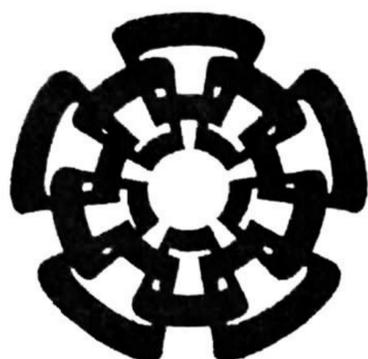


BC-661
Don-2012

XX(182692.1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Estudio del Comportamiento Dinámico de Un Reactor de Fermentación en Estado Sólido

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
LIBROS**

Tesis que presenta:

Oscar Javier Aroche Tirado

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. Arturo del Sagrado Corazón Sánchez Carmona
Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CLASIF.
ACTUS.. BC-661
FECHA: 30/01/2012
PROCED.. Dev-2012
\$

ID 181185-1004

Estudio del Comportamiento Dinámico de Un Reactor de Fermentación en Estado Sólido

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Oscar Javier Aroche Tirado

Ingeniero en Electrónica con Especialidad en Comunicaciones
Intituto Tecnológico de Culiacán 2003-2007

Becario de CONACYT, expediente no. 21841

Directores de Tesis

Dr. Arturo del Sagrado Corazón Sánchez Carmona

Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Junio de 2011.

Resumen

En años recientes la investigación de procesos de Fermentación en Estado Sólido (FES) ha conducido a una amplia gama de aplicaciones en reactores a escala de laboratorio. Los procesos de FES tienen extensa aplicación en sectores económicos, la agro-industria, control del medio ambiente y en la industria de la fermentación. Las FES también se han utilizado para la producción de compuestos de alto valor agregado tales como enzimas, ácidos orgánicos, biopesticidas, combustible biológico y saborizantes.

Como producto de esta investigación se realizó el análisis del modelo matemático de la planta para detectar comportamientos patógenos de algunas variables, obteniendo un modelo con un número reducido de ecuaciones. Además se proponen 3 leyes de control: control por linealización entrada-salida, modos deslizantes y super twisting para el seguimiento eficiente de la temperatura en un reactor de fermentación en estado sólido. Cada una de estas técnicas logró realizar el control de la planta de manera satisfactoria.

Las observaciones a destacar para cada una de las técnicas propuestas son:

- 1) Para el control por linealización de entrada-salida la principal ventaja fue proveer una señal de control continua, pero basado en el conocimiento exacto de la planta, siendo esto la principal limitante para el controlador, ya que el modelado de reactores no puede ser representado exactamente y generalmente se opta por modelos experimentales los cuales siempre generan variaciones paramétricas en el modelado. En los resultados obtenidos por simulación para entrada-salida el controlador tuvo una respuesta bastante aceptable, debido a que llevó a la variable de temperatura (x_6) a seguir la trayectoria de referencia con un error prácticamente de cero.
- 2) El esquema de control basado en modos deslizantes es robusto en el sentido que no necesita conocer los parámetros exactos del sistema, pero con el inconveniente acarreado por la naturaleza de ser un control discontinuo e introducir dinámicas no deseadas a la planta (cascabeleo). En nuestro reactor esta técnica de control mostró un seguimiento más eficiente que la técnica entrada-salida, pero con el inconveniente acarreado por la naturaleza misma de éstos (control discontinuo) siendo la variable de estado correspondiente al oxígeno (x_5) la que presentó un pequeño cascabeleo en su comportamiento.

II

3) El algoritmo Super Twisting por su parte, incorpora las ventajas principales de las técnicas anteriores (su señal de control es continua y es robusta ante variaciones paramétricas del sistema), siendo esta técnica la que logró un mejor desempeño en la planta al llevar a cero la diferencia entre la trayectoria de referencia y la variable a controlar, con la robustez dada por los modos deslizantes y sin la presencia del cascabeleo.

Abstract

In recent years research of fermentations process has lead to a wide range o application in lab scale reactor. The process of SSF has an extend applications in economics sector, such as agro-industry, environmental control and fermentation industry. The SSF has been also used in the production of a compounds of high aggregate value like enzymes, organics acids, biopesticizeds, bio-fuel and flavorants.

As a result of this research an analysis of a the math model of the system was made to detect the behavior of some pathogen variables, obtaining a reduced equation model. Aside of this three laws of controls are proposed: input-output linearization control, sliding modes and super twisting for the efficient control of temperature of a SSF. Each of this techniques managed to get successful control of the system.

The important things of each idea to highlight are:

1) For the input-output linearization control the main advantage was to provide a continuous signal control, but based on the exact knowledge of the system, being this the main limitings of the control system, given that the modeling of reactors can not be represented with full accuracy and most of the time, experimental models are preferred. In the input-output simulations results the control has a good behavior, due that the temperature of the reactor was successful controlled.

2) The second technique based on sliding modes is robust in the sense that it is not strictly necessary to know the exact system ´s parameters, with the disadvantage involved on the nature to be a discontinuous control (chattering). In the control ´s reactor this technique showed a better performance that input-output.

3) The algorithm Super Twisting takes the singles advantages of input-output and sliding modes (continuous signals and robust to parametric variations), being technique to achieve the best performance in the control ´s system.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primera instancia a mi familia (que es muy grande) por darme fuerza, valor y coraje que me impulsa a dar más de lo que puedo dar y a ser una mejor persona cada día.

A mi más vieja y mejor amiga Laura y mi excelente y mejor amigo “el Gracia” que siempre estuvieron ahí cuando los necesité y por demostrar que la amistad es para siempre.

Agradezco a mis asesores de tesis Arturo Sánchez Carmona y Alexander Loukianov que siempre estuvieron dispuestos a brindarme su apoyo para la realización de este proyecto de tesis, transmitir su experiencia y conocimiento y sobre todo dandome una palabra de aliento en los momentos precisos.

A mis compañeros de maestría, que muchos de ellos se convirtieron en mis amigos: Eleno, Christian, Carlos, Sergio, De la Mora, Huidi, Robert y se que puedo contar con ellos en cualquier momento. También a mi amigo Luis Enrique que siempre me recuerda lo valioso que es reirse de la vida.

Finalmente agradezco a CONACYT por brindar el apoyo económico para realizar este proyecto y al CINVESTAV por recibirme y darme más herramientas para el futuro.

Dedicatoria

Esta tesis la dedico a mis padres Vicente Armanto Aroche Ulloa y Guadalupe Tirado Lizarraga, por ser los padres que cualquier hijo podría desear, porque a pesar de todo, siempre nos dieron más de lo que podían ofrecer, llenando carencias económicas con riqueza espiritual. Por enseñarme a valorar las cosas importantes de la vida. Simplemente, si volviera a nacer le pediría a dios que me los diera de nuevo.

A mis hermanos: Cesar, Omar, Tony (chopis), Jorge (cua), Lupita (ojo) y Nancy, que me hacen recordar que aunque existen momentos difíciles, estos serán recordados con alegría, y que los momentos felices en nuestras vidas se recuerdan con esperanza, los quiero mucho.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Fermentación en Estado Sólido	1
1.2. Modelos de Fermentaciones en Estado Sólido	4
1.2.1. Modelado de cinéticas de crecimiento empírico	4
1.2.2. Aplicaciones	6
1.3. Descripción del Problema	7
1.3.1. Control de Reactores en la Industria	7
1.4. Objetivos	8
1.5. Organización de la Tesis	8
2. Modelo Matemático del Reactor	9
2.1. Introducción	9
2.1.1. Estequiometría	10
2.1.2. Dinámica de los Microorganismos	11
2.1.3. Suposiciones del Modelo	14
2.2. Modelado del Reactor	14
2.2.1. Modelo en Ecuaciones de Estado	17
2.3. Análisis Cualitativo Del Modelo a Través De Simulación	18
2.3.1. Análisis De CO_2	19
2.3.2. Análisis de Humedad De La Composta	19
2.3.3. Análisis de la Fracción Sólida en la Masa de la Composta	20
2.3.4. Análisis de Altura de la Composta	20

2.3.5. Análisis de Humedad del Aire	21
2.4. Modelo Simplificado	21
3. Algoritmos De Control	25
3.1. Introducción	25
3.2. Linealización Entrada-Salida	25
3.2.1. Introducción	25
3.2.2. Transformación Local de Coordenadas	26
3.3. Modos Deslizantes	31
3.3.1. Introducción	31
3.3.2. Reducción del Orden del Sistema	31
3.3.3. Esquema de Metodología para Control por Modos Deslizantes	33
3.4. Super Twisting	34
3.4.1. Estabilidad de Super Twisting	34
4. Control de un reactor de fermentación en estado sólido	37
4.1. Introducción	37
4.2. Control por Linealización Entrada-Salida	37
4.3. Control por Modos Deslizantes .	40
4.4. Control por "Super Twisting"	42
4.5. Análisis de Estabilidad de La Dinámica Cero	42
4.6. Simulaciones	45
4.6.1. Resultados para Control Entrada-Salida ante Variaciones de Temperatura	46
4.6.2. Resultados para Modos Deslizantes Variando Condición Inicial de x_6	48
4.6.3. Resultados para Super Twisting Variando la Condición Inicial de x_6	50
4.6.4. Resultados para Control Entrada-Salida ante Variaciones Paramétricas del Modelo	53
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	59
5.1. Conclusiones .	59

ÍNDICE GENERAL	III
5.2. Trabajo Futuro	60
A. Apéndice	61
Bibliografía	63

Índice de figuras

2.1. Diagrama del reactor experimental.	10
2.2. Comportamiento patógeno CO_2 ($u = 0$).	19
2.3. Comportamiento patógeno de humedad de la composta ($u = 0.7$).	20
2.4. Comportamiento patógeno del contenido sólido de la composta ($u = 0.7$).	21
2.5. Comportamiento patógeno de la altura de la composta ($u = 0.7$).	22
3.1. Modos deslizantes en espacio de estado en forma canónica: $x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x = 0$.	32
4.1. Figura correspondiente a la trayectoria de referencia ($T_{ref}(t)$).	39
4.2. Error de estimación del sustrato.	45
4.3. Error de estimación del oxígeno.	46
4.4. Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 25C$.	47
4.5. Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 32C$.	49
4.6. Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 25C$.	51
4.7. Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 32C$.	52
4.8. Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 25C$.	54
4.9. Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 32C$.	55
4.10. Gráficas correspondientes a variación de parametros (20 % $f_9(x)$) $x_6(0) = 25^\circ C$.	56
4.11. Gráficas correspondientes a variación de parametros (20 % $f_9(x)$) $x_6(0) = 32^\circ C$.	57

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad existe un creciente interés en los reactores de fermentación en estado sólido para aplicaciones comerciales. Razón por la cual este tipo de procesos ha llamado la atención y se han hecho avances significativos en la comprensión de como su desempeño puede ser controlado por la transferencia de calor (convección, conducción y evaporación) o por el proceso de difusión de oxígeno. Por otra parte, el modelado matemático de este tipo de reacciones ha sido desarrollado en laboratorio, en donde se propone como deben ser diseñados y operados [7]. Hoy en día con un mejor entendimiento en aspectos de ingeniería es posible realizar un escalamiento y generar una mayor comercialización de éstos [20].

1.1. Fermentación en Estado Sólido

Los procesos de fermentación pueden dividirse generalmente en fermentación en estado sólido (FES) y fermentación sumergida (FS). La mayor diferencia entre estos dos bioprocesos, es la cantidad de agua libre encontrada en el sustrato. Las primeras implican el crecimiento de los microorganismos en ausencia o cerca de la ausencia de agua visible entre las partículas del sustrato (dicha agua se encuentra dentro de las partículas de sustrato) [6], en contraste, con el caldo de nutrientes que puede contener alrededor de 50 g/l de soluto, además de 95 % de agua del volumen total del reactor en fermentaciones sumergidas.

Las fermentaciones en estado sólido FES fueron documentadas a partir de 1000 años a. C. en China, donde se describe la producción de alimentos a base de soya. Este tipo de producción de comida artesanal se extendió a muchos países de Asia y actualmente es utilizada para producir bebidas, comida y otros productos como: salsa de soya, arroz rojo entre muchos otros. En la actualidad se pretende que los hongos se desarrollen dentro de este tipo de fermentaciones ya que desempeñan un papel fundamental en la naturaleza, debido a

que éstos reciclan la materia orgánica, al hacer la digestión liberando enzimas en el medio ambiente y convirtiéndola en ingredientes útiles.

A partir de los años 40, la industria se ha enfocado a la producción de enzimas de hongos y algunos metabolitos secundarios, a través de fermentaciones sumergidas (FS) [20], debido a que la penicilina se obtiene por medio de técnicas de fermentación sumergida. Un método alternativo a éste es el cultivo de hongos en fermentaciones en estado sólido, considerando que el hongo crece naturalmente en un sustrato sólido húmedo en ausencia de agua libre. Para reacciones específicas, estos tipos de fermentaciones presentan una mejora considerable en comparación con su contraparte, las fermentaciones sumergidas. Pero si nos preguntamos ¿Porqué si las fermentaciones en estado sólido ofrecen una mejora en algunos tipos de procesos no son más utilizados? La respuesta es simple, las FES tienen un retraso significativo tanto en el diseño de ingeniería como en su conocimiento general para el escalamiento de estas fermentaciones, comparado con su contraparte las FS de las que se posee mucho más conocimiento en éstos aspectos.

Las FES son utilizadas desde hace siglos y se conoce muy poco de ellas ¿Por qué hasta ahora ha habido un creciente interés en el manejo de estos procesos? Una de las respuestas podría ser que ha habido un estancamiento en el progreso de las fermentaciones sumergidas, particularmente en áreas como el manejo de desechos, conservación de energía de la biomasa y su aplicación para la producción de metabolitos secundarios biológicamente activos [1].

Si bien es cierto que las FES ofrecen ventajas, también hay que tomar en cuenta que por lo general, los alimentos tradicionales preparados por esta técnica no producen un enriquecimiento general de los niveles de proteína en el sustrato. De hecho, en sustratos de mayor contenido protéico, como los frijoles de soja, puede haber una pérdida total de nutrientes, aunque éstos pueden, enriquecer determinadas características como: reducir la toxicidad, cambiar el contenido de nitrógeno orgánico y causar cambios favorables en el gusto. En cambio, en sustratos predominantemente compuestos de almidón, un enriquecimiento del contenido de proteínas es posible. Por ejemplo está la yuca, un alimento básico con bajo contenido protéico de cultivos de raíz, la que puede ser fermentada en FES para producir un alimento de mayor contenido protéico.

Hasta ahora se dio una pequeña introducción sobre FES, a continuación ahora se dará una de las definiciones más aceptadas en el ámbito de la biotecnología.

Una FES puede ser definida como un proceso de fermentación el cual involucra una matriz sólida de sustrato, la cual, es la fuente de nutrientes o simplemente puede ser que esta matriz esté impregnada de los nutrientes necesarios para el desarrollo de los microorganismos, además, está envuelta en un ambiente en ausencia o cerca de la ausencia de agua libre (que se pueda ver con la vista), asegurándonos que el sustrato posea la suficiente humedad para que pueda soportar el crecimiento y el metabolismo de los microorganismos. Por otro lado puede contener agua en algunos espacios, pero en su mayoría está ocupado por aire [21]. La

mayor parte de los sustratos son productos procedentes de agricultura, residuos forestales o procesamiento de alimentos.

Existen varios aspectos importantes que debemos tomar en cuenta al momento de realizar con éxito cualquier bioproceso de FES. Entre estos se incluyen la selección del sustrato y el microorganismo con el que se va a operar, además de mantener los parámetros óptimos para proceso y la purificación del producto final. Teóricamente los hongos y la levadura han sido propuestos como ideales para su desarrollo en las FES, principalmente por la cantidad de agua que se maneja en dichas fermentaciones, pues se sabe que la humedad es uno de los principales agentes que se deben de tomar en cuenta, siendo los niveles que se reportan en la literatura entre 40 y 60 % de humedad del sustrato [21].

En [8] se desarrolló un enfoque general para la comparación de productividad en FES y FS, explicando la razón por la cual existe una mayor producción en la FES, mayor biomasa, alta producción de enzimas y menor degradación de las proteínas. En este trabajo se menciona la ventaja de proveer una barrera de protección en contra de los agentes ambientales que le rodean, así como también la prevención de contaminación por organismos que pudiesen estar alrededor del desarrollo del proceso en cuestión. Entre las desventajas que se encuentran son: la gran dificultad de controlar las variables para alcanzar un óptimo desempeño del proceso, como lo son la temperatura, el oxígeno y la humedad. Siendo el control de estas variables uno de los mayores obstáculos con los que el proceso se enfrenta para obtener resultados deseables, ya que, el proceso por sí mismo está cambiando y apartándose de su medio óptimo de desarrollo.

Como se explicó anteriormente no todas son ventajas sobre las otras técnicas de cultivo de microorganismo, las FES ofrecen grandes retos que merecen nuestra atención, y éstos son principalmente: el escalamiento de los reactores, la purificación del producto terminado y la estimación de la biomasa. El escalamiento en FES ha sido un factor limitante desde hace mucho tiempo, pero recientemente con el advenimiento de la ingeniería bioquímica y un gran número de experimentos con biorreactores, se han podido diseñar mejores técnicas que permitan superar todos estos retos.

Otro aspecto importante es la separación de la biomasa, problema esencial para los estudios de parámetros cinéticos de crecimiento, los cuales son usados para realizar un modelado que se ajuste a las condiciones en las que se lleva a cabo la reacción. Algunos métodos indirectos desarrollados son: la estimación de la glucosamina, del ergosterol, cambios de peso en seco y la evolución de CO_2 , pero aún no se ha logrado resolver el problema. Recientemente el procesamiento digital de imágenes ha sido usado como una herramienta para medir biomasa en la FES, como se muestra en [25]. Las imágenes fueron adquiridas por un microscopio estereoscópico y una cámara digital y procesadas en el programa KS400. Este procedimiento puede ser una buena alternativa para no depender exclusivamente de la exactitud del

modelos.

Entre los grandes retos de los reactores, existen algunos que están manteniendolos en un cuello de botella, por ejemplo, al realizar el escalamiento se puede dar una inadecuada transferencia tanto de masa como de calor dentro de la cama de sustrato, el calor debido a las actividades metabólicas de la generación de microorganismos (el cual es deseable en el proceso) es a menudo fatal para procesos biotecnológicos, porque una gran parte de las enzimas producidas durante la fermentación pueden ser desnaturalizadas por el calor al final del proceso [5]. Como resultado de un gran porcentaje de humedad en el sustrato, se presenta una baja porosidad, que a su vez impide la penetración de oxígeno. Mientras que para el caso contrario, un bajo contenido de humedad da lugar a poca accesibilidad de los nutrientes, lo que resulta en un obstáculo para el crecimiento microbiano [20]. La actividad del agua del sustrato tiene una influencia determinante en la actividad microbiana, y ha sido ampliamente estudiada por muchos científicos, así como también el tipo de microorganismos que pueden desarrollarse para determinados rangos de. Otro factor relevante de este parámetro, es la relación íntima con los parámetros de transferencia de masa y los solutos que cruzan las células microbianas. El control de este parámetro podría ser utilizado para modificar el metabolismo o producción excreción de un microorganismo [12].

1.2. Modelos de Fermentaciones en Estado Sólido

El modelado matemático, como en todas las áreas de aplicación, es de crucial importancia debido a que describe el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo. Un buen modelado del reactor permitirá entender y optimizar el proceso que se está llevando a cabo. En los modelos de biorreactores generalmente se trabaja con dos submodelos, ambos nos dan el comportamiento total del biorreactor. Un submodelo es el de transporte, que consiste en la descripción de la transferencia de masa y calor dentro de las fases que se encuentran en el biorreactor, y otro submodelo, describe la tasa de crecimiento de los microorganismos que se desean modelar, dependiendo de las variables del primer submodelo. El modelo para los microorganismos, en particular suele tener muchas variantes, por lo que para el crecimiento de microorganismos se han propuestos muchos modelos tanto empíricos como mecánicos, éstos deben tomarse en cuenta con mucho cuidado para describir de forma más realista la relación entre los dos submodelos mencionados anteriormente.

1.2.1. Modelado de cinéticas de crecimiento empírico

La mayoría de los submodelos de cinética de crecimiento que se emplean en biorreactores son empíricos, debido a que su naturaleza heterogénea hace muy complejo el análisis de los fenómenos de transporte dentro del reactor [5]. Por ejemplo, gradientes muy grandes pueden

esperarse en la cama de sustrato para las variables como temperatura, humedad y oxígeno dificultando un análisis matemático del problema [16]. Otra de las razones por las que los modelos empíricos son más frecuentemente utilizados, es que las ecuaciones que los describen detalladamente son modeladas en ecuaciones diferenciales parciales, lo cual, nos exige mucho más poder de cómputo para obtener una solución, comparado con las ya bien conocidas ecuaciones diferenciales ordinarias en las que se basan los modelos empíricos.

A lo largo del desarrollo de la teoría de las FES se han reportado diferentes perfiles cinéticos de crecimiento, entre los que se incluyen lineales, exponenciales, logísticos y de aceleramiento-rápido desaceleramiento-lento [7]. Éstos son ajustados por medio de una regresión no lineal al perfil que cada diseñador crea más conveniente para su modelo. El último perfil que ha sido desarrollado es el aceleramiento-rápido desaceleramiento-lento, el cual es llamado también de dos fases. En este modelo cinético la fase exponencial es seguida de una fase de desaceleración, las cuales, podemos describir cualitativamente haciéndonos la idea que son dos perfiles totalmente distintos (uno crece y otro decae) que son conmutados en un tiempo dado (el cual el diseñador debe ajustar en función de los resultados experimentales) para pasar de la fase de crecimiento exponencial a la de decrecimiento. Un inconveniente importante para la aplicación de este modelo es que el periodo exponencial es típicamente corto y tiene una baja concentración de microorganismos, dando como resultado que haya pocos puntos experimentales y un error relativamente grande, por lo tanto adoptar este perfil cinético de crecimiento no es conveniente en el modelado de FES. El modelo matemático más utilizado actualmente para FES son los modelos logísticos, esto en base a su simplicidad matemática, porque una ecuación logística puede, en una sola ecuación, dar una aproximación adecuada toda la curva de crecimiento, incluyendo la fase de adaptación y la de cese de crecimiento en la última etapa de la fermentación. En [7] se presentan la ecuación general para los modelos logísticos.

En [15] se proponen algunas razones a las que se atribuye la desaceleración del crecimiento microbiano, mencionando que se debe al crecimiento de muchos tipos de colonias de microorganismos. Por otro lado también se propone el desarrollo de agentes inhibidores, las limitaciones del oxígeno, la disponibilidad de los nutrientes en el medio, entre otros [7].

Otro aspecto importante a considerar en el modelado, es la caracterización de los parámetros del sistema, que en muchos casos resulta prácticamente imposible obtener los valores con precisión del modelo. Por ejemplo para determinar los parámetros de la cinética de crecimiento midiendo el contenido de un componente microbiano dentro de la composta puede ser complicado por dos razones. En primer lugar, si el componente de la biomasa está también presente en el sustrato y es consumido durante la fermentación, es imposible determinar independientemente las contribuciones de crecimiento y consumo al observar el cambio en la concentración de este componente (microorganismo) dentro de la masa de fermentación. Es por esta razón en algunos estudios la glucosamina se usa como indicador de crecimiento,

gracias a que está presente en las paredes de los hongos y no es encontrada en el sustrato [7]. Pero como es de esperarse no es fácil obtener los parámetros de crecimiento con base en la glucosamina ya que dentro de la célula también está cambiando, por lo cual en [19] se propuso una ecuación empírica del contenido de glucosamina de la biomasa en función del tiempo, siendo una posible solución para el problema de la estimación de microorganismos.

1.2.2. Aplicaciones

Anteriormente se mencionó que las FES se han utilizado hace siglos para hacer productos comestibles artesanales, solo por mencionar algunos podemos hablar de tempe, el cual implica el cultivo del hongo *Rhizopus oligosporus* en soja cocida. El hongo mencionado es puesto en un pastel compacto de soja hasta que se lleve a cabo el proceso de fermentación. Después el producto resultante es frito y consumido como sustituto de la carne. Otro producto que podemos obtener de la soja es el llamado *Koji* que es un paso intermedio para obtener la salsa de soja, el cual se produce con el cultivo del hongo *Aspergillus oryzae* en granos de soja cocinada, donde el primer paso es una FES a lo largo de 2 a 3 días, en los cuales el hongo y no solo el micelio cubre la soja para secretar una mezcla de enzimas sobre la soya fermentada. Después esta mezcla es puesta en salmuera, donde después de varios meses las enzimas lentamente degradan los granos de soya, convirtiéndolos en una salsa de color negra.

En las últimas tres décadas han surgido nuevas aplicaciones para FES como lo son: desarrollo de bioprocesos, tales como la biorremediación y biodegradación de compuestos peligrosos [2], la biotransformación de residuos de cultivos para el enriquecimiento nutricional y productos con valor agregado, tales como: metabolitos secundarios biológicamente activos, incluidos los antibióticos, alcaloides, bioplaguicidas, biosurfactantes, etc. Anteriormente estos habían sido señalados como sistema de “baja tecnología”, pero ahora se muestran como una gran promesa para dar valor agregado “bajo-costos-volumen-alto” en productos biofarmacéuticos. También han sido producidas enzimas como: fitasa, amilasa, inulinasa, celulasa, proteasa, alfa-galactosidasa, lipasa, tanasa, lacasa, quitinasa, l-glutaminasa, lipasa, ácidos orgánicos, tales como, ácido láctico, el ácido cítrico y el bioetanol, entre muchos otros [23, 10].

En algunos reactores pequeños de laboratorio, se ha obtenido mayor productividad en la fermentación, mayor concentración de producto final, productos de mayor estabilidad, menor catabolismo de represión, cultivo de microorganismos especializados para los sustratos insolubles en agua o el cultivo en común de diversos hongos y una menor demanda de esterilidad debido a la baja actividad del agua utilizada en la FES [27].

La aparición de biorrefinerías ha dado una mayor atención a las FES, ya que la biomasa

es la única fuente previsible de energía para satisfacer las necesidades futuras [22, 24]. En conclusión, en los últimos años se han experimentado transformaciones significativas en la tecnología de las FES, debido a los continuos esfuerzos en las áreas de ingeniería bioquímica, tales como el modelado y diseños de biorreactores para su comercialización o incluso para los procesos que se creía en un principio factibles sólo para FS.

1.3. Descripción del Problema

1.3.1. Control de Reactores en la Industria

Hoy en día en los reactores utilizados en la industria, la mezcla de los elementos que componen la biomasa es muy heterogénea, lo cual, nos da como resultado que en lugares aislados se produzcan cultivos que generan calor y este no es transmitido a las partes cercanas del reactor. Lo anterior da como resultado diferencias de temperaturas entre las regiones de hasta 20 grados centígrados trayendo consigo una baja producción, el crecimiento de contaminantes o incluso inhibición de la fermentación.

En algunos casos de FES, el control dentro de la cama de sustrato se realiza de manera manual, sin embargo, en reactores a gran escala se vuelve cada vez más complicado hacer un control eficiente, ya que las variables deben ser monitoreadas y controladas simultáneamente. Ésta es la razón por la cual no se puede iniciar la reacción en un reactor con simples ajustes hechos por un operador. Además, la manipulación manual de las variables afecta impredeciblemente el comportamiento de las otras, mientras la fermentación está corriendo [11].

Como se discutió con anterioridad, los reactores de FES no pueden ser operados sin un control eficiente de la temperatura de la biomasa. Es obvio que el primer paso es seleccionar un sensor de temperatura que se ajuste a las características del reactor, el siguiente paso es elegir cómo la variable va a ser controlada para obtener el punto de referencia o las trayectorias que se van a seguir. Es este punto donde no se ha conseguido hasta ahora un estándar que de una pauta a seguir para implementar un control en este tipo de reactores, entre las técnicas utilizadas podemos mencionar las siguientes:

- **Conductivo:** Esta técnica consiste en tener superficies frías en las paredes del reactor o incluso tener platos internos que logren enfriar el reactor.
- **Enfriamiento convectivo:** Esta técnica hace uso de aire a una temperatura menor que fluye a través de la biomasa, obligando a enfriar el reactor y así controlar la temperatura del reactor.
- **Evaporativo:** Es muy parecido al enfriamiento convectivo con la diferencia que el aire suministrado al reactor es aire parcialmente seco.

1.4. Objetivos

El empleo de reactores de fermentación en estado sólido es cada día más común y como se vió en este capítulo, las aplicaciones reportadas siguen en aumento, por lo cual, este trabajo está enfocado al análisis del modelo matemático del reactor de fermentación a través de simulación, desarrollado en [26] y modificado en [9]. Se lleva a cabo la simplificación del modelo matemático prescindiendo de algunas variables que no describen el comportamiento real de la planta, además de no tener ninguna relación con las variables en que estamos interesados (microorganismos).

Se proponen tres técnicas de control no lineales robustos para el seguimiento de trayectorias basado en el modelo reducido, empleando tres técnicas de control:

- 1) Linealización entrada-salida
- 2) Modos deslizantes.
- 3) Algoritmo Super Twisting.

Además se analiza la estabilidad de los controladores en lazo cerrado incluyendo la dinámica cero en base al modelo reducido.

1.5. Organización de la Tesis

En el capítulo 2 se muestra el modelo matemático del reactor y las suposiciones realizadas para realizar este modelo. Se presenta además el análisis que se llevó a cabo para eliminar algunas variables del modelo, obteniendo así un modelo reducido en variables de estado en el que se desarrollaron las técnicas de control y el análisis de estabilidad de la dinámica cero.

En el capítulo 3 se describen conceptos básicos de control describiendo las técnicas que serán utilizadas en la tesis.

En el capítulo 4 se presenta el diseño de las tres técnicas de control, junto con los resultados obtenidos en su aplicación al modelo matemático del reactor. Los criterios a evaluar fueron: el comportamiento del error de seguimiento y la señal de control que se obtuvo con cada una de los esquemas. Además se muestra la estabilidad de los controladores así como también el análisis de la dinámica cero para demostrar la estabilidad de toda la planta.

En el capítulo 5 finalmente se dan las conclusiones del trabajo y la planeación del trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelo Matemático del Reactor

El modelado matemático de procesos que involucran elementos biológicos y químicos siempre conlleva un alto grado de dificultad, esto se debe a que prácticamente es imposible hacer una descripción exacta de los fenómenos biológicos, porque pocas veces se tiene la certeza de cuántos y cuáles son los microorganismos con los que cuentan en este tipo de reacciones.

Otro aspecto complicado es el planteamiento de la transferencia de calor dentro de la cama sustrato (composta). Debido a que este tipo de reacciones cuenta con dos formas de conducción de calor (conducción y convección térmica) y además, los gradientes de temperatura con los que opera el reactor son muy altos, por estas razones se trabaja con base en un modelo de ecuaciones logísticas frecuentemente utilizado en el área de reactores y en base a éste hacer las adecuaciones necesarias para particularizarlo al caso de estudio de nuestro interés. Para nuestro caso de estudio se tomó el trabajo realizado en [26] y posteriormente modificado y aumentado en [9].

2.1. Introducción

El reactor en el que se realizó este proyecto se encuentra ubicado en el laboratorio del Cinvestav Unidad Guadalajara, el que está formado por unas placas de acrílico que están colocadas para formar un recipiente rectangular (ver Fig. 2.1).

La composta con la que se trabaja está compuesta principalmente de una combinación de paja de trigo, de harinola y de pollinaza. El reactor se encuentra instrumentado de la siguiente manera:

- Cuenta con una chaqueta de aislamiento para no permitir la transferencia de calor del reactor hacia el medio ambiente.
- Ductos de liberación de gases.

- Diez sensores de temperatura (RTDs) distribuidos en el volumen de la cama del reactor (la composta contenida en el reactor se divide en 9 zonas y se ubica cada sensor en el centro de cada una de ellas, el décimo sensor se ubica en el centro del volumen total de la masa de la composta), los valores de temperatura son un promedio de todos los sensores para obtener una trayectoria de la temperatura promedio del lote.
- Cuenta con un sistema de control de entrada de flujo de aire, éstas entradas de flujo están distribuidas uniformemente en 3 diferentes niveles de la altura total de la composta, con el objetivo de mantener la temperatura y distribución de aire homogéneo en todo el volumen del reactor.
- Sensores de temperatura, humedad y velocidad localizados a la entrada y salida del flujo de aire.

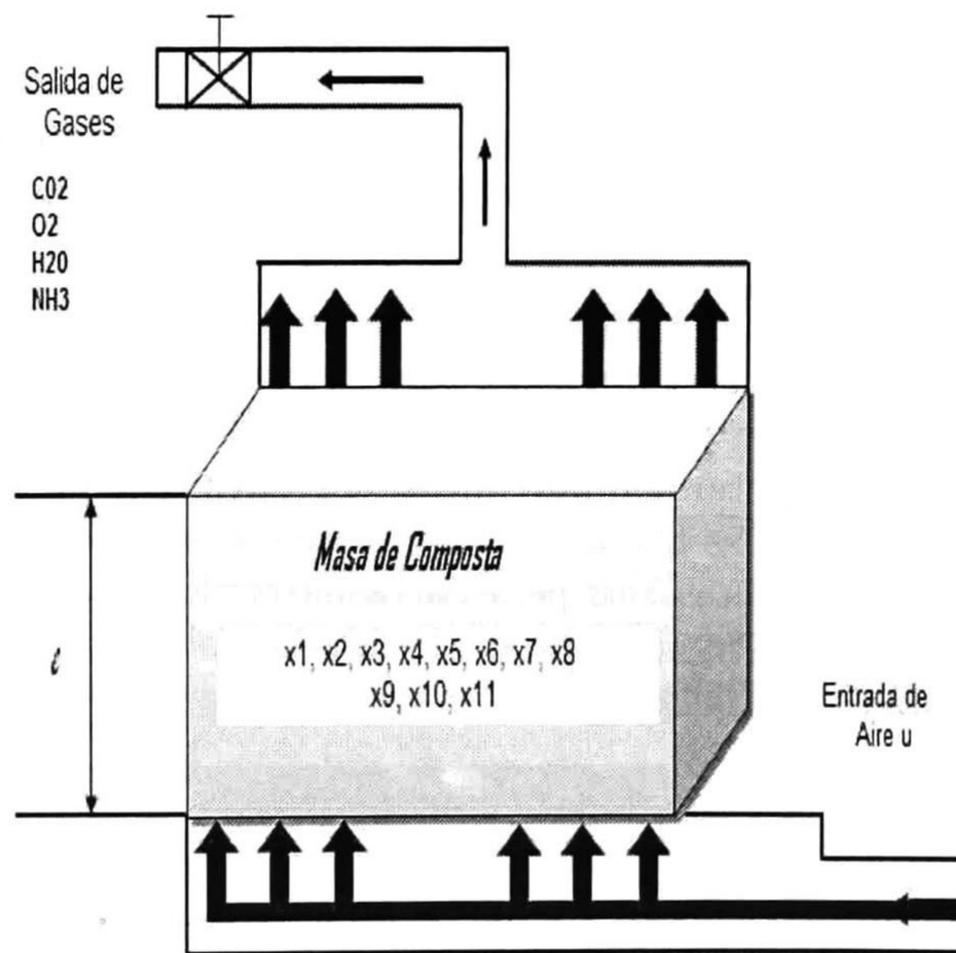
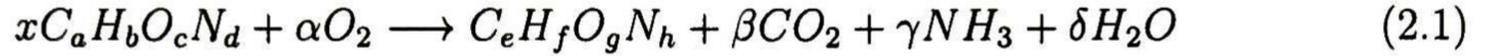


Figura 2.1: Diagrama del reactor experimental.

2.1.1. Estequiometría

Las relaciones estequiométricas entre las variables fundamentales de la composta, incluyendo el crecimiento microbiano y la concentración de sustrato han sido estudiadas por autores como [26], de acuerdo con este trabajo, se escribe la ecuación de estado correspondiente

al sustrato de la siguiente manera:



donde

$C_aH_bO_cN_d$ = composición de los grupos de sustrato.

$C_eH_fO_gN_h$ = composición de los grupos de microorganismo.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, x$ = coeficientes estequiométricos.

Estas ecuaciones fueron planteadas en unidades molares, sin embargo, como no es posible definir el peso molecular para una masa colectiva de sustrato y microorganismos, es más conveniente reescribir la ecuación en unidades de masa:

$$1 [Kg. - Sustrato] + \left(Y_{\frac{O}{S}} - Y_{\frac{O}{X}} \right) [Kg - O_2] \longrightarrow Y [Kg. microorganismos] \quad (2.2)$$

$$+ (Y_{\frac{C}{S}}) [Kg. - CO_2] + (Y_{\frac{N}{S}} - Y_{\frac{N}{X}}) [Kg. - NH_3]$$

$$+ (Y_{\frac{W}{X}} - Y_{\frac{W}{S}}) [Kg. - H_2O].$$

donde

Y = masa de los microorganismos producidos por oxidación por unidad de masa de sustrato.

$Y_{\frac{O}{S}}$ = masa de oxígeno producida por unidad de masa de sustrato.

$Y_{\frac{C}{S}}$ = masa de dióxido de carbono producida por unidad de masa de sustrato.

$Y_{\frac{W}{S}}$ = masa de agua producida por unidad de masa de sustrato.

$Y_{\frac{N}{S}}$ = masa de amoníaco producida por unidad de masa de sustrato.

$Y_{\frac{O}{X}}$ = masa de oxígeno consumida por síntesis de microorganismos.

$Y_{\frac{C}{X}}$ = masa de dióxido de carbono consumida por síntesis de microorganismos.

$Y_{\frac{W}{X}}$ = masa de agua consumida por síntesis de microorganismos.

$Y_{\frac{N}{X}}$ = masa de amoníaco consumida por síntesis de microorganismos.

2.1.2. Dinámica de los Microorganismos

El modelado de la tasa de crecimiento de los microorganismos se hace suponiendo que existen tres clases de ellos que coexisten sin competencia. Por lo general, se proponen cinéticas de crecimiento empíricas, que consisten en una tasa de crecimiento y una tasa de mortandad. Luego usando las mismas se pueden obtener las tasas de cambio para las otras variables del sistema: descomposición de sustrato, consumo de oxígeno y producción de agua.

La tasa de crecimiento neto es expresada por la ecuación algebraica de primer orden:

$$R_X = (\mu - \lambda)X \quad (2.3)$$

donde:

R_X = tasa neta de producción de microorganismos ($\frac{Kg}{m^3 hr}$).

X = concentración de microorganismos ($\frac{Kg}{m^3}$).

μ = velocidad específica de crecimiento microbiano (hr^{-1}).

λ = velocidad específica de muerte microbiana (hr^{-1}).

La dependencia de μ al sustrato y al oxígeno sigue una relación tipo Michaelis-Menten [26]. Con esta suposición podemos construir una ecuación para la velocidad de crecimiento (μ) para cada microorganismo (se manejarán los subíndices $i=1$: para hongos actinomicetos, $i=2$: para termófilos e $i=3$: para referirnos a inhibidores):

$$\mu_i = \mu_{Max_i} T \frac{S}{K_{S_i} + S} \frac{O}{K_{O_i} + O} \quad (2.4)$$

donde

μ_{Max_i} = máxima tasa de crecimiento microbiano (hr^{-1}).

S = concentración de sustrato ($\frac{Kg}{m^3}$).

K_S = constante de saturación para concentración de sustrato ($\frac{Kg}{m^3}$).

K_O = constante de saturación para concentración de oxígeno ($\frac{Kg}{m^3}$).

$$\mu_{Max_i} = \frac{a_{1i} \exp\left\{\frac{-b_{1i}}{T+273}\right\}}{1 + \left(\frac{a_{i1}}{a_{i2}}\right) \exp\left\{\frac{-(b_{1i}+b_{2i})}{T+273}\right\}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

donde

T = temperatura de la composta en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$).

a_{1i}, a_{2i} = constantes (hr^{-1}).

b_{1i}, b_{2i} = constantes ($^{\circ}\text{K}$).

La ecuación de la tasa específica de mortandad se propone como tipo Arrhenius, que solo está en función de la temperatura, como se muestra a continuación:

$$\lambda_i = a_{di} \exp\{-b_{di}(T + 273)\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

donde

a_{di} = constante (hr^{-1}).

b_{di} = constante ($^{\circ}\text{K}$).

Considerando que el consumo de sustrato ocurre con el crecimiento microbiano y que la muerte de éstos se incorpora al sustrato de nuevo [26], la tasa de variación del sustrato viene dada por:

$$R_S = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{Y} \mu_i + \lambda_i\right) X_i \quad (2.7)$$

El agua es producida por el oxígeno consumido con el cambio en la cantidad de material orgánico (sustrato y microorganismos). Como se observa en el balance estequiométrico, la tasa de cambio de producción de agua (R_W) y la tasa cambio de consumo de oxígeno (R_O) (2.8,2.9) están dadas por la suma de contribuciones de la tasa de cambio de consumo de sustrato y las tasas de crecimiento microbiano como se muestra a continuación [26]:

$$R_W = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{Y_W}{Y} - Y_{\frac{W}{X}}\right) \mu_i X_i \quad (2.8)$$

$$R_O = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{Y_O}{Y} - Y_{\frac{O}{X}}\right) \mu_i X_i \quad (2.9)$$

La velocidad de generación de calor R_H ($\text{KJ} \frac{\text{m}^3}{\text{hr}}$) es expresada por la suma de los cambio de entalpía para la reacción de crecimiento de microorganismos y para la reacción exotérmica de consumo de sustrato [26]:

$$R_H = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\Delta h_{s_i}}{Y} - \Delta h_{x_i}\right) \mu_i X_i \quad (2.10)$$

donde

Δh_{s_i} = cambio de entalpía para la reacción de cambio de sustrato.

Δh_{x_i} = cambio de entalpía para la reacción de crecimiento bacteriano.

2.1.3. Suposiciones del Modelo

Para el modelado del reactor se consideran las siguientes suposiciones [26]:

- Las fases sólida, líquida y gaseosa coexisten en una parte representativa de volumen, los cambios de fase (evaporación y condensación) y las reacciones microbianas ocurren de manera uniforme en todo el reactor.
- El cambio temporal en la altura de la masa de la composta es proporcional a su peso y sigue el modelo visco-elástico de Maxwell.
- La concentración inicial para cada uno de los rubros de biomasa considerados en el modelo es igual y no existe competencia entre ellos.
- Los parámetros del modelo siguen siendo constantes a través del cultivo. La temperatura y la actividad del agua no afecta a los parámetros cinéticos.
- El cambio de la densidad del sistema, depende únicamente del cambio de las fracciones sólida y líquida en la masa de composta respecto al tiempo.

2.2. Modelado del Reactor

El modelo desarrollado por González y De la Torre [9] es un sistema altamente no lineal, en su diseño fue considerado un elemento diferencial de volumen de control. En el desarrollo se aplicó el principio de conservación de materia y energía y aplicando la derivada sustancial se simplificaron las ecuaciones. A continuación se describen las ecuaciones del modelo:

$$\frac{dL}{dt} = -L^2 \frac{g\rho}{\eta} \quad (2.11)$$

$$\frac{dX_a}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} X_a + R_{X_a} \quad (2.12)$$

$$\frac{dX_t}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} X_a + R_{X_a} \quad (2.13)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} X_i + R_{X_i} \quad (2.14)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} S + R_S \quad (2.15)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \theta_s + \frac{1}{\rho_s} (R_{X_a} + R_{X_t} + R_{X_i} + R_S) \quad (2.16)$$

$$\frac{d\theta_l}{dt} = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \theta_l - \frac{\rho_a v}{\rho_l V} (H^* - H_o) + \frac{1}{\rho_l} R_W \quad (2.17)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_P} \left\{ -\frac{UL_p(T - T_o)}{A_t} + R_H - \frac{v\rho_a}{V} (i^* - i_o) \right\} \quad (2.18)$$

$$\frac{dO}{dt} = \nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2 + \nu_3 \mu_3 + \frac{1}{M} (A^* - A) \quad (2.19)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{M - \theta_s - \theta_l} (-2A + A_{ent}) \quad (2.20)$$

donde

L = altura de la masa de composta (m).

X_a = concentración de microorganismos actinomicetos ($\frac{kg}{m^3}$).

X_t = concentración de microorganismos termófilos ($\frac{kg}{m^3}$).

X_i = concentración de microorganismos inhibidores ($\frac{kg}{m^3}$).

S = concentración de sustrato ($\frac{kg}{m^3}$).

θ_s = contenido sólido volumétrico de la masa de composta.

θ_l = contenido húmedo volumétrico de la masa de composta.

O = concentración de oxígeno en el reactor.

T = temperatura de la masa de composta ($^{\circ}C$).

A = humedad del aire.

Las ecuaciones auxiliares del modelo son las siguientes [14]:

$$H^* = \frac{M_W P_W}{M_{DA} (P - P_W)} \quad (2.21)$$

$$P_w = 10^{810765 - \frac{1,750,286}{T+235}} \quad (2.22)$$

$$C_p = 1.29 + 2.9W \quad (2.23)$$

$$i^* = C_H T + \lambda_o H^* \quad (2.24)$$

$$i_e = \frac{\frac{(1-T_r)}{T_r} v_s i^* + u i_f}{v_e} \quad (2.25)$$

$$i_f = C_H T + \lambda_o H_f \quad (2.26)$$

$$C_H = C_A + C_w H \quad (2.27)$$

$$H_e = \frac{\frac{(1-T_r)}{T_r} v_s H + u H_f}{v_e} \quad (2.28)$$

$$v_e = \left(\frac{(1-T_r)}{T_r} \right) v_s + u \quad (2.29)$$

$$\rho = \rho_s \theta_s + \rho_l \theta_l \quad (2.30)$$

donde

H^* = humedad de saturación.

P_w = presión de vapor de agua (mmHg).

C_p = calor específico de la composta ($\frac{KJ}{KgK}$).

i^* = entalpía de equilibrio del aire húmedo ($\frac{KJ}{KgDA}$).

i_e = entalpía de aire a la entrada del reactor ($\frac{KJ}{KgDA}$).

i_f = entalpía del aire fresco ($\frac{KJ}{KgDA}$).

C_H = calor húmedo del aire ($\frac{KJ}{KgDA}$).

H_e = humedad del aire a la entrada del reactor ($\frac{KJ}{KgDA}$).

u_e = flujo volumétrico de la mezcla gaseosa de entrada al reactor ($\frac{m^3}{hr}$).

ρ = densidad de la composta ($\frac{Kg}{m^3}$).

La variable de control de este modelo es u que aparece en la ecuación de flujo volumétrico de la mezcla de entrada.

2.2.1. Modelo en Ecuaciones de Estado

Para hacer el manejo más fácil de las ecuaciones el modelo anteriormente descrito se transforma a su equivalente en variables de estado el cual se presenta a continuación ¹ :

$$\dot{x}_1 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1^2 \quad (2.31)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1 x_2 + [\mu_2(x_5, x_8, x_9) - \lambda_2(x_9)] x_2 \quad (2.32)$$

$$\mu_2(x_5, x_8, x_9) = \frac{a_{12} \exp\left(\frac{-b_{12}}{x_9 + 273}\right)}{1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \exp\left(-\frac{b_{12} + b_{2i}}{x_9 + 273}\right)} \frac{x_5}{K_s + x_5} \frac{x_8}{K_o + x_8}$$

$$\lambda_2(x_9) = a_{d2} \exp\{-b_{di}(x_9 + 273)\}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1 x_2 + [\mu_3(x_5, x_8, x_9) - \lambda_3(x_9)] x_3 \quad (2.33)$$

$$\mu_3(x_5, x_8, x_9) = \frac{a_{13} \exp\left(\frac{-b_{13}}{x_9 + 273}\right)}{1 + \frac{a_{13}}{a_{23}} \exp\left(-\frac{b_{13} + b_{23}}{x_9 + 273}\right)} \frac{x_5}{K_s + x_5} \frac{x_8}{K_o + x_8}$$

$$\lambda_3(x_9) = a_{d3} \exp\{-b_{di}(x_9 + 273)\}$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1 x_4 + [\mu_4(x_5, x_8, x_9) - \lambda_4(x_9)] x_4 \quad (2.34)$$

$$\mu_4(x_5, x_8, x_9) = \frac{a_{14} \exp\left(\frac{-b_{14}}{x_9 + 273}\right)}{1 + \frac{a_{14}}{a_{24}} \exp\left(-\frac{b_{14} + b_{24}}{x_9 + 273}\right)} \frac{x_5}{K_s + x_5} \frac{x_8}{K_o + x_8}$$

$$\lambda_4(x_9) = a_{d4} \exp\{-b_{di}(x_9 + 273)\}$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1 x_5 + \sum_{i=2}^4 \left(-\frac{1}{\gamma_i} \mu_i(x_5, x_8, x_9) + \lambda_i(x_9)\right) x_i \quad (2.35)$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1 x_6 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=2}^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma_i}\right) \mu_i(x_5, x_8, x_9) x_i \quad (2.36)$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{Ex_1 + F} G x_1 x_7 + \frac{1}{\beta} \sum_{i=2}^4 \delta_i \mu_i(x_5, x_8, x_9) x_i \quad (2.37)$$

¹ Para constantes del modelo ver apéndice

$$\dot{x}_8 = \sum_{i=2}^4 \vartheta_i \mu_i(x_5, x_8, x_9) x_i + \frac{1}{M} (x_8^* - x_8) u \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_9 = & \frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{H(\alpha x_6 + \beta x_7)^2 + \alpha x_6} \theta(x_9 - x_{10}^*) + \sum_{i=2}^4 \zeta_i \mu_i(x_5, x_8, x_9) x_i + \\ & \frac{\alpha x_6 + \beta x_7}{H(\alpha x_6 + \beta x_7)^2 + \alpha x_6} \eta [(1 + J x_{10} (2x_9 - x_{10}^*) K (L x_{10F} + x_{10}^* - x_{10}))] u \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\dot{x}_{10} = \frac{1}{M} (L x_{10F} - 3x_{10} - x_{10}^*) \quad (2.40)$$

$$x_{10}^* = \varepsilon \frac{\exp(A - \frac{B}{C+x_9})}{D + \exp(A - \frac{B}{C+x_9})}$$

$$\dot{x}_{11} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{y_{o/x}} + \frac{mco * x_5}{k_{s1} + k_{s2} + s_3} (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{M} (x_{11}^* - x_{11}) u \quad (2.41)$$

donde

x_1 = altura de la composta (m).

x_2 = concentración de microorganismos actinomicetos ($\frac{kg}{m^3}$).

x_3 = concentración de microorganismos termófilos ($\frac{kg}{m^3}$).

x_4 = concentración de microorganismos inhibidores ($\frac{kg}{m^3}$).

x_5 = concentración de sustrato ($\frac{kg}{m^3}$).

x_6 = contenido sólido volumétrico de la masa de la composta.

x_7 = contenido húmedo volumétrico de la masa de la composta.

x_8 = concentración de oxígeno en el reactor.

x_9 = temperatura de la masa de la composta ($^{\circ}C$).

x_{10} = humedad del aire a la entrada del reactor.

x_{11} = concentración de dióxido de carbono en el reactor ver [4].²

2.3. Análisis Cualitativo Del Modelo a Través De Simulación

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos al realizar algunas simulaciones haciendo el seguimiento de trayectorias de temperatura, en las cuáles, se encontraron algunas inconsistencias del modelo.

² esta ecuación fue agregada recientemente

2.3.1. Análisis De CO_2

Aquí se muestra por medio de simulación las inconsistencias que presentó esta ecuación de estado. Esta fue agregada recientemente en [4], ya que no estaba en el primer sistema que se tomó de base [26], el principal objetivo de esta variable es tener una idea de cuánto bióxido de carbono se está produciendo dentro del reactor a causa del crecimiento microbiano, para tomarlo como indicador de la rapidez con que se está dando la reacción.

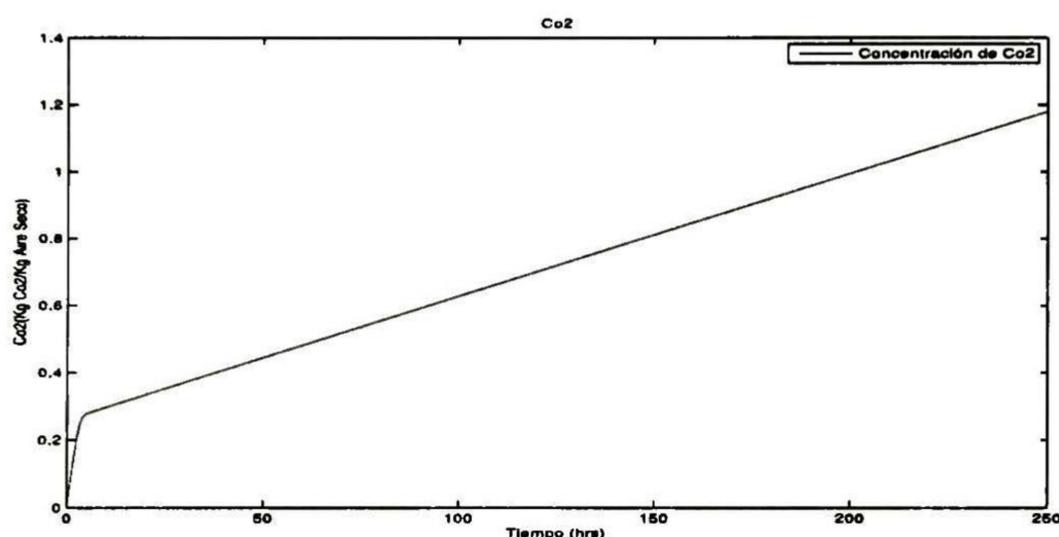


Figura 2.2: Comportamiento patógeno CO_2 ($u = 0$).

La inconsistencia encontrada en esta variable, se presenta al proponer la señal de control $u = 0$, de modo que físicamente se fuerza al reactor a no realizar reacción alguna (por falta de oxígeno), contrario a lo que presenta la variable del bióxido de carbono saliendo disparada en línea recta, como se muestra en la Fig. 2.2, indicando que la reacción se está llevando a cabo, dando incongruencia ya que la reacción no puede desarrollarse. Matemáticamente hablando, el error que se presenta se debe a que al momento de asignar $u = 0$ los elementos restantes de la variable son siempre positivos, por consiguiente, esto hace que la variable crezca indefinidamente.

2.3.2. Análisis de Humedad De La Composta

En algunas publicaciones mencionan la importancia de la cantidad de humedad que contiene la composta [18, 29], sin embargo, para los fines perseguidos en control de procesos, el tipo de modelado que se usa no es útil para realizar control. Esta ecuación de estado, como lo muestra la ec. (2.37), no contiene la variable explícita relacionada con la humedad (x_7), tampoco en ninguna otra ecuación de estado del sistema. Por lo tanto se puede decir que esta variable no tiene ninguna relación directa con la planta que estamos trabajando.

Como se puede apreciar en la Fig.2.3, el estado sigue incrementando indefinidamente conforme el tiempo transcurre, situación que físicamente está equivocada. Esto porque, al detenerse la reacción, la humedad debería alcanzar un valor estacionario igual a la humedad en la entrada del reactor. Matemáticamente esto es un comportamiento inestable que trae como consecuencia que el análisis de estabilidad del sistema también resulte inestable.

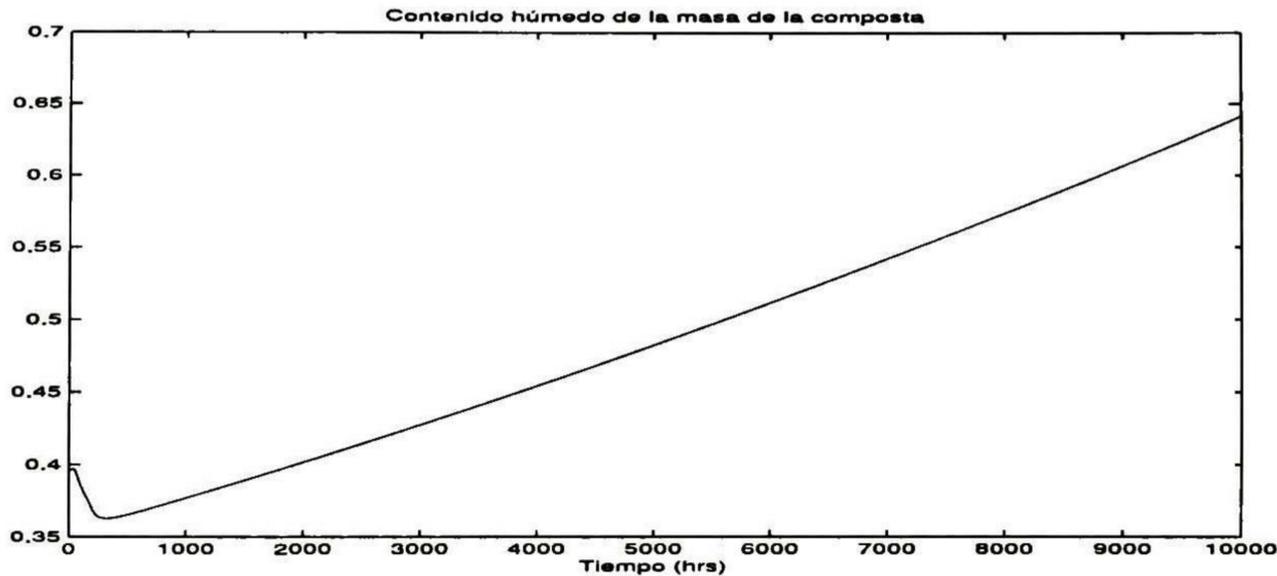


Figura 2.3: Comportamiento patógeno de humedad de la composta ($u = 0.7$).

2.3.3. Análisis de la Fracción Sólida en la Masa de la Composta

El problema que se presenta ahora con la variable x_6 ec. (2.36) es idéntico al de la variable x_7 . Aunque, con la diferencia de que el incremento de esta variable es menos pronunciado, por lo cual, se omiten los detalles, solo se muestra la gráfica para ver su comportamiento Fig. 2.4 y como en el caso anterior, al detenerse la reacción la fracción sólida debería alcanzar un valor constante.

2.3.4. Análisis de Altura de la Composta

La ecuación referente a la altura de la composta x_1 ec. (2.31) fue eliminada en el trabajo [9], puesto que la ecuación de estado no corresponde físicamente con el comportamiento del reactor, ya que en la Fig. 2.5 se observa que el estado va disminuyendo conforme aumenta el tiempo, siendo que al final de la reacción la altura debe permanecer en un valor estacionario al existir consumo de materia.

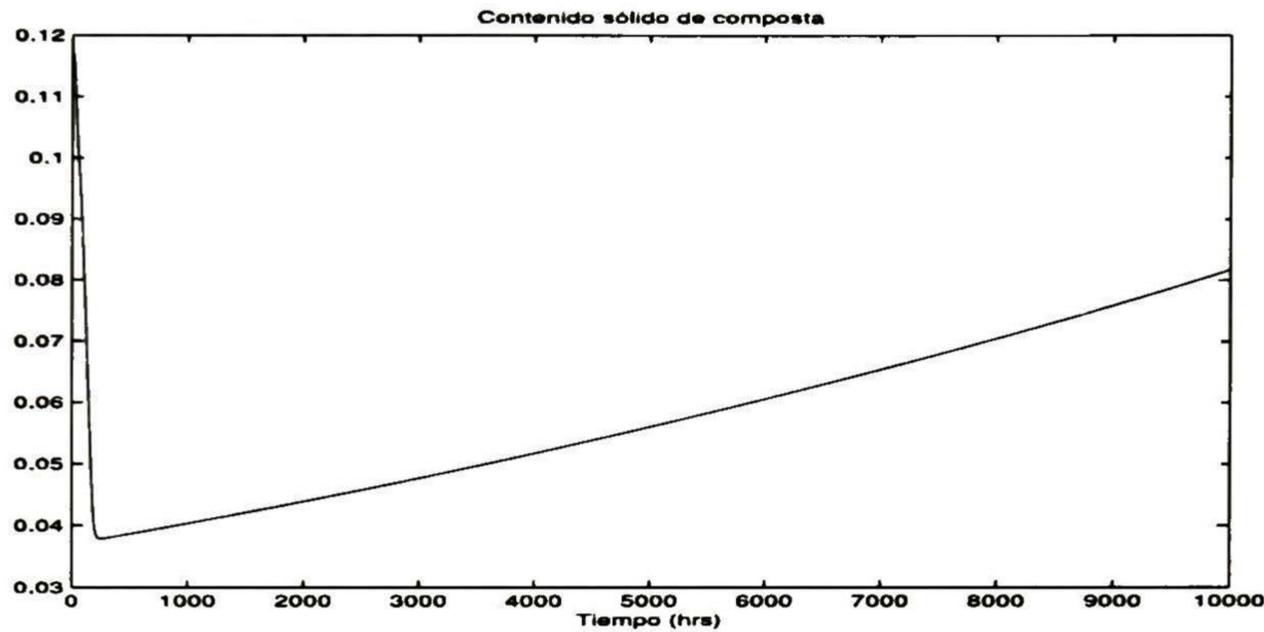


Figura 2.4: Comportamiento patógeno del contenido sólido de la composta ($u = 0.7$).

2.3.5. Análisis de Humedad del Aire

La ecuación de estado referente a x_{10} es eliminada ya que no proporciona información útil que modifique las condiciones del sistema, y con esto facilitar el análisis de estabilidad.

2.4. Modelo Simplificado

En esta sección se presenta el modelo reducido a seis ecuaciones de estado, llevando a las variables eliminadas a una constante (la condición inicial) quedando el sistema como sigue:^{3 4}

$$\dot{x}_1 = [\mu_1(x_4, x_5, x_6) - \lambda_1(x_6)]x_1 \quad (2.42)$$

$$\mu_1(x_4, x_5, x_6) = \frac{a_{11} \exp\left(\frac{-b_{11}}{x_6 + 273}\right)}{1 + \frac{a_{11}}{a_{21}} \exp\left(-\frac{b_{11} + b_{21}}{x_6 + 273}\right)} \frac{x_4}{K_s + x_4} \frac{x_5}{K_o + x_5}$$

$$\lambda_1(x_6) = a_1 \exp\{-b_{d1}(x_6 + 273)\}$$

$$\dot{x}_2 = [\mu_2(x_4, x_5, x_6) - \lambda_2(x_6)]x_2 \quad (2.43)$$

³ las literales que aparecen con * son las variables que se hicieron constantes

⁴ los primeros términos de las ecuaciones que involucran a x_1 se considern cero por ser x_1 una constante

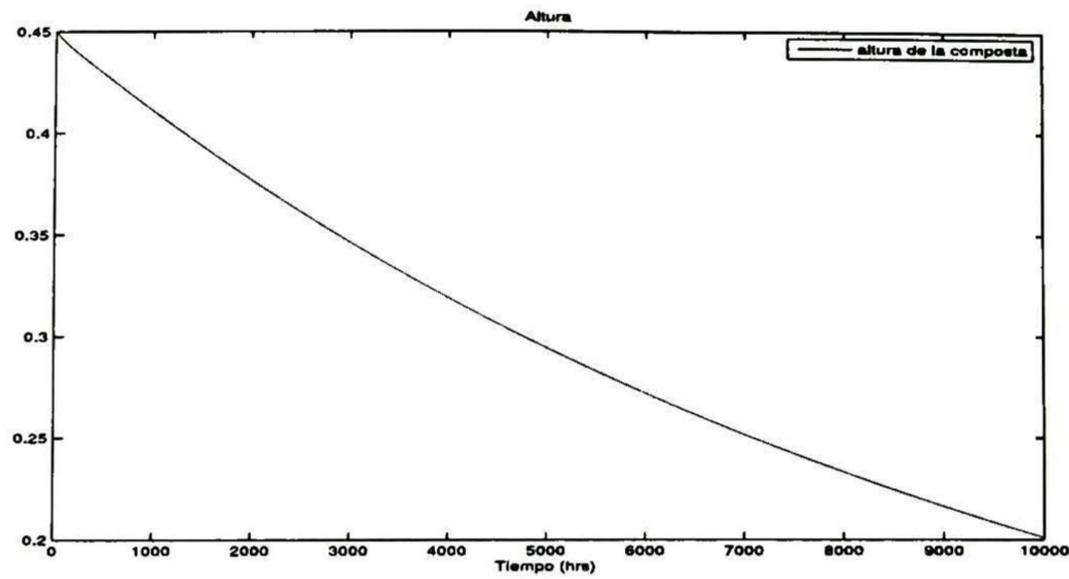


Figura 2.5: Comportamiento patógeno de la altura de la composta ($u = 0.7$).

$$\mu_2(x_4, x_5, x_6) = \frac{a_{12} \exp\left(\frac{-b_{12}}{x_6 + 273}\right)}{1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \exp\left(-\frac{b_{12} + b_{22}}{x_6 + 273}\right)} \frac{x_4}{K_s + x_4} \frac{x_5}{K_o + x_5}$$

$$\lambda_2(x_6) = a_{d2} \exp\{-b_{d2}(x_6 + 273)\}$$

$$\dot{x}_3 = [\mu_3(x_4, x_5, x_6) - \lambda_3(x_6)]x_3 \quad (2.44)$$

$$\mu_3(x_4, x_5, x_6) = \frac{a_{13} \exp\left(\frac{-b_{13}}{x_6+273}\right)}{1 + \frac{a_{13}}{a_{23}} \exp\left(-\frac{b_{13}+b_{23}}{x_6+273}\right)} \frac{x_4}{K_s + x_4} \frac{x_5}{K_o + x_5}$$

$$\lambda_3(x_6) = a_{d3} \exp\{-b_{d3}(x_6 + 273)\}$$

$$\dot{x}_4 = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{\gamma_i} \mu_i(x_4, x_5, x_6) + \lambda_i(x_6)\right) x_i \quad (2.45)$$

$$\dot{x}_5 = \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \mu_i(x_4, x_5, x_6) x_i + \frac{1}{M} (x_5^* - x_5) u \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & \frac{\alpha x_6^* + \beta x_7^*}{H(\alpha x_6^* + \beta x_7^*)^2 + \alpha x_6^*} \theta(x_6 - x_{10}^*) + \sum_{i=1}^3 \zeta_i \mu_i(x_4, x_5, x_6) x_i + \\ & \frac{\alpha x_6^* + \beta x_7^*}{H(\alpha x_6^* + \beta x_7^*)^2 + \alpha x_6^*} \eta [(1 + J x_{10}^* (2x_6 - x_{10}^*) K (L x_{10F} + x_{10}^* - x_{10}^*)) u] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Capítulo 3

Algoritmos De Control

3.1. Introducción

En este capítulo se analizan las tres técnicas de control que serán utilizadas para realizar el control del reactor. En el capítulo 1 se mencionó que las ecuaciones que rigen los sistemas biológicos, específicamente las FES, son altamente no lineales, y tomando esto en consideración primero se tratará de que el sistema siga una referencia con técnicas que dependan del conocimiento de la planta, para después dar paso a técnicas de control que no necesiten conocer los parámetros exactos de la planta, sino solamente tomando en cuenta el error que se genere entre la salida del sistema y la referencia que se pretende seguir.

3.2. Linealización Entrada-Salida

3.2.1. Introducción

Los sistemas de control que generalmente están basados en el principio de control entrada-salida, funcionan comparando la señal a ser controlada con una señal de referencia, la diferencia entre éstas es usada para generar una acción de control que corrija esa diferencia. Esta técnica de control ha sido popular por su fácil cálculo e implementación, puesto que el principal objetivo de esta técnica es encontrar una transformación que nos evite hacer cálculos con las ecuaciones no lineales, y que nos permita representar el sistema no lineal como un sistema lineal.

3.2.2. Transformación Local de Coordenadas

En esta subsección se describe como un sistema no lineal puede ser llevado a una “forma normal” (lineal) mediante transformaciones, se analizan las propiedades importantes de esta particular forma de presentar los sistemas no lineales, pasando antes por unas deficiones que nos serán útiles a lo largo de la tesis.

Considérese el siguiente sistema no lineal de una entrada una salida:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde f, g son suficientemente suaves en un dominio $D \subset R^n$. Los mapeos $f : D \rightarrow R^n$ y $g : D \rightarrow R^n$ son llamados campos vectores en D . La derivada \dot{y} se denota por:

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \equiv L_f h(x) + L_g h(x)u\tag{3.2}$$

donde:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$$

son llamadas derivadas de Lie de h con respecto a f y g , o a lo largo de f, g respectivamente. Esta es la noción familiar de la derivada de h a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$. A continuación se muestran ejemplos para esta notación:

$$\begin{aligned}L_g L_f h(x) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} g(x) \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x) \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x) \\ L_f^0 h(x) &= h(x).\end{aligned}$$

Ahora si $L_g h(x) = 0$, entonces $\dot{y} = L_f h(x)$, sera independiente de u . Si seguimos calculando la segunda derivada de y , que llamaremos $y^{(2)}$ tenemos lo siguiente:

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u$$

una vez más, si $L_g L_f h(x) = 0$, entonces $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$, es también independiente de u . Al realizar repetitivamente este procedimiento, se puede ver que si $h(x)$ satisface:

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, \rho - 1; L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (3.3)$$

entonces la señal de control (u) no aparecerá en las ecuaciones $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{\rho-1}$ y aparecerá hasta la ecuación y^ρ con un coeficiente diferente de cero en:

$$y^\rho = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u. \quad (3.4)$$

Se puede notar fácilmente de la ecuación anterior que el sistema es linealizable entrada-salida, con la ley de control

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v] \quad (3.5)$$

obteniendo como resultado un mapeo $y^\rho = v$ el cual es una cadena de ρ integradores. En este caso ρ es llamado grado relativo del sistema, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 3.1. El sistema no lineal (3.1) se dice que tiene grado relativo ρ ($1 \leq \rho \leq n$) en una región $D_0 \subset D$ si:

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (3.6)$$

para todo $x \in D_0$.

Proposición 3.1. Supongamos que el sistema 3.1 tiene grado relativo ρ en x . Entonces $\rho \leq n$. Se establece las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= h(x) \\ \phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \phi_r(x) &= L_f^{\rho-1} h(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si 3.1 ρ es estrictamente menor que n , siempre es posible encontrar k funciones $(\psi(x)_k, k = \rho, \dots, n)$ tal que el mapeo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f^{\rho-1} h(x) \\ \dots \\ \psi_\rho(x) \\ \dots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi(x)_1 \\ \dots \\ \phi(x)_\rho \\ \dots \\ \phi(x)_{\rho+1} \\ \dots \\ \phi(x)_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \dots \\ z_\rho(x) \\ \dots \\ z_{\rho+1}(x) \\ \dots \\ z_n(x) \end{pmatrix}$$

tenga un jacobiano el cual es no singular en x^0 , además califica como una transformación local de coordenadas en la vecinidad de x^0 . El valor de las funciones que se agregaron pueden ser elegidas arbitrariamente, siempre y cuando la transformación siga siendo no singular.

Analizando las ecuaciones con las nuevas coordenadas (3.7) se observa que es fácil obtener las primeras ecuaciones luego del cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f h(x(t)) = \phi_2(x(t)) = z_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dz_{\rho-1}}{dx} &= \frac{\partial \phi_{\rho-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial (L_f^{\rho-2} h(x(t)))}{\partial x} = L_f^{\rho-1} h(x(t)) = \phi_\rho(x(t)) = z_\rho(t) \end{aligned}$$

para $z_\rho(t)$:

$$\frac{dz_\rho}{dt} = L_f^\rho h(x(t)) + L_g L_f^{\rho-1} h(x(t)) u(t). \quad (3.8)$$

En la parte derecha de la ecuación (3.8) se deja en términos de una sola variable por lo tanto se cambian las expresiones de $x(t)$ por expresiones en función de $z(t)$ i.e. $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$

obteniendo así:

$$\begin{aligned} a(z) &= L_g L_f^{\rho-1} h(\Phi^{-1}(z)) \\ b(z) &= L_f^r h(\Phi^{-1}z(t)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.8) con (3.9) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dz_r}{dt} = b(z(t)) + a(z(t))u(t).$$

Y como en este caso no se especifica ninguna otra suposición para el sistema, la representación en ecuaciones de estado en las nuevas variables queda de la siguiente manera:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.10)$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\vdots$$

$$z_{\rho-1} = z_\rho \quad (3.11)$$

$$\dot{z}_\rho = b(z) + a(z)u(t)$$

$$\dot{z}_{\rho+1} = q_{\rho+1}(z) + p_{\rho+1}(z)u \quad (3.12)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = q_n(z) + p_n(z)u(t).$$

Para representar las ecuaciones (3.10) y (3.12) de manera más compacta se maneja una notación vectorial

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\rho \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} z_{\rho+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

el sistema (3.10) y (3.12) puede presentarse como:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{\rho-1} &= z_\rho \\
 \dot{z}_\rho &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\
 \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta)u
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$y = z_1 = h(x)$$

Definición 3.2. El problema de llevar a cero la salida de la ecuación (3.13), consiste en encontrar las condiciones para un estado inicial de $x(0)$ y una función de entrada $u^0(\cdot)$, definida para todo t en una vecindad de $t = 0$, tal que la correspondiente salida $y(t)$ del sistema sea idénticamente cero para todo tiempo en la vecindad de $t = 0$. Por supuesto, estamos interesados en encontrar todos los pares (x, u) y no implica simplemente la solución trivial $x = 0, u = 0$ (correspondiendo exactamente a la situación en la cual el sistema está inicialmente en reposo y ninguna entrada es aplicada).

Aplicando esta definición anterior al sistema no lineal (3.13), bajo la nueva transformación queda de la siguiente manera:

$$y = z_1(x) = 0$$

que a la vez implica

$$\dot{z}_1(x) = \dot{z}_x(t) = \dots = \dot{z}_\rho(x) = 0$$

o visto de otra manera:

$$Z^* = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = L_f h(x) = \dots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0\}.$$

Obteniendo la ley de control:

$$u^*(x) = \frac{-a(z)}{b(z)} = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}$$

sustituyendo $u^*(x)$ en (3.13) queda para todo $x \in Z^*$ ($h(x) = L_f h(x) = \dots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0$ si $x \in Z^*$). El resto de las ecuaciones de (3.13) describen la dinámica cero en las coordenadas transformadas

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) - p(0, \eta) \frac{b(0, \eta)}{a(0, \eta)}. \tag{3.14}$$

Ahora se enuncia el siguiente lema:

Lema 3.1. *Considérese el sistema linealizado entrada-salida (3.14):*

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) - p(0, \eta) \frac{b(0, \eta)}{a(0, \eta)}$$

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi$$

El origen del sistema es estable si el origen de $\dot{\eta} = q(0, \eta) - p(0, \eta) \frac{b(0, \eta)}{a(0, \eta)}$ es estable y además $A - BK$ es Hurwitz. Para prueba ver ([13]).

3.3. Modos Deslizantes

3.3.1. Introducción

Los modos deslizantes es un comportamiento que aparece en sistemas dinámicos que se rigen por ecuaciones diferenciales con discontinuidades. Éstos surgen de los sistemas con relevadores. Éstos realizan el control como una función de estado que conmuta a una alta frecuencia (teóricamente infinita).

El término modos deslizantes apareció primero en el contexto de sistemas de estructura variable. Pronto los modos deslizantes se convirtieron en el principal modo de operación para esta clase de sistemas. Prácticamente todos los métodos de diseño para sistemas de estructura variable están basados en modos deslizantes, y aún en la actualidad siguen jugando un papel importante en el desarrollo de aplicaciones tanto teóricas como prácticas. Esto debido a la reducción del orden del sistema, su baja sensibilidad a perturbaciones y a variación de parámetros de la planta, por lo tanto, los modos deslizantes son una herramienta eficiente para controlar dinámicas de plantas de alto orden que operan bajo ciertas condiciones de incertidumbre.

3.3.2. Reducción del Orden del Sistema

Una de las ventajas principales por la cual los modos deslizantes son utilizados, es por la reducción del orden del sistema, diciendo con esto que las ecuaciones con los valores propios que van a ser asignados se reducirá según el número de entradas que tenga el sistema. Con el siguiente ejemplo se muestra su funcionalidad:

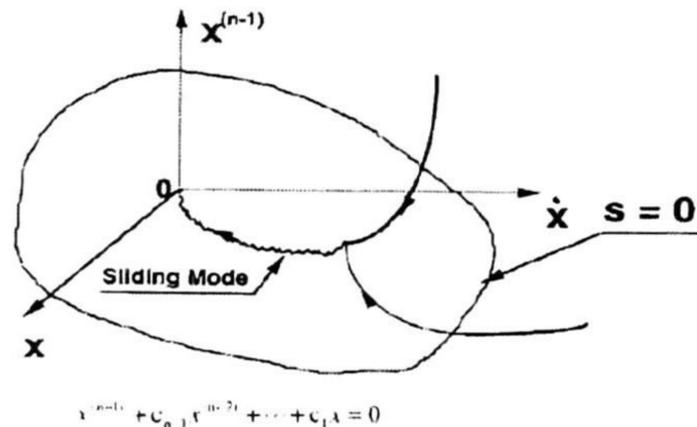


Figura 3.1: Modos deslizantes en espacio de estado en forma canónica: $x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \dots + c_1x = 0$.

Sea el sistema lineal en su forma canónica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= -\sum_{i=1}^n a_i(t)x_i + f(t) + b(t)u \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $a_i(t)$ y $b(t)$ son parámetros desconocidos y $f(t)$ es una perturbación desconocida. El control se pone en un plano $s(x) = 0$ en el espacio de estados de la siguiente manera:

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases}$$

donde $u^+(x, t)$ y $u^-(x, t)$ son funciones continuas del estado, $u^+(x, t) \neq u^-(x, t)$, $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ y c_1, \dots, c_{n-1} son coeficientes constantes. El control discontinuo se selecciona tal que las trayectorias son orientadas hacia el plano $s = 0$ de conmutación como se muestra en Fig. 3.1. Por lo tanto, los modos deslizantes están sobre el plano. Una vez que se llega a la superficie, las trayectorias del sistema (3.15) están en la superficie deslizante:

$$x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \quad (3.16)$$

sustituyendo la ec (3.16) en la ecuación $(n - 1)$ de (3.15) obtenemos la ecuación de modos deslizantes

$$\dot{x}_{n-1} = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \quad \text{o} \quad x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \dots + c_1 = 0. \quad (3.17)$$

La ecuación de movimiento es orden reducido y no depende de los parámetros de la planta ni perturbaciones. La dinámica deseada para los modos deslizantes puede ser asignada por la elección de los parámetros de la superficie deslizante c_i .

3.3.3. Esquema de Metodología para Control por Modos Deslizantes

En el apartado anterior se dieron las principales razones porqué los modos deslizantes son un método prometedor para controlar la dinámica de las plantas, las cuáles operan bajo ciertas condiciones de incertidumbre, con un enfoque lineal. A continuación se presenta la ecuación general para sistemas no lineales:

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (3.18)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ donde t denota tiempo. El control será nuevamente seleccionado como una función discontinua del estado, esto quiere decir que cada u_i tendrá su superficie no lineal de deslizamiento $s_i = 0$ en el espacio de estados:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases}$$

donde $i = 1, \dots, m$, $u_i^+(x, t)$ y $u_i^-(x, t)$ son funciones continuas del estado con $u_i(x, t)^+ \neq u_i^-(x, t)$, y las superficies deslizantes $s_i(x)$ también son funciones continuas del estado. Lo que se espera es que los modos deslizantes ocurran en la intersección de las m superficies $s_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), y reducir el orden del sistema original en m ecuaciones.

Enfocándose al control de plantas de grandes dimensiones, el gran interés va unido al diseño de métodos que permitan desacoplar el sistema general en componentes parcialmente independientes, forzando al sistema a llegar a modos deslizantes con un control discontinuo permitiendo la reducción del sistema. Lo anterior nos conduce al desacoplamiento y la reducción de los valores propios que serán asignados al sistema, que es lo que se busca al usar el método de modos deslizantes en el reactor analizado en el presente trabajo. Para nuestro caso el sistema presenta la principal característica de tener grado relativo uno, facilitando además el diseño de la superficie deslizante.

3.4. Super Twisting

Esta técnica de control llamada Super Twisting es un caso particular de los modos deslizantes integrales [28], cuando el grado relativo del sistema es igual a uno. Este es un controlador muy eficiente por ser muy robusto a perturbaciones internas y externas. Además este controlador nos puede ayudar a reducir el efecto de cascabeleo que los modos deslizantes pueden causar, sin dejar a un lado que este control sigue teniendo las propiedades de los modos deslizantes normales. A continuación se muestra el desarrollo de este algoritmo de control.

Se diseña la superficie deslizante en función del estado:

$$s_0 = c_i f(x) \quad (3.19)$$

obteniendo su derivada:

$$\dot{s}_0 = f(x, s_0) + b_0(x, s)u \quad (3.20)$$

y como el grado relativo del sistema ($\rho = 1$) se propone la acción de control como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k_1}{b_0} |s_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_0) + s_1 \\ s_1 &= -k_2 \text{sign}(s_0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

A continuación se muestran las condiciones de convergencia para (3.21)

3.4.1. Estabilidad de Super Twisting

En [17] se propone una función de Lyapunov para analizar la estabilidad y convergencia de este algoritmo. Se mostrará el procedimiento que se sigue:

El sistema se presenta en forma general de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{s}_0 &= -k_1 |s_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_0) + s_1 + \vartheta(s, t) \\ s_1 &= -k_2 \text{sign}(s_0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

definimos $s = [s_0 \ s_1]$ y ϑ como una perturbación. Suponemos que la perturbación ϑ en el sistema (3.22) es globalmente acotada por:

$$|\vartheta| \leq \delta_1 |s_0|^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

con una constante $\delta_1 \geq 0$. Entonces el origen $s = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable si se cumple que:

$$\begin{aligned} k_1 &> 2\delta_1 \\ k_2 &> k_1 \frac{5\delta_1 k_1 + 4\delta_1^2}{2(k_1 - 2\delta_1)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

además las trayectorias convergen al origen $s = 0$ en un tiempo finito t_s :

$$t_s \leq \frac{2}{\gamma} V^{\frac{1}{2}}(s_{t_0}) \quad (3.25)$$

donde s_{t_0} es el estado inicial y γ es una constante que depende de k_1 , k_2 y δ_1 .

Demostración. Consideremos la función candidata de Lyapunov:

$$V(s) = \xi P \xi^T \quad (3.26)$$

para el sistema (3.22) con el vector $\xi^T = [|s_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_0) \ s_1]$ y una matriz P :

$$\begin{bmatrix} 4k_2 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

nótese que la función $V(s)$ es continua pero no diferenciable en $s_0 = 0$. Tomando la derivada de $V(s)$ excepto en $s_0 = 0$, tenemos:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|s_0|^{\frac{1}{2}}} \xi^T Q \xi + \frac{\vartheta_1}{|s_0|^{\frac{1}{2}}} q_1 \xi^T$$

donde:

$$q_1^T = \left[2k_2 + \frac{k_1}{2} \quad -\frac{k_1}{2} \right].$$

usando la acotación de la perturbación (3.23) la derivada \dot{V} nos queda de la siguiente forma:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|s_0|^{\frac{1}{2}}} \xi^T \tilde{Q} \xi$$

donde:

$$\tilde{Q} = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_2 + k_1^2 + (\frac{4k_2}{k_1} + k_1)\delta_1 & * \\ -(k_1 + 2\delta_1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bajo las condiciones (3.27) se tiene que \tilde{Q} es positiva, entonces \dot{V} es definida negativa, esto significa que el estado del sistema (3.22) converge a cero. En la siguiente parte se mostrará que el tiempo de convergencia es finito. Debido que $V(s)$ es definida positiva y radialmente no acotada si $k_2 > 0$, esto es:

$$\lambda_{min}\{P\}\|\xi\|_2^2 \leq \xi P \xi^T \leq \lambda_{max}\{P\}\|\xi\|_2^2$$

donde $\|\xi\|_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |s_0| + s_1^2$ es la norma euclidiana de ξ , y la desigualdad queda:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|s_0|^{\frac{1}{2}}}\xi^T \tilde{Q} \xi \leq -\frac{1}{|s_0|^{\frac{1}{2}}}Q\|\xi\|_2^2$$

y

$$|s_0|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(s)}{\lambda_{min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}$$

entonces, tenemos:

$$\dot{V} \leq -\gamma V^{\frac{1}{2}}(s)$$

donde

$$\gamma = \frac{\lambda_{min}^{\frac{1}{2}}\{P\}\lambda_{min}\{Q\}}{\lambda_{max}\{P\}}$$

debido a que la solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{v} = -\gamma v^{\frac{1}{2}}, \quad v(0) = v_0 \geq 0$$

está dada por:

$$v(t) = (v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{2}t)^{\frac{1}{2}}$$

usando el principio de comparación [13]:

$$V(t) \leq v(t) \quad V(s_{t0}) \leq v_0 \tag{3.28}$$

se concluye que:

- El estado del sistema (3.22) converge al origen en tiempo finito.
- El límite de convergencia puede ser estimado por:

$$t_s = \frac{2}{\gamma}V^{\frac{1}{2}}(s_{t0}) \tag{3.29}$$

unidades de tiempo. □

Capítulo 4

Control de un reactor de fermentación en estado sólido

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta el diseño de tres esquemas de control para la planta basado en las técnicas:

- Control continuo entrada-salida.
- Control discontinuo por modos deslizantes.
- Control continuo por modos deslizantes (algoritmo Super Twisting).

Se demuestra además el análisis de estabilidad en lazo cerrado (incluyendo la dinámica cero) y por último se comparan las técnicas de control por medio de las gráficas obtenidas a través de simulación al aplicar los esquemas de control.

4.2. Control por Linealización Entrada-Salida

La variable de estado que fue seleccionada para controlar es x_6 , la cual, corresponde a la temperatura. A continuación se presenta el procedimiento seguido para obtener la ley de control por el esquema entrada-salida.

Sea el sistema ver (2.42):

$$\dot{x}_1 = [\mu_1(x_4, x_5, x_6) - \lambda_1(x_6)]x_1 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = [\mu_2(x_4, x_5, x_6) - \lambda_2(x_6)]x_2 \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_3 = [\mu_3(x_4, x_5, x_6) - \lambda_3(x_6)]x_3 \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_4 = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{\gamma_i} \mu_i(x_4, x_5, x_6) + \lambda_i(x_6) \right) x_i \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_5 = \sum_{i=1}^3 \vartheta_i \mu_i(x_4, x_5, x_6) x_i + \frac{1}{M} (x_5^* - x_5) u \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_6 = f_6(x) - g_6(x)u + \varphi_6(x, t). \quad (4.6)$$

$$y = x_6$$

donde la función $\varphi_6(x, t)$ representa variaciones paramétricas del sistema. El objetivo de control es el seguimiento de la salida $y = x_6$ a la señal de referencia $T_{ref}(t)$. Para esto definimos el error de seguimiento

$$e_6 = x_6 - T_{ref}(t) \quad (4.7)$$

$T_{ref}(t)$ representa la trayectoria a seguir como se muestra en Fig. 4.1 que se obtuvo al poner en la planta la señal de control $u = 2$ y ajustando la respuesta de la temperatura a un polinomio utilizando paquetería de Matlab.

Al derivar (4.7) y usar (4.6) queda:

$$\dot{e}_6 = f_6(x) - g_6(x)u + \psi_6(x, t) \quad (4.8)$$

con

$$\delta < g_6(x) \leq 0.3 \quad \delta > 0 \quad \forall g_6(x) \subset D \quad (4.9)$$

donde $\psi_6(x, t) = \varphi_6(x, t) - \dot{T}_{ref}(t)$, $\dot{T}_{ref}(t)$ es la derivada de la trayectoria de referencia.

La dinámica del error (4.8) tiene grado relativo uno que es asegurado por la restricción (4.9). Es por esta razón que la ley de control se obtiene usando el esquema entrada-salida de manera sencilla, dando como resultado:

$$u = -\frac{f_6(x)}{g_6(x)} - ke_6, \quad k > 0. \quad (4.10)$$

El sistema en lazo cerrado (4.8) con (4.10) se presenta como:

$$\dot{e}_6 = -kg_6(x)e_6 + \psi_6(x, t). \quad (4.11)$$

Donde asumimos que la perturbación $\psi_6(x, t)$ es desconocida pero acotado por

$$\|\psi(x, t)\| \leq \beta_1 |e_6| + \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 > 0 \quad (4.12)$$

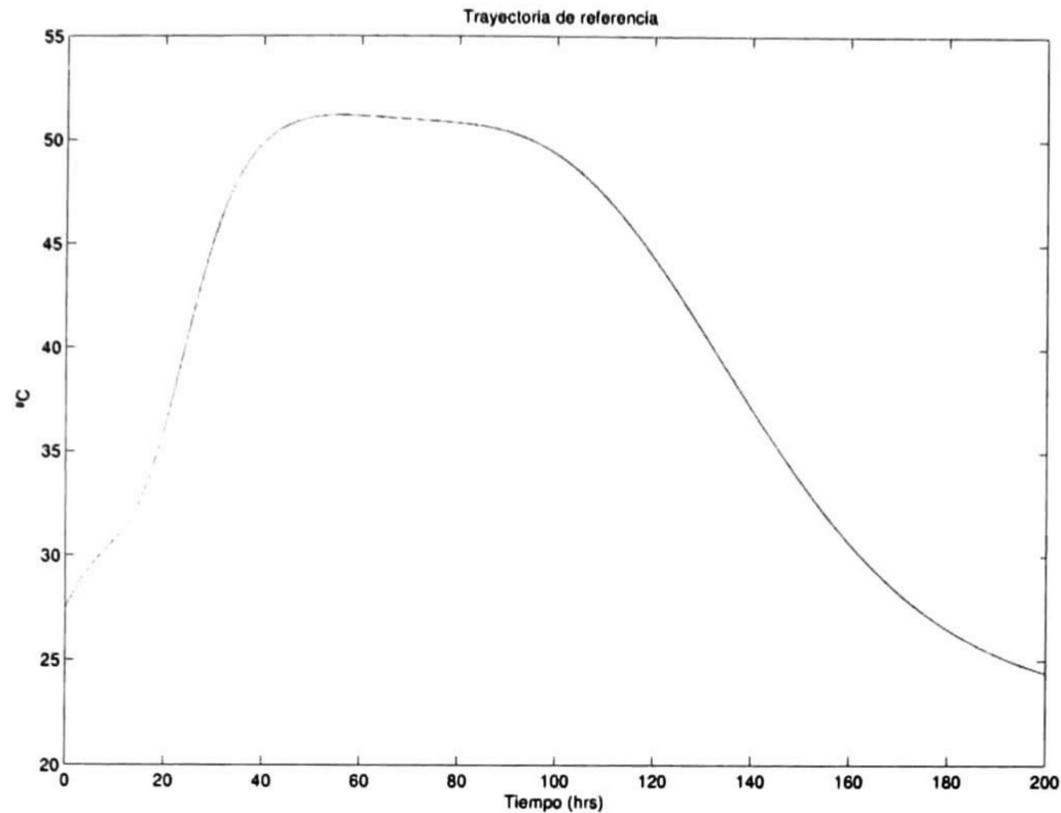


Figura 4.1: Figura correspondiente a la trayectoria de referencia ($T_{ref}(t)$).

Para el análisis de estabilidad de (4.11) se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e_6^2 \quad (4.13)$$

para definir las condiciones de estabilidad.

Demostración. La derivada de (4.13) a lo largo de las trayectorias del sistema (4.11) y usando la suposición (4.12) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e(-kg_6(x)e_6 + \psi(x, t)) = -kg_6(x)e^2 + \psi(x, t)e \\ &\leq -0.3ke_6^2 + \beta_1|e_6|^2 + \beta_2e_6 \\ &= -(0.3k - \beta_1)e_6^2 + \beta_2|e_6| \\ &\leq -\alpha e_6^2 + \beta_2|e_6| + \theta\alpha e_6^2 - \theta\alpha e_6^2, \quad \forall k > \frac{\alpha + \beta_1}{0.3}, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha(1-\theta)e_6^2 - (\theta\alpha|e| - \beta_2)|e_6| \\ &\leq -\alpha(1-\theta)e_6^2 \leq 0, \quad \forall |e_6| > \frac{\beta_2}{\theta\alpha}, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para las condiciones dadas en (4.14) la derivada \dot{V} es negativa, la cual demuestra que el sistema en lazo cerrado (4.11) es asintóticamente estable últimamente acotado. \square

4.3. Control por Modos Deslizantes

En esta sección proponemos la técnica de control por modos deslizantes para asegurar robustez y rechazar la perturbación $\psi(x, t)$, debido a que no es posible eliminar la perturbación con el control entrada-salida.

Para el diseño de la superficie deslizante es natural definir la variable deslizante como $s = e_6$ (4.7), entonces del sistema del error (4.7) obtenemos su derivada y se presenta de manera:

$$\dot{s}_6 = f_6(x) - g_6(x)u + \psi(x, t) \quad (4.15)$$

La restricción (4.9) es dada por las mismas propiedades de la planta, es una condición que generalmente se cumple en los reactores, ya que representa la resta de la entalpía del aire de saturación menos la entalpía del aire de entrada. Físicamente el aire de entrada en condiciones normales de operación difícilmente podría llegar al valor del aire de saturación, de modo que siempre se obtiene un resultado positivo, permitiendo desarrollar así los modos deslizantes de forma normal.

Para inducir modos deslizantes y encontrar las condiciones de M (ganancia para la ley de control de modos deslizantes) se propone la siguiente ley de control discontinua:

$$u = -M \operatorname{sign}(s) - u_{eq}, \quad M > 0, \quad u_{eq} = -\frac{f_6(x)}{g_6(x)} \quad (4.16)$$

donde u_{eq} es el control equivalente calculado como la solución de (4.15) bajo la condición $\dot{s}_6 = 0$ y en ausencia de $\psi(x, t)$.

Demostración. Para analizar la robustez del sistema en lazo cerrado (4.15) bajo la ley de control (4.16) y las restricciones presentadas en (4.9) y (4.12), se define la función candidata

de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (4.17)$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (4.15) y con el control (4.16) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s(f_6(x) - g_6(x)u + \psi(x, t)) \\ &= -Mg_6(x)\text{sign}(s)s + \psi(x, t)s. \end{aligned}$$

Usando las restricciones (4.9) y (4.12) se presenta la derivada del sistema como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -0.3M|s| + \beta_1|s|^2 + \beta_2|s| \\ &= -(0.3M - \beta_1|s| - \beta_2)|s| \\ &= -\eta|s_6|, \quad \text{con } \eta = 0.3M - \beta_1|s| - \beta_2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

En (4.18) se encuentra la condición para M ($M > \frac{\eta + \beta_1|s| + \beta_2}{0.3}$) con la cual la derivada \dot{V} es definida negativa mostrando estabilidad asintótica, además de que el estado alcanzará la variedad $s = 0$. Enseguida se muestra que si $0.3M - \beta_1|s_6| - \beta_2 \geq \rho_o > 0$, donde ρ_o es una constante, entonces s se desvanece y los modos deslizantes ocurren después de un tiempo finito.

De (4.18) y (4.17) tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [-0.3M - \beta_1|s| - \beta_2]|s| \quad \text{si } s = \sqrt{2V} \quad \text{conduce a} \\ \dot{V} &< -\sigma\sqrt{V} \quad \sigma = \sqrt{2}[0.3M - \beta_1|s| - \beta_2]. \end{aligned}$$

La solución a la desigualdad diferencial $V(t)$ es no negativa y está acotada por

$$V(t) < \left(-\frac{\sigma}{2}t + \sqrt{V_0}\right)^2 \quad V_0 = V(0).$$

La solución se desvanece después de $t_s < (s(0)/\sqrt{2}\sigma)$, así también la superficie s y los modos deslizantes empiezan después de un intervalo de tiempo finito, logrando una estabilidad semiglobal asintóticamente estable. \square

4.4. Control por “Super Twisting”

A continuación se muestran las ecuaciones utilizadas en el esquema de control basado en el algoritmo de control “Super Twisting” para el control de temperatura del reactor. Esta clase de algoritmo ayuda a evitar el efecto del cascabeleo en las dinámicas de lazo cerrado con variables deslizantes de grado relativo uno.

Se define nuevamente la superficie de deslizamiento como:

$$s_0 = x_6 - T_{ref}(t). \quad (4.19)$$

Como la superficie de deslizamiento cuenta con grado relativo uno, se aplica el algoritmo Super Twisting tomando en cuenta las condiciones dadas en la sección (3.4.1). Se propone la siguiente ley de control [17]:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |s_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_0) + u_1 + \varphi(x, t) \\ \dot{u}_1 &= -k_2 \text{sign}(s_0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Bajo de las siguientes condiciones:

$$k_1 > 2\delta_1 \quad (4.21)$$

$$k_2 > k_1 \frac{5\delta_1 k_1 + 4\delta_1^2}{2(k_1 - 2\delta_1)} \quad (4.22)$$

la variable de deslizamiento s_0 converge a cero en un tiempo finito t_s (ver sección (3.4.1)) que da como resultado:

$$x_6(t) = T_{ref}(t) \quad \text{para } t \geq t_s$$

obteniendo un sistema en lazo cerrado globalmente asintóticamente estable.

4.5. Análisis de Estabilidad de La Dinámica Cero

Para obtener la dinámica cero, que en este caso coincide con la ecuación de modos deslizantes, se usa el control equivalente que lleva a la superficie $s_0 = 0$ y su derivada $\dot{s}_0 = 0$.

Para obtener el control equivalente que lleva a los modos deslizantes:

$$\dot{s} = f_6(x) - g_6(x)u_{eq} + \psi(x, t) = 0, \quad s_0 = 0 \quad (4.23)$$

se encuentra primeramente el control equivalente como la solución de (4.23) de forma:

$$u_{eq} = \frac{f_6(x) + \psi(x, t)}{g_6(x)} \quad (4.24)$$

Sustituyendo u_{eq} en ec. (4.23) se obtiene la dinámica cero del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\mu_1(x_4, x_5, x_6) - \lambda_1(x_6))x_1 \\ \dot{x}_2 &= (\mu_2(x_4, x_5, x_6) - \lambda_2(x_6))x_2 \\ \dot{x}_3 &= (\mu_3(x_4, x_5, x_6) - \lambda_3(x_6))x_3 \\ \dot{x}_4 &= \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{\gamma_i} \mu_i(x_4, x_5, x_6) + \lambda(x_6) \right) x_i \\ \dot{x}_5 &= \sum_{i=1}^3 (\vartheta_i \mu_i(x_4, x_5, x_6)) x_i + \frac{1}{M} (x_5^* - x_5) u_{eq}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ahora se hacen las siguientes suposiciones:

(h_1) El estado x_4 llega a un estado estable.

(h_2) El estado x_5 llega a un estado estable.

$$x_{4ss} = 0 \quad (4.26)$$

$$x_{5ss} = 0.3 \quad (4.27)$$

donde x_{4ss} es el estado estable para el sustrato cuando todo este ha sido consumido y x_{5ss} es el estado estable para el oxígeno al final de la reacción cuando los microorganismos cesaron de crecer, implicando que el oxígeno a la entrada del reactor es el mismo que a la salida del mismo. El sistema (4.25) bajo las suposiciones (h_1) y (h_2) se puede presentar de la siguiente manera:

$$\dot{x}_i = -a_i(t)x_i \quad (4.28)$$

donde

$$a_i(t) = -(\lambda_i(T_{ref}(t)) - \mu_i(x_{4ss}, x_{5ss}, T_{ref}(t)))x_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Entonces bajo la condición

$$\lambda_i(T_{ref}) > \mu_i(x_{4ss}, x_{5ss}, T_{ref}(t)) \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (4.29)$$

el origen del sistema (4.28) es asintóticamente estable (ver [13]).

Para mostrar que las suposiciones (h_1) y (h_2) se satisfacen, definimos los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_{ss4} &= x_4 - \omega_1 \\ e_{ss5} &= x_5 - \omega_2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde ω_1 es la estimación del estado estable x_{4ss} y ω_2 es la estimación del estado estable x_{5ss} . Derivando el sistema del error (4.30) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ss1} &= f_4(x) + g_4(x) - \dot{\omega}_1 \\ \dot{e}_{ss2} &= f_5(x) + g_5(x) - \dot{\omega}_2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Seleccionando $\dot{\omega}_1$ y $\dot{\omega}_2$ como:

$$\dot{\omega}_1 = M_1 \text{sign}(e_{ss1}) \quad (4.32)$$

$$\dot{\omega}_2 = u_{sup} \quad (4.33)$$

donde

$$\begin{aligned} u_{sup} &= -k_1 |e_{ss2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{ss2}) + v_1 \\ \dot{v}_1 &= -k_2 \text{sign}(e_{ss2}) \end{aligned}$$

y sustituyendo (4.32) en (4.31) se obtiene la siguiente dinámica del error:

$$\dot{e}_{ss1} = f_4(x) + g_4(x) - M_1 \text{sign}(e_{ss1}) \quad (4.34)$$

Si M_1 cumple con la condición

$$M_1 > |f_4(x) + g_4(x)|. \quad (4.35)$$

Para la dinámica del error (4.33) se usa nuevamente el algoritmo de control Super Twisting, para estabilidad vease 3.4.1. Entonces se asegura que el origen del sistema (4.31) es asintóticamente estable y tiene un tiempo de convergencia finito t_{s1} y t_{s2} respectivamente, esto es:

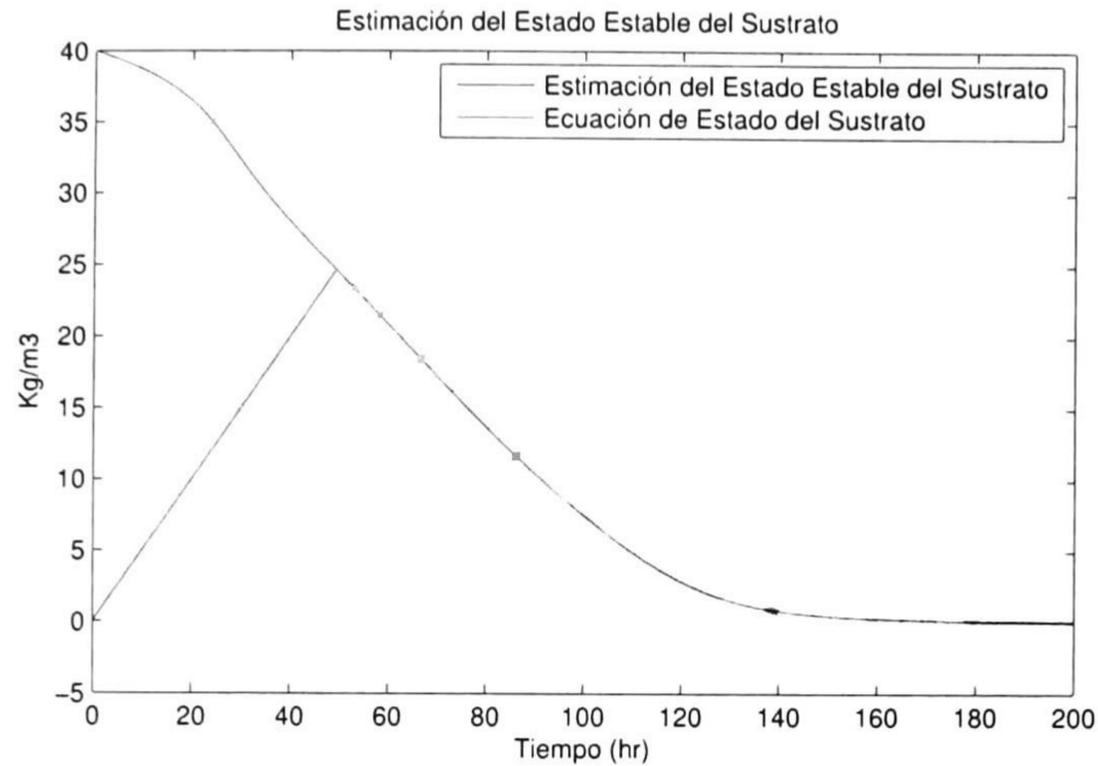


Figura 4.2: Error de estimación del sustrato.

$$\omega_1(t) = x_{4ss} \quad \text{para } t \geq t_{s1} \quad (4.36)$$

$$\omega_2(t) = x_{5ss} \quad \text{para } t \geq t_{s2} \quad (4.37)$$

En las Fig.4.2 y Fig. 4.3 se muestra la estimación que se obtiene por simulación.

Con esta estimación se hace válida la suposición realizada para el sistema (4.28) lo que completa la prueba de estabilidad para la dinámica cero del sistema. Entonces el sistema (4.25) usando control el algoritmo Super Twisting es últimamente acotado, y el error de seguimiento converge a cero en tiempo finito.

4.6. Simulaciones

En esta sección se describen los resultados obtenidos al aplicar las técnicas de control mencionadas en este trabajo. También se realiza una comparación entre las técnicas utilizadas para ver las bondades y debilidades que cada una de éstas presentan.

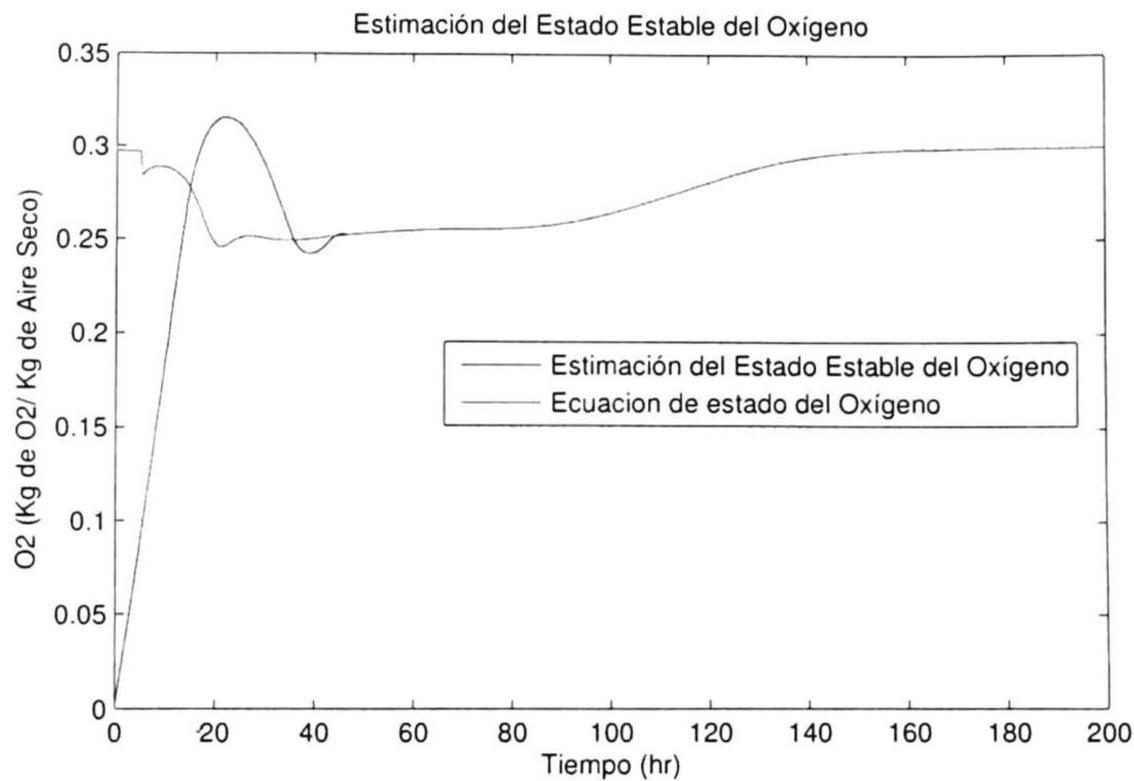


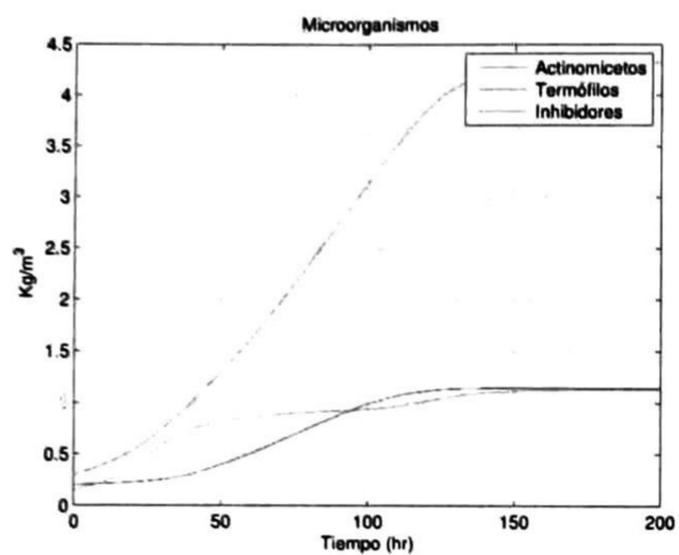
Figura 4.3: Error de estimación del oxígeno.

4.6.1. Resultados para Control Entrada-Salida ante Variaciones de Temperatura

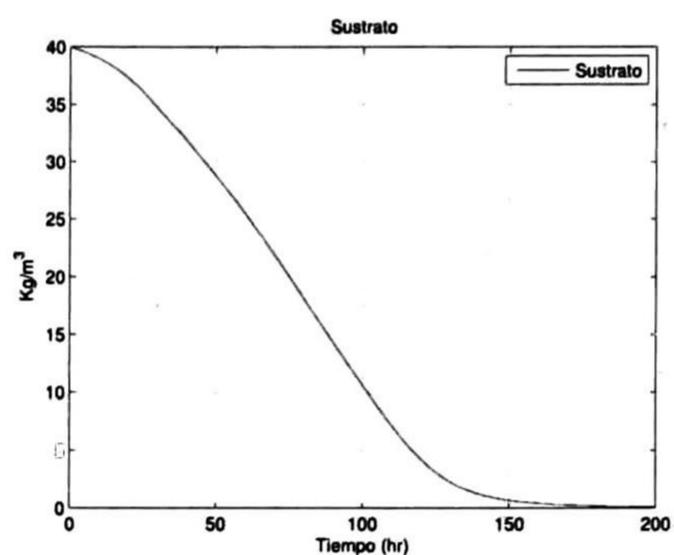
A continuación se presentan los resultados de las simulaciones del reactor usando la técnica de control entrada-salida, cabe aclarar que solo se modificó la condición inicial para la variable x_6 . La variación únicamente a la condición inicial de la temperatura se debió principalmente a que es la variable que mas influencia tiene sobre el sistema, y el interés es ver el efecto que esta variable tiene sobre el comportamiento del reactor. Por otro lado, no se modificaron las condiciones iniciales correspondientes al sustrato y oxígeno ya que son conocidas *a priori*, tampoco fueron modificadas las condiciones iniciales referentes a los microorganismos, teniendo en cuenta que se proponen como una estimación de las colonias de cada tipo de microorganismo dentro de la composta para realizar la validación del modelo matemático del reactor [3].

La selección de la condición inicial $x_6(0) = 25$ se realizó considerando que los resultados obtenidos en el control y las demás variables del sistema son muy parecidos cuando se toma una condición inicial menor a la de la trayectoria de seguimiento ($T(0)_{ref} = 27$). Para $x_6(0) = 32$ se consideró la misma razón, solo que aquí la ecuación de estado x_6 empieza su evolución por arriba de $T_{ref}(0)$. Por consiguiente con estas dos condiciones iniciales de la temperatura es posible llevar a cabo un estudio satisfactorio analizando solo el comportamiento en las dos zonas que el reactor pudiese empezar la reacción (debajo de 27°C o superior a 27°C).

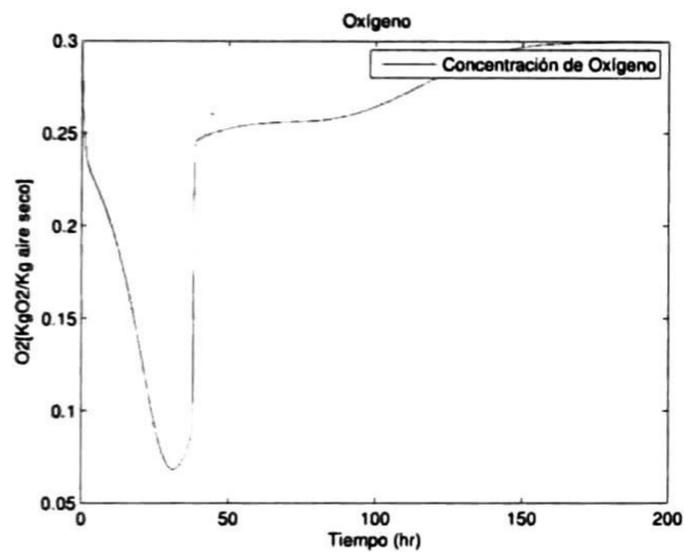
Como se puede apreciar en la Fig. 4.4e, el error es negativo, por consiguiente la señal de



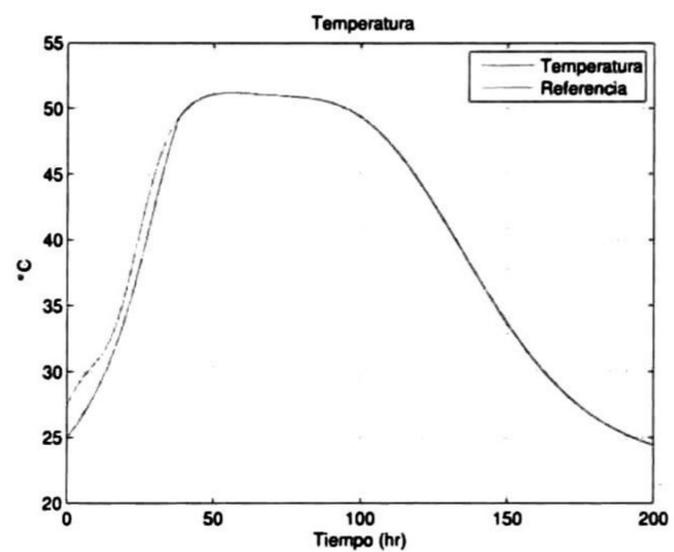
(a) Microorganismos



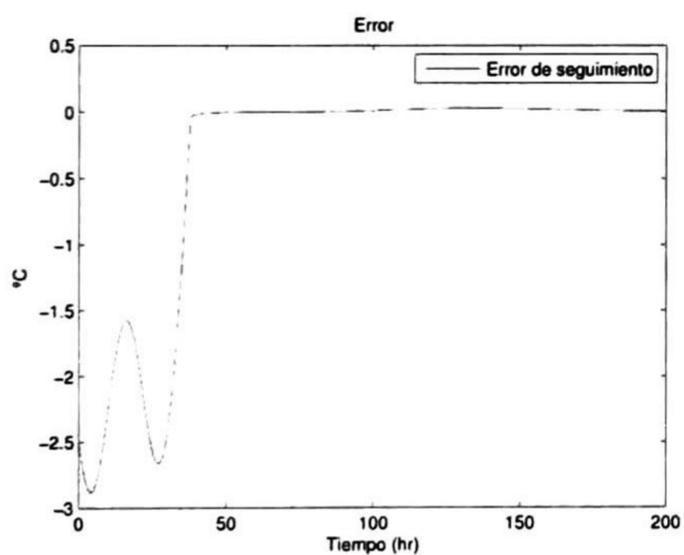
(b) Sustrato



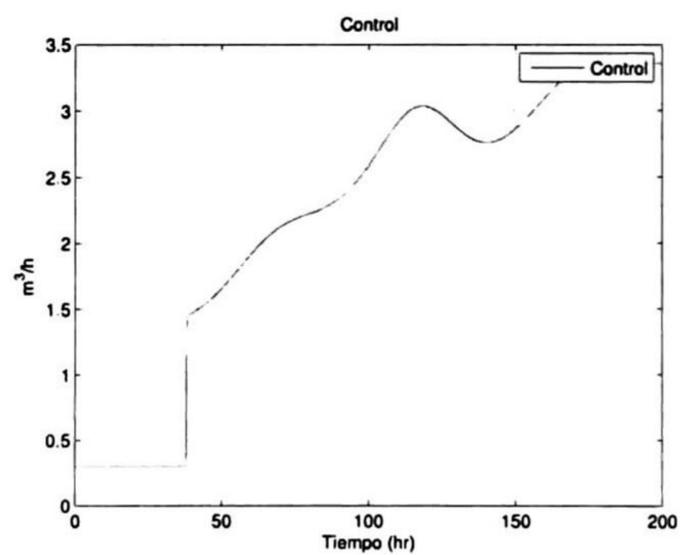
(c) Oxígeno



(d) Temperatura



(e) Error



(f) Señal de Control

Figura 4.4: Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 25^{\circ}\text{C}$.

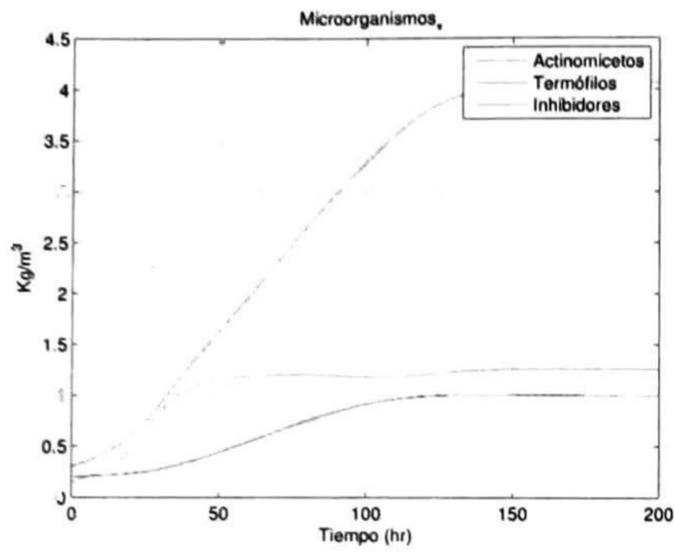
control trata de aumentar la temperatura del reactor limitando la entrada de aire hacia él, en la Fig. 4.4f se puede apreciar que el control tiene un cota inferior $u = 0.35 \left(\frac{m^3}{hr}\right)$, esto asegura que el reactor siempre tendrá un suministro mínimo de oxígeno, ya que el oxígeno es indispensable para que se desarrolle la reacción, que a su vez es la encargada de generar el calor dentro del reactor. La evolución del seguimiento de trayectoria se desarrolla sin ningún problema y las variables restantes llegan a su estado estable como se muestra en las Fig. 4.4a, Fig. 4.4b y Fig. 4.4c. En la trayectoria del error Fig. 4.4e cerca de las 100 hrs. se aprecia que tiene una pequeña desviación con respecto a cero, esto porque la trayectoria de referencia en la Fig. 4.4d en las 100 hrs. tiene un cambio grande en la pendiente a la cual la señal de control no puede responder de forma inmediata, generando en consecuencia un pequeño error de seguimiento. Como se demostró en (4.14) el error de seguimiento es asintóticamente estable últimamente acotado lo que asegura que la variable $x_6(t)$ siempre estará en una zona cerca de $T_{ref}(t)$.

El comportamiento correspondiente a la Fig. 4.5 muestra la evolución de las variables ante la condición inicial de $x_6(0) = 32 \text{ }^\circ\text{C}$, en la Fig. 4.5e se observa que el error llega a cero en aproximadamente 8 horas, lo que representa un tiempo de convergencia de aproximadamente cuatro veces más rápido comparado con la Fig. 4.4e. Esto se debe a que es mucho más sencillo enfriar el reactor ya que podemos suministrar gran cantidad de aire (a temperatura ambiente). También se presenta un pequeño error alrededor de las 100 hrs. dado que la pendiente de la trayectoria de referencia tiene un cambio pronunciado, el control no es capaz de responder suficientemente rápido a dicho cambio, generando un error de seguimiento.

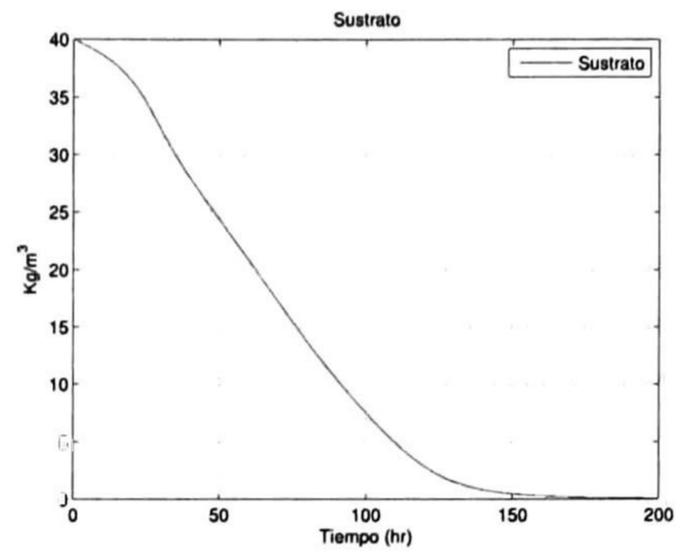
En Fig. 4.4a y Fig. 4.5a se puede observar que las ecuaciones de estado x_1, x_2 y x_3 no llegan a un mismo estado estable, siendo esto una característica importante a tomar en cuenta en un futuro para la implementación de estas técnicas de control.

4.6.2. Resultados para Modos Deslizantes Variando Condición Inicial de x_6

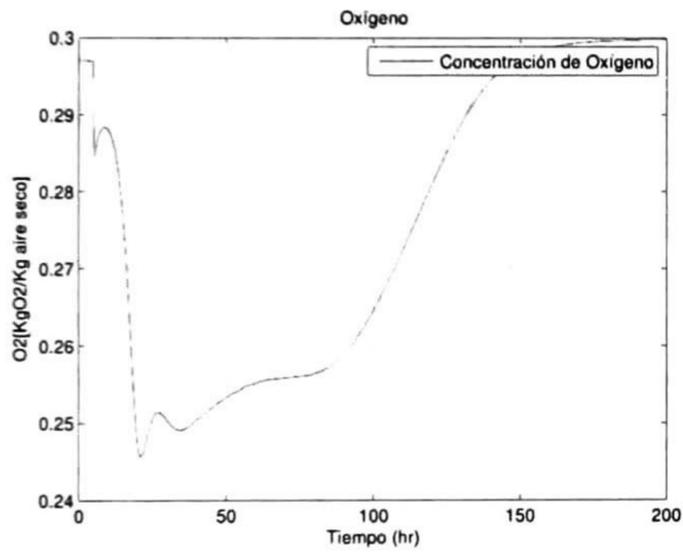
En la Fig. 4.6 se muestran los resultados obtenidos mediante la técnica de modos deslizantes, se puede apreciar que los resultados obtenidos en las Fig. 4.4a, Fig. 4.4b, Fig. 4.4c, Fig. 4.4d y Fig. 4.4e son prácticamente iguales a las Fig. 4.6a, Fig. 4.6b, Fig. 4.6c, Fig. 4.6d y Fig. 4.6e respectivamente, gracias a que la trayectoria de temperatura seguida por el sistema con las dos técnicas son muy parecidas Fig. 4.4d y Fig. 4.6d. Es importante mencionar que utilizando modos deslizantes no se aprecia el error de seguimiento después de las 100 hrs. Fig. 4.6e que se presentó al aplicar el control entrada-salida Fig.4.4e. Esto deja en claro que



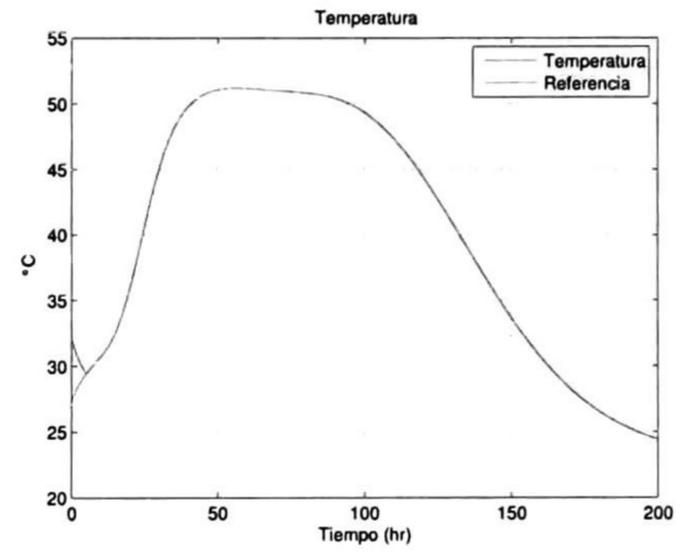
(a) Microorganismos



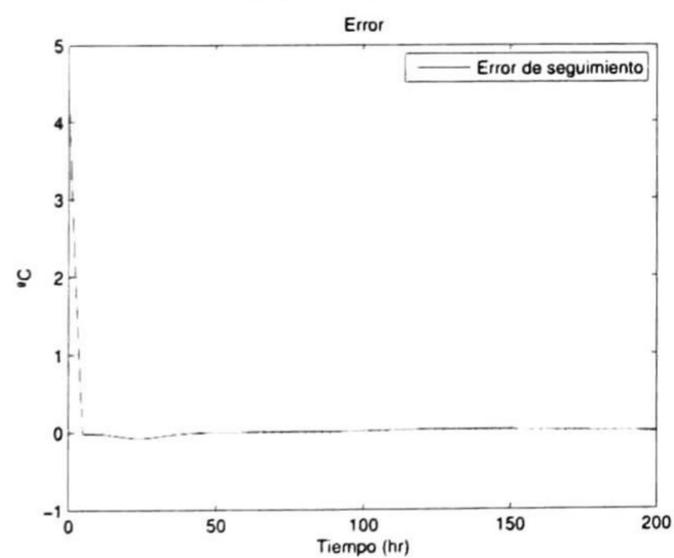
(b) Sustrato



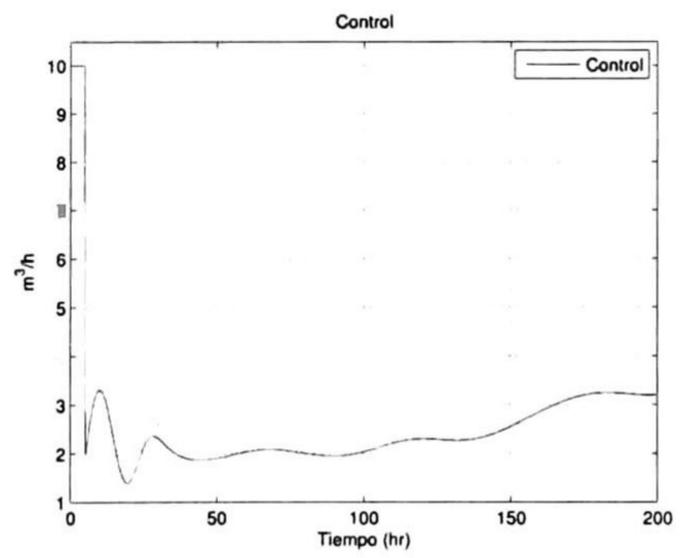
(c) Oxígeno



(d) Temperatura



(e) Error



(f) Señal de Control

Figura 4.5: Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 32C$.

la ley de control discontinua utilizada por modos deslizantes es más robusta ante cambios bruscos que se presentan en la planta.

Otra ventaja importante de esta técnica es la forma en que se obtiene la señal de control Fig. 4.6f, debido a que solo se necesita la diferencia entre la variable a controlar y la referencia, a diferencia del esquema de control entrada-salida donde es necesario conocer los parámetros de la planta con exactitud para sintetizar la ley de control. La desventaja principal de los modos deslizantes es el efecto de cascabeleo, que se puede apreciar en la Fig. 4.6c, sin embargo en este caso no tiene un efecto significativo en la simulación gracias a que la base de tiempo de la planta es relativamente lenta, pero al implementar en el reactor esta técnica, se acorta la vida útil del motor.

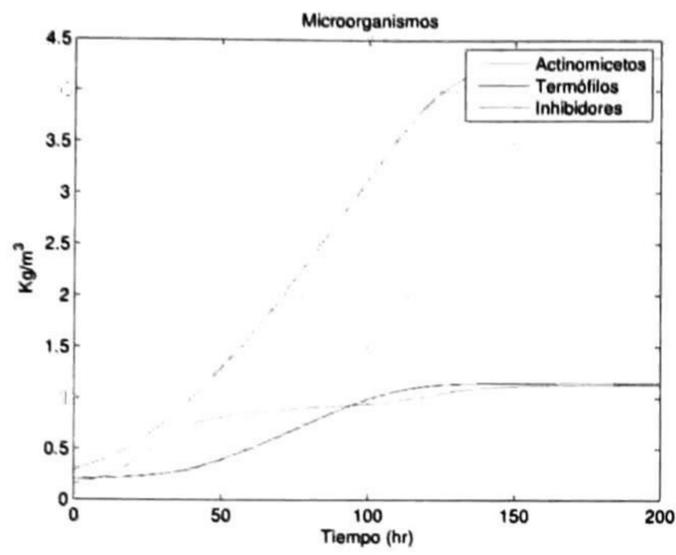
El conjunto de figuras Fig. 4.7, se puede compararse con los resultados obtenidos con las respectivas figuras Fig. 4.5 en control entrada-salida. Se advierte que los microorganismos en las Fig. 4.7a y Fig. 4.4a evolucionan del mismo modo, por ende, llegan al mismo estado estable. En el caso de la variable x_5 su comportamiento presenta cascabeleo cuando la superficie deslizante llega cero, ésto ocasionado porque la señal de control es discontinua y está presente explícitamente en la ecuación de estado, no obstante, este comportamiento no afecta a las variables de interés (x_1, x_2 y x_3). El error de seguimiento se realiza de manera exacta, es decir, el error es cero Fig. 4.7e, mostrando una vez más que los modos deslizantes son robustos ante cambios en los parámetros de la planta. Sin embargo, desde un punto de vista práctico las diferencias entre los errores 4.4e y 4.6e, 4.5e y 4.7e no afectan de manera significativa el comportamiento de las variables restantes de la planta.

4.6.3. Resultados para Super Twisting Variando la Condición Inicial de x_6

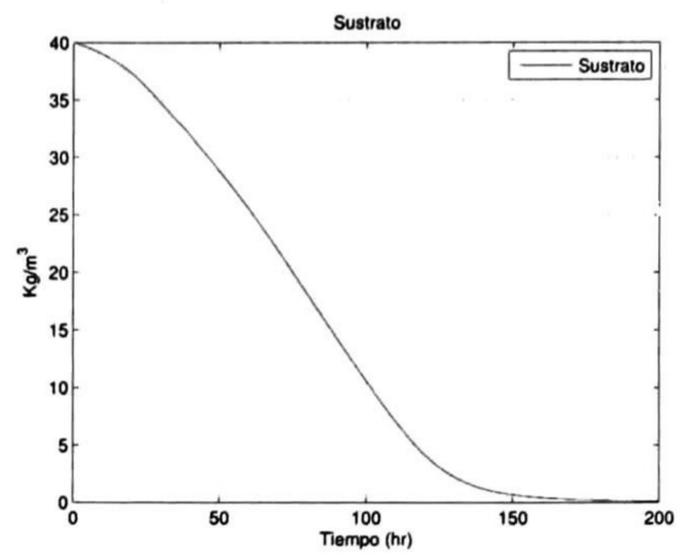
A continuación se presentan los resultados que arrojaron las simulaciones con el algoritmo de control Super Twisting, tomando en cuenta las mismas consideraciones realizadas en el modelo con las técnicas anteriores.

Los resultados obtenidos en esta simulación son muy similares a los obtenidos por el control entrada-salida Fig. 4.4 a Fig. 4.8 y Fig. 4.5 a Fig. 4.9. Los errores de seguimiento para las condiciones iniciales $x_6(0) = 25^\circ C$ y $x_6(0) = 32^\circ C$ Fig. 4.8e y Fig. 4.9e respectivamente, presentan una mejora comparado con Fig. 4.4e y Fig. 4.5e del control entrada-salida, gracias a que el algoritmo Super Twisting está basado en modos deslizantes.

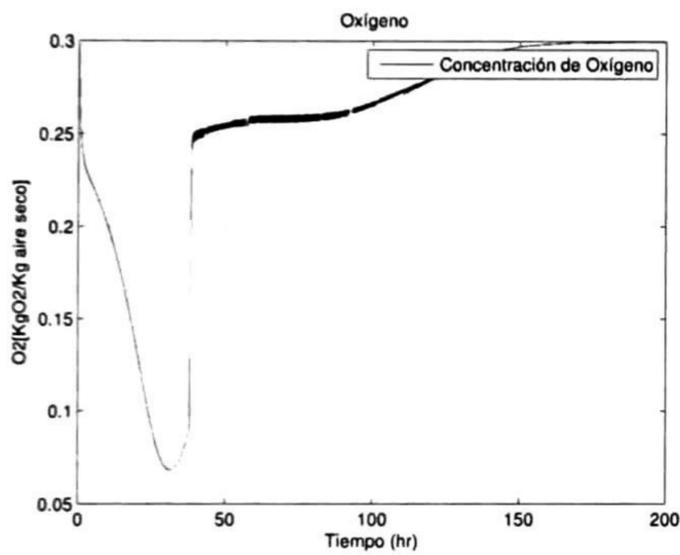
Al comparar las dos últimas técnicas (modos deslizantes y Super Twisting) se puede notar (como se esperaba) que las diferencias únicamente estriban en el control Fig. 4.6f y 4.8f siendo el primero de forma discontinua y el segundo presentando una señal suave. Con respecto a la ecuación de estado del oxígeno el algoritmo Super Twisting no presenta cascabeleo Fig. 4.8c y



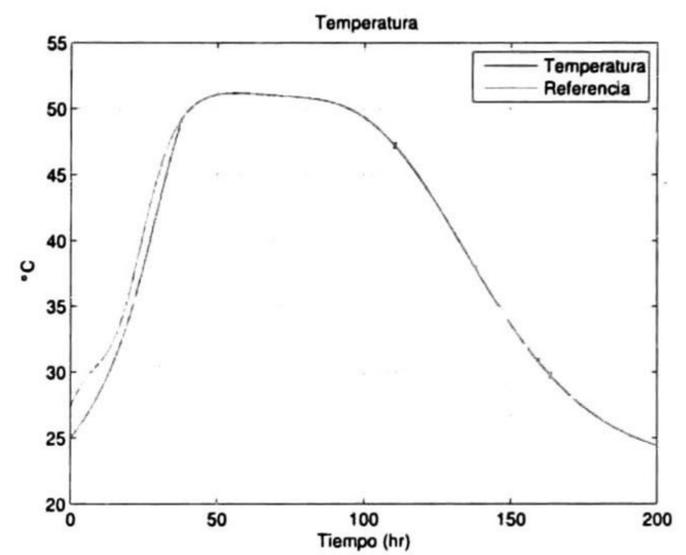
(a) Microorganismos



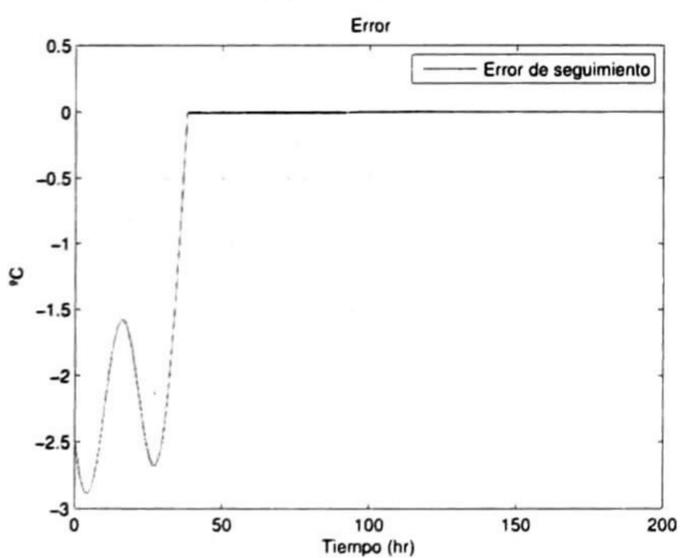
(b) Sustrato



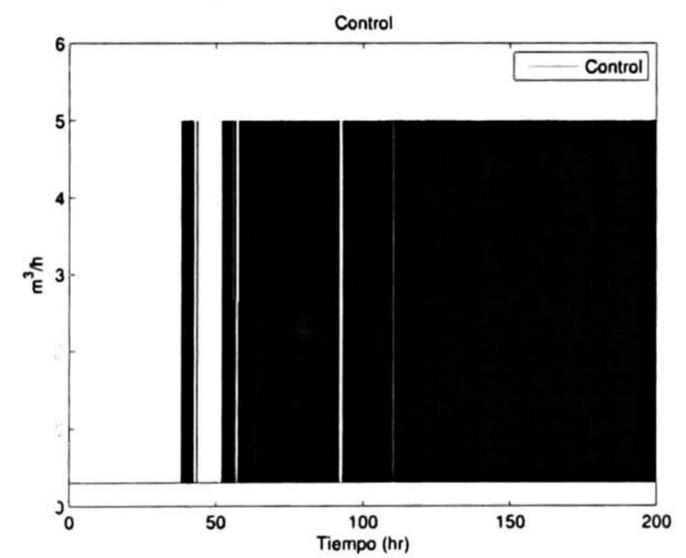
(c) Oxígeno



(d) Temperatura

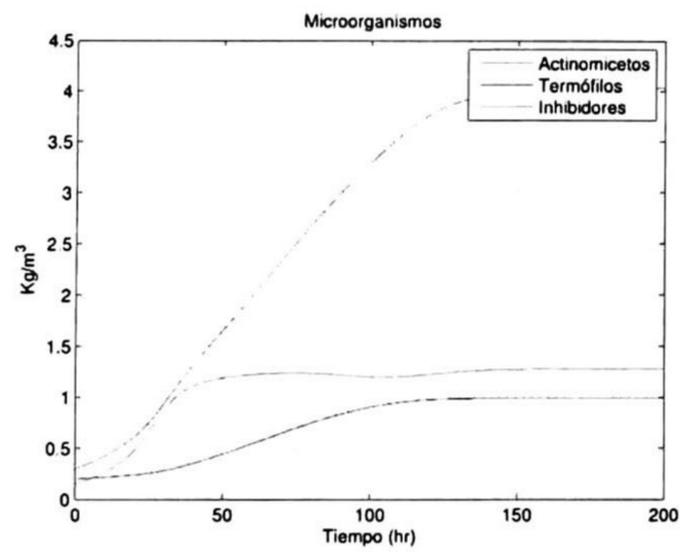


(e) Error

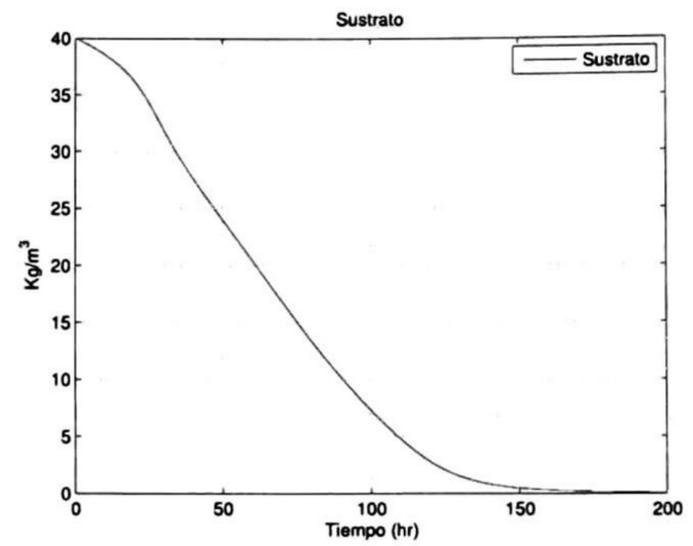


(f) Señal de Control

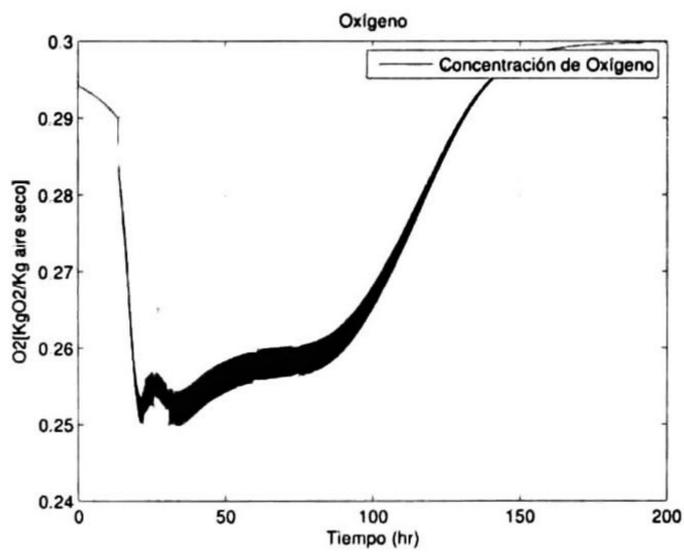
Figura 4.6: Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 25C$.



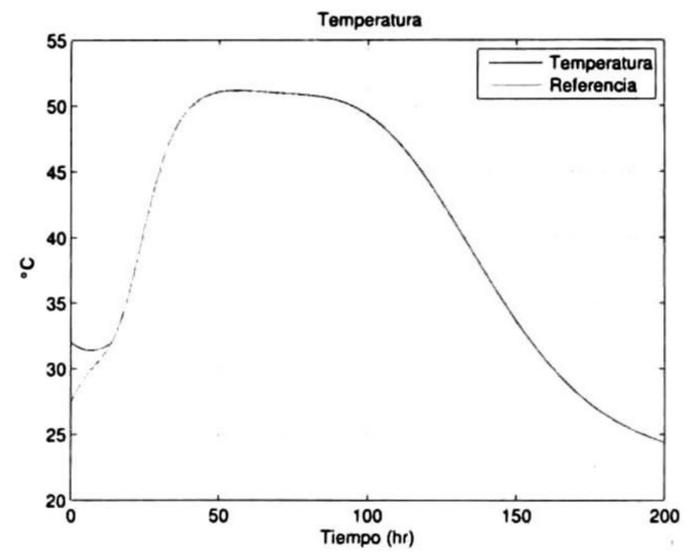
(a) Microorganismos



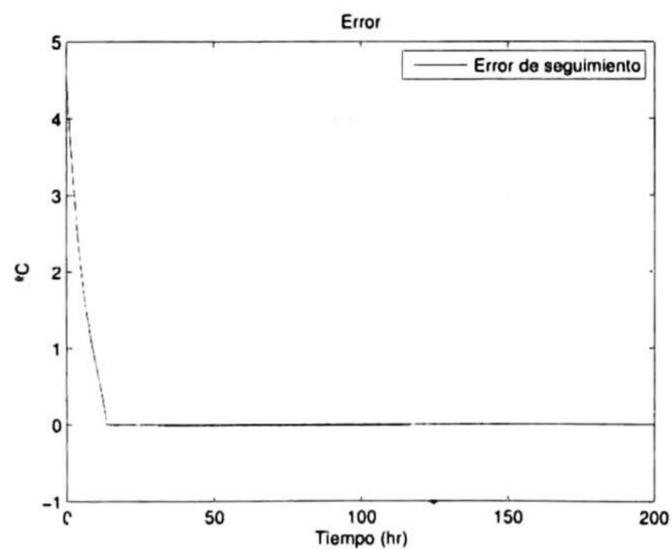
(b) Sustrato



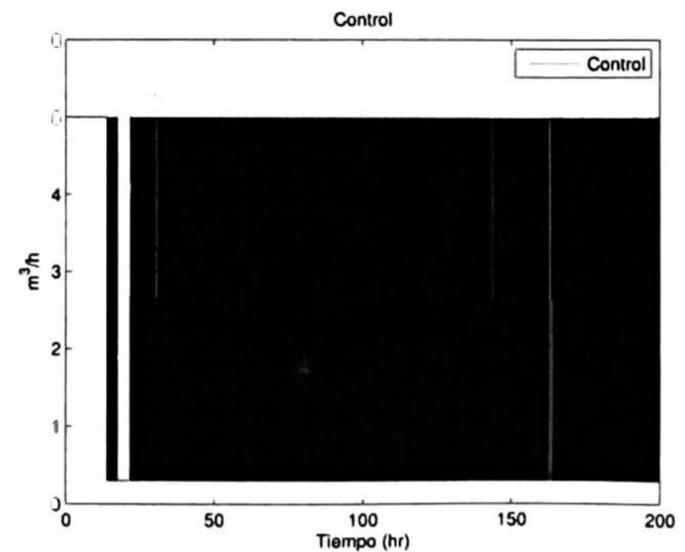
(c) Oxígeno



(d) Temperatura



(e) Error



(f) Señal de Control

Figura 4.7: Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 32^{\circ}\text{C}$.

Fig. 4.9c evitando así las dinámicas que por su naturaleza implica el usar modos deslizantes.

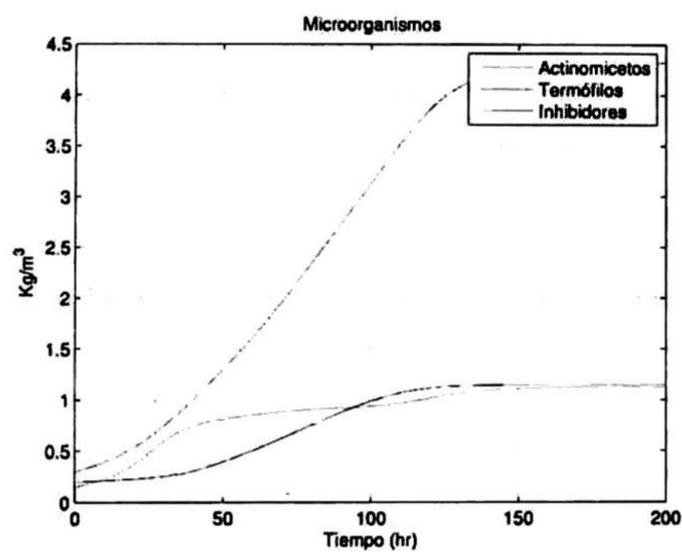
Así el algoritmo Super Twisting reúne las ventajas individuales de cada una de las técnicas antes mencionadas, da como resultado una señal continua (entrada-salida) y es robusta ante variaciones bruscas de la planta (modos deslizantes).

4.6.4. Resultados para Control Entrada-Salida ante Variaciones Paramétricas del Modelo

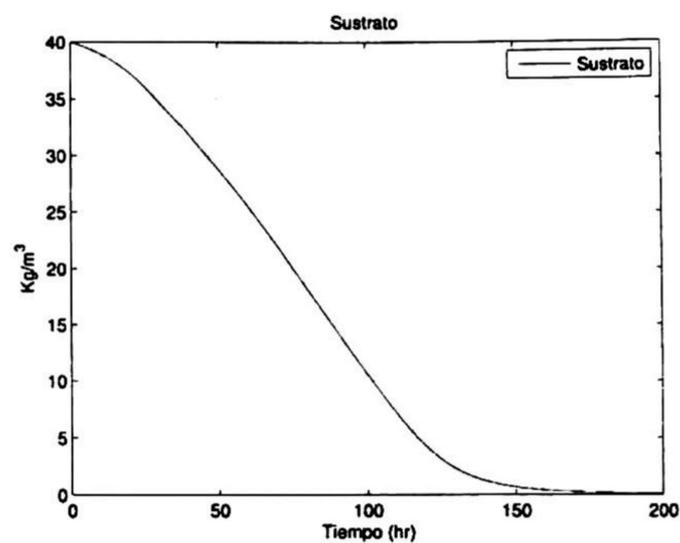
Los resultados obtenidos ante la variación de parámetros se presentan a continuación, probando la robustez del controlador diseñado. Para esto, el control fue sintetizado a partir de una planta donde los parámetros se modificaron un 20 %, aplicando el resultado obtenido a la planta original.

Los errores al cambiar los parámetros de la planta se volvieron mas grandes Fig. 4.10e y Fig. 4.11e, debido a que este controlador no es capaz de rechazar incertidumbres paramétricas, de modo que difícilmente sería apto para ser implementado en el reactor real, ya que los parámetros del sistema no pueden ser modelados con gran exactitud considerando que se cuenta con procesos biológicos y químicos.

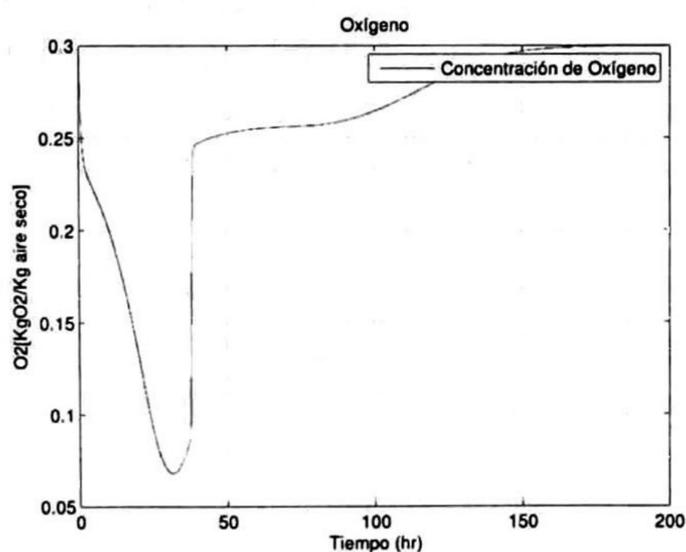
El motivo por el cual el error no es más grande es gracias a las propiedades de que la planta, ya que cuenta con una base tiempo relativamente grande (horas), pero en consecuencia limita a la acción de control a contar con poca capacidad de generar un cambio fuerte en el sistema en un corto tiempo. Por esta razón se debe elegir un control que sea robusto ante incertidumbres y que pueda responder lo más rápidamente en la corrección de errores.



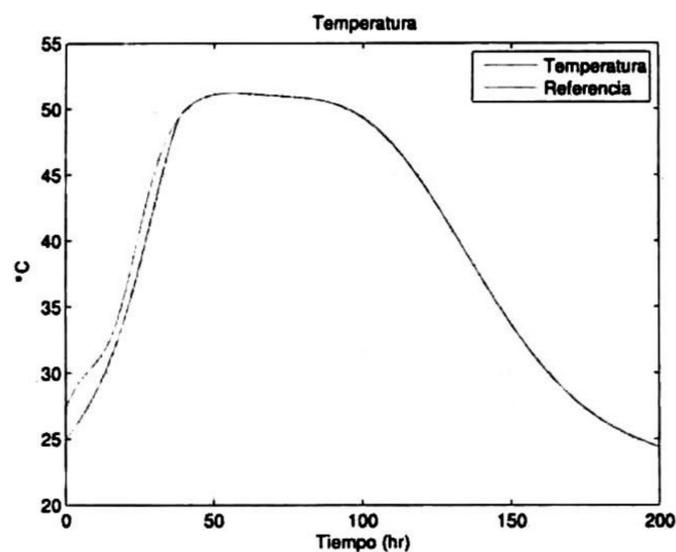
(a) Microorganismos



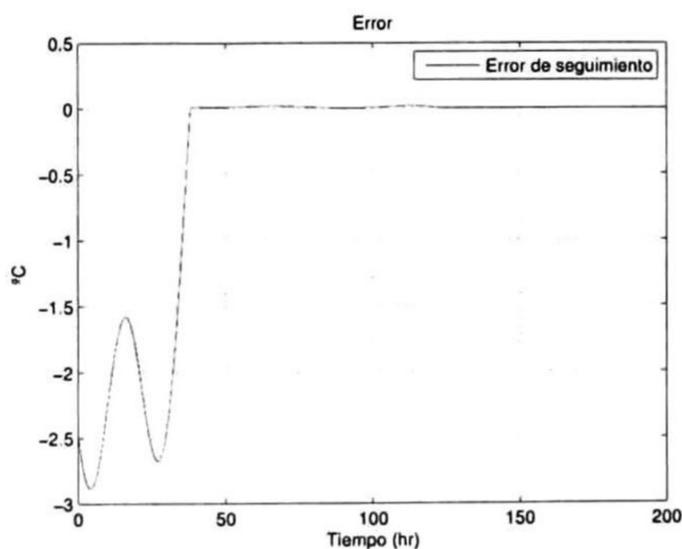
(b) Sustrato



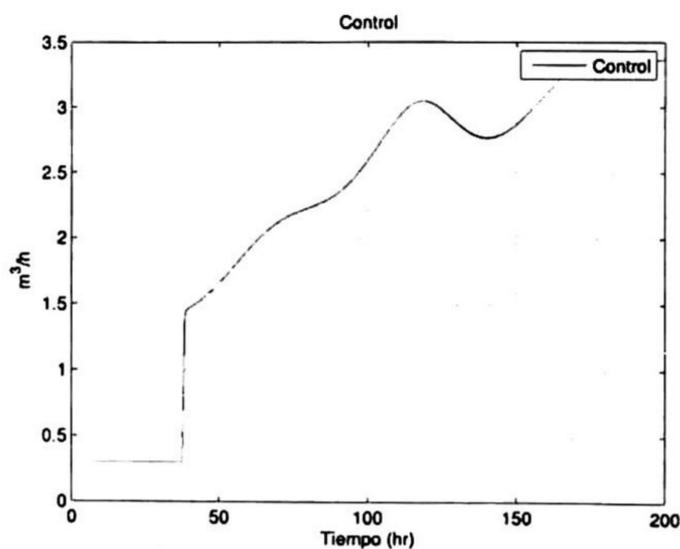
(c) Oxígeno



(d) Temperatura

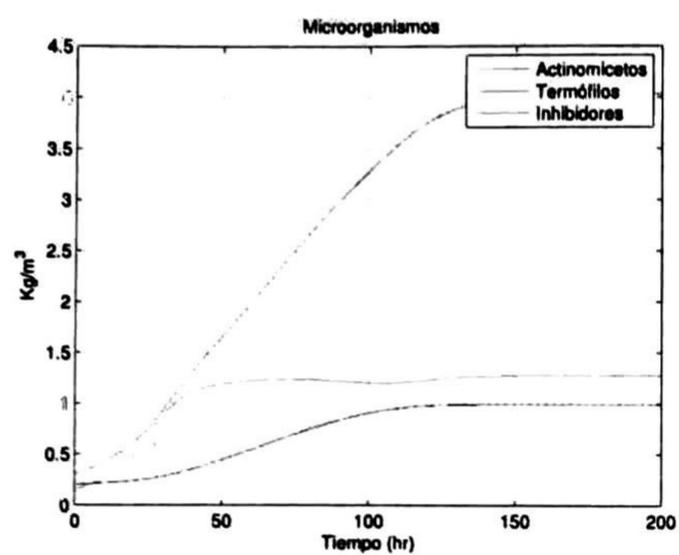


(e) Error

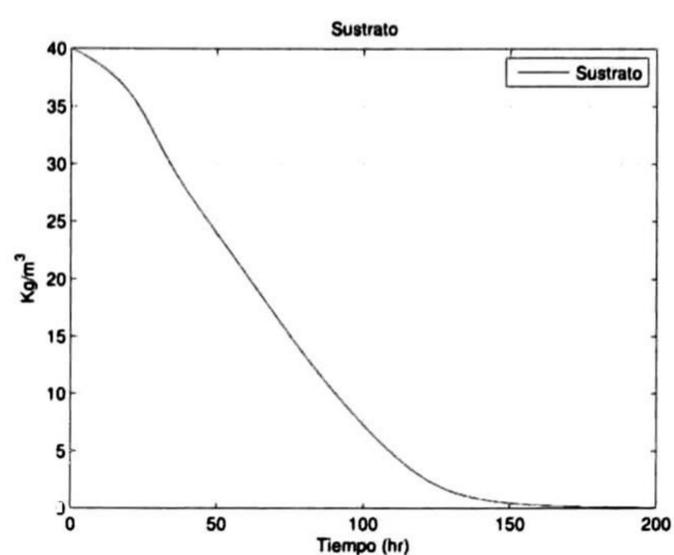


(f) Señal de Control

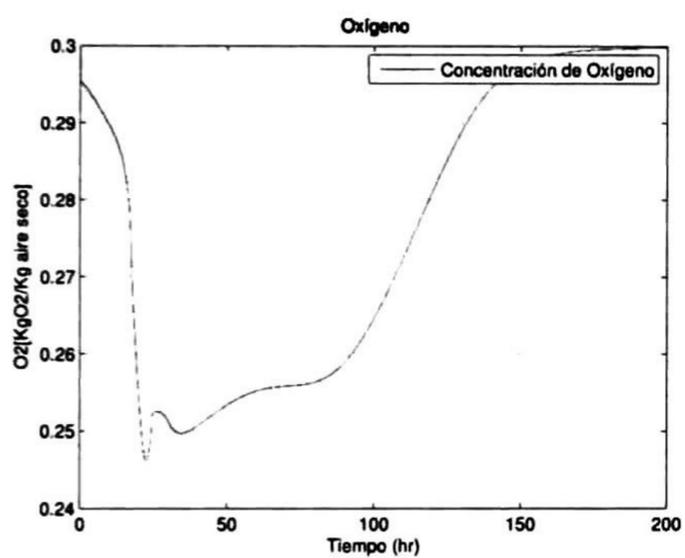
Figura 4.8: Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 25C$.



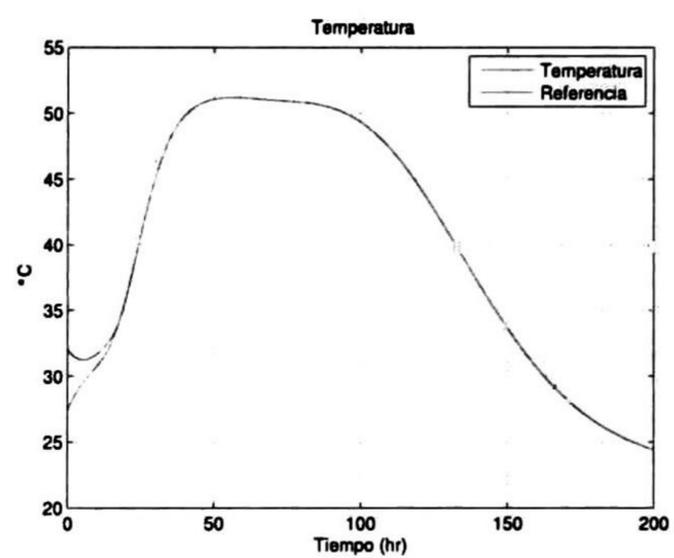
(a) Microorganismos



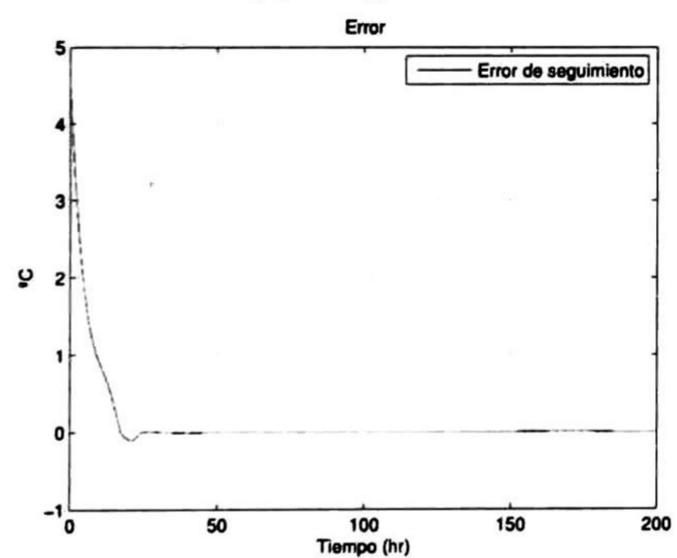
(b) Sustrato



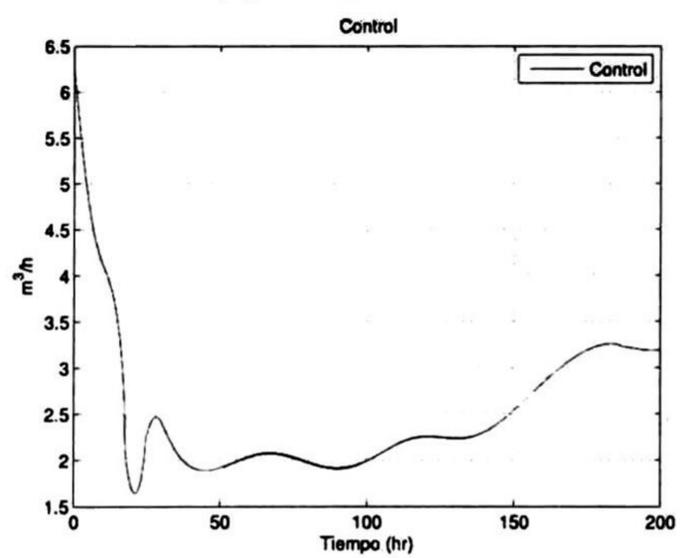
(c) Oxígeno



(d) Temperatura

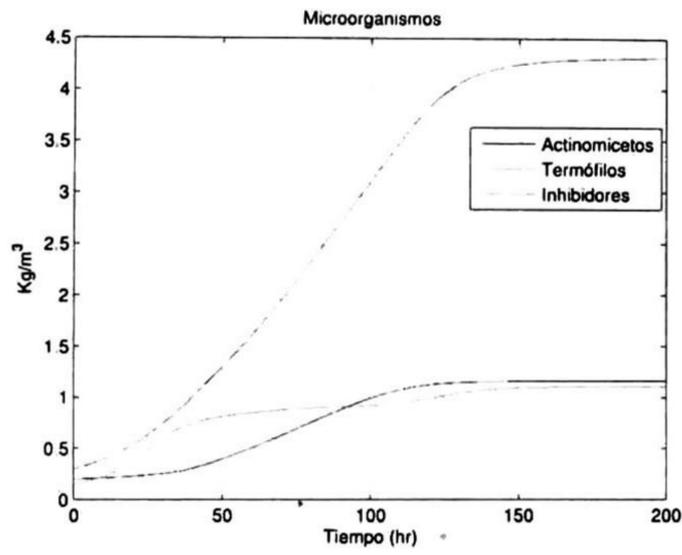


(e) Error

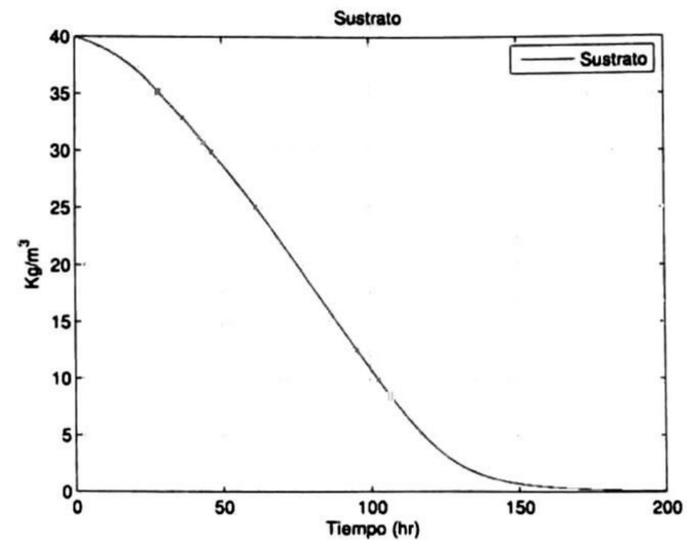


(f) Señal de Control

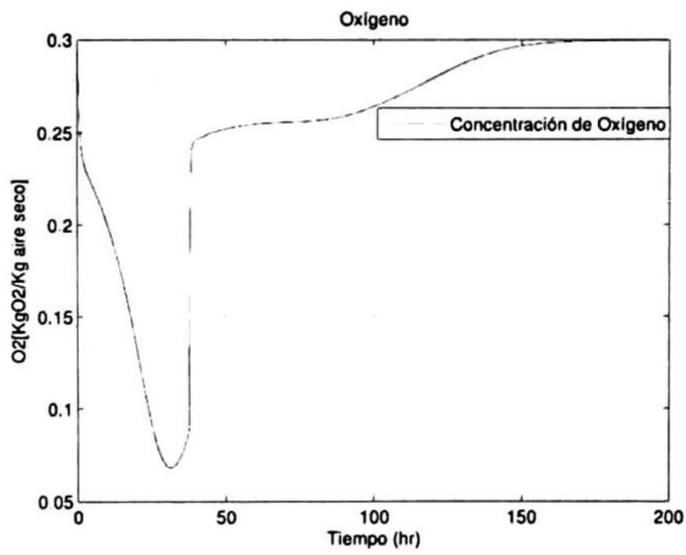
Figura 4.9: Gráficas correspondientes a condición inicial de $x_6 = 32C$.



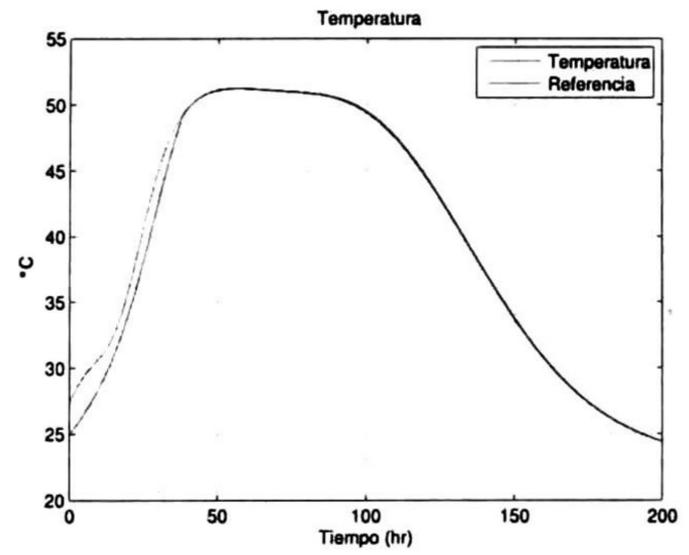
(a) Microorganismos



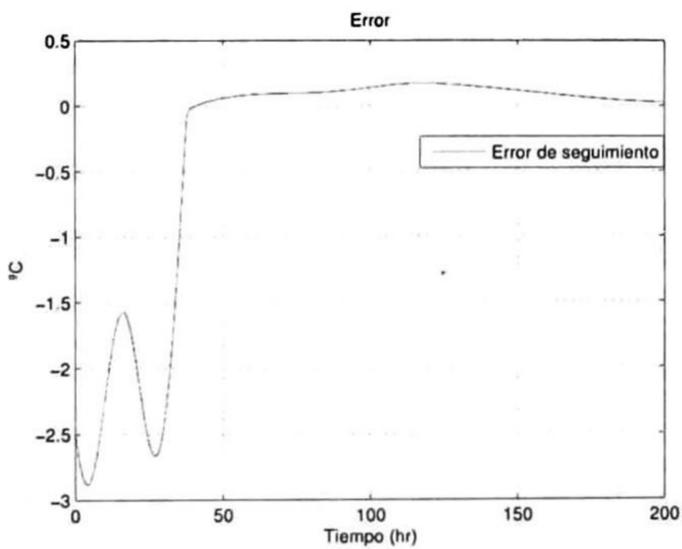
(b) Sustrato



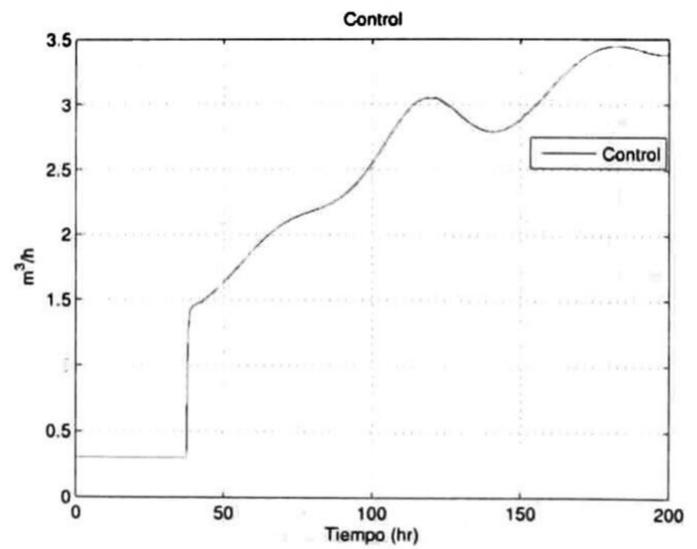
(c) Oxígeno



(d) Temperatura

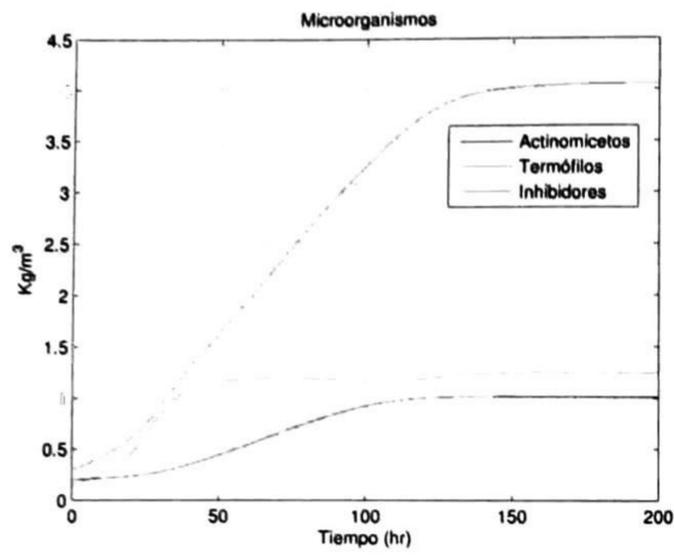


(e) Error

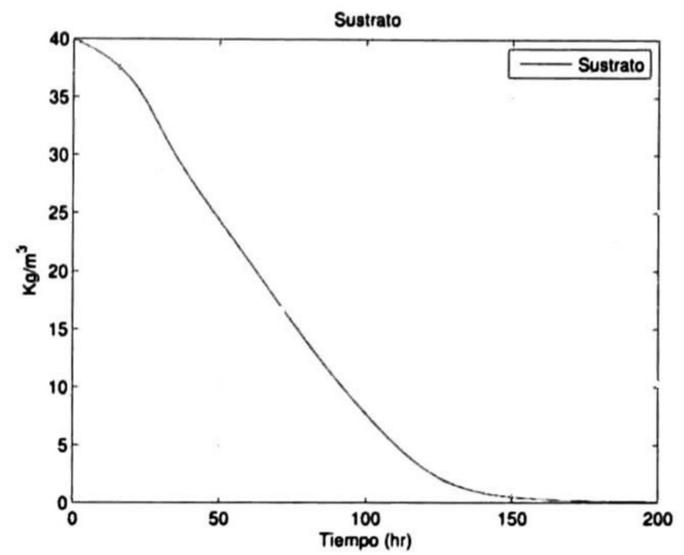


(f) Señal de Control

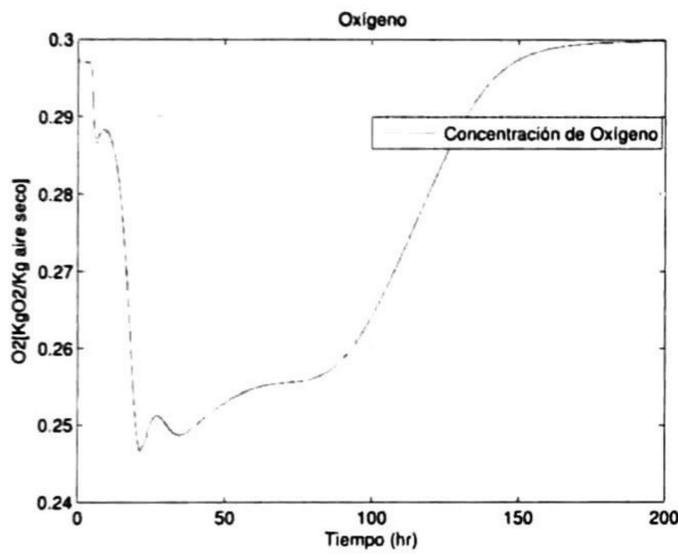
Figura 4.10: Gráficas correspondientes a variación de parametros (20% $f_9(x)$) $x_6(0) = 25^\circ\text{C}$.



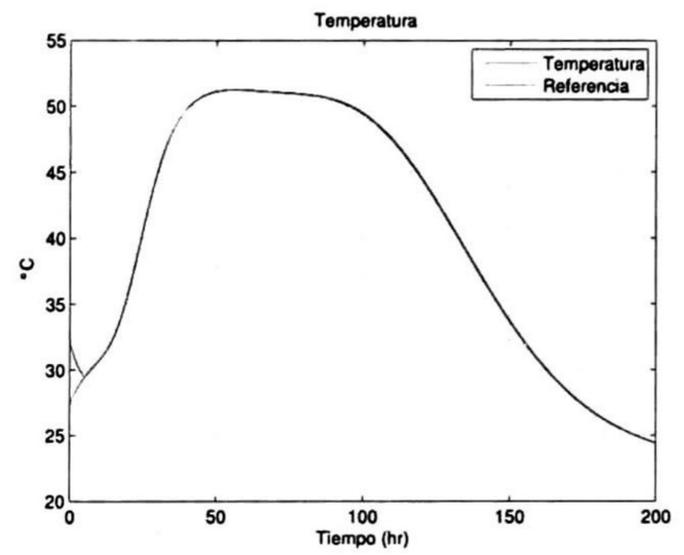
(a) Microorganismos



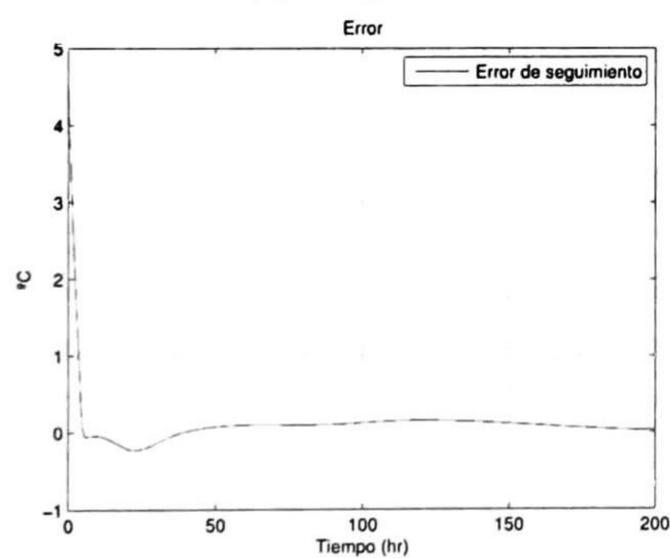
(b) Sustrato



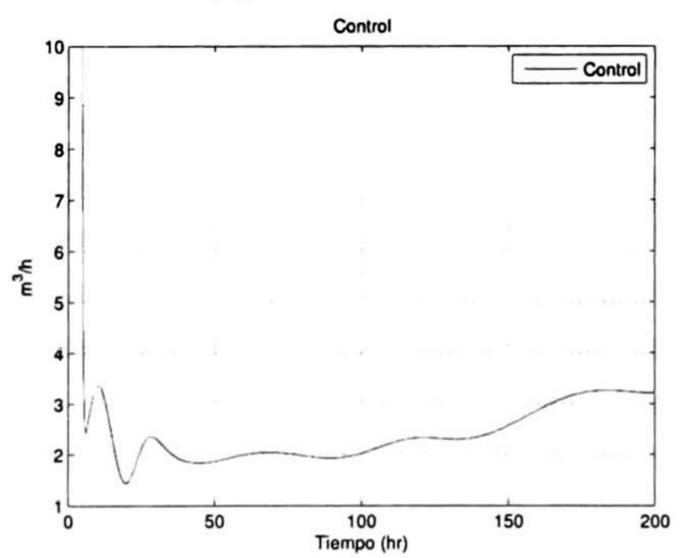
(c) Oxígeno



(d) Temperatura



(e) Error



(f) Señal de Control

Figura 4.11: Gráficas correspondientes a variación de parámetros (20% $f_9(x)$) $x_6(0) = 32^\circ C$.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

5.1. Conclusiones

El modelo matemático con el que se trabajó en esta tesis fue estudiado minuciosamente, ya que presentó comportamientos patógenos en algunas variables de estado, las cuales, no generaban ningún cambio directo en el intercambio de masa (microorganismos), por esta razón se optó por eliminarlas y trabajar con un sistema reducido de 6 variables de estado que nos describe de igual manera el comportamiento del reactor.

Se diseñaron tres diferentes leyes de control para el reactor de fermentación (entrada-salida, modos deslizantes y Super Twisting), presentando todas éstas un buen desempeño ante diferentes condiciones iniciales de x_6 . Se presentaron similitudes en el desempeño debido a que las ecuaciones que componen este reactor tienen la particularidad de cambiar muy lentamente, permitiendo a la variable de control tomar una acción correctiva relativamente rápida ante cambios del error.

Al probar robustes ante variaciones paramétricas se puede juzgar en la Fig. 4.10e y Fig. 4.11e que el error de seguimiento de trayectoria es de aproximadamente $.2^{\circ}\text{C}$, esto también debido a la naturaleza misma de la planta, ya que el proceso se desarrolla muy lentamente. Aunque se puede creer que es un error es muy pequeño, hay que tomar en cuenta que el modelo matemático es una idealización de los fenómenos químicos y biológicos del reactor, no sabiendo a ciencia cierta las condiciones que se pueden presentar a lo largo de la reacción. Por lo tanto no es factible implementar en tiempo real un esquema de control basado en los parámetros del modelo matemático. Aquí no se tomó en cuenta las técnicas de control basadas en modos deslizantes y Super Twisting gracias a que éstas no toman en cuenta los parámetros de la planta, estos se basan solo en la diferencia que existe entre la variable a controlar y la referencia, y a partir de esto sintetizar el cálculo de la señal de control.

Hasta aquí los resultados obtenidos por medio de la simulación de las tres técnicas de control son muy parecidos, siendo Super Twisting la que reúne las ventajas principales del control entrada-salida (ley de control suave) y modos deslizantes (no toma en cuenta los parámetros de la planta para sintetizar un ley de control y es robusto ante incertidumbres paramétricas) y como consecuencia lógica un mejor desempeño a variaciones de variaciones paramétricas y diferentes condiciones iniciales de temperatura, siendo la opción más viable para implementar en el reactor.

5.2. Trabajo Futuro

Los resultados de las leyes de control que se obtuvieron en esta tesis se pueden aplicar directamente en el reactor experimental, esto para comparar los comportamientos de la planta en simulación contra la planta real y así corregir y mejorar el modelo matemático con el que se cuenta. Es posible también hacer un nuevo planteamiento de las variables que fueron eliminadas del modelo, ya que al ser planteadas correctamente estas pueden ser generar información muy valiosa para la reacción.

Un observador puede ser diseñado para estimar las variables del reactor, considerando que solo unas cuantas variables pueden obtenerse a un costo monetario razonable y otras a un altísimo costo monetario. Por otro lado un observador ayudaría en el uso de otras técnicas de control como regulación u otras técnicas que se basen en el conocimiento de las variables de estado para seguir probando nuevas de control en la planta.

Apéndice A

Apéndice

Parámetro	Significado	Valor/Ecuación	Unidades
A	Antoine A	23.50	
B	Antoine B	4030	
C	Antoine C	235	
D	presión atmosférica	$1.013 \cdot 10^5$	<i>Pa</i>
E	coeficiente de viscosidad	$-3.9714 \cdot 10^{15}$	$kg \cdot m^{-2} \cdot h^{-1}$
F	coeficiente de viscosidad	$4.8215 \cdot 10^{15}$	$kg \cdot m^{-1} \cdot h^{-1}$
G	gravedad	$1.27 \cdot 10^8$	$m \cdot s^{-2}$
H	coeficiente del Cp	2.90	
I	coeficiente del Cp	0.4948	
J	Cp vapor de agua	1.93	$kJ \cdot kg^{-1}$
K	entalpía de vaporización	2454.3	$kJ \cdot kg^{-1}$
L	1 - tasa de recirculación	0.7	
M	L·volumen del reactor	1.4	m^3

Parámetro	Significado	Valor/Ecuación	Unidades
α	densidad del sólido	2120	$kg \cdot m^{-3}$
β	densidad del líquido	1000	$kg \cdot m^{-3}$
γ_i	rendimiento del sustrato	Y_i	
δ_i	generación de agua	$\left(\frac{Y_{w/s}}{Y} - Y_{w/x}\right)_i$	
ϵ	transferencia de humedad	$\frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{M}$	m^3
ε	relación de masas moleculares	0.6207	
ζ_i	generación de calor	$\left(-\frac{\Delta H_s}{Y} - \Delta H_x\right)_i$	$kJ \cdot kg^{-1}$
η	transferencia de calor composta-aire	$\frac{\alpha}{M}$	$kg \cdot m^{-6}$
θ	transferencia calor al exterior	66.5826	$kJ \cdot m^{-3} \cdot h^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$
ϑ_i	consumo de oxígeno	$\left(\frac{Y_{O/s}}{Y} - Y_{O/x}\right)_i$	

Constantes cinéticas:

Parámetro	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
a_1	$4.3109 \cdot 10^9$	$2.2762 \cdot 10^9$	$1.2952 \cdot 10^9$
a_2	$1.0556 \cdot 10^{-35}$	$1.0556 \cdot 10^{-35}$	$1.0556 \cdot 10^{-35}$
a_d	$9.6562 \cdot 10^{18}$	$9.6962 \cdot 10^{18}$	$1.0 \cdot 10^{19}$
b_1	$7.379 \cdot 10^4$	$7.379 \cdot 10^4$	$7.379 \cdot 10^4$
b_2	$2.601 \cdot 10^4$	$2.601 \cdot 10^4$	$2.601 \cdot 10^4$
b_d	$1.59 \cdot 10^4$	$1.58 \cdot 10^4$	$1.57 \cdot 10^4$
K_S	86	57	75
K_O	0.042	0.045	0.063
Y	0.18	0.18	0.18
$Y_{W/S}$	0.2103	0.2103	0.2103
$Y_{W/X}$	0.2103	0.2103	0.2103
$Y_{O/S}$	1.37	1.37	1.37
$Y_{O/X}$	1.42	1.42	1.42
ΔH_s	-25316.0673	-27702.9479	-26674.5488
ΔH_x	25316.0673	27702.9479	26674.5488

Datos del apéndice.

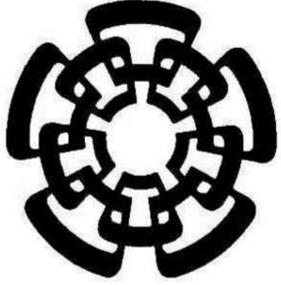
Fin del Apéndice

Bibliografía

- [1] C. Larroche A. Pandey, C.R. Soccol. Current developments in solid-state fermentation. *Springer Science/Asiatech Publishers*, pages 13–25, 2007.
- [2] C.R. Soccol A. Pandey. Economic utilization of crop residues for value addition a futuristic approach. *J. Sci. Ind. Res.*, 59:12–22, 2000.
- [3] L. M. de La Torre C. Gonzalez-Figueroa and A. Sanchez. Dynamic modelling and experimental validation of a solid state fermentation reactor. In *In 11th Symposium on Computer Applications in Biotechnology CAB2010*, 2010.
- [4] O. Ayala Campos. Sistema ode 11 no-isotérmico para modelar un reactor de fermentación sólido. Technical report, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I.P.N. Unidad Guadalajara. México, 2010., 2011.
- [5] N. Krieger D.A. Mitchell, O.F. von Meien. Recent developments in modeling of solid-state fermentation: heat and mass transfer in bioreactors. *Biochem. Eng.*, 13:137–147, 2002.
- [6] Nadia Krieger David A. Mitchell, Marin Berovic. Biochemical engineering aspects of solid state bioprocessing. *Advances in Biochemical Engineering*, 68, 2000.
- [7] Nasia Krieger Farah Diba H. Dalsenter David A. mitchell, Oscar F. von meien. A review of recent developments in modeling of microbial growth kinetics and intraparticle phenomena in solid-state fermentation. *Biochemical Engineering Journal*, 17:15–26, 2004.
- [8] C. Noe Aguilar J. de Jesús Romero-Gómez G. Díaz-Godínez C. Augur G. Viniegra-González, E. Favela-Torres. Advantages of fungal enzyme production in solid state over liquid fermentation systems,. *Biochemical Engineering Journal*, 13:157–167, 2003.
- [9] C. González and L.M. De la Torre. Modelo matemático para un proceso de fss experimental. Technical report, Cinvestav Unidad Guadalajara, 2009.

- [10] F.-C. Hsieh S.-S. Kao C. Hsieh I.-L. Shih, C.-Y. Kuo. Use of surface response methodology to optimize culture conditions for iturin a production by bacillus subtilis in solid-state fermentation,. *Chin. Inst. Chem. Eng.*, 39:635–643, 2008.
- [11] Oscar F. von Meien-Luiz F.L. Luz Jr J. Ricardo Pérez-Correa, Mario Fernández and David A. Mitchel. *Application of Automatic Control Strategies to SSF Bioreactors*, chapter 28, pages 387–402.
- [12] R.R. Singhanía. J.A. Rodríguez León, C.R. Soccol. Current developments in solid-state fermentation. *Asiatech Publishers*, 2001.
- [13] Khalil. *nonlinear control systems*. prentice Hall, Uppler saddle river, 1996.
- [14] Joel Gurubel K.J. Control optimo de un reactor de fermentacion en sustrato solido. Master's thesis, Centro de Investigacion y Estudios Avanzados del I.P.N, Unidad Guadalajara,, 2009.
- [15] David A. Mitchell Lilik Ikasari. Two-phase model of the kinetics of growth of rhizopus oligosporus in membrane culture. *Biotechnology and Bioengineering*, 68, 2000.
- [16] K. S. M. S. Raghava Rao N. G. Karanth M. K. Gowthaman, N. P. Ghildyal. Interaction of transport resistances with biochemical reaction in packed bed solid state fermenters: The effect of gaseous concentration gradients. *Journal of Chemical Technology and Biotechnology*, 56, 2007.
- [17] J. A. Moreno and M. Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [18] David A. Mitchell Mokhtar Miranzadeha Ramin Bozorgmehri Aliakbar Safekordi Mor-teza Khanahmadia, Reza Roostaazad. Bed moisture estimation by monitoring of air stream temperature rise in packed bed solid state fermentation. *Chemical Engineering Science*, 61:5654–5663, 2006.
- [19] Bakker MS Rinzema A. Nagel FJ, Tramper J. Model for on-line moisture-content control during solid-state fermentation. *Biotechnol Bioeng.*, 72, 2001.
- [20] Ashok Pandey. Solid-state fermentation. *Biochemical Engineering Journal*, 13:81–84, 2003.
- [21] Carlos R. Soccol Ashok Pandey Reeta Rani Singhanía, Anil kumar pater. Recent advances in solid-state fermentation. *Biochemical Engineering Journal*, 44:13–18, 2009.
- [22] A. Pandey R.K. Sukumaran, R.R. Singhanía. Microbial cellulases production, applications and challenges. *J. Sci. Ind. Res.*, 64:832–844, 2005.

- [23] A. Pandey R.P. John, K.M.Nampoothiri. Solid state fermentation for l lactic acid production from agro wastes using lactobacillus delbrueckii. *Process Biochem.*, 41:759763, 2006.
- [24] A. Pandey R.R. Singhania, C.R. Soccol. Application of tropical agroindustrial residues as substrates for solid-state fermentation processes,. *Springer Science/Asiatech Publishers*, pages 412–442, 2007.
- [25] B.C.V. Neves L.F. Senna S. Couri, E.P Merces. Digital image processing as a tool to monitor biomass growth in aspergillus niger 3t5b8 solid-state fermentation. *Journal of Microscopy*, 224:290–297, 2006.
- [26] H. Seki. A new deterministic model for forced-aeration composting processes with batch operation. *American Society of Agricultural Engineers*, 45:1239 1250, 2002.
- [27] J. Lenz U. Hlker, M. Hfer. Biotechnological advantages of laboratory-scale solid-state fermentation with fungi,. *Microbiol. Biotechnol.*, 64:175–186, 2004.
- [28] Jurgen Guldner Vadim Utkin and Jingxin Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, 1999.
- [29] A. Rinzemab Z. Hamidi-Esfahania, S.A. Shojaosadatia. Modelling of simultaneous effect of moisture and temperature on a. niger growth in solid state fermentation. *Biochemical Engineering Journal*, 21:265272, 2004.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.
UNIDAD GUADALAJARA**

"2011, Año del Turismo en México"

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Estudio del Comportamiento Dinámico de Un Reactor de Fermentación
en Estado Sólido

del (la) C.

Oscar Javier AROCHE TIRADO

el día 17 de Junio de 2011.

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Carlos González Figueredo
Profesor Titular
Instituto Tecnológico de Estudios
Superiores de Occidente



CINVESTAV - IPN
Biblioteca Central



SSIT0010376