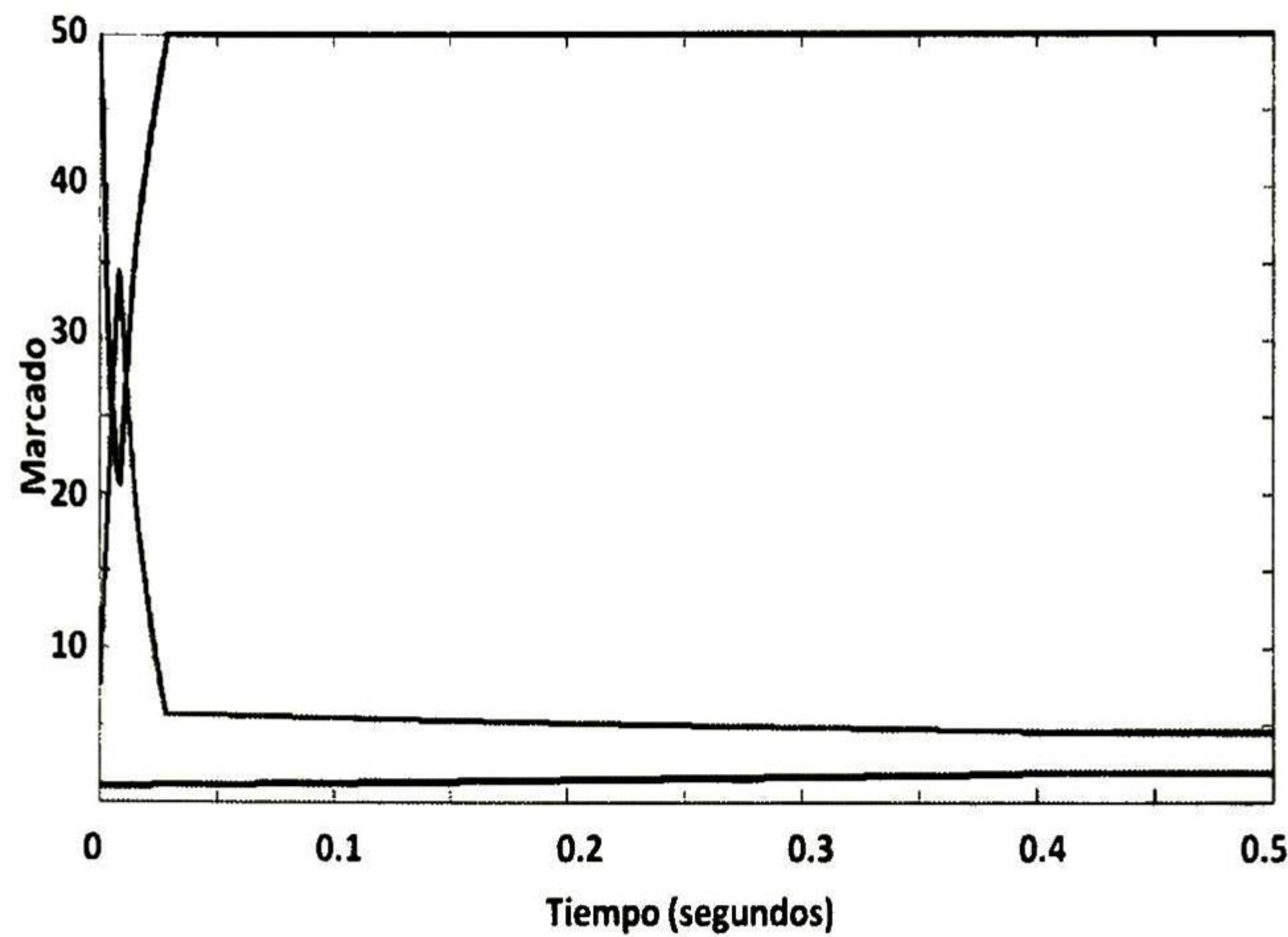


Figura 5.2: Evolución de marcado usando el control CVL con σ_{rc} secuencial.

En la Figura 5.2 se puede observar que usando σ_{rc} de manera secuenciada el marcado requerido m_r se alcanza más rápido que utilizando la solución mínima de σ_r aunque ocurra que $\sigma_{rc} > \sigma_r$ (ver Figura 5.3), esto implica que el uso del vector mínimo σ_r no es suficiente para garantizar el control óptimo en tiempo.

Para obtener un control óptimo en tiempo en algunos casos es necesario buscar una forma para definir la secuencia de ocurrencias que minimiza el tiempo de alcanzabilidad. Antes de buscar esta secuencia vale la pena mostrar el siguiente análisis sobre optimalidad, en el cual se definen algunas estructuras para las que el vector materia mínimo (que es igual al vector de Parikh mínimo) es suficiente y necesario para la minimización de tiempo.

5.2. Acciones de Control Óptimas

De una red de Petri temporizada discreta sabemos que la ecuación de evolución de marcado está definida por $m_{k+1} = m_k + Cv$ en donde la acción de control se define en el vector de Parikh v , también sabemos que v está compuesto por elementos no negativos. Sin embargo, por la asociación que tiene cada transición o lugar de la red con un tiempo de retardo, pueden existir secuencias que convergen más rápidas que otras, y es en este punto donde es importante descubrir en qué punto la secuencia aún no es relevante. El siguiente teorema presenta la forma elemental del control óptimo en tiempo de las redes de Petri fluidificadas, cuando éstas consisten de un único T -invariante.

Teorema 5.1 *Sea un sistema TCPN vivo, acotado y con un único T -invariante. Entonces escogiendo el vector de materia requerido mínimo para el control CVL se alcanza el marcado*

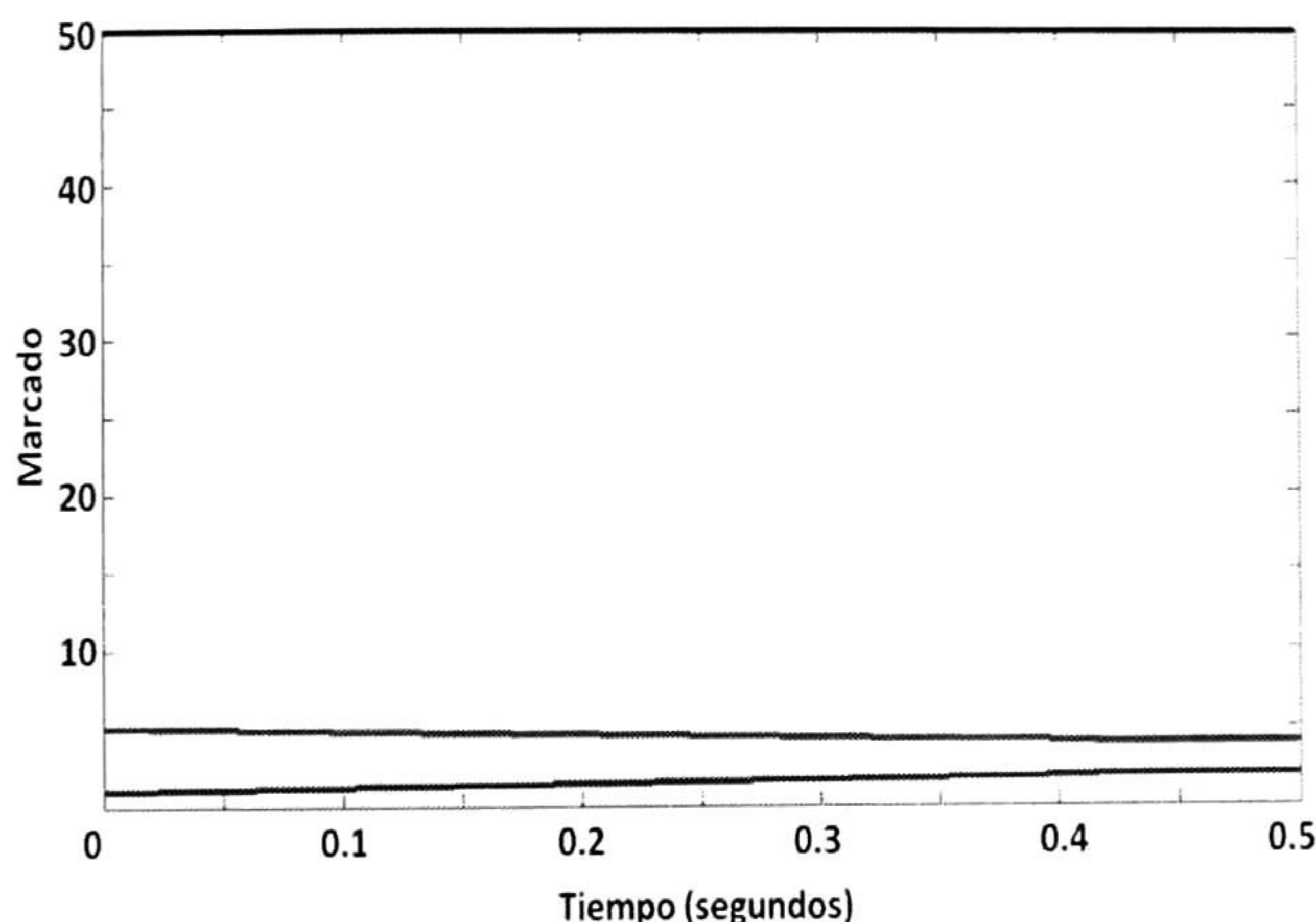


Figura 5.3: Evolución de marcado usando el control *CVL* con $\sigma_{\text{mín}}$.

requerido en tiempo mínimo.

Demostración. Sea N la red de un sistema (N, λ, m_0) vivo, acotado y además con un único T -invariante. Sea $m_r \in RS(N, m_0)$ un marcado requerido alcanzable desde m_0 y sea σ un vector de materia para el *CVL* tal que $m_r = m_0 + C\sigma$. Definamos $T_v(\sigma) = \{t_i \mid \sigma[i] \neq 0\}$.

Cualquier vector de materia requerido puede formarse de:

$$\sigma = \sigma_{\text{mín}} + \sigma_{\text{inv}}$$

donde $\sigma_{\text{mín}}$ es el vector mínimo que satisface $m_r = m_0 + C\sigma$ y $\sigma_{\text{inv}} \in T$ -invariante.

Ahora, supongamos que existe un vector $\sigma \neq \sigma_{\text{mín}}$ tal que hace convergir al marcado m_r en menor tiempo que $\sigma_{\text{mín}}$ y además $t_k \in T_v(\sigma_{\text{mín}})$. En el mejor de los casos todas las transiciones son instantáneas ($\lambda \rightarrow \infty$), a excepción de t_k , cuyo flujo está dado por:

$$\dot{\sigma}_k = \lambda_k I_{c_k} m_k. \quad (5.2)$$

Suponiendo que la cota máxima de marcas está inicialmente en el lugar $p_k \in \text{mín}(\bullet t_k)$ (aunque no lo estuvieran, como estamos suponiendo que todas las transiciones diferentes de t_k son instantáneas, podemos forzarlo a que así sea) vemos que el flujo máximo $\dot{\sigma}_k$ ocurre cuando m_k es el máximo y es constante, pero para que esto suceda todas las otras transiciones instantáneas tienen que estar abiertas, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{m}_k &= 0, m_k = m_{k_{\text{máx}}} \\ \dot{m}_j &= 0, m[p_j] = c_j \quad \forall p_j \in \bullet t_k \text{ y } j \neq k \\ \dot{m}_i &= 0, m_i = 0 \quad \forall i \neq \{k, j\} \end{aligned}$$

para $0 \leq \tau \leq \tau_{inv}$, donde τ_{inv} es el tiempo que tarda en alcanzarse el vector σ_{inv} . Así la materia transitada por t_k para alcanzar cualquier σ en estas condiciones estará dada por:

$$\sigma[k] = \lambda_k I_{c_k} m_k \tau$$

y particularmente para σ_{inv} :

$$\begin{aligned} \sigma_{inv}[k] &= \lambda_k I_{c_k} m_{k_{\max}} \tau_{inv} \\ \sigma_{inv}[i] &= \lambda_k I_{c_k} m_{k_{\max}} \tau_{inv} \quad \forall i \neq k. \end{aligned}$$

Durante este lapso todas las transiciones están trabajando en paralelo y al máximo flujo posible. Así, el tiempo para completar σ_{inv} queda de la siguiente forma:

$$\tau_t = \frac{\sigma_{inv}[t_k]}{\lambda_k m_k}$$

Ahora, una vez alcanzado σ_{inv} haría falta agregar σ_{\min} para obtener cualquier otro σ . Como ahora m_k ya no es constante, la solución de (5.2) queda:

$$\sigma[k] = m_k e^{\lambda_k \tau}$$

donde claramente el flujo en t_k depende de m_k . Por lo que despejando el tiempo τ_{\min} de

$$\sigma_{\min}[k] = m_k e^{\lambda_k \tau_{\min}}$$

donde $\sigma_{\min}[k]$ es la materia mínima requerida para el lugar p_k , obtenemos

$$\tau_{\min} = \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{\sigma_{\min}[k]}{m_k}$$

por lo que el tiempo total para alcanzar σ en el mejor de los casos es:

$$\tau_T = \tau_{\min} + \tau_{inv}$$

pero claramente $\tau_{\min} + \tau_{inv} > \tau_{\min}$, lo que contradice nuestra suposición inicial de que existe algún σ capaz de hacer convergir más rápidamente a m_r . ■

Podría pensarse que en el caso de que $|\bullet t_k| > 1$, o lo que es lo mismo, en el caso de que haya más de una configuración en el sistema en cuestión, el cambio de una configuración a otra pudiera ayudarnos a convergir más rápido, sin embargo esto no es posible debido a que todos los lugares $p_i \in \bullet t_k$ irán perdiendo marcas en la misma proporción, por lo que cabe remarcar que para aumentar el número de marcas en $\min(\bullet t_k)$ se tiene que hacer a través de un T -invariante, el cual aumentaría el marcado de todo $p_i \in \bullet t_k$. Ahora, si se tratara de usar diferentes secuencias de disparo de transiciones en vez de dejarlas abiertas al máximo flujo todo el tiempo necesario, algunas tardarían más en completar el flujo necesario por la misma razón expuesta en la demostración.

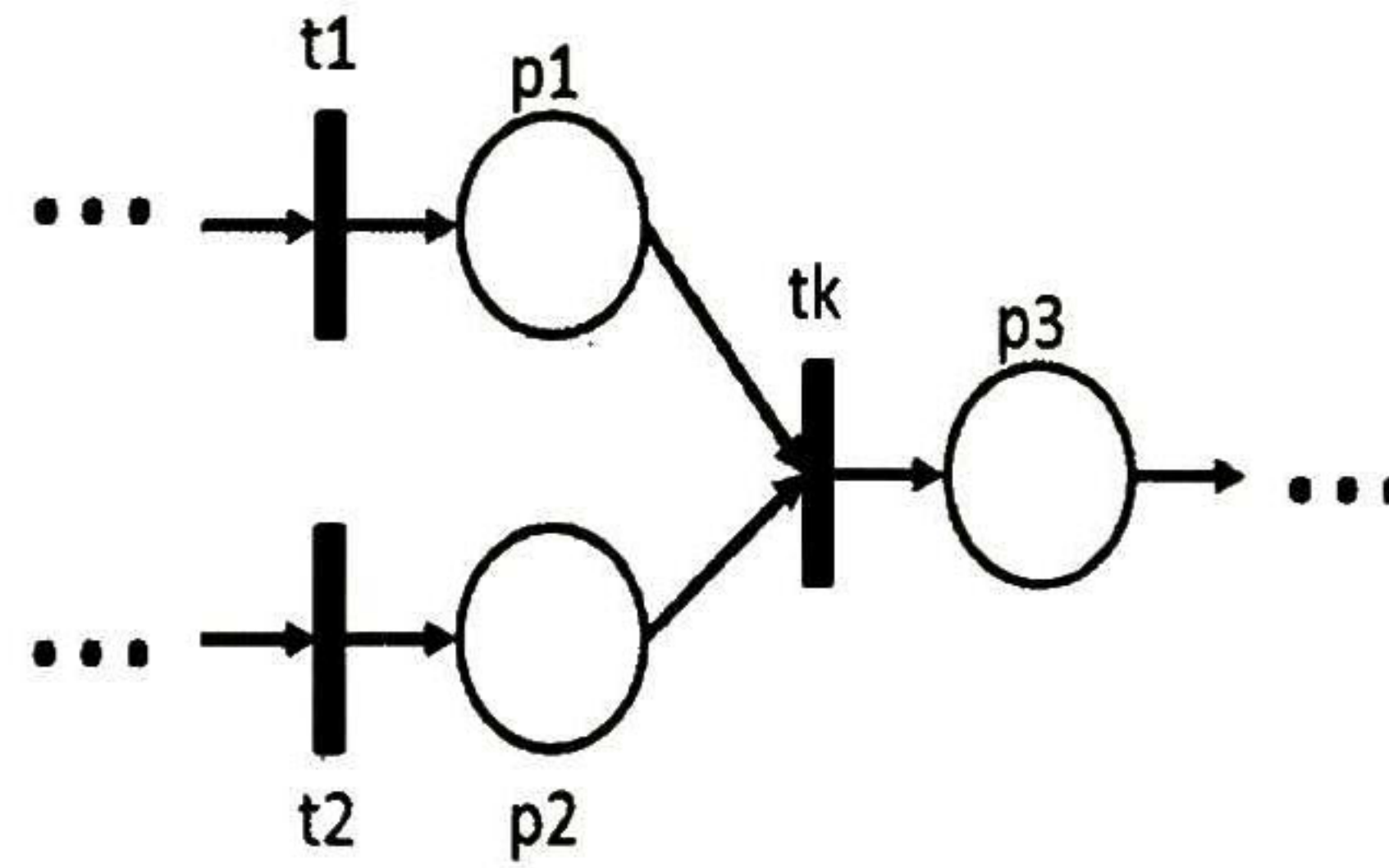


Figura 5.4: Porción de una red viva, acotada y con un único T -invariante.

Para comprender mejor esta noción vea la Figura 5.4, la cual presenta parte de una red viva, acotada y con un único T -invariante. Se puede ver que el flujo en t_k depende de $\min(m_1, m_2)$ y que consume marcas de los lugares p_1 y p_2 en la misma proporción. En la Figura 5.5 se muestra el espacio de alcanzabilidad de m_1 contra m_2 , en donde d es la cota máxima de ambos (la cual en general no necesariamente tiene que ser la misma). El hiperplano que divide el espacio de alcanzabilidad en dos regiones, cada una con su configuración correspondiente (Π_1 o Π_2), está dado por $m_1 = m_2$. Ahora es importante notar que sin importar en qué configuración se encuentre el sistema, la velocidad de flujo f_k estará dada por el mínimo entre m_1 y m_2 . En la gráfica se muestra con doble línea el espacio $y_1 = \min(m_1, m_2) = c$, con guiones el espacio $y_2 = \min(m_1, m_2) = b$ y punteado el espacio $y_3 = \min(m_1, m_2) = a$. Cada uno de estos espacios representa el conjunto de marcados a partir de los cuales se tiene la misma velocidad de flujo f_k , por lo que moverse a través de un mismo espacio $y = \min(m_1, m_2)$ no permite aumentar dicha velocidad. Para el caso de redes fluidificadas que cuentan con más de un T -invariante se puede analizar la optimalidad partiendo de este primer teorema. La estructura de la red es un factor decisivo para definir las acciones de control óptimas, sobre este tema se aborda en la sección a continuación.

5.3. Estructuras

Hemos visto que cuando una red es viva, acotada y con un único T -invariante, la elección del vector de materia mínimo garantiza optimalidad en tiempo. El hecho de que se presente la restricción en cuanto a la existencia de un único T -invariante nos hace intuir que éste implica que sólo existe una única ruta de flujo para alcanzar cualquier marcado. Ahora, para el caso de redes con más de un T -invariante podemos también intuir que cada uno de ellos aumentará el número de rutas de flujo capaces de alcanzar un mismo marcado requerido. A continuación se presentan algunos análisis en cuanto a la relación de la estructura y las acciones de control óptimas.

La estructura de la red es fundamental para encontrar el vector requerido σ_r adecuado (y la secuencia de control en caso de ser necesario) que nos permita alcanzar algún marcado

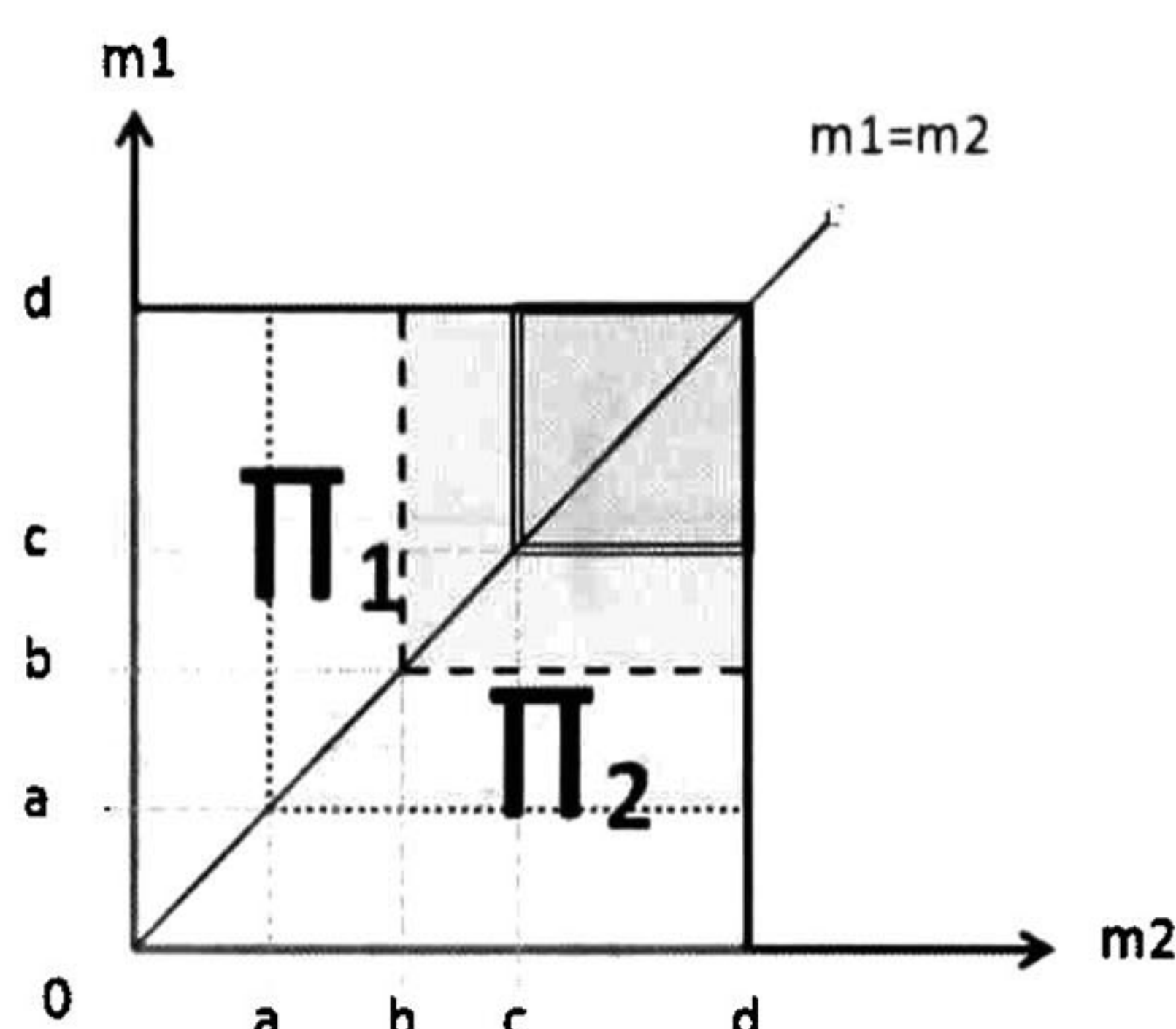


Figura 5.5: Espacio de alcanzabilidad de m_1 contra m_2 .

requerido m_r de manera rápida cuando no óptima. A continuación se darán algunas definiciones estructurales tomadas de [10].

Definición 5.1 Sea N una red y sea $N' \leq N$ una subred parcial de N . Un path elemental (x_1, \dots, x_r) en N , $r \geq 2$, es un handle de N' si y sólo si $\{x_1, \dots, x_r\} \cap (P' \cup T') = \{x_1, x_r\}$. También se dice que N' tiene un handle (x_1, \dots, x_r) .

El caracter de un handle está determinado por la naturaleza (lugar o transición) de su primer y último nodo. Los clasificamos de acuerdo a este criterio en cuatro subclases: PP -, PT -, TP - y TT -handles (ver Figura 5.6). El significado es obvio (del inglés P de Place (lugar) y T de Transition (Transición)).

Lo que nos muestra intuitivamente la Figura 5.6 es que, cuando se construye un sistema a través de la adición iterativa de handles, los PP - y TT -handles son mejores para preservar la vivacidad y acotamiento comparados con los PT - o TP -handles, esto implica que para el caso de sistemas $TCPN$ vivos y acotados es factible que se presenten tales casos. Los T -componentes son estructuras asociadas a los comportamientos infinitos de la red.

Definición 5.2 Sea $N = (P, T, F)$ una red. Una red fuertemente conexa $N_1 = (P_1, T_1, F_1) \subseteq N$ es un T -componente de N si y sólo si $P_1 = \bullet T_1 = T_1^\bullet$

La propiedad básica de los T -componentes es que una secuencia de ocurrencias en la que sólo las transiciones del T -componente ocurren, y solo ocurren exactamente una vez, reproducen el marcado original. Por eso, tales secuencias pueden ejecutarse una infinidad de veces. En el caso de las redes fluidificadas, cada T -componente está asociado a un T -invariante σ_{inv}^i .

Ejemplo 5.1 Sea (N, λ, m_0) el sistema $TCPN$ de la Figura 5.1. La red cuenta con dos T -componentes: $N_1 = (P_1, T_1, F_1)$ y $N_2 = (P_2, T_2, F_2)$ donde $P_1 = \{p_1, p_2\}$, $T_1 = \{t_1, t_2\}$,

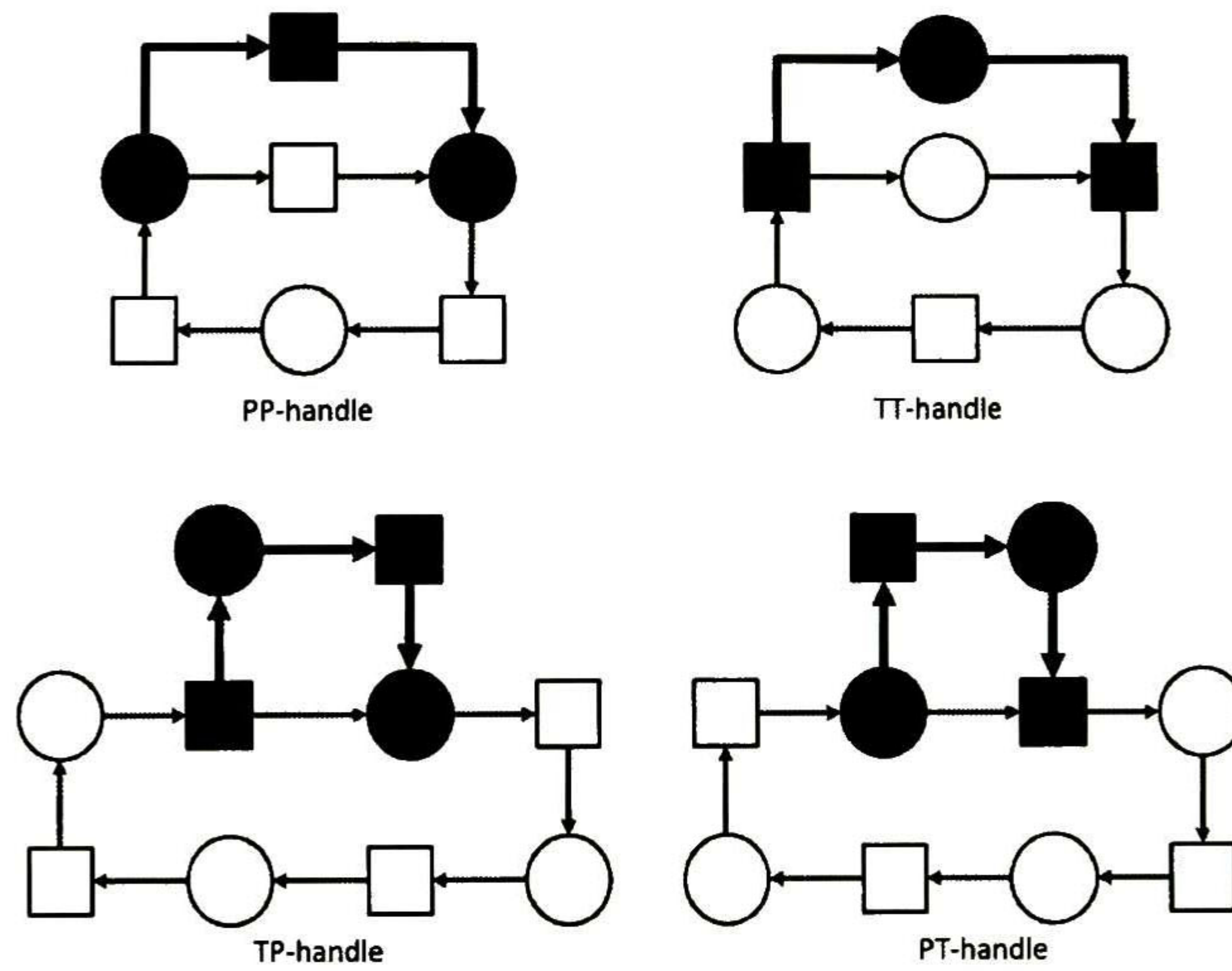


Figura 5.6: Las cuatro clases de handles.

$P_1 = \bullet T_1 = T_1^\bullet$, el T -invariante asociado a N_1 es $\sigma_{inv}^1 = a [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$, $T_2 = \{t_1, t_3, t_4\}$, $P_2 = \bullet T_2 = T_2^\bullet$ y el T -invariante asociado a N_2 es $\sigma_{inv}^2 = b [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ donde $a, b \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}$.

5.3.1. El Caso de Múltiples σ_{\min}

Cuando una red viva y acotada cuenta con más de un T -componente (y por lo tanto más de un T -invariante) la elección del vector materia mínimo puede complicarse debido a que pueden existir más de una solución σ_{\min} que alcancen un mismo m_r , a lo mucho una por cada T -componente. En estos casos se les puede asignar un peso a los soportes de cada σ_{\min}^j asociado a cada uno de los n T -componentes con el fin de compararlos y poder escoger el que resulte más conveniente en cuanto a su velocidad de flujo.

El peso de cada T_v^j (σ_{\min}^j) estará dado por:

$$w_j (\sigma_{\min}^j) = \min (\lambda (t_i) m (\min (\bullet t_i))) \mid t_i \in T_v^j (\sigma_{\min}^j) \text{ para } j = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

y entonces el vector mínimo confiable σ_{\min}^* será

$$\sigma_{\min}^* = \sigma_{\min}^k \mid w_k (\sigma_{\min}^k) = \max (w_j) \quad (5.4)$$

Es importante notar que σ_{\min}^* no necesariamente será el vector que nos ayude a tener el CVL óptimo en tiempo debido a que el marcado tiene una gran influencia para resolver este problema y nosotros estamos utilizando una heurística para elegir un σ_{\min} lo suficientemente adecuado. El siguiente ejemplo muestra la idea de esta heurística.

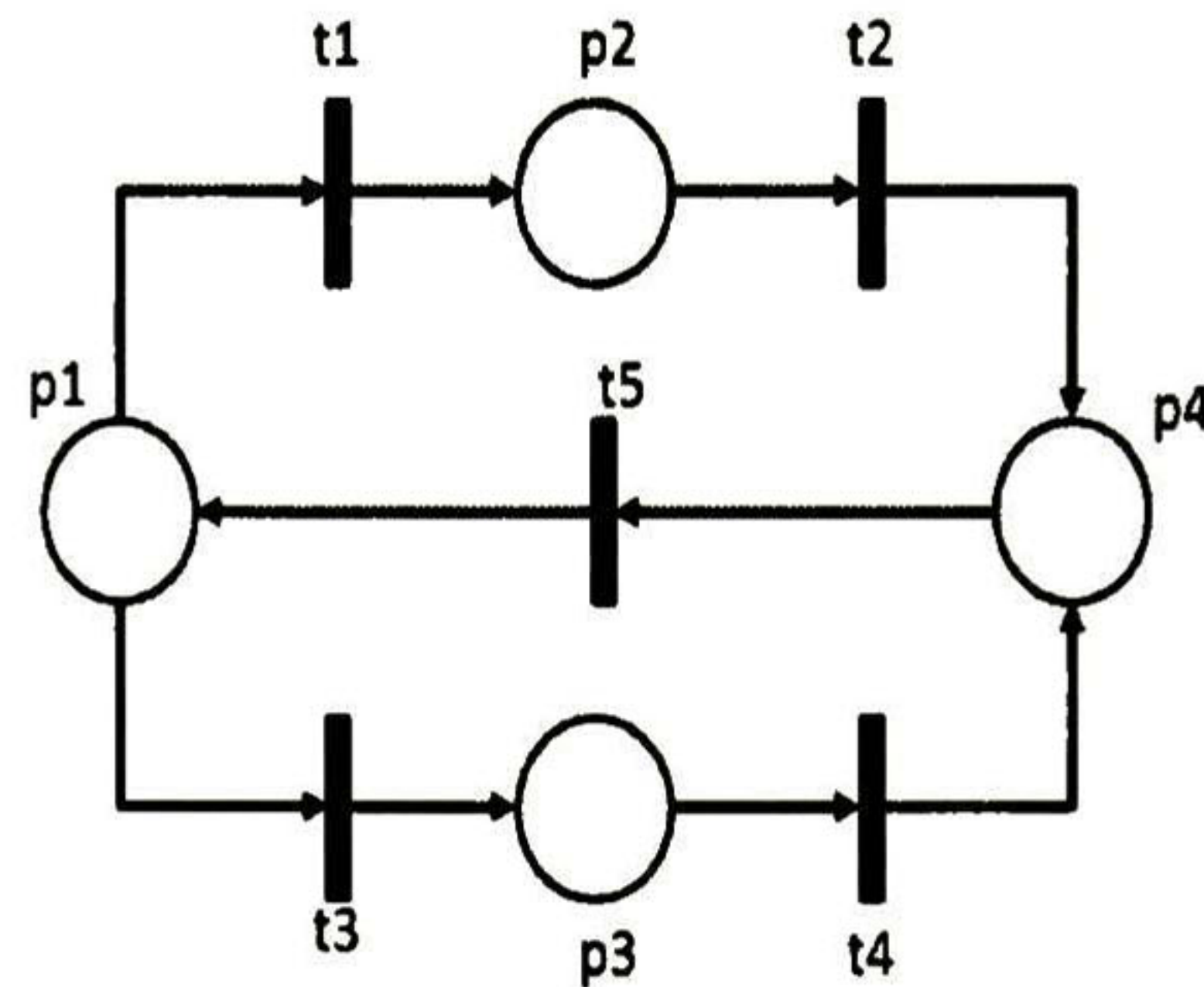


Figura 5.7: Ejemplo de una red de Petri con dos T -componentes.

Ejemplo 5.2 Sea (N, m_0, λ) el sistema TCPN de la Figura 5.7 con $\Lambda = \text{diag}(1, 1, 2, 2, 3)$ y $m_0 = [5 \ 5 \ 5 \ 5]$. Sea $m_r = [4 \ 5 \ 5 \ 6]$ un marcado requerido. Para aplicar CVL es necesario elegir el σ_r adecuado, en este ejemplo resulta que hay dos soluciones mínimas, $\sigma_{\min}^1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y $\sigma_{\min}^2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$. Utilizando (5.3) tenemos que $w_1(\sigma_{\min}^1) = 5$ y $w_2(\sigma_{\min}^2) = 10$ y de (5.4) vemos que vector mínimo confiable $\sigma_{\min}^* = \sigma_{\min}^2$.

Es fácil notar en este ejemplo que en efecto una ruta es más rápida que la otra debido a la diferencia de las velocidades de flujo de las transiciones y al marcado inicial. Esta heurística puede resultar útil para sistemas con un mayor número de nodos, y que por lo tanto no resulta tan evidente la elección de la mejor ruta. Nótese que puede darse el caso en que todos los σ_{\min} se utilicen en paralelo y forma proporcional para conseguir mayor rapidez, pero este caso se tiene visto como uno de los trabajos a futuro.

5.3.2. El Caso de Estructura Acelerable

Debido a que entre mayor es el marcado del lugar p limitante de una transición t , mayor es el flujo de t , hay casos en los que si existe alguna manera de aumentar $m(p)$ sin comprometer ciertas áreas de la red, entonces es posible aumentar el flujo y con ello disminuir el tiempo de convergencia de manera similar a como se hizo en la sección 5.1 del presente capítulo.

Cuando tenemos que (N, m_0, λ) es un sistema TCPN vivo y acotado el cual tiene una subred $N' \subset N$ que es un T -componente y además N' tiene un PP -handle, puede darse el caso en que el control CVL para alcanzar algún marcado requerido m_r tenga una única solución mínima σ_{\min} , pero que a pesar de eso exista otro $\sigma_r > \sigma_{\min}$ que aplicado secuencialmente haga que el sistema converga a m_r con mayor rapidez que σ_r .

Aunque ya se cuenta con la idea general, hace falta trabajar más a detalle en el caso de estructuras acelerables, lo cual es parte del trabajo a futuro. A continuación se presenta un bosquejo sobre la forma en la que se tiene pensado abordar el problema:

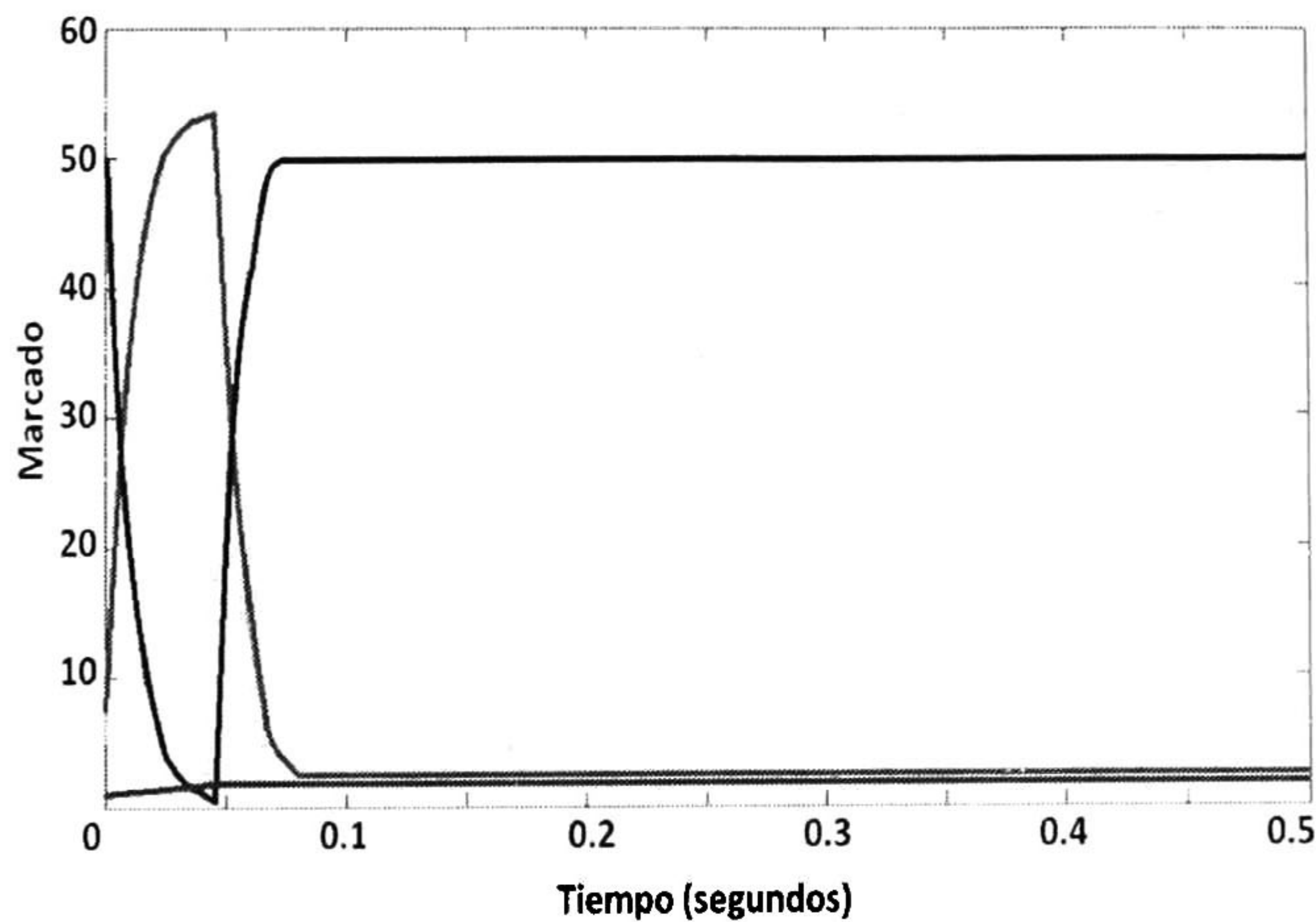


Figura 5.8: Evolución del marcado del Ejemplo 5.3 utilizando una secuencia óptima.

Sea p_f el último nodo (lugar) del PP -handle. Sea también m_r un marcado requerido. Si el vector materia mínimo requerido σ_{\min} para alcanzar m_r es tal que no requiere que ocurra alguna transición $p_f^{\bullet} \notin PP$ -handle, entonces σ_{\min} hará convergir a m_r en tiempo mínimo (óptimo) usando CVL .

Del teorema anterior sabemos que agregar un T -invariante tal que afecte a algún elemento del soporte de σ_{\min} hará convergir a m_r más lentamente. Por otro lado, debido a que no se requiere que ocurra alguna transición $p_f^{\bullet} \notin PP$ -handle entonces $m(p_f)$ sólo afectaría al flujo de $p_f^{\bullet} \in PP$ -handle ($\dot{\sigma}[p_f^{\bullet}] = \lambda(p_f^{\bullet}) m[p_f^{\bullet}]$), el cual pertenece a un T -componente diferente de N' , por lo que si agregamos algún T -invariante cuyo soporte no tenga elemento en común alguno con $T_v(\sigma_{\min})$, éste no causará ningún efecto positivo para convergir a m_r .

En caso de que el vector materia mínimo requerido σ_{\min} para alcanzar m_r es tal que requiere que ocurra alguna transición $p_t^{\bullet} \notin PP$ -handle, esto implica que podría acelerarse el flujo en p_t^{\bullet} agregando marcas en p_f a través de un T -invariante que no afecte a p_t^{\bullet} y aplicando una secuencia específica, la cual estará definida en intervalos de tiempo. Para poder hacer esta aceleración es importante también tener el conocimiento de las velocidades de flujo de cada transición, ya que además de la propiedad estructural mencionada, también es necesario que se cumpla con

$$\lambda(p_t^{\bullet}) \ll \lambda(p_f^{\bullet})$$

En general faltan encontrar las condiciones específicas para garantizar la optimalidad en tiempo, pero en base a estas ideas uno puede orientarse hacia un método de control efectivo y sencillo sobre redes de Petri fluidificadas.

Con el fin de exponer este caso se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3 Sea (N, λ, m_0) el sistema TCPN de la Figura 5.1 con $\Lambda = \text{diag}(100, 100, 0.5, 1)$ y $m_0 = [50 \ 5 \ 1]^T$. Sea $m_r = [50 \ 4 \ 2]^T$ el marcado requerido. De la sección anterior sabemos que existen controles CVL tales que empleando $\sigma_r \neq \sigma_{\text{mín}}$ aplicados secuencialmente hacen convergir al sistema a m_r en menor tiempo que $\sigma_{\text{mín}}$. Sin embargo, de $T_v(\sigma_{\text{mín}}) = \{t_3\}$ sabemos que t_3 es una transición imprescindible, esto significa que para hacer que el sistema alcance m_r más rápido es necesario aumentar el flujo en dicha transición. Esto se logra manteniendo el lugar $\bullet t_3 = p_2$ con la mayor cantidad de marcas posible. De la red vemos que hay un $\sigma_{\text{inv}}^1 = a [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ y un $\sigma_{\text{inv}}^2 = b [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ con $a, b \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}$. Como $\sigma_{\text{mín}}$ pertenece al soporte del T -invariante del tipo σ_{inv}^2 , este caso se considera igual que el expuesto en el Teorema 5.1, por lo que no ayuda a acelerar al sistema. Ahora, $\sigma_{\text{mín}}$ no pertenece al soporte del T -invariante del tipo σ_{inv}^1 , y como ocurre que $\lambda(t_3) \ll \lambda(t_2)$ podemos verificar que agregando algún σ_{inv}^1 al $\sigma_{\text{mín}}$ y aplicándolo en cierta secuencia mejorará el tiempo de convergencia a m_r . Como todavía no conocemos el valor a del σ_{inv}^1 , podemos dejar abiertos al máximo los flujos de las transiciones t_1 y t_3 empleando el control CVL (4.11) con $\sigma_r[3] = 1$ y cerrando totalmente f_1 cuando I_{c_3} cambie a cero, la razón es que la transición t_1 va a estar agregando marcas a p_2 , provocando un aumento considerable en el flujo de la transición t_3 . Una vez que ocurra $m_a[3] = \sigma_r[3] = 1$ el control cambiará a $I_{c_1} = I_{c_3} = 0$, y ahora aplicamos nuevamente el control CVL (4.11) pero ahora con $\sigma_r[2] = m_a[1]$. En la Figura 5.8 podemos apreciar la evolución del marcado aplicando el control explicado en este ejemplo. El tiempo de convergencia a m_r resulta de aproximadamente 0.07 segundos, que comparándolo con los resultados obtenidos con el vector mínimo (Figura 5.3) y una secuencia arbitraria (Figura 5.2) vemos que resulta mucho más rápida.

Capítulo 6

Control Sobre Metabolomas Celulares

En este capítulo se presentan conceptos básicos sobre metabolismo celular y una metodología de modelado para sistemas metabólicos con *TCPN*. Al final del capítulo se da un ejemplo que muestra como la ley de control *CVL* se puede aplicar a sistemas metabólicos.

Las principales características de las *TCPN* tales como la representación gráfica, el soporte matemático, la sincronización de actividades y la representación de relaciones causales hacen a las *TCPN* adecuadas para representar reacciones bioquímicas y el metabolismo celular. De hecho, el marcado de las *TCPN* captura la concentración de especies moleculares mientras que las ecuaciones diferenciales junto con los vectores de disparo representan las velocidades de reacción y la gráfica captura las rutas metabólicas.

Un importante problema de control en el área de ingeniería metabólica es alcanzar algún estado del metaboloma tal que la producción de una selección de metabolitos es regulada o procesos particulares son limitados o favorecidos. Este trabajo también presenta el problema de alcanzar un estado requerido (marcado) representando cierto estado de concentraciones de un metaboloma. La solución es el vector de velocidades de reacción, el cual es positivo o cero y menor o igual a los máximos fijados por la cinética de Michaelis-Menten para la concentración de enzima actual. Así, si la solución existe, ésta puede implementarse *in vivo* por mutación genética dirigida, estrategias knock-in (o knock-out) o efectos farmacológicos. El problema de alcanzar un estado requerido no ha sido abordado ya que en la ingeniería metabólica considera sólo control en estado pseudoestacionario, esta es una de las ventajas del control *CVL* sobre el metaboloma celular.

En seguida se presenta la teoría básica concerniente al metabolismo celular.

6.1. Metabolismo celular

Para el bienestar de cualquier organismo, cada célula de dicho organismo debe transformar las sustancias disponibles en su alrededor en moléculas útiles para ella. Tales transformaciones

toman lugar en las reacciones químicas catalizadas por enzimas. En estas reacciones, un sustrato se une estrechamente con un enlace no covalente con el sitio activo de la enzima para formar un complejo enzima-sustrato.

Las reacciones biológicas son reacciones químicas que involucran compuestos orgánicos [18]. No existe un límite en el número de posibles mecanismos y reacciones orgánicas. Sin embargo, ciertos patrones generales se presentan, los cuales pueden ser utilizados para describir muchas reacciones comunes.

En bioquímica, un sustrato es una molécula sobre la cual una enzima actúa. Las enzimas catalizan (aceleran/desaceleran) reacciones químicas involucrando el(los) sustrato(s) sin sufrir alteraciones irreversibles durante el proceso de reacción, por eso cada molécula de enzima puede participar en muchas reacciones individuales. En el caso de un solo sustrato, éste se asocia con el sitio activo de la enzima, formándose un complejo enzima-sustrato. El sustrato es transformado en uno o más productos que luego son liberados del sitio activo. Así, el sitio activo queda libre para aceptar otra molécula de sustrato. Un esquema general de un proceso completo de reacción es:



donde E es una enzima, S es un sustrato, ES y EQ son complejos asociados y Q es el producto.

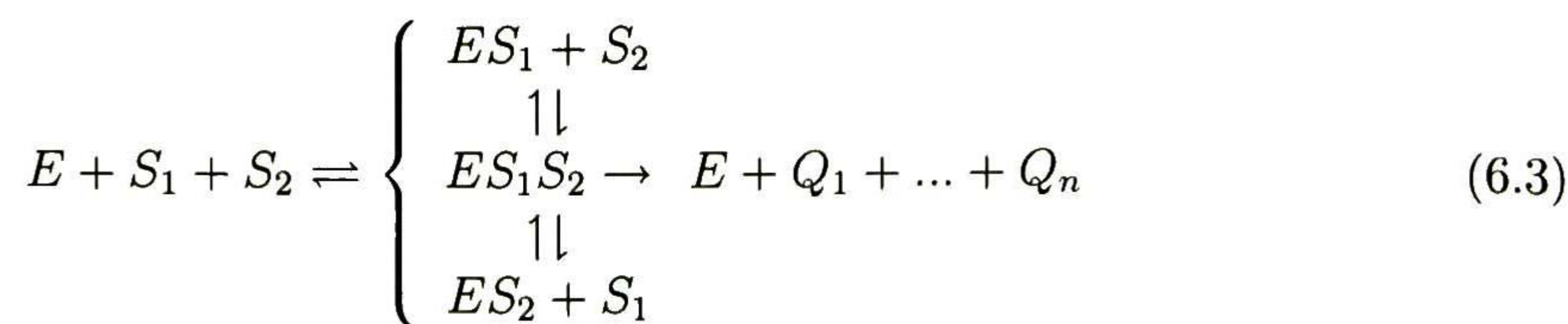
Usualmente, las velocidades de estas reacciones son fijadas por la cinética de Michaelis-Menten [31]. Bajo este modelo cinético, la enzima y el sustrato reaccionan rápidamente para formar un complejo enzima-sustrato mientras $[S]$ y $[ES]$ (léase concentración de S y ES) se consideran en concentración de equilibrio (lo mismo aplica con $[EQ]$ y $[Q]$), esto es, la velocidad a la cual ES se disocia en $E + S$ es mucho más rápida que la velocidad en la cual ES se transforma en EQ .

A lo largo del presente trabajo consideraremos un estado celular fisiológico en el que $[S] \gg [E]$, lo que significa que el equilibrio de $[S] \rightleftharpoons [ES]$ siempre tenderá a la formación de complejo ES . Por esto, la velocidad de disociación de ES es despreciable y el Esquema (6.1) puede ser reducido como se muestra a continuación:



donde la asociación-disociación queda implícita.

En reacciones con más de un sustrato, los enlaces pueden ocurrir en diferentes secuencias; por ejemplo, el siguiente esquema representa un sistema enzimático con dos sustratos y todas sus posibles secuencias:



Frecuentemente el producto de una enzima es el sustrato de otra reacción y así sucesivamente, construyéndose una cadena de reacciones llamadas rutas metabólicas representadas por $MP^j = \Gamma_1^j \Gamma_2^j \cdots \Gamma_n^j$ donde Γ_i^j es una reacción (6.2) o (6.3) de una ruta j y Γ_k^j utiliza uno o más productos de Γ_i^m . Nótese que j y m pueden representar diferentes rutas.

Entonces metaboloma (celular) es $CM = \{MP^i \mid MP^i \text{ es una ruta metabólica}\}$, y el propósito de CM es producir un conjunto particular de metabolitos.

6.2. Modelando el Metaboloma Celular

A continuación se propone una metodología ascendente en la que las reacciones bioquímicas son modeladas a través de módulos elementales, luego se muestra cómo éstos se van uniendo para formar rutas metabólicas, y por último el metabolismo celular. El modelo resultante captura ambas dinámicas, la del estado transitorio y la del estado estacionario del metaboloma. Es importante notar que el modelo *TCPN* derivado condensa muchos comportamientos representados por un conjunto de ecuaciones diferenciales generados por la *TCPN* en sí misma. Por ejemplo, una sola transición con cuatro lugares de entrada (una reacción que requiere cuatro sustratos) genera un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales posibles, mientras que dos transiciones con cuatro lugares de entrada cada uno generarán un conjunto de dieciséis ecuaciones diferenciales posibles. Por eso se pueden presentar comportamientos muy complejos de pocos compuestos.

Con el fin de modelar el metaboloma usando *TCPN* es necesario identificar cómo serán representados los elementos involucrados. La siguiente tabla relaciona el significado de cada elemento del *TCPN* respecto a las reacciones metabólicas [12].

Término TCPN	Interpretación Molecular
Lugar	Especie Molecular
Marcado	Concentración
Transición	Reacción
Velocidad de Disparo	Velocidad de Reacción
Pesos de arcos	Coefficientes Estequiométricos

La aproximación aquí propuesta para modelar el metaboloma consiste de a) representación de reacciones, de esta fase se obtienen los módulos elementales; b) unión de módulos elementales, los lugares de los módulos elementales que representan una misma especie molecular deben unificarse, quedando un lugar por especie, de esta fase se obtienen los módulos de ruta; y c) unión de los módulos de ruta, los lugares de los módulos de ruta que representan la misma especie molecular deben unificarse, quedando un lugar por especie, de esta fase se obtiene el modelo metabólico celular.

La siguiente sección describe estas fases.

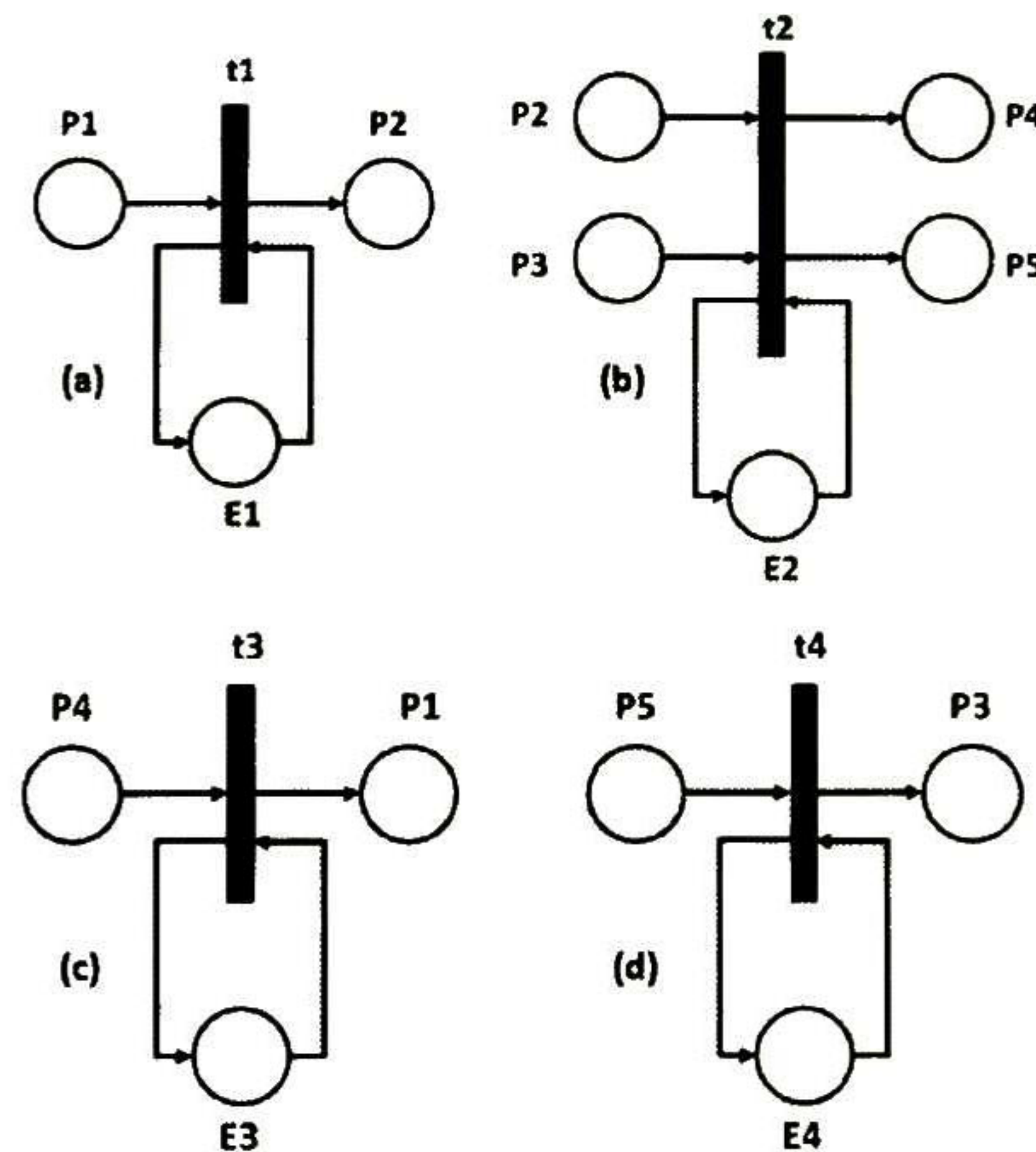


Figura 6.1: Cuatro módulos elementales representando cuatro reacciones diferentes.

6.2.1. Representación de Reacciones

Para representar cada reacción Γ_i con *TCPN* se construyen módulos elementales representando los Esquemas (6.2) o (6.3) según sea el caso.

Algoritmo 6.1 Módulos elementales.

1. Se crea un lugar p_j por cada especie molecular ms_j y una transición t_i para representar la reacción Γ_i .
2. Se pone un arco (p_s, t_i) si p_s representa un sustrato. se pone un arco (t_i, p_q) si p_q representa un producto. Por último, se pone un autolazo sobre p_e y t_i si p_e representa una enzima.
3. El marcado inicial $m_0[p_j]$ es la concentración de cada especie molecular ms_j al tiempo $\tau = 0$.
4. La transición t_i tiene asociada λ_i con el valor de la velocidad máxima de la reacción Γ_i .

Ejemplo 6.1 Sea $P1 + E1 \rightarrow P2 + E1$ la reacción Γ_1 . Se le asocia un lugar a cada especie molecular ($P1$, $P2$ y $E1$) y una transición t_1 representando Γ_1 . Por último, se agregan arcos en la forma mostrada en la Figura 6.1a.

Por otro lado, suponiendo que la concentración de sustrato permanecerá mucho mayor que la concentración de enzima (es un comportamiento esperado del sistema), el conflicto entre

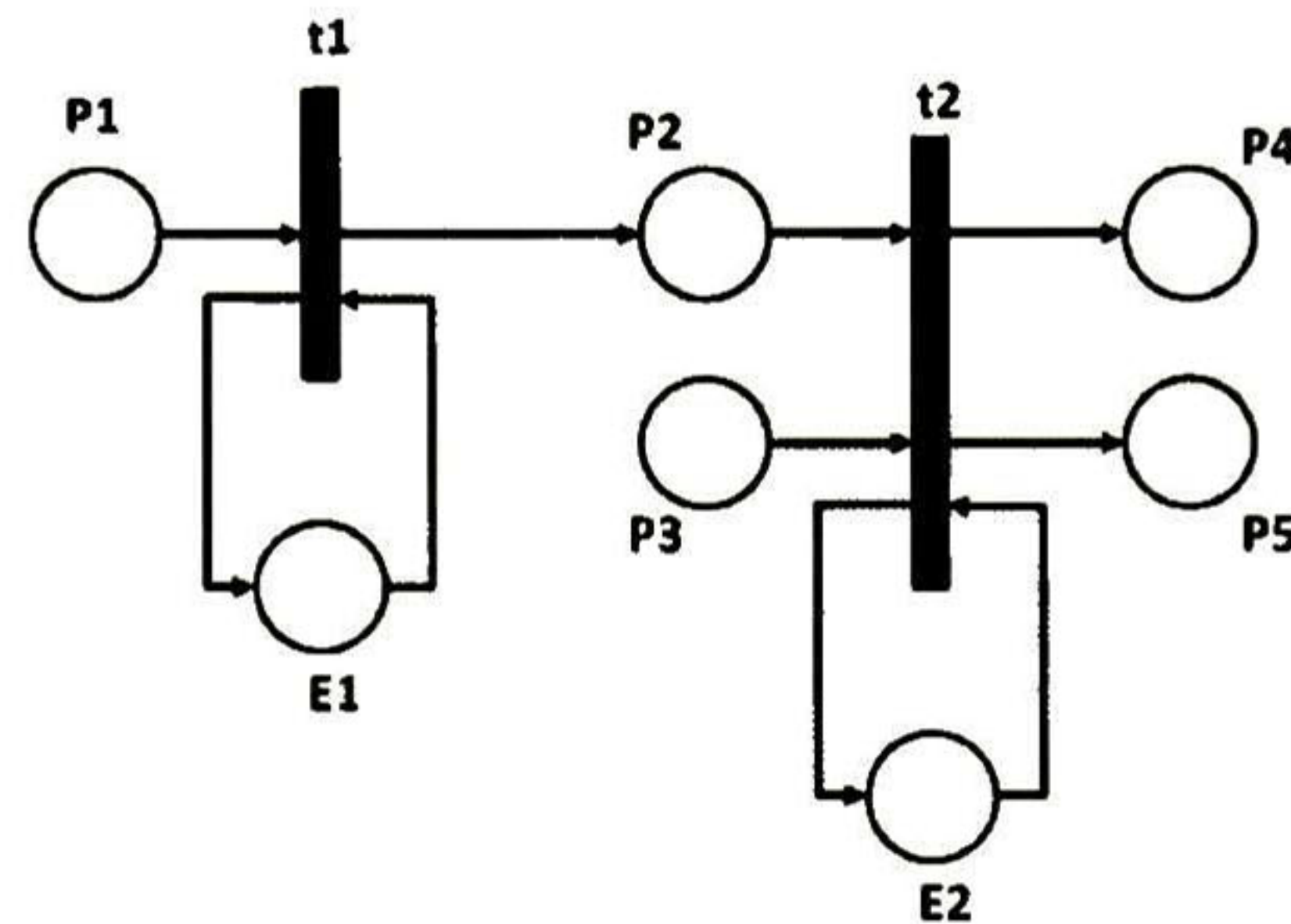


Figura 6.2: Ejemplo de módulo ruta.

sustrato y enzima puede ser ignorado. Así, si un sistema tiene 2^n configuraciones originadas por las n enzimas en conflicto con sustratos, todas esas configuraciones son eliminadas debido a que $\min([E], [S]) = [E]$ para $\tau \geq 0$.

6.2.2. Unión de Módulos Elementales

Algoritmo 6.2 *Unión de Módulos Elementales*

1. Sean N^1 y N^2 dos módulos elementales, entonces la unificación N es tal que $N = (P, T, Pre, Post)$ donde $P = P^1 \cup P^2$, $T = T^1 \cup T^2$, $Pre = Pre^1 \cup Pre^2$ y $Post = Post^1 \cup Post^2$. Nótese que los lugares que representan la misma especie molecular se unifican en un sólo lugar.
2. El marcado inicial de cada lugar se conserva.

Al hacer la unión de módulos elementales se obtienen módulos ruta.

Ejemplo 6.2 Sean $N^1 = (P^1, T^1, Pre^1, Post^1)$ y $N^2 = (P^2, T^2, Pre^2, Post^2)$ dos módulos elementales como se muestran en la Figuras 6.1a y 6.1b respectivamente. Entonces el resultado de la unión es $N = (P, T, Pre, Post)$ donde $P = P^1 \cup P^2 = \{P1, P2, P3, P4, P5, E1, E2\}$, $T = T^1 \cup T^2 = \{t_1, t_2\}$ y los arcos son agregados en la forma mostrada en la figura 6.2, donde se presenta el módulo ruta obtenido.

6.2.3. Unión de Módulos Ruta

Algoritmo 6.3 *Unión de módulos ruta.*

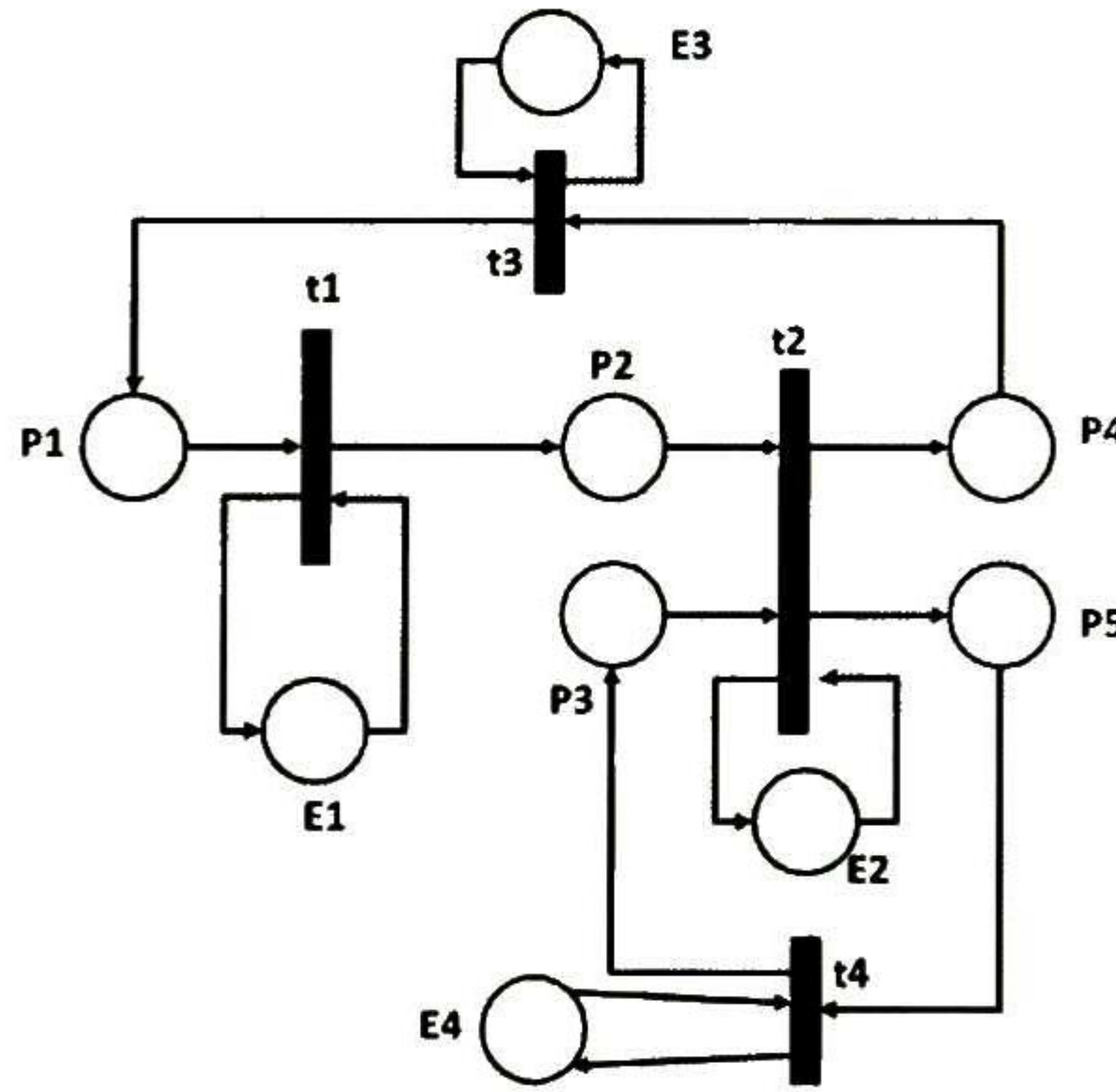


Figura 6.3: Modelo metabólico.

1. Sea N^1 un módulo ruta y sea N^2 un módulo ruta o un módulo elemental, entonces de la unión resulta $N = (P, T, Pre, Post)$ donde $P = P^1 \cup P^2$, $T = T^1 \cup T^2$, $Pre = Pre^1 \cup Pre^2$ y $Post = Post^1 \cup Post^2$. Nótese que los lugares representando una misma especie molecular son integrados en un solo lugar.
2. El marcado inicial de cada lugar es preservado.

Al hacer la unión de módulos ruta se obtiene el modelo metabólico.

Ejemplo 6.3 Sea $N^1 = (P^1, T^1, Pre^1, Post^1)$ el módulo ruta mostrado en la Figura 6.2. Sean $N^2 = (P^2, T^2, Pre^2, Post^2)$ y $N^3 = (P^3, T^3, Pre^3, Post^3)$ dos módulos elementales mostrados en la Figura 6.1c y 6.1d respectivamente. Entonces de la unión de ellos resulta $N = (P, T, Pre, Post)$, donde $P = \cup P^i = \{P1, P2, P3, P4, P5, E1, E2, E3, E4\}$, $T = \cup T^i = \{t1, t2, t3, t4\}$ para $i = 1, \dots, 4$. Los arcos se agregan en la forma mostrada en la Figura 6.3, donde se presenta el modelo metabólico obtenido.

6.3. Control del Metaboloma Celular

Un problema importante de control en el área de ingeniería metabólica es alcanzar algún estado del metaboloma tal que la producción de una selección de metabolitos es regulada o procesos particulares son limitados o favorecidos. Este problema es capturado en $TCPN$ como problemas de alcanzabilidad, i.e. alcanzar un estado requerido m_r partiendo de un estado inicial m_0 por medio de una acción de control apropiada.

Con el fin de ilustrar el $RCP(m_r, I_{cr})$ aplicado a un sistema metabólico, suponga el módulo ruta de la Figura 6.2 junto con los módulos c y d de la Figura 6.1 forman un metaboloma

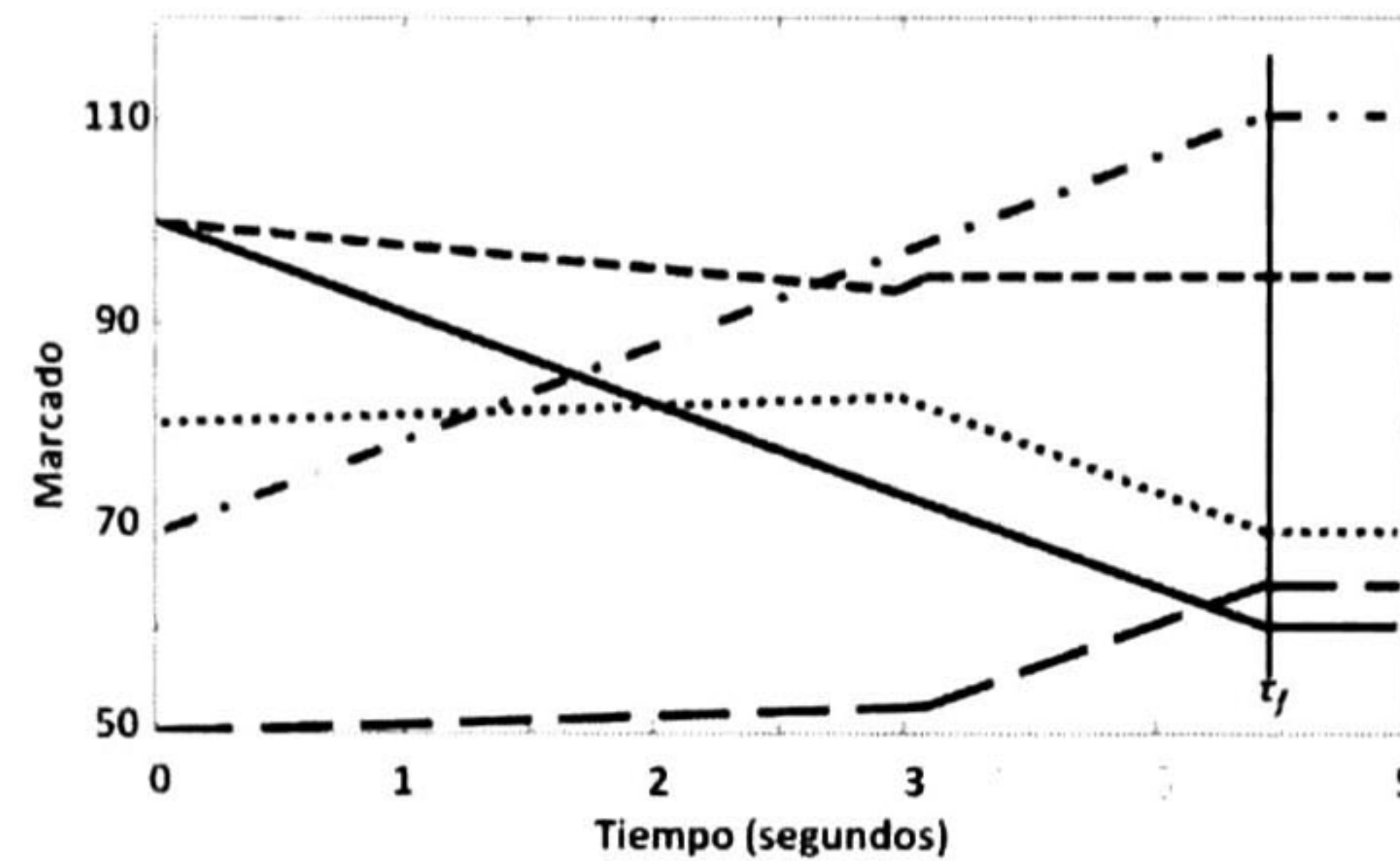


Figura 6.4: Evolución del marcado de la red de la Figura 6.3 aplicando el control *CVL*.

celular. El marcado inicial utilizado para este ejemplo es un estado inicial arbitrario, pero fisiológicamente posible para el supuesto modelo metabólico.

Ejemplo 6.4 Sea el modelo de metaboloma de la Figura 6.3 un sistema $TCPN = (N, \lambda, m_0)$ con $\Lambda = \text{diag}(2, 3, 4, 1)$ y $m_0 = [100 \ 80 \ 100 \ 50 \ 70 \ 5 \ 3 \ 2 \ 4]^T$. Se desea alcanzar un marcado requerido $m_r = [95 \ 70 \ 60 \ 65 \ 110 \ 5 \ 3 \ 2 \ 4]^T$. Hacemos la extensión del sistema con el procedimiento definido, de tal forma que quede de una forma similar al de la Figura 4.1. Ahora necesitamos la solución σ_r de $m_r = m_0 + C\sigma_r$. Nótese que hay muchas soluciones de σ_r pero sólo nos enfocamos en aquellas que cumplan $\sigma_r > 0$ porque las transiciones no pueden dispararse negativamente en las redes de Petri. Además escogemos la solución en la cual los elementos de σ_r son los más pequeños posibles, esto con el fin de consumir la menor cantidad posible de metabolitos para alcanzar el estado (marcado) requerido. Para este ejemplo la solución es:

$$\sigma_r = [30 \ 40 \ 25 \ 0]^T$$

Resolviendo el $RCP(m_r, I_{c_r})$ y aplicando el control (4.11) al sistema $TCPN = (N, \lambda, m_0)$ se alcanzan y mantienen las concentraciones de metabolitos requeridas, esto puede verse en la Figura 6.4.

Las velocidades de las reacciones (flujos de transición) se muestran en la Figura 6.5. Nótese que de $\tau = 0$ a $\tau = \tau_f \approx 4.5$ ocurre la dinámica del transitorio, y para $\tau > \tau_f$ el estado estacionario es alcanzado.

En la Figura 6.6 se muestra la evolución de marcado de m_a . Cuando ocurre $m_a[i] = \sigma_r[i]$ el control $I_{c_i} = 0$ hace $f_i = 0$ y $m_a[i]$ se mantiene hasta que $\tau = \tau_f$ ($m_a = \sigma_r$). Entonces el control I_c cambia a I_{c_r} para el control en estado estable. De esta manera, partiendo de un estado inicial de concentraciones de metabolitos logramos alcanzar un estado requerido y además mantener dicho estado.

Aunque el ejemplo es meramente sintético (no representa un metaboloma real), representa una estructura que se presentan en sistemas metabólicos celulares. De esta manera, es posible

alcanzar algún estado del metaboloma tal que la producción de una selección de metabolitos es regulada o procesos particulares son limitados o favorecidos.

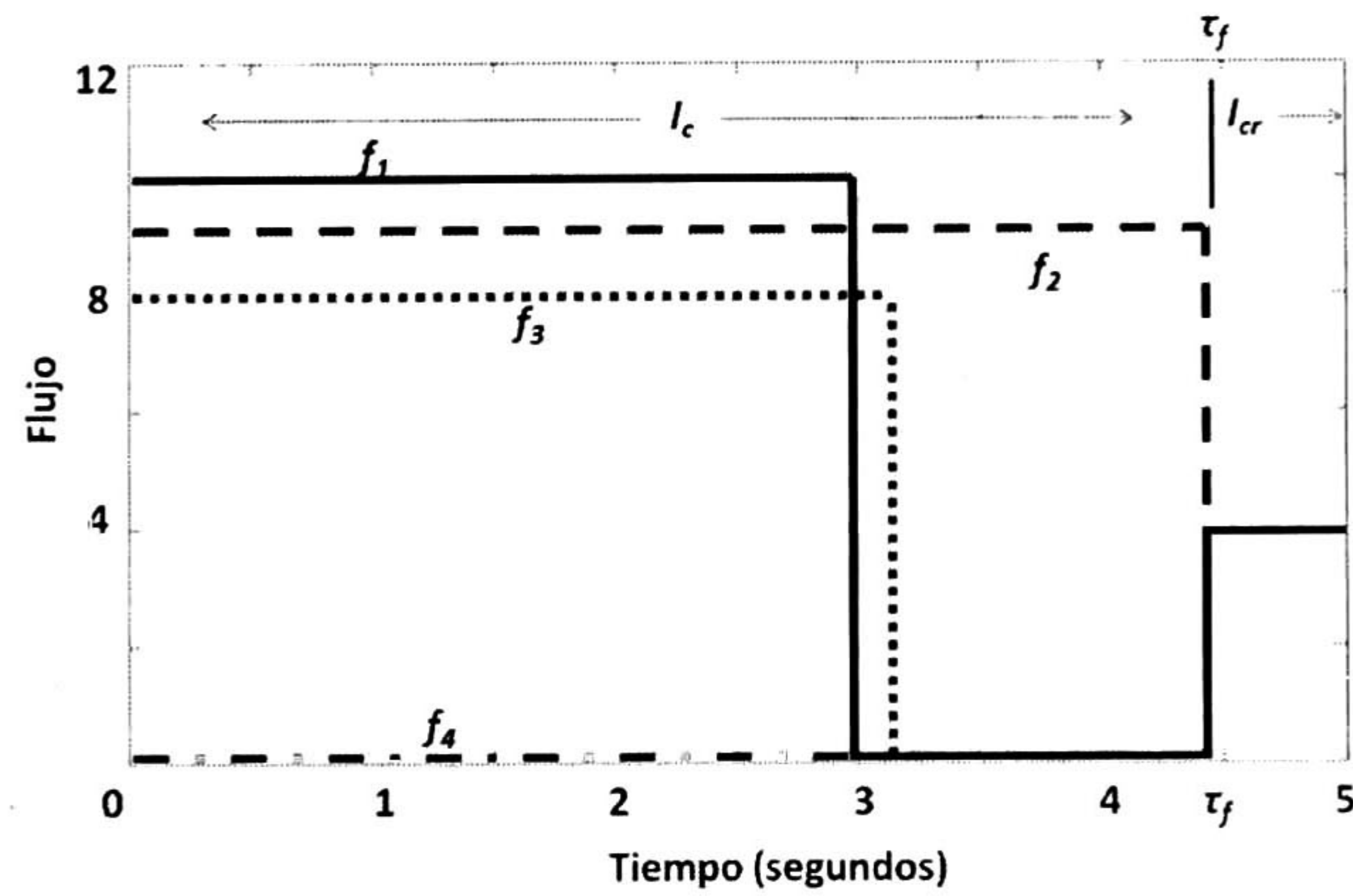


Figura 6.5: Velocidades de reacción (flujos de transición) del modelo metabólico controlado del Ejemplo 6.4. Nótese que $I_c(\tau)$ se aplica para $0 \leq \tau < \tau_f$ y $I_{cr}(\tau)$ para $\tau > \tau_f$.

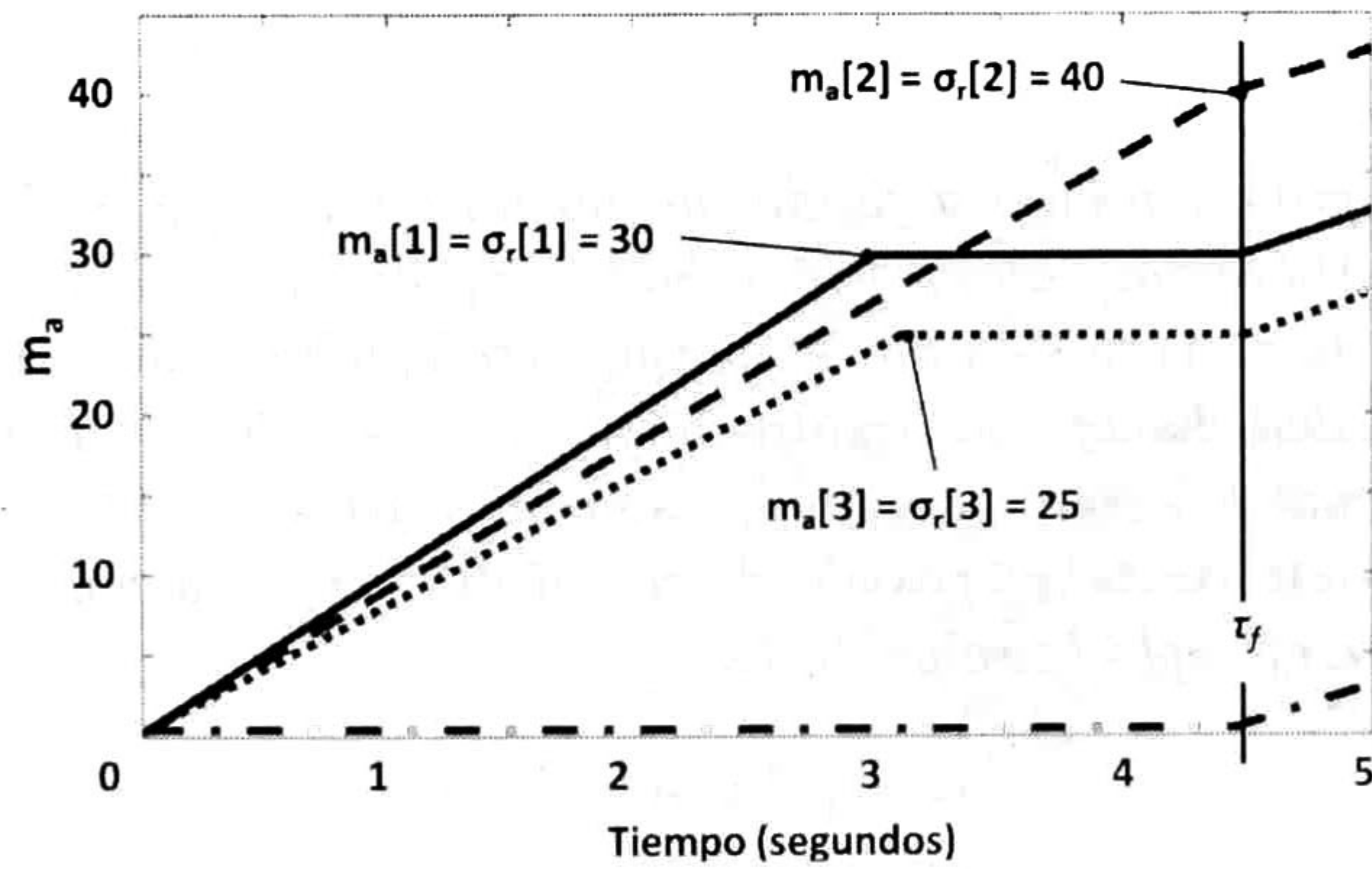


Figura 6.6: Marcado m_a del Ejemplo 6.4.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta disertación se propuso una nueva técnica en la teoría de control sobre redes de Petri, particularmente sobre las redes fluidificadas. Dicha técnica se basa en la construcción de un sistema de error que fue forzado al cero mediante una función de Lyapunov que garantiza su estabilidad. Los sistemas *TCPN* son una subclase de sistemas híbridos (lineal conmutado) y además son sistemas positivos, por lo que las leyes deben cumplir requisitos mayores que para el caso de sistemas lineales comunes, y esos requisitos han sido satisfechos con la ley *CVL* propuesta.

También se presentaron algunos análisis estructurales para la elección adecuada del vector limitante necesario para nuestro control. El *CVL*, a diferencia de las leyes de control del estado de arte, puede ejecutarse online, no requiere del consumo de grandes recursos computacionales, es efectiva y además garantiza optimalidad en tiempo de convergencia para ciertas estructuras de red y para otras propone heurísticas para minimizarlo.

Por otra parte, se presentó una metodología de modelado para sistemas metabólicos con *TCPN* con el fin de controlar mediante el *CVL* un metaboloma y hacer explícita la utilidad de dicho control.

Las principales contribuciones de esta disertación se presentan a continuación.

Se presenta un análisis temporal y se muestra una comparación entre los sistemas de red de Petri discreto temporizado y los sistemas *TCPN*.

Se propone una ley de control para sistemas *TCPN* para el caso cuando todas las transiciones son controlables. La efectividad de esta ley de control fue demostrada a través de una función de Lyapunov (logra alcanzar el mercado requerido).

- Se realiza un análisis acerca de la optimalidad en tiempo de la ley de control propuesta y una comparación con otros métodos de la teoría de control.
- Se presenta un método estructural para identificar la factibilidad de la ley de control propuesta para que por lo menos sea cercana al punto de operación óptimo en tiempo.

- Se propone una metodología de modelado de sistemas metabólicos.
- Se presenta un ejemplo de la aplicación del control sobre un sistema metabólico supuesto.

7.1. Trabajo Futuro

Aún hay muchos problemas para ser estudiados, como la estabilidad de sistemas fluidificados, así como leyes de control para el caso de redes de Petri con más de una transición no controlable. Por otro lado, también sería trascendente encontrar una forma de trasladar la ley de control para sistemas de eventos discretos en general.

Se proponen los siguientes temas como trabajo a futuro:

- Adaptar la ley de control para el caso cuando no todas las transiciones son controlables.
- Análisis de la estabilidad para *TCPN*.
- Ampliar el análisis estructural para la elección adecuada del vector limitante σ_r del control *CVL*.
- Aplicar el control a modelos metabólicos reales.
- Adaptar ley para redes de Petri estocásticas para el modelado más preciso de sistemas biológicos.

Bibliografía

- [1] E. J. Aguayo. Síntesis de controladores para redes de petri continuas temporizadas. Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. Unidad Guadalajara, Febrero 2008.
- [2] D. Angeli, P. D. Leenheer, and E. D. Sontag. A petri net approach to persistence analysis in chemical reaction networks. *Biology and Control Theory: Current Challenges*, pages 181–216, 2007.
- [3] V. D. Blondel and J.Ñ. Tsitsiklis. Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems, April 1997.
- [4] R. Brammer. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. *SIAM Journal Control*, 10(2):329–353, 1972.
- [5] C. G. Cassandras. *Discrete Event Systems. Modelling and Performance Analysis*. Asken Associates, 1993.
- [6] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd. edition, 1999.
- [7] R. David and H. Alla. Continuous petri nets. *Proceedings of the 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets*, pages 275–294, 1987.
- [8] R. David and H. Alla. Continuous and hybrid petri nets. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 8(1):159–188, February 1998.
- [9] J. Dessel and J. Esparza. *Free Choice Petri Nets*. Cambridge University Press, 1995.
- [10] J. Esparza and M. Silva. Compositional synthesis of live and bounded free choice petri nets. *LNCS*, 571:172–187, 1991.
- [11] A. Giua, C. Mahulea, L. Recalde, C. Seatzu, and M. Silva. Optimal control of timed continuous petri nets via explicit mpc. In *In Proc. of 2nd Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 383–390. Springer, 2006.

- [12] P. J. E. Goss and J. Peccoud. Quantitative modeling of stochastic systems in molecular biology by using stochastic petri nets. In *Natl. Acad. Sci. USA*, volume 95, pages 6750–6755, June 1998.
- [13] A. Hassibi and S. Boyd. Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems. *Proceedings of American Control Conference, Philadelphia, USA*, 6:3659–3664, 1998.
- [14] M. Heiner, D. Gilbert, and R. Donaldson. Petri nets for systems and syntethic biology. pages 215–264, 2008.
- [15] K. M. Inan and P. P. Varaiya. Algebras of discrete event models. *Proceedings of the IEEE*, 77(1), January 1989.
- [16] J. Júlvez, L. Recalde, and M. Silva. On reachability in autonomous continuous petri net systems. In *ICATPN'03: Proceedings of the 24th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets*, volume 2679, pages 221–240, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer-Verlag.
- [17] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Inc., 2002.
- [18] L. Kurti and B. Czako. *Strategic Applications of Named Reactions in Organic Synthesis*. Elsevier Academic Press. USA, 2005.
- [19] E. López-Mellado. *Introducción a Las Redes de Petri*. Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Físimo-Matemáticas, 1997.
- [20] C. Mahulea, A. Ramírez-Treviño, L. Recalde, and M. Silva. Steady state control, zero valued poles and token conservation law in continuous net systems. *Proceedings of the International Workshop on Control of Hybrid and Discrete Event Systems*, 2005.
- [21] C. Mahulea, A. Ramírez-Treviño, L. Recalde, and M. Silva. Steady state control reference and token conservation laws in continuous petri net systems. *IEEE Trans. on Automation Science and Engineering*, 2(5):726–741, 2008.
- [22] C. Mahulea, L. Recalde, and M. Silva. Basic server semantics and performance monotonicity of continuous petri nets. *Springer Science+Bussines Media, LLC*, August 2008.
- [23] M. A. Marsan, G. Balbo, G. Conte, S. Donatelli, and G. Franceschinis. Modelling with generalized stochastic petri nets. *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.*, 26(2):2, 1998.
- [24] H. Matsuno, A. Doi, M. Nagasaki, and S. Miyano. Hybrid petri net representation of gene regulatory network. *Pacific Symposium on Biocomputing*, 5:338–349, 2000.
- [25] M. K. Molloy. Performance analysis using stochastic petri nets. *IEEE Trans. Comput.*, 31(9):913–917, 1982.

-
- [26] M. Nagasaki, A. Doi, H. Matsuno, and S. Miyano. Petri net based description and modeling of biological pathways. *Algebraic Biology*, pages 19–31, 2005.
- [27] E. Nevoigt. Progress in metabolic engineering of *saccharomyces cerevisiae*. *Microbiology And Molecular Biology Reviews*, 72(3):379–412, September 2008.
- [28] M. Peleg, D. Rubin, and R. B. Altman. Using petri net tools to study properties and dynamics of biological systems. *Journal of the American Medical Informatics Association*, 12(2):181–199, 2005.
- [29] N. Riel and A. W. Van. Dynamic modelling and analysis of biochemical networks: Mechanism-based models and model-based experiments. *Briefings In Bioinformatics*, 7(4):364–374, November 2006.
- [30] L. Rodrigues and E. Boukas. Piecewise-linear h infinite controller synthesis with applications to inventory control of switched production systems. *Automatica*, pages 1245–1254, 2006.
- [31] I. H. Segel. *Enzyme Kinetics*. New York: Wiley-Interscience, 1975.
- [32] M. Silva and L. Recalde. On fluidification of petri net models: From discrete to hybrid and continuous model. *Annual Reviews in Control* 28, pages 253–266, 2004.
- [33] M. Silva and L. Recalde. Continuization of timed petri nets: From performance evaluation to observation and control. *26th International Conference On Application and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency*, 2006.
- [34] M. Silva and L. Recalde. Redes de petri continuas: Expresividad, análisis y control de una clase de sistemas lineales conmutados. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 4(3):5–33, Julio 2007.
- [35] E. D. Sontag. An algebraic approach to bounded controllability of linear systems. *Int. Journal of Control*, 39:181–188, 1984.
- [36] H. Sussman, E. D. Sontag, and Y. Yang. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *Proceedings of the 32nd Conference on Decisions and control, San Antonio, USA*, pages 1802–1807, 1993.
- [37] J. N. Tsitsiklis and V. D. Blondel. Spectral quantities associated to pairs of matrices are hard -when not impossible- to compute and to approximate. April 1996.
- [38] C. R. Vázquez, A. Ramírez-Treviño, L. Recalde, and M. Silva. On controllability of timed continuous petri nets. *11th Int. Workshop Hybrid Systems: Computational and Control*, 4981:528–541, 2008.

Apéndice A

Teoría de Estabilidad de Lyapunov

La teoría de estabilidad juega un rol central en la teoría de sistemas e ingeniería. Hay diferentes tipos de problemas de estabilidad que se encuentran en el estudio de sistemas dinámicos. Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que empiezan en una zona determinada permanecen en la cercanía; de otra manera, éste es inestable. Se trata de un punto asintóticamente estable si todas las soluciones que empiezan en una zona determinada no solo permanecen en la cercanía, sino que tienden al punto de equilibrio mientras el tiempo se aproxima al infinito.

Los teoremas de estabilidad de Lyapunov nos dan suficientes condiciones para la estabilidad, estabilidad asintótica y demás. Sin embargo no nos dicen si las condiciones dadas son también necesarias.

A continuación se presenta el método directo de Lyapunov para determinar la estabilidad o estabilidad asintótica de un estado de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La teoría de la estabilidad de Lyapunov es muy importante en la actualidad, tiene un siglo desde que fue presentada por el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857-1918) en su famosa tesis publicada en 1892 [17].

El método directo de Lyapunov trabaja con sistemas de la forma $\dot{x} = f(x)$, donde $f(x)$ puede ser un sistema lineal o no lineal. Este método explora la estabilidad alrededor de un punto de equilibrio $\dot{x} = 0$ del sistema y clasifica el comportamiento alrededor del punto en estable, asintóticamente estable o inestable.

A continuación se presentan las definiciones de estabilidad.

Definición A.1 Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema. El punto de equilibrio $x = 0$ es: a) estable si, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|x_0\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$; b) inestable si no es estable; c) asintóticamente estable si es estable y δ puede ser escogida tal que $\|x_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Con el fin de determinar condiciones para analizar la estabilidad de un sistema, se hace uso de la siguiente definición de funciones.

Definición A.2 Sea $V(x)$ una función de x . Si $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ocurre que la función $V(x)$ satisface que $V(x) \geq 0$ ésta es llamada *Semidefinida Positiva*. Si $V(x) > 0$ entonces es llamada *Definida Positiva*. Si $V(x) \leq 0$ es llamada *Semidefinida Negativa*. Y si $V(x) < 0$ entonces es llamada *Definida Negativa*.

Un ejemplo clásico en el cual se presenta una función definida positiva es $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. En forma matricial la función queda:

$$V(x) = x^T P x$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de estado y la matriz P es la matriz identidad de dimensión 2×2 . De igual forma algunas funciones pueden representarse matricialmente.

El siguiente teorema da condiciones para determinar la estabilidad de un sistema. Tomado de [17].

Teorema A.1 Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable continuamente tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\}$$

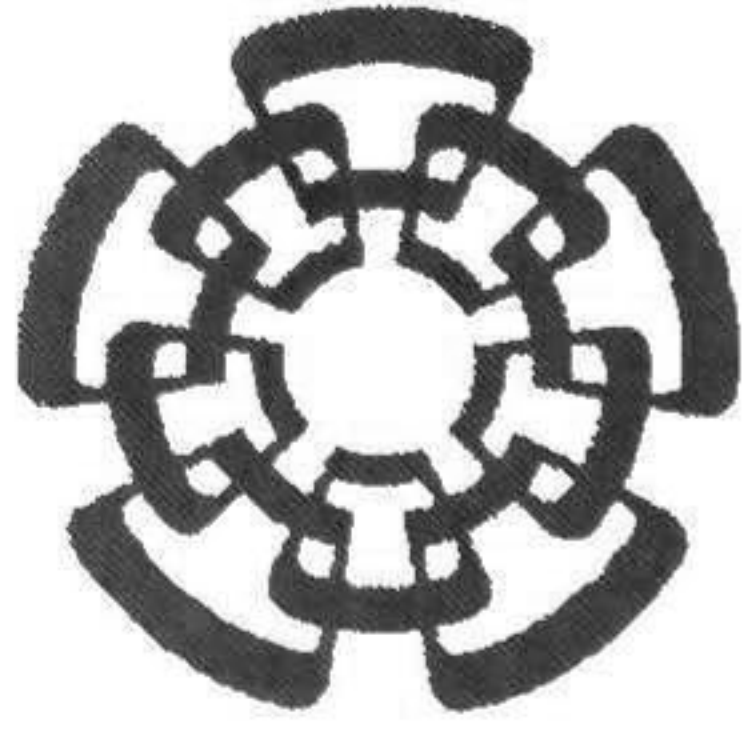
$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D$$

entonces, $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Un sistema lineal no tiene múltiples puntos de equilibrio aislados, por ejemplo si x_1 y x_2 son dos puntos de equilibrio del sistema entonces debido a la linealidad todo punto que está en el subespacio generado por x_1 y x_2 es un punto de equilibrio.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

"2010, Año de la Patria, Bicentenario del Inicio de la Independencia
y Centenario del Inicio de la Revolución"

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Diseño de una ley de control para alcanzabilidad en redes de
Petri fluidificadas

del (la) C.

Roberto ROSS LEÓN

el día 07 de Julio de 2010.

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Luis Ernesto López Mellado
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0009787